CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ZEHNTEN BANDES ERSTE ABTEILUNG

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG
1917.

CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

BAND X 1.

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ZEHNTEN BANDES ERSTE ABTEILUNG.

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN.

IN KOMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1917.

KLEINERE VERÖFFENTLICHUNGEN.

[ZUR KREISTHEILUNG.]

Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung Nr. 66, 1. Juni 1796, S. 554.

III. · NEUE ENTDECKUNGEN.

Es ist jedem Anfänger der Geometrie bekannt, dass verschiedene ordentliche Vielecke, namentlich das Dreyeck, Fünfeck, Fünfzehneck, und die, welche durch wiederholte Verdoppelung der Seitenzahl eines derselben entstehen, sich geometrisch construiren lassen. So weit war man schon zu EUKLIDS Zeit, und es scheint, man habe sich seitdem allgemein überredet, dass das Gebiet der Elementargeometrie sich nicht weiter erstrecke: wenigstens kenne ich keinen geglückten Versuch, ihre Grenzen auf dieser Seite zu erweitern.

Desto mehr, dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, dass *ausser jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z. B. das Siebzehneck, einer geometrischen Construction fähig ist.* Diese Entdeckung ist eigentlich nur ein Corollarium einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von grösserm Umfange, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung erhalten hat, dem Publicum vorgelegt werden.

C. F. GAUSS, a. Braunschweig.
Stud. der Mathematik zu Göttingen.

Es verdient angemerkt zu werden, dass Hr. GAUSS jetzt in seinem 18ten Jahre steht, und sich hier in Braunschweig mit eben so glücklichem Erfolge der Philosophie und der classischen Litteratur als der höheren Mathematik gewidmet hat.

Den 18. April 96

E. A. W. ZIMMERMANN, Prof.

BEMERKUNG ZU DER VORSTEHENDEN NOTIZ.

Diese Ankündigung der Entdeckung der geometrischen Konstruierbarkeit des regelmäßigen Siebzehnecks ist die erste Veröffentlichung von GAUSS. SARTORIUS V. WALTERSHAUSEN bemerkt*): »Diese Entdeckung, welche er bis zum Ende seines Lebens sehr hoch schätzte, ist es vornehmlich gewesen, welche seinem Leben eine bestimmte Richtung gegebe nhat, denn von jenem Tage an war er fest entschlossen nur der Mathematik sein Leben zu widmen«. Vergl. die erste Eintragung des Tagebuchs vom 30. März 1796. Im ersten Satze des Textes heißt es in der ursprünglichen Veröffentlichung »Viereck« statt »Fünfeck«; vergl. jedoch Werke II, S. 186, Zeile 15 v. u. Im Vorwort zu den *Disqu. Arithm.* (Werke I, S. 6) gedenkt GAUSS dieser Anzeige mit den Worten: »Propositum huius operis, ad quod edendum iam annos abhinc quinque publice fidem dederam, ...«

SCHLESINGER.

---

*) GAUSS zum Gedächtnis, Leipzig 1856, S. 16.

VORREDE.

Lehrbuch der Astronomie von JOSEPH PIAZZI.
Aus dem Italienischen übersetzt von JOHANN HEINRICH WESTPHAL.
Berlin bei G. Reimer 1822.

Das Original dieses Werks ist im Jahr 1817 unter dem Titel Lezioni elementari di astronomia ad usu del real osservatorio di Palermo in zwei Bänden zu Palermo erschienen, und war zunächst für die astronomischen Vorlesungen bestimmt, welche der Verf. zu halten hatte. Obgleich wir an elementarischen Schriften über Astronomie keinen Mangel haben, und einige darunter in ihrer Art vortrefflich sind, so wird man doch, bei der Verschiedenheit der Vorkenntnisse und Absichten der Leser, das Hinzukommen einer neuen nicht für überflüssig halten, zumal von einem Verfasser, der sich um mehrere Theile der Wissenschaft so hohe Verdienste erworben hat. Ich zweifle daher nicht, dass die Übertragung dieses Werks in unsere Sprache, durch einen Gelehrten, der seine gründlichen Einsichten bereits durch eigene Arbeiten erprobt hat, allen Freunden der Astronomie willkommen sein werde, die entweder durch die Sprache, oder durch die Schwierigkeit, sich italienische Werke zu verschaffen, abgehalten werden das Original zu lesen. Hin und wieder hat der Herr Übersetzer in kleinen Einschaltungen einiges hinzugesetzt, was dem Verfasser bei der Herausgabe des Originals noch nicht bekannt sein konnte, und der letzte Abschnitt, die Berechnung der Cometenbahnen betreffend, rührt von jenem allein her, welcher den Lesern einen Dienst zu erzeigen glaubte, wenn er die OLBERSsche Methode an die Stelle der von dem Verfasser gewählten unvollkommenen indirecten setzte.

Möge diese Arbeit dazu beitragen, die mehr als oberflächliche Befreundung mit einer Wissenschaft zu befördern, die so vielfachen Stoff zu einer edeln und kräftigen Geistesnahrung darbietet.

Göttingen, den 20. October 1821.

C. F. GAUSS.

EINE IN DEUTSCHLAND ERFUNDENE RECHEN-MASCHINE.

DINGLERS *Polytechnisches Journal* Bd. 52 (1834), S. 237, entnommen der Zeitschrift *Le National*, 27. März 1834.

Herr SCHIERECK, Professor der Mathematik zu Frankfurt a. M., hat der französischen Akademie der Wissenschaften eine Dissertation über die Theorie der Zahlen eingeschickt. Dieser Abhandlung ist ein Zeugnis des Herrn GAUSS, des berühmten Geometers zu Göttingen, beigelegt, folgenden Inhalts:

Herr SCHIERECK hat mir ein Modell einer Rechenmaschine gezeigt, welche er zur Ausführung der arithmetischen Operationen erfunden hat. Ich bezeuge mit Vergnügen, dass diese Maschine den beabsichtigten Zweck sehr leicht erreicht, und dass dieses nach den Verbesserungen, welche der Erfinder an ihr zu machen beabsichtigt, noch mehr der Fall sein wird. Diese sinnreiche Erfindung ist umso schätzbarer, weil diese Maschine mit geringen Kosten hergestellt werden kann.

BEMERKUNG.

Die vorstehende Mitteilung hat R. MEHMKE im 48. Bande der Zeitschrift für Mathematik und Physik S. 318 wieder abdrucken lassen. Joseph Friedrich SCHIERECK aus Posen gebürtig, hatte in Göttingen studiert. Über seine Rechenmaschine hat sich nichts näheres feststellen lassen. Er starb im November 1842. Vergl. H. E. SCRIBA, Biographisch-literarisches Lexikon der Schriftsteller des Großherzogtums Hessen im 19. Jahrhundert; 2. Abteilung, S. 638 ff.

SCHLESINGER.

VORWORT.

Gesammelte Abhandlungen von G. EISENSTEIN, Berlin 1848, S. 1, 2.

Die zuerst in den verschiedenen Bänden von CRELLE's Journal für Mathematik erschienenen und hier gesammelten Aufsätze bewegen sich, theils in der Höheren Arithmetik, theils in der Theorie der über Logarithmen und Kreisgrössen hinaus liegenden transcendenten Functionen, theils in der Verknüpfung dieser beiden grossen Gebiete, die zu den schönsten und fruchtbarsten im ganzen Umfange der Mathematik gehören. Die Höhere Arithmetik bietet einen unerschöpflichen Reichthum an interessanten Wahrheiten dar, und zwar an solchen, die nicht vereinzelt, sondern in innigem Zusammenhange stehen und immer neue, ja unerwartete Verknüpfungen erkennen lassen, je weiter die Wissenschaft sich ausbildet. Ein grosser Theil ihrer Lehren gewinnt auch einen neuen Reiz durch die Eigenthümlichkeit, dass gewichtige Lehrsätze in einfach ausgeprägtem Inhalt uns leicht durch Induction zugeführt werden, deren Begründung doch so tief liegt, dass man erst nach vielen vergeblichen Versuchen dazu gelangt, und dann meistens erst auf beschwerlichen künstlichen Wegen, während die einfacheren Methoden lange verborgen bleiben. Auch auf dem Felde der transcendenten Functionen fehlt es nicht an ähnlichen Reizen und ähnlichen Erscheinungen.

Von den eigenthümlichen Schönheiten dieser Gebiete haben Alle sich angezogen gefühlt, die darin beschäftigt gewesen sind: keiner aber hat es wohl so oft ausgesprochen wie EULER, der namentlich in fast allen seinen zahlreichen, zur Höheren Arithmetik gehörenden Aufsätzen die Erklärung wiederholt, wie viele Freude ihm diese Forschungen machen, und wie sehr er darin eine Erholung von und eine Stärkung zu andern der unmittelbaren practischen Anwendung näher liegenden Arbeiten finde. Mit eben so grosser Lebhaftigkeit spricht er seine Überraschung aus, als zu seiner Kenntnis gekommen war, dass seine eigene Auflösung eines die transcendenten Functionen betreffenden Fundamental-Problems, mit welchem er sich viele Jahre beschäftigt hatte, an Einfachheit weit überboten sei durch eine neue Auflösung desselben Problems von LAGRANGE. »Penitus obstupui«, (sagt er Acta Acad. Petrop. T. 3.) »quum hoc mihi nunciaretur.«

Die vorliegenden Aufsätze enthalten so viel treffliches und gediegenes, dass durch dieselben dem Verfasser ein ehrenvoller Platz neben seinen Vorgängern gesichert wird, an deren Arbeiten jene sich würdig anschliessen. Ihre Zusammenstellung verpflichtet alle die zum Danke, denen sie dadurch zugänglicher werden.

Göttingen im September 1847.

C. F. GAUSS.

ARITHMETIK.

NACHTRÄGE ZU DEN BÄNDEN I, II UND VIII.

NACHLASS.

EINIGE ASYMPTOTISCHE GESETZE DER ZAHLENTHEORIE.

[I.]

[Handschriftliche Eintragung in dem Buche:] JOHANN CARL SCHULZE, Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer .... Tafeln. I, Berlin 1778; [von GAUSS' Hand] **Gauß. 1791.**

[Auf der Rückseite des letzten Blattes.]

[1.]

Primzahlen unter a $(=\infty)$

$$\frac{a}{la}.$$

[2.]

Zahlen aus zwei Factoren

$$\frac{lla\,.\,a}{la},$$

(wahrsch.) aus 3 Factoren

$$\frac{\frac{1}{2}(lla)^2 a}{la}, \ldots$$

et sic in inf.

[3.]

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{x}=(\text{pro } x \text{ inf.})\ llx+V.$$

V esse Const. suspicor ac prope 1,266...

1796 Mai.

[4.]

Zahlen die keine gleichen F[actoren] haben

$$\frac{a}{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots},$$

die höchstens 2 gl. F. h.

$$\frac{a}{1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots}$$

die höchstens 3 gl. F. h.

$$\frac{a}{1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\cdots},$$

et sic in inf.

[5.]

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdots\frac{x}{x-1}=(x \text{ inf})\ a.lx$$

a Constans ac prope 1,874.

[Auf der Rückseite des hinteren Schutzblattes]

[6.]

Numerus factorum usque ad n

$$(lln+1)n.$$

[II.]

[Handschriftliche Eintragungen bei S. 209 des Buches:]
J. H. Lambert, Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tabellen ...,
Berlin bei Haude & Spener, 1770; [von Gauss' Hand] K. Gauß. 1793.

[1.]

Numerus omnium ex solis factoribus 2, 3, 5, 7 compositorum numerorum infra n est

$$\frac{\frac{1}{24}(ln)^4}{(l2)(l3)(l4)(l5)} \text{ praeter propter.}$$

[2.]

E 2...n Infra m

$$\frac{ln}{lm}m.$$

[III.]

[Aus dem Tagebuch.]

[1.]

Factorum Summae in Infinito $=\frac{\pi\pi}{6}\cdot$Sum[ma] Num[erorum]

[1796] 20. Jun. G[ottingae].

[2.]

Numerus fractionum inaequalium, quarum denominatores certum limitem non superant, ad numerum fractionum omnium, quarum num[eratores] aut denom[inatores] sint diversi infra eundem limitem, in infinito ut $6:\pi\pi$

[1796] Sept. 6.

[Aus den »Exercitationes Mathematicae«.]

[3.]

$$\text{Lim.}\ \frac{\Sigma\ \text{pr. ad } n \text{ infra } n}{nn}$$

(Pr. usque ad $P+30n$) sunt

$$(4-1)(3^2-1)(5^2-1)n = 576n$$

ideo a

$$P\ldots Pn \quad \text{generaliter} \quad \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdots nn.$$

Si $P:n = \infty:1$

adeoque

$$\text{Limes quaesitus} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdots = \frac{3}{\pi\pi} = \frac{3}{9{,}8696} = 0{,}3039+$$

[IV.]

[Aus Scheda Ac, Varia, Nov. 1799, S. 19.]

[1.]

Accipiendo φ ita ut in Disqu. Ar. art. [38], summa seriei

$$1+\frac{\varphi 2}{4}+\frac{\varphi 3}{9}+\frac{\varphi 4}{16}+\cdots+\frac{\varphi n}{nn}$$

exhiberi potest quam proxime per

$$\frac{6}{\pi\pi}\log n+\text{Const.}$$

$$\text{Const.} = 0{,}71 \pm$$

Erit autem

$$\frac{\pi\pi}{6}\,\text{Const.} = 0{,}5772156$$
$$+\tfrac{1}{3}\log 2+\tfrac{1}{8}\log 3+\tfrac{1}{24}\log 5$$

$$\text{pr[aeter] pr[opter]} = 0{,}5772156$$
$$+\,0{,}569974 = \frac{6}{\pi\pi}\left(\tfrac{1}{4}\log 2+\tfrac{1}{3}\log 3+\tfrac{1}{16}\log 4\right)$$
$$1{,}1471896$$

unde Const. $= 0{,}697413$.

[2.]

Ponendo valorem medium mult[itudinis] gen[erum]

$$= \alpha\log N+\beta = M,$$

erit valor medius pro

N	
$8n+0$	$2M-5\alpha\log 2$
1	$M+\frac{3}{2}\alpha\log 2$
2	$M+\frac{1}{2}\alpha\log 2$
3	$\frac{1}{2}M+\frac{3}{4}\alpha\log 2$
4	$M-\frac{1}{2}\alpha\log 2$
5	$M+\frac{3}{2}\alpha\log 2$
6	$M+\frac{1}{2}\alpha\log 2$
7	$\frac{1}{2}M+\frac{3}{4}\alpha\log 2$
$3n+0$	$\frac{3}{2}M-\frac{9}{8}\alpha\log 3$
$3n+1$	$\frac{3}{4}M+\frac{9}{16}\alpha\log 3$
$3n+2$	$\frac{3}{4}M+\frac{9}{16}\alpha\log 3$
$5n+0$	$\frac{5}{3}M-\frac{25}{18}\alpha\log 5$
per 5 non div.	$\frac{5}{6}M+\frac{25}{72}\alpha\log 5$

[3.]

$$\begin{array}{l|lc|l}
 & & \text{med.} & \\
a & & & \\
 & a'' & \text{arithm.} & a, a' \\
a' & & & \\
 & a''' & \text{harm.} & a', a'' \\
a'' & & & \\
 & a^{\mathrm{IV}} & \text{arithm.} & a'', a''' \\
a''' & & & \\
 & & \text{etc.} & \\
\text{etc.} & & &
\end{array}$$

$$a^{\infty} = a + \frac{2}{3}\frac{a'-a}{a'} + \frac{2}{3}\cdot\frac{14}{15}\left(\frac{a'-a}{a'}\right)^2 \cdots$$

$$= a\frac{a'+a}{2a}\cdot\frac{7a'+a}{6a'+2a}\cdot\frac{31a'+a}{30a'+2a}.$$

[Aus Scheda Ae, Varia, Julius 1800, S. 39.]

[4.]

Sit pro numero

$$a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta} \ldots = M,$$

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots = \varphi M,$$

erit

$$\Sigma\varphi M \text{ quam proxime } M(\log M + 0{,}15443) + ?$$

BEMERKUNGEN ZU DEN ASYMPTOTISCHEN GESETZEN DER ZAHLENTHEORIE.

Im Vorstehenden sind diejenigen Aufzeichnungen aus dem Nachlaß zusammengestellt, die sich auf »asymptotische Gesetze« und auf sogenannte »mittlere Werte« der Zahlentheorie beziehen. Die unter [III] [1] und [2] wiedergegebenen Aufzeichnungen gehören dem an anderer Stelle dieses Bandes vollständig abgedruckten »*Tagebuch*« an, die unter [III] [3] wiedergegebene Notiz den gleichfalls weiter unten abgedruckten »*Exercitationes mathematicae*« (1796). Sie sollen aber wegen des sachlichen Zusammenhangs hier zusammen mit den übrigen erläutert werden *).

---

*) Die folgenden Bemerkungen sind mit Benutzung der im IX. Bericht über den Stand der Herausgabe von GAUSS' Werken (Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche

Den Beweis des Satzes [I] [1], wonach die Anzahl der unter a liegenden Primzahlen asymptotisch durch $\frac{a}{\log a}$ dargestellt wird, haben J. HADAMARD (Bulletin de la Soc. Mathém. **24**, 1896, S. 199) und CH. J. DE LA VALLÉE POUSSIN (Annales de la Societé scientif. de Bruxelles **20**, 2e partie, 1896, S. 360—361) erbracht. Vergl. auch den Werke II, S. 444 ff. abgedruckten Brief von GAUSS an ENCKE.

Der Beweis von [I] [2] ist in einer Arbeit von E. LANDAU (Bulletin de la Soc. Mathém. **28**, 1900, S. 25) enthalten, wo gezeigt wird, daß die Mengen aller Zahlen $\leqq a$, die aus k Primfaktoren zusammengesetzt sind, asymptotisch gleich

$$\frac{1}{(k-1)!}\,\frac{a(\log\log a)^{k-1}}{\log a}$$

ist.

Die in [I] [3] enthaltene Behauptung hat F. MERTENS (CRELLES Journal **78**, 1874, S. 52) unter der Form

$$\sum_{p \text{ Primzahl} \leqq x} \frac{1}{p} = \log\log x + C - \sum_{m=2}^{\infty}\sum_{p}\frac{1}{mp^m} + O\left(\frac{1}{lx}\right)$$

bewiesen, wo C die EULER-MASCHERONIsche Konstante bedeutet. Für die von GAUSS mit V bezeichnete Konstante ergäbe sich hiernach der Wert 1,26149, der von dem von GAUSS vermuteten etwas abweicht.

Die Behauptung [I] [4] hat L. GEGENBAUER (Denkschriften der K. Akademie d. Wiss. Wien **49**, 1885, Abt. 1, S. 47) bewiesen.

Der Beweis von [I] [5] ergibt sich aus der bei [3] genannten Abhandlung von MERTENS (a. a. O. S. 53).

Der Satz [I] [6] ist wohl ein nicht völlig zutreffender Ausspruch der Formel

$$\sum_{p \leqq x}\left[\frac{x}{p}\right] = x.\log\log x + (V-1)x + o(x),$$

die aus den Sätzen [I] [1] und [3] hervorgeht.

In [II] [1] ist $l4$ und $l5$ im Nenner wohl ein Schreibfehler für $l5$ und $l7$, aber selbst dann wäre die Formel nicht ganz zutreffend, da wie GRAM (K. Danske Vid. Selsk. Skr. Ser. 6, Bd. 7, 1890—1894, S. 1) gezeigt hat, der richtige Wert der gemeinten Anzahl asymptotisch gleich

$$\frac{1}{24}\cdot\frac{(\log n)^4}{\log 2.\log 3.\log 5.\log 7}$$

ist.

Die Bedeutung von [II] [2] haben wir nicht ermitteln können.

Die Aussage [III] [1] hat DIRICHLET (Abhandl. der K. preuß. Akad. d. Wissenschaften 1849, Werke **2**, 1897, S. 59) bewiesen. Bezeichnet man nämlich mit DIRICHLET die Summe der Faktoren von n mit $f(n)$, so hat nach GAUSS

Mitteilungen 1911, S. 26 ff.) enthaltenen Ausführungen von P. BACHMANN und E. LANDAU, sowie einiger schriftlichen Mitteilungen von P. BACHMANN abgefaßt worden. Die zu benutzenden Zeichen O und o haben die folgende Bedeutung (vergl. etwa LANDAU, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen I, Leipzig und Berlin 1909, S. 31 und 61): Es seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei für alle reellen Werte von x, von einem gewissen an, erklärte reelle Funktionen, $g(x)$ positiv; dann bedeutet $f(x) = O(g(x))$, daß es zwei Zahlen ξ und A gibt, so daß für $x \geqq \xi$

$$|f(x)| < A\,g(x)$$

ist, und $f(x) = o(g(x))$, daß

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

$$\frac{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)}{\frac{1}{2}n(n+1)}$$

den asymptotischen Wert $\frac{\pi^2}{6}$, was offenbar auf die von DIRICHLET a.a.O. bewiesene Gleichung

$$f(1)+f(2)+\cdots+f(n) = \frac{\pi^2}{12}n^2+O(n\,.\log n)$$

hinauskommt.

Die Aussagen [III] [2] und [3] finden in der von DIRICHLET (a.a.O., S. 60—64) bewiesenen Formel

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\cdots+\varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}n^2+O(n^\delta)$$

ihren Ausdruck, wo $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen nicht größer als n und δ eine zwischen 1 und 2 gelegene Größe bedeutet. In [III] [3] wird der Fall $n = 30$ betrachtet. Es ist für $n = 30$

$$\sum_{m=1}^{30}\varphi(m) = 278.$$

Nun ist aber

$$(4-1)(3^2-1)(5^2-1) = 576 = 2.288,$$

also *angenähert*

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{30}\varphi(m)}{30\,.\,30} = \frac{1}{2}\,\frac{(2^2-1)(3^2-1)(5^2-1)}{2^2\,.\,3^2\,.\,5^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1\,.\,3}{2\,.\,2}\cdot\frac{2\,.\,4}{3\,.\,3}\cdot\frac{4\,.\,6}{5\,.\,5}.$$

Analog ist dann allgemein *angenähert*

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{n}\varphi(m)}{nn} = \frac{1}{2}\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{2}\prod\frac{p-1\,.\,p+1}{pp}.$$

Aus derselben DIRICHLETschen Formel läßt sich auch der in [IV] [1] gegebene asymptotische Ausdruck erschließen.

In [IV] [2] finden wir eine Formel für den Mittelwert der Anzahl der Geschlechter binärer quadratischer Formen der Determinante N, die in den artt. 301—302 der *Disqu. Arithm.* in viel schärferer Fassung auftritt.

Der Beweis von [IV] [4] ergibt sich aus der genannten Abhandlung von DIRICHLET (a.a.O. S. 52—57); die von GAUSS angegebene Konstante stimmt in allen fünf Dezimalen mit dem richtigen Werte $2C-1$ überein, wo C die EULER-MASCHERONIsche Konstante bedeutet.

Man vergleiche auch die Artikel **26** und **27** des in der zweiten Abteilung dieses Bandes abgedruckten Aufsatzes von P. BACHMANN »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[ZUR ENTSTEHUNGSGESCHICHTE DER DISQUISITIONES ARITHMETICAE.]

GAUSS an v. ZIMMERMANN.

Hochwohlgeborner Herr
Verehrenswürdigster Herr Hofrath.

Jeder neue Beweis wie sehr Ew. Hochwohlgeb. jede Gelegenheit ergreifen mir nützlich zu sein vermehrt meine Bewunderung und Verehrung Ihrer Güte und bestärkt mich in dem Bestreben mich ihrer würdig zu machen welches ich so viele Ursache habe meine heiligste Pflicht sein zu lassen.

Ich fühle es ganz wie schmeichelhaft mir die Ehre ist wozu Ew. Hochwohlg. mir Hoffnung machen. Gott gebe dem edeln Fürsten ein langes Leben und was können sich nicht die Wissenschaften von ihm versprechen, da er schon eine nur wenige interessirende Arbeit seiner Begünstigung nicht unwerth hält; wie sehr wünschte ich eine gemeinnützigere oder glänzendere geben zu können.

Ich lege hier, Ew. Hochwohlg. Verlangen gemäss einen etwas ausführlichen Plan derselben bei; Sie werden daraus sehen dass der Hauptzweck bloss sein kann den Verstand zu üben und neues Licht über Gegenstände zu verbreiten, die die grössten Geometer unsrer Zeit ihrer eifrigsten Untersuchungen gewürdigt haben. Mir scheint EULERS Ausspruch nicht Unrecht zu haben »Semper cuiusquam problematis, quod a summis ingeniis frustra est tentatum, solutio maximi est momenti«. Und eben dieser grosse Mann hat an mehrern Orten geurtheilt dass Untersuchungen dieser Art zur Übung des Scharfsinns noch dienlicher sind als selbst die Geometrie.

Nach meinem Überschlage wird die ganze Schrift gegen 400 Artikel ausmachen wovon im Durchschnitt ungefehr zwei eine gedruckte Quartseite füllen mögte. Daher ich das Ganze etwa auf ein Alphabet schätze; im Octav vielleicht etwas weniger. Dass ich diesen Entwurf nicht zu gross gemacht habe, sondern vielmehr manches dem Leser zu entwickeln zu überlassen genöthigt bin, werden Sie daraus schliessen können, dass ich nothwendig das Wesentliche der Untersuchungen meiner Vorgänger habe mitnehmen müssen, und die von Euler zusammen ungefehr 50, die von La Grange etwa 30 und eine einzige Abhandlung von Le Gendre 12 Bogen beträgt. Ich würde eine Unmöglichkeit unternehmen wenn hierunter nicht manche Wiederholungen wären und durch meine Methoden die weitläuftigsten Rechnungen sehr zusammengezogen würden. Eigentliche Kupfer kann ich entbehren; nur habe ich einen grossen Vorrath von mancherlei Tabellen die ich in müssigen Stunden noch weiter ausdehne und die vielleicht zum Theil sehr nützlich sein können in diesem Felde noch neue Erfindungen zu machen. Von verschiednen derselben muss ich wenigstens Proben geben. So ist eine Tafel gewiss das bequemste Mittel die Factoren der Zahlen zu bestimmen. Ich füge davon eine kleine Probe bei. Die Punkte bedeuten nichts anders als dass die oben stehende Zahl ein quadratischer Rest der auf der linken Seite stehenden Zahl sei; die Abwesenheit der Punkte das Gegentheil. Ihr Gebrauch würde am bequemsten sein wenn man die einzelnen Streifen A, B, C, D etc. ausschnitte und auf dünne Pappe oder Blech zöge. Es werden dann nach den Umständen gewisse Stäbe zusammengelegt und man sieht gewöhnlich mit der grössten Schnelligkeit welche Zahlen nicht Factoren sind. Bei der Schrift selbst wird indessen nur eine kleine Probe der Tafel hinreichen; diess ist nemlich nur Eine einzelne Anwendung der Tafel. Statt der Punkte kann auch jedes andre Zeichen dienen. — — Ich muss noch hinzusetzen dass wenn ich in Absicht des Titels gar nicht genirt bin, ich die Schrift schlechthin Disquisitiones Arithmeticae nennen würde, da ihr Inhalt schwerlich sich genauer würde characterisiren lassen.

Der Hr. Hofrath Kästner hat mir versprochen mir die Bekanntschaft des Hn P. Hindenburg zu verschaffen; ich habe ihm einen Aufsatz zur Ansicht vorgelegt, und ich denke denselben wenn er mir sein Urtheil darüber wird gesagt haben an Hindenburg zu schicken.

Es ist mir ein sehr angenehmes Geschäft Ew. Hochwohlgeb. von meinem jungen Schweizer Nachricht zu geben. Er ist aus Thun im Canton Bern und hat sich schon in Bern unter Tralles Anleitung gute Mathematische Kenntnisse erworben, die er hier seit einem halben Jahre mit dem besten Erfolg erweitert. Er wird hier bis Michaelis bleiben und dann nach Paris gehen, ehe er Deutschland verlässt denkt er noch mehrere Örter davon zu besuchen, und er wird es nicht versäumen auch Braunschweig zu sehen. Sein Name ist Beckh.

Ich bin glücklich mich mit der innigsten Verehrung und Dankbarkeit nennen zu können

Hochwohlgeborner Herr Hofrath
Ew. Hochwohlgeborn
ergebensten Diener

Göttingen den 12ten Merz 1797. Gauss.

BEMERKUNG.

Der hier mit der ursprünglichen Rechtschreibung abgedruckte Brief befindet sich gegenwärtig im Besitz der Königlichen Bibliothek zu Berlin. Die Aufschrift lautet

Se. Hochwohlgeborn
dem Herrn Hofrath
v. Zimmermann
durch Einschluss. Braunschweig

Zwei spätere Briefe von Gauss an v. Zimmermann vom 22. November und vom 24. Dezember 1797, die sich ebenfalls auf die *Disqu. Arithm.* beziehen, sind im Auszug veröffentlicht in der Schrift von L. Hänselmann, *Karl Friedrich Gauss. Zwölf Kapitel aus seinem Leben*, Leipzig 1878, S. 34—37. Vergl. den Artikel 2 des Bachmannschen Aufsatzes »Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten«.

Den S. 19, Zeile 4, 3 v. u. angeführten Ausspruch Eulers hat Gauss auf das vordere Schutzblatt seines Exemplars von Lamberts *Zusätzen* eingetragen, mit der Quellenangabe: Euler, Comm. N. Petr. XI, p. 153; er findet sich in der Tat in der Abhandlung: *De motu corporis ad duo centra virium fixa attracti*, Novi comm. Acad. Petrop. **11** (1765) 1767, S. 152—184, auf S. 153. Das S. 19, Z. 2 v. u. erwähnte Urteil Eulers lautet: »Quare cum vulgo ad ratiocinii facultatem comparandam demonstrationes geometricae commendari soleant, quippe quae regularum rationandi usum maxime contineant, nescio an non ad hunc scopum demonstrationes arithmeticae multo magis sint accommodatae: in his enim multo maiori cura est cavendum, ne a praescriptis Logicorum regulis aberremus, quoniam plerumque nimis est difficile, in errorem non prolabi« und steht in der Abhandlung: *Specimen de usu observationum in mathesi pura*, Novi comment. Acad. Petrop. **6** (1756/7), 1761, S. 185—230, auf S. 187. Die S. 20, Zeile 18 erwähnte »kleine Probe« der zur Bestimmung der Faktoren von Zahlen dienenden Tafel findet sich in den *Disqu. Arith.*, Werke I, S. 469, die Anleitung zu ihrem Gebrauch ebenda, S. 404, 405.

Schlesinger.

[ZUR THEORIE DER POTENZRESTE.]

[QUADRATISCHE RESTE.]

[I.]

[ÜBER EINIGE SUMMEN.]

[1.]

[Aus Scheda Ac, Julius 1800, S. 28.]

Theorema demonstrandum.

n numerus impar

r radix aequationis $x^n - 1 = 0$

$$\left.\begin{matrix} R \\ N \end{matrix}\right\} \text{indefinite} \left\{\begin{matrix} \text{residuum} \\ \text{non residuum} \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{ipsius } n, < n, \\ \text{ad } n \text{ primum.} \end{matrix}$$

Productum ex

$$(r - r^{-1})(r^3 - r^{-3})(r^5 - r^{-5}) \ldots (r^{n-2} - r^{n-2})$$

evolvi in

$$\Sigma r^R - \Sigma r^N.$$

Demonstratum iam est illud productum evolvi vel in $\Sigma r^R - \Sigma r^N$ vel in $\Sigma r^N - \Sigma r^R$.

[2.]

[Aus Scheda Ac, Julius 1800, S. 31.]

Theorema novissimum pulcherrimum.

Summae

$$\sin\tfrac{0}{n}P + \sin\tfrac{1}{n}P + \sin\tfrac{4}{n}P + \sin\tfrac{9}{n}P + \cdots + \sin\tfrac{(n-1)^2}{n}P$$

$$\cos\tfrac{0}{n}P + \cos\tfrac{1}{n}P + \cos\tfrac{4}{n}P + \cos\tfrac{9}{n}P + \cdots + \cos\tfrac{(n-1)^2}{n}P$$

$$\begin{array}{r|c|c|c|c|} \text{fit} = \Big\{ & \sqrt{n} & 0 & 0 & \sqrt{n} \\ & \sqrt{n} & \sqrt{n} & 0 & 0 \\ \hline \text{pro } n \equiv & 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\text{mod. } 4$$

[3.]

[Aus Scheda Ac, Julius 1800, S. 32.]

Erstens $n \equiv 1 \pmod{8}$

$$\Sigma\cos\frac{RP}{n} - \Sigma\cos\frac{NP}{n} = +\sqrt{n}.$$

Zweitens $n \equiv 5 \pmod{8}$

$$\Sigma\cos\frac{RP}{n} - \Sigma\cos\frac{NP}{n} = +\sqrt{n}.$$

Drittens $n \equiv 3 \pmod{8}$

$$\Sigma\sin\frac{RP}{n} - \Sigma\sin\frac{NP}{n} = +\sqrt{n}.$$

Viertens $n \equiv 7 \pmod{8}$

$$\Sigma\sin\frac{RP}{n} - \Sigma\sin\frac{NP}{n} = +\sqrt{n}.$$

[4.]

Gauss an Olbers.

[Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke II, 1 (1900), S. 267 ff.]

Braunschweig, 1805 September 3.

Ich hoffe, dass nur Ihre überhäuften Arbeiten, nicht aber Krankheit, oder sonst etwas Unangenehmes, Schuld sind, dass ich so lange mit keinem Briefe von Ihnen erfreut worden bin. Meine Beschäftigungen waren auch seit einiger Zeit nicht von der Art, dass sie für den Geometer, noch meine Begegnisse, dass sie für den theilnehmenden Freund sonderlich Stoff zu Mittheilungen dargeboten hätten. Ich bin durch verschiedene Umstände — theils durch einige Briefe von Le Blanc in Paris, der meine *Disqu. Arith.* mit wahrer Leidenschaft studirt, sich ganz mit ihnen vertraut gemacht und mir manche recht artige Kommunikationen darüber gemacht hat, theils durch die Anwesenheit eines Freundes, der jenes Werk jetzt gleichfalls studirt und sich öfters bei mir Raths erholt — theils auch durch eine Art von Überdruss oder wenigstens Ermüdung an dem todten mechanischen Kalkül verleitet worden, in diesem einmal eine Pause zu machen und meine geliebten arithmetischen Untersuchungen wieder vorzunehmen. Sie erinnern sich vielleicht noch von unsern Gesprächen in Bremen her, namentlich an dem schönen Nachmittage, den wir auf der Vahr zubrachten, dass ich schon seit längerer Zeit eine sehr beträchtliche Sammlung von Untersuchungen nicht sowohl im Pult, als in petto habe, die hinreichenden Stoff zu einem zweiten Bande der *Disqu. Arith.* geben, und die, wenigstens meinem Urtheile nach, ebenso merkwürdig sind, als die im ersten enthaltenen. Sie erinnern sich aber auch vielleicht zu gleicher Zeit meiner Klagen über einen Satz, der theils schon an sich sehr interessant ist, theils einem sehr beträchtlichen Theile jener Untersuchungen als Grundlage oder als Schlussstein dient, den ich damals schon über 2 Jahr kannte, und der alle meine Bemühungen, einen genügenden Beweis zu finden, vereitelt hatte. Dieser Satz ist schon in meinen *Disq.* pg. 636 [*)] angedeutet, oder viel-

[*) Werke I, S. 442, 443.]

mehr nur ein specieller Fall davon, nämlich der, wo n eine Primzahl ist, auf den sich übrigens hier die übrigen würden zurückführen lassen. Was da von »Quaecunque igitur radix etc.« bis »valde sunt memorabilia« steht, ist streng dort bewiesen, aber was folgt, nämlich die Bestimmung des Wurzelzeichens, ist es gerade, was mich immer gequält hat. Dieser Mangel hat mir alles Übrige, was ich fand, verleidet; und seit 4 Jahren wird selten eine Woche hingegangen sein, wo ich nicht einen oder den andern vergeblichen Versuch, diesen Knoten zu lösen, gemacht hätte — besonders lebhaft nun auch wieder in der letzten Zeit. Aber alles Brüten, alles Suchen ist umsonst gewesen, traurig habe ich jedesmal die Feder wieder niederlegen müssen. Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen — aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloss durch die Gnade Gottes möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst; ich selbst wäre nicht im Stande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wusste, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte, — und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen. Sonderbar genug erscheint die Lösung des Räthsels jetzt leichter als manches andere, was mich wohl nicht so viele Tage aufgehalten hat als dieses Jahre, und gewiss wird niemand, wenn ich diese Materie einst vortrage, von der langen Klemme, worin es mich gesetzt hat, eine Ahnung bekommen.

. . . .

BEMERKUNG.

Die vorstehenden Aufzeichnungen [1]—[3] gehören insofern in die Lehre von den quadratischen Resten als sie die ersten Vorstudien zu den Untersuchungen darstellen, die Gauss 1808 in der Abhandlung *Summatio quarundam serierum singularium* (Werke II, S. 9 ff.) veröffentlicht hat. Für das Geschichtliche vergleiche man neben dem Briefe [4] noch die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 118 vom Mai 1801 und Nr. 123 vom 30. August 1805 sowie den Artikel **18** des Bachmannschen Aufsatzes »Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten«.

Schlesinger.

[II.]

[BESTIMMUNG DES DEZIDENTEN IN DER LEHRE VON DEN QUADRATISCHEN RESTEN.]

[Aus Handbuch 18, Bd. Mathematische Brouillons, October 1805, S. 164.]

Designemus per $\left(\frac{k}{p}\right)$ multitudinem productorum ex his

$$k,\ 2k,\ 3k,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}(p-1)k,$$

quorum residua minima positiva secundum modulum p cadunt infra $\frac{1}{2}p$; porro per $[x]$ numerum integrum quantitate x proxime minorem. Habebis

$$\text{1)}\quad \left(\frac{k}{p}\right) = \left[\frac{2k}{p}\right]+\left[\frac{4k}{p}\right]+\left[\frac{6k}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{(p-1)k}{p}\right]$$
$$-\,2\left[\frac{k}{p}\right]-2\left[\frac{2k}{p}\right]-2\left[\frac{3k}{p}\right]-\cdots-2\left[\frac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}\right],$$

$$\text{2)}\quad [x]+[-x] = -1,$$

$$\text{3)}\quad \left(\frac{k}{p}\right)+\left(\frac{-k}{p}\right) = \tfrac{1}{2}(p-1),$$

$$\text{4)}\quad \left(\frac{k}{p}\right) = \tfrac{1}{4}(p\mp 1)(k-1)-3\left[\frac{k}{p}\right]-\left[\frac{2k}{p}\right]-3\left[\frac{3k}{p}\right]-\cdots$$
$$= \tfrac{1}{4}(p\mp 1)(k-1)-2\left\{\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{3k}{p}\right]+\left[\frac{5k}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{\frac{1}{2}(p-3)k}{p}\right]\right\}$$
$$-\left\{\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{2k}{p}\right]+\left[\frac{3k}{p}\right]+\cdots+\left[\frac{\frac{1}{2}(p-1)k}{p}\right]\right\}.$$

$$\begin{aligned}
[x]+[2x]+[3x]+\cdots+[nx] &= 0\left[\frac{1}{x}\right]\\
&\quad+1\left\{\left[\frac{2}{x}\right]-\left[\frac{1}{x}\right]\right\}\\
&\quad+2\left\{\left[\frac{3}{x}\right]-\left[\frac{2}{x}\right]\right\}\\
&\quad\ \vdots\\
[nx]=h \qquad\qquad &\quad+h\left\{n-\left[\frac{h}{x}\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&[x]+[2x]+[3x]+\cdots+\overset{h}{[nx]}\\ &\quad+\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+\left[\frac{3}{x}\right]+\cdots+\left[\frac{h}{x}\right]\end{aligned}\right\} = nh.$$

BEMERKUNG.

Die vorstehende Aufzeichnung bildet eine Vorarbeit zu dem dritten Beweise des Reziprozitätsgesetzes (Comm. Gott. **16**, 1808, Werke II, S. 1 ff.). Die hier bewiesene Formel bildet dort das *Theorema* des art. 5 (Werke II, S. 7). Da sich auf folgenden Seiten des Handbuchs die Vorausberechnung der Orter von Juno und Ceres auf das Jahr 1808 findet, so wird diese Aufzeichnung wohl auf 1806—1807 anzusetzen sein. Vergl. den Artikel **20** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[III.]

FÜNFTER BEWEIS DES FUNDAMENTALSATZES BEI DEN QUADRATISCHEN RESTEN.

[Aus Handbuch 21, Bg. Aufsätze, Notizen und Rechnungen zur Mathematik und Astronomie gehörig. Angefangen September 1813, S. 4—5.]

I) Es sei p eine (ungerade) Primzahl, α eine Radix primitiva für den Modulus p, x eine unbestimmt bleibende Grösse. Wir bezeichnen durch fx die Function

$$[1+]x+x^{\alpha}+x^{\alpha\alpha}+x^{\alpha^3}+x^{\alpha^4}+x^{\alpha^5}+\text{etc.}+x^{\alpha^{p-2}}.$$

Man sieht leicht, dass

$$fx-([1+]x+xx+x^3+\text{etc.}+x^{p-1})$$

durch $1-x^p$ theilbar seyn müsse, da die Zahlen $1, \alpha, \alpha\alpha, \alpha^3 \ldots, \alpha^{p-2}$ den Zahlen $1, 2, 3, 4, \ldots, p-1$ nach dem Modulus p congruent sind (ohne Rücksicht auf die Ordnung). Es ist also fx durch

$$1+x+xx+\text{etc.}+x^{p-1}=\frac{1-x^p}{1-x}$$

theilbar. Es wird also auch allgemein, wenn n irgend eine ganze Zahl bedeutet, $f(x^n)$ durch $\frac{1-x^{np}}{1-x^n}$ theilbar seyn. Nun ist aber leicht zu beweisen, dass

$$\frac{1-x^{np}}{1-x^n} \text{ durch } \frac{1-x^p}{1-x}$$

theilbar sei, wenn n durch p nicht theilbar ist, in diesem Fall wird also $f(x^n)$ auch durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar seyn. Hingegen sieht man leicht, dass wenn n

durch p theilbar ist, $f(x^n)-p$ durch $1-x^p$ also auch durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar seyn w[ird].

II) Man bezeichne ferner

$$x-x^{\alpha}+x^{\alpha\alpha}-x^{\alpha^3}+\text{etc.}-x^{\alpha^{p-2}}$$

durch ξ. Alsdann ist

$$+x\xi-(x^2-x^{\alpha+1}+x^{\alpha\alpha+1}-x^{\alpha^3+1}+\text{etc.}-x^{\alpha^{p-2}+1})=0$$

und die Grössen

$$\begin{array}{llllll}
-x^{\alpha}\xi & -(x^{2\alpha} & -x^{\alpha\alpha+\alpha} & +x^{\alpha^3+\alpha} & -x^{\alpha^4+\alpha} & +\text{etc.}-x^{\alpha^{p-1}+\alpha}), \\
+x^{\alpha\alpha}\xi & -(x^{2\alpha\alpha} & -x^{\alpha^3+\alpha\alpha} & +x^{\alpha^4+\alpha\alpha} & -x^{\alpha^5+\alpha\alpha} & +\text{etc.}-x^{\alpha^{p}+\alpha\alpha}), \\
-x^{\alpha^3}\xi & -(x^{2\alpha^3} & -x^{\alpha^4+\alpha^3} & +x^{\alpha^5+\alpha^3} & -x^{\alpha^6+\alpha^3} & +\text{etc.}-x^{\alpha^{p+1}+\alpha^3}), \\
+x^{\alpha^4}\xi & -(x^{2\alpha^4} & -x^{\alpha^5+\alpha^4} & +x^{\alpha^6+\alpha^4} & -x^{\alpha^7+\alpha^4} & +\text{etc.}-x^{\alpha^{p+2}+\alpha^4})
\end{array}$$

u. s. w. bis zu

$$-x^{\alpha^{p-2}}\xi-(x^{2\alpha^{p-2}}-x^{\alpha^{p-1}+\alpha^{p-2}}+x^{\alpha^{p}+\alpha^{p-2}}+x^{\alpha^{p+1}+\alpha^{p-2}}+\text{etc.}-x^{\alpha^{2p-4}+\alpha^{p-2}})$$

jede einzeln durch $1-x^p$ theilbar. Addirt man alles, so ist folglich klar, dass

$$\xi\xi-f(x^2)+f(x^{\alpha+1})-f(x^{\alpha\alpha+1})+f(x^{\alpha^3+1})-\text{etc.}+f(x^{\alpha^{p-2}+1})$$

durch $1-x^p$ theilbar seyn werde, also auch durch $\frac{1-x^p}{1-x}$. Nun ist aber bekanntlich unter den Zahlen

$$2,\ \alpha+1,\ \alpha\alpha+1,\ \alpha^3+1 \text{ etc. bis } \alpha^{p-2}+1$$

nur eine einzige nemlich $\alpha^{\frac{1}{2}(p-1)}+1$ durch p theilbar: dem vorhergehenden Theorem zufolge wird also

$$\xi\xi \mp f(x^{\alpha^{\frac{1}{2}(p-1)}+1})$$

und folglich $\xi\xi \mp p$ durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar seyn, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\frac{1}{2}(p-1)$ gerade oder ungerade, d. i. je nachdem p von der Form $4m+1$ oder $4m-1$ ist.

III) Es sei nun q irgend eine ungerade (positive) Zahl also $\frac{1}{2}(q-1)$ eine ganze Zahl. Es wird folglich

$$(\xi\xi)^{\frac{1}{2}(q-1)} - (\pm p)^{\frac{1}{2}(q-1)}$$

durch $\xi\xi - (\pm p)$, also auch durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar seyn; jene erstere Grösse kann man auch so schreiben:

$$\xi^{q-1} \mp p^{\frac{1}{2}(q-1)},$$

wo das obere Zeichen gelten wird, wenn von den Zahlen p, q wenigstens eine von der Form $4m+1$ ist, das untere hingegen, wenn beide von der Form $4m+3$ sind.

IV) Nehmen wir jetzt noch an, dass auch q eine von p verschiedene Primzahl ist, so folgt aus dem Theorem, welches in den *Disqu. Ar.* p. 46[*)] steht, dass

$$\xi^q - (x^q - x^{\alpha q} + x^{\alpha\alpha q} - x^{\alpha^3 q} + x^{\alpha^4 q} - \text{etc.} - x^{\alpha^{p-2} q})$$

durch q theilbar sein werde, oder von der Form $q\mathrm{X}$, so dass X eine Function mit lauter ganzen Coefficienten bedeutet. Nun ist q nach dem Modulus p einer Potenz von α congruent, es sei $q \equiv \alpha^\mu$. Es ist also

$$x^q - x^{\alpha q} + x^{\alpha\alpha q} - \text{etc.} - x^{\alpha^{p-2} q} - (x^{\alpha^\mu} - x^{\alpha^{\mu+1}} + x^{\alpha^{\mu+2}} - x^{\alpha^{\mu+3}} + \text{etc.} - x^{\alpha^{p+\mu-2}})$$

durch $1 - x^p$ theilbar; durch dieselbe Grösse wird aber auch

$$x^{\alpha^\mu} - x^{\alpha^{\mu+1}} + x^{\alpha^{\mu+2}} - x^{\alpha^{\mu+3}} + \text{etc.} - x^{\alpha^{p+\mu-2}} \mp \xi$$

theilbar seyn, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem μ gerade oder ungerade, d. i. je nachdem q ein quadratischer Rest oder Nichtrest von p ist. Um durch die doppelten Zeichen keine Verwirrung zu veranlassen, wollen wir annehmen, dass der Buchstab ε im erstern Falle die Grösse $+1$, im zweiten die Grösse -1 bedeutet; es wird folglich

$$x^q - x^{\alpha q} + x^{\alpha\alpha q} - x^{\alpha^3 q} + \text{etc.} - x^{\alpha^{p-2} q} - \varepsilon\xi$$

[*) Werke I, S. 42.]

oder

$$\xi^q - q\mathrm{X} - \varepsilon\xi$$

durch $1 - x^p$, folglich da nach III) $\xi^q \mp \xi p^{\frac{1}{2}(q-1)}$ durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar ist, auch

untern auf

mit $\frac{1-x^p}{1-x}$

wenn jene

durch q theilbar, mithin auch $\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}q-1}$, welche Grösse auch durch $\varepsilon \mp p^{\frac{1}{2}(q-1)}$ dargestellt werden kann, wenn das obere Zeichen genommen wird in den Falle, da wenigstens eine der Grössen p, q von der Form $4m+1$ ist, das untere hingegen, wenn beide die Form $4m+3$ haben. Hieraus leiten wir also die Schlussfolge ab:

III) Es sei nun q irgend eine ungerade (positive) Zahl also $\frac{1}{2}(q-1)$ eine ganze Zahl. Es wird folglich

$$(\xi\xi)^{\frac{1}{2}(q-1)} - (\pm p)^{\frac{1}{2}(q-1)}$$

durch $\xi\xi$

man auc

wo das

eine von

Form $4m$

IV)

Primzahl

steht, da

durch q

tion mit

p einer

$x^q - x$

durch $1 -$

theilbar

oder ung

p ist. U

wollen wir annehmen, dass der Buchstab ε im erstern Falle die Grösse $+1$, im zweiten die Grösse -1 bedeutet; es wird folglich

$$x^q - x^{\alpha q} + x^{\alpha\alpha q} - x^{\alpha^3 q} + \text{etc.} - x^{\alpha^{p-2} q} - \varepsilon\xi$$

[*) Werke I, S. 42.]

oder

$$\xi^q - qX - \varepsilon\xi$$

durch $1 - x^p$, folglich da nach III) $\xi^q \mp \xi p^{\frac{1}{2}(q-1)}$ durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar ist, auch

$$\mp \xi p^{\frac{1}{2}(q-1)} + qX + \varepsilon\xi$$

oder

$$qX + (\varepsilon \mp p^{\frac{1}{2}(q-1)})\xi$$

durch $\frac{1-x^p}{1-x}$ theilbar seyn. Durch dieselbe Function ist also auch

$$q\xi X + (\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}q-1})\xi\xi$$

und folglich auch

$$q\xi X \pm p[\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}q-1}]$$

theilbar, wo die obern Zeichen sich auf die Form $4m+1$, die untern auf die Form $4m-1$ von p beziehen. Nehmen wir nun an, dass ξX mit $\frac{1-x^p}{1-x}$ auf gewöhnliche Art dividirt den Rest

$$ax^{p-2} + bx^{p-3} + cx^{p-4} + \text{etc.} + l = R$$

gebe, so wird offenbar auch

$$qR \pm p(\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}q-1})$$

durch $\frac{x^p-1}{x-1}$ theilbar seyn, welches nicht anders möglich ist, als wenn jene Grösse identisch $= 0$ wird. Wir haben also

$$lq \pm p(\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}(q-1)}) = 0,$$

folglich ist

$$p(\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}q-1})$$

durch q theilbar, mithin auch $\varepsilon - (\pm p)^{\frac{1}{2}q-1}$, welche Grösse auch durch $\varepsilon \mp p^{\frac{1}{2}(q-1)}$ dargestellt werden kann, wenn das obere Zeichen genommen wird in den Falle, da wenigstens eine der Grössen p, q von der Form $4m+1$ ist, das untere hingegen, wenn beide die Form $4m+3$ haben. Hieraus leiten wir also die Schlussfolge ab:

Ist q ein quadratischer Rest von p, so wird, nach der eben ausgesprochenen Bestimmung der Zeichen,

$$p^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv \pm 1 \pmod{q},$$

also auch p quadratischer Rest von q, dafern wenigstens eine der Primzahlen p, q von der Form $4m+1$ ist, und Nichtrest von q, wenn beide die Form $4m+3$ haben.

Ist hingegen q ein quadratischer Nichtrest von p, also $\varepsilon = -1$, so wird

$$p^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv \mp 1 \pmod{q},$$

folglich auch p Nichtrest von q im erstern Falle und Rest im andern.

Dieses ist eben das Fundamentaltheorem selbst.

BEMERKUNG.

Die vorstehende Abhandlung, die aus dem September des Jahres 1813 stammt, ist eine von dem lateinischen Texte der *Demonstratio sexta* (1818, Werke II, S. 55 ff.) nur wenig abweichende deutsche Darstellung dieses Beweises des Reziprozitätssatzes; die Zählung der Beweise ist hier umgekehrt, wie in der veröffentlichten Abhandlung. Vergl. den Artikel **20** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[IV.]

DRITTER BEWEIS DES FUNDAMENTALSATZES BEI DEN QUADRATISCHEN RESTEN IN EINER NEUEN EINKLEIDUNG.

[Aus Handbuch 21, Bg, S. 6—8.]

1. Es seyn m, M zwei positive ungerade [theilerfremde] Zahlen und $mM = \mu$. Wir bezeichnen

durch f	den Inbegriff der $\frac{1}{2}(m-1)$	Zahlen	$1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(m-1)$,
f'	$\frac{1}{2}(m-1)$		$\frac{1}{2}(m+1), \frac{1}{2}(m+3), \ldots, m-1$,
F	$\frac{1}{2}(M-1)$		$1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(M-1)$,
F'	$\frac{1}{2}(M-1)$		$\frac{1}{2}(M+1), \frac{1}{2}(M+3), \ldots, M-1$,
φ	$\frac{1}{2}(\mu-1)$		$1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(\mu-1)$,
φ'	$\frac{1}{2}(\mu-1)$		$\frac{1}{2}(\mu+1), \frac{1}{2}(\mu+3), \ldots, \mu-1$.

Die Zahlen f', F', φ' sind folglich identisch mit $m-f$, $M-F$, $\mu-\varphi$.

2. Wir bezeichnen ferner durch A, B, C, D die Inbegriffe der kleinsten positiven Reste, welche nach dem Modulus μ resp. alle Zahlen

$$fM+Fm,\ fM+F'm,\ f'M+Fm,\ f'M+F'm$$

geben. Die Anzahl der Zahlen in einem jeden wird offenbar $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)$, also die Anzahl aller $(m-1)(M-1)$. Ferner sieht man leicht, dass alle unter sich ungleich und keiner durch m noch durch M theilbar seyn werden; woraus man den Schluss zieht, dass alle zusammen mit dem Inbegriffe aller weder durch m noch durch M theilbaren Zahlen zwischen den Grenzen 0 und μ, d. i. in den beiden Reihen φ und φ' identisch sind.

Noch bemerken wir, dass alle Zahlen $f'M+F'm$ identisch sind mit

$$(m-f)M+(M-F)m$$

d. i. mit

$$2\mu-(fM+Fm);$$

die Zahlen D werden also die Ergänzungen der Zahlen A zu μ, und aus ähnlichem Grunde die Zahlen C die Ergänzungen der Zahlen B zu μ seyn.

3. Wir scheiden die Zahlen A, B, C, D resp. in zwei Classen α und α', β und β', γ und γ', δ und δ', so dass in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ diejenigen fallen, welche kleiner als $\frac{1}{2}\mu$, in $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ hingegen diejenigen, welche grösser als $\frac{1}{2}\mu$ sind. Zusammengenommen werden also $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle weder durch m noch durch M theilbaren Zahlen in φ, so wie $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ zusammen die ähnlichen Zahlen in φ' darstellen. Da nun offenbar Fm alle durch m theilbaren Zahlen in φ und fM alle durch M theilbaren in φ gibt, und alle diese Zahlen ungleich seyn müssen (keine zugleich durch m und M theilbar seyn kann); so besteht φ offenbar aus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, Fm und fM; und auf ähnliche Weise φ' aus $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, $F'm$ und $f'M$.

4. Die Anzahl der Zahlen, welche von A, B, C, D in die Classen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ kommen, bleibt zwar noch unbestimmt; allein so viel ist klar, da δ und δ' zusammen die Ergänzungen von α und α' zusammen zu μ sind, dass nothwendig δ die Ergänzungen von α' und δ' die Ergänzungen von α seyn werden. Eben so müssen γ, γ' resp. die Ergänzungen von β' und β zu μ seyn. Bedeutet also p die Anzahl der Zahlen in α, q die Anzahl der Zahlen in β, so sind

in δ' gleichfalls p
in γ' gleichfalls q
in α' oder in δ hingegen $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)-p$
in β' oder in γ aber $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)-q$.

5. Die kleinsten Reste der $\frac{1}{2}(m-1)$ Zahlen fM nach dem Modulus m liegen zum Theil in f, zum Theil in f'; die Anzahl der letzteren sey n, also die Anzahl der erstern $\frac{1}{2}(m-1)-n$. Eben so liegen die kleinsten Reste der $\frac{1}{2}(M-1)$ Zahlen Fm nach dem Modulus M zum Theil in F, zum Theil in F'; die Anzahl der letztern $=N$ gesetzt, wird die der erstern $=\frac{1}{2}(M-1)-N$ seyn.

6. Zählen wir jetzt alle Zahlen in φ' zusammen, die nach dem Modulus m einer der Zahlen fM congruent sind. In so fern φ' aus $\alpha', \beta', \gamma', \delta', f'M$, $F'm$ zusammengesetzt ist, und alle Zahlen α', β' offenbar die gedachte Eigenschaft haben und keine der übrigen sie hat, wird offenbar die verlangte Anzahl $=\frac{1}{2}(m-1)(M-1)-p-q$ seyn. Offenbar besteht aber φ' auch andererseits aus den Zahlen

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}(\mu+1), \ \frac{1}{2}(\mu+3), \ \ldots, \ \frac{1}{2}(M+1)m-1 \\
\frac{1}{2}(M+1)m, \ \frac{1}{2}(M+1)m+1, \ldots, \ \frac{1}{2}(M+3)m-1 \\
\frac{1}{2}(M+3)m, \ \frac{1}{2}(M+3)m+1, \ldots, \ \frac{1}{2}(M+5)m-1 \\
\frac{1}{2}(M+5)m, \ \frac{1}{2}(M+5)m+1, \ldots, \ \frac{1}{2}(M+7)m-1 \\
\text{etc. bis} \\
(M-1)m, \ (M-1)m+1, \ldots, \ \mu-1
\end{array}$$

oder

	unter welchen sich Zahlen von gedachter Eigenschaft befinden
$\frac{1}{2}(M-1)m+f'$	n
$\frac{1}{2}(M+1)m, \ \frac{1}{2}(M+1)m+f, \ \frac{1}{2}(M+1)m+f'$	$\frac{1}{2}(m-1)$
$\frac{1}{2}(M+3)m, \ \frac{1}{2}(M+3)m+f, \ \frac{1}{2}(M+3)m+f'$	$\frac{1}{2}(m-1)$
$\frac{1}{2}(M+5)m, \ \frac{1}{2}(M+5)m+f, \ \frac{1}{2}(M+5)m+f'$	$\frac{1}{2}(m-1)$
etc.	
$(M-1)m, \ (M-1)m+f, \ (M-1)m+f'$,	$\frac{1}{2}(m-1)$.

Auf diese Weise beträgt also die Anzahl aller $n+\frac{1}{4}(M-1)(m-1)$ und man hat also die Gleichung

$$n=\frac{1}{4}(m-1)(M-1)-p-q.$$

7. Scheiden wir auf ähnliche Weise aus φ' alle Zahlen aus, welche nach dem Modulus M einer der Zahlen Fm congruent sind, so sind dies die Zahlen α' und γ', also ihre Anzahl $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)-p+q$. Dieselbe Anzahl findet sich aber durch eine zweite Zerlegung von φ' in

$$\frac{1}{2}M(m-1)+F', \ f'M, \ f'M+F, \ f'M+F'$$

$=N+\frac{1}{4}(M-1)(m-1)$. Wir haben also

$$N=-p+q.$$

8. Es wird demnach

$$N-n = 2q - \tfrac{1}{4}(m-1)(M-1);$$

also sind N und n beide gerade oder beide ungerade, so oft $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)$ gerade, d. i. so oft unter den Zahlen m, M wenigstens eine von der Form $4k+1$ ist; hingegen werden N, n nothwendig die eine gerade, die andere ungerade seyn müssen, wenn $\frac{1}{4}(m-1)(M-1)$ ungerade ist, d. i. wenn beide Zahlen m, M zugleich von der Form $4k+3$ sind.

Hieraus folgt das Fundamentaltheorem von selbst.

Bei dieser Einkleidung des Beweises ist der wahre Nerf desselben mehr in die Augen fallend als bei derjenigen, in welcher er in den Göttingischen Commentationen Bd. XVI[*)] erscheint.

Novbr. 12. [1813]

BEMERKUNG.

Die vorstehende »neue Einkleidung« des dritten Beweises (Werke II, S. 1) ist (vergl. den Artikel **20** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«) nur in der Entwickelung von dem fünften Beweise (1818, Werke II, S. 51 ff.) verschieden.

SCHLESINGER.

[*) 1808, Werke II, S. 1 ff.]

[KUBISCHE UND BIQUADRATISCHE RESTE.]

[V.]

[ZWEI SÄTZE ÜBER KUBISCHE UND BIQUADRATISCHE RESTE.]

[Aus Handbuch 18, Bd. Mathematische Brouillons, October 1805, Einbanddecke.]

Wenn eine Primzahl p sich unter die Form

$$aa+27bb$$

setzen lässt, so ist 2 Res. Cub. ipsius p.

Wenn sich dieselbe unter die Form

$$aa+64bb$$

setzen lässt, so ist ± 2 ein Biquadr. Rest von p.

BEMERKUNG.

Vergl. hierzu die Werke VIII, S. 6 abgedruckte Aufzeichnung sowie die *Theoria Residuorum Biquadraticorum, Commentatio secunda* (1832) art. 24, Werke II, S. 95, 96.

SCHLESINGER.

[VI.]

[ZUR LEHRE VON DEN GANZEN KOMPLEXEN ZAHLEN.]

[Ein Zettel in Ec 2, Kapsel 43.]

[1.]

Sind a, b Primzahlen unter sich, so werden entweder beide $ax+by$, $ay-bx$ oder keine durch $aa+bb$ theilbar sein.

Bew[eis.]

Multiplicirt man die beiden identischen Gleichungen

$$(a-bi)(x+iy) = ax+by+(ay-bx)i$$
$$(a+bi)(\alpha-\beta i) = a\alpha+b\beta+(b\alpha-a\beta)i$$

in einander, so wird, identisch,

$$(aa+bb)\{\alpha x+\beta y+(\alpha y-\beta x)i\} = (a\alpha+b\beta)(ax+by)+$$
$$+(a\beta-b\alpha)(ay-bx)+\{(a\alpha+b\beta)(ay-bx)+(ax+by)(b\alpha-a\beta)\}i.$$

Bestimmt man also α, β so, dass

$$a\alpha+b\beta = 1,$$

so wird

$$(aa+bb)(\alpha x+\beta y)+(b\alpha-a\beta)(ay-bx) = ax+by$$
$$(aa+bb)(\alpha y-\beta x)-(b\alpha-a\beta)(ax+by) = ay-bx.$$

Die $\binom{\text{erste}}{\text{zweite}}$ Gleichung beweiset, dass, wenn $\binom{ay-bx}{ax+by}$ durch $aa+bb$ theilbar ist, auch $\binom{ax+by}{ay-bx}$ es sein werde.

[2.]

Ist eine Primzahl

$$p = 3n+1 = x^2+3y^2,$$

so ist

$$2x \equiv \frac{\frac{3}{2}n(\frac{3}{2}n-1)\dots(n+1)}{1\dots\frac{1}{2}n} \qquad (\text{m[od.]}\ p)$$

Unter derselben Voraussetzung ist

$$4p = l^2+27m^2$$

und

$$l \equiv \frac{-(n+1)(n+2)\dots 2n}{1.2\dots n}.$$

Ist eine Primzahl

$$p = 8n+1 = a^2+2b^2,$$

so ist

$$2a \equiv \frac{4n\dots(3n+1)}{1\dots n};$$

ist

$$p = 8n+3 = a^2+2b^2,$$

so ist

$$2a \equiv \frac{(4n+1)\,4n\dots(3n+2)}{1\dots n}.$$

[3.]

[Zettel in Ec 3, Kapsel 43.]

Der Modulus $a+ib$ und $aa+bb = D$.
Kleinster Rest von $x+iy$ (mod. $a+bi$)

$$x+iy-(a+ib)\left\{\left[\frac{ax+by}{D}\right]+i\left[\frac{ay-bx}{D}\right]\right\}.$$

Modulus $-7+10i$, $D = 149$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	10	$-6-2i$	20	$+2+3i$	30	$-3-5i$
1	$-1-i$	11	$-6+i$	21	$+1-5i$	31	$+5-2i$
2	$+2i$	12	$-3-2i$	22	$+1-6i$	32	$+3+4i$
3	$+2-2i$	13	$+1+5i$	23	$-5i$	33	$-6+3i$
4	-4	14	$-3+4i$	24	$+2-5i$	34	$-1-4i$
5	$+4+4i$	15	$+7-i$	25	$-7i$	35	$-3+5i$
6	$-7+2i$	16	$+2+i$	26	$-3i$	36	$+1+8i$
7	$-1-2i$	17	$-1-3i$	27	$-3+3i$	37	$+i$
8	$-1+3i$	18	$-2+4i$	28	$+6$		etc.
9	$+4-2i$	19	$+6-2i$	29	$+4+i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	37	$+5+2i$	61	$+5-6i$	18	$-3-10i$	99
$+1+i$	75	$+5-2i$	31	$-3+8i$	9	$-7+8i$	76
$+1-i$	38	$+1+6i$	122	$-3-8i$	15	$-7-8i$	54
$+1+2i$	81	$+1-6i$	22	$+5+8i$	50	-11	107
$+1-2i$	127	$+5+4i$	72	$+5-8i$	77	$-11+4i$	59
-3	137	$+5-4i$	121	$+9+4i$	17	$-11-4i$	8
$-3+2i$	57	-7	136	$+9-4i$	56	$-7-10i$	101
$-3-2i$	12	$-7+2i$	6	$+1+10i$	43		
$+1+4i$	108	$-7-2i$	104	$+1-10i$	102		
$+1-4i$	140	$+5+6i$	132	$-3+10i$	76		

Modulus $-11+4i$, $D = 137$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	9	$-2+5i$	18	$-2-2i$	27	$+3-2i$
1	$+1+2i$	10	$-1-3i$	19	$+2-6i$	28	$+3-7i$
2	$-3+4i$	11	$-6-i$	20	$+3+2i$	29	$+6+3i$
3	$-6i$	12	$-2i$	21	$-5-3i$	30	$-4+4i$
4	$+1-2i$	13	$+4-2i$	22	$+5-2i$	31	$+3+3i$
5	$+5$	14	$+4-5i$	23	$+5-3i$	32	$+4-6i$
6	$+1-i$	15	$-1-4i$	24	-4	33	$+1-5i$
7	$+3+i$	16	$-4-2i$	25	$+3i$	34	$+i$
8	$-3-4i$	17	$+4+i$	26	$+5-i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	34	$+1-4i$	119	$-7-2i$	32	$+1+10i$	
$+1+i$	40	$+5+2i$	111	$+5+6i$		$+1-10i$	
$+1-i$	6	$+5-2i$	22	$+5-6i$		$-3+10i$	
$+1+2i$	1	$+1+6i$	125	$-3+8i$		$-3-10i$	
$+1-2i$	4	$+1-6i$	45	$-3-8i$		$-7+8i$	
-3	127	$+5+4i$	51	$+5+8i$		$-7-8i$	
$-3+2i$	95	$+5-4i$	105	$+5-8i$		-11	58
$-3-2i$	88	-7	98	$+9+4i$	97	$-11-4i$	104
$+1+4i$	83	$-7+2i$	13	$+9-4i$	114		

Modulus 11, $D = 121$.

[*Potenzen der Primitiv-Wurzel.*]

0	$+1$	8	$+3+4i$	16	$+4+2i$	24	$+4$
1	$+3-2i$	9	$-5-5i$	17	$+5-2i$	25	$+1+3i$
2	$+5-i$	10	$-3-5i$	18	$-5i$	26	$-2-4i$
3	$+2-2i$	11	$+3+2i$	19	$+1-4i$	27	$-3+3i$
4	$+2+i$	12	$+2$	20	$-5-3i$	28	$-3+4i$
5	$-3-i$	13	$-5-4i$	21	$+1+i$	29	$-1-4i$
6	$+3i$	14	$-1-2i$	22	$+5+i$	30	$+i$
7	$-5-2i$	15	$+4-4i$	23	$-5+4i$		

Indices der Elementargrössen.

i	30	$+1-4i$	19	$-7-2i$	56	$+1+10i$	111
$+1+i$	21	$+5+2i$	67	$+5+6i$	39	$+1-10i$	21
$+1-i$	111	$+5-2i$	17	$+5-6i$	69	$-3+10i$	5
$+1+2i$	74	$+1+6i$	112	$-3+8i$	57	$-3-10i$	55
$+1-2i$	94	$+1-6i$	32	$-3-8i$	27	$-7+8i$	98
-3	36	$+5+4i$	73	$+5+8i$	40	$-7-8i$	118
$-3+2i$	61	$+5-4i$	83	$+5-8i$	80		
$-3-2i$	71	-7	24	$+9+4i$	46		
$+1+4i$	89	$-7+2i$	16	$+9-4i$	26		

Modulus $-7+8i$, $D=113$

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	8	$+7$	16	$+4+3i$	24	$+4$
1	$+1-4i$	9	$+1-5i$	17	$+2+3i$	25	$+5-i$
2	$+1+6i$	10	$+4-3i$	18	$-1-4i$	26	$-5+2i$
3	$+2-4i$	11	$+1+3i$	19	$-2-i$	27	-6
4	$+2+2i$	12	-2	20	$+1-i$	28	$+i$
5	$+3+2i$	13	$+5$	21	$+5+2i$		
6	$+4-2i$	14	$-1+3i$	22	$-1-2i$		
7	$-3-3i$	15	$+3$	23	$+6+i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	28	$+1+4i$	74	-7	64	$+5-8i$	12
$+1+i$	48	$+1-4i$	1	$-7+2i$	55	$+9+4i$	70
$+1-i$	20	$+5+2i$	21	$-7-2i$	53	$+9-4i$	3
$+1+2i$	78	$+5-2i$	82	$+5+6i$	42	$+1+10i$	97
$+1-2i$	47	$+1+6i$	2	$+5-6i$	32	$+1-10i$	110
-3	71	$+1-6i$	107	$-3+8i$	24	$-3+10i$	31
$-3+2i$	45	$+5+4i$	7	$-3-8i$	25	$-3-10i$	49
$-3-2i$	61	$+5-4i$	59	$+5+8i$	39	$-7-8i$	20

Modulus $-3+10i$, $D=109$

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	7	$-4+2i$	14	$-4+i$	21	$+1-5i$
1	$-1-2i$	8	$-2+3i$	15	$-4+4i$	22	$+2-4i$
2	$-3+4i$	9	$-2-2i$	16	$+2+i$	23	$+3i$
3	$+1-i$	10	$+1-4i$	17	$-5i$	24	$+6-3i$
4	$-3-i$	11	$+1+5i$	18	$+3-2i$	25	$-5+4i$
5	$+4-3i$	12	-4	19	$+3-i$	26	$+3+3i$
6	$-2i$	13	$-3-5i$	20	$+5-2i$	27	$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i$	27	$+1+4i$	95	-7	26	$+5-8i$	63
$+1+i$	30	$+1-4i$	10	$-7+2i$	67	$+9+4i$	57
$+1-i$	3	$+5+2i$	102	$-7-2i$	58	$+9-4i$	59
$+1+2i$	55	$+5-2i$	20	$+5+6i$	94	$+1+10i$	66
$+1-2i$	97	$+1+6i$	69	$+5-6i$	88	$+1-10i$	87
-3	50	$+1-6i$	76	$-3+8i$	6	$-3-10i$	83
$-3+2i$	72	$+5+4i$	38	$-3-8i$	106		
$-3-2i$	35	$+5-4i$	79	$+5-8i$	86		

Modulus $+1+10i$, $D=101$

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	7	$-1+3i$	14	$+3+3i$	21	$-2+5i$
1	$+1+i$	8	$-4+2i$	15	$-1-4i$	22	$+3+2i$
2	$+2i$	9	$+4-3i$	16	$+3-5i$	23	$+0-5i$
3	$-2+2i$	10	$-3+2i$	17	$-2-i$	24	$-5-4i$
4	-4	11	$-5-i$	18	$-1-3i$	25	$+i$
5	$-4-4i$	12	$-3+4i$	19	$+2-4i$		
6	$+1+2i$	13	$+3$	20	$-4-i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	25	$-3-2i$	72	$+5+4i$	74	$-3+8i$	94
$+1+i$	1	$+1+4i$	65	$+5-4i$	91	$-3-8i$	3
$+1-i$	76	$+1-4i$	45	-7	43	$+5+8i$	58
$+1+2i$	6	$+5+2i$	96	$-7+2i$	82	$+5-8i$	59
$+1-2i$	42	$+5-2i$	11	$-7-2i$	89	$+9+4i$	86
-3	63	$+1+6i$	29	$+5+6i$	30	$+9-4i$	18
$-3+2i$	10	$+1-6i$	83	$+5-6i$	99	$+1-10i$	77

Modulus $+9+4i$, $D = 97$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	7	$+4+i$	14	-3	21	$-3+i$
1	$+1+i$	8	$+3+5i$	15	$-3-3i$	22	$-4-2i$
2	$+2i$	9	$+2-i$	16	$-4+3i$	23	$-2-6i$
3	$-2+2i$	10	$+3+i$	17	$+2+3i$	24	$+i$
4	-4	11	$+2+4i$	18	$+3-4i$		
5	$+5$	12	$+2-3i$	19	$-2-5i$		
6	$-4+i$	13	$+5-i$	20	$-1+2i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	24	$-3-2i$	84
$+1+i$	1	$+1+4i$	78
$+1-i$	73	$+1-4i$	79
$+1+2i$	33	$+5+2i$	22
$+1-2i$	68	$+5-2i$	43
-3	14	$+1+6i$	80
$-3+2i$	41	$+1-6i$	87

Modulus $+5+8i$, $D = 89$.

[*Potenzen der Primitiv-Wurzel.*]

0	$+1$	6	-5	12	$+4+2i$	18	$-2+i$
1	$+1-i$	7	$+3$	13	$-2+3i$	19	$-1+3i$
2	$-2i$	8	$+3-3i$	14	$-4-3i$	20	$+2+4i$
3	$-2-2i$	9	$+5+2i$	15	$+1-4i$	21	$+1-6i$
4	-4	10	$-1+2i$	16	$+2+3i$	22	$+i$
5	$+4-i$	11	$+1+3i$	17	$+5+i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	22	$-3+2i$	38	$+1+6i$	56	$-7-2i$
$+1+i$	23	$-3-2i$	35	$+1-6i$	21	$+5+6i$
$+1-i$	1	$+1+4i$	27	$+5+4i$	26	$+5-6i$
$+1+2i$	84	$+1-4i$	15	$+5-4i$	33	$-3+8i$
$+1-2i$	54	$+5+2i$	9	-7	83	$-3-8i$
-3	51	$+5-2i$	52	$-7+2i$	63	$+5-8i$

Modulus $-3+8i$, $D = 73$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	5	$+4-i$	10	$+4-3i$	15	$-1-3i$
1	$+1+i$	6	-3	11	$-1-2i$	16	$-1+4i$
2	$+2i$	7	$-3-3i$	12	$+1-3i$	17	$-2-5i$
3	$-2+2i$	8	$-3+2i$	13	$+4-2i$	18	$+i$
4	-4	9	$+3+2i$	14	$-2-i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	18	$-3+2i$	8	$+1+6i$	13	$-7-2i$	1
$+1+i$	1	$-3-2i$	45	$+1-6i$	3	$+5+6i$	61
$+1-i$	55	$+1+4i$	23	$+5+4i$	69	$+5-6i$	57
$+1+2i$	47	$+1-4i$	52	$+5-4i$	31	$-3-8i$	62
$+1-2i$	32	$+5+2i$	66	-7	51		
-3	6	$+5-2i$	35	$-7+2i$	10		

Modulus $+5+6i$, $D = 61$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	4	-4	8	$-1+4i$	12	-3
1	$-1-i$	5	$-1-2i$	9	$-1+2i$	13	$-2-3i$
2	$+2i$	6	$-1+3i$	10	$+3-i$	14	$+5$
3	$+2-2i$	7	$-2+3i$	11	$+1+4i$	15	$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i$	15	-3	12	$+5+2i$	19	$+5-4i$	46
$+1+i$	31	$-3+2i$	58	$+5-2i$	6	-7	53
$+1-i$	16	$-3-2i$	22	$+1+6i$	4	$-7+2i$	55
$+1+2i$	35	$+1+4i$	11	$+1-6i$	29	$-7-2i$	56
$+1-2i$	39	$+1-4i$	38	$+5+4i$	32	$+5-6i$	1

Modulus $-7+2i$, $D = 53$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	4	-4	8	$-3i$	12	$-4-2i$
1	$+1+i$	5	$-2+3i$	9	$-4-i$	13	$+i$
2	$+2i$	6	$+2-i$	10	$-1+2i$		
3	$-2+2i$	7	$+3+i$	11	$-3+i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	13	-3	47	$+5+2i$	51	$+5-4i$	16
$+1+i$	1	$-3+2i$	30	$+5-2i$	15	-7	28
$+1-i$	40	$-3-2i$	18	$+1+6i$	27	$-7-2i$	17
$+1+2i$	19	$+1+4i$	24	$+1-6i$	7		
$+1-2i$	36	$+1-4i$	25	$+5+4i$	9		

Modulus 7, $D = 49$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	4	$+3i$	8	-2	12	$+i$
1	$+1-2i$	5	$-1+3i$	9	$-2-3i$		
2	$-3+3i$	6	$-2-2i$	10	$-1+i$		
3	$+3+2i$	7	$+1+2i$	11	$+1+3i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	12	$+1-2i$	1	$+1+4i$	29	$+1+6i$	34
$+1+i$	46	-3	16	$+1-4i$	11	$+1-6i$	46
$+1-i$	34	$-3+2i$	45	$+5+2i$	42	$+5+4i$	9
$+1+2i$	7	$-3-2i$	27	$+5-2i$	6	$+5-4i$	15

Modulus $+5+4i$, $D = 41$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	3	$+1-3i$	6	$+2+2i$	9	$-1-3i$
1	$-2+i$	4	$-2i$	7	$-1+2i$	10	$+i$
2	$-1+i$	5	-3	8	-4		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	10	$+1-2i$	27	$+1+4i$	8	$+1+6i$	15
$+1+i$	32	-3	5	$+1-4i$	39	$+1-6i$	33
$+1-i$	22	$-3+2i$	3	$+5+2i$	4	$+5-4i$	32
$+1+2i$	31	$-3-2i$	6	$+5-2i$	29		

Modulus $+1+6i$, $D = 37$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	3	$+2+2i$	6	$-1+2i$	9	$+i$
1	$-1+i$	4	$+2-i$	7	$-3i$		
2	$-2i$	5	$-1+3i$	8	$-2+3i$		

Indices der Elementargrössen.

$+i$	9	$+1-2i$	24	$+1+4i$	2	$+1-6i$	11
$+1+i$	28	-3	34	$+1-4i$	3		
$+1-i$	19	$-3+2i$	32	$+5+2i$	5		
$+1+2i$	13	$-3-2i$	17	$+5-2i$	10		

Modulus $+5+2i$, $D=29$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	2	$-2i$	4	$+1+2i$	6	$-3+i$
1	$-1+i$	3	$+2+2i$	5	$+2+i$	7	$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i$	7	$+1+2i$	4	$-3+2i$	13	$+1-4i$	1
$+1+i$	22	$+1-2i$	26	$-3-2i$	9	$+5-2i$	11
$+1-i$	15	-3	3	$+1+4i$	20		

Modulus $+1+4i$ $D=17$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	1	1	$+1-2i$	2	-2	3	$+1-i$	4	$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i$	4	$+1-i$	3	$+1-2i$	1	$-3+2i$	7	$+1-4i$	10
$+1+i$	7	$+1+2i$	6	-3	3	$-3-2i$	5		

Modulus $-3+2i$, $D=13$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	1	$+1-i$	2	$-2i$	3	$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i$	3	$+1-i$	1	$+1-2i$	11	$-3-2i$	7
$+1+i$	4	$+1+2i$	10	-3	2		

Modulus 3, $D=9$.

Potenzen der Primitiv-Wurzel.

0	$+1$	1	$+1-i$	2	$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i$	2	$1+i$	3	$1+2i$	1	$1-2i$	3

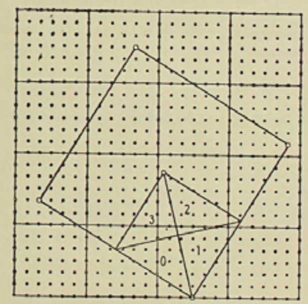
Modulus $1+2i$, $D=5$.

Primitiv-Wurzel.

$+i$

Indices der Elementargrössen.

$+i$	1	$1+i$	3	$1-i$	2	$1-2i$	1



$13+8i$

481 Div. per $9+20i$

$52+169i$	$208+195i$
$65+91i$	$221+117i$
$78+13i$	$234+39i$
$130+182i$	$74+111i$
$143+104i$	$148+222i$
$156+26i$	$185+37i$

BEMERKUNG.

Zu der Notiz [2] vergleiche man die bezüglichen Bemerkungen im Artikel **21** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

Die Notiz [3] entspricht (nach einer Mitteilung von P. BACHMANN) vollständig den bezüglichen Bestimmungen in der *Commentatio secunda* (Werke II, S. 113 ff.) über biquadratische Reste. Die Tabellen geben für jeden der betrachteten Moduln zuerst die Reste *) der ersten $\frac{1}{4}(D-1)$ *Potenzen einer primitiven Wurzel* bis zum Reste i, woraus die Reste der folgenden Potenzen leicht zu entnehmen sind. Dann folgen die *Indizes* für die Einheit i und die Primfaktoren $1+i$ und $\alpha+\beta i$, für die $\alpha \equiv 1 \pmod{4}$ und die Norm $\alpha^2+\beta^2$ kleiner als D ist, ausgenommen die Primzahl $a+bi$ selbst.

Für die Moduln $-3+2i$, 3 und $1+2i$ steht in der Handschrift Elementar-Wurzel statt Primitiv-Wurzel.

Die Figur enthält in dem inneren, schief stehenden (in der Handschrift rot gezeichneten) großen Quadrat ein vollständiges Restsystem modulo $13+8i$, von dem durch das kleinere Quadrat ein Viertel abgetrennt ist.

SCHLESINGER.

*) Es sind aber nicht überall die nach der im Text (S. 39) gegebenen Formel kleinsten Reste.

[VII.]

BEWEIS EINES SATZES AUS DER HÖHERN ARITHMETIK ZUR THEORIE DER BIQUADRATISCHEN RESTE GEHÖRIG.

[Aus Handbuch 21, Bg, S. 5, 6.]

Es sei a eine ganze positive oder negative Zahl von der Form $4m+1$, n eine ganze positive Zahl, die mit a keinen Theiler gemein habe. f bedeute den Complexus der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$, f' die ungeraden darunter, f'' die geraden; ferner bedeute g die Zahlen $\frac{1}{2}f''$, oder alle Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}n$ oder $1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(n-1)$, jenachdem n gerade oder ungerade, h die übrigen $\frac{1}{2}n+1$, $\frac{1}{2}n+2, \ldots, n$ oder $\frac{1}{2}(n+1)$, $\frac{1}{2}(n+3), \ldots, n$. Man hat sodann

$$\tfrac{1}{4}n(a-1) = \Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{4}\right]+\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{2}\right]$$

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}n(a-1) &= \Sigma\left[\frac{ga}{2n}+\frac{1}{2}\right]+\Sigma\left[\frac{ha}{2n}\right] = \Sigma\left[\frac{ga}{2n}+\frac{1}{2}\right]-\Sigma\left[\frac{ga}{2n}\right]+\Sigma\left[\frac{fa}{2n}\right]\\ &= \Sigma\left[\frac{ga}{2n}+\frac{1}{2}\right]-\Sigma\left[\frac{ga}{2n}\right]+\Sigma\left[\frac{fa}{4n}\right]+\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{2}\right]\\ &= \Sigma\left[\frac{ga}{2n}+\frac{1}{2}\right]+\Sigma\left[\frac{f'a}{4n}\right]+\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{2}\right],\end{aligned}$$

folglich

$$\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{4}\right] = \Sigma\left[\frac{ga}{2n}+\frac{1}{2}\right]+\Sigma\left[\frac{f'a}{4n}\right]$$

und

$$\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{4}\right] = \Sigma\left[\frac{f'a}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\Sigma\left[\frac{f'a}{4n}\right].$$

Nun aber ist

$$\left[\frac{ha}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{ha}{4n}+\frac{1}{4}\right] = \left[\frac{(n-h)a}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{(n-h)a}{4n}+\frac{1}{4}\right],$$

also

$$\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\Sigma\left[\frac{fa}{4n}+\frac{1}{4}\right] = 2\Sigma\left[\frac{ga}{4n}+\frac{1}{2}\right]-2\Sigma\left[\frac{ga}{4n}+\frac{1}{4}\right],$$

wenn n ungerade,

$$= 2\Sigma\left[\frac{ga}{4n}+\frac{1}{2}\right]-2\Sigma\left[\frac{ga}{4n}+\frac{1}{4}\right]-\left[\frac{a}{8}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{a}{8}+\frac{1}{4}\right],$$

wenn n gerade.

Das Theorem kann also auch so ausgedrückt werden:

»Die Summe aller

$$\left[\frac{f'a}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{f'a}{4n}\right],$$

wo f' alle ungeraden Zahlen bis n inclusive bedeutet, ist gleich der doppelten Summe aller

$$\left[\frac{ga}{4n}+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{ga}{4n}+\frac{1}{4}\right],$$

wenn g alle Zahlen bis $\frac{1}{2}n$ bedeutet, nur dass für $g=\frac{1}{2}n$ nur der halbe Werth gezählt werden muss«.

BEMERKUNG.

Gauss hat die Gelegenheiten, wo der hier mitgeteilte Satz in der Theorie der biquadratischen Reste verwendbar ist, nicht näher angedeutet; vermutlich hat er ihm bei Umformungen gedient ähnlich denjenigen, wie sie in der *Commentatio secunda*, art. 73—75, Werke II, S. 143 ff. und verwandten Aufzeichnungen auftreten.

Bachmann.

[VIII.]

[ZUM REZIPROZITÄTSGESETZ DER QUADRATISCHEN UND DER BIQUADRATISCHEN RESTE.]

[Auf einem Deckelblatt in Ec 2, Kapsel 43.]

[1.]

Das Fundamentaltheorem für die quadratischen Reste.

Es sei

$$\left(\frac{b}{a}\right)=1 \quad \text{wenn } b\mathrm{R}a$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)=-1 \quad \text{wenn } b\mathrm{N}a.$$

Dann ist (a, b ungerade positiv)

$$2\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)=1+\left(\frac{-1}{a}\right)+\left(\frac{-1}{b}\right)-\left(\frac{-1}{a}\right)\left(\frac{-1}{b}\right).$$

[2.]

Die verschiedenen Zahlen, die für den Modulus $a+ib$ allen Zahlen congruent sind, lassen sich am besten in *zwei* Complexen vorstellen; nemlich

1) $\alpha+i\alpha'$, wo α, α' alle geraden Zahlen zwischen $-a$ und $+a$,

2) $\beta+i\beta'$, wo β, β' alle ungeraden Zahlen zwischen $-b$ und $+b$

vorstellen.

[3.]

Sind $a+bi$, $a'+b'i$ Primzahlen; a, a' ungerade, b, b' gerade und

$$(a'+b'i)^{\frac{1}{4}(aa+bb-1)} \equiv i^{\mu} \text{ (mod. } a+bi)$$
$$(a+bi)^{\frac{1}{4}(a'a'+b'b'-1)} \equiv i^{\mu'} \text{ (mod. } a'+b'i),$$

so ist

$$\mu - \mu' - \tfrac{1}{2}\{(a'-1)b + (a-1)b' + bb'\}$$

durch 4 theilbar.

Elegant in reellen Zahlen so:

$$p = aa + bb \qquad\qquad a \equiv \alpha \equiv 1 \text{ (mod. } 4)$$
$$\pi = \alpha\alpha + \beta\beta$$

$$\text{Character } \frac{a\alpha + b\beta}{p} = \text{Character } \frac{a\alpha + b\beta}{\pi} + \tfrac{1}{4}(a\alpha + b\beta - 1)$$
$$\text{Character } \frac{a\alpha - b\beta}{p} + \text{Character } \frac{a\alpha - b\beta}{\pi} = \tfrac{1}{4}(a\alpha - b\beta - 1).$$

Noch schöner lässt sich das F[undamental] T[heorem] so generalisiren.
Es seien m, m' ungerade komplexe Zahlen,
p, p' ihre Normen,

$$m \equiv i^{\lambda} \text{ (mod. } 2+2i)$$
$$m' \equiv i^{\lambda'} \text{ (mod. } 2+2i);$$

Dann ist

$$\text{Ch} \frac{m}{m'} - \text{Ch} \frac{m'}{m} = \tfrac{1}{4}(p'-1)\lambda - \tfrac{1}{4}(p-1)\lambda' + \tfrac{1}{8}(p-1)(p'-1).$$

BEMERKUNG.

Unter Ch $\frac{m}{m'}$, Ch $\frac{m'}{m}$ ist hier der Exponent ρ bezw. ρ' in den Kongruenzen

$$m^{\frac{p-1}{4}} \equiv i^{\rho} \text{ (mod. } m'), \quad m'^{\frac{p'-1}{4}} \equiv i^{\rho'} \text{ (mod. } m)$$

zu verstehen.

BACHMANN.

[4.]

[Aus Handbuch 21, Bg, S. 24.]

Das Fundamentaltheorem für die biquadratischen Reste ist

$$\text{Dec. } \frac{A+Bi}{a+bi} - \text{Dec. } \frac{a+bi}{A+Bi} = \tfrac{1}{2}(A-1)b + \tfrac{1}{2}(a-1)B + \tfrac{1}{2}Bb.$$

BEMERKUNG.

Eine Datierung der Aufzeichnungen [1.]—[3.] ist nicht gelungen. Für [4.] ergibt sich als untere Zeitgrenze das Ende des Jahres 1813.

BACHMANN.

[IX.]

HAUPTMOMENTE DES BEWEISES FÜR DIE BIQUADRATISCHEN RESTE.

[Ein Zettel in Ec3, Kapsel 43.]

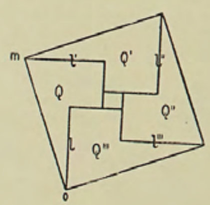
Rest $a+bi=m$, Modulus $A+Bi=M$, beide $\equiv 1 \pmod{2+2i}$.

1. Man bildet den ersten Quadranten von M und macht durch Division mit m dessen Variegation.

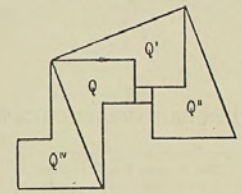
2. Man verbinde den Punkt 0 auf irgend eine Weise, doch ohne aus den Ligamenten der Variegation herauszugehn, mit $\frac{m-1}{1+i}$ durch die Linie l und zieht gleichfalls die Linien (l', l'', l''')

$$il+m,\quad -l+(1+i)m,\quad -il+im.$$

Dadurch wird das ganze Quadrat, das mittelste Quadrat abgerechnet, welches ohnehin den Intensor 0 hat, in 4 Theile symmetrisch getheilt; zwischen l und l' liegt Q, zwischen l' und l'' liegt Q' u. s. w.



3. Es sei $-iQ''' = Q^{\text{IV}}$. Wir setzen an die Stelle von Q''' dessen Variegation Q^{IV}; allein, da dessen Quadrate durchgehends Intensoren haben, die um 1 kleiner sind als die Intensoren von Q''', so wird noch der ganze Inhalt von Q^{IV} hinzuzusetzen seyn. Der Apparat sieht also so aus:



4. Ebenso sei

$$Q''-im = Q^{\text{V}},\quad im-iQ' = Q^{\text{VI}};$$

die Intensoren von Q^{VI} sind die von Q negativ, genau so wie die von Q^{V} ....

BEMERKUNG.

Vgl. zu diesem Bruchstücke die »*Vorbereitungen zur allgemeinen Theorie der biquadratischen Reste*« Werke II, S. 326—331. Unter »Variegation des ersten Quadranten von M durch Division mit m« dürfte das Quadrat mit den Ecken 0, $\frac{M}{m}$, $(1+i)\frac{M}{m}$, $i\frac{M}{m}$ zu verstehen sein. Der Begriff des Intensors wird a. a. O. in art. 4, Werke II, S. 328 festgesetzt. Statt »Ligamenten« braucht Gauss daselbst den Ausdruck »Ligaturen«; man geht wohl nicht fehl, wenn man dem Bruchstücke ein früheres Datum beilegt als den »Vorbereitungen«. Dasselbe dürfte gelten für Notizen des Nachlasses im Handbuch 18, Bd (begonnen Oktober 1805) S. 248—256 und andere in der Scheda An, S. 74—88 befindliche Studien, von denen Schering in seiner Fußnote Werke II, S. 334 Gebrauch gemacht zu haben scheint, die sich aber ihrer allzu skizzenhaften Form wegen zur Veröffentlichung nicht eignen.

Bachmann.

[X.]

ZUR THEORIE DES BIQUADRATISCHEN RESTES $1+i$.

[Zwei Zettel in Ec 3, Kapsel 43.]

[1.]

Modulus $a+bi=p$, b gerade und positiv, $aa+bb=D$.

1. Es sei Ω der Inbegriff der Zahlen $x+iy$, wo

$$\frac{x+iy}{a+bi}=\xi+i\eta,$$

und ξ, η zwischen 0 und $\frac{1}{2}$.

2. Man theile Ω in zwei Classen M und N, wo für M $\xi-\eta$ positiv, für N negativ ist, und nenne die Anzahl der in M und N enthaltenen Zahlen m, n. Man hat dann

$$m+n=\tfrac{1}{4}(D-1).$$

3. Der Decident von

$$\begin{array}{ll} 1+i \text{ ist dann} & \equiv 3m+2n \\ 1-i & \equiv 2m+n \\ -1+i & \equiv 3n \\ -1-i & \equiv m \end{array}$$

4. Durch Induction haben wir gefunden, dass wenn unter den Zahlen

$$\left[\frac{a}{b}\right], \left[\frac{3a}{b}\right], \left[\frac{5a}{b}\right], \left[\frac{7a}{b}\right], \ldots, \left[\frac{(b-1)a}{b}\right]$$

zusammen μ gerade und ν ungerade sind, man

$$m-\mu=n-\nu$$

haben werde, wodurch m und n bestimmt sind.

5. Beispiel $p=9+14i$

$$\left[\frac{9}{14}\right], \left[\frac{27}{14}\right], \left[\frac{45}{14}\right], \left[\frac{63}{14}\right], \left[\frac{81}{14}\right], \left[\frac{99}{14}\right], \left[\frac{117}{14}\right]=0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8;$$

$$\mu=3,\ \nu=4$$

[Beispiel] $p=5+12i$

$$\left[\frac{5}{12}\right], \left[\frac{15}{12}\right], \left[\frac{25}{12}\right], \left[\frac{35}{12}\right], \left[\frac{45}{12}\right], \left[\frac{55}{12}\right]=0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4;$$

$$\mu=4,\ \nu=2.$$

6. Man hat $\mu+\nu=\frac{1}{2}b$,

$$\nu=\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{3a}{b}\right]+\left[\frac{5a}{b}\right]+\cdots-2\left[\frac{a}{2b}\right]-2\left[\frac{3a}{2b}\right]-2\left[\frac{5a}{2b}\right]\cdots$$

Der erste Theil wird $=\frac{1}{4}(a-1)b$, insofern a positiv,

$$\begin{aligned} \nu &= \tfrac{1}{4}(a-1)b+2\left[\frac{a}{b}\right]+2\left[\frac{2a}{b}\right]+2\left[\frac{3a}{b}\right]+\cdots+2\left[\frac{\frac{1}{2}b.a}{b}\right] \\ &\qquad -2\left[\frac{a}{2b}\right]-2\left[\frac{2a}{2b}\right]-2\left[\frac{3a}{2b}\right]-\cdots-2\left[\frac{ba}{2b}\right] \\ &= \tfrac{1}{4}(a-1)b+2\varphi(b, a)-2\varphi(2b, a) \\ &= -\tfrac{1}{4}(a-1)b-2\varphi(a, b)+2\varphi(a, 2b). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} 2\varphi(a, 2b)-2\varphi(a, b) &= \tfrac{1}{2}(a-1)(b-1)-4\left\{\left[\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{3b}{a}\right]+\left[\frac{5b}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{\frac{1}{2}(a-3)b}{a}\right]\right\} \\ &\qquad \text{wenn } a\equiv 1 \pmod{4}, \\ &= \tfrac{1}{2}(a+1)(b-1)-4\left\{\left[\frac{b}{a}\right]+\left[\frac{3b}{a}\right]+\left[\frac{5b}{a}\right]+\cdots+\left[\frac{\frac{1}{2}(a-1)b}{a}\right]\right\} \\ &\qquad \text{wenn } a\equiv 3 \pmod{4}, \end{aligned}$$

also

$$\equiv 0 \text{ mod. } 4, \text{ wenn } a \text{ von der Form } 8n+1,\ 8n+7$$

$$\equiv 2 \text{ mod. } 4, \text{ wenn } a \text{ von der Form } 8n+3,\ 8n+5.$$

[7.] Ferner wird

$$m = \tfrac{1}{8}(D-1) + \tfrac{1}{4}b - \nu$$
$$n = \tfrac{1}{8}(D-1) - \tfrac{1}{4}b + \nu.$$

Also der Decident von $1+i$

$$= \tfrac{5}{8}(D-1) + \tfrac{1}{4}b - \nu$$
$$= \tfrac{5}{8}(D-1) + \tfrac{1}{4}ab + h,$$

wo

$h = 0$ für a [von der] Form $8n+1,\ 8n+7,$
$\phantom{h = {}}2$ „ „ „ „ „ $8n+3,\ 8n+5;$

man kann dafür auch $\frac{aa-1}{4}$ setzen.

$$\tfrac{1}{8}\{5aa + 5bb - 5 + 2ab + 2aa - 2\} = \tfrac{1}{8}(7aa + 2ab + 5bb - 7)$$
$$\equiv \tfrac{1}{8}(-aa + 2ab - 3bb + 1),$$

da die Differenz

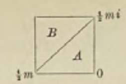
$$= aa + bb - 1.$$

So ist das Theorem, die obige Induction als richtig angenommen, bewiesen.

Grösseres Tableau der m, n,

$1+2i$	1. 0	$3+2i$	1. 2	$5+2i$	4. 3	$7+2i$	6. 7	$9+2i$	11.10	$11+2i$	15.16
$1+4i$	3. 1	$3+4i$	4. 2	$5+4i$	4. 6	$7+4i$	7. 9	$9+4i$	13.11	$11+4i$	18.16
$1+6i$	6. 3	$3+6i$	6. 5	$5+6i$	9. 6	$7+6i$	9.12	$9+6i$	14.15	$11+6i$	18.21
$1+8i$	10. 6	$3+8i$	9. 9	$5+8i$	11.11	$7+8i$	16.12	$9+8i$	16.20	$11+8i$	23.23
$1+10i$	13.10	$3+10i$	15.12	$5+10i$	16.15	$7+10i$	20.17	$9+10i$	25.20	$11+10i$	25.30
$1+12i$	21.15	$3+12i$	19.17	$5+12i$	22.20	$7+12i$	25.23	$9+12i$	29.27	$11+12i$	36.30
$1+14i$	28.21	$3+14i$	26.25	$5+14i$	27.28	$7+14i$	31.30	$9+14i$	34.35	$11+14i$	40.39
$1+16i$	36.28	$3+16i$	35.31	$5+16i$	37.33	$7+16i$	38.38	$9+16i$	42.42	$11+16i$	49.45
$1+18i$	45.36	$3+18i$	43.40	$5+18i$	44.43	$7+18i$	46.47	$9+18i$	51.50	$11+18i$	55.56
$1+20i$	55.45	$3+20i$	52.50	$5+20i$	54.52	$7+20i$	55.57	$9+20i$	61.59	$11+20i$	66.64
$1+22i$	66.55	$3+22i$	64.59	$5+22i$	65.62	$7+22i$	69.64	$9+22i$	72.69	$11+22i$	76.75

Eine besondere Untersuchung verdient die Anzahl der geraden und ungeraden [Zahlen] im ersten Quadranten. Sie ist respective der Zahl aller in A und B gleich.



Das Zeichen von i ändert nichts.

$1+2i$	0.1	$5+6i$	6. 9	$1+10i$	12.13	$11+6i$	20.19	$3+14i$	26.25		
$3+2i$	2.1	$1+8i$	8. 8	$3+10i$	14.13	$5+12i$	20.22	$13+6i$	25.25		
$1+4i$	2.2	$7+4i$	8. 8	$7+8i$	12.16	$13+2i$	22.21				
$3+4i$	2.4	$3+8i$	8.10	$11+2i$	16.15	$9+10i$	20.25				
$5+2i$	4.3	$9+2i$	10.11	$11+4i$	18.16	$11+8i$	24.22				
$1+6i$	4.5	$7+6i$	12. 9	$1+12i$	18.18	$13+4i$	22.24				
$5+4i$	6.4	$5+8i$	10.12	$9+8i$	20.16	$7+12i$	24.24				
$7+2i$	6.7	$9+4i$	12.12	$7+10i$	18.19	$1+14i$	24.25				

Dass die Zahlen der ersten Colonne immer gerade sind, beweiset man daher, dass, wenn die Summe aller Zahlen im ersten Quadr. $= t+iu$ ist, und

$$(a-bi)(t+iu) = T+iU$$

gesetzt wird, man

$$T+U = \tfrac{1}{4}(pp-1)$$

hat etc.

[2.]

Das obige nur auf Induction gegründete Lemma wird durch folgendes ersetzt.

Man hat für $a, b-a$ positiv

$$M = -P + Q - R$$

wo

$$P = \left[\tfrac{b}{a}\right] + \left[\tfrac{2b}{a}\right] + \left[\tfrac{3b}{a}\right] + \cdots + \left[\tfrac{\frac{1}{2}(a-1)b}{a}\right] = \varphi(a,b) = \tfrac{1}{4}(a-1)b - \varphi(b,a)$$

$$Q = \left[\tfrac{1}{2}b + \tfrac{a}{2b}\right] + \left[\tfrac{1}{2}b + \tfrac{3a}{2b}\right] + \left[\tfrac{1}{2}b + \tfrac{5a}{2b}\right] + \cdots + \left[\tfrac{1}{2}b + \tfrac{(b-1)a}{2b}\right]$$
$$= \tfrac{1}{4}bb + \varphi(2b,a) - \varphi(b,a)$$

$$R = \left[\tfrac{b+a}{b-a}\right] + \left[\tfrac{2(b+a)}{b-a}\right] + \left[\tfrac{3(b+a)}{b-a}\right] + \cdots + \left[\tfrac{\frac{1}{2}(b-a-1)(b+a)}{b-a}\right]$$
$$= \varphi(b-a,\ b+a).$$

Also

$$M = \tfrac{1}{4}bb - \tfrac{1}{4}(a-1)b + \varphi(2b, a) - \varphi(b-a,\, b+a).$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\varphi(b-a,\, b+a) &= \varphi(b-a,\, 2b) - \tfrac{1}{8}(b-a)^2 + \tfrac{1}{8}\\ &= \tfrac{1}{2}(b-a-1)b - \tfrac{1}{8}(b-a)^2 + \tfrac{1}{8} - \varphi(2b,\, b-a)\\ &= \tfrac{3}{8}bb - \tfrac{1}{4}ab - \tfrac{1}{8}aa - \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{8} - \varphi(2b,\, b-a).\end{aligned}$$

Also

$$M = \tfrac{1}{8}aa - \tfrac{1}{8}bb + \tfrac{3}{4}b - \tfrac{1}{8} + \varphi(2b,\, a) + \varphi(2b,\, b-a).$$

✂ Da nun a ungerade und b gerade ist, so wird

$$\begin{aligned}\varphi(2b,\, b-a) = {} & \left[\tfrac{b-a}{2b}\right] + \left[\tfrac{3(b-a)}{2b}\right] + \left[\tfrac{5(b-a)}{2b}\right] + \left[\tfrac{7(b-a)}{2b}\right] + \cdots + \left[\tfrac{(b-1)(b-a)}{2b}\right]\\ & + \left[\tfrac{b-a}{b}\right] + \left[\tfrac{2(b-a)}{b}\right] + \left[\tfrac{3(b-a)}{b}\right] + \cdots + \left[\tfrac{\frac{1}{2}b(b-a)}{b}\right],\end{aligned}$$

oder wenn die ersten Theile rückwerts genommen werden,

$$\begin{aligned}= {} & \left[\tfrac{a}{2b}\right] + \left[\tfrac{3a}{2b}\right] + \left[\tfrac{5a}{2b}\right] + \cdots + \left[\tfrac{(b-1)a}{2b}\right] + \tfrac{b-a-1}{2} + \tfrac{b-a-3}{2}\\ & + \tfrac{b-a-5}{2} + \cdots - \tfrac{a-1}{2}\\ & - \left[\tfrac{a}{b}\right] - \left[\tfrac{2a}{b}\right] - \left[\tfrac{3a}{b}\right] - \cdots - \left[\tfrac{\frac{1}{2}ba}{b}\right] + 1 + 2 + 3 + \cdots + \tfrac{1}{2}b - 1.\end{aligned}$$

Also

$$\varphi(2b, a) + \varphi(2b,\, b-a) = 2\left\{\left[\tfrac{a}{2b}\right] + \left[\tfrac{3a}{2b}\right] + \left[\tfrac{5a}{2b}\right] + \cdots + \left[\tfrac{(b-1)a}{2b}\right]\right\} + \tfrac{b(b-a-1)}{4}$$

und

$$M = 2\left\{\left[\tfrac{a}{2b}\right] + \left[\tfrac{3a}{2b}\right] + \left[\tfrac{5a}{2b}\right] + \cdots + \left[\tfrac{(b-1)a}{2b}\right]\right\} + \tfrac{1}{8}(D-1) + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}ab,$$

$$(\#)\quad \begin{aligned}M &= 2\varphi(2b, a) - 2\varphi(b, a) + \tfrac{1}{8}(D-1) + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}ab\\ &= -2\varphi(a, 2b) + 2\varphi(a, b) + \tfrac{1}{8}(D-1) + \tfrac{1}{4}ab\end{aligned}$$

je nachdem

$$(*)\quad \left\{\begin{aligned}M &= -\tfrac{1}{2}(a-1)(b-1) + 4\left\{\left[\tfrac{b}{a}\right] + \left[\tfrac{3b}{a}\right] + \left[\tfrac{5b}{a}\right] + \cdots + \left[\tfrac{\frac{1}{4}(a-3)b}{a}\right]\right\} \quad a \equiv 1\\ M &= -\tfrac{1}{2}(a+1)\underbrace{(b-1) + 4\left\{\left[\tfrac{b}{a}\right]\right.}_{+\frac{1}{8}(D-1) + \frac{1}{4}ab} + \left[\tfrac{3b}{a}\right] + \left[\tfrac{5b}{a}\right] + \cdots + \left.\left[\tfrac{\frac{1}{4}(a-1)b}{a}\right]\right\} \quad a \equiv 3\end{aligned}\right. \quad (\text{mod. } 4)$$

Man hat auch

$$\varphi(a, b) + \varphi(a, 2b) = \tfrac{1}{4}(a \mp 1)(b-1) + 2\left\{\left[\tfrac{2b}{a}\right] + \left[\tfrac{4b}{a}\right] + \left[\tfrac{6b}{a}\right] + \cdots + \left[\tfrac{[\frac{1}{4}a].2b}{a}\right]\right\}.$$

Es sei

$$\varepsilon = \pm 1 \text{ für } a \equiv \pm 1 \pmod{4},$$

so ist

$$\begin{gathered}(a-\varepsilon)b \text{ durch } 8\\ (a-\varepsilon)(a+2+\varepsilon) \text{ durch } 16\\ (a-\varepsilon)(a+3\varepsilon)[b] \text{ durch } 32\end{gathered}$$

theilbar.

$$\begin{aligned}M &\equiv \tfrac{1}{2}(a-\varepsilon) + \tfrac{1}{8}(D-1) + \tfrac{1}{4}ab\\ &\equiv \tfrac{1}{2}(a-\varepsilon) + \tfrac{1}{8}((a+b)^2 - 1).\end{aligned}$$

[3.]

Obige Formel $(*)$ kann auch so dargestellt werden:

$$M = \tfrac{1}{8}(D-1) + \tfrac{1}{4}ab + \tfrac{1}{2}(a \mp 1) - 4\left\{\left[\tfrac{b+a}{2b}\right] + \left[\tfrac{b+2a}{2b}\right] + \left[\tfrac{b+3a}{2b}\right] + \cdots + \left[\tfrac{b+\frac{1}{2}ba}{2b}\right]\right\}.$$

Nemlich sogleich aus $(\#)$

$$\begin{aligned}M = {} & \tfrac{1}{8}(D-1) - \tfrac{1}{4}ab + \tfrac{1}{2}b + 2\left[\tfrac{a}{2b}\right] + 2\left[\tfrac{2a}{2b}\right] + 2\left[\tfrac{3a}{2b}\right] + \cdots + 2\left[\tfrac{\frac{1}{2}ba}{2b}\right]\\ & + 2\left[\tfrac{(\frac{1}{2}b+1)a}{2b}\right] + \cdots + 2\left[\tfrac{ba}{2b}\right]\\ & - 2\left[\tfrac{a}{b}\right] - 2\left[\tfrac{2a}{b}\right] - 2\left[\tfrac{3a}{b}\right] - \cdots - 2\left[\tfrac{\frac{1}{2}ba}{b}\right]\\ = {} & \tfrac{1}{8}(D-1) - \tfrac{1}{4}ab + \tfrac{1}{2}b - 2\left[\tfrac{a+b}{2b}\right] - 2\left[\tfrac{2a+b}{2b}\right] - 2\left[\tfrac{3a+b}{2b}\right] - \cdots - 2\left[\tfrac{\frac{1}{2}(b-1)a+b}{2b}\right]\\ & - 2\left[\tfrac{\frac{1}{2}ba+b}{2b}\right] + 2\left[\tfrac{(b-1)a}{2b}\right] + 2\left[\tfrac{(b-2)a}{2b}\right] + \cdots + 2\left[\tfrac{(\frac{1}{2}b+1)a}{2b}\right] + 2\left[\tfrac{ba}{2b}\right]\\ = {} & \tfrac{1}{8}(D-1) + \tfrac{1}{4}ab + 2\left[\tfrac{a+2}{4}\right] - 4\left\{\left[\tfrac{b+a}{2b}\right] + \cdots + \left[\tfrac{b+\frac{1}{2}ba}{2b}\right]\right\}.\end{aligned}$$

Die Form der Verwandlung wird wol schon von dem Zeichen ✂ an mit Vortheil abgekürzt werden können. Vielleicht noch früher.

BEMERKUNG.

Zu [1.] art. 1, 2, 3 vgl. *Commentatio secunda* art. 72 (Werke II, S. 143), wo die Zeichen m, n durch g, g' und $D = a^2 + b^2$ durch p ersetzt sind. Der zu beweisende Satz steht am Ende des art. 76.

In [2.] bedeutet M dasselbe, wie m in [1.]. Die Ausgangsformel $M = -P + Q - R$ ist nichts anderes als der Ausdruck für g als Summe größter Ganzen, von der in art. 74 ausgegangen und woraus die Formel für M vor dem Zeichen $\succ\!\!\prec$ in völlig gleicher Weise hergeleitet wird. Die Formel für M beim Zeichen $\#$ ist die Schlußformel für das g des art. 74. Die weiteren Umformungen, welche für M denselben Ausdruck liefern, der für g in art. 75 (S. 148, Z. 2) gegeben wird, weichen von denjenigen der *Commentatio secunda* ab, wo »die Form der Verwandlung schon von dem Zeichen $\succ\!\!\prec$ an mit Vortheil abgekürzt« wird. Da der Satz in [1.] aus einem auf Induktion gegründeten Lemma gewonnen und dieses in [2.] durch ein anderes »ersetzt« wird, ist zu vermuten, daß der Ausdruck, den Gauss für g in art. 74 der *Commentatio secunda* hergeleitet hat, ihm zur Zeit der Niederschrift dieser Betrachtungen ebenfalls nur induktorisch gewiß war; die Übereinstimmung der weiteren Entwicklungen mit denen der *Commentatio secunda* aber läßt vermuten, daß sie nicht viel früheren Datums sind, als der in der letztern gegebene Beweis des Ergänzungssatzes für $1 + i$.

Bachmann.

[XI.]

[BEWEIS DES REZIPROZITÄTSSATZES FÜR DIE BIQUADRATISCHEN RESTE, DER AUF DIE KREISTEILUNG GEGRÜNDET IST.]

[Zettel in Ec 3, Kapsel 43.]

[1.]

Im Gebiete der complexen ganzen Zahlen, m complexe ungerade Primzahl, m' Adjuncte, $\left[\frac{k}{m}\right]$ diejenige der vier Einheiten $1, i, -1, -i$, welcher

$$k^{\frac{1}{4}(mm'-1)}$$

nach dem Modulus m congruent ist.

$$\left(\frac{k}{M}\right) = \text{Product aller } \left[\frac{k}{m}\right],$$

indem man für m sämmtliche einzelne Primfactoren [von M] substituirt.

[2.]

p reelle positive Primzahl $\equiv 1 \pmod{4} = mm'$
q reelle positive Primzahl $\equiv 1$, von p verschieden und $= nn'$
Die reellen Theile von $m, n \equiv 1 \pmod{4}$
x eine unbestimmt bleibende Grösse
$X = \frac{x^p - 1}{x - 1}$
e Primitivwurzel für den Modulus m, und zwar eine solche dass

$$e^{\frac{1}{4}(p-1)} \equiv i \pmod{m}$$

oder

$$\left(\frac{e}{m}\right) = i.$$

$$\begin{aligned} x + ix^{e} - x^{ee} - ix^{e^3} + x^{e^4} + \text{u.s.w.} - ix^{e^{p-2}} &= T \\ x^q + ix^{qe} - x^{qee} - ix^{qe^3} + x^{qe^4} + \text{u.s.w.} - ix^{qe^{p-2}} &= U. \end{aligned}$$

Dies vorausgesetzt hat man

$$\begin{aligned} TT &\equiv -m(x - x^e + x^{ee} - x^{e^3} + \text{u.s.w.} - x^{e^{p-2}}) \pmod{X} \\ &\equiv -mV \pmod{X}. \end{aligned}$$

Folgt unmittelbar aus Anwendung der Principien (*Disqu. Ar.* art. 345) unter Benützung der in der *Theoria Res. Biquadr.* artt. 18—20 gegebenen Sätze [*)].

Und da bekanntlich

$$VV \equiv p \pmod{X},$$

so wird

$$T^4 \equiv mmp \equiv m^3 m' \pmod{X}.$$

Ferner ist (*Disqu. Arithm.* art. 53 [**)])

$$T^q \equiv U \pmod{q}.$$

Auch ist leicht zu übersehen, dass

$$\left(\frac{q}{m}\right) U \equiv T \pmod{X}.$$

Aus der Verbindung dieser drei Sätze folgt leicht auf ähnliche Art wie *Theorematis fundamentalis demonstrationes et ampliat. növae,* art. 6 [***)]

$$\left(\frac{q}{m}\right)(m^3 m')^{\frac{1}{4}(q-1)} \equiv 1 \pmod{q},$$

folglich auch nach mod. n und mod. n'.

[*) Werke I, S. 422; II, S. 82 ff.]
[**) Werke I, S. 43.]
[***) Werke II, S. 58.]

Diese beiden Congruenzen aequivaliren den Gleichungen

$$\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^3\left(\frac{m'}{n}\right) = 1$$
$$\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{m}{n'}\right)^3\left(\frac{m'}{n'}\right) = 1$$

oder was dasselbe ist

$$\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{m'}{n}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$$
$$\left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{m'}{n'}\right) = \left(\frac{m}{n'}\right).$$

Da nun allgemein

$$\left(\frac{m'}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right) = 1, \quad \left(\frac{m'}{n'}\right)\left(\frac{m}{n}\right) = 1,$$

so wird, wenn man obige Gleichungen resp. mit $\left(\frac{m}{n'}\right)$, $\left(\frac{m}{n}\right)$ multiplicirt

$$\left(\frac{q}{m}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{m}{n'}\right) = \left(\frac{m}{q}\right).$$

[3.]

Der zweite Fall ist, wo $q \equiv 3 \pmod{4}$.

$$\begin{aligned} T &= x + ix^e - x^{ee} - ix^{e^3} + \cdots \\ T_1 &= x - ix^e - x^{ee} + ix^{e^3} + \cdots \\ U &= x^q + ix^{qe} - x^{qee} - ix^{qe^3} + \cdots \\ U_1 &= x^q - ix^{qe} - x^{qee} + ix^{qe^3} + \cdots \end{aligned}$$

$$\left(\frac{q}{m}\right) U \equiv T \pmod{X}$$

$$U_1 \equiv T_1 \left(\frac{q}{m}\right) \pmod{X}$$

$$T^q \equiv U_1 \pmod{q}$$

$$TT_1 \equiv (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)} p \pmod{X}$$

$$T^{q+1} \equiv \left(\frac{q}{m}\right) . (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)} . p \pmod{X;\ q}$$

$$T^{q+1} \equiv \left(\frac{-q}{m}\right) p$$

$$T^4 \equiv mmp$$

$$T^{q+1} \equiv m^{\frac{1}{2}(q+1)} p^{\frac{1}{4}(q+1)} \equiv \left(\frac{-q}{m}\right) p.$$

Also	Also	
$m^{\frac{1}{2}(q+1)} p^{\frac{1}{4}(q-3)} \equiv \left(\frac{-q}{m}\right)$	$q \equiv 3 \pmod{8}$	$q \equiv 7 \pmod{8}$
Erhoben zur Potenz $\frac{1}{2}(q-1)$	$\left(\frac{m}{q}\right) \equiv \left(\frac{-q}{m}\right)$	$*$ unten
$m^{\frac{1}{4}(qq-1)} p^{\frac{1}{8}(q-3)(q-1)} \equiv \left(\frac{-q}{m}\right)^{\frac{1}{2}(q-1)}$		?

In diesem Falle wird obige Gleichung

$$\left(\frac{m}{q}\right) \cdot p^{\frac{1}{2}(q-1)} \equiv \left(\frac{-q}{m}\right)^2 \pmod{q}.$$

Zugleich aber ist allgemein (für $q \equiv 3 \pmod{4}$)

$$\left(\frac{m}{q}\right)^2 \equiv p^{\frac{1}{2}(q-1)} \pmod{q},$$

woraus

$$\left(\frac{m}{q}\right)^2 \equiv \left(\frac{-q}{m}\right)^2$$

also

$$\left(\frac{m}{q}\right) = \left(\frac{-q}{m}\right).$$

(Man wird $-q = k$ setzen, also

$$\left(\frac{m}{k}\right) = \left(\frac{k}{m}\right)$$

allgemein, wenn k Primzahl $\equiv 1 \pmod{4}$, positiv oder negativ.)

[4.]

Zur Anwendung auf zweigliedrige complexe Zahlen sind zuvörderst zwei Sätze zu bemerken.

1) $\left(\frac{k}{l}\right) = 1$, wenn k, l zwei reelle Zahlen ohne gemeinsamen Divisor und l ungerade.

2) $\left(\frac{i}{l}\right) = i^{\frac{1}{4}(l-1)}$, wenn $l \equiv 1 \pmod{4}$, also

$$= (-1)^{\frac{1}{8}(l-1)}.$$

Es seien

$$a + bi = m, \quad A + Bi = M$$

ohne gemeinsamen Theiler; a, A beide $\equiv 1$.

$$\left(\frac{a+bi}{A+Bi}\right)\left(\frac{A}{A+Bi}\right) = \left(\frac{aA + bAi + (A+Bi)(a-bi)}{A+Bi}\right) = \left(\frac{aA+bB}{A+Bi}\right) = \left(\frac{A+Bi}{aA+bB}\right)$$

oder da

$$\left(\frac{A}{A+Bi}\right) = \left(\frac{Bi}{A}\right) = \left(\frac{i}{A}\right) = i^{\frac{1}{4}(A-1)},$$

so wird

$$\left(\frac{m}{M}\right) i^{\frac{1}{4}(A-1)} = \left(\frac{M}{aA+bB}\right)$$

und ebenso

$$\left(\frac{M_1}{m_1}\right) i^{\frac{1}{4}(a-1)} = \left(\frac{m_1}{aA+bB}\right),$$

also multiplicirend

$$\left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{M_1}{m_1}\right) i^{\frac{1}{4}(a+A-2)} = \left(\frac{Mm_1}{aA+Bb}\right) = \left(\frac{aA+bB+(aB-bA)i}{aA+bB}\right)$$

$$= \left(\frac{i}{aA+Bb}\right) = i^{\frac{1}{4}(aA+bB-1)}.$$

Folglich

$$\left(\frac{m}{M}\right)\left(\frac{M_1}{m_1}\right) = i^{\frac{1}{4}(aA+bB-1-A-a+2)} = i^{\frac{1}{4}((a-1)(A-1)+bB)}$$

$$= i^{\frac{1}{4}bB} = \varepsilon,$$

also ± 1 je nachdem $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}B$ nicht beide ungerade [oder] beide ungerade. Also

$$\left(\frac{m}{M}\right) = \varepsilon\left(\frac{M}{m}\right) \qquad \text{W. Z. B. W.}$$

BEMERKUNG.

Vergl. die auf diesen Beweis bezüglichen Ausführungen in dem Artikel **23** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«. SCHERING bemerkt (Göttinger Nachrichten 1879, S. 384), daß GAUSS in einem Briefe an EISENSTEIN (wie dieser an RIEMANN und RIEMANN wieder mündlich an SCHERING mitgeteilt habe) die Grundzüge seines Beweises des biquadratischen Reziprozitätssatzes mit Hilfe der Kreisteilung angegeben haben soll; leider sind die Briefe von GAUSS an EISENSTEIN nicht wieder aufgefunden worden.

SCHLESINGER.

[XII.]

[ZUR GESCHICHTE DER THEORIE DER KUBISCHEN UND BIQUADRATISCHEN RESTE.]

GAUSS an SOPHIE GERMAIN.

Votre lettre du 20 Fevrier, mais qui ne m'est parvenue que le 12 Mars, a été pour moi la source d'autant de plaisir que de surprise. Combien l'acquisition d'une amitié aussi flateuse et precieuse est-elle douce à mon coeur. L'interêt vif, que Vous avez pris à mon sort pendant cette guerre funeste merite la plus sincere reconnaissance. Assurément, Votre lettre au Général PERNETY m'eût été fort utile, si j'avois été dans le cas d'avoir recours à une protection specielle de la part du gouvernement françois. Heureusement les evenemens et les suites de la guerre ne m'ont pas touché de trop près jusqu'ici, bienque je sois persuadé, qu'elles auront une grande influence sur le plan futur de ma vie. Mais comment Vous décrire mon admiration et mon étonnement, en voïant se metamorphoser mon correspondant estimé Mr. LEBLANC en cet illustre personnage, qui donne un exemple aussi brillant de ce que j'aurois peine de croire. Le goût pour les sciences abstraites en general et surtoût pour les mysteres des nombres est fort rare: on ne s'en etonne pas; les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se decelent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui, par nos moeurs et par nos prejugés, doit rencontrer infiniment plus d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches epineuses, sait neansmoins franchir ces entraves et penetrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talens tout à fait extraordinaires, le génie superieur. En effet rien ne pourroit me prouver d'une maniere plus flateuse et moins equivoque, que

les attraits de cette science, qui a embelli ma vie de tant de jouissances, ne sont pas chimeriques, que la predilection, dont Vous l'avez honorée.

Les notes savantes, dont toutes Vos lettres sont si richement remplies, m'ont donné mille plaisirs. Je les ai étudiées avec attention, et j'admire la facilité, avec laquelle Vous avez penetré toutes les branches de l'Arithmetique, et la sagacité avec laquelle Vous les' avez su generaliser et perfectionner. Je Vous prie d'envisager comme une preuve de cette attention, si j'ose ajouter une remarque à un endroit de Votre derniere lettre. Il me semble, que la proposition inverse, savoir »si la somme des puissances n^emes^ de deux nombres quelconques est de la forme $hh+nff$, la somme de ces nombres eux-mêmes sera de la meme forme« est enoncée un peu trop generalement. Voici un exemple où cette règle est en défaut:

$$15^{11}+8^{11} = 8649755859375+8589934592 =$$
$$8658345793967 = 1595826^2+11\,.\,745391^2$$

Neanmoins $15+8=23$ ne peut se reduire sous la forme $xx+11yy$.

Il en est de même de la proposition: si l'un des facteurs de la formule $yy+nzz$ (n étant un nombre premier) est de la forme $(1, 0, n)$, l'autre appartient necessairement à la meme forme. Votre demonstration ne prouve que ce, qu'aucune autre forme indéfinie, que telle qui est equivalente à $(1, 0, n)$, multipliée par la forme $(1, 0, n)$, ne peut donner le produit $(1, 0, n)$, mais cette demonstration ne s'étend pas sur les nombres définis. Soit, pour le déterminant $-n$, C une classe de formes, quelconque mais ni equivalente à la principale, ni à une autre classe anceps, soit D la classe resultante de la duplication de C (qui sera differente de la principale), enfin soit D' la classe opposée à D. Il s'ensuit, que de la composition de $C+C+D'$ résulte la classe principale. Ainsi si les deux nombres f, g peuvent être representés par une forme de la classe C, et le nombre h par une forme de la classe D', le produit $fg \times h$ peut se reduire à $(1, 0, n)$; mais il est facile [de voir] que fg ne se reduit pas seulement à D ou D' mais aussi à $(1, 0, n)$. Nous avons donc ici le cas, qu'un facteur fg, et le produit $fg\,.\,h$ sont de la forme $(1, 0, n)$, sans que pourtant l'autre facteur y appartienne nécessairement. Au reste on voit facilement que le premier facteur doit être composé, sans cela la proposition serait juste. Dans l'exemple ci dessus le facteur $\frac{15'' + 8''}{23}$ enveloppe le diviseur 67.

Depuis cinq ans des travaux astronomiques — auxquels pour le dire en passant je dois surtout l'heureuse situation, dont j'ai joui pendant la vie de notre duc, le victime malheureux de son attachement fidel à la maison de Prusse — m'ont empeché de me delivrer autant qu'auparavant à ma predilection pour l'Arithmetique et les autres branches de l'analyse. Je n'ai pas pourtant negligé celle ci tout à fait. Tout au contraire j'ai rassemblé peu à peu un grand nombre de recherches, qui un jour fourniront un autre volume — sinon deux — certainement pas moins interessant que le premier. Même dans le dernier hiver j'ai reussi à y ajouter une branche entierement nouvelle. C'est la theorie des residus cubiques et des residus biquarrés, portée à un degré de perfection égal à celui, qu'a atteint la theorie des residus quarrés. Je mets cette theorie, qui repand un nouveau jour sur les residus quarrés parmi les recherches les plus curieuses donc je me sois jamais occupé. Je ne saurais Vous en donner une idée sans écrire un Memoire expres. Voici pourtant quelque theoreme special, qui pourra servir d'un petit echantillon.

I. Soit p un nombre premier de la forme $3n+1$. Je dis, que 2 (c. à. d. $+2$ et -2) est residu cubique de p, si p se reduit à la forme $xx+27yy$; que 2 est Non-residu cubique de p, si $4p$ se reduit à cette forme. P. E. 7. 13. 19. 31. 37. 43. 61. 67. 73. 79. 94. Vous ne trouveres que $31 = 4+27$, $43 = 16+27$, et $2 \equiv 4^3 \pmod{31}$, $2 \equiv (-9)^3 \pmod{43}$.

II. Soit p un nombre premier de la forme $8n+1$. Je dis que $+2$ et -2 seront residus ou non-residus biquarrés de p, suivant ce que p est ou n'est pas de la forme $xx+64yy$. Par ex. parmi les nombres 17. 41. 73. 89. 97. 113. 137 Vous ne trouves que $73 = 9+64$, $89 = 25+64$, $113 = 49+64$, et $25^4 \equiv 2 \pmod{73}$, $5^4 \equiv 2 \pmod{89}$, $20^4 \equiv 2 \pmod{113}$.

Les demonstrations de ces theoremes et de ceux qui sont plus generaux sont intimement liées à des recherches delicates. — Voici une autre proposition relative aux residus quarrés, dont la demonstration est moins cachée: je ne l'ajoute pas, pour ne pas Vous derober le plaisir de la developper Vous-même, si Vous la trouveres digne d'occuper quelques momens de Votre loisir.

Soit p un nombre premier. Soient les $p-1$ nombres inferieurs à p partagés en deux classes

$$A \ldots\ldots\ldots 1, 2, 3, 4, \ldots, \tfrac{1}{2}(p-1)$$
$$B \ldots\ldots\ldots \tfrac{1}{2}(p+1),\ \tfrac{1}{2}(p+3),\ \tfrac{1}{2}(p+5), \ldots, p-1.$$

Soit a un nombre quelconque non-divisible par p. Multipliés tous les nombres A par a; prenés en les moindres residus selon le module p, soient, entre ces residus, α appartenants à A et β appartenants à B de sorte que $\alpha+\beta = \frac{1}{2}(p-1)$. Je dis, que a est residu quarré de p lorsque β est pair, non-residu lorsque β est impair.

On peut tirer de cette proposition plusieurs consequences très remarquables; entre-autres, elle donne le moïen d'etendre l'induction, par laquelle on rassemble des cas speciels du theoreme fondamental aussi loin qu'on veut, ce qui ne pourroit se faire par les methodes exposés art. 116—124[*)].

J'ai donné dans mon ouvrage deux demonstrations rigoureuses de ce fameux theoreme et j'en possede encore trois autres toutes entierement differentes entre elles; deux d'entre elles même peuvent être conduites de deux differentes manieres chacune: ainsi je pourrois soutenir que je peus le demontrer de sept manieres differentes. Les autres demonstrations que je prefererois pour l'elegance aux deux données dans mon ouvrage seront publiées aussitot que j'y trouverai l'occasion. A Propos, dans la premiere demonstration qui se trouve dans la IV. section il s'est glissé une faute legere que je n'ai aperçue, qu'apres que je ne pouvois plus l'indiquer. Il faut donc faire la correction suivante.

p. 146 (cas (4)) l. 21 lisés comme il suit: »Facile vero perspicitur, ex ista aequatione deduci posse haec $a'pRh \ldots (\alpha)$, $\pm ahRa' \ldots (\beta)$, $\pm ahRp \ldots (\gamma)$. Ex (α) sequitur, perinde ut in (2), h vel utriusque a', p vel neutrius residuum esse. Sed casus prior ideo est impossibilis, quod ex hRa' et (β) sequeretur aRa' contra hypoth. Quamobrem necessario est hNp adeoque, per (γ), aNp. Q. E. D.«[**)]

[*) Werke I, S. 87—94.]

[**) Werke I, S. 108 ist die Stelle nach der Anmerkung berichtigt, die GAUSS dem art. 2 der Abhandlung *Theorematis arithmetici demonstratio nova*, Comm. Soc. Reg. scient. Gotting. **16**, 1808, Comm. classis mathem. ad annos 1801—1805, S. 70 beigefügt hat; vergl. Werke I, S. 477.]

Au reste à la page 144 il se trouve une faute d'impression non-indiquée, savoir art. 139 ligne 3 au lieu de $\pm aNp$ il faut lire $\pm aRp$[*]].

J'aurois repondu plus tot à Votre lettre, mais la decouverte d'une nouvelle planete par M. OLBERS m'a un peu distrait. Par le premier essai que j'ai fait sur son orbite, je trouve son mouvement considerablement plus vite que celui de Cérès, Pallas et Junon, savoir 978″ par jour. L'inclinaison de l'orbite de $7^{0}6'$. L'excentricite 0,1. Cette planete a beaucoup plus de clarté que Cérès, Pallas et Junon, et j'espere la trouver parmi les observations de l'histoire celeste, peut être même parmi celles de FLAMSTEED. Je viens d'achever un ouvrage etendu sur les methodes, qui me sont propres, à determiner les orbites des planetes. Mais quoique je l'aie ecrit en allemand, je trouve beaucoup de difficulté d'y engager un libraire.

La guerre a suspendu tout commerce, plusieurs de nos plus grands libraires l'ont refusé. Je suis à present à traiter avec un autre qui se montre un peu plus courageux. S'il trouvera son conte à cette entreprise, peut être il sera encouragé par-là à risquer la publication d'un second volume de mes *disquisitiones*.

Continuez, Mademoiselle, de me favoriser de Votre amitié et de Votre correspondance, qui font mon orgueil, et soïes persuadée, que je suis et serai toujours avec la plus haute estime

Votre plus sincère admirateur
CH. FR. GAUSS.

Bronsvic ce 30 April 1807
jour de ma naissance.

GAUSS an OLBERS.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 1 (1900), S. 376, 377.]

Braunschweig, 1807 Juli 21.

. . . .

Bei meiner Rückkunft habe ich hier einige Briefe aus Paris vorgefunden von BOUVARD, LAGRANGE und SOPHIE GERMAIN . . . . Meinen Brief hat LAGRANGE wirklich, wie er selbst schreibt[*]], sogleich im Institut und Bureau des Longitudes vorgelesen . . . . .

LAGRANGE interessirt sich noch mit vieler Wärme für die Astronomie und höhere Arithmetik; die beiden Probe-Theoreme (in welchen Primzahlen 2 ein kubischer oder ein biquadratischer Rest ist), die ich auch Ihnen vor einiger Zeit mittheilte, hält er für »ce qu'il peut y avoir de plus beau et de plus difficile à démontrer«. Aber die SOPHIE GERMAIN hat mir die Beweise derselben geschickt; noch habe ich sie zwar nicht durchgehen können, ich glaube aber, dass sie gut sind; wenigstens hat sie die Sache von der rechten Seite angegriffen, nur etwas weitläufiger sind sie als nöthig sein wird. . . . .

[*] Werke I, S. 107 ist dieser Druckfehler berichtigt.]

[*] Der Brief von LAGRANGE vom 31. Mai 1807 ist abgedruckt *Oeuvres de Lagrange* t. XIV, 1892, S. 298.]

GAUSS an OLBERS.

[WILHELM OLBERS, Sein Leben und seine Werke II, 1 (1900), S. 629.]

Göttingen, 1816 März 21.

. . . .

Für Ihre Nachrichten, die Pariser Preise betreffend, bin ich Ihnen sehr verbunden. Ich gestehe zwar, dass das FERMATsche Theorem als isolirter Satz für mich wenig Interesse hat, denn es lassen sich eine Menge solcher Sätze leicht aufstellen, die man weder beweisen, noch widerlegen kann. Allein ich bin doch dadurch veranlasst, einige alte Ideen zu einer grossen Erweiterung der höheren Arithmetik wieder vorzunehmen. Freilich gehört diese Theorie zu den Dingen, wo man nicht voraussehen kann, inwiefern es gelingen wird, dunkel vorschwebende entfernte Ziele zu erreichen. Ein glückliches Gestirn muss mit obwalten, und meine Lage und so vielfache abziehende Geschäfte erlauben mir freilich nicht, solchen Meditationen so nachzuhängen, wie in den glücklichen Jahren 1796—1798, wo ich die Hauptsachen meiner *Disquisitiones Arithmeticae* bildete. Allein ich bin überzeugt, wenn das Glück mehr thun sollte, als ich erwarten darf, und mir einige Hauptschritte in jener

Theorie glücken, auch der Fermatsche Satz nur als eines der am wenigsten interessanten Corollarien dabei erscheinen wird. . . . .

Gauss an Bessel.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel, Leipzig 1880, S. 246.]

Göttingen 23. December 1816.

. . . .

Seit mehreren Monaten sind es gewisse Untersuchungen aus der höheren Arithmetik, auf die ich wiederum zurückgekommen bin, und die mich schon seit beinahe 12 Jahren geplagt haben. Sie gehören zu der Gattung derjenigen, wo man nicht im voraus sagen kann: dies will ich thun, sondern wo, vielleicht nach 999 misslungenen Versuchen, eine glückliche 1000-te Combination zum Ziele führt. Jetzt habe ich zwar das Ziel erreicht, doch immer noch auf einem nicht genug kurzen Wege. Der Gegenstand ist die Theorie der biquadratischen Reste, deren ich vielleicht schon mehrere Male gegen Sie erwähnt habe. Auch diess Brüten über einer Sache, ohne dass mittheilbare Resultate daraus hervorgehn, hat mich in anderen Dingen und besonders in meiner Correspondenz zurückgesetzt. Ich werde jetzt nur soviel davon aufschreiben, dass die neuen noch in der Luft schwebenden Ideen wenigstens meinem Gedächtnis erhalten werden.

BEMERKUNG.

Der hier in der ursprünglichen Schreibung wiedergegebene Brief an Sophie Germain ist zuerst 1879 von dem Fürsten B. Boncompagni als Autographie veröffentlicht worden. Die Urschrift befindet sich jetzt im Gaussarchiv, während zwei frühere und ein späterer Brief von Gauss an dieselbe Empfängerin in der Bibliothèque nationale zu Paris aufbewahrt werden. Die Briefe der Sophie Germain an Gauss sind veröffentlicht unter dem Titel: *Cinq lettres de Sophie Germain à Charles Fréderic Gauss publiées par B. Boncompagni d'après les originaux possédés par la Société Royale des sciences à Göttingen. Berlin 1880.* Über die Bedeutung des hier abgedruckten Briefes vom 30. April 1807 vgl. E. Schering, Göttinger Nachrichten 1879, S. 381 ff.

Die Nachricht, auf die sich Gauss in dem Schreiben an Olbers vom 21. März 1816 bezieht, ist in einem Briefe vom 7. März 1816 enthalten, den Olbers aus Bremen an Gauss gerichtet hat*). Sie betrifft

*) W. Olbers, Sein Leben und seine Werke II, 1, S. 626.

eine von der Pariser Akademie für 1818 gestellte Preisaufgabe, von der Olbers schreibt: [sie] »scheint mir recht für Sie geschaffen, lieber Gauss.« Die Aufgabe lautet, soweit sie hier in Betracht kommt, in der Olbersschen Übersetzung wie folgt:

». . . Nun ist also nur noch das andere Theorem zu beweisen: Daß es nämlich keine Potenz außer dem Quadrat gibt, die in zwei andere Potenzen von demselben Grade zerlegt werden könne.«

Schlesinger.

[ZUR THEORIE DER FORMEN.]

[I.]

[ÜBER POLYGONALZAHLEN.]

[Eintragung im LEISTE*), S. 68.]

[1.]

Die Reihen der Polygonalzahlen lassen sich auch rückwerts fortsetzen, und dadurch kommt man bei allen, die Trigonalzahlen und Quadratzahlen ausgenommen, auf Zahlen, welche von den übrigen ganz verschieden sind.

Pentagonalzahlen

100, 77, 57, 40, 26, 15, 7, 2, 0, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117 . . .

Hexagonalzahlen

105, 78, 55, 36, 21, 10, 3, 0, 1, 6, 15, 28, 45, 66 . . .

[2.]

Jede Zahl besteht aus drei Trigonalzahlen.

Jede Zahl der Form $8n+1$ drei $\square$ $i, pp, pp;\ i, pi, pi$ —
$8n+3$ drei $\square$ i, i, i —
$8n+5$ drei $\square$ i, pp, pi —
$8n+7$ vier $\square$ i, i, i, pi —

[*) Gemeint ist das durchschossene Exemplar von CHR. LEISTE, *Die Arithmetik und Algebra*, Wolfenbüttel 1790, das GAUSS besessen und dessen Durchschußblätter er von 1796 an bis über 1797 hinaus zu wissenschaftlichen Aufzeichnungen benutzt hat. Die Seitenzahl bezieht sich auf die Seite des Leistetextes, der gegenüber sich die GAUSSsche Aufzeichnung befindet.]

BEMERKUNG.

Die vorstehende Aufzeichnung bezieht sich auf den S. 68 stehenden Text des LEISTEschen Werkes, der von den Polygonalzahlen handelt. Solche zum Text gehörige Bemerkungen finden sich auf den Durchschußblättern nur sehr spärlich; wir haben außer der hier abgedruckten noch zu den Seiten 9, 36, 37, 44, 105, 108 welche bemerkt.

Vergl. zu der vorstehenden Aufzeichung die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 17 und 18 vom 3. und 10. Juli 1796 und die darauf bezüglichen Bemerkungen in dem Artikel **12** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«. Es bedeutet:

i impar,
pp pariter par,
pi pariter impar.

Die »series numerorum pentagonalium retro continuata« findet sich schon bei EULER in der Abhandlung *Observatio de summis divisorum*, Novi Comment. Acad. Petrop. 5 (1754/5) 1760, S. 64, Opera omnia, ser. I, vol. 2, S. 380; er gibt die Zahlen 2, 7, 15, 26, 40, 57, 77, 100, 126.

SCHLESINGER.

[II.]

[ÜBER DIE ANZAHL DER ZERLEGUNGEN EINER PRIMZAHL IN DREI QUADRATE.]

[Ein Zettel in Ea 5, Kapsel 40.]

Wenn A eine Primzahl ist, so gibt es so viele Formen der Divisoren $4n+1$ von $\square + A\square$ als es verschiedene Arten gibt A in drei Quadrate zu zerlegen.

Bew[eis.]

1. *Eine jede Zerlegung von A in drei Quadrate gibt eine Form oder einen Multiplicator.*

Ist nemlich

$$A = aa + bb + cc,$$

so erhält man dadurch den Multiplicator $aa+bb$ bei $\frac{ca}{b}$ oder $\frac{cb}{a}$. —

$$aa+bb;\ aa+cc;\ bb+cc$$

sind verbunden und geben folglich nur eine Form.

2. *Jeder Multiplicator gibt eine Zerlegung von A.*

Man darf voraussetzen, dass das von allen Zahlen kleiner als A gilt (vermöge der Depressionsmethode), dass also der Multiplicator $(= \triangle) = mm + nn + pp$, so dass $mm+nn$ ein Multiplicator von A oder

$$(mm+nn)A = xx + (mn+nn+pp)yy$$

also

$$A = yy + \frac{ppyy+xx}{mm+nn} = yy + zz + ww.$$

Beide Sätze gelten nicht bloss von Primzahlen, sondern auch von zusammengesetzten. (Zus. $(zz+ww)(mm+nn+pp) = xx + App.$)

3. Es bleibt uns also zu beweisen übrig, dass wenn A eine Primzahl ist, kein Multiplicator (im eingeschränkten Sinne) zu mehr als einer Zerlegung gehören könne. Bei zusammengesetzten Zahlen ist dies nicht immer der Fall, z. B. die Zerlegungen von 185 in

$$4+81+100 \text{ und } 36+49+100$$

geben einen Multiplicator 85 bei $\frac{10.9}{2}$ und $\frac{10.7}{6}$, beide gleich 45. Der kleinste Multiplicator ist 9, so dass

$$1.2+2.9-2.10 = 0 \text{ und } 1.6+2.7-2.10 = 0.$$

4. Es sei also

$$A = aa+bb+cc = a'a'+b'b'+c'c'$$

und beide Zerlegungen sollen zusammenhangende Multiplicatoren geben, also

$$(aa+bb)(a'a'+b'b') = \square + A\square$$

oder wenn

$$a'a'+b'b' = mm+nn+pp = \triangle,$$
$$am+bn+cp = 0$$

(weil

$$a'a'+b'b' = (aa+bb)xx+2qxy+ryy = \square+\square+\square).$$

Daher müsste sein

$$(mm+nn)A = \square + \triangle\square,$$

und

$$mm+nn = \square + \triangle\square$$

(weil $A = \square + \triangle\square$ eine Primzahl), welches nur möglich ist, wenn

$$mm+nn = \square;$$

wir müssen also gegenwärtig setzen

$$a'a'+b'b' = ff+gg,$$

so dass

$$af + bg = 0,$$

also wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{\mu t}{\mu u},$$

$$f = \nu u;\ g = \nu t,$$

und so hätten wir endlich für A die beiden Zerlegungen

$$\mu\mu tt + \mu\mu uu + cc$$

und

$$\nu\nu tt + \nu\nu uu + c'c',$$

welches nicht sein kann, wenn A eine Primzahl ist; daher

$$\mu = \nu$$

und beide Zerlegungen dieselben sind.

Erläuterungen.

1) Wenn $aa + bb$ und $a'a' + b'b'$ $(= \triangle)$ zusammenhangen, so ist

$$(aa + bb)\triangle = xx + (aa + bb + cc)yy,$$

woraus sogleich eine Zerlegung von $\triangle$ in drei Quadrate folgt, wovon das eine $= yy$. Man wird leicht finden, dass diese Quadrate

$$mm + nn + pp$$

von der Art sind, dass

$$am + bn + cp = 0.$$

2) Wenn

$$aa' + bb' + cc' = 0,$$

so kann man allemal setzen

$$(aa + bb + cc)(a'a' + b'b') = AA + (a'a' + b'b' + c'c')BB$$

und

$$(a'a' + b'b' + c'c')(aa + bb) = A'A' + (aa + bb + cc)B'B';$$

man setze

$$B = c;\ B' = c' \text{ und } A = ab' - a'b = A'.$$

Additamentum:

Numerorum non primorum in terna quadrata distributio.

10 9, 1 | **18** 9, 9 — 16, 1, 1 | **21** 16, 4, 1 | **22** 9, 9, 4 |
25 16, 9 | **26** 25, 1 — 16, 9, 1 | **27** 9, 9, 9 — 25, 1, 1 |
30 25, 4, 1 | **33** 25, 4, 4 — 16, 16, 1 | **34** 25, 9 — 16, 9, 9 |
35 25, 9, 1 | **38** 36, 1, 1 — 25, 9, 4 | **42** 25, 16, 1 |
45 36, 9 — 25, 16, 4 | **46** 36, 9, 1 | **49** 36, 9, 4 |
50 49, 1 — 25, 25 — 25, 16, 9 | **51** 49, 1, 1 — 25, 25, 1 |
54 49, 4, 1 — 36, 9, 9 | **57** 49, 4. 4 — 25, 16, 16 |
58 49, 9 | **62** 49, 9, 4 — 36, 25, 1 | **65** 64, 1 — 49, 16 — 36, 25, 4 |
66 64, 1, 1 — 49, 16, 1 — 25, 25, 16 |

Selecta

205 196, 9 — 169, 36 — 144, 36, 25 |
221 196, 25 — 196, 16, 9 — 169, 36, 16 — 121, 100 — 121, 64, 36 |

BEMERKUNGEN.

Diese Aufzeichnung von Gauss ist wohl als ein früher Anlauf zu dem Ziele zu betrachten, welches er mit seinem berühmten Satze im art. 291 der *Disquisitiones Arithmeticae* erreicht hat. Nach der Ausdrucksweise jener Zeit heißt Teiler von $x^2 + Ay^2$ jede Primzahl Δ, von der ein Vielfaches durch die Form darstellbar, für welche also $M\Delta = x^2 + Ay^2$ ist, allgemeiner eine quadratische Form $\Delta x^2 + 2qxy + ry^2$ mit der Determinante $-A$, deren erster Koeffizient gleich Δ und durch welche dann auch der Multiplikator M darstellbar ist. Ist $\Delta = 4n + 1$, so folgt wegen $\left(\frac{-A}{\Delta}\right) = 1$ auch $\left(\frac{\Delta}{A}\right) = 1$ und

$$(-1)^{\frac{\Delta - 1}{2}} = 1,$$

die Form gehört also zum Hauptgeschlecht. Bei solcher Deutung würde der Gausssche Satz also lauten: **Wenn A Primzahl ist, so gibt es soviel Formen** (Klassen) **des Hauptgeschlechts, als es verschiedene Arten gibt, A in drei Quadrate zu zerlegen**, eine Aussage, die nicht ganz zutreffend wäre.

Bei dem Versuche, den Beweisgang aufzuklären, werde auch $A = 4n + 1$ vorausgesetzt.

Zu 1. Ist $A = a^2 + b^2 + c^2$ und $a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod{4}$, so wird

$$x^2 + Ay^2 = x^2 + (a^2 + b^2 + c^2)y^2$$

für $x = ac$, $y = b$ resp. $x = bc$, $y = a$ gleich

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2) \text{ resp. } (a^2 + b^2)(a^2 + c^2).$$

zu jeder Zerlegung von A gehört also ein Teiler $a^2+b^2 \equiv 1 \pmod{4}$ und eine Form

$$(a^2+b^2)x^2+2qxy+ry^2$$

mit der Determinante $-A$, durch welche auch die andern Teiler b^2+c^2, a^2+c^2, darstellbar sind; diese drei verbundenen oder zusammenhängenden Teiler oder Multiplikatoren geben also nur eine Form.

Zu 2. Ist Δ Primteiler von der Form $4n+1$ von x^2+Ay^2 d. h.

$$M.\Delta = x^2+Ay^2,$$

so ist wegen $\left(\frac{-A}{\Delta}\right) = 1$ auch $\left(\frac{-\Delta}{A}\right) = 1$ also auch

$$N.A = x^2+\Delta y^2.$$

Gilt nun die Behauptung in 2. für die Primzahl Δ, so entspricht dem Theiler $A = 4n+1$ eine Zerlegung

$$(1) \qquad \Delta = m^2+n^2+p^2$$

und der Multiplikator $N = m^2+n^2$. Demnach findet sich

$$(2) \qquad (m^2+n^2)A = x^2+(m^2+n^2+p^2)y^2$$

oder

$$A = \frac{x^2+p^2y^2}{m^2+n^2}+y^2,$$

also eine Zerlegung von A in drei Quadrate

$$(3) \qquad A = a^2+b^2+c^2,$$

wenn man schreibt $y = c$ und

$$x^2+p^2c^2 = (m^2+n^2)(a^2+b^2) = (an-bm)^2+(am+bn)^2$$

d. i.

$$x^2 = (an-bm)^2, \quad p^2c^2 = (am+bn)^2,$$

woraus

$$(am+bn+cp)(am+bn-cp) = 0$$

also bei passender Bezeichnung der Basen der Quadrate und Wahl ihrer Vorzeichen

$$(4) \qquad am+bn+cp = 0$$

hervorgeht. Ferner nimmt die Gleichung (2) die Gestalt an

$$(5) \qquad (m^2+n^2)(a^2+b^2+c^2) = (an-bm)^2+(m^2+n^2+p^2)c^2. \text{ —}$$

Wie jedoch aus dieser Betrachtung eine zum Beweise der Behauptung in 2. führende »Depressionsmethode« zu entnehmen ist, bleibt unklar.

Zu 4. Wären $A = a^2+b^2+c^2$ mit $a^2+b^2 \equiv 1 \pmod{4}$ und $A = a'^2+b'^2+c'^2$ zwei Zerlegungen von A, denen ein- und derselbe Primteiler $\Delta = 4n+1$ zukäme, so bestände einerseits eine Gleichung

$$(a^2+b^2)\Delta = x^2+Ay^2 = x^2+(a'^2+b'^2+c'^2)y^2,$$

andererseits müßte deshalb Δ nach dem Satze in 2. die Summe zweier der drei Quadrate a'^2, b'^2, c'^2, etwa

$$\Delta = a'^2+c'^2$$

sein. Aus

$$(a^2+b^2)\Delta = x^2+Ay^2 = x^2+(a^2+b^2+c^2)y^2$$

folgt aber (siehe 2.)

$$\Delta = m^2+n^2+p^2, \quad am+bn+cp = 0$$

und die Gleichung (5) oder

$$(m^2+n^2)A = x^2+\Delta y^2.$$

Da

$$A = b'^2+(a'^2+c'^2) = b'^2+\Delta\, 1^2$$

und A Primzahl ist, so erschließt man hieraus

$$m^2+n^2 = r^2+\Delta s^2 = r^2+(m^2+n^2+p^2)s^2$$

was $s = 0$ erfordert. Die Zerlegung von Δ würde also

$$\Delta = a'^2+c'^2 = r^2+p^2,$$

dem entsprechend die Gleichung (4) die einfachere Gestalt

$$ar+cp = 0 \text{ d. i. } aa'+cc' = 0$$

annähme. Dies gibt die Beziehungen $a = \mu t$, $c = \mu u$, $a' = \nu t$, $c' = \nu u$, also wenn $t^2+u^2 = S$ gesetzt wird, für A die zwei Zerlegungen

$$A = b^2+S\mu^2, \quad A = b'^2+S\nu^2,$$

die mit einander identisch sein müssen, da A Primzahl ist. So erhielte man $b = b'$, $\mu = \nu$ und die beiden als verschieden vorausgesetzten Zerlegungen von A würden einander gleich.

BACHMANN.

[III.]

[ÜBER TERNÄRE QUADRATISCHE FORMEN.]

[Eintragung im LEISTE, S. 111.]

[1.]

Zur Möglichkeit des Ausdrucks

$$a\square + b = c\square$$

wird erfordert:

1) dass $+bc$ ein Rest v. a sei,
2) dass $-ab$ ein Rest v. c sei,
3) dass $+ac$ ein Rest v. b sei.

Allgemeiner, zur Möglichkeit der Gleichung

$$a\square + b\square = c\square$$

ist nöthig, dass

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & +ac \text{ Rest von } b \\ 2) & -ab \text{ Rest von } c \\ 3) & +bc \text{ Rest von } a \end{array}\right\} \text{sei.}$$

[2.]

Generalissime ad possibilitatem aequationis

$$axx + byy + czz = 0$$

requiritur,

I) ut non omnes a, b, c idem signum habeant,

II) ut

			div. c. max.
$-bc$	residua	$a \times$	b, c
$-ac$	sint	$b \times$	c, a
$-ab$	ipsorum	$c \times$	a, b
a factt. suis quadratis liberati			

[Aus Scheda Ae, Varia, Julius 1800, S. 3—5.]

[3.]

PROBLEMA.

Formam ternariam determinantis 0 in binariam transmutare.

Sol[utio] Casus I.

Si omnes coefficientes formae adiunctae sunt 0.

Sit proposita

$$= \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$$

habebuntque a, a', a'' idem signum. Sit m ipsorum div. comm. max. eodem signo acceptus, metieturque etiam ipsos b, b', b''. Tunc erit

$$axx + a'yy + a''zz + 2byz + 2b'xz + 2b''xy = m(\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z)^2$$

ipsique $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ divisorem communem non habebunt. Accipiantur

$$\alpha, \beta, \gamma, \quad \alpha', \beta', \gamma', \quad \alpha'', \beta'', \gamma''$$

ita ut sit

$$\begin{gathered} \alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{C} = 1, \\ \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = \mathfrak{A}, \\ \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha' = \mathfrak{B}, \\ \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = \mathfrak{C} \end{gathered}$$

transibitque f per substitutionem

$$\begin{matrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{matrix}$$

in formam

$$\begin{pmatrix} m, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Casus II.

Si conditio in I apud formam propositam non habet locum, certo in forma ipsi adiuncta locum habebit. Determinentur itaque α, α', α'' etc. ita ut haec adiuncta per substitutionem

$$\begin{matrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{matrix}$$

transeat in

$$\begin{pmatrix} M, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

transibitque proposita per substitutionem illi adiunctam in formam talem

$$\begin{pmatrix} 0, & a', & a'' \\ b, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

atque formae binariae (a', b, a'') determinans erit M.

[4.]

PROBLEMA.

Solvere aequationem

$$axx + a'x'x' + a''x''x'' + 2(bx'x'' + b'xx'' + b''xx') = 0,$$

determinans huius formae ternariae f supponitur $= D$.

Indoles solutionis consistit in inventione formae ternariae determinantis D^3 cuius coefficientes omnes sint divisibiles per D et quae sub f contenta sit.

1) Si aequatio est solubilis, talis forma dabitur.
Tunc formae propositae aequivalens inveniri potest forma talis

$$\begin{pmatrix} 0, & a', & a'' \\ b, & b', & 0 \end{pmatrix}$$

quae per substitutionem

$$\begin{matrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & b', & 0 \\ 0, & 0, & a'b' \end{matrix}$$

transit in

$$D\begin{pmatrix} 0, & 1, & a'a'' \\ b, & 1, & 0 \end{pmatrix}$$

proprietate requisita praeditam.

[5.]

Algorithmus per quem si fieri potest ad talem formam pervenitur.

I. Proposita propria

$$f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} \quad \text{det. } D = Mmm,$$

adiuncta

$$F = \begin{pmatrix} Am, & A'm, & A''m \\ Bm, & B'm, & B''m \end{pmatrix} \quad \text{det.} = MMm^4.$$

Tunc erit

$$f \equiv (h, h', h'')^2 \ (\text{mod. } m);$$

fiat

$$\beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = h \text{ etc.}$$
$$\alpha h + \alpha' h' + \alpha'' h'' = 1,$$

f transit per substitutionem

$$\begin{matrix} m\alpha, & \beta, & \gamma \\ m\alpha', & \beta', & \gamma' \\ m\alpha'', & \beta'', & \gamma'' \end{matrix}$$

in formam talem

$$\begin{pmatrix} mma, & a'm, & a''m \\ bm, & b'm^2, & b''m^2 \end{pmatrix}$$

eritque determinans formae

$$\begin{pmatrix} ma, & a', & a'' \\ b, & mb', & mb'' \end{pmatrix}$$

Mm. Conditio possibilitatis aequationis

$$f = \begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} \ldots Mmm \ldots \begin{pmatrix} Am, & A'm, & A''m \\ Bm, & B'm, & B''m \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix} \ldots MMm \ldots \begin{pmatrix} aM, & a'M, & a''M \\ bM, & b'M, & b''M \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{Mf}{\square} \; R \; \frac{m}{\square} \\ \frac{mF}{\square} \; R \; \frac{M}{\square} \\ -\frac{MmfF}{\square} \; R \text{ div. comm. max. ipsorum } \frac{m}{\square}, \frac{M}{\square} \end{array}}$$

BEMERKUNGEN.

Die Aufzeichnung [1.] stammt aus sehr früher Zeit, etwa 1796, die Aufzeichnung [2.] ist in anderer Schrift, offenbar später, hinzugeschrieben. Zu [3.] vergleiche man die artt. 281 (Schluß) und 299 der *Disquisitiones Arithmeticae* [Werke I, S. 323 und 358]. In [4.] werden die Bedingungen für die Auflösbarkeit einer ternären quadratischen Gleichung gegeben. Diese sind von H. St. Smith (Proc. of the Royal Society London **13**, 1864, S. 110, Papers I, S. 410) aufgestellt und von Arnold Meyer (Crelles Journal f. Mathematik **98**, 1885, S. 177) bewiesen worden, und stimmen mit den in der vorstehenden Aufzeichnung von Gauss enthaltenen vollkommen überein. Vergl. den Artikel **12** des Bachmannschen Aufsatzes »Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten«. Im vorstehenden bedeuten $\frac{m}{\square}$ u. s. w. die von ihrem größten quadratischen Teiler befreiten Zahlen.

Schlesinger.

[IV.]

[ZUR BESTIMMUNG DER KLASSENANZAHL.]

[Aus Scheda Ae, Varia, Julius 1800, S. 36.]

Es sei $2E$ die Zahl nach der die Form der Th[eiler] recurrirt,

$$\cos\frac{P}{4E} + i\sin\frac{P}{4E} = \cos A + i\sin A = \rho,$$

so ist

$$\frac{\sqrt{D}}{E}\{\operatorname{cotg} A \pm \operatorname{cotg} 3A \pm \ldots \pm \operatorname{cotg} nA\} \quad n < E$$

$$= \frac{\sqrt{D}}{2E}\{\operatorname{cotg} A \pm \operatorname{cotg} 3A \pm \ldots \pm \operatorname{cotg} nA\} \quad n < 2E.$$

[Aus Scheda Af, Mémoires de Mathematiques, Bronsuic 1801, S. 78.]

Es sei $2E$ die Zahl, nach der die Formen der Theiler recurriren

$$\rho^{2E} = 1,$$

so ist die Zahl der quadratischen Formen

$$= \frac{\sqrt{D}}{E}\left\{\frac{1+\rho}{1-\rho} \pm \frac{1+\rho^3}{1-\rho^3} \pm \ldots \pm \frac{1+\rho^n}{1-\rho^n}\right\} \quad n < E$$

(proxime)

$$= \frac{\sqrt{D}}{2E}\left\{\frac{1+\rho}{1-\rho} \pm \frac{1+\rho^3}{1-\rho^3} \pm \ldots \pm \frac{1+\rho^n}{1-\rho^n}\right\} \quad n < 2E.$$

BEMERKUNG.

Vergleiche hierzu die Tagebuchnotizen Nr. 114 vom 30. Oktober und Nr. 115 vom 3. Dezember 1800. Ferner Werke II, S. 285, 286 und die zugehörigen Anmerkungen von R. Dedekind ebenda, S. 297, sowie den Artikel **27** des Bachmannschen Aufsatzes »Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten«.

Schlesinger.

[V.]

[ZUR THEORIE DER FORMEN.]

[Ein Zettel in Ed 3, Kapsel 44.]

[1.]

Wir bezeichnen mit p eine als Modulus anzusehende Primzahl; mit $x, y, z \ldots$ unbestimmte Zahlen ohne Einschränkung (oder lieber $0, 1, 2, \ldots, p-1$); mit $t, u, v \ldots$ unbestimmte Zahlen durch p nicht theilbar (oder lieber $1, 2, 3, \ldots, p-1$); durch R einen bestimmten quadratischen Rest, durch N einen bestimmten Nichtrest. Von den doppelten Ansätzen bezieht sich der erste auf den Fall $p \equiv 1$, der andere auf den Fall $p \equiv 3$ (mod. 4).

Anzahl der Auflösungen der Congruenzen.

xx	$\equiv 0$	1
$xx+yy$	$\equiv 0$	$2p-1,\ 1$
$xx-yy$	$\equiv 0$	$2p-1$
$xx+yy-zz$	$\equiv 0$	pp
$xx+yy+zz$	$\equiv 0$	pp
$tt+uu+R$	$\equiv 0$	$p-5,\ p+1$
$tt+uu+N$	$\equiv 0$	$p-1,\ p-3$
$tt+uu$	$\equiv 0$	$2p-2,\ 0$
$xx+yy+R$	$\equiv 0$	$p-1,\ p+1$
$xx+yy+N$	$\equiv 0$	$p-1,\ p+1$
$tt-uu+R$	$\equiv 0$	$p-5,\ p-3$
$tt-uu+N$	$\equiv 0$	$p-1,\ p-3$
$tt-uu$	$\equiv 0$	$2p-2$

$xx-yy+R$	$\equiv 0$	$p-1$
$xx-yy+N$	$\equiv 0$	$p-1$
$xx+x'x'+x''x''+x'''x'''$	$\equiv 0$	p^3+pp-p
$xx+yy+zz+R$	$\equiv 0$	$pp+p$
$xx+yy+zz+N$	$\equiv 0$	$pp-p$
$xx+x'x'+x''x''-x'''x'''$	$\equiv 0$	$p^3+pp-p,\ p^3-pp+p$
$xx+yy-zz+R$	$\equiv 0$	$pp+p,\ pp-p$
$xx+yy-zz+N$	$\equiv 0$	$pp-p,\ pp+p.$

[2.]

Die Schlüsse von Lagrange, *Mém. de l'Ac. de Berlin* 1770, p. 126 werden durch Heranziehung der complexen Grössen ungemein vereinfacht.

Bezeichnen wir durch p', q' die Adjuncten der complexen Zahlen p, q, so haben wir die ursprüngliche Gleichung

$$Aa = pp' + qq',$$

die wir Kürze halber auch so schreiben

$$Aa = (p, q).$$

Es ist Voraussetzung, dass p und a inter se primi sind; man mache also

$$m \equiv \frac{q}{p} \text{ (mod. } a)$$

und setze

$$1 + mm' = ab.$$

Dann ist in ganzen Zahlen

$$Ab = \left(\frac{p+mq}{a},\ \frac{q-pm}{a}\right) = (r, s).$$

Macht man dann weiter

$$m + n \equiv 0 \text{ (mod. } b) \quad \text{und} \quad 1 + nn' = bc,$$

so ist in ganzen Zahlen

$$Ac = \left(\frac{r+n's}{b},\ \frac{s-nr}{b}\right)$$

u. s. f.

Allgemein ist nemlich

$$\begin{aligned}(p, q)\cdot(1, m) &= (p+mq,\ q-m'p)\\ &= (p+m'q,\ q-mp)\\ (p, q)\cdot(P, Q) &= (pP+qQ,\ qP'-pQ')\\ &= (pP-qQ,\ qP'+pQ')\\ &= (pP-qQ,\ q'P+p'Q)\\ &= (pP-q'Q',\ pQ+q'P').\end{aligned}$$

[3.]

Steigen wir höher hinauf, so ist alles dieses nur ein sehr spezieller Fall aus einer viel allgemeineren Untersuchung, die so ausgesprochen werden kann: *Es sind zu untersuchen die allgemeinen Eigenschaften der unbestimmten Form*

$$\tfrac{1}{2}(a+a')xx'+bx'y+b'xy'+\tfrac{1}{2}(c+c')yy'.$$

Was ist hier der Determinans?

Nichts anderes als

$$bb'-\tfrac{1}{4}(a+a')(c+c') = \Delta.$$

Bezeichnen wir eine solche Form durch

$$(a, b, c),$$

wo a, c reell sind, so geht solche in

$$\begin{aligned}&\left(c,\ mc-b',\ \frac{(mc-b)(m'c'-b')-\Delta}{c}\right)\\ &= (c,\ mc-b',\ a-mb'-m'b+mm'c)\\ &= ctt'+(mc-b')t'u+(m'c-b)tu'+(a-mb'-m'b+mm'c)uu'\end{aligned}$$

über durch die Substitution

$$\begin{aligned}x &= \quad -u\\ y &= t+mu\end{aligned}$$

oder umgekehrt

$$\begin{aligned}t &= mx+y\\ u &= -x.\end{aligned}$$

Es sind aequivalent

proprie	improprie
a, b, c	$a, -b, c$
$a,\ ma+b,\ a-mb'-m'b+mm'c$	c, b', a
$c, -b', a$	

BEMERKUNG.

Die vorstehenden Aufzeichnungen stammen aus später Zeit; das geht daraus hervor, daß auf der Rückseite des Zettels, auf dem sie aufgezeichnet sind, die Bemerkung steht:

JACOBI, Zerlegung der Zahlen in 4 Quadrate,
CRELLE 3, 2; auch 12, 2*).

Die in [2.] erwähnten »Schlüsse von LAGRANGE« beziehen sich auf das »Théorème: Si la somme de quatre carrés est divisible par un nombre premier plus grand que la racine carrée de la même somme, ce nombre sera nécessairement égal à la somme de quatre carrés.« (Oeuvres de LAGRANGE III (1869), S. 193; der Titel der Abhandlung lautet: *Démonstration d'un théorème d'Arithmétique*).

Bemerkenswert ist in [3.] das Auftreten der heute sogenannten HERMITEschen Formen. Vergl. die bezüglichen Ausführungen in dem Artikel 12 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

Die Hilfsformel der Nr. [2.]

$$(p, q)\cdot(P, Q) = (pP+qQ,\ qP'-pQ')$$

findet sich auch in einer Aufzeichnung des Handbuchs 19, Be, S. 147, die Werke III, S. 384 abgedruckt ist und die sicher aus der Zeit nach 1825 stammt.

SCHLESINGER.

*) Die von GAUSS erwähnten Abhandlungen JACOBIS sind: *Note sur la décomposition d'un nombre donné en quatre carrés*, CRELLES Journal f. Mathem. 3 (1828), S. 191, JACOBIS Werke I, S. 215 und *De compositione numerorum e quattuor quadratis*, CRELLES Journal f. Mathem. 12 (1834), S. 167, JACOBIS Werke VI, S. 245.

ALGEBRA.

NACHTRÄGE ZU DEN BÄNDEN I, III UND VIII.

BRIEFWECHSEL

[ZUM FUNDAMENTALSATZ DER ALGEBRA.]

[1.]

PFAFF an GAUSS.

[Helmstedt 30. May 1799

Ew. Wohlgeb.

. . . .

Verschiedene Kleinigkeiten in Ihrer Schrift, die verschrieben oder in der Eile versehen sind, habe ich mir bereits angemerkt, um sie Ihnen beym Zurücksenden mitzutheilen, damit sie nicht etwa beym Abdruck zufällig, wenn die Gedanken auf das wichtigere geheftet sind, wieder übersehen werden. Z. B. § 18 steht: simili modo T ubique $\underline{\text{inter } 7 \text{ et } 9}$, inter $\underline{15 \text{ et } 17}$ etc. et generaliter inter $\underline{8k+7}$ et $\underline{8k+9}$ valorem negativum habebit; wo die unterstrichenen Worte heissen müssen: inter 5 et 7, 13 et 15, $8k+5$ et $8k+7$. Auch vorher: T . . . positivum valorem habebit . . . . . . a $8k+3$ usque ad $8k+5$, anstatt $8k+1$ ad $8k+3$. Einige weitere Anmerkungen über die Sache und Ihre Darstellung wollte ich Ihnen auch schreiben: es ist mir aber, besonders durch eine noch diesen Nachmittag dazwischen gekommene nicht wohl zu vermeidende Abhaltung, die Zeit für heute zu kurz geworden, und doch wollte ich Sie nicht noch einen Posttag länger auf Antwort warten lassen, da Sie ausdrücklich Beschleunigung der ganzen Angelegenheit gewünscht haben. Eines an sich unbedeutenden Umstandes muss ich jedoch noch erwähnen. Sie werden selbst zugeben, dass die Betrachtung der krummen Linien und ihrer Schenkel, auf deren nothwendigem Durchschnitt Ihr Beweis beruht, etwas verwickelt und abstract ist. Sollte es daher nicht nützlich und zur Erläuterung dienlich seyn, wenn Sie etwa für einen Fall in concreto, für welchen der zu beweisende Satz schon aus anderen Gründen ausgemacht ist, wie $m = 4$, die Natur dieser krummen Linien genauer entwickelten, und durch Zeichnung darstellten, wobey Sie auch noch allenfalls die Coëfficienten $A, B, C, \ldots$ zweckmässig auswählen könnten? Es würde dieses wohl kein Auswuchs seyn, durch den etwa die Concinnitaet des Ganzen leiden könnte. In den Figuren sind Sie auch fast zu sparsam gewesen, da Sie die Fig. 2 in verschiedenen Bedeutungen und Absichten gebrauchen, indem die mit Zahlen bezeichneten Puncte § 18 etwas ganz anders vorstellen, als § 20. Ich bin der Meynung, dass man beym Schreiben sich selbst die Pflicht aufzulegen hat, auch für die Bequemlichkeit der Leser zu sorgen, selbst wenn es gewissermassen mit eigener Unbequemlichkeit verknüpft wäre. Nächst dem materiellen Gehalt sind doch immer Ordnung und Deutlichkeit die ersten formellen Eigenschaften jedes Vortrags. Gegen die Ordnung, worin Sie Ihre Ideen entwickeln, habe ich nichts einzuwenden, aber der Deutlichkeit möchte für die Mehrheit der Leser noch etwas nachzuhelfen seyn. In beyden ist EULER mehr zum Muster zu empfehlen, als die neuen französischen Mathematiker. Sie werden diese Anmerkungen für keinen Tadel halten: ich wünsche aber auch, dass Sie solche nicht für einen blossen Rath, um zu rathen, ansehen, sondern dadurch für die Zukunft auf einen Punct aufmerksamer werden mögen, der wirklich zum Vortheil der Wissenschaft wichtiger ist, als man leicht zu glauben geneigt ist.

Ich empfehle mich Ihrem ferneren freundschaftl. Andenken, und verharre mit vollkommenster Hochachtung

Ihr ergebenster Freund

J. F. PFAFF.

N.S. An H. H[of]r[ath] v. Z[IMMERMANN] viele Empfehlungen. Sie sprachen bey Ihrem Hierseyn von BACHET's *Problemes plaisans.* Ich besann mich damals nicht gleich, dass ich das Buch selbst habe, das Ihnen also auf Verlangen zu Dienst steht.|

[2.]

PFAFF an GAUSS.

. . . .

|Es war mir erfreulich, dass Sie meine wenigen unbedeutenden Anmerkungen gut aufgenommen haben, und selbst noch mehrere wünschen. Es gehört zu den Vorzügen der Mathematik, dass darinn nicht viel zu disputiren ist, und dass man von dem unangenehmen Eindruck, welchen die Rechthaberey erweckt, selten etwas erfährt. — Ihr Verlangen nach mehreren Bemerkungen, und nach Angabe der Stellen, die etwa deutlicher seyn könnten, kann ich übrigens jezt nicht so wie ich wünschte erfüllen, da ich dazu Ihre Abhandlung, die mir inzwischen aus dem Gesicht gekommen war, wieder genauer durchgehen müsste, als es meine Zeit zulässt, indem ich 3 Collegia zu lesen, u. ausserdem noch eigene Beschäftigungen habe, welche ich um so weniger jezt aussezen kan, da ich auf Michaelis eine Reise in mein Vaterland zu machen gedenke. —

Einige Kleinigkeiten, die mir aufgestossen waren, wovon ich das vorigemal etwas erwähnte (meistens Schreib- und Sprachfehler) halte ich jetzt nicht einmal für nöthig anzuzeigen, theils weil Ihre Bemerkung wegen der sin. u. cos., dass die Leser sich selbst daraus finden werden, auch hier gälte, theils weil Sie ohnehin das Ganze vor dem Abdruck noch einmal selbst genau durchsehen werden. — Wenn ich äusserte, dass Ihre Abhandlung noch hie u. da an Deutlichkeit gewinnen könnte, so folgte ich dabey dem Total-Eindruck, den sie bey dem ersten Lesen auf mich gemacht hatte, u. vermuthlich auch auf andere Leser machen wird: allerdings liegt aber viel davon an der Kürze, die Sie, wie Sie sagen, absichtlich gewählt haben. Dass Sie für die letzte Figur die Gleichung und damit ein concretes Beyspiel geben wollen, wird, wie ich auch glaube, zur Erläuterung dienen: ich dachte erst, dass es noch dienlicher wäre, wenn Sie, nicht am Ende in einer Anmerkung, sondern schon vor der allgemeinen Untersuchung ein solches Beyspiel entwickelten, zur Vorbereitung auf das folgende; doch mag Ihnen diess für Ihren Zweck zu weitläufig scheinen. Ich hatte mir jenes etwa zwischen § 16 u. § 18 gedacht, an der Stelle von § 17. Sie sagen in Ihrem Brief, dass Sie den ganzen § 18 bloss zur leichteren Verständlichkeit vorläufig beygefügt haben, u. anfangs willens gewesen seyen, ihn ganz wegzulassen. Ohne Zweifel meynen Sie damit den § 17, u. ich muss gestehen, dass mir dieser § nicht recht hat einleuchten wollen, besonders, da man fragen könnte, warum die niedrigen Potenzen von $r = \infty$ gegen die ersten weggelassen werden, da dieser ihr Coëfficient $= 0$ wird (welcher Zweifel übrigens durch Betrachtungen der Gleichungen zwischen y u. x gehoben werden möchte). Was den § 18 betrift, so habe ich bey wiederholter Ansicht leicht bemerken können, dass die Puncte (1) (3) (5) ... nicht in der Figur 2 abgebildet sind (welches schon die Menge der Puncte in der Figur, nur bis 15, hätten zeigen können). Indessen war doch diese Auslegung, welche sonst dem übrigen Sinn gar keinen Eintrag thut, ziemlich natürlich, da die Worte § 18 »Designato puncto circumferentiae ... per (1)« auf die Figur hinleiten, u. man eher geneigt ist, unter geraden Linien sich Schenkel von Winkeln, als ohne Erinnerung krummlinichte Schenkel dadurch angedeutet zu denken. Wenn Sie, wie Sie schreiben, zur Verhütung alles Missverständnisses noch etwas beyfügen, so wird es desto besser seyn. — Auch die Anmerkg. zu § 20 ist in dieser Hinsicht etwas dunkel, und wohl auf eine oder die andere Art verschrieben. Bey eben diesem § 18 steht als Note »Suppono summam S majorem esse quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$; alioquin radium R majorem quam 1 accipere oportet«. Es wird hier etwas verschrieben seyn, u. ohne Zweifel heissen müssen: S minorem quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Dabey würde aber die Bedenklichkeit entstehen, ob u. warum diese einschränkende Bedeutung zulässig sey. Dass die Linie, welche $= 1$ gesetzt wird, willkührlich ist, hat natürlich hierauf keinen Einfluss. Ferner sagen Sie: summa

$$A \sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi + \frac{C}{R^2}\sin(m-3)\varphi + \frac{D}{R^3}\sin(m-4)\varphi + \text{ec.}$$

certo non potest esse major quam $S\,(= A + B + C + D + \text{ec.})$. Dabey kann man wieder nach dem Grund fragen, da Sie $R < 1$ nehmen, also $\frac{1}{R}, \frac{1}{R^2}, \frac{1}{R^3}$ ec. grösser als 1 sind. Übrigens weiss ich nicht, warum R nicht auch grösser als 1 sollte genommen werden dürfen (der sin. tot. ist zwar $= 1$, kommt aber natürlich hier nicht in Betrachtung). Für $R > 1$ würden dann beyde Bedenklichkeiten wegfallen. Aus diesen Gründen, so weit ich die Sache für jezt übersehe, scheint mir daher eine kleine Änderung nöthig zu seyn, die sich leicht anbringen liesse. —

Ihre Darstellung des wirklich sinnreichen u. einfachen Beweises von D'ALEMBERT ist fast etwas zu gedrängt ausgefallen, so dass es dem Leser, der die Abhandlung nicht selbst hat, schwer seyn möchte, sich sogleich darein zu finden. Vielleicht liessen sich die Hauptpuncte, worauf es dabey ankommt (nehmlich der Ausdruck von x durch eine convergirende Reihe nach X, für kleine Werthe von X, u. der Schluss von kleinen Werthen auf grössere) etwas fasslicher herausheben. Inzwischen ist mir noch eine Bedenklichkeit bey D'ALEMBERTS Beweis aufgestossen. Wenn nehmlich nach BOUGAINVILLE eine allgemeine algebraische Gleichung zwischen x u. X angenommen wird, so lässt sich zwar (mit Hülfe des NEWTONschen #ogramms) x durch eine Reihe nach Potenzen von X darstellen, aber für die Coëfficienten dieser Reihe ergeben sich öfters selbst höhere Gleichungen, daher jene auch unmöglich ausfallen können, wo dann nicht ohne Beweis vorausgesezt werden dürfte, dass sie von der Form $a + b\sqrt{-1}$ sind. So möchte der Beweis in seiner Allgemeinheit sogleich vorgetragen eine Art von logischem Zirkel enthalten. Doch liesse sich auf diese Einwendung vielleicht noch antworten. — Eben indem ich diesen Brief schreibe, bin ich, da ich mir D'ALEMBERTS Beweis auf eine andre Art entwickeln wollte, noch auf eine Schwierigkeit gestossen, ich habe aber jezt nicht Zeit, der Sache weiter nachzudenken. Doch lässt sich vielleicht schon aus folgendem einfachen Beyspiel übersehen, worauf es ankommt, u. was ich damit meyne. Es sey nehmlich die quadratische Gleichung: $y = Ax - Bx^2$, so wird x durch eine convergirende Reihe nach y dargestellt (u. zugleich möglich) wenn $\frac{y}{B} < \frac{A^2}{4B^2}$. Nun könnte man neue Werthe von y u. x annehmen, nehmlich $y' = y + \eta$, $x' = x + \chi$, u. zwey Gleichungen formiren, die eine zwischen y u. x, die andre zwischen η u. χ. Da nun für die erste, y die vorerwähnte Grenze hat, u. für die andere η auch eine gewisse Grenze, so könnte man schliessen, $y + \eta = y'$ werde eine grössere Grenze haben, als die vorige, u. so immer weiter. Dieser Schluss wäre aber natürlich unrichtig, wie sich auch ergibt, wenn man die Gleichung für η entwickelt.

Sie ist:

$$\eta = (A - 2Bx)\chi - B\chi^2$$

also ist die Grenze für sie:

$$\frac{\eta}{B} < \frac{(A-2Bx)^2}{4B^2}.$$

Aber aus der ersten Gleichung ist

$$x = \frac{A}{2B} \pm \sqrt{\left(\frac{A^2}{4B^2} - \frac{y}{B}\right)}$$

also

$$\frac{(A-2Bx)^2}{4B^2} = \frac{A^2}{4B^2} - \frac{y}{B},$$

mithin

$$\frac{\eta}{B} < \frac{A^2}{4B^2} - \frac{y}{B},$$

woraus weiter nichts folgt als

$$\frac{\eta}{B} + \frac{y}{B} \text{ d. i. } \frac{y'}{B} < \frac{A^2}{4B^2},$$

die vorige Grenze. Überhaupt ist die Kleinheit der Werthe von x, für welche die Reihe convergirt, nicht absolut, sondern hängt von den Coëfficienten ab, und diese ändern sich mit der Gleichung. Die allgemeinere Entwicklung dieser Bemerkungen u. ihres näheren Zusammenhangs mit D'ALEMBERTS Schlüssen, worauf sie sich beziehen, kann ich jezt nicht übernehmen: inzwischen würde es mich freuen, wenn Sie solche (so wie die vorige Einwendung gegen D'AL. Beweis) einer weiteren Überlegung werth hielten. —

Ich hatte den Band der Berliner Memoires von 1772 gerade im Haus, aber die Abhandlung von LA GRANGE über die unmögl. Wurzeln noch nicht gelesen, an dem Post-Tag, da mir gemeldet wurde, dass Sie solche zu sehen wünschten. Wegen des für Sie wichtigen arithmetischen Inhalts wollte ich Sie nicht warten lassen, u. las also gleich den Aufsaz von LA GRANGE so weit durch, als nöthig war, um die Haupt-Momente deutlich zu übersehen, besonders da die Sache mit vieler Klarheit vorgetragen ist. Sie werden aus dieser Abhandlung sehen, dass LA GRANGE die Lücken in EULERS Beweis auszufüllen sucht, besonders was theils den von FONCENEX als nicht evident bemerkten Saz, theils die Bestimmung möglicher Werthe von α, β ec. durch u (§ 7 Ihrer Dissert.) betrift. In Rücksicht des 2ten Punctes möchte es noch darauf ankommen, ob die Säze von der Elimination in der früheren Abhandlung von LA GRANGE (die bekanntlich auch von MICHELSEN deutsch übersezt ist) völlig streng erwiesen sind. Besonders ist mir dabey folgende Bedenklichkeit eingefallen: Wenn r Gleichungen für r unbekannte Grössen u, α, β, ... λ, μ ... gegeben sind, so lassen sich im allgemeinen immer α, β, ... λ, μ, ... rationell durch u ausdrücken (wie unmittelbar aus dem Verfahren der Elimination folgt), aber es können die Werthe dieser Grössen unbestimmt $\alpha = \frac{0}{0}$ werden, nicht nur für gleiche Werthe aus der Gleichung für u, sondern für jedes u (wo man dann eigentlich keine Gleichung des ersten Grads für α erhält). Doch möchte eine nähere Betrachtung der Elimination für den Fall, der hier zunächst in Betracht kommt, diese Bedenklichkeit heben.

Ich habe Sie schon zu lang mit diesem Brief aufgehalten. Ich will also nichts weiter beyfügen, als dass mir fernere Nachrichten und Mittheilungen von Ihnen jederzeit sehr willkommen seyn werden, u. dass ich mit der aufrichtigsten Hochachtung verharre

Ihr

Helmstedt, ergebenster Freund

8. Jul. 1799 J. F. PFAFF.

N.S. Sollte in Braunschweig oder Wolfenbüttel CHEYNE's *Methodus fluxionum*[*]) zu haben seyn, so würden Sie mich durch dessen Mittheilung auf kurze Zeit verbinden. H. H[of]r[ath] ZIMMERMANN bitte ich mich geh[orsam]st zu empfehlen, wie auch H. Bergrath VOLCKMAR, dessen nähere hier kürzlich gemachte Bekanntschaft mir sehr angenehm gewesen ist. Noch fällt mir eben jezt folgendes bey, das vielleicht doch auch eine Erwägung verdiente. Die Gleichungen $T = 0$ u. $U = 0$ nach x u. y entwickelt gäben eliminiert Gleichungen für x u. für y, deren jede eine mögliche Wurzel haben müsste. Sollte diess nicht aus bekannten Säzen von den möglichen Wurzeln bey Gleichungen vom $2r^{\text{ten}}$ u. $2r-1^{\text{ten}}$ Grad herzuleiten seyn? Indessen möchte doch der Beweis vielleicht nicht leichter seyn, als bey FONCENEX's Verfahren. Übrigens wäre eine nähere Betrachtg. der Gleichungen für x u. y immer gut. Bey FONCENEX muss u nicht möglich seyn, aber hier müssen x u. y möglich seyn. Doch ich will Sie nicht länger mit flüchtigen Gedanken aufhalten.}

[*) GEORGE CHEYNE, *Fluxionum methodus inversa sive quantitatum fluentium leges generaliores*, Lond. 1704.]

[3.]

Gauss an Drobisch.

Wohlgeborner Herr
Hochzuehrender Herr Professor.

Vor einigen Tagen ist mir das, durch Euer Wohlgeboren gütiges Schreiben schon einige Wochen früher angemeldete Werk aus der Dietrichschen Buchhandlung zugekommen, und ich eile nunmehro, Ihnen für beides meinen verbindlichsten Dank abzustatten. Dieses schätzbare Werk wird gewiss dazu beitragen, in Deutschland die Liebe zu feineren mathematischen Forschungen mehr zu verbreiten.

Es ist mir umso angenehmer gewesen, zu bemerken, dass Sie in die von mir vor einigen Jahren zuerst in nuce bekannt gemachten [*)], obwohl schon seit fast 40 Jahren gehegten Grundansichten über die imaginären Grössen eingegangen sind, da im Allgemeinen wenige für die Aufklärung der Metaphysik der Mathematik Sinn zu haben scheinen, und namentlich die meisten sogenannten Philosophen von Fach, wenn sie sich auf Mathematik einlassen, uns nur aegri somnia für Philosophie verkaufen. Nur ist die Darstellung der imaginären Grössen in den Relationen der Puncte in plano nicht sowohl ihr Wesen selbst, welches höher und allgemeiner aufgefasst werden muss, als vielmehr das uns Menschen reinste oder vielleicht einzig ganz reine Beispiel ihrer Anwendung. Ich habe öfters meine Theorie mündlich vorgetragen, und dann gefunden, dass sie sehr leicht aufgefasst wird, und gar nichts abstruses behält.

Von Fouriers Werk habe ich in den hiesigen g[elehrten] A[nzeigen] 1833 Februar p. 321 [**)] eine Anzeige gegeben, indem ich darin dem was darin eigentlich verdienstlich ist Gerechtigkeit widerfahren lassen, habe ich zugleich eine wenngleich nur leise Andeutung dessen was ich davon tadle gegeben. Ich habe dort absichtlich mich über die captiöse Phrase, dass die fehlenden Wurzeln imaginär werden, welche Phrase im Grunde ist, was die Engländer

[*)] Anzeige der *Theoria residuorum biquadraticorum, Comm. secunda*, 1831, Werke II, S. 174 ff.]
[**)] Werke III, S. 110 ff.]

unfair nennen, nicht weiter ausgelassen; aber ich kann auf das klarste beweisen, dass ein Zusammenhang zwischen den einzelnen imaginären Wurzelpaaren mit bestimmten Stellen, wo Wurzeln ausfallen, nicht Statt findet, und behalte mir vor, diess bei einer andern Gelegenheit zu entwickeln.

Es ist mir angenehm gewesen, dass Sie die Einfachheit und gleichsam Directheit meines ersten Beweises die Wurzeln betreffend von 1799, anerkennen. Auch bin ich weit davon entfernt zu läugnen, dass mein zweiter Beweis weitläufig ist. Mein Zweck dabei war hauptsächlich mit, nachzuweisen was eigentlich den durchaus illusorischen Versuchen, mit denen selbst Geometer ersten Ranges früher sich selbst getäuscht hatten, fehle, und wie es ergänzt werden müsse, und diess konnte nicht ohne Ausführlichkeit geschehen. Hingegen kann ich den Vorwurf der Weitläufigkeit nicht zugeben, wenn Sie ihn auch auf den Dritten erstrecken. Diesen halte ich für den kürzesten und einfachsten von allen dreien. Auch ist derselbe im höchsten Grade sinnlich zu machen was ich aber dort für ein hors d'oeuvre hätte halten müssen, wo ich alles in rein algebraischer Form darstellen wollte. Übrigens aber finde ich den Cauchyschen Beweis in seiner Grundidee eben so elegant, und möchte, wenn ich mich auf Einen beschränken sollte, selbst diesem den Vorzug geben. Aber am lehrreichsten ist es wohl beide Grundideen zu entwickeln, wo in der That die Betrachtung der gleichsam geometrischen Bedeutung beider für den Verstand etwas recht ergötzliches hat. Eine concentrirte aber durchaus alles wesentliche enthaltende Darstellung meines dritten Beweises hatte ich in den G. G. A. 1816 p. 338 f. [*)] gegeben.

Unter Bezeugung meiner ausgezeichneten Hochachtung und Ergebenheit habe ich die Ehre zu beharren

Ew. Wohlgeboren
gehorsamer Diener
C. F. Gauss.

Göttingen den 14. August 1834.

H. Prof. Möbius bitte ich unter meiner besten Empfehlung um die baldige Mittheilung der magnetischen Beobachtung am 6., 7. d. zu erinnern, die wir hier umso begieriger erwarten, da hier am 7. ungemein auffallende Anomalien beobachtet sind.

[*)] Werke III, S. 107.]

[4.]

GAUSS an SCHUMACHER.

Göttingen, 1840 Juni 20.

Beigehend, mein theuerster Freund, schicke ich Ihnen den CLAUSENschen Aufsatz zurück. Ich habe ihn mit Vergnügen gelesen, wenn gleich derselbe, seinem wesentlichen Inhalt nach nur eine analytische Einkleidung desjenigen Princips ist, welches ich im letzten (24.) Artikel meiner Schrift von 1799[*)] in geometrischer Form angedeutet habe, sowie ich auch dort (Ende des 23. Art.) bemerkt habe, dass der Nerv davon eigentlich mit dem D'ALEMBERTischen Princip coincidirt. Indessen macht die Tournure, die Hr. CLAUSEN ihm gegeben hat, ihn der Aufnahme in die A. N. zweifelsohne vollkommen würdig[**)]. Ganz befriedigend und dem Rigor antiquus genügend ist übrigens die Ausführung nicht, indem daraus allein, dass eine Grösse [sich] unaufhörlich in einerlei Sinn ändert, z. B. wie bei CLAUSEN eine reale negative, die immer noch weiter (absolut) abnehmen kann, noch nicht evident ist, dass sie jeden auf dem Wege liegenden Werth wirklich erreichen kann, also im CLAUSENschen Falle den 0 Werth erreichen. Ich habe diesen Umstand in den letzten Zeilen jener Schrift selbst angemerkt, so wie zugleich, dass er sich allerdings heben lässt, aber gerade weil diess, im Geiste des Rigor antiquus, nicht ohne einige Umständlichkeit geschehen kann, habe ich später dieses Verfahren nicht selbst ausgeführt. . . . .

[*) Werke III, S. 29.]

[**) Der vom 16. Juni 1840 datierte Aufsatz von THOMAS CLAUSEN, *Beweis, dass die algebraischen Gleichungen Wurzeln von der Form $a+bi$ haben,* ist abgedruckt in den Astronomischen Nachrichten **17** (1840), Spalte 325 ff.]

[5.]

GAUSS an MÖBIUS.

Hochgeschätzter Freund!

. . . .

Für die jetzt übersandte Abhandlung sage ich meinen verbindlichsten Dank. Ich habe freilich die genauere Lectüre auf freiere Zeit zurücklegen müssen. Der Gegenstand gehört einem Felde an, dem Sie schon manche schöne Früchte abgewonnen haben. Ich möchte Ihrem Nachdenken noch einen analogen Gegenstand empfehlen, zu dessen eigner Bearbeitung mir schwerlich in langer Zeit Musse gegeben sein wird. Ich meine die verschiedene Gestaltung und Kreuzung der Linien $T = 0$ oder $U = 0$ in meiner Schrift von 1799[*)] nach Massgabe der Ordnung der betreffenden Function. Ich meine die Enumeratio aller verschiedener Fälle für die Configuration der unendlichen Äste. Anderes damit verwandtes hat mich vielfach beschäftigt, und ich wollte erst zu meiner neulich in der Societ. gehaltenen Vorlesung[**)] die Darstellung der Hauptmomente jener Untersuchung als 3ten Theil bestimmen; aber ich würde zur Ausarbeitung dieser Darstellung einer viel grösseren Musse bedurft haben, als mir zu Gebote gestanden hat.

Ihrem freundlichen Andenken empfehle ich mich angelegentlich und ergebenst

C. F. GAUSS.

Göttingen den 13. August 1849.

BEMERKUNGEN ZUM VORSTEHENDEN BRIEFWECHSEL.

Das GAUSSarchiv besitzt im ganzen zwanzig Briefe von JOHANN FRIEDRICH PFAFF an GAUSS. Die Briefe von GAUSS an PFAFF sind bis auf einen, vom 21. März 1825, nicht aufzufinden gewesen. Dieser eine ist abgedruckt in der *Sammlung von Briefen gewechselt zwischen Joh. Friedr. Pfaff und ... andern,* herausgegeben von Dr. CARL PFAFF, Leipzig 1853, S. 277 ff. Die vorstehenden beiden Briefe von PFAFF werfen ein interessantes Streiflicht auf die Entstehungszeit von GAUSS' Inauguraldissertation.

[*) *Demonstratio nova etc.,* Werke III, S. 1; siehe besonders art. 17, S. 10.]

[**) *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen,* vorgelesen in der Sitzung der Königl. Gesellsch. d. Wissenschaften am 16. Juli 1849, Werke III, S. 71.]

Der Brief von GAUSS an DROBISCH, der hier nach einer im GAUSSarchiv befindlichen Abschrift abgedruckt ist (die Urschrift ist in Privatbesitz), ist durch die Wertung von Interesse, die GAUSS darin den verschiedenen Beweismethoden für den Fundamentalsatz zu Teil werden läßt. Das Werk von MORITZ WILHELM DROBISCH, von dem darin die Rede ist, führt den Titel: *Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen nach ihren analytischen und geometrischen Eigenschaften*, Leipzig 1834, XXX + 341 S. mit 2 Kupfertafeln; es gibt S. 94 ff. den Beweis der Wurzelexistenz nach der Inauguraldissertation von GAUSS. Die Bemerkung, die GAUSS in dem Briefe in bezug auf seinen zweiten und dritten Beweis macht, ist durch eine auf S. 94 des Buches von DROBISCH befindliche Fußnote veranlaßt, in der es heißt: »Desselben berühmten Geometers *dem. nova altera etc.*, Gottingae 1816 [Werke III, S. 31] und *demonstratio tertia*, ibid. eod. ao. [Werke III, S. 57] würden sich theils wegen der Weitläufigkeit des Beweises, theils wegen der dabei gebrauchten Hülfsmittel hier nicht benutzen lassen«. Den von CAUCHY in der *Analyse algébrique*, 1821, S. 329 (Oeuvres, 2. série, t. III, 1897, S. 274) gegebenen Existenzbeweis*) entwickelt DROBISCH a. a. O. S. 88 ff.; bekanntlich muß aber dieser CAUCHYsche Beweis im Sinne des 4. Einwands, den GAUSS 1799 gegen den Beweis von D'ALEMBERT erhoben hat (Werke III, S. 10), vervollständigt werden, vergl. was GAUSS in dem Briefe [4.] über den Beweis von CLAUSEN bemerkt. GAUSS selbst hat in einer Vorlesung, die er von Neujahr bis Ostern 1840 über die *Theorie der imaginären Größen* gehalten hat, neben seinem ersten und dritten Beweise, den gedachten Beweis von CAUCHY vorgetragen. Eine Ausarbeitung dieser Vorlesung von E. HEINE (vergl. Werke VIII, S. 330, 345) befindet sich im GAUSSarchiv. In bezug auf die Bemerkungen, die GAUSS über das Werk von FOURIER und seine Anzeige macht, vergl. die weiter unten abgedruckten Stellen aus Briefen von GAUSS an SCHUMACHER. Der von GAUSS gebrauchte Ausdruck aegri somnia (S. 106, Zeile 17) stammt aus HORAZ, *Ars poëtica* 7, wo es von einem Buche heißt: »cuius velut aegri somnia vanae fingentur species«.

Der Brief an SCHUMACHER vom 20. Juni 1840 fehlt in der von C. A. F. PETERS veranstalteten Ausgabe des Briefwechsels GAUSS-SCHUMACHER. Er ist die Antwort auf den im dritten Bande, S. 379 abgedruckten Brief Nr. 697 SCHUMACHERS. Die Urschrift befindet sich im GAUSSarchiv.

Der Brief an A. F. MÖBIUS befindet sich mit noch mehreren andern von GAUSS an denselben Empfänger gerichteten im MÖBIUSarchiv der K. S. Gesellsch. der Wissensch. zu Leipzig**); die Abhandlung, für deren Zusendung GAUSS dankt, ist wohl die *Über die Grundformen der Linien dritter Ordnung* (Abhandlungen der mathem.-phys. Classe der K. S. Gesellschaft der Wissensch. 1, Leipzig 1852***), S. 1, MÖBIUS' Werke II, S. 89).

SCHLESINGER.

*) Man führt diesen Beweis neuerdings auf J. R. ARGAND zurück, siehe die anonym erschienene Schrift *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires*, Paris 1806, § 31 und Annales de mathématiques pures et appliquées 5, 1815, S. 201, beides neu herausgegeben von J. HOÜEL, Paris 1874.

**) Vergl. H. LIEBMANN, *Aus dem Möbiusarchiv*, Berichte der math.-phys. Klasse der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig 32, 1910, S. 198; der hier im Auszug abgedruckte Brief ist erst nach dem Erscheinen dieses Aufsatzes aufgefunden worden, auch ist zu bemerken, daß der Brief von GAUSS an MÖBIUS vom 17. Oktober 1843 sich gegenwärtig im GAUSSarchiv befindet.

***) 1852 ist das Jahr der Fertigstellung des ersten Bandes der Abhandlungen, die MÖBIUSsche Abhandlung selbst ist bereits 1849 ausgegeben worden.

NACHLASS UND BRIEFWECHSEL.

[ÜBER DIE KREISTHEILUNGSGLEICHUNG.]

[I.]

[ÜBER DIE PERIODEN VON $\frac{p-1}{3}$ UND $\frac{p-1}{4}$ GLIEDERN.]

[1.]

[Eintragung im HELLWIG*), letzte Einbandseite.]

Aequationes pro summis periodorum subtriplarum $\sqrt[6n+1]{1}$.

$$3x = z-1$$

7. $x^3+x^2-2x-1 = z^3-21z-7 \quad \Sigma\sqrt[3]{\frac{21\pm 21\sqrt{-3}}{2}}$

13. $x^3+x^2-4x+1 = z^3-39z+65 \quad \Sigma\sqrt[3]{\frac{39\pm 39\sqrt{-3}}{2}}.$

[2.]

[Eintragung im LEISTE, S. 8.]

Ad solutionem aequ: $x^p = 1$ aeq: conditionales:

secundi gradus

$$\begin{array}{l|l} xx+x-n=0 & \text{pro } p = 4n+1 \\ xx+x+n=0 & \text{pro } p = 4n-1 \end{array}$$

[*) Gemeint ist das Exemplar von J. CHR. L. HELLWIG, *Anfangsgründe der allgemeinen Mathematik u. s. w.*, Braunschweig 1777, in das GAUSS mehrere wissenschaftliche Bemerkungen eingetragen hat.]

tertii gradus

p	aequ. 1.	aeq. 2. e prima $z = 3x+1$	Radicum binae partes
7	$x^3+x^2-2x-1=0$	$z^3-21z-7=0$	$\sqrt[3]{(7 \pm 21\sqrt{-3}):2}$
13	$x^3+x^2-4x+1=0$	$z^3-39z+65=0$	$\sqrt[3]{(-65 \pm 39\sqrt{-3}):2}$
19	$x^3+x^2-6x-7=0$	$z^3-57z-133=0$	$\sqrt[3]{(133 \pm 57\sqrt{-3}):2}$
31	$x^3+x^2-10x-8=0$	$z^3-93z-4.31=0$	
37	$x^3+x^2-12x+7=0$	$z^3-111z+11.37=0$	

Aequationis secundae forma generalis

$$z^3-3pz-kp \qquad \text{Rad.} = \sqrt[3]{(kp \pm l\sqrt{-3}):2}$$

k determinatur hoc modo:

$$l = p(t \pm u)$$

sit

$$p = tt+3uu$$

et erit

$$k = \pm t \pm 3u.$$

[3.]

[Aus Handbuch 18, Bd, Oktober 1805, S. 147.]

Cubus.

Es sei

$$4p = aa+27bb.$$

Man mache

$$\frac{a}{\sqrt{4p}} = \cos\varphi, \quad \frac{b\sqrt{27}}{\sqrt{4p}} = \sin\varphi.$$

Dann ist der Period von $\frac{1}{3}(p-1)$ Gliedern

$$= -\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}\cos\tfrac{1}{3}\varphi\sqrt{p}.$$

Biquadrat.

Es sei

$$p = aa+4bb,$$

$$\frac{a}{\sqrt{p}} = \cos\varphi, \quad \frac{2b}{\sqrt{p}} = \sin\varphi$$

Der Period von $\frac{1}{4}(p-1)$ Gliedern

$$= -\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\sqrt{p}+\tfrac{1}{2}\sqrt{p}\cos\tfrac{1}{2}\varphi$$
$$= \Pi$$

$$\Pi^0+i\Pi'-\Pi''-i\Pi''' = \sqrt{p}\cdot\sqrt[4]{\frac{a+b\sqrt{-4}}{a-b\sqrt{-4}}}.$$

BEMERKUNG.

Zu den Aufzeichnungen [1.] und [2.] vergleiche man die Tagebuchnotizen Nr. 39 vom 1. Okt. 1796 und Nr. 67 vom 20. Juli 1797, zu [3.] die Tagebuchnotiz Nr. 128 aus dem Jahre 1806. Wir können hiernach die vorstehenden Aufzeichnungen als die ersten nach der Entdeckung ansehen. Vergl. *Disquisitiones Arithmeticae* art. 358 (Werke I, S. 445) und die bezüglichen Bemerkungen im Artikel 15 des Bachmannschen Aufsatzes »Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten«.

Schlesinger.

[II.]

DER GOLDENE LEHRSATZ.

[1.]

[Ein Zettel in Ea 5, Kapsel 40.]

1. Es sei p eine Primzahl und $p-1$ habe die Factoren e, f. Z. B. 67; $66 = 6.11$.

2. Bekanntlich lassen sich die irrationalen Werthe von $\sqrt[p]{1}$ in e (6) Klassen theilen, deren jede f (11) Glieder enthält und so dass, wenn man in jeder eine Elementarwurzel nimmt, die Exponenten der übrigen eine geometrische Reihe bilden, deren Exponenten $= \sqrt[f]{1}$ Mod. p.

3. Die Summen dieser e Klassen sind Wurzeln einer Gleichung vom Grade e, welche sich leicht in jedem Falle angeben lässt.

4. *Diese Gleichung ist möglich für jeden Primmodulus* $= \sqrt[f]{1}$ Mod. p.

Beispiel

$$7 = \text{pr.} = 1 + 2.3$$

Elementarwurzel $\sqrt[7]{1} = \rho$.

Datur aequatio pro

$$\begin{aligned} \rho + \rho^6 &= a \\ \rho^2 + \rho^5 &= b \qquad x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \\ \rho^4 + \rho^3 &= c \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat reelle Wurzeln für jeden Primmodulus $14n \pm 1$. Ex. gr. für 13 sind die Wurzeln 7, 9, 10.

[2.]

[Eintragung im LEISTE, S. 108.]

Theorema generale Demonstrandum.

1. Sit p primus et si fieri potest discerpatur $p-1$ in factores e, f. Ex. gr. $43 = p$; $42 = 3.14$.

2. His positis semper datur aequatio gradus e, cuius radices sunt $\Sigma(\sqrt[p]{1})^z$, term. f, mod. p. Nostro casu datur aequatio

$$x^3 + Axx + Bx + C = 0,$$

cuius radices sunt

1) $\varepsilon + \varepsilon^{(\rho^3)} + \varepsilon^{(\rho^6)} + \varepsilon^{(\rho^9)} + \cdots + \varepsilon^{(\rho^{39})}$

2) $\varepsilon^{\rho} + \varepsilon^{(\rho^4)} + \varepsilon^{(\rho^7)} + \cdots$

3) $\varepsilon^{\rho\rho} + \varepsilon^{(\rho^5)} + \cdots$

ubi $\varepsilon = \sqrt[p]{1}$, ρ radix elem. modulo existente p.

Dico, hanc aequationem habere omnes radices (resid: $\int$) reales posito modulo quocunque m, quando

$$m^e \equiv 1 \text{ modulo } p.$$

BEMERKUNG.

Vergl. die bezüglichen Bemerkungen im Artikel **17** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«; ferner die ebenda (in einer Fußnote zum Artikel **15**) abgedruckte Aufzeichnung, die GAUSS in LAMBERTS *Tabellen*, S. 223 eingetragen hat. In [2.] bedeutet die Abkürzung (resid: $\int$) residua summarum, d. h. Reste der Perioden.

SCHLESINGER.

[III.]

[DIE UNZERLEGBARKEIT DER KREISTEILUNGSGLEICHUNG.]

[Aus Handbuch 18, Bd, October 1805, S. 198—199.]

[1.]

Die radices propriae der Gleichung

$$x^{a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta \cdots} - 1 = 0$$

oder

$$x^n - 1 = 0,$$

wo a, b, c, d etc. ungleiche Primzahlen bedeuten, sind enthalten in der Gleichung

$$\frac{x^n-1 \,.\, x^{\frac{n}{ab}}-1 \,.\, x^{\frac{n}{ac}}-1 \,.\, x^{\frac{n}{bc}}-1 \text{ etc. } x^{\frac{n}{abcd}}-1 \text{ etc. etc.}}{x^{\frac{n}{a}}-1 \,.\, x^{\frac{n}{b}}-1 \,.\, x^{\frac{n}{c}}-1 \,.\, x^{\frac{n}{d}}-1 \text{ etc. } x^{\frac{n}{abc}}-1 \,.\, x^{\frac{n}{abd}}-1 \,.\, x^{\frac{n}{bcd}}-1 \text{ etc. etc.}} = 0$$

oder

$$\mathbf{X} = 0.$$

Der Werth von X für $x = 1$ wird gleich 1, wenn mehr als ein Factor im Exponenten n, oder $= a$, wenn $n = a^\alpha$. Setzt man die Anzahl der Factoren a, b, c, d etc $= \nu$, so sind

$$\left.\begin{array}{l}\text{im Zähler}\\ \text{im Nenner}\end{array}\right\} \text{von } \mathbf{X} \left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{\nu.\nu-1}{1.2} + \frac{\nu.\nu-1.\nu-2.\nu-3}{1.2.3.4} + \text{etc.}\\ \nu + \frac{\nu.\nu-1.\nu-2}{1.2.3} + \cdots \end{array}\right.$$

Factoren, oder in jedem $2^{\nu-1}$.

Wenn X einen Factor vom Grade λ hätte, dessen Coefficienten alle rational wären, so lässt sich zeigen

1) dass λ durch $a^{\alpha-1}(a-1)$, $b^{\beta-1}(b-1)$, $c^{\gamma-1}(c-1)$ u. s. w. theilbar seyn müsste,

2) dass sodann auch die Function, deren Wurzeln alle eigentlichen Wurzeln der Gleichung

$$x^{b^\beta c^\gamma d^\delta \cdots} - 1 = 0$$

sind, einen Factor der Dimension $\frac{\lambda}{a^{\alpha-1}(a-1)}$ haben müsste, dessen Coefficienten alle durch Wurzeln der Gleichung

$$x^{a^\alpha} - 1 = 0$$

rational dargestellt werden könnten.

Von dem Beweise würde folgendes Hauptmomente ausmachen.

I. Wenn a, b, c, d etc. ganze Zahlen sind, R Wurzel der Gleichung $x^\beta - 1 = 0$ und p Primzahl $= k\beta + 1$, so wird

$$(a + bR + cR^2 + dR^3 + \cdots)^\beta$$

entwickelt nicht

$$\equiv 0 \pmod{p,\ x^{\beta-1},\ x^{\beta-2}, \ldots}$$

seyn können.

Bew[eis]: Wäre

$$(a + bR + cR^2 + \cdots)^\beta \equiv 0$$

so wäre auch

$$(a + bR + cR^2 + \cdots)^{\beta k+1} \equiv 0;$$

aber jene Potenz ist

$$\equiv a + bR + cR^2 + \text{etc.} \equiv (b-a)R + (c-a)R^2 + \text{etc.},$$

folglich müsste sein

$$a \equiv b \equiv c \text{ etc.},$$

daraus würde aber folgen

$$a^2 + b^2 + c^2 + \cdots - ab - ac - \text{etc.} \equiv 0 \pmod{pp}.$$

[2.]

Gleichung

$$x^{a^{\alpha} a'^{\alpha'} a''^{\alpha''} a'''^{\alpha'''}} - 1 = 0$$

oder

$$x^n - 1 = 0.$$

[Die] Gleichung der primitiven Wurzeln $X = 0$ hat

$$n \frac{a-1 . a'-1 . a''-1 \ldots}{a . a' . a'' \ldots}$$

Dimensionen. X habe den rationalen Divisor Y, und es sei [ρ] eine Wurzel der Gleichung $Y = 0$, [für] diese ρ kann man voraussetzen

$$\rho = r r' r'' \ldots,$$

so dass r, r', r'' u. s. w. primitive Wurzeln der Gleichungen

$$x^{a^{\alpha}} - 1 = 0, \quad x^{a'^{\alpha'}} - 1 = 0 \quad \text{etc.}$$

sind. Es sei ferner σ eine Wurzel der Gleichung

$$\frac{X}{Y} = 0,$$

so kann man voraussetzen

$$\sigma = r^{\beta} r'^{\beta'} r''^{\beta''} \ldots,$$

so dass β, β', β'' etc. Divisoren von

$$a^{\alpha-1}(a-1), \quad a'^{\alpha'-1}(a'-1), \quad a''^{\alpha''-1}(a''-1) \quad \text{etc.}$$

sind.

Alle Wurzeln, die ein vollständiges System bilden, werden sich so darstellen lassen:

$$g, g', g'', \ldots \text{ radices primit. congr. } x^{a^{\alpha-1}(a-1)} \equiv 1 \pmod{a^{\alpha}} \text{ etc.}$$

$$r^{g^{\lambda x}} r'^{g'^{\mu x + \mu' x'}} r''^{g''^{\nu x + \nu' x' + \nu'' x''}} \ldots,$$

wo λ, μ', ν' etc. Divisoren von $a^{\alpha-1}(a-1), \ldots$

$$\frac{\mu a^{\alpha-1}(a-1)}{\lambda} \text{ div. per } \mu'$$

$$\frac{\nu a^{\alpha-1}(a-1)}{\lambda}, \quad \frac{\nu\nu' a'^{\alpha'-1}(a'-1)}{\mu'} \text{ div. per } \nu'' \text{ etc.}$$

[und] wo für x alle ganze Zahlen $0, 1, 2, \ldots, (a^{\alpha-1}(a-1) : \lambda) - 1$

x' alle ganze Zahlen $0, 1, 2, \ldots, (a'^{\alpha'-1}(a'-1) : \mu') - 1$

x'' alle ganze Zahlen $0, 1, 2, \ldots, (a''^{\alpha''-1}(a''-1) : \nu'') - 1$

zu substituiren sind. Hier besteht das ganze System aus

$$\frac{n(a-1)(a'-1)(a''-1)\ldots}{a . a' . a'' \ldots \lambda . \mu' . \nu'' \ldots}$$

Wurzeln und alle Wurzeln der Gleichung $X = 0$ zerfallen in $\lambda\mu'\nu''$ etc. Systeme, $\mu < \mu'$, ν, $\nu' < \nu''$ etc.

BEMERKUNG.

Nach der Tagebuchnotiz Nr. 136 hat GAUSS die Unzerlegbarkeit der Gleichung, der die primitiven Lösungen von $x^n = 1$ genügen, für ein zusammengesetztes n am 12. Juni 1808 bewiesen. Die vorstehende Aufzeichnung stammt wahrscheinlich aus dieser Zeit, da in demselben Handbuche astronomische Rechnungen vorangehen, die die Örter der kleinen Planeten Juno und Ceres für 1808 bestimmen. Vergl. auch die bezüglichen Bemerkungen in dem Artikel **14** des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[IV.]

[ÜBER DAS REGELMÄSSIGE SIEBZEHNECK.]

[1.]

Pfaff an Gauss.

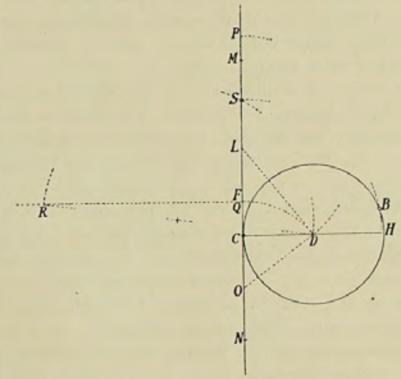
{Helmstedt, 22. März 1802.

. . . .

Langsdorfs Compendium [*)] habe ich kürzlich bekommen, aber noch nicht durchgesehen, es ist jezt beym Buchbinder. Prof. Pfleiderer, den man wohl als den Repräsentanten der ächt geometrischen Methode in Deutschland ansehen kann, ist, wie er in einem Brief an mich geäussert hat, nicht damit zufrieden. In eben diesem Brief hat er mir auch eine geometrische Construction des 17-Ecks mitgetheilt, nach Ihren Formeln oder nach denjenigen, die ich ihm als Auszug aus Ihrem ersten Msct. überschickt hatte. Soviel ich mich erinnere, habe ich Ihnen das vorigemal diese Construction nicht communicirt, sie ist mit seinen Worten folgende:

»Diametro CH circuli dati ad extremum eius C normalis ducatur PN recta: a qua abscindantur primum $CF = \frac{1}{4}CH$; tum FM, FN utraque $= FH$. Bifariam in punctis L, O secentur rectae CM, CN: et ad centrum D circuli propositi ductis LD, OD rectis, ab perpendiculo PN abscindantur $LP = LD$, $OQ = OD$. Ad rectam CQ applicetur rectangulum (CSQ) aequale rectangulo sub DC et CP, et excedens quadrato (quod fit, si recta PN ad Q punctum normalis ducitur $QR = CP$, et super diametro DR circulus describitur secans rectam CP in S). Denique centro C, intervallo CS, describatur circulus, secans propositum circulum in B. Erit HB latus polygoni regularis XVII laterum, circulo dato inscribendi«.

[*) K. Chr. v. Langsdorf, *Anfangsgründe der reinen elementaren und höheren Mathematik u. s. w.*, Erlangen 1802.]



Ich habe schon vor einiger Zeit eine Construction gefunden, die ich Ihnen gelegentlich ein andermal mittheilen will. . . . .

Behalten Sie ferner in freundschaftlichem Andenken

Ihren ergebensten Freund

J. Fr. Pfaff.}

[2.]

Gauss an Gerling.

Sie haben wol gezürnt, liebster Gerling, dass ich Ihr Verlangen, Ihre Abhandlung Ihnen noch im vorigen Jahre zurückzusenden, nicht erfüllt habe. Theils wünschte ich Ihnen über die Polygone die nöthige Auskunft zu geben; allein immer konnte ich dazu keine Musse gewinnen, indem besonders die practischen Arbeiten fast alle Zeit absorbiren. Theils hoffte ich, Ihnen ein

Exemplar meiner Vorlesung über die Attraction elliptischer Ringe [*)] beifügen zu können, welches auch manches andre Ihnen wol Interessante enthält z. B. die ersten Linien meiner arithmetisch-geometrischen Mittel; allein obgleich ich diese Vorlesung bereits vor einigen Wochen zur Correctur gehabt, habe ich doch noch immer keine Abdrücke erhalten. Länger darf ich aber mit meiner Antwort nicht zögern.

Zuvörderst danke ich verbindlichst für die Mittheilung Ihres Aufsatzes, den ich mit vielem Vergnügen gelesen habe. Ihre Resultate sind merkwürdig und ich wünsche sehr, dass Sie diese Versuche weiter fortsetzen mögen.

Ich glaube, dass Sie mit Unrecht die Theorie der Polygone in meinen D. A. scheuen, und dass es nur auf den Versuch ankommt, wo Sie gewiss alles sehr leicht finden werden. Wenn ich jetzt ein Paar Stunden dazu anwende, über diesen Gegenstand zu schreiben, so geschieht es in der Hoffnung, dass eben das Lückenhafte, welches in einer abgerissenen Darstellung der 17-Theilung, die ich hier gebe, nothwendig bleiben muss, Sie anreizen wird, das Allgemeine an der Quelle zu schöpfen. Für mich wenigstens sind und bleiben die Unters[uchungen] der höhern Arithmetik, bei weitem das Allerschönste der Mathematik, und der Genuss, den ich, auch an der schönsten astronomischen Untersuchung finde, ist gar Nichts, verglichen mit dem, welchen die höhere Arithmetik gewährt.

Bloss synthetisch beweisen lässt sich die Constructibilität des 17-Ecks sehr leicht und kurz.

Es sei

$$360^0 = 17\varphi.$$

Ich setze

$$\begin{array}{l|l}
\cos\varphi + \cos 4\varphi = a & a+b = e \\
\cos 2\varphi + \cos 8\varphi = b & c+d = f \\
\cos 3\varphi + \cos 5\varphi = c & \text{Also nach einem bekannten Satze} \\
\cos 6\varphi + \cos 7\varphi = d & 1)\ e+f = -\tfrac{1}{2}.
\end{array}$$

Durch leichte Entwickelung, mit der Überlegung, dass

$$\cos n\varphi = \cos(17-n)\varphi,$$

[*) *Determinatio attractionis etc.*, 1818, Werke III, S. 331.]

findet man

$$\begin{array}{l|l}
2ab = e+f = -\tfrac{1}{2} & 2bc = a+2c+d \\
2ac = 2a+b+d & 2bd = a+2b+c \\
2ad = b+c+2d & 2cd = e+f = -\tfrac{1}{2}.
\end{array}$$

Hieraus also

$$2ac + 2ad + 2bc + 2bd = 4a + 4b + 4c + 4d$$

d. i.

$$2ef = -2$$

oder

2) $$ef = -1.$$

Man sieht also aus 1) und 2), dass e und f Wurzeln der Gleichung

$$xx + \tfrac{1}{2}x - 1 = 0$$

sind also die eine gleich

$$= -\tfrac{1}{4} + \sqrt{\tfrac{17}{16}}, \text{ die andre } = -\tfrac{1}{4} - \sqrt{\tfrac{17}{16}}.$$

Dass die erste $= e$, die andre $= f$ ist, gibt eine oberflächliche Kenntniss der numerischen Werthe; will man diese nicht benutzen, so ist die Untersuchung altioris indaginis (besonders bei den Polygonen im Allgemeinen) und kann hier nicht entwickelt werden. S. m. Abhandlung *Summatio quarundam serierum singularium* 1808 [*)].

Ferner sind a und b Wurzeln der Gleichung

$$xx - ex - \tfrac{1}{4} = 0$$

also die Werthe

$$\tfrac{1}{2}e \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}ee)}$$
$$= -\tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}\sqrt{17} \pm \tfrac{1}{8}\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})}.$$

Dass das obere Zeichen für a, das untere für b gelten muss, ist in diesem Falle leicht einzusehen, da

$$a - b = (\cos\varphi - \cos 2\varphi) + (\cos 4\varphi - \cos 8\varphi)$$

offenbar positiv seyn muss. Auf ähnliche Weise wird

[*) Werke II, S. 9.]

$$c = -\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}\sqrt{17} + \tfrac{1}{8}\sqrt{(34 + 2\sqrt{17})}$$
$$d = -\tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}\sqrt{17} - \tfrac{1}{8}\sqrt{(34 + 2\sqrt{17})}.$$

Endlich sind nun offenbar $\cos\varphi$ und $\cos 4\varphi$ die Wurzeln der quadratischen Gleichung (weil das Product $\cos\varphi \cdot \cos 4\varphi = \frac{1}{2}c$)

$$xx - ax + \tfrac{1}{2}c\,[= 0],$$

also

$$\cos\ \varphi = +\tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}c)}$$
$$\cos 4\varphi = +\tfrac{1}{2}a - \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - \tfrac{1}{2}c)}.$$

Da nun

$$2aa = 2 + b + 2c$$

wird, so ist

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \tfrac{1}{2}a + \sqrt{(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}b - \tfrac{1}{4}c)}\\ &= -\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}\sqrt{17} + \tfrac{1}{16}\sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} \overset{*}{+} \tfrac{1}{8}\sqrt{\{17 + 3\sqrt{17}}\\ &\qquad - \sqrt{(34 - 2\sqrt{17})} - 2\sqrt{(34 + 2\sqrt{17})}\}.\end{aligned}$$

Diess ist dieselbe Formel, die in meinen D. A. p. 662 steht[*)], nur ist dort durch einen Druckfehler statt des $+$, welches hier mit * bezeichnet ist, ein $-$ gesetzt, oder, was dasselbe ist, die dortige Formel stellt nicht $\cos\varphi$ sondern $\cos 4\varphi$ d. i. $\sin\frac{90^\circ}{17}$ vor, also die halbe Seite des 34-Ecks. — Die übrigen Cosinus bekommen ganz ähnliche Ausdrücke.

In den D. A. habe ich vorgezogen, statt des $\cos n\varphi$, die Grösse

$$\cos n\varphi + \sqrt{-1}\,\sin n\varphi$$

d. i. die Wurzel der Gleichung $x^{17} - 1 = 0$ zu brauchen, wodurch alles viel zierlicher wird.

Die obige Darstellung ist an sich zureichend. Im Allgemeinen, wenn es die Theilung des Kreises in p Theile gilt, wo p eine Primzahl, kommt es darauf an, die $\frac{p-1}{2}$ Cosinus der Bögen

$$\frac{360}{p},\ 2\cdot\frac{360}{p},\ 3\cdot\frac{360}{p},\ \ldots,\ \frac{1}{2}(p-1)\cdot\frac{360}{p}$$

[*) Werke I, S. 462, wo der Druckfehler verbessert ist.]

auf eine solche Weise in Gruppen zu theilen, dass ähnliche Erfolge hervorgehn wie hier, und diess beruht lediglich [auf] arithmetischen Principien, die der 3. Abschnitt meiner *Disq* enthält. Alles hängt dabei von den Factoren der Zahl $\frac{1}{2}(p-1)$ ab; ist diese Zahl eine Potenz von 2, z. B.

$$p = 3,\ 5,\ 17,\ 257,\ 65537,$$

so kommen bloss quadratische Gleichungen vor; hingegen z. B. für $p = 31$, wo $\frac{1}{2}(p-1) = 3.5$, ist eine cubische und eine Gleichung vom 5. Grade unausweichlich.

Das Geschichtliche jener Entdeckung ist bisher nirgends von mir öffentl. erwähnt; ich kann es aber sehr genau angeben. Der Tag war der 29. März 1796, und der Zufall hatte gar keinen Antheil daran. Schon früher war alles was auf die Zertheilung der Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$$

in zwei Gruppen sich bezieht, von mir gefunden, wovon der schöne Lehrsatz D. A. p. 637[*)] unten abhängt u. zwar im Winter 1796 (meinem ersten Semester in Göttingen), ohne dass ich den Tag aufgezeichnet hätte. Durch angestrengtes Nachdenken über den Zusammenhang aller Wurzeln unter einander nach arithmetischen Gründen, glückte es mir bei einem Ferienaufenthalt in Braunschweig, am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war) diesen Zusammenhang auf das klarste anzuschauen, so dass ich die specielle Anwendung auf das 17-Eck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen konnte. Freilich sind später noch andere Untersuchungen des 7. Abschnitts der D. A. hinzu gekommen. Ich kündigte diese Entdeckung in der Jenaischen Literaturzeitung an, wo mein Inserat ungefähr im May oder Junius 1796[**)] abgedruckt seyn wird. Der Druck meiner *Disq. Arith.* fing im April 1798 an, ging langsam fort, wurde mehrere male ganz unterbrochen (weil der Drucker von Braunschweig wegzog, daher vom Bogen R an, andere Schrift gebraucht ist) und wurde im Sommer 1801 vollendet.

Im Jahr 1798 oder 1799 kam ein gewisser Huguené oder Huguenot (ein

[*) Werke I, S. 443.]
[**) Siehe S. 3 dieses Bandes; die Anzeige ist in der Tat im Juni 1796 erschienen.]

preussischer Officier) durch Braunschweig, dem v. ZIMMERMANN von meinen Untersuchungen erzählte. Auf seine Bitte theilte ich ihm einen kleinen Aufsatz, der die Theorie des 17-Ecks vollständig enthielt (ungefähr wie oben, aber viel ausführlicher) mit, den er behielt. Dieser Mensch soll sich nachher nicht entblödet haben, in einem Werke, das er hat drucken lassen [*)], welches ich aber selbst nicht gesehen habe, diese Sache auf eine solche Art vorzutragen, dass der Leser glauben könnte, es sei des HUGUENOT eigne Arbeit! Unglücklicherweise aber, soll dieses Buch sogar mehrere Jahre nach der Erscheinung meiner D. A. erst gedruckt seyn, wodurch seine Unverschämtheit umso lächerlicher wird [**)]. — Übrigens darf ich Ihrer Discretion und Ihrer Beurtheilung vertrauen, falls Sie von dem Geschichtlichen irgend etwas zu erwähnen passend finden. . . . .

Leben Sie wohl, liebster GERLING und erfreuen bald mit einigen Zeilen

Ihren ergebensten

Göttingen d. 6. Januar 1819. C. F. G.

Soeben, indem ich das Paket absenden will, werden mir einige Abdrücke meiner Vorlesung überbracht; ich ergreife also diese Gelegenheit, noch einen für Sie beizulegen.

[*)] *Mathematische Beyträge zur weiteren Ausbildung angehender Geometer*, von dem K. Preuss. Hauptmann im Feld-Artillerie Corps v. HUGUENIN, Königsberg, bey Goebbels & Unzer, 1803.]

[**)] GAUSS war über das Buch v. HUGUENINS ungenau unterrichtet. Auf S. 283 dieses Buches findet sich nämlich die folgende Fußnote: »Dass das 17-Eck durch quadratische Gleichungen in einen Kreis beschrieben werden könne, entdeckte zuerst ein junger Geometer aus Braunschweig, dessen Name wie ich mich erinnere GAUS ist: er machte solches einigen Gelehrten bekannt und da dieses Verwunderung und vielleicht einigen Unglauben erregte, so gab er etwas über sein Verfahren an. Zu dieser Zeit (im J. 1796) befand ich mich in Braunschweig, wo ich solches nebst allem was man von dieser unerwarteten Auflösung wusste, erfuhr und hatte das Vergnügen, diese Spur verfolgend, seine eigene Auflösung in kurzer Zeit heraus zu bringen; die hier gegebene Auflösung aber ist meine eigene und gänzlich von jener verschieden; daher es mir frey stehen wird, diese als mein Eigenthum hier bekannt zu machen, indem ich die Herausgabe der ersten Auflösung, welche gänzlich trigonometrisch war, ihrem Erfinder selbst überlasse«.]

[ALLGEMEINES ZUR LEHRE VON DEN GLEICHUNGEN].

[V.]

[DIE BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN KOEFFIZIENTEN EINER GLEICHUNG UND DEN POTENZSUMMEN IHRER WURZELN.]

[Eintragung im LEISTE, S. 6, 7.]

[1.]

Sit data aequatio

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \dots = 0$$

cuius radices

$$x', x'', x''', \dots x^N.$$

Sit

$$\begin{aligned} \Sigma x &= (1) \\ \Sigma xx &= (2) \\ \Sigma x^3 &= (3) \end{aligned}$$

& sic deinceps : tum

$$\begin{aligned} A &= (1) \\ B &= \tfrac{1}{2}(1)^2 - \tfrac{1}{2}(2) \\ C &= \tfrac{1}{6}(1)^3 - \tfrac{1}{2}(1)(2) + \tfrac{1}{3}(3) \\ D &= \tfrac{1}{24}(1)^4 - \tfrac{1}{4}(1)^2(2) + \tfrac{1}{8}(2)^2 + \tfrac{1}{3}(1)(3) - \tfrac{1}{4}(4). \end{aligned}$$

Sit E. g.

$$(1) = -1; \quad (2) = -3; \quad (3) = +17; \quad (4) = -27.$$

Erit aequatio fundam.

$$x^4 + x^3 + 2xx - 4x + 3 = 0$$
$$(\text{Obiter} = (xx + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{5}{2})^2 - 13(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2})^2)$$

[2.]

$$(1) = A$$
$$(2) = AA - 2B$$
$$(3) = A^3 - 3AB + 3C$$
$$(4) = A^4 - 4AAB + 6B^2 + 4AC - 4D$$
$$(5) = A^5 - 5A^3B + 5AB^2 + 5AAC - 5BC - 5AD + 5E$$
$$(6) = A^6 - 6A^4B + 9A^2B^2 - 2B^3 + 6A^3C + 3CC - 12ABC$$
$$- 6AAD + 6AE - 6F + 6BD$$

$$(n) = A^n - nA^{n-2}B + \frac{n.n-3}{1.2}A^{n-4}B^2 - \frac{n.n-4.n-5}{1.2.3}A^{n-6}B^3 \ldots$$
$$\ldots - nA^{n-3}C + \frac{n.n-5}{1.2}A^{n-6}CC - \frac{n.n-7.n-8}{1.2.3}A^{n-9}C^3 \ldots$$

legem generalem vide pagina sequenti.

Coefficiens termini $a^m b^n c^p d^q \ldots$ (si A significet numerum permutationum huius expressionis)

$$= \frac{A}{m+n+p+\cdots}(m + 2n + 3p + \cdots).$$

BEMERKUNG.

Zu der vorstehenden Aufzeichnung vergl. man die Tagebuchnotizen Nr. 6 vom 23. Mai 1796 und Nr. 28 vom 21. August 1796 sowie die bezüglichen Bemerkungen im Artikel 15 des BACHMANNschen Aufsatzes »Über GAUSS' zahlentheoretische Arbeiten«.

SCHLESINGER.

[VI.]

[ALGEBRAISCHER LEHRSATZ.]

[1.]

[Aus Handbuch 21, Bg, S. 76.]

Eine ganz neue Ansicht der Gleichungen beruhet auf Folgendem. Das unendliche Planum, welches alle complexen Grössen darstellt, theilt sich scharf in n Flächenräume, deren jeder Einer der Wurzeln der Gleichung

$$fx = 0$$

angehört; jeder Scheidungslinie gehört eine Wurzel der Gleichung

$$f'x = 0$$

an, und in allen Puncten Einer Scheidungslinie ist der imaginäre Theil von fx constant.

Instructiv wird die Entwicklung der Gleichung

$$fx = 2x^5 + 5x^4 + 20x^3 + 40xx + 80x + g$$

sein, für verschiedene schicklich gewählte Werthe des letzten Gliedes.

Man hat

$$f'x = 10(x^4 + 2x^3 + 6xx + 8x + 8) = 10(xx + 4)(xx + 2x + 2)$$

deren Wurzeln also

$$\alpha = +2i \qquad \alpha' = -2i \qquad f\alpha = -80 - 64i + g$$
$$\beta = -1 + i \qquad \beta' = -1 - i \qquad f\beta = +42 + 10i + g$$

Es ist also

$$\begin{array}{lll}
\text{I.} & \text{für } g = +35\tfrac{23}{64} & \text{Mod.}\, f\alpha = \text{Mod.}\, f\beta = \tfrac{19}{64}\sqrt{226505} \\
\text{II.} & \text{für } g = -49\tfrac{7}{8} & \text{Ang.}\, f\alpha = \text{Ang.}\, f\beta' = 180^0 + \text{Arc. tg. } \tfrac{9}{7} \\
 & & \text{Ang.}\, f\alpha' = \text{Ang.}\, f\beta = 180^0 - \text{Arc. tg. } \tfrac{9}{7} \\
\text{III.} & \text{für } g = -36\tfrac{13}{27} & \text{Ang.}\, f\alpha + 180^0 = \text{Ang.}\, f\beta = \text{Arc. tg. } \tfrac{37}{24} \\
 & & \text{Ang.}\, f\alpha' + 180^0 = \text{Ang.}\, f\beta' = -\text{Arc. tg. } \tfrac{37}{24}.
\end{array}$$

Einer Entwickelung werth ist die Gleichung

$$fx = x^5 - 4x^4 + 8x^3 - 8xx + 4x + g = 0 = x(xx - 2x + 2)^2 + g,$$

wo

$$f'x = (5xx - 6x + 2)(xx - 2x + 2) = 5\left(x - \frac{3+i}{5}\right)\left(x - \frac{3-i}{5}\right)(x - (1+i))(x - (1-i)).$$

Namentlich in Beziehung auf die Linie, wo

$$f(a+bi) = f(a-bi).$$

[2.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 2. April 1833.

Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher. II. Altona 1860, S. 328.

Recht sehr danke ich Ihnen, theuerster Freund, für die gütige Mittheilung des lineirten Papiers. Ich finde es sehr brauchbar besonders für Zeichnungen jeder Art, denen rechtwinklige Coordinaten zum Grunde liegen, insofern nicht die grösste Genauigkeit gefordert wird, und das ist bei meinen Zeichnungen ohnehin nie der Fall, da ich sie nie mache, um etwas durch Abmessung definitiv daraus abzuleiten; also für Zeichnung terrestrischer Puncte, allenfalls auch selbst kleiner Sternkarten, Versinnlichung des Ganges des Barometers, Variationen der Magnetnadel etc. etc., nicht weniger auch zu Zeichnungen, die sich auf rein mathematische Sachen beziehen, wie z. B. in Rücksicht auf die imaginären Wurzeln der Gleichungen, und gerade mit Gegenständen der letztern Art habe ich mich in der letzten Zeit viel beschäftigt.

Da Sie jetzt wohl meine Anzeige von Fourier[*)] gelesen haben, so interessirt Sie vielleicht die Bemerkung, dass ich absichtlich S. 324[**)] »sondern so lange als . . . . . . zweifelhaft bleiben muss« hier in gemessenen Worten mich ausgedrückt habe, aber nicht weil ich selbst über Dasein oder Nichtdasein eines solchen Zusammenhangs ungewiss geblieben, sondern weil in den G. G. A. nicht der Ort war mich darüber auf bestimmtere Weise zu erklären. Ich glaube auf das klarste nachweisen zu können, dass ein solcher Zusammenhang nicht existirt, allein dies wird erst geschehen können, wenn ich einmahl Gelegenheit nehme meine Untersuchungen über die Wurzeln der Gleichungen ausgearbeitet bekannt zu machen. Sie wissen, dass ich langsam schreibe, allein das kommt hauptsächlich daher, weil ich mir nie anders gefallen kann, als wenn in kleinem Raum möglichst viel ist, und kurz zu schreiben viel mehr Zeit kostet als lang. Wollte ich jene Untersuchungen, die, wenn ich sie einmal entwickele, nur eine mässige Zahl Bogen betragen dürfen, mit der Breite, wie Fouriers Buch geschrieben ist, vortragen, so würde ich vielleicht nur $\frac{1}{4}$ so viel Zeit und mehrere grosse Quartbände gebrauchen. . . . . . .

[3.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 1836. Junius 20.

Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher. III. Altona 1861, S. 68—69.

. . . . Bei Gelegenheit der Vorlesung, die ich halte, bin ich veranlasst in diesen Tagen auf die Theorie der Gleichungen zurückzukommen, der ich jetzt einen ganz neuen Gesichtspunkt abgewonnen habe, in Folge von welchem es mir nicht unwahrscheinlich ist, dass sich dennoch eine Brücke zwischen Fouriers critischen Punkten und bestimmten Paaren von imaginären Wurzeln schlagen lässt. Vor etwa 3 Jahren habe ich in einem Briefe an Sie die entgegengesetzte Meinung ausgesprochen, aber freilich hatte ich damals nicht alle auf den Gegenstand bezüglichen Details entwickelt, was, wenn man einen

[*)] Werke III, S. 119.]
[**)] Werke III, S. 121, Zeile 10—12.]

negativen Satz zu beweisen hat, nothwendig ist um ganz gewiss zu sein. Die allgemeinen Apperçus, die in 999 Fällen gut gehen, können das 1000te mal am Ende in einen cul de sac führen. Berichtigen Sie diesmahl meine damaligen vielleicht zu positiven Behauptungen, aber bemerken Sie zugleich, dass ich nicht ohne Ursach pauca sed matura zu meinem Wahlspruch für alles zu veröffentlichende gemacht habe. Die allgemeinen Apperçus sind die Geburten Einer Stunde, aber um daraus etwas gereiftes zu machen, ist oft lange, oft jahrelange grosse Detailarbeit nöthig, von der man voraussieht, dass man sie gewiss durchführen kann, wenn man sich dazu gibt, obwohl auch dann immer noch manche ähnliche Geburten zweiten und dritten Ranges, die schon auf Ordre kommen müssen, nöthig sind. Procreare iucundum, at parturire molestum. Was übrigens meinen gegenwärtigen Gesichtspunkt betrifft, so würden auch erst sehr zeitraubende Details, um alle Verzweigungen zu verfolgen, nöthig sein, und ich glaube, nicht, dass ich, indem so vielerlei unter . . . .

[Der Schluß des Briefes fehlt.]

[4.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, den 24. Juni 1836.

Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER. III. Altona 1861. S. 72.

. . . . . . Ich habe in den letzten Tagen meine Ideen über die Gleichungen weiterverfolgt, aber das Resultat ist eher das entgegengesetzte, und führt vielmehr zur Bestärkung in meiner früheren Ansicht, dass es einen in der Natur der Sache liegenden allgemeinen willkürfreien Zusammenhang zwischen den einzelnen critischen Punkten und den einzelnen Paaren von imaginären Wurzeln gar nicht gibt. Es scheint mir selbst, dass ich in meinem letzten Briefe dem Ausdruck meiner früheren Ansicht in einem älteren Briefe Unrecht gethan habe, indem mir jetzt (nach langer Unterbrechung) jene frühere Ansicht nicht gleich in derselben Frische gegenwärtig war, in der ich sie damals aufgefasst hatte. Soviel bleibt aber immer gewiss, dass bei solchen negativen Sätzen [für] die Verwandlung der subjectiven Überzeugung in eine objective (für andere)

eine höchst abschreckende Detailarbeit erforderlich wäre. Man würde, um die Verschiedenheit der Fälle wirklich anschaulich zu machen, eine grosse Menge von Gleichungen in concreto durch Curven versinnlichen müssen; jede Curve müsste durch Punkte gezeichnet werden, und die Bestimmung eines einzigen Punkts erfordert schon langwierige Rechnungen. Sie sehen es wohl der Fig. 4 bei meiner ersten Schrift von 1799 nicht an, wie viel Arbeit die richtige Zeichnung dieser Curve erfordert hat, und doch ist diess vergleichungsweise nur ein sehr einfacher Fall gegen viele, die hier betrachtet werden müssten. . . . . . .

BEMERKUNGEN.

I. Von der Richtigkeit des von GAUSS in der Aufzeichnung [1.] ausgesprochenen Satzes kann man sich nach einer mündlichen Mitteilung von F. KLEIN wie folgt überzeugen. Setzt man $f(x) = w$ und bezeichnet die Wurzeln der Gleichung $f'(x) = 0$ — die der Einfachheit wegen alle von einander verschieden sein mögen — durch $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, so sind die Punkte $w = f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_{n-1})$ die im Endlichen gelegenen einfachen Verzweigungspunkte der algebraischen Funktion x von w. Denkt man sich die zu dieser Funktion gehörige n-blättrige RIEMANNsche Fläche in der Weise konstruiert, daß man durch die Verzweigungspunkte $f(\alpha_1), f(\alpha_2), \ldots, f(\alpha_{n-1})$ zur reellen w-Achse parallel laufende Verzweigungsschnitte legt und etwa längs des von $f(\alpha_\varkappa)$ ausgehenden Schnittes die Blätter 1 und $\varkappa + 1$ aneinander heftet, so liefert die Abbildung der Blätter dieser Fläche auf die x-Ebene die durch die Bilder der Verzweigungsschnitte begrenzten n Flächenräume, von denen in dem GAUSSschen Satze die Rede ist. In der Handschrift geht diesem Satze unmittelbar voran der Werke III, S. 112 und Werke VIII, S. 32 abgedruckte Lehrsatz mit einem Beispiel. Beide Sätze gehören zusammen und fallen, wie auch die Eingangsworte der Aufzeichnung [1.] zeigen, unter den »ganz neuen Gesichtspunkt«, den GAUSS in der Briefstelle [3.] erwähnt.

SCHLESINGER.

II. Die in den Briefstellen [2.]—[4.] an SCHUMACHER und auch schon früher in dem Briefe an DROBISCH (S. 106, 107) gemachten Bemerkungen, die an FOURIERS *Analyse des équations déterminées* (Paris, 1831, deutsch in OSTWALDS Klassikern Nr. 127) anknüpfen, verlangen ein Eingehn auf GAUSS' Anzeige dieses Werkes (Werke III, S. 119), da einige Angaben dieser Anzeige einer Richtigstellung bedürfen. Die Aussage Werke III, S. 121, Zeile 4: »In der That ist es zwar wahr, dass die Gleichung $X = 0$ zusammengezählt genau soviele Paare imaginärer Wurzeln enthält, als solche Ausfälle oder kritische Stellen vorkommen«, trifft bei der a. a. O. S. 120, Zeile 5 bis 1 v. u. gegebenen Definition der kritischen Stellen nicht zu, wie schon das Beispiel der Gleichung $(x-b)^n - c = 0$ zeigt, wo n eine gerade Zahl $\geqq 4$, b beliebig reell, c positiv sein soll. Trotz ihrer $n-2$ verschiedenen imaginären Wurzeln hätte die Gleichung keine kritische Stelle im Sinne von GAUSS. Wir definieren (vergl. Archiv der Mathem. und Physik (3) **16**, 1910, S. 157) eine kritische Stelle auf folgende Weise: Es bedeuten $f(x) = 0$ eine Gleichung n^{ten} Grades mit reellen Koeffizienten, $f'(x), f''(x), \ldots$ die Derivierten von $f(x)$ und α eine reelle Größe; in der Reihe $f(\alpha)$, $f'(\alpha), \ldots, f^{(n)}(\alpha)$ sei e die Anzahl der verschwindenden intermediären Funktionen *), c und d die Anzahl

*) Sollte also etwa $f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(l-1)}(\alpha) = 0$ sein, so sind diese ersten l verschwindenden Größen bei der Bestimmung von e nicht mitzuzählen.

der durch eine ungerade Zahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel bezw. Zeichenfolgen und $\sigma = e - c + d$. Wenn $\sigma \geqq 2$ ist, so heiße α eine kritische Stelle von $f(x) = 0$ *). Bei dieser Definition gilt der folgende präzisierte FOURIERsche Satz: Es seien a und a' zwei beliebige reelle Zahlen $(a < a')$; bedeutet Z_a bezw. $Z_{a'}$ die Anzahl der Vorzeichenwechsel in den Reihen

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \ldots,\ f^{(n)}(a), \tag{1}$$
$$f(a'),\ f'(a'),\ f''(a'),\ \ldots,\ f^{(n)}(a') \tag{2}$$

und ist 2λ die Summe der sämtlichen ihrer Definition nach niemals ungeraden Zahlen σ, die allen zwischen a und a' gelegenen kritischen Stellen von $f(x) = 0$ entsprechen, so ist stets

$$Z_a - Z_{a'} - 2\lambda \geqq 0 \tag{3}$$

und die durch die linke Seite von (3) definierte Zahl gibt die genaue Anzahl der zwischen den Grenzen a und a' gelegenen Wurzeln von $f(x) = 0$, jede Wurzel nach ihrer Vielfachheit gezählt. Für den Fall, daß die Grenzen a und a' kritische Stellen oder Wurzeln von $f(x) = 0$ sind, ist für die Bildung von 2λ und die Zählung der Gleichungswurzeln a auszuschließen, a' einzuschließen **). Für $a = -\infty$, $a' = +\infty$ erhält man den folgenden Satz, der an die Stelle der GAUSSschen Angabe zu treten hat: Die Anzahl aller imaginären Wurzeln von $f(x) = 0$ ist gleich der Summe aller Zahlen σ, die den sämtlichen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gelegenen kritischen Stellen von $f(x) = 0$ entsprechen. — Aus der Ungleichung (3) folgt, daß, wenn zwischen a und a' eine kritische Stelle liegt, für die $\sigma > 2$ ist, $Z_a - Z_{a'} > 2$ sein muß. Hiernach trifft die Aussage von GAUSS (Werke III, S. 120, Zeile 11 v. u.), wonach »sämmtliche einzelne Differenzen $g' - g$, $g'' - g'$, $g''' - g''$ u.s.w. nur entweder $= 1$ oder $= 2$ werden«, wenn man die Grenzen eng genug wählt, nicht zu. Daß man $g' - g$ nichts stets $\leqq 2$ machen kann, war FOURIER bekannt, wie aus seiner »Regel des doppelten Vorzeichens« (a. a. O. S. 103) hervorgeht, wo er auch das Beispiel einer Gleichung mit 14 imaginären Wurzeln erwähnt. Die oben gegebene Definition der kritischen Stellen ist ihrem Wesen nach auch nur eine Präzisierung der genannten FOURIERschen Regel.

Daß sich nicht »eine Brücke zwischen FOURIERS critischen Punkten und bestimmten Paaren von imaginären Wurzeln schlagen lässt« (vergl. die Briefstelle [3.]), folgt aus dem Beispiel $(x-b)^n + c = 0$ (n gerade, b reell, $c > 0$), mit der einzigen kritischen Stelle b und n verschiedenen imaginären Wurzeln. Offen bleibt aber noch die folgende Frage: Es sei für $f(x) = 0$ die Anzahl m der kritischen Stellen nicht größer als $\frac{n}{2}$ und für jede $\sigma = 2$ ***); gibt es dann »einen willkürfreien Zusammenhang« (vergl. die Briefstelle [4.]) zwischen den einzelnen dieser m kritischen Stellen und m Paaren von imaginären Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$?

ALFRED LOEWY.

*) Für das Beispiel ist b eine kritische Stelle mit $e = n - 1$, $c = 1$, $d = 0$, also $\sigma = n - 2$.

**) Der von GAUSS, Werke III, S. 120, Zeile 8, bei Seite gesetzte »ausnahmliche Fall« schließt aus, daß eine der Größen aus den Reihen (1), (2) gleich Null wird. Es handelt sich also um eine etwas stärkere Beschränkung, als wenn man fordert, daß a und a' weder Gleichungswurzeln noch kritische Stellen sein sollen.

***) Schon der Fall $\sigma = 2$ kommt nicht nur entsprechend der GAUSSschen Anzeige, die nur $d = 1$ zuläßt, zustande, sondern in allgemeinster Weise für ein beliebiges ganzzahliges e, wenn $c = e - 1$, $d = 1$ oder $c = e - 2$, $d = 0$ ist. Es folgt dies aus $\sigma = 2$ und aus der gemäß der Definition der Zahlen c, d, e stets giltigen Relation $e \geqq c + d$.

ANALYSIS.

NACHTRÄGE ZU DEN BÄNDEN III UND VIII.

NACHTRÄGLICHE BEMERKUNG ZU DER S. 36—64 DES VIII. BANDES ABGEDRUCKTEN ABHANDLUNG: DE INTEGRATIONE FORMULAE DIFFERENTIALIS $(1+n\cos\varphi)^\nu d\varphi$.

Es ist hier ein bedauernswerter Irrtum zu berichtigen, der sich bei der früheren Herausgabe von Stücken des GAUSSschen Nachlasses, die sich auf Analysis beziehen, eingeschlichen hat (wie ich dies übrigens bereits 1902 in meinem damaligen *Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken*, Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Geschäftliche Mitteilungen S. 12, ausgeführt habe).

Im Jahre 1893 wurde von WILHELM MEYER (Göttingen) in den Akten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften ein Manuskript mit dem Titel *De integratione formulae differentialis* $(1+n\cos\varphi)^\nu d\varphi$ gefunden, das weder einen Verfassernamen noch eine Angabe über Ort und Zeit der Abfassung enthielt, dessen Handschrift aber derjenigen des jugendlichen GAUSS so ähnlich war, daß über den Verfasser kein Zweifel zu bestehen schien. So wurde es von E. SCHERING in den Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften vom Jahre 1893, S. 617—646, als von GAUSS herrührend veröffentlicht und auch im Bd. VIII der Werke, 1900, S. 35—64 wieder abgedruckt, trotzdem R. FRICKE (der im Bd. VIII die Beiträge zur Analysis bearbeitete) auf eine Reihe von Unstimmigkeiten aufmerksam wurde, denen er in der Anmerkung auf S. 64 des genannten Bandes Ausdruck gegeben hat.

Ganz unabhängig davon hat mir bald darauf CONRAD MÜLLER, der sich damals auf meine Veranlassung mit Studien über die an der Göttinger Universität um die Wende des 18. Jahrhunderts wirkenden Mathematiker beschäftigte, eines Tages (1902) berichtet, daß er in den Göttingischen Anzeigen von 1800, Stück 31, eine Besprechung von KÄSTNER über eine von THIBAUT eingereichte Schrift gefunden habe, die im wesentlichen eine vom Verfasser selbst herrührende Inhaltsangabe enthalte. Die Vergleichung ergab dann sofort, daß es sich dabei genau um die vorgenannte, also fälschlich GAUSS zugeschriebene Arbeit handelte. Nun ist wirklich jeder Zweifel ausgeschlossen: nicht GAUSS, sondern THIBAUT ist der Verfasser.

KLEIN.

NACHLASS.

EXERCITATIONES MATHEMATICAE.

[Zettel in Fh, Kapsel 50.]

[1.]

Demonstratio elementaris propositionis de productis e Cosinibus.

$$\sin\tfrac{1}{13}\pi \,.\, \cos\tfrac{1}{13}\pi = \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{2}{13}\pi$$
$$\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{2}{13}\pi \,.\, \cos\tfrac{2}{13}\pi = \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{4}{13}\pi$$

& sic porro et si tandem

$$\sin\frac{2^n\pi}{13} = \pm\sin\frac{1}{13}\pi$$

erit

$$\frac{1}{2^n} = \pm\cos\frac{1}{13}\pi \,.\, \cos\frac{2}{13}\pi \,.\, \cos\frac{4}{13}\pi \ldots \cos\frac{2^{n-1}}{13}\pi.$$

Eodem modo demonstratur productum

$$\cos\frac{m}{13}\pi \,.\, \cos\frac{2m}{13}\pi \ldots \cos\frac{2^{n-1}m}{13}\pi$$

dare idem productum. Hae veritates etiam aeque facile absque omni calculo per solam polygoni inspectionem demonstrantur.

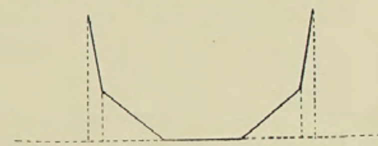
Aug. 21. 96.

[2.]

Perfacilis est demonstratio geometrica propositionis

$$\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos 3\,\frac{2\pi}{n} + \cdots + \cos\,(n-1)\,\frac{2\pi}{n} \quad \text{esse} = 0,$$

si polygonum in hoc situ consideretur:



Eodem.

[3.]

Summa Serierum periodos quarum summa $= 0$ tenentium commode invenitur, si singula membra per successivas variabilis cuiusdam x potestates multiplicentur, unde huius serei, quae est recurrens, summa sic exhibetur:

$$\frac{a + bx + cxx + \cdots}{1 - x^n},$$

quae pro nostro casu $x = 1$ abit in hanc formam $\frac{0}{0}$. Si valor huius expressionis per regulas notas investigetur, ad eadem pervenietur, quae B[eatus] D[aniel] Bern[oulli] ex principio metaphysico, sc. rationis sufficientis eruerat.

Aug. 28. 96.

[4.]

$$\text{Lim.}\ \frac{\Sigma\,\text{pr. ad}\ n\ \text{infra}\ n}{nn}$$

(Pr. usque ad $P+30n$) sunt

$$(4-1)(3^2-1)(5^2-1)n = 576n$$

ideo a

$$P\ldots Pn \ \text{ generaliter }\ \frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdots nn.$$

Si $P:n=\infty:1$

adeoque

$$\text{Limes quaesitus} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{2.4}{3.3}\cdot\frac{4.6}{5.5}\cdots = \frac{3}{\pi\pi} = \frac{3}{9{,}8696} = 0{,}3039+$$

[5.]

Si Φ significet eiusmodi functionem ut sit

$$\Phi : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = x,$$

erit

$$\Phi x = x - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}Ax^3 + \tfrac{3}{6}\cdot\tfrac{1}{7}Bx^3 - \tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{1}{10}Cx^3$$
$$+\tfrac{1}{13}\cdot\tfrac{9}{12}Dx^3 - \tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{11}{15}Ex^3 \left(+\tfrac{1}{19}\cdot\tfrac{15}{18}Fx^3 - \tfrac{1}{22}\cdot\tfrac{17}{21}Gx^3+\ldots\right)$$

Seu concinnius

$$= x - \frac{1.3}{2.3.4}Ax^3 + \frac{3.5}{5.6.7}Bx^3 - \frac{5.9}{8.9.10}Cx^3 + \frac{9.11}{11.12.13}Dx^3 - \frac{11.15}{14.15.16}Ex^3 + \ldots$$

[6.]

Si

$$\Phi : \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = x,$$

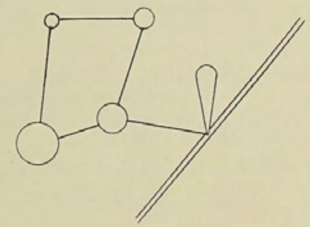
erit

$$\Phi x = x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{120}x^9 - \frac{11}{15600}x^{13} + \frac{211}{13000.272}x^{17} - \ldots$$

. . . .

[7.]

Incumbant corpora A, B, C &c plano hor[izontali] (quod sine frictione concipimus) filis utcunque connexa; applicetur filo in E potentia secundum EF, ita ut punctum E semper super hac linea protrahatur; quaeritur motus corporum A, B, C, …



[8.]

Investigare polyhedra regularia, quae originem ducunt a polygonis huius figurae

Quot formas diversas polyg[onum] hab[ere] potest?

Resp[onsio]: $\frac{\text{Num: primorum infra } N \text{ ad } N}{2}$

. . . .

[9.]

Evolvere prod[ucta]

$$1-x.1-x^2.1-x^3.1-x^4\ldots$$
$$1-x.1-x^2.1-x^4\ldots$$

[10.]

Invenire

$$\text{Lim}: \frac{\Sigma \text{ pr. ad } n \text{ infra } n}{nn}$$
$$\pm \mid 0{,}307.$$

[11.]

Ex aeq[uationibus]

$$\begin{array}{l|l|l|l}
0 = Aa' & = Aa'' & = Aa''' & = Aa^{\text{IV}} \\
+Ba'' & +Ba''' & +Ba^{\text{IV}} & +Ba' \\
+Ca''' & +Ca^{\text{IV}} & +Ca' & +Ca'' \\
+Da^{\text{IV}} & +Da' & +Da'' & +Da'''
\end{array}$$

sequi: sive

$$A = B = C = D = 0$$

sive

$$a' = a'' = a''' = a^{\text{IV}} = 0.$$

BEMERKUNGEN ZU DEN EXERCITATIONES MATHEMATICAE.

Zu [1.] und [2.] ist zu bemerken, daß von demselben Tage, 21. August 1796, die beiden Tagebuchaufzeichnungen Nr. 28. und Nr. 29. herrühren; in der Nr. 28. wird auf die *Exercitationes mathematicae* ausdrücklich Bezug genommen.

Die Notiz [3.] ist (nach einer schriftlichen Mitteilung von P. STÄCKEL) im Anschluß an die Beschäftigung mit drei Abhandlungen von DANIEL BERNOULLI enstanden, die in den Novi Comment. Acad. Petrop. **16** (1771), S. 71, **17** (1772), S. 5, **18** (1773), S. 3 enthalten sind und sich auf Reihen von der Form

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_1 + a_2 + \cdots \text{ in inf.}$$

beziehen, wo

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0$$

ist. Die ersten n Glieder $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nennt D. BERNOULLI die Periode. Summiert man gliedweise und bezeichnet mit $s_\varkappa$ die Summe der $\varkappa$ ersten Reihenglieder, so ist

$$s_n = 0,\quad s_{n+1} = s_1,\quad s_{n+2} = s_2, \ldots, s_{2n} = 0, \ldots$$

und da die n Summen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ auf diese Weise gleichberechtigt sind, so schließt D. BERNOULLI ähnlich wie LEIBNIZ bei

$$1-1+1-1+\cdots,$$

daß der wahre Wert der Summe das arithmetische Mittel aus den n ersten Teilsummen ist; darin besteht (siehe a. a. O. **18**, S. 5) das »ratiocinium metaphysicum«. —

GAUSS setzt die Potenzreihe an

$$a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1} + a_1 x^n + \cdots,$$

die für $x = 1$ in die betrachtete Reihe übergeht und formal aus der Entwickelung des Bruches

$$\frac{a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}}{1-x^n}$$

entsteht. Für $x = 1$ ergibt sich »per regulas notas« als Grenzwert

$$-\frac{a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + (n-1)a_n}{n},$$

was wegen $s_n = 0$ mit dem arithmetischen Mittel der n ersten Teilsummen übereinstimmt.

Wir bemerken noch, daß D. BERNOULLI Reihen von der hier betrachteten Art erhält, indem er in

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots,$$
$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots$$

für x einen aliquoten Teil von π setzt. Man vergl. hierzu die Tagebuchnotiz Nr. 29. Ferner werde auf die einschlägige neuere Literatur verwiesen *).

Zu [4.] und [10.] vergl. man die Erläuterungen auf S. 18 dieses Bandes.

Die in [5.] betrachtete Umkehrung eines elliptischen Integrals kommt auch in der Notiz Nr. 32 des *Tagebuchs* vom 9. September 1796 vor und wird in der Tagebuchnotiz Nr. 33 vom 14. September verallgemeinert. Hier sowohl wie in der Tagebuchnotiz Nr. 33 bedient sich GAUSS einer eigentümlichen rekurrierenden Bezeichnungsweise für die Glieder einer Reihe; es bedeutet nämlich A das erste, B das zweite, C das dritte Glied der betreffenden Reihe, u.s.w. Diese Bezeichnung wird von J. STIRLING **) benutzt, der sie auf NEWTON zurückführt ***). Daß sich GAUSS zu der hier in Betracht kommenden Zeit mit STIRLING beschäftigt hat, geht auch aus anderen Zeugnissen hervor, vergl. weiter unten.

Die in [6.] mit Φ bezeichnete Funktion nannte GAUSS später den sinus lemniscaticus; die hier gegebene Reihenentwickelung findet sich mehrfach auch im »LEISTE« (bei S. 20 nur bis x^9, bei S. 86 und auf der Einbanddecke genau so wie hier, vergl. weiter unten) und auf dem Werke III, S. 404—406 abgedruckten Zettel *Elegantiores integralis* $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ *proprietates* †), wo auch der Konvergenzbereich angegeben wird.

Die »Responsio« in [8.] läßt vermuten, daß GAUSS durch geometrische Erwägungen veranlaßt worden ist, die in [4.] und [10.] betrachteten zahlentheoretischen Grenzwerte zu untersuchen.

Die in [9.] betrachteten Produkte weisen auf das Studium EULERscher Schriften. Das erste gehört der Theorie der elliptischen Funktionen an, vgl. den in der zweiten Abteilung dieses Bandes abgedruckten Aufsatz des Unterzeichneten »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie« und Werke III, S. 434, 440, 464. Das zweite

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^{2^2})(1-x^{2^3})\ldots$$

findet sich bei EULER in der Abhandlung *De partitione numerorum* Novi Comment. Acad. Petrop. **3** (1750/51) 1753, S. 125, abgedruckt Comment. arithmeticae I, 1849, S. 73 und L. EULERI Opera omnia, Ser. I, vol. 2, S. 285.

Zu [11.] vergl. man die Werke VIII, S. 30, 31 abgedruckte Notiz.

SCHLESINGER.

*) Vergl. G. FROBENIUS, CRELLEs Journal f. Mathematik **89** (1880), S. 262; O. HÖLDER, Mathem. Annalen **20** (1882), S. 535 und zahlreiche daran anschließende Arbeiten.

**) J. STIRLING, *Methodus Differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, Londini 1730, S. 3.

***) A. a. O. S. 31.

†) Siehe Werke III, S. 405, [4.]

[ÄLTESTE UNTERSUCHUNGEN ÜBER LEMNISKATISCHE FUNKTIONEN.]

[I.]

[REIHENENTWICKELUNGEN UND ADDITIONSTHEOREME.]

[Eintragungen im LEISTE *).]

[1.]

[Einbanddecke]

$$\int \frac{dp}{\sqrt{(1-p^4)}} = \left[\frac{\pi}{4}\right] \frac{2}{\int\sqrt{\sin x\, dx}} = 1{,}311031$$

nach STIRLING: *De summatione et interpolatione serierum* [**)]

1,31102877714605987

1,2453.

[*) Vgl. die Fußnote auf S. 78.]

[**) *Methodus differentialis sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, auctore JACOBO STIRLING, Londini 1730, S. 58.]

[2.]

[Einbanddecke]

$$
\begin{array}{llllll}
1[\varphi] & -\frac{1}{10}[\varphi^5] & -\frac{1}{24}[\varphi^9] & -\frac{5}{208}[\varphi^{13}] & -\frac{35}{17.128}[\varphi^{17}] & \ldots \\
 & +\frac{1}{20} & +\frac{7}{120} & +\frac{9}{208} & & \ldots \\
 & & -\frac{7}{200} & +\frac{1}{64} & & \ldots \\
 & & & -\frac{57}{800} & & \ldots \\
 & & & +\frac{57}{2000} & & \ldots \\
\hline
\end{array}
$$

$$1[\varphi]-\frac{1}{10}[\varphi^5]+\frac{1}{120}[\varphi^9]-\frac{11}{15600}[\varphi^{13}]+\frac{211}{3536000}[\varphi^{17}]\ldots$$

$$\left[\frac{1}{10}=\right]\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5},\quad\left[\frac{1}{120}=\right]\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9},\quad\left[\frac{11}{15600}=\right]\frac{33}{80}\cdot\frac{1.1.1}{5.9.13},\quad\left[\frac{211}{3536000}=\right]\frac{211.9}{3200}\cdot\frac{1.1.1.1}{5.9.13.17}.$$

[3.]

[Schutzblatt]

$$\int\sqrt{\sin x}\,dx=\tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\int dx(\sqrt{x}-\sqrt{\sin x})$$

$$=2\int\frac{pp\,dp}{\sqrt{(1-p^4)}}$$

$$
\begin{array}{r}
0{,}7849171 \\
1363706 \\
1{,}6337417 \\
1794738 \\
1{,}5163437 \\
2928571 \\
\hline
4{,}543704
\end{array}
\times\frac{\pi}{12}=1{,}189539
$$

Fuss $1{,}198\pm=\frac{\pi}{\varpi}$

Euler applicata mea reductione 1,198122.

[4.]

[S. 16]

In der Curva (Elastica) Lemniscata ist

s Sehne eines Bogens

c Sehne des Compl[ements] des B[ogens]

$$ss+cc+ccss=1$$

Sehne des dopp[elten Bogens] $\quad\dfrac{2(s+s^3)c}{1+s^4}=\dfrac{2sc}{1-sscc}=\dfrac{2sc}{ss+cc}$

Cosehne des dopp[elten Bogens] $\quad\dfrac{1-2ss-s^4}{1+2ss-s^4}=\dfrac{cc-ss}{1+ccss}=\dfrac{cc-ss}{2-ss-cc}$

Sehne der Summe $\dfrac{s'c+sc'}{1-s'sc'c}$ | d[er] Diff[erenz] $\dfrac{s'c-sc'}{1+s'sc'c}$

Cosehne der Summe $\dfrac{c'c-s's}{1+s'sc'c}$ | d[er] Diff[erenz] $\dfrac{c'c+s's}{1-s'sc'c}$

[S. 17—18 nach längerer Rechnung]

[Sehne des doppelten Bogens] $\quad sc\dfrac{2+2ss}{1+s^4}=sc\dfrac{2+2cc}{1+c^4}$

[Cosehne des doppelten Bogens] $\quad\dfrac{1-2ss-s^4}{1+2ss-s^4}=\dfrac{1-2cc-c^4}{1+2cc-c^4}$

[Sehne des dreifachen Bogens] $\quad s\dfrac{3-6s^4-s^8}{1+6s^4-3s^8}$

[Cosehne des dreifachen Bogens] $\quad c\dfrac{3-6c^4-c^8}{1+4cc-6c^4+4c^6+c^8}=c\dfrac{1+6s^4-3s^8}{1+4ss-6s^4+4s^6+s^8}.$

[5.]

[S. 20]

Theilt man also auch hier die ganze Peripherie in 360°, so ist

arcus	chorda
0	0
30^0	$=\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{(\sqrt{12}-3)}}{1+\sqrt{(\sqrt{12}-3)}}}=\dfrac{1-\sqrt{(\sqrt{12}-3)}}{\sqrt{(4-\sqrt{12})}}$
45^0	$0{,}6435943=\sqrt{(\sqrt{2}-1)}$
60^0	$0{,}8253788=\sqrt[4]{(\sqrt{12}-3)}=\sqrt{(\sqrt{\tfrac{3}{2}}-\sqrt{\tfrac{1}{2}})}\sqrt[8]{3}$
90^0	1

[6.]

[S. 20—21]

$$d\sin = \frac{2}{c+\frac{1}{c}}\,d\varphi = \frac{1+ss}{cs}\,d\varphi$$

$$d\cos = \frac{-2}{s+\frac{1}{s}}\,d\varphi$$

$$\sin = \varphi - \frac{1}{10}\varphi^5 + \frac{1}{120}\varphi^9 + \ldots$$

$$\cos = 1 - \varphi\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi^4 - \ldots$$

$$\frac{1}{\sin} = \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{10}\varphi^3 + \ldots$$

$$\frac{1}{\cos} = 1 + \varphi\varphi + \frac{1}{2}\varphi^4 + \ldots$$

$$\varphi = s + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}s^5 + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}s^9 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{13}s^{13} + \ldots$$

Man nenne nach der Analogie des Kreises

$$\frac{s}{c}\ldots t,$$

so ist

$$dt = \left(\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{cc}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{cc}+\frac{ss}{cc}\right)\right)d\varphi.$$

$$s\,4 = sc\,\frac{1+ss}{1+s^4}\,\frac{[4(1-5s^4-5s^8+s^{12})(1+s^4)]}{1+20s^4-26s^8-20s^{12}+s^{16}}.$$

[7.]

[S. 24]

Ad p. 16

$$\begin{aligned}
&\varphi 1 &&= \varphi\sqrt{\tfrac{1}{2}} + \varphi\sqrt{\tfrac{1}{3}}\\
&\varphi\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \varphi\sqrt{\tfrac{1}{3}} &&= \varphi\tfrac{1}{7}\\
&\varphi\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \varphi\sqrt{\tfrac{1}{3}} &&= \varphi 1 - \varphi\sqrt{\tfrac{2}{3}\tfrac{4}{5}}\\
&\varphi 1 &&= \varphi\sqrt{\tfrac{1}{m}} + \varphi\sqrt{\tfrac{m-1}{m+1}}\\
&\varphi\sqrt{\tfrac{1}{m}} - \varphi\sqrt{\tfrac{m-1}{m+1}} &&= \varphi\,\frac{mm-2m-1}{mm+2m-1}.
\end{aligned}$$

[8.]

[S. 54]

Bestimmung der zwei ersten Coefficienten des Ausdrucks

$$\frac{1}{\sqrt{(1+\sin\varphi^2)}} = a + b\cos 2\varphi - c\cos 4\varphi - d\cos 6\varphi \ldots$$

$$a = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{4.3}{1.2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{64}\cdot\frac{6.5.4}{1.2.3} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{1.1}{2.2} + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4} - \ldots$$

$$= \int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}(0\ldots 1) \times \frac{2}{\pi} = \frac{2A}{\pi} = 0{,}83462$$

$$b = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{3.3}{2.6}\cdot\frac{5.5}{4.8} + \text{etc.}$$

$$= 2a - \frac{2}{A}.$$

BEMERKUNGEN.

Die Aufzeichnungen [I.] sind mit den Tagebuchnotizen Nr. 50 vom 7. und Nr. 51 vom 8. Januar 1797 in Beziehung zu setzen. Die Artikel [1.], [3.], [4.], [8.] weisen darauf hin, daß Gauss bei seinen Untersuchungen von dem Studium der Eulerschen Abhandlung *De miris proprietatibus curvae elasticae* *) ausgegangen ist. Die »curva elastica rectangula« wird durch die Gleichung

$$y = \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{1}$$

in rechtwinkligen Koordinaten gegeben; das Integral

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \tag{2}$$

mißt ihre Bogenlänge. Jacob und Johann Bernoulli hatten gezeigt **), daß das Integral (2) auch die Bogenlänge der Lemniskate ausdrückt. Gauss hat in [4.] und ebenso in der Nr. 51 des *Tagebuchs* das Integral (2) erst nach der curva elastica benannt, dann aber das Wort *elastica* durchgestrichen und *lemniscata* darüber geschrieben.

Die Integrale in den artt. [1.] und [3.] sind zwischen den Grenzen 0 und 1 in bezug auf p, zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ in bezug auf x zu nehmen. Setzen wir (vergl. art. [8.] und Werke III, S. 150)

---

*) Acta Acad. Petrop. 1782, II (1786), S. 34, Opera omnia, Ser. I, vol. 21, S. 91; die folgenden Zitate beziehen sich auf die Opera.

**) Jac. Bernoulli, Acta erudit. 1694, S. 276 und 336, Opera, Genevae 1744, S. 601 und 608; Joh. Bernoulli, Acta erudit. 1694, S. 394, Opera omnia, Lausannae 1742, I, S. 119.

$$\int_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}} = A, \quad \int_0^1 \frac{p^2\,dp}{\sqrt{1-p^4}} = B,$$

so ist nach EULER (a. a. O. S. 106)

$$AB = \frac{\pi}{2}. \tag{3}$$

Der in [1.] angegebene Wert 1,311031 für A steht bei EULER*) a. a. O. S. 104, der in [3.] bei der Berechnung von $2B$ benutzte Wert $B = 0{,}599061$ ebenda S. 99. Wie der von GAUSS in [1.] angegebene STIRLINGsche Wert zeigt, ist der EULERsche Wert von A zu klein, entsprechend ist der EULERsche Wert von B zu groß**). Das in [3.] bei dem FUSSschen Werte 1,198 + stehende »$= \frac{\pi}{\varpi}$« hat GAUSS ersichtlich erst später (mit anderer Schrift und Tinte) hinzugeschrieben; er hat die Bezeichnung

$$\varpi = 2\int_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}}$$

erst später (siehe Werke III, S. 404***)) eingeführt. Wir machen schon hier auf die große Bedeutung aufmerksam, die dieser Zahl $\frac{\pi}{\varpi}$ in der Entwickelung von GAUSS' hierhergehörigen Arbeiten zukommt. Die Zahl 1,2453 hat GAUSS bei [1.] auch ersichtlich später hingeschrieben; wir werden ihre Bedeutung im Abschnitt [II.] kennen lernen.

Die im art. [2.] auftretende Reihe haben wir auch im art. [6] der *Exercitat. mathem.* (S. 141 dieses Bandes) für die Umkehrung des Integrals (2) gefunden; sie wird hier direkt aus der Reihe

$$x + \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + \frac{5}{208}x^{13} + \cdots$$

für das Integral (2), die z. B. auch in [6.] auftritt, hergeleitet. Zu den Additions- und Multiplikationsformeln in [4.], der Formel für $s4$, d. h. für den sinus lemniscaticus des vierfachen Bogens am Ende von [6.] so wie für die Reihenentwickelungen in [6.] vergl. man die Werke III, S. 404, 405, 406 abgedruckten Aufzeichnungen †).

In bezug auf die Bezeichnungen werde folgendes bemerkt. »Sehne eines Bogens« bedeutet die Umkehrung des Integrals (2), in dem z die Bogenlänge, x den vom Doppelpunkte auslaufenden Fahrstrahl — also eben die Sehne — für die Lemniskate darstellt. Die Bezeichnung s hat GAUSS dann im art. [6.] in sin geändert, später schreibt er dafür sl oder sin lemn. Die »Sehne des Komplements« ist (vergl. Werke III, S. 404) die zu

*) Vergl. die Angabe bei GAUSS, Werke III, S. 412 (aus Scheda Aa, S. 3).

**) STIRLING gibt a. a. O. S. 57, $B = 0{,}59907011\ 736779611$, vergl. GAUSS, Werke III, S. 150.

***) Abdruck eines Zettels (Fh, Kapsel 50), den SCHERING (Werke III, S. 493) für die älteste Aufzeichnung zur Lehre von den lemniskatischen Funktionen gehalten hat. SCHERING scheint also weder die *Exercitat. mathem.* noch den LEISTE gekannt zu haben. Das letztere geht auch aus der Bemerkung SCHERINGs (Werke III, S. 496, Zeile 19—21) hervor, vergl. die weiter unten im Abschnitt [III.] abgedruckten Aufzeichnungen aus LEISTE.

†) Werke III, S. 405, art. [3.] muß in der Formel für cos lemn 2φ der Nenner lauten $1 + 2ss - s^4$ statt $1 + 2ss + s^4$, vergl. oben die Formel für die »Cosehne des doppelten Bogens«.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

gehörige Sehne; sie wird mit c, cos, später mit cl oder cos lemn. bezeichnet.

Die Formeln für »Sehne der Summe und Differenz« in [4.] stehen bei EULER a. a. O. S. 111. In [7.] ist φ das Integral (2); in der letzten Gleichung dieses Artikels muß die rechte Seite lauten

$$\varphi\frac{-mm+2m+1}{mm+2m-1}.$$

Entwickelungen nach den Kosinus der Vielfachen des Winkels φ für Ausdrücke von der Form $(1-2z\cos\varphi+z^2)^\nu$ oder $(1-\alpha\cos\varphi)^\nu$ sind zuerst von EULER*) in der Störungstheorie angewandt worden. GAUSS hat sie aus dem art. 279 des I. Bandes der *Institutiones calculi integralis***) sicher gekannt. Die Reihenentwickelungen für die Koeffizienten a und b in [8.] ergeben sich unmittelbar nach dem an der genannten Stelle auseinandergesetzten Verfahren von EULER; die Integraldarstellung von a und b dürfte GAUSS erhalten haben, indem er die gefundenen Reihen mit denjenigen verglich, die EULER in der Abhandlung über die curva elastica für die Integrale A und B gegeben hat***); auch der numerische Wert, den GAUSS für $\frac{2A}{\pi}$ gibt, findet sich in dieser Abhandlung EULERs (a. a. O. S. 104). Daß GAUSS schon zu jener Zeit das D'ALEMBERTsche Verfahren der gliedweisen Integration zwischen den Grenzen 0 und 2π angewandt haben sollte, um die Integraldarstellung der Koeffizienten zu finden, scheint wenig wahrscheinlich. Vergl. auch die Auszüge aus der Scheda Ac weiter unten *Zur Theorie des arithmetisch-geometr. Mittels*, Abschnitt [IV.], art. [2.] und Werke III, S. 128.

Als Abfassungszeit der artt. [1.]—[7.] können die ersten Januartage 1797 angesetzt werden; [8.] dürfte wohl etwas später, aber jedenfalls vor den 19. März desselben Jahres (vergl. die Bemerkungen zu [II.]) zu datieren sein.

SCHLESINGER.

*) *Pièce qui a remporté le prix de l'Académie des Sciences en 1748 sur les inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter* (Paris, 1749).

**) L. EULERI Opera omnia, Series I, vol. 11, S. 165 ff.

***) L. EULERI Opera omnia, Series I, vol. 21, S. 98; bei EULER ist: $A = c$, $B = a$.

[II.]

[DOPPELTE PERIODIZITÄT, PRODUKTDARSTELLUNG UND REIHENENTWICKELUNGEN VON ZÄHLER UND NENNER.]

[Eintragungen im LEISTE.]

[1.]

[S. 39]

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}}$$

$$\frac{x\left(1-\frac{x^6}{729u^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{729.2^6.u^6}\right)\left(1-\frac{x^6}{729.3^6.u^6}\right)\cdots}{\left(1-\frac{x^3}{2^3.u^3}\right)\left(1-\frac{x^3}{5^3.u^3}\right)\left(1-\frac{x^3}{8^3.u^3}\right)\cdots\left(1+\frac{x^3}{u^3}\right)\left(1+\frac{x^3}{4^3.u^3}\right)\cdots}$$

$$1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{7^3}+\frac{1}{10^3}+\cdots = 1{,}01$$

$$\frac{1}{2^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{8^3}+\frac{1}{11^3}+\cdots = \underline{0{,}13}$$

$$0{,}8$$

$$\frac{1{,}766^3}{6} = 0{,}9$$

$$\sqrt[3]{(1-x^3)} = \frac{\left(1-\frac{x^3}{u^3}\right)\left(1-\frac{1}{4^3}\frac{x^3}{u^3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^3}\frac{x^3}{u^3}\right)\cdots}{\left(1-\frac{1}{2^3}\frac{x^3}{u^3}\right)\cdots\left(1+\frac{x^3}{u^3}\right)\cdots}.$$

[2.]

[S. 62]

Sehne v[on] $x =$

$$x\left(1+\frac{x^4}{\Pi^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{16\Pi^4}\right)\left(1+\frac{x^4}{81\Pi^4}\right)\cdots$$

$$\left(1-\frac{x^4}{\Pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{16\Pi^4}\right)\cdots$$

$$\times \text{ Prod. ex } \left(1-\frac{2(m^4-6m^2n^2+n^4)}{(mm+nn)^4}\left(\frac{x}{\Pi}\right)^4+\frac{1}{(mm+nn)^4}\frac{x^8}{\Pi^8}\right)$$

sumtis pro m, n omnibus numeris integris inaequalibus

$$:\left(1+\frac{4x^4}{\Pi^4}\right)\left(1+\frac{4x^4}{81\Pi^4}\right)\left(1+\frac{4x^4}{625\Pi^4}\right)\cdots$$

$$\times \text{ Pr. ex } \left(1-\frac{2(m^4-6m^2n^2+n^4)}{(mm+nn)^4}\left(\frac{2x}{\Pi}\right)^4+\frac{1}{(mm+nn)^4}\left(\frac{2x}{\Pi}\right)^8\right)$$

sumtis pro m, n omnibus numeris imparibus inaequalibus

[3.]

[S. 63—64]

$$\sin x = x\,\frac{1-\frac{1}{60}x^4-\frac{1}{10080}x^8+\frac{1}{10080.11700}x^{12}\cdots}{1+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{10080}x^8+\frac{1}{1296000}x^{12}\cdots}\left[=\frac{Mx}{Nx}\,{}^{*)}\right]$$

Posito numeratore $= y$ erit

$$x = y+\frac{1}{60}y^5-\frac{13}{10080}y^9+\cdots$$

Rechnung nach dieser Formel für $22^0\frac{1}{2}$

$$1{,}311\,028\,777 = \Pi\left[=\int_0^1 \frac{dp}{\sqrt{(1-p^4)}}\right]$$

[*) Die Koeffizienten von x^{12} sind unrichtig, sie müßten lauten $\frac{23}{259459200}$ im Zähler und $\frac{17}{19958400}$ im Nenner.]

$$\begin{array}{ll} \Pi^4 & 2{,}954160 \\ \Pi^5 & 3{,}873119 \\ \Pi^8 & 8{,}72 \\ \Pi^9 & 11{,}43 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 1{,}311028 & [=\Pi] \\ -\quad 64552 & \left[=\frac{1}{60}\Pi^5\right] \\ -\quad 1134 & \left[=\frac{1}{10080}\Pi^9\right] \\ \hline 1{,}245342 & [=M\Pi] \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 1{,}2461884376 & \left[=1+\frac{\Pi^4}{12}\right] \\ 8658392 & \left[=\frac{1}{10080}\Pi^8\right] \\ \hline 1{,}2453225984 & \\ 21961 & [^{*})] \\ \hline 1{,}24534456 & [=N\Pi] \end{array}$$

[4.]

[S. 86]

$$1[\varphi]-\frac{1}{10}[\varphi^5]+\frac{1}{120}[\varphi^9]-\frac{11}{15600}[\varphi^{13}]+\frac{211}{3536000}[\varphi^{17}]-\text{ etc.}$$

$$\sin(t+u\sqrt{-1})=\frac{\sin t\cos u\sqrt{-1}+\sin u\sqrt{-1}\,.\cos t}{1-\sin u\sqrt{-1}\,.\cos u\sqrt{-1}\,.\cos t\sin t}$$
$$=\frac{\sin t+\cos t\sin u\cos u\,.\sqrt{-1}}{\cos u-\cos t\sin u\sin t\,.\sqrt{-1}}.$$

[5.]

[S. 88]

$$\begin{array}{llllll} 0; & \pm\Pi; & 2\Pi; & 3\Pi; & 4\Pi & \text{etc.} \\ 0\pm\Pi\sqrt{-1}; & \pm\Pi\pm\Pi\sqrt{-1} & \text{etc.} & & & \\ 0\pm2\Pi\sqrt{-1}; & \pm\Pi\pm2\Pi\sqrt{-1} & \text{etc. etc.} & & & \end{array}$$

$$\left(1-\frac{x^4}{\Pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{16\Pi^4}\right)\left(1-\frac{x^4}{81\Pi^4}\right)\cdots$$

[*) Die Zahl ist unrichtig, weil der Koeffizient von x^{13} in der Formel für $\sin x$ fehlerhaft ist.]

$$\Pi\pm\left|\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ 1 & \pm & 1 \\ 2 & & 2 \\ 3 & & 3 \\ 4 & & 4 \\ 5 & & 5 \end{array}\right|\sqrt{-1}$$

$$\Sigma\frac{1}{\rho^4}=2\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\text{ etc.}\right)$$

$$\Sigma\frac{m^4-6m^2n^2+n^4}{(mm+nn)^4}.$$

[6.]

[S. 89]

$$\cos(t+u\sqrt{-1})=\frac{\frac{\cos t}{\cos u}-\sin t\sin u\sqrt{-1}}{1+\frac{\cos t}{\cos u}\sin t\sin u\sqrt{-1}}$$
$$=\frac{\cos t-\sin t\cos u\sin u\sqrt{-1}}{\cos u-\sin u\cos t\sin t\sqrt{-1}}.$$

$$\begin{array}{l|l} \text{Also der }\cos=0\text{ für} & =\infty\text{ für} \\ t=(2k+1)R & u=(2k+1)R \\ u=2kR & t=2kR \qquad,\ \left[R=90^0=\Pi\right]. \end{array}$$

$$\cos u=\frac{\left(1-\frac{4xx}{\Pi\Pi}\right)\left(1-\frac{4xx}{9\Pi\Pi}\right)\left(1-\frac{4xx}{25\Pi\Pi}\right)\cdots}{\left(1+\frac{4xx}{\Pi\Pi}\right)\left(1+\frac{4xx}{9\Pi\Pi}\right)\left(1+\frac{4xx}{25\Pi\Pi}\right)\cdots}$$

$$\times\left(\frac{1-\frac{2(mm-nn)}{(mm+nn)^2}\frac{xx}{\Pi\Pi}+\frac{x^4}{(mm+nn)^2\Pi^4}}{1+\frac{2(mm+nn)}{(mm+nn)^2}\frac{xx}{\Pi\Pi}+\frac{x^4}{(mm+nn)^2\Pi^4}}\right)$$

Positis pro

$$\left\{\begin{matrix} m \\ n \end{matrix}\right\}\text{ omnibus valoribus }\left\{\begin{matrix}\text{impari} \\ \text{pari}\end{matrix}\text{bus}\right\}$$

$$1-xx+\tfrac{1}{2}x^4-\tfrac{3}{10}x^6\ldots\ [=\cos\operatorname{lemn}x]$$

$$\frac{16}{\Pi^4}(1{,}014678)+\Sigma\frac{m^4-6m^2n^2+n^4}{(mm+nn)^4}$$

$$\frac{1-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{240}x^6\ldots}{1+\frac{1}{2}xx-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{240}x^6\ldots}\left[=\cos\operatorname{lemn}x=\frac{\mu x}{\nu x}\right].$$

[7.]

[S. 66]

Zähler bei sin 90^0 $\left[90^0 \text{ heisst } \frac{360^0}{4}, \text{ also } = \int_0^1\frac{dp}{\sqrt{(1-p^4)}}=\Pi\right]$

$$\begin{array}{lr l}
 & 1{,}31102878 & [=\Pi] \\
- & 6455202 & \left[=\frac{1}{60}\Pi^5\right] \\
- & 113514 & \left[=\frac{1}{10080}\Pi^9\right] \\
\hline
 & 1{,}24534162 & \\
+ & 300 & \\
\hline
 & 1{,}24534462 & [=M\Pi]
\end{array}$$

Nenner

$$\begin{array}{lr l}
 & 1{,}2461884 & \left[=1+\frac{\Pi^4}{12}\right] \\
- & 86583 & \left[=\frac{1}{10080}\Pi^8\right] \\
\hline
 & 1{,}24532257 & \\
+ & 2196 & \\
\hline
 & 1{,}24534453 & [=N\Pi]
\end{array}$$

$$\left(N\frac{1[\varphi]}{1+\sqrt{-1}}\right)^2-\left(M\frac{1[\varphi]}{1+\sqrt{-1}}\right)^2=\mu[\varphi]$$

$$+ \qquad\qquad =\nu[\varphi]\,[{}^*)]$$

$$\left(N\frac{1[\varphi]}{1+\sqrt{-1}}\right)^4-\left(M\frac{1[\varphi]}{1+\sqrt{-1}}\right)^4=N(1+\sqrt{-1})[\varphi].$$

[*) In der Handschrift werden hier die Buchstaben m, n benutzt; wir haben in Übereinstimmung mit art. [9.] die Zeichen μ, ν gesetzt.]

Hinc

$$N^4+M^4=N2[\varphi].$$

[8.]

[S. 67]

Sit $1{,}24\ldots=a[=M\Pi=N\Pi]$

$$N\varpi=2a^4\,[{}^*)]$$
$$N2\varpi=(2a^4)^4$$
$$N4\varpi=(2a^4)^{16}$$
$$N8\varpi=(2a^4)^{64}$$

etc.

$$N\lambda\varpi=(2a^4)^{\lambda\lambda}$$

$$M2[\varphi]=2MN\sqrt{(N^4-M^4)}$$

[S. 70]

$$[\nu^2=]\,\underline{MM+NN=1+1[\varphi^2]+\tfrac{1}{6}[\varphi^4]-\tfrac{1}{30}[\varphi^6]+\tfrac{17}{2520}[\varphi^8]\cdots}$$

$$\nu=1+\tfrac{1}{2}[\varphi^2]-\tfrac{1}{24}[\varphi^4]+\tfrac{1}{240}[\varphi^6]+\tfrac{17}{40320}[\varphi^8]\cdots$$

$$N2[\varphi]=M^4+N^4$$
$$M2[\varphi]=2MN\mu\nu$$
$$\mu\nu=N(1+\sqrt{-1})[\varphi]$$
$$\mu\mu=\frac{NN-MM}{NN+MM}\nu\nu$$

$$\mu2[\varphi].\nu2[\varphi]=M(1+\sqrt{-1})[\varphi]^4+N(1+\sqrt{-1})[\varphi]^4[=N2(1+\sqrt{-1})\varphi].$$

[*) In der Handschrift steht in den folgenden Formeln statt ϖ das gewöhnliche Π, so daß also dieser Buchstabe hier das Doppelte der Größe bedeuten würde, die er oben art. [3.], S. 64 des LEISTE, bezeichnet; es wurde darum hier die später von GAUSS ständig benutzte Bezeichnung

$$\varpi=2\int_0^1\frac{dp}{\sqrt{1-p^4}}$$

angewendet.]

[S. 71]

$$N4[\varphi] = M^{16} + 4M^{12}N^4 + 6M^8N^8 + 4M^4N^{12} + N^{16}$$
$$+ 16(N^8\nu^8 - N^8\nu^6\mu^2 - \nu^8N^6M^2).$$

[9.]

[S. 71]

Bei $45^0 \left[= \frac{\varpi}{4}\right]$

Zähler des Sinus

$$\begin{array}{rl} & 0{,}65\,551\,439 \; \left[= \frac{\varpi}{4}\right] \\ - & 201\,725 \\ - & 221 \\ \hline & 0{,}65\,349\,493 \; \left[= M\frac{\varpi}{4}\right] \end{array}$$

Nenner des Sinus

$$\begin{array}{rl} & 1{,}01\,538\,678 \\ - & 338 \\ \hline & 1{,}01\,538\,340 \; \left[= N\frac{\varpi}{4}\right] \end{array}$$

$$\left[\log_{10} M\tfrac{\varpi}{4} =\right] 9{,}8\,152\,422 \qquad\qquad 0{,}0\,066\,301 \; \left[= \log_{10} N\tfrac{\varpi}{4}\right]$$

$$\left[4\log_{10} M\tfrac{\varpi}{4} =\right] \; 2\,609\,688 \qquad\qquad 0{,}0\,265\,204 \; \left[= 4\log_{10} N\tfrac{\varpi}{4}\right]$$

$$\left[\left(M\tfrac{\varpi}{4}\right)^4 = 0{,}\right]18\,237\,647$$

$$\left[\left(N\tfrac{\varpi}{4}\right)^4 =\right] 1{,}06\,291\,846$$

$$\left[M\tfrac{\varpi}{2} =\right] 1{,}24\,534\,493,$$

welches mithin die erste Rechnung oben [siehe art. 3] bestätigt.

$$\Pi = 1{,}245\,344 \left[= M\tfrac{\varpi}{2} = N\tfrac{\varpi}{2} = a, \text{ siehe art. } 8\right]$$

$$l\,\Pi \quad 0{,}0\,952\,896$$

$$[4\log_{10}\Pi =]\; 0{,}3\,811\,584 \qquad 2{,}40\,524 \; [=\Pi^4]$$

$$4{,}81\,048 \; = N\varpi \; [= 2\Pi^4]$$

log hyp. dieser Zahl $= 1{,}5\,708 = \frac{1}{2}\pi$ Circuli?

[10.]

[S. 72—73]

$$\log \text{Denom[inatoris]} = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{10080}x^8 + \frac{17}{19958400}x^{12} \ldots$$
$$- \frac{1}{288}\; x^8 + \frac{1}{120960}\; [x^{12}] \ldots$$
$$+ \frac{1}{5184}\; [x^{12}] \ldots$$

$$[\log N =]\; \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{280}x^8 + \frac{1}{4950}x^{12} - \frac{1}{78000}x^{16} \ldots$$

$$\log \text{Numeratoris} = \log x - \frac{1}{60}x^4 - \frac{1}{4200}x^8 - \frac{1}{321750}x^{12} - \frac{1}{19890000}x^{16} \ldots$$

$$d \log \sin = \frac{\sqrt{(1-\sin^4)}}{\sin}\, d\,\text{arc}$$

$$s = \frac{\varphi}{1 + \frac{1}{10}s^4 \ldots}$$

$$s = \varphi - \left(\frac{1}{10}s^5 + \frac{1}{24}s^9 \ldots\right)$$

$$ls = l\varphi - \frac{1}{10}[\varphi^4] + \frac{1}{300}[\varphi^8] - \frac{1}{4875}[\varphi^{12}] \ldots$$

[III.]
[TEILUNG DER LEMNISKATE.]

[Eintragungen im LEISTE.]

[1.]

[S. 69]

Die Theilung der Lemniscata in sieben Theile gibt die Gleichung:

$$16\,(1-x^4)\left(\frac{1 \quad -5 \quad -5 \quad +1}{1 \quad +20 \quad -26 \quad +20 \quad +1}\right)^2 = \left(\frac{3 \quad * -6 \quad * -1}{1 \quad * +6 \quad * -3}\right)^2.$$

[2.]

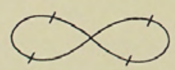
[S. 87]

Sit $\sin \frac{1}{5} k R = (k)$, tum habebuntur aequationis radices (0), $\pm (4)$, $\pm (2)$,

$$\frac{(0)+(5)(4)(1)\sqrt{-1}}{(1)-(0)(5)\ldots}$$

$$\frac{(4)+(1)(4)(1)\sqrt{-1}}{(1)-(4)(4)(1)\sqrt{-1}}$$

$$\frac{(2)-(3)(4)(1)\sqrt{-1}}{(1)+(2)(3)(4)\sqrt{-1}}$$



$$\pm 1,\ \sqrt{-1}\left[\begin{matrix}(0)\\(2)\\(4)\end{matrix}\right| \quad \begin{matrix}\frac{(4)}{(1)}\cdot\frac{1+(1)(1)\sqrt{-1}}{1-(4)(4)\sqrt{-1}}\\[2ex] \frac{(2)}{(3)}\ \frac{1+(3)(3)\sqrt{-1}}{1-(2)(2)\sqrt{-1}}\end{matrix}\ \Bigg|$$

[3.]

[S. 90—91]

1	1,31102877 $\left[=\frac{\varpi}{2}\right]$
2	1,71879545
4	2,95416
5	3,87311
6	5,07777
8	8,72765
9	11,44320
10	15,00

[cos 18°]

0,965425785 [$= \mu\, 18^0$]

1,034180311 [$= \nu\, 18^0$]

sin 36°

$$\begin{array}{rl} 0{,}524411511 & \left[=\frac{\varpi}{5}\right] \\ -\quad 661011 & \\ -\quad 292 & \\ \hline 0{,}523750208 & [= M\, 36^0] \\ 1{,}006302208 & \left[= 1+\frac{1}{12}\left(\frac{\varpi}{5}\right)^4\right] \\ -\quad 567 & \\ \hline [1{,}006301641 & = N\, 36^0] \end{array}$$

[sin] 36° =

$$\frac{0{,}523750208}{1{,}006301641} = 0{,}5204703904.$$

[sin] 72° = cos 18°

$$\frac{0{,}965425785}{1{,}034180311} = 0{,}9335177577.$$

[4.]

[S. 102]

Die Theilung der Lemniscata in 5 Theile führt auf diese Gleichung

$$\frac{9-36x^4+30x^8+12x^{12}+x^{16}}{1+12x^4+30x^8-36x^{12}+9x^{16}} = \frac{4\,(1-x^4)}{1+2x^4+x^8}$$

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} 9 & -36 & +30 & +12 & +1 & & \\ & +18 & -72 & +60 & +24 & +2 & \\ & & +9 & -36 & +30 & +12 & +1 \\ -4 & -48 & -120 & +144 & -36 & & \\ & +4 & +48 & +120 & -144 & +36 & \\ \hline 5 & -62 & -105 & +300 & -125 & +50 & +1 \end{array}\right\} = 0.$$

[Wurzeln dieser Gleichung vom 24. Grade sind $\sin\operatorname{lemn}\frac{k\varpi}{5}$ für $k = 1, 2, 3, 4$, die übrigen sind imaginär, also:]

Determ. rad. imag.

$$\frac{\square}{\square} = \frac{4(1-x^4)}{\square},$$

[setze $x^4 = y$, so ist]

$$(3-6y-yy)(1+y) = 2(1+6y-3yy)\sqrt{(1-y)}$$

$$S = \sqrt{720} - 26 \; [= 12\sqrt{5} - 26]$$

$$\left[= \left(\sin\operatorname{lemn}\frac{2\varpi}{5}\right)^4 + \left(\sin\operatorname{lemn}\frac{4\varpi}{5}\right)^4\right]$$

$$\begin{array}{l} 349 - 156\sqrt{5} \\ -9 + 4\sqrt{5} \\ \hline 340 - 152\sqrt{5} \; \left[= \frac{1}{2}\left(\sin\operatorname{lemn}\frac{4\varpi}{5}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\sin\operatorname{lemn}\frac{2\varpi}{5}\right)^4\right]^2. \end{array}$$

Zwei Wurzeln obiger Gleichung sind

$$+0{,}0733810047 \; \left[= \left(\sin\operatorname{lemn}\frac{2\varpi}{5}\right)^4\right]$$

$$+0{,}7594355 \; \left[= \left(\sin\operatorname{lemn}\frac{4\varpi}{5}\right)^4\right].$$

[5.]

[S. 100—101]

Auflösung der Gleichung

$$5 - 62x - 105xx + 300x^3 - 125x^4 + 50x^5 + x^6 \; [= 0^{*})]$$

[Es folgt eine Zahlenrechnung, anscheinend nach der Regula falsi].

Also eine Wurzel

$$= 0{,}07338100477 \; \left[= \left(\sin\operatorname{lemn}\frac{2\varpi}{5}\right)^4\right]$$

und folglich

$$\sin 36^0 = 0{,}52047024 \; [= \sqrt[4]{0{,}073381}].$$

[*) Das x in dieser Gleichung ist die vierte Potenz der im art. [4.] ebenso bezeichneten Unbekannten; die Gleichung hat also die Wurzeln $\left(\sin\operatorname{lemn}\frac{k\varpi}{5}\right)^4$ für $k = 1, 2, 3, 4$.]

Hieraus aber folgt eine zweite Wurzel

$$= 16\,\frac{(1-t)^2 t}{(1+t)^2}$$

$$\begin{aligned} l16 &= 1{,}2041200 \\ lt &= 0{,}8655836 - 2 \; [= \log_{10} 0{,}073381\ldots = \log_{10}(\sin\operatorname{lemn} 36^0)^4] \\ l(1-t)^2 &= 0{,}9338025 - 1 \\ -l(1+t)^2 &= 0{,}8769844 - 1 \\ \hline &\; 0{,}8804905 - 1 \; [= \log_{10}]\; 0{,}7594348 \; [= \log_{10}(\sin\operatorname{lemn} 72^0)^4]. \end{aligned}$$

Also

$$l\sin 72^0 = 0{,}9701226$$

und

$$\sin 72^0 = 0{,}9335179.$$

[6.]

[Ein Zettel Fh Nr. 1, Kapsel 50.]

Rechnungen zur Lemniscata gehörig.

$$(\sin 0{,}4)^4 + (\sin 0{,}8)^4 = 12\sqrt{5} - 26\,[^{*})]$$
$$= 2(0{,}4164078649 \;\; 9873817845 \;\; 5042012387 \;\; 65741)$$

$$\left(\tfrac{1}{2}(\sin 0{,}8)^4 - \tfrac{1}{2}(\sin 0{,}4)^4\right)^2 = 340 - 152\sqrt{5}$$
$$= 0{,}1176674200 \;\; 3196614580 \;\; 5602352846 \;\; 01228.$$

Daraus Radix

$$\begin{array}{r} 0{,}3430268503 \;\; 0761971797 \;\; 7310507555 \;\; 85731 \\ -0463415326 \;\; 98758 \\ \hline 6847092228 \;\; 86973 \end{array}$$

Also

$$(\sin 0{,}4)^4 = 0{,}0733810146 \;\; 9111846047 \;\; 7731504831 \;\; 80010$$

Daraus Radix

$$(\sin 0{,}4)^2 = 0{,}2708893033 \;\; 8999814497 \;\; 30710$$

[*) $\sin 0{,}4$ und $\sin 0{,}8$ bedeuten $\sin\frac{4\varpi}{10}$ und $\sin\frac{8\varpi}{10}$, d. h. also $\sin\operatorname{lemn}\frac{2\varpi}{5}$ und $\sin\operatorname{lemn}\frac{4\varpi}{5}$.]

$$(\sin 0{,}8)^4 = 0{,}7594347153 \quad 0635789643 \quad 2352519994 \quad 51472$$

Daraus Radix

$$(\sin 0{,}8)^2 = 0{,}8714555153 \quad 9155336074 \quad 646029.$$

[7.]

[In *Sammlung von Rechnungen usw.* Fh Nr. 2, Kapsel 60.]

Berechnungen die Lemniscata betreffend.

$(\sin 0{,}4)^4$ u. $(\sin 0{,}8)^4$ sind Wurzeln der Gleichung[en]

$$\begin{aligned} p^4+q^4 &= \sqrt{720}-26 \\ (pp+qq)^2 &= 14\sqrt{5}-30 \\ (pp-qq)^2 &= 10\sqrt{5}-22 \\ pp+qq &= 5^{\frac{1}{4}}(3-5^{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

BEMERKUNGEN ZU DEN ABSCHNITTEN [II.] UND [III.].

Das in [II.] [1.] auftretende Integral und seine Umkehrung hatte GAUSS, wie die Tagebuchnotiz Nr. 32 vom 9. September 1796 und art. [5.] der *Exercitat. mathem.* zeigen (siehe oben S. 140 dieses Bandes), anfangs neben dem lemniskatischen Integrale betrachtet. Auffallend ist dort wie auch hier die Benutzung des Buchstaben x in zweierlei Bedeutung, besonders in der letzten Formel des Artikels, wo überdies $\sqrt[3]{(1-x^3)}$ ein Schreibfehler für $\sqrt{(1-x^3)}$ ist. Die Reihen, die zwischen den beiden Quotienten von unendlichen Produkten stehen, deuten auf eine Untersuchung der Konvergenz der Produkte; vergl. auch [II.] [5.].

In [II.] [2.] und [3.] erscheint die Funktion $\sin\operatorname{lemn} x$ als Quotient, das einemal von doppelt unendlichen Produkten, das anderemal von beständig konvergenten Potenzreihen. Das hier sowie in [II.] [5.] und [6.] auftretende Π hat die Bedeutung

$$\Pi = \frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}}.$$

In [II.] [5.] werden die Nullstellen der Funktion sinus lemniscaticus schematisch dargestellt; die Reihen $\sum \frac{1}{\rho^4}$ und

$$\sum \frac{m^4-6m^2n^2+n^4}{(m^2+n^2)^4} = \tfrac{1}{2}\sum\left\{\frac{1}{(m+n\sqrt{-1})^4}+\frac{1}{(m-n\sqrt{-1})^4}\right\}$$

deuten auch hier (vergl. [II.] [1.]) auf Konvergenzuntersuchungen *).

*) Ein Ausdruck, der an die letztere Reihe erinnert, wird in der Notiz Nr. 61 des *Tagebuchs* (19.—21. März 1797) mit Π in Verbindung gebracht.

Auch [II.] [4.] gehört noch in diesen Zusammenhang; wir finden hier die schon wiederholt betrachtete Potenzreihe für $\sin\operatorname{lemn} x$; dann aber wird die Zerfällung des Wertes dieser Funktion für ein komplexes Argument mit Hilfe des Additionstheorems und der Formeln

$$\sin\operatorname{lemn} u\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\sin\operatorname{lemn} u,$$

$$\cos\operatorname{lemn} u\sqrt{-1} = \frac{1}{\cos\operatorname{lemn} u}$$

(vergl. Werke III, S. 411) gegeben. Übersichtlicher angeordnet als für die Funktion sinus lemniscaticus folgen in [II.] [6.] die analogen Untersuchungen für cosinus lemniscaticus.

Die in [II.] [3.] ausgeführten Zahlenrechnungen werden in [II.] [7.] mit größerer Schärfe wiederholt. Die in [II.] [7.] und [8.] von GAUSS benutzten Zeichen M, N, μ, ν bedeuten die Zähler und Nenner von sin lemn und von cos lemn, also

$$M = x-\frac{1}{16}x^5-\frac{1}{10080}x^9+\frac{23}{259459200}x^{13}+\cdots,$$

$$N = 1+\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{10080}x^8+\frac{17}{19958400}x^{12}+\cdots,$$

$$\mu = 1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{240}x^6-\cdots,$$

$$\nu = 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{240}x^6-\cdots;$$

dieselben Funktionen hat GAUSS später (vergl. Werke III, S. 405, 406) mit P, Q, p, q bezeichnet; diese Bezeichnungen werden uns bei irregulären (vergl. S. 170, Fußnote) Leisteaufzeichnungen weiter unten im Abschnitt [IV.], art. [1.], [2.] noch begegnen.

Die Reihen für μ und ν hat GAUSS mit der Bezeichnung p, q auch auf das vordere Schutzblatt des I. Bandes seines Exemplars von SCHULZES *Tafeln* eingetragen.

In [II.] [3.] und [7.] wird zunächst der Wert

$$a = M\frac{\varpi}{2} = N\frac{\varpi}{2}$$

mit Hülfe der Potenzreihen für M und N berechnet. Auf vier Dezimalstellen hatte GAUSS diese Zahl (1,2453) auch auf die Einbanddecke des LEISTE hingeschrieben (siehe oben [I.] [1.], S. 145). Es werden dann in [II.] [7.] und [8.] die Ausdrücke von $N2\varphi$ und $M2\varphi$ durch $M\varphi$ und $N\varphi$, ferner die Darstellung von $N\lambda\varpi$ für ein beliebiges positives ganzzahliges λ als Potenz von a gegeben. Diese Resultate finden in der Notiz Nr. 63 des *Tagebuchs* vom 29. März besondere Erwähnung. In [II.] [8.] werden dann die Werte $M\frac{\varpi}{4}$ und $N\frac{\varpi}{4}$ berechnet, und mit Hilfe der Formel für $M2\varphi$ der in [II.] [3.] unmittelbar berechnete Wert $M\frac{\varpi}{2}$ bestätigt. Die Formel für $N2\varphi$ ergibt dann

$$N\varpi = 2\left(M\frac{\varpi}{2}\right)^4,$$

und GAUSS findet nun durch numerische Induktion die Gleichung

$$N\varpi = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Dieses Ergebnis wird in derselben Notiz Nr. 63 des *Tagebuchs* als maxime memorabile bezeichnet.

Die in [II.] [7.] und [8.] gegebenen Beziehungen zwischen den vier Funktionen M, N, μ, ν findet man auch vervollständigt auf S. 63 des Handbuchs 16, Bb (begonnen November 1801), abgedruckt Werke III, S. 410, 411; die Formeln von [II.] [10.] sind in dem Mai 1809 angefangenen Handbuch 19, Be, S. 80, 81 weiter ausgeführt, abgedruckt Werke III, S. 408.

In [III.] sind die auf die Lemniskatenteilung bezüglichen Leisteaufzeichnungen mit zwei andern Notizen*) zusammengestellt, die aber der Handschrift nach zu urteilen alle aus derselben Zeit herrühren. Übrigens ist diese Zeit durch die Tagebuchnotizen Nr. 60 vom 19. März und Nr. 62 vom 21. März 1797 auf das genaueste festgelegt.

In [III.] [1.] sind in der Gleichung 48. Grades, die die Siebenteilung liefert, nur die Koeffizienten angedeutet. Die Gleichung lautet nach einer brieflichen Mitteilung von K. SCHWERING:

$$16(1-x^4)\left(\frac{1-5x^4-5x^8+x^{12}}{1+20x^4-26x^8+20x^{12}+x^{16}}\right)^2 = \left(\frac{3-6x^4-x^8}{1+6x^4-3x^8}\right)^2;$$

sie ergibt sich, indem man in

$$(\ast) \qquad (\sin\operatorname{lemn} 4\varphi)^2 = (\sin\operatorname{lemn} 3\varphi)^2$$

beiderseits aus Abschnitt [I.], artt. [4.] und [6.] die Ausdrücke durch $x = \sin\operatorname{lemn}\varphi$ einsetzt und nachher den Faktor x^2 unterdrückt. Man erkennt dann, daß der Gleichung $(\ast)$ die Bestimmung

$$7\varphi = 2(m+m'\sqrt{-1})\varpi$$

für ganzzahlige m, m' entspricht.

In [III.] [2.] bedeutet sin wieder sin lemn und R steht (wie auch schon in [II.] [6.]) für 90°, bedeutet also $\frac{\varpi}{2}$. Daß es sich um die Fünfteilung der Lemniskate handelt, lehrt auch die kleine Figur.

In [III.] [3.] wird dann die transzendente Bestimmung der reellen Wurzeln der Teilungsgleichung vorgenommen. Die kleine Tabelle links gibt die Potenzen von $\frac{\varpi}{2}$; eine kleinere solche Tabelle war schon oben [II.] [3.] vorgekommen, eine ähnliche, die aber mit größerer Schärfe gerechnet — also jedenfalls später zusammengestellt ist —, findet sich auf S. 3 der Scheda Aa (begonnen Juli 1798), abgedruckt Werke III, S. 413.

Die artt. [4.] und [5.] des Abschnitts [III.] sind durch die vom Herausgeber hinzugefügten Einschaltungen verständlich gemacht. Das »Determ. rad. imag.« (S. 162) findet seine Erledigung in der Tagebuchnotiz Nr. 60 vom 19. März 1797; vergl. auch Abschnitt [III.], art. [2.]. Der Schluß von [4.], von »$S = \sqrt{720-26}$« an, könnte etwas später eingetragen sein, vielleicht nach der in Nr. 63 des Tagebuchs aufgezeichneten Entdeckung, daß die Fünfteilung geometrisch, d. h. mit Lineal und Zirkel, ausführbar sei. Die algebraische Darstellung der Wurzeln findet sich nämlich im LEISTE nicht, sondern erst auf den in [6.] und [7.] abgedruckten Zetteln.

Der Zusammenhang mit den Tagebuchnotizen Nr. 60—Nr. 63 zeigt, daß die in den Abschnitten [II.] und [III.] zusammengestellten Aufzeichnungen Entdeckungen wiedergeben, die zwischen dem 19. und dem 29. März 1797 gemacht worden sind.

SCHLESINGER.

*) Diese sind zwar schon Werke III, S. 421, art. [13.] abgedruckt, der Abdruck ist jedoch unvollständig und durch unrichtige Deutung der von GAUSS benutzten Zeichen entstellt.

[IV.]

[VERMISCHTE FORMELN ZUR THEORIE DER LEMNISKATISCHEN FUNKTIONEN.]

[Eintragungen im LEISTE.]

[1.]

[S. 26]

$$P.nx = nQ^{nn-1}P - \frac{n.nn-1.nn+6}{60}Q^{nn-5}P^5 - \frac{n^6-13n^4+36nn+420n.nn-1}{10080}Q^{nn-9}P^9\ldots$$

$$lP.nx = ln + lP + (nn-1)lQ - \frac{nn-1.nn+6}{60}\frac{P^4}{Q^4} \left.\begin{matrix} -\frac{1-14+49+384-420}{10080} \\ -\frac{1+10+13-60+36}{7200} \end{matrix}\right\}\cdot\frac{P^8}{Q^8}\ldots$$

[2.]

[S. 78]

$$\frac{QdP-PdQ}{QQ} = \sqrt{\left(1-\frac{P^4}{Q^4}\right)}[dx]$$

$$Q\frac{dP}{dx} - P\frac{dQ}{dx} = pq$$

$$q\frac{dp}{dx} - p\frac{dq}{dx} = PQ$$

$$(QP''-PQ'')(QP'-PQ') = 2Q^3Q'-P^3P' = 4Q^3Q'-4P^3P'$$

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} Q^2P''-PQQ'' &= -2P^3 \\ PPQ''-PQP'' &= 2Q^3 \end{aligned}\right.$$

$$P(P+Q)Q''-Q(P+Q)P''=2(Q^3+P^3)$$

$$\mathrm{I}\ldots\ PQ''-QP''=2QQ-2QP+2PP$$

$$\mathrm{II}\ldots\ QP''-PQ''=2QQ+2QP+2PP$$

[3.]

[S. 90]

$$\frac{x-\frac{1}{60}x^5-\frac{1}{10080}x^9\ldots}{e^{\frac{1}{2}\frac{xx}{\varpi\varpi}\pi}}$$

[4.]

[S. 92—93]

$$\begin{aligned} \sin\operatorname{lemn} a &= 0{,}9\,550\,060\sin a \\ &\quad -0{,}0430 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\operatorname{lemn} a &= 0{,}95\,500\,599\sin a \\ &\quad -0{,}04\,304\,950\sin 3a \\ &\quad +0{,}00\,186\,048\sin 5a \\ &\quad -0{,}00\,008\,040\sin 7a \\ &\quad +0{,}00\,000\,347\sin 9a \\ &\quad -0{,}00\,000\,015\sin 11a \\ &\quad +0{,}00\,000\,001\sin 13a \end{aligned}$$

Posito $\sin\varphi^0=s$, atque φ express. in gradibus arcus cuius sinus lemnisc. $=s$ erit in gradibus

$$\begin{aligned} &=\varphi^0 \\ &+4^0{,}933\,559\sin 2\varphi \qquad \left(\frac{90}{\pi}-\frac{90}{\varpi\varpi}\right. \quad 0{,}0861 \\ &+\ 0{,}317\,820\sin 4\varphi \\ &\quad\ 0{,}030\,313\sin 6\varphi \\ &\quad\ 0{,}003\,414\sin 8\varphi \\ &\quad\ 0{,}000\,422\sin 10\varphi \\ &\quad\ 0{,}000\,055\sin 12\varphi \\ &\quad\ 0{,}000\,007\sin 14\varphi \\ &\quad\ 0{,}000\,001\sin 16\varphi \end{aligned}$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\varphi)}}.$$

[5.]

[Rückseite des Titels]

$$\Pi=\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{8}\right)^2\frac{1}{4}+\left(\frac{5}{16}\right)^2\frac{1}{8}+\cdots\right\}$$

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}c)}}\left[=\sqrt{\frac{2}{3}}\right]\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{3}c)}}$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{1}{3}c)}}=\right]1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}c+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}cc+\cdots$$

$$\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\varpi}{\pi}=\right]1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{81}+\cdots$$

$$\begin{array}{r} [0,]816\,496\,580\,927\,726\ \left[=\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right] \\ 17\,010\,345\,435\,994 \\ 1\,033\,614\,740\,034 \\ 78\,956\,681\,530 \\ \hline 834\,619\,497\,785\,284 \\ 6\,682\,531\,640 \\ 599\,571\,589 \\ 55\,862\,862 \\ 5\,344\,024 \\ 521\,297 \\ 51\,583 \\ 5\,169 \\ 523 \\ 53 \\ 6 \\ \hline \left[\frac{\varpi}{\pi}=\right]\ 0{,}834\,626\,841\,674\,030 \end{array}$$

[6.]

[Zettel in Fh Nr. 2, Kapsel 50.]

Ponendo sin lemn φ = sin circ. χ crit

$$\begin{aligned}\chi = \tfrac{\pi}{\varpi}\varphi - 0{,}086\,266 \sin 2\varphi \\ +\quad 1866 \sin 4\varphi \\ -\quad 53 \sin 6\varphi \\ +\quad 2 \sin 8\varphi\end{aligned}$$

[Auf der Rückseite]

$$Px = \frac{x - \frac{1}{60}x^5 - \frac{1}{10080}x^9 \ldots}{e^{\frac{1}{2}\frac{xx}{\varpi\varpi}\pi}}$$

$$Q(1+\sqrt{-1})\pi = 4e^{\frac{1}{4}\varpi}.$$

BEMERKUNGEN.

Die in den artt. [1.] bis [5.] wiedergegebenen Leisteaufzeichnungen gehören zu den irregulären*). In [1.], [2.] sind P, Q die früher mit M, N bezeichneten Zähler und Nenner des sinus lemniscaticus; diese Bezeichnungen hat GAUSS auch auf dem Werke III, S. 404—406, art. [1.]—[4.] abgedruckten Zettel und in sehr viel späterer Zeit in den Handbüchern 16, Bb und 19, Be (siehe Werke III, S. 408—412) benutzt. Zu den Formeln in [1.] vergleiche man Werke III, S. 411, 412; in den Koeffizienten von $\frac{P^n}{Q^n}$ sind in den Zählern die Potenzen von n zu ergänzen. Die Aufzeichnung [3.] erscheint schon äußerlich durch das Zeichen ϖ für die halbe lemniskatische Periode als irregulär; der hingeschriebene Quotient ist die von Juli 1798 ab in der Scheda Aa**) (siehe Werke III, S. 416 ff.) ständig mit P bezeichnete Funktion, die die Eigenschaft

$$P(\varpi + x) = -P(x)$$

*) Während die in den Abschnitten [I.], [II.], [III.] wiedergegebenen Leisteaufzeichnungen in fortlaufender Reihenfolge gemacht sind und den Tagebuchnotizen des Jahres 1797 entsprechen, sind die in diesem Abschnitt [IV.] zusammengestellten Notizen auf leer gebliebenen Stellen von Durchschußblättern, die GAUSS früher mit Aufzeichnungen andern Inhalts beschrieben hatte, eingetragen. Wir bezeichnen solche Leistenotizen im Text und weiterhin als irreguläre. Vergl. den Artikel 2 des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«.

**) Die Scheda Aa ist begonnen Juli 1798; ihr Inhalt hängt mit den Tagebuchnotizen Nr. 92, 94, 95 (Juli—Oktober 1798) zusammen. Sie dürfte Oktober 1798 abgeschlossen worden sein, denn im November 1798 beginnt die Scheda Ab.

besitzt und sich als die JACOBIsche Thetafunktion $H(x)$*) für den lemniskatischen Fall charakterisieren läßt, während die Funktionen M, N den WEIERSTRASSschen Al-Funktionen**) entsprechen. Derselbe Quotient findet sich auch auf dem in [6.] abgedruckten Zettel. Die daselbst und in [4.] auftretenden Reihenentwickelungen nach den Sinus der Vielfachen eines Winkels weisen auf die Tagebuchnotiz Nr. 91 b vom Juli 1798 hin. Die in [4.] in dem ersten Ansatz für sin lemn a als Koeffizient von sin a auftretende Zahl stand ursprünglich auch ebenso (mit 60 in der 6. und 7. Dezimale) im *Tagebuch*; die dann folgende Entwickelung in [4.] ist viel vollständiger und in den 7. und 8. Dezimalen genauer als die des *Tagebuchs*, sie ist also jedenfalls später, und damit ist dieser ganze Komplex von Aufzeichnungen auf Juli 1798, kurz vor Beginn der Scheda, Aa datiert.

Das am Schluß von [4.] hingeschriebene Integral stellt den Zusammenhang mit der Aufzeichnung [5.] her, die eine geschicktere und schärfere Ausführung der in [I.] [8.] (oben S. 149 dieses Bandes) begonnenen Rechnung enthält. In [5.] bedeutet Π wieder die Viertelperiode

$$\Pi = \int_0^1 \frac{dp}{\sqrt{1-p^4}} = \frac{\varpi}{2};$$

setzt man in diesem Integral $p = \sqrt{1-\xi^2}$, so erhält man die Form

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\frac{1}{2}\xi^2)}},$$

aus der die erste in [5.] angegebene Reihe für Π hervorgeht. Die Reihe für

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\varpi}{\pi} = \sqrt{6}\,\frac{1{,}3110\ldots}{3{,}1415\ldots}$$

findet sich auch in der Tagebuchnotiz Nr. 91 a (Juli 1798). Die mit Hilfe dieser Reihe ausgeführte numerische Rechnung liefert einen Wert für $\frac{\varpi}{\pi}$, der zwar viel genauer ist als der in [I.] [8.] angegebene, jedoch wird auf S. 24 der Scheda Aa ein noch genauerer Wert berechnet (es folgen nämlich auf die vierzehnte Dezimalstelle 3 noch die Stellen 164), so daß also die hier gegebene Rechnung die frühere ist. Damit ist auch [5.] auf Juli 1798 datiert, wobei allerdings noch die Möglichkeit offen bleibt, daß die erste Reihe für Π schon vor den übrigen Notizen hingeschrieben worden ist, zu einer Zeit, als GAUSS noch Π und nicht $\frac{\varpi}{2}$ als Zeichen für die Viertelperiode benutzte.

SCHLESINGER.

*) Vergl. etwa JACOBIs Werke I, S. 224.

**) Vergl. WEIERSTRASS' Werke I, S. 6.

ZUR THEORIE DES ARITHMETISCH-GEOMETRISCHEN MITTELS.

[I.]

[SPECIME]N TERMINI MEDII SI NOMINE UTI LICET ARITHMETICO-GEOMETRICI.

[Zettel in Ff, Kapsel 46 a.]

[1.]

Modulus v. $2 = 0{,}82781$

$$ly = \int u\,dz$$

$$u = 1 + z - \tfrac{1}{2}zz + \tfrac{1}{4}z^3 - \tfrac{1}{16}z^4 \ldots$$

[1] $\left\{ \begin{aligned} &\text{Tm.}(1+x) = 1+z = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{16}xx + \tfrac{1}{32}x^3 - \tfrac{21}{1024}x^4 + \tfrac{31}{2048}x^5 \\ &\qquad - \tfrac{195}{16384}x^6 + \tfrac{305}{32768}x^7 \ldots \end{aligned} \right.$

[2] $1 + x = 1 + 2z + \tfrac{1}{2}zz - \tfrac{1}{4}z^3 + \tfrac{3}{16}z^4 - \tfrac{5}{32}z^5 + \tfrac{23}{256}z^6 - \tfrac{5}{128}z^7 \ldots$

[3] Basis cuius Modulus u, $= 1 + u + \frac{uu}{4} * + \frac{u^4}{448} - \frac{u^5}{2240} \cdots$

[4] $\left\{ \begin{aligned} &\text{Quadratum cuius latus est aequal. parti alteri huius seriei post } 1 \\ &\qquad = uu + \tfrac{u^3}{1.2} + \tfrac{u^4}{1.2.8} + \tfrac{u^5}{1.2.8.14} + \tfrac{u^6}{2.8.14.20} \cdots \end{aligned} \right.$

Quodsi supponamus legem, quae elucet, hu[ius seriei] veram esse, prior sive radix =

$$u + \frac{uu}{4} * + \frac{u^4}{448} - \frac{u^5}{2240} + \frac{24}{23296}u^6 \ldots$$

[2.]

Sit e. g. $u = 0{,}1$ atque ad calculum illa serie uta[mur]

Quant. (cuius mod. $= u$) $= 1 + \sqrt{(uu + \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{16}u^4 + \cdots)}$

```
0,01
0,0005
0,00000625
. . . . 44642857142857
            223214285714
               858516484
                 2682864
                    7060
                      16
0,010506294866932634995[*)]
```

$\varepsilon^{*0,1*} = 1{,}1024994$ [**)]

$$\sqrt{(\varepsilon^{*t*})} = 1 + \tfrac{1}{2}t ** + \tfrac{1}{896}t^4 - \tfrac{1}{1280}t^5 - \tfrac{9}{17920}t^6 - \ldots$$

$\lambda(1+z)$ plus minus $\sqrt{(1+z)} - 2$

$$= z - \tfrac{1}{4}zz + \tfrac{1}{8}z^3 - \tfrac{9}{112}z^4 + \tfrac{131}{2240}z^5 \ldots$$

$\varepsilon = 2{,}251877, \quad \varepsilon^{-1} = 0{,}2528383, \quad 1 : \varepsilon^{-1} = 3{,}955096$

$$\lambda(1+z) = z - \tfrac{1}{4}zz + \tfrac{1}{8}z^3 \; *.$$

[*) In der Handschrift lautet die vorletzte Ziffer 8 statt 9.]

[**) In der Handschrift lautet diese Zahl, 1,01024994.]

[Aus Scheda Ab, Exercitationes atque Schedae analyticae, 1798 Nov., S. 20 ff.]

[3.]

[S. 20]

$$1{,}1\,892\,071\,150\,027 \;[=\sqrt{1\,.\,\sqrt{2}}]$$

$$1{,}4\,142\,135\,623\,730 \;[=\sqrt{2}].$$

[S. 21]

$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{8}x^3 - \tfrac{9}{112}x^4 \ldots$$

[5]
$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{2}x - \frac{1}{16}xx + \frac{1}{32}x^3 - \frac{21}{1024}\;x^4 + \cdots [= \mathrm{Tm.}\,(1+x) - 1] \\
\quad - \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{64}[x^3] - \frac{9}{1024}\;\left[x^4 + \cdots = -\frac{1}{4}(\mathrm{Tm.}\,(1+x) - 1)^2\right] \\
\qquad + \frac{1}{64}[x^3] - \frac{3}{512}\;\left[x^4 + \cdots = \frac{1}{8}(\mathrm{Tm.}\,(1+x) - 1)^3\right] \\
\qquad\qquad - \frac{1}{16}\left[\cdot\frac{9}{112}x^4 + \cdots = -\frac{9}{112}(\mathrm{Tm.}\,(1+x) - 1)^4\right]
\end{array}\right.$$

[6]
$$l(1+x) = x - \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{8}x^3 - \tfrac{9}{112}x^4 + \tfrac{131}{2240}x^5 + \cdots$$

[7]
$$\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{16}xx + \tfrac{1}{32}x^3 - \tfrac{21}{1024}x^4 + \tfrac{31}{2048}x^5 + \cdots \;[= \mathrm{Tm.}\,(1+x) - 1]$$

$$\begin{array}{rl}
& 0{,}19\,814 \;[= \mathrm{Tm.}\,\sqrt{2} - 1] \\
- & 981 \\ \hline
& 18\,833 \\
+ & 97 \\ \hline
& 18\,931 \\
& 12 \\
& 18\,921
\end{array}$$

[4.]

[8]
$$\left\{\begin{array}{l}
1 + x - \frac{1}{4}xx + \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{112}\,x^4 + \frac{131}{2240}\,x^5[+ \cdots = 1 + l(1+x)] \\
\quad + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{5}{64}[x^4] - \frac{25}{448}\left[x^5 + \cdots = \frac{1}{4}l(1+x)^2\right] \\
\qquad + \frac{1}{448}x^4 - \frac{1}{448}\left[x^5 + \cdots = \frac{1}{448}l(1+x)^4\right] \\
\qquad\qquad - \frac{1}{2240}\left[x^5 + \cdots = \frac{-1}{2240}l(1+x)^5\right]
\end{array}\right.$$

---

[9]
$$\left\{\begin{array}{l}
x - \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}[x^5 - \cdots = \log(1+x)] \\
\quad + \frac{1}{4}xx - \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{48}x^4 - \frac{5}{24}\left[x^5 + \cdots = \frac{1}{4}\log(1+x)^2\right] \\
\qquad + \frac{1}{24}x^3 - \frac{1}{16}x^4 + \frac{7}{96}\left[x^5 - \cdots = \frac{1}{24}\log(1+x)^3\right] \\
\qquad\qquad + \frac{1}{336}x^4 - \frac{1}{168}\left[x^5 + \cdots = \frac{1}{336}\log(1+x)^4\right] \\
\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{6720}\left[x^5 + \cdots = \frac{-1}{6720}\log(1+x)^5\right]
\end{array}\right.$$

[S. 23]

$$\begin{array}{l} u = \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{2}z^u \\ \quad + \frac{1}{2}z^3 \end{array}$$

[10] $[\mathrm{Tm.}(1+2y) - 1 =]\, z = y - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}y^3 - \frac{21}{64}y^4 + \frac{31}{64}y^5 - \frac{195}{256}y^6 + \frac{305}{256}y^7$ etc.

[11]
$$y = z + \tfrac{1}{4}z^2 - \tfrac{1}{8}z^3 + \tfrac{3}{32}z^4 - \tfrac{5}{64}[z^5 + \ldots].$$

[5.]

[S. 25]

[12]
$$y = 2z + \tfrac{1}{2}zz - \tfrac{1}{4}z^3 + \tfrac{3}{16}z^4 - \tfrac{5}{32}z^5 + \tfrac{23}{256}z^6 + \cdots$$

[13]
$$2\varphi z = \varphi(2z + \tfrac{1}{2}zz - \tfrac{1}{4}z^3 \text{ etc.}).$$

[S. 20]

$$\begin{array}{ll} 2 & 1 \\ 1{,}5 & 1{,}41\,421\,356\ [=\sqrt{2}] \end{array}$$

$$[\tfrac{1}{2}(1{,}5+\sqrt{2})=]\ 1{,}45\,710\,678$$

$$\partial\frac{1}{M}=\frac{\partial M}{M^2},\quad M\frac{1+x}{2\sqrt{x}},\quad M'\frac{1+x}{2\sqrt{x}}.$$

[S. 38]

$$\begin{array}{rl} M\tfrac{1}{2} \quad [0,]7283955 & \\ [0,]86419775 & [=\tfrac{1}{2}(1+0{,}7283955)] \\ [0,]85346079 & [=\sqrt{0{,}7283955}] \\ 85882927 & [=\tfrac{1}{2}(0{,}86419775+0{,}85346079)] \\ 1260 & \\ M^2\tfrac{1}{2}=0{,}85882094 & [=M(M\tfrac{1}{2})] \\ 0{,}92941047 & [=\tfrac{1}{2}(1+0{,}85882094)] \\ 672597 & \\ \hline 92806822 & \\ 6718 & \\ M^4\tfrac{1}{2}=0{,}9280677 & \end{array}$$

[II.]

[REIHENENTWICKELUNGEN UND BEZIEHUNGEN ZUM ELLIPSENUMFANG.]

[Eintragungen im LEISTE.]

[1.]

[S. 25]

[1] $$1-\frac{1.1}{2.2}BB-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}B^4-\text{ etc.}$$

[2] $$B+\frac{1}{4}B^3+\frac{9}{64}B^5\ldots=4z+8z^5$$

[3] $$B=4z-16z^3-376z^5$$

[4] $$\text{Periph.}=1-4z^2+20z^4+800z^6$$

[S. 26]

Peripheria Ellipseos

[5] $$=1-\frac{1.1}{2.2}BB-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}B^4\text{ etc.}$$

[6] $$B+\frac{1}{4}B^3+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}B^5\ldots=(2z^{\frac{1}{4}}+2z^{\frac{9}{4}}+\text{etc.})^2=rr$$

[7] $$=\frac{2bbrdr}{BBdB}-\frac{rr}{B^3}$$

[8] $$\frac{2Bbbrdr-rrdB}{B^4dB}=C\frac{r^4bbxdp}{B^4pdx}$$

$$\frac{2bbrdr}{BBdB}-\frac{bb}{BB}\qquad\frac{bb}{BdB}\left(\frac{2dr}{r}-\frac{dB}{B}\right)$$

[9] $$\frac{2BBbbdr-rBdB}{r^3bb[dB]}=C\frac{xdp}{pdx}.$$

[2.]

[S. 37]

[10] $$\int \frac{\frac{bb}{a}+\left(\frac{aa-bb}{a}\right)ss}{\sqrt{\left(1-\frac{aa-bb}{aa}ss\right)}}[ds].$$

---

[11] $$\mathfrak{M}\nu = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{(1-\nu\nu)}}{1+\sqrt{(1-\nu\nu)}}\,\mathfrak{M}\frac{1-\sqrt{(1-\nu\nu)}}{1+\sqrt{(1-\nu\nu)}}$$

[12] $$\mathfrak{M}\frac{2\sqrt{x}}{1+x} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}x\mathfrak{M}x$$

[13] $$\mathfrak{M}x = \frac{1}{2}+\frac{1}{16}xx+\frac{1}{32}x^4+\frac{41}{2048}x^6+\cdots$$

Peripheria Ellipsis cuius axes a, b est

[14] $$\pi\frac{bb}{a}\left|K\sqrt{\frac{aa-bb}{aa}}\right|\left(1+\frac{aa-bb}{bb}\mathfrak{M}\sqrt{\frac{aa-bb}{aa}}\right)$$

[15] $$=\pi\frac{bb}{a}\,\frac{1+N\sqrt{\frac{aa-bb}{bb}}}{\text{Med. inter 1 et }\frac{b}{a}}$$

[16] $$N\nu = \nu\nu\mathfrak{M}\nu = \frac{1}{2}\nu\nu+\nu\,.\,N\frac{1-\sqrt{(1-\nu\nu)}}{1+\sqrt{(1-\nu\nu)}}.$$

[3.]

[S. 48]

[17] $$q=\frac{\pi}{2}a\left(1-\frac{1.1}{2.2}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)-\frac{1.1.1.3}{2.2.4.4}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)^2\cdots\right)$$

[18] $$\frac{aa}{M(a,b)} = a\left(1+\frac{1.1}{2.2}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)+\frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)^2\cdots\right)$$

[19] $$\frac{a}{M(a,b)}-\frac{2q}{\pi a} = \frac{1}{2}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)+\frac{1.1.3}{2.2.4}\left(\frac{aa-bb}{aa}\right)^2\cdots$$

[4.]

[S. 49]

[20] $$K\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = (1+x)Kx$$

[21] $$K\sqrt{(1-xx)} = Hx \qquad \frac{1-x}{1+x}=y$$

[22] $$K\frac{1-x}{1+x} = H\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x}$$

[23] $$\frac{2y^{\frac{1}{2}}}{1+y} = \sqrt{(1-xx)}$$

[24] $$H\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = \frac{1+x}{2}Hx$$

[25] $$Hx = \frac{2}{1+x}H\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x}$$

[26] $$\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+x} = {}'x$$

[27] $$\frac{1-\sqrt{(1-xx)}}{1+\sqrt{(1-xx)}} = x'$$

[28] $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x'+\frac{1}{8}x'x''+\text{etc.} = \mathfrak{M}x.$$

[5.]

S. 83]

[29] $$L\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu} = \frac{1+\nu}{2}\nu L\nu+\frac{\nu+1}{2}K\nu \qquad \frac{L}{K}=\mathfrak{M}$$

[30] $$\mathfrak{M}\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\nu\mathfrak{M}\nu$$

[31] 1) $$\frac{2}{1+\nu}\left(K\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu}-L\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu}\right) = K\nu-\nu L\nu$$

(Verif.)

[32] 2) $$K\frac{2\nu^{\frac{1}{2}}}{1+\nu} = (1+\nu)K\nu.$$

[S. 55]

[33] $$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\nu\nu+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\nu^4+\text{etc.}=K$$

[34] $$\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\nu^3+\frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6}\nu^5+\text{etc.}=\mathrm{L}$$

[35] $$K\nu=\frac{1}{M\sqrt{(1-\nu\nu)}}=\frac{1}{\overline{1+\nu}M\frac{1-\nu}{1+\nu}}$$

[36] $$\frac{\partial K}{\partial\nu}=\nu\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\nu},\quad \frac{\nu\partial\nu K}{\partial\nu}=\frac{\partial\nu\mathrm{L}}{\partial\nu}$$

[37] $$K'=\nu\mathrm{L}',\quad \nu K+\nu\nu K'=\mathrm{L}+\nu\mathrm{L}'$$

[38] $$K+\left(\nu-\frac{1}{\nu}\right)K'=L$$

[39] $$(1+\nu)K\nu=K\frac{2\sqrt{\nu}}{1+\nu}$$

[40] $$(1+\nu)K'\nu+K\nu=K'\frac{2\sqrt{\nu}}{1+\nu}\}\times\frac{1-\nu}{(1+\nu)^2\nu^{\frac{1}{2}}}.$$

[6.]

[S. 56]

$$\begin{array}{llll} \ldots{}'a & a & a' & a'' \\ {}'b & b & b' & b'' \\ {}'A & A & A' & A'' \\ {}'B & B & B' & B'' \end{array}$$

$$\begin{aligned} A&=a+b\\ B&=a-b\\ \hline A'&=a \qquad\qquad\qquad =\tfrac{1}{2}({}'a+{}'b)\\ B'&=\sqrt{(aa-bb)}=\tfrac{1}{2}({}'a-{}'b)\\ \hline A''&=\tfrac{1}{4}({}''a+{}''b)\\ B''&=\tfrac{1}{4}({}''a-{}''b) \end{aligned}$$

3,38889961	0,025313952
1,70710678	0,29289322
1	0,70710675 $[=\sqrt{\frac{1}{2}}]$
0,8535533912	0,8408964152

[III.]

[DIFFERENTIAL- UND FUNKTIONALGLEICHUNGEN.]

[Zwei Zettel in Ff, Kapsel 46a.]

[1.]

[Erster Zettel]

Ponendo

$$y=x^{-1}+\frac{1}{4}x^{-3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^{-5}+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36}x^{-7}\ \text{etc.}$$
$$(=\varphi x$$

eruitur

$$xy+(3xx-1)\frac{dy}{dx}+x(xx-1)\frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Iam ponendo $x=\frac{1}{2}(t+t^{-1})$ erit

$$\frac{dt}{dx}=\frac{2}{1-t^{-2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{2}{1-t^{-2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{2}{1-t^{-2}}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{t^3}\left(\frac{2}{1-t^{-2}}\right)^3\frac{dy}{dt}.$$

Hinc

$$\frac{tt+1}{2t}y+\frac{3t^4+2tt+3}{2tt-2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{tt+1}{2t}\left(\frac{tt-1}{2t}\right)^2\left\{\left(\frac{2tt}{tt-1}\right)^2\frac{d^2y}{dt^2}-\left(\frac{2t}{tt-1}\right)^3\frac{dy}{dt}\right\}$$

sive

$$\frac{tt+1}{2t}y+\frac{3t^4+1}{2tt-2}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{t(tt+1)}{2}\,\frac{d^2y}{dt^2}=0$$

sive

$$(t^4-1)y+t(3t^4+1)\frac{dy}{dt}+tt(t^4-1)\frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

Hinc facile deducitur

$$y = 2\left(t^{-1} + \tfrac{1}{4}t^{-5} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}t^{-9} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{25}{36}t^{-13} + \text{etc.}\right)$$

sive

$$\varphi\tfrac{1}{2}\left(t + \tfrac{1}{t}\right) = 2t\varphi tt.$$

Ponendo $x = \frac{1}{p}$ erit

$$y - p(1+pp)\frac{dy}{dp} + pp(1-pp)\frac{d^2y}{dp^2} = 0.$$

[2.]

[Zweiter Zettel]

Wenn

$$\varphi x = x^{-1} + \tfrac{1}{4}x^{-3} + \tfrac{1.9}{4.16}x^{-5} + \text{etc.},$$

so ist bewiesen, dass

$$2x\varphi xx = \varphi\frac{xx+1}{2x} \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Es sei

$$\frac{\sqrt{xx-1}}{\varphi\sqrt{\frac{xx}{xx-1}}} = \Psi x,$$

woraus, $\sqrt{\frac{xx}{xx-1}} = u$ gesetzt, folgt

$$\varphi u = \frac{1}{\sqrt{uu-1}\,.\,\Psi\sqrt{\frac{uu}{uu-1}}}.$$

Dann gibt die Functionalgleichung (1)

$$\frac{2x}{\sqrt{x^4-1}\,.\,\Psi\sqrt{\frac{x^4}{x^4-1}}} = \frac{1}{\frac{xx-1}{2x}\Psi\frac{xx+1}{xx-1}},$$

mithin

$$\Psi\sqrt{\frac{x^4}{x^4-1}} = \sqrt{\frac{xx-1}{xx+1}}\cdot\Psi\frac{xx+1}{xx-1}.$$

Man setze $\frac{xx-1}{xx+1} = tt$, so wird $xx = \frac{1+tt}{1-tt}$ und

$$\Psi\frac{1+tt}{2t} = \frac{1}{t}\Psi tt.$$

Nun ist aber auch

$$M\frac{1+tt}{2t} = \frac{1}{t}Mtt.$$

Macht man daher allgemein

$$\frac{\Psi z}{Mz} = Fz,$$

so wird

$$F\frac{1+tt}{2t} = Ftt,$$

woraus man leicht schliesst, dass Fz eine Konstante sein müsse.

Nun ist für $u = \infty$, $\varphi u = \frac{1}{u}$; also $\Psi\sqrt{\frac{uu}{uu-1}}$ oder $\Psi 1 = 1$. Es ist aber auch $M1 = 1$, folglich die Konstante $= 1$ und daher

$$Mx = \frac{\sqrt{xx-1}}{\varphi\sqrt{\frac{xx}{xx-1}}}.$$

Also [ist] $\frac{1}{Mx}$ der von V freie Theil des Ausdrucks

$$\frac{1}{\sqrt{xx-1}\,.\,\sqrt{\left(\frac{xx}{xx-1} - \cos V^2\right)}}$$

oder auch der von V freie Theil bei

$$\frac{1}{\sqrt{(xx-\cos V^2(xx-1))}} = \frac{1}{\sqrt{(xx\sin V^2 + \cos V^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+(xx-1)\sin V^2)}},$$

und folglich

$$\frac{1}{M\sqrt{(1+y)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+y\sin V^2)}} \qquad \text{(abiectis partibus angulum } V \text{ implicantibus)}$$

Übrigens ist es gleichgültig, ob man $\sin V^2$ oder $\cos V^2$ schreibt.

$$\varphi x = 1 + \tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1.9}{4.16}x^4 \text{ etc.}$$

$$\varphi s = \frac{1}{Mc} = \frac{\text{tang}}{sM\frac{1}{c}}$$

0	0
30°	0,728395
45°	0,847213
60°	0,931808
90°	1.

[IV.]

[INVESTIGATIO FUNCTIONUM QUAE EX EVOLUTIONE MEDIORUM ARITHMETICO-GEOMETRICORUM ORIUNTUR.]

[Auszüge aus der Scheda Ac. Varia, Novbr. 1799.
Imprimis de Integrali $\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1+\mu\mu\sin\varphi^2)}}$. 22. XI. S. 7 ff.]

[1.]

[S. 7]

[1] $$\frac{\varpi}{\pi} = \left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2\frac{1}{8}\cdots\right)\sqrt{\frac{1}{2}}$$

[2] $$= \left(1+\frac{1.2.3}{2.4.4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1.2.3.5.6.7}{2.4.4.6.8.8}\cdot\frac{1}{81}+\frac{1.2.3.5.6.7.9.10.11}{2.4.4.6.8.8.10.12.12}\cdot\frac{1}{729}\cdots\right)\sqrt{\frac{2}{3}}$$

[3] $$= \left(1+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{81}+\frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12}\cdot\frac{1}{729}\cdots\right)\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

[S. 9]

[4] $$\frac{\varpi}{\pi}-\frac{2}{\varpi} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{27}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{243}+\text{etc.}\right)\sqrt{\frac{1}{6}}$$

[5] $$\frac{\varpi}{\pi}-\frac{2}{\varpi} = \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{27}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{1}{243}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{9}{12}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{16}\cdot\frac{1}{2187}\cdot\cdot\right)\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

[2.]

[S. 9]

[6] $$\frac{1}{\sqrt{(1-cz)}} = A + A'c + A''c2 + A'''c3 + \text{etc.}$$

$$A = 1+\frac{1.3}{4.4}zz+\frac{1.3.5.7}{4.4.8.8}z^4+\frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12}z^6+\text{etc.}$$

$$A' = 2z\left(\frac{1}{4}+\frac{1.3.5}{4.4.8}zz+\frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12}z^4+\frac{1.3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12.16}z^6+\text{etc.}\right)$$

$$A'' = 2z^2\left(\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5.7}{4.4.8.12}zz+\frac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.16}z^4+\text{etc.}\right)$$

$$A''' = 2z^3\left(\frac{1.3.5}{4.8.12}+\frac{1.3.5.7.9}{4.4.8.12.16}zz+\frac{1.3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.16.20}z^4+\text{etc.}\right)$$

etc.

$$2zA - 4A' + 3zA = 0$$
$$3zA' - 8A'' + 5zA''' = 0$$
$$5zA'' - 12A''' + 7zA^{IV} = 0$$

etc.

$$\frac{A'}{A} = \cfrac{2z}{4-\cfrac{9zz}{8-\cfrac{25zz}{12-\cfrac{49zz}{16-\text{etc.}}}}}$$

Terminus constans duarum expressionum

$$(4+4z+zz\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$(4+(8z+4zz)\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$$

idem est et quidem

$$\frac{1}{2\text{ Term. med. Ar. G. inter } 1 \text{ et } 1+z}.$$

[3.]

[S. 10]

Medium arithmetico-geometricum inter 1 et x per huius modi formulam exhiberi potest, apprime utilem quoties x est numerus satis magnus

[7] $$Mx = \frac{C(x-\alpha x^{-1}-\beta x^{-3}-\gamma x^{-5}-\text{etc.})}{\log.(4x-ax^{-1}-bx^{-3}-cx^{-5}-\text{etc.})}.$$

Hic factor constans

$$C = \frac{1}{2}\pi = 1{,}57079632\ldots;$$

$$\alpha = \frac{1}{4};\ \beta = \frac{5}{64};\ \gamma = \frac{11}{256};\ \delta = \frac{469}{36384};\ \varepsilon = \frac{1379}{2^{16}}\ldots;$$

$$a = 1;\ b = \frac{9}{32};\ c = \frac{19}{128};\ d = \frac{4769}{49152};$$

[8] $$\text{Denominator} = \log.\, 4x - \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{13}{128}x^{-4} - \frac{23}{384}x^{-6} - \frac{2701}{2^{16}}x^{-8}$$

---

[9] Obs[ervatio]: Numerator, omisso factore C, pro $x = 2$, fit

$$= M3 = 1{,}863617.$$

Posito denominatore $= \log.\, z$ erit

[10] $$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}z + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-3} - 2z^{-5} - \frac{1}{4}z^{-7} - 3z^{-9} - \frac{1}{2}z^{-11} + 6z^{-13} \\ &\qquad + \frac{3}{4}z^{-15} - 22z^{-17} - 3\frac{1}{2}z^{-19} + 64z^{-21} \\ &= \frac{1}{\frac{4}{z} - \frac{16}{z^3} + \frac{56}{z^5} - \frac{160}{z^7}}. \end{aligned}\right.$$

Posito numeratore $= Cy$ erit

[11] $$x = y + \frac{1}{4}y^{-1} + \frac{1}{64}y^{-3} - \frac{1}{256}y^{-5} - \frac{23}{16384}y^{-7}$$

Denominator fit pro $x = 1+t$

[12] $$= -\frac{A}{\log.\frac{1}{8}t - \frac{1}{16}tt + \frac{5}{128}t^3 - \frac{7}{256}t^4 + \frac{337}{16384}t^5},$$

$$A \text{ proxime} = 4{,}9348 = \frac{1}{2}\pi\pi.$$

[4.]

[S. 11]

[13] $$\text{Posito numeratore} = \frac{C}{Q}$$

erit

[14] $$Q = \frac{1}{x} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^{-3} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^{-5} + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 x^{-7} + \text{etc.}$$

[15] $Q =$ Pars ipsius $(xx - \cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$, quae a φ est libera

[16] $$= \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} \times \text{valor integralis}$$

$$\int\sqrt{\frac{1-rr}{xx-rr}}\,dr \quad \int\frac{dr}{\sqrt{(1-rr)(xx-rr)}}$$

ab $r = 0$ usque ad $r = 1$

spectando x tamquam constans

[17] $$\text{Ponendo } \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = q$$

erit numerator

[18] $$= -A:\ \log.\,(q + 2q^5 + 15q^9 + 150q^{13}$$

[19] $$= -A:\ \log.\,\varphi q.$$

Coefficientes seriei deducuntur ex aequatione

$$\left(\varphi\sqrt{\frac{q}{1+4qq}}\right)^2 = \varphi q$$

$$\left(\text{Forsan } \varphi q = q + \frac{1.2}{1.1}q^5 + \frac{1.2.5.6}{1.1.2.2}q^9 + \frac{1.2.5.6.9.10}{1.1.2.2.3.3}q^{13}\right)$$

[20] $$M\sqrt{(1-kk)} = \frac{k \text{ Numerator pro } \frac{1}{k}}{C} \quad \text{demonstr. GALEN}$$

[21] Obser[vatio:] $\frac{M\sin 75^\circ}{M\sin 15^\circ} = \sqrt{3}$

[22] $\left\{\begin{array}{r} 1-4+32-176 \\ -12+192 \\ -\ \ 80 \end{array}\right.$ $\quad 1-4zz+20z^4-64z^6\ldots = \text{Periph. Ellips.}$

[5.]

[S. 12]

[24] Posito termino constante expressionis

$$(1+\mu\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}} = A, \text{ erit}$$

$$M\sqrt{(1+\mu)} = \frac{1}{A}$$

[24] Terminus constans expressionis $\left(hh-2\cos\varphi+\frac{1}{hh}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\text{est} = \frac{1}{\text{Terminus medius inter } h-\frac{1}{h} \text{ et } h+\frac{1}{h}}$$

[25] Si $(\mu\mu-\cos\varphi^2)^{-\frac{1}{2}}$ in seriem

$$A+2B\cos 2\varphi+\text{etc.}$$

evolvi concipitur atque ponitur

$$A = F\mu,\ B = G\mu$$

erit

[26]
$$F\tfrac{1}{2}\left(\mu+\tfrac{1}{\mu}\right) = 2\mu F\mu\mu$$
$$G\tfrac{1}{2}\left(\mu+\tfrac{1}{\mu}\right) = \tfrac{1}{\mu}G\mu\mu+\tfrac{1}{\mu}F\mu\mu$$

Ponendo

[27] $\frac{Gx}{Fx} = Hx \qquad x,\ x',\ x''$ etc.

erit

[28] $Hx = \frac{1}{2x'}+\frac{1}{4x'x''}+\frac{1}{8x'x''x'''}\text{ etc.} = \frac{1}{8}x^{-2}+\frac{1}{16}x^{-4}+\frac{41}{8024}x^{-6}\text{ etc.}$

$$Hxx = 2xxH\tfrac{1}{2}\left(x+\tfrac{1}{x}\right)-1$$

[29]
$$\frac{\partial \log.\left(\frac{1}{4}s+\frac{1}{16}s^3+\left[\frac{17}{512}s^5+\cdots\right]\right)}{\partial s} = \frac{1+\frac{3}{4}[s^2]+\frac{85}{128}[s^4]+\frac{315}{512}[s^6]\ldots}{s+\frac{1}{4}[s^3]+\frac{17}{128}[s^5]+\frac{45}{512}[s^7]\ldots}$$
$$= \left[\tfrac{1}{s}\right]\left(1+\tfrac{1}{2}[s^2]+\tfrac{13}{32}[s^4]+\tfrac{23}{64}[s^6]\ldots\right)$$

[6.]

[S. 13]

$$x = x$$

$$x' = (x+\sqrt{(xx-1)})^2$$

φ	$M\sin\varphi$	φ	$M\sin\varphi$	φ	[$M\sin\varphi$]
0	0				
5	0,4099431	35	0,7719980	65	0,9525779
10	0,5009995	40	0,8115373	70	0,9696118
15	0,5674713	45	0,8472130.8	75	0,9828890
20	0,6271771	50	0,8791266	80	0,9923894
25	0,6803557	55	0,9073216	85	0,9980965
30	0,7283955	60	0,93180839162	90	1,0000000

---

[30]
$$Me^x = 1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{3}{16}xx+\tfrac{5}{96}x^3+\tfrac{11}{1024}x^4+\cdots$$
$$e^{-\frac{1}{2}x}Me^x = 1+\tfrac{1}{16}xx+\tfrac{1}{3072}x^4+\tfrac{23}{737280}x^6+\cdots$$
$$= M\tfrac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{1}{2}x}\right)$$

[31] Si statuitur $M\sin\varphi = A-\alpha\cos 2\varphi-\beta\cos 4\varphi-\text{etc.}$

pro $\varphi =$	Erit $A - \gamma\cos 2\varphi - \zeta\cos 4\varphi$
0^0	0,6212056
15	0,7566142
30	0,7832460
45	0,7991911
60	0,8103679
75	0,8168167
90	0,8189303

$$\frac{1}{M\sin 60^\circ} = 1{,}0731820072.$$

[7.]

[S. 13]

[32] $$\frac{1}{4}s + \frac{1}{16}s^3 + \frac{17}{512}s^5 + \cdots = z$$

[33] 1) $$Ps = 1 + 4zz + 4z^4 \ast + 4z^8$$

[34] $$= (2z + 2z^9 + 2z^{25} + \ldots)^2 + (1 + 2z^4 + 2z^{16} + \ldots)^2$$

[35] 2) $$sPs = 2(2z + 2z^9 + \ldots) \times (1 + 2z^4 + 2z^{16} + \ldots)$$

[36] $$Px = 1 + \frac{1}{4}xx + \frac{1.9}{4.16}x^4 + \text{etc.}$$

[37] $$Mc = \frac{1}{Ps}$$

[38] $$Ms = \frac{\pi}{-2Ps \times \log.\left(\frac{1}{4}s + \frac{1}{16}s^3 + \frac{17}{512}s^5 + \frac{45}{2048}s^7 + \frac{18893}{196608}s^9\right)}$$

[39] $$\frac{Pc}{Ps} = -\frac{2}{\pi}\log.\left(\frac{1}{4}s + \frac{1}{16}s^3 + \text{etc.}\right)$$
$$= -\frac{2}{\pi}\log.\left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{16}t^3 + \frac{17}{512}t^5 - \frac{45}{2048}t^7 + \text{etc.}\right).$$

[8.]

[S. 14]

[40] Ponendo $P\cos\varphi = N + a\cos 2\varphi + b\cos 4\varphi + \text{etc.}$

erit

$$N = 1{,}393203$$
$$a = 0{,}581803$$
$$b = 0{,}309601$$
$$c = 0{,}209449$$
$$d = 0{,}157960$$
$$e = 0{,}126704$$

$$-\frac{1}{\pi}\log.(1 - \cos 2\varphi) = +0{,}220635$$
$$+0{,}636620\cos 2\varphi$$
$$+0{,}318310\cos 4\varphi$$
$$+0{,}212207\cos 6\varphi$$
$$+0{,}159155\cos 8\varphi$$
$$+0{,}127324\cos 10\varphi$$

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{5.5}{4.6}\cdot\frac{9.9}{8.10}\cdot\frac{13.13}{12.14}\text{ etc. in inf.}\right)^2$$

$$b = \frac{2}{9}N$$

$$N = \left(\frac{3.3.7.7.11.11.15}{2.4.6.8.10.12.14}\text{ etc. in inf.}\right)^2 = 2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi}$$

$$2aN = \frac{16}{\pi\pi} \qquad a = \frac{4}{\varpi\varpi}$$

$$\frac{\varpi}{\sqrt{8}} = \frac{4.6.8.10.12.14}{5.5.9.9.13.13}\text{ etc.}$$

$$\frac{\varpi}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{12}{13}\cdots$$

[9.]

[41] $$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)^2 x^6 + \text{etc.}$$
$$= \left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}\right)^2 x^4 + \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{9}{12}\right)^2 x^6 + \text{etc.}\right)^2.$$

Demonstratio.

Ponatur

$$1+\left(\frac{1}{4}\right)^2 x^4+\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{8}\right)^2 x^8+\text{etc.}=t$$

eritque, posito

$$x(x^4-1)\frac{d^2t}{dx^2}+(3x^4-1)\frac{dt}{dx}+x^3t=R,$$

$$R=0.$$

Hinc etiam

$$0=x\frac{dR}{dx}+R;$$

nec non

$$0=2xt\frac{dR}{dx}+2\left(t+3x\frac{dt}{dx}\right)R,$$

unde fit (evolutione facta)

$$0=xx(x^4-1)\left(2t\frac{d^3t}{dx^3}+6\frac{dt}{dx}\cdot\frac{d^2t}{dx^2}\right)+3x(3x^4-1)\left(2t\frac{d^2t}{dx^2}+2\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dt}{dx}\right)$$
$$+(19x^4-1)\,2t\frac{dt}{dx}+8x^3tt$$

sive ponendo $tt=u$

$$0=xx(x^4-1)\frac{d^3u}{dx^3}+3x(3x^4-1)\frac{d^2u}{dx^2}+(19x^4-1)\frac{du}{dx}+8x^3u,$$

cui aequationi invenitur respondere

$$u=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^4+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 x^8+\text{etc.}$$

[S. 15]

Iam quum

$$t=\frac{\sqrt{8}}{\pi}\int\frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)(1-x^4z^4)}}$$

a $z=0$ usque ad $z=1$, fit, pro $x=1$,

$$t=\frac{\sqrt{8}}{\pi}\cdot\frac{\varpi}{2}=\frac{\varpi}{\pi}\sqrt{2}$$

adeoque

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2+\cdots=2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi}.$$

Idem alio modo.

Valor seriei

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2+\text{etc.}$$

fit

$$=\frac{4}{\pi\pi}\iint\frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(1-\cos\varphi^2\cos\psi^2)}}$$

a $\varphi=0$ usque ad $\varphi=90^0$ et a $\psi=0$ usque ad $\psi=90^0$.

Faciendo itaque

$$\cos\varphi\cos\psi=\cos v,$$

idem valor fit

$$=\frac{4}{\pi\pi}\iint\frac{d\varphi\, dv}{\sqrt{(\cos\varphi^2-\cos v^2)}}$$

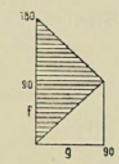
et quidem ab $v=0$ usque ad $v=90^0$ et a $\varphi=0$ usque ad $\varphi=v$. Denique statuendo

$$\varphi+v=f,\ v-\varphi=g$$

erit expressio nostra

$$=\frac{2}{\pi\pi}\iint\frac{df\, dg}{\sqrt{\sin f.\sin g}}$$

a $g=0$ usque ad $g=90^0$ et ab $f=g$ usque ad $f=180^0-g$. Sed haud difficulter probatur integrale eundem valorem nancisci, si sumatur ab $f=0$ usque ad $f=90^0$ et a $g=0$ usque ad $g=90^0$, unde ipsius valor deducitur



$$=2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi},$$

uti supra.

[V.]

[THEORIA SINUS LEMNISCATICI UNIVERSALISSIME ACCEPTI.]

[Aus der Scheda Ac, Varia Novbr. 1799, S. 26 ff.

[1.]

[S. 26]

Problema.

Ponendo

$$\frac{du}{\sqrt{(1+\mu\cos u)}} = d\varphi,$$

ita ut sit

$$\varphi = u + A'\sin u + A''\sin 2u + A'''\sin 3u \text{ etc.},$$

invenire u per seriem talem

$$u = \varphi + \alpha'\sin\varphi + \alpha''\sin 2\varphi + \alpha'''\sin 3\varphi \text{ etc.}$$

---

[1] $$\frac{\pi}{M\sqrt{(1+\mu\mu)}} = \varpi, \quad \frac{\pi}{\mu M\sqrt{\left(1+\frac{1}{\mu\mu}\right)}} = \varpi'$$

[2] $$Sn\varpi = \frac{\pi}{\mu\varpi}\left(\frac{4\sin n\pi}{e^{\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} + e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} - \frac{4\sin 3n\pi}{e^{\frac{3}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} + e^{-\frac{3}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} + \text{etc.}\right).$$

[2.]

[S. 26]

[3] $$S\varphi = \frac{T\varphi}{W\varphi}, \quad T\,90^0 = \sqrt{\cos v}, \quad (\operatorname{tg} v = \mu)$$

[4] $$W\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\sqrt[4]{\frac{1}{1+\mu\mu}}\left\{1 + \frac{2\cos 2n\pi}{e^{\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} + \frac{2\cos 4n\pi}{e^{4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} + \text{etc.}\right\},$$

[5] $$\left[\sqrt[4]{\frac{1}{1+\mu^2}}\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\right] = \sqrt{M}\cos v$$

[6] $$T\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\sqrt[4]{\frac{1}{\mu\mu(1+\mu\mu)}}\left\{\frac{2\sin n\pi}{e^{\frac{1}{4}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} - \frac{2\sin 3n\pi}{e^{\frac{9}{4}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} + \text{etc.}\right\}$$

Terminus Constans $(Sn\varpi)^2$

[7] $$= \frac{8\pi\pi}{\mu\mu\varpi\varpi}\left\{\frac{e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} + 4e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} + 9e^{-9\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} + \cdots}{1 + 2e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} + 2e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} + \cdots}\right\}.$$

[S. 29]

[8] $$\frac{1}{\sin\operatorname{lemn}\varphi} = \frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{4}{e^{\pi}+1}\sin\varphi - \frac{4}{e^{3\pi}+1}\sin 3\varphi - \frac{4}{e^{5\pi}+1}\sin 5\varphi - \text{etc.}\right)$$

[9] $$\begin{aligned}\frac{1}{P\varphi} = \frac{\pi}{\varpi}\Big(\frac{1}{\sin\varphi} &- 4(e^{-2\pi} - e^{-6\pi} + e^{-12\pi} - \text{etc.})\sin\varphi \\ &- 4(e^{-4\pi} - e^{-10\pi} + e^{-18\pi} - \text{etc.})\sin 3\varphi \\ &- 4(e^{-6\pi} - e^{-14\pi} + e^{-24\pi} - \text{etc.})\sin 5\varphi \\ &\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\Big)\end{aligned}$$

[3.]

S. 31]

[10] $$\begin{aligned}(T\varphi)^2 = A\Big(1 &+ 2e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 4\varphi + 2e^{-8\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 8\varphi + \text{etc.}\Big) \\ &- 2B\Big(e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 2\varphi + e^{-\frac{9}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 6\varphi + \text{etc.}\Big),\end{aligned}$$

[11] $$A = \frac{\cos v\sqrt{M\cos v}}{2\cos\frac{1}{2}v}, \quad B = \frac{\cos v\sqrt{M\cos v}}{2\sin\frac{1}{2}v},$$

[12] $$(W\varphi)^2 = C\Big(1 + 2e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 4\varphi + \text{etc.}\Big) + 2D\Big(e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 2\varphi + \text{etc.}\Big)$$

[13]
$$\begin{cases} C = \dfrac{(1+\cos v)\sqrt{M\cos v}}{2\cos\frac{1}{2}v} = \cos\tfrac{1}{2}v\sqrt{M\cos v}, \\ D = \dfrac{(1-\cos v)\sqrt{M\cos v}}{2\sin\frac{1}{2}v} = \sin\tfrac{1}{2}v\sqrt{M\cos v}, \end{cases}$$

[14]
$$(1-\cos v)(T\varphi)^2 + \cos v\,(W\varphi)^2$$
$$= \frac{\cos v}{\cos\frac{1}{2}v}\sqrt{M\cos v}\Big(1 + 2e^{-\frac{2\varpi'}{\varpi}\pi}[\cos 4\varphi] + \cdots\Big),$$

[15]
$$-(1+\cos v)(T\varphi)^2 + \cos v\,(W\varphi)^2$$
$$= \frac{2\cos v}{\sin\frac{1}{2}v}\sqrt{M\cos v}\Big(e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 2\varphi + \cdots\Big),$$

[16]
$$\begin{cases} (T([\tfrac{1}{2}]\varpi-\varphi))^2 = \cos v\,((W\varphi)^2-(T\varphi)^2), \\ (W([\tfrac{1}{2}]\varpi-\varphi))^2 = \dfrac{\sin v^2\,(T\varphi)^2+\cos v^2\,(W\varphi)^2}{\cos v}, \end{cases}$$

[17]
$$T\varphi\,W([\tfrac{1}{2}\varpi-]\varphi)$$
$$= \left[\frac{\sqrt{2\cos v\,.\,M\cos v}}{\sqrt[4]{\sin v}}\right]\left\{2e^{-\frac{1}{8}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\sin\varphi - 2e^{-\frac{9}{8}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\sin 3\varphi + 2e^{-\frac{25}{8}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\sin\varphi - \text{etc.}\right\}.$$

[S. 32]
$$(S\varphi)^2 = P + 2Q\left\{\frac{\cos 2\varphi}{e^{\frac{\pi\varpi'}{\varpi}} - e^{-\frac{\pi\varpi'}{\varpi}}} - \frac{2\cos 4\varphi}{e^{2\frac{\varpi'\pi}{\varpi}} - e^{-2\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}} + \frac{3\cos 6\varphi}{\left[e^{3\frac{\varpi'\pi}{\varpi}} - e^{-3\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}\right]} - \cdots\right\}.$$

[4.]

[S. 33]

Aequationis
$$\frac{dx}{\sqrt{(1+\mu\mu xx)(1-xx)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1+\mu\mu yy)(1-yy)}} = 0$$
integrale completum est
$$\frac{y\sqrt{(1+\mu\mu xx)(1-xx)} + x\sqrt{(1+\mu\mu yy)(1-yy)}}{1+\mu\mu xxyy} = \text{Const.}$$

Statuendo itaque
$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+\mu\mu xx)(1-xx)}} = u$$
atque
$$\begin{aligned} x &= Fu \\ 1 &= F\tfrac{1}{2}\Pi \\ y &= Fw \\ x' &= F(\tfrac{1}{2}\Pi - u) \\ y' &= F(\tfrac{1}{2}\Pi - w) \end{aligned}$$
fit
$$1)\quad \frac{y\sqrt{1+\mu\mu xx\,.\,1-xx} + x\sqrt{1+\mu\mu yy\,.\,1-yy}}{1+\mu\mu xxyy} = F\overline{u+w}.$$
Quare faciendo $y = 1$ fit
$$\sqrt{\frac{1-xx}{1+\mu\mu xx}} = F(\tfrac{1}{2}\Pi + u) = F(\tfrac{1}{2}\Pi - u) = Gu = x'$$
atque
$$1 = xx + x'x' + \mu\mu xxx'x' \quad .\ .\ .\ \mathrm{I}$$
$$\frac{yx' + xy' + \mu\mu xx'(xy + x'y')}{1+\mu\mu xxyy} = F\overline{u+w}.$$

[5.]

[S. 34]

Sit

[18]
$$\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\cdot\frac{M\cos\varphi}{M\sin\varphi}}} = z$$

[19]
$$1 + 2z^4 + 2z^{16} + 2z^{36} + \cdots = p$$

[20]
$$2z + 2z^9 + 2z^{25} + \cdots \qquad = q$$

eritque

[21]
$$\begin{cases} \dfrac{1}{M\cos\varphi} = pp + qq \\ \dfrac{\sin\varphi}{M\cos\varphi} = 2pq \\ \dfrac{\cos\varphi}{M\cos\varphi} = pp - qq \end{cases}$$

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi$$

[22]
$$\left\{ \begin{aligned} \varpi &= \frac{\pi \cos \varphi}{M \cos \varphi}, \\ \varpi' &= \frac{\pi \cos \varphi}{M \sin \varphi}, \end{aligned} \right.$$

[23]
$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{M \frac{pp - qq}{pp + qq}}{M \frac{2pq}{pp + qq}} = \log . \frac{1}{z}$$

[24]
$$\frac{\cos \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{M \cos \varphi}} = p, \quad \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi}{\sqrt{M \cos \varphi}} = q.$$

Si ψ ita accipitur, ut sit

$$\sin \psi = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} \varphi^2,$$

erit

[25]
$$\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{M \cos \psi}{M \sin \psi}}} = z^2$$

[26]
$$\left\{ \begin{aligned} p' &= \tfrac{1}{2} \sqrt{(pp + qq)} + \tfrac{1}{2} \sqrt{(pp - qq)} \\ q' &= \tfrac{1}{2} \sqrt{(pp + qq)} - \tfrac{1}{2} \sqrt{(pp - qq)} \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{aligned} \right.$$

[6.]

[S. 35]

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - \mu\mu \sin \varphi^2)}} = A - 2 A' \cos 2 \varphi + 2 A'' \cos 4 \varphi - \text{etc.}$$

$$A = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \mu\mu + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4} \mu^4 + \frac{1.1.3.3.5.5}{2.2.4.4.6.6} \mu^6 + \text{etc.}$$

$$A' = \frac{1}{8} \mu^2 + \frac{3}{32} \mu^4 + \frac{75}{1024} \mu^6 \ldots$$

$$\frac{\partial A' \mu\mu}{\partial \mu} = \frac{1}{2} \mu^3 + \frac{1.1.3.3}{2.2.4.4} \mu^5 \times 4 + \cdots = \mu\mu \frac{\partial A}{\partial \mu}.$$

[7.]

[S. 37]

$$\operatorname{sl} n \varpi = \text{t[ang]}\ u \pi$$

$$\frac{\pi}{\varpi} du = \operatorname{cl} n \varpi dn$$

$$\operatorname{cl} n \varpi = \frac{\pi}{\varpi} \left(\frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi} + e^{-\frac{1}{2}\pi}} \text{c[o]s}\ n \pi + \cdots \right)$$

$$\pi u = \frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi} + e^{-\frac{1}{2}\pi}} \sin n \pi + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi} + e^{-\frac{3}{2}\pi}} \sin 3 n \pi + \text{etc.}$$

Dem[onstratum.]

$$1 + 2p \cos \varphi + 2pp \cos 2 \varphi + \text{etc.} = \frac{\frac{1}{p} - p}{\frac{1}{p} + p - 2 \cos \varphi}$$

$$1 - 2p \cos \varphi + 2pp \cos 2 \varphi - \text{etc.} = \frac{\frac{1}{p} - p}{\frac{1}{p} + p + 2 \cos \varphi}$$

$$p \cos \varphi + p^3 \cos 3 \varphi + \text{etc.} = \frac{\left(\frac{1}{p} - p\right) \cos \varphi}{\left(\frac{1}{p} + p\right)^2 - 4 \cos \varphi^2}$$

$$2p \sin \varphi + \frac{2}{3} p^3 \sin 3 \varphi + \text{etc.} = \operatorname{Arctg} \frac{2 \sin \varphi}{\frac{1}{p} - p}$$

$$\frac{1}{2} \pi u = \operatorname{Arctg} \frac{2 \sin \varphi}{e^{\frac{1}{2}\pi} - e^{-\frac{1}{2}\pi}} - \operatorname{Arctg} \frac{2 \sin \varphi}{e^{\frac{3}{2}\pi} - e^{-\frac{3}{2}\pi}} + \text{etc.}$$

[8.]

[S. 37]

Problema.

Summare seriem

$$\left(\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right)^2+\left(\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{x^3+\frac{1}{x^3}}\right)^2\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{xx}+\frac{4}{x^8}+\frac{9}{x^{18}}+\frac{16}{x^{32}}\cdots}{1+\frac{2}{xx}+\frac{2}{x^8}+\frac{2}{x^{18}}\cdots}$$

[S. 38]

$$'S\varphi=\frac{1}{GS\varphi+H\frac{1}{S\varphi}}\qquad\qquad \sin v=\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}{}'v^2$$

1) $G+H=1$

2) $\sqrt{\left(\frac{1}{\sin{}'v\operatorname{tang}{}'v}-\frac{1}{\operatorname{tang}{}'v}\right)}\times\sqrt{\left(\frac{1}{\sin v\operatorname{tg}v}-\frac{1}{\operatorname{tg}v}\right)}\times$

$$\left(G+H\frac{1}{\frac{1}{\sin v\operatorname{tg}v}-\frac{1}{\operatorname{tg}v}}\right)=1$$

$$\frac{1+\cos{}'v}{2}=H$$
$$\frac{1-\cos{}'v}{2}=G.$$

[S. 39]

$$\operatorname{sl}\left(\tfrac{1}{2}\varpi+(\tfrac{1}{2}+k)\varpi'\varepsilon\right)=-\operatorname{cl}(\tfrac{1}{2}+k)\varpi'\varepsilon$$
$$=-\frac{1}{c'(\frac{1}{2}+k)\varpi'}=\frac{1}{s'k\varpi'}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sl}\left(\frac{1}{2}\varpi+(\frac{1}{2}+k)\varpi'\varepsilon\right)+u}=s'(k\varpi'-u\varepsilon)$$

$$\frac{\partial s}{\partial\varphi}=\sqrt{(1-xx)}\sqrt{\left(1+\frac{xx}{\mu\mu}\right)}$$

$$\begin{array}{l|c|l}
\frac{1}{2}\varpi+\left(\frac{1}{2}+k\right)\varpi'\varepsilon & 0 & \frac{1}{2}\left(e^{\left(\frac{1}{2}+k\right)\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+e^{-\left(\frac{1}{2}+k\right)\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\right)\\
\frac{1}{2}\varpi+\left(\frac{1}{2}+k\right)\varpi'\varepsilon+u & \mp u\varepsilon & \ldots\ldots\qquad +\nu
\end{array}$$

$$(P\varphi)^2=\frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{7}{4}}\cos\frac{1}{8}\pi}\left(1+2e^{-2\pi}\cos4\varphi+2e^{-8\pi}\cos8\varphi+\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{7}{4}}\sin\frac{1}{8}\pi}\left(2e^{-\frac{1}{2}\pi}\cos2\varphi+2e^{-\frac{9}{2}\pi}\cos6\varphi+2e^{-\frac{25}{2}\pi}\cos10\varphi+\text{etc.}\right)$$

$$(Q\varphi)^2=2^{\frac{3}{4}}\cos\tfrac{1}{8}\pi\sqrt{\tfrac{\pi}{\varpi}}\left(1+2e^{-2\pi}\cos4\varphi+\cdots\right)$$
$$+2^{\frac{3}{4}}\sin\tfrac{1}{8}\pi\sqrt{\tfrac{\pi}{\varpi}}\left(2e^{-\frac{1}{2}\pi}\cos2\varphi+\text{etc.}\right)$$

[9.]

[S. 40]

Series

$$1-x-x^3+x^6+x^{10}-\text{etc.}$$

produci videtur ex evolutione producti infiniti

$$(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9)\ldots(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12})\ldots$$

Ponendo

$$(1-z)(1-zz)(1-z^3)\ldots=\Pi z$$

erit

1) $\frac{\Pi z\,\Pi z^4}{\Pi z^2}=1-z-z^3+z^6+z^{10}\ldots$

2) $\frac{\Pi z\,\Pi z}{\Pi z^2}=1-2z+2z^4-2z^9+2z^{16}-\text{etc.}$

3) $\frac{(\Pi zz)^2}{\Pi z}=1+z+z^3+[z^6+z^{10}+\ldots]$

$$(\Pi z)^3=(1-z-z^3+z^6+z^{10}\ldots)(1-2z+2z^4-2z^9+2z^{16}\ldots)(1-2z^2+2z^8-2z^{18}\ldots)$$
$$=(1+z+z^3+z^6\ldots)(1-2z+2z^4\ldots)^2$$

$$p = \frac{(\Pi(-z^4))^2}{\Pi z^8}\,; \quad q = \frac{2z\,\Pi(-z^8)\,\Pi z^{32}}{\Pi z^{16}} = \frac{2z(\Pi z^{16})^2}{\Pi z^8}$$

$$\begin{array}{rcl|rcl} p-q &=& \dfrac{\Pi z.\Pi z}{\Pi z^2} & q &=& \dfrac{2z\,\Pi z^{16}\,\Pi z^{16}}{\Pi z^8} \\ p+q &=& \dfrac{\Pi(-z)\,\Pi(-z)}{\Pi zz} & p &=& \dfrac{(\Pi z^8)^3}{(\Pi z^4)^2(\Pi z^{16})^2} \\ \dfrac{\Pi z\,\Pi(-z)}{\Pi zz} &=& \dfrac{\Pi zz\,\Pi zz}{\Pi z^4} & p-q &=& \dfrac{\Pi z\,\Pi z}{\Pi zz} \\ & & & p+q &=& \dfrac{(\Pi zz)^3}{(\Pi z)^2(\Pi z^4)^2} \end{array}$$

$$\frac{1}{M\cos\varphi} = \frac{(\Pi z^4)^6}{(\Pi zz)^4} \quad \textit{Demonstr.}$$

[10.]

[S. 41]

Si

$$(1-\alpha^2z^2)(1-\alpha^2z^4)(1-\alpha^2z^6)\ldots\left(1-\frac{1}{\alpha^2}z^2\right)\left(1-\frac{1}{\alpha^2}z^4\right)\cdots$$
$$\times\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)$$

producere supponitur

$$P\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+Q\left(\alpha^3-\frac{1}{\alpha^3}\right)+R\left(\alpha^5-\frac{1}{\alpha^5}\right)\cdots,$$

producet

$$(1-\alpha^2z^4)(1-\alpha^2z^6)\cdots\times\left(1-\frac{1}{\alpha\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\alpha^2}zz\right)\cdots\times\left(\alpha z-\frac{1}{\alpha z}\right)$$
$$P\left(\alpha z-\frac{1}{\alpha z}\right)+Q\left(\alpha^3z^3-\frac{1}{\alpha^3z^3}\right)+\text{etc.}$$

Quare

$$\frac{1-\alpha\alpha zz}{1-\frac{1}{\alpha\alpha}}\left(P\left(\alpha z-\frac{1}{\alpha z}\right)+Q\left(\alpha^3z^3-\frac{1}{\alpha^3z^3}\right)+\text{etc.}\right)\times\frac{\alpha-\frac{1}{\alpha}}{\alpha z-\frac{1}{\alpha z}}$$
$$=P\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)+Q\left(\alpha^3-\frac{1}{\alpha^3}\right)\cdots$$

Hinc sequitur

$$Q = zzP,\quad R = z^4Q,\quad S = z^6R \text{ etc.}$$

$$\frac{(\Pi z^4)^6}{(\Pi zz)^4} = \frac{1}{M\cos\zeta};\quad \frac{(\Pi y^4)^6}{(\Pi yy)^4} = \frac{1}{M\cos\eta}\ [^*)]$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\dfrac{(\Pi y^2)^6(\Pi z)^4}{(\Pi z^2)^6(\Pi y)^4} = -\dfrac{\log z}{\pi} = -\dfrac{\pi}{\log y} \\ \log y\log z = \pi\pi\end{array}}$$

[11.]

[S. 42]

$$\begin{aligned}(P\varphi)^2 &= 0{,}3522376226\ \ 6118372314 && = A\\ &-0{,}3535519576\ \ 3585935635\cos\ 2\varphi && = 2B[e^{-\frac{1}{2}\pi}]\\ &+0{,}0013155679\ \ 2352259042\cos\ 4\varphi && = 2Ae^{-2\pi}\\ &-0{,}0000012329\ \ 5741446398\cos\ 6\varphi && = 2B[e^{-\frac{1}{2}\pi}]e^{-4\pi}\\ &+0,\ldots\ldots\ldots\ 0856752170\cos\ 8\varphi && = 2Ae^{-8\pi}\\ &-0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1494\cos 10\varphi && = 2B[e^{-\frac{1}{2}\pi}]e^{-12\pi}\end{aligned}$$

$$(P\varphi)^2 = A(1+2e^{-2\pi}\cos 4\varphi+2e^{-8\pi}\cos 8\varphi+2e^{-18\pi}\cos 12\varphi\ \text{etc.})$$
$$-2B(e^{-\frac{1}{2}\pi}\cos 2\varphi+e^{-\frac{9}{2}\pi}\cos 6\varphi+e^{-\frac{25}{2}\pi}\cos 10\varphi\ \text{etc.})$$

$$B = (1+\sqrt{2})A,\qquad A = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{\cos 22\tfrac{1}{2}^\circ\sqrt{8}[\sqrt[4]{2}]}.$$

[S. 43]

$$0 = \frac{2^{\frac{1}{4}}\cos 0{,}25}{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}A-\frac{2^{\frac{1}{4}}\sin 0{,}25}{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}B$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2^{\frac{1}{4}}\cos 0{,}25}{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}A+\frac{2^{\frac{1}{4}}\sin 0{,}25}{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}B$$

$$A = 2^{-\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{\cos 0{,}25},\quad B = 2^{-\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{\sin 0{,}25}.$$

[*) In der Handschrift steht links vom Gleichheitszeichen beidemal M statt Π.]

[12.]

Si

$$(1+\alpha x)(1+\alpha x^3)(1+\alpha x^5)\ldots\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\left(1+\frac{x^3}{\alpha}\right)\left(1+\frac{x^5}{\alpha}\right)\cdots = K$$

supponitur producere

$$+\frac{R}{\alpha\alpha}+\frac{Q}{\alpha}+P+Q\alpha+R\alpha\alpha+\cdots,$$

producet

$$(1+\alpha x^3)(1+\alpha x^5)\ldots\left(1+\frac{1}{\alpha x}\right)\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\cdots = K\times\frac{1+\frac{1}{\alpha x}}{1+\alpha x}\,[^*)]$$

$$\cdots+\frac{R}{x^4}\frac{1}{\alpha\alpha}+\frac{Q}{xx}\frac{1}{\alpha}+P+Qxx\alpha+Rx^4\alpha\alpha+\cdots$$

Quare]

$$[K] = \cdots\frac{R}{x^3}\cdot\frac{1}{\alpha}+\frac{Q}{x}+Px\alpha+Qx^3\alpha\alpha+\text{etc.}$$

$$= \cdots Q\left[\frac{1}{\alpha}+\right]P[+]\,Q\,[\alpha+]\,R\,[\alpha\alpha+\cdots]$$

$$= P\left(1+x\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+x^4\left(\alpha\alpha+\frac{1}{\alpha\alpha}\right)+x^9\left(\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}\right)\cdots\right).$$

Si ex quadrato [ipsius K] prodit

$$+\frac{Q}{\alpha}+P+Q\alpha\ \text{etc.},$$

erit

$$\left[\cdots+\right]\frac{P}{xx\alpha\alpha}[+]\frac{Q}{xx\alpha}[+]\frac{R}{xx}[+]\frac{S}{xx}\alpha[+]\frac{T}{xx}[\alpha\alpha+\cdots]$$

$$[=\cdots+]\frac{R}{x^4\alpha\alpha}[+]\frac{Q}{xx\alpha}[+]\,P[+]\,Qxx\alpha[+]\,Rx^4[\alpha\alpha+\cdots]$$

[Quare]

$$[K^2=]\,P[+]\,Q\left[\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\right]Pxx\left[\left(\alpha\alpha+\frac{1}{\alpha\alpha}\right)+\right]Qx^4\left[\left(\alpha^3+\frac{1}{\alpha^3}\right)+\right]$$

$$Px^8\left[\left(\alpha^4+\frac{1}{\alpha^4}\right)+\right]Qx^{12}\left[\left(\alpha^5+\frac{1}{\alpha^5}\right)+\right]Px^{18}\left[\left(\alpha^6+\frac{1}{\alpha^6}\right)+\text{etc.}\right]$$

[*) In der Handschrift stehen links vom Gleichheitszeichen statt der positiven Vorzeichen negative.]

[13.]

[S. 45]

$$T=0 \qquad \varphi = k\varpi+\tfrac{1}{2}l\varpi'\sqrt{-1}$$

$$W=0 \qquad \varphi = (k+\tfrac{1}{2})\varpi+(l+\tfrac{1}{2})\varpi\sqrt{-1}$$

$$Tn\varpi = \frac{\varpi}{\pi}\sin n\pi\left(1+\frac{4\sin n\pi^2}{\left(e^{\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\right)^2}\right)\left(1+\frac{4\sin n\pi^2}{\left(e^{2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\right)^2}\right)\cdots$$

$$Qn\varpi = \left(1-\frac{4\sin n\pi}{\left(e^{\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+e^{\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\right)^2}\right)\cdots$$

$$\sin\varphi\left(1-\frac{2\cos\varphi}{x+x^{-1}}\right)\left(1+\frac{2\cos\varphi}{x+x^{-1}}\right)\left(1-\frac{2\cos\varphi}{xx+x^{-2}}\right)\left(1+\cdots\right)\text{etc.}$$

$$=\frac{\frac{\sin\varphi}{x^{\frac{1}{4}}}-\frac{\sin 3\varphi}{x^{\frac{9}{4}}}+\frac{\sin 5\varphi}{x^{\frac{25}{4}}}\cdots}{\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}+\frac{1}{x^{\frac{9}{4}}}+\frac{1}{x^{\frac{25}{4}}}\cdots}$$

[S. 46]

$$\left(1-\frac{2\cos 2\varphi}{xx+\frac{1}{xx}}\right)\left(1-\frac{2\cos 2\varphi}{x^6+\frac{1}{x^6}}\right)\left(1-\frac{2\cos 2\varphi}{x^{10}+\frac{1}{x^{10}}}\right)\text{ etc.}$$

$$=\frac{1-\frac{2\cos 2\varphi}{xx}+\frac{2\cos 4\varphi}{x^8}-\frac{2\cos 6\varphi}{x^{18}}+\text{etc.}}{1+\frac{2}{x^8}+\frac{2}{x^{32}}+\text{etc.}}$$

$$\frac{x^4+1}{x^4+2xx+1}\cdot\frac{x^{12}+1}{x^{12}+2x^6+1}\cdots=\frac{1-\frac{2}{x^8}+\frac{2}{x^{32}}-\text{etc.}}{1+\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^8}+\text{etc.}}$$

$$1+2y+2y^4+2y^9+\cdots=\frac{(1+y)^2(1+y^3)^2(1+y^4)^2(1+y^5)^2(1+y^7)^2\ldots}{(1+yy)(1+y^6)(1+y^8)(1+y^{10})(1+y^{14})\ldots}.$$

[14.]

[S. 81]

$$x = e^{\frac{1}{2}\frac{\varpi\pi}{\varpi'}}\,;\quad \alpha = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$T\varphi = \frac{\varpi}{\pi}\sin\varphi\,\frac{(1-x^4\alpha^2)(1-x^8\alpha^2)(1-x^{12}\alpha^2)\ldots\left(1-\frac{x^4}{\alpha^2}\right)\left(1-\frac{x^8}{\alpha^2}\right)\left(1-\frac{x^{12}}{\alpha^2}\right)\text{etc.}}{(1-x^4)^2(1-x^8)^2(1-x^{12})^2\text{ etc.}}$$

$$W\varphi = \frac{(1+xx\alpha\alpha)(1+x^6\alpha\alpha)(1+x^{10}\alpha\alpha)\ldots\left(1+\frac{x^2}{\alpha\alpha}\right)\left(1+\frac{x^6}{\alpha^2}\right)\left(1+\frac{x^{10}}{\alpha^2}\right)\text{etc.}}{(1+x^2)^2(1+x^6)^2(1+x^{10})^2\text{ etc.}}.$$

Functiones Lemniscaticas considerare
cöperamus 1797. Januar. 8.

[VI.]

DIFFERENTIATIO MEDIORUM ARITH[METICO]-GEOM[ETRICORUM].

[Aus Scheda Ae, Varia, Julius 1800, S. 6.]

1.

Quum pro valore quocunque ipsius n sit

$$M(x+nx,\ y+ny) = M(x\,y) + n\,M(x,y)$$

erit differentiando secundum n

$$\frac{dM(x+nx,y+ny)}{dn} = \frac{dM(x+nx,y+ny)}{d(x+nx)}\cdot\frac{d(x+nx)}{dn}$$

$$+\frac{dM(x+nx,y+ny)}{d(y+ny)}\cdot\frac{d(y+ny)}{dn} = M(x,y)$$

sive

$$\frac{x\,dM(x,y)}{dx} + \frac{y\,dM(x,y)}{dy} = M(x,y).$$

2.

Porro fit

(1) $$\frac{dM(x,y)}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dM(x,y)}{dx'} + \frac{1}{2}\frac{y'}{x}\frac{dM(x,y)}{dy'}$$

(2) $$\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{1}{2}\frac{dM(x,y)}{dx'} + \frac{1}{2}\frac{y'}{y}\frac{dM(x,y)}{dy'}.$$

Hinc ex (1)

$$\frac{dM(x,y)}{dx} = \frac{1}{2}\frac{M}{x} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{x'}{x}\right)\frac{dM(x',y')}{dx'}$$

$$= M\left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{4}\frac{1}{xx'}(x-x') + \frac{1}{8}\frac{1}{xx'x''}(x-x')(x'-x'')\ldots\right)$$

$$\frac{dM(x,y)}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{x} + \frac{2x'(x'x'-y'y')}{x(xx-yy)}\cdot\frac{dM(x',y')}{dx'}$$

$$= \frac{M}{2x}\left(1 + \frac{2(x'x'-y'y')}{xx-yy} + \frac{4(x''x''-y''y'')}{xx-yy}\cdots\right)$$

$$\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{x'} + \frac{1}{2}\left(\frac{y'}{y} - \frac{y'}{x'}\right)\frac{dM(x',y')}{dy'}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{x'} + \frac{2y'}{y}\cdot\frac{x'x'-y'y'}{xx-yy}\cdot\frac{dM(x',y')}{dy'}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{M}{x'}\left(1 + 2\,\frac{y'(x'x'-y'y')}{y(xx-yy)} + 4\,\frac{y''(x''x''-y''y'')}{y(xx-yy)}\cdots\right)$$

$$dM(x,y) = M \times \begin{array}{l} dx \times \frac{1}{2x(xx-yy)}\,\{xx-yy+2(x'x'-y'y')+4(\ldots\quad\} \\ dy \times \frac{1}{2y(xx-yy)}\,\{xx-yy-2(x'x'-y'y')-4(\ldots\quad\} \end{array}$$

[VII.]

ALGORITHMI AD MEDIA AR[ITHMETICO]-GE[OMETRICA] PERTINENTES.

[Aus Scheda Af, Mémoires de Mathematique, Bronsuie 1801.]

[1.]

[S. 11]

$$\begin{array}{ll} a & b \\ a' = \tfrac{1}{2}(a+b) & b' = \sqrt{ab} \\ a'' = \tfrac{1}{2}(a'+b') & b'' = \sqrt{a'b'} \\ a''' = \tfrac{1}{2}(a''+b'') & b''' = \sqrt{a''b''} \end{array}$$

etc.

$$a^{\infty} = b^{\infty} = M(a,b)$$

$$\begin{array}{ll} A = a & B = \sqrt{(aa-bb)} \\ A' = \tfrac{1}{2}(A+B) & B' = \sqrt{AB} \\ A'' = \tfrac{1}{2}(A'+B') & B'' = \sqrt{A'B'} \\ A''' = \tfrac{1}{2}(A''+B'') & B''' = \sqrt{A''B''} \end{array}$$

etc.

$$A^{\infty} = B^{\infty} = M(A,B)$$

$$\boxed{4(a'-b')(a'+b') = 8(a'-b')a'' = (a-b)^2}$$

[2.]

[1] $$z = \frac{1}{4}\,\frac{B}{A}\,\frac{a}{a'}\sqrt{\frac{a'}{a''}}\sqrt[4]{\frac{a''}{a'''}}\cdots = \frac{\frac{1}{4}B}{\sqrt{(a'\sqrt{(a''\sqrt{(a'''\sqrt{(a^{\mathrm{IV}}\ldots\sqrt{(a^{n}\ldots a^{\infty})})})})})}}$$

$$\log z = \log B - \log 4 - \tfrac{1}{2}(\log a' + \tfrac{1}{2}(\log a'' + \tfrac{1}{2}(\log a''' + \tfrac{1}{2}(\log a^{\mathrm{IV}} + \cdots$$
$$\cdots + \tfrac{1}{2}(\log a^{n} + \cdots + \log a^{\infty}))))$$

[2] $$z = e^{-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{M(a,b)}{M(A,B)}}$$

[3] $$\log \text{brigg}\left(\log\frac{1}{z}\right) + 0{,}1660958116 = \log M(a,b) - \log M(A,B)$$

[4] $$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial B(M(a,b))^2}{Bbb} = \frac{\pi}{2}\,\frac{M(a,b)\,\partial M(A,B) - M(A,B)\,\partial M(a,b)}{M(A,B)^2}$$

[5] $$ff = \frac{z\partial B}{Bbb\partial z}$$

$$2ff' = \frac{1}{Bbb} - \frac{z\partial B}{BBbb\partial z} + \frac{2z\partial B}{b^4\partial z} -$$

[3.]

$$1 + 2zz + 2z^8 + 2z^{18}\ldots = p = \sqrt{\frac{a}{M(a,b)}},$$

$$1 - 2zz + 2z^8 - 2z^{18}\ldots = q = \sqrt{\frac{b}{M(a,b)}},$$

$$2z^{\frac{1}{2}} + zz^{\frac{9}{2}} + 2z^{\frac{25}{2}} + \text{etc.} = r = \sqrt{\frac{B}{M(a,b)}}.$$

$$p^4 = q^4 + r^4$$

$$p^4 - 2r^4 = q^4 - r^4 = 2q^4 - p^4 = 1 - 24\left(\frac{zz}{1+zz} + \frac{3z^6}{1+z^6} + \frac{5z^{10}}{1+z^{10}} + \text{etc.}\right)$$
$$= 1 - 12z\,\frac{\partial(1+zz)(1+z^6)(1+z^{10})\ldots}{(1+zz)(1+z^6)(1+z^{10})\ldots}$$

$$\text{illud productum} = \sqrt[6]{\frac{2z^{\frac{1}{4}}pp}{qr}} = \sqrt[6]{\frac{2z^{\frac{1}{4}}a}{\sqrt{bB}}} = \sqrt[12]{\frac{4zaa}{bB}}.$$

[4.]

[S. 12]

[6] $$\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial B}{Bbbff} = \frac{2\partial\varphi}{\sin 2\varphi.ff}$$

[7] $$\log z = -\frac{\pi}{2}\cdot\frac{F}{f}$$

$$F = -\frac{2}{\pi}f\log z$$

$$\frac{\partial^2 z}{z\partial B^2} - \frac{\partial z^2}{zz\partial B^2} = \frac{1}{Bbbff}$$

$$-\frac{\partial z^2}{zz\partial B^2} - \frac{\partial z\partial^2 B}{z\partial B^3} = \frac{1}{Bbbff}$$

$$\frac{B''}{zB'^3} + \frac{1}{zzB'^2} + \frac{1}{Bbbff} = 0$$

[8] $$zB'' + B' + \frac{zzB'^3}{Bbbff}\;[=0]$$

$$\partial\frac{rr}{pp} = \frac{2r}{p^3}(p\partial r - r\partial p)$$

$$q^4 = \frac{2z}{pr\partial z}(p\partial r - r\partial p)$$

$$B' = \frac{q^4 rr}{pp} = bbffB$$

---

[9] $$\begin{cases} f = \mathrm{A}(1 + \frac{1}{4}xx + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^4\ldots) \\ \quad + \mathrm{B}(x^{-1} + \frac{1}{4}x^{-3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^{-5}\ldots) \end{cases}$$

[10] $$-\frac{\pi}{2}(fF' - Ff') = \frac{1}{Bbb}$$

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{2\partial\varphi}{\sin 2\varphi.ff},$$

[11] $$z = \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi.ff\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

$$\log z = \frac{1}{ff}\log\text{tang}\,\varphi + \int\log\text{tang}\,\varphi\,\frac{f'}{f^3}\,[2d\varphi]$$

[12] $$(x^3 - x)f'' + (3xx - 1)f' + xf = 0.$$

[5.]

[S. 13]

Observatio

$$\frac{\text{Med. inter 1 et } \sqrt{2}-1}{\text{Med. inter 1 et } \sqrt{(2\sqrt{2}-2)}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Theorema.

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z^2}\cdot zz + \frac{\partial m}{\partial z}\cdot z + \frac{ss}{m^3} = 0$$

$$\left[\frac{ss}{m^3}\right] = r^4 m$$

$$m = \frac{1}{pp}, \quad m' = -\frac{2p'}{p^3}, \quad m'' = \frac{6p'p'}{p^4} - \frac{2p''}{p^3}$$

$$-2p''\frac{zz}{p^3} + 6p'p'\frac{zz}{p^4} - 2p'\frac{z}{p^3} + \frac{r^4}{pp} \; [= 0]$$

$$2p''zz - \frac{6p'p'}{p}zz + 2p'z - r^4 p = 0$$

$$2q''zz - \frac{6q'q'}{q}zz + 2q'z + r^4 q = 0$$

$$r^4 = 2z\left(\frac{p'}{p} - \frac{q'}{q}\right).$$

[VIII.]

[DER BILINEARE ALGORITHMUS.]

[Aus Scheda An, Cereri, Palladi, Iunoni sacrum, Febr. 1805.]

[1.]

[S. 37]

Es sind gegeben vier Grössen a, b, A, B; man bildet daraus nach folgender Ordnung

$$\begin{array}{lllll} 2a' = a+b, & b'b' = ab, & cc = aa-bb, & c = \frac{1}{2}('a-'b), & cc = 4a'c', \\ 2a'' = a'+b', & b''b'' = a'b', & c'^2 = a'^2-b'^2, & c' = \frac{1}{2}(a-b), & c'^2 = 4a''c'', \\ 2a''' = a''+b'', & b'''^2 = a''b'', & c''^2 = a''^2-b''^2, & c'' = \frac{1}{2}(a'-b'), & c''^2 = 4a'''c''' \end{array}$$

etc.

Grenze $= h$.

Man mache

$$[1] \quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{c}{4a'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}a'''^{\frac{1}{8}}\dots} = \dfrac{ca'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}a'''^{\frac{1}{8}}\dots}{4a'a''^{\frac{1}{2}}a'''^{\frac{1}{4}}\dots} \\ \qquad = \dfrac{c}{4a'}\left(\dfrac{a'}{a''}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{a''}{a'''}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{a'''}{a^{\mathrm{IV}}}\right)^{\frac{1}{8}}\dots \\ \qquad = \dfrac{cb'^{\frac{1}{2}}b''^{\frac{1}{4}}\dots}{4b''b'''^{\frac{1}{2}}\dots} \end{cases}$$

$$x^4 = \frac{a-b}{8a''}\left(\frac{a''}{a'''}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a'''}{a^{\mathrm{IV}}}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ etc.,}$$

so ist

$$[2] \quad \begin{cases} a = h(1+2x^4+2x^{16}+2x^{36}+\dots)^2 \\ b = h(1-2x^4+2x^{16}-2x^{36}+\dots)^2 \\ c = h(2x+2x^9+2x^{25}+\dots)^2. \end{cases}$$

Ferner

[3]
$$\begin{cases} A' = \tfrac{1}{2}(A+B), & B' = \dfrac{2ABa'}{b'(A+B)} \\ A'' = \tfrac{1}{2}(A'+B'), & B'' = \dfrac{2A'B'a''}{b''(A'+B')} \\ A''' = \tfrac{1}{2}(A''+B''), & B''' = \dfrac{2A''B''a'''}{b'''(A''+B'')} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Man bestimme H durch die Gleichung

[4]
$$H = \frac{hA'^{\frac{1}{2}}A''^{\frac{1}{4}}A'''^{\frac{1}{8}}\ldots}{a'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}a'''^{\frac{1}{8}}\ldots} = \frac{chA'^{\frac{1}{2}}A''^{\frac{1}{4}}A'''^{\frac{1}{8}}\ldots}{4x}$$

und y durch [die weiter unten folgende Gleichung [7]], so ist

[5]
$$\begin{cases} A = H\left(1+\left(y+\frac{1}{y}\right)x^4+\left(yy+\frac{1}{yy}\right)x^{16}+\text{etc.}\right)^2 \\ B = H\left(1-\left(y+\frac{1}{y}\right)x^4+\left(yy+\frac{1}{yy}\right)x^{16}-\text{etc.}\right)^2 \end{cases}$$

[2.]

[S. 38]

$$\frac{b}{a} = \cos 2M, \quad \frac{a'}{a} = \cos M^2$$
$$\frac{b'}{a'} = \cos 2M'$$
etc.

$$\operatorname{tg} M^2 = \sin 2M'$$
$$a^\infty = a\cos M^2 \cos M'^2 \cos M''^2 \text{ etc.}$$

[6]
$$\begin{cases} \sin\varphi\ \sqrt{\sin 2M} = \operatorname{tg}\psi \\ \sin\varphi'\sqrt{\sin 2M'} = \operatorname{tg}\psi' \\ \sin\varphi''\sqrt{\sin 2M''} = \operatorname{tg}\psi'' \\ \text{etc.} \\ \sin 2\psi' = \operatorname{tg}\psi\sqrt{\sin 2M} \end{cases}$$

$$\frac{\sin\varphi'}{\sin\varphi} = \frac{\cos M^2}{\cos\psi'^2}$$

$$\sin\varphi^\infty = \sin\varphi\frac{\cos M^2.\cos M'^2.\cos M''^2\ldots}{\cos\psi'^2.\cos\psi''^2.\cos\psi'''^2\ldots} = \frac{a^\infty\sin\varphi}{a\cos\psi'^2.\cos\psi''^2.\cos\psi'''^2\ldots}$$

[Es folgt ein Beispiel $2M = 75^0$]

[S. 39]

$$xx = \frac{\sin 2M}{4\cos M^2.\cos M'.\cos M''^{\frac{1}{2}}.\cos M'''^{\frac{1}{4}}\ldots}$$
$$= \frac{\operatorname{tang} M}{2\cos M'.\cos M''^{\frac{1}{2}}.\cos M'''^{\frac{1}{4}}\ldots}$$

$$\frac{2x+2x^9+\cdots}{1+2x^4+\cdots} = \sqrt{\sin 2M}$$
$$\frac{1-2x^4+2x^{16}+\cdots}{1+2x^4+2x^{16}+\cdots} = \sqrt{\cos 2M}$$

$$\frac{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\cdots}{1+\left(yy+\frac{1}{yy}\right)x^4+\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)x^{16}+\cdots} = \operatorname{tg}\psi$$

[7]
$$y+\frac{1}{y} = 2\sin\varphi^{(\infty)}$$

[Es folgen Zahlenrechnungen].

[3.]

[S. 40]

Eine andere Manier:

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\varphi\sqrt{(1-\sin 2M^2.\sin\varphi^2)}$$
$$\operatorname{tg}\omega' = \operatorname{tg} 2\omega.\sqrt{\cos 2M} = \operatorname{tg} 2\omega.\sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$\operatorname{tg}\omega'' = \operatorname{tg} 2\omega'.\sqrt{\cos 2M'} = \operatorname{tg} 2\omega'.\sqrt{\frac{b'}{a'}}$$
$$\operatorname{tg}\omega''' = \operatorname{tg} 2\omega''.\sqrt{\cos 2M''} = \operatorname{tg} 2\omega''.\sqrt{\frac{b''}{a''}}$$
etc.

Dann ist φ^∞ das letzte Glied der Reihe ω, $\tfrac{1}{2}\omega'$, $\tfrac{1}{4}\omega''$, $\tfrac{1}{8}\omega'''$ etc.

$$[8] \qquad \sin\varphi = \frac{1+2x^4+\cdots}{2x+2x^9+\cdots}\cdot\frac{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\cdots}{1+\left(yy+\frac{1}{yy}\right)x^4+\cdots}$$

$$\sqrt{(1-\sin 2M^2.\sin\varphi^2)} = \frac{\sqrt{(1-2xx+2x^8+\cdots)}\sqrt{\left(1-xx\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^8\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+\cdots\right)}}{1+\left(yy+\frac{1}{yy}\right)x^4+\cdots}$$

[Es folgen Umformungen der hier auftretenden Reihen in Produkte, die in der Abhandlung Werke III, S. 446 ff. viel ausführlicher und übersichtlicher dargestellt sind, und die darum nicht abgedruckt werden; auf derselben Seite steht noch unten die Formel:]

$$[9] \qquad \operatorname{tang}\varphi = \left[\frac{1}{i}\cdot\right]\frac{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\cdots}{\left(y-\frac{1}{y}\right)x-\left(y^3-\frac{1}{y^3}\right)x^9+\cdots}\cdot\frac{1+2x^4+2x^{16}+\cdots}{1-2x^4+2x^{16}-\cdots}\,[{}^*)]$$

[*) In der Handschrift lautet der zweite Faktor

$$\frac{1-2x^4+2x^{16}\cdots}{1+2x^4-2x^{16}\cdots}.]$$

[IX.]

[DIE BEZIEHUNG ZWISCHEN DEN UNENDLICH VIELEN WERTEN DES ARITHMETISCH-GEOMETRISCHEN MITTELS. UNMITTELBARE ANWENDUNG DER THEORIE AUF DIE ELLIPTISCHEN TRANSZENDENTEN UND AUF DIE REKTIFIKATION DER ELLIPSE.]

[1.]

[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik, Angefangen im May 1809, S. 6.]

Medium arithm[etico-geometricum] inter A et B $= M$

$$\begin{aligned} a &= A, & b &= \sqrt{(AA-BB)} = C \\ a' &= \tfrac{1}{2}(a+b), & b' &= \sqrt{ab} \\ a'' &= \tfrac{1}{2}(a'+b'), & b'' &= \sqrt{a'b'} \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

Medium [inter a et b] $= m$.

$$[1] \qquad M = \frac{k\pi m}{\log 16+2\log\frac{a'}{B}-\log\frac{a'}{a''}-\frac{1}{2}\log\frac{a''}{a'''}-\frac{1}{4}\log\frac{a'''}{a^{\mathrm{IV}}}-\cdots}$$

$$[2] \qquad = \frac{\frac{1}{2}k\pi m}{\log 4+\log\frac{a'}{B}-\frac{1}{2}\log\frac{a'}{a''}-\text{etc.}}$$

$$[3] \qquad \log\tfrac{1}{2}k\pi = 9{,}8339042$$

$$[4] \qquad \left.\begin{aligned} c'c'+2c''c''+4c'''c'''+\text{etc.} \\ +C'C'+2C''C''+4C'''C'''+\text{etc.} \end{aligned}\right\} = \frac{1}{2}aa-\frac{2mM}{\pi}.$$

[Ein Blatt in Fg, Kapsel 46 a, Wasserzeichen FHF 1810.]

Arithmetisch-geometrische Mittel.

[2.]

$$m = \mu(1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \text{etc.})^2$$
$$n = \mu(1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \text{etc.})^2$$
$$\sqrt{(mm - nn)} = \mu(2x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{9}{4}} + 2x^{\frac{25}{4}} + \text{etc.})^2$$

Das AG Mittel zwischen m und $\sqrt{(mm-nn)}$ sei $= \lambda$. Man hat dann

$$\lambda = \frac{\pi\mu}{\log\frac{1}{x}} \text{ oder } x = e^{-\frac{\pi\mu}{\lambda}}.$$

Für Briggische Logarithmen wird $\lambda = \frac{a\mu}{\log\frac{1}{x}}$, wo $\log a = 0{,}1349342$.

Auch kann man sich folgender Formel bedienen:

$$x = \frac{mm - nn}{16m'.\sqrt{m''}.\sqrt[4]{m'''}.\sqrt[8]{m^{IV}}.\,\&c} = \frac{m-n}{8\sqrt{m''}.\sqrt[4]{m'''}.\sqrt[8]{m^{IV}}\ldots}.$$

Beispiel

3,0000000	0,4771213	3,0000000	0,4771213
1,0000000	0,0000000	2,8284270	0,4515450
2,0000000	0,3010300	2,9142135	0,4645214
1,7320508	0,2385606	2,9129510	0,4643332
1,8660254	0,2709175	2,9135822	0,4644273
1,8612098	0,2697953		
1,8636176	0,2703568	0,2703567	9,6989700
1,8636159	0,2703564	0,2709175	0,5716671
1,8636167	0,2703566	0,2706371	9,1273029
		0,3010300	

a	0,1349342	
μ	0,2703566	$0{,}6396307 = \text{Canon}\ \left[= \frac{\mu}{\lambda}\right]$
C.λ . . .	9,5355727	
	9,9408635	
	0,8726970	
x	9,1273030	

[3.]

Die AG Mittel gestalten sich anders, wenn man für ein n', n'', n''' &c den negativen Werth wählt: doch sind alle Resultate in folgender Form begriffen:

$$\frac{1}{(\mu)} = \frac{1}{\mu} + \frac{4ik}{\lambda}. \qquad [1]$$

Beispiel für einen imaginären Werth des AGMittels.

3,0000000		0,4771213	0^0
1,0000000		0,0000000	360^0
2,0000000		0,3010300	0^0
− 1,7320508		0,2385606	180^0
0,1339746		9,1270225	0^0
	$+ 1{,}8612098i$	0,2697953	90^0
0,0669873	$+ 0{,}9306049i$	9,9698876	$85^0\ 52'\ 58'',10$
0,3530969	$+ 0{,}3530969i$	9,6984089	45 0 0
0,2100421	$+ 0{,}6418509i$	9,8295254	71 52 46,58
0,2836930	$+ 0{,}6208239i$	9,8341482	65 26 29,05
0,2468676	$+ 0{,}6313374i$	9,8311572	68 38 36,05
0,2470649	$+ 0{,}6324002i$	9,8318368	68 39 37,82
0,2469962½	$+ 0{,}6318688i$	9,8314971	68 39 6,95
0,2469962½	$+ 0{,}6318685i$	9,8314970	68 39 6,93
0,2469962½	$+ 0{,}6318686\tfrac{1}{2}i$	9,8314970½	68 39 6,94

$$\frac{1}{(\mu)} = +\,0{,}5365910 - 1{,}3728774i = \frac{1}{\mu} + \frac{4i}{\lambda}.$$

[4.]

Schöner Lehrsatz.

[2] $$\frac{\frac{2\partial m}{m}-\frac{2\partial n}{n}}{mm-nn}=\frac{\frac{\pi\partial\lambda}{\lambda}-\frac{\pi\partial\mu}{\mu}}{\lambda\mu}.$$

Integrationsfähig durch eine Reihe wird die vorstehende Gleichung, wenn man sie in folgende Form setzt:

$$\frac{2\mu\mu}{mm-nn}\left(\frac{dm}{m}-\frac{dn}{n}\right)=-\pi d\frac{\mu}{\lambda}.$$

Das Hauptmoment des Beweises des umstehenden Lehrsatzes ist folgendes. Setzt man

$$\frac{n}{m}=a,\ \frac{\sqrt{(mm-nn)}}{m}=b,\ \frac{m}{\lambda}=A,\ \frac{m}{\mu}=B,$$

so wird

$$A=1+\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}a^4+\frac{1.9.25}{4.16.64}a^6+\text{etc.}$$

$$B=1+\frac{1}{4}bb+\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}b^4+\frac{1.9.25}{4.16.64}b^6+\text{etc.}$$

(1) $$aA+(3aa-1)\frac{dA}{da}+(a^3-a)\frac{ddA}{da^2}=0,$$

$$bB+(3bb-1)\frac{dB}{db}+(b^3-b)\frac{ddB}{db^2}=0,\text{[*)]}$$

woraus

(2) $$aB+(3aa-1)\frac{dB}{da}+(a^3-a)\frac{ddB}{da^2}=0.$$

Aus (1) und (2) folgt, wenn wir

$$\frac{BdA}{da}-\frac{AdB}{da}=u$$

setzen,

$$(3aa-1)u+(a^3-a)\frac{du}{da}=0$$

oder

$$(a^3-a)u=\text{Const.}$$

[*) In der Handschrift steht b^3-a statt b^3-b.]

Nun wird für $a=1,\ b=0$

$$A=\infty,\ (a^3-a)A=0;$$

$$B=1;\ \frac{dA}{da}=\infty,$$

$$(a^3-a)\frac{dA}{da}=-\frac{2}{\pi},\ \frac{dB}{da}=-\frac{1}{2},$$

$$(a^3-a)u=-\frac{2}{\pi}.$$

[5.]

Summation einer Reihe, wo die Logarithmen der Glieder eine arithmetische Progression der zweiten Ordnung bilden.

Es seyn die Logarithmen dreier auf einander folgender Glieder:

$$a-b-c,\ a,\ a+b-c$$

und von einer andern Reihe

$$\alpha-\beta-\gamma,\ \alpha,\ \alpha+\beta-\gamma.$$

Ist nun

$$\alpha=a+\frac{bb}{4c}+\frac{1}{2}\log k\pi-\frac{1}{2}\log c$$

$$\beta=i\cdot 180^0\cdot\frac{b}{c}$$

$$\gamma=\frac{kk\pi\pi}{c},$$

$$\frac{1}{2}\log k\pi=0{,}0674670.920.5$$

$$k\pi=1{,}3643763538.418$$

$$kk\pi\pi=1{,}86152283563$$

$$4kk\pi\pi=7{,}4460913425,$$

so sind die Summen beider Reihen gleich.

Beispiel.

4,2		
	$+4,7$	
8,9		$-3,6$
	$+1,1$	
[1]0,0		$-3,6$
	$-2,5$	
7,5		$-3,6$
	$-6,1$	
1,4		

[Es folgt eine logarithmische Rechnung für $a = 10$, $b = -0{,}7$, $c = 1{,}8$, die ergibt:

$$\alpha = 1{,}01832497,\ \beta = -i\,.\,70^0,\ \gamma = 1{,}0341793.]$$

[6.]

Ist

[3] $$\frac{n}{m} = \frac{\mu\left(1-2e^{-M\pi}+2e^{-4M\pi}-2e^{-9M\pi}+\ldots\right)^2}{\mu\left(1+2e^{-M\pi}+2e^{-4M\pi}+2e^{-9M\pi}+\ldots\right)^2}$$

so kann man statt M setzen

[4] $$M^* = \frac{1}{2ai}+\frac{1}{2bi}+\frac{1}{2ci}+\frac{1}{2di}+\frac{1}{2ei}+\text{etc.}+\frac{1}{M}$$

wo a, b, c, d, e u.s.w. eine beliebige ungerade Menge ganzer reeller Zahlen bedeuten; oder auch

[5] $$\frac{pM+2qi}{r+2sMi} = \frac{M+2(qr-psMM)i}{rr+4ssMM},$$

wo p, q, r, s beliebige der Bedingung

$$pr+4qs = 1$$

genüge leistende ganze reelle Zahlen sind.

Setzt man

$$Pe^{-\pi t} = pt$$

so ist

1) $p(t+2ik) = pt$

2) $pt = \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot p\frac{1}{t}$

$$P(e^{-\pi t},\ e^{2\pi u}) = p(t, u)$$

so ist

$$e^{-\frac{uu}{4\pi t}}\sqrt{t}\,.\,p(t,u) = p\left(\frac{1}{t},\ \frac{iu}{t}\right)$$

$$pt^4 = p(t+i)^4+\left(\tfrac{1}{2}p\tfrac{1}{4}t-\tfrac{1}{2}p\left(\tfrac{1}{4}t+i\right)\right)^4$$

$$pt = \tfrac{1}{2}p\tfrac{1}{4}t+\tfrac{1}{2}p\left(\tfrac{1}{4}t+i\right)$$

$$pt+p(t+i) = 2p\,4t$$

$$p(t+i) = 2p\,4t-pt = \frac{1}{\sqrt{t}}\left(p\frac{1}{4t}-p\frac{1}{t}\right).$$

$e^{-\pi} = h$ gesetzt, ist

$$\sum h^{\alpha nn+2\beta n+\gamma} = \frac{h^{\gamma-\frac{\beta\beta}{\alpha}}}{\sqrt{\alpha}}\sum h^{\frac{1}{\alpha}nn+\frac{2\beta i}{\alpha}\cdot n}$$

$$2ei+\frac{1}{M} = M' \qquad pM' = \sqrt{M}\,.\,pM$$

$$2di+\frac{1}{M'} = M'' \qquad pM'' = \sqrt{M'}\,.\,pM'$$

$$2ci+\frac{1}{M''} = M''' \qquad pM''' = \sqrt{M''}\,.\,pM''$$

$$2bi+\frac{1}{M'''} = M^{\text{IV}} \qquad \text{etc.}$$

$$2ai+\frac{1}{M^{\text{IV}}} = M^{\text{V}}$$

etc.

oder

$$pM^{\text{V}} = \sqrt{MM'M''M'''M^{\text{IV}}}\,.\,pM$$

$$pM^{\text{V}} = \sqrt{[2bi,\ 2ci,\ 2di,\ 2ei,\ M]}\,.\,pM.$$

[Ein Blatt in Fg, Kapsel 46 a.]

[7.]

Es sei

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

und

$$\frac{\alpha M - \beta i}{\delta + \gamma M i} = N,$$

$$ac = bb + 1,\ AC = BB + 1;$$

ist hier

$$M = \frac{1 + bi}{a},\ \ N = \frac{1 + Bi}{A},$$

so geht die Form (a, b, c) in (A, B, C) über durch die Transf[ormation]

$$\begin{matrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{matrix}$$

Wir unterscheiden 6 Fälle jenachdem nach dem Modulus 2

α	1	1	1	0	1	0
β	0	1	0	1	1	1
γ	0	0	1	1	1	1
δ	1	1	1	1	0	0
	1	2	3	4	5	6

Es ist dann

$$[6] \qquad \begin{array}{r|c|c|c|c|c|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ hpN = & pM & qM & rM & qM & rM & pM \\ hqN = & qM & pM & pM & rM & pM & rM \\ hrN = & rM & rM & qM & pM & qM & qM \end{array}$$

$$h^{[-1]} = i^{2}\sqrt{(\delta + \gamma M)}.$$

[8.]

Die Reduction von pM, qM, rM auf die einfachste Form.

Es sei $M = \frac{\alpha + \beta i}{\delta - \gamma i}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze reelle Zahlen und Zähler und Nenner ohne gemeinschaftlichen Factor; man setze

$$\begin{aligned} \alpha\alpha + \beta\beta &= A \\ \alpha\gamma + \beta\delta &= B \\ \gamma\gamma + \delta\delta &= C \\ \alpha\delta - \beta\gamma &= \sqrt{(AC - BB)} = D. \end{aligned}$$

Man suche die einfachste Form des Det[erminanten] $-DD$, welche der Form (A, B, C) aequivalent ist; sie sei (a, b, c).

Dann lassen sich die Functionen von M auf Functionen von

$$\frac{D + bi}{a}$$

zurückführen. Der Algorithmus ist dieser

$$\begin{array}{lll} \frac{D + Bi}{A} = M & DD + BB = AA' & B + B' = hA' \\ \frac{D + B'i}{A'} = M' & DD + B'B' = A'A'' & B' + B'' = h'A'' \\ \frac{D + B''i}{A''} = M'' & DD + B''B'' = A''A'' & B'' + B''' = h''A''' \end{array}$$

$$\sqrt{\frac{D + Bi}{A}} \cdot pM = pM' \text{ für gerades } h$$
$$= qM' \text{ für ungerades } h$$

$$\varepsilon^{h}\sqrt{\frac{D + Bi}{A}} \cdot qM = rM' \qquad \varepsilon = \sqrt{i}$$

$$\sqrt{\frac{D + Bi}{A}} \cdot rM = qM' \text{ für gerades } h$$
$$= pM' \text{ für ungerades } h$$

Wenn man aus h, h', h'', u.s.w. die Transformation von (A, B, A') in (a, b, c) ableitet, so werden deren Elemente (ob sie gerade oder ungerade) entscheiden, welche Funktion von $\frac{D + bi}{a}$ mit der gegebnen von M so zusammenhängt, dass letztere in

$$\varepsilon^{H}\sqrt{\frac{D+Bi}{A}\cdot\frac{D+B'i}{A'}\cdot\frac{D+B''i}{A''}\cdots}$$

multiplicirt werden muss. Wo M nicht rational ist, mag man $D=-1$ setzen und den Algorithmus ebenso bilden. Nämlich wenn $M=g+hi$, so geht man von der Form $\frac{1}{g}$, $\frac{h}{g}$, $\frac{gg+hh}{g}$ (Det. -1) aus und sucht ihre Aequivalente etc.

[9.]

Es ist

M. Ar.-G. zwischen 1 ... 0,2	0,5208016	log ... 9,7166723	$=\frac{1}{pM^2}$
1,2 ... 0,8	0,9898721	log ... 9,9955791	$=\frac{1}{\left(p\frac{1}{M}\right)^2}$
	0,5261302	9,7210932	M

Man sucht

$$p\left(\tfrac{1}{7}M+\tfrac{4}{7}i\right)=-0{,}4201578+0{,}3006159i \qquad M=\operatorname{cotg}\psi$$

$$=q\left(\tfrac{1}{7}M-\tfrac{1}{7}i\right) \qquad \psi=62^0\,14'\,59''$$

$$=r\left(\frac{7M}{1+MM}+\frac{7i}{1+MM}\right)\cdot\sqrt{\frac{7(M+i)}{1+MM}} \qquad a=\tfrac{7}{2}\sin 2\psi$$

$$b=7\sin\psi^2$$

$$r(a+bi)=2A\left(\cos\tfrac{1}{4}b\pi-i\sin\tfrac{1}{4}b\pi\right)$$
$$+\,2A^9\left(\cos\tfrac{9}{4}b\pi-i\sin\tfrac{9}{4}b\pi\right)$$

etc.

$\log A=-\tfrac{1}{4}k\pi.a$

$\log\tfrac{1}{4}k\pi=9{,}5328742$

$a\ldots 0{,}4600640$

9,9929382

0,9838711

$A\ldots 9{,}0161289$

$2A\ldots 9{,}3171589$

0,39602

9,71318

Richtig.

Man hat

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin\varphi^2.\sin\lambda^2)}}=\pi(pt)^2$$

$$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\sin\varphi^2.\cos\lambda^2)}}=\pi\left(p\frac{1}{t}\right)^2=\pi t(pt)^2$$

$qt=pt.\sqrt{\cos\lambda}$

$rt=pt.\sqrt{\sin\lambda}.$

[10.]

[Ein Zettel in Fi Nr. 6, Kapsel 50.]

Setzt man

$$\operatorname{tg}T\sqrt{\frac{a}{b}}=\operatorname{tg}T'$$
$$\operatorname{tg}2T'\sqrt{\frac{a'}{b'}}=\operatorname{tg}2T''$$
$$\operatorname{tg}4T''\sqrt{\frac{a''}{b''}}=\operatorname{tg}4T'''$$

u.s.w.

so wird

$$\int\frac{dT}{\sqrt{(aa\sin T^2+bb\cos T^2)}}=\int\frac{dT'}{\sqrt{(a'a'\sin 2T'^2+b'b'\cos 2T'^2)}}=\int\frac{dT''}{\sqrt{(a''a''\sin 2T''^2+b''b''\cos 2T''^2)}},$$

auch ist

$$\frac{\sin 2T}{\sqrt{(aa\sin T^2+bb\cos T^2)}}=\frac{\sin 2T'}{\sqrt{(a'a'\sin 2T'^2+b'b'\cos 2T'^2)}}.$$

[Zwei Zettel in Fi Nr. 6, Kapsel 50.]

[Erster Zettel]

[11.]

$$a=\mu(1+2xx+2x^8+2x^{18}+\text{etc.})^2=\mu fx$$
$$b=\mu(1-2xx+2x^8-2x^{18}+\text{etc.})^2=\mu fix$$
$$c=\mu(x^{\frac12}+x^{\frac92}+x^{\frac{25}{2}}+\text{etc.})^2 \qquad =\mu\ldots$$
$$aa-bb=16cc$$
$$a+b=2a',\ ab=b'b',\ cc=a'c',\ a-b=8c'\ \text{etc.}$$

x ist die Grenze von

$$\frac{c}{a},\ \sqrt{\frac{c'}{a'}},\ \sqrt[4]{\frac{c''}{a''}},\ \sqrt[8]{\frac{c'''}{a'''}}\cdots$$

Ferner ist das ar.-geom. Mittel zwischen a und $4c$

$$=-\frac{\mu\pi}{2\log x}=\nu.$$

Es ist also

$$\log x = -\frac{1}{2}\,\frac{\mu\pi}{\nu}. \quad \mathrm{Log}\,\frac{k\pi}{2} = 9{,}8339041884.$$

[12.]

Setzt man

$$\sqrt{(aa\sin T^2 + bb\cos T^2)} = \Delta,$$

$$\int \frac{dT}{\Delta} = \frac{\theta}{\mu},$$

so erhält man θ durch folgenden Algorithmus

$$\mathrm{tg}\, T\sqrt{\frac{a}{b}} = \mathrm{tg}\, T'$$

$$\mathrm{tg}\, 2T'\sqrt{\frac{a'}{b'}} = \mathrm{tg}\, 2T''$$

$$\mathrm{tg}\, 4T''\sqrt{\frac{a''}{b''}} = [\mathrm{tg}]\, 4T'''$$

$$\mathrm{tg}\, 8T'''\sqrt{\frac{a'''}{b'''}} = [\mathrm{tg}]\, 8T^{\mathrm{IV}}$$

etc.

Dann ist $\theta = T^{\infty}$.

Man hat ferner:

$$\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}T = \frac{x^{\frac{1}{4}}\sin\frac{1}{2}\theta - x^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3}{2}\theta + x^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5}{2}\theta - \text{etc.}}{x^{\frac{1}{4}}\cos\frac{1}{2}\theta + x^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3}{2}\theta + x^{\frac{25}{4}}\cos\frac{5}{2}\theta + \text{etc.}}$$

$$\mathrm{tg}\, T' = \frac{x^{\frac{1}{2}}\sin\theta - x^{\frac{9}{2}}\sin 3\theta + x^{\frac{25}{2}}\sin 5\theta - \text{etc.}}{x^{\frac{1}{2}}\cos\theta + x^{\frac{9}{2}}\cos 3\theta + x^{\frac{25}{2}}\cos 5\theta + \text{etc.}}$$

$$\mathrm{tg}\, 2T'' = \frac{x\sin 2\theta - x^9\sin 6\theta + x^{25}\sin 10\theta - \text{etc.}}{x\cos 2\theta + x^9\cos 6\theta + x^{25}\cos 10\theta + \text{etc.}}.$$

Eine independente Rechnung ist folgende

$$\frac{a}{b}\,\mathrm{tg}\, T = \mathrm{tg}\, U$$

$$\mathrm{tg}\, T' = \sqrt{\mathrm{tg}\, T.\mathrm{tg}\, U}, \qquad U' = \tfrac{1}{2}(T+U)$$

$$\mathrm{tg}\, 2T'' = \sqrt{\mathrm{tg}\, 2T'.\mathrm{tg}\, 2U'}, \quad U'' = \tfrac{1}{2}(T'+U')$$

$$\mathrm{tg}\, 4T''' = \sqrt{\mathrm{tg}\, 4T''.\mathrm{tg}\, 4U''}, \quad U''' = \tfrac{1}{2}(T''+U'')$$

u.s.w.

Dann ist

$$T^{\infty} = U^{\infty} = \theta$$

$$\int\sqrt{(aa\sin T^2 + bb\cos T^2)}\,dT = \frac{\theta}{\mu}(a'a' - 2(a''a'' - b''b'') - (4a'''a''' - b'''b''')\ldots)$$
$$+\tfrac{1}{2}(a-b)\sin 2U' - \tfrac{1}{2}(a'-b')\sin 4U''$$
$$-\tfrac{1}{2}(a''-b'')\sin 8U'' - \tfrac{1}{2}(a'''-b''')\sin 16U^{\mathrm{IV}}\ldots$$

[Zweiter Zettel]

Zur Rectification der Ellipse.

[13.]

Es sei

$$\int\sqrt{(aa\cos T^2 + bb\sin T^2)}\,dT = W.$$

Man bilde die Reihe der arithm.-geom. Mittel

$$\begin{array}{r|lll}
a,\, b & aa - bb & = 16cc & cc = a'c' \\
a',\, b' & a'a' - b'b' & = 16c'c' & c'c' = a''c'' \\
a'',\, b'' & a''a'' - b''b'' & = 16c''c'' & c''c'' = a'''c''' \\
\text{etc.} & \text{etc.} & & \text{etc.} \\
\vdots & & & \\
{[M(a,b) =]}\ \alpha & & &
\end{array}$$

Man hat dann ferner zu setzen

$$\begin{array}{lll}
\frac{4\sin T}{a} = p & cp = \sin 2u & p' = \frac{p}{\cos u^2} \\
\frac{4\sin T'}{a'} = p' & c'p' = \sin 2u' & p'' = \frac{p'}{\cos u'^2} \\
\frac{4\sin T''}{a''} = p'' & c''p'' = \sin 2u'' & \text{etc.} \\
\vdots & \vdots &
\end{array}$$

Dann ist, den letzten Wert von $T = \theta$ gesetzt,

$$W = \frac{\theta}{\alpha}(a'a' - 32c''c'' - 64c'''c''' - 128c^{IV}c^{IV}\ldots)$$
$$+ 8c'\cos T \sin T' + 16c''\cos T'\sin T'' + 32c'''\cos T''\sin T''' + \ldots$$
$$= \frac{\theta}{\alpha}(a'a' - 32c''c'' - 64c'''c''' - 128c^{IV}c^{IV}\ldots)$$
$$+ 2a'p'\cos T + 4a''p''\cos T' + 8a'''p'''\cos T''\ldots$$

Salv. factore const.

$a = 302{,}78000$	2,4811272	$c \ldots 0{,}7886597$
$b = 301{,}78000$	2,4796904	$c' \ldots 9{,}0969100 - 10$
$a' = 302{,}28000$	2,4804094	$c'' \ldots 5{,}7134110 - 10$
$b' = 302{,}27944$	2,4804086	$c''' \ldots 8{,}9464130 - 20$
$\alpha = 302{,}27977$	2,4804090	

Factor von θ ...	2,4804098
$\frac{1}{2}\pi$	0,1961199
Erdquadrant	2,6765297
	7,0000000
Factor Const.	4,3234703
	2,4811272
a	6,8045975

Also die Länge des Bogens

$$= \frac{\theta}{90^\circ} \cdot 10000000^{m} + 21060{,}580 \cos T \sin T' + 17{,}418 \cos T' \sin T''.$$

[14.]

Die Winkel finden sich

$$\sin 2u = g \sin T \qquad \sin T' = \frac{h \sin T}{\cos u^2}$$

$g \ldots 8{,}9095925$	$h \ldots 9{,}9992822$
$g' \ldots 7{,}2185606$	$h' \ldots 9{,}9999996$
$g'' \ldots 3{,}8350620$	h'' 0

Z. B.	$51.31.48 = \varphi$
	0,09986
	00144
	$38.33.46 = T$
$\sin T$	9,79475
	8,90959
	9,99928
	9,79403
	28
$\sin T'$	9,79431
$T' =$	38.31.0

Man führe noch ein

$$a \operatorname{tg} U = b \operatorname{tg} T$$
$$a' \operatorname{tg} U' = b' \operatorname{tg} T'$$
$$a'' \operatorname{tg} U'' = b'' \operatorname{tg} T''.$$

Dann ist:

$$\sin T' = \frac{\sin \frac{1}{2}(T+U)}{\cos \frac{1}{2}(T-U)}$$
$$\cos U' = \frac{a \sin T'}{a' \operatorname{tg} T} = \frac{b \sin T'}{a' \operatorname{tg} U} = \frac{b' \sin T'}{a' \sqrt{\operatorname{tg} T . \operatorname{tg} U}}$$
$$\cos T' = \frac{\sin U'}{\sqrt{\operatorname{tg} T . \operatorname{tg} U}}$$
$$b' \cos T' = \frac{a \sin U'}{\operatorname{tg} T}$$
$$b' \cos T' = \frac{b \sin U'}{\operatorname{tg} U}$$

$$\frac{\cos(T+U)}{\cos T \cos U} = \frac{\cos(T'+U')\cos(T'-U')}{\cos T'^2}$$
$$\frac{\cos(T+U)}{\sin T \sin U} = \frac{\cos(T'+U')\cos(T'-U')}{\sin U'^2}$$
$$\frac{2\cos(T+U)}{\sqrt{\sin 2T . \sin 2U}} = \frac{\cos(T'+U') . \cos(T'-U')}{\cos T' . \sin U'}.$$

BRIEFWECHSEL.

[1.]

PFAFF an GAUSS.

{Helmstedt, 24. November 1799.

Theuerster Freund

. . . .

Nun noch ein paar Worte, soweit es die Kürze der Zeit gestattet, von den mathematicis, welche Ihr Brief enthält. . . . . .

Sehr interessant war mir die besondere Bemerkung, welche Sie über das arithm. geom. Mittel zwischen 1 und $\sqrt{2}$ gemacht haben, wobey die Übereinstimmung gewiss nicht zufällig und isolirt ist, sondern noch mehr in sich schliessen wird. — So leicht das arithm. harm. Mittel zu finden und zu beweisen ist, so wenig scheint bey der ersten Ansicht klar zu seyn, wie das a. g. M. zu bestimmen sey. Ich hätte gewünscht, Musse zu haben, mich auf diese curiose Speculation einzulassen. Ich bin aber in diesem Winter zu sehr mit meinen Vorlesungen beschäftigt, so dass ich kaum Zeit genug haben werde, meine Abhandlung über die meth. tang. invers. vollends zum Druck ins reine zu bringen, welche ich auch inzwischen wieder ganz liegen lassen musste. Indessen habe ich doch der Versuchung nicht widerstehen können, eben jezt, da mich Ihr Brief wieder daran erinnerte, wenigstens einen Versuch zu machen, wovon ich doch ein paar Worte sagen will. Ich sezte (wodurch die Untersuchung nicht beschränkt wird) $a = 1$, $b = 1 + x$; so wird

$$a' = \sqrt{(1+x)},\quad b' = 1 + \tfrac{1}{2}x.$$

Nun suchte ich überhaupt die a und b durch Reihen nach x auszudrücken, und das Gesez der Coefficienten zu bestimmen.

Es sei

$$a^n = 1 + \alpha^n x + \beta^n x^2 + \gamma^n x^3 + \delta^n x^4 \ldots$$
$$b^n = 1 + A^n x + B^n x^2 + C^n x^3 + D^n x^4 \ldots,$$

so ergeben sich 2 Reihen von Gleichungen für die Coëfficienten: die eine ist leicht:

$$A^{n+1} = \frac{A^n + \alpha^n}{2};\quad B^{n+1} = \frac{B^n + \beta^n}{2};\quad C^{n+1} = \frac{C^n + \gamma^n}{2};\ \text{etc.}$$

bey der anderen ist wegen des Infinitinomii die Rechnung verwickelter, ich habe sie nicht weiter fortführen können, als bis δ und D, bin aber zweifelhaft, ob, was ich bis dahin fand, richtig ist, da ich zu eilig und unordentlich rechnete. Ich erhielt nehmlich für jedes n (exc[eptis] exc[ipiendis])

$$\alpha^n = A^n = \tfrac{1}{2};\quad \beta^n = B^n = -\tfrac{1}{16};\quad \gamma^n = C^n = \tfrac{1}{32};\quad \delta^n = D^n = -\tfrac{5}{2.128}.$$

Es wäre doch auffallend, dass von a'' und b'' an die Reihen wenigstens in den 5 ersten Gliedern übereinstimmen. Ich wäre neugierig zu wissen, wie es weiter geht, was sich für ein Gesez ergibt, ob etwa für $n = \infty$ die Reihe sich summiren lässt, wenigtens für gewisse Werthe von x. Aber die Zeit hat kaum zugereicht, so weit zu rechnen, und fast wäre mir die Zeit zu kurz geworden, um noch an Sie zu schreiben.

Ich werde übrigens diese Aufgabe bey mehrerer Musse nicht aus dem Sinn verliehren, ob gleich diese Untersuchung, die weiter führen kann, bey Ihnen in guten Händen ist. — Erhalten Sie ferner Ihre freundschaftlichen, mir sehr schäzbaren Gesinnungen

Ihrem ergebensten Fr[eunde]

J. F. PFAFF.}

[2.]

PFAFF an GAUSS.

{Theuerster Freund!

Ich sage Ihnen meinen herzlichen Dank für Ihren freundschaftlichen Brief, dessen Inhalt mir sehr interessant gewesen ist . . . .

Ihr Problem von dem lezten Gliede der Reihe

$$a,\ b,\ \left[\frac{a+b}{2},\ \sqrt{\frac{b(a+b)}{2}},\ \frac{a+b+\sqrt{2b(a+b)}}{4}\right],\ldots$$

hat mir recht wohl gefallen. Als ich gestern Mittag Ihr Paket erhielt, nahm ich mir vor, die Auflösung bis nach Beendigung eines Geschäfts zu verschieben, das mir jezt zur Last fällt . . . . . Indessen gestern Abend, als ich zu Haus kam, konnte ich mich nicht enthalten, das Problem näher anzusehen . . . . ., und fand auch sehr bald die Auflösung, ... Es ist nehmlich

$$f(a,b) = \frac{\sqrt{(b^2-a^2)}}{\operatorname{Arc\,cos}\frac{a}{b}},$$

oder (für $b < a$),

$$= \frac{\sqrt{(a^2-b^2)}}{\log\left(\frac{a+\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\right)}.$$

Ist $a = 1$, $b = \sec\omega$, so wird

$$f(1, \sec\omega) = \frac{\operatorname{tang}\omega}{\omega},$$

welches im Kreis durch eine einfache Construction dargestellt werden kann. Ferner ist

$$\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = \frac{2u}{f(1, \sqrt{(1-u^2)})}.$$

Für $a = 1$, $b = \sin\omega$ ist

$$f(1, \sin\omega) = \frac{\cos\omega}{\log \operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega}.$$

. . . . . Für das versiegelte Billet und für das mir dadurch verschaffte

Vergnügen bin ich Ihnen sehr verbunden. Ich schicke Ihnen das Billet hierbey zurück: ob ich gleich, wie natürlich, nicht zweifeln kann, dass unsere Auflösungen übereinstimmen, so würde es mich doch freuen, wenn Sie mir gelegentlich das Billet wieder zum Andenken zurückschickten. . . . .

Fast hätte ich vergessen, Ihnen im voraus zu Ihrer Entdeckung Glück zu wünschen. Mir ist es besonders lieb, dass die h[öhere] Arithmetik mehr mit der Analysis in Verbindung gebracht ist, da ich durch frühe Verwöhnung immer mehr und lieber mit Buchstaben als mit Zahlen zu thun gehabt habe.

Schenken Sie ferner Ihr freundschaftliches Andenken

Ihrem ergebensten Freund

Helmstedt J. F. PFAFF.

8. Dec. 1800.

Nachschrift.

Zu meinem vorigen Brief an Sie, th[eurer] Fr[eund], folgt hiebey noch ein kleines Supplement, aus Veranlassung einer Bemerkung, die Ihnen gewiss auch nicht wird entgangen seyn. . . . .

Wird bey der Reihe $a, b\ldots$ in Ihrem Gesez bloss das geändert, dass zuerst das geometrische, und dann das arithm. Mittel genommen wird, so ist

$$f''(a,b) = \frac{\sqrt{(ab-b^2)}}{\operatorname{Arc\,cos}\sqrt{\frac{b}{a}}},$$

wie schon daraus folgt, dass $f''(a,b) = f(b, \sqrt{ab})$. Wenn bey Ihrem arithm.-geometrischen Mittel eine ähnliche Verwechslung gemacht wird, so ist $M'(a,b) = M(b,a)$: wie unmittelbar erhellt, weil dort auch das 3te und 4te Glied bloss verwechselt sind. Ich gestehe indessen, dass ich diese beyden leichten Bemerkungen nicht zuerst auf dem einfachsten Weg gemacht habe*).

C[etera] ut in literis.

J. FR. PF.}

*) sonderbar, dass mir nicht gleich einfiel, dass bei dem arithm.-geom. M. die erwähnte Verwechslung gar keinen Unterschied macht, wo dann auch natürlich $M(b,a) = M(a,b)$.

Anhang zu [2.]

[Aus H. C. SCHUMACHERS Tagebuch *Gaussiana*, Göttingen, November 1808.]

{A und B sein zwei beliebige Grössen; man bilde eine Reihe, in der alle folgenden Glieder wechselweise aus dem arithmetischen und geometrischen Mittel der zwei vorher gehenden bestehen, also so:

$$a,\ b,\ \frac{a+b}{2},\ \sqrt{\frac{ab+b^2}{2}},\ \frac{a+b+\sqrt{2b(a+b)}}{4},\ \ldots\}$$

{Erhalten von GAUSS den 2[ten]
December 1808 Göttingen
H. C. S.}

Man bestimme t und u so, dass die erste Grösse A (die grössere) $= \frac{tt+1}{tt-1}u$, die andre Grösse B (die kleinere) $= \frac{2t}{tt-1}u$ wird. Es wird also

$$A' = \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{tt+2t+1}{tt-1}\cdot\frac{u}{2}$$

$$B' = \frac{t+1}{tt-1}\cdot u\sqrt{t}$$

werden, oder

$$A' = \frac{t+1}{t-1}\cdot\frac{u}{2} \qquad B' = \frac{2\sqrt{t}}{t-1}\cdot\frac{u}{2}.$$

Hieraus ist klar, dass wenn man $t = t't'$, $u = 2u'$ setzt,

$$A' = \frac{t't'+1}{t't'-1}u' \qquad B' = \frac{2t'}{t't'-1}u'$$

wird, welche Ausdrücke denen für A und B ganz analog sind.

Es ist aber klar, dass wenn man ferner

$$t' = t''t'' \qquad u' = 2u''$$

$$t'' = t'''t''' \qquad u'' = 2u'''$$

etc.

macht, A'', B'' eben so durch t'', u'' und A''', B''' eben so durch t''', u''' bestimmt werden, wie A, B durch t, u, also allgemein

$$A^n = \frac{\sqrt[2^{n-1}]{t}+1}{\sqrt[2^{n-1}]{t}-1}\cdot\frac{u}{2^n} \qquad B^n = \frac{\sqrt[2^n]{t}}{\sqrt[2^{n-1}]{t}-1}\cdot\frac{u}{2^{n-1}}.$$

Nun ist für $i = \infty$

$$i(\sqrt[i]{t}-1) = \log\operatorname{hyp} t$$

und also für $n = \infty$

$$B^\infty = \frac{u}{\log t} = A^\infty.$$

Zur Bestimmung von t und u hat man übrigens $B(tt+1) = 2At$ oder

$$t = \frac{A}{B} + \sqrt{\left(\frac{AA}{BB}-1\right)}$$

wenn für t die grössere Wurzel genommen wird, also

$$u = \sqrt{(AA-BB)}$$

$$A^\infty = B^\infty = \frac{\sqrt{(AA-BB)}}{\log\left\{\frac{A}{B}+\sqrt{\left(\frac{AA}{BB}-1\right)}\right\}}.$$

[3.]

GAUSS an BESSEL. Braunschweig, den 3. September 1805.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL, Leipzig 1880, S. 10—14.]

. . . . Sie haben mir gütigst erlaubt, zuweilen bei meinen astronomischen Arbeiten Ihre bereitwillige Gefälligkeit in Anspruch zu nehmen: schon einmal haben Sie die Freundschaft gehabt, eine beschwerliche Rechnung für mich zu übernehmen, und schon wieder bin ich so frei, Ihnen eine neue zuzumuthen. Ich habe mich schon seit einiger Zeit mit Perturbationsrechnungen beschäftigt, wo ich hauptsächlich zum Behuf von Planeten wie Pallas und Juno, die eine starke Excentricität oder Neigung haben, mir eine eigne Methode ausgedacht habe, bei der allerdings viel, sehr viel Arbeit ist, der aber dies nicht zum Vorwurf gereichen kann, da, meinem Urtheile nach, alle bisherigen Methoden in einem solchen Falle ganz unzulänglich sind. Etwas Charakteristisches bei dieser Methode ist es, dass die Entwickelung der Coefficienten eines solchen Ausdruckes

$$(aa+a'a'-2aa'\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}A^0+A'\cos\varphi+A''\cos 2\varphi+A'''\cos 3\varphi \text{ etc.}$$

nicht wie bei den bisher üblichen Methoden bloss für Einen bestimmten Werth von a, a' sondern für eine grosse Menge verschiedener Werthe erforderlich werden. Z. B. Bei einer Rechnung, die ich für die Ceres[*)] unternommen habe, habe ich 50 gebraucht; bei Pallas und Juno werden noch mehrere erforderlich sein.

Nun bin ich im Besitz von besonderen, zum Theil auf ganz heterogen scheinende Untersuchungen gegründeten Kunstgriffen, jene Coefficienten mit sehr grosser Geschwindigkeit zu bestimmen. Indess macht die grosse Menge doch immer die Arbeit beschwerlich und ich habe es daher [vor], zumal da für jeden Planeten die Arbeit mehrere Male (mit den successive verbesserten Elementen) wird gemacht werden müssen, ein für allemal eine Tabelle zu berechnen, mit deren Hülfe man dann mit sehr geringer Arbeit die gesuchten Coefficienten angeben könne, und bei dieser Gelegenheit bin ich so unbescheiden, mir in Etwas Ihre Unterstützung auszubitten.

Begreiflich darf die Tafel nicht A^0, A' etc. selbst angeben, weil sie sonst doppelte Eingänge haben müsste. Hingegen zu aA^0, aA', aA'' etc. oder $a'A^0$, $a'A', a'A''$ etc. braucht man nur Einen Eingang, da diese Grössen bloss Functionen von $\frac{a}{a'}$ sind. Es ist nicht schwer, $\frac{a}{a'}=f$ gesetzt (in der Vorauss[etzung] $a<a'$), folgende Reihen zu entwickeln:

$$\tfrac{1}{2}a'A^0 = 1+\tfrac{1}{4}ff+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}f^4+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{25}{36}f^6+\text{etc.}$$
$$= 1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}ff+\tfrac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{1.3}{2.4}f^4+\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{1.3.5}{2.4.6}f^6+\text{etc.}$$
$$\tfrac{1}{2}a'A' = \tfrac{1}{2}f\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}ff+\tfrac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{3.5}{4.6}f^4+\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{3.5.7}{4.6.8}f^6+\text{etc.}\right)$$
$$\tfrac{1}{2}a'A'' = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}ff\left(1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{5}{6}ff+\tfrac{1.3}{2.4}\cdot\tfrac{5.7}{6.8}f^4+\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\tfrac{5.7.9}{6.8.10}f^6+\text{etc.}\right)$$

etc.

[*) In der Handschrift steht hier und im folgenden auch für Pallas und Juno das entsprechende Zeichen.]

Ferner ist bekannt, dass folgende Gleichungen Statt finden:

$$A^0-2\left(f+\tfrac{1}{f}\right)A'+3A''=0$$
$$3A'-4\left(f+\tfrac{1}{f}\right)A''+5A'''=0$$
$$5A''-6\left(f+\tfrac{1}{f}\right)A'''+7A^{\text{IV}}=0 \text{ etc.}$$

Gewöhnlich berechnet man A^0 und A' aus obigen Reihen und dann daraus vermittelst eben gedachter Formeln A'', A''', A^{IV} etc. Allein diess Verfahren ist zu meinem Zwecke unbrauchbar, »denn wenn A^0 oder A' nur etwas weniges »fehlerhaft sind z. B. nur um 1 in der 7ten Decimale, so werden die daraus »bei A'', A''' etc. entspringenden Fehler immer grösser, beinahe in Geometrischer »Progression, diess ist desto beträchtlicher, je kleiner f ist, und man kann für »die entfernteren Coefficienten, z. B. für A^{X}, welcher bei Pallas wol nöthig »sein kann, ganz und gar falsche Werthe erhalten.« Diese Bemerkung ist meines Wissens noch nicht gemacht, aber von Wichtigkeit. Ich habe daher auf eine ganz andere Methode gedacht, wo ich die Logarithmen selbst von A^{X} bis auf die 6te Ziffer mit den gewöhnlichen Logarithmen Tafeln genau erhalte. Ehe ich diese erkläre, bemerke ich noch, dass ich nicht $a'A^0, a'A'$, $a'A'', a'A'''$ etc. in meiner Tafel ansetze. 1) sind mir zu meinen Zwecken die Logarithmen angemessener, 2) würden die Logarithmen von diesen Grössen zu stark sich ändern und das Interpoliren zu beschwerlich machen. Ich habe es vielmehr am dienlichsten gefunden, die Logarithmen von

$$A^0\sqrt{(a'a'-aa)} = B^0$$
$$\frac{A'}{f}\sqrt{(a'a'-aa)} = B'$$
$$\frac{A''}{ff}\sqrt{(a'a'-aa)} = B''$$
$$\frac{A'''}{f^3}\sqrt{(a'a'-aa)} = B''' \text{ etc.}$$

anzusetzen, und zum Argumente der Tafel den Winkel zu nehmen (= W), dessen Tangente $\frac{a}{a'}=f$ ist. Die Tafel selbst soll von Minute zu Minute gehen und zwar fürs erste so weit als für die drei neuen Planeten zureicht, nemlich von 17° bis 35°. Natürlich aber berechne ich die Tafel nicht unmittelbar von Minute zu Minute, sondern Anfangs nur von 32′ zu 32′ und weiterhin von 16′ zu 16′ (nämlich von 33° an), das übrige findet sich dann eben so genau durch eigne Interpolations Methoden.

Ich habe demnach nach meinem Zuschnitte nöthig die Logarithmen von $B^0, B', B'' \ldots B^{\mathrm{X}}$ für die Werte von W

$$16^0\,20',\ 16^0\,52',\ 17^0\,24' \ldots\ldots 32^0\,20',\ 32^0\,36',\ 32^0\,52' \ldots\ldots 36^0\,4'$$

zusammen für 45 Werthe. Nun nehme ich über mich selbst

1) das ganze Interpolationsgeschäft
2) die ganze Rechnung für die 17 letzten Werthe
3) die Berechnung von B^0 und B' für die 28 ersten

und ersuche Sie zu übernehmen die Berechnung der übrigen Coefficienten für die 28 ersten Werthe, von 16° 20′ bis 30° 44′ inclus[ive].

Meine Berechnungsmethode ist nun folgende.

Ich setze

$$\left.\begin{aligned} B^0 &= 2N^0\,B'\,(1+ff) \\ 3B' &= 4N'\,B''\,(1+ff) \\ 5B'' &= 6N''\,B'''\,(1+ff) \\ 7B''' &= 8N'''\,B^{\mathrm{IV}}(1+ff) \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\}(\odot)$$

dadurch wird

$$\left.\begin{aligned} N^0 &= 1-\tfrac{9}{8}\left(\frac{f}{1+ff}\right)^2\frac{1}{N'} \\ N' &= 1-\tfrac{25}{24}\left(\frac{f}{1+ff}\right)^2\frac{1}{N''} \\ N'' &= 1-\tfrac{49}{48}\left(\frac{f}{1+ff}\right)^2\frac{1}{N'''} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\}(☾)$$

Man kann vermittelst dieser Formel N^0, N', N'' etc. durch continuirliche Brüche leicht darstellen; allein folgender Ausdruck, auf den ich gekommen bin, ist noch viel brauchbarer:

$$\frac{1}{N^n} = \cfrac{1+ff}{1-\cfrac{\frac{1}{(2n+3)^2-1}ff}{1-\cfrac{\frac{(2n+3)^2}{(2n+5)^2-1}ff}{1-\cfrac{\frac{9}{(2n+7)^2-1}ff}{1-\cfrac{\frac{(2n+5)^2}{(2n+9)^2-1}ff}{1-\cfrac{\frac{25}{(2n+11)^2-1}ff}{1-\cfrac{\frac{(2n+7)^2}{(2n+13)^2-1}ff}{1-\text{etc.}}}}}}}}$$

wo das alternirende Gesetz offenbar genug ist. Folglich wird

$$(1+ff)\,N^{\mathrm{X}} = 1-\cfrac{\frac{1}{528}ff}{1-\cfrac{\frac{529}{624}ff}{1-\cfrac{\frac{9}{728}ff}{1-\cfrac{\frac{625}{840}ff}{1-\cfrac{\mathbf{\frac{25}{960}ff}}{1-\cfrac{\mathbf{\frac{729}{1088}ff}}{1-\cfrac{\mathbf{\frac{49}{1224}ff}}{1-\text{etc.}}}}}}}}$$

Sie können hier ohne Bedenken die rothen[*)] Grössen ganz vernachlässigen, da sie kaum eine Einheit in der 7ten Decimale machen können. Ich habe bei den letzten Werthen von W noch ein Paar mehr genommen.

Nun, vermittelst dieser Formel berechne ich $\log N^{\mathrm{X}}$, daraus nach der Formel (☾) rückwerts $N^{\mathrm{IX}}, N^{\mathrm{VIII}} \ldots N^0$, welche alle bis auf die 7te Decimale zuverlässig werden. Ferner berechne ich nach einer eigenthümlichen äusserst bequemen Methode, die ich Ihnen in der Folge gern auch mittheile, $\log B^0$ und $\log B'$ (letztern bloss der Controle wegen), und Endlich aus $\log B^0$ und den Log[arithmen] von $N^0, N' \ldots N^{\mathrm{IX}}$ vermittelst der Formeln $(\odot)$ die Log[a-

[*)] Die in der Handschrift mit roter Tinte geschriebenen Zahlen und Buchstaben sind hier fett gedruckt.]

rithmen] von $B', B'' \ldots B^x$; der Logarithmus von B' darf von dem auf dem andern Wege gefundenen nur höchstens um 2 in der 7^{ten} Stelle differiren, in welchem Falle ich, um B'' daraus abzuleiten, gewöhnlich das Mittel nehme; ist der Unterschied 1, so ziehe ich den letztgenannten vor, ist er grösser, so liegt gewiss entweder in der einen oder der anderen Rechnung ein Fehler.

. . . . .

[4.]

Schumacher an Gauss.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher I, Altona 1860, S. 1.]

{Sie werden sich, verehrter Herr Professor! über die Zuschrift eines Unbekannten wundern, vielleicht sie etwas zu dreist finden. Ehe Sie aber mich verurtheilen, bitte ich den Brief auszulesen; ich hoffe Sie werden dann selbst gestehen, dass ich in der Sache mich nur an Sie wenden konnte.

Vor ungefähr 10 Jahren gab ein Spanier Pedrayes allen Mathematikern eine Differentialgleichung zu integriren auf, die in den Gött. Anz. und Hindenburg's Archiv [*)] abgedruckt ist. Pfaff hat sie nur für einen besonderen Fall integrirt (so viel ich noch erinnere setzt er die beyden Veränderlichen gleich), sonst ist meines Wissens gar nichts geschehen, so ungeheuer es auch scheinen mag, dass, da Sie, Laplace, Lagrange leben, ein Fremder solche Männer vergeblich ausfordern darf. Freilich sagt er, dass neue Methoden, Methoden die er erfunden, dazu erforderlich wären, aber kann er nicht durch Umwege erreicht haben, wozu man auf kürzerem Wege hätte kommen können? Und was er erfunden hat, kann es nicht nacherfunden werden? Ich gestehe Ihnen, wie ich voriges Jahr zufällig das Stück von Hindenburg in die Hand bekam, und daraus diese Umstände erfuhr, überlief mich ein Schauder, das Blut kochte mir, und in demselben Augenblick fasste ich den Entschluss (lächeln Sie immer) mich ganz der Mathematik zu widmen, zu der ich schon als Knabe mich hingerissen fühlte, und die ich seit der Zeit ohne Lehrer

[*) Göttingische gelehrte Anzeigen 1798, 37. Stück, S. 361, Hindenburgs Archiv der r. u. a. Mathematik, Heft 9, 1799, S. 85.]

durch Selbststudium verfolgt habe. — Ich hatte hier Gelegenheit mit dem Generale der spanischen Truppen, dem Marquis von Romaña bekannt zu werden, und habe von ihm das Versprechen erhalten, er werde mir Pedrayes eigne Auflösung schaffen.

Kaum hatte ich das Versprechen erhalten, so dachte ich an Sie. Gewiss, Herr Professor, Sie können die Aufgabe lösen, wenn Sie wollen! Wie ehrenvoll wäre es für Deutschland, wenn Sie unser Stolz, ehe die Auflösung vielleicht aus Spanien kömmt, sie hier gäben!

Wollten Sie mich durch ein paar Zeilen benachrichtigen, ob Sie von Ihrer kostbaren Zeit, hiezu einige Stunden abbrechen wollen, so würden Sie mich unendlich verbinden.

Mit der unbegränztesten Hochachtung

Ihr ergebenster

Schumacher,

Altona, den 2. April 1808. (Dr. der Rechte, Palmaillenstrasse im Hause der Conferenzräthin Schumacher.)}

[5.]

Gauss an Schumacher.

[Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher I, Altona 1860, S. 2.]

Vor allen Dingen muss ich Sie, mein theuerster Herr Doctor, um Vergebung bitten, dass ich Ihre verehrte Zuschrift vom 2^{ten} May [*)] so lange unbeantwortet gelassen habe. Die Sünde des Aufschiebens wird so leicht zur Gewohnheit, wenn man öfters mit Arbeiten beschäftigt ist, die den grössten Theil unsrer Zeit in Anspruch nehmen.

Was die von Ihnen erwähnte Aufgabe betrifft, so muss ich Ihnen aufrichtig gestehen, dass ich bisher es noch nicht habe über mich gewinnen können, sie zum Gegenstande einer besondern ernstlichen Untersuchung zu machen. Ich habe die Unart, ein lebhaftes Interesse bei mathematischen Gegenständen nur da zu nehmen, wo ich sinnreiche Ideenverbindungen und durch Eleganz oder Allgemeinheit sich empfehlende Resultate ahnen darf,

[*) So in der Handschrift; richtig wäre April.]

und wenn ich offenherzig sprechen soll, muss ich erklären, dass mich so etwas aus jenem Problem nicht angesprochen hat. Es kann wol seyn, dass ich irre, und dass wirklich an PEDRAYES Problem mehr ist, als man aus seiner Exposition schliessen kann, aber aller Wahrscheinlichkeit nach lässt sich wol nicht viel von jemand erwarten, der sein Problem so verworren vorträgt, dass man den Sinn nur errathen muss. Übrigens weiss ich kaum, ob sie der Aufl[ösung] des H. Prof. PFAFF nicht Unrecht thun, wenn Sie sagen, dass er die Gleichung nur für einen besonderen Fall integrirt habe: wenn PFAFF den Sinn der Aufgabe errathen hat, so ist die wahre Pointe der Aufgabe nicht das Integriren, sondern das Angeben einer Gleichung zwischen x und u, bei der jene Diff[erential]-Gleichung sich algebr[aisch] integriren lässt, und wenn es eine andere Aufl[ösung] gibt, als die des Hrn. PFAFF, so scheint es wird dieselbe bloss in der Aufstellung einer andern Relation zwischen x und u bestehen als der einfachsten $x = u$, z. B. vielleicht in einer ähnlichen wie $xx + uu = 1$ [*)].

Vielleicht wäre ich im Besitz von Wahrheiten, die zur Entscheidung dieser Sache dienen könnten. Mir ist bei der Integralrechnung immer das weit weniger interessant gewesen, wo es nur auf Substituiren, Transformiren etc. kurz auf einen gewissen geschickt zu handhabenden Mechanismus ankommt, um Integrale auf algebraische oder Logarithmische oder Kreisfunctionen zu reduciren, als die genauere tiefere Betrachtung solcher Transcendenten Functionen, die sich auf jene nicht zurückführen lassen. Mit Kreisfunctionen und Logarithmischen wissen wir jetzt umzugehen, wie mit dem 1 mal 1, aber die herrliche Goldgrube, die das Innere der höheren Functionen enthält, ist noch fast ganz Terra Incognita. Ich habe darüber ehemals sehr viel gearbeitet und werde dereinst ein eignes grosses Werk darüber geben, wovon ich bereits in meinen *Disquiss. arithm.* p. 593 [**)] einen Wink gegeben habe. Man geräth in Erstaunen über den überschwenglichen Reichthum an neuen höchst interessanten Wahrheiten und Relationen, die dergleichen Functionen darbieten (wohin u. a. auch diejenigen gehörigen, mit denen die Rectification der Ellipse und Hyperbel zusammenhängt). Es könnte wol sein, dass gerade aus diesen

[*) Die Handschrift hat $xx + yy = 1$; in der Aufgabe des PEDRAYES heissen die beiden Veränderlichen x und u.]

[**) Art. 335, Werke I, S. 412—413.]

Untersuchungen die Beantwortung der PEDRAYES-Aufgabe sich entnehmen liesse, vorausgesetzt, dass sie eine Auflösung zulässt, die wirklich einen Werth hat: allein wenn ich auch klarer sähe, dass die ganze Aufgabe zu etwas führen könnte, als dies bis jetzt der Fall ist, würde ich doch jetzt von dieser Untersuchung abstrahiren müssen, da ich mich erst dann in diese weitaussehende Materie wieder hinein werfen werde, wenn ich an die Ausarbeitung jenes grossen Werks werde denken können. Dazu bin ich aber jetzt noch mit zu vielen andern mir nicht minder interessanten Untersuchungen überhäuft.

Sollten Sie des Hrn. PEDRAYES Auflösung erhalten haben, so würden Sie mich immer sehr durch die Mittheilung verbinden, und es würde mich gewiss innigst freuen, wenn ich finden würde, dass ich mir eine falsche Vorstellung von seiner Aufgabe gemacht habe. Haben Sie sie freilich bis jetzt noch nicht, so werden Sie sie schwerlich jetzt durch den Marquis DE ROMANA erhalten.

Von meinem Werke über die Bewegung der Himmelskörper [*)] sind leider erst 17 Bogen, also etwa $^3/_5$ des Ganzen fertig. Ich hoffe, dass auf den Novbr. der Druck vollendet seyn wird.

Wird die von Ihnen angekündigte Bearbeitung von CARNOT, *Géométrie de Position* [Paris, An XI-1803 **)] bald erscheinen?

Mit ausgezeichneter Hochachtung habe ich die Ehre zu beharren

Ew. Wohlgeboren

ergebenster Diener

Göttingen, d. 17. September 1808. C. F. GAUSS.

[6.]

SCHUMACHER an GAUSS. Kopenhagen, d. 5ten April 1816.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER I, Altona 1860, S. 123—124.]

. . . . |Ein Landsmann von Ihnen ist hier Professor der Mathematik. Er heisst DEGEN. Vor einiger Zeit sagte er mir, er beschäftigte sich schon seit-

[*) *Theoria motus corporum coelestium*, Hamburgi 1809, Werke VII, 1906, S. 1 ff.; vergl. in Bezug auf den Druck dieses Werkes die Briefe von GAUSS an OLBERS, *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II, 1, 1900, S. 396, 409, 414, 419, 422, 431.]

[**) Siehe: L. N. M. CARNOT, *Geometrie der Stellung*, aus dem Französischen übersetzt mit Anmerkungen von H. C. S. SCHUMACHER, I, II, Altona 1808—1810.]

dem er TETENS Schüler sei, mit gewissen Mediis arithmetico-geometricis, die von den Ihrigen verschieden sind. Er nimmt nemlich zwei Grössen, von denen a die grössere, b die kleinere seyn soll (die Stelle ist gleichgültig)

$$a,\ \tfrac{1}{2}(a+b) = a',\ \tfrac{1}{2}(a'+b') = a'',\ \text{u. s. w.}$$
$$b,\quad \sqrt{ab} = b',\quad \sqrt{a'b'} = b'',\ \text{u. s. w.}$$

Er selbst weiss nur, dass diese Reihe einen Limes hat, den man bald findet. Ich habe mich sehr mit diesem Limes beschäftigt und bin jetzt so glücklich gewesen, einen Zusammenhang mit der Ellipse zu finden, den ich mir die Freiheit nehme Ihnen vorzulegen. Da der Limes dieser Reihe so wie ich ihn dargestellt habe, von $\frac{a}{b}$ abhängt, so bezeichne ich ihn mit $M\left(\frac{b}{a}\right)$. Ich nenne ferner die sehr schnell convergirende Reihe (aus den Differenzen der successiven $a, a', a'' \ldots$ gebildet)

$$\frac{a-a'}{2a'} + \frac{a-a'}{2a'}\cdot\frac{a'-a''}{2a''} + \frac{a-a'}{2a'}\cdot\frac{a'-a''}{2a''}\cdot\frac{a''-a'''}{2a'''} + \cdots$$

$\mathfrak{M}\left(\frac{b}{a}\right)$, dann ist

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a'}{M\left(\frac{b}{a}\right)} - \frac{(a-a')\,\mathfrak{M}\left(\frac{b}{a}\right)}{M\left(\frac{b}{a}\right)}\right) = \text{Quadrans Ellipseos}\left(\frac{b'}{a'}\right),$$

wo das Zeichen $\left(\frac{b'}{a'}\right)$ eine Ellipse bedeutet, deren grosse Axe $= 1$, kleine Axe $= \frac{b'}{a'}$ ist. Ich habe nun DEGEN angezeigt, ich habe seinen Limes gefunden und halte es für billig zu warten, ob er dasselbe finde. Wie ich vor 14 Tagen an LINDENAU schrieb, hatte ich den Limes noch nicht.

Gewiss haben Sie bei Ihren Mediis auch dieses angesehen, und Sie würden mich sehr durch ein paar Worte darüber verbinden.

Leben Sie wohl, werthester Freund und vergessen Sie nicht

Ihren ganz eignen

SCHUMACHER.]

[7.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, den April 1816.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und SCHUMACHER I, Altona 1860, S. 125—126.]

. . . . Haben Sie denn wirklich vergessen, dass das Arithmetisch Geometrische Mittel, mit welchem Hr. DEGEN sich beschäftigt, ganz dasselbe ist, womit ich mich seit 1791 beschäftigt habe, und jetzt einen ziemlichen Quartband darüber schreiben könnte? Ich habe zwar ausser jenem auch noch andere ar[ithmetisch-]geo[metrische] Mittel betrachtet, die aber ganz elementarisch sind[*]. Jenes ist das wahre, worüber Sie hier auch eine im Jahre 1800 von mir angefangene kleine Abhandlung gelesen haben (in einem blauen Octavbande, *Varia* betitelt[**]), worin noch von Ihrer Hand eine Restitutio in Integrum einiger durch einen Dintenfleck unkenntlich gewordenen Stellen zu sehen ist).

In jener Abhandlung steht theils ein Beweis, dass wenn ein Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{(g+h\cos\varphi)}}$$

in die Reihe

$$A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + D\cos 3\varphi \ldots$$

verwandelt wird, $\frac{1}{A}$ das Medium Arithm. Geom. zwischen dem grössten und kleinsten Werthe von $\sqrt{(g+h\cos\varphi)}$, d. i. zwischen $\sqrt{(g+h)}$ und $\sqrt{(g-h)}$ ist, theils der Beweis, dass

$$d\,\mathrm{Med}\,(x,y) = \mathrm{Med}\,(x,y) \times \left\{\begin{array}{l} \frac{dx}{x}\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cdot\frac{x-x'}{x'} + \frac{1}{8}\cdot\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''} + \text{etc.}\right) \\ + \frac{dy}{y}\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x-x'}{x'} - \frac{1}{8}\cdot\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''} - \text{etc.}\right) \end{array}\right\}$$

Gerade diese Formel unter andern ist von Ihnen selbst restituirt.

Durch die Media und ihre Differentiale kann man dann leicht die übrigen Coefficienten B, C, D etc. bestimmen, so wie überhaupt die Coefficienten von

[*] Vergl. den Brief [2.] und den zugehörigen Anhang, oben S. 234—237.]

[**] Dieser Band befindet sich unter der Bezeichnung »Handbuch 15, Ba« im Gaussarchiv; die betreffende Abhandlung steht S. 3—18, sie ist Werke III, S. 361—374 abgedruckt.]

$(g+h\cos\varphi)^{\frac{1}{2}-k}$, wo k irgend eine ganze Zahl ist (welche Reduction bekannt genug ist).

In dem zweiten Theile der Abhandlung *Disquisitiones Generales circa Seriem infinitam* $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x$ etc. (welche ich vielleicht bald gebe) werde ich einen Theil meiner Untersuchungen über die Ar. Geom. Mittel bekannt zu machen anfangen.

Leben Sie wohl, werthester Freund, und vergessen sie nicht

Ihren ergebensten

C. F. G[AUSS.]

[8.]

GAUSS an BESSEL. Göttingen den 30. März 1828.

[Briefwechsel zwischen GAUSS und BESSEL, Leipzig 1880, S. 477.]

. . . . . . Zur Ausarbeitung der seit vielen Jahren (1798) angestellten Untersuchungen über die transcendenten Functionen werde ich vorerst wol noch nicht kommen können, da erst noch mit manchen andern Dingen aufgeräumt werden muss. Hr. ABEL ist mir, wie ich sehe, jetzt zuvorgekommen[*]] und überhebt mich in Beziehung auf etwa $^1/_3$ dieser Sachen der Mühe, zumahl da er alle Entwickelungen mit Eleganz und Concision gemacht hat. Er hat gerade denselben Weg genommen, welchen ich 1798 einschlug, daher die grosse Übereinstimmung der Resultate nicht zu verwundern ist. Zu meiner Bewunderung erstreckt sich dies sogar auf die Form und zum Theil auf die Wahl der Zeichen, so dass manche seiner Formeln wie eine reine Abschrift der meinigen erscheinen. Jeder Misdeutung zuvorzukommen bemerke ich jedoch, dass ich mich nicht erinnere, von diesen Sachen irgend jemanden etwas mitgetheilt zu haben.

Nicht dasselbe kann ich aber von einer Kleinigkeit sagen, die Sie im 1. Heft des 3. Bds von CRELLE's Journal[**]] von mir finden werden.

[*) Siehe N. H. ABEL, *Recherches sur les fonctions elliptiques*, CRELLEs Journal für Mathematik 2 (1828), S. 101, Oeuvres, nouvelle édition, I, 1881, S. 263—351; dieser erste Teil der *Recherches* ist am 20. September 1827 erschienen.]

[**) *Beweis eines algebraischen Lehrsatzes*, CRELLEs Journal für Mathematik 3, 1828, S. 1, Werke III, S. 65.]

Diesen Beweis des HARRIOT'schen Lehrsatz[es] habe ich, seitdem ich in Göttingen bin, sehr häufig mündlich vorgetragen[*)]; der verstorbene PFAFF schrieb mir u. a. mehrere Jahre vor seinem Tode[**)], dass er ihm in Halle von jemand (als von mir herrührend) mitgetheilt sei, der ihn wieder durch die zweite oder dritte Hand aus Jena erhalten habe, wie ich vermuthe von dem verst[orbenen] POSSELT; PFAFF, dessen Beifall dieser Beweis erhalten hatte, ersuchte mich um meine Zustimmung, um ihn in einer Sammlung von Abhandlungen, die er herauszugeben beabsichtigte, bekannt zu machen. Ich gab ihm diese natürlich gern; allein das projectirte Buch ist meines Wissens nicht erschienen. Ob dies in einem Zusammenhange mit dem Erscheinen eines Beweises von derselben Grundidee in dem letzten Hefte des 2n Bandes von CRELLES Zeitschrift[***)] (welches mir erst fast zugleich mit dem 1ten des 3. Bdes zu gesichte gekommen ist, etwa 3 oder 4 Monate später als ich CRELLE den Aufsatz geschickt hatte) steht, muss ich auf sich beruhen lassen. . . . . . .

Anhang zu [8.]

[a.]

PFAFF an GAUSS. Halle, 20. Oktober 1824.

[. . . . . Ehe ich meinen alten Vorsatz, ein Lehrbuch der algebraischen und höheren Analysis (über welche ich öfter lese) herauszugeben, ausführe, gedenke ich einige Abhandlungen und weitere Ausführungen einzelner Lehren (wie auch KAESTNER gerathen und gethan hat) herauszugeben, und vielleicht schon in der nächsten Ostermesse einen Anfang damit zu machen. Darunter gehört auch die Entwickelung des HARRIOTTischen Satzes. Zufällig erhielt ich vor einigen Jahren von einem Zuhörer, der früher in Jena Analysis bey Prof. v. MÜNCHOW gehört hatte, ein Vorlesungs-Heft von letzterem, worin auch ein Beweis des HARRIOTTischen Satzes, als von Ihnen herrührend und mitgetheilt, vorkommt. In ein schon seit geraumer Zeit ins reine gearbeitetes Manuscript

[*) Vergl. M. A. STERN, *Über einen Satz von Gauss*, Göttinger Nachrichten 1869, S. 330, abgedruckt Werke X 2, S. 70.]

[**) Siehe die als Anhang zu diesem Briefe abgedruckten beiden Briefstellen.]

[***) Gemeint ist jedenfalls: *Beweis des Harriotischen Satzes* von J. A. GRUNERT, CRELLEs Journal für Mathematik 2 (1828), S. 335—344.]

nahm ich (mit denjenigen Änderungen, welche die Verbindung mit dem übrigen erforderte) Ihren einfachen und sinnreichen Beweis auf, weil durch dessen Weglassung eine wesentliche Lücke in der Abhandlung entstanden wäre, und weil ich dachte, dass Sie bei Ihren übrigen wichtigen und schweren Untersuchungen schwerlich so bald dazu kommen würden, diesen Beweis selbst bekannt zu machen. Jezt benuze ich gegenwärtige Gelegenheit, Sie um die Genehmigung dieser Bekanntmachung zu bitten. . . . .]

[b.]

GAUSS an PFAFF. Göttingen, 21. März 1825.

[Sammlung von Briefen gewechselt zwischen JOH. FRIEDRICH PFAFF und . . . . Anderen; herausg. von Dr. CARL PFAFF, Leipzig 1853, S. 277—278.]

. . . . . . Im nächsten Sommer werden mich meine Dreiecksmessungen wieder von Göttingen entfernen; ich habe noch ein Dreiecksnetz von Barmen bis Ostfriesland, der Nordsee und Helgoland zu führen. Ich wünsche sehr alle Arbeiten dieser Art, die noch rückständig sind, in einem Stück zu vollenden, um dann die Lebensjahre, die der Himmel mir noch schenken wird, ungestört auf Arbeiten im Studirzimmer wenden zu können. Jene Messungen erhalten einen ihrer vornehmsten Reize für mich durch den Umstand, dass sie mir Gelegenheit zur Anwendung der mir eigenthümlichen theoretischen Methode, solche Messungen zu behandeln, geben. Nach Beendigung der Messungen werde ich darüber ein eigenes Werk, vermuthlich von bedeutender Ausdehnung ausarbeiten[*]. Meine Preisschrift über die Transformation der Flächen ist, wie ich höre, jetzt unter der Presse[**]. Gegenwärtig bin ich mit einer Untersuchung aus der höheren Arithmetik beschäftigt als Anfang der Theorie der biquadratischen Reste; wenn es möglich ist, werde ich die Abhandlung der

[*] Erschienen sind die Abhandlungen
Disquisitiones generales circa superficies curvas, 1827, Werke IV, S. 217;
Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodaesie I, 1843, ebenda, S. 259; II, 1846, ebenda, S. 301.]

[**] *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*, erschienen Altona 1825, Werke IV, S. 189; vergl. in bezug auf den Druck dieser Abhandlung *Briefwechsel zwischen C. F. Gauss und H. Schumacher* II, 1860. S. 5—7.]

k. Societät noch vor meiner diesjährigen Abreise vorlegen[*]. Mit Verlangen sehe ich Ihrem neuen Werk entgegen[**]. Ich rechne mir's zur Ehre, dass Sie meinen Beweis des HARRIOTischen Lehrsatzes darin aufnehmen wollen: ich habe ihn öfters mündlich vorgetragen, ohne doch zu wissen, wie er in die Hände des Professor MÜNCHOW gekommen ist. Die Besorgniss, dass er, durch mehrere Hände gegangen, vielleicht verunstaltet sein könnte, beunruhigt mich nicht, da Sie in diesem Fall dies sogleich erkannt haben und mir ihn dann erst zur Anerkennung communicirt haben würden. So wie ich mir ihn aufgezeichnet habe, füllt er nicht viel über eine Octavseite. . . . .

BEMERKUNGEN.

Die im Vorstehenden (beginnend auf S. 172) zum ersten Male im Zusammenhange abgedruckten Aufzeichnungen geben im Verein mit den bereits in den Bänden III und VIII der Werke aus dem Nachlaß veröffentlichten Stücken und mit den artt. 16.—19. der von GAUSS selbst veröffentlichten *Determinatio attractionis* (1818, Werke III, S. 352) so ziemlich alles, was von GAUSS' Arbeiten zur Lehre von dem arithmetisch-geometrischen Mittel***) auf uns gekommen ist. Zum Teil sind die vorstehenden Aufzeichnungen so lückenhaft, daß sie ausführliche Erläuterungen erfordern. Wir werden uns dabei einer festen und einheitlichen Bezeichnung bedienen, die wir im engen Anschluß an GAUSS wählen und hier mit einem Abriß der Lehre von dem agM. vorab zusammen stellen wollen. Die Anordnung dieses Abrisses soll zugleich den Gang der Entwicklung von GAUSS' Untersuchungen auf diesem Gebiete veranschaulichen. Es folgen dann die eigentlichen Erläuterungen nach Abschnitten geordnet.

Abriß der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels.

1.

Es seien a, b zwei beliebige Zahlen, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a^2 \neq b^2$. Wir bilden den Algorithmus †)

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} a_1 = \dfrac{a+b}{2}, & b_1 = \sqrt{ab}, \\ a_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}, & b_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2}, & b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}\right.$$

[*] Die Abhandlung *Theoria residuorum biquadraticorum, Comment. prima*, Werke II, S. 65, ist der Königl. Societät am 5. April 1825 vorgelegt worden. Dem Briefwechsel nach hat GAUSS seine Reise um den 20. April angetreten.]

[**] Dieses Werk von PFAFF ist, vergl. GAUSS an BESSEL, oben S. 247, nicht erschienen; PFAFF ist am 20. April 1825 gestorben.]

***) Wir schreiben im folgenden allemal kurz agM.

†) Er findet sich schon bei LAGRANGE, *Sur une nouvelle Méthode de calcul intégral*, Mémoires de l'Acad. de Turin, 2, 1784—85, Oeuvres II, S. 251, siehe besonders S. 272 ff., 304 ff.

Dann existiert *)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = M(a,b) = M(a_n, b_n) \tag{2}$$

und wird das agM. zwischen a und b genannt. Es ist für ein beliebiges ρ

$$M(\rho a, \rho b) = \rho M(a,b). \tag{3}$$

Setzt man

$$c^2 = \sqrt{a^2-b^2} \tag{4}$$

und bildet den Algorithmus

$$\left\{\begin{array}{l} \bar{a}_1 = \dfrac{a+c}{2},\ \ \bar{c}_1 = \sqrt{ac}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \bar{a}_{n+1} = \dfrac{\bar{a}_n+\bar{c}_n}{2},\ \ \bar{c}_{n+1} = \sqrt{\bar{a}_n\bar{c}_n}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{5}$$

der zu dem Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \bar{a}_n = \lim_{n\to\infty} \bar{c}_n = M(a,c) \tag{6}$$

führt, so kann zwischen den beiden Algorithmen (1) und (5) durch Rückwärtsverlängerung ein Zusammenhang hergestellt werden. Man bildet zu dem Ende:

$$c_n = \sqrt{a_n^2-b_n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{4a}$$

Dann ist

$$\left\{\begin{array}{ll} a = a_1+c_1, & b = a_1-c_1, \\ \dots\dots\dots & \\ a_{n-1} = a_n+c_n, & b_{n-1} = a_n-c_n. \end{array}\right. \tag{7}$$

Man bildet nun analog

$$\left\{\begin{array}{lll} a_{-1} = a+c, & b_{-1} = a-c, & c_{-1} = \sqrt{a_{-1}^2-b_{-1}^2}, \\ \dots\dots\dots & & \\ a_{-n-1} = a_{-n}+c_{-n}, & b_{-n-1} = a_{-n}-c_{-n}, & c_{-n-1} = \sqrt{a_{-n+1}^2-b_{-n-1}^2}, \end{array}\right. \tag{1'}$$

dann gelten in den beiden Folgen

$$\dots a_{-2},\ a_{-1},\ a,\ a_1,\ a_2,\ \dots$$
$$\dots b_{-2},\ b_{-1},\ b,\ b_1,\ b_2,\ \dots$$

die für positive Indizes aufgestellten Beziehungen auch für negative Indizes und es ist ferner

$$\frac{1}{2^n} a_{-n} = \bar{a}_n,\quad \frac{1}{2^n} c_{-n} = \bar{c}_n. \tag{8}$$

Die Rückwärtsverlängerung des Algorithmus (5) ergibt sich, indem man setzt

*) GAUSS liefert den Existenzbeweis (Werke III, S. 361) nur für reale positive a, b und unter der Annahme, daß in dem Algorithmus (1) alle Quadratwurzeln mit dem positiven Vorzeichen gewählt werden. Den direkten und vollständigen Existenzbeweis für den allgemeinsten Fall hat zuerst L. v. DÁVID erbracht, CRELLES Journal für Mathematik **135** (1907), S. 62.

$$\bar{b}_n^2 = \bar{a}_n^2-\bar{c}_n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \dots) \tag{8}$$

und

$$\left\{\begin{array}{lll} \bar{a}_{-1} = a+b, & \bar{c}_{-1} = a-b, & \bar{b}_{-1} = \sqrt{\bar{a}_{-1}^2-\bar{c}_{-1}^2}, \\ \dots\dots\dots & & \\ \bar{a}_{-n-1} = \bar{a}_{-n}+\bar{b}_{-n}, & \bar{c}_{-n-1} = \bar{a}_{-n}-\bar{b}_{-n}, & \bar{b}_{-n-1} = \sqrt{\bar{a}_{-n-1}^2-\bar{c}_{-n-1}^2} \\ \dots\dots\dots & & \end{array}\right. \tag{5'}$$

Es ist dann für $n = 1, 2, 3, \dots$

$$2^n a_n = \bar{a}_{-n},\quad 2^n b_n = \bar{b}_{-n},\quad 2^n c_n = \bar{c}_{-n} \tag{8a}$$

und ferner

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\bar{a}_{-n}}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\bar{b}_{-n}}{2^n} = M(a,b) = M(a_n, b_n) \\ \qquad = M(a_{-n}, b_{-n}) = 2^{-n} M(\bar{a}_{-n}, \bar{b}_{-n}) = 2^n M(\bar{a}_n, \bar{b}_n), \\ \lim\limits_{n\to\infty} \bar{a}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \bar{c}_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{-n}}{2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_{-n}}{2^n} = M(a,c) = M(\bar{a}_n, \bar{c}_n) \\ \qquad = M(\bar{a}_{-n}, \bar{c}_{-n}) = 2^n M(a_n, c_n) = 2^{-n} M(a_{-n}, c_{-n}). \end{array}\right. \tag{9}$$

Endlich bestehen die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\bar{a}_n}+\sqrt{\bar{b}_n} = 2\sqrt{\bar{a}_{n+2}}, \\ \sqrt{\bar{a}_n}-\sqrt{\bar{b}_n} = 2\sqrt{\bar{c}_{n+2}}, \end{array}\right. \tag{10}$$

wo $a_0 = a$, $b_0 = b$, $c_0 = c$ zu nehmen ist.

2.

Aus den Definitionsgleichungen des Algorithmus folgen (siehe Werke III, S. 373, vergl. auch die Ausführungen von SCHERING, ebenda S. 380) die Gleichungen

$$\frac{1}{c^2}\, d\log\frac{a}{b} = \frac{1}{2^n}\frac{1}{c_n^2}\, d\log\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2^n}\frac{1}{b_n^2}\, d\log\frac{c_n}{a_n} = \frac{1}{2^n}\frac{1}{a_n^2}\, d\log\frac{c_n}{b_n}. \tag{11}$$

Lassen wir also n als positive ganze Zahl ins Unendliche wachsen, so ist

$$\frac{1}{c^2}\, d\log\frac{a}{b} = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\frac{1}{b_n^2}\, d\log\frac{a_n}{c_n}$$

oder, da nach (9)

$$\frac{1}{2^n}\log\frac{4a_n}{c_n} = \frac{M(a,b)}{M(a,c)}\cdot\frac{M(a_n,c_n)}{M(a_n,b_n)}\log\frac{4a_n}{c_n} \tag{12}$$

ist,

$$\frac{1}{c^2}\, d\log\frac{a}{b} = -C\,\frac{1}{M(a,b)^2}\, d\,\frac{M(a,b)}{M(a,c)}, \tag{13}$$

wo für einen Augenblick

$$C = \lim_{n\to\infty}\frac{M(a_n,c_n)}{M(a_n,b_n)}\log\frac{4a_n}{c_n} = \lim_{\varepsilon\to 0} M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon} \tag{14}$$

gesetzt wurde. Zur Bestimmung dieses Grenzwertes schlägt GAUSS in der Aufzeichung [IX.] art. [4.], S. 220 das folgende Verfahren ein.

Wir setzen

$$k = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} = \frac{c}{a}, \quad k' = \frac{b}{a}, \quad k^2+k'^2 = 1, \tag{15}$$

$$\begin{cases} A = \dfrac{a}{M(a,c)} = \dfrac{1}{M(1,k)}, \\ B = \dfrac{a}{M(a,b)} = \dfrac{1}{M(1,k')}. \end{cases} \tag{16}$$

Dann lautet die Gleichung (13)

$$-\frac{1}{c^2}\, d\log k' = -\frac{C}{a^2}(A\,dB - B\,dA)$$

oder (vergl. Werke III, S. 222, Gl. [96] und oben [IX.] art. [4.], S. 220)

$$\frac{1}{C} = k'(k'^2-1)\left(A\frac{dB}{dk'} - B\frac{dA}{dk'}\right). \tag{17}$$

Für A, B gelten die Reihenentwicklungen

$$A = 1 + \frac{1}{4}k'^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k'^4 + \cdots = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k'^2\right), \quad |k'| < 1, \tag{18}$$

$$B = 1 + \frac{1}{4}k^2 + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 k^4 + \cdots = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, k^2\right), \quad |k| < 1, \tag{19}$$

die am einfachsten nach der von GAUSS in der Abhandlung vom Jahre 1800 (Werke III, S. 366) angegebenen Methode *) abgeleitet werden können.

Aus ihnen ergibt sich (vergl. den art. 8. der Abhandlung von 1800, Werke III, S. 370) zunächst, daß A, B ein System linearunabhängiger Lösungen der Differentialgleichung

$$k'(k'^2-1)\frac{d^2u}{dk'^2} + (3k'^2-1)\frac{du}{dk'} + k'u = 0 \tag{20}$$

bilden. Daraus folgt durch einfache Integration, daß die rechte Seite von (17), also auch C, von k' unabhängig ist (siehe oben [IX.] art. [4.], S. 220 **)).

Ferner läßt sich mit Hilfe der Reihenentwicklungen (18), (19) leicht die Beziehung angeben, die das agM. mit dem Ellipsenquadranten verknüpft.

Für eine Ellipse mit den Halbachsen a und b, $a > b$ hat man die bekannten Darstellungen des Quadranten q durch Integral und Reihe ***)

$$\begin{cases} q = a\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-k^2x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\ \quad = \dfrac{\pi}{2}a\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{k^2}{1} - \left(\dfrac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2\dfrac{k^4}{3} - \cdots\right). \end{cases} \tag{21}$$

Die Vergleichung mit (19) ergibt (siehe oben [II.] art. [2.], Gl. [14], S. 178)

*) Vergl. H. v. MANGOLDT, *Über eine Stelle aus den von Gauss nachgelassenen Schriften über das arithm.-geom. Mittel*, Zeitschrift für Mathem. und Physik **20**, 1875, S. 362.

**) Vergl. auch den art. [4.] des Abschnitts [VII.] S. 211.

***) Siehe z. B. EULER, *Animadversiones in Rectificationem Ellipsis*, Opuscula varii argumenti II (1750). S. 128; Opera omnia, ser. I, vol. 20, S. 21. Vergl. oben [II.], art. [1.], S. 177.

$$q = \frac{\pi}{2}a\left(k(1-k^2)\frac{dB}{dk} + (1-k^2)B\right). \tag{22}$$

Nun folgt aus der Differentialgleichung (20) auf elementare Weise, daß

$$\lim_{k\to 1}(1-k)B = 0, \tag{23}$$

ferner ist geometrisch evident, daß für ein festes a und gegen Null abnehmendes b der Ellipsenquadrant dem Grenzwert a zustrebt, also daß

$$\lim_{k\to 1} q = a \tag{24}$$

ist. Danach ergibt sich aus (22)

$$\lim_{k\to 1} k(1-k^2)\frac{dB}{dk} = \frac{2}{\pi}. \tag{25}$$

Da A ebenso von k' abhängt, wie B von k, so folgt aus (23) und (25)

$$\lim_{k'\to 1}(1-k')A = 0, \quad \lim_{k'\to 1} k'(1-k'^2)\frac{dA}{dk'} = \frac{2}{\pi}, \tag{26}$$

und da nach (19) offenbar

$$\lim_{k'\to 1} B = 1, \quad \lim_{k'\to 1}\frac{dB}{dk'} = -\frac{1}{2}$$

ist, so finden wir, indem wir in der Gleichung (17) k' gegen 1 konvergieren lassen,

$$\frac{1}{C} = \frac{2}{\pi} \tag{27}$$

wodurch der Grenzwert (14) gleich $\frac{\pi}{2}$, also die Gleichung

$$\lim_{\varepsilon\to 0} M(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon} = \frac{\pi}{2} \tag{14a}$$

gefunden ist. Die Gleichung (13) erscheint hiernach in der Form

$$\frac{1}{c^2}\,d\log\frac{a}{b} = -\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{M(a,b)^2}\,d\,\frac{M(a,b)}{M(a,c)}, \tag{13a}$$

und aus (12) ergibt sich, indem man n ins Unendliche wachsen läßt,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\log\frac{4a_n}{c_n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{M(a,b)}{M(a,c)}. \tag{12a}$$

Die Gleichung (13a) hat GAUSS für außerordentlich wichtig gehalten, er hat sie wiederholt aufgezeichnet, oben [IX.] art. [4.] als Schönen Lehrsatz, in der Werke VIII, S. 98 abgedruckten Aufzeichnung als Theorema elegantissimum.

3.

Die für $|x| < 1$ konvergenten Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind,

$$\begin{cases} p(x) = 1 + 2x + 2x^4 + 2x^9 + \cdots \\ q(x) = 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \cdots \end{cases} \tag{28}$$

erfüllen (vergl. Werke III, S. 466) die Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(p(x)^2 + q(x)^2\right) = p(x^2)^2, \\ p(x)\,.\,q(x) = q(x^2)^2. \end{cases} \tag{29}$$

Setzt man also

$$a = \mu\, p(x)^2, \quad b = \mu\, q(x)^2, \tag{30}$$

so ist

$$a_n = \mu\, p(x^{2^n})^2, \quad b_n = \mu\, q(x^{2^n})^2. \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{31}$$

Es entsteht nun die Frage, ob sich bei gegebenen a, b die Größen μ und x stets so bestimmen lassen, daß die Gleichungen (30) bestehen.

Da

$$\lim_{n \to \infty} p(x^{2^n}) = \lim_{n \to \infty} q(x^{2^n}) = 1$$

ist, so wird das agM. zwischen $p(x)^2$ und $q(x)^2$ gleich Eins (vergl. Werke III, S. 467, Theorem (23)), wir haben also

$$\mu = M(a, b). \tag{32}$$

Bildet man nun $r(x)$ so, daß

$$r(x)^4 = p(x)^4 - q(x)^4,$$

so ist also

$$c = M(a, b)\, r(x)^2 \tag{33}$$

und allgemein

$$c_n = M(a, b)\, r(x^{2^n})^2, \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{33 a}$$

und es ergibt sich aus der zweiten der Gleichungen (10) für $n = 0$

$$2\, r(x^4) = p(x) - q(x), \tag{34}$$

$$r(x) = 2\, x^{\frac{1}{4}} (1 + x^2 + x^6 + x^{12} + \ldots) \tag{35}$$

Hiernach haben wir

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{r(x^{2^n})}{2} \right\}^{\frac{1}{2^{n-2}}} = x, \tag{36}$$

also nach (33)

$$x = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{c_n}{4\, M(a, b)} \right\}^{\frac{1}{2^{n-1}}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{c_n}{4\, a_n} \right)^{\frac{1}{2^{n-1}}} \tag{37}$$

(vergl. oben [IX.] art. [11.], S. 227)), so daß die Vergleichung mit (12 a) die Bestimmung

$$x = e^{-\pi \frac{M(a, b)}{M(a, c)}} \tag{38}$$

ergibt.

4.

Die Beziehung des agM. zum vollständigen elliptischen Integral erster Gattung wird durch die Formeln (vergl. (15), (16))

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \frac{a}{M(a, c)} = \frac{1}{M(1, k)} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k'^2 x^2)}} \\ B &= \frac{a}{M(a, b)} = \frac{1}{M(1, k')} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}} \end{aligned} \right. \tag{39}$$

dargestellt. Für ihre Herleitung hat GAUSS zwei verschiedene Methoden angegeben. Bei der ältern*) wird zuerst mit Hilfe der Reihenentwicklung (18) von A gezeigt, daß in der Entwicklung nach Kosinus der Vielfachen von φ der Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 \cos^2 \varphi}} = P + 2\, Q \cos 2\varphi + 2\, R \cos 4\varphi + \cdots$$

der von φ freie Teil

$$P = \frac{1}{M(1, \sqrt{1 - k'^2})} = A$$

ist, woraus dann durch Integration in Bezug auf φ zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ die Integraldarstellung (39) von A folgt. Bei der späteren**) wird durch Anwendung der LANDENschen Transformation***) direkt die Invarianz des Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}}$$

beim Übergange von a, b zu a_1, b_1 gezeigt und daraus die Darstellung (39) durch Grenzübergang gewonnen.

Erläuterungen zu [I.], S. 172—176.

In der Formel [1] des art. [1.] bedeutet Tm. $(1 + x)$, was »Terminus medius ipsius $1 + x$« zu lesen wäre, das agM. zwischen $1 + x$ und 1 also

$$\text{Tm.}\,(1 + x) = M(1 + x, 1), \tag{[1]'}$$

die für $|x| < 1$ konvergente Potenzreihe findet sich (mit einer Methode für ihre Herleitung) im art. 5. der Abhandlung von 1800, Werke III, S. 365. Eine andere Methode, um zu dieser Reihenentwicklung zu gelangen, gibt PFAFF in seinem Briefe vom 24. November 1799 (siehe Briefwechsel [1.], S. 232, vergl. auch die unten folgenden Erläuterungen dazu). In [2] stellt GAUSS die Umkehrung der Reihe [1] auf.

In [3] wird eine neue Funktion eingeführt, die GAUSS als »Basis cuius modulus u« also als Umkehrung einer Funktion »Modulus« bezeichnet†). Diese erscheint am Ende des art. [2.] als $\lambda(1 + z)$, in dem der Scheda Ab entnommenen art. [3.] wird sie mit $l(1 + x)$ bezeichnet. Die im art. [4.], Formel [8], oben S. 175 angedeutete Rechnung zeigt, daß, soweit die ersten Glieder in Betracht kommen,

$$1 + x = 1 + u + \frac{u^2}{4} + \frac{u^4}{448} - \frac{u^5}{2240} + \cdots \tag{[3]'}$$

in der Tat die Umkehrung der Reihe

$$u = l(1 + x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} - \frac{9}{112} x^4 + \frac{131}{2240} x^5 + \cdots \tag{[6]'}$$

---

*) Siehe die Aufzeichnungen [III.] art. [2.], oben S. 182 und [IV.] artt. [1.], [2.], S. 184, 185, ferner die Abhandlung von 1800, art. 8, Werke III, S. 370 und Werke VIII, S. 64.

**) Siehe die Aufzeichnung [IX.] art. [10.] oben S. 227 und die *Determinatio attractionis* (1818), art. 16, Werke III, S. 352.

***) Diese findet sich schon bei LAGRANGE a. a. O. Oeuvres II, S. 273.

†) Vergl. die Angabe zu Beginn des art. [1.]; die Reihe [3] liefert für $u = 0{,}82781$ in der Tat angenähert den Wert 2.

ist; die Addition der in [8] untereinander stehenden Reihen gibt nämlich $1+x$. Zu einer analytischen Definition der Funktion Basis cuius modulus u oder $1+x$ führt die Darstellung [4], oben S. 172, von x^2. Danach ist nämlich

$$[4]' \qquad x^2 = u^2 + \frac{u^3}{1.2} + \frac{u^4}{1.2.8} + \frac{u^5}{1.2.8.14} + \frac{u^6}{1.2.8.14.20} + \cdots,$$

also, wenn wir in bekannter Weise *)

$$P_u(k) = \int_0^u e^{-t} t^{k-1}\, dt = e^{-u} u^k \left\{ \frac{1}{k} + \frac{u}{k(k+1)} + \frac{u^2}{k(k+1)(k+2)} + \cdots \right\}$$

setzen,

$$[4]'' \qquad x^2 = u^2 + \frac{u^3}{1.2}\left\{1 + e^{\frac{u}{6}} \left(\frac{u}{6}\right)^{-\frac{1}{3}} P_{\frac{u}{6}}\left(\frac{8}{6}\right)\right\}.$$

Hieraus folgt

$$1 + x = 1 + \sqrt{u^2 + \frac{u^3}{2}\left(1 + e^{\frac{u}{6}}\left(\frac{u}{6}\right)^{-\frac{1}{3}} \int_0^{\frac{u}{6}} e^{-t} t^{\frac{1}{3}}\, dt\right)}$$

oder

$$[3]'' \qquad x = u\sqrt{1 + \frac{u}{2}\left(1 + e^{\frac{u}{6}} u^{-\frac{1}{3}} \frac{1}{6} \int_0^u e^{-\frac{u}{6}} u^{\frac{1}{3}}\, du\right)}.$$

Hiernach besteht zwischen x und u die Differentialgleichung

$$(\alpha) \qquad du(16x^2 - 4u^2 + ux^2) = 12uxdx.$$

Die neuere Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung ermöglicht es, mit Hilfe dieser Differentialgleichung die Gaussschen Angaben zu bewahrheiten. Ich verdanke der Güte von J. Horn die folgende Analyse der Differentialgleichung (α).

»Setzt man $u = x(1+w)$, so verwandelt sich unsere Differentialgleichung in

$$(\beta) \qquad x\frac{dw}{dx} = \frac{8w - x + 12w^2 - 2xw + 4w^3 - xw^2}{12 - 8w + x - 4w^2 + xw},$$

die für kleine Werte von x und w die Form

$$x\frac{dw}{dx} = \frac{2}{3}w - \frac{1}{12}x + \cdots$$

hat. Setzt man also $\xi = cx^{\frac{2}{3}}$ (c eine Konstante), so wird die Differentialgleichung (β) durch eine Potenzreihe

$$w = C_{10}x + C_{01}\xi + \cdots$$

von x und ξ befriedigt, die für kleine $|x|$ und $|\xi|$ konvergiert. Für $c = 0$ hat man die in der Umgebung von $x = 0$ holomorphe Lösung

$$w = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots$$

*) Vergl. z. B. Niels Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig 1906, S. 25, l. (1), S. 28, Gl. (4), S. 210, Gl. (1).

Bestimmt man in dieser die Koeffizienten $C_1, C_2, C_3, \ldots$ durch Einsetzen in die Differentialgleichung und geht dann zu $u = x(1+w)$ zurück, so findet man für u in der Tat die Reihe [6]'. — Andererseits lautet für $x^2 = X$ die Differentialgleichung (α):

$$6u\frac{dX}{du} = (16+u)X - 4u^3;$$

sie hat die Lösung

$$X = Cu^{\frac{8}{3}} e^{\frac{u}{6}} + \sum_{n=2}^{\infty} c_n u^n,$$

wo C willkürlich, $c_2 = 1$, $(6n-16)c_n = c_{n-1}$. Für $C = 0$ ergibt sich für X die beständig konvergente Potenzreihe [4]'.«

Soweit die Mitteilung von Horn.

Die Beziehung, in der die Funktion $l(1+x)$ zum agM. steht, kann aus dem art. [3.] entnommen werden. Die in [5], oben S. 174, untereinander geschriebenen Reihen geben addiert

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{9}{224}x^4 + \cdots,$$

d. h. $\frac{1}{2}l(1+x)$. Setzt man also die Reihe [7]

$$z = \mathrm{Tm.}(1+x) - 1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}xx + \frac{1}{32}x^3 - \frac{21}{1024}x^4 + \cdots$$

in $l(1+x)$ an die Stelle von x ein, so ist

$$[5]' \qquad l(1+z) = \frac{1}{2}l(1+x).$$

Im art. [5.] wird diese Gleichung in etwas anderer Form ausdrücklich angegeben. Das y der dortigen Gleichung [12], oben S. 175, ist nämlich mit dem x der Gleichung [2] des art. [1.] identisch, d. h. y ist mit z durch die Gleichung

$$1 + z = \mathrm{Tm.}(1+y) = M(1+y, 1)$$

verknüpft; läßt man also φz dasselbe bedeuten wie $l(1+z)$, so stimmt die Gleichung [13] vollständig mit [5]' überein.

Wir wollen nun in diese Funktionalgleichung [5]' noch die inverse Funktion von $u = l(1+x)$ einführen, die Funktion also, die Gauss in den artt. [1.] und [2.] Basis cuius modulus $= u$ nennt, und im art. [2.], S. 173 mit

$$\varepsilon^{*u*} = 1 + x = 1 + \sqrt{u^2 + \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{16}u^4 + \cdots} = 1 + u + \frac{u^2}{4} + \frac{u^4}{448} - \cdots$$

bezeichnet *); es ist also hier x^2 eine ganze transzendente Funktion von u, vergl. oben die Gleichungen [4]' und [4]''. Die Gleichung [5]' ergibt dann die Darstellung

*) Daß ε^{*u*} tatsächlich diese Bedeutung hat, ergibt sich daraus, daß die Reihe für $\sqrt{(\varepsilon^{*t*})}$ ins Quadrat erhoben die Reihe $1 + t + \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{448} + \cdots$ liefert, und daß auch die numerischen Werte von $\varepsilon^{*0,1*}$, ferner von $\varepsilon = \varepsilon^{*1*}$ und von $\varepsilon^{-1} = \varepsilon^{*-1*}$ stimmen. Wie $l(1+x)$ an den Logarithmus, so soll also die inverse Funktion an die Exponentialfunktion erinnern. Im art. [4.], S. 175, wird in [9] der Versuch gemacht, einen unmittelbaren Zusammenhang zwischen den Funktionen $l(1+x)$ und $\log(1+x)$ herzustellen; die Addition der untereinander geschriebenen Reihen gibt nämlich

$$[5]'' \qquad 1+x = \varepsilon^{*u*}, \quad \mathrm{Tm.}\,(1+x) = 1+z = \varepsilon^{*\frac{u}{2}*}$$

die Gauss vermutlich vor Augen hatte, als er die hier angewandten Bezeichnungen einführte. Man kann die Bedeutung der in dem Abschnitt [I.] enthaltenen Aufzeichnungen wohl darin sehen, daß Gauss **die durch die Darstellung [5]'' bewirkte Uniformisierung des agM.** $M(1+x, 1)$ **angestrebt hat.** Daß er diesen Weg später verlassen hat, zeigt, daß ihm dessen Mängel bewußt geworden sind. Die Uniformisierung [5]'' gilt nämlich nur für den in der Umgebung von $x = 0$ durch die Reihe [1] dargestellten Zweig von $M(1+x, 1)$, wie auch die Funktionalbeziehung [5]' auf die Konvergenzbereiche der Reihen für z und für $l(1+x)$ beschränkt ist. Wie Gauss zu der Erkenntnis gelangt sein mag, daß der hier befolgte Gedankengang unzulänglich ist, ließ sich aus dem uns überkommenen Nachlaß ebenso wenig feststellen, wie der Ursprung der Funktion $l(1+x)$. Charakteristisch ist, daß Gauss sich hier der bloßen Induktion bedient, indem er Reiheninversionen, Einsetzen einer Reihe in eine andere u.s.w. durch die Berechnung der 4 bis 5 ersten Glieder erledigt; es weist dies auf eine sehr frühe Abfassungszeit hin.

Der Zettel, dem die artt. [1.] und [2.] entstammen und der die Überschrift trägt, die hier dem ganzen Abschnitt [I.] vorangestellt wurde, ist die älteste Aufzeichnung über das agM., die wir besitzen, und jedenfalls die erste, in der die Bezeichnung »agM.« gebraucht wird *); er dürfte älter sein als die Aufzeichnungen artt. [3.]—[5.] der Scheda Ab, die aus den ersten Monaten des Jahres 1799 stammen **). In der Scheda Ab werden auch andere Bezeichnungen gebraucht als auf dem Zettel, so heißt die Funktion »Modulus von $1+x$« auf dem Zettel (siehe art. [2.]) $\lambda(1+x)$, in der Scheda Ab (siehe art. [3.]) dagegen $l(1+x)$ und für das agM. wird statt des Tm. des Zettels (art. [1.]) in der Scheda Ab (art. [5.]) die auch später beibehaltene Bezeichnung M benutzt.

Besonders bemerkenswert ist, daß auf S. 26 der Scheda Ab (siehe den art. [5.], S. 176) zum ersten Male der **reziproke Wert** des agM. erscheint. In seiner Abhandlung aus dem Jahre 1800 (aus dem Nachlaß abgedruckt Werke III, S. 361) vollzieht Gauss den Übergang vom agM. selbst zu seinem reziproken Werte im art. 6 (a. a. O., S. 366, 367) und kündigt ihn am Schluß des art. 5 (a. a. O., S. 366) mit folgenden Worten an: »Quum hi coefficientes ***) legem obviam non exhibeant, has series praetergredimur aliamque viam tentamus, quae successum feliciorem praestabit«. In diesen Worten spricht sich ein Erlebnis aus, und dieses kann nichts anderes sein, als die in der Tagebuchnotiz Nr. 98 vom 30. Mai 1799 niedergelegte Bemerkung:

> »Terminum medium arithmetico-geometricum inter 1 et $\sqrt{2}$ esse $= \frac{\pi}{\varpi}$ usque ad figuram undecimam comprobavimus, qua re demonstrata prorsus novus campus in analysi certo aperietur«

die ja in dem besonderen Falle von $M(\sqrt{2}, 1)$ die Bedeutung gerade des reziproken Wertes dieser Größe hervortreten läßt. Beachtet man, daß in der Scheda Ab, nämlich im art. [3.], oben S. 174, das agM. zwischen

---

$$x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{112}x^4 + \frac{131}{2240}x^5 + \cdots = l(1+x).$$

Übrigens reduziert sich die oben von uns für die Darstellung von x^2 herangezogene Funktion $P_u(k)$ für $k = 1$ auf $1 - e^{-u}$.

*) Die linke obere Ecke dieses Zettels ist abgerissen, dadurch sind die in eckigen Klammern befindlichen Ergänzungen in der Überschrift S. 172, ferner in der ersten und dritten Textzeile auf S. 173 nötig geworden.

**) Die Scheda Ab enthält nämlich auf S. 3 das Datum 1798, Nov. 28, auf S. 4, Dec. 10 und auf S. 5, 1799, Febr. 5. Unserere Aufzeichnungen beginnen auf S. 20.

***) Gemeint sind die Koeffizienten der Reihe [1] (oben S. 172) für $M(1+x, 1)$.

1 und $\sqrt{2}$ vorkommt *), so wird es zur Gewißheit, daß diese Bemerkung über $M(\sqrt{2}, 1)$ **) den Schritt ausgelöst hat, der auf jene verheißungsvolle »alia via« hinüberführte, und daß unsere Aufzeichnungen der Scheda Ab gerade in jenen letzten Maitagen des Jahres 1799 entstanden sind. Was die Entwicklungen des Zettels, d. h. die artt. [1.] und [2.], anlangt, so bietet sich für ihre Datierung kein sicherer Anhaltspunkt; sollte das $l(1+x)$ der Tagebuchnotiz Nr. 83 mit der durch die Reihe [6] definierten Funktion übereinstimmen, so müßte der Zettel vor dem April 1798 geschrieben sein, andernfalls könnte er mit der Tagebuchnotiz Nr. 95 vom Oktober 1798 in Verbindung gebracht werden, in der ja wie auch in der Nr. 98 der »novus in analysi campus« erwähnt wird.

Die in den Abschnitten [II.], [III.], [IV.] zusammengestellten Aufzeichnungen zeigen das zielbewußte Fortschreiten auf dem nach dem 30. Mai 1799 eingeschlagenen Wege und die Eröffnung des neuen Feldes der Analysis: der Theorie der Modulfunktion und der elliptischen Funktionen. — Vergl. den Abschnitt III. des Aufsatzes »Über Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie«, Werke X 2.

Erläuterungen zu [II.], S. 177—180.

Die Formeln [1], [5], [17] geben die bekannte ***) Reihenentwicklung des Ellipsenquadranten q mit den Halbachsen a, b $(a > b)$ nach Potenzen der Größe

$$B = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

(siehe *Abriß*, Gl. (21), S. 254, wo $k = B$ zu nehmen ist).

In den Formeln [1], [5] ist der Faktor $\frac{\pi}{2}a$ unterdrückt. Die Gleichung [18] stellt, wenn man beiderseits den Faktor a wegläßt, die Entwicklung von $\frac{a}{M(a, b)}$ nach Potenzen von B dar (vergl. *Abriß*, Gl. (19), S. 254). Gauss dürfte diese Entwicklung in derselben Weise gefunden haben, wie er sie im art. 7 der Abhandlung von 1800 (Werke III, S. 361, siehe dort S. 367) abgeleitet hat. Wir geben diese Ableitung hier wieder und verweisen auf eine zweite Art der Herleitung, die in der Aufzeichnung [III.] enthalten ist, und auf die wir weiter unten zurückkommen.

Es ist

$$\frac{a}{M(a, b)} = \frac{a}{M(a+c, a-c)} = \frac{1}{M(1+B, 1-B)} = \frac{1}{M(1, \sqrt{1-B^2})};$$

setzt man nun

$$B = \frac{2t}{1+t^2},$$

---

*) Die Zahl 0,19814 ist $M(\sqrt{2}, 1) - 1$ auf fünf Dezimalstellen, vergl. Werke III, S. 364, Exemplum 4.

**) Wie aus dem bereits erwähnten Briefe [1.], S. 232 von Pfaff hervorgeht, hat Gauss diese Bemerkung an Pfaff brieflich mitgeteilt.

***) Man vergl. die oben S. 254 Fußnote angeführte Abhandlung Eulers, wo S. 128 die Reihenentwicklung für den Ellipsenquadranten genau in der von Gauss benutzten Form gegeben wird. Die Übereinstimmung auch in den Bezeichnungen bestätigt, daß Gauss jene Abhandlung Eulers gekannt hat; Euler sowohl wie Gauss haben q, statt des Eulerschen n hat Gauss in den Formeln des art. [1.] B, in späteren Formeln der artt. [2.] und [5.] aber ν; den Buchstaben n dürfte Gauss vermieden haben, weil er mit n eine ganze Zahl zu bezeichnen pflegte. Auf den ersten Durchschußblättern des Leiste hat sich Gauss (wie es scheint nach der Fusschen Liste vom Jahre 1783) ein Verzeichnis der Werke Eulers angelegt, er hat sich also schon sehr früh lebhaft für Euler interessiert.

so wird

$$M(1+B,\,1-B) = M(1,\sqrt{1-B^2}) = M\left(1,\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = \frac{1}{1+t^2}M(1+t^2,\,1-t^2).$$

Setzt man ferner in der Funktionalgleichung

$$M\left(1+\frac{2t}{1+t^2},\ 1-\frac{2t}{1+t^2}\right) = \frac{1}{1+t^2}M(1+t^2,\ 1-t^2)$$

die Entwicklung

$$\frac{1}{M(1+B,\,1-B)} = 1+\alpha B^2+\beta B^4+\gamma B^6+\cdots$$

mit unbestimmten Koeffizienten ein, so findet man

$$\alpha = \frac{1}{4},\ \beta = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16},\ \gamma = \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}\cdot\frac{25}{36},\ldots$$

Den allgemeinen Zusammenhang zwischen dem agM. und dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung hat Gauss zu der Zeit, wo er jene Formeln in den Leiste einschrieb, jedenfalls noch nicht gekannt (siehe weiter unten).

Die linke Seite der Formel [2] und das erste Glied von [6] geben also die Entwicklung von

$$\frac{Ba}{M(a,b)} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{M(a,b)} = \frac{c}{M(a,b)}.$$

Die Gleichung [6] entspricht somit der Formel (33) des *Abrisses*, wenn man dort $x = z^2$ setzt. Sie enthält also den Zusammenhang zwischen dem agM. und den Reihen, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, bezw. die Quadratzahlen sind *).

Die Gleichung [2] enthält auf der rechten Seite nur die zwei ersten Glieder der Reihe r^2, die Gleichung [3] entsteht aus [2] bezw. [6], indem man B ausrechnet; in solchen Operationen mit Reihen, deren Inversion und dergl. war Gauss schon in sehr früher Zeit wohlgeübt **).

Übrigens ist der Koeffizient von z^5 in [3] unrichtig, die Reihe lautet

[3]' $$B = 4z-16z^3+56z^5-160z^7-\cdots$$

Gleichung [4] ergibt sich, indem man [3] in [1] einsetzt; demgemäß ist auch in [4] der Koeffizient von z^6 unrichtig; die richtige Formel lautet

[4]' $$1-4z^2+20z^4+663z^6+\cdots$$

Wenn wir die Bedeutung der Formeln [3], [4] in moderner Ausdrucksweise hervorheben wollen, so werden wir sagen: **diese Formeln stellen die Uniformisierung des vollständigen elliptischen Integrals zweiter Gattung als Funktion des Moduls B mit Hilfe der Modulfunktion dar.** Freilich ist hier alles noch rein formal, da eine analytische Bestimmung der Veränder-

*) Solche Reihen betrachtet Gauss auch in der Tagebuchnotiz Nr. 58 vom 16. Febr. 1797; vergl. auch die Bemerkung Scherings, Werke III, S. 493, Zeile 4—6, wonach Gauss den Zusammenhang zwischen agM. und den Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind, 1794 gekannt haben soll. Mit dem agM. hat sich Gauss, wie er April 1816 an Schumacher schreibt (siehe oben Briefwechsel [7.], S. 247), seit 1791 beschäftigt. Wie Gauss in der Anzeige seiner Abhandlung *Determinatio attractionis etc.* (Werke III, S. 360) angibt, hat er die Untersuchungen über das agM. unabhängig von den ähnlichen Untersuchungen von Lagrange (vergl. oben S. 251, Fußnote) und Legendre angestellt.

**) Man vergl. z. B. die Tagebuchnotiz Nr. 49 vom 27. Dezember 1796 und die Methoden des Abschnittes [I.].

lichen z noch nicht gegeben wird. Diese ergibt sich erst später, siehe den Abschnitt [IV.]. Der Ausdruck [7] hat den Wert

[7]' $$\frac{1}{B^2}\left(\frac{2}{\pi}\frac{q}{a}-\frac{a}{M(a,b)}\right);$$

aus der Gleichung (siehe *Abriß*, Gleichung (33))

$$r^2 = \frac{c}{M(a,b)}$$

folgt nämlich

$$\frac{a}{M(a,b)} = \frac{r^2}{B}.$$

Abgesehen von dem Faktor $-\frac{1}{B^2}$ kommt der Ausdruck [7]' auch in [19], oben S. 178, vor, ferner steht er mit der in [34], oben S. 180, auftretenden Größe $\mathbf{L}$ in der Beziehung

[7]'' $$\frac{a}{M(a,b)}-\frac{2q}{\pi a} = \nu\mathbf{L} \qquad \left(\nu = B = \frac{c}{a}\right).$$

Auf diese Beziehung kommen wir weiter unten (S. 265) zurück.

Die Bedeutung der in den Formeln [11]—[16], [28], [29], [30], oben S. 178, 179, auftretenden Größe $\mathbf{M}$ ergibt sich am einfachsten wie folgt.

In [35], oben S. 180, bedeutet M das agM., und zwar ist

$$M\sqrt{1-\nu^2} = M(1,\sqrt{1-\nu^2})\ ^{*)},$$

es ist also

[35]' $$K(\nu) = \frac{1}{M(1,\sqrt{1-\nu^2})}\ ^{**)}.$$

Damit stimmt die Reihenentwicklung [33] (vergl. [2] und [6]), ferner die Funktionalgleichung [20], die in [32] und [39] wiederholt ist. Die Gleichung [38], worin K' die Derivierte von K nach ν bedeutet, kann zur Definition der Größe L dienen. Aus der für K' geltenden Funktionalgleichung [40] folgt dann in Verbindung mit [20] die in [29] angegebene Funktionalgleichung für L: unter derselben Nummer findet man die Definition von $\mathbf{M}$ als Quotienten von L und K. Es ist also

[29]' $$\mathbf{M}(\nu) = 1+\left(\nu-\frac{1}{\nu}\right)\frac{K'(\nu)}{K(\nu)}.$$

Mit der durch [38] definierten Größe L steht die durch die Reihenentwicklung [34] erklärte Größe $\mathbf{L}$ in naher Beziehung ***).

*) Die Unterscheidung zwischen den Buchstaben M und $\mathbf{M}$ ist in der Gaussschen Handschrift nicht gemacht.

**) $K(\nu)$ unterscheidet sich also von dem Jacobischen

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\nu^2x^2)}}$$

nur durch den Faktor $\frac{2}{\pi}$.

***) Die Unterscheidung zwischen den Buchstaben $\mathbf{L}$ und L ist auch vom Herausgeber interpoliert (vergl. Fußnote *)). Wahrscheinlich hat Gauss die Bezeichnung gegen eine »Uraufzeichnung« geändert. So hat z. B. die Gleichung [38] ursprünglich gelautet $\nu K+(\nu^2-1)K' = L$ und ist dann durch Korrekturen in die oben wiedergegebene Form gebracht worden.

Für $\mathbf{L}$ zeigt zunächst die Vergleichung von [34] mit der Reihenentwicklung (21) des *Abrisses* für den Ellipsenquadranten q, daß

$$[34]' \qquad -\frac{\pi}{2}a\mathbf{L} = \frac{dq}{d\nu}$$

ist (in (21) ist $k = \nu$ zu nehmen)*). Ferner führt die Vergleichung der Reihenentwicklungen [33], [34] und ihrer Derivierten nach ν zu den Differentialrelationen [36] oder [37]. Die Vergleichung der aus [37] folgenden Gleichung

$$[38]' \qquad \mathbf{L} = \nu K + (\nu^2-1)K'$$

mit [38] gibt die Beziehung zwischen $\mathbf{L}$ und L:

$$[34]'' \qquad L = \frac{1}{\nu}\mathbf{L} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\nu^2 + \frac{1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6}\nu^4 + \cdots,$$

sodaß also (vergl. [34]')

$$[34]''' \qquad -\nu a\frac{\pi}{2}L = \frac{dq}{d\nu}$$

ist**). — Für das durch [29]' definierte $\mathbf{M}$ verifiziert man sofort die Funktionalgleichung [30] oder [12] ([11] ist einfach die Umkehrung von [12]); aus dieser läßt sich die Entwicklung [28] unmittelbar herleiten. Die Potenzreihenentwicklung [13]***) ergibt sich entweder direkt durch Anwendung der Funktionalgleichung [12] oder durch Division von [34]'' mit [33]. Diese doppelte Herleitung von [13] bildet eine erwünschte Bestätigung unserer Deutung der Gaussschen Formeln.

Wir bemerken noch, daß sich aus den Differentialrelationen [37] sofort die homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung herleiten ließen, denen K und $\mathbf{L}$ als Funktionen von ν genügen. Diese Differentialgleichungen gehören (nach [38]') zu derselben Klasse (im Sinne von Riemann); K und $\mathbf{L}$ sind in der späteren Terminologie von Gauss (*Disquisitiones circa seriem*, 1812, Werke III, S. 130) functiones contiguae.

Nun kann die Darstellung [14] bezw. [15] des Ellipsenumfangs durch Vergleichung mit den Reihenentwicklungen [5] oder [17] verifiziert werden. Wir setzen eine Ableitung durch Integralformeln hierher.

*) Dieselbe Entwicklung für $\frac{dq}{d\nu}$ findet sich auf Seite 129 der oben erwähnten Eulerschen Abhandlung. Euler hat $a = 1$. Die Bedeutung der Beziehung [34]' wird weiter unten hervortreten.

**) Wenn man die Integraldarstellung von K beachtet, so erkennt man erst die wahre Bedeutung der von Gauss eingeführten Größe L. Aus [34]''' folgt nämlich sofort

$$L = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\nu^2x^2)}},$$

so daß L gewissermaßen als ein Gegenstück zu

$$K = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\nu^2x^2)}},$$

erscheint. Es ist dies um so bemerkenswerter, als wie bereits erwähnt, Gauss zur Zeit, als er diese Aufzeichnungen machte, die Integraldarstellung von K nicht gekannt hat.

***) In [13] ist, wahrscheinlich infolge eines Schreibfehlers, der Koeffizient von x^6 unrichtig; er lautet $\frac{41}{16048}$ (vergl. oben S. 188, art. [5.], Gleichung [28]).

Aus den Integraldarstellungen von q und K folgen in bekannter Weise*) die zuerst von Legendre (*Exercices de calcul intégral* I, 1811, S. 61 u. ff.) aufgestellten Relationen (die sogenannten Klassenbeziehungen) zwischen den vollständigen Integralen erster und zweiter Gattung:

$$(\alpha) \qquad \frac{\pi}{2}\frac{dK}{d\nu} = \frac{q}{a}\frac{1}{\nu(1-\nu^2)} - \frac{\pi}{2}\frac{K}{\nu},$$

$$(\beta) \qquad \frac{1}{a}\frac{dq}{d\nu} = \frac{1}{a}\frac{q}{\nu} - \frac{\pi}{2}\frac{K}{\nu},$$

von denen die zweite (β) vollständig mit der Gleichung [7]'' S. 263 übereinstimmt. Aus (α) ergibt sich

$$q = a\nu(1-\nu^2)\frac{\pi}{2}\frac{dK}{d\nu} + (1-\nu^2)\frac{\pi}{2}K,$$

und mit Rücksicht auf die Definition von $\mathbf{M}$ in [29]':

$$q = \frac{\pi}{2}aK(1-\nu^2\mathbf{M}).$$

Diese Formel ist nichts anderes als die von Gauss aufgezeichnete Formel [14]. Wir haben sie noch einmal verifiziert, weil sich in den Gaussschen Formeln [14] und [15] eine Anzahl von Schreibfehlern befindet, die vielleicht daher rühren, daß Gauss in einer »Uraufzeichnung« a statt b geschrieben hatte (vergl. die Integralformel [10]). Die richtigen Gleichungen lauten für den Quadranten:

$$[14]' \qquad q = \frac{\pi}{2}aK\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)\left\{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2}\mathbf{M}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)\right\}.$$

$$[15]' \qquad q = \frac{\pi}{2}a\frac{1-N\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}\right)}{\text{Med. inter } 1 \text{ et } \frac{b}{a}},$$

wo N durch die Gleichung [16] definiert wird**).

Setzt man in [14]' für $\mathbf{M}$ seinen Wert $\mathbf{M} = \frac{L}{K}$ oder, mit Rücksicht auf [34]'',

$$\mathbf{M} = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{\nu a}\frac{1}{K}\frac{dq}{d\nu}, \quad \nu = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}},$$

ein, so erhält man für q den Ausdruck

$$[14]'' \qquad q = \frac{\pi}{2}aK(\nu) + \nu\frac{dq}{d\nu},$$

was mit der zweiten der Legendreschen Gleichungen (β), also mit [7]'' übereinstimmt.

*) Vergl. z. B. H. Durège, *Theorie der elliptischen Funktionen* (Leipzig 1878), S. 290.

**) Während uns heute die Beziehung des agM. zum vollständigen Integral erster Gattung als die am nächsten liegende erscheint, tritt bei den älteren Analysten (Landen, Lagrange) die Beziehung zum vollständigen Integral zweiter Gattung immer zuerst hervor. Auch Schumacher hat, als er sich gelegentlich (Brief vom 5. April 1816, siehe oben Briefwechsel [6.], S. 246) mit dem agM. beschäftigte, als erstes Ergebnis die Formel [15]' gefunden. Den Zusammenhang des agM. mit dem Ellipsenquadranten hat Gauss in der »*Determinatio attractionis*« (1818) (Werke III, S. 354 oben) und in der Anzeige dieser Abhandlung (ebenda, S. 360) nach andern Methoden abgeleitet. Vergl. auch die aus 1800 stammende nachgelassene Abhandlung über das agM. (Werke III, S. 261 ff., besonders S. 373 die Formel für $dM(x,y)$, die auch in der Aufzeichnung [VI.], oben S. 208 vorkommt).

Die Aufzeichnung [6.] S. 180 steht mit den in den artt. [1.]–[5.] enthaltenen in keinem unmittelbaren Zusammenhang; sie ist darum bemerkenswert, weil sie zeigt, daß GAUSS schon damals neben dem einfachen Algorithmus aus a, b auch den aus a und $\sqrt{a^2-b^2}$ sowie die aus beiden durch Rückwärtsverlängerung hervorgehenden Ketten (vergl. *Abriß*, Artikel 1. S. 252) betrachtet hat. Das Zahlenbeispiel hängt mit $M(\sqrt{2}, 1)$ (vergl. die Tagebuchnotiz Nr. 98, oben S. 260) zusammen.

Die in dem Abschnitt [II.] zusammengestellten Leisteaufzeichnungen beginnen bei Seite 25. Da die den Tagebuchnotizen von 1796 entsprechenden Leistenotizen nur etwa bis zu der Seite 16 reichen, so ergibt sich also als untere Zeitgrenze für alle hier wiedergegebenen Aufzeichnungen das Jahr 1797; eine genaue Zeitbestimmung werden wir erst nach Besprechung der Abschnitte [III.] und [IV.] geben können. Die Notizen [II.] gehören zu den »irregulären« Eintragungen (vergl. oben S. 170, Fußnote *)), da sie mit ersichtlich späterer Schrift und Tinte auf zerstreuten Stellen, die bei den regulären Aufzeichnungen unbeschrieben geblieben waren, eingetragen sind. Ihre Form ist durchaus fragmentarisch, sie zeigen zahlreiche Schreib- und Rechenfehler (vergleiche z. B. [13], [14], [3], [4]) und Folgewidrigkeit in der angewandten Bezeichnung (M, L in verschiedenen Bedeutungen, vergl. oben S. 263). Wir haben also in diesen Notizen nicht eine redigierte Darstellung fertiger Ergebnisse vor uns, sondern Rechnungen, die während der Arbeit, vielleicht zum Teil im Anschluß an ältere, für uns wohl verlorene Notizen gemacht worden sind. Daß solche ältere Notizen vorhanden waren, ist unzweifelhaft, da ja (vergl. oben S. 262 Fußnote *)) GAUSS sich seit 1791 mit dem agM. beschäftigt hatte; auch hat die Angabe SCHERINGS, daß GAUSS schon 1794 den Zusammenhang des agM. mit den Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind, gekannt habe, sehr große innere Wahrscheinlichkeit (vergl. die Tagebuchaufzeichnungen Nr. 58 vom 16. Februar 1797 und Nr. 7 vom 24. Mai 1796). Ihrem Inhalte nach enthalten die Aufzeichnungen [II.] wesentlich drei Elemente:

1) Die Beziehung des agM. zum Ellipsenquadranten,

2) die Beziehung des agM. zu den Reihen, deren Exponenten die Quadratzahlen sind und die dadurch bedingte Einführung der Größe z,

3) die grundsätzliche Einführung des reziproken Wertes K des agM. (vergl. oben S. 260) und seine Reihenentwicklung nach positiven ganzen Potenzen von ν (siehe [2], [6], [18], [33]), die den ganzen Notizen gleichsam als Unterbau zu Grunde liegt.

Erläuterungen zu [III.], S. 181–183.

Die Reihe φx des ersten Zettels art. [1.] geht aus der Reihe (18) des *Abrisses* (S. 254) hervor, indem man darin $k' = \frac{1}{x}$ setzt und dann noch mit $\frac{1}{x}$ multipliziert; sie genügt derselben Differentialgleichung (20) S. 254, der die Reihen (18), (19) Genüge leisten. Mit Hilfe der Differentialgleichung wird die Funktionalgleichung (1) des art. [2.], S. 182 hergeleitet, aus der dann im zweiten Zettel art. [2.] erschlossen werden soll, daß φ den reziproken Wert eines agM. darstellt, so daß es sich also um eine neue Ableitung der Reihenentwickelung für $\frac{1}{M(1,k)}$ handelt. Es kommt dabei auf den Schluß an, daß eine Funktion $F(z)$, die der Funktionalgleichung

$$(\alpha) \qquad F\left(\frac{1+t^2}{2t}\right) = F(t^2)$$

Genüge leistet, eine Konstante sein müsse (S. 183). Setzt man

$$\xi = \frac{1}{t}, \quad G\left(\frac{1}{t^2}\right) = F(t^2),$$

so lautet die Gleichung (α):

$$(\beta) \qquad G\left(\frac{2\xi}{1+\xi^2}\right) = G(\xi^2).$$

Bildet man den Algorithmus (5) des *Abrisses* (S. 252) und setzt

$$k_n = \frac{\bar{c}_n}{\bar{a}_n} = \frac{2\sqrt{k_{n-1}}}{1+k_{n-1}}, \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

so folgt aus (β)

$$G(k_0) = G(k_1) = \cdots = G(k_n).$$

Nun ist aber nach (6) des *Abrisses* (S. 252)

$$\lim_{n\to\infty} k_n = 1.$$

Wenn also die Funktion $G(x)$ so beschaffen ist, daß $\lim\limits_{x\to 1} G(x)$ als endlicher oder unendlich großer Wert existiert, der unabhängig ist von dem Wege, auf dem die Veränderliche x in den Punkt $x = 1$ einrückt, so ist für ein jedes k_0, für das $G(k_0)$ endlich und stetig ist,

$$G(k_0) = \lim_{n\to\infty} G(k_n) = \lim_{x\to 1} G(x),$$

also in der Tat konstant. Dies ist aber nicht notwendig der Fall, wenn die Funktion $G(x)$ die angegebene Bedingung für $x = 1$ nicht erfüllt; so befriedigt z. B. die Funktion

$$G(x) = \left\{\frac{iM(1,\sqrt{1-x^2})}{M(1,x)}\right\}^{\frac{2\pi i}{\log 2}},$$

für die jene Bedingung nicht erfüllt ist, die Funktionalgleichung (β), ohne sich auf eine Konstante zu reduzieren.

Wir bemerken noch, daß die Funktionalgleichung für $M(t) = M(t, 1)$, von der im art. [2.] Gebrauch gemacht wird, vollständig mit der übereinstimmt, die im art. 5. der Abhandlung von 1800 (Werke III, S. 365) benutzt wird.

Aus der Feststellung, daß der reziproke Wert von $M(\sqrt{1+y}, 1)$ mit dem von V freien Gliede der Entwicklung von

$$\frac{1}{\sqrt{1+y\sin^2 V}}$$

übereinstimmt (siehe S. 183), folgt für $y = 1$, daß der reziproke Wert von $M(\sqrt{2}, 1)$ gleich dem absoluten Gliede der Entwickelung von $(1+\sin^2 V)^{-\frac{1}{2}}$ sei. Von diesem absoluten Gliede hatte GAUSS aber schon zu Anfang des Jahres 1797 bei S. 54 des LEISTE eingeschrieben (siehe oben S. 149, art. [8.]), daß es gleich

$$\frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\varpi}{\pi}$$

sei; vergl. auch die Aufzeichnung auf der Rückseite des Leistetitelblatts, oben S. 169, art. [5.]. Wir haben damit alles, was für einen Beweis der Bemerkung in der Nr. 98 des *Tagebuchs* (siehe oben S. 260) erforderlich ist, hier nachgewiesen.

Am Schluß des art. [2.], S. 183 bedeuten s und c den Sinus und Kosinus eines Winkels, die kleine Tabelle gibt für die in der ersten Spalte stehenden Grade die Werte von $M(1, \sin a^\circ)$; eine ausführlichere und genauere solche Tabelle ist im Abschnitt [IV.] art. [6.], S. 189 aus der Scheda Ac abgedruckt, vergl. die Bemerkungen zu diesem Abschnitte weiter unten.

Erläuterungen zu [IV.], S. 184—193.

Die ersten 8 Seiten der Scheda Ac (begonnen November 1799) enthalten Aufzeichnungen über die analytische Geometrie des Raumes und die sphärische Trigonometrie. Nur auf S. 7 finden sich zwischen diesen geometrischen Notizen, aber in sorgfältiger Schrift und von Linien eingerahmt, drei Zeilen, mit den Reihenentwickelungen [1], [2], [3] (oben S. 184) für $\frac{\varpi}{\pi}$, von denen die erste und dritte schon Werke III, S. 423, art. [15.] abgedruckt sind. Die erste Entwicklung [1] stimmt mit der auf der Titelrückseite des LEISTE stehenden und oben S. 169 wiedergegebenen Reihe überein. Ebenda ist auch die Reihe [2] angedeutet und mit ihrer Hilfe der Wert von $\frac{\varpi}{\pi}$ auf 15 Dezimalstellen berechnet. Dieselbe Reihe [2] ist auch im *Tagebuch*, Nr. 91a mit der Datierung Juli 1798 aufgezeichnet. Mit der S. 8 schließen die geometrischen Betrachtungen ab und es folgen auf S. 9 zunächst die beiden Reihen [4], [5] für $\frac{\varpi}{\pi}-\frac{\pi}{\varpi}$, von denen die zweite Werke III, S. 423, art. [15] abgedruckt ist. Dann folgt die Aufzeichnung art. [2.], zu der man den Schluß des art. [2.] des vorigen Abschnitts [III.], S. 183, ferner den Brief an BESSEL vom 3. September 1805 (siehe oben Briefwechsel, [3.], S. 238) vergleichen kann. Zu diesen Entwicklungen dürfte GAUSS durch Untersuchungen, die der theoretischen Astronomie angehören, veranlaßt worden sein. In [6] bedeutet c den Kosinus eines Winkels, $c2, c3, \ldots$ sind die Kosinus seiner Vielfachen. Bemerkenswert ist die elegante Kettenbruchentwicklung für den Quotienten der beiden ersten Koeffizienten $\frac{A'}{A}$. Dieser Quotient, der auch in der Aufzeichnung [25]—[28], S. 188, betrachtet wird, steht wie z. B. die Entwicklungen [28] zeigen, in engem Zusammenhang mit der im LEISTE vorkommenden Funktion **M** (vergl. insbesondere Abschnitt [II.] Gl. [13] und [28]) *). Der Zusammenhang dieser Entwicklungskoeffizienten mit dem agM. wird in wenig abweichender Form in den Gln. [23], [24] S. 188 hervorgehoben.

Während die bisher betrachteten Notizen über das agM. vorwiegend formaler Natur waren, führen die Aufzeichnungen der artt. [3.] und [4.] in die Tiefen dieser Theorie ein. Auf den Weg, der GAUSS zu der wichtigen Quotientendarstellung [7] geführt haben mag, wirft die Gleichung [10], S. 186, ein helles Licht, wenn man sie mit den Leisteformeln des art. [1.] von Abschnitt [II.] S. 177 vergleicht.

Das Verhalten der Funktion $M(1, x)$, die GAUSS mit Mx bezeichnet, für große Werte von x wird in erster Annäherung durch die Gleichung

$$(\alpha) \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} M(1, x) \log 4x \doteq \frac{\pi}{2}$$

gegeben, die mit der Gleichung (14a) unseres *Abrisses* (S. 255) übereinstimmt. Diese Gleichung kommt zwar in den hier zu besprechenden Aufzeichnungen nicht ausdrücklich vor, sie liegt aber, wie wir sehen werden, der Quotientendarstellung [7] zugrunde und spielt auch in späteren Entwicklungen von GAUSS zum agM. namentlich bei der Ableitung des »Schönen Lehrsatzes« **) eine wichtige Rolle, wo auch ein Weg für ihre Ableitung angedeutet ist; wir haben im Artikel 2. des *Abrisses* diese Andeutungen ausgeführt. Es kommt dabei die Beziehung des agM. zum Ellipsenquadranten zur Geltung, indem nämlich durch diese Beziehung die Anwendung der Methoden ermöglicht wird, die EULER in der oben (S. 254, Fußnote) genannten Abhandlung *Animadversiones etc.* der Opuscula varii argumenti II angegeben hat. In dieser Abhandlung untersucht EULER das Verhalten des Ellipsenquadranten q, wenn die große Achse den festen Wert 1

---

*) Man vergl. auch Werke III, S. 371, und GAUSS' Brief an SCHUMACHER vom April 1816, siehe oben Briefwechsel [7.], S. 247, ferner die allgemeinen Formeln, Werke III, S. 128, 129, (*Disquisitiones circa seriem etc.* 1812).

**) Siehe Abschnitt [IX.] art. [4.], S. 220.

behält, während die kleine Achse p sich der Null annähert. Zunächst folgt das auch geometrisch evidente Resultat, daß

$$\lim_{p\to 0} q = 1$$

sein muß. Die Betrachtung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung, der q als Funktion von p genügt (a. a. O. S. 147):

$$p(1-p^2)\frac{d^2q}{dp^2}-(1+p^2)\frac{dq}{dp}+pq=0,$$

leitet EULER zu dem Ansatz (a. a. O. S. 155)

$$q = 1 + Ap^2 + Bp^4 + \cdots - \left(\frac{1}{2}p^2 + \beta p^4 + \cdots\right)\log p.$$

Für A findet EULER zunächst induktiv durch numerische Rechnung den Wert

$$A = \log 2 - \frac{1}{4},$$

den er dann durch Vergleichung des Ellipsenbogens mit einem Parabelbogen bestätigt. In der von BORCHARDT ausgearbeiteten und im Bande I der Werke JACOBIs auszugsweise abgedruckten Vorlesung von JACOBI, wird (S. 522—525) die EULERsche Methode auf das Integral erster Gattung angewandt. In der ursprünglichen BORCHARDTschen Ausarbeitung, die von dem abgedruckten Texte nicht unbeträchtlich abweicht, lautet die betreffende Stelle, wie folgt:

»Man erhält als Endwert für $\varkappa = 0$

$$K' = \log\frac{4}{\varkappa} \; [^*)].$$

Dieses Resultat hat zuerst EULER gefunden und veröffentlicht in dem Werke Opuscula varii argumenti, welches man häufig auf Auktionen bekommt; es findet sich auch im LEGENDRE [*Exercices de calcul intégral* I, 1811, § 72ff.]. Die Schwierigkeit seiner Herleitung bestand nicht in der Form des Resultats, da man schon lange wußte, daß man bei solchen Entwicklungen, welche Potenzen enthalten, auch einen logarithmischen Term beifügen muß; ja man konnte in unserem Falle sogar leicht finden, daß der Endwert $= \log\frac{n}{\varkappa}$ war, aber der numerische Wert von n war sehr schwer zu ermitteln, was man bei LEGENDRE nachsehen kann, der zwar den Wert $n = 4$ findet, aber keinen stringenten Beweis dafür gibt.«

Wie man sofort erkennt, ist die Gleichung JACOBIs mit der oben angegebenen Gleichung (α) gleichwertig. Da GAUSS die Beziehung zwischen dem agM. und dem Ellipsenquadranten gekannt hat (siehe Abschnitt [II.] Gln. [14], [15], S. 178), so könnte er die Gleichung (α) bezw. die Gleichung

$$(\beta) \qquad \lim_{p\to 0} M(1, p)\log\frac{4}{p} = \frac{\pi}{2}$$

in folgender Weise unmittelbar aus dem EULERschen Resultat abgeleitet haben. Nehmen wir $a = 1$, so folgt aus den Formeln [14] (siehe die berichtigte Formel [14]' S. 265) und [35] des Abschnitts [II.] S. 180, wenn man $\nu^2 = 1-p^2$ setzt, die Gleichung

$$\frac{1}{M(1,p)} = K(\nu) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-p^2}{p}\frac{dq}{dp}+q\right).$$

---

*) Hier ist $K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-\varkappa^2)\sin^2\varphi}}$.

Nun ist nach EULER

$$q = 1+\left(\log 2-\frac{1}{4}\right)p^2-\frac{1}{2}p^2\log p+p^4[\ldots],$$

also

$$\frac{dq}{dp} = (2\log 2-1)p-p\log p+p^3[\ldots]$$

und

$$\frac{1-p^2}{p}\frac{dq}{dp}+q = 2\log 2-\log p+p^2[\ldots],$$

woraus die Gleichung (β) ohne weiteres hervorgeht. Daß GAUSS ursprünglich diese Herleitung angewandt hat, ist darum sehr wahrscheinlich, weil sie sich an die im LEISTE aufgezeichneten Formeln des Abschnitts [II.] ganz unmittelbar anknüpfen läßt.

Dagegen kann der von GAUSS in der späteren Aufzeichnung des Abschnittes [IX.] art. [4.] angedeutete Weg mehr als eine Übertragung des von EULER für den Ellipsenquadranten vorgezeichneten Verfahrens auf das agM. bezw. auf die Funktion $K(\nu)$ bezeichnet werden; auch dafür standen GAUSS schon hier alle erforderlichen Mittel zur Verfügung, indem er aus den Differentialrelationen [37] des Abschnitts [II.] nur die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für $K(\nu)$ herzuleiten brauchte, um Schritt für Schritt dem Vorgange EULERS folgen zu können.

Jedenfalls können wir sagen, daß GAUSS das Verhalten von $M(1,x)$ für große Werte von x mit Hilfe des Ellipsenquadranten erforscht hat und zwar auf einem Wege, der ihm durch die EULERsche Abhandlung »*Animadversiones etc.*« vorgezeichnet war.

* * *

Der weitere Fortgang von GAUSS' Untersuchungen liegt jetzt klar zu Tage.

Es ist nach der Formel [3] im LEISTE (Abschnitt [II.], S. 177)

$$[3]' \qquad B = 4z-16z^3+56z^5-\cdots;$$

setzt man hierin

$$B = \frac{1}{x}, \quad z = \frac{1}{\mathfrak{z}},$$

so kommt die Formel

$$[10]' \qquad x = \cfrac{1}{\frac{4}{\mathfrak{z}}-\frac{16}{\mathfrak{z}^3}+\frac{56}{\mathfrak{z}^5}-\frac{160}{\mathfrak{z}^7}-\cdots}$$

zum Vorschein, die mit [10], S. 186 übereinstimmt; wir haben nur der Deutlichkeit wegen $\mathfrak{z}$ an Stelle des von GAUSS benutzten z geschrieben, weil später (in [22], S. 188 und von [32], S. 190 an) z in derselben Bedeutung wie im LEISTE benutzt wird.

Aus [10]' ergibt sich

$$\log\mathfrak{z} = \log\left(4x-\frac{1}{x}-\frac{9}{32}\frac{1}{x^3}-\cdots\right),$$

so daß die Gleichung (α) auch in der Form

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}M(1,x)\log\mathfrak{z} = C$$

geschrieben werden kann. Dies veranlaßt nun zu setzen

$$M(1,x) = \frac{C(x-\alpha x^{-1}-\beta x^{-3}-\cdots)}{\log\mathfrak{z}};$$

die Koeffizienten $\alpha, \beta, \ldots$ lassen sich numerisch bestimmen, ihre Werte stehen im art. [3.], S. 186.

Jetzt macht GAUSS die »Observatio« [9]. Diese leitet ihn zu der Vermutung, daß der Zähler »omisso factore C« auch allgemein ein agM. sein könnte, und da der reziproke Wert des agM. einfacher zu behandeln ist, als das agM. selbst, so setzt er in [13] den Zähler $=\frac{C}{Q}$ und findet für Q die Entwicklung [14], aus der er gemäß Abschnitt [III.] art. [2.], S. 182 die Aussage [15] erschließt. Nun macht er ähnlich wie schon für $x = \sqrt{2}$ im LEISTE (siehe oben S. 149, art. [8.]) den Übergang zur Integraldarstellung, schreibt aber zunächst, wohl infolge eines Rechenfehlers, das unrichtige

$$\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{x^2-r^2}}\,dr,$$

neben das er erst später (mit ersichtlich anderen Schriftzügen und anderer Tinte) berichtigend das Integral erster Gattung setzt*). Die Reihenentwicklung [14], die genau mit der Funktion φx der Aufzeichnung [III.] art. [1.] übereinstimmt, läßt jetzt Q als agM. erkennen, was in der Gleichung [20] ausgesprochen ist. »Numerator pro $\frac{1}{k}$« bedeutet dort soviel, wie der Zähler des Ausdrucks in [7] für $x = \frac{1}{k}$. Das »demonstr[atum]« deutet darauf hin, daß es sich um den Beweis einer früher gehegten Vermutung handelte (vergl. oben), die unerklärliche Buchstabenverbindung GALEN (verschnörkelte Großbuchstaben) erinnert an das »vicimus GEGAN« der Tagebuchnotiz Nr. 43 vom 21. Oktober 1796.

Die jetzt gewonnene allgemeine Einsicht, daß der reziproke Wert des agM. das vollständige Integral erster Gattung ist, liefert nicht nur aufs neue den Beweis der in der Tagebuchnotiz vom 30. Mai 1799 gemachten Bemerkung (siehe oben S. 260), sondern muß als ausschlaggebend dafür angesehen werden, daß GAUSS von nun ab seine Aufmerksamkeit dem allgemeinen elliptischen Integral erster Gattung als der wahren Verallgemeinerung des lemniskatischen Integrals zuwendet. Die »Peripheria Ellipseos« tritt in der Gleichung [22] noch einmal auf. Die kleine Zahlenrechnung zeigt, daß GAUSS hier die Formel [4] des LEISTE (Abschnitt [II.], S. 177) nachgerechnet hat, indem er in die Entwicklung [1] (S. 177) den Wert [3] einsetzt. Er begeht aber wieder einen Rechenfehler, denn statt -176 muß richtig $+551$ stehen, wodurch statt $-64z^3$ der richtige Wert $+663z^3$ zum Vorschein kommt.

Mit der Formel [22] ändert sich die Bedeutung des Buchstaben z; von nun ab ist z der reziproke Wert der in [10] mit demselben Buchstaben bezeichneten Größe (unseres $\mathfrak{z}$), hat also dieselbe Bedeutung wie in den Formeln des LEISTE, Abschnitt [II.]. Nach einigen Zwischenrechnungen drückt GAUSS in [32] die Größe z durch $s = \frac{1}{x}$ aus, die logarithmische Derivierte dieses Ausdrucks wird schon in [29] betrachtet. Dabei hat s dieselbe Bedeutung wie das B in der Leisteformel [3] Abschnitt [II.], S. 177, so daß also [32] durch Inversion der berichtigten Reihe [3] bezw. der in [10]', S. 270 auftretenden Reihe, für $x = \frac{1}{s}$, $\mathfrak{z} = \frac{1}{z}$ hervorgeht. Nun bildet er die Funktion $P(s)$, die nach der Reihenentwicklung [36] (vergl. [33] im LEISTE, Abschnitt [II.], S. 180) und nach [37] (vergl. [35] im LEISTE, Abschnitt [II.], S. 180) durch die Gleichung

$$[37]' \qquad M(1,\sqrt{1-s^2}) = \frac{1}{P(s)}$$

definiert werden kann. Der in [37] benutzte Buchstabe c hat nämlich die Bedeutung $\sqrt{1-s^2}$, wobei man etwa an cosinus oder an die GAUSS geläufige Bezeichnung $c = \sqrt{a^2-b^2}$ für $a = 1$, $b = s$ zu denken hat. Setzt man in die Reihe [36] für s seinen Ausdruck aus [10]'

$$[10]'' \qquad s = 4z-16z^3+56z^5-160z^7-\cdots$$

---

*) Der Abdruck gibt an dieser Stelle (S. 187) die Anordnung der Handschrift genau wieder.

ein, so ergibt sich für $P(s)$ die Darstellung [33], deren Umformung in die Summe von zwei Quadraten [34] sehr nahe liegt. Die Gleichung [35] dürfte GAUSS dann mit Hilfe der ihm bekannten Formel (LEISTE, [6] Abschnitt [II.], S. 177)

$$[6]' \qquad sP(s) = s + \frac{1}{4}s^3 + \frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}s^5 + \cdots = (2z^{\frac{1}{4}} + 2z^{\frac{9}{4}} + \cdots)^2$$

abgeleitet haben. Die Formel [38] und die ihr äquivalente [39] (in dieser hat c wieder die Bedeutung $\sqrt{1-s^2}$) ist nun nichts anderes als die Quotientendarstellung aus [7] in den neuen Bezeichnungen; wir können sie in der Form

$$[38]' \qquad \log z = -\frac{\pi}{2}\,\frac{M(1,\sqrt{1-s^2})}{M(1,s)}$$

schreiben, in der sie dann unmittelbar mit der Hauptformel (38) unseres *Abrisses* (S. 256) übereinstimmt. Wir werden ihr auf S. 34 der Scheda Ac (Abschnitt [V.] art. [5.], S. 197) wieder begegnen.

Wir sehen, daß sich GAUSS durch diese Untersuchungen in den vollen Besitz der Theorie des agM. gesetzt hat. Während er im LEISTE die Größe z nur in formaler Weise, nämlich durch den Reihenansatz [6], S. 177 definierte, erzielt er hier die genuine analytische Definition [38]' von z durch das agM., d. h. er hat jetzt das geleistet, was im Artikel 3. unseres *Abrisses* dargestellt ist. Endlich eröffnet ihm der Zusammenhang zwischen dem agM. und dem vollständigen elliptischen Integral erster Gattung den Zugang zu der allgemeinen Theorie der elliptischen Funktionen, indem die Formel [38]' die Größe $-\frac{2}{\pi}\log z$ direkt durch den Periodenquotienten darstellt *).

Die auf diese Theorie bezüglichen Aufzeichnungen der Scheda Ac sind in dem Abschnitt [V.] enthalten. Ehe wir auf diesen eingehn, bemerken wir noch wiederholt, daß die im art. [6.] S. 189 enthaltene Tabelle eine Erweiterung der am Schlusse des Abschnitts [III.], S. 183 befindlichen darstellt. Ferner möge noch mit wenigen Worten auf die Bedeutung der in den artt. [8.] und [9.] enthaltenen Aufzeichnungen hingewiesen werden, die auch schon im Bande III der Werke S. 423—425 abgedruckt sind **).

In [31], S. 189 setzt GAUSS für $M(1, \sin\varphi)$ eine trigonometrische Reihe an. Er scheint sich aber überzeugt zu haben, daß es auch hier zweckmäßiger ist, den reziproken Wert zu entwickeln, und findet, daß die Koeffizienten dieser Entwicklung in einfacher Weise von der lemniskatischen Periode abhängen. Insbesondere erweist sich das absolute Glied N gleich $2\frac{\varpi^2}{\pi^2}$, ein Resultat, das mit dem im art. [13.] des Abschnitts [I.] der weiter unten abgedruckten Abhandlung »*Zur Theorie der transcendenten Functionen gehörig*« ***) ausgesprochenen Theorem (das GAUSS dort als »zu den Hauptsätzen dieser Theorie« gehörig bezeichnet) im Zusammenhang steht. In der Formel für den Maximalwert der dort betrachteten Funktion $\varphi\alpha$ bedeutet nämlich ϖ die lemniskatische Periode. Die im art. [9.] bewiesene Reihenidentität [41], S. 191

---

*) Das GAUSSsche z ist nichts anderes als das JACOBIsche $\sqrt{q}$.

**) Der Abdruck ist im ganzen dem Original entsprechend, obgleich nicht philologisch genau. In der ersten Formel findet sich jedoch ein störendes Versehen, indem nämlich SCHERING statt des auf der rechten Seite von [40] stehenden Ausdrucks $P\cos\varphi$, gesetzt hat $\frac{1}{M(1,\cos\varphi)}$, während es nach [37] heißen müßte $\frac{1}{M(1,\sin\varphi)}$.

***) Aus dem Handbuch **16**, Bb; die Abhandlung ist auszugsweise bereits Werke III, S. 436 abgedruckt. Die hier in Rede stehende Stelle findet sich (mit Änderungen gegen die Handschrift) auf S. 441.

hat GAUSS im Jahre 1830 der Philosophischen Fakultät zu Göttingen als Preisaufgabe vorgeschlagen, die Aufgabe ist jedoch nicht gestellt worden *).

Die Vergleichung der Abschnitte [II.], [III.], [IV.] zeigt vor allem, daß die Leisteaufzeichnungen [II.] früher entstanden sind als [III.] und [IV.]. Erstens sind die in [II.] angewandten Methoden sehr viel primitiver als die der Abschnitte [III.] und [IV.], nämlich rein formal, andererseits bilden die in [II.] gegebenen Reihenentwickelungen für den reziproken Wert des agM. und die daselbst zusammengestellten Formeln für den Ellipsenquadranten die Grundlage für die Betrachtungen von [III.] und [IV.]. Aber auch die Aufzeichnungen [II.] dürften nach dem 30. Mai 1799 entstanden sein; denn sie enthalten alle Hilfsmittel, um die in der Tagebuchnotiz Nr. 98 von diesem Tage (siehe S. 260) angegebene Gleichung

$$\frac{\pi}{\varpi} = M(\sqrt{2}, 1)$$

zu beweisen, und es unterliegt auch keinem Zweifel, daß GAUSS das auf dem Leisteschutzblatt bei dem Werte 1,198 ± später hinzugesetzte »$= \frac{\pi}{\varpi}$« (siehe oben S. 146, art. [3.] und die zugehörige Bemerkung S. 150) gerade um den 30. Mai 1799 geschrieben hat. Wahrscheinlich werden wir die Aufzeichnungen [II.] auf die Sommermonate 1799 anzusetzen haben.

Für die Datierung der Aufzeichnungen [III.] und [IV.] bietet das *Tagebuch* die nötigen Anhaltspunkte. Die Nr. 100 vom November 1799 »circa terminos medios arithmetico-geometricos multa nova deteximus« fällt zeitlich mit dem Beginn der Scheda Ac (November 1799, siehe S. 184 die Überschrift) zusammen; der erste Satz der am 14. Dezember 1798 zu Helmstedt niedergeschriebenen Nr. 101: »Medium arithmetico-geometricum tamquam quotientem duarum functionum transscendentium repraesentabile esse iam pridem inveneramus« bezieht sich offenbar auf die Gleichung [7], S. 186, und damit sind die artt. [1.]—[3.], oben S. 184—187, auf November 1799 datiert; sie sind noch in Braunschweig geschrieben. Der zweite Satz von Nr. 101 »nunc alteram harum functionum ad quantitates integrales reducibilem esse deteximus« bezieht sich auf die Gleichungen [13]—[16] des art. [4.], S. 187; diese Gleichungen und damit der ganze art. [4.] sind also schon im Dezember in Helmstedt geschrieben **). Die Funktion $\varphi(x)$ des Abschnitts [III.], S. 181, stimmt, wie schon bemerkt, mit Q in Gl. [15], S. 187 überein; man liest ferner in der Nr. 102 des *Tagebuchs* vom 23. Dezember: »Medium arithmetico-geometricum ipsum est quantitas integralis«, was mit der Bemerkung der Abhandlung von 1800, art. 8, Werke III, S. 370: »Hoc itaque modo media nostra arithmetico-geometrica ad quantitates integrales revocata sunt« fast wörtlich übereinstimmt. An dieser letzteren Stelle ist von der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung die Rede, der der reziproke Wert des agM. Genüge leistet; diese Differentialgleichung wird im Abschnitt [III.] aufgestellt, man wird also den in [III.] abgedruckten Zettel mit der Tagebuchnotiz Nr. 102 in Verbindung zu setzen haben.

---

*) Nach den Fakultätsakten lautet die von GAUSS vorgeschlagene Aufgabe wie folgt:

»Demonstretur per methodos rigorosas atque concinnas aequalitas, quae intercedit inter seriem infinitam

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x + \left(\frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 xx + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 x^3 + \left(\frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\right)^2 x^4 + \text{etc.}$$

atque quadratum seriei infinitae

$$1 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 x + \left(\frac{1\,.\,5}{4\,.\,8}\right)^2 xx + \left(\frac{1\,.\,5\,.\,9}{4\,.\,8\,.\,12}\right)^2 x^3 + \left(\frac{1\,.\,5\,.\,9\,.\,13}{4\,.\,8\,.\,12\,.\,16}\right)^2 x^4 + \text{etc.}«$$

Wie man sieht, hat GAUSS an die Stelle des in der Scheda Ac auftretenden x^2 hier x gesetzt. Mit derselben Änderung ist die Gleichung [41] auch Werke III, S. 424 abgedruckt.

**) Bei Gl. [13] beginnt ersichtlich andere Tinte.

An den Schluß von [III.], S. 183, knüpft art. [5.] von [IV.], S. 188 unmittelbar an, ferner ist die Tabelle der Werte von $M \sin\varphi$ auf S. 189 eine wesentliche Erweiterung der am Ende von [III.], S. 183 befindlichen; GAUSS wird also nach dem 23. Dezember 1799 wieder die Eintragungen in die Scheda Ac fortgesetzt und die artt. [5.] ff.*) vor dem 13. Februar 1800 geschrieben haben. Die Tagebuchnotiz Nr. 103 von diesem Tage bezieht sich nämlich auf die Theorie der ternären quadratischen Formen, und eine von diesen Formen handelnde Eintragung findet sich auf S. 22 der Scheda (gedruckt Werke II, S. 311). Die vom 6. Mai 1800 an gemachten Tagebuchaufzeichnungen Nr. 105 ff. stehen wieder mit den späteren Aufzeichnungen der Scheda Ac, zu deren Besprechung wir jetzt übergehen, in Übereinstimmung.

Erläuterungen zu [V.], S. 194—206.

Die Funktion [2] ist der in der Tagebuchnotiz Nr. 108 von Ende Mai 1800 erwähnte »sinus lemniscaticus universalissime acceptus« **). Sie ist mit den in [1] durch das agM. definierten Größen ϖ, ϖ' nach der Analogie des sinus lemniscaticus gebildet. In der Tat haben wir z. B. in der Scheda Aa, S. 8 die Darstellung

$$[2]' \qquad \mathrm{sl}\,\varphi = \frac{\pi}{\varpi}\,\frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}\,\mathrm{sc}\,\varphi - \frac{\pi}{\varpi}\,\frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi}-e^{-\frac{3}{2}\pi}}\,\mathrm{sc}\,3\varphi \text{ etc.},$$

wo sl den sinus lemniscaticus, sc den sinus circuli, d. h. den gewöhnlichen Sinus bedeutet und φ beiderseits im Gradmaß zu denken ist***); will man also, wie es SCHERING beim Abdruck dieser und ähnlicher Formeln im Bande III der Werke (S. 417 ff.) getan hat, auf Bogenmaß reduzieren, so hat man für $\varphi = 180^\circ$ linker Hand den halben Lemniskatenumfang ϖ und rechter Hand den halben Kreisumfang, also π zu nehmen, dabei ist das lemniskatische ϖ aus dem in [1] definierten ϖ zu bilden, indem man $\mu = 1$ setzt. Es ist nämlich (siehe die Tagebuchnotiz Nr. 98, oben S. 260) in diesem Fall

$$[1]' \qquad \varpi = \varpi' = \frac{\pi}{M(\sqrt{2}, 1)}.$$

Für diesen Wert $\mu = 1$ ergibt die Formel [2] unmittelbar die Darstellung [2]' des sinus lemniscaticus in der Form, wie sie Werke III, S. 417, art. [6.] angegeben ist†), d. h. beiderseits auf Bogenmaß reduziert.

---

*) Danach gehört also der Zettel [III.] sowohl der Zeit der Abfassung als auch dem Inhalte nach zwischen die artt. [4.] und [5.] des der Scheda Ac entnommenen Abschnitts [IV.]; daß er beim Abdruck vorangestellt worden ist, geschah nur, um die fortlaufende Wiedergabe des Inhalts der Scheda Ac nicht zu unterbrechen.

**) An einer späteren Stelle der Scheda Ac, nämlich S. 39, siehe den art. [8] oben S. 200, bezeichnet GAUSS die Umkehrungsfunktion des Integrals

$$\varphi = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)\left(1+\frac{x^2}{\mu^2}\right)}}$$

geradezu mit $x = \mathrm{sl}\,\varphi$, also mit demselben Zeichen, das er auch häufig (siehe z. B. die gleich folgende Gleichung [2]' in unserem Text) für den sinus lemniscaticus im engern Sinne verwendet.

***) Vergl. die Aufzeichnung oben S. 170, art. [8.], wo aber φ und χ im Bogenmaß zu denken sind, was durch den Faktor $\frac{\pi}{\varpi}$ bei φ angezeigt wird.

†) SCHERING hat in dieser Formel $\frac{1}{\varphi}$ an Stelle des GAUSSschen n gesetzt; mit derselben Änderung hat er auch die Formel [2] und einen Teil der übrigen in unserem [V.] Abschnitt zusammengestellten Formeln Werke III, S. 433—435 wiedergegeben.

Im art. [2.] werden die Funktionen T und W eingeführt; sie sind ganz nach der Analogie der lemniskatischen P, Q gebildet, die GAUSS in der Scheda Aa eingeführt hatte (siehe Werke III, S. 415 art. [4.] ff., insbesondere art. [8.], S. 418) und die auch in der Scheda Ac (siehe in den artt. [8.], S. 201 und [11.], S. 203 die Formeln für P^2 und Q^2) vorkommen. Hier bei den Funktionen T und W tritt auch wieder φ im Gradmaß auf, was die Gleichung $T\,90^\circ = \sqrt{\cos v}$ besonders deutlich zeigt. Es ist jedoch zu bemerken, daß GAUSS bei dieser Bezeichnungsweise links, d. h. bei $T\varphi$, $W\varphi$, geradezu $\varphi = n\varpi$, und rechts, d. h. unter dem trigonometrischen Funktionszeichen ebenso $\varphi = n\pi$ nimmt, also nicht, wie wir erwarten würden, $\varphi^\circ = n \cdot 180^\circ$.

Um die Beziehung zwischen den Funktionen T, W und den JACOBIschen Thetafunktionen möglichst deutlich hervortreten zu lassen, sollen die in den artt [2.], [3.] und [5.] enthaltenen GAUSSschen Formeln hier in der neueren Bezeichnungsweise wiedergegeben werden, wobei wir uns an H. WEBERS *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen*, Braunschweig 1891, anschließen wollen.

Setzt man

$$q = e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}$$

und

$$\vartheta_{00}(n|q) = 1 + 2q\cos 2n\pi + 2q^4\cos 4n\pi + 2q^9\cos 6n\pi + \cdots$$

$$\vartheta_{11}(n|q) = 2q^{\frac{1}{4}}\sin n\pi - 2q^{\frac{9}{4}}\sin 3n\pi + 2q^{\frac{25}{4}}\sin 5n\pi - \cdots$$

$$\vartheta_{10}(n|q) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos n\pi + 2q^{\frac{9}{4}}\cos 3n\pi + 2q^{\frac{25}{4}}\cos 5n\pi + \cdots$$

$$\vartheta_{01}(n|q) = 1 - 2q\cos 2n\pi + 2q^4\cos 4n\pi - 2q^9\cos 6n\pi + \cdots$$

so ist, wenn wir in Übereinstimmung mit GAUSS $\varphi = n\varpi$ nehmen,

$$W\varphi = \sqrt{M(1, \cos v)}\,\vartheta_{00}(n|q)$$

$$T\varphi = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{M(1, \cos v)}\,\vartheta_{11}(n|q)$$

$$T(\tfrac{1}{2}\varpi - \varphi) = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{M(1, \cos v)}\,\vartheta_{10}(n|q)$$

$$W(\tfrac{1}{2}\varpi - \varphi) = \sqrt{M(1, \cos v)}\,\vartheta_{01}(n|q).$$

Die Formeln [10], [12] geben also $\vartheta_{11}^2(n|q)$, $\vartheta_{00}^2(n|q)$ dargestellt durch $\vartheta_{00}(2n|q^2)$ und $\vartheta_{10}(2n|q^2)$, die Formeln [14], [15] sind den folgenden (siehe WEBER a. a. O., S. 79, 80) aequivalent:

$$[14]' \qquad \begin{cases} 2\vartheta_{00}(0|q^2)\,\vartheta_{00}(2n|q^2) = \vartheta_{00}^2(n|q) + \vartheta_{01}^2(n|q), & \text{(WEBER (16), S. 80)} \\ 2\vartheta_{00}(0|q^2)\,\vartheta_{10}(2n|q^2) = \vartheta_{10}^2(n|q) - \vartheta_{11}^2(n|q), & \text{(WEBER (14), S. 80)} \end{cases}$$

wobei die Gleichungen [16], die die Quadrate der Funktionen $\vartheta_{10}(n|q)$, $\vartheta_{01}(n|q)$ durch die der Funktionen $\vartheta_{00}(n|q)$, $\vartheta_{11}(n|q)$ darstellen (vergl. WEBER a. a. O., S. 54), heranzuziehen sind. Die Gleichungen [14]' stellen also für die Thetafunktionen die sogenannte LANDENsche Transformation dar. Demgegenüber gibt die Gleichung [17] die Darstellung von $\vartheta_{11}(n|q^{\frac{1}{2}})$ durch das Produkt $\vartheta_{11}(n|q)\,\vartheta_{01}(n|q)$, nämlich:

$$[17]' \qquad \vartheta_{10}(0|\sqrt{q})\,\vartheta_{11}(n|\sqrt{q}) = 2\vartheta_{01}(n|q)\,\vartheta_{11}(n|q), \qquad \text{(WEBER (10), S. 79)}$$

also die sogenannte GAUSSsche Transformation (vergl. die Gleichung [6]' unten S. 280.).

In Bezug auf die Konstanten haben wir

$$(\alpha)\qquad \frac{1}{M(1,\cos v)} = \vartheta_{00}^2(0|q),\quad \frac{\cos v}{M(1,\cos v)} = \vartheta_{01}^2(0|q),\quad \frac{\sin v}{M(1,\cos v)} = \vartheta_{10}^2(0|q);$$

die dritte dieser Gleichungen ist nichts anderes als die zweite Gleichung von [3]

$$T\,90^\circ = T\frac{\varpi}{2} = \sqrt{\cos v},$$

die im wesentlichen auf die im LEISTE aufgezeichnete Gleichung [6] des Abschnitts [II.], oben S. 177, hinauskommt, wenn man beachtet, daß unser q gleich dem dortigen x^2 ist. —

Ferner gelten die Relationen

$$(\beta)\qquad \begin{cases} \vartheta_{00}^2(0|q^2)+\vartheta_{10}^2(0|q^2) = \vartheta_{00}^2(0|q) \\ \vartheta_{00}^2(0|q^2)-\vartheta_{10}^2(0|q^2) = \vartheta_{01}^2(0|q) \\ 2\,\vartheta_{00}(0|q^2)\ \vartheta_{10}(0|q^2) = \vartheta_{10}^2(0|q), \end{cases}$$

die für

$$\begin{array}{l|l} a_0 = M(a_0, b_0)\,\vartheta_{00}^2(0|q) & a_1 = M(a_0, b_0)\,\vartheta_{00}^2(0|q^2) \\ b_0 = M(a_0, b_0)\,\vartheta_{01}^2(0|q) & b_1 = M(a_0, b_0)\,\vartheta_{01}^2(0|q^2) \\ c_0 = M(a_0, b_0)\,\vartheta_{10}^2(0|q) & c_1 = M(a_0, b_0)\,\vartheta_{10}^2(0|q^2) \end{array}$$

den Relationen des agM.:

$$a_0 = a_1 + c_1,\quad b_0 = a_1 - c_1,\quad c_0 = 2\sqrt{a_1 c_1}$$

entsprechen. Mit den in unserem *Abriß*, Artikel 3., S. 255 benutzten GAUSSschen Bezeichnungen ist

$$\vartheta_{00}(0|x) = p(x),\quad \vartheta_{01}(0|x) = q(x),\quad \vartheta_{10}(0|x) = r(x).$$

Die Bezeichnung der Gln. [15], [20] des art. [5.] weicht von dieser etwas ab.

Charakteristisch für die hier umrissene Theorie der allgemeinen elliptischen Funktionen ist, daß GAUSS nicht den in dem *Problema* zu Beginn des art. [1.], S. 194 formulierten Gedankengang weiter verfolgt, sondern, von dem elliptischen Integral völlig losgelöst, nach der Analogie des sinus lemniscaticus die Funktion $S\varphi$, den sinus lemniscaticus universalissime acceptus, mit den beiden Perioden 2ϖ und $2\varpi' i$ bildet, die er wiederum durch die Gleichungen [1] mit Hilfe des agM. definiert hat. In der oben S. 248 abgedruckten Briefstelle an BESSEL (vom 30. März 1828) sagt GAUSS, ABEL habe denselben Weg genommen, den er (GAUSS) 1798 eingeschlagen hatte; gemeint sind hier offenbar die auf lemniskatische Funktionen bezüglichen Arbeiten aus der zweiten Hälfte des Jahres 1798 (Juli-Oktober), wie sie in der Scheda Aa aufgezeichnet (gedruckt Werke III, S. 413—419, artt. [1.]—[4.], [6.]—[8.]) und in den Tagebuchnotizen Nr. 92 und Nr. 95 angezeigt sind. Zugleich geht aber aus diesem Ausspruche von GAUSS hervor, daß er bei der Entwickelung der allgemeinen Theorie der elliptischen Funktionen (denn um diese handelt es sich ja bei ABEL) ganz nach der Analogie der lemniskatischen Funktionen vorgegangen ist. In der Tat sehen wir auch in den in diesem Abschnitte wiedergegebenen Aufzeichnungen zwischen den auf die allgemeinen elliptischen Funktionen bezüglichen Formeln immer wieder lemniskatische Formeln auftreten, so im art. [2.] und weiterhin in den artt. [7.], [8.], [11.]. Auch die Schlußbemerkung dieses Abschnitts — mit der auch die Scheda Ac abschließt — zeigt, daß GAUSS die ganze hier behandelte Funktionsklasse als in der Betrachtung der Lemniskate wurzelnd nach dieser Kurve benannt hat.

Zur Herleitung der im art. [3.] zusammengestellten Formeln für die Transformation zweiter Ordnung der Thetafunktionen, d. h. um die Quadrate der vier Funktionen

$$T\varphi,\quad W\varphi,\quad W\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)\quad T\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)$$

und das Produkt $T\varphi\, W\left(\frac{\varpi}{2}-\varphi\right)$ darzustellen, scheint GAUSS sich schon hier eines Prinzips bedient zu haben, das man jetzt als das Transformationsprinzip von HERMITE bezeichnet *). Mit voller Deutlichkeit tritt dieses Prinzip freilich erst im art. [12.] des weiter unten aus dem Handbuch 16, Bb abgedruckten Abschnitts [I.] der Abhandlung »*Zur Theorie der transscendenten Functionen gehörig*« hervor, vergl. auch den art. [5.] dieses Abschnitts, wo GAUSS die Transformationsformeln zusammenstellt und darüber schreibt »aus einem allgemeinen Theorem abzuleiten, s. u.«, womit eben jener Satz des art. [12.] gemeint ist. Aus diesen Transformationsformeln ergeben sich für die Nullwerte

$$W0,\quad W\tfrac{1}{2}\varpi,\quad T\tfrac{1}{2}\varpi$$

Beziehungen, die ohne weiteres den Algorithmus des agM. liefern, also zu einer Bestätigung der Formeln dienen, die GAUSS im art. [5.], oben S. 197, zusammengestellt hat **). Dieser Artikel enthält dem art. [7.] des Abschnitts [IV.] gegenüber nichts wesentlich Neues; bemerkenswert ist nur die explizite Darstellung der Größe z in den Gln. [18] und [23] und die auch weiterhin im art. [8.], S. 200, noch einmal auftretende Gleichung $\sin\psi = \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}$, die den Modul der LANDENschen Transformation liefert.

Der art. [4.], S. 196, gibt das Additionstheorem für das Integral

$$\varphi = \int\frac{dS}{\sqrt{(1-S^2)(1+\mu^2S^2)}};$$

durch die Transformation $S = \sin u$ verwandelt sich dieses Integral in

$$\int\frac{du}{\sqrt{1+\mu^2\sin^2 u}},$$

das GAUSS auf das Titelblatt der Scheda Ac gesetzt hat, siehe S. 184 in der Überschrift.

Die lemniskatischen Formeln im art. [7.] (die übrigens ebenso wie die der artt. [2.], [8.] und [11.] zum Teil bereits Werke III, S. 419, 420 abgedruckt sind) bedürfen keiner Erläuterung. Im art. [8.] bedeutet sl — wie bereits oben bemerkt — den sinus lemniscaticus universalissime acceptus. Die am Schluß von art. [8.] stehenden Formeln für die lemniskatischen $(P\varphi)^2$, $(Q\varphi)^2$ werden im art. [11.] zum Teil wiederholt und numerisch ausgeführt.

Bei der im art. [9.] behandelten Umformung von Potenzreihen, deren Exponenten eine arithmetische Progression zweiter Ordnung bilden, in Produkte konnte GAUSS an EULER und an seine eigenen älteren Untersuchungen anknüpfen. Unter diesen letzteren erwähnen wir hier nur den art. [9.] der *Exercitationes mathematicae*, oben S. 142, und die S. 26 der Scheda Aa (also im Spätsommer 1798) formulierte Aufgabe:

Investigatio factorum progressionis infinitae

$$1 + x + x^3 + x^6 + x^{10} + x^{15} + x^{21} + \text{etc.} = S.$$

Die Lösung dieser Aufgabe gibt die Gl. 3) des art. [9.]; sie findet sich auch in der 1808 veröffentlichten *Summatio quarundam serierum singularium*, Werke II, S. 20. Das hier mit Πz bezeichnete Produkt hat GAUSS später (siehe den art. [4.] des Abschnitts [I.] der weiter unten folgenden Abhandlung *Zur Theorie der*

---

*) Siehe HERMITEs zweiten Brief an JACOBI vom August 1844, CRELLEs Journal für Mathematik **32**, 1845, S. 176, Oeuvres de CH. HERMITE, I (1905), S. 18 ff., besonders S. 24, 25.

**) Vergl. die Tagebuchaufzeichnung Nr. 106 vom 22. Mai 1800, wo es heißt: »per quod simul omnia praecedentia [d. h. die Theorie der lemniskatischen Funktionen] nec non theoria mediorum arithmetico-geometricorum pulcherrime nectuntur infinitiesque augentur.«

transscendenten Functionen gehörig aus Handbuch 16, Bb und die Werke III, S. 446 ff. aus Handbuch 18, Bd, S. 221—233 abgedruckte Abhandlung) mit [z] und (siehe art. 5 der *Hundert Theoreme über die neuen Transscendenten*, Werke III, S. 465) mit Fz bezeichnet. Die Buchstaben p, q bedeuten hier dasselbe wie im art. [5.], für ihre hier gegebenen Ausdrücke vergl. Werke III, S. 446 ff. aus Handbuch 18, Bd.

Im art. [10.] treten als durchaus neues Element die von zwei Veränderlichen x, z abhängigen Produkte auf, ihre Umwandlung in eine Reihe erfolgt nach einer Methode, die später auch JACOBI (1829, JACOBIS Werke I, S. 232) ersonnen hat. Im art. [12.] wird so das Produkt K, das die allgemeine Thetafunktion darstellt, und sein Quadrat in eine Reihe verwandelt, wobei aber die konstanten Faktoren P bezw. P und Q unbestimmt bleiben. Nimmt man bei der Umformung von K noch die Bestimmung von $P = \frac{1}{\Pi x^2}$ hinzu, so erhält man die berühmte Identität zwischen der Reihen- und Produktdarstellung der Thetafunktionen in der Form, wie sie GAUSS später (siehe Abschnitt [I.], art. [4.] der unten folgenden Abhandlung *Zur Theorie der transscendenten Functionen gehörig*, ferner *Hundert Theoreme*, Werke III, S. 464, das vierte Theorem) wiederholt angegeben hat. Bekanntlich hat JACOBI in einem Briefe an P. H. FUSS *) erklärt, es sei diese Identität »wohl das wichtigste und fruchtbarste«, was er »in reiner Mathematik erfunden habe«. Die artt. [13.], [14.] geben die Anwendungen auf die Funktionen T und W. Im art. [14.] bedeutet ε ebenso wie im art. [8.] die $\sqrt{-1}$. Wir bemerken noch, daß sich zwischen dem art. [13.] und dem die Scheda Ac abschließenden art. [14.] auf S. 47 beginnend eine Anwendung der Theorie der elliptischen Funktionen findet: *Motus solidi a nullis viribus sollicitati*, über die SCHERING Werke III, S. 495 kurz berichtet.

Die hier besprochenen Aufzeichnungen entsprechen den Tagebuchnotizen Nr. 105—Nr. 108, sie sind demnach im Mai 1800 in Braunschweig verfaßt worden. Man vergl. hierzu den Abschnitt V. des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«.

Erläuterungen zu [VI.] und [VII.], S. 207—212.

Die Aufzeichnung der Scheda Ac im Abschnitt [VI.] kann als Vorarbeit zu der Pars altera der Abhandlung von 1800 (Werke III, S. 372) angesehen werden und bildet zugleich durch die Ausführung einiger in jener Abhandlung nur angedeuteten Rechnungen eine Ergänzung zu ihr. In den Gleichungen (1), (2) des art. 2. ist

$$x' = \tfrac{1}{2}(x+y), \quad y' = \sqrt{xy},$$

ebenso bedeuten weiterhin x'', y'' u.s.w. die folgenden Elemente im Algorithmus des agM. In der Formel S. 208, Z. 5 fehlen in der Handschrift gewisse Faktoren; die Formel muß lauten

$$\frac{dM(x,y)}{dy} = \frac{1}{2}\,\frac{M}{x'}\left(1 + 2\,\frac{y'(x'x'-y'y')}{y(xx-yy)}\cdot\frac{x'}{x''} + 4\,\frac{y''(x''x''-y''y'')}{y(xx-yy)}\cdot\frac{x'}{x'''} + \cdots\right).$$

Die Aufzeichnung der Scheda Af, Abschnitt [VII.], geht sehr erheblich über den Standpunkt der Abhandlung von 1800 (Werke III, S. 361) hinaus, indem sie bereits alle wesentlichen Bestandteile für eine selbständige Theorie der Modulfunktion enthält. Sie gewinnt besondere historische Bedeutung dadurch, daß sie Ergebnisse, die sonst nur aus erheblich später zu datierenden Aufzeichnungen bekannt waren, für das Jahr 1801 sicherstellt. So die Formel [1], die übersichtliche Zusammenstellung der Ausdrücke von $a, b, \sqrt{a^2-b^2}$ durch die Reihen p, q, r am Anfang des art. [3.], und die wichtige Relation [10], die hier anscheinend unabhängig von der Differentialgleichung [12] aus der Darstellung [2] hergeleitet worden ist.

*) *Briefwechsel zwischen Jacobi und Fuss*, herausg. von STÄCKEL und AHRENS, 1908, S. 60, siehe auch Bibliotheca Mathematica, (3) 8, S. 291.

Man vergleiche art. [1.] des Abschnitts [VIII.], S. 213, die artt. [2.] und [4.] des Abschnitts [IX.], S. 218 und 220, ferner Werke III, S. 468, 469, die alle aus sehr viel späterer Zeit stammen. In Gleichung [3], S. 210, ist

$$0{,}1660958116 = \log_{10}\frac{2}{m\pi},$$

wo m der Modul der BRIGGschen Logarithmen ist; in [5] beziehungsweise [7] ist

$$f = \frac{1}{M(a,b)}, \quad F = \frac{1}{M(A,B)}.$$

Besonders hervorzuheben ist noch das *Theorema* im art. [5.]; dieses spielt nämlich eine wichtige Rolle bei der im Handbuch 16, Bb, S. 111—112 gegebenen Lösung des Umkehrproblems des elliptischen Integrals erster Gattung (abgedruckt im Auszug Werke III, S. 401, 402, vollständig hier als Abschnitt [II.] des folgenden Hauptstücks). GAUSS führt es daselbst (siehe Werke III, S. 401) an mit der Bemerkung »wovon jedoch der Beweis tiefer liegt«.

Erläuterungen zu [VIII.], S. 213—216.

Die durch [1] eingeführte Größe x ist mit der in der Scheda Ac (siehe Abschnitt [V.], Gleichung [18], S. 197) durch z bezeichneten Größe identisch; es ist

$$x^4 = e^{-\pi\frac{M(a,b)}{M(a,c)}}.$$

Die Darstellung [1] ergibt sich durch Grenzübergang bei wiederholter Anwendung der LANDENschen Transformation

$$\sin\psi = \mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}$$

vergl. oben S. 198), sie findet sich auch in der Abhandlung aus Handbuch 18, Bd, Werke III, S. 448, wo aber die hier mit x bezeichnete Größe mit $\sqrt[4]{x}$ bezeichnet ist. Die Formeln [2], wo $h = M(a,b)$ ist, sind uns schon von den Schedae Ac und Af her bekannt. Das wesentlich Neue, was uns hier entgegentritt, ist der Algorithmus [3]. GAUSS erhält ihn anscheinend durch folgenden Gedankengang.

Die Gleichungen [5] lauten in neuerer Bezeichnungsweise (vergl. oben S. 275)

[5]′ $$A = H.\vartheta^2_{00}(v|q), \quad B = H.\vartheta^2_{01}(v|q); \quad v = e^{2\pi i y}, \; q = x^4.$$

Es ist also

[5]″ $$\frac{B}{A} = \frac{\vartheta^2_{01}(v|q)}{\vartheta^2_{00}(v|q)}.$$

Ähnlich, wie aus

$$\frac{b}{a} = \frac{\vartheta^2_{01}(0|q)}{\vartheta^2_{00}(0|q)}$$

gebildet ist

$$\frac{b'}{a'} = \frac{\vartheta^2_{01}(0|q^2)}{\vartheta^2_{00}(0|q^2)},$$

bildet nun GAUSS aus [5]″

$$\frac{B'}{A'} = \frac{\vartheta^2_{01}(2v|q^2)}{\vartheta^2_{00}(2v|q^2)}.$$

Nach den in der Scheda Ac enthaltenen Formeln für die Transformation zweiter Ordnung (siehe oben die Gleichungen [14]′, [17]′, S. 275)

$$2\,\vartheta_{00}(0|q^2)\,\vartheta_{00}(2v|q^2) = \vartheta_{00}^2(v|q) + \vartheta_{01}^2(v|q),$$
$$\vartheta_{01}(0|q^2)\,\vartheta_{01}(2v|q^2) = \vartheta_{00}(v|q)\,\vartheta_{01}(v|q)$$

ergibt sich aus den obigen Formeln

[5]''' $$\frac{B'}{A'} = \frac{A\,B}{\left(\frac{A+B}{2}\right)^2}\,\frac{a'}{b'}.$$

Gauss setzt nun fest, daß wie beim agM.

$$A' = \frac{A+B}{2}$$

sein soll; dann folgt aber aus [5]'''

$$B' = \frac{2\,A\,B}{A+B}\,\frac{a'}{b'}.$$

Auf eine weitere Erläuterung der Gaussschen Formeln können wir verzichten, da sie mit Hilfe der Theorie der Thetafunktionen leicht bestätigt werden können, wir bemerken nur noch, daß die in [6] festgesetzte Beziehung zwischen den aufeinanderfolgenden Werten $\varphi, \varphi', \ldots$ sich in der Form

[6]' $$\sin\varphi = \frac{a}{c}\,\frac{2\sin\varphi'\sqrt{\frac{c'}{a'}}}{1+\sin^2\varphi'\cdot\frac{c'}{a'}} = \frac{2\,a\sin\varphi'}{(a+b)+(a-b)\sin^2\varphi'}$$

darstellen läßt *). Es ist dies die sogenannte Gausssche Transformation der *Determinatio attractionis* (1818), Werke III, S. 352. Die Darstellung von $\sin\varphi$ und $\operatorname{tang}\varphi$ durch Thetafunktionen in den Gleichungen [8] und [9] stimmt — von geringfügigen Schreibfehlern abgesehen, die beim Abdruck oben S. 216 beseitigt sind — mit der aus dem Jahre 1827 stammenden im Handbuch 16, Bb (abgedruckt Werke III, S. 473, art. [5.]) überein, wenn man das dortige $\theta = \varphi - \frac{\pi}{2}$ setzt. Bemerkenswert ist, daß oben S. 216, Gleichung [9] (im Nenner von $\operatorname{tang}\varphi$) auch die ungerade Thetafunktion in derselben Form wie a. a. O. S. 472 auftritt **).

Die Aufzeichnung [VIII.] beginnt auf S. 37 der Scheda An; auf S. 35 dieser Scheda findet sich am Schluß einer astronomischen Rechnung die Bemerkung: »geendigt d. 2. May 1809«. Unser Abschnitt [VIII.] ist danach mit der Tagebuchnotiz Nr. 139 vom 20. Juni 1809 »Series ad Media arithmetico-geometrica pertinentia fusius evolutae« in Verbindung zu bringen. Vergl. auch die aus dem Handbuch 18, Bd, S. 221—233 stammende Abhandlung, die Werke III, S. 446 abgedruckt ist, und (vergl. die Bemerkung Scherings ebenda S. 494) aus derselben Zeit stammt.

Erläuterungen zu [IX.], S. 217—231.

In Scherings Untersuchungen über das agM., die Werke III, S. 374 abgedruckt sind, finden sich zwei Gleichungen, die eine S. 377 Zeile 3, die andere S. 380 Zeile 13, 14, von denen Schering S. 380 sagt, daß Gauss sie nebeneinander aufgezeichnet habe. In der Tat sind diese Gleichungen im art. [1.] des Ab-

*) Es ist nämlich $\sin 2M = \frac{c}{a}$; vergl. auch die aus Scheda Ac herrührende Formel [14]', S. 275.

**) Schering bemerkt Werke III, S. 390 (wohl in Bezug auf die vorstehende Aufzeichnung), daß die Bestimmung eines reellen y »durch eine Lücke unvollendet gelassen« sei. In der Tat befindet sich (siehe oben S. 214, nach Gl. [4]) an der Stelle, wo die Erklärung von y folgen sollte, eine Lücke, die jedoch durch einen Hinweis auf die im art. [2.] folgende Gleichung [7] ausgefüllt werden konnte. Vergl. auch die im Abschnitt [IX.] artt. [10.—12.], S. 227 ff. wiedergegebenen Aufzeichnungen.

schnitts [IX.] enthalten, und zwar stimmt die erste mit der Gl. [1], die zweite mit der Gl. [4] überein. Die Bedeutung namentlich der ersten Gleichung erhellt aus ihrem Zusammenhang mit dem »Schönen Lehrsatz« des art. [4.], S. 220, vergl. den Artikel 2. unseres *Abrisses* oben S. 255 und die Erörterungen von Schering im Artikel 13. seines Aufsatzes, Werke III, S. 379, 380; die Gleichung der ersten Zeile von S. 380 ist nichts anderes als jener »Schöne Lehrsatz«, der also auch mit dem Werke VIII, S. 98 abgedruckten *Theorema elegantissimum* übereinstimmt (vergl. die Bemerkung von R. Fricke, a. a. O.). Übrigens ist die Gleichung [1] vollkommen identisch mit der historisch so bedeutungsvollen Gleichung [7] des Abschnitts [IV.] (oben S. 186), die in der Scheda Ac, S. 10 aufgezeichnet ist. In [1], [2], [3] bedeutet k den Modul der Briggschen Logarithmen, vergl. auch art. [2.], S. 218, wo die mit a bezeichnete Größe gleich $k\pi$ ist. Die Handschrift enthält noch eine Formel für die Peripheria Ellipsis, die mit der in der Anzeige der *Determinatio attractionis* (Werke III, S. 360) gegebenen übereinstimmt und darum hier nicht abgedruckt worden ist.

Die im art. [1.] enthaltene Aufzeichnung stammt aus dem Mai 1809.

Die in den artt. [2.]—[9.] wiedergegebenen Aufzeichnungen geben eine vollständige Skizze für die Theorie der Modulfunktion. Der Inhalt der artt. [2.] und [4.] ist im wesentlichen in der Scheda Af (siehe die artt. [2.], [3.], [4.] des Abschnitts [VII.], S. 210, 211) enthalten. Der Satz [1] des art. [3.], S. 219 gibt den *nexum mutuum*, der die *infinite multos terminos medii arithmetico-geometrici* mit einander verbindet, und den Gauss nach der Notiz Nr. 109 des *Tagebuchs* am 3. Juni 1800 in Braunschweig gefunden hat. Zu diesem Fundamentalsatz der Lehre von der Modulfunktion ist folgendes zu bemerken.

Bedeutet $\mathfrak{M}(a,b)$ einen beliebigen von Null verschiedenen Wert des agM. zwischen a und b, bei dessen Erzeugung durch den Algorithmus des agM. die Vorzeichen der Quadratwurzeln also irgendwie gewählt worden sind, so ist stets

(*) $$\frac{1}{\mathfrak{M}(a,b)} = \frac{\delta}{M(a,b)} + \frac{i\gamma}{M(a,c)}.$$

Wenn in dieser Formel $M(a,b)$, $M(a,c)$ irgend zwei bestimmte Werte des agM. zwischen a und b, beziehungsweise zwischen a und $c = \sqrt{a^2-b^2}$ bedeuten, so sind δ, γ ganze Zahlen, die den Bedingungen

$$\delta \equiv 1, \quad \gamma \equiv 0 \pmod{4}$$

genügen. Nennt man zwei Werte $M(a,b)$, $M(a,c)$ zusammengehörig, wenn der reale Teil des Quotienten $\frac{M(a,b)}{M(a,c)}$ wesentlich positiv ist, so gilt *) das folgende. Bedeuten $M(a,b)$, $M(a,c)$ zwei zusammengehörige Werte, so ist in der Formel (*) dann und nur dann $\delta = 1$, wenn auch $\mathfrak{M}(a,b)$ und $M(a,c)$ zusammengehörige Werte sind. Das ist also die Bedeutung der Gaussschen Formel [1] oder **)

[1]' $$\frac{1}{\mathfrak{M}(a,b)} = \frac{1}{M(a,b)} + \frac{4ik}{M(a,c)}.$$

Wahrscheinlich hat Gauss diese Formel aus der Theorie der Reihen p, q, r, die er als die Summatorischen Funktionen bezeichnet ***), abgeleitet; diese Vermutung stützt sich auf den art. [6.], S. 222, wo in [5] der allgemeinste Wert der dort mit M bezeichneten Größe angegeben und in den Kettenbruch [4] entwickelt wird, bei dem der Quotient

$$\frac{n}{m} = \frac{q^2}{p^2}$$

*) Nach einer Mitteilung von L. v. Dávid.

**) Vergl. Werke III, S. 378.

***) Werke III, S. 386 unten; diese Stelle, d. h. die fünf letzten Zeilen dieser Seite, hat Gauss auf der letzten Einbandseite seines Handexemplars der *Disquisitiones arithmeticae* aufgezeichnet.

seinen Wert nicht verändert. Hier ist also

$$M = \frac{M(m, n)}{M(m, \sqrt{m^2-n^2})};$$

auch wendet GAUSS in den artt. [6.], [7.], [8.], [9.] die Funktionszeichen p, q, r etwas abweichend von der sonst gebrauchten Weise an, indem er nämlich

$$p(t) = 1+2e^{-\pi t}+2e^{-4\pi t}+2e^{-9\pi t}+\cdots,$$
$$q(t) = 1-2e^{-\pi t}+2e^{-4\pi t}-2e^{-9\pi t}+\cdots,$$
$$r(t) = 2e^{-\frac{1}{4}\pi t}+2e^{-\frac{9}{4}\pi t}+2e^{-\frac{25}{4}\pi t}+\cdots$$

setzt; vergl. die Werke VIII, S. 101 in art. [3.] abgedruckte Aufzeichnung, die aus dem Handbuch 25, Bh, S. 25 stammt und etwa 1825 geschrieben sein dürfte. Daß auf S. 223 mit den Formeln für die lineare Transformation von pt auch die entsprechenden Formeln für die von den beiden Veränderlichen abhängige Thetafunktion aufgezeichnet sind (vergl. die ausführliche Darstellung dieser Theorie im Abschnitt [I.] artt. [1.] und [13.] der unten folgenden Abhandlung *Zur Theorie der transscendenten Functionen gehörig*, besonders die letzte Gleichung des art. [13.]), erscheint durch die Form bemerkenswert, in der GAUSS hier die allgemeine Thetafunktion schreibt, nämlich

$$\sum_n h^{\alpha n^2+2\beta n+\gamma},$$

wo die quadratische binäre Form im Exponenten den Zusammenhang mit der Zahlentheorie unmittelbar hervortreten läßt.

In den artt. [7.] und [8.] wird das Verhalten der drei Summatorischen Funktionen p, q, r bei ganzzahliger linearer Transformation von M in den sechs verschiedenen Fällen modulo 2 aufgestellt und mit Zuhilfenahme der Reduktionstheorie der binären quadratischen Formen negativer Determinante, die »einfachste Form« von M gefunden. Daß in der Tabelle [6], S. 224, für h der reziproke Wert des in der Handschrift und Werke III, S. 386 angegebenen Wertes $i^\alpha\sqrt{(\delta+\gamma t)}$ genommen werden muß, hat schon P. PEPIN*) bemerkt. Vergl. im übrigen den Abschnitt V. des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«.

Die beiden Zettel, auf denen die art. [1.]–[9.] aufgezeichnet sind, stammen aus verhältnismäßig später Zeit; das geht u. a. daraus hervor, daß auf dem zweiten Zettel (siehe oben S. 226) die von FOURIER 1822 eingeführte Bezeichnung der Grenzen eines bestimmten Integrals benutzt wird. Sie dürften etwa 1825 geschrieben sein, aber, wie bereits bemerkt, stammt ihr wesentlicher Inhalt aus dem Jahre 1801. Auszüge aus diesen beiden Zetteln sind Werke III, S. 378, 379, 385—386 und VIII, S. 99, 100—101 abgedruckt.

In den artt. [10.] und [12.] wird die Darstellung des elliptischen Integrals erster und zweiter Gattung mit veränderlicher oberer Grenze ähnlich wie in der *Determinatio attractionis* gegeben; die Rektifikation der Ellipse wird im art. [13.] noch nach einer zweiten Methode behandelt. Die Entstehungszeit dieser Untersuchungen ist durch die Tagebuchnotizen Nr. 110 und Nr. 111 auf 5. bis 10. Juni 1800 festgelegt. Die *Transcendentes ellipticae*, auf die nach Nr. 110 GAUSS seine Theorie nun auch unmittelbar angewendet hat, sind die Integrale erster Gattung, und mit der unmittelbaren Anwendung ist der *Algorithmus* gemeint, der $\theta = T^\infty$ liefert (siehe oben S. 228). Von den drei verschiedenen Methoden, nach denen GAUSS gemäß der Notiz Nr. 111 die Rektifikation erledigt hat, sind hier zwei entwickelt. Die in den artt. [10.]—[14.] abgedruckten drei Zettel selbst sind ersichtlich kurz hintereinander, aber auch sehr viel später als 1800

*) *Introduction à la théorie des fonctions elliptiques d'après les Oeuvres posthumes de Gauss*, Memorie dell' Accad. Pontif. de' Nuovi Lincei 9, 2, 1893, S. 103.

geschrieben*). Der im art. [13.], S. 230 enthaltenen Rechnung liegt nämlich der WALBECKsche Wert der Abplattung der Erde $\frac{1}{302{,}78}$ zu Grunde, der aus dem Jahre 1819 stammt**) und mit dem GAUSS in den zwanziger Jahren des XIX. Jahrhunderts gearbeitet hat***). Bezeichnet man mit a die halbe große, mit b die halbe kleine Achse der Meridanellipse, so ist

$$a = 302{,}78 = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}, \quad b = 1-a = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}},$$

also in der Tat

$$\frac{1}{a} = \frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}} = \frac{1}{302{,}78}$$

die Abplattung. Der *factor constans* ist also $(\mathfrak{a}-\mathfrak{b})^{-1}$, und der sich ergebende Wert $\log_{10}\mathfrak{a} = 6{,}8045975$ stimmt mit dem Werke IX, S. 69 berechneten (dort ist die halbe große Achse mit a bezeichnet) überein; zur Berechnung des Ellipsenumfangs dient dort die gewöhnliche Reihe, siehe im LEISTE, oben S. 177, Gl. [5].

Erläuterungen zum Briefwechsel, S. 232—251.

Dem Briefe [1.] zufolge hat GAUSS die in der Tagebuchnotiz Nr. 98 vom 30. Mai 1799 niedergelegte Bemerkung (siehe oben S 260) an PFAFF brieflich mitgeteilt†). Die Auseinandersetzungen zur Lehre vom agM., die PFAFF daraufhin in seinem Briefe gibt, sind sehr bemerkenswert. Er beobachtet nämlich, daß für $a = 1$, $b = 1+x$ in den Entwicklungen der aufeinanderfolgenden arithmetischen und geometrischen Mittel nach Potenzen von x jeweils gewisse erste Koeffizienten übereinstimmen, und daß diese übereinstimmenden Koeffizienten in allen folgenden Reihenentwicklungen (also auch in der Grenzreihe) erhalten bleiben††). Diese Beobachtung wird durch den folgenden Satz erklärt und bestätigt, der zugleich die Antwort auf die von PFAFF aufgeworfenen Fragen gibt.

*) Der erste, der den art. [10.] enthält, ist anscheinend von einem Buchdeckel abgelöst; die beiden andern und noch ein dritter, mit Zahlenrechnungen und der Wiederholung von Formeln, die auch auf den andern stehen, sind von demselben Bogen abgetrennt. In der Formel des art. [10.], S. 227 Zeile 9, enthält die Handschrift ein Versehen, das Integral im dritten Gliede der Gleichung muß nämlich lauten

$$\int \frac{dT''}{\sqrt{(a''a''\sin 4T''^2+b''b''\cos 4T''^2)}};$$

dabei ist natürlich

$$a' = \frac{a+b}{2}, \quad b' = \sqrt{ab}, \quad a'' = \frac{a'+b'}{2}, \quad a'' = \sqrt{a'b'}.$$

**) HENRIC. JOH. WALBECK, *Dissertatio de forma et magnitudine telluris etc.* Aboae 1819.

***) Vergl. die *Zahlen, das Erdsphäroid betreffend*, abgedruckt Werke IX, S. 69 und die zugehörige Bemerkung ebenda S. 71, ferner die Briefe von GAUSS an OLBERS vom 18. April 1822, 6. Juli 1824, 1. März 1827, abgedruckt ebenda S. 369, 320, 377.

†) Zum Briefwechsel GAUSS-PFAFF vergl. die Bemerkung S. 109 dieses Bandes.

††) PFAFF hat in der Tat, wie er befürchtet, einen Rechenfehler begangen; es ist nämlich $\delta'' = -\frac{11}{4.128}$, also von $D'' = -\frac{5}{2.128}$ verschieden. Erst von $n = 3$ an ist

$$\delta''' = D''' = \frac{1}{2}(\delta''+D'') = -\frac{21}{8.128}.$$

Daß die von PFAFF »für jedes n« gefundenen Werte der Koeffizienten von x, x^2, x^3, x^4 in der Grenzreihe auftreten, bestätigt man an der z. B. oben S. 172 in Gl. (1) angegebenen Reihe für $\mathrm{Tm}(1+x) = M(1+x, 1)$.

Bildet man aus den für $|x| < \rho$ konvergenten Reihen

$$a = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots,$$
$$b = 1 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots$$

den Algorithmus des agM. in der Weise, daß alle a_n, b_n sich für $x = 0$ auf 1 reduzieren, so erscheinen auch die a_n, b_n und $M(a, b)$ in der Form von Potenzreihen, die in einer gewissen Umgebung *) von $x = 0$ konvergent sind; in den Reihen für a_n, b_n stimmen die Koeffizienten der gleichhohen Potenzen von x bis einschließlich zur $(2^n - 1)$ten Potenz überein und diese übereinstimmenden Koeffizienten bleiben bei allen folgenden a_{n+k}, b_{n+k} und demgemäß auch in der Grenzpotenzreihe für $M(a, b)$ erhalten **).

Für a_1, b_1 ist der Satz unmittelbar einleuchtend. Nimmt man ihn für a_k, b_k als bewiesen an, setzt also

$$a_k = 1 + \varphi_1 x + \cdots + \varphi_\lambda x^\lambda + \alpha^{(k)}_{\lambda+1} x^{\lambda+1} + \cdots,$$
$$b_k = 1 + \varphi_1 x + \cdots + \varphi_\lambda x^\lambda + \beta^{(k)}_{\lambda+1} x^{\lambda+1} + \cdots,$$

wo $\lambda = 2^k - 1$ ist, so ist zunächst klar, daß in den Entwicklungen von

$$a_{k+1} = \tfrac{1}{2}(a_k + b_k), \quad b_{k+1} = \sqrt{a_k b_k}$$

die Koeffizienten der Potenzen von x bis zur $(2\lambda + 1)$ten einschließlich durch

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_\lambda, \alpha^{(k)}_{\lambda+1}, \ldots, \alpha^{(k)}_{2\lambda+1}, \beta^{(k)}_{\lambda+1}, \ldots, \beta^{(k)}_{2\lambda+1}$$

bestimmt werden. Für das arithmetische Mittel hat man, wie auch PFAFF bemerkt, unmittelbar ***)

$$a_{k+1} = s_{2\lambda+1} + \tfrac{1}{2}(\alpha^{(k)}_{2\lambda+2} + \beta^{(k)}_{2\lambda+2}) x^{2\lambda+2} + \cdots,$$

wo

$$s_{2\lambda+1} = 1 + \varphi_1 x + \cdots + \varphi_\lambda x^\lambda + \tfrac{1}{2}(\alpha^{(k)}_{\lambda+1} + \beta^{(k)}_{\lambda+1}) x^{\lambda+1} + \cdots + \tfrac{1}{2}(\alpha^{(k)}_{2\lambda+1} + \beta^{(k)}_{2\lambda+1}) x^{2\lambda+1}$$

ist. Da aber in $s^2_{2\lambda+1}$ die Glieder bis zu $x^{2\lambda+1}$ einschließlich mit den entsprechenden Gliedern in dem Produkt $a_k b_k$ übereinstimmen, so folgt, daß auch in b_{k+1} die Glieder bis zu $x^{2\lambda+1}$ einschließlich durch $s_{2\lambda+1}$ gegeben werden, womit unser Satz allgemein bewiesen ist.

Zu der Bemerkung PFAFFs über die Methodus tangentium inversa vergl. man die Schrift *Viro illustri A. G. Kaestner de problemate e geometria curvarum respondet Jo. Frid. Pfaff*, 1799, die als Gratulationsschrift zum 80. Geburtstage KAESTNERS (27. September 1799) gedruckt worden ist, aber die eigentliche Behandlung des geometrischen Problems nicht enthält. Diese sollte vielmehr (nach Blatt 3a, Zeile 15, 16 der Gratulationsschrift, vergl. auch die von KAESTNER selbst verfaßte Anzeige, Göttingische gelehrte Anzeigen, 1799, III, S. 1761) in einem besonderen *Tractatus geometrico-analyticus de methodo angentium inversa* gegeben werden, der aber niemals erschienen ist.

Zu dem in [2.] von PFAFF erörterten Mittel vergl. die in dem »Anhang« zu diesem Briefe zusammengestellten Auszüge aus den »*Gaussiana*« SCHUMACHERS †). Die ersten in { } eingeschlossenen Zeilen

---

*) Diese bestimmt sich einerseits durch ρ, andererseits dadurch, daß sie keine Wurzel der Gleichungen $a = 0$, $b = 0$, $a^2 - b^2 = 0$ ($x = 0$ ausgenommen) enthalten darf, vergl. L. v. DÁVID, CRELLES Journal für Mathematik **140**, 1911, S. 292.

**) Siehe H. SCHAPIRA, *Über ein allgemeines Princip algebraischer Iterationen*, Verhandlungen des Naturhistorisch-med. Vereins zu Heidelberg, N. F. 4, 1887, S. 25 ff., wo auf S. 40—42 ein allgemeiner Satz ausgesprochen ist, der den oben angegebenen als besonderen Fall einschließt.

***) Man beachte, daß bei PFAFF a^n das geometrische und b^n das arithmetische Mittel bezeichnet.

†) Ausführlich behandelt dieses Mittel C. W. BORCHARDT, In memoriam DOMINICI CHELINI, Collec-

dieses »Anhangs« sind einer von SCHUMACHER geschriebenen Aufzeichnung entnommen, während das folgende eine eigenhändige Aufzeichnung von GAUSS wiedergibt. Die Entdeckung, zu der PFAFF am Schluß seines Schreibens [2.] GAUSS »im voraus« Glück wünscht, ist wahrscheinlich die in den Tagebuchnotizen Nr. 114 vom 30. November und Nr. 115 vom 3. Dezember 1800 angezeigte Darstellung der Klassenanzahl binärer quadratischer Formen durch unendliche Produkte und unendliche Reihen, vergl. Werke II, S. 285, 286 und die Bemerkungen ebenda S. 297.

Zu dem Briefe an BESSEL [3.] sind die auf die Koeffizientenbestimmung der dort behandelten Reihenentwickelung bezüglichen Stellen oben S. 183, 185, ferner Werke VIII, S. 84 zu vergleichen. Diesen Brief an BESSEL hatte GAUSS einem Briefe an OLBERS vom 3. September 1805 (*Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke* II, *Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss* 1. Abt. 1900, S. 269) beigelegt mit der Bitte, ihn an den Empfänger zu befördern. In dem Briefe an OLBERS heißt es:

»Ich werde beiher meine angefangenen Arbeiten über die Störung der Planeten fortsetzen, sowohl was zur allgemeinen Theorie als zur Anwendung auf die Asteroïden gehört. In jener ist es von besonderer Wichtigkeit, die Koefficienten, die aus

$$(a^2 + a'^2 - 2aa' \cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} = A^0 + 2A' \cos\varphi + 2A'' \cos 2\varphi + 2A''' \cos 3\varphi \text{ etc.}$$

entspringen, leicht angeben zu können, weil man sie für sehr viele Werthe von a, a' braucht.«

Man vergl. auch die wahrscheinlich aus dem Oktober 1802 stammende Aufzeichnung in dem Handbuch 17, Be (betitelt »Astronomische Untersuchungen und Rechnungen vornehmlich über die Ceres-Ferdinandea, 1802«) S. 24, die Werke VII, S. 384 abgedruckt ist, ferner den Brief [7.] von GAUSS an SCHUMACHER, besonders aber in der aus dem Handbuch 19, Be, S. 36 ff. stammenden, weiter unten abgedruckten Abhandlung »*Einiges über die unendliche Reihe* $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \cdots$« die artt. [5.] und [6.], S. 42 ff. des Handbuchs, wo die Beweise für die in dem Briefe an BESSEL mitgeteilten Formeln gegeben sind.

Über die in dem Briefe [4.] von SCHUMACHER und dem Antwortschreiben [5.] von GAUSS genannte Aufgabe von PEDRAYES vergl. die ausführlichen Angaben im Abschnitt VI. des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«. DON PEDRO CARO Y SUREDA MARQUIS DE LA ROMAÑA (1761—1811) war Befehlshaber der spanischen Truppen, die auf Befehl NAPOLEONS während der Monate März, April und Mai des Jahres 1808 auf den dänischen Inseln landeten, um die Vorhut der gegen Schweden bestimmten Armee des Generals BERNADOTTE zu bilden *).

---

tanea mathematica etc. 1881, S. 206—212, BORCHARDTS Werke (1888), S. 455. Das im GAUSSarchiv befindliche Tagebuch SCHUMACHERS *Gaussiana* stammt aus der Zeit, wo SCHUMACHER sich in Göttingen aufhielt, um unter der Anleitung von GAUSS astronomische Studien zu machen, also aus dem Winter 1808/09 (vergl. GAUSS an OLBERS, *Wilhelm Olbers, sein Leben und seine Werke* II, 1, 1900, S. 430); es enthält teils Aufzeichnungen SCHUMACHERS über Mitteilungen von GAUSS, teils von GAUSS selbst geschriebene Notizen. In bezug auf die in dem Anhang zu [2.] wiedergegebene Notiz vergl. auch noch die Bemerkung SCHUMACHERS in dem Briefe an GAUSS vom 8. Juni 1816, *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* I, 1860, S. 127: »wie Ihre elementaren Media, über die ich ein paar Zettel von Ihrer Hand inter κειμηλια bewahre«.

*) Vergl. *Biographie universelle*, **38** (1824), S. 497—504.

In geschichtlicher Beziehung besonders wichtig sind die beiden Briefe [6.] und [7.], vergl. den Abschnitt VIII. des oben genannten Aufsatzes. CARL FERDINAND DEGEN war in der Tat ein Landsmann von GAUSS, er ist nämlich zu Braunschweig am 1. November 1766 geboren; biographische Angaben über ihn findet man in der *Festskrift ved hundredaarsjubilaeet for N. H. Abels födsel*, Kristiania 1902, Artikel von HOLST, S. 13, französische Übersetzung: *N. H. Abel, Mémorial publié à l'occasion du centenaire de sa naissance*, S. 14, 15. JOH. NIK. TETENS (1736—1807) war 1776—1799 Professor in Kiel, dann Etatsrat in Kopenhagen. Die Äußerung von GAUSS (siehe oben S. 248), daß er im zweiten Teil seiner Abhandlung *circa seriem* $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\cdots$ einiges aus seinen Untersuchungen über das agM. bekannt machen wolle, stimmt mit dem ursprünglichen Entwurfe dieser Abhandlung, den wir weiter unten abdrucken (siehe die bereits erwähnte Abhandlung *Einiges über die unendliche Reihe* $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\cdots$ aus Handbuch 19, Be, besonders den art. [5.]) überein. In der späteren (Werke III, S. 207 abgedruckten) Bearbeitung der Fortsetzung der von GAUSS selbst veröffentlichten Abhandlung von 1812 wird das agM. nicht ausdrücklich erwähnt, aber im art. 46, Werke III, S. 217, Gleichung [90] ist

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,1-x\right)=\frac{1}{M(1,\sqrt{x})}.$$

Die Äußerung von GAUSS über ABEL in dem Briefe [8.] ist darum bemerkenswert, weil sie auf den Weg, den GAUSS 1798 bei den lemniskatischen und weiterhin 1800 bei den allgemeinen elliptischen Funktionen eingeschlagen hat, ein helles Licht wirft. Ganz ähnlich äußert GAUSS sich auch in einem Briefe an CRELLE (siehe Werke III, S. 495, letzter Absatz) und in einem Briefe an SCHUMACHER vom 30. Mai 1828 (*Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* II, 1860, S. 177, 178). Vergl. den Abschnitt IX. des mehrfach erwähnten Aufsatzes.

In bezug auf den zweiten Teil des Briefes [8.] und die darauf bezüglichen Briefstellen [a.] und [b.] ist folgendes zu bemerken. JOH. FRIEDRICH POSSELT (1794—1823) war seit 1819 Professor der Mathematik in Jena als Nachfolger von KARL DIETRICH V. MÜNCHOW (1778—1836), der 1810—1818 Professor in Jena, dann in Bonn war. Während GAUSS' Gedächtnis in bezug auf Ereignisse aus seiner Jugendzeit fast untrüglich genannt werden kann, zeigt es sich hier im Jahre 1828 bei dem nur wenige Jahre zurückliegenden Anlaß nicht in gleichem Maße zuverlässig; der Brief von PFAFF war nicht mehrere Jahre, sondern genau ein halbes Jahr vor dessen Tode geschrieben.

Mit Ausnahme der Briefstelle [b.] sind alle hier wiedergegebenen Briefstellen, auch die bereits anderweitig veröffentlichten, nach den im GAUSSarchiv befindlichen Urschriften ohne jede Änderung abgedruckt worden.

SCHLESINGER.

ZUR THEORIE DER TRANSSCENDENTEN FUNCTIONEN GEHÖRIG.

[I.]

[ENTWICKELUNGEN UND UMFORMUNGEN DER UNENDLICHEN REIHEN UND PRODUKTE.]

[Aus Handbuch 16, Bb, Den astronomischen Wissenschaften gewidmet, November 1801.]

[1.]

[S. 40]

Es sei

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2}=T,$$

indem für k alle ganze positive und negative Zahlen gesetzt werden, und

$$T=A+2B\cos\omega P+2C\cos 2\omega P+2D\cos 3\omega P+\text{etc.},$$

so ist

$$A=\int Td\omega,\quad B=\int T\cos\omega P.d\omega,\quad C=\int T\cos 2\omega P.d\omega,$$
$$D=\int T\cos 3\omega P.d\omega \text{ u. s. w.},$$

alle Integrale von $\omega=0$ bis $\omega=1$ ausgedehnt. Es ist aber klar, dass jene Integrale zwischen diesen Grenzen mit den Integralen

$$\int e^{-\alpha\omega\omega}d\omega,\quad \int e^{-\alpha\omega\omega}\cos\omega P.d\omega,\quad \int e^{-\alpha\omega\omega}\cos 2\omega P.d\omega,\quad \int e^{-\alpha\omega\omega}\cos 3\omega P.d\omega \text{ etc.}$$

übereinkommen, wenn diese von $\omega=-\infty$ bis $\omega=+\infty$ ausgedehnt werden. Da nun allgemein

$$e^{-\alpha\omega\omega}\cos n\omega P$$

$$=\tfrac{1}{2}e^{-\alpha\omega\omega+in\omega P}+\tfrac{1}{2}e^{-\alpha\omega\omega-in\omega P}=\tfrac{1}{2}e^{-\frac{nnPP}{4\alpha}}\left(e^{-\alpha\left(\omega-\frac{inP}{2\alpha}\right)^2}+e^{-\alpha\left(\omega+\frac{inP}{2\alpha}\right)^2}\right),$$

so folgt leicht, dass

$$\int e^{-\alpha\omega\omega}\cos n\omega P\,.\,d\omega=e^{-\frac{nn\pi\pi}{\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},$$

folglich

$$T=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left(1+2e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}}\cos\omega P+2e^{-4\frac{\pi\pi}{\alpha}}\cos 2\omega P+2e^{-9\frac{\pi\pi}{\alpha}}\cos 3\omega P+\text{etc.}\right).$$

In einer andern Form so

[1] $$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2}=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot e^{-\alpha\omega\omega}\,.\,\Sigma e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}\left(k+\frac{\alpha\omega i}{\pi}\right)^2}.$$

Allgemeiner

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2}\left(\cos 2(k+\omega)\alpha\psi+i\sin 2(k+\omega)\alpha\psi\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot\Sigma e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}\left(k-\frac{\alpha\psi}{\pi}\right)^2}(\cos 2k\omega\pi-i\sin 2k\omega\pi)\,[^*)].$$

Oder, $\alpha\alpha'=\pi\pi$ und $-\alpha\psi=\omega'\pi$ gesetzt,

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2}(\cos(2k+2\omega)\omega'\pi-i\sin(2k+2\omega)\omega'\pi)$$

$$=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot\Sigma e^{-\alpha'(k+\omega')^2}(\cos 2k\omega\pi-i\sin 2k\omega\pi),$$

$$\Sigma e^{-\alpha\left(k+\omega-\frac{1}{4}\right)^2}-\Sigma e^{-\alpha\left(k+\omega+\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$=4\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\cdot\left(e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}}\sin\omega P-e^{-9\frac{\pi\pi}{\alpha}}\sin 3\omega P+\text{etc.}\right)[^{**})].$$

[*) Links vom Gleichheitszeichen hat die Handschrift $-i\sin 2(k+\omega)\alpha\psi$.]

[**) Rechts vom Gleichheitszeichen hat die Handschrift $-3e^{-9\frac{\pi\pi}{\alpha}}\sin 3\omega P$.]

Man kann den Lehrsatz [1, S. 288] auch so ausdrücken:

$$\Sigma te^{-\pi t^4kk-2\pi ttk\sqrt{u}-\frac{1}{2}\pi u}$$

ändert den Werth nicht, wenn t in $\frac{1}{t}$ und u in $-u$ verwandelt wird.

Das Arithmetisch-Geometrische Mittel zwischen

$$(1+2x+\cdots)^2 \text{ und } (2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+\text{u.s.w.})^2$$

ist $\dfrac{\pi}{\log\frac{1}{x}}$.

[S. 41]

Das Integral

$$\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(aa\cos\varphi^2+bb\sin\varphi^2)}}$$

wird gleich dem Integrale

$$\int\frac{d\varphi'}{\sqrt{(a'a'\cos\varphi'^2+b'b'\sin\varphi'^2)}},$$

beide von φ und $\varphi'=0$ gerechnet, wenn man

$$a'=\tfrac{1}{2}(a+b),\quad b'=\sqrt{ab}$$

und

$$\frac{1}{\sin\varphi}=\frac{a+b}{2a}\cdot\frac{1}{\sin\varphi'}+\frac{a-b}{2a}\cdot\sin\varphi'$$

$$\sin\varphi'=\frac{a-\sqrt{(aa\cos\varphi^2+bb\sin\varphi^2)}}{(a-b)\sin\varphi}=\frac{(a+b)\sin\varphi}{a+\sqrt{(aa\cos\varphi^2+bb\sin\varphi^2)}}\ ^{*)}$$

[setzt.]

---

*) [mit anderer Schrift und Tinte an der Seite]

$$\frac{a-b}{a+b}=\mu,\quad \frac{2\sqrt{\mu'}}{1+\mu'}=\mu,\quad \sqrt{\left(1-\frac{bb}{aa}\right)}=\mu,$$

$$\frac{2}{\mu\sin\varphi}=\sin\varphi'\,.\,\sqrt{\mu'}+\frac{1}{\sin\varphi'\,.\,\sqrt{\mu'}}.$$

[2.]

Man setze

$$P = 1 + \frac{x^n.1-x^{2n+1}}{1+x^n.1+x^{n+1}} + \frac{x^{2n}.1-x^{2n+2}.1-x^{n+1}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}} + \frac{x^{3n}.1-x^{2n+3}.1-x^{n+1}.1-x^{n+2}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}.1+x^{n+3}} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{x^{2n}.1-x^{n+1}}{1+x^n.1+x^{n+1}} + \frac{x^{3n}.1-x^{n+1}.1-x^{n+2}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}}$$
$$+ \frac{x^{4n}.1-x^{n+1}.1-x^{n+2}.1-x^{n+3}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}.1+x^{n+3}} + \text{etc.}$$

$$R = P - Q.$$

Man suche zuerst diese Differenz, indem man das erste, zweite, dritte Glied u.s.w. der Reihe Q von dem ersten, zweiten, dritten Gliede der Reihe P abzieht, so kommt

$$R = \frac{1}{1+x^n} + \frac{x^n.1-x^n}{1+x^n.1+x^{n+1}} + \frac{x^{2n}.1-x^n\ 1-x^{n+1}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}} + \frac{x^{3n}.1-x^n\ 1-x^{n+1}.1-x^{n+2}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n-2}.1+x^{n+3}}\ \text{etc.}$$

Wir bezeichnen diese Reihe durch $\varphi(x, n)$.

Man suche ferner jene Differenz R, indem man das erste, zweite, dritte Glied u.s.w. der Reihe Q von dem zweiten, dritten, vierten u.s.w. der Reihe P abzieht, so wird

$$R = 1 - \frac{x^{2n+1}}{1+x^{n+1}} - \frac{x^{3n+2}.1-x^{n+1}}{1+x^{n+1}.1+x^{n+2}} - \frac{x^{4n+3}.1-x^{n+1}.1-x^{n+2}}{1+x^{n+1}.1+x^{n+2}.1+x^{n+3}} - \text{u.s.w.}$$

oder offenbar

$$R = 1 - x^{2n+1}\varphi(x, n+1)$$

folglich

$$\varphi(x, n) = 1 - x^{2n+1}\varphi(x, n+1).$$

Dieser Schluss ist allgemein, so lange $n > 1$, man hat demnach unter dieser Einschränkung

$$\varphi(x, n) = 1 - x^{2n+1} + x^{4n+4} - x^{6n+9} + x^{8n+16} - \text{etc.}$$

Hingegen ist für den Fall $n = 0$ das letzte Glied von Q nicht als verschwindend zu betrachten. Setzt man es $= T$, so wird der erste Werth von R um T kleiner seyn als der zweite, also

$$T = 1 - x\varphi(x, 1) - \varphi(x, 0)$$

oder

$$\varphi(x, 0) = 1 - x\varphi(x, 1) - T = 1 - x + x^4 - x^9 + x^{16} - \dots - T,$$

also da

[S. 42]

$$\varphi(x, 0) = \tfrac{1}{2}$$

und

$$2T = \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-xx}{1+xx} \cdot \frac{1-x^3}{1+x^3} \cdot \frac{1-x^4}{1+x^4}\ \text{etc.},$$

so wird

$$\frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1-xx}{1+xx} \cdot \frac{1-x^3}{1+x^3} \cdot \frac{1-x^4}{1+x^4}\ \text{etc.} = 1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + 2x^{16} - \text{etc.}$$

Der erste Theil ist hier

$$1-x.1-x^3.1-x^5.1-x^7 \dots \frac{1-xx}{1+x} \cdot \frac{1-x^4}{1+xx} \cdot \frac{1-x^6}{1+x^3}\ \text{etc.}$$
$$= (1-x)^2(1-xx)(1-x^3)^2(1-x^4)(1-x^5)^2(1-x^6)\ \text{etc.}$$

Bezeichnen wir noch

$$1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + 2x^{16}\ \text{etc. mit}\ Fx,$$

so wird offenbar

$$Fx.F(-x) = (Fxx)^2.$$

[3]

Zieht man auf ähnliche Weise von der Reihe

$$\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^{n+1}} + \frac{x^n.1-x^{2n+4}.1-x^{n+2}}{1-x^{n+1}.1-x^{n+3}} + \frac{x^{2n}.1-x^{2n+6}.1-x^{n+2}.1-x^{n+4}}{1-x^{n+1}.1-x^{n+3}.1-x^{n+5}} + \text{etc.}$$

die Reihe

$$\frac{x^n.1-x^{n+2}}{1-x^{n+1}} + \frac{x^{2n}.1-x^{n+2}.1-x^{n+4}}{1-x^{n+1}.1-x^{n+3}} + \frac{x^{3n}.1-x^{n+2}.1-x^{n+4}.1-x^{n+6}}{1-x^{n+1}.1-x^{n+3}.1-x^{n+5}} + \text{etc.}$$

ab, so erhält man einmal

$$\frac{1-x^n}{1-x^{n+1}} + \frac{x^n.1-x^n.1-x^{n+2}}{1-x^{n+1}.1-x^{n+3}} + \frac{x^{2n}.1-x^n.1-x^{n+2}.1-x^{n+4}}{1-x^{n+1}.1-x^{n+3}.1-x^{n+5}} + \text{etc.} = \psi(x, n)$$

und zweitens

$$1+x^{n+1}+\frac{x^{2n+3}.1-x^{n+2}}{1-x^{n+3}}+\frac{x^{2n+3}.x^{n+2}.1-x^{n+2}.1-x^{n+4}}{1-x^{n+3}.1-x^{n+5}}+\text{etc.}$$
$$=1+x^{n+1}+x^{2n+3}\psi(x,n+2).$$

Man hat also, den Fall $n=0$ ausgenommen,

$$\psi(x,n)=1+x^{n+1}+x^{2n+3}\psi(x,n+2)$$

folglich

$$\psi(x,n)=1+x^{n+1}+x^{2n+3}+x^{3n+6}+x^{4n+10}+\text{etc.},$$

dagegen hat man für den Fall $n=0$

$$\psi(x,0)=1+x+x^3\psi(x,2)-\frac{1-x^2.1-x^4.1-x^6}{1-x.1-x^3.1-x^5}\text{etc.},$$

folglich

[2] $$\frac{1-x^2.1-x^4.1-x^6\ldots}{1-x.1-x^3.1-x^5\ldots}=1+x+x^3+x^6+x^{10}+\text{etc.}$$

[4.]

[S. 43]

Wir bezeichnen

$$(1-x)(1-xx)(1-x^3)\text{ etc. mit }[x]\text{[*)]},$$

so ist

$$x[x^{24}]=x-x^{25}-x^{49}+x^{121}+x^{169}-x^{289}-x^{361}-\text{etc.[**)]},$$

[2]' $$\left\{\begin{aligned}1+x+x^3+x^6+\text{etc.}&=\frac{(1-xx)(1-x^4)(1-x^6)\ldots}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots}=\frac{[xx]^2}{[x]}\\&=(1+x)(1+xx)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\ldots\\&\quad\cdot(1-x^2)(1-x^4)(1-x^{16})\ldots\end{aligned}\right.$$

[3] $$1-2x+2x^4-2x^9+\text{etc.}=\frac{(1-x)(1-xx)(1-x^3)\ldots}{(1+x)(1+xx)(1+x^3)\ldots}=\frac{[x]^2}{[xx]}$$

[4] $$\left\{\begin{aligned}1+2x+2x^4+2x^9+\text{etc.}&=\frac{(1+x)(1-xx)(1+x^3)\ldots}{(1-x)(1+xx)(1-x^3)\ldots}=\frac{[xx]^5}{[x]^2[x^4]^2}\\&=(1+x)^2(1-xx)(1+x^3)^2(1-x^4)(1+x^5)^2\ldots\text{[***)]}\end{aligned}\right.$$

[5] $$[-x]=\frac{[xx]}{[x][x^4]}.$$

[*) Zum Unterschied von den die Zusätze des Herausgebers einschließenden Klammern sind die hier von Gauss benutzten Klammern verstärkt.]

[**)] Folgt aus # [S. 293], wenn man statt x, y schreibt $x^3, -x$ [und dann an die Stelle von x setzt $x^{\frac{1}{3}}$].

[***)] Entwickelt die Potenzen der Reihe.

$$\ldots\left[\left(1+\frac{x^{16}}{yy}\right)\left(1+\frac{x^8}{yy}\right)\right]\left(y+\frac{1}{y}\right)(1+x^8yy)(1+x^{16}yy)(1+x^{24}yy)\ldots$$
$$=\frac{1}{[x^8]x}\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\cdots\right\}$$

$$(1+xy)(1+x^2y)(1+x^3y)(1+x^4y)\ldots\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{x^2}{y}\right)\left(1+\frac{x^3}{y}\right)\left(1+\frac{x^4}{y}\right)\cdots$$
$$=\frac{1}{[x]}\left\{1+x\left(y-1+\frac{1}{y}\right)+x^3\left(yy-y+1-\frac{1}{y}+\frac{1}{yy}\right)\right.$$
$$\left.+x^6\left(y^3-yy+y-1+\frac{1}{y}-\frac{1}{yy}+\frac{1}{y^3}\right)\cdots\right\}$$

$$[x^3]=1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}-\text{etc.}$$

folgt leicht aus ☾ [S. 294], wenn man $y=1+\omega$ setzt und daraus die Bedingungsgl[eichung] bildet.

$$\#\left\{\begin{aligned}&(1+xy)(1+x^3y)(1+x^5y)\ldots\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{x^3}{y}\right)\left(1+\frac{x^5}{y}\right)\cdots\\&=\frac{1}{[xx]}\left\{1+x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^9\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)+\cdots\right\},\end{aligned}\right.$$

$$\text{etc.}+x^{(\omega-1)^2}+x^{\omega\omega}+x^{(\omega+1)^2}+\text{etc.}=\frac{[xx]\ldots1+x^{2\omega+3}.1+x^{2\omega+1}.1+x^{2\omega-1}.1+x^{2\omega-3}\ldots}{x^{-\omega\omega}.x^{2\omega-1}.x^{2\omega-3}\ldots}.$$

[5.]

Aus einem allgemeinern Theorem abzuleiten, s. u. [art. 12]

$$\left\{1+x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)\cdots\right\}.\left\{1-x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)\cdots\right\}$$
$$=(1-2xx+2x^8-2x^{18}\ldots)\left\{1-xx\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^8\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)\cdots\right\}$$

$$\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5+\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\cdots\right\}\left\{1+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^{16}\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)\cdots\right\}$$
$$=(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{9}{2}}+x^{\frac{25}{2}}+x^{\frac{49}{2}}\ldots)\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x^{\frac{1}{2}}+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^{\frac{9}{2}}+\text{etc.}\right\}$$

$$\left\{1+x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)\cdots\right\}^2+\left\{1-x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)\cdots\right\}^2$$
$$=2(1+2xx+2x^8+2x^{18}\ldots)\left\{1+xx\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^8\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)\cdots\right\}$$

$$\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5+\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}^2+\left\{1+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^{16}\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+\cdots\right\}^2$$
$$=(1+2xx+2x^8+2x^{18}\ldots)\left\{1+xx\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^8\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)\cdots\right\}$$

$$\left\{1+x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)\cdots\right\}^4-\left\{1-x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)\cdots\right\}^4$$
$$=8\left(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{9}{4}}+x^{\frac{25}{4}}\ldots\right)^3\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x^{\frac{1}{4}}+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^{\frac{9}{4}}+\text{etc.}\right\}\ [\text{*})]$$

$$\left\{1+x\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^4\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)\cdots\right\}^4-\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x^{\frac{1}{4}}+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^{\frac{9}{4}}+\cdots\right\}^4$$
$$=(1-2x+2x^4-2x^9\ldots)^3\left\{1-x\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)+x^4\left(y^{16}+\frac{1}{y^{16}}\right)-\text{etc.}\right\}$$

$$\left\{\left(y-\frac{1}{y}\right)x-\left(y^3-\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5-\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}$$
$$\cdot\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5+\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}$$
$$=(1-2x^8+2x^{32}\ldots)\left\{\left(yy-\frac{1}{yy}\right)xx-\left(y^6-\frac{1}{y^6}\right)x^{18}+\text{etc.}\right\}$$

$$\left\{\left(y-\frac{1}{y}\right)x-\left(y^3-\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5-\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}^2$$
$$+\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5+\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}^2$$
$$=2(1+2x^8+2x^{32}\ldots)\left\{\left(yy+\frac{1}{yy}\right)xx+\left(y^6+\frac{1}{y^6}\right)x^{18}+\text{etc.}\right\}$$

$$-\left\{\left(y-\frac{1}{y}\right)x-\left(y^3-\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^5-\frac{1}{y^5}\right)x^{25}\ldots\right\}^2$$
$$+\left\{\left(y+\frac{1}{y}\right)x+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)y^9+\left(y^5+\frac{1}{y^5}\right)x^{25}+\cdots\right\}^2$$
$$=4(x^2+x^{18}+x^{50}\ldots)\left\{1+\left(y^4+\frac{1}{y^4}\right)x^8+\left(y^8+\frac{1}{y^8}\right)x^{32}\ldots\right\}$$

[*)] In der Handschrift steht rechts vom Gleichheitszeichen im zweiten Faktor $x^{\frac{9}{2}}$ statt $x^{\frac{9}{4}}$].

[6.]

[S. 44]

Durch Induction haben wir gefunden:

$$1+x+x^5+x^8+x^{16}+x^{21}+x^{33}\ldots$$
$$=(1+x)(1+x^5)(1-x^6)(1+x^7)(1+x^{11})(1-x^{12})(1+x^{13})(1+x^{17})(1-x^{18})(1+x^{19})$$
$$=\frac{[xx]^2[x^3][x^{12}]}{[x][x^4][x^6]}=\frac{[x^6]^2[-x]}{[-x^3][xx]}$$
$$=(1-x^3-x^9+x^{18}+x^{30}\ldots)(1+x)(1+x^3)(1+x^5)\ldots,$$

$$\left(1+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^9+\left(y^6+\frac{1}{y^6}\right)x^{36}+\text{etc.}\right)\left(\frac{1}{y}x+yyx^4+\frac{1}{y^4}x^{16}+y^5x^{25}+\ldots\right)$$
$$\cdot\left(yx+\frac{1}{yy}x^4+y^4x^{16}+\frac{1}{y^5}x^{25}+\ldots\right)=\left(1+\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)x^3+\left(y^6+\frac{1}{y^6}\right)x^{12}+\ldots\right)\frac{xx[x^{18}]^2}{[x^6]},$$

Factor

$$\frac{[x^{18}]^2}{[x^6]}=\frac{(1-x^{18})(1-x^{18})(1-x^{36})(1-x^{36})\ldots}{(1-x^6)(1-x^{12})(1-x^{24})(1-x^{30})\ldots}.$$

Also

$$(1-2x^{36}+2x^{144}-\ldots)$$
$$\cdot\left\{(x-x^{25}-x^{49}+x^{121}+\text{etc.})^2+(x^4-x^{16}-x^{64}+x^{100}+x^{196}-\text{etc.})^2\right\}$$
$$=(1-2x^{12}+2x^{48}-2x^{108}+\text{etc.})\frac{xx[x^{18}]^2}{[x^6]}.$$

$$\frac{[x^{36}]^2}{[x^{72}]}\left\{[x^{24}]^2+x^6\frac{[x^{12}]^2[x^{72}]^4}{[x^{36}]^2[x^{24}]^2}\right\}=\frac{[x^{12}]^2[x^{18}]^2}{[x^{24}][x^6]}.$$

Also

$$\frac{[x][x^4]^3[x^6]^2}{[xx]^2[x^3]^2[x^{12}]}+x\frac{[x][x^{12}]^2}{[x^3]^2[x^4]}=1;$$
$$[x^2]^{24}=16x[x]^8[x^4]^{16}+[x]^{16}[x^4]^8.$$

[7.]

Durch Induction ferner gefunden:

$$1+x+x^2+x^5+x^7+x^{12}+x^{15}+\ldots$$
[6] $$=(1+x)(1+x^2)(1-x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1-x^6)(1+x^7)(1+x^8)(1-x^9)\ldots$$
$$=\frac{(1-x^3)(1-x^6)(1-x^9)(1-x^{12})(1-x^{15})(1-x^{18})\ldots}{(1-x)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^{11})(1-x^{13})(1-x^{17})\ldots}=\frac{[xx][x^3]^2}{[x][x^6]}$$

$$\frac{4x\,(2)^3\,(6)\,(12)^2}{(1)\,(3)\,(4)^2} = \frac{(2)^{10}}{(1)^4\,(4)^4} - \frac{(6)^{16}}{(3)^4\,(12)^4}\,[^*)]$$

$$-4x\,[(1)]\,\frac{(3)\,(12)^3}{(4)\,(6)^2} = \frac{(1)^4}{(2)^2} - \frac{(3)^4}{(6)^2}\,[^{**})].$$

[8.]

[S. 45]

Durch Induction gefunden:

$$[7]\left\{\begin{array}{l} \qquad (1+2x+2x^4+2x^9+\cdots)+(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\cdots) \\ = 2(1+x)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)\ldots\times(1-x^5)(1-x^7)(1-x^{17})(1-x^{19})\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\times(1-x^{12})(1-x^{24})(1-x^{36})\ldots \\ = \frac{2[xx]^2[x^{12}]}{[x][x^4]}\times(1-x^5)(1-x^7)(1-x^{17})(1-x^{19})\ldots \end{array}\right.$$

$$[8]\left\{\begin{array}{l} \qquad (1+2x+2x^4+2x^9+\cdots)-(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\cdots) \\ = 2x(1+x)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)\ldots\times(1-x)(1-x^{11})(1-x^{13})(1-x^{23})\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\times(1-x^{12})(1-x^{24})\ldots \\ = \frac{2x[xx]^2[x^{12}]}{[x][x^4]}(1-x)(1-x^{11})(1-x^{13})(1-x^{23})\ldots \end{array}\right.$$

[9.]

Durch Induction gefunden:

$$\varepsilon - \varepsilon\varepsilon = \sqrt{3}$$

$$\{1+2x+2x^4+2x^9+\cdots\}+(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)\{1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\cdots\}$$
$$= -2\varepsilon\varepsilon(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon\varepsilon x^3)(1-\varepsilon x^5)(1-\varepsilon\varepsilon x^7)\ldots(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})(1+x^{21})\ldots$$
$$\times(1-x^4)(1-x^8)(1-x^{12})\ldots$$

Dieselbe Summe wäre demnach

$$= -2\varepsilon\varepsilon\{1-\varepsilon x-\varepsilon\varepsilon x^3+\varepsilon\varepsilon x^6+\varepsilon x^{10}-x^{15}-x^{21}+\varepsilon x^{28}+\varepsilon\varepsilon x^{36}-\text{etc.}\}$$
$$\cdot(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})\ldots$$
$$= \frac{2}{x^{\frac{1}{8}}}\{-\varepsilon\varepsilon x^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{9}{8}}+\varepsilon x^{\frac{25}{8}}-\varepsilon x^{\frac{49}{8}}-x^{\frac{81}{8}}+\varepsilon\varepsilon x^{\frac{121}{8}}-\text{etc.}\}(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})\text{ etc.}$$

[*) Hier ist $(n) = [x^n]$ gesetzt.]

[**) In der Handschrift fehlt links vom Gleichheitszeichen der Faktor (1).]

Woraus folgt

$$1.\quad 1+2x+2x^4+2x^9+\text{etc.} = \frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{1}{8}}+2x^{\frac{9}{8}}-x^{\frac{25}{8}}+x^{\frac{49}{8}}-2x^{\frac{81}{8}}-\cdots\}$$
$$.(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})\ldots$$

$$2.\quad 1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\text{etc.} = \frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{25}{8}}-x^{\frac{49}{8}}-x^{\frac{121}{8}}+x^{\frac{169}{8}}+\cdots\}$$
$$.(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})\ldots[^*)]$$

$$\text{Factor communis} = \frac{[x^6]^2}{[x^3][x^{12}]}.$$

Auch scheint zu seyn

$$[9]\left\{\begin{array}{l} \qquad 1+2x^9+2x^{36}+\text{etc.} \\ = \frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{1}{8}}-x^{\frac{25}{8}}+x^{\frac{49}{8}}-x^{\frac{121}{8}}-x^{\frac{169}{8}}\ldots\}(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})\ldots \end{array}\right.$$

$$[10]\left\{\begin{array}{l} \qquad x+x^4+x^{16}+x^{25}+\text{etc.} \\ = \frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{9}{8}}-x^{\frac{81}{8}}-x^{\frac{225}{8}}+x^{\frac{441}{8}}+x^{\frac{729}{8}}-\cdots\}(1+x^3)(1+x^9)(1+x^{15})\ldots \\ = x\frac{[x^6]^2[x^9][x^{36}]}{[x^3][x^{12}][x^{18}]}, \end{array}\right.$$

folglich

$$1-x-x^3+x^6+\text{etc.} = \frac{[x][x^4]}{[xx]},$$

wie gehörig.

Ist alles bewiesen.

[10.]

Durch Induction gefunden:

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots)-(1+2x^5+2x^{20}+\ldots)$$
$$= 2x(1+x^3)(1+x^{13})(1+x^{23})\ldots(1+x^7)(1+x^{17})\ldots(1-x^4)(1+x^8)(1+x^{12})\ldots$$
$$.(1-x^{10})(1-x^{20})\ldots^{**})$$

[*) In der Handschrift steht $-x^{\frac{169}{8}}-\ldots$.]

**) $(1-x^4)(1+x^8)(1+x^{12})\ldots$ ist
$(1-x^4)(1-x^{36})(1-x^{44})(1-x^{76})\ldots(1+x^8)(1+x^{12})(1+x^{28})(1+x^{32})\ldots.$

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots)+(1+2x^5+2x^{20}+\ldots)$$
$$=2(1+x)(1+x^9)(1+x^{11})(1+x^{19})(1+x^{21})\ldots$$
$$.(1+x^4)(1-x^{12})(1+x^{16})(1+x^{24})(1-x^{10})(1-x^{20})\ldots\text{*)}$$

$$(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{9}{4}}+x^{\frac{25}{4}}+x^{\frac{49}{4}}+\ldots)+(x^{\frac{5}{4}}+x^{\frac{45}{4}}+\ldots)$$
$$=x^{\frac{1}{4}}(1+x)(1-x^3)(1-x^7)(1+x^9)(1+x^{11})\ldots$$
$$.(1+xx)(1+x^4)(1+x^6)(1+x^8)(1-x^{10})(1+x^{12})\ldots$$

[11.]

[S. 46]

Zum Beweise der letztern Gleichung scheint folgendes brauchbar:

$$(1+xy)(1-x^3y)\left(1-\frac{x^7}{y}\right)\left(1+\frac{x^9}{y}\right)(1+x^{11}y)(1-x^{13}y)\left(1-\frac{x^{17}}{y}\right)\left(1-\frac{x^{19}}{y}\right)\ldots$$

wird entwickelt in

$$P\left\{\begin{matrix}1-x^4yy+x^{28}y^4-x^{72}y^6+\ldots \\ -\frac{x^{16}}{yy}+\frac{x^{52}}{y^4}-\frac{x^{108}}{y^6}+\ldots\end{matrix}\right\}+Q\left\{y-\frac{x^6}{y}\begin{matrix}-x^{14}y^3+x^{48}y^5-\ldots \\ +\frac{x^{32}}{y^3}-\frac{x^{78}}{y^5}+\ldots\end{matrix}\right\}$$

wo P und Q blosse Functionen von x.

Setzt man $y=x^3$, so verschwindet der in Q multiplicirte Theil, und man hat

$$(1-x^8)(1-x^{12})(1-x^{28})(1-x^{32})\ldots=P(1-2x^{10}+2x^{40}-2x^{90}\text{ etc.}).$$

Also

$$P=\frac{[x^{20}]}{[x^{10}]^2}(1-x^8)(1-x^{12})(1-x^{28})(1-x^{32})\ldots$$

Setzt man hingegen

$$y=-\frac{1}{x},$$

so verschwindet das erste Product, und man hat

*) besser: $1+x\;\frac{1+x^3}{1-x^3}\;1+x^4\;1+x^6\;\frac{1+x^7}{1-x^7}\;1+x^9\;1-x^{10}\;1+x^{11}\;\frac{1+x^{13}}{1-x^{13}}\;1+x^{14}$ etc.

$$P(1-xx-x^{18}+x^{24}+x^{56}-x^{66}\ldots)=\frac{Q}{x}(1-x^8-x^{12}+x^{36}+x^{44}-\ldots).$$

Nun ist hier

der Factor von $P\ldots\ldots[x^{20}](1-x^2)(1-x^{18})(1-x^{22})(1-x^{38})\ldots$

der Factor von $\frac{Q}{x}\ldots\ldots[x^{20}](1-x^8)(1-x^{12})(1-x^{28})(1-x^{32})\ldots,$

folglich

$$Q=\frac{x[x^{20}]}{[x^{10}]^2}(1-x^2)(1-x^{18})(1-x^{22})(1-x^{38})\ldots$$

Setzt man also

$$(1+x)(1-x^3)(1-x^7)(1+x^9)\ldots=t,$$
$$(1-x)(1+x^3)(1+x^7)(1-x^9)\ldots=u,$$

so hat man

$$t=P(1-x^4-x^{16}+x^{28}+x^{52}-\text{etc.})+Q(1-x^6-x^{14}+x^{32}+x^{48}-\text{etc.})$$

und

$$u=P(1-x^4-x^{16}+x^{28}+x^{52}-\text{etc.})-Q(1-x^6-x^{14}+x^{32}+x^{48}-\text{etc.}),$$

also

$$t+u=2P(1-x^4-x^{16}+x^{28}+x^{52}-\text{etc.})=2P[x^{20}](1-x^4)(1-x^{16})(1-x^{24})(1-x^{36})\ldots$$
$$=\frac{2[x^{20}][x^4]}{[x^{10}]^2}=\frac{2}{x^{\frac{1}{4}}}\frac{[x^{20}][xx]}{[x^{10}]^2[x^4]}\times\{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{9}{4}}+\text{etc.}\},$$

$$t-u=2Q(1-x^6-x^{14}+x^{32}+x^{48}-\text{etc.})=2Q[x^{20}](1-x^6)(1-x^{14})(1-x^{26})(1-x^{34})\ldots$$
$$=\frac{2x[x^{20}]^2}{[x^{10}]^2}\frac{[xx]}{[x^4]}=\frac{2}{x^{\frac{1}{4}}}\frac{[x^{20}]}{[x^{10}]^2}\frac{[xx]}{[x^4]}\times\{x^{\frac{5}{4}}+x^{\frac{45}{4}}+\ldots\}.$$

Woraus dann das gedachte Theorem [siehe die letzte Gleichung des art. 10.] von selbst folgt.

[12.]

[S. 47]

Zum Beweise der ersteren Sätze hingegen wird man sich auf folgende Art verhalten.

$$(1-xy)(1+xxy)\left(1+\frac{x^8}{y}\right)\left(1-\frac{x^9}{y}\right)(1-x^{11}y)(1+x^{12}y) \text{ etc.}$$

wird entwickelt in

$$P\left\{\begin{matrix} 1-x^3yy+x^{26}y^4-x^{69}y^6+\cdots \\ -\frac{x^{17}}{yy}+\frac{x^{54}}{y^4}-\frac{x^{111}}{y^6}+\cdots \end{matrix}\right\}+Q\left\{\begin{matrix} y-x^{13}y^3+x^{46}y^5-\cdots \\ -\frac{x^7}{y}+\frac{x^{34}}{y^3}-\frac{x^{81}}{y^5}+\cdots \end{matrix}\right\}$$

wo P und Q bloss Functionen von x sind. Um diese zu bestimmen, setzen wir erst $y = x^{\frac{1}{2}}$, wodurch

$$(1-x^9)(1-x^{11})(1-x^{29})(1-x^{31})\ldots = P(1-2x^{10}+2x^{40}-\ldots) = P\frac{[x^{10}]^2}{[x^{20}]}.$$

Zweitens setzen wir

$$y = \frac{1}{x},$$

so wird

$$P\{1-x-x^{19}+x^{22}+x^{58}\ldots\}+\frac{Q}{x}\{1-x^9-x^{11}+x^{38}+x^{42}-x^{87}\ldots\} = 0, \text{[*)]}$$

also

$$Q = -xP\frac{(1-x)(1-x^{19})(1-x^{21})\ldots}{(1-x^9)(1-x^{11})(1-x^{29})\ldots} = -x\left[\frac{[x^{20}]}{[x^{10}]^2}\right](1-x)(1-x^{19})(1-x^{21})\cdots$$

Setzen wir also

$$(1-x)(1+xx)(1+x^8)(1-x^9)\ldots = t$$
$$(1-x^3)(1+x^4)(1+x^6)(1-x^7)\ldots = u,$$

so hat man (aus $y = 1$ und $y = xx$)

[*) In der Handschrift steht x^{67} statt x^{87}.]

$$t = P(1-x^3-x^{17}+x^{26}+x^{54}-\ldots)+Q(1-x^7-x^{13}+\ldots)$$
$$u = P(1-x^7-x^{13}+x^{34}+x^{46}-\ldots)+Qxx(1-x^3-x^{17}+x^{26}+x^{54}\ldots).$$

Man findet aber auch durch ein ganz ähnliches Verfahren

$$(1-x^3y)(1+x^4y)\left(1+\frac{x^6}{y}\right)\left(1-\frac{x^7}{y}\right)\cdots$$
$$= P\left(1-x^7yy-\frac{x^{13}}{yy}\begin{matrix}+x^{34}y^4\ldots \\ +\frac{x^{46}}{y^4}\ldots\end{matrix}\right)+Qxx\left(\begin{matrix} y-x^{17}y^3+\ldots \\ -\frac{x^3}{y}+\frac{x^{26}}{y^3}-\ldots\end{matrix}\right).$$

Hieraus folgt

$$tx+u = (P+Qx)\{1+x-x^4-x^7-x^{13}-x^{18}+x^{27}+x^{34}\ldots\}$$
$$-tx+u = (P-Qx)\{1-x+x^4-x^7-x^{13}+x^{18}-x^{27}+x^{34}\ldots\}$$

oder

$$tx+u = (P+Qx)[-x^5](1+x)(1-x^4)(1-x^6)(1+x^9)\ldots$$
$$u-tx = (P-Qx)[-x^5](1-x)(1+x^4)(1+x^6)(1-x^9)\ldots$$

Nun ist ferner

$$(P+Qx)(1-x-x^{19}+x^{22}+\ldots) = -\frac{Q}{x}(1-xx+x^3-x^9-x^{11}+x^{21}+x^{24}\ldots)$$
$$= -\frac{Q}{x}[-x^5](1-xx)(1+x^3)(1+x^7)(1-x^8)\ldots$$

$$(P-Qx)(1-x-x^{19}+x^{22}+\ldots) = -\frac{Q}{x}(1+xx-x^3-x^9-x^{11}-x^{21}+x^{24}\ldots)$$
$$= -\frac{Q}{x}[-x^5](1+xx)(1-x^3)(1-x^7)(1+x^8)\ldots,$$

also

$$P+Qx = \frac{[-x^5]}{[x^{10}]^2}(1-xx)(1+x^3)(1+x^7)(1-x^8)\ldots$$
$$P-Qx = \frac{[-x^5]}{[x^{10}]^2}(1+xx)(1-x^3)(1-x^7)(1+x^8)\ldots$$

$$tx+u = (1+x^5)^2(1+x^{15})^2\ldots$$
$$.(1+x)(1-xx)(1+x^3)(1-x^4)(1-x^6)(1+x^7)(1-x^8)(1+x^9)\ldots$$

$$u - tx = (1+x^5)^2(1+x^{15})^2 \dots$$
$$.(1-x)(1+xx)(1-x^3)(1+x^4)(1+x^6)(1-x^7)(1+x^8)(1-x^9)\dots$$

[S. 48]

Hieraus folgt

$$tx + u = \frac{[xx]^3}{[x][x^4]} \cdot \frac{[x^{10}]}{[x^5][x^{20}]} = \frac{[x][x^4]}{[xx]^2} \frac{[x^{10}]}{[x^5][x^{20}]}(1+2x+2x^4+2x^9\dots)$$
$$u - tx = \frac{[x][x^4]}{[xx]^2} \cdot \frac{[x^{10}]^6}{[x^5]^3[x^{20}]^3} = \frac{[x][x^4]}{[xx]^2} \frac{[x^{10}]}{[x^5][x^{20}]}(1+2x^5+2x^{20}+2x^{45}\dots).$$

Woraus das Theorem [die beiden ersten Gleichungen von art. 10., S. 297, 298] von selbst folgt.

[13.]

Zu den Hauptsätzen in dieser Theorie gehört folgendes Theorem. Bezeichnet man

$$\left(e^{-\frac{P\alpha}{24}} - e^{-\frac{25P\alpha}{24}} - e^{-\frac{49P\alpha}{24}} + e^{-\frac{121P\alpha}{24}} + e^{-\frac{169P\alpha}{24}} - \dots\right)\sqrt[4]{\alpha} \text{ durch } \varphi\alpha,$$

so ist

$$\varphi\alpha = \varphi\frac{1}{\alpha}.$$

Diese Function ist ein Maximum für $\alpha = 1$, wo ihr Werth

$$= 0{,}7682255, \quad \log\dots 9{,}8854887;$$

das Quadrat [ist =] 0,5901704, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ dadurch dividirt

$$= 1{,}19814 = \frac{\pi}{\varpi}\text{[*)]}.$$

[*)] Das obige Maximum [ist] also

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{1{,}19814\dots}}.$$

Hier das numerische:

					doppelt	halb
log P	0,798179868358	1	9,8863019705	0,7696654	0,5923848	0,8773058
log M	9,6377843114	25	7,1575492622	14373 1	21	− 379118
C. log 24 . . .	8,619788758288	49	4,4287965540	26 8		− 16383
	9,055752938046	121	6,2425384293	0,7682254		+ 1
Zahl	0,11369802951				9,7726024	0,8377558
				9,8854887	0,0752575	0,0752575
					9,8478599	9,9231174
						9,8478599

Ferner ist

$$(\varphi 2\lambda)^{24} = 4(\varphi\lambda)^8(\varphi 4\lambda)^8\{(\varphi\lambda)^8 + (\varphi 4\lambda)^8\}$$
$$\varphi\alpha = e^{-\frac{\alpha}{24}P}\sqrt[4]{\alpha}(1-e^{-\alpha P})(1-e^{-2\alpha P})(1-e^{-3\alpha P})\dots$$

oder

$$[x] = \frac{\varphi\frac{-\log x}{P}\cdot\sqrt[24]{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{-\log x}{P}}}.$$

Es sei

$$(1+xy)(1+x^3y)(1+x^5y)\dots\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(1+\frac{x^3}{y}\right)\left(1+\frac{x^5}{y}\right)\dots = F(x,y),$$

so ist

$$F\left(e^{-\frac{1}{2}\alpha P}, e^{P\omega\sqrt{\alpha}}\right)e^{-\frac{P}{24\alpha}} = F\left(e^{-\frac{1}{2}\frac{P}{\alpha}}, e^{iP\omega\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}\right)e^{-\frac{P\alpha}{24}}.e^{\frac{1}{2}P\omega\omega}\text{[*)]}.$$

[14.]

[S. 49]

Ist ε eine Wurzel der Gleichung $x^5 - 1 = 0$, also

$$\varepsilon - \varepsilon\varepsilon - \varepsilon^3 + \varepsilon^4 = \sqrt{5},$$

so wird, weil

$$\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \varepsilon + \varepsilon^4, \quad \frac{2\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = 2 - \varepsilon - \varepsilon^4,$$
$$(1+2x+2x^4+\dots) + \sqrt{5}(1+2x^5+2x^{20}+\dots)$$
$$= 2(1+\sqrt{5})\frac{[xx]^2[x^5][x^{20}]}{[x][x^4][x^{10}]}\cdot\{u - tx(1-\varepsilon-\varepsilon^4)\}.$$

Das Product

$$(1+\varepsilon y)(1-x\varepsilon\varepsilon y)\left(1-\frac{x\varepsilon^3}{y}\right)(1+xx\varepsilon y)\left(1+\frac{xx\varepsilon^4}{y}\right)(1-x^3\varepsilon\varepsilon y)\left(1-\frac{x^3\varepsilon^3}{y}\right)$$
$$.(1+x^4\varepsilon y)\left(1+\frac{x^4\varepsilon^4}{y^4}\right) \text{ etc.}$$

[*)] So ist, $\log x \log x' = \pi\pi$ gesetzt,

$$x^{\frac{1}{12}+\omega\omega}F(x, x^{2\omega}) = F(x', e^{-iP\omega})x'^{\frac{1}{12}}.$$

hat die Form

$$M\left(1-x\varepsilon^3 yy-\frac{x^3\varepsilon\varepsilon}{yy}+x^6\varepsilon^6 y^4+\frac{x^{10}\varepsilon^4}{y^4}-x^{15}\varepsilon^9 y^6-\frac{x^{21}\varepsilon^6}{y^6}+\text{etc.}\right)$$
$$+N\left(y-\frac{x\varepsilon\varepsilon}{y}-x^3\varepsilon^3 y^3+\frac{x^6\varepsilon^4}{y^3}+x^{10}\varepsilon^6 y^5-\frac{x^{15}\varepsilon^6}{y^5}\cdots\right).$$

Man setze

$$y=\varepsilon\sqrt{x},$$

so wird der Factor von N gleich 0, also

$$(1-\varepsilon^4 x)(1-\varepsilon x^3)(1-\varepsilon^4 x^5)(1-\varepsilon x^7)\cdots=M(1-2xx+2x^8-2x^{18}\cdots)=M\frac{[xx]^2}{[x^4]}.$$

Man setze ferner

$$y=-\varepsilon^4,$$

so wird

$$0=M(1-\varepsilon x-\varepsilon^4 x^3+\varepsilon\varepsilon x^6+\varepsilon^3 x^{10}-\text{etc.})-N\varepsilon^4(1-\varepsilon^4 x-\varepsilon x^3+\varepsilon^3 x^6+\varepsilon^2 x^{10}-\text{etc.}).$$

Daraus

$$(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon^4 x^3)(1-\varepsilon x^5)(1-\varepsilon^4 x^7)\cdots=N\varepsilon^4\frac{[xx]^2}{[x^4]},$$

also

$$M=\frac{1}{[xx]^2}(1-\varepsilon^4 x-\varepsilon x^3+\varepsilon^3 x^6\cdots),$$
$$N=\frac{\varepsilon}{[xx]^2}(1-\varepsilon x-\varepsilon^4 x^3+\varepsilon\varepsilon x^6\cdots),$$
$$M+N\varepsilon=\frac{1}{[xx]^2}\{1+\varepsilon\varepsilon-(\varepsilon^4+\varepsilon^3)x\cdots\}.$$

Setzt man also

$$(1-x\varepsilon\varepsilon)(1-x\varepsilon^3)(1+xx\varepsilon)(1+xx\varepsilon^4)(1-x^3\varepsilon\varepsilon)(1-x^3\varepsilon^3)\cdots=m,$$
$$(1-x\varepsilon)(1-x\varepsilon^4)(1+xx\varepsilon\varepsilon)(1+xx\varepsilon^3)(1-x^3\varepsilon)(1-x^3\varepsilon^4)\cdots=n,$$

so ist aus

$$y=1,\quad y=\varepsilon\varepsilon$$

$$(1+\varepsilon)m=M(1-x\varepsilon^3-x^3\varepsilon\varepsilon+x^6\varepsilon^6+x^{10}\varepsilon^4-\cdots)$$
$$+N(1-x\varepsilon\varepsilon-x^3\varepsilon^3+x^6\varepsilon^4+x^{10}\varepsilon^6-\cdots),$$
$$(1+\varepsilon^3)n=M(1-x\varepsilon\varepsilon-x^3\varepsilon^3+x^6\varepsilon^4+x^{10}\varepsilon^6-\cdots)$$
$$+N\varepsilon\varepsilon(1-x\varepsilon^3-x^3\varepsilon\varepsilon+x^6\varepsilon^6+x^{10}\varepsilon^4-\cdots),$$

$$(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon)m+(1+\varepsilon^3)n=(M+N\varepsilon)\{1+\varepsilon-x(\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^4)-2x^3\varepsilon^3+x^6(\varepsilon^4+\varepsilon\varepsilon)$$
$$+x^{10}(\varepsilon^6+1)\cdots\}$$
$$-(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon)m+(1+\varepsilon^3)n=(M-N\varepsilon)\{1-\varepsilon-x(\varepsilon\varepsilon-\varepsilon^4)+\cdots\}.$$

Die in $M+N\varepsilon$ multiplicirte Reihe ist

$$=1+ix^{\frac12}\left\{ix^{\frac12}\varepsilon^4+\frac{1}{ix^{\frac12}\varepsilon^4}\right\}+x^2\left\{-x\varepsilon^3+\frac{1}{-x\varepsilon^3}\right\}+\cdots$$
$$=[-x](1+\varepsilon)(1-\varepsilon x)(1-\varepsilon^4 x)(1+\varepsilon xx)(1+\varepsilon^4 xx)(1-\varepsilon x^3)(1-\varepsilon^4 x^3)\cdots$$

Ferner hat man

$$(1-\varepsilon x-\varepsilon^4 x^3\ldots)(M+N\varepsilon)=N\begin{pmatrix}\varepsilon^4-\varepsilon^3 x-x^3+\varepsilon^2 x^6\cdots\\+\varepsilon-\varepsilon\varepsilon x-x^3+\varepsilon^3 x^6\cdots\end{pmatrix}$$
$$=\varepsilon N\left(1+ix^{\frac12}\left(i\varepsilon\varepsilon x^{\frac12}+\frac{1}{i\varepsilon\varepsilon x^{\frac12}}\right)+\cdots\right)$$
$$=\varepsilon N[-x](1+x^3)(1-\varepsilon^3 x)(1-\varepsilon^2 x)(1+\varepsilon^3 xx)\ldots[^*)],$$

also

$$(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon)m+(1+\varepsilon^3)n=(1+\varepsilon+\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3)\frac{[xx]^4}{[x]^2[x^4]^2}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}\cdot\frac{1+x^{10}}{1+xx}\cdot\frac{1-x^{15}}{1-x^3}\cdot\frac{1+x^{20}}{1+x^4}\cdots$$

oder

$$(\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3)m+(\varepsilon+\varepsilon^4)n=(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3+\varepsilon^4)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

[S. 56]

Ebenso ist die Reihe, in welche $M-N\varepsilon$ multiplicirt ist, die folgende

$$[-x](1-\varepsilon)(1+\varepsilon x)(1+\varepsilon^4 x)(1-\varepsilon xx)(1-\varepsilon^4 xx)\ldots;$$

ferner hat man

$$(1-\varepsilon x-\varepsilon^4 x^3\ldots)(M-N\varepsilon)=(\varepsilon^4-\varepsilon)N[-x](1+\varepsilon^3 x)(1+\varepsilon^2 x)(1-\varepsilon^3 xx)(1-\varepsilon^2 xx)\ldots,$$

also

$$-(\varepsilon^2+\varepsilon^3)m+(\varepsilon+\varepsilon^4)n=\frac{[xx]^4}{[x]^2[x^4]^2}(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon-\varepsilon^3+\varepsilon^4)\frac{1+x^5}{1+x}\cdot\frac{1-x^{10}}{1-x^2}\cdot\frac{1+x^{15}}{1+x^3}\cdots[^{**})]$$

[*) In der Handschrift steht vor dem Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung das Vorzeichen —.]
[**) In der Handschrift steht rechter Hand $\varepsilon-\varepsilon\varepsilon-\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^4$.]

Wir haben folglich

$$(\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3)m+(\varepsilon+\varepsilon^4)n=(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3+\varepsilon^4)\frac{[xx][x^5][x^{20}]}{[x][x^4][x^{10}]^2}(1+2x+2x^4+2x^9+\cdots),$$

$$-(\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3)m+(\varepsilon+\varepsilon^4)n=(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon-\varepsilon^3+\varepsilon^4)\frac{[xx][x^5][x^{20}]}{[x][x^4][x^{10}]^2}(1+2x^5+2x^{20}+2x^{45}+\cdots),$$

also

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\cdots)+(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon-\varepsilon^3+\varepsilon^4)(1+2x^5+2x^{20}+\cdots)$$
$$=-2(\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3)m\frac{[x^4][x][x^{10}]^2}{[xx][x^5][x^{20}]},$$

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\cdots)-(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon-\varepsilon^3+\varepsilon^4)(1+2x^5+2x^{20}+\cdots)$$
$$=-2(\varepsilon+\varepsilon^4)n\frac{[x^4][x][x^{10}]^2}{[xx][x^5][x^{20}]}.$$

Also Product

$$(1+2x+\cdots)^2-5(1+2x^5+\cdots)^2=-4\,\frac{1-x^5}{1-x}\cdot\frac{1+x^{10}}{1+xx}\cdot\frac{1-x^{15}}{1-x^3}\cdots\frac{[x]^2[x^{10}]^4}{[x^5]^2[x^{20}]^2}\left[\frac{[x^4]^2}{[xx]^2}\right]$$
$$=-4\,\frac{[x][x^4][x^{10}]^2}{[x^5][x^{20}]}\,[^*)].$$

[15.]

Die Siebentheilung führt auf folgende Gleichung

$$b=\left(\frac{1-2x+2x^4-\cdots}{1+2x+2x^4+\cdots}\right)^2$$
$$A=\left(\frac{1+2x^7+2x^{28}+\cdots}{1+2x+2x^4+\cdots}\right)^2$$
$$B=\left(\frac{1-2x^7+2x^{28}-\cdots}{1+2x+2x^4+\cdots}\right)^2$$

[*)] Bedeutet salvo calc[uli] err[ore]

$$5PP-pp=4\sqrt[6]{ppq^5\left(\frac{r}{2}\right)^5\frac{PP}{Q\frac{R}{2}}}$$

$$5QQ-qq=\left[4\sqrt[6]{qqp^5\left(\frac{r}{2}\right)^5\frac{QQ}{P\frac{R}{2}}}\,\right]$$

$$\frac{5PP-pp}{5QQ-qq}=\sqrt{\frac{q}{p}\,\frac{P}{Q}}.$$

$$A^8-\tfrac{4}{7}A^6+\frac{16-32bb}{49}A^5-\frac{30}{343}A^4+\frac{32-64bb}{2401}A^3-\frac{20+768bb-768b^4}{16807}A^2$$
$$+\frac{48-2144bb+6144b^4-4096b^6}{823543}A-\frac{1}{823543}=0$$

$$B^8-\tfrac{4}{7}bbB^6+\frac{16b^3-32b}{49}B^5-\frac{30b^4}{343}B^4+\frac{32b^5-64b^3}{2401}B^3-\frac{20b^6+768b^4-768b^2}{16807}B^2$$
$$+\frac{48b^7-2144b^5+6144b^3-4096b}{823543}[B]-\frac{1}{823543}=0.$$

Wenn man in der ersten Gleichung statt bb, $1-bb$ und statt A, $-A$ setzt, so wird sie nicht geändert.

[16.]

[8. 51]

Für die Dreitheilung hat man

$$a \qquad b \qquad \frac{b}{a}=t$$
$$A \qquad B \qquad \frac{B}{A}=T$$

1) $$T^4+(12t-16t^3)T^3+6ttT^2-(16t-12t^3)T+t^4=0$$

oder

$$(T-t)^4=16(t-t^3)(T-T^3)$$
$$\frac{A}{a}=\frac{3t-t^3+T(1-3tt)}{3\{T(1-tt)+t(1-TT)\}}.$$

Setzt man

$$T=\operatorname{tang}H^2,\quad t=\operatorname{tang}h^2,$$

so ist

$$\cos(h+H)=\sqrt[4]{\cos 2h\,.\cos 2H}$$
$$\sin(h+H)=\sqrt[4]{\sin 2h\,.\sin 2H}.$$

Setzt man

$$T=\operatorname{tang}N,\quad t=\operatorname{tang}n,$$

so ist

$$3\sin(2N-2n)^2=4\sin(N+3n)\,.\sin(3N+n)$$
$$\sin(N-n)^4=\sin 4n\,.\sin 4N$$
$$\frac{A\cos n}{a\cos N}=\frac{B\sin n}{b\sin N}=\frac{2\sin(N+3n)}{3\sin(2N-2n)}=\frac{\sin(2N-2n)}{2\sin(3N+n)}.$$

[II.]

[LÖSUNG DES UMKEHRPROBLEMS FÜR DAS ELLIPTISCHE INTEGRAL ERSTER GATTUNG.]

[Aus Handbuch 16, Bb, Den astronomischen Wissenschaften gewidmet, November 1801, S. 111—112.]

Setzt man

$$1 + 2x\cos\varphi + 2x^4\cos 2\varphi + 2x^9\cos 3\varphi + 2x^{16}\cos 4\varphi + \text{etc.} = P,$$

$$\frac{dP}{d\varphi} = P', \quad \frac{dP'}{d\varphi} = P'',$$

so wird

$$P'P' - PP''$$
$$= (4xx + 16x^8 + 36x^{18} + 64x^{32} + \text{etc.})(1 + 2xx\cos 2\varphi + 2x^8\cos 4\varphi + \text{etc.})$$
$$+ (2x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{9}{2}} + 50x^{\frac{25}{2}} + 98x^{\frac{49}{2}} + \ldots)(x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi + x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi + x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi + \text{etc.}).$$

Ferner

$$PP = (1 + 2xx + 2x^8 + 2x^{18} + \text{etc.})(1 + 2xx\cos 2\varphi + 2x^8\cos 4\varphi + \text{etc.})$$
$$+ (4x^{\frac{1}{2}} + 4x^{\frac{9}{2}} + 4x^{\frac{25}{2}} + 4x^{\frac{49}{2}} + \text{etc.})(x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi + x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi + x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi + \text{etc.}).$$

Noch

$$2x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi + 2x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi + 2x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi + 2x^{\frac{49}{2}}\cos 7\varphi + \text{etc.} = B$$

gesetzt,

$$BB =$$
$$(2x + 2x^9 + 2x^{25} + 2x^{49} + \text{etc.})(1 + 2x^4\cos 4\varphi + 2x^{16}\cos 8\varphi + 2x^{36}\cos 12\varphi + \text{etc.})$$
$$+ (1 + 2x^4 + 2x^{16} + 2x^{36} + \text{etc.})(2x\cos 2\varphi + 2x^9\cos 6\varphi + 2x^{25}\cos 10\varphi + \text{etc.})$$

oder besser

$$R = 2x^{\frac{1}{4}}\sin\tfrac{1}{2}\varphi - 2x^{\frac{9}{4}}\sin\tfrac{3}{2}\varphi + 2x^{\frac{25}{4}}\sin\tfrac{5}{2}\varphi - 2x^{\frac{49}{4}}\sin\tfrac{7}{2}\varphi + \text{etc.}$$

gesetzt, wird

$$RR = (2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{9}{2}} + 2x^{\frac{25}{2}} + 2x^{\frac{49}{2}} + \text{etc.})(1 + 2xx\cos 2\varphi + 2x^8\cos 4\varphi + \text{etc.})$$
$$- (1 + 2xx + 2x^8 + 2x^{18} + \text{etc.})(2x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi + 2x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi + 2x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi$$
$$+ 2x^{\frac{49}{2}}\cos 7\varphi + \text{etc.})$$

und

$$R'R' - RR''$$
$$= \tfrac{1}{2}(2x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{9}{2}} + 50x^{\frac{25}{2}} + 98x^{\frac{49}{2}} + \text{etc.})(1 + 2xx\cos 2\varphi + 2x^8\cos 4\varphi$$
$$+ 2x^{18}\cos 6\varphi + \text{etc.})$$
$$- (4xx + 16x^8 + 36x^{18} + 64x^{32} + \text{etc.})(2x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi + 2x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi + 2x^{\frac{25}{2}}\cos 5\varphi + \text{etc.}).$$

Setzt man also

$$1 + 2xx\cos 2\varphi + 2x^8\cos 4\varphi + \text{etc.} = p, \quad 1 + 2xx + 2x^8 + \text{etc.} = a,$$
$$\frac{x\partial a}{\partial x} = a',$$
$$2x^{\frac{1}{2}}\cos\varphi + 2x^{\frac{9}{2}}\cos 3\varphi + \text{etc.} = r, \quad 2x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{9}{2}} + \text{etc.} = b,$$
$$\frac{x\partial b}{\partial x} = b',$$

so wird

$$P'P' - PP'' = a'p + b'r, \qquad PP = ap + br,$$
$$R'R' - RR'' = b'p - a'r, \qquad RR = bp - ar,$$
$$P^4 + R^4 = (aa + bb)(pp + rr)$$
$$= (aa + bb)^{\frac{3}{2}}(1 + 2x\cos 2\varphi + 2x^4\cos 4\varphi + 2x^9\cos 6\varphi + \text{etc.}),$$
$$P'P' - PP'' = \frac{aa' + bb'}{aa + bb}PP - \frac{ab' + ba'}{aa + bb}RR,$$
$$R'R' - RR'' = \frac{ab' - ba'}{aa + bb}PP + \frac{aa' + bb'}{aa + bb}RR,$$
$$aa + bb = (1 + 2x + 2x^4 + \text{etc.})^2,$$
$$aa' + bb' = (1 + 2x + 2x^4 + \text{etc.})(2x + 8x^4 + \text{etc.}).$$

Hier ist noch zu bemerken (wovon jedoch der Beweis tiefer liegt)

$$ab' - ba' = \tfrac{1}{2}\, ab\,(a^4 - b^4),$$

also

$$\frac{P'P' - PP''}{PP} - \frac{R'R' - RR''}{RR} = -\frac{1}{2}\left(\frac{PP}{RR} + \frac{RR}{PP}\right) ab\,(aa - bb).$$

Noch findet man

$$PR' - RP' = (x^{\frac{1}{8}} + 3x^{\frac{9}{8}} - 5x^{\frac{25}{8}} - 7x^{\frac{49}{8}} + 9x^{\frac{81}{8}} + \ldots)$$
$$.(x^{\frac{1}{8}} \cos \tfrac{1}{2}\varphi - x^{\frac{9}{8}} \cos \tfrac{3}{2}\varphi - x^{\frac{25}{8}} \cos \tfrac{5}{2}\varphi + x^{\frac{49}{8}} \cos \tfrac{7}{2}\varphi + \text{etc.}).$$

Das Quadrat des zweiten Factors im andern Theile der vorstehenden Gleichung wird

$$= \tfrac{1}{2}(x^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{25}{4}} + x^{\frac{49}{4}} + \text{etc.})(1 - 2x \cos 2\varphi + 2x^4 \cos 4\varphi - 2x^9 \cos 6\varphi + \text{etc.})$$
$$+ \tfrac{1}{2}(1 - 2x + 2x^4 - 2x^9 + \text{etc.})(x^{\frac{1}{4}} \cos\varphi + x^{\frac{9}{4}} \cos 3\varphi + x^{\frac{25}{4}} \cos 5\varphi$$
$$+ x^{\frac{49}{4}} \cos 7\varphi\,[+ \text{etc.}]).$$

Der erste Factor wird

$$= (aa + bb)\sqrt[4]{\frac{(aa - bb)ab}{2}}\ ?$$

Zusammen wird reductis reducendis

$$(PR' - RP')^2 = \tfrac{1}{4}(aa + bb)(ap - br)(bp + ar)$$
$$= \tfrac{1}{4}((aa - bb)PP + 2abRR)(2abPP - (aa - bb)RR).$$

Setzt man also

$$\frac{R}{P}\sqrt{\frac{aa - bb}{2ab}} = \sin\theta,$$

so wird

$$\partial\varphi = \frac{2\partial\theta}{\sqrt{\{(aa - bb)^2 \cos\theta^2 + (aa + bb)^2 \sin\theta^2\}}},$$

$$\cos\theta = \frac{2x^{\frac{1}{4}} \cos\tfrac{1}{2}\varphi + 2x^{\frac{9}{4}} \cos\tfrac{3}{2}\varphi + 2x^{\frac{25}{4}} \cos\tfrac{5}{2}\varphi + \text{etc.}}{P}\sqrt{\frac{aa + bb}{2ab}}.$$

[III.]

[IN DEN KLEINSTEN TEILEN ÄHNLICHE ABBILDUNG DER FLÄCHE EINER ELLIPSE AUF DIE FLÄCHE EINES KREISES.]

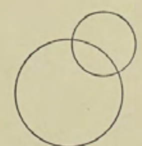
[Aus Handbuch 19, Be, Kleine Aufsätze aus verschiedenen Theilen der Mathematik, Angefangen im May 1809.]

[S. 172]

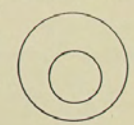
Anziehung in der Ebne, umgekehrt dem Abstande proport[ional].

Es sei eine in sich selbst zurückkehrende Linie $= L$ aufgegeben. Man wünscht allgemein, jede andere L' zu bestimmen, so dass der Flächenring zwischen beiden gar keine Anziehung auf den innern Raum bewirke.

* Die allgemeine Auflösung kommt darauf an, dass, die Coordinaten jedes Punctes in L durch x, y ferner $x + yi$ durch t und eine unbestimmte Grösse durch φ und $\cos\varphi + i\sin\varphi$ durch ε bezeichnet, t in der Gestalt einer Function von ε dargestellt werde, $t = f\varepsilon$. Es ist dann allgemein, t' die $x' + iy'$ in L' bezeichnend, $t' = af\varepsilon$. *



** Schönes Theorem. Wenn eine in sich zurück-k[ehrende] Linie L in jedem Puncte des unendlichen Raumes dieselbe Anziehung ausübt, wie eine andere Linie L', und beide einander schneiden, so gilt jene Gleichheit auch innerhalb des gemeinschaftlichen Raumes.



Vielleicht etwas ähnliches auch wenn sie sich nicht schneiden sondern nur einschliessen? ** [(*)]

[(*) In der Handschrift ist der oben zwischen * * gesetzte Absatz mit Bleistift, der zwischen ** ** gesetzte mit Tinte durchstrichen.]

[2.]

[S. 173]

Die Puncte einer Ellipse werden durch

$$2t = (a+b)\varepsilon + (a-b)\varepsilon^{-1}$$

dargestellt.

Hier wird t durch die Gleichung bestimmt

$$\begin{aligned}(t+\sqrt{(tt-(aa-bb))})^n \pm (t-\sqrt{(tt-(aa-bb))})^n \\ = (a+b)^n \pm (a-b)^n.\end{aligned}$$

[3.]

[S. 176]

Es sein x, y indef[inite] die Coordinaten der Puncte einer Ellipse, deren Halbaxen $= a, b$ und $x+yi = T$, ferner

$$\frac{aa-bb}{2(aa+bb)} = k.$$

Es sei ferner t Function eines unbestimmten Winkels $= \cos\varphi + i\sin\varphi$. Man soll T in die Form

[1] $$t + At^3 + Bt^5 + Ct^7 \ldots$$

bringen.

Setzt man $x - yi = T'$, so wird

[2] $$T' = t^{-1} + At^{-3} + Bt^{-5} + Ct^{-7} \ldots$$

und die Coefficienten werden bestimmt durch die Gl[eichung]

[3] $$k(TT + T'T') = TT' - \frac{2aabb}{aa+bb}.$$

Es findet sich

$$\begin{aligned}T = \quad & t \\ & + t^3(k - 2k^3 + 3k^5 - k^7 \\ & + t^5(2kk - 9k^4 + 24k^6 - 35k^8 \\ & + t^7(5k^3 - 36k^5 + 142k^7 - 348k^9 \\ & + t^9(14k^4 - 140k^6 + 740k^8 \\ & + t^{11}(42k^5 - 540k^7 + 3600k^9 \\ & + t^{13}(132k^6 - 2079k^8 + 16786k^{10} \\ & + t^{15}(429k^7 - 8008k^9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t = T & - T^3(k - 2k^3 + 3k^5 - k^7 \\ & + T^5(k^2 - 3k^4 + 6k^6 - 7k^8 \\ & - T^7(k^3 - 4k^5 + 10k^7 - 24k^9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}TT = \quad & tt \\ & + t^4(2k - 4k^3 + 6k^5 - 2k^7 \\ & + t^6(5kk - 22k^4 + 58k^6 - 84k^8 \\ & + t^8(14k^3 - 98k^5 + 380k^7 - 920k^9 \\ & + t^{10}(42k^4 - 408k^6 + 2115k^8 \\ & + t^{12}(132k^5 - 1650k^7 + 10780k^9 \\ & + t^{14}(429k^6 - 6578k^8 \\ & + t^{16}(1430k^7 - 26026k^9 \\ & + t^{18}(4862k^8 \\ & + t^{20}(16796k^9\end{aligned}$$

[S. 177]

Die erste senkrechte Reihe in T ist

$$= \frac{1-(1-4ktt)^{\frac{1}{2}}}{2kt},$$

die zweite

$$= \frac{1-(1-2ktt-2kkt^4)(1-4ktt)^{-\frac{1}{2}}}{2t^3},$$

die dritte

$$= \frac{k}{t^3}\left\{1 - ktt - (1 - 7ktt + 12kkt^4 - 2k^3t^6 - k^4t^8).(1-4ktt)^{-\frac{3}{2}}\right\}.$$

Es wird hier der constante Theil von TT'

$$= 1 + kk \;\; * \;\; - k^6 - k^8 + k^{10} \dots$$
$$= 1 : (1 - kk + k^4 \;\; * \;\; * \;\; - k^{10} \dots$$

[4.]

Es wird gut sein, anstatt k einzuführen

[4] $$\lambda = \frac{a-b}{a+b},$$

$$k = \frac{\lambda}{1+\lambda\lambda},$$

$$\lambda = k + k^3 + 2k^5 + 5k^7 + 14k^9 + 42k^{11} \dots = \frac{1-\sqrt{(1-4kk)}}{2k}.$$

[5] $$\left\{\begin{aligned} T = t &+ t^3(\lambda - 3\lambda^3 + 10\lambda^5 - 29\lambda^7 + 73\lambda^9 - \\ &+ t^5(2\lambda\lambda - 13\lambda^4 + 66\lambda^6 - 277\lambda^8 + 1007\lambda^{10} + \\ &+ t^7(5\lambda^3 - 51\lambda^5 + 352\lambda^7 - 1932\lambda^9 + \\ &+ t^9(14\lambda^4 - 196\lambda^6 + 1720\lambda^8 - 11665\lambda^{10} - \\ &+ t^{11}(42\lambda^5 - 750\lambda^7 + 8010\lambda^9 - \\ &+ t^{13}(132\lambda^6 - 2871\lambda^8 + 36190\lambda^{10} - \\ &+ t^{15}(429\lambda^7 - 11011\lambda^9 + \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} t = T &- T^3(\lambda - 3\lambda^3 + 10\lambda^5 - 29\lambda^7 \\ &+ T^5(\lambda^2 - 5\lambda^4 + 21\lambda^6 - 77\lambda^8 \end{aligned}$$

[5a] $$[T] = (1 + 2\lambda\lambda + \lambda^4 + 2\lambda^6 + 2\lambda^8 + \overset{*}{\dots})(u + \lambda u^{-1}),$$

wenn

[6] $$u = \cos E + i \sin E,$$

E excentrische Anomalie.

Hieraus

$$\begin{aligned} t = u &+ \lambda(u^{-1} - u^3) + \lambda\lambda(-u + u^5) + \lambda^3(-u^{-1} + 2u^3 - u^7) \\ &+ \lambda^4(-u^{-3} + 2u - 2u^5 + u^9) \dots \end{aligned}$$

wie auch

[7] $$\left\{\begin{aligned} \log t = \log u &+ \lambda(u^{-2} - u^2) + \lambda\lambda(-\tfrac{1}{2}u^{-4} + \tfrac{1}{2}u^4) + \\ &+ \lambda^3(\tfrac{1}{3}u^{-6} - u^{-2} + u^2 - \tfrac{1}{3}u^6) + \lambda^4(-\tfrac{1}{4}u^{-8} + \tfrac{1}{4}u^8) \dots \end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned} u = t &+ \lambda(t^3 - t^{-1}) + \lambda\lambda(2t^5 - t - t^{-3}) + \lambda^3(5t^7 - 4t^3 + t^{-1} - 2t^{-5}) \\ &+ \lambda^4(14t^9 - 15t^5 + 2t + 4t^{-3} - 5t^{-7}) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log u = \log t &+ \lambda(t^2 - t^{-2}) + \lambda\lambda\left(\frac{3}{2}t^4 - \frac{3}{2}t^{-4}\right) \\ &+ \lambda^3\left(\frac{10}{3}t^6 - 2t^2 + 2t^{-2} - \frac{10}{3}t^{-6}\right) + \lambda^4\left(\frac{35}{4}t^8 - 8t^4 + 8t^{-4} - \frac{35}{4}t^{-8}\right). \end{aligned}$$

Gesetz gefunden 1839 Oct. 9. S[iehe] u[nten] S. 222 [*)].

[S. 222]

Gründe auf denen die Reihen S. 176, 177 beruhen.

[5.]

Für die Ellipse, deren halbe grosse und kleine Axe $1+\lambda$, $1-\lambda$ ist, sei der complexe Ausdruck eines unbestimmten Punkts

[8] $$(1+\lambda)\cos e + (1-\lambda)\sin e \,.\, i = u + \lambda u^{-1}.$$

Für einen zweiten Punkt seien E, U dasselbe, was e, u für jenen. Der Logarithme der Entfernung ist also der reelle Theil von

$$\log(U-u) + \log\left(1 - \frac{\lambda u^{-1}}{U}\right)$$

oder von

$$\begin{aligned} &\frac{u}{U} - \frac{1}{2}\frac{uu}{UU} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{U^3} \dots \\ - &\frac{\lambda}{uU} - \frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda}{uuUU} - \frac{1}{3}\frac{\lambda^3}{u^3U^3} \dots [^{**})], \end{aligned}$$

folglich

[9] $$\left\{\begin{aligned} &= -\cos(E-e) - \tfrac{1}{2}\cos 2(E-e) - \tfrac{1}{3}\cos 3(E-e) - \text{etc.} \\ &\quad -\lambda\cos(E+e) - \tfrac{1}{2}\lambda\lambda\cos 2(E+e) - \tfrac{1}{3}\lambda^3\cos 3(E+e) - \text{etc.} \end{aligned}\right.$$

Ist auf der Peripherie der Ellipse die Masse $2\pi A$ so vertheilt, dass auf jedes Element die Masse

---

[*) Es folgen noch die Entwicklungen von T, TT und TT' nach Potenzen von λ, in denen die Koeffizienten bis zu λ^{10} einschließlich berechnet sind.]

[**)] Der Kunstgriff bleibt anwendbar, wenn die zwei Punkte in verschiedenen Ellipsen mit gleichen Brennpunkten liegen.

$$[10] \qquad de\left\{\begin{array}{l} A + A'\cos e + A''\cos 2e + A'''\cos 3e + \text{etc.} \\ \quad + B'\sin e + B''\sin 2e + B'''\sin 3e + \end{array}\right\}$$

kommt, so ist das Potential einer Masse, in dem Punkte der Ellipse, auf den sich E bezieht,

$$[11] \quad -\pi\left\{\begin{array}{l} \quad (1+\lambda)A'\cos E + \tfrac{1}{2}(1+\lambda\lambda)A''\cos 2E + \tfrac{1}{3}(1+\lambda^3)A'''\cos 3E + \cdots \\ + (1-\lambda)B'\sin E + \tfrac{1}{2}(1-\lambda\lambda)B''\sin 2E + \tfrac{1}{3}(1-\lambda^3)B'''\cos 3E \end{array}\right\}$$

Ist hingegen dieselbe Masse im Centrum concentrirt, so ist das Potential der reelle Theil von

$$2\pi A \log(U + \lambda U^{-1}),$$

[also]

$$[12] \qquad = 2\pi A(\lambda\cos 2E - \tfrac{1}{2}\lambda\lambda\cos 4E + \tfrac{1}{3}\lambda^3\cos 6E - \ldots).$$

[S. 223]

Damit beide Potentiale gleich gross sein, muss bei der Vertheilung auf jedes Element der Peripherie der Ellipse kommen die Masse

$$[13] \qquad Ade.\left(1 - \frac{4\lambda}{1+\lambda\lambda}\cos 2e + \frac{4\lambda\lambda}{1+\lambda^4}\cos 4e - \frac{4\lambda^3}{1+\lambda^6}\cos 6e \ldots\right);$$

wird diese Masse $= Adp$ gesetzt und p von $e = 0$ an gezählt, so ist

$$p = e - \frac{2\lambda}{1+\lambda\lambda}\sin 2e + \frac{2}{2}\cdot\frac{\lambda\lambda}{1+\lambda^4}\sin 4e - \frac{2}{3}\cdot\frac{\lambda^3}{1+\lambda^6}\sin 6e \ldots$$

welches mit der Formel S. 177 [der Handschrift, siehe Gleichung [7], oben S. 314] übereinstimmt, wenn ip den imaginären Theil von $\log t$ bedeutet.

[6.]

Ist [log] t die Differenz, wenn man von dem vollständigen Potential (d. i. imaginären Theil mit gerechnet) der im Centrum concentrirten Masse das vollständige Potential der auf die Ellipse vertheilten Masse subtrahirt, beide in dem Punkte geltend, dessen complexe Zahl $u + \frac{\lambda}{u}$ ist, so wird

$$[14] \qquad \log t = \log u - \frac{\lambda}{1+\lambda\lambda}(uu - u^{-2}) + \frac{1}{2}\frac{\lambda\lambda}{1+\lambda^4}(u^4 - u^{-4})$$
$$- \frac{1}{3}\frac{\lambda^3}{1+\lambda^6}(u^6 - u^{-6}) \text{ u.s.w.},$$

welches die obige Reihe selbst ist. [Siehe die Gl. [7], oben S. 314].

Hieraus ferner

$$[15] \qquad t = u\cdot\frac{1+\lambda u^{-2}}{1+\lambda uu}\cdot\frac{1+\lambda^3 uu}{1+\lambda^3 u^{-2}}\cdot\frac{1+\lambda^5 u^{-2}}{1+\lambda^5 uu}\cdot\text{etc.}$$

Man kann t auch folgende Form geben, wobei

$$\mu\mu = \lambda$$

gesetzt ist,

$$[16] \qquad t = \frac{1 + \mu^4\left(\frac{1}{\mu\mu uu} + \mu\mu uu\right) + \mu^{16}\left(\frac{1}{\mu^4 u^4} + \mu^4 u^4\right) + \cdots}{\mu\left(\frac{1}{\mu u} + \mu u\right) + \mu^9\left(\frac{1}{\mu^3 u^3} + \mu^3 u^3\right) + \mu^{25}\left(\frac{1}{\mu^5 u^5} + \mu^5 u^5\right) + \cdots}$$
$$= u\,\frac{1 + \mu\mu u^{-2} + \mu^6 u^2 + \mu^{12}u^{-4} + \mu^{20}u^4 + \cdots}{1 + \mu\mu u^2 + \mu^6 u^{-2} + \mu^{12}u^4 + \mu^{20}u^{-4} + \cdots}.$$

[S. 224]

Noch zierlicher setze man

$$u = \lambda^\alpha.$$

Es ist dann

$$[17] \qquad t = \frac{\sum \lambda^{\frac{1}{8}(4n+1+2\alpha)^2}}{\sum \lambda^{\frac{1}{8}(4n-1+2\alpha)^2}},$$

wo für n alle ganzen Zahlen positiv, negativ und 0 eingeschlossen zu setzen sind.

Daraus folgt,

$$t = f(\lambda, u)$$

gesetzt,

$$f(\lambda, \lambda u) f(\lambda, u) = 1.$$

Die allgemeine Gleichung ist

$$[18] \qquad \frac{dt}{\sqrt{(aa + bbtt)}\sqrt{(bb - aatt)}} = \frac{idu}{u} = \frac{dT}{\sqrt{(4\lambda - TT)}},$$

wo h mit λ oder μ durch die Gleichung zusammenhängt

[19] $$h = \left(\frac{2\mu + 2\mu^9 + 2\mu^{25} + \cdots}{1 + 2\mu^4 + 2\mu^{16} + \cdots}\right)^2 = \frac{bb}{aa},$$ *bedarf Berichtigung*[*)]

[und] wo

[20] $$ab = 2(\mu^{\frac{1}{2}} + \mu^{\frac{9}{2}} + \mu^{\frac{25}{2}} + \cdots)^2.$$

[7.]

Der Zusammenhang zwischen t und T, wenn anstatt T S. 176 [der Handschrift, oben S. 312, vergl. die Gl. [5a], S. 314] T' geschrieben

[21] $$T' = T(1 + 2\lambda\lambda + \lambda^4 + 2\lambda^6 + 2\lambda^8 + \cdots),$$

ist enthalten in

[22] $$\log\frac{T}{t} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1 - \frac{4\lambda}{1+\lambda\lambda}\cos 2e + \frac{4\lambda\lambda}{1+\lambda^4}\cos 4e - \frac{4\lambda^3}{1+\lambda^6}\cos 6e \ldots\right)$$
$$.\log(u + \lambda u^{-1} - T).de.$$

Der von T unabhängige Theil des Integrals ist

[23] $$\left\{\begin{aligned} & -\frac{2\lambda\lambda}{1+\lambda\lambda} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2\lambda^4}{1+\lambda^4} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\lambda^6}{1+\lambda^6} + \text{etc.} \\ & = 2\log\left\{\frac{1-\lambda\lambda}{1-\lambda^4}\cdot\frac{1-\lambda^6}{1-\lambda^8}\cdot\frac{1-\lambda^{10}}{1-\lambda^{12}}\cdots\right\} = 2\log\left\{\frac{1}{1+\lambda\lambda+\lambda^6+\lambda^{12}+\lambda^{20}+\lambda^{30}\ldots}\right\}. \end{aligned}\right.$$

[S. 225]

Setzt man

[24] $$t = AT + BT^3 + CT^5 + \cdots,$$

wo nicht zu vergessen ist, dass $A, B, C\ldots$ und T hier andere Bedeutung haben als oben S. 176 [der Handschrift, oben S. 312], so ist

[25] $$\left\{\begin{aligned} A &= (1 + \lambda\lambda + \lambda^6 + \lambda^{12} + \lambda^{20} + \lambda^{30}\ldots)^2 \\ &= 1 + 2\lambda\lambda + \lambda^4 + 2\lambda^6 + 2\lambda^8 + \cdots, \end{aligned}\right.$$ *Ist die Reihe* ∗ *S. 177* [Gl. [5a], oben S. 314]

wo der Coefficient von λ^{2n} einfach mit der Anzahl der Zerlegungen von $4n+1$ in zwei Quadrate zusammenhängt[**)],

[*) Siehe art. [8.], unten S. 319.]

[**) Die Handschrift hat »abhängt«.]

$$\begin{aligned} B &= -A\left(\frac{\lambda}{1+\lambda\lambda} + \frac{2\lambda^3}{1+\lambda^4} + \frac{3\lambda^5}{1+\lambda^6} + \cdots\right) \\ &= -A\left(\frac{\lambda}{(1-\lambda\lambda)^2} - \frac{\lambda^3}{(1-\lambda^4)^2} + \frac{\lambda^5}{(1-\lambda^6)^2} - \cdots\right) \\ &= -A\,\frac{d\log((1+\lambda\lambda)(1+\lambda^4)(1+\lambda^6)\ldots)}{2d\lambda} \\ &= -A\,\frac{d\log A}{12d\lambda} + \frac{A\,d\log(1-2\lambda\lambda+2\lambda^8-2\lambda^{18}\ldots)}{6d\lambda} \\ &= -A\{\lambda + \lambda^3 + 4\lambda^5 + \lambda^7 + 6\lambda^9 + 4\lambda^{11} + 8\lambda^{13} + \lambda^{15} + \cdots\}, \end{aligned}$$

die Coefficienten von λ^{2n+1} sind hier aequal dem Aggregat aller ungeraden Divisoren von $2n+2$.

Es ist auch

$$\begin{aligned} B &= -A\left(\frac{\lambda}{1-\lambda\lambda} + \frac{3\lambda^5}{1-\lambda^6} + \frac{5\lambda^9}{1-\lambda^{10}} + \frac{7\lambda^{13}}{1-\lambda^{14}}\cdots\right) \\ &= +A\,\frac{d\log(1-\lambda\lambda)(1-\lambda^6)(1-\lambda^{10})\ldots}{2d\lambda}, \\ \frac{B}{A^3} &= \lambda - 3\lambda^3 + 10\lambda^5 - 29\lambda^7\ldots \end{aligned}$$

[8.]

[S. 226]

Das berichtigte Resultat[*)] in einfachster Form ist, $\mu\mu = \lambda$ [gesetzt,]

[19a] $$\left\{\begin{aligned} 1 + 2\mu^4 + 2\mu^{16} + 2\mu^{36} + \cdots &= a \\ 2\mu + 2\mu^9 + 2\mu^{25} + \cdots &= b \end{aligned}\right.$$

[18a] $$\int\frac{dt}{\sqrt{(aa-bbtt)(bb-aatt)}} = \int\frac{dT}{\sqrt{(4\mu\mu-TT)}}$$ [**)],

also

[26] $$\left\{\begin{aligned} & t + \frac{1}{6}\left(\frac{bb}{aa} + \frac{aa}{bb}\right)t^3 + \left(\frac{3}{40}\,\frac{b^4}{a^4} + \frac{1}{20} + \frac{3}{40}\,\frac{a^4}{b^4}\right)t^5 + \cdots \\ & \quad = \frac{ab}{2\mu}\left\{T + \frac{1}{24\mu\mu}T^3 + \frac{3}{640\mu^4}T^5 + \cdots\right\}, \end{aligned}\right.$$

also erste Glieder

[27] $$T = \frac{2\mu}{ab}\left\{t + \frac{a^4+b^4-1}{6aabb}t^3 + \cdots\right\}.$$

[*) Siehe die Gleichungen [18], [19], [20], oben S. 317, 318.]

[**) In der Handschrift fehlt rechts vom Gleichheitszeichen das Integralzeichen.]

Auch wird aus dem S. 223 [der Handschrift] gegebenen Product-Ausdruck [Gleichung [15], oben S. 317], wenn man zuerst

$$u = \mu x$$

schreibt, woraus

$$x + \frac{1}{x} = \frac{T}{\mu}$$

wird, leicht abgeleitet

$$t = T\frac{(1-\mu^4)^2 + \mu^6 TT}{(1-\mu\mu)^2 + \mu\mu TT} \cdot \frac{(1-\mu^8)^2 + \mu^{14} TT}{(1-\mu^6)^2 + \mu^{10} TT} \cdot \text{etc.}$$

oder

$$t = \frac{(1-\mu^4)(1-\mu^8)(1-\mu^{12})\ldots}{(1-\mu\mu)(1-\mu^6)(1-\mu^{10})\ldots} \cdot T \cdot \frac{1+\frac{\mu^6}{(1-\mu^4)^2}TT}{1+\frac{\mu\mu}{(1-\mu\mu)^2}TT} \cdot \frac{1+\frac{\mu^{14}}{(1-\mu^8)^2}TT}{1+\frac{\mu^{10}}{(1-\mu^6)^2}TT} \cdots,$$

und hieraus der allgemeine Ausdruck für $\log\frac{t}{T}$ vermittelst einer nach geraden Potenzen von T steigenden Reihe.

BEMERKUNGEN ZUR THEORIE DER TRANSZENDENTEN FUNKTIONEN.

Die hier als Hauptüberschrift gewählten Worte gehören in der Handschrift zu der den Abschnitt [I.] bildenden Abhandlung; wir haben diese mit den Aufzeichungen zusammengefaßt, die in den Abschnitten [II.] und [III.] wiedergegeben sind, weil alle drei Stücke sich auf die Lehre von den elliptischen Funktionen beziehen.

Erläuterungen zu [I.] und [II.], S. 287—311.

Der art. [1.] enthält in seinem ersten Teile die Formel für die lineare Transformation der Thetafunktionen; es ist nämlich in neuerer Bezeichnungsweise (vergl. oben S. 275)

$$T = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(k+\omega)^2} = e^{-\alpha\omega^2}\vartheta_{00}\left(\frac{\alpha\omega}{\pi i}\,\Big|\,e^{-\alpha}\right)$$

und die Formel [1] lautet

$$[1]' \qquad e^{-\alpha\omega^2}\vartheta_{00}\left(\frac{\alpha\omega}{\pi i}\,\Big|\,e^{-\alpha}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\vartheta_{00}\left(\omega\,\Big|\,e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}}\right),$$

also, wenn man $e^{-\frac{\pi^2}{\alpha}} = q = e^{\tau\pi i}$ setzt (vergl. etwa WEBER, *Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen*, Braunschweig 1891, S. 78, Gl. (11)),

$$[1]'' \qquad e^{-\frac{\pi i\omega^2}{\tau}}\vartheta_{00}\left(\frac{\omega}{\tau}\,\Big|\,e^{-\frac{\pi i}{\tau}}\right) = \sqrt{-i\tau}\,\vartheta_{00}\left(\omega\,|\,e^{\tau\pi i}\right).$$

P bedeutet in den Gleichungen des art. [1.], wie auch sonst oft bei GAUSS (siehe z. B. *Disquisitiones arithmeticae*, Werke I, S. 413), den Umfang des Kreises vom Halbmesser Eins. Zu den Formeln selbst vergl. oben S. 223 die Formeln für $p\left(\frac{1}{t}, \frac{iu}{t}\right)$ und für $\sum h^{\alpha n^2 + 2\beta n + \gamma}$.

Die den art. [1.] abschließende Bemerkung über das agM. enthält die auch im art. 16. der *Determinatio attractionis* (1818), Werke III, S. 352 unten, zu findende LANDENsche Transformation. Ihr Auftreten an dieser Stelle zeigt, daß GAUSS die Bedeutung der Gleichung [1] als Transformationsformel wohl erkannt hat.

Die artt. [2.], [3.] geben die Umformung der Potenzreihen, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden (Thetanullreihen), in Produkte, vergl. schon in der Scheda Ac, oben S. 201, art. [9.]. Im art. [4.] wendet sich GAUSS nach einer Zusammenfassung dieser Umformungsgleichungen zu den von den beiden Veränderlichen x und y abhängenden Reihen und Produkten (Thetafunktionen). Die Gleichung ⧺ ist jene schon in der Scheda Ac (siehe oben S. 204) auftretende berühmte Identität zwischen der Reihen- und der Produktdarstellung der Thetafunktion, vergl. auch die Abhandlung *Zur Theorie der neuen Transscendenten*, Werke III, S. 446, Gl. 6. in Verbindung mit Gl. 9. auf S. 447 (diese Abhandlung stammt aus dem Handbuch 18, Bd, S. 221—223 und ist, da sie der Tagebuchaufzeichnung Nr. 139 entspricht, im Juni 1809 verfaßt). In den artt. [5.]—[10.] werden Transformationsformeln für die allgemeine Thetafunktion durch Induktion aufgestellt und dann in den artt. [11.], [12.] mit Hilfe des jetzt sogenannten HERMITEschen Transformationsprinzips bewiesen, vergl. oben S. 277. Man vergl. zu diesen Formeln auch die bereits erwähnte Abhandlung *Zur Theorie der neuen Transscendenten*, Werke III, S. 446 und die *Hundert Theoreme*, ebenda S. 461 ff. In der letzteren Abhandlung (die wohl aus der Zeit um 1825 stammt) werden für die drei geraden Thetafunktionen »besondere Functionalzeichen eingeführt« (Werke III, S. 465); es ist für $x = q$, $y = e^{2\pi v i}$

$$P(x, y) = \vartheta_{00}(v|q), \quad Q(x, y) = \vartheta_{01}(v|q), \quad R(x, y) = \vartheta_{10}(v|q);$$

zu diesen tritt später (1827, Werke III, S. 472) das Zeichen $S(x, y)$ für die ungerade Thetafunktion. Wir fügen noch für einige der wichtigsten Formeln Verweisungen auf die entsprechenden Stellen der oben genannten späteren Abhandlungen hinzu.

Im art. [3.],	zu [2]	vergl.	Werke	III,	S. 447, Gl. 14. (auch Werke II, S. 20),	
art. [4.],	„ [3]	„	„	„ ,	S. 447, Gl. 10.,	
	„ [4]	„	„	„ ,	S. 447, Gl. 11.,	
	„ [5]	„	„	„ ,	S. 446, Gl. 5.,	
art. [7.],	„ [6]	„	„	„ ,	S. 449, Gl. 24.,	
art. [8.],	„ [7]	„	„	„ ,	S. 450, Gl. 36.,	
	„ [8]	„	„	„ ,	S. 451, Gl. 41.,	
art. [9.],	„ 1.	„	„	„ ,	S. 450, Gl. 29.,	für $-x$ statt x,
	„ 2.	„	„	„ ,	S. 450, Gl. 30.,	„ „
	„ [9]	„	„	„ ,	S. 449, Gl. 28.,	„ „
	„ [10]	„	„	„ ,	S. 449, Gl. 25. und 27.	

Im art. [13.] bedeutet ϖ die lemniskatische Periode; zu dem daselbst gefundenen Maximalwert $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}$ wird man die aus der Scheda Aa stammenden numerischen Werte Werke III, S. 418 art. [8.] vergleichen können. In der Fußnote oben S. 302 ist $M = \log_{10} e$.

Im art. [14.] kommt für die Transformationsformeln mit fünften Einheitswurzeln wieder das sog. HERMITEsche Prinzip zur Anwendung; man wird diese Rechnungen als Vorbereitungen für die Fünfteilung anzusehen haben, die erst in der Abhandlung *Zur Theorie der neuen Transscendenten*, Werke III, S. 456—459 vollständig ausgeführt wird. Die in der Fußnote am Schluß von art. [14.] befindliche Formel hat GAUSS mit Bleistift an den Rand geschrieben, sie stimmt mit der Werke III, S. 475 (vom 29. August 1827, aus demselben Handbuch 16, Bb, S. 140 stammenden) für $5PP-pp$ überein.

Siebenteilung und Dreiteilung werden in den artt. [15.], [16.] ausgeführt.

Im Handbuch 16, Bb, folgen auf S. 51—53 jetzt noch Betrachtungen, die bereits Werke III, S. 442 ff., art. [8.], [9.] ohne wesentliche Auslassungen abgedruckt sind und darum hier nicht noch einmal wiedergegeben werden; dagegen mußten des Zusammenhangs wegen, die art. [1.]—[7.] der Werke III, S. 436 beginnenden Abhandlung, die nur einen Auszug aus dem Text des Handbuchs 16, Bb darstellen, hier mit dem unverkürzten Texte aufs neue abgedruckt werden *).

Die Abfassungszeit dieses Abschnitts [I.] ist, wie SCHERING (Werke III, S. 494, Absatz 3) andeutet, durch eine Mitteilung von GAUSS an SCHUMACHER auf das Jahr 1808 festgelegt. Mit dieser Mitteilung hat es folgende Bewandtnis. Zu der Zeit, wo JACOBIS erster Brief an SCHUMACHER (vom 13. Juni 1827, siehe JACOBIS Werke I, S. 31) in Altona ankam, war GAUSS gerade bei SCHUMACHER zu Besuch (vergl. *Wilhelm Olbers, Sein Leben und seine Werke* II, 2, Berlin 1909, S. 484, Fußnote). Während der Dauer von GAUSS' Anwesenheit und mit seiner »Approbation« schrieb SCHUMACHER in seinem Antwortschreiben an JACOBI: »GAUSS hat schon im Jahre 1808 die 3 theilung, 5 theilung und 7 theilung entwickelt, und dabei die neuen darauf sich beziehenden Modulscalen gefunden« (siehe den *Briefwechsel zwischen Gauss und Schumacher* II, S. 175, vergl. auch den ersten Brief JACOBIS an LEGENDRE vom 5. August 1827, JACOBIS Werke I, S. 394, ferner LEGENDRE ebenda S. 398, JACOBI ebenda S. 416, LEGENDRE ebenda S. 418, 428). Nun finden wir in den art. [14.], [15.], [16.] unserer Abhandlung Untersuchungen über Fünfteilung, Siebenteilung und Dreiteilung, ferner hat GAUSS am 6. August 1827, also bald nach seiner um den 18. Juli erfolgten Heimkehr von der Reise, auf S. 132 desselben Handbuchs 16, Bb, Aufzeichnungen begonnen, die an die hier in Rede stehenden Untersuchungen anknüpfen, dann allerdings sehr wesentlich darüber hinausgehn. Diese Aufzeichnungen, die sich bis zur S. 145 des Handbuchs erstrecken, sind Werke III, S. 470—480 abgedruckt. Die Angaben von GAUSS, die SCHUMACHER an JACOBI mitgeteilt hat, beziehen sich also sicher auf unsere Abhandlung [I.]. Weiter wird man annehmen können, daß der äußere Anstoß, der GAUSS im Jahre 1808 zur Wiederaufnahme der Arbeiten an der Lehre von den elliptischen Funktionen geführt hat, durch den Brief SCHUMACHERS vom 2. April 1808 (siehe oben S. 242, [4.]) gegeben war. Vergl. den Abschnitt VI. des Aufsatzes »Über GAUSS' Arbeiten zur Funktionentheorie«.

Auf den Seiten 63, 72, 73 des Handbuchs 16, Bb sind Formeln über lemniskatische Funktionen aufgezeichnet, die Werke III, S. 405, 406 untermischt mit älteren, und S. 409 Zeile 5 v. u. bis S. 412 untermischt mit späteren Aufzeichnungen wiedergegeben sind. Sie stehen, wie die Stelle Werke III, S. 412 zeigt, mit zahlentheoretischen Untersuchungen in Verbindung.

Den Seiten 111—112 eben dieses Handbuchs ist der Abschnitt [II.] entnommen, auf den wir schon oben S. 279 hingewiesen haben *). Dieselbe Rechnung findet sich in etwas gedrängter Darstellung in den erwähnten am 6. August 1827 begonnenen Aufzeichnungen desselben Handbuchs, abgedruckt Werke III, S. 473, art. [5.]. Unser Abschnitt [II.] steht in dem Handbuche nach flächentheoretischen Betrachtungen, die Werke VIII, S. 405—407 abgedruckt sind und die, wie P. STÄCKEL a. a. O., S. 407 bemerkt, 1825 geschrieben sein dürften; in dieses Jahr wäre also auch der Abschnitt [II.] zu setzen. Daß GAUSS aber diese Verifikationsrechnung schon 1800—1801 ausgeführt hat, zeigt nicht nur die Tagebuchnotiz Nr. 108 (vergl. die Erläuterungen zu dieser Notiz in dem unten folgenden Abdruck des *Tagebuchs*), sondern auch der Umstand, daß der hier zur Anwendung gelangende Satz

$$ab'-ba' = \tfrac{1}{2}ab(a^4-b^4),$$

von dem GAUSS (oben S. 310) sagt, daß der Beweis davon tiefer liegt, mit dem *Theorema* der Scheda Af (1801), oben S. 212, identisch ist **).

*) Eine von HATTENDORF angefertigte vollständige Abschrift der Abhandlung [I.] mit vielen dazu gehörigen Rechnungen und noch einigen andern auf den GAUSSschen Nachlaß bezüglichen Aufzeichnungen ist nach HATTENDORFS 1882 erfolgtem Ableben für das GAUSSarchiv erworben worden. Wir haben diese Abschrift beim Abdruck verglichen und konnten ihr einige Verbesserungen der Handschrift entnehmen. Vergl. K. HATTENDORF, *Die elliptischen Functionen in dem Nachlasse von Gauss*, Hannover, 1869. Eine Ableitung für die Werke III, S. 436—415 abgedruckten Formeln der hier in Rede stehenden GAUSSschen Abhandlung gibt P. PEPIN auf S. 94 ff. seiner oben S. 282 genannten Schrift.

Erläuterungen zu [III.], S. 311—320.

Diese Abhandlung besteht aus zwei zu verschiedenen Zeiten entstandenen Teilen. Der erste, die artt. [1.]—[4.] und noch einige beim Abdruck weggelassene Formeln enthaltende, steht auf den S. 172—177 des Handbuchs 19, Be; er stammt wohl aus dem Jahre 1834, da auf S. 184 des Handbuchs (gedruckt Werke V, S. 609, art. [7.]) das Datum »1835, Januar 23« steht. Im art. [1.] ist die Aufgabe berührt, für eine geschlossene Linie L, deren Punkte die Koordinaten x, y haben, $x+yi$ als Funktion von $\cos\varphi + i\sin\varphi$ darzustellen, d. h. diese Linie auf den Kreis mit dem Halbmesser Eins abzubilden. In den artt. [3.], [4.] sucht GAUSS für den Fall, wo L eine Ellipse ist, diese Aufgabe in der Weise zu lösen, daß er für $T = x+yi$ die Reihe [1] mit reellen Koeffizienten ansetzt und die Koeffizienten so bestimmt, daß die Reihe [1] und ihr konjugierter Wert [2] in die Gleichung [3], die nichts anderes ist als

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1,$$

eingesetzt, diese für $t = \cos\varphi + i\sin\varphi$ befriedigen. Nach Einführung von λ statt k durch die Gleichung [4] ergibt sich die Entwicklung [5], von der ausgehend dann durch Vermittlung der Gleichung [5 a] der Zusammenhang zwischen t und der durch [6] definierten Größe u hergestellt wird. Wie GAUSS dazu gelangt ist, den Faktor ***) von $u+\lambda u^{-1}$ auf der rechten Seite der Gleichung [5 a] gerade so zu wählen, geht aus der Aufzeichung nicht hervor; wahrscheinlich hat ihn eine numerische Induktion dabei geleitet. Den Zusammenhang dieser Reihe, sowie der Reihe [7] mit der Theorie der elliptischen Funktionen findet GAUSS erst nach etwa fünf Jahren (siehe die Bemerkung am Schluß des art. [4.]). Zu der durch die Gleichung [5 a] gegebenen Darstellung von $x+yi$, wenn x, y die Koordinaten eines Ellipsenpunktes sind, vergleiche man den art. [2.] und die, Werke VIII, S. 341 abgedruckte — wohl aus späterer Zeit stammende — Aufzeichnung. Mit dieser Form der Darstellung einer Ellipse beginnt auch der zweite Teil unserer Abhandlung im art. [5.].

*) Ein Auszug ist Werke III, S. 461, 462 abgedruckt.

**) Auf S. 53 des Handbuchs 16, Bb bei der Werke III, S. 445 abgedruckten, auf die Differentialgleichungen für die Reihen p, q bezüglichen Rechnung, steht dieser Satz in der Form

$$p^4-q^4 = -4\frac{xdq}{qdx}+\frac{4xdp}{pdx}$$

mit einem Fragezeichen. Diese Formel fehlt in dem Abdruck Werke III, S. 445.

***) GAUSS hat später ein ⁎ hingesetzt, um diese Reihe anführen zu können, siehe den art. [7.] S. 318.

Dieser zweite Teil ist auf S. 222—226 desselben Handbuchs 19, Be aufgezeichnet, seine Abfassungszeit ist in dem Hinweis am Schluß des art. [4] genau angegeben. Für eine Ellipse, deren Halbachsen zu $1+\lambda$ und $1-\lambda$ angenommen werden, wird gefragt, mit welcher Dichte die Masse $2\pi A$ auf der Peripherie ausgebreitet werden muß, damit ihr Potential*) in den Punkten der Ellipse übereinstimmt mit dem Potential der im Ellipsenmittelpunkt aufgespeicherten Masse. Die Differenz dieser beiden Potentiale ist also nach heutiger Ausdrucksweise nichts anderes, als die zu dem Mittelpunkt als Pol gehörige Greensche Funktion der Ellipsenfläche, multipliziert mit $2\pi A$. Im art. [6.] bildet Gauss die Differenz der vollständigen Potentiale, d. h. er denkt sich jedes der beiden Potentiale durch Hinzufügen der sogenannten konjugierten Funktion zu einer monogenen Funktion der komplexen Veränderlichen $x+yi$ ergänzt und diese beiden Funktionen von einander subtrahiert; setzt man diese Differenz gleich $\log t$, so liefert t offenbar die in den kleinsten Teilen ähnliche Abbildung der Ellipse auf den Einheitskreis, d. h. das so definierte t stimmt mit der ebenso bezeichneten Größe der artt. [3.] und [4.] überein. Insbesondere ist die Reihe [14] mit [7] identisch, womit für die letztere Reihe das »Gesetz gefunden« ist. Der Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen führt zu der Produktdarstellung [15] von t, die unmittelbar in die üblichen Bezeichnungen der Theorie der elliptischen Funktionen übertragen werden kann. Setzt man nämlich wie oben S. 321

$$\lambda^2 = \mu^4 = x = q, \quad \lambda u^2 = \mu^2 u^2 = y = e^{2\pi i v},$$

so ist

$$t = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{\vartheta_{00}(v|q)}{\vartheta_{10}(v|q)}$$

und der Übergang von [15] zu [16] vollzieht sich durch Anwendung der oft genannten Identität zwischen den Produkt- und Reihenformen der Thetafunktionen, siehe z. B. die Gleichung # S. 293.

In der Gleichung [18], bezw. der berichtigten Form [18 a], S. 319, und ebenso in [21] hat T die Bedeutung

$$T = u + \lambda u^{-1},$$

während die in den artt. [3.] und [4.] mit T bezeichnete Größe in [21] mit T' bezeichnet ist. In [22] ist T wieder in der Bedeutung $U + \lambda U^{-1}$ zu nehmen, wo also, vergl. art. [5.], S. 315,

$$U = \cos E + i \sin E$$

sich auf einen andern Ellipsenpunkt bezieht als u. Aus [22] ergibt sich für den reziproken Wert des in Gl. [24] mit A bezeichneten Faktors zunächst die in [23] unter dem Logarithmuszeichen auftretende Produktdarstellung, die vermöge der schon in der Scheda Ac (siehe oben S. 201, art. [7.], Gl. 3), wo $z = \lambda^2$ zu nehmen ist) angegebenen Umformung in den reziproken Wert von

$$(1 + \lambda^2 + \lambda^6 + \lambda^{12} + \cdots)^2$$

verwandelt werden kann. Damit ist nun auch für die in der Gl. [5 a], oben S. 314 auftretende Reihe $\ast$ das »Gesetz gefunden«. Im art. [8.] ist in den sonst üblichen Bezeichnungen

$$a = p(\mu^4) = p(\lambda^2) = \vartheta_{00}(0|\lambda^2),$$
$$b = r(\mu^4) = r(\lambda^2) = \vartheta_{10}(0|\lambda^2),$$

und nun folgt aus der bekannten Formel

$$2\,\vartheta_{00}(0|q^2)\,\vartheta_{10}(0|q^2) = \vartheta_{10}^2(0|q)$$

die im art. [6.], Gl. [20] angegebene Formel

**) Wir machen besonders darauf aufmerksam, daß Gauss im Texte die Bezeichnung Potential benutzt und zwar in einer Weise, die darauf schließen läßt, daß ihm dieser Kunstausdruck damals (1839) völlig geläufig war. In dem älteren Teile der Abhandlung artt. [1.]—[4.] findet er sich nicht.

$$ab = \tfrac{1}{2}(r(\lambda))^2 = \tfrac{1}{2}\vartheta_{10}^2(0|\lambda).$$

Ferner folgt aus [18 a], wenn man

$$\tau^2 = \frac{a^2}{b^2}\,t^2, \quad k = \frac{b^2}{a^2} = \frac{\vartheta_{10}^2(0|\lambda^2)}{\vartheta_{00}^2(0|\lambda^2)}$$

setzt,

$$\frac{1}{a^2}\int_0^\tau \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}} = \int_0^T \frac{dT}{\sqrt{4\mu^2 - T^2}} = \arcsin\frac{T}{2\mu} = i\log u,$$

also in den Bezeichnungen von Jacobi

$$t = \sqrt{k}\,\sin\operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi}\arcsin\frac{T}{2\mu}\right) = \sqrt{k}\,\sin\operatorname{am}\left(\frac{2K}{\pi}\,i\log u\right),$$

wo

$$a^2 = \vartheta_{00}^2(0|\lambda^2) = \frac{2K}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}, \quad \lambda = \mu^2$$

ist. Diese Formel befindet sich in Übereinstimmung mit derjenigen Lösung der hier in Rede stehenden Aufgabe, die H. A. Schwarz in der Abhandlung *Notizia sulla rappresentazione conforme di un' area ellittica sopra un' area circolare,* Annali di Matematica pura ed applicata, 2. serie, **3** (1870), S. 166, Gesammelte mathem. Abhandlungen II, 1890, S. 102, gegeben hat.

Schlesinger.