[JOHANN BOLYAIS APPENDIX.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 14. Februar 1832.

.... Noch bemerke ich, dass ich dieser Tage eine kleine Schrift aus Ungarn über die Nicht-Euklidische Geometrie erhalten habe, worin ich alle meine eigenen Ideen und **Resultate** wiederfinde, mit grosser Eleganz entwickelt, obwohl in einer für jemand, dem die Sache fremd ist, wegen der Concentrirung etwas schwer zu folgenden Form. Der Verfasser ist ein sehr junger österreichischer Officier, Sohn eines Jugendfreundes von mir, mit dem ich 1798 mich oft über die Sache unterhalten hatte, wiewohl damals meine Ideen noch viel weiter von der Ausbildung und Reife entfernt waren, die sie durch das eigene Nachdenken dieses jungen Mannes erhalten haben. Ich halte diesen jungen Geometer v. Bolyai für ein Genie erster Grösse. ......

Gauss an Wolfgang von Bolyai. Göttingen, 6. März 1832.

.... Jetzt Einiges über die Arbeit Deines Sohnes.

Wenn ich damit anfange, »dass ich solche nicht loben darf«: so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein

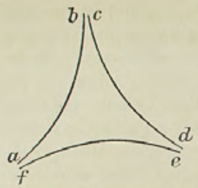
Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theile schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf das Äusserste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit, von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenige Menschen gefunden, die das, was ich ihnen mittheilte, mit besonderm Interesse aufnahmen. Um das zu können, muss man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen ganz unklar. Dagegen war meine Absicht, mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge.

Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist.

Sehr prägnant und abkürzend finde ich die Bezeichnungen: doch glaube ich, dass es gut sein wird, für manche Hauptbegriffe nicht bloss Zeichen oder Buchstaben, sondern bestimmte Namen festzusetzen, und ich habe bereits vor langer Zeit an Einige solcher Namen gedacht. So lange man die Sache nur in unmittelbarer Anschauung durchdenkt, braucht man keine Namen oder Zeichen; die werden erst nöthig, wenn man sich mit Andern verständigen will. So könnte z. B. die Fläche, die Dein Sohn F nennt, eine Parasphäre, die Linie L ein Paracykel genannt werden: es ist im Grunde Kugelfläche, oder Kreislinie von unendlichem Radius. Hypercykel könnte der Complexus aller Punkte heissen, die von einer Geraden, mit der sie in Einer Ebene liegen, gleiche Distanz haben; eben so Hypersphäre. Doch das sind alles nur unbedeutende Nebensachen: die Hauptsache ist der Stoff, nicht die Form.

In manchem Theile der Untersuchung habe ich etwas andere Wege eingeschlagen: als ein Specimen füge ich einen rein geometrischen Beweis (in den Hauptzügen) von dem Lehrsatze bei, dass die Differenz der Summe der Winkel eines Dreiecks von 180^0 dem Flächeninhalte des Dreiecks proportional ist.

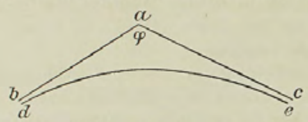
I. Der Complexus dreier Geraden ab, cd, ef, die so beschaffen sind, dass $ab \,|||\, dc$, $cd \,|||\, fe$, $ef \,|||\, ba$, bildet eine Figur, die ich T nenne. Es lässt



sich beweisen, dass solche immer in einem Planum liege.

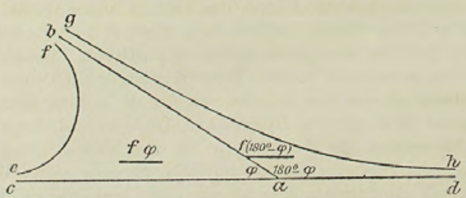
II. Derjenige Theil des Planums, welcher zwischen*) den drei Geraden ab, cd, ef liegt, hat eine bestimmte endliche Area: sie heisse t.

III. Indem zwei Geraden ab, ac sich in a unter dem Winkel φ schneiden, möge eine dritte Gerade de so beschaffen sein, dass $ab \,|||\, ed$, $ac \,|||\, de$: es liegt dann auch de mit ab und ac in Einem Planum, und die Area der Fläche zwi-



schen diesen Geraden ist endlich, und nur von dem Winkel φ abhängig; offenbar bilden in S de und bac nur Eine gerade Linie, wenn $\varphi = 180^0$ ist, und folglich verschwindet der Werth jener Area mit $180^0 - \varphi$: man setze also allgemein die Area $= f(180^0 - \varphi)$, wo f ein Functionalzeichen bezeichnet.

IV. Lehrsatz. Es ist allgemein $f\varphi + f(180^0 - \varphi) = t$.



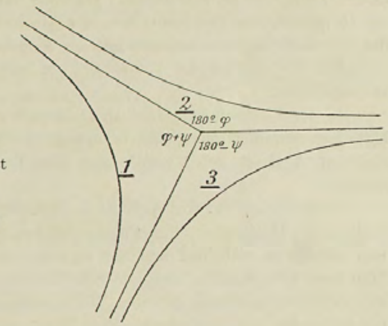
Den Beweis gibt die Figur, wo $bac = \varphi$, $bad = 180^0 - \varphi$, $ac \,|||\, fe$, $ef \,|||\, ab$ $ab \,|||\, hg$, $ad \,|||\, gh$, und wo der Flächeninhalt roth eingeschrieben ist.

---

*) Bei einer vollständigen Durchführung müssen solche Worte, wie »zwischen«, auch erst auf klare Begriffe gebracht werden, was sehr gut angeht, was ich aber nirgends geleistet finde.

V. Lehrsatz. Es ist allgemein $f\varphi + f\psi + f(180^0 - \varphi - \psi) = t$.

Der Beweis erhellt leicht aus der Figur, wo die drei Flächentheile $\underline{1, 2, 3}$ die Werthe haben



$\underline{1} = f(180^0 - \varphi - \psi)$,

$\underline{2} = f\varphi$,

$\underline{3} = f\psi$

und ihre Summe $= t$ wird.

VI. Corollarium. Es ist also

$$f\varphi + f\psi = t - f(180^0 - \varphi - \psi)$$
$$= f(\varphi + \psi),$$

woraus leicht folgt, dass

$$\frac{f\varphi}{\varphi} = Constans,$$

und zwar

$$= \frac{t}{180^0}$$

ist.

VII. Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Dreiecks, dessen Winkel A, B, C sind, ist

$$= \frac{180^0 - (A + B + C)}{180^0} \times t.$$

Den Beweis gibt die Figur. Es ist nemlich

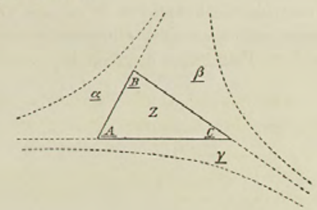
der Inhalt $\alpha = fA = \frac{A}{180^0} \cdot t$,

$\beta = fB = \frac{B}{180^0} \cdot t$,

$\gamma = fC = \frac{C}{180^0} \cdot t$,

$t = \alpha + \beta + \gamma + Z$

$= \frac{A + B + C}{180^0} \cdot t + Z$.



Ich habe hier bloss die Grundzüge des Beweises angeben wollen, ohne alle Feile oder Politur, die ich ihm zu geben jetzt keine Zeit habe. Es steht Dir frei, es Deinem Sohne mitzutheilen: jedenfalls bitte ich Dich, ihn herzlich von mir zu grüssen und ihm meine besondere Hochachtung zu versichern; fordere ihn aber doch zugleich auf, sich mit der Aufgabe zu beschäftigen:

»Den Kubikinhalt des Tetraeders (von vier Ebenen begrenzten Raumes) zu bestimmen«.

Da der Flächeninhalt eines Dreiecks sich so einfach angeben lässt: so hätte man erwarten sollen, dass es auch für diesen Kubikinhalt einen eben so einfachen Ausdruck geben werde: aber diese Erwartung wird, wie es scheint, getäuscht.

Um die Geometrie vom Anfange an ordentlich zu behandeln, ist es unerlässlich, die Möglichkeit eines Planums zu beweisen; die gewöhnliche Definition enthält zu viel, und implicirt eigentlich subreptive schon ein Theorem. Man muss sich wundern, dass alle Schriftsteller von Euklid bis auf die neuesten Zeiten so nachlässig dabei zu Werk gegangen sind: allein diese Schwierigkeit ist von durchaus verschiedener [Natur] mit der Schwierigkeit zwischen Σ und S zu entscheiden, und jene ist nicht gar schwer zu heben. Wahrscheinlich finde ich mich auch schon durch Dein Buch hierüber befriedigt.

Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen Σ und S a priori zu entscheiden, liegt der klarste Beweis, dass Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung. Einen andern ebenso starken Grund habe ich in einem kleinen Aufsatze angedeutet, der in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1831 steht Stück 64, pag. 625. Vielleicht wird es Dich nicht gereuen, wenn Du Dich bemühest Dir diesen Band der G.G.A. zu verschaffen (was jeder Buchhändler in Wien oder Ofen leicht bewirken kann), da darin unter andern auch die Quintessenz meiner Ansicht von den imaginären Grössen auf ein Paar Seiten dargelegt ist. . . . .

BEMERKUNGEN.

Bereits im Juni 1831 hatte WOLFGANG BOLYAI das »Werkchen« seines Sohnes JOHANN an GAUSS abgeschickt, es war jedoch wegen der Choleraepidemie nicht an diesen gelangt (Briefe von BOLYAI an GAUSS vom 20. Juni 1831 und 16. Januar 1832). Der Titel des Exemplares, das sich in GAUSS' Nachlass befindet, ist von WOLFGANG BOLYAI eigenhändig geschrieben und lautet:

Appendix prima.

Scientia Spatii, a veritate aut falsitate Axiomatis XI^{mi} Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independens: atque ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica.

Auctore, Auctoris filio JOHANNE BOLYAI, de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Locumtenente Primario.

De eadem bedeutet: de Bolya; Bolya war das in der Nähe von Maros Vásárhely gelegene Stammgut der Familie Bolyai (vergl. auch S. 235, Z. 18 und Fussnote).

Die nur 26 Seiten lange klassische Abhandlung JOHANN BOLYAIS erschien als Anhang zu dem ersten Bande des Werkes seines Vaters:

Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi. Maros Vásárhelyini 1832.

und führt daselbst einen etwas abweichenden Titel (vergl. den Brief von GAUSS an GERLING vom 4. Februar 1844 S. 235 dieses Bandes).

Zur Erläuterung sei noch bemerkt, dass JOHANN BOLYAI das Zeichen /// für *parallel* (im Sinne der Nicht-Euklidischen Geometrie) anwendet und dass er mit Σ das System der Euklidischen, mit S das System seiner absoluten Geometrie bezeichnet.

Das Original des Briefes von GAUSS vom 6. März 1832, das WOLFGANG seinem Sohne JOHANN geschenkt hatte, ist verloren gegangen. In GAUSS' Nachlass befindet sich nur eine von JOHANN angefertigte Abschrift, die dessen Vater am 26. August 1856 an SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN geschickt und dieser dem GAUSS'schen Nachlass einverleibt hat.

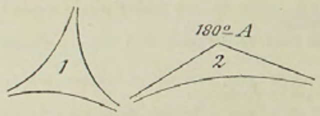
Die Abschrift hat S. 222 Z. 18—19 *wo folglich* statt *und folglich*, S. 224 Z. 18 Σ *in* S statt Σ *und* S. Da GAUSS häufig als Abkürzung für *und* ein undeutliches *u∂* schreibt, so ist ein Irrthum des Abschreibers sehr wahrscheinlich. Die unterstrichenen Zeichen $\underline{f\varphi}$ und $\underline{f(180^\circ-\varphi)}$ auf S. 222, $\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{3}$, $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $\underline{\gamma}$, $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ auf S. 223 waren im Originale mit rother Tinte geschrieben und sind in der Abschrift mit Bleistift wiedergegeben.

STÄCKEL.

ZUR ASTRALGEOMETRIE.

[I.]

Die Hauptmomente des Beweises, dass die Summe der Dreieckswinkel von 180^0 um eine dem Flächeninhalt proportionale Differenz verschieden ist, beruhen auf Folgendem:



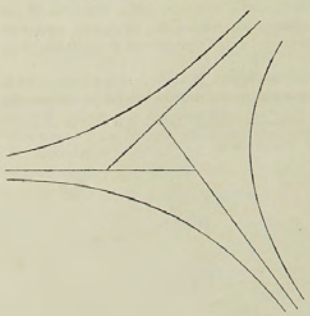
Inhalt des unendlichen Dreiecks $1 = T$.

Inhalt des unendlichen Dreiecks $2 = \varphi A$.

Dann ist

1. $\varphi A + \varphi(180^0 - A) = T$,
2. $\varphi B + \varphi C + \varphi(180^0 - B - C) = T$,

beides durch Construction.



Also wenn man $A = B + C$ setzt:

3. $\varphi B + \varphi C = \varphi(B + C)$,

mithin $\varphi t = \alpha t$, wo α ein constanter Factor und

$$\alpha . 180^0 = T.$$

Sind nun ferner A, B, C die drei Winkel eines Dreiecks, dessen Inhalt $= Q$, so ist durch Construction

$$T = Q + \varphi A + \varphi B + \varphi C$$
$$= Q + \alpha(A + B + C),$$

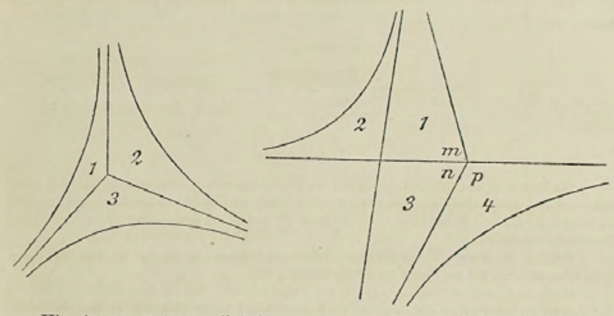
woraus das zu Beweisende sogleich von selbst folgt.

[II.]

Die Construction für 2 ist:

$$1 = 180^0 - B$$
$$2 = 180^0 - C$$
$$3 = 180^0 - \{180^0 - (B + C)\}.$$

Man kann aber den Satz 3 mit Einem Schlage durch folgende Construction beweisen:



Hier ist $2 = 3 + 4$, weil beides Asymptotenräume auf gleichen Winkeln, also

$$(1 + 2) = (1 + 3) + (4).$$

Aber $1 + 2$ ist ein Asymptotenraum zu $180^0 - m$

$1 + 3$ zu $180^0 - (m + n)$

4 zu $180^0 - p \quad = n$,

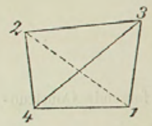
woraus

$$f(180^0 - m) = f(180^0 - m - n) + fn$$

folgt.

[III.]

CUBIRUNG DER TETRAEDER.



Im Tetraeder 1 2 3 4 sind die Seitenflächen 1 2 4 gegen 1 3 4 senkrecht. Der Inhalt $= \Delta$.

$$\partial\Delta = -2\,4 \,.\, \partial\, 3\,4\,1,$$

in so fern die Winkel an 3 constant sind, wo also

$$\alpha\alpha \operatorname{cotg} 3\,4\,1^2 - \beta\beta\left(\frac{\operatorname{tg} i\,.\,2\,4}{i}\right)^2 = 1$$

und

$$\alpha = \operatorname{cotg} 4\,3\,1$$
$$\beta = \operatorname{cotg} 2\,3\,4.$$

BEMERKUNGEN.

Die Notizen [I] und [III] stehen in einem Handbuche unmittelbar hinter einander und sind höchst wahrscheinlich niedergeschrieben worden, als GAUSS den Seite 221—224 dieses Bandes abgedruckten Brief an BOLYAI concipirte, also im März 1832; die Notiz [II] stammt aus späterer Zeit; sie ist in demselben Handbuche verzeichnet.

Während die Notizen [I] und [II] keiner Erläuterung bedürfen, ist das bei der Notiz [III] um so mehr erforderlich, als bei der Formel für $\partial\Delta$ der Factor $\frac{1}{2}$ fehlt.

GAUSS denkt sich ein Tetraeder 1 2 3 4 in der Weise construirt, dass die Seitenflächen 1 2 4 und 1 3 4 auf einander senkrecht stehen und dass auch die Kanten 1 3 und 2 4 die Schnittlinie 1 4 dieser beiden Seitenflächen auf rechtem Winkel treffen. Alsdann steht 2 4 auf 1 4 und 3 4, 1 3 auf 1 2 und 1 4 senkrecht, und das Tetraeder hat vier rechtwinklige Dreiecke zu Seitenflächen:

$$1\,2\,3, \qquad 1\,3\,4, \qquad 4\,1\,2, \qquad 4\,2\,3,$$

wo der Eckpunkt mit einem rechten Winkel stets an erster Stelle vermerkt ist.

In dem rechtwinkligen Dreieck 1 3 4 ist:

$$\cos(i\,.\,3\,4) = \cot(4\,3\,1)\,.\,\cot(3\,4\,1),$$

in dem rechtwinkligen Dreieck 4 2 3:

$$\sin(i\,.\,3\,4) = \cot(2\,3\,4)\,.\,\operatorname{tg}(i\,.\,2\,4),$$

woraus durch Elimination der den beiden Dreiecken gemeinsamen Seite 3 4 die Relation hervorgeht:

$$\cot(4\,3\,1)^2\,.\,\cot(3\,4\,1)^2 - \cot(2\,3\,4)^2\,.\left(\frac{\operatorname{tg} i\,.\,2\,4}{i}\right)^2 = 1,$$

oder wenn man

$$\cot(4\,3\,1) = \alpha, \qquad \cot(2\,3\,4) = \beta$$

setzt:

$$\alpha^2 \cot(3\,4\,1)^2 - \beta^2\left(\frac{\operatorname{tg} i\,.\,2\,4}{i}\right)^2 = 1.$$

Das Tetraeder 1 2 3 4, dessen Volumen Δ heisse, möge nunmehr dadurch einen unendlich kleinen Volumenzuwachs $1\,2\,4\,1'2'4' = \partial\Delta$ erfahren, dass man die Kante 3 1 um das unendlich kleine Stück $1\,1' = d(1\,3)$ verlängert und durch $1'$ senkrecht zu $3\,1'$ die Ebene $1'2'4'$ legt, die die Kanten 3 2 und 3 4 beziehungsweise in $2'$ und $4'$ schneidet. Die Winkel an der Ecke 3, also auch die Grössen α und β, bleiben hierbei unverändert. Der Winkel (3 4 1) geht in den Winkel

$$(3\,4'1') = (3\,4\,1) + d(3\,4\,1)$$

über, und zwar wird, wie die Betrachtung des Vierecks $1\,1'4'4$ mit der unendlich kleinen Grundlinie $1\,1' = d(1\,3)$ und rechten Winkeln bei 1 und $1'$ sofort erkennen lässt:

$$d(3\,4\,1) = -\frac{\sin(i\,.\,1\,4)}{i}\cdot d(1\,3).$$

Der Volumenzuwachs $1\,2\,4\,1'2'4' = \partial\Delta$ wird seitlich von den Dreiecken 1 2 4 und $1'2'4'$ begrenzt, deren Ebenen beide auf $1\,1'$ senkrecht stehen, mithin ist (vergl. S. 233 dieses Bandes):

$$\partial\Delta = \tfrac{1}{2}\,d(1\,3)\cdot(2\,4)\cdot\frac{\sin(i\,.\,1\,4)}{i},$$

folglich

$$\partial\Delta = -\tfrac{1}{2}(2\,4)\,d(3\,4\,1),$$

und das ist, abgesehen von dem Factor $\frac{1}{2}$, die GAUSS'sche Formel. Setzt man also

$$(2\,4) = x, \qquad (3\,4\,1) = \varphi,$$

so ergibt sich für das Volumen des Tetraeders 1 2 3 4 der Ausdruck

$$\Delta = -\tfrac{1}{2}\int_0^x x\frac{d\varphi}{dx}\,dx;$$

dabei hat man $\frac{d\varphi}{dx}$ vermöge der Gleichung

$$\alpha^2\cos\varphi^2 - \beta^2\left(\frac{\operatorname{tg} ix}{i}\right)^2 = 1$$

zu berechnen.

STÄCKEL.

[LÜBSENS PARALLELENTHEORIE.]

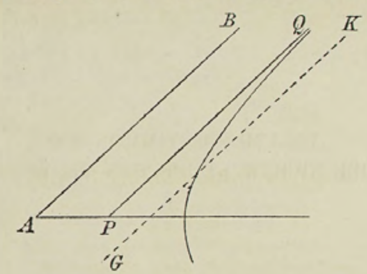
[Schumacher an Gauss. *Altona, 31. December 1835.*]

{. . . . . Lübsen quält mich sehr mit seiner Parallelentheorie (wahrscheinlich tritt die Nemesis hier ein, um mir meine eigenen Versuche zu vergelten). Ich lege Ihnen seinen Beweis bei. Ich habe ihm vergebens bemerkt, dass das Schieben der Linien besser am Parallellineal, als in der Theorie auszuführen sei; er bleibt doch bei seiner Überzeugung, den geometrischen Beweis gefunden zu haben. Vielleicht wäre es gut, da er sonst doch ein gescheuter und bescheidener Mann ist, wenn Sie ihn mit ein Paar Worten aus dem Irrthum rissen. Es muss wohl daran liegen, dass ich ihm seinen Irrthum nicht so deutlich vorstellen kann, wie ich ihn selbst erkenne. . . . . . .}

Gauss an Schumacher. Göttingen, 2. Januar 1836.

. . . . Die Pointe des Fehlers von Hrn. Lübsen besteht darin, dass Euklids Geometrie falsch sein kann, ohne dass es in seiner Construction bei

der parallelen Fortbewegung von GK nach AB einen letzten Punkt N in ED



zu geben braucht, der beiden gemein ist, eben so wenig wie es in der Hyperbel einen solchen letzten Punkt gibt, den sie mit GK gemein hat, wenn GK und AB beide mit der zwischen ihnen liegenden Asymptote [PQ] parallel sind. . . . .

[VOLUMENBESTIMMUNGEN
IN DER NICHTEUKLIDISCHEN GEOMETRIE.]

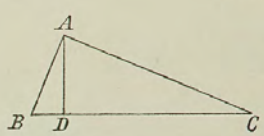
[1.]

GAUSS an ENCKE. Göttingen, 1. Februar 1841.

. . . . . . Ich fange an, das Russische mit einiger Fertigkeit zu lesen, und finde dabei viel Vergnügen. Hr. KNORRE hat mir eine kleine in russischer Sprache geschriebene Abhandlung von LOBATSCHEWSKY (in Kasan) geschickt und dadurch so wie durch eine kleine Schrift in deutscher Sprache über Parallellinien (wovon eine höchst alberne Anzeige in GERSDORFS Repertorium steht) bin ich recht begierig geworden, mehr von diesem scharfsinnigen Mathematiker zu lesen. Wie mir KNORRE sagte, enthalten die (in russischer Sprache geschriebenen) Abhandlungen der Universität Kasan eine Menge Aufsätze von ihm. . . .

[2.]

ASTRALGEOMETRIE.



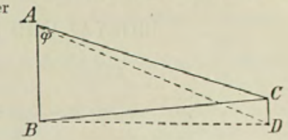
Aa, Bb, Cc normal gegen die Ebene, worin das Dreieck ABC. Durch a, b, c eine zweite Ebene.

Aa kleinster Abstand der beiden Ebenen, und selbst unendlich klein. AD normal gegen BC.

Dann ist:

$$\text{Volumen } ABCabc = \tfrac{1}{2}\, Aa \cdot BC \cdot \frac{\sin i\, AD}{i}.$$

Noch zierlicher: Inhalt der Pyramide $ABCD$ [, bei welcher der Winkel $ABC = 90°$ und ein] unendlich kleiner diedrischer Winkel an $AB = \theta$.



$$AB = x,$$

$$AC = r.$$

$$\text{Volumen} = \tfrac{1}{2}(x - r\cos\varphi)\,.\,\theta.$$

BEMERKUNGEN.

Die in dem Briefe an ENCKE erwähnte Abhandlung in russischer Sprache ist höchst wahrscheinlich die im ersten Hefte des Jahrganges 1836 der Kasaner Gelehrten Schriften erschienene Arbeit: Примѣненіе воображаемой геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ (Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale), von der sich ein mit eigenem Titelblatte versehener Sonderabdruck in GAUSS' Nachlass befindet; einzelne Randbemerkungen sowie ein darin liegender Zettel, der die Notiz [2] enthält, zeigen, dass GAUSS in dieser Arbeit wirklich gelesen hat.

Die kleine Schrift in deutscher Sprache sind die *Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien,* Berlin 1840, die in GERSDORFS Repertorium der gesammten deutschen Literatur, Jahrgang 1840, Bd. 3, S. 147 besprochen wurden; durch diese Anzeige scheint GAUSS darauf aufmerksam geworden zu sein.

Statt KNORRE muss es höchst wahrscheinlich KNORR heissen, denn der mit LOBATSCHEFSKIJ engbefreundete Physiker ERNST KNORR war von 1832 bis 1846 Professor in Kasan und hat im Jahre 1840 eine längere Reise nach Westeuropa gemacht, während der Astronom K. F. KNORRE in Nikolajew keine Beziehungen zu LOBATSCHEFSKIJ hatte und vor 1841 nur einmal in Deutschland gewesen ist, ohne jedoch GAUSS in Göttingen anzutreffen.

Eine einfache Herleitung der Formel für das Element dP einer Pyramide hatte LOBATSCHEFSKIJ im Jahre 1830 in der Abhandlung: О началахъ геометріи (Über die Anfangsgründe der Geometrie) (Gl. 62) gegeben. Er schreibt:

$$dP = \tfrac{1}{2}\, d\psi\,(r\cos\varphi - h).$$

In der That ist in der Nicht-Euklidischen Geometrie $r\cos\varphi$ grösser als h oder x. Dagegen findet sich bei ihm die Formel für das Volumen $ABCabc$ nicht ausdrücklich hervorgehoben, in deren Besitz GAUSS schon im Jahre 1832 gewesen zu sein scheint (vgl. S. 229 dieses Bandes). Sie lässt sich auch so aussprechen, dass das Volumen $ABCabc$ gleich dem halben Produkt aus der Grundlinie BC und dem Inhalt des unendlich kleinen Vierecks $ADda$ ist.

STÄCKEL.

[BOLYAI UND LOBATSCHEWSKY.]

[Gerling an Gauss. *Marburg, 18.—21. December 1843.*]

{. . . . . . . Ein Paar Ungarsche Stipendiaten aus Maros Vásárhely brachten ein Präsentations-Schreiben von dortiger Universität, was mir auffiel, weil ich unter den übrigen Unterschriften auch den Namen Wolfgangus Bolyai fand. Sie übergaben mir nun in diesen Tagen auch einen Privat-Brief von einem andern dortigen Professor, der früher mein Zuhörer gewesen, und diese Gelegenheit benutzte ich, um zur Mittheilung an Sie mich nach W. B. zu erkundigen. Sie schildern ihn als einen ziemlich wohlbeleibten rüstigen und freundlichen Greis, der in der Mitte seiner Gärten ein heiteres Alter zu verleben scheine. Seine Wirksamkeit als akademischer Lehrer sei ununterbrochen, aber nur dadurch gehemmt, dass es den meisten Zuhörern zu schwer falle ihm zu folgen. Sein Sohn (von welchem Sie mir mittheilten, dass er ein gutes Buch geschrieben) sei als erst 32jähriger Officier als Rittmeister pensionirt worden, und lebe, wenn ich recht verstanden habe, bei seinem Vater. — Muthmasslich hat er mit mathematischen Ketzereien also Anstoss erregt. — Jener ehemalige Zuhörer hatte mir damals versprochen, Anstalt zu machen, dass ich die Bücher von Vater und Sohn (denn auch vom Vater habe ich einmal ein Buch bei Ihnen gesehen, was Sie interessant nannten) hierher bekäme. Er scheint diess aber in Gnaden vergessen zu haben, denn sein Brief enthält kein Wort davon. Auch kann ich nirgends (selbst in Berlin nicht) die Titel mir ausforschen. — Da nun die jetzt neu angekommenen jungen Leute sich erbieten, für die Sache zu sorgen; so möchte ich Sie wohl bitten, mir diese Titel gelegentlich aufschreiben zu lassen. . . . .}

Gauss an Gerling. Göttingen, 4. Februar 1844.

. . . . So ist es zugegangen, dass ich vergessen habe, einen andern Punkt Ihres Briefes zu beantworten, an den ich eben heute durch eine ganz zufällige Veranlassung wieder erinnert bin.

Der Titel des Buchs meines alten Universitätsfreundes Varkas (i. e. Wolfgang) von Bolyai, Vater, ist wörtlich folgender:

Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi cum Appendice triplici. Auctore Professore Matheseos et Physices Chemiaeque Publ. Ordinario. Tomus primus. Mar[o]s Vásárhelyini 1832. Typis Collegii Reformatorum per Josephum, et Simeonem Kali de felsö Vist. LXVI u. 502 Seiten 8^{vo}. Tomus secundus 1833. XVI u. 400 S., viele Kupfertafeln. Den Namen des Verfassers finde ich nicht angegeben.

Die eine, beim ersten Bande befindliche Appendix hat den Titel:

Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei (a priori haud unquam decidenda) independentem; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica. Auctore Johanne Bolyai de eadem *), Geometrarum in exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.

Diese Appendix ist besonders paginirt (p. 1—26); da aber auf der Titelseite weder Ort noch Jahr angegeben ist, so präsumire ich, dass diese Schrift, welche gerade die in Rede stehende ist, nicht für sich, sondern nur als Anhang des Werkes des Vaters ins Publicum gekommen ist.

Übrigens hat in den letzten Decennien ein Russe (Lobatschewsky, Staatsrath und Professor in Kasan) einen ähnlichen Weg eingeschlagen. Er nennt die Nicht-Euklidische die imaginäre Geometrie (wie Ihr ehemaliger Kollege [Schweikart] Astralgeometrie) und hat darüber in russischer Sprache viele sehr ausgedehnte Abhandlungen gegeben (meistens in den Записки Казанскаго Университета, Memoiren der Kasanschen Universität), zum Theil auch in besondern Brochuren, die ich, glaube ich, alle besitze, aber ihre genaue Lecture noch verschoben habe,

*) *of that ilk*, wie es gewöhnlich bei Walter Scott heisst. — [*Vergl. auch S. 225.*]

bis ich mich einmal mit Musse wieder in dieses Fach werfen kann, und das Lesen russischer Bücher mir noch geläufiger ist als jetzt. Irre ich nicht, so ist auch ein Aufsatz des p. LOBATSCHEWSKY, vielleicht eine Übersetzung aus den Записки, in CRELLES Journal, was ich aber in diesem Augenblick nicht nachsehen kann. . . . .

GAUSS an GERLING. Göttingen, 8. Februar 1844.

Es wird Ihnen, mein theuerster Freund, vielleicht nicht unlieb sein, wenn ich zu den literarischen Notizen, welche ich in meinem letzten Briefe mittheilte, noch eine oder die andere hinzufüge: in die Sache selbst kann ich freilich jetzt nicht tiefer eingehen.

LOBATSCHEWSKYS Aufsatz in CRELLES Journal steht Band 17 pag. 295 ff. Ich finde, dass derselbe nur eine freie Übersetzung des russischen Aufsatzes [Воображаемая геометрія] im Jahrgang 1835 der Gelehrten Schriften der Kasanschen Universität ist, wo man eben da auch anstossen wird, wo diess in dem deutschen Aufsatze der Fall ist. In diesem stossen Sie an S. 296 Zeile 10 bei den Worten J'ai démontré etc., womit dem Leser, der weiter nichts hat wie diesen Aufsatz, wenig gedient ist. Ebenso S. 303 oben J'ai prouvé ailleurs etc., wozu man dieselbe Bemerkung machen muss. Der frühere Aufsatz, worauf sich diess zu beziehen scheint, wird wohl derselbe sein, der in einer Note des erwähnten russischen Aufsatzes angeführt wird als unter dem Titel: Über die Anfänge oder Principe der Geometrie stehend in Казанскомъ Вѣстникѣ (Kasanschen Boten) für 1829 und 1830. Zugleich wird dabei bemerkt, dass eine sehr kränkende Kritik dieser Abhandlung in No. 41 eines andern russischen, wie ich vermuthe in Petersburg erscheinenden, Journals »Sohn des Vaterlandes« Сынъ Отечества von 1834 stehe, wogegen LOBATSCHEWSKY eine Antikritik eingeschickt habe, die aber bis Anfang 1835 nicht aufgenommen sei.

Mit diesen literarischen Notizen ist uns nun freilich auch wenig geholfen, da in Deutschland schwerlich ein Exemplar des Kasanschen Boten von 1829—

1830 zu finden sein möchte. Dagegen aber kann ich Ihnen den Titel einer andern Schrift nachweisen, die Sie ohne Zweifel sehr leicht durch den Buchhandel erhalten können, und die nur 4 Bogen stark ist:

»Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallel-Linien
von NICOLAUS LOBATSCHEWSKY Kais. Russischem Staatsrath etc.
Berlin 1840 in der G. Finckeschen Buchhandlung.«

Ich erinnere mich, in GERSDORFS Repertorium damals eine sehr wegwerfende Recension dieses Buchs gelesen zu haben, die (nemlich die Recension) übrigens für jeden etwas kundigen Leser das Gepräge hatte, von einem ganz unwissenden Menschen herzurühren. Seitdem ich Gelegenheit gehabt habe, diese kleine Schrift selbst einzusehen, muss ich ein sehr vortheilhaftes Urtheil darüber fällen. Namentlich hat sie viel mehr Concinnität und Präcision, als die grössern Aufsätze des LOBATSCHEWSKY, die mehr einem verworrenen Walde gleichen, durch den es, ohne alle Bäume erst einzeln kennen gelernt zu haben, schwer ist, einen Durchgang und Übersicht zu finden.

Über die CRELLE 17 p. 303 angeführte experimentelle Begrenzung habe ich aber nichts in der Schrift von 1840 gefunden und ich werde mich daher wohl entschliessen müssen, einmal deswegen an Hrn. LOBATSCHEWSKY selbst zu schreiben, dessen Aufnahme als Correspondent unserer Societät ich vor einem Jahre veranlasst habe. Vielleicht schickt er mir dann den Kasanschen Boten. Doch wäre es möglich, dass sich in den folgenden Jahrgängen der Kasanschen gelehrten Schriften von 1836—1838, wo auch lange Aufsätze von LOBATSCHEWSKY stehen, etwas darüber findet. Ich besitze diese zwar, habe aber bisher, aus dem in meinem vorigen Briefe erwähnten Grunde, mich bisher nicht näher mit ihnen bekannt gemacht.

In seinem Danksagungsschreiben wegen Aufnahme in die Societät schrieb mir übrigens LOBATSCHEWSKY damals, dass seine vielen administrativen Geschäfte (er scheint Rector perpetuus der Universität zu sein) ihn jetzt aus den wissenschaftlichen Arbeiten ganz herausgebracht hätten.

Für heute schliesse ich mit der Bitte bald wieder mit einigen Zeilen zu erfreuen

Ihren treu ergebenen
C. F. GAUSS.

[GERLING *an* GAUSS. *Marburg, 26. Februar 1844.*]

{. . . . . . . Die Notiz über das Buch von BOLYAI habe ich bereits benutzt, um das Buch zu verschreiben. Unsere Bibliothek hat sich, mit diesem ausführlichen Titel ausgerüstet, unmittelbar an die Buchhändler wenden können. Gleichzeitig ist auch das Buch von LOBATSCHEWSKY aus Berlin verschrieben und so werden wir denn wohl hoffentlich nach nicht allzu langer Zeit in den Besitz kommen. Ich wiederhole meinen herzlichen Dank für Ihre gütige Bemühung. Die russischen Abhandlungen sind mir freilich unzugänglich, da ich selbst das Buchstabiren, was ich als Student gelernt, wieder vergessen habe. Den Aufsatz in CRELLE Band 17 habe ich inzwischen auch nachgesehen und hängt darin allerdings alles an dem j'ai démontré. — Das russische Steppenland scheint demnach doch ein geeigneter Boden für diese Speculationen, denn SCHWEIKART (jetzt in Königsberg) ersann seine »Astral-Geometrie«, während er in Charkow war. . . . .}

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 28. November 1846.

. . . . Ich habe kürzlich Veranlassung gehabt, das Werkchen von LOBATSCHEWSKY (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840, bei G. Fincke. 4 Bogen stark) wieder durchzusehen. Es enthält die Grundzüge derjenigen Geometrie, die Statt finden müsste und strenge consequent Statt finden könnte, wenn die Euklidische nicht die wahre ist. Ein gewisser SCHWEIKART*) nannte eine solche Geometrie Astralgeometrie, LOBATSCHEWSKY imaginäre Geometrie. Sie wissen, dass ich schon seit 54 Jahren (seit 1792) dieselbe Überzeugung habe (mit einer gewissen spätern Erweiterung, deren ich hier nicht erwähnen will); materiell für mich Neues habe ich

*) Früher in Marburg, jetzt Professor der Jurisprudenz in Königsberg.

also im LOBATSCHEWSKYschen Werke nicht gefunden, aber die Entwickelung ist auf anderm Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von LOBATSCHEWSKY auf eine meisterhafte Art in ächt geometrischem Geiste. Ich glaube Sie auf das Buch aufmerksam machen zu müssen, welches Ihnen gewiss ganz exquisiten Genuss gewähren wird. . . . . . .

GAUSS an W. STRUVE. Göttingen, 11. December 1846.

. . . . Gleichermassen bin ich für die übrigen Zusendungen zu dem verbindlichsten Danke verpflichtet; für die russischen Sachen von LOBATSCHEWSKY wahrscheinlich zunächst Ihrem Herrn Sohne, gegen den ich vor einigen Jahren bei seinem Hiersein meinen Wunsch ausgesprochen hatte; ich lasse mich seinem freundlichen Andenken angelegentlich empfehlen. Mit meiner russischen Sprachkenntniss werde ich wohl etwas zurückgekommen sein, da ich seit länger als einem Jahre nicht dazu habe kommen können, auch nur einen russischen Buchstaben anzusehen, ich hoffe jedoch in der ersten freien Zeit das Versäumte schnell nachzuholen, und werde dann der Lecture jener interessanten Aufsätze meine besondere Aufmerksamkeit widmen. Die kleine deutsche Schrift von LOBATSCHEWSKY besass ich schon vorher selbst. . . . .

[CONGRUENZ UND SYMMETRIE.]

[Gerling an Gauss. *Cassel, 25. März 1813.*]

{. . . . . . Im Decemberheft der monatlichen Correspondenz vom vorigen Jahr erklärt Professor Mollweide den gewöhnlichen Beweis für die Oberfläche der sphärischen Dreiecke für unstatthaft, indem dabei zwei Dreiecke als gleich gebraucht werden, die 3 gleiche Seiten haben, aber wegen verschiedener Lage derselben nicht congruent sein können, dieser Satz aber in den sphärischen Trigonometrien nicht vorkommt. Ich habe von diesem Satz einen Beweis gefunden, der mir sehr einfach zu sein scheint. Es ist folgender: Zwei solche Dreiecke entstehen immer, wenn man die das eine bildenden Kugelradien, jenseits des Mittelpunkts, verlängert. Legt man nun durch die Winkelpunkte beider Dreiecke Ebenen, so erhellt sehr leicht, dass sie parallel sind, und daraus folgt dann gleichfalls sehr leicht, dass sie gleich weit vom Mittelpunkte abstehen. — Sie beschreiben also auf der Kugel congruente kleine Kreise, und congruente Oberflächensegmente, und die Dreiecke entstehen, wenn man von diesen congruenten Oberflächensegmenten die 3 Zweiecke abzieht, die von gleichen Bögen der kleinen Kreise, und von den gleichen Dreiecksseiten begrenzt werden; diese Zweiecke sind aber congruent, wie aus der Construction leicht erhellt, also auch die Dreiecke gleich. . . . .}

[Gerling an Gauss. *Marburg, 26. Februar 1844.*]

{. . . . . Seitdem ich 1813 auf die symmetrischen Dreiecke und die Fläche des sphärischen Dreiecks kam, ist mir immer das Desiderium geblieben, dass mir eigentlich eine scharfe Definition oder ein scharfes Kriterium der Symmetrie fehlte, im Gegensatz gegen die Congruenz. Seit vorigem Winter bin ich nun darauf gekommen, die Sache auch im Vortrag, denn früher kam ich schon bei anderer Gelegenheit für mich darauf (1834), so darzustellen:

Jedes Gebilde in der Ebene beziehen wir auf zwei Dimensionen (rechtwinklige Coordinaten), jedes räumliche auf drei. Denken wir nun die Coordinaten als dem Wechsel des Zeichens unterworfen, so wird allgemein congruent, was in zwei Dimensionen das Zeichen ändert; symmetrisch aber, was in einer oder in drei Dimensionen das Zeichen ändert. — Hieraus ergibt sich dann als Corollar,

1) dass bei Coordinaten aus einem Punkt durch Wechsel aller radii vectores (sit venia verbo) Symmetrie entstehen muss bei körperlichen Constructionen, Congruenz aber bei ebenen,

2) dass die Symmetrie in die Congruenz übergeht, wenn das Gebilde durch eine gerade Linie oder durch eine Ebene in zwei symmetrische Hälften theilbar ist. —

Sie würden mich sehr verbinden, wenn Sie mir gelegentlich Ihr Urtheil über diese Darstellungsweise mittheilten.}

Gauss an Gerling. Göttingen, 8. April 1844.

. . . . Ihre Bemerkungen über Symmetrie und Congruenz sind vollkommen treffend. Was noch zu desideriren wäre, ist der metaphysische Grund, warum es so ist (was bei Ihnen nur als eine wahrgenommene Thatsache auftritt) und damit auch die Erweiterung auf eine Geometrie von mehr als 3 Dimensionen, wofür wir menschliche Wesen keine Anschauung haben, die aber in abstracto betrachtet nicht widersprechend ist, und füglich höhern Wesen zukommen könnte. Um aber, aus dieser Höhe, wieder auf die Erde herunterzukommen, so ist es schade, dass die Gleichheit der Volumina körperlicher bloss symmetrischer, aber nicht congruenter Gebilde, sich nur durch die Exhaustionsmethode, und nicht eben so elementarisch demonstriren lässt, wie meines Wissens zuerst Sie bei der Area des sphärischen Dreiecks gezeigt haben. Ihr Beweis in etwas anderer Gestalt findet sich auch bei LOBATSCHEWSKY, ohne dass erhellt, ob er Ihren Aufsatz gekannt habe. Jedes sphärische Dreieck lässt sich nemlich in drei gleichschenklige Dreiecke zerlegen, und diese Zerlegung auf zwei symmetrische Dreiecke angewandt, gibt bei beiden gleiche und nur in ungleicher Ordnung liegende Dreiecke. (Es versteht sich, dass um vollständig zu sein, man drei Fälle unterscheiden müsste, wovon der zweite und dritte auch so ausgesprochen werden können, dass je eins der Partialdreiecke negativ oder 0 sein kann.) . . . .

[GERLING an GAUSS. *Marburg, 15. April 1844.*]

{Obwohl ich Ihren Brief vom 8. d. M., den ich vorläufig herzlich verdanke, eigentlich noch gar nicht beantworten kann, weil ich bis jetzt noch nicht dazu habe kommen können, ihn so zu studiren und in mich aufzunehmen, als sein reichhaltiger Inhalt und mein Interesse für den Gegenstand erfordert; so kann ich mir doch das Vergnügen nicht versagen, Ihnen in Beziehung auf eine einzelne Äusserung darin ein Paar Zeilen zu schreiben.

Sie sagen: »Es ist schade, dass die Gleichheit der Volumina körperlicher bloss symmetrischer, aber nicht congruenter Gebilde sich nur durch die Exhaustionsmethode, und nicht eben so elementarisch demonstriren lässt« etc.

Erlauben Sie, dass ich Ihnen hier eine solche Demonstration mittheile mit der Bitte, mir gelegentlich Ihr Urtheil darüber zu schreiben.

Lehrsatz: Zwei beliebige symmetrische Polyeder sind von gleichem körperlichen Inhalt.

Beweis: I. Dieselben lassen sich durch angemessen durchgelegte Ebenen

in lauter dreiseitige Pyramiden zerlegen, welche paarweise in beiden Körpern symmetrisch sind.

II. Um jede dreiseitige Pyramide lässt sich eine Kugel construiren, deren 4 Halbmesser, mittelst durch je zwei gelegte Ebenen, dieselbe in je 4 gleichseitige Pyramiden zerlegen. (Vorbehaltlich, dass auch negative Pyramiden dabei sein können.)

III. Macht man diese Construction bei jedem Paar der ad I. erwähnten dreiseitigen Pyramiden, so entstehen lauter gleichseitige Pyramiden, welche wieder paarweise symmetrisch sind.

IV. Jede gleichseitige Pyramide lässt sich mittelst eines Perpendikels von der Spitze auf die Grundfläche und durchgelegter Ebenen in drei dreiseitige Pyramiden zerfällen, deren Grundfläche ein gleichschenkliges Dreieck und deren eine Kante, welche von der Spitze dieses gleichschenkligen Dreiecks ausgeht, senkrecht auf der Grundfläche steht.

V. Zwei Pyramiden der letztbeschriebenen Art, die in beiden Polyedern analog liegen, sind nicht nur symmetrisch, sondern auch congruent, weil sich jede einzelne durch eine Ebene in zwei einander symmetrische Hälften spalten lässt.

VI. Demnach sind beide Polyeder als die (algebraischen) Summen von lauter congruenten Pyramiden zu betrachten, und haben also gleiches Volumen. Q.E.D.

Ich muss noch hinzufügen, dass der Beweis mir nicht ganz eigenthümlich ist. Ich war im Nachdenken über Ihre Äusserung dahin gekommen, dass ich die Theile III—V klar übersah, fand aber anfangs Schwierigkeit, jede dreiseitige Pyramide auf gleichseitige zu reduciren; und hätte vielleicht die Sache gehen lassen, wenn nicht in einem Gespräch mit Dr. STEGMANN die Rede zufällig darauf gekommen, wo dieser den glücklichen Einfall hatte, die Kugel um die dreiseitige [Pyramide] zu Hülfe zu nehmen, wodurch dann der Schlüssel eigentlich gefunden war.

So viel ich sehe, ist kein Fehlschluss in dem Obigen; Sie verbinden aber mich sehr, wenn Sie den Beweis einer scharfen Prüfung unterwerfen und mir gelegentlich Ihr Urtheil darüber schreiben. . . . .}

Gauss an Gerling. Göttingen, 17. April 1844.

Die Art, wie Sie die Volumengleichheit bloss symmetrischer, nicht zugleich congruenter, Körper beweisen, hat mir viel Vergnügen gemacht. Man könnte den Nerv davon so hervorheben, dass man sagt,

1) dass man auf diejenigen Pyramiden aufmerksam macht, deren symmetrische Gegenstücke mit ihnen zugleich congruent sind, welches nemlich diejenigen sind, an denen zwei Seitenflächen zu einer dritten normal sind und in ihren Durchschnitten mit dieser gleiche Kanten geben, und
2) dass man nachweist, wie jede Pyramide in 12 Pyramiden von der eben bezeichneten Art zerlegt werden kann.

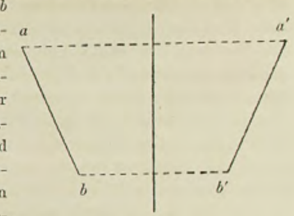
Ob die Beweisart neu ist, kann ich übrigens mit Gewissheit nicht verbürgen. Sehen Sie wenigstens Legendres Geometrie nach, worin versucht ist, mehreres strenger oder einfacher als sonst geschehen, zu beweisen. Mir selbst ist in diesem Augenblick das Buch, welches ich nicht selbst besitze, nicht zur Hand.

Mein Bedauern muss ich nun, da jener Satz nicht mehr davon getroffen ist, auf die andern Sätze der Stereometrie beschränken, die annoch von der Exhaustionsmethode abhängig sind wie Euklid XII. 5. Vielleicht ist auch hier noch manches zu verbessern; in diesem Augenblick habe ich nicht Zeit, dem Gegenstande weiteres Nachdenken zu widmen. . . . . . .

[Gerling an Gauss. *Marburg, 7. Juli 1844.*]

{. . . . . . . Was zuerst die Symmetrie betrifft, wo ich im vorletzten Brief nur die »Thatsache« angab; so scheint mir der **Grund** in unserer Anschauung der geraden Linie und Ebene zu liegen, vermöge deren wir in der Ebene auf einer geraden Linie nur **ein** Perpendikel in einem Punkt denken können, dieses aber nach **beiden Seiten** hin ins Unendliche verlängert, und eben so

auf der Ebene nur **eins**, mit **zwei** Seiten; so **muss** es also für a in der Ebene **einen** symmetrischen Punkt a' und für b ein b' geben; und muss ab mit $a'b'$ zusammenfallen, wenn ich **umklappe**, und, im allgemeinen, **nur** durch Umklappen. Symmetrisches von Symmetrischem wird hier congruent. Kommt nun die dritte Dimension hinzu, und liegen **beiderseits** c und c' über a und a', so fallen beim Umklappen auch c und c' auf verschiedene Seiten der Ebene u. s. w. — Ich meine, auf diesem **Wege** liesse sich eine anschauliche Überzeugung gewinnen.



Für solche Gebilde, die sich mittelst einer durchgelegten Linie oder einer durchgelegten Ebene in zwei symmetrische Hälften zerfällen lassen, wie z. B. das gleichschenklige **Dreieck**, die dreiseitige Pyramide mit gleichschenkliger Grundfläche und in den Schenkeln gleichgeneigten Seitenflächen u. s. w., fehlt es meines Wissens noch an einem angemessenen Kunst-Ausdruck, den ich zu kurzer Darstellung dieser Dinge sehr desiderire.

Legendres Geometrie habe ich bei der ersten Herausgabe des Lorenz fleissig benutzt, und meines Wissens manches in der Stereometrie schärfer dargestellt [gefunden], als in frühern Büchern, für Euklid XII. 5 habe ich aber bis jetzt noch nichts besseres gefunden, als meinen § 330, wo ich mich von der Exhaustionsmethode nicht los machen konnte. . . . .}

Gauss an Gerling. Göttingen, 14. Juli 1844.

. . . . Ich habe unlängst einen jungen Mathematiker, Eisenstein aus Berlin, kennen gelernt, der mit einem Empfehlungsschreiben von Humboldt hierher kam. Dieser noch sehr junge Mann zeigt **sehr** ausgezeichnetes Talent, und wird gewiss Grosses leisten. Ich erwähnte gegen ihn Ihrer eleganten Art, die Gleichräumigkeit symmetrischer Körper zu beweisen, wogegen er behauptete, dass ein ähnlicher Beweis sich schon in LEGENDRES Geometrie finde. Ich habe diess noch nicht verificiren können.

[GERLING *an* GAUSS. *Marburg, 21. Juli 1844.*]

{. . . . . . . Wegen der Bemerkung des Hrn. EISENSTEIN über die Volumina symmetrischer Körper habe ich im LEGENDRE nachgesehen. Ich selbst habe noch die Ausgabe von 1806, hatte aber Gelegenheit, CRELLES Übersetzung (1844) der 12ten Auflage jetzt einzusehen; wo ich allerdings gegen 1806 in diesen Materien einiges abgeändert finde. — LEGENDRE hat den Satz quaestionis aber nicht unabhängig von der Exhaustionsmethode bewiesen. Er geht nemlich von dem Satz aus: Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe sind gleich. — Diesen beweist er nach der Exhaustionsmethode (im Wesentlichen jetzt ganz so wie mein LORENZ § 330, statt dass er sich früher näher an Euklid gehalten). Nun zerlegt er die symmetrischen Polyeder in symmetrische dreiseitige Pyramiden, und schliesst auf ihre Gleichheit vermöge jenes Satzes. Der Unterschied besteht also darin, dass LEGENDRE eine weitere Zerlegung in je 12 Pyramiden, die paarweise congruent sind, nicht ausführt. —

Wie ich den Satz LORENZ § 330 gelernt habe, weiss ich selbst nicht mehr. Wenn ich ihn aber auch selbstständig erfunden habe; so haben mir jedenfalls Bemerkungen von PFAFF die Erfindung sehr nahe gelegt. Ich erinnere mich namentlich, dass er mir (1809) mit Bedauern, dass man hier nicht tiefer eindringen könne, von dem »Segnerschen Axiom« sprach.}

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 8. Februar 1846.

. . . . Der Unterschied zwischen Rechts und Links lässt sich aber nicht definiren, sondern nur vorzeigen, so dass es damit eine ähnliche Bewandtniss hat, wie mit Süss und Bitter. Omne simile claudicat aber; das letztere gilt nur für Wesen, die Geschmacksorgane haben, das erstere aber für alle Geister, denen die materielle Welt apprehensibel ist; zwei solche Geister aber können sich über Rechts und Links nicht anders unmittelbar verständigen, als indem Ein und dasselbe materielle individuelle Ding eine Brücke zwischen ihnen schlägt, ich sage unmittelbar, da auch A sich mit Z verständigen kann, indem zwischen A und B eine materielle Brücke, zwischen B und C eine andere u. s. w. geschlagen werden, oder worden sein kann. Welche Geltung diese Sache in der Metaphysik hat, und dass ich darin die schlagende Widerlegung von KANTS Einbildung finde, der Raum sei BLOSS die Form unserer äussern Anschauung, habe ich succinct in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1831, S. 635 ausgesprochen. . . . .

[GERLING *an* GAUSS. *Marburg, 20. Juni 1846.*]

{. . . . . Zum erstenmal kam ich in den Fall, eine rechtsgewundene Schraube für den Druck [der neuen Ausgabe des »Lorenz«] definiren zu müssen. Ich weiss nicht besser als so zu sagen: so gewunden, dass jeder Punkt der vertical stehenden Schraube ausser der Axe in die Tiefe nur gelangen kann, wenn er von Ost durch Süd nach West geht. — Gibt es eine bessere Definition, so verpflichten Sie mich sehr durch die Mittheilung. . . . .}

Gauss an Gerling. Göttingen, 23. Juni 1846.

.... Die Unterscheidung der Schrauben hängt in letzter Instanz wie die Unterscheidung des Rechts und Links davon ab, dass

drei von einem Punkt A ausgehende und nicht in Einer Ebene liegende gerade Linien AB, AC, AD mit drei andern ab, ac, ad in der Ordnung, wie sie aufgezählt sind,

gleiche oder verkehrte Lage haben können.

Nemlich im ersten Fall wird die Pyramide $ABCD$ bloss durch allmählige quantitative Änderungen in die Pyramide $abcd$ dergestalt übergehen können, dass A in a, B in b u. s. w. übergehe. Im zweiten Fall ist ein solcher Übergang nicht anders möglich, als dass dazwischen die veränderte Pyramide einmal verschwindet ($ABCD$ in Einer Ebene). Ähnliche Lagen haben

$$\begin{matrix} AB, & AC, & AD \\ AC, & AD, & AB \\ AD, & AB, & AC, \end{matrix}$$

aber verkehrte dagegen AB, AD, AC u. s. w.

Diesen Unterschied zweier Systeme von je drei geraden Linien kann man aber nicht auf Begriffe bringen, sondern nur aus dem Anhalten an wirklich vorhandene räumliche Dinge vorzeigen. Zwei Geister können sich nicht anders darüber verständigen, als dass sie ihre Anschauungen an Ein und dasselbe in der wirklichen Welt vorkommende System knüpfen. Wählt man also für das 1[te] System die [Ordnung:]

Süd West Zenith,

so ist für jedes andere Dreisystem feststehend, ob es mit diesem gleich oder ob es entgegengesetzt sei. Mit jenem gleiche so:

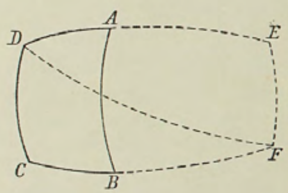
Vorne	Rechts	Oben	
Links	Vorne	Oben	
Vorne	Links	Unten	
Rechts	Vorne	Unten	
Rechts	Hinten	Oben	u. s. w.

Die Anwendung dieses Princips auf die Schrauben hat keine Schwierigkeit und begreiflicher Weise wird es eine grosse Menge verschiedener Einkleidungen geben können. Gegen die von Ihnen gewählte wird nichts zu erinnern sein. ....

...... Dass, was ich oben über Links und Rechts angeführt habe, nur ein Kernstück eines viel ausgedehntern Systems ist, brauche ich wohl nicht zu erinnern.

THEOREM AUS DER SPHÄROLOGIE.

[1.]



Ist $ABCD$ ein sphärisches Viereck mit rechten Winkeln in A, B, C; und verlängert man DA, CB, bis DE und CF Quadranten werden, so ist E ein rechter Winkel und [, die Bogen als Winkel gerechnet, so dass der Quadrant $= 90^0$ wird,] $F = 90^0 + CD$, $EF = D - 90^0$.

Beweis. Es wird DF ein Quadrant, woraus alles von selbst folgt.

[2.]

Wir bezeichnen mit

R den rechten Winkel, mit

ρ den Quadranten des grössten Kreises [, so dass der Bogen x zu $\frac{R}{\rho}x$ Grad zu rechnen ist], mit

λ den achten Theil der Kugelfläche. Ferner mit

$F(a, b)$ den Flächeninhalt eines sphärischen Vierecks [$ACBD$] mit drei rechten Winkeln [A, B, C], dessen mittelstem [C] die Seiten a, b anliegen; die diesen gegenüber liegenden seien α, β; der vierte Winkel $= R + \omega$.

Für unendlich kleine a sei

$$F(a, b) = a f b,$$

und für unendlich kleine b sei

$$f b = k . b,$$

wo k eine Constante [bedeutet].

[Da der Flächeninhalt des Vierecks $ACBD$ dem Überschuss seiner Winkelsumme über 4 Rechte proportional ist, so hat man

$$F(a, b) = C . \omega.$$

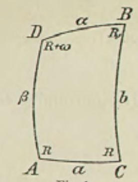


Fig. 1.

Es ist aber, wie die Figur 2 zeigt,

$$\lambda = F(\rho, \rho) = CR,$$

also

$$F(a, b) = \frac{\lambda}{R} \cdot \omega.]$$

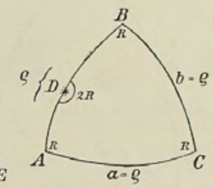


Fig. 2.

Man hat [daher]:

1) $$\omega = \frac{R}{\lambda} F(a, b).$$

[Wendet man diese Gleichung auf das Viereck $ACFE$ an (Fig. 3), so wird

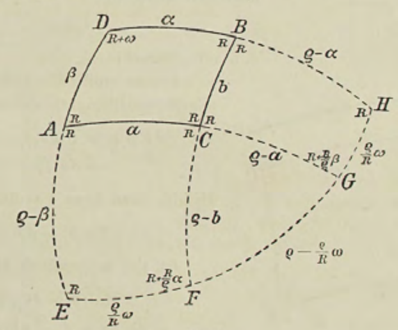


Fig. 3.

$$\frac{R}{\rho}\alpha = \frac{R}{\lambda}F(a, \rho-\beta)$$

oder]

2) $$\alpha = \frac{\rho}{\lambda}F(a, \rho-\beta).$$

[Ebenso ergibt das Viereck $BHGC$:]

3) $$\beta = \frac{\rho}{\lambda}F(b, \rho-\alpha).$$

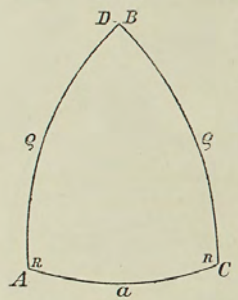


Fig. 4.

[Ferner ist nach Fig. 4:]

4) $$a\frac{\lambda}{\rho} = F(a, \rho),$$

[und für unendlich kleine a ist

$$F(a, \rho) = af\rho = a\frac{\lambda}{\rho},$$

also]

5) $$\frac{\lambda}{\rho} = f\rho.$$

Für unendlich kleine a ist

$$\alpha = \frac{\rho}{\lambda}\cdot af(\rho-\beta)$$

also selbst unendlich klein, daher dann aus 3) β unendlich wenig von

$$\frac{\rho}{\lambda}F(b, \rho)$$

d. i. von b verschieden.

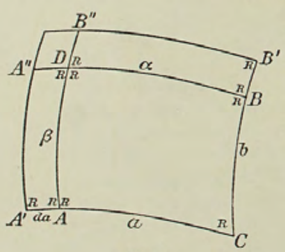


Fig. 5.

Ferner [ergibt Fig. 5] die vollständige allgemeine Differentialgleichung

6) $$dF(a, b) = F(da, \beta) + F(db, \alpha) = da.f\beta + db.f\alpha.$$

Mithin, wenn bloss b veränderlich,

$$dF(a, b) = db.f\alpha.$$

Ist also a unendlich klein, so ist

$$d(afb) = db.f\alpha = db.k\alpha = db\cdot\frac{\rho}{\lambda}ak.f(\rho-\beta)$$

oder, da hier $\beta = b$ gesetzt werden muss,

7) $$dfb = db\cdot\frac{\rho k}{\lambda}f(\rho-b),$$

aus welcher Gleichung die Natur von fb abgeleitet werden muss. Es wird durch Vertauschung [von b mit $\rho-b$:]

8) $$df(\rho-b) = -db\cdot\frac{\rho k}{\lambda}fb.$$

Setzt man also

$$f(\rho-b)+ifb = B,$$
$$f(\rho-b)-ifb = B',$$

so wird

$$dB = iB\cdot db\cdot\frac{\rho k}{\lambda}, \qquad dB' = -iB'\cdot db\cdot\frac{\rho k}{\lambda},$$

also

$$B = Ce^{ib\frac{\rho k}{\lambda}}, \qquad B' = C'e^{-ib\frac{\rho k}{\lambda}},$$

wo C, C' Constanten, welche sich aus der Bedingung bestimmen, dass für $b = 0$ B und B' nach 5) [und weil $f0$ verschwindet] $= \frac{\lambda}{\rho}$ werden, also

$$B = \frac{\lambda}{\rho}e^{ib\frac{\rho k}{\lambda}}, \qquad B' = \frac{\lambda}{\rho}e^{-ib\frac{\rho k}{\lambda}}.$$

Es ist folglich

$$fb = \frac{\lambda}{\rho}\sin\left(\frac{\rho k}{\lambda}\cdot b\right), \qquad f(\rho-b) = \frac{\lambda}{\rho}\cos\left(\frac{\rho k}{\lambda}\cdot b\right),$$

[mithin für $b = \rho$ nach 5):]

$$1 = \sin\frac{\rho\rho k}{\lambda},$$

woraus

$$\frac{\rho\rho k}{\lambda} = \tfrac{1}{2}\pi,$$

also

$$fb = \frac{\lambda}{\rho}\sin\left(\frac{\pi}{2\rho}\cdot b\right)$$

[folgt. Für unendlich kleine a hat mithin das Viereck $ACBD$ den Flächeninhalt

$$a\frac{\lambda}{\rho}\sin\left(\frac{\pi}{2\rho}b\right).]$$

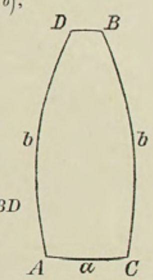


Fig. 6.

BEMERKUNG.

Die vorstehende Notiz befindet sich in einem Handbuche. Wenn auch das Datum ihrer Abfassung nicht angegeben ist, so berechtigt doch der sonstige Inhalt dieses Handbuches zu der Annahme, dass sie zwischen 1840 und 1846 entstanden ist.

Zur Erleichterung des Verständnisses sind in [2] die Figuren 1, 2, 4, 5 und 6 der Figur des Originals beigefügt worden.

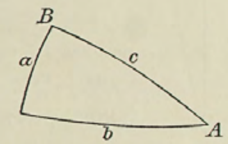
STÄCKEL.

[DIE SPHÄRISCHE UND DIE NICHT-EUKLIDISCHE GEOMETRIE.]

I. $ga.\partial b - \sin B.\partial c + fc.\cos B.\partial A = 0$

II. $gb.\partial a - \sin A.\partial c + fc.\cos A.\partial B = 0$

durch Construction;



III. $\sin B.\partial a - ga.\cos B.\partial b - fc.\partial A = 0$

IV. $gb.\cos A.\partial a - \sin A.\partial b + fc.\partial B = 0$

gleichfalls durch Construction.

Aus Verbindung von I und III folgt $\frac{\mathrm{I}+\mathrm{III}\cos B}{\sin B}$:

$$\cos B.\partial a + ga.\sin B.\partial b - \partial c = 0,$$

wonach sein muss:

V. $$\cos B.\partial a + \cos A.\partial b - \partial c = 0,$$

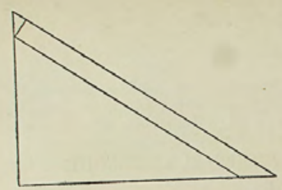
$$1)\quad \cos A = ga.\sin B$$

$$2)\quad \cos B = gb.\sin A.$$

VI. $$\partial a - \cos B.\partial c - fc.\sin B.\partial A\ [= 0]$$

VII. $$\partial b - \cos A.\partial c - fc.\sin A.\partial B\ [= 0]$$

durch Construction.



Ferner folgt durch Construction

dass für $A = \text{const.}$:

$$\sin B \,.\, \partial a = gc \,.\, \sin A \,.\, \partial b,$$

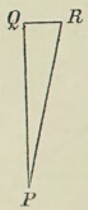
also durch Verbindung von III. und 2)

$$ga \,.\, \cos B = gc \,.\, \sin A$$

und

3) $ga \,.\, gb = gc$

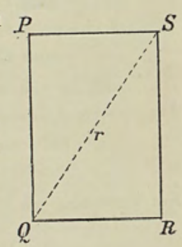
4) $\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \,.\, gc = 1.$



Aus 1) folgt leicht, dass für ein unendlich kleines P, wenn $Q = 90^0$:

$$R = 90^0 - gPQ \,.\, P.$$

Eben so, wenn P, Q, R rechte Winkel sind, und PQ unendlich klein, wird:



$$PSQ = \frac{PQ}{fr},$$

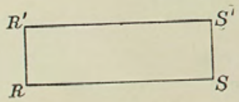
$$RQS = gr \,.\, PSQ = \frac{gr}{fr} \cdot PQ,$$

$$RSQ = 90^0 - gr \,.\, RQS = 90^0 - gr^2 \,.\, PSQ$$

$$= 90^0 - \frac{gr^2}{fr} \cdot PQ,$$

also

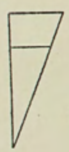
$$PSR = 90^0 + \frac{1 - gr^2}{fr} \cdot PQ.$$



Hieraus ferner

$$R'S' = RS - fRR' \cdot \frac{1 - gr^2}{fr} \cdot PQ,$$

$$dgx = -fdx \,.\, \frac{1 - gx^2}{fx}.$$



Eben so

$$dfx = fdx \,.\, gx.$$

Es sei

$$fdx = \alpha dx, \qquad fx = y;$$

so ist

$$\frac{dy}{dx} = \alpha gx,$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = -\alpha\alpha \frac{1 - \frac{dy^2}{\alpha\alpha dx^2}}{y},$$

$$\frac{yddy}{dx^2} - \frac{dy^2}{dx^2} + \alpha\alpha = 0.$$

Multiplicirt mit $\frac{2dy}{y^3}$:

$$\frac{2\frac{dy}{dx} \cdot d\frac{dy}{dx}}{yy} - \frac{2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dy}{y^3} + \frac{2\alpha\alpha dy}{y^3} = 0.$$

Integrirt

$$\frac{1}{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{\alpha\alpha}{yy} = \text{Const.} = -kk,$$

$$-kkyy + \alpha\alpha - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{(\alpha\alpha - kkyy)}} = \frac{\frac{k}{\alpha} dy}{k\sqrt{\left(1 - \frac{kk}{\alpha\alpha} yy\right)}},$$

$$kx = \text{Arc.} \sin \frac{k}{\alpha} y + \text{Const.},$$

$$y = \frac{\alpha}{k} \sin(kx + \lambda),$$

$$fx = \frac{\alpha}{k} \sin kx,$$

$$gx = \cos kx.$$

BEMERKUNGEN.

GAUSS hat die vorstehende Notiz auf einem Zettel (4 Seiten 8°) niedergeschrieben, der sich als Einlage in seinem Exemplare der »*Geometrischen Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* von Nicolaus LOBATSCHEWSKY, Berlin 1840« vorgefunden hat; als Abfassungszeit darf daher 1840 bis 1846 angenommen werden.

Der Zweck der Notiz ist, unter der Voraussetzung, dass für Dreiecke, deren drei Seiten unendlich klein sind, die Euklidische Geometrie gilt, die Gleichungen herzuleiten, die zwischen den Seiten und Winkeln eines endlichen Dreiecks bestehen; es genügt, diese Beziehungen für ein rechtwinkliges Dreieck herzuleiten. Die Durchführung dieses Gedankens gestaltet sich auf Grund des vorstehenden Textes folgendermassen.

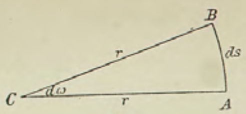


Fig. 1.

1. Ist $d\omega$ ein unendlich kleiner Centriwinkel ACB eines Kreises vom Radius $AC = BC = r$, so ist der zugehörige unendlich kleine Bogen $AB = ds$ proportional $d\omega$, und der Proportionalitätsfactor hängt nur von r ab. Man hat daher:

$$\text{(A)} \qquad ds = f(r)\, d\omega.$$

Die Sehne AB lässt sich bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung durch den Bogen AB ersetzen.

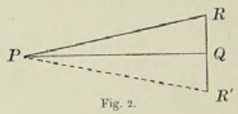


Fig. 2.

Ist in dem Dreieck PQR der Winkel bei Q ein rechter und der Winkel bei P unendlich klein, so hat man

$$\text{(A')} \qquad QR = f(PR) \,.\, QPR,$$

denn wird RQ um $QR' = RQ$ verlängert, so ist nach (A)

$$RR' = f(PR) \,.\, RPR'.$$

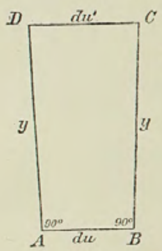


Fig. 3.

2. Es sei $ABCD$ ein Viereck mit der unendlich kleinen Grundlinie $AB = du$. Die Winkel in A und B seien rechte und $AD = BC = y$. Dann ist die Länge der vierten Seite $CD = du'$ proportional du, und der Proportionalitätsfactor hängt nur von y ab. Man hat daher

$$\text{(B)} \qquad du' = g(y)\, du.$$

3. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC mit den Katheten a, b und

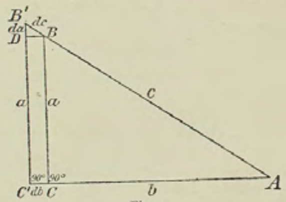


Fig. 4.

der Hypotenuse c lasse man b um ein unendlich kleines Stück $CC' = db$ wachsen, während der Winkel A unverändert bleibt. Die Senkrechte $C'B'$, die in C' auf AC' errichtet ist, schneide AB in B', sodass ein rechtwinkliges Dreieck $AB'C'$ mit den Katheten $a + da,\, b + db$ und der Hypotenuse $c + dc$ entsteht. Macht man auf $C'B'$ $C'D = a$, so wird nach (B):

$$BD = g(a) \,.\, db.$$

Andererseits ist, da in dem unendlich kleinen Dreieck $BB'D$ die Euklidische Geometrie gilt und die Winkel bei D und B' sich nur unendlich wenig von einem Rechten und von B unterscheiden:

$$BD = \sin B \,.\, dc,$$

folglich hat man:

$$1) \qquad g(a) \,.\, db = \sin B \,.\, dc.$$

4. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC lasse man den Winkel A um $BAB' = dA$ wachsen, während $AB' = c$ bleibt. Fällt man von B' auf AB das Loth $B'C'$, so entsteht das rechtwinklige Dreieck $AB'C'$ mit den Katheten $a + da,\, b + db$ und der Hypotenuse c; dabei ist db negativ. Macht man auf $B'C'$ $C'D = a$, so wird die Länge von BD:

$$BD = -g(a) \,.\, db.$$

Andererseits ist in dem unendlich kleinen Dreieck $BB'D$:

$$B'D = da$$

und nach (A):

$$BB' = f(c) \,.\, dA,$$

während die Winkel bei D und B' sich nur unendlich wenig von einem Rechten und $90^\circ - B$ unterscheiden. Mithin ist

$$BD = \cos B f(c) \,.\, dA,$$

und man hat

$$2) \qquad g(a) \,.\, db = -\cos B f(c) \,.\, dA.$$

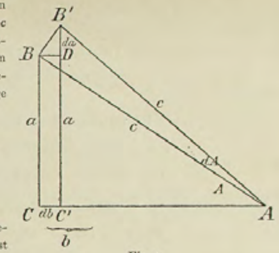


Fig. 5.

5. Durch Verbindung von 1) und 2) folgt, dass bei dem Übergange von dem Dreieck $a, b, c; A, B$ zu dem Dreieck $a + da, b + db, c + dc; A + dA, B + dB$ zwischen db, dc und dA die Relation:

$$\text{I.} \quad g(a) \,.\, db - \sin B \,.\, dc + f(c) \cos B \,.\, dA = 0$$

besteht. Da man aber gleichzeitig a mit b und A mit B vertauschen darf, so gilt auch die Gleichung:

$$\text{II.} \quad g(b) \,.\, da - \sin A \,.\, dc + f(c) \cos A \,.\, dB = 0.$$

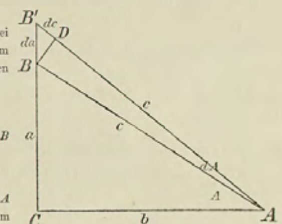


Fig. 6.

6. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC lasse man A um $BAB' = dA$ wachsen; verlängert man BC bis zum Schnitt mit AB', so entsteht das rechtwinklige Dreieck ACB' mit den Katheten $a + da$ und b. Macht man auf AB' $AD = c$, so wird in dem unendlich kleinen Dreieck $BB'D$:

$$BB' = da, \qquad BD = f(c) \,.\, dA,$$

folglich ist

$$3) \qquad f(c) \,.\, dA = \sin B \,.\, da.$$

7. Man lasse wiederum A um $BAB' = dA$ wachsen, behalte aber die Kathete $B'C' = a$ bei. Verlängert man AB' bis $AD = c$, so entsteht das unendlich kleine Dreieck $BB'D$ mit

$$BD = f(c) \,.\, dA$$

und

$$BB' = -g(a) \,.\, db,$$

folglich ist:

$$4) \qquad f(c) \,.\, dA = -\cos B g(a) \,.\, db.$$

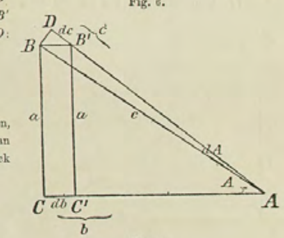


Fig. 7.

8. Durch Verbindung von 3) und 4) ergibt sich die Relation:

III. $$\sin B \,.\, da - \cos B\, g(a) \,.\, db - f(c) \,.\, dA = 0,$$

aus der durch gleichzeitige Vertauschung von a mit b und A mit B:

IV. $$\cos A \,.\, db - \cos A\, g(b) \,.\, da - f(c) \,.\, dB = 0$$

hervorgeht.

9. Aus I. und III. erhält man durch Elimination von dA die Gleichung:

$$\cos B \,.\, da + g(a) \sin B \,.\, db - dc = 0.$$

Ebenso ist auch

$$\cos A \,.\, db + g(b) \sin A \,.\, da - dc = 0,$$

folglich muss

$$(\cos B - g(b) \sin A)\, da + (\cos A - g(a) \sin B)\, db = 0$$

sein. Da aber da und db von einander unabhängig sind, so ist das nur möglich, wenn gleichzeitig

V. 1) $$\cos A = g(a) \sin B,$$

V. 2) $$\cos B = g(b) \sin A$$

wird. Aus diesen Gleichungen folgt die Relation:

V. $$\cos B \,.\, da + \cos A \,.\, db - dc = 0.$$

10. Verfährt man wie in No. 3, so ist in dem unendlich kleinen Dreieck $BB'D$ (Fig. 4):

5) $$da = \cos B \,.\, dc,$$

während $dA = 0$ wird. Verfährt man aber wie in No. 4, so ist in dem unendlich kleinen Dreieck $BB'D$ (Fig. 5):

6) $$da = \sin B f(c) \,.\, dA,$$

während $dc = 0$ wird. Mithin ergibt die Verbindung von 5) und 6) die allgemein gültige Formel:

VI. $$da - \cos B \,.\, dc - \sin B f(c) \,.\, dA = 0,$$

und entsprechend ist:

VII. $$db - \cos A \,.\, dc - \sin A f(c) \,.\, dB = 0.$$

11. Man verlängere CA um $AA' = db$ und trage in A' an CA' den Winkel A an, dessen anderer Schenkel die Verlängerung der Kathete CB in B' schneide, sodass $BB' = da$ wird. Von A fälle man auf $A'B'$ das Lot AD und trage auf $A'B'$ nach B' hin $DE = c$ ab. Dann wird $A'D = \cos A \,.\, db$, und da nach Fig. 8 und Gleichung V.:

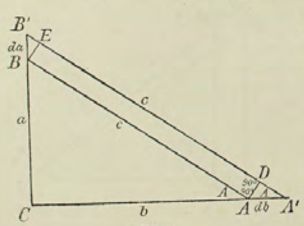


Fig. 8.

$$dc = A'D + EB'$$
$$= \cos B \,.\, da + \cos A \,.\, db$$

ist, $EB' = \cos B \,.\, da$, folglich $BE = \sin B \,.\, da$. Das Viereck $ADEB$ hat aber in A und D rechte Winkel, während $AB = DE = c$ ist, mithin ist nach (A):

$$BE = g(c) \,.\, AD$$

oder

$$\sin B \,.\, da = g(c) \sin A \,.\, db.$$

Auf der andern Seite ist für $dA = 0$ nach III.:

$$\sin B \,.\, da = \cos B\, g(a) \,.\, db,$$

also

$$g(c) \sin A = g(a) \cos B,$$

oder mit Hilfe von V. 2):

V. 3) $$g(c) = g(a)\, g(b).$$

Ferner ergibt sich aus V. 1) und V. 2) durch Multiplication:

$$\operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} B \,.\, g(a)\, g(b) = 1,$$

was vermöge V. 3) in

V. 4) $$\operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{tg} B \,.\, g(c) = 1$$

übergeht.

Man erkennt leicht, dass die Relationen V. 1), 2) und 3) ausreichen, um sämmtliche 10 Gleichungen herzuleiten, die zwischen je drei Stücken eines rechtwinkligen Dreiecks bestehen, nemlich der Reihe nach zwischen

$$\begin{array}{cccc} & a,\ b,\ c & A,\ a,\ c; & B,\ b,\ c \\ A,\ b,\ c; & B,\ a,\ c & A,\ B,\ a; & A,\ B,\ b \\ A,\ a,\ b; & B,\ a,\ b & & A,\ B,\ c. \end{array}$$

Es wird also alles darauf ankommen, die in diesen Relationen auftretende noch unbekannte Function $g(x)$ zu bestimmen, wozu man mittelst folgender Überlegungen gelangt.

12. In dem Dreieck PQR sei der Winkel bei Q ein Rechter, der Winkel bei P unendlich klein, sodass sein Sinus durch den Bogen ersetzt werden kann. Dann unterscheidet sich der Winkel bei R unendlich wenig von einem Rechten, und die Relation V. 1), in der man A, B durch R, P zu ersetzen hat, geht über in

$$90^\circ - R = g(PQ) \,.\, P$$

oder

(C) $$R = 90^\circ - g(PQ) \,.\, P.$$

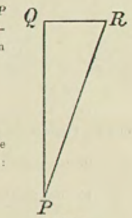


Fig. 9.

13. Das Viereck $PQRS$ habe in P, Q und R rechte Winkel, während die Seite PQ unendlich klein ist. Die Diagonale QS sei gleich r. Dann hat man nach (A'):

$$PQ = f(r) \,.\, PSQ$$

oder

$$PSQ = \frac{PQ}{f(r)},$$

und ebenso ist

$$RQS = \frac{RS}{f(r)}.$$

Verlängert man jetzt PQ um $QT = PQ$, SR um $RU = SR$, so hat das Viereck $PTUS$ in P und T rechte Winkel, und die Seiten PS und TU sind einander gleich. Mithin ist nach (B):

$$SU = g(PS) \,.\, PT$$

oder, da RS unendlich klein ist, bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung:

$$RS = g(r) \,.\, PQ$$

und mit derselben Genauigkeit:

7) $$RQS = \frac{g(r)}{f(r)} \cdot PQ.$$

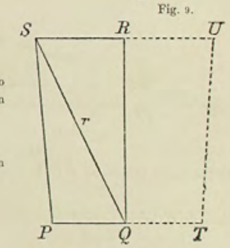


Fig. 10.

Endlich wird nach (C):

$$QSR = 90^\circ - g(PQ).RQS,$$

demnach vermöge 7):

$$QRS = 90^\circ - \frac{g(r)^2}{f(r)} \cdot PQ$$

und daher

(D)
$$PSR = PSQ + QSR$$
$$= 90^\circ + \frac{1-g(r)^2}{f(r)} \cdot PQ.$$

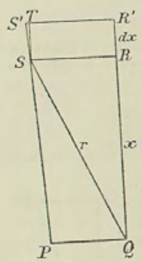


Fig. 11.

14. In dem Viereck $PQRS$ (Fig. 11) verlängere man QR um das unendlich kleine Stück RR', errichte auf QR' in R' das Loth $R'S'$, das die Verlängerung von PS in S' treffen möge, und trage auf $R'S'$ die Strecke $R'T = RS$ ab.

Da die Winkel des unendlich kleinen Vierecks $RR'TS$ als rechte angesehen werden dürfen, so ist nach (A'):

$$TS' = f(SS').S'ST$$
$$= f(SS').(90^\circ - PSR)$$

oder

$$R'S' - RS = f(SS').(90^\circ - PSR)$$

oder vermöge (D):

8) $$R'S' - RS = -f(RR') \cdot \frac{1-g(r)^2}{f(r)} \cdot PQ.$$

Bezeichnet man jetzt QR mit x, RR' mit dx, so ist nach (B):

$$RS = g(x).PQ,$$

demnach

9) $$R'S' - RS = dg(x).PQ,$$

und die Vergleichung der beiden Werthe von $R'S' - RS$ liefert die Relation:

(E) $$dg(x) = -f(dx) \cdot \frac{1-g(x)^2}{f(x)}.$$

15. Hat das Dreieck ABC, mit einem unendlich kleinen Winkel $d\omega$ in A und einem rechten Winkel in C, die Hypotenuse $AB = x + dx$, so ist nach (A'):

$$BC = f(x+dx).d\omega$$

oder

10) $$BC = f(x).d\omega + df(x).d\omega.$$

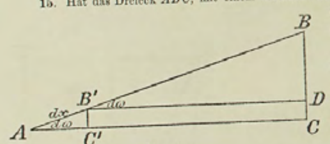


Fig. 12.

Trägt man auf AB die Strecke $AB' = dx$ ab und fällt von B' auf AC das Loth C', so ist wieder nach (A'):

$$BD = f(x).d\omega, \qquad C'B' = f(dx).d\omega.$$

Errichtet man endlich auf $B'C'$ in B' das Loth $B'D$, das BC in D trifft, so ist nach (B):

$$CD = g(C'C).C'B',$$

also, da $C'C$ sich von $B'B$ nur unendlich wenig unterscheidet:

11) $$CD = g(x).f(dx).d\omega,$$

folglich mit Benutzung von 10):

(F) $$df(x) = f(dx)g(x).$$

16. Aus der geometrischen Bedeutung von $f(x)$ geht hervor, dass $f(0) = 0$ ist. Mithin darf man

12) $$f(dx) = \alpha dx$$

setzen, wo α eine Constante bedeutet. Wird zur Abkürzung

$$f(x) = y$$

gesetzt, so ist nach (F)

13) $$\frac{dy}{dx} = \alpha g(x),$$

also

14) $$g(x) = \frac{1}{\alpha}\frac{dy}{dx}.$$

Aus 13) folgt durch Differentiation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha \frac{dg(x)}{dx},$$

mithin nach (E), 12) und 14):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\alpha^2 \frac{1 - \frac{1}{\alpha^2}\frac{dy^2}{dx^2}}{y},$$

oder:

15) $$y\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \alpha^2 = 0.$$

Um diese Differentialgleichung zu integriren, multiplicire man sie mit

$$\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx},$$

wodurch sie in

$$\frac{2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{y^2} - \frac{2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}{y^3} + 2\alpha^2\frac{\frac{dy}{dx}}{y^3} = 0$$

übergeht. Mithin ist

$$\frac{1}{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{\alpha^2}{y^2} = \text{Const.}$$

Wird die Constante mit $-k^2$ bezeichnet, so kommt

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \alpha^2 + k^2y^2 = 0,$$

woraus

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 - k^2y^2}} = \frac{\frac{k}{\alpha}dy}{k\sqrt{1 - \frac{k^2}{\alpha^2}y^2}}$$

und

$$kx = \arcsin\frac{k}{\alpha}y + \text{const.}$$

folgt. Die Constante ist jedoch gleich Null zu setzen, da y für $x = 0$ verschwindet, sodass schliesslich

$$y = \alpha \cdot \frac{\sin kx}{k}$$

wird. Demnach ist:

$$f(x) = \alpha \frac{\sin kx}{k}$$

und nach 14):

$$\text{(G)} \qquad g(x) = \cos kx.$$

17. Setzt man für $g(x)$ den Ausdruck $\cos kx$ in den Relationen V. 1), 2), 3) und 4) ein, so ergeben sich daraus die 10 Relationen:

$$\cos kc = \cos ka \,.\, \cos kb,$$

$$\begin{array}{ll} \operatorname{tg} kb = \operatorname{tg} kc \,.\, \cos A, & \operatorname{tg} ka = \operatorname{tg} kc \,.\, \cos B, \\ \operatorname{tg} ka = \operatorname{tg} A \,.\, \sin kb, & \operatorname{tg} kb = \operatorname{tg} B \,.\, \sin ka, \\ \sin ka = \sin A \,.\, \sin kc, & \sin kb = \sin B \,.\, \sin kc, \\ \cos A = \cos ka \,.\, \sin B, & \cos B = \cos kb \,.\, \sin A, \end{array}$$

$$\cos kc = \cot A \,.\, \cot B,$$

und das sind die bekannten Gleichungen der sphärischen Trigonometrie, wenn der Radius der Kugel gleich $\frac{1}{k}$ gesetzt wird, die sich in die Gleichungen der Nicht-Euklidischen Trigonometrie verwandeln, wenn man für k einen rein imaginären Werth $k = ik'$ wählt.

Es ist auffallend, dass Gauss die Constante, die bei der Integration der Differentialgleichung 15) auftritt, mit k bezeichnet; ob er dadurch einen Zusammenhang mit dem Krümmungsmass andeuten wollte, das er in den Disquisitiones generales circa superficies curvas ebenfalls k nennt, lässt sich freilich nicht mit Bestimmtheit behaupten. Bemerkt zu werden verdient bei dieser Gelegenheit eine Äusserung von Minding in seiner Abhandlung: *Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen*, die 1840 in Crelles Journal für die reine und angewandte Mathematik (Bd. 20, S. 323—327) erschienen war:

»Dass auf jeder Fläche von unveränderlichem positivem Krümmungsmasse zwischen den Seiten und Winkeln eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecks die Formeln der sphärischen Trigonometrie gelten, folgt sogleich, wenn man sich erinnert, dass jede Fläche dieser Art sich auf eine Kugel abwickeln lässt. Ist das Krümmungsmass negativ, so gelten dieselben Formeln mit der Änderung, dass die hyperbolischen Functionen der Seiten an die Stelle der trigonometrischen treten. Sind nemlich a, b, c die Seiten des Dreiecks, A der Gegenwinkel von a und k das unveränderliche Krümmungsmass, gleichviel ob positiv oder negativ, so ist es nicht schwer, die Richtigkeit folgender Gleichung zu beweisen:

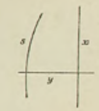
$$\cos a\sqrt{k} = \cos b\sqrt{k} \,.\, \cos c\sqrt{k} + \sin b\sqrt{k} \,.\, \sin c\sqrt{k} \,.\, \cos A.«$$

Die Rotationsflächen von constantem negativen Krümmungsmasse hatte Minding bereits 1839 bestimmt (Crelles Journal, Bd. 19). Man vergleiche dazu folgende Notiz von Gauss, die sich in einem Handbuche findet und aus der Zeit zwischen 1823 und 1827 stammt:

Gar keine Schwierigkeit hat übrigens die Umformung der Oberfläche eines Revolutionskörpers in die eines andern. Man hat nemlich ($m = const.$):

$$dy = ds \,.\, \sin\varphi \qquad dy' = ds' \,.\, \sin\varphi'$$

$$dx = ds \,.\, \cos\varphi \qquad dx' = ds' \,.\, \cos\varphi'$$



$$s = s'$$

$$my = y'$$

$$m \sin\varphi = \sin\varphi'$$

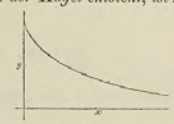
$$x' = \int dx \sqrt{\left(1 + (1 - mm)\frac{dy^2}{dx^2}\right)}.$$

Für die Curve, durch deren Revolution das Gegenstück der Kugel entsteht, ist:

$$y = R\sin\varphi$$

$$x = R\cos\varphi + \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi$$

$$s = R\log\frac{1}{\sin\varphi}.$$



φ	y	x	s
0^0	0.0000	∞	∞
10^0	0.1736	1.45144	1.75072
20^0	0.3420	0.79572	1.07289
30^0	0.5000	0.45095	0.69315
40^0	0.6428	0.24464	0.44194
50^0	0.7660	0.12012	0.26652
60^0	0.8660	0.04931	0.14384
70^0	0.9397	0.01436	0.06220
80^0	0.9848	0.00178	0.01531
90^0	1.0000	0.00000	

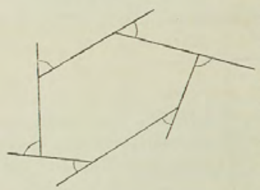
Bei der Tabelle beachte man, dass die Logarithmen natürliche, nicht Briggsische sind.

Stäckel.

[ÜBER DIE SUMME DER AUSSENWINKEL EINES POLYGONS.]

GAUSS an GERLING. Göttingen, 2. October 1846.

. . . . . . Der Satz, den Ihnen Hr. SCHWEIKART erwähnt hat, dass in jeder Geometrie die Summe aller äussern Polygonwinkel von 360° um eine Grösse verschieden ist (nemlich kleiner als 360° in der Astralgeometrie, wie SCHW. sie aufgefasst hat), welche dem Flächeninhalt proportional ist, ist der erste gleichsam an der Schwelle liegende Satz der Theorie, den ich schon im Jahr 1794 als nothwendig erkannte. Zu weitern Bemerkungen fehlt mir aber diessmal alle Zeit.



BEMERKUNG.

In SCHWEIKARTS Astralgeometrie ist die Summe aller äussern Polygonwinkel nicht kleiner, sondern grösser als 360°.

STÄCKEL.

[METAPHYSIK DER GEOMETRIE.]

[W. SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN. *Gauss zum Gedächtniss. Leipzig 1856. S. 80—81.*]

[. . . . . In seiner frühsten Jugend habe ihm [GAUSS] die Geometrie wenig Interesse eingeflösst, welches sich erst später bei ihm in hohem Masse entwickelt habe.

Es war besonders merkwürdig und überaus lehrreich, von GAUSS die Fundamente, auf denen die Mathematik basirt ist, blossgelegt und sie gegen die Metaphysik scharf abgegrenzt zu erblicken. Obgleich er über diese Fragen nie etwas veröffentlicht hat, so steht doch zu vermuthen, dass sich darüber in seinem wissenschaftlichen Nachlass einiges vorfinden wird. In früherer Zeit, als seine Lebensrichtung noch nicht entschieden war und er daran denken musste, dass er vielleicht als Lehrer der Mathematik irgendwo aufzutreten habe, hatte er sich in dieser Aussicht ein Papier ausgearbeitet, welches noch in seinen letzten Jahren vorhanden gewesen sein soll und auf dem er die Anfänge der Mathematik philosophisch entwickelt hatte. Ob dasselbe sich jetzt noch vorfinden wird, ist zweifelhaft.

Die Geometrie betrachtete GAUSS nur als ein consequentes Gebäude, nachdem die Parallelentheorie als Axiom an der Spitze zugegeben sei; er sei indess zur Überzeugung gelangt, dass dieser Satz nicht bewiesen werden könne, doch wisse man aus der Erfahrung, z. B. aus den Winkeln des Dreiecks Brocken, Hohehagen, Inselsberg, dass er näherungsweise richtig sei. Wolle man dagegen das genannte Axiom nicht zugeben, so folge daraus eine andere ganz selbstständige Geometrie, die er gelegentlich einmal verfolgt und mit dem Namen Anticuklidische Geometrie bezeichnet habe.

Gauss, nach seiner öfters ausgesprochenen innersten Ansicht, betrachtete die drei Dimensionen des Raumes als eine specifische Eigenthümlichkeit der menschlichen Seele; Leute, welche diess nicht einsehen könnten, bezeichnete er einmal in seiner humoristischen Laune mit dem Namen Böotier. Wir können uns, sagte er, etwa in Wesen hineindenken, die sich nur zweier Dimensionen bewusst sind; höher über uns stehende würden vielleicht in ähnlicher Weise auf uns herabblicken, und er habe, fuhr er scherzend fort, gewisse Probleme hier zur Seite gelegt, die er in einem höhern Zustande später geometrisch zu behandeln gedächte.}

BEMERKUNG.

Das von Sartorius von Waltershausen erwähnte Papier hat sich in Gauss' Nachlass vorgefunden, es bezieht sich jedoch im Wesentlichen nur auf die Erklärung des Zahlbegriffs und der vier Species.

Stäckel.

GEOMETRIA SITUS.

NACHTRÄGE ZU BAND IV.

NACHLASS.

[I.]

[ZUR GEOMETRIA SITUS.]

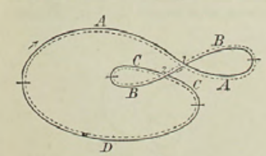
[1.]

THEOREM AUS DER GEOMETRIA SITUS.

Es sei die Amplitudo einer ganzen in sich selbst zurückkehrenden Curve $= \pm n . 360^0$. Sie hat wenigstens Knoten

$$\begin{array}{lccccccc} & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \text{für } n = & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7. \end{array}$$

Der Beweis scheint nicht leicht zu sein; wahrscheinlich wird dazu dienen, dass man die Curve ihrem Laufe nach in Theile abtheilt, deren Grenzen die Punkte sind, in denen ihre Richtung $= 90^0 (2n+1)$, dann eine unendliche gerade Linie, deren Richtung $= 90^0$, in der Richtung 0^0 durch die Fläche schiebt und die Folge der Stücke gehörig beachtet. So ist für diese Curve das Schema folgendes:



		—
A	1	*AB*
B	0	*DCAB*
C	1	*DCBA*
D	2	*DBCA*
A	3	*DA*
etc.		—

[2.]

Der Beweis ist doch sehr leicht. Man nenne n die Anzahl der Knoten und bezeichne sie in der Folge, wie man sie trifft, indem man die Curve in einem angenommenen Sinne der Bewegung durchläuft, durch $1, 2, 3, \ldots n$. Da bei dieser Bewegung jeder Knoten zweimal getroffen wird, so sei Ω die aus $2n$ Gliedern bestehende Reihe dieser Zahlen, indem man das Zeichen $+$ beischreibt, so oft man auf die innere (rechte) Seite des durchschnittenen Arms kommt, sonst $-$. Man zähle die $+$ und $-$Zeichen bloss da zusammen, wo die Zahlen zum erstenmal vorkommen und habe so $+\alpha$-, $-\beta$mal. Indem man nun die Charactere des Theils der Curve, der zunächst vor dem ersten Knoten liegt, durch γ, γ' ausdrückt, ist die Amplitudo der ganzen Curve

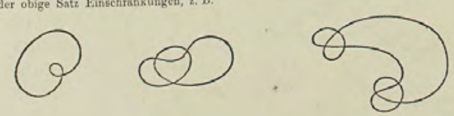
$$= (\gamma + \gamma' + \alpha - \beta)\, 360^0.$$

Es finden jedoch bei diesen Arrangements einige Bedingungen statt, so dass nicht jedes aus der Luft gegriffene Arrangement möglich ist; jeder Knoten muss einmal an einer geraden, einmal an einer ungeraden Stelle vorkommen; zwischen den beiden Plätzen muss die Summe aller $+\alpha, -\beta$ Null werden. Diess reicht aber nicht zu, um die Unmöglichkeit des Schemas

$$\begin{array}{cccccccc} a & b & c & b & a & b & c & b \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ + & - & + & - & + & - & + & - \end{array}$$

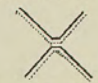
zu zeigen; hier müssen die Zeichen von 2 und 3 nothwendig geändert werden*).

*) 1844 Dec. 30 fand ich, dass die Anordnung der Zahlen (mittelste Reihe) zureicht, um auch die zugehörigen Schnittcharactere (+ und $-$Zeichen in der untersten Reihe) und die Verknüpfung der Tracte (oberste Reihe) daraus abzuleiten, dass aber jene Anordnung selbst nicht willkürlich ist, sondern gewissen Bedingungen unterliegt, deren vollständige Ermittelung Gegenstand neuer Arbeiten sein wird. Es leidet jedoch auch der obige Satz Einschränkungen, z. B.



[3.]

Interessant wird es in Beziehung auf diesen Gegenstand sein, zu untersuchen 1) die Resultate des Durchschneidens der Knoten, in so fern man

statt:  setzt: 

wodurch dann lauter getrennte Grenzlinien entstehen. Zählt man dann für jede Grenzlinie, die [die] $+$Seite innen hat, $+1$, und für jede, die die $-$Seite innen hat, -1, so ist das Aggregat $\times 360^0$ die ganze Amplitudo.

Vielleicht ist es fruchtbar, die Sache gleich anfangs noch allgemeiner anzugreifen und mehrere Linien zugleich zu betrachten, deren jede in sich selbst zurückkehrt, sich selbst und die andern schneidet.

[4.]

Das Vorhergehende ist richtig, verträgt aber grosse Vereinfachung. Indem man die Linie durch die erwähnte Schneidung der Knoten in eine Anzahl in sich zurückkehrender Linien theilt, die weder sich selbst noch einander schneiden, braucht man nur anzugeben, gegen wie viele (μ) Linien der unendliche Raum auf der $-$Seite und gegen wie viele (ν) auf der $+$Seite liegt; man hat dann die Amplitudo

$$= (\mu - \nu)\, 360^0.$$

Die Angabe ist aber leicht; da sogar die Relation jedes Punkts angegeben werden kann. Es seien nemlich die Linien a, b, c, d etc. und

$$\frac{\partial(a)}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial(a)}{\partial b} = \pm 1,$$

je nachdem a auf der $+$ oder $-$Seite von b liegt, und so die übrigen. Man hat dann, wenn in der ursprünglichen Figur der Knoten vorkommt:

$$\begin{array}{ccc} x & & y \\ & n & \\ & \varepsilon, & \end{array}$$

$$\frac{\partial(y)}{\partial x} = \varepsilon,$$

$$(y) - (x) = \varepsilon y + \varepsilon x,$$

wo ε entweder $+1$ oder -1 und das Zeichen von x unbestimmt bleibt; doch, weil nemlich zum Compagnon von n, m gehört:

$$\begin{array}{ccc} y & & x \\ & m & \\ & -\varepsilon. & \end{array}$$

Hiernach werden in Folge des Paradigma die Grössen (a), (b), (c) etc. leicht bestimmt.

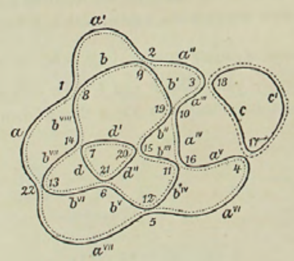
Bezeichnet man nun den Character irgend eines Flächentheils, der z. B. an die $+$ oder $-$Seite von a grenzt, durch $\mathrm{Ch} \pm a$ und die Werthe von (a), (b) etc. für $a = b = c = d = e =$ etc. $= 1$, durch $A:a$, so ist

$$2\,\mathrm{Ch}\,\varepsilon a - \varepsilon - A:a = \text{Const.} = k,$$

und ist die Area der Figur $= \Omega$, so ist die ganze Seitenabweichung nach der $+$Seite

$$= k\,.\,360^0 - \frac{\Omega\,.\,720^0}{\text{Fläche der Kugel}}.$$

[5.]



1	$+a = -b^{\mathrm{VIII}}$ $+a' = -b$	12	$-b^{\mathrm{V}} = +a^{\mathrm{VII}}$ $+a^{\mathrm{VII}} = -b^{\mathrm{VI}}$
2	$+a'' = -b'$ $-a'' = +c'$	13	$+a = -b^{\mathrm{VII}}$ $+b^{\mathrm{VII}} = -d$
3	$-a''' = +c$ $+c = -a^{\mathrm{V}}$	14	$+b^{\mathrm{VIII}} = -d'$ $-d' = +b''$
4	$+c' = -a^{\mathrm{VI}}$ $+a^{\mathrm{VI}} = -b^{\mathrm{IV}}$	15	$-d'' = +b'''$ $-b''' = +a^{\mathrm{IV}}$
5	$+a^{\mathrm{VII}} = -b^{\mathrm{V}}$ $+b^{\mathrm{V}} = -d''$	16	$-b^{\mathrm{IV}} = +a^{\mathrm{V}}$ $-a^{\mathrm{V}} = +c$
6	$+b^{\mathrm{VI}} = -d$ $-d = +b^{\mathrm{VII}}$	17	$-a^{\mathrm{VI}} = +c'$ $+c' = -a''$
7	$-d' = +b^{\mathrm{VIII}}$ $-b^{\mathrm{VIII}} = +a$	18	$+c = -a'''$ $+a''' = -b'$
8	$-b = +a'$ $+a' = -b$	19	$+a^{\mathrm{IV}} = -b''$ $+b'' = -d'$
9	$+a'' = -b'$ $-b' = +a'''$	20	$+b''' = -d''$ $-d'' = +b^{\mathrm{V}}$
10	$-b'' = +a^{\mathrm{IV}}$ $+a^{\mathrm{IV}} = -b'''$	21	$-d = +b^{\mathrm{VI}}$ $-b^{\mathrm{VI}} = +a^{\mathrm{VII}}$
11	$+a^{\mathrm{V}} = -b^{\mathrm{IV}}$ $-b^{\mathrm{IV}} = +a^{\mathrm{VI}}$	22	$-b^{\mathrm{VII}} = +a$

		a			b^{IV}
1.8	+		12.5	−	
		b			a^{VII}
2.9	−		13.22	+	
		a''			b^{VII}
3.18	−		14.7	+	
		c			d'
4.17	+		15.20	−	
		a^{VI}			b'''
5.12	+		16.11	−	
		b^{V}			a^{V}
6.21	+		17.4	−	
		d			c'
7.14	−		18.3	+	
		b^{VIII}			a'''
8.1	−		19.10	+	
		a'			b''
9.2	+		20.15	+	
		b'			d''
10.19	−		21.6	−	
		a^{IV}			b^{VI}
11.16	+		22.13	−	

$$(a) = \;.\; -b+c-d$$
$$(b) = +a \;.\; +c-d$$
$$(c) = -a-b \;.\; -d$$
$$(d) = +a+b+c \;.$$

[6.]

Der Beweis der oben mitgetheilten Regel beruhet auf einer andern Vertheilung der Figur in mehrere geschlossene Figuren, von denen keine sich selbst schneidet, obwohl eine die andere schneiden kann; diess sind nemlich diejenigen, die sich nach und nach bilden, während die Linie erst beschrieben wird. Man hebe von den Intersectionen bloss diejenige Hälfte aus, wo sie zum zweitenmale geschehen, in unserm Beispiel

8.1	−
9.2	+
12.5	−
14.7	+
16.11	−
17.4	−
18.3	+
19.10	+
20.15	+
21.6	−
22.13	−

Es ist klar, dass, indem man von einem Punkte vor (1) ausgeht und in der Curve die Punkte 1, 2, 3 etc. durchläuft, sich zum erstenmale bei dem Schnitt 8 eine Figur bildet, die wir *a* nennen wollen, diese geht von 1 bis 8; offenbar liegen der Theil der ganzen Linie zunächst vor 1 und [der Theil] nach 8 auf der —Seite von *a*.

Indem man so weiter fortgeht, bildet sich eine neue zusammenhängende Curve, die vom Anfangspunkt bis 1 (dann den vorigen Weg 2, 3 etc. verlassend) auf 9, 10, 11 etc. fortgeht; bei 9 gelangt man auf die +Seite von *a*, bei 12 auf die —, bei 14 auf die +Seite von *a*; bei 16 hingegen trifft die Curve sich selbst und schliesst eine zweite Figur, die von 11 durch 12, 13, 14, 15 bis 16 geht, diese heisse *b*; offenbar liegt der Theil der Curve zunächst vor 1, dann das ganze Stück von 8 bis 11, endlich der zunächst an 16 grenzende Theil auf der —Seite von *b*. Nachdem jetzt auch *b* abgesondert ist, trifft die Curve in 17 wieder *a* und kommt auf die —Seite, in 18 abermals, indem sie auf die +Seite gelangt; in 19 schliesst sich die 3te Figur (da 10 noch nicht in einem ausgeschlossenen Theil liegt), welche *c* heissen soll und von 10 bis 11 = 16, dann von 16 bis 19 geht, und wenn diese wieder abgesondert wird, liegt das übrig bleibende Stück so wie das nächst folgende auf der +Seite von *c*; bei 20 gelangt man auf die +Seite von *b*, bei 21 auf die —Seite von *a*, bei 22 auf die —Seite von *b* und, indem man auf den Anfangspunkt (vor 1) zurückkommt, schliesst sich die 4te Figur, die *d* heisst.

Die Lage gegen die schon beschriebenen Curven ergibt sich also

Anfangspunkt	$-a$	$-b$	$+c$
8			
	$-a$		
9			
	$+a$		
12			
	$-a$		
14			
	$+a$		
16			
	$+a$	$-b$	
17			
	$-a$	$-b$	
18			
	$+a$	$-b$	
19			
	$+a$	$-b$	$+c$
20			
	$+a$	$+b$	$+c$
21			
	$-a$	$+b$	$+c$
22			
	$-a$	$-b$	$+c$
Anfangspunkt			

Man sieht aus der vorigen Analyse, dass das letzte Zeichen, welches in diesem Tableau jeder Figur entspricht, nothwendig dasselbe sein muss, wie das erste, oder, dass die Zeichen $+\,-$, die bei den einzelnen Intersectionen vorkommen, wenn man diejenigen abrechnet, die bei den einzelnen Bildungspunkten der Figuren vorkommen, einander destruiren; die Summe aller ist folglich dieselbe, wie die der letztern allein, und zugleich einerlei mit der Summe der Zeichen in dem Character des Anfangspunktes gegen die einzelnen Figuren a, b, c, d. i. alle, wenn man die erst zuletzt gebildete d nicht mitzählt.

Der Character auf der einen Seite der Figur d gegen die Einzelnen Figuren werde durch $\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d$ aus[gedrückt] und [man] setze $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\sigma$, der absolute Character jenes Platzes hingegen sei $=\chi$; dann ist die ganze Seitenbiegung

$$=-\sigma\,.\,360^0-\frac{F-\chi S}{S}\cdot 720^0,$$

wo F die Fläche der ganzen Figur, S die der ganzen Fläche bedeutet,

$$=(2\chi-\sigma)\,.\,360^0-\frac{F}{S}\cdot 720^0.$$

Diese Vorschrift begreift die oben gegebene unter sich, da der unendliche Raum in der Ebene den Character 0 hat, wodurch $\frac{F}{S}=0$ wird; oben wurden die Zeichen da gezählt, wo die Intersectionspunkte zum erstenmale getroffen wurden, und wo sie den hier gebrauchten entgegengesetzt sind.

[7.]

EINE ANDERE ART, DIESE GEGENSTÄNDE ZU BEHANDELN.

Es sei S die ganze Curve, und s ein unbestimmtes Stück. Im Anfangspunkte ziehe man eine Tangente und bezeichne durch $(0, s)$ den Winkel, welchen die gerade Linie vom Anfangspunkte zum Endpunkte des Stücks s macht. Offenbar wird sich $(0, s)$ von $s=0$ an so lange nach dem Gesetz der Stetigkeit ändern, als die Curve nicht wieder in den Anfangspunkt zurückgekommen ist; wir nehmen an, dass diess nicht eher geschehe, als bis $s=S$ geworden ist, und der letzte Werth, ehe s diesen Werth erreicht hat, wird sein

$$(0, s)=\pm 180^0,$$

in so fern man die Winkel nach der innern oder äussern Seite der Linie wachsen lässt.

Indem man s als constant ansieht, ziehe man von jedem Punkt der Linie, die als Endpunkt des kleinern Stücks s' angesehen wird, eine gerade Linie zum Endpunkt des Stücks s und nenne deren Neigung gegen die erste Tangente (s', s). So lange der Endpunkt von s' mit dem von s nicht zusammenfällt, wird sich also, bei stetig geändertem s', (s', s) nach dem Gesetz der Stetigkeit ändern, falls das Stück s sich nicht selbst schneidet, bis $s'=s$. Für diesen Grenzwerth selbst ist (s', s), genau genommen, unbestimmt; so lange aber $s'<s$, wie nahe sich auch die Werthe liegen, ist er bestimmt; und er nähert sich, je näher s' dem s kommt, immer mehr der Neigung der Tangente gegen die Tangente im Anfangspunkte. Es sei nun $s=S-\omega$, und s' verändere sich von 0 bis $S-\omega-\omega'$; es ist klar, dass die Veränderung von s' dadurch 180^0 desto näher kommen wird, je kleiner ω, ω' sind, so dass $(S-\omega-\omega', S-\omega)$ dem

Werth 360^0 desto näher kommt, je kleiner ω, ω' sind; d. i. die Tangente an der Curve hat ihre Neigung vom Anfang bis zum Ende um 360^0 geändert.

Schneidet die Curve sich einmal selbst, so bekommen diese Schlüsse eine Abänderung. Sind nemlich die Endpunkte von $s = \sigma$, $s' = \sigma'$ identisch, so leidet (s', s) für diese Werthe eine Sprungsänderung: nemlich für $s = \sigma$, als constant betrachtet, ändert sich (s', s), indem s' den Werth σ' erreicht, auf einmal um $\pm 180^0$; um zu entscheiden, welcher Werth hier gilt, müssen die Werthe für $s = \sigma \mp \omega$ betrachtet werden, wo ω unendlich klein ist; man sieht, dass, wie $s' - \sigma'$ von einem [negativen] Werthe [an] die immer kleiner werdenden negativen Werthe erhält und durch 0 wieder wächst, $(s', \sigma - \omega)$ um eine Grösse zunimmt oder abnimmt, die unendlich wenig von 180^0 verschieden ist, je nachdem man bei s' von der innern auf die äussere Seite der Linie s' übergeht oder umgekehrt; für $(s', \sigma + \omega)$ ist es hingegen umgekehrt; man sieht also, dass überhaupt für ein constantes s', grösser als σ', (s', s) beim Durchgang durch den Werth $s = \sigma$ auf einmal um 360^0 ab(zu)nimmt und dass die Änderung des (s', σ), indem s' durch den Werth σ' geht, um $\pm 180^0$ eigentlich mit beiden Zeichen zugleich gilt, je nachdem man $s = \sigma$ als den letzten der bis σ oder als den ersten der von σ an weiter zu nehmenden Werthe ansieht. Das Solidum hat hier die Gestalt einer Wendeltreppe. Die Änderung der Richtung der Tangente wird nunmehro entweder 720^0 oder 0^0, man kann aber dieser Betrachtung ganz enthoben sein, wenn man die gegenwärtige Methode auf den Fall einschränkt, wo die Curve sich nicht selbst schneidet.

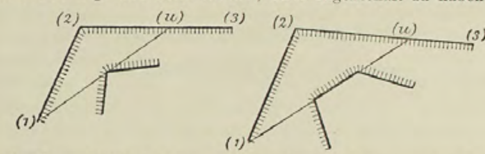
[8.]

Überhaupt lässt sich in dieser Theorie vieles sehr vereinfachen, wenn man die Zerlegbarkeit der Polygone in Dreiecke voraussetzt. Diese aber lässt sich auf folgende Art beweisen.

Zuerst ist klar, dass jede Figur durch Eine Theilungslinie (gerade; kürzeste) sich in zwei zerlegen lässt, die zusammen einen Einwärts gehenden Winkel weniger haben. Durch wiederholte Theilung dieser Art wird also das Polygon in andere zerlegt, die gar keine einwärts gehende Winkel haben.

Es sei nun P ein Polygon mit lauter auswärts gehenden Winkeln an den Punkten (1), (2), (3) ... (n); ich behaupte, die Linie (1)(3) wird ganz im Innern des Polygons liegen.

Beweis. Zuerst ist klar, dass der Winkel (1) und die Linie (2)(3) auf der innern Seite von (1)(2) liegen; indem man also eine Linie durch (1) sich so bewegen lässt, dass sie von (1)(2) auf (1)(3) übergeht, wird sie anfangs im Innern der Figur liegen. Gesetzt nun, dass sie in der Lage (1)(3) nicht mehr ganz im Innern der Figur liege, so sei (1)(u) diejenige Lage, bis wohin sie ganz im Innern liegt und dann aufhört, diese Eigenschaft zu haben; sie wird



also in der Lage (1)(u) die Aussenseite der Figur berühren, entweder in einem Punkte oder in einer Linie (oder mehrern getrennten Punkten oder Linien).

Offenbar wird also an dieser Stelle oder an diesen Stellen einer oder mehrere einwärts gehende Winkel sein, gegen die Voraussetzung.

Es ist hierdurch zugleich bewiesen, dass alle Linien (1)(2), (1)(3), (1)(4) etc. ganz im Innern der Figur liegen und in einem Sinn fortgehen.

[9.]

Eine interessante Aufgabe scheint zu sein, die Bedingung analytisch anzugeben, ob ein gegebener Punkt innerhalb oder ausserhalb der Figur fällt.

Die Auflösung ist leicht. Indem man den Punkt zum Anfangspunkt der Coordinaten wählt, zähle man alle Punkte

$$\begin{array}{lllll} \alpha, & \text{wo} & y, & -y', & xy'-yx' \\ \beta, & \text{wo} & y, & -y', & yx'-xy' \\ \gamma, & \text{wo} & -y, & y', & xy'-yx' \\ \delta, & \text{wo} & -y, & y', & yx'-xy' \end{array}$$

positiv sind; man hat dann

$$\alpha = \gamma, \qquad \beta = \delta.$$

Ist nun $\alpha - \beta = 0$, so liegt der Punkt ausserhalb, ist $\alpha - \beta = \pm 1$, so liegt er innerhalb.

[II.]

ZUR GEOMETRIE DER LAGE,

FÜR ZWEI RAUMDIMENSIONEN.

Bei den dargestellten Tracten werden alle nur einmal vorkommenden Knotenpunkte weggelassen. Mit zwei Sternen sind diejenigen bezeichnet, die für sich schon unmöglich sind; mit Einem Stern die, wo unter Vor- und Nachsetzung eines neuen Knotenpunkts der Tract unmöglich; ohne Stern, wo dieser Zusatz einen möglichen Tract ergibt.

Ein vollständiger Knoten.

1. aa

Zwei vollständige Knoten.

1. aabb
2. abab *
3. abba

Drei vollständige Knoten.

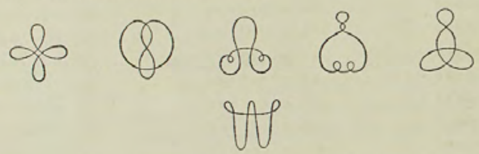
1. aabbcc
2. aabcbc *
3. aabccb
4. ababcc *
5. abacbc **
6. abaccb *
7. abbacc
8. abbcac *
9. abbcca
10. abcabc
11. abcacb *
12. abcbac *
13. abcbca **
14. abccab *
15. abccba

Vier vollständige Knoten.

1. aabbccdd
2. aabbcdcd *
3. aabbcddc
4. aabcbcdd *
5. aabcbdcd **
6. aabcbddc *
7. aabccbdd
8. aabccdbd *
9. aabccddb
10. aabcdbcd
11. aabcdbdc *
12. aabcdcbd *
13. aabcdcdb **
14. aabcddbc *
15. aabcddcb
16. ababccdd *
17. ababcdcd *
18. ababcddc *
19. abacbcdd **
20. abacbdcd **
21. abacbddc **
22. abaccbdd **
23. abaccdbd **
24. abaccddb **
25. abacdbcd **
26. abacdbdc **
27. abacdcbd **
28. abacdcdb **
29. abacddbc **
30. abacddcb **
31. abbaccdd
32. abbacdcd *
33. abbacddc
34. abbcacdd *
35. abbcadcd **
36. abbcaddc *
37. abbccadd
38. abbccdad *
39. abbccdda
40. abbcdacd
41. abbcdadc *
42. abbcdcad *
43. abbcdcda **
44. abbcddac *
45. abbcddca
46. abcabcdd
47. abcabdcd **
48. abcabddc
49. abcacbdd *
50. abcacdbd **
51. abcacddb *
52. abcadbcd *
53. abcadbdc **
54. abcadcbd
55. abcadcdb **
56. abcaddbc
57. abcaddcb *
58. abcbacdd *
59. abcbadcd **
60. abcbaddc *
61. abcbcadd **
62. abcbcdad **
63. abcbcdda **
64. abcbdacd **
65. abcbdadc **
66. abcbdcad **
67. abcbdcda **
68. abcbddac *
69. abcbddca **
70. abccabdd *
71. abccadbd **
72. abccaddb *
73. abccbadd
74. abccbdad *
75. abccbdda
76. abccdabd
77. abccdadb *
78. abccdbad *
79. abccdbda **
80. abccddab *
81. abccddba
82. abcdabcd *
83. abcdabdc *
84. abcdacbd **
85. abcdacdb **
86. abcdadbc *
87. abcdadcb *
88. abcdbacd *
89. abcdbadc
90. abcdbcad **
91. abcdbcda
92. abcdbdac **
93. abcdbdca **
94. abcdcabd **
95. abcdcadb **
96. abcdcbad *
97. abcdcbda **
98. abcdcdab **
99. abcdcdba **
100. abcddabc
101. abcddacb *
102. abcddbac *
103. abcddbca **
104. abcddcab *
105. abcddcba

Man kann die möglichen Tracte auch als geschlossene ansehen, und folglich aus jedem möglichen durch Vorrückung des Anfangsgliedes andere ableiten. Die 24 möglichen, welche sich unter den 105 Tracten für 4 vollständige Knoten befinden, erscheinen in dieser Abhängigkeit so:

1. 39	I. 4	IV. 1	VIII. 1
54. 89	II. 2	III. 4	
15. 105. 73. 33	II. 5		
3. 45. 7. 75. 31. 9. 81. 37			
10. 91. 46. 48. 56. 100. 76. 40			



Sehr vereinfacht wird die Registrirung, indem man die Plätze mit 0, 1, 2, 3 u. s. w. bezeichnet, und diejenigen Paare von Plätzen, die Einem Knoten entsprechen, neben einander setzt. In einem möglichen geschlossenen Tracte muss jedes Paar aus einer geraden und einer ungeraden Zahl bestehen. Z. B.

Nr. 91	0.7 2.5 4.1 6.3	Nr. 48	0.3 2.7 4.1 6.5	u. s. w.

Dieses Criterium hört aber bei Perioden von mehr als 4 Knoten auf, für die Möglichkeit zureichend zu sein; z. B. *abcadcedbe* oder $\begin{pmatrix} 0. & 2. & 4. & 6. & 8 \\ 3. & 5. & 7. & 9. & 1 \end{pmatrix}$ ist, obgleich dem Criterium genügt ist, unmöglich.

Ebenso ist unmöglich *abcabdecde* [oder] $\begin{pmatrix} 0. & 2. & 4. & 6. & 8 \\ 3. & 7. & 1. & 9. & 5 \end{pmatrix}$.

Die vollständige lexicographische Aufzählung aller 120 Tractcombinationen für 5 Knoten auf der folgenden Seite [, wobei die unmöglichen Tracte durch einen Stern bezeichnet sind.]

1.	*aabbccddee*	31.	*abbccaddee*	61.	*abcaddecbe*	91.	*abcdbceade* *
2.	*ccdeed*	32.	*adeed*	62.	*deebc*	92.	*ceeda*
3.	*cddcee*	33.	*ddaee*	63.	*ebced*	93.	*edaec* *
4.	*cddeec*	34.	*ddeea*	64.	*ebdec* *	94.	*edcea*
5.	*cdecde*	35.	*deade*	65.	*eecbd*	95.	*eeadc*
6.	*cdeedc*	36.	*deeda*	66.	*eedbc*	96.	*eecda*
7.	*aabccbddee*	37.	*abbcdacdee*	67.	*abccbaddee*	97.	*abcddabcee*
8.	*bdeed*	38.	*aceed*	68.	*adeed*	98.	*abeec*
9.	*ddbee*	39.	*aedce*	69.	*ddaee*	99.	*aecbe*
10.	*ddeeb*	40.	*aeecd*	70.	*ddeea*	100.	*aeebc*
11.	*debde*	41.	*dcaee*	71.	*deade*	101.	*cbaee*
12.	*deedb*	42.	*dceea*	72.	*deeda*	102.	*cbeea*
13.	*aabcdbcdee*	43.	*deace*	73.	*abccdabdee*	103.	*ceabe*
14.	*bceed*	44.	*deeca*	74.	*abeed*	104.	*ceeba*
15.	*bedce*	45.	*ecaed*	75.	*aedbe*	105.	*ebaec*
16.	*beecd*	46.	*ecdea*	76.	*aeebd*	106.	*ebcea*
17.	*dcbee*	47.	*eeacd*	77.	*dbaee*	107.	*eeabc*
18.	*dceeb*	48.	*eedca*	78.	*dbeea*	108.	*eecba*
19.	*debce*	49.	*abcabcddee*	79.	*deabe*	109.	*abcdeabcde*
20.	*deecb*	50.	*cdeed*	80.	*deeba*	110.	*abedc*
21.	*ecbed*	51.	*ddcee*	81.	*ebaed*	111.	*adcbe*
22.	*ecdeb*	52.	*ddeec*	82.	*ebdea*	112.	*adebc* *
23.	*eebcd*	53.	*decde* *	83.	*eeabd*	113.	*cbade*
24.	*eedcb*	54.	*deedc*	84.	*eedba*	114.	*cbeda*
25.	*abbaccddee*	55.	*abcadcbdee*	85.	*abcdbadcee*	115.	*cdabe* *
26.	*cdeed*	56.	*cbeed*	86.	*adeec*	116.	*cdeba*
27.	*ddcee*	57.	*cedbe* *	87.	*aecde*	117.	*ebadc*
28.	*ddeec*	58.	*ceebd*	88.	*aeedc*	118.	*ebcda*
29.	*decde*	59.	*dbcee*	89.	*cdaee*	119.	*edabc*
30.	*deedc*	60.	*dbeec*	90.	*cdeea*	120.	*edcba*

BEMERKUNGEN ZU DEN NOTIZEN ÜBER GEOMETRIA SITUS.

Die unter [I] zusammengefassten Notizen stehen hinter einander in einem Handbuche, sind jedoch augenscheinlich zu sehr verschiedenen Zeiten niedergeschrieben worden; die Notizen [1] und [2] stammen wahrscheinlich aus der Zeit zwischen 1823 und 1827, während die Notiz [9] vermuthlich in die Zeit nach 1840 fällt.

In SCHERINGs Nachlass haben sich folgende Erläuterungen zu den Notizen [I] gefunden:

»Um die Charactere γ, γ' [S. 272] irgend eines bestimmten Theils der Curve zu erhalten, ziehe man von beliebig weiter Ferne nach zwei Punkten, die unmittelbar neben dem Curventheil und auf verschiedenen Seiten des Zuges liegen, zwei gerade Linien und zähle für jeden Durchschnitt, welchen eine der beiden Linien mit dem gegebenen Zuge macht, $+1$, wenn die Linie von der äussern Seite zur innern übergeht, -1 im entgegengesetzten Falle. Die Resultate für die beiden Linien sind die gesuchten Charactere γ, γ'.

Nennt man $+1$ oder -1 den Character eines durch eine einzelne der in sich zurückkehrenden Linien begrenzten Flächentheils, je nachdem die Fläche auf der positiven oder negativen Seite ihrer Begrenzung liegt, so bezeichnet $\mathrm{Ch}\,\varepsilon a$ [S. 274] die Summe der Charactere aller der Flächentheile, die an a stossen, sowohl derjenigen, die über a hinausgehen, als auch des Flächentheils, der von εa begrenzt wird und dessen Character ε ist.

Der absolute Character χ eines Punktes [S. 278] ist die Summe der Charactere aller Flächentheile, in denen der Punkt liegt.

Bei der Zählung [S. 281] hat man die Seiten des Polygons in einem und demselben Sinne, immer in der Richtung von (x, y) nach (x', y'), zu durchlaufen.«

Die Notiz [II] hat SCHERING, wahrscheinlich auf Grund der Äusserungen von GAUSS in der Anmerkung S. 272, mit dem Datum: 1844. Dec. 30 versehen und zu ihr folgende Bemerkungen gemacht:

»Zwei Punkte des Tractes, die zusammenfallen und dadurch einen Knoten bilden, sind mit denselben Buchstaben a und a, b und b u. s. w. bezeichnet. Bei der Darstellung eines Tractes werden diese Punkte in der Ordnung angegeben, in welcher sie auf dem Tracte nach einander folgen.

Durch die Figuren werden die Nummern

1 54 15 3 10
15

dargestellt.«

STÄCKEL.

AUFGABEN UND LEHRSÄTZE DER ELEMENTAREN GEOMETRIE ANGEHÖRIG.

NACHTRÄGE ZU BAND IV.

NACHLASS UND BRIEFWECHSEL.

[ZUR SPHÄRISCHEN TRIGONOMETRIE.]

[1.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 18. Februar 1815.

Recht sehr danke ich Ihnen, lieber Gerling, für die Mittheilungen aus Ihrer Arbeit über die Trigonometrie. Ihren Beweis für die 4 Gleichungen finde ich für Ihren Zweck sehr angemessen. Es fehlt ihm weiter nichts zur Vollständigkeit, als dass noch die Zeichen besonders bewiesen werden müssen, indem z. B. aus

$$\sin\tfrac{1}{2}A^2\cos\tfrac{1}{2}(b+c)^2 = \cos\tfrac{1}{2}(B+C)^2\cos\tfrac{1}{2}a^2$$

eigentlich nichts weiter folgt, als dass

$$\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}(b+c) \quad \text{entweder} \quad = \cos\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}a$$

$$\text{oder} \quad = -\cos\tfrac{1}{2}(B+C)\cos\tfrac{1}{2}a.$$

Man kann eine solche Completirung des Beweises aus andern Sätzen ableiten, wodurch aber das Ganze weitläuftiger wird. Ich habe zuletzt mich immer an folgende Entwickelungsmethode gehalten:

Ich setze die 5 Gleichungen voraus, da sie in der That alle ohnehin nothwendig sind:

$$
\begin{array}{ll}
1) & \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\
2) & \sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A \\
3) & \sin a \sin B = \sin b \sin A \\
4) & \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a = \cos b \sin A \\
5) & -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a = \cos A.
\end{array}
$$

Hieraus leiten Sie leicht folgende 6 neue ab

$$
\begin{array}{lll}
6) & \sin a(\cos C - \cos B) = (1+\cos A)\sin(b-c) & \multirow{2}{*}{\text{aus 2),}} \\
7) & \sin a(\cos C + \cos B) = (1-\cos A)\sin(b+c) & \\
8) & \sin A(\sin b + \sin c) = \sin a(\sin B + \sin C) & \multirow{2}{*}{\text{aus 3),}} \\
9) & \sin A(\sin b - \sin c) = \sin a(\sin B - \sin C) & \\
10) & \sin A(\cos c + \cos b) = (1+\cos a)\sin(B+C) & \multirow{2}{*}{\text{aus 4).}} \\
11) & \sin A(\cos c - \cos b) = (1-\cos a)\sin(B-C) &
\end{array}
$$

[Dabei gebraucht man die Gleichung 2)] theils in ihrer ursprünglichen Form, theils indem B, b gegen C, c vertauscht werden. Dasselbe gilt von den folgenden [Gleichungen 3) und 4)].

Löst man nun alles in Factoren auf und setzt, um nicht so viel zu schreiben zu haben,

$$
\begin{array}{ll}
\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b-c) = P & \cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B+C) = p \\
\cos\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b-c) = Q & \cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B+C) = q \\
\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(b+c) = R & \sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}(B-C) = r \\
\sin\frac{1}{2}A\sin\frac{1}{2}(b+c) = S & \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(B-C) = s,
\end{array}
$$

so bekommen die letzten 6 Gleichungen folgende Gestalt:

$$
\begin{array}{ll}
6^*) & PQ = qs \\
7^*) & RS = pr \\
8^*) & PS = qr \\
9^*) & QR = ps \\
10^*) & PR = pq \\
11^*) & QS = rs.
\end{array}
$$

Aus $\frac{6^* \times 8^*}{11^*}$ oder $\frac{6^* \times 10^*}{9^*}$ oder $\frac{8^* \times 10^*}{7^*}$ folgt

$$PP = qq,$$

woraus nothwendig

$$P = +q$$

geschlossen werden muss, in so fern man nur Dreiecke betrachtet, wo Seiten und Winkel nicht über 180^0 hinausgehen. Dann hat man ohne weiteres

$$Q = +s, \qquad R = +p, \qquad S = +r,$$

welches zusammen die vier gewünschten Sätze, sind.

Ich überlasse es Ihnen, in wie fern Sie hiervon, oder von andern mir gewöhnlichen Rechnungsanordnungen, in Ihrem Werke Gebrauch machen wollen. . . .

[2.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 26. Juni 1816.

. . . . Ich habe bisher immer so vielfache Zerstreuungen gehabt, dass ich noch nicht habe dazu kommen können, über die zweckmässigste Ordnung der ersten Sätze der sphärischen Trigonometrie, bei einer geometrischen Behandlung, nachzudenken. Ich sollte indessen glauben, dass es am einfachsten sein würde, Euklid XI. 20. 21 zum Grunde zu legen und den Satz, dass $A+B+C > 180^0$ ist, aus dem Polardreieck abzuleiten. Ich glaube kaum, dass sich aus der Betrachtung des ebenen Dreiecks zwischen den Winkelpunkten des sphärischen irgend ein erheblicher Gewinn ziehen lässt, da es keine sehr einfache Relationen zwischen dessen Winkeln zu geben scheint. Folgende möchte wohl mit die zierlichste sein: wenn A', B', C' die Winkel des ebenen Dreiecks sind, und

$$A+B+C-180^0 = u,$$

so ist

$$\cos A' = \cos\tfrac{1}{2}a\cos(A-\tfrac{1}{2}u).$$

. . . .

[GEOMETRISCHER ORT
DER SPITZE DES SPHÄRISCHEN DREIECKS
AUF GEGEBENER BASIS MIT GEGEBENEM INHALT.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 29. December 1841.

.... Ist Ihnen eine gedruckte Auflösung der Aufgabe: den geometrischen Ort der Spitze eines sphärischen Dreiecks auf gegebener Basis und von gegebenem Inhalt zu finden, bekannt? Ich wurde neulich veranlasst sie zu suchen; und war etwas verwundert, dass die analytische Auflösung mit einigem Umwege auf ein höchst einfaches Resultat führt, dessen synthetischer Beweis sich in ein Paar Zeilen führen lässt. ....

[Schumacher an Gauss. *Altona, 3. Januar 1842.*]

{Eine geometrische Auflösung des von Ihnen, mein theuerster Freund, erwähnten Problems hat vor nicht gar langer Zeit Steiner in Crelles Journal (Bd. 2. p. 45) gegeben, wo er aber seine Vorgänger nicht richtig citirt. Lexells Aufsatz steht nicht, wie dort gesagt wird, in Nova Acta Petrop. V. Pars 1, sondern in Acta Petrop. pro 1781, Pars I. Euler ist später darauf in Nova Acta Tom. X. p. 47 (Variae speculationes etc.) zurückgekommen. Legendre hat ihn

auch in seiner Géométrie, Note X, wo er auch unrichtig Lexell citirt, und Grunert in der Fortsetzung von Klügels Wörterbuch, Artikel Trigonometrie (gleichfalls unrichtige Citation Lexells. Sie scheinen aus Legendre abgeschrieben zu haben).

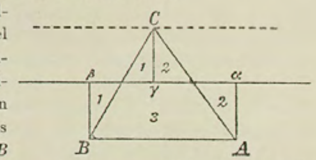
Clausen hat mich gebeten, Ihnen seine Auflösung vorzulegen. Es folgt daraus, dass die Mittelpunkte der beiden andern Seiten des Dreiecks (die Basis ist die dritte) auf grössten Kreisen liegen, und die einfache Construction um den Pol des Ortkreises zu finden:

> Man halbire die beiden andern Seiten und lasse aus den Halbirungspunkten Bögen von 90° sich schneiden. Ihr Durchschnittspunkt ist der gesuchte Pol des kleinen Kreises, in dem die Spitzen der Dreiecke liegen.

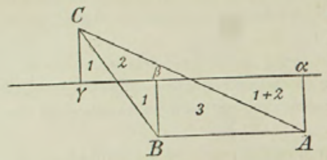
Ist diess durch geometrische Betrachtungen schon gefunden? ....}

Gauss an Schumacher. Göttingen, 6. Januar 1842.

.... Bei der ganzen Sache war mir nur das merkwürdig gewesen, dass die analytische Angriffsarbeit diessmal so sehr viel weitschweifiger wird als der synthetische Beweis des Satzes, wenn man ihn schon hat. Ich selbst hatte mir das Resultat so enunciirt: man verbinde die Mitten der zwei Seiten des vorgegebenen Dreiecks (indem man die gegebene Basis die dritte Seite nennt) durch einen grössten Kreis; der damit durch die Spitze des Dreiecks parallel gezogene kleine Kreis ist der gesuchte geometrische Ort. Dass damit der Aufgabe genügt wird, ist in der That unmittelbar zu übersehen.



Indem man nemlich auf den bemeldeten grössten Kreis die Perpendikel $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ fällt, bilden sich für nebenstehende Figur vier rechtwinklige Dreiecke 1, 1, 2, 2, wo die Gleichheit von $1 = 1$ und $2 = 2$ evident ist, also das Dreieck ABC ist dem Viereck $A\alpha\beta B$ an Inhalt gleich; aber dieses Viereck ist von der Lage von C in dem punktirten kleinen Kreise unabhängig; also der Inhalt von ABC für jede Lage von C in diesem kleinen Kreise immer derselbe. Für den Fall, wo γ nicht innerhalb des Dreiecks liegt, muss man (wie das bei synthetischen Beweisen immer nothwendig ist) eine andere Figur zeichnen, welche zeigt, dass sowohl das Dreieck ABC, als das Viereck $A\alpha\beta B$ jedes $= 1+2+3$ ist.



Alles ganz schulgerecht zu schreiben, fehlt mir jetzt die Zeit, aber das Angeführte wird hinreichen, den Nerv des synthetischen Beweises zu zeigen. . . .

BEMERKUNG.

Gauss hat sich den vorstehenden Beweis auch in einem Handbuche unter demselben Titel notirt, unter dem hier die Briefstellen Platz gefunden haben. Genau derselbe Beweis war schon 1836 von Lobatschefskij in § 68 der Abhandlung: Новыя начала геометрiи (Neue Anfangsgründe der Geometrie) gegeben worden.

Stäckel.

[ZU MÖBIUS' BARYCENTRISCHEM CALCUL.]

[I.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 12. Mai 1843.

Ich bin Ihnen, mein theuerster Freund, noch für mehrere Ihrer Briefe und sonstige interessante Mittheilungen meinen Dank schuldig. Sie dürfen jedoch nicht zu genau mit mir rechnen: seit 4—6 Wochen bin ich (anfangs durch zufällige Umstände) in einige mathematische Speculationen hineingezogen, wo ich immer wieder durch neue Aussichten in andere Richtungen gelenkt wurde, und vieles erreicht, vieles verfehlt habe. In einem solchen Herumtreiben ist man (oder bin ich wenigstens) fast unfähig, mich in irgend andere Gegenstände einzulassen, und so ist namentlich auch in meiner Correspondenz ungemein viel Rückstand geworden. Jene Speculationen betrafen grossentheils weniger neue Sachen, als Durchführung mir eigenthümlicher Methoden; zuletzt u. a. mehreres sich auf die Kegelschnitte beziehendes. Mir ist dabei wieder in Erinnerung gekommen, dass ich vor einem halben Jahrhundert, als ich zuerst Newtons Principia las, mehreres unbefriedigend fand, namentlich auch seine an sich herrlichen Sätze die Kegelschnitte betreffend. Aber ich las immer mit dem Gefühle, dass ich durch das Erlernte nicht Herr der Sache wurde; besonders quälte mich die gerade Linie, mit deren Hülfe ein Kegelschnitt beschrieben werden kann. Newton löst die Aufgabe: durch 5 Punkte A, B, C, D, E einen Kegelschnitt zu legen, so auf, dass er erst vermittelst der vier

Punkte A, B, C, D (ich brauche jetzt meine, nicht NEWTONS hierbei meines Erachtens unbehülfliche Bezeichnung) einen Punkt δ jener geraden Linie sucht, dann vermittelst A, B, C, E einen andern Punkt ε jener geraden Linie; so ist die gerade Linie selbst positione data, und für jeden andern Punkt derselben, μ, gibt seine Construction einen correspondirenden Kegelschnittspunkt M: indem er den Winkel BAC (mit unbestimmter Schenkellänge) sich um A drehen lässt, und die Stellung notirt, wo AB durch μ geht, muss AC durch M gehen, und eben so, wenn der Winkel ABC sich um B dreht, muss, indem BA durch μ geht, BC gleichfalls durch M gehen. Diese Construction ist nun zwar überaus zierlich, aber Herr des Gegenstandes ist man doch erst dann, wenn man alle andern diese magische gerade Linie betreffenden Fragen beantworten kann; namentlich will man wissen, welche Relationen diese gerade Linie zu den Elementen des Kegelschnitts habe, ob man diese Elemente selbst mit Leichtigkeit aus der Lage jener geraden Linie und der von A, B, C ableiten könne. Verschiedenes dieser Art kann ich jetzt recht artig ausrichten, ich weiss aber nicht, ob ich selbst das Ganze durchführen kann, da andere Geschäfte mich nöthigen abzubrechen.

. . . . Früher haben Sie, wenn ich nicht irre, sich viel mit den Kegelschnitten beschäftigt; gewiss viel mehr darüber gelesen als ich. Sie führen z. B. schon Monatliche Correspondenz 1810 November S. 508 einen eleganten die Ellipse betreffenden Satz aus einem Buche[(*)] an, welches ich, obwohl vermuthlich unsere Bibliothek es besitzt, bis jetzt noch nicht angesehen habe. Man kann also wegen historischer Notiz wohl bei Ihnen vorfragen. Kennen Sie eine zierliche Construction, um den Mittelpunkt eines Kegelschnitts aus 5 Punkten desselben — ohne alle überflüssigen Umwege — zu finden? Schwer wird es gewiss nicht sein, aber gerade diese Entwickelung habe ich noch nicht gemacht. . . . .

[(*) PUISSANT, Recueil de diverses propositions de géométrie. Paris 1801. Vergl. auch Bd. IV. S. 396.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 15. Mai 1843.

Ich sende meinem letzten Briefe an Sie, mein theuerster Freund, noch ein Paar Worte nach, um einem Buche eine Gerechtigkeit widerfahren zu lassen, welches ich bisher, zum Theil in Folge eines vor zwanzig Jahren durch Sie (freilich sehr unschuldiger Weise) veranlassten Umstandes, weniger beachtet habe, als es verdient.

Sie erinnern Sich vielleicht noch, dass Sie mir damals in Ihrem Hause eine an sich ganz artige von MÖBIUS aufgestellte geometrische Aufgabe vorlegten, wovon ich die nichts zu wünschen lassende Auflösung fast augenblicklich niederschrieb. In Folge dieses Vorfalls hatte ich das Buch von MÖBIUS, barycentrischer Calcul, in dessen Vorrede jene Aufgabe auch wieder erwähnt wurde, mit einer Art Vorurtheil in die Hand genommen, nemlich mit dem Zweifel, ob es der Mühe werth sei, eine recht artig ausgesonnene Rechnungsweise sich anzueignen, wenn man durch dieselbe nichts leisten könne, was sich nicht eben so leicht ohne sie leisten lasse. Ich hatte deshalb das Buch — zumal da ich es in einer Zeit erhielt, wo andere Dinge mich ganz beschäftigten —, wie mir es freilich mit manchen Dingen gegangen ist, ohne viele Erwartung davon zu haben, zunächst auf die Seite gelegt, und später völlig vergessen.

Eben in den allerletzten Tagen (richtiger gestern) fiel mir das Buch zufällig in die Hände, und ich fand dann bald mit grossem Vergnügen, dass darin die Quintessenz der Lehre von den Kegelschnitten in nucem gebracht ist, und dass gerade sein barycentrischer Calcul auf dem leichtesten Wege zur Auflösung aller dahin gehörigen Aufgaben führt. Interessant war mir darin auch manches andere beim Blättern sich findende, z. B. der schöne von MAC LAURIN und BRACKENRIDGE gefundene, mir entweder unbekannt gebliebene, oder wieder vergessene Lehrsatz, mit dessen Hülfe sich die Aufgabe, durch 5 gegebene Punkte einen Kegelschnitt zu legen, so zierlich lösen lässt.

Überhaupt verhält es sich mit allen solchen neuen Calculs so, dass man durch sie nichts leisten kann, was nicht auch ohne sie zu leisten wäre; der Vortheil ist aber der, dass, wenn ein solcher Calcul dem innersten Wesen vielfach vorkommender Bedürfnisse correspondirt, jeder, der sich ihn ganz angeeignet hat, auch ohne die gleichsam unbewussten Inspirationen des Genies, die niemand erzwingen kann, die dahin gehörigen Aufgaben lösen, ja selbst in so verwickelten Fällen gleichsam mechanisch lösen kann, wo ohne eine solche Hülfe auch das Genie ohnmächtig wird. So ist es mit der Erfindung der Buchstabenrechnung überhaupt; so mit der Differentialrechnung gewesen; so ist es auch (wenn auch in partielleren Sphären) mit Lagranges Variationsrechnung, mit meiner Congruenzenrechnung und mit Möbius' Calcul. Es werden durch solche Conceptionen unzählige Aufgaben, die sonst vereinzelt stehen, und jedesmal neue Efforts (kleinere oder grössere) des Erfindungsgeistes erfordern, gleichsam zu einem organischen Reiche. . . . .

[II.]

[DER BARYCENTRISCHE CALCUL UND DER RESULTANTENCALCUL.]

[1.]

Der barycentrische Calcul findet sein Gegenstück in einem andern (vermuthlich noch umfassendern) Calcul, den man den Resultantencalcul nennen könnte. So wie der erste sich mit Punkten beschäftigt, in denen man schwere Massen voraussetzt; so würde letzterer zum Gegenstande haben Linien, in welchen Kräfte wirken. Sind a, b, c, d u. s. w. solche Linien, in denen, in jeder in bestimmtem Sinn, Kräfte wirken, die den Zahlen α, β, γ, δ u. s. w. proportional sind, so würde die Gleichung

$$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d+\text{u. s. w.} = 0$$

bedeuten, dass diese Kräfte einander das Gleichgewicht halten.

[2.]

Man kann, wenn B, C zwei Punkte in a sind, ganz füglich $B-C = ai$ setzen.

[3.]

Es fragt sich nun hauptsächlich, was für Kräfte man, barycentrisch auf die Winkelpunkte, oder resultantisch auf die Seiten des Pentagons appliciren müsse, damit zwischen ihnen und ihren Äquivalenten am innern Pentagon möglichst einfache Verhältnisse Statt finden.

[4.]

Die Collinearität zweier Systeme von Punkten oder geraden Linien ist wohl am treffendsten dadurch zu definiren, dass immer zwischen je 5 Punkten (Linien) des einen Systems und den 5 correspondirenden des andern sich einerlei Lineargleichung aufstellen lässt.

[5.]

Das Characteristische der Collineation scheint am einfachsten so ausgedrückt werden zu können:

Es seien $A, B\ldots$ gerade Linien, $P, Q\ldots$ Punkte des einen Systems, denen im andern die Linien $a, b\ldots$ und die Punkte $p, q\ldots$ entsprechen. Drückt man nun durch PA den (senkrechten) Abstand des Punktes P von der geraden Linie A aus, so wird allgemein

$$\frac{PA.QB.pb.qa}{pa.qb.PB.QA} = 1.$$

BEMERKUNGEN.

Auf die in dem Briefe vom 12. Mai 1843 erwähnten Untersuchungen bezieht sich die Notiz: *Zur Theorie der Kegelschnitte*, die aus dem Nachlass in der folgenden Abtheilung: Verwendung complexer Grössen für die Geometrie S. 341 bis 344 dieses Bandes abgedruckt ist.

Gauss' Lösung der von Möbius gestellten geometrischen Aufgabe hat Schumacher in den Astronomischen Nachrichten No. 42, 1823 November veröffentlicht; sie ist wiederabgedruckt in Bd. IV. S. 406—407.

Die Notiz [II] steht auf einem einzelnen Blatte; sie stammt wahrscheinlich aus derselben Zeit, wie die unter [I] abgedruckten Briefstellen. Gauss hat den barycentrischen Calcul, wie unter [3] angedeutet, insbesondere auf die Theorie des Fünfecks angewandt. Die betreffenden Entwicklungen, die mit dem Pentagramma mirificum in Zusammenhang stehen, findet man unter dem Titel: *Weitere Fragmente über das Pentagramma mirificum* No. 11, S. 109 bis 111 dieses Bandes (vergl. auch die zugehörigen Bemerkungen Frickes, S. 117). Auch auf die Notiz: *Beziehung der Raumverhältnisse auf ein gegebenes Tetraeder*, Bd. II. S. 307 bis 308 möge hingewiesen werden; sie stammt wahrscheinlich schon aus dem Juli 1831.

Stäckel.

VERWENDUNG COMPLEXER GRÖSSEN FÜR DIE GEOMETRIE.

NACHTRÄGE ZU BAND IV.

NACHLASS UND BRIEFWECHSEL.

[DAS DREIECK.]

Die Aufgabe, die Lage eines Punktes aus dem bekannten Verhältniss seiner Abstände von dreien der Lage nach bekannten Punkten zu finden.

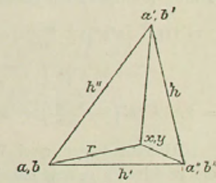
Coordinaten der gegebenen Punkte $\left\{\begin{matrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{matrix}\right\}$; des unbekannten $\left\{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\}$; Verhältniss der drei Abstände wie m, m', m''.

Erste Auflösungsart.

Man mache

$$a''-a' = h\cos A, \qquad a-a'' = h'\cos A', \qquad a'-a = h''\cos A''$$
$$b''-b' = h\sin A, \qquad b-b'' = h'\sin A', \qquad b'-b = h''\sin A''$$

und nehme an



$$x = a+r\cos\varphi$$
$$y = b+r\sin\varphi.$$

So hat man die Gleichungen:

$$rr-2rh''\cos(\varphi-A'')+h''h'' = \frac{rrm'm'}{mm}$$
$$rr+2rh'\cos(\varphi-A')+h'h' = \frac{rrm''m''}{mm}.$$

[Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit

$$\frac{h'h'}{rr},$$

die zweite mit

$$\frac{h''h''}{rr},$$

so ergibt sich durch Subtraction, indem man die Identitäten

$$\frac{h}{\sin(A''-A')} = \frac{h'}{\sin(A-A'')} = \frac{h''}{\sin(A'-A)}$$

und

$$\sin(A-A')\cos(\varphi-A')+\sin(A''-A)\cos(\varphi-A'')$$
$$= \sin(A''-A')\cos(\varphi+A-A'-A'')$$

zu Hülfe nimmt, die Gleichung:]

$$\text{I.}\quad \left\{h''h''\left(1-\frac{m''m''}{mm}\right)-h'h'\left(1-\frac{m'm'}{mm}\right)\right\}r = 2hh'h''\cos(\varphi+A-A'-A'').$$

[Multiplicirt man ferner die erste jener Gleichungen mit

$$1-\frac{m''m''}{mm},$$

die zweite mit

$$1-\frac{m'm'}{mm},$$

so ergibt sich durch Subtraction die Gleichung:]

$$\text{II.}\quad \left\{h''h''\left(1-\frac{m''m''}{mm}\right)-h'h'\left(1-\frac{m'm'}{mm}\right)\right\}$$
$$= 2r\left\{h''\left(1-\frac{m''m''}{mm}\right)\cos(\varphi-A'')+h'\left(1-\frac{m'm'}{mm}\right)\cos(\varphi-A')\right\}$$
$$= -\frac{2r}{mm}\{mmh\cos(\varphi-A)+m'm'h'\cos(\varphi-A')+m''m''h''\cos(\varphi-A'')\}.$$

Durch Multiplication entsteht also:

$$\text{III.}\quad \left\{h''h''\left(1-\frac{m''m''}{mm}\right)-h'h'\left(1-\frac{m'm'}{mm}\right)\right\}^2$$
$$-2hh'h''\left\{h''\left(1-\frac{m''m''}{mm}\right)\cos(A-A')+h'\left(1-\frac{m'm'}{mm}\right)\cos(A-A'')\right\}$$
$$= 2hh'h''\left\{h''\left(1-\frac{m''m''}{mm}\right)\cos(2\varphi+A-A'-2A'')+h'\left(1-\frac{m'm'}{mm}\right)\cos(2\varphi+A-2A'-A'')\right\}.$$

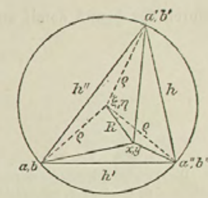
Hieraus folgen zwei Werthe für 2φ und eben so viele für φ, die in I. ein positives r geben, mithin zwei Auflösungen unsrer Gleichung.

Die zweite Auflösungsart.

Es seien ξ, η [die] Coordinaten des Mittelpunkts des durch die drei Punkte gelegten Kreises, ρ dessen Halbmesser. Man mache, wie vorhin

$$a''-a' = h\cos A,\qquad a-a'' = h'\cos A',\qquad a'-a = h''\cos A'',$$
$$b''-b' = h\sin A,\qquad b-b'' = h'\sin A',\qquad b'-b = h''\sin A''.$$

Man hat dann



$$\xi = a+\rho\sin(A'+A''-A)$$
$$= a'+\rho\sin(A''+A-A')$$
$$= a''+\rho\sin(A+A'-A''),$$
$$\eta = b-\rho\cos(A'+A''-A)$$
$$= b'-\rho\cos(A''+A-A')$$
$$= b''-\rho\cos(A+A'-A''),$$

$$\rho = \frac{h}{\sin(A''-A')} = \frac{h'}{\sin(A-A'')} = \frac{h''}{\sin(A'-A)}.$$

Man nehme ferner an

$$x = \xi+R\cos\psi,\qquad y = \eta+R\sin\psi;$$

so findet man:

$$\frac{RR+\rho\rho-2R\rho\sin(\psi+A-A'-A'')}{mm}$$
$$= \frac{RR+\rho\rho-2R\rho\sin(\psi+A'-A''-A)}{m'm'}$$
$$= \frac{RR+\rho\rho-2R\rho\sin(\psi+A''-A-A')}{m''m''}$$
$$= \Delta.$$

Hieraus wird

$$\text{I.}\quad RR+\rho\rho = \frac{mm\sin(2A''-2A')+m'm'\sin(2A-2A'')+m''m''\sin(2A'-2A)}{4\sin(A''-A')\sin(A''-A)\sin(A'-A)}\Delta,$$

$$\text{II.}\quad 2R\rho\cos\psi = \frac{mmh\sin A+m'm'h'\sin A'+m''m''h''\sin A''}{\sin(A'+A''-A)h\sin A+\sin(A''+A-A')h'\sin A'+\sin(A+A'-A'')h''\sin A''}\Delta$$

[und

$$\text{III.}\quad -2R\rho\sin\psi = \frac{mmh\cos A+m'm'h'\cos A'+m''m''h''\cos A''}{\cos(A'+A''-A)h\cos A+\cos(A''+A-A')h'\cos A'+\cos(A+A'-A'')h''\cos A''}\Delta.$$

Da nun die Nenner in II. und III. beide denselben Werth, nemlich

$$\tfrac{1}{2}\rho\{\sin(2A-2A')+\sin(2A'-2A'')+\sin(2A''-2A)\},$$

haben, so ergibt sich aus diesen Gleichungen durch Division:

$$\operatorname{tg}\psi = -\frac{mmh\cos A + m'm'h'\cos A' + m''m''h''\cos A''}{mmh\sin A + m'm'h'\sin A' + m''m''h''\sin A''},$$

wodurch für ψ und damit auch für R zwei Werthe folgen.]

BEMERKUNG.

Die vorstehende Notiz, die sich in einem Handbuche findet und vermuthlich aus dem Jahre 1816 stammt, ist sehr flüchtig geschrieben, sodass zahlreiche Schreibfehler in den Formeln verbessert werden mussten. Sie bricht bei der Formel II der zweiten Auflösungsart ab, bei der, was im Druck nicht ersichtlich gemacht werden konnte, der Nenner und der Factor Δ ergänzt werden mussten. Der Deutlichkeit wegen sind dem Texte zwei Figuren hinzugefügt worden.

Es ist anzunehmen, dass GAUSS seine Auflösungen gefunden hat, indem er von der Darstellung der Ecken des Dreiecks durch complexe Grössen ausging, denn hierbei ergeben sich genau die Formeln des Textes, wenn man darin die Paare von Gleichungen, die den Cosinus und den Sinus desselben Winkels enthalten, mittelst des Symboles i immer in eine einzige Gleichung zusammenfasst. Dass GAUSS die Darstellung der Punkte einer Ebene durch complexe Grössen schon früh bei geometrischen Aufgaben benutzt hat, zeigt zum Beispiel die auf der folgenden Seite abgedruckte Notiz über die Construction der POTHENOTschen Aufgabe, sowie eine handschriftliche Bemerkung zu SCHUMACHERS Übersetzung der *Geometrie der Stellung* von CARNOT aus dem Jahre 1810, die sich ebenfalls auf die Geometrie des Dreiecks bezieht und bereits Bd. IV. S. 396 bis 397 Platz gefunden hat.

STÄCKEL.

[POTHENOTS AUFGABE UND DAS VIERECK.]

[I.]

[CONSTRUCTION DER POTHENOTSCHEN AUFGABE.]

[1.]

Es werden drei Punkte a, b, c durch die eben so bezeichneten complexen Zahlen dargestellt, es seien ferner α, β, γ drei complexe Zahlen, so dass

$$\alpha+\beta+\gamma = 0.$$

Man mache

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta b + \gamma c &= 0 \\ \alpha a + \beta B + \gamma c &= 0 \\ \alpha a + \beta b + \gamma C &= 0, \end{aligned}$$

und A, B, C seien die Punkte, denen die complexen Zahlen A, B, C entsprechen. Dann schneiden sich aA, bB, cC in Einem Punkte P und dieser ist die Auflösung von POTHENOTS Aufgabe.

Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die in P beobachteten (nicht orientirten) Azimuthe, so verhalten sich

$$\alpha e^{i\mathfrak{A}}, \qquad \beta e^{i\mathfrak{B}}, \qquad \gamma e^{i\mathfrak{C}}$$

wie reelle Zahlen.

BEMERKUNG.

Diese Notiz hat GAUSS auf der innern Seite des hintern Deckels seines Exemplars des Werkes: CARNOT, *Geometrie der Stellung*. Übersetzt von SCHUMACHER. Bd. II. Altona 1810 eingetragen.

STÄCKEL.

[2.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 7. November 1830.

.... Über die vier merkwürdigen Punkte im Dreieck habe ich selbst nie etwas bekannt gemacht. Was ich jedoch 1808 darüber Schumacher mitgetheilt habe, hat dieser im Anhange zu seiner Übersetzung von Carnot, Géométrie de position, zweiter Bd., welcher 1810 erschienen ist, drucken lassen. Ich zweifle fast, dass der Punkt, welcher sich nach dem von Ihnen angeführten Satze ergibt, besonders elegante Relationen zu den übrigen darbieten wird, und zwar deshalb, weil jenes Theorem nur ein ganz specieller Fall eines viel allgemeinern ist.

Wenn man nemlich an die Seiten eines gegebenen Dreiecks ABC drei andere $AB\gamma$, $\mathfrak{a}BC$, $AC\beta$ legt (entweder alle drei an die äussere oder alle drei an die innere Seite des Dreiecks ABC gelegt), die jedes einem zweiten gegebenen Dreieck abc ähnlich sind, und zwar dergestalt, dass sie auch ähnlich liegend und die Winkel an α, β, γ denen an a, b, c gleich werden, so schneiden sich die Linien $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ (nöthigenfalls vorwärts oder rückwärts fortgesetzt) in Einem Punkte D und die Winkel an D (ADB, BDC, CDA) sind denen an γ, α, β entweder selbst oder ihren Nebenwinkeln gleich und ähnlich liegend.

Offenbar ist diess die zierlichste Construction der Pothenot'schen Aufgabe; wo man aber in der Praxis sich begnügen kann, nur Einen Punkt z. B. α zu construiren und den Messtisch nach der Linie $A\alpha$ zu orientiren. Wie ich von meinem Sohne höre, ist letztere Manier unter dem Namen der Schulz-Montanus'schen bekannt. ....

[II.]

[DIE PHYSISCHE MÖGLICHKEIT DER DATEN IN POTHENOTS AUFGABE.]

[1.]

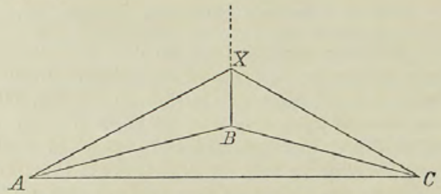
Gauss an Schumacher. Göttingen, 13. April 1836.

.... Bei dieser Gelegenheit will ich doch auch einer andern Aufgabe erwähnen, nemlich der sogenannten Pothenotschen. Wenn drei Punkte A, B, C gegeben sind, und zugleich die Winkel, die XA, XB, XC unter einander machen (natürlich inclusive des *sens*, d. i. ob die Winkel von der linken nach der rechten [Seite] oder umgekehrt gezählt sind), so ist X (allgemein zu reden, d. i. mit Ausnahme des Falls, wo A, B, C, X auf Einem Kreise liegen) bestimmt. Gründen sich die Data auf einen wirklichen concreten Fall, so versteht sich von selbst, dass die Aufgabe, weil wirklich, auch möglich ist. Aber wenn jemand (um Sie aufs Eis zu führen) Ihnen bloss die Zahlen aufgibt, so kann sich hinterher ergeben, dass die Aufgabe physisch unmöglich ist, und dass Sie statt einer der drei Richtungen die entgegengesetzte erhalten (180° verschieden von der aufgegebenen).

Die Frage ist nun, wie man am einfachsten die Bedingung der physischen Möglichkeit durch eine Gleichung zwischen den Datis ausdrücken kann? Ich habe, mich verwundernd, dass bei einer Aufgabe, worüber so viel geschrieben ist, doch von allen, so viel ich weiss, ein so wesentlicher Umstand ganz übersehen ist, — die Auflösung oft in meinen Vorlesungen vorgetragen. Aber so ganz leicht muss sie doch wohl nicht zu finden sein; wenigstens habe ich einmal einem sonst sehr geschickten jungen Mann (dem sie von mir nicht vorgetragen war) sie als Thema einer Doctordissertation vorgeschlagen, und der hatte, obgleich er sich lange damit gequält, die Auflösung nicht finden können. ....

Gauss an Schumacher. Göttingen, 21. April 1836.

. . . . . . Um ein Beispiel zu haben, wo Pothenots Aufgabe physisch (i. e. optisch) unmöglich ist, nehmen Sie an, die drei Richtungen sollen, dem Verlangen nach, Winkel von 120^0 unter einander machen, was allemal unmöglich wird, sobald die drei Punkte ein Dreieck bilden, worin ein stumpfer Winkel grösser als 120^0 ist.



Hier würde Ihnen die Rechnung den Punkt X geben, der aber nur passt, wenn Sie statt der Richtung XB die entgegengesetzte nehmen.

Gauss an Schumacher. Göttingen, 23. April 1836.

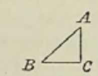
. . . . Gleich nach Absendung meines letzten Briefes dachte ich doch, dass der hinterher eingelegte Zettel [*)] Sie wohl eher verwirren, als das in dem Briefe angezogene ohne weiteres verständliche Beispiel weiter erklären würde. Ich hatte nicht gehörig bedacht, dass erstlich das allgemeine auf dem Zettel ausgesprochene Theorem, um vollkommen richtig aufgefasst zu werden, wohl noch einiger erläuternder Bemerkungen bedürfen möchte. Zweitens, dass gerade der Fall des gleichseitigen Dreiecks ohne solche erläuternde Bemerkungen

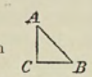
[*) Dieser Zettel fehlt. In seiner Antwort vom 26. April 1836 bemerkt Schumacher, dass er in dem Briefe keine Einlage vorgefunden habe.]

am leichtesten missverstanden werden kann. Drittens hätte auch hier ausdrücklich in Beziehung auf das Beispiel eine literirte Figur beigefügt werden müssen. Und viertens glaube ich sogar einen Schreibfehler begangen und anstatt $60^0+60^0 = 120^0$ geschrieben zu haben $30^0+30^0 = 60^0$. Wollte ich nun diese 3 oder 4 Punkte alle und ganz aufklären, so würde dazu ein längerer Brief nöthig sein, als ich heute schreiben kann. Einstweilen ignoriren Sie also das Beispiel mit dem gleichseitigen Dreieck ganz (was ich übrigens, wenn es der Mühe werth scheinen sollte, zu einer andern Zeit zu erklären gern erbötig bin). Dagegen will ich heute zu weiterer Verständigung über das allgemeine Theorem das Nöthige beifügen.

Vor allem aber muss ich, um jedes Missverständniss darüber auszuschliessen, ausdrücklich bemerken, was die Data des Pothenotschen Problems nothwendig enthalten müssen:

1) müssen die drei gegebenen Punkte, wenigstens ihrer gegenseitigen Lage nach, vollkommen bestimmt sein, so dass über das Rechts- oder Linksliegen keine Zweideutigkeit ist. Es ist also z. B. nicht zureichend, die Grösse der Winkel zu kennen, sondern auch ihre Lage; also z. B. nicht bloss $A = 45^0$, $B = 45^0$, $C = 90^0$, weil so das Dreieck

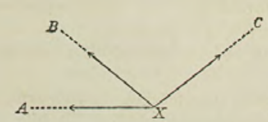


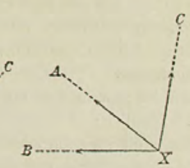
nicht von


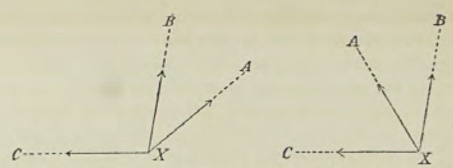
unterschieden würde.

2) wird dieselbe vollständige Bestimmtheit für die Winkel an dem gesuchten Punkte X erfordert.

Es ist also z. B. nicht zureichend zu sagen, dass in X der Winkel zwischen A und B 40^0, zwischen B und C 100^0 sein soll, weil sonst







die Fälle nicht gehörig unterschieden würden, oder, mit andern Worten, weil man sonst nicht Ein Problem, sondern auf einmal vier verschiedene aufgeben würde.

Diess wohlverstanden, sind nun alle bisherigen Behandlungen des Problems in so fern unvollständig, als sie keine allgemeine Regel angeben, wonach man vorgegebenen Datis gleich ansehen kann, ob sie zusammen bestehen können oder nicht. Auch ohne bloss vom theoretischen Standpunkt auszugehen, scheint eine Ergänzung dieses Mangels praktisch wünschenswerth, weil ja Data, die sich auf einen wirklichen Fall in concreto beziehen sollen, wenn auch nicht durch Neckerei, doch durch grobe Schreibfehler und Irrthum entstellt sein können, deren Dasein sogleich in vielen Fällen erkennen zu können, doch auch dem blossen Praktiker werth sein muss.

Allgemeine Regel verstehe ich so, dass man nicht für jeden speciellen Fall eine eigene rohe Zeichnung machen soll. Denn wenn man das thun will, so wird es jedesmal eben nicht schwer sein, über Möglichkeit oder Unmöglichkeit zu urtheilen.

Das eben wird aber verlangt, dass Alle Fälle in Einer allgemeinen Regel befasst werden sollen.

Sie schienen zu glauben, dass solche physische Unmöglichkeit oder Unvereinbarkeit eben nur einzelne, vielleicht seltene, Fälle trifft, das ist aber nicht so, sondern (abstrahirt von einer gewussten richtigen Beziehung auf einen wirklichen Fall in concreto) gibt es dreimal so viel unmögliche als mögliche Combinationen.

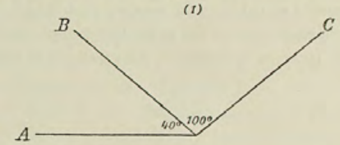
Das eben ist nun in dem allgemeinen Satz enthalten, welcher auf dem Zettel steht. Nemlich:

»Wenn die vorgeschriebenen Data möglich sind, so werden sie durch Abänderung einer der drei Richtungen (XA, XB, XC) in die entgegengesetzte (um 180^0 verschieden) sogleich unmöglich«.

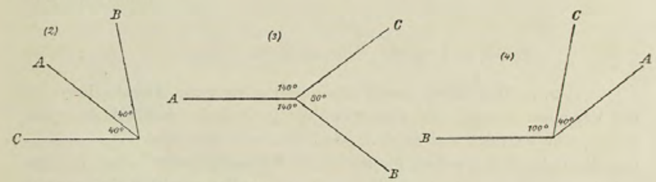
Derselbe Satz ist übrigens auch umgekehrt wahr, die unverträglichen Data werden verträglich, wenn man Eine der drei Richtungen in die entgegengesetzte abändert, nur ist hier die abzuändernde nicht mehr willkürlich.

Wenn also z. B. unter den obigen vier Zeichnungen die erste (für ein bestimmtes gegebenes Dreieck ABC) möglich ist, nemlich

(1)



möglich, so sind



alle unmöglich. Es entsteht hier

2 aus 1, indem ich für C		
3 aus 1, „ „ „ B	die entgegengesetzte Richtung nehme.	
4 aus 1, „ „ „ A		

Umgekehrt hingegen, wenn (1) unmöglich ist, so ist Eine der drei (2), (3), (4) möglich, und eo ipso die beiden andern unmöglich.

Wenn die Data des Problems, gleichsam auf gut Glück, aufgegeben sind, so kann man die Auflösung entweder geometrisch, oder halb geometrisch, halb analytisch (Rechnung mit roher Zeichnung verbindend), oder rein analytisch suchen. In den beiden ersten Fällen erkennt man etwanige Unmöglichkeit im Laufe des Geschäfts von selbst. Aber bei dem letzten Verfahren findet man immer ein Resultat; ob diess aber den vorgegebenen Zahlen entspreche oder einer andern (unter den vier jedesmal zusammengehörigen Variationen), erkennt man dann erst hinterher,

falls man nicht gleich anfangs mein Criterium angewandt hat.

Ich setze das Criterium selbst nicht her, um Ihnen das Vergnügen, es selbst zu finden, nicht zu rauben. Jedenfalls hoffe ich durch das Vorstehende hinlänglich klar gemacht zu haben, von was es sich handelt. Übrigens ist wohl unnöthig, zu bemerken, dass der ganze Gegenstand höchst elementarisch ist. Nur ist um so mehr zu verwundern, dass man ihn so ganz übersehen hat. . . . .

[2.]

Gauss an Gerling. Göttingen, 24. October 1840.

. . . . Ihre kleine Schrift über die Pothenotsche Aufgabe habe ich mit Vergnügen gelesen; sie wird allen, die die Aufgabe praktisch anwenden wollen, sehr lehrreich und nützlich sein. Ich habe mich aber oft gewundert, dass die vielen Schriftsteller, die sich damit beschäftigt haben, einen in theoretischer Beziehung ganz wesentlichen Theil ganz übergangen haben, nemlich die Angabe der mathematischen Bedingungen, unter denen die Aufgabe physisch möglich ist, und die Darstellung dieser Bedingungen in einer einfachen eleganten Form. Ich mache mich wohl auf folgende Art am leichtesten verständlich.

Die Rechnungsvorschriften auf vorgegebene numerische Data angewandt geben (wenn nicht die vier Punkte in Einem Kreise liegen, wo man $\frac{0}{0}$ erhält) immer Ein einziges bestimmtes Resultat. Aber man erkennt leicht, dass man einerlei Resultat erhält, es möge aufgegeben sein, dass der zweite Punkt von dem ersten um den Winkel A rechts, oder dass er von demselben um 180^0-A links liegt. Eben so beim dritten Punkt. Oder mit andern Worten:

Ist vorgeschrieben, der zweite Punkt solle um A rechts vom ersten liegen, und der dritte um B rechts vom ersten, so findet man ein Resultat, welches dasselbe ist, was man bei drei andern Datis finden würde, nemlich

2 um	180^0+A	rechts von 1		3 um	B	rechts von 1	
„	A	„		„	180^0+B	„	
„	180^0+A	„		„	180^0+B	„	.

Das Resultat selbst aber quadrirt immer nur mit Einem dieser vier Systeme von Datis, und die andern drei sind physisch unmöglich.

Der metaphysische Grund dieser Erscheinung ist, dass man von der beobachteten Richtung weiter nichts benutzt, als dass die geraden Linien gewisse Winkel mit einander machen, indem man diese geraden Linien auf beiden Seiten in indefinitum sich erstrecken lässt, während das Fortschreiten des Lichts nur in Einem bestimmten Sinne geschieht, also die Fälle, wo der Gegenstand rückwärts läge, ausgeschlossen werden müssen.

Zur Vollständigkeit gehört also die Auflösung der Aufgabe, den Datis vor geführter Rechnung gleich anzusehen, ob sie vereinbar sind. Es lässt sich diess sehr zierlich abthun, ich will aber Ihnen nicht vorgreifen, es Sich selbst zu entwickeln. . . . .

Gauss an Gerling. Göttingen, 14. Januar 1842.

. . . . Das Criterium wegen der Pothenotschen Aufgabe theile ich Ihnen zwar gern mit, wünsche jedoch, dass Sie es für Sich behalten, und zwar aus dem Grunde, weil ich das Theorem, womit es zusammenhängt, selbst einmal bei schicklicher Gelegenheit zu behandeln mir vorbehalte, weniger wegen der Eleganz des Theorems an sich, als wegen der Eleganz, welche die Anwendung der complexen Grössen dabei darbietet; also namentlich bei einer Gelegenheit, wo ich mehr von dem Gebrauch der complexen Grössen sagen kann. Würde das Theorem vorher anderweit ins Publicum gebracht, so würde für mich nachher keine Lust mehr bleiben, selbst darauf zurückzukommen. Also jetzt zur Sache.

Man kann das Criterium auf vielfache Weise einkleiden; am zierlichsten wird es sein, es so zu thun, dass alle drei gegebenen Punkte symmetrisch dabei vorkommen. Ich bezeichne also die drei gegebenen Punkte mit 1, 2, 3;

den verlangten mit 0. Ich bezeichne ferner die Neigung der Geraden 12 gegen eine feste L schlechthin mit 12; diese Neigung wird in einem bestimmten Sinn als wachsend betrachtet von 0 bis 360^0 (die Vorstellung zu fixiren denken Sie, L sei der Meridian, und 12 das Azimuth von 2 aus 1 gesehen). Auf ähnliche Weise und auf dieselbe L bezogen, sollen 21, 13, 31, 23, 32 verstanden werden, wo also sich von selbst versteht, dass $21-12 = \pm 180^0$ (oder allgemeiner einem ungeraden Vielfachen von 180^0 gleich). Die Zeichen 01, 02, 03 sollen zwar ähnliche Bedeutung haben, jedoch mit dem Unterschiede, dass sie nicht auf L, sondern auf eine andere ganz willkürliche feste Linie bezogen werden.

Man könnte kurz sagen, 12, 13, 21, 23, 31, 32 sind die wahren Azimuthe der betreffenden Richtungen, hingegen 01, 02, 03 die noch nicht orientirten oder einer noch unbekannten Orientirungscorrection bedürftigen Azimuthe. Es ist unnöthig, zu bemerken, dass hier Azimuth und Meridian bloss zur Fixirung der Vorstellung dienen.

Das Criterium, ob die vorgeschriebenen 6 Grössen (wenn Sie 12 und 21 bloss für Eine zählen) physisch verträglich sind, ist nun dieses:

$$\left.\begin{array}{l}\sin(12-13-02+03)\\ \sin(23-21-03+01)\\ \sin(31-32-01+02)\end{array}\right\}\text{ müssen Einerlei Zeichen haben.}$$

Das vorhin erwähnte, meines Wissens*) bisher unbekannte, in meinem Besitz seit fast einem halben Jahrhundert befindliche Theorem, die Vierecke betreffend, ist folgendes:

$$\frac{\sin(12-13-02+03)}{(01).(23)} = \frac{\sin(23-21-03+01)}{(02).(13)} = \frac{\sin(31-32-01+02)}{(03).(12)},$$

wo die Factoren in den Nennern die durchweg positiv genommenen Abstände zwischen den betreffenden Punkten ausdrücken. Die Ableitung dieses schönen Theorems vermittelst des Gebrauchs der complexen Zahlen hat die höchste Einfachheit. Hier will ich sie bloss andeuten.

*) Sollte ich darin mich irren, und Sie mir nachweisen können, dass das Theorem schon von sonst jemand aufgestellt sei, so werden Sie mich sehr verpflichten.

Wenn (0), (1), (2), (3) die complexen Zahlen sind, die die Lage der Punkte 0, 1, 2, 3 vorstellen (ich kann ohne Zweifel voraussetzen, dass Ihnen das Wesentliche der Theorie der complexen Zahlen gegenwärtig ist, bemerke aber zum Überflusse, dass $x+iy$, d. i. $x+y\sqrt{-1}$, die complexe Zahl ist, die die Lage des Punkts vorstellt, dessen Coordinaten x, y sind); A, B, C hingegen die Punkte, welche durch die complexen Zahlen

$$(0)(1)+(2)(3), \qquad (0)(2)+(1)(3), \qquad (0)(3)+(1)(2)$$

vorgestellt werden, so sind die Seiten des Dreiecks ABC folgende:

$$BC = (01).(23), \qquad AC = (02).(13), \qquad BC = (03).(12),$$

und die äussern Winkel des Dreiecks, oder die Unterschiede der Winkel A, B, C von 180^0, diejenigen, deren Sinus in den obigen Gleichungen vorkommen; die überaus kleine Mühe, diess unmittelbar selbst zu erkennen, will ich Ihnen überlassen. Man kann übrigens dasselbe Theorem fast eben so zierlich geometrisch beweisen. —

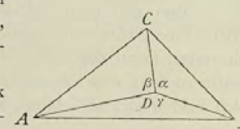
Will man das Theorem selbst, d. i. seinen Inhalt, geometrisch versinnlichen, so muss man die beiden Fälle besonders betrachten, wo die vier Punkte

$$\text{so}\quad\begin{matrix}* & & *\\ & * & \\ & * & \end{matrix}\qquad\text{oder so}\quad\begin{matrix}* & *\\ & \\ * & *\end{matrix}$$

liegen, d. i. wo einer derselben innerhalb des Dreiecks, welches die drei übrigen bilden, liegt, oder wo alle vier ein Viereck ohne einspringende Winkel bilden.

Im ersten Fall lässt sich das Theorem so enunciiren.

Theorem: In einem Dreieck, dessen Seiten $AD\times BC$, $BD\times AC$, $CD\times AB$ sind, sind die diesen gegenüberstehenden Winkel respective $\alpha-A$, $\beta-B$, $\gamma-C$.



Für den zweiten Fall ist der Ausdruck ein ganz ähnlicher, den ich Kürze halber übergehe.

Um noch einmal auf das Criterium zurückzukommen, bemerke ich, dass das obige Criterium in so fern nicht ganz allgemein ist, als es stillschweigend voraussetzt, dass keiner der betreffenden Sinus $= 0$ ist. Zur Vervollständigung müsste noch beigefügt werden:

1) ist Einer der drei Sinus $= 0$, z. B. der erste, aber keiner der beiden andern, so fällt 0 mit 1 zusammen, wo natürlich für die Richtung 01 jeder beliebige Werth genommen werden kann.

2) Sind zwei $= 0$, so wird von selbst auch der dritte $= 0$ (weil die Summe der drei Winkel identisch $= 0$ ist). In diesem Fall ist die Pothenotsche Aufgabe entweder unbestimmt oder physisch unmöglich; das zweite, wenn die Cosinus der Winkel alle drei $= +1$ sind, das erste, wenn zwei Cosinus jeder $= -1$, der dritte $= +1$ ist (die Combinationen $+1, +1, -1$ und $-1, -1, -1$ sind offenbar unmöglich, weil die Summe aller drei Winkel identisch $= 0$ ist).

Schliesslich bemerke ich noch,

1) dass das Criterium sich zierlich ganz allgemein so aussprechen lässt: die Data sind unverträglich, wenn die drei Kreispunkte, die auf der Peripherie eines Kreises von Einerlei Anfangspunkt, in Einerlei Sinn positiv gezählt, um

$$(01)+(23), \qquad (02)+(31), \qquad (03)+(12)$$

abstehen, innerhalb Eines Halbkreises liegen; oder: damit die Data verträglich sein sollen, müssen diese drei Punkte wenigstens Einen vollen Halbkreis umfassen. (Füllen Sie gerade einen Halbkreis,

so ist das Problem unbestimmt.)

2) dass sich noch vielerlei zusetzen liesse, wodurch aber anstatt eines Briefes eine Abhandlung entstehen würde, die zu ordnen und zu schreiben ich vorerst keine Zeit habe. In der Hoffnung, dass Sie in den Andeutungen vielfachen Stoff zum Nachdenken finden, schliesse ich für heute mit der Bitte mich bald wieder mit einigen Zeilen zu erfreuen.

[III.]

DAS VIERECK.

[1.]

[*Handbuch, den astronomischen Wissenschaften gewidmet*, S. 150.]

p, p', p'', p''' die complexen Örter der Punkte (0), (1), (2), (3). Die Betrachtung des Dreiecks, dessen Ecken (4), (5), (6) durch

$$pp'+p''p''', \qquad pp''+p'''p', \qquad pp'''+p'p'',$$

dessen Seiten [65, 46, 54] ihrer Grösse und Richtung nach aus den Differenzen

$$(p-p')(p''-p'''), \qquad (p-p'')(p'''-p'), \qquad (p-p''')(p'-p'')$$

erkannt werden, also

65:	Grösse	(01).(23)	Richtung	01 + 23
46:	„	(02).(31)	„	02 + 31
54:	„	(03).(12)	„	03 + 12,

gibt die Gleichungen (s. p. 201 und p. 269 [des Handbuchs])

$$\frac{\sin(02+31-03-12)}{(01).(23)} = \frac{\sin(03+12-01-23)}{(02).(31)} = \frac{\sin(01+23-02-31)}{(03).(12)} = \Omega.$$

Man findet ferner leicht (s. pag. 284 [des Handbuchs]) aus der Entwickelung eines dieser Ausdrücke:

$$\Omega = \frac{(01)\sin(03-02)+(02)\sin(01-03)+(03)\sin(02-01)}{(12).(13).(23)}.$$

Bezeichnet man Ω, in so fern es von obigen bestimmten Elementen abhängt, durch Ω^{0123}; so ist, wenn (1), (2), (3), (4) feste Punkte und (0) einen beweglichen Punkt bedeuten, die Orientirung auch als veränderlich betrachtet, die Bedingungsgleichung zwischen den Differentialien:

$$\left.\begin{array}{r} (01).(23).(24).(34).\Omega^{0234}d(01) \\ -(02).(13).(14).(34).\Omega^{0134}d(02) \\ +(03).(12).(14).(24).\Omega^{0124}d(03) \\ -(04).(12).(13).(23).\Omega^{0123}d(04) \end{array}\right\} = 0.$$

[2.]

[*Handbuch*, S. 284.]

Die Seite 150 [des Handbuchs] erwähnte Entwickelung ist folgende. Der erste Ausdruck wird

$$= \frac{1}{(01)(23)}\{\sin(02-12)\cos(31-03)+\sin(31-03)\cos(02-12)\}.$$

Es ist aber

$$(12)\sin(02-12) = (01)\sin(01-02)$$
$$(13)\sin(31-03) = (01)\sin(01-03),$$

also

$$\Omega = \frac{1}{(12)(13)(23)}\{(13)\sin(01-02)\cos(31-03)+(12)\sin(01-03)\cos(02-12)\}.$$

Ferner ist

$$(13)\cos(31-03) = (01)\cos(01-03)-(03)$$
$$(12)\cos(02-12) = (02)-(01)\cos(01-02).$$

Also

$$\Omega = \frac{1}{(12)(13)(23)}\left\{\begin{matrix}(01)[\sin(01-02)\cos(01-03)-\sin(01-03)\cos(01-02)] \\ +(02)\sin(01-03)-(03)\sin(01-02)\end{matrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{(12)(13)(23)}\{(01)\sin(03-02)+(02)\sin(01-03)+(03)\sin(02-01)\}.$$

W. Z. B. W.

[3.]

[*Handbuch*, S. 201.]

Die Ableitung der oben S. 150 [des Handbuchs] stehenden Sätze das Viereck betreffend kann einfacher so geschehen.

Die complexen Grössen p^0, p', p'', p''' bezeichnen wie dort die vier Punkte, die Adjuncten dieser Grössen seien P^0, P', P'', P'''.

Man setze Kürze halber

$$(p''-p^0)(p'''-p^0) = a$$
$$(p'''-p^0)(p'-p^0) = b$$
$$(p'-p^0)(p''-p^0) = c$$

und die Adjuncten dieser Grössen $= A, B, C$.

Man setze

$$1)\quad Q = aB+bC+cA-Ab-Bc-Ca,$$

also auch (identisch)

$$2)\quad Q = (a-b)(A-C)-(A-B)(a-c)$$
$$3)\quad Q = (b-c)(B-A)-(B-C)(b-a)$$
$$4)\quad Q = (c-a)(C-B)-(C-A)(c-b).$$

Angewandt auf unsern Fall gibt

$$\begin{aligned}(1)\quad Q = {}& (p'''-p^0)(P'''-P^0)\{(p''-p^0)(P'-P^0)-(P''-P^0)(p'-p^0)\} \\ &+(p'-p^0)(P'-P^0)\{(p'''-p^0)(P''-P^0)-(P'''-P^0)(p''-p^0)\} \\ &+(p''-p^0)(P''-P^0)\{(p'-p^0)(P'''-P^0)-(P'-P^0)(p'''-p^0)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\quad Q = {}&(p'''-p^0)(p''-p')(P''-P^0)(P'''-P') \\ &-(P'''-P^0)(P''-P')(p''-p^0)(p'''-p'),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\quad Q = {}&(p'-p^0)(p'''-p'')(P'''-P^0)(P'-P'') \\ &-(P'-P^0)(P'''-P'')(p'''-p^0)(p'-p''),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4)\quad Q = {}&(p''-p^0)(p'-p''')(P'-P^0)(P''-P''') \\ &-(P''-P^0)(P'-P''')(p'-p^0)(p''-p'''),\end{aligned}$$

woraus alles leicht von selbst folgt.

Offenbar kann man unbeschadet der Allgemeinheit von Anfang an $p^0 = 0$ setzen, wodurch die Entwickelung noch viel kürzer wird.

[4.]

[*Handbuch*, S. 203.]

Die Auflösung der Pothenotschen Aufgabe beruht auf den drei Gleichungen

$$\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{\alpha}\cdot x'-\frac{\alpha' a'+\beta' b'+\gamma' c'}{\alpha'}\cdot x-\frac{\beta b+\gamma c}{\alpha}\cdot a'+\frac{\beta' b'+\gamma' c'}{\alpha'}\cdot a=0$$
$$\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{\beta}\cdot x'-\frac{\alpha' a'+\beta' b'+\gamma' c'}{\beta'}\cdot x-\frac{\alpha a+\gamma c}{\beta}\cdot b'+\frac{\alpha' a'+\gamma' c'}{\beta'}\cdot b=0$$
$$\frac{\alpha a+\beta b+\gamma c}{\gamma}\cdot x'-\frac{\alpha' a'+\beta' b'+\gamma' c'}{\gamma'}\cdot x-\frac{\alpha a+\beta b}{\gamma}\cdot c'+\frac{\alpha' a'+\beta' b'}{\gamma'}\cdot c=0,$$

wovon jede schon in den beiden andern enthalten ist. Also

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=\omega \quad [\text{und} \quad a'\alpha'+b'\beta'+c'\gamma'=\omega']$$

gesetzt:

$$\left(\frac{\beta}{\beta'}-\frac{\gamma}{\gamma'}\right)\omega' x+(b'-c')\,\omega-\left(\frac{\beta b}{\beta'}-\frac{\gamma c}{\gamma'}\right)\omega'=0$$
$$\left(\frac{\gamma}{\gamma'}-\frac{\alpha}{\alpha'}\right)\omega' x+(c'-a')\,\omega-\left(\frac{\gamma c}{\gamma'}-\frac{\alpha a}{\alpha'}\right)\omega'=0$$
$$\left(\frac{\alpha}{\alpha'}-\frac{\beta}{\beta'}\right)\omega' x+(a'-b')\,\omega-\left(\frac{\alpha a}{\alpha'}-\frac{\beta b}{\beta'}\right)\omega'=0.$$

Noch zierlicher

$$(\alpha\beta'-\beta\alpha')(\alpha' a'+\beta' b'+\gamma' c')\,x+\alpha a\beta'\gamma'(b'-c')+\beta b\alpha'\gamma'(c'-a')+\gamma c\beta'\alpha'(a'-b')=0.$$

Sind A, B, C drei complexe Zahlen, deren Winkel den beobachteten Azimuthen entsprechen, so kann man setzen

$$\alpha = A(BC'-CB')$$
$$\beta = B(CA'-AC')$$
$$\gamma = C(AB'-BA').$$

Die physische Möglichkeit beruht darauf, dass

$$B'C(A-B)(A'-C')-BC'(A'-B')(A-C)$$

mit den beiden andern symmetrisch daraus folgenden Grössen einerlei Zeichen haben [muss].

[5.]

[*Handbuch*, S. 269 bis 271.]

Zusatz zu p. 150 und 201 [des Handbuchs].

In Fig. I sind die vier gegebenen Punkte und die zwischen ihnen gebildeten Verbindungslinien und Winkel mit ihren Bezeichnungen vorgestellt. Fig. II. entsteht, indem man die Winkel 𝔄, 𝔅, ℭ beibehält, aber anstatt der Radien α, β, γ die reciproken $\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha\beta\gamma}{\beta}, \frac{\alpha\beta\gamma}{\gamma}$ annimmt. Die übrigen Bezeichnungen erklären sich von selbst.

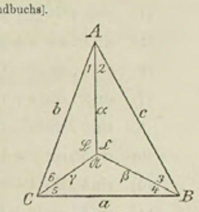


Fig. I.

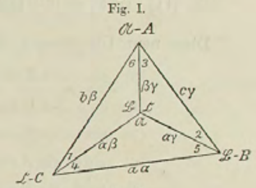


Fig. II.

Man hat

(1) $1+2+3+4+5+6 = 180^0$

(2) $\sin 1 \,.\, \sin 3 \,.\, \sin 5 = \sin 2 \,.\, \sin 4 \,.\, \sin 6.$

Aus (1) folgt

$$\sin(2+3+5) = \sin(1+4+6)$$

oder

$$\sin 1 \,.\, \sin 2 \left\{\begin{matrix} \sin 2\cos 3\cos 5 \\ +\sin 3\cos 2\cos 5 \\ +\sin 5\cos 2\cos 3 \\ -\sin 2\sin 3\sin 5 \end{matrix}\right\} = \sin 1 \,.\, \sin 2 \left\{\begin{matrix} \sin 1\cos 4\cos 6 \\ +\sin 4\cos 1\cos 6 \\ +\sin 6\cos 1\cos 4 \\ -\sin 1\sin 4\sin 6 \end{matrix}\right\}$$

oder indem man

$$\sin 1 \,.\, \sin 3 \,.\, \sin 5 = \sin 2 \,.\, \sin 4 \,.\, \sin 6$$

auf beiden Seiten hinzu addirt:

$$\sin 1 \left\{\begin{matrix} \sin 2^2\cos 3\cos 5 \\ +\sin 2\ \sin 3\cos 2\cos 5 \\ +\sin 2\ \sin 5\cos 2\cos 3 \\ +\cos 2^2\sin 3\sin 5 \end{matrix}\right\} = \sin 2 \left\{\begin{matrix} \sin 1^2\cos 4\cos 5 \\ +\sin 1\ \sin 4\cos 1\cos 6 \\ +\sin 1\ \sin 6\cos 1\cos 4 \\ +\cos 1^2\sin 4\sin 6 \end{matrix}\right\}$$

oder

$$(3)\quad \sin 1 \,.\, \sin(2+3)\sin(2+5) = \sin 2 \,.\, \sin(1+4)\sin(1+6).$$

Auf gleiche Weise oder auch bloss durch Permutation

$$(4)\quad \sin 1 \,.\, \sin(4+3)\sin(4+5) = \sin 4 \,.\, \sin(1+2)\sin(1+6)$$
$$(5)\quad \sin 1 \,.\, \sin(6+3)\sin(6+5) = \sin 6 \,.\, \sin(1+2)\sin(1+4)$$
$$(6)\quad \sin 3 \,.\, \sin(2+1)\sin(2+5) = \sin 2 \,.\, \sin(3+4)\sin(3+6)$$
$$(7)\quad \sin 3 \,.\, \sin(4+1)\sin(4+5) = \sin 4 \,.\, \sin(3+2)\sin(3+6)$$
$$(8)\quad \sin 3 \,.\, \sin(6+1)\sin(6+5) = \sin 6 \,.\, \sin(3+2)\sin(3+4)$$
$$(9)\quad \sin 5 \,.\, \sin(2+1)\sin(2+3) = \sin 2 \,.\, \sin(5+4)\sin(5+6)$$
$$(10)\quad \sin 5 \,.\, \sin(4+1)\sin(4+3) = \sin 4 \,.\, \sin(5+2)\sin(5+6)$$
$$(11)\quad \sin 5 \,.\, \sin(6+1)\sin(6+3) = \sin 6 \,.\, \sin(5+2)\sin(5+4).$$

Diese neun Gleichungen können auch so geschrieben werden:

$$(3)\quad \sin 1 \,.\, \sin\mathfrak{C}\sin(\mathfrak{B}-B) = \sin 2 \,.\, \sin(\mathfrak{C}-C)\sin\mathfrak{B}$$
$$(4)\quad \sin 1 \,.\, \sin B\sin\mathfrak{A} = \sin 4 \,.\, \sin A\sin\mathfrak{B}$$
$$(5)\quad \sin 1 \,.\, \sin(\mathfrak{A}-A)\sin C = \sin 6 \,.\, \sin A\sin(\mathfrak{C}-C)$$
$$(6)\quad \sin 3 \,.\, \sin A\sin(\mathfrak{B}-B) = \sin 2 \,.\, \sin B\sin(\mathfrak{A}-A)$$
$$(7)\quad \sin 3 \,.\, \sin(\mathfrak{C}-C)\sin\mathfrak{A} = \sin 4 \,.\, \sin\mathfrak{C}\sin(\mathfrak{A}-A)$$
$$(8)\quad \sin 3 \,.\, \sin\mathfrak{B}\sin C = \sin 6 \,.\, \sin\mathfrak{C}\sin B$$
$$(9)\quad \sin 5 \,.\, \sin A\sin\mathfrak{C} = \sin 2 \,.\, \sin\mathfrak{A}\sin C$$
$$(10)\quad \sin 5 \,.\, \sin(\mathfrak{C}-C)\sin B = \sin 4 \,.\, \sin(\mathfrak{B}-B)\sin C$$
$$(11)\quad \sin 5 \,.\, \sin\mathfrak{B}\sin(\mathfrak{A}-A) = \sin 6 \,.\, \sin(\mathfrak{B}-B)\sin\mathfrak{A},$$

indem

$$A = 1+2, \qquad B = 3+4, \qquad C = 5+6,$$
$$180^0-\mathfrak{A} = 4+5, \qquad 180^0-\mathfrak{B} = 6+1, \qquad 180^0-\mathfrak{C} = 2+3,$$
$$\mathfrak{A}-A = 3+6, \qquad \mathfrak{B}-B = 2+5, \qquad \mathfrak{C}-C = 1+4$$

ist.

Die Ableitung kann auch aus Betrachtung der Figur geschehen, nemlich

(1) und (2) nach Gefallen aus I oder II

(4), (8), (9) aus I

(3), (7), (11) aus II

(5), (6), (10) aus I und II verbunden.

Jede der Gleichungen (3)—(11) kann zur Auflösung des Pothenotschen Problems dienen, da die zwei Unbekannten, die in jeder Gleichung vorkommen, eine bekannte Summe haben.

Aus Figur II ergeben sich die Viereckgleichungen

$$\frac{\sin(\mathfrak{A}-A)}{a\alpha} = \frac{\sin(\mathfrak{B}-B)}{b\beta} = \frac{\sin(\mathfrak{C}-C)}{c\gamma} = \frac{rr-\rho\rho}{2\alpha\beta\gamma r}$$

von selbst, wenn r Halbmesser des Kreises durch A, B, C, ρ Distanz des vierten Punkts vom Mittelpunkte dieses Kreises; und die Gleichheit der Zeichen von

$$\sin(\mathfrak{A}-A), \qquad \sin(\mathfrak{B}-B), \qquad \sin(\mathfrak{C}-C)$$

ist das Criterium der physischen Möglichkeit der Aufgabe.

Die geometrische Bedeutung der Formeln (2)—(11) kann sehr zierlich an die fünf Kreise geknüpft werden, die resp. durch je drei Punkte von Fig. I oder von Fig. II beschrieben werden und deren Durchmesser p, q, r, s, t sein mögen. Es ist dann

$$\sin A = \frac{a}{p}, \qquad \sin B = \frac{b}{p}, \qquad \sin C = \frac{c}{p},$$
$$\sin\mathfrak{A} = \frac{a}{q}, \qquad \sin 4 = \frac{\gamma}{q}, \qquad \sin 5 = \frac{\beta}{q},$$
$$\sin\mathfrak{B} = \frac{b}{r}, \qquad \sin 6 = \frac{\alpha}{r}, \qquad \sin 1 = \frac{\gamma}{r},$$
$$\sin\mathfrak{C} = \frac{c}{s}, \qquad \sin 2 = \frac{\beta}{s}, \qquad \sin 3 = \frac{\alpha}{s},$$
$$\sin(\mathfrak{A}-A) = \frac{a\alpha}{t}, \qquad \sin(\mathfrak{B}-B) = \frac{b\beta}{t}, \qquad \sin(\mathfrak{C}-C) = \frac{c\gamma}{t}.$$

Durch Substitution dieser Ausdrücke für die 15 Sinus in den 10 Gleichungen (2)—(11) werden diese zu identischen.

Ganz auf dieselbe Weise, wie aus Gleichung (2) die übrigen (3)—(11) identisch folgen, lassen sich auch aus jeder von diesen alle übrigen 9 ableiten. Man braucht z. B. nur die Gleichung (3) in die Form zu setzen

$$\sin(-1)\sin(2+3)\sin(2+5) = \sin(-2)\sin(1+4)\sin(1+6),$$

wo die Grössen

$$-1,\quad 2+3,\quad 2+5;\qquad -2,\quad 1+4,\quad 1+6$$

denselben Bedingungen entsprechen, welche für die Grössen

$$+1,\quad 3,\quad 5;\qquad +2,\quad 4,\quad 6$$

durch die Gleichungen (1), (2) ausgedrückt waren, daher auch alle Folgerungen sich übertragen lassen.

[6.]

[*Handbuch*, S. 278 bis 281.]

NOCH ZUR BEURTHEILUNG DER PHYSISCHEN MÖGLICHKEIT DER DATEN IN POTHENOTS AUFGABE.

$a, b, c,\ \ A, B, C,\ \ \alpha, \beta, \gamma,\ \ \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ haben dieselbe Bedeutung wie oben. Nemlich

- a, b, c Seiten;
- A, B, C Winkel des aus den gegebenen Punkten (1), (2), (3) gebildeten Dreiecks, dessen Radius $= r$;
- $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ Entfernungen des gesuchten Punkts (0) von A, B, C und dem Mittelpunkt jenes Kreises;
- $\mathfrak{A}$ Winkel von 02 nach 03, eben so gemessen wie A von 12 nach 13 (d. i. beide von Rechts nach Links oder beide umgekehrt), ebenso $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$.

Es ist dann, wie schon p. 270 [des Handbuchs] bemerkt ist:

$$\frac{\sin(\mathfrak{A}-A)}{a\alpha} = \frac{\sin(\mathfrak{B}-B)}{b\beta} = \frac{\sin(\mathfrak{C}-C)}{c\gamma} = \frac{rr-\rho\rho}{2\alpha\beta\gamma r},$$

woraus folgt, dass, je nachdem (0) innerhalb oder ausserhalb jenes Kreises liegt,

$$\sin(\mathfrak{A}-A),\qquad \sin(\mathfrak{B}-B),\qquad \sin(\mathfrak{C}-C)$$

alle positiv oder negativ werden.

Hieraus ist klar:

I. Haben diese drei Sinus nicht alle gleiche Zeichen, so ist die Aufgabe physisch unmöglich.

In diesem Falle wird also der Schnitt der beiden Kreise, die auf b und c mit den Winkeln $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ beschrieben sind, nicht in den vorgeschriebenen Abschnitten liegen, und folglich in keinem von beiden, wenn

$$\sin(\mathfrak{B}-B),\qquad \sin(\mathfrak{C}-C)$$

unter sich gleiche Zeichen haben, aber

$$\sin(\mathfrak{A}-A)$$

das entgegengesetzte. Man wird also anstatt $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}+180^0$ und anstatt $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}+180^0$ an dem Schnittpunkte vorfinden.

II. Jene Bedingung ist aber zur Möglichkeit zureichend. Diess wird so bewiesen:

1) Sind die drei Sinus positiv, so fällt der Schnitt der Kreise auf b und c innerhalb des Kreises durch 1, 2, 3.

Beweis. Gesetzt, er fiele ausserhalb, so müsste daselbst erscheinen $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}+180^0$ anstatt $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}+180^0$ anstatt $\mathfrak{C}$ (damit $\sin(\mathfrak{B}'-B)$ negativ werde und eben so $\sin(\mathfrak{C}'-C)$). Es bleibt aber daselbst der Winkel auf a

$$= 360^0-\mathfrak{B}'-\mathfrak{C}' = 360^0-\mathfrak{B}-\mathfrak{C} = \mathfrak{A}.$$

2) Eben so wird für den Fall, wo die drei Sinus negativ sind, die Absurdität der Voraussetzung, der Schnitt zweier Hülfskreise falle innerhalb des Hauptkreises, bewiesen.

Die Pointe ist, dass $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nothwendig die Summe $= 360^0$ geben müssen (d. i. durch 360^0 divisibel). Die vorgegebenen Werthe haben diese Eigenschaft von selbst. Sind solche unverträglich, so müssen zwei abgeändert werden (um 180^0), damit jene Eigenschaft conservirt bleibe.

Sind b, c die beiden Seiten, auf denen die Hülfskreise errichtet werden, so werden die Bedingungen sich so aussprechen lassen:

$$\sin(\mathfrak{B}-B),\quad \sin(\mathfrak{C}-C)\quad \text{und}\quad \sin(\mathfrak{B}-B+\mathfrak{C}-C)$$

sollen gleiche Zeichen haben.

Sind Werthe von $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ vorgegeben, die diesen Bedingungen, oder einer von ihnen, nicht genügen, so steht fest, dass diese Aufgabe eine physische Unmöglichkeit implicirt.

Umgekehrt, genügen die aufgegebenen Werthe den Bedingungen, so ist die Aufgabe möglich, d. i. die beiden Hülfskreise treffen sich in einem Punkte, der für beide Kreise im geeigneten Abschnitte liegt. Sind nemlich 1) die Zeichen jener Sinus $+ + +$, so kann jener Durchschnitt nicht ausserhalb des Hauptkreises liegen, wo die ersten beiden Sinus negativ, der dritte positiv sein müsste; die beiden ersten Bedingungen würden nemlich erfordern, dass $\mathfrak{B}+180^0$, $\mathfrak{C}+180^0$ an die Stelle von $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ treten, was aber wieder der dritten Bedingung widerspricht. Also liegt jener Durchschnitt innerhalb des Hauptkreises, wo eben die geeigneten Abschnitte liegen.

Auf ähnliche Weise wird 2) für die Zeichen $- - +$ bewiesen, dass der Durchschnitt nur ausserhalb liegen kann, wo dann die geeigneten Abschnitte liegen.

Sind die Zeichen	so liegt der Durchschnitt im geeigneten Abschnitt	im ungeeigneten
$+ + +$	Kreis auf a	[Kreis auf] b, c
$+ - +$	b	a, c
$+ - -$	c	a, b
$- - -$	a	b, c
$- + +$	c	a, b
$- + -$	b	a, c

Die elementarische Construction für das Pothenotsche Problem besteht darin, dass man Punkte in der durch (0) gehenden gegen 10 normalen Geraden bestimmt. Von einem solchen sind die Coordinaten polar relativ gegen (0):

$$\text{Distanz } \frac{(12)}{\sin(02-01)}, \qquad \text{Richtung } 12+90^0-(02-01).$$

Eine andere neue Constructionsart ist die, dass man zunächst nicht den Punkt (0) sucht, sondern einen Punkt (*), der in der Geraden 10 liegt und in der Distanz $(1*) = \frac{1}{(10)}$. Dieser Punkt wird durch Schnitte gerader Linien bestimmt, eine weniger, als von (0) aus Objecte geschnitten sind. Eine dieser

geraden Linien geht durch [den] Punkt, dessen Polarcoordinaten $\frac{1}{(12)}$, 12 sind (nemlich Distanz $\frac{1}{(12)}$, Richtung 12) und macht dort mit (12) den Winkel $02-01$ oder hat Azimuth $21-(02-01)$.

Am elegantesten wird die Construction, wenn man $(12)\times(13)$ anstatt 1 in die Zähler der Brüche setzt.

[7.]

Gegebene Punkte 1, 2, 3; Winkel an denselben A, B, C; Seiten $23 = a$, $31 = b$, $12 = c$; $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ vorgeschriebene Winkel an einem vierten Punkte.

β Kreis, bestehend aus den Abschnitten

β', wo Sehne b unter Winkel $\mathfrak{B}$,

β'', wo diese Sehne unter Winkel $\mathfrak{B} \pm 180^0$ erscheint.

γ Kreis, bestehend aus den Abschnitten

γ', wo Sehne c unter Winkel $\mathfrak{C}$,

γ'', wo Sehne c unter Winkel $\mathfrak{C} \pm 180^0$ erscheint.

Die Kreise schneiden sich in A und D.

In D seien die durch b und c subtendirten Winkel $\mathfrak{B}^*, \mathfrak{C}^*$; die Sinus von $\mathfrak{B}^*-B$, $\mathfrak{C}^*-C$, $\mathfrak{B}^*+\mathfrak{C}^*-B-C$ werden alle drei positiv sein, wenn I) D innerhalb des Kreises durch 1, 2, 3 liegt, alle drei hingegen negativ, wenn II) D ausserhalb dieses Kreises liegt.

In Beziehung auf die Lage von D in den Kreisen β und γ sind vier Fälle möglich. Es liegt D

1) in β' und γ', wo dann $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}$
2) in β'' und γ', wo $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} \pm 180^0$, $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C}$
3) in β' und γ'', wo $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C} \pm 180^0$
4) in β'' und γ'', wo $\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} \pm 180^0$, $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C} \pm 180^0$.

Im Falle 1) ist die Aufgabe physisch möglich, in den drei andern unmöglich.

Die Zeichen von

$$\sin(\mathfrak{B}-B),\qquad \sin(\mathfrak{C}-C),\qquad \sin(\mathfrak{B}+\mathfrak{C}-B-C)$$

werden in den acht möglichen Combinationen diese sein

I 1	$+\,+\,+$	II 1	$-\,-\,-$
I 2	$-\,+\,-$	II 2	$+\,-\,+$
I 3	$+\,-\,-$	II 3	$-\,+\,+$
I 4	$-\,-\,+$	II 4	$+\,+\,-$

Zur physischen Möglichkeit der Aufgabe ist also erforderlich und zureichend, dass die drei Sinus gleiche Zeichen haben.

Hat der erste Sinus ein von den beiden andern abweichendes Zeichen, so (Fall 3) gibt die Construction einen Punkt, der im Kreise γ im ungeeigneten Segmente liegt.

Hat der zweite Sinus ein von den beiden andern verschiedenes Zeichen, so [Fall 2] liegt der durch die Construction gefundene Punkt im ungeeigneten Segmente des Kreises β.

Weicht hingegen der dritte Sinus rücksichtlich des Zeichens von den beiden andern ab, so [Fall 4] liegt der durch die Construction gefundene Punkt in beiden Kreisen β und γ in ungeeigneten Segmenten.

1852 Juli 29.

BEMERKUNGEN.

Die meisten der vorstehenden Notizen sind in einem Handbuche enthalten, nur [7] befindet sich auf einem einzelnen Blatte. Was die Zeit der Abfassung betrifft, so stammt die Notiz [1] aus dem Jahre 1832, während [5] und [6] in das Jahr 1849, [7] in das Jahr 1852 zu setzen ist.

Vom December 1839 bis Ostern 1840 hat Gauss eine Vorlesung über die *Theorie der imaginären Grössen* gehalten, die E. Heine gehört und ausgearbeitet hat. Dieser Ausarbeitung sind die folgenden auf das Viereck bezüglichen Ausführungen entnommen, die zur Erläuterung der unter [III] zusammengestellten Notizen dienen mögen.

Stäckel.

[*Vorlesung über die Theorie der imaginären Grössen.*]

Vom Viereck.

[1.]

Hat man ein Viereck (1), (2), (3), (4), das durch die complexen Zahlen p', p'', p''', p^{IV} bestimmt ist, so lässt sich eine allgemeine Formel vermittelst der Lateralen bestimmen, indem man auf ein Dreieck (I), (II), (III) recurrirt, das daraus auf die alleinig symmetrische Art entstanden ist, wo also die Eckpunkte folgendermassen festgelegt sind:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \text{durch} & p'p''+p'''p^{\mathrm{IV}} \\ \text{(II)} & \text{,,} & p'p'''+p''p^{\mathrm{IV}} \\ \text{(III)} & \text{,,} & p'p^{\mathrm{IV}}+p''p'''. \end{array}$$

Ist z. B. die Complexe, die

$$\begin{array}{llll} & (1) & \text{festlegt} & :\ 2+\sqrt{-1}=p', \\ \text{die} & (2) & \text{,,} & :\ 3=p'', \\ \text{,,} & (3) & \text{,,} & :\ 1+2\sqrt{-1}=p''', \\ \text{,,} & (4) & \text{,,} & :\ 1+3\sqrt{-1}=p^{\mathrm{IV}}, \end{array}$$

so wird

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} & \text{bestimmt durch} & :\ 1+8\sqrt{-1} \\ \text{(II)} & \text{,,}\quad\text{,,} & :\ 3+14\sqrt{-1} \\ \text{(III)} & \text{,,}\quad\text{,,} & :\ 2+13\sqrt{-1}. \end{array}$$

Beziehe ich (II) auf (I), so erhalte ich, indem ich die Complexen, die zu diesen Ecken gehören, von einander abziehe:

$$\text{(II)}-\text{(I)}=p'(p'''-p'')+p^{\mathrm{IV}}(p''-p'''),$$

und ebenso:

$$\begin{aligned} \text{(III)}-\text{(II)} &= p'(p^{\mathrm{IV}}-p''')+p''(p'''-p^{\mathrm{IV}}) \\ \text{(I)}-\text{(III)} &= p'(p''-p^{\mathrm{IV}})+p'''(p^{\mathrm{IV}}-p'') \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} \text{(II)}-\text{(I)} &= (p'-p^{\mathrm{IV}})(p'''-p'') \\ \text{(III)}-\text{(II)} &= (p'-p'')(p^{\mathrm{IV}}-p''') \\ \text{(I)}-\text{(III)} &= (p'-p''')(p''-p^{\mathrm{IV}}). \end{aligned}$$

Beziehe ich die Winkel des Vierecks auf eine feste Axe, und bezeichne z. B. den Winkel, den (4, 1) mit dieser bildet, mit [4, 1], so ist:

$$\begin{aligned} -p^{\mathrm{IV}}+p' &= (4,1)\{\cos[4,1]+i\sin[4,1]\} \\ p'''-p'' &= (3,2)\{\cos[3,2]+i\sin[3,2]\} \end{aligned}$$

etc.

Man hat daher:

$$\begin{aligned} \text{(I, II)} &= (4,1)\,.\,(3,2) \\ \text{(II, III)} &= (2,1)\,.\,(4,3) \\ \text{(III, I)} &= (3,1)\,.\,(4,2). \end{aligned}$$

Ferner, bezeichnen wir z. B. den Winkel, welchen (I, II) mit der festen Axe bildet, mit [I, II], so haben wir:

$$[\mathrm{I, II}] = [4,1] + [3,2]$$
$$[\mathrm{II, III}] = [2,1] + [4,3]$$
$$[\mathrm{III, I}] = [3,1] + [4,2].$$

Folglich haben wir: Es ist der Winkel:

$$\mathrm{II, I, III} = [4,1] + [3,2] - [3,1] - [4,2]$$
$$\mathrm{III, II, I} = [2,1] + [4,3] - [4,1] - [3,2]$$
$$\mathrm{I, III, II} = [3,1] + [4,2] - [2,1] - [4,3].$$

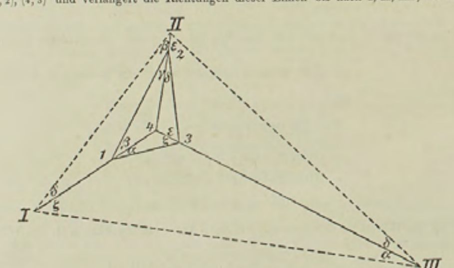
Wendet man also den Satz an, dass sich in einem Dreieck die Seiten verhalten, wie die Sinus der gegenüberliegenden Winkel, so hat man für das ursprüngliche Viereck:

$$\frac{\sin\{[4,1]+[3,2]-[3,1]-4,2]\}}{(2,1)(4,3)} = \frac{\sin\{[2,1]+[4,3]-[4,1]-[3,2]\}}{(3,1)(4,2)} = \frac{\sin\{[3,1]+[4,2]-[2,1]-[4,3]\}}{(4,1)(3,2)}.$$

[2.]

Unser Satz lässt sich ebenso einfach geometrisch beweisen, weshalb wir den letztern Beweis gleichfalls hierher setzen, obgleich er eigentlich nicht in diesen Vortrag gehört.

Wir nehmen zuerst den Fall an, es läge der Punkt 4 innerhalb des Dreiecks 1, 2, 3. Zieht man dann (4, 1), (4, 2), (4, 3) und verlängert die Richtungen dieser Linien bis nach I, II, III, so dass man habe:



$$(4,1) : (4,3) = (4,\mathrm{III}) : (4,\mathrm{I})$$
$$(4,1) : (4,2) = (4,\mathrm{II}) : (4,\mathrm{I}),$$

dann folgt schon von selbst:

$$(4,3) : (4,2) = (4,\mathrm{II}) : (4,\mathrm{III}).$$

Man hat demnach

$$\triangle\,(4,1,3) \sim \triangle\,(4,\mathrm{III},\mathrm{I}),$$

also:

$$(4,1) : (4,\mathrm{III}) = (3,1) : (\mathrm{I,III})$$
$$(4,1) : (4,\mathrm{II}) = (2,1) : (\mathrm{I,II})$$
$$(4,3) : (4,\mathrm{II}) = (2,3) : (\mathrm{III,II}).$$

Die beiden letzten Gleichungen geben durch Division:

(1) $$(4,1) : (4,3) = \frac{(2,1)}{(2,3)} : \frac{(\mathrm{I,II})}{(\mathrm{III,II})} = \frac{(2,1)}{(3,2)} : \frac{(\mathrm{I,II})}{(\mathrm{II,III})}.$$

Fügt man zum System der drei Gleichungen noch hinzu:

$$(4,2) : (4,\mathrm{III}) = (3,2) : (\mathrm{II,III}),$$

so hat man

(2) $$(4,1) : (4,2) = \frac{(3,1)}{(3,2)} : \frac{(\mathrm{I,III})}{(\mathrm{II,III})}$$

und ebenso:

(3) $$(4,2) : (4,3) = \frac{(2,1)}{(3,1)} : \frac{(\mathrm{I,II})}{(\mathrm{I,III})}.$$

Aus (1) folgt:

$$\frac{(\mathrm{I,II})}{(\mathrm{II,III})} = \frac{(2,1)\,.\,(4,3)}{(4,1)\,.\,(3,2)},$$

aus (2) folgt:

$$\frac{(\mathrm{I,III})}{(\mathrm{II,III})} = \frac{(3,1)\,.\,(4,2)}{(4,1)\,.\,(3,2)}.$$

Demnach ist:

$$(\mathrm{I,II}) : (\mathrm{II,III}) : (\mathrm{III,I}) = (2,1)\,.\,(4,3) : (4,1)\,.\,(3,2) : (4,2)\,.\,(3,1).$$

Bezeichnen wir die Winkel wie vorher, und setzen:

$$\measuredangle\,\mathrm{I,II,III} = [\mathrm{I,III}],$$

so ist:

$$(\mathrm{I,II}) : (\mathrm{II,III}) : (\mathrm{III,I}) = \sin[\mathrm{I,II}] : \sin[\mathrm{II,III}] : \sin[\mathrm{III,I}].$$

Nun ist:

$$[\mathrm{I,II}] = [\mathrm{I},\ 4] + [4,\mathrm{II}\,] = \alpha + \delta$$
$$[\mathrm{II,III}] = [\mathrm{II},\ 4] + [4,\mathrm{III}] = \gamma + \zeta$$
$$[\mathrm{III,I}] = [\mathrm{III},4] + [4,\mathrm{I}\ \,] = \beta + \varepsilon,$$

also:

$$\frac{\sin(\alpha+\delta)}{(2,1)\,.\,(4,3)} = \frac{\sin(\gamma+\zeta)}{(4,1)\,.\,(3,2)} = \frac{\sin(\beta+\varepsilon)}{(4,2)\,.\,(3,1)},$$

welches mit der frühern Gleichung übereinstimmt.

Ähnlich stellt sich die Aufgabe, liegt 4 ausserhalb des Dreiecks 1, 2, 3. Man nimmt dann beliebig Eine der vier Ecken, z. B. wieder 4, zieht (4, 1), (4, 2), (4, 3), und bestimmt ähnlich die Punkte I, II, III und hierauf das Dreieck (I), (II), (III), indem man wieder die Relationen zwischen Seiten und Winkeln aufsucht.

[3.]

Schliesslich wollen wir zeigen, wie man von dem Beweis in [1] auf den in [2] kommen kann, indem wirklich der Beweis zuerst durch Laterale gefunden ist, und erst später durch die geometrische Betrachtung.

Untersuchen wir, wie sich der Beweis in [1] stellt, wenn ein Punkt des Vierecks, z. B. (4), mit dem Anfangspunkt der Zählung coincidirt. Man hat dann $p^{IV} = 0$, also sind die Coordinaten

$$\begin{array}{ll} \text{von I:} & p'p'' \\ \text{von II:} & p'p''' \\ \text{von III:} & p''p'''. \end{array}$$

Also sind nach [2] die Seiten:

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}, \mathrm{II}) &= (4,1).(4,2) \\ (\mathrm{II}, \mathrm{III}) &= (4,1).(4,3) \\ (\mathrm{III}, \mathrm{I}) &= (4,2).(4,3). \end{aligned}$$

Folglich verhalten sich die Seiten des Dreiecks

$$(\mathrm{I}, \mathrm{II}) : (\mathrm{II}, \mathrm{III}) : (\mathrm{III}, \mathrm{I}) = (4,1).(4,2) : (4,1).(4,3) : (4,2).(4,3),$$

wie wir sie in [2] durch Construction bestimmten.

[DER KREIS.]

[I.]

COMPLEXE ZAHLEN AUF DEN RAUM ANGEWANDT.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. w. cyklische Grössen, zugleich Bezeichnung der Punkte in der Kreisperipherie, mit Radius 1.

1. Inhalt des Dreiecks α, β, γ

$$= \frac{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)}{4\alpha\beta\gamma} \cdot i \qquad \text{des gleichseitigen: } \frac{\sqrt{27}}{4}.$$

$$= \frac{\alpha\alpha\beta+\beta\beta\gamma+\gamma\gamma\alpha-\alpha\beta\beta-\beta\gamma\gamma-\gamma\alpha\alpha}{4\alpha\beta\gamma} \cdot i$$

$$= \tfrac{1}{4} i \cdot \left\{ \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha} \right\}.$$

2. Inhalt des Dreiecks, welches den Kreis in den Punkten α, β, γ berührt, und dessen Winkelpunkte durch

$$\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}, \qquad \frac{2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}, \qquad \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

dargestellt werden;

$$\text{Inhalt: } \frac{(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha)}{(\gamma+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\alpha)} \cdot i, \qquad \text{des gleichseitigen: } \sqrt{27}.$$

Das Centrum des darum beschriebenen Kreises

$$= \frac{2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}.$$

Product des Halbmessers in den Modulus von $(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)$

$$= 2.$$

Clisen von $\frac{\beta\gamma}{\alpha}, \frac{\alpha\gamma}{\beta}, \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ entsprechen den drei Halbmessern dieses Kreises.

3. Vier Zahlen a, b, c, d sind einander harmonisch zugeordnet, wenn das Product der Summen jedes Paars doppelt so gross ist wie die Summe der Producte jedes Paars, oder wenn

$$(a+b)(c+d) = 2ab+2cd.$$

Sind die Zahlen reell, so stellen sie vier Punkte in gerader Linie vor, die hiernach harmonisch getheilt ist.

Mit jener Gleichung ist verbunden

$$(c-a)(d-b)+(d-a)(c-b) = 0.$$

Die Berechnung jeder aus den drei übrigen geschieht durch die Formeln

$$\begin{aligned} a &= \frac{bc+bd-2cd}{-d-c+2b} = \frac{b(c+d)-2cd}{2b-(c+d)} = \frac{2bb-2cd}{2b-(c+d)}-b \\ &= +b-\frac{2(c-b)(d-b)}{2b-c-d} \\ &= +c-\frac{(d-c)(c-b)}{2b-c-d}. \end{aligned}$$

Sind a, b, c, d complexe Zahlen, so liegen die dadurch vorgestellten Punkte in einem Kreise und die Producte der Seiten $ac.bd$ und $ad.bc$ sind gleich.

[II.]

[KREIS DURCH VIER PUNKTE.]

[1.]

Der Kreis durch die Punkte, die den complexen Grössen a, b, c entsprechen, deren Adjuncten A, B, C, hat zum Mittelpunkte das Correlat von

$$\begin{aligned} &\frac{Aa(b-c)+Bb(c-a)+Cc(a-b)}{A(b-c)+B(c-a)+C(a-b)} \\ &= \frac{(Aa-Bb)(a-c)-(a-b)(Aa-Cc)}{(A-B)(a-c)-(a-b)(A-C)}; \end{aligned}$$

einfacher, wenn $a = A = 0$:

$$\frac{(B-C)bc}{Bc-Cb}.$$

[2.]

Die Bedingungsgleichung, dass vier Punkte $0, a, b, c$, deren Adjuncten $0, A, B, C$, in Einem Kreise liegen, ist

$$bcAB+caBC+abCA-abBC-bcCA-caAB = 0$$

oder einfacher

$$\frac{1}{aC}+\frac{1}{bA}+\frac{1}{cB}-\frac{1}{cA}-\frac{1}{aB}-\frac{1}{bC} = 0$$

oder auch

$$c(a-b)B(A-C) = b(a-c)C(A-B)$$

etc.

[3.]

Die Punkte, welche dreien jener Punkte in Beziehung auf den vierten reciprok sind, liegen in Einer geraden Linie.

Dieser Satz ist unter dem allgemeinern begriffen:

»Alle Punkte, welche in Beziehung auf einen gegebenen Punkt den Punkten eines Kreises reciprok sind, liegen in Einem Kreise«.

[III.]

GEOMETRISCHE RELATIONEN DURCH COMPLEXE ZAHLEN.

I.

M, M' zwei Punkte, deren complexe Zahlen m, m'.

P ein unbestimmter Punkt, wofür Azimuthe $PM' - PM$ einen gegebenen Unterschied $= \varphi$ bilden.

Der geometrische Ort von P ist ein Kreis, dessen

$$\text{Mittelpunkt } \frac{me^{i\varphi} - m'e^{-i\varphi}}{2i\sin\varphi},$$

$$\text{Halbmesser} = \text{Modulus von } \frac{m'-m}{2\sin\varphi}.$$

II.

M, M', m, m' wie vorhin.

P ein unbestimmter Punkt, dessen Distanzen von M, M' in einem gegebenen Verhältnisse $k:k'$ stehen.

Der geometrische Ort von P ist ein Kreis, dessen

$$\text{Mittelpunkt } \frac{m.k'k' - m'.kk}{k'k'-kk} = c,$$

$$\text{Halbmesser} = \text{Modulus von } \frac{kk'}{k'k'-kk}\cdot(m'-m).$$

BEMERKUNGEN.

Die drei vorstehenden Notizen rühren vermuthlich aus der Zeit um 1840 her; [I] steht auf einem einzelnen Blatte, [II] und [III] sind in einem Handbuche eingetragen. Auf den Kreis bezieht sich auch eine bereits Bd. IV. S. 397 abgedruckte »handschriftliche Notiz«.

STÄCKEL.

[DIE KEGELSCHNITTE.]

[I.]

LEHRSATZ.

Sind t, t' die complexen Werthe zweier conjugirter Halbaxen einer Ellipse und e der complexe Werth der Excentricität (Abstand eines Brennpunkts), so ist

$$tt + t't' = ee.$$

Die Punkte einer Ellipse sind durch die Formel gegeben:

$$ge^{ix} + he^{-ix},$$

wo x alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 2\pi$ durchlaufen muss.

Lehrsatz. Es sind dann zwei conjugirte Halbaxen

$$ge^{ix} + he^{-ix} \quad \text{und} \quad gie^{ix} - hie^{-ix}.$$

Also

$$4gh = ee.$$

[II.]

LEHRSÄTZE UND AUFGABEN DIE COMPLEXEN ZAHLEN BETREFFEND.

1. $\frac{a}{b-\rho}$ stellt, wenn a, b bestimmte Zahlen, ρ eine unbestimmte cyklische Zahl bedeutet, einen Kreis vor,
$\frac{ab}{bb-\beta\beta}$ den Mittelpunkt, wenn β der in b enthaltene cyklische Factor,
$\frac{a}{bb-\beta\beta}$ (oder der Modulus dieser Grösse) den Halbmesser des Kreises.

2. (vor 1.) Ist wie oben β der in b enthaltene cyklische Factor, so haben
$b+\beta\rho$ und $b+\frac{\beta}{\rho}$ einerlei Modulus, imgleichen
$b+\beta\rho$ und $\frac{\rho\beta\beta}{b\rho+\beta}$ einerlei Clise.

3. $\rho-\beta$ und $i\sqrt{\rho\beta}$ haben gleiche Clise.

4. $\Omega = \frac{a\rho+b}{1-\rho}$ stellt eine gerade Linie vor. Man hat nemlich

$$2\Omega = \frac{(a+b)(1+\rho)-(a-b)(1-\rho)}{1-\rho}$$
$$= (a+b)t-(a-b),$$

wenn

$$t = \frac{1+\rho}{1-\rho}$$

gesetzt wird, wodurch also t eine unbestimmte imaginäre Zahl wird. Es ist ferner

$$\frac{2\Omega}{a+b} = t - \frac{a-b}{a+b}.$$

Derjenige Werth dieser Grösse, dessen Modulus ein Minimum ist, ist offenbar nichts anderes als der reelle Theil von $\frac{a-b}{a+b}$.

Ist demnach k der reelle Theil von $\frac{a-b}{a+b}$, so ist der gesuchte Werth von Ω

$$= \tfrac{1}{2}k(a+b).$$

[III.]

ZUR THEORIE DER KEGELSCHNITTE.

Zunächst beziehen sich die Untersuchungen auf die Ellipse, sie lassen sich aber mit geringen Modificationen auf die Hyperbel übertragen.

[1.]

Es seien m, n zunächst zwei reelle Zahlen, ρ eine Grösse von der Form $\cos\varphi + i\sin\varphi$, so dass ρ alle seine Werthe durchläuft, während φ von 0^0 bis 360^0 wächst.

Es sei ferner

$$r = m\rho + \frac{n}{\rho},$$

und R der Punkt, der die complexe Grösse r repräsentirt; R ist also ein unbestimmter Punkt in einer Ellipse, deren Hauptaxen $m+n$, $m-n$ in der Linie der reellen und imaginären Zahlen liegen, während ihr Mittelpunkt mit dem Nullpunkte zusammenfällt.

Den vier Werthen von ρ: $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ entsprechen die vier Werthe von r: a, b, c, d oder die vier Punkte A, B, C, D.

Endlich setze man

$$\frac{-\alpha\beta\gamma m^3 + (\alpha+\beta+\gamma)mmn - \delta(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)mnn + \delta n^3}{(1-\alpha\beta\gamma\delta)mn} = t$$

und nenne den Punkt, auf welchen sich die complexe Zahl t bezieht, T.

Man sieht leicht, dass, wenn von den vier Punkten A, B, C, D drei constant sind, und der vierte den Kegelschnitt durchläuft, T eine gerade Linie durchlaufen werde.

Durch eine leichte Rechnung findet man

$$t - a = -\frac{(\alpha\beta m - n)(\alpha\gamma m - n)(m - \alpha\delta n)}{\alpha(1-\alpha\beta\gamma\delta)mn}$$
$$= -\frac{(a-b)(a-c)}{a-d}\cdot\frac{\alpha\beta\gamma(\alpha-\delta)\left(mm - \left(\alpha\delta + \frac{1}{\alpha\delta}\right)mn + nn\right)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(1-\alpha\beta\gamma\delta)mn}.$$

Hieraus folgt sogleich von selbst, dass

$$(t-a)(d-a) \quad \text{und} \quad (b-a)(c-a)$$

gleiche Clisen haben oder dass die Winkel

zwischen AT, AC und zwischen AB, AD

gleich sind.

Es lässt sich auch t in folgende elegante Form setzen

$$t = \frac{\left(m-\frac{n}{\beta\gamma}\right)\left(m-\frac{n}{\alpha\gamma}\right)\left(m-\frac{n}{\alpha\beta}\right)}{\left(\delta-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right)mn} + \left(\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)m - \frac{1}{\alpha\beta\gamma}n\right)\frac{n}{m}$$

oder auch in folgende

$$t = \frac{(\beta\gamma m - n)(m-\beta\delta n)(m-\gamma\delta n)}{\alpha\beta\gamma\delta\left(\beta\gamma\delta-\frac{1}{\alpha}\right)mn} + \frac{\beta\gamma mm - mn + (\beta+\gamma)\delta nn}{\beta\gamma\delta n}.$$

[2.]

Das Centrum eines durch drei Punkte der Ellipse A, B, C gehenden Kreises ist

$$: \quad \frac{\left\{\alpha\beta\gamma+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\right\}m - \left\{(\alpha+\beta+\gamma)+\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right\}n}{\frac{m}{n}-\frac{n}{m}},$$

der Halbmesser aequal dem Modulus von

$$\frac{(m-\beta\gamma n)(m-\alpha\gamma n)(m-\alpha\beta n)}{mm-nn}$$

oder (was dasselbe ist) von

$$\frac{\left(m-\frac{n}{\beta\gamma}\right)\left(m-\frac{n}{\alpha\gamma}\right)\left(m-\frac{n}{\alpha\beta}\right)}{mm-nn}.$$

Das Centrum des erwähnten Kreises kann auch so ausgedrückt werden, wenn zur Abkürzung

$$\beta\gamma = \cos 2\mathfrak{A} + i\sin 2\mathfrak{A}$$
$$\alpha\gamma = \cos 2\mathfrak{B} + i\sin 2\mathfrak{B}$$
$$\alpha\beta = \cos 2\mathfrak{C} + i\sin 2\mathfrak{C}$$

geschrieben, oder die Clisen von $\beta\gamma$, $\alpha\gamma$, $\alpha\beta$ mit $2\mathfrak{A}$, $2\mathfrak{B}$, $2\mathfrak{C}$ bezeichnet werden:

$$\frac{4\cos\mathfrak{A}\cos\mathfrak{B}\cos\mathfrak{C}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}} - \frac{4\sin\mathfrak{A}\sin\mathfrak{B}\sin\mathfrak{C}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{m}}\,i.$$

Es sind hierbei aber die Halbkreise, in welchen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ genommen werden, nur für zwei willkürlich, z. B. für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; für den dritten muss werden

$$\gamma = \cos(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}) + i\sin(\mathfrak{A}+\mathfrak{B}-\mathfrak{C}).$$

Mit andern Worten, hätte man gemacht

$$\alpha = \cos\alpha^* + i\sin\alpha^*$$
$$\beta = \cos\beta^* + i\sin\beta^*$$
$$\gamma = \cos\gamma^* + i\sin\gamma^*,$$

so würde man zu setzen haben

$$2\mathfrak{A} = \beta^* + \gamma^*$$
$$2\mathfrak{B} = \alpha^* + \gamma^*$$
$$2\mathfrak{C} = \alpha^* + \beta^*.$$

Der Halbmesser des Kreises wird

$$= \frac{\sqrt{((mm+nn-2mn\cos 2\mathfrak{A})(mm+nn-2mn\cos 2\mathfrak{B})(mm+nn-2mn\cos 2\mathfrak{C}))}}{mm-nn}.$$

[3.]

Bei der Newtonschen Construction hat die Differenz zweier Werthe von t die Clise wie

$$\frac{\frac{\beta\gamma}{\beta-\gamma}(b-c)\times\frac{\beta-\delta}{b-d}\times\frac{\gamma-\delta}{c-d}}{\beta\gamma\delta}\left\{\frac{1}{\alpha\beta\gamma\delta-1} - \frac{1}{\alpha'\beta\gamma\delta-1}\right\}$$

oder, weil $\beta-\delta$ die Clise [wie] $i\sqrt{\beta\delta}$ u. s. w.,

$$\frac{(\beta-\delta)(\gamma-\delta)}{\delta(\beta-\gamma)}\left\{\frac{(\alpha-\alpha')\beta\gamma\delta}{(\alpha\beta\gamma\delta-1)\,.\,(\alpha'\beta\gamma\delta-1)}\right\}\frac{b-c}{(b-d)(c-d)}$$

oder, weil Clise von $a-a'$ wie $i\sqrt{aa'}$ u. s. w., wie

$$\frac{b-c}{(b-d)(c-d)}.$$

In meiner (der ersten) Construction, wo δ unbestimmt, ist die Clise wie

$$(a-b)(a-c)(b-c).$$

Nennt man e den vierten Schnitt[punkt] der Ellipse mit dem durch b, c, d gelegten Kreise und setzt

$$e = \varepsilon m + \frac{n}{\varepsilon},$$

wodurch

$$\beta\gamma\delta\varepsilon = 1$$

wird, so ist, in NEWTONS Construction, die Clise der Differenz zweier Werthe von t wie

$$(c-b)(b-e)(c-e).$$

Auch kann obige Formel ($\alpha = \varepsilon\rho$) besser so geschrieben werden:

$$t = -\frac{(m-\delta\beta n)(m-\delta\gamma n)(m-\delta\varepsilon n)\rho}{\delta(1-\rho)mn} + \frac{(\beta+\gamma)mm - \frac{1}{\varepsilon}mn + \delta nn}{m}$$

$$= -\frac{(b-c)(b-e)(c-e)}{\delta(\beta-\gamma)(\beta-\varepsilon)(\gamma-\varepsilon)} \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)mn} + \frac{(\beta+\gamma)mm - \frac{1}{\varepsilon}mn + \delta nn}{m}.$$

BEMERKUNGEN.

Die Notiz [III], die auf einem einzelnen Blatte steht, gibt den Inhalt von Untersuchungen wieder, über die GAUSS in dem S. 295 bis 296 dieses Bandes abgedruckten Briefe an SCHUMACHER vom 12. Mai 1843 berichtet hat; auf diesen möge zur Erläuterung des Textes verwiesen werden. Die Notizen [I] und [II], die mit [III] in engem Zusammenhange stehen, finden sich in einem Handbuche und auf einem Zettel; [I] stammt wahrscheinlich bereits aus dem Jahre 1831, [II] wohl aus der Zeit um 1840. STÄCKEL.

[PROJECTION DES WÜRFELS.]

[1.]

Sind die complexen Werthe der orthographischen Projectionen von drei gleich langen und unter einander senkrechten Geraden

$$a, b, c,$$

so ist

$$aa + bb + cc = 0,$$

z. B.

$$a = 1 + 8i, \qquad b = 8 + i, \qquad c = 4 - 4i.$$

Allgemein kann man setzen

$$a = pp + qq, \qquad b = 2ipq, \qquad c = ipp - iqq.$$

[2.]

Die zierlichste Form der Auflösung der allgemeinen Gleichung

$$pp + qq + rr = 0$$

ist, a und b beliebige complexe Zahlen bedeutend,

$$p = (a-b)(b-aii)$$
$$q = (b-bi)(aii-ai)$$
$$r = (bi-a)(ai-b).$$

BEMERKUNGEN.

Ein Theil dieser beiden Notizen, die sich in einem Handbuche befinden und aus dem Jahre 1831 stammen, ist bereits in Bd. II, S. 309 abgedruckt worden.

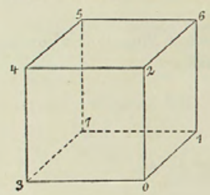
Vom December 1839 bis Ostern 1840 hat GAUSS eine Vorlesung über die *Theorie der imaginären Grössen* gehalten, die E. HEINE gehört und ausgearbeitet hat, wie bereits S. 330 angeführt. Dieser Ausarbeitung sind die folgenden auf die Projection des Würfels bezüglichen Ausführungen entnommen.

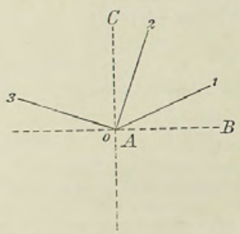
STÄCKEL.

[*Vorlesung über die Theorie der imaginären Grössen.*]

Projection des Würfels.

Will man einen Würfel auf eine Ebene projiciren, und zwar durch Senkrechte von den Ecken auf die Ebene, so muss die Projection die Eigenschaft haben, dass die Summe der Quadrate der Zahlen, die die Projection je dreier auf einander stossender Kanten anzeigen, $= 0$ sei.





Um diess zu zeigen, bezeichnen wir mit $0, 1, 7, 3$ die Ecken der einen, mit $2, 4, 5, 6$ die der damit parallelen Fläche. Ist $(0, 1)$, die Seite des Würfels, $= r$, so haben wir, dass an der Ecke 0 die drei Kanten zusammenstossen, deren jede $= r$ ist:

$$(0, 1), \qquad (0, 2), \qquad (0, 3).$$

Legen wir zwei rechtwinklige Axen AB und AC, die Axe der x und der y, durch den Punkt 0 oder A der Projectionsebene, so ist, wenn die Complexen, die die Projectionen von $1, 2, 3$ ausdrücken, A, B, C sind:

$$r(\cos(1,0,x) + i\cos(1,0,y)) = A$$
$$r(\cos(2,0,x) + i\cos(2,0,y)) = B$$
$$r(\cos(3,0,x) + i\cos(3,0,y)) = C.$$

Ferner haben wir die Bedingungsgleichungen

$$\cos(1,0,x)^2 + \cos(2,0,x)^2 + \cos(3,0,x)^2 = 1$$
$$\cos(1,0,y)^2 + \cos(2,0,y)^2 + \cos(3,0,y)^2 = 1$$

und

$$\cos(1,0,x)\cos(1,0,y) + \cos(2,0,x)\cos(2,0,y) + \cos(3,0,x)\cos(3,0,y)$$
$$= \cos(x,0,y) = \cos 90^\circ = 0.$$

Hieraus folgt, es sei wirklich

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0.$$

Ein Gleiches folgt für die übrigen Ecken.

Es kann gewünscht werden, A, B, C so zu wählen, dass die reellen Theile ganze Zahlen sind. Um diess thun zu können, kommen wir auf die reellen Zahlen zurück, und erinnern, dass, wenn $a^2 + b^2 = c^2$ sein soll, und a, b, c ganze Zahlen, p und q auch ganze Zahlen sind, man haben müsse

$$a^2 = (p^2 - q^2)^2, \qquad b^2 = 4p^2q^2, \qquad c^2 = (p^2 + q^2)^2,$$

also

$$a = p^2 - q^2, \qquad b = 2pq, \qquad c = p^2 + q^2.$$

Z. B., ist $p = 2$, $q = 1$, so ist $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ und

$$5^2 = 4^2 + 3^2.$$

Soll nun

$$A^2 + B^2 = -C^2$$

sein, so werden wir haben:

$$A = (m + m'i)^2 - (n + n'i)^2$$
$$B = 2(m + m'i)(n + n'i)$$
$$C = (m + m'i)^2 i + (n + n'i)^2 i.$$

Führt man diess aus, so ist:

$$(m + m'i)^2 = m^2 - m'^2 + 2mm'i$$
$$(n + n'i)^2 = n^2 - n'^2 + 2nn'i$$
$$(m + m'i)(n + n'i) = mn - m'n' + i(m'n + n'm),$$

also:

$$A = m^2 - m'^2 - n^2 + n'^2 + 2i(mm' - nn')$$
$$B = 2(mn - m'n') + 2i(m'n + n'm)$$
$$C = -2(mm' + nn') + i(m^2 + n^2 - m'^2 - n'^2).$$

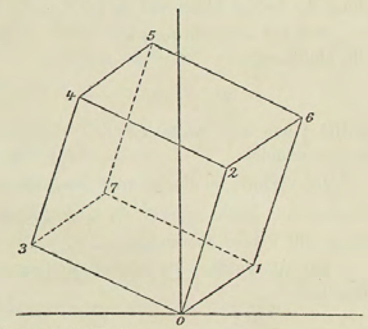
Umgekehrt kann man auch von diesen Zahlen auf die reellen zurückkommen.

Ist hier $m = 2$, $n = 1$, $m' = 1$, $n' = 1$, so erhält man:

$$A = 3 + 2i \qquad B = 2 + 6i \qquad C = -6 + 3i \qquad A^2 + B^2 + C^2 = \left\{\begin{array}{r} 5 + 12i \\ -32 + 24i \\ +27 - 36i \end{array}\right\} = 0.$$

Zusatz. Sind die complexen Zahlen für die Ecken 1, 2, 3 gefunden, so hat man auch die für die andern 4. Es sind nemlich die für:

0	0
1	A
2	B
3	C
6	$A + B$
7	$A + C$
5	$A + B + C$
4	$B + C$



[Bei dem Beispiel haben diese Zahlen beziehungsweise die Werthe:

$$0, \quad 3 + 2i, \quad 2 + 6i, \quad -6 + 3i, \quad 5 + 8i, \quad -3 + 5i, \quad -1 + 11i, \quad -4 + 9i.]$$

GEOMETRISCHE SEITE DER TERNÄREN FORMEN.

Ein Punkt im Raume (0) sei als Anfangspunkt angenommen. Der Übergang von da zu drei andern Punkten P, P', P'', die mit jenem nicht in einer Ebene liegen, sei resp. t, t', t''; wo, so oft keine Verwechslung möglich ist, die Punkte P, P', P'' selbst durch $(t), (t'), (t'')$ bezeichnet werden mögen.

Es sei ferner allgemein (t, t') das Product der Länge (kürzesten Entfernung) der beiden Linien t, t' in den Cosinus ihrer Neigung etc.

Man hat allgemein $(\alpha t+\alpha' t'+\alpha'' t''+\ldots, \beta u+\beta' u'+\beta'' u''+\ldots)$, wenn man die Multiplication

$$(\alpha t+\alpha' t'+\alpha'' t''+\ldots)\times(\beta u+\beta' u'+\beta'' u''+\cdots)$$

ausführt und statt $tu, tu', tu'', t'u', t'u''$ u. s. w. $(t,u), t,u'), (t,u''), (t',u'), (t',u'')$ u. s. w. schreibt.

Jeder Punkt im Raume wird durch ein Trinomium

$$(xt+x't'+x''t'')$$

dargestellt werden können.

Für alle Punkte, die in einer bestimmten Ebene liegen, wird dann eine Gleichung

$$\lambda x+\lambda' x'+\lambda'' x'' = L$$

stattfinden, wo $\lambda, \lambda', \lambda'', L$ bestimmte Zahlen bedeuten. Für eine Ebene durch die drei Punkte $\mu t, \mu' t', \mu'' t''$ ist

$$\lambda\mu = \lambda'\mu' = \lambda''\mu'' = L.$$

Schreibt man

$$(t, t) = a, \quad (t', t') = a', \quad (t'', t'') = a'', \quad (t', t'') = b, \quad (t, t'') = b', \quad (t, t') = b''$$

und

$$a'a''-bb = A, \qquad aa''-b'b' = A', \qquad aa'-b''b'' = A'',$$
$$b'b''-ab = B, \qquad bb''-a'b' = B', \qquad bb'-a''b'' = B'',$$
$$D = aa'a''+2bb'b''-abb-a'b'b'-a''b''b'',$$

so ist

	senkrecht gegen
$T = At+B''t'+B't''$	t' und t''
$T' = B''t+A't'+Bt''$	t und t''
$T'' = B't+Bt'+A''t''$	t und t',

und allgemein, wenn

$$\lambda x+\lambda' x'+\lambda'' x'' = L$$

die Gleichung einer Ebene ist, so wird die Linie

$$\lambda T+\lambda' T'+\lambda'' T''$$

gegen dieselbe senkrecht sein. $L =$ Werth der Form $\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B''\end{pmatrix}$, wenn die Unbestimmten $= \lambda, \lambda', \lambda''$ gesetzt werden.

Es ist dann ferner

$$aT+b''T'+b'T'' = Dt$$
$$b''T+a'T'+bT'' = Dt'$$
$$b'T+bT'+a''T'' = Dt'',$$

und die Linien t, t', t'' sind senkrecht gegen die Ebenen, deren Gleichungen

$$ax+b''x'+b'x'' = \text{Const.}$$
$$b''x+a'x'+bx'' = \text{Const.}$$
$$b'x+bx'+a''x'' = \text{Const.}$$

Der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks durch die Punkte $mt, m't', m''t''$ ist aequal der Quadratwurzel aus dem Werthe der Form

$$\begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B''\end{pmatrix} = F(m'm'', mm'', mm'),$$

wenn substituirt wird $X = m'm''$, $X' = mm''$, $X'' = mm'$, während der sechsfache Cubikinhalt der Pyramide, die sich dadurch mit dem Nullpunkte bildet, $= mm'm''\sqrt{D}$ wird; folglich [ist] das Perpendikel

$$= \sqrt{\frac{D}{F\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m'}, \frac{1}{m''}\right)}};$$

T, T', T'' beziehen sich eben so auf die Form $\begin{pmatrix} AD, A'D, A''D \\ BD, B'D, B''D \end{pmatrix}$ wie t, t', t'' auf $\begin{pmatrix} a, a', a'' \\ b, b', b'' \end{pmatrix}$.

BEMERKUNG.

Die vorstehende Notiz befindet sich in einem Handbuche und stammt aus dem Juli 1831. Da sie zeigt, dass GAUSS sich auch mit complexen Grössen von mehr als zwei Einheiten beschäftigt hat, die er bereits in der Schlussbemerkung seiner Selbstanzeige der Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda vom 23. April 1831 (Bd. II. S. 169 bis 198) erwähnt hatte, so hat sie hier noch einmal Platz gefunden, obwohl sie schon in Bd. II. S. 305 bis 307 wegen ihrer Beziehung zur Theorie der ternären Formen abgedruckt ist.

STÄCKEL.

[DIE KUGEL.]

[1.]

ORTHOGRAPHISCHE PROJECTION DER KUGEL.

Veränderte Erscheinung eines unendlich kleinen Theils der Kugelfläche, wenn die Projectionsebene verändert wird.

Man wählt zur Axe der x die Durchschnittslinie der beiden Projectionsebenen oder vielmehr als Axe der y in der bleibenden Projectionsebene eine Parallele mit der geraden Linie, welche die beiden Projectionsplätze verbindet.

Man fragt, wie dasjenige Stück der Kugelfläche, welches in der ersten Projection wie ein Kreis erschien, in der zweiten erscheinen wird.

Coordinaten des Centrums dieser Fläche (Radius = 1):

in der ersten Projection x, y, z

„ „ zweiten „ x', y', z'.

Der Drehungswinkel $= \lambda$.

Es ist

$$x' = x$$

$$\sqrt{(1 - xx)} = \rho$$

$$\sqrt{(1 - x'x')} = \rho$$

$$\frac{y}{\rho} = \sin u \qquad \frac{y'}{\rho} = \sin(u + \lambda)$$

$$dy' = \frac{z'}{z} \cdot dy - \frac{x \sin \lambda}{z} \cdot dx.$$

Es erscheint also ein $\alpha+\beta.i$ wie $\alpha+\frac{\beta z'-\alpha.x\sin\lambda}{z}\cdot i$ oder die beiden Radien des Kreises 1 und i in der ersten Projection erscheinen als conjugirte Halbmesser der Ellipse in der zweiten Projection $1-\frac{x\sin\lambda}{z}\cdot i$ und $\frac{z'}{z}\cdot i$, woraus sich nach p. 164 [des Handbuches*)] die Dimensionen der Projectionsellipse leicht ableiten lassen.

[*) Dieser Band, S. 339.]

[II.]

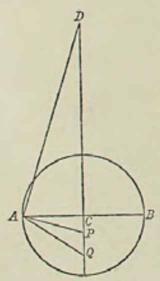
[STEREOGRAPHISCHE UND CENTRALE PROJECTION.]

[1.]

Zusammenhang der stereographischen und der Centralprojection, so dass Massstab für jene im Pol C halb so gross als für diese.

Der Kreis durch AB stellt für erstere den Äquator, für letztere den Parallel von 45° vor.

P und Q Darstellung eines und desselben Punkts der Kugel in den beiden Projectionen; ACB gegen CPQ normal, Winkel $CAP = PAQ$.



AD normal gegen PA und D auf der verlängerten QPC, wird D die stereographische Darstellung des jenem Kugelpunkte gegenüberliegenden.

Ein Kreis um den Mittelpunkt Q mit dem Radius QA ist die stereographische Darstellung desjenigen grössten Kreises, der jenen Kugelpunkt zum Pole hat.

Ist $a+bi$ die complexe Zahl für centrale Projection, r Halbmesser, so ist die complexe Zahl für die stereographische Projection

$$\frac{(a+ib)r}{aa+bb}\{\sqrt{(aa+bb+rr)}-r\}.$$

[2.]

Centrale Projection.

Sind $a+bi$, $a'+b'i$ die complexen Zahlen für die Projectionen zweier Punkte, so ist von ihrer Bogendistanz

$$\text{cosinus} = \frac{rr+aa'+bb'}{\Delta}$$

$$\text{sinus} = \sqrt{\{[(a'-a)^2+(b'-b)^2]rr+(ab'-ba')^2\}} : \Delta,$$

$$\Delta = \sqrt{\{(rr+aa+bb)(rr+a'a'+b'b')\}}.$$

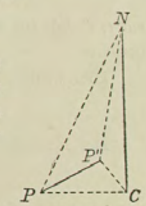
[III.]

LEHRSATZ.

[ÜBER DIE STEREOGRAPHISCHE PROJECTION.]

Die wirkliche (geradlinige) Distanz zweier Punkte auf der Kugelfläche findet sich aus der Distanz ihrer stereographischen Projectionen, wenn man letztere mit dem Product der beiden Cosinus derjenigen Neigungen multiplicirt, welche die von jenen Projectionen nach dem Endpunkt einer im Centrum errichteten Normale aequal dem Durchmesser der Kugel (Halbmesser des Äquators in der Projection) gezogenen Geraden gegen die Normale haben.

$$\text{Wirkliche Distanz} = PP'\cdot\frac{CN}{PN}\cdot\frac{CN}{P'N}.$$



Man erhält so die Chorde oder eine dem Sinus des halben Bogens proportionale Grösse. Besser ist's, entweder die Projectionen durch bicomplexe Grössen t, t' auszudrücken, wo die Distanz durch [die] Tangente des halben Bogens, gemessen durch

$$\frac{t'-t}{1+tt'},$$

dargestellt wird; oder sich auch der tricomplexen Grössen dabei zu bedienen.

[IV.]

STEREOGRAPHISCHE PROJECTION DER KUGELFLÄCHE.

Conjugirte complexe Zahlen sollen hier immer durch kleine und grosse gleichnamige Buchstaben bezeichnet werden.

Halbmesser der Kugel wird = 1 gesetzt.

n: lineares Vergrösserungsverhältniss.

1. In dem durch die complexe Zahl a bezeichneten Punkte ist

$$n = 1 + aA.$$

2. Der gegenüberliegende Punkt wird durch die complexe Zahl $-\frac{1}{A}$ bezeichnet; in demselben ist also

$$n = 1 + \frac{1}{aA} = \frac{1+aA}{aA}.$$

3. Der bicomplexen Zahl a entspricht die tricomplexe

$$\frac{2a + (1-aA)\eta}{1+aA}.$$

4. Allgemeine Verwandlungsformel:

$$t' = \frac{at-b}{ct+d},$$

wo t, t' sich auf Einerlei Punkt in der ersten oder zweiten Darstellungsform beziehen.

Hier wird

$$n' = \text{Mod.}\,\frac{ad+bc}{(ct+d)^2}(1+tT).$$

Der Minimumwerth findet statt für

$$t = \frac{C}{D}$$

und ist

$$\text{Mod.}\,\frac{ad+bc}{cC+dD}\cdot\frac{D}{d} = \text{Mod.}\,\frac{ad+bc}{cC+dD}.$$

Soll dieser für $t' = 0$ gelten, so muss

$$aC = bD$$

sein; wodurch

$$n' = \text{Mod.}\,\frac{a}{D} = \text{Mod.}\,\frac{b}{C}$$

wird. Soll dieser zugleich = 1 werden, so kann man, wenn ε eine beliebige Grösse, deren Modulus = 1, ist, setzen

$$\varepsilon C = b, \qquad \varepsilon D = a$$

und

$$c = \varepsilon B, \qquad d = \varepsilon A.$$

Schreibt man anstatt a, b, c, d: $\sqrt{\varepsilon}.a$, $\sqrt{\varepsilon}.b$, $\sqrt{\varepsilon}.c$, $\sqrt{\varepsilon}.d$, wodurch die Allgemeinheit nicht vermindert wird, so wird schlechthin

$$c = B, \qquad d = A$$

oder die Transformationsformel

$$t' = \frac{at-b}{Bt+A}, \qquad t = \frac{At'+b}{-Bt'+a}.$$

5. Die einfachste Transformationsformel ist

$$t' = \frac{t-a}{At+1}.$$

6. Zwischen zweien Punkten a, b liegt in der Mitte der Punkt

$$\frac{\sqrt{(1+aB)(1+bB)} - \sqrt{(1+aA)(1+bA)}}{-A\sqrt{(1+aB)(1+bB)} + B\sqrt{(1+aA)(1+bA)}}$$

oder, wenn die den a, b entgegengesetzten Punkte $-\frac{1}{A}$, $-\frac{1}{B}$ mit a', b' bezeichnet werden,

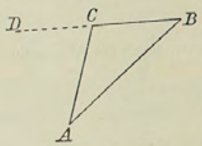
$$\frac{a'\sqrt{(a-b')(b-b')} - b'\sqrt{(a-a')(b-a')}}{\sqrt{(a-b')(b-b')} - \sqrt{(a-a')(b-a')}}.$$

[V.]

ZUR THEORIE DER DREHUNG DER KUGELFLÄCHE IN SICH SELBST.

Die Aufgabe, zwei Drehungen in Eine zu vereinigen, kann auf doppelte Weise aufgelöset werden.

I. Man soll die beiden Drehungen, die erste α um den Punkt A und die zweite β um den Punkt B, in Eine vereinigen.

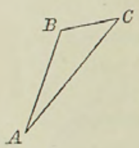


Man verbinde AB; setze

$$BAC = -\tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{oder} \quad CAB = +\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$ABC = +\tfrac{1}{2}\beta,$$

und construire das Dreieck ABC. Dann ist $2ACD$ die aus der Verbindung der beiden Drehungen zusammengesetzte.



II. Anstatt Drehungen um Punkte betrachte man Schiebungen längs grössten Kreisen.

Dann ist die Schiebung $2AC$ aus $2AB$ und $2BC$ zusammengesetzt.

BEMERKUNGEN.

Die vorstehenden Notizen [I], [II] und [III] stehen in einem Handbuche. Die folgende Notiz [IV] befindet sich auf einem einzelnen Zettel ohne Datirung. Sie zeigt, dass GAUSS den Zusammenhang der linearen Substitutionen einer complexen Veränderlichen mit den Drehungen der Kugelfläche in sich selbst erkannt hatte. Aus diesem Grunde ist die Notiz [V], die sich auf denselben Gegenstand bezieht, jedoch in rein geometrischer Behandlungsweise, hinzugefügt worden; sie findet sich in einem andern Handbuche und ist vermuthlich schon vor 1819 niedergeschrieben worden.

STÄCKEL.

[MUTATIONEN DES RAUMES.]

[I.]

[TRANSFORMATIONEN DES RAUMES.]

[1.]

Man setze

$$\sqrt{\frac{1-p-q-r}{2}} = a$$

$$\sqrt{\frac{1-p+q+r}{2}} = b$$

$$\sqrt{\frac{1+p-q+r}{2}} = c$$

$$\sqrt{\frac{1+p+q-r}{2}} = d,$$

so ist

$$\begin{array}{ccc} p & ad+bc & ac-bd \\ bc-ad & q & ab+cd \\ -ac-bd & cd-ab & r \end{array}$$

das allgemeine Transformationsschema der Raumcoordinaten, oder, bedeuten a, b, c, d was sie wollen[, so sind die 9 Grössen des Schemas] proportional folgenden:

$$\begin{array}{ccc} \tfrac{1}{2}(cc+dd-aa-bb) & ad+bc & ac-bd \\ bc-ad & \tfrac{1}{2}(bb+dd-aa-cc) & ab+cd \\ -ac-bd & cd-ab & \tfrac{1}{2}(bb+cc-aa-dd). \end{array}$$

[2.]

Besser auf folgende Weise:

$$\sqrt{\tfrac{1+p+q+r}{2}} = a$$
$$\sqrt{\tfrac{1+p-q-r}{2}} = b$$
$$\sqrt{\tfrac{1-p+q-r}{2}} = c$$
$$\sqrt{\tfrac{1-p-q+r}{2}} = d,$$

$$\begin{array}{ccc}
\tfrac{1}{2}(aa+bb-cc-dd) & -ad-bc & -ac+bd \\
+ad-bc & \tfrac{1}{2}(aa-bb+cc-dd) & -ab-cd \\
+ac+bd & +ab-cd & \tfrac{1}{2}(aa-bb-cc+dd).
\end{array}$$

[3.]

Aus der Verbindung zweier Transformationen,

$$\left.\begin{array}{ll}\text{deren erster die Scale} & a,\ b,\ c,\ d \\ \text{,, zweiter ,, ,,} & \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\end{array}\right\}\ \text{entspricht,}$$

entsteht eine neue, deren Scale:

$$\begin{array}{l}
a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta \\
a\beta + b\alpha - c\delta + d\gamma \\
a\gamma + b\delta + c\alpha - d\beta \\
a\delta - b\gamma + c\beta + d\alpha.
\end{array}$$

[4.]

Sind die Coordinaten des ruhenden Punkts ξ, η, ζ, Vergrösserung $= nn$, Drehung $= \lambda$, so kann man setzen

$$\begin{aligned}
a &= n\cos\tfrac{1}{2}\lambda \\
b &= n\xi\sin\tfrac{1}{2}\lambda \\
c &= n\eta\sin\tfrac{1}{2}\lambda \\
d &= n\zeta\sin\tfrac{1}{2}\lambda.
\end{aligned}$$

[5.]

Schreiben wir

$$\begin{aligned}
a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta &= A \\
a\beta + b\alpha - c\delta + d\gamma &= B \\
a\gamma + b\delta + c\alpha - d\beta &= C \\
a\delta - b\gamma + c\beta + d\alpha &= D; \\
aa+bb+cc+dd &= m \\
\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta &= \mu,
\end{aligned}$$

so ist:

$$\frac{C+Di}{A+Bi} \equiv \frac{c+di}{a+bi} \quad (\text{mod. } m),$$
$$\frac{C-Di}{A+Bi} \equiv \frac{\gamma-\delta i}{\alpha+\beta i} \quad (\text{mod. } \mu);$$

$$\frac{B+Di}{A+Ci} \equiv \frac{\beta+\delta i}{\alpha+\gamma i} \quad (\text{mod. } m),$$
$$\frac{B-Di}{A+Ci} \equiv \frac{b-di}{a+ci} \quad (\text{mod. } \mu);$$

$$\frac{B+Ci}{A+Di} \equiv \frac{b+ci}{a+di} \quad (\text{mod. } m),$$
$$\frac{B-Ci}{A+Di} \equiv \frac{\beta-\gamma i}{\alpha+\delta i} \quad (\text{mod. } \mu).$$

[6.]

Wir bezeichnen allgemein die Combination a, b, c, d durch (a, b, c, d) und schreiben

$$(a, b, c, d)\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (A, B, C, D).$$

Es ist also $(a, b, c, d)\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ nicht mit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\,(a, b, c, d)$ zu verwechseln.

Man hat dann

$$(a, b, c, d)\,(a, -b, -c, -d) = (aa+bb+cc+dd, 0, 0, 0).$$

Ferner bezeichne man die Combination (a, b, c, d) durch einen Buchstaben, z. B. g, und dann die Combination $(a, -b, -c, -d)$ durch g'.

Es ist also

$$gg' = g'g = (aa+bb+cc+dd, 0, 0, 0) = (m, 0, 0, 0).$$

Ferner ist $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = h$, $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta = \mu$ gesetzt:

$$ghg' = (\alpha m, -\beta m, -\gamma m, -\delta m) = h'gg' = gg'h'.$$

[7.]

Man kann auch die Scale a, b, c, d als auf diejenige Versetzung der Coordinatenaxen sich beziehend betrachten, die der Substitution

$$\begin{array}{lll}
+a+\frac{bb}{n+a}, & +d+\frac{bc}{n+a}, & -c+\frac{bd}{n+a}, \\
-d+\frac{bc}{n+a}, & +a+\frac{cc}{n+a}, & +b+\frac{cd}{n+a}, \\
+c+\frac{bd}{n+a}, & -b+\frac{cd}{n+a}, & +a+\frac{dd}{n+a}
\end{array}$$

entspricht, wo

$n = \sqrt{(aa+bb+cc+dd)}$ Vergrösserung,

$a = n\cos\lambda$, $\sqrt{(bb+cc+dd)} = n\sin\lambda$,

λ ganze Drehung.

[8.]

Die Transformationsscale a, b, c, d bedeutet
eine Vergrösserung $= (aa+bb+cc+dd)$
nebst Drehung $= \lambda$ um den Punkt, dessen Coordinaten

$$\frac{b}{a}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\lambda, \qquad \frac{c}{a}\cot\tfrac{1}{2}\lambda, \qquad \frac{d}{a}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\lambda.$$

Geben drei auf einander folgende Scalen

$$M, 0, 0, 0$$

und sind die betreffenden Drehungspunkte P, P', P'',
die Winkel $\lambda, \lambda', \lambda''$,

so sind $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{2}\lambda'$, $\frac{1}{2}\lambda''$ die Winkel des sphärischen Dreiecks zwischen P, P', P''.

[II.]

MUTATIONEN DES RAUMES VON DREI DIMENSIONEN.

1.

Seit langer Zeit habe ich das Verfahren gebraucht, jede Mutation eines Raumes (worunter ich verstehe seine Verrückung in einem andern Raume verbunden mit einer allgemeinen Vergrösserung oder Verkleinerung des erstern, unbeschadet der Conservation der Ähnlichkeit) durch vier Grössen

$$a, b, c, d$$

auszudrücken, deren Complex ich die Mutationsscale nenne. Es wird zugleich angenommen, dass Ein Punkt des beweglichen Raumes in dem andern als fest oder absolut betrachteten immer unbewegt bleibe, welcher Punkt mit Nullpunkt bezeichnet werden mag.

2.

Die Bedeutung dieser vier Grössen ist hierbei folgende. In dem festen Raume werden drei von 0 ausgehende, rechte Winkel mit einander machende gerade Linien angenommen 01, 02, 03. Man setze

$$\sqrt{(bb+cc+dd)} = \rho,$$

und lasse

$$\frac{b}{\rho}, \frac{c}{\rho}, \frac{d}{\rho}$$

die Cosinus der drei Winkel sein, welche eine Gerade $0P$ resp. mit 01, 02, 03 macht. Diese gerade Linie hat in dem bewegten Raume nach der Mutation dieselbe Lage wie vor derselben; [wird ferner]

$$\sqrt{(aa+\rho\rho)} = k$$

gesetzt, oder

$$k = \sqrt{(aa+bb+cc+dd)},$$

ist k die linearische Vergrösserung des mutirten Raumes.

Endlich

$$a = k\cos\theta, \qquad \rho = k\sin\theta$$

gesetzt, ist 2θ diejenige Drehung um $0P$, durch welche, verbunden mit der Vergrösserung k, die Mutation erzeugt werden kann.

BEMERKUNG.

Die unter [I] zusammengefassten Notizen stehen in einem Handbuche. Die Nummern 1 bis 7 stimmen in Schrift und Tinte genau mit astronomischen Aufzeichnungen aus dem Jahre 1819 überein, die sich auf den vorhergehenden Seiten befinden. Verschieden von ihnen sieht die als Nummer 8 bezeichnete Bemerkung aus. Sie trägt sachlich den Character eines spätern Zusatzes, und diese Annahme wird auch dadurch bestätigt, dass augenscheinlich gleichzeitig mit ihr niedergeschriebene astronomische Notizen aus der Zeit von 1822 bis 1823 stammen. Die Notiz [II] füllt einen einzelnen Zettel ohne Datirung. Nach der Handschrift zu urtheilen, stammt sie aus noch späterer Zeit.

STÄCKEL.

THEORIE DER KRUMMEN FLÄCHEN.

NACHTRÄGE ZU BAND IV.

NACHLASS UND BRIEFWECHSEL.

PRAECEPTA GENERALISSIMA
PRO INVENIENDIS CENTRIS CIRCULI OSCULANTIS AD QUODVIS CURVAE DATAE PUNCTUM DATUM.

Definiatur situs puncti cuiusvis in plano dato per duas variabiles x, y (sive sint distantiae a punctis sive lineis datis sive anguli etc.), sintque

$$P = 0, \qquad P' = 0$$

aequationes duarum curvarum, designantibus P, P' functiones quascunque ipsarum x, y; porro sit

$$dP = p\,dx + q\,dy, \qquad dP' = p'dx + q'dy,$$
$$d^2P = r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2, \qquad d^2P' = r'dx^2 + 2s'dx\,dy + t'dy^2.$$

Tunc curvae punctum per

$$x = \xi, \qquad y = \eta$$

definitum commune habebunt, si pro hisce valoribus

$$P = P';$$

praeterea in hoc puncto eandem tangentem habebunt, si insuper

$$pq' = p'q;$$

denique etiam eundem circulum osculantem habebunt, si insuper

$$\frac{rqq-2spq+tpp}{r'q'q'-2s'p'q'+t'p'p'} = \frac{p^3}{p'^3} = \frac{q^3}{q'^3}.$$

Hinc facile est circulum osculantem determinare, si altera curvarum circulum denotare supponitur.

Ita si x, y sunt coordinatae orthogonales, centrum circuli osculantis definietur per aequationes

$$x = \xi + \frac{p(pp+qq)}{rqq-2spq+tpp}$$

$$y = \eta - \frac{q(pp+qq)}{rqq-2spq+tpp}.$$

BEMERKUNG.

Die vorstehende Notiz findet sich auf dem Umschlage des Werkes: *Elementorum analyscos infinitorum Joanni Andreae Segneri Pars I.* Halle 1761 und stammt höchst wahrscheinlich aus dem Ende des achtzehnten Jahrhunderts.

STÄCKEL.

[DIE OBERFLÄCHE DES ELLIPSOIDS.]

[1.]

Wenn jeder Punkt einer Fläche durch denjenigen Punkt einer Kugelfläche mit Halbmesser 1 repräsentirt wird, dessen Radius mit der Normale des ersten Punkts parallel ist, und ein Element der Kugelfläche $d\sigma$ einem Element der Fläche ds correspondirt, so ist

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\frac{ddz}{dx^2}\frac{ddz}{dy^2} - \left(\frac{ddz}{dxdy}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)^2} = \frac{1}{rr'},$$

wenn r und r' die beiden äussersten Krümmungshalbmesser sind.

[2.]

Wenn $d\sigma$ den Raum auf der Himmelskugel bedeutet, welcher dem Elemente ds der Oberfläche des Ellipsoids

$$\left[\frac{xx}{aa}+\frac{yy}{bb}+\frac{zz}{cc}=1\right]$$

entspricht, so wird

$$ds = aabbcc\left(\frac{xx}{a^4}+\frac{yy}{b^4}+\frac{zz}{c^4}\right)^2 d\sigma.$$

Sind hier ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes der Himmelskugel, so wird

$$\xi = \frac{rx}{aa}, \qquad \eta = \frac{ry}{bb}, \qquad \zeta = \frac{rz}{cc},$$

$$rr = aa\xi\xi + bb\eta\eta + cc\zeta\zeta,$$

also

$$ds = \frac{aabbccd\sigma}{(aa\xi\xi + bb\eta\eta + cc\zeta\zeta)^2}.$$

Soll die ganze Oberfläche des Sphäroids bestimmt werden, so ist

$$d\sigma = \cos\varphi\,.\,d\varphi\,.\,d\lambda$$

zu setzen und die doppelte Integration von $\lambda = 0$ bis $\lambda = 360^0$ und von $\varphi = -90^0$ bis $\varphi = +90^0$ auszuführen. Die erstere ist leicht und man hat dann, $\sin\varphi = x$ gesetzt, die ganze Oberfläche

$$= \int \frac{\pi aabbcc\,.\,(aa+bb-(aa+bb-2cc)xx)\,dx}{(aa-(aa-cc)xx)^{\frac{3}{2}}\,.\,(bb-(bb-cc)xx)^{\frac{3}{2}}}$$

von $x = -1$ bis $x = +1$.

Dieses Integral verwandelt sich leicht in folgendes (allgemein)

$$\pi aabbcc \frac{\left(\frac{1}{aa}+\frac{1}{bb}-\frac{1}{cc}\right)x + \left(\frac{(aa-cc)(bb-cc)}{aabbcc}\right)x^3}{\sqrt{\{(aa-(aa-cc)xx)(bb-(bb-cc)xx)\}}}$$

$$+\pi aabbcc \int \frac{\frac{1}{cc} - \frac{(aa-cc)(bb-cc)}{aabbcc}xx}{\sqrt{\{(aa-(aa-cc)xx)(bb-(bb-cc)xx)\}}}\,dx,$$

also von $x = -1$ bis $x = +1$ in folgenden Werth

$$2\pi cc + 2\pi \int \frac{aabb-(aa-cc)(bb-cc)xx}{\sqrt{\{(aa-(aa-cc)xx)(bb-(bb-cc)xx)\}}}\,dx,$$

das Integral von $x = 0$ bis $x = 1$ genommen.

BEMERKUNGEN.

Gauss hat die vorstehende Notiz auf dem Einsatzblatte eines Sammelbandes niedergeschrieben, der einige seiner Abhandlungen aus den Jahren 1799 bis 1813 enthält.

Die Integration nach λ beruht auf der bekannten Formel:

$$\int_0^\pi \frac{d\psi}{(u+v\cos\psi)^2} = \frac{\pi u}{(u+v)^{\frac{3}{2}}(u-v)^{\frac{3}{2}}};$$

dabei ist

$$\psi = 2\lambda$$

$$u = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)\cos\varphi^2 + c^2\sin\varphi^2$$

$$v = \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)\cos\varphi^2$$

zu setzen, was der Substitution

$$\xi = \cos\varphi\cos\lambda, \qquad \eta = \cos\varphi\sin\lambda, \qquad \zeta = \sin\varphi$$

entspricht.

Stäckel.

[CONFORME ABBILDUNG. KRÜMMUNGSMASS.]

[1.]

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 5. Juli 1816.

. . . . Das Programm mit der Preisfrage Ihrer Societät ist mir noch nicht zu Gesichte gekommen. Mit LINDENAU habe ich auch über eine Preisfrage conferirt, die in der neuen Zeitschrift mit dem Preise von 100 Ducaten aufgegeben werden soll. Mir war eine interessante Aufgabe eingefallen, nemlich:

»**allgemein** eine gegebene Fläche so auf einer andern (gegebenen) zu »projiciren (abzubilden), dass das Bild dem Original in den kleinsten »Theilen ähnlich werde«.

Ein specieller Fall ist, wenn die erste Fläche eine Kugel, die zweite eine Ebene ist. Hier sind die stereographische und die merkatorische Projectionen particuläre Auflösungen. Man will aber die allgemeine Auflösung, worunter alle particulären begriffen sind, für jede Arten von Flächen.

Es soll darüber in dem Journal philomathique bereits von MONGE und POINSOT gearbeitet sein (wie BURCKHARDT an LINDENAU geschrieben hat), allein da ich nicht genau weiss wo, so habe ich noch nicht nachsuchen können, und weiss daher nicht, ob jener Herren Auflösungen ganz meiner Idee entsprechen und die Sache erschöpfen. Im entgegengesetzten Fall schiene mir diess einmal eine schickliche Preisfrage für eine Societät zu sein. Bei der hiesigen kommt die Reihe des Aufgebens nur alle 12 Jahre an mich. . . . .

[2.]

Die allgemeine Auflösung der Aufgabe, eine krumme Fläche in den kleinsten Theilen ähnlich auf eine Ebene zu entwerfen, scheint folgende zu sein: Es sei $V = 0$ die Gleichung der krummen Fläche und

$$dV = pdx + qdy + rdz.$$

Man integrire die Gleichung

$$qdx - pdy + \sqrt{-1}\,.\sqrt{(pp+qq+rr)}\,.\,dz = 0,$$

indem man sie mit $V = 0$ verbindet. Das Integral sei

$$W = \text{Const.}$$

Eben so sei das Integral von

$$qdx - pdy - \sqrt{-1}\,.\sqrt{(pp+qq+rr)}\,.\,dz = 0:$$

$$W' = \text{Const.}$$

Alsdann ist die vollständige Auflösung:

$$\xi + \sqrt{-1}\,.\,\eta = f(W)$$
$$\xi - \sqrt{-1}\,.\,\eta = f'(W'),$$

wo f, f' willkürliche Functionen bedeuten; oder vielmehr die Integration von

$$qdx - pdy + \sqrt{-1}\,.\sqrt{(pp+qq+rr)}\,.\,dz = 0$$

gebe

$$T + U\sqrt{-1} = \text{Const.},$$

sodann ist

$$\xi \pm \sqrt{-1}\,.\,\eta = \text{funct.}\,(T \pm U\sqrt{-1}).$$

Es sei das Integral von

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

mit $V = 0$ verbunden:

$$T + U\sqrt{-1} = \text{Const.},$$

so findet das obige Resultat statt.

[3.]

Die allgemeinste Auflösung der Aufgabe, alle Gestalten zu bestimmen, die eine gegebene krumme Fläche annehmen kann, beruht auf folgendem. Es sei P der Punkt der Himmelskugel, welchem die Normale auf der Oberfläche der Superficies in einer Gestalt entspricht, Q der demselben Punkt in einer andern Gestalt entsprechende; eben so correspondiren die Punkte P', P'', P''' etc. für eine Gestalt den Punkten Q', Q'', Q''' [etc.] für die andere. Dann besteht die Auflösung darin, dass jede geschlossene Figur $PP'P''P'''\ldots$ auf der Kugelfläche mit der correspondirenden $QQ'Q''Q'''\ldots$ einerlei Inhalt habe.

Spätere Anmerkung. Dieses schöne Theorem ist zwar vollkommen richtig, aber zur Auflösung nicht hinreichend.

BEMERKUNGEN.

Die Notizen [2] und [3] finden sich in dem Handbuche »Den astronomischen Wissenschaften gewidmet«, das GAUSS im November 1801 begonnen hat; sie stammen vermuthlich ungefähr aus derselben Zeit, wie der unter [1] abgedruckte Brief von GAUSS an SCHUMACHER.

STÄCKEL.

[FLÄCHENTREUE ABBILDUNG EINER EBENE AUF EINE ANDERE EBENE.]

Aufgabe. Die Punkte in der Ebene so in eine zweite Ebene zu übertragen, dass jeder unendlich kleinen Figur in der einen Ebene eine von gleichem Inhalt in der andern entspreche.

Es seien die Coordinaten in der einen Ebene x und y,
die correspondirenden in der andern ξ und η.

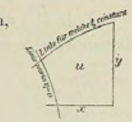
Die allgemeine Auflösung ist dann folgende.

Es sei u eine willkürliche Function von x und ξ; man mache

$$y = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \eta = -\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Diese Auflösung ist vollkommen richtig und allgemein, und lässt sich leicht geometrisch versinnlichen.

u bedeutet nemlich den hier gezeichneten Flächenraum:



Bei der Kugelfläche darf man nur Polarcoordinaten (θ, r) anwenden und θ, $\cos r$ statt x, y substituiren, so lässt sich leicht eine Kugelfläche auf die andere oder auf die Ebene übertragen etc.

BEMERKUNG.

Die vorstehende Notiz steht in einem Handbuche und darf in die Zeit von 1820 bis 1822 gesetzt werden.

STÄCKEL.

STAND MEINER UNTERSUCHUNG

ÜBER DIE UMFORMUNG DER FLÄCHEN.

Dec. 13. 1822.

[1.]

[Es seien

x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Fläche,

A, B, C die Cosinus der Winkel, welche die Normale der Fläche in diesem Punkte mit den Coordinatenaxen bildet. Dann ist:]

$$[1] \qquad A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

$$[2] \qquad AA + BB + CC = 1.$$

[Die Coordinaten x, y, z mögen durch zwei unabhängige Veränderliche t, u ausgedrückt werden. Man setze:]

$$[3] \qquad \begin{cases} A' = \frac{\partial A}{\partial t}, & B' = \frac{\partial B}{\partial t}, \quad C' = \frac{\partial C}{\partial t}, \\ A'' = \frac{\partial A}{\partial u}, & B'' = \frac{\partial B}{\partial u}, \quad C'' = \frac{\partial C}{\partial u}; \end{cases}$$

$$[4] \qquad \begin{cases} a = \frac{\partial x}{\partial t}, & b = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad c = \frac{\partial z}{\partial t}, \\ \alpha = \frac{\partial x}{\partial u}, & \beta = \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \gamma = \frac{\partial z}{\partial u}; \end{cases}$$

$$[5] \qquad \begin{cases} a' = \frac{\partial\partial x}{\partial t^2}, & b' = \frac{\partial\partial y}{\partial t^2}, \quad c' = \frac{\partial\partial z}{\partial t^2}, \\ a'' = \frac{\partial\partial x}{\partial t\,\partial u}, & b'' = \frac{\partial\partial y}{\partial t\,\partial u}, \quad c'' = \frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}; \\ [\alpha' = \frac{\partial\partial x}{\partial u\,\partial t}, & \beta' = \frac{\partial\partial y}{\partial u\,\partial t}, \quad \gamma' = \frac{\partial\partial z}{\partial u\,\partial t}, \\ \alpha'' = \frac{\partial\partial x}{\partial u^2}, & \beta'' = \frac{\partial\partial y}{\partial u^2}, \quad \gamma'' = \frac{\partial\partial z}{\partial u^2}. \end{cases}$$

Dann ergibt sich aus den Relationen:]

$$[6] \qquad \begin{cases} aA + bB + cC = 0 \\ \alpha A + \beta B + \gamma C = 0, \end{cases}$$

[dass]

$$[7] \qquad \begin{cases} \alpha = cB - bC & [a = \beta C - \gamma B] \\ \beta = aC - cA & [b = \gamma A - \alpha C] \\ \gamma = bA - aB & [c = \alpha B - \beta B] \end{cases}$$

[ist, vorausgesetzt, dass man die Veränderlichen t und u derart wählt, dass]

$$[8] \qquad aa + bb + cc = \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = mm$$

$$[9] \qquad [a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$$

wird.

Vermöge der Gleichungen 7 erhält man:]

$$[10] \qquad \begin{cases} a'' = cB' - bC' + Bc' - Cb' \\ b'' = aC' - cA' + Ca' - Ac' \\ c'' = bA' - aB' + Ab' - Ba' \end{cases}$$

[und umgekehrt ist wegen der Gleichungen 2 und 6:]

$$[11] \qquad \begin{cases} a' = A(Aa' + Bb' + Cc') - Bc'' + Cb'' \\ b' = B(Aa' + Bb' + Cc') - Ca'' + Ac'' \\ c' = C(Aa' + Bb' + Cc') - Ab'' + Ba''. \end{cases}$$

Man hat ferner hieraus

$$Aa'' + Bb'' + Cc'' = -\alpha A' - \beta B' - \gamma C',$$

und aus der Differentiation von

$$aA+bB+cC=0$$

folgt

$$Aa''+Bb''+Cc''=-aA''-bB''-cC'',$$

also

$$aA''+bB''+cC''=\alpha A'+\beta B'+\gamma C'$$

oder

$$0=a(A''+BC'-CB')+b(B''+CA'-AC')+c(C''+AB'-BA'),$$

welches verbunden mit

$$0=aA+bB+cC$$

leicht folgendes gibt:

$$[12]\qquad \begin{cases} na = A'+CB''-BC'' \\ nb = B'+AC''-CA'' \\ nc = C'+BA''-AB'', \end{cases}$$

$$[13]\qquad \begin{cases} n\alpha = A''+BC'-CB' \\ n\beta = B''+CA'-AC' \\ n\gamma = C''+AB'-BA', \end{cases}$$

wo

$$[14]\qquad \begin{aligned} mmnn = {} & A'A'+B'B'+C'C'+A''A''+B''B''+C''C'' \\ & +2A(B'C''-C'B'')+2B(C'A''-A'C'')+2C(A'B''-B'A''). \end{aligned}$$

Wir haben ferner aus der Differentiation von $a\alpha+b\beta+c\gamma=0$:

$$a\alpha'+b\beta'+c\gamma'+\alpha a'+\beta b'+\gamma c'=0$$

oder

$$aa''+bb''+cc''+\alpha a'+\beta b'+\gamma c'=0$$

oder

$$mm''+\alpha a'+\beta b'+\gamma c'=0.$$

Diess verbunden mit

$$aa'+bb'+cc'=mm'$$

$$Aa'+Bb'+Cc'=-aA'-bB'-cC'$$

gibt, wenn man resp. mit

$$\alpha,\qquad a,\qquad mmA$$

multiplicirt und addirt:

$$[15]\qquad \begin{cases} a' = \frac{am'-\alpha m''}{m}-A(aA'+bB'+cC') \\ b' = \frac{bm'-\beta m''}{m}-B(aA'+bB'+cC') \\ c' = \frac{cm'-\gamma m''}{m}-C(aA'+bB'+cC'). \end{cases}$$

[Aus 6 und 8 folgt nemlich:

$$mmA = b\gamma-c\beta$$
$$mmB = c\alpha-a\gamma$$
$$mmC = a\beta-b\alpha,$$

und es gelten ferner die Identitäten:

$$m^4 = (b\gamma-c\beta)^2+mm(\alpha\alpha+aa)$$
$$0 = (b\gamma-c\beta)(c\alpha-a\gamma)+mm(\alpha\beta+ab)$$
$$0 = (b\gamma-c\beta)(a\beta-b\alpha)+mm(\alpha\gamma+ac).$$

Vermöge der Gleichungen 15 erhält man ferner aus den Gleichungen 10:]

$$[16]\qquad \begin{cases} a'' = \frac{\alpha m'+am''}{m}+cB'-bC' \\ b'' = \frac{\beta m'+bm''}{m}+aC'-cA' \\ c'' = \frac{\gamma m'+cm''}{m}+bA'-aB', \end{cases}$$

[und aus diesen Gleichungen folgt:]

$$[17]\qquad a''A'+b''B'+c''C'=-\frac{\theta m'}{m}+\frac{m''}{m}(aA'+bB'+cC'),$$

[wo θ den Ausdruck

$$-(\alpha A'+\beta B'+\gamma C')=-(aA''+bB''+cC'')$$

bezeichnet. In entsprechender Weise folgt aus den Gleichungen 15:]

$$[18]\qquad a'A''+b'B''+c'C''=-\frac{\theta m'}{m}-\frac{m''}{m}(\alpha A''+\beta B''+\gamma C'').$$

[Weiter ergibt sich aus den Gleichungen 16:]

$$[19]\quad \begin{cases} Bc''-Cb'' = \dfrac{-am'+\alpha m''}{m} \\ Ca''-Ac'' = \dfrac{-bm'+\beta m''}{m} \\ Ab''-Ba'' = \dfrac{-cm'+\gamma m''}{m}. \end{cases}$$

[Durch Vertauschung von t und u erhält man aus 15:

$$\begin{cases} \alpha'' = \dfrac{\alpha m''-am'}{m}-A(\alpha A''+\beta B''+\gamma C'') \\ \beta'' = \dfrac{\beta m''-bm'}{m}-B(\alpha A''+\beta B''+\gamma C'') \\ \gamma'' = \dfrac{\gamma m''-cm'}{m}-C(\alpha A''+\beta B''+\gamma C'') \end{cases}$$

und leitet hieraus leicht die Relationen ab:]

$$[20]\quad \begin{cases} a'+\alpha'' = -Ammn \\ b'+\beta'' = -Bmmn \\ c'+\gamma'' = -Cmmn. \end{cases}$$

[Werden nunmehr in den Gleichungen 15 und 16 für a, b, c; α, β, γ die Werthe aus den Gleichungen 12 und 13 eingesetzt, so findet man:]

$$[21]\quad \begin{cases} na' = \left(\frac{m'}{m}-AA'\right)(A'+CB''-BC'')-AB'(B'+AC''-CA'') \\ \qquad -AC'(C'+BA''-AB'')-\frac{m''}{m}(A''+BC'-CB'), \\ nb' = \left(\frac{m'}{m}-BB'\right)(B'+AC''-CA'')-BC'(C'+BA''-AB'') \\ \qquad -BA'(A'+CB''-BC'')-\frac{m''}{m}(B''+CA'-AC'), \\ nc' = \left(\frac{m'}{m}-CC'\right)(C'+BA''-AB'')-CA'(A'+CB''-BC'') \\ \qquad -CB'(B'+AC''-CA'')-\frac{m''}{m}(C''+AB'-BA') \end{cases}$$

[und]

$$[22]\quad \begin{cases} na'' = \frac{m'}{m}(A''+BC'-CB')+\frac{m''}{m}(A'+CB''-BC'')-A(A'A''+B'B''+C'C'') \\ nb'' = \frac{m'}{m}(B''+CA'-AC')+\frac{m''}{m}(B'+AC''-CA'')-B(A'A''+B'B''+C'C'') \\ nc'' = \frac{m'}{m}(C''+AB'-BA')+\frac{m''}{m}(C'+BA''-AC'')-C(A'A''+B'B''+C'C''), \end{cases}$$

[so dass jetzt die zweiten Ableitungen der Coordinaten x, y, z nach t und u allein durch m, A, B, C und deren Ableitungen nach t und u ausgedrückt sind.]

[2.]

Die Formel

$$\frac{\partial a'}{\partial u} = \frac{\partial a''}{\partial t}$$

gibt uns folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} &\alpha\left(\frac{\partial\partial \log m}{\partial t^2}+\frac{\partial\partial \log m}{\partial u^2}\right)+\frac{m''}{m}\left(a'+\frac{\partial\partial x}{\partial u^2}\right) \\ &+A''(aA'+bB'+cC')+A(a''A'+b''B'+c''C')+c'B'-b'C' \\ &+A\left(a\frac{\partial\partial A}{\partial t\,\partial u}+b\frac{\partial\partial B}{\partial t\,\partial u}+c\frac{\partial\partial C}{\partial t\,\partial u}\right)+c\frac{\partial\partial B}{\partial t^2}-b\frac{\partial\partial C}{\partial t^2} \qquad = 0. \end{aligned}$$

Und eben so [liefern uns die Formeln

$$\frac{\partial b'}{\partial u} = \frac{\partial b''}{\partial t}$$
$$\frac{\partial c'}{\partial u} = \frac{\partial c''}{\partial t}\Big]$$

zwei andere ganz ähnliche [Gleichungen]; multiplicirt man sie respective mit α, β, γ und addirt, so erhält man

$$\begin{aligned} &mm\left(\frac{\partial\partial \log m}{\partial t^2}+\frac{\partial\partial \log m}{\partial u^2}\right) \\ &+(aA'+bB'+cC')(\alpha A''+\beta B''+\gamma C'')+\Sigma\alpha(c'B'-b'C') \\ &\qquad +\Sigma\alpha\left(c\frac{\partial\partial B}{\partial t^2}-b\frac{\partial\partial C}{\partial t^2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Theile sind

$$= \frac{\partial\,\Sigma\alpha(cB'-bC')}{\partial t}-\Sigma a''(cB'-bC').$$

Nun aber ist [wegen 12]:

$$[23]\quad \begin{cases} cB'-bC' = A\theta \\ aC'-cA' = B\theta \\ bA'-aB' = C\theta, \end{cases}$$

[und hierin darf man, wiederum nach 12, setzen:]

$$\theta = -\frac{A'A''+B'B''+C'C''}{n},$$

also [ist]

$$\Sigma\,\alpha(cB'-bC') = 0,$$

folglich auch dessen Differential $= 0$. Ferner

$$\begin{aligned}\Sigma\,a''(cB'-bC') &= \theta(Aa''+Bb''+Cc'')\\ &= -\theta(aA''+bB''+cC'')\\ &= +\theta\theta.\end{aligned}$$

Wir haben folglich:

$$mm\left(\frac{\partial\partial\log m}{\partial t^2}+\frac{\partial\partial\log m}{\partial u^2}\right) = -(aA'+bB'+cC')(\alpha A''+\beta B''+\gamma C'') + \frac{(A'A''+B'B''+C'C'')^2}{nn}.$$

Setzt man also

$$A(B'C''-C'B'')+B(C'A''-A'C'')+C(A'B''-B'A'') = \Delta,$$

so wird

$$mm\left(\frac{\partial\partial\log m}{\partial t^2}+\frac{\partial\partial\log m}{\partial u^2}\right) = -\frac{(A'A'+B'B'+C'C'+\Delta)(A''A''+B''B''+C''C''+\Delta)-(A'A''+B'B''+C'C'')^2}{nn},$$

[oder]

[24] $$\frac{\partial\partial\log m}{\partial t^2}+\frac{\partial\partial\log m}{\partial u^2} = -\Delta.$$

Wir bemerken noch, dass

$$\left\{\begin{aligned} B'C''-C'B'' &= A\Delta\\ C'A''-A'C'' &= B\Delta\\ A'B''-B'A'' &= C\Delta.\end{aligned}\right.$$

Auch haben wir uns überzeugt, dass in den Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial a'}{\partial u} = \frac{\partial \alpha'}{\partial t},\quad \text{etc.}$$

nichts weiter liegt als dieses Resultat [nemlich die Gleichung 24].

[Die Gleichung 24 hat folgende geometrische Bedeutung. Wird das Flächenelement

$$mmdtdu$$

mittelst paralleler Normalen auf die Kugel vom Radius 1 abgebildet und entspricht ihm dort ein Flächenelement der Grösse

$$A(B'C''-C'B'')+B(C'A''-A'C'')+C(A'B''-B'A'')dtdu = \Delta dtdu,$$

so ist das Krümmungsmass der Fläche im Punkte t, u:

$$K = \frac{\Delta}{mm}.$$

Vermöge der Gleichung 24 wird alsdann:

[25] $$K = -\frac{1}{mm}\left(\frac{\partial\partial\log m}{\partial t^2}+\frac{\partial\partial\log m}{\partial u^2}\right),$$

K lässt sich also allein durch m und die Ableitungen davon ausdrücken, oder das Krümmungsmass behält denselben Werth bei allen Umformungen der Fläche, die deren Linienelement

$$\sqrt{\{mm(dt^2+du^2)\}}$$

unverändert lassen.]

[3.]

Die Differentiation von na und $n\alpha$ gibt:

$$na''+an'' = \frac{\partial\partial A}{\partial t\partial u}+C\frac{\partial\partial B}{\partial u^2}-B\frac{\partial\partial C}{\partial u^2} = A^{(3)}+CB^{(4)}-BC^{(4)}$$

$$na''+\alpha n' = \frac{\partial\partial A}{\partial t\partial u}+B\frac{\partial\partial C}{\partial t^2}-C\frac{\partial\partial B}{\partial t^2} = A^{(3)}+BC^{(2)}-CB^{(2)}.$$

[Mithin ist]

$$an''-\alpha n' = C(B^{(2)}+B^{(4)})-B(C^{(2)}+C^{(4)}),$$

[und ebenso:

$$bn''-\beta n' = A(C^{(2)}+C^{(4)})-C(A^{(2)}+A^{(4)})$$

$$cn''-\gamma n' = B(A^{(2)}+A^{(4)})-A(B^{(2)}+B^{(4)}).]$$

Hieraus [folgt mit Hülfe von 7, 8 und 9]

$$mmn'' = \alpha(A^{(2)}+A^{(4)})+\beta(B^{(2)}+B^{(4)})+\gamma(C^{(2)}+C^{(4)})$$

$$mmn' = a(A^{(2)}+A^{(4)})+b(B^{(2)}+B^{(4)})+c(C^{(2)}+C^{(4)}).$$

Nun ist ferner:

$$mmn'+mnm' = aA^{(2)}+bB^{(2)}+cC^{(2)}+\alpha A^{(3)}+\beta B^{(3)}+\gamma C^{(3)}.$$

[Differentiirt man nemlich die beiden Seiten der Identität

$$mmnn = A'A'+B'B'+C'C'+A''A''+B''B''+C''C''$$
$$+2A(B'C''-C'B'')+2B(C'A''-A'C'')+2C(A'B''-B'A'')$$

nach t und ordnet rechts nach $A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}; A^{(3)}, B^{(3)}, C^{(3)}$, so werden vermöge der Gleichungen 12 und 13 die Coefficienten der Reihe nach gleich $2na$, $2nb$, $2nc$; $2n\alpha$, $2n\beta$, $2n\gamma$. Entsprechend ergibt sich durch Differentiation nach u:]

$$mmn''+mnm'' = aA^{(3)}+bB^{(3)}+cC^{(3)}+\alpha A^{(4)}+\beta B^{(4)}+\gamma C^{(4)},$$

also [wird]

$$(\odot)\quad \begin{cases} mnm' = \alpha A^{(3)}+\beta B^{(3)}+\gamma C^{(3)}-aA^{(4)}-bB^{(4)}-cC^{(4)} \\ mnm'' = -\alpha A^{(2)}-\beta B^{(2)}-\gamma C^{(2)}+aA^{(3)}+bB^{(3)}+cC^{(3)}. \end{cases}$$

Noch verdient bemerkt zu werden [dass aus der Differentiation von 12 und 13 unter Benutzung der Gleichungen ⌖ hervorgeht:]

$$na'+an' = A^{(2)}-A\Delta+CB^{(3)}-BC^{(3)}$$
$$n\alpha''+\alpha n'' = A^{(4)}-A\Delta+BC^{(3)}-CB^{(3)},$$

also

$$n'a+n''\alpha+n(\alpha''+a') = A^{(2)}+A^{(4)}-2A\Delta,$$

oder

$$A^{(2)}+A^{(4)} = n'a+n''\alpha+(2\Delta-mmnn)A$$
$$B^{(2)}+B^{(4)} = n'b+n''\beta+(2\Delta-mmnn)B$$
$$C^{(2)}+C^{(4)} = n'c+n''\gamma+(2\Delta-mmnn)C.$$

[4.]

Für die [auf die Ebene] abwickelungsfähige Fläche findet man aus anderweitigen Betrachtungen, dass, wenn Q, Q' willkürliche Functionen von q bedeuten und aus der Auflösung [der] Gleichung

$$qt+Qu = 1$$

hervorgeht:

$$Q' = F(t,u) = P,$$

A, B und C Functionen von P sein müssen.

[Aus der Gleichung $qt+Qu = 1$ findet man durch Differentiation nach t und u:

$$q+\left(t+\frac{dQ}{dq}u\right)q' = 0$$
$$Q+\left(t+\frac{dQ}{dq}u\right)q'' = 0$$
$$\left(2+\frac{ddQ}{dq^2}q'u\right)q'+\left(t+\frac{dQ}{dq}u\right)q^{(2)} = 0$$
$$\frac{dQ}{dq}q'+q''+\frac{ddQ}{dq^2}uq'q''+\left(t+\frac{dQ}{dq}u\right)q^{(3)} = 0$$
$$\left(2\frac{dQ}{dq}+\frac{ddQ}{dq^2}q''u\right)q''+\left(t+\frac{dQ}{dq}u\right)q^{(4)} = 0$$

und hieraus folgen die Identitäten:

$$q''q''q^{(2)}-2q''q'q^{(3)}+q'q'q^{(4)} = 0$$

und

$$P''P''P^{(2)}-2P''P'P^{(3)}+P'P'P^{(4)} = 0.]$$

Diess gibt

$$A''A''A^{(2)}-2A'A''A^{(3)}+A'A'A^{(4)} = 0;$$

allein man sieht noch nicht, wie diese Gleichung lediglich vermittelst des Obigen aus $m = 1$ abgeleitet werden könnte.

[5.]

15. Dec. Diess ist nunmehro abgemacht, obwohl man dadurch für den Fall, wo m nicht constant ist, nichts zu gewinnen vermag.

Es wird nemlich [wenn $m = 1$ ist]

$$\sqrt{\{(A'dt+A''du)^2+(B'dt+B''du)^2+(C'dt+C''du)^2\}}$$

ein Binomium von der Form $p'dt+p''du$ und ein vollständiges Differential, welches wir $= dq$ setzen. Diess scheint am einfachsten aus $\Delta = 0$ und ⌖ zu folgen.

Die zweiten Differentialquotienten von q sollen $p^{(2)}$, $p^{(3)}$, $p^{(4)}$ sein. Diess vorausgesetzt, sind A, B, C Functionen von q, und so setzen wir

$$\frac{dA}{dq} = \mathfrak{A}', \qquad \frac{d\mathfrak{A}'}{dq} = \mathfrak{A}'', \qquad \frac{dB}{dq} = \mathfrak{B}', \qquad \text{etc.}$$

und haben

$$A' = p'\mathfrak{A}', \qquad A'' = p''\mathfrak{A}', \qquad B' = p'\mathfrak{B}', \qquad \text{etc.}$$

$$\begin{aligned} A^{(2)} &= p'p'\mathfrak{A}'' + p^{(2)}\mathfrak{A}' \\ A^{(3)} &= p'p''\mathfrak{A}'' + p^{(3)}\mathfrak{A}' \\ A^{(4)} &= p''p''\mathfrak{A}'' + p^{(4)}\mathfrak{A}'. \end{aligned}$$

[Dadurch gehen die Gleichungen 12 und 13 über in die folgenden]

$$\begin{aligned} na &= p'\mathfrak{A}' + p''(C\mathfrak{B}' - B\mathfrak{C}') \\ nb &= p'\mathfrak{B}' + p''(A\mathfrak{C}' - C\mathfrak{A}') \\ nc &= p'\mathfrak{C}' + p''(B\mathfrak{A}' - A\mathfrak{B}') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n\alpha &= p''\mathfrak{A}' - p'(C\mathfrak{B}' - B\mathfrak{C}') \\ n\beta &= p''\mathfrak{B}' - p'(A\mathfrak{C}' - C\mathfrak{A}') \\ n\gamma &= p''\mathfrak{C}' - p'(B\mathfrak{A}' - A\mathfrak{B}'). \end{aligned}$$

[Aus diesen Relationen folgt auch, da $m = 1$ ist:]

$$nn = p'p' + p''p''.$$

Die obigen beiden Formeln ⊙ geben jetzt [da $m' = m'' = 0$ ist]:

$$\begin{aligned} 0 &= p''p^{(3)} - p'p^{(4)} + p''(p'p' + p''p'')\Sigma A(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'' - \mathfrak{C}'\mathfrak{B}'') \\ 0 &= p''p^{(2)} - p'p^{(3)} + p'(p'p' + p''p'')\Sigma A(\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'' - \mathfrak{C}'\mathfrak{B}'') \end{aligned}$$

und hieraus

$$p''p''p^{(2)} - 2p''p'p^{(3)} + p'p'p^{(4)} = 0$$

und hieraus auch

$$A''A''A^{(2)} - 2A''A'A^{(3)} + A'A'A^{(4)} = 0$$

etc.

BEMERKUNGEN.

Am 11. December 1822 hatte Gauss als Beantwortung einer von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Copenhagen aufgegebenen Preisfrage seine Abhandlung: *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird* (Bd. IV. S. 189 bis 216) an Schumacher abgesandt. Die vorstehenden Aufzeichnungen vom 13. bis 15. December 1822, die auf einem einzelnen Blatte gemacht sind, beweisen, dass er ihr mit voller Absicht Newtons stolzes Motto »Ab his via sternitur ad maiora« auf den Weg gegeben hatte, denn die Darstellung des Quadrates des Linienelementes einer beliebigen Fläche in der Form

$$mm(dt^2 + du^2)$$

hatte ihm den Zugang zu der Lösung des Problems eröffnet, das Krümmungsmass, dessen Unveränderlichkeit gegenüber Biegungen er schon früh erkannt hatte (vergl. S. 372), durch die Coefficienten des Linienelementes, also hier durch mm, und die Ableitungen davon auszudrücken, und damit war die Grundlage für die *Disquisitiones generales circa superficies curvas* gewonnen.

Auf denselben Gegenstand bezieht sich eine Notiz in einem Handbuche, die vermuthlich ungefähr aus derselben Zeit, wie die bereits S. 373 abgedruckte Aufzeichnung stammt:

»Wahrscheinlich findet folgendes höchst zierliche allgemeine Theorem statt: Ist $n = e^{\nu}$, so wird

$$\frac{\partial\partial\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial\partial\nu}{\partial y^2} = \frac{n\left(\frac{\partial\partial n}{\partial x^2} + \frac{\partial\partial n}{\partial y^2}\right) - \left\{\left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial y}\right)^2\right\}}{nn} = \frac{1}{rr'nn} = \frac{d\Sigma}{dS.nn} = \frac{d\Sigma}{ds},$$

wenn r und r' die beiden äussersten Krümmungshalbmesser, die auf einander senkrecht, [bedeuten und] wenn

$d\Sigma$	*Raum*	*auf*	*der*	*Himmelskugel*
dS	„	„	„	*krummen Fläche*
ds	„	*in der Ebene*		

[und $ds = nndS$ ist.]«

Stäckel.

[DIE SEITENKRÜMMUNG.]

[1.]

Die Bestimmenden [eines Punktes x, y, z] der Fläche [seien] t, θ [und die Differentiale der Coordinaten x, y, z]:

$$[1] \qquad \begin{cases} dx = a\,dt + \alpha\,d\theta \\ dy = b\,dt + \beta\,d\theta \\ dz = c\,dt + \gamma\,d\theta \end{cases}$$

$$[2] \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = P\,dt^2 + 2\,Q\,dt\,d\theta + R\,d\theta^2.$$

[Bezeichnen ferner] $\mathbf{X}, Y, Z$ [die] der Normale angehörig[en Richtungscosinus, so ist]

$$[3] \qquad \begin{cases} \sigma \mathbf{X} = b\gamma - c\beta \\ \sigma Y = c\alpha - a\gamma \\ \sigma Z = a\beta - b\alpha. \end{cases}$$

[Jetzt betrachte man eine Curve auf der Fläche.] Es seien [also] t und θ Functionen von u. [Dann gelten für die Richtungscosinus

ξ, η, ζ der Tangente

ξ', η', ζ' der Hauptnormale

ξ'', η'', ζ'' der Binormale

folgende Gleichungen. Erstens ist:]

$$[4] \qquad \begin{cases} \frac{dx}{du} = s\xi \\ \frac{dy}{du} = s\eta \\ \frac{dz}{du} = s\zeta; \end{cases}$$

[dabei wird s bestimmt durch die Formel:

$$[5] \qquad ss = P\left(\frac{dt}{du}\right)^2 + 2\,Q\,\frac{dt}{du}\frac{d\theta}{du} + R\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2.$$

Zweitens ist:]

$$[6] \qquad \begin{cases} \frac{d\xi}{du} = \tau\xi' \\ \frac{d\eta}{du} = \tau\eta' \\ \frac{d\zeta}{du} = \tau\zeta'; \end{cases}$$

[dabei wird τ bestimmt durch die Formel:

$$[7] \qquad \tau\tau = \left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2.$$

Drittens hat man:]

$$[8] \qquad \begin{cases} \eta\zeta' - \zeta\eta' = \xi'' \\ \zeta\xi' - \xi\zeta' = \eta'' \\ \xi\eta' - \eta\xi' = \zeta''. \end{cases}$$

Dann ist:

$$[9] \qquad \begin{cases} \mathbf{X}\xi + Y\eta + Z\zeta = 0 \\ \mathbf{X}\xi' + Y\eta' + Z\zeta' = -\cos\psi \\ \mathbf{X}\xi'' + Y\eta'' + Z\zeta'' = +\sin\psi. \end{cases}$$

[Bei diesen Bezeichnungen ist]

$s\,du$ Element der Curve

$\tau\,du$ Element der absoluten Krümmung

$\frac{\tau}{s}$ Mass der absoluten Krümmung

$\frac{\tau}{s}\cos\psi$ Mass der Normalkrümmung (nach P convex)

$\frac{\tau}{s}\sin\psi$ Mass der Seitenkrümmung.

[2.]

[Setzt man

$$[10]\qquad \begin{cases} \frac{dt}{du} = t', & \frac{d\theta}{du} = \theta', \\ \frac{ddt}{du^2} = t'', & \frac{dd\theta}{du^2} = \theta'', \end{cases} \qquad \frac{ds}{du} = s',$$

$$[11]\qquad \begin{cases} da = x^{(2)}dt + x^{(3)}d\theta, & d\alpha = x^{(3)}dt + x^{(4)}d\theta, \\ db = y^{(2)}dt + y^{(3)}d\theta, & d\beta = y^{(3)}dt + y^{(4)}d\theta, \\ dc = z^{(2)}dt + z^{(3)}d\theta, & d\gamma = z^{(3)}dt + z^{(4)}d\theta, \end{cases}$$

so wird:]

$$\begin{aligned} s\xi &= at' + \alpha\theta' \\ s\eta &= bt' + \beta\theta' \\ s\zeta &= ct' + \gamma\theta', \end{aligned}$$

[und daraus erhält man durch Differentiation nach u:]

$$[12]\qquad \begin{cases} s'\xi + \xi' s\tau = a't' + \alpha'\theta' + at'' + \alpha\theta'' \\ s'\eta + \eta' s\tau = b't' + \beta'\theta' + bt'' + \beta\theta'' \\ s'\zeta + \zeta' s\tau = c't' + \gamma'\theta' + ct'' + \gamma\theta''. \end{cases}$$

[Werden diese Gleichungen der Reihe nach mit X, Y, Z multiplicirt und addirt, so ergibt sich wegen der Identitäten

$$\begin{aligned} aX + bY + cZ &= 0 \\ \alpha X + \beta Y + \gamma Z &= 0, \end{aligned}$$

die aus der Gleichung 3 folgen:]

$$[13]\qquad \begin{cases} -\tau s\cos\psi = t't'(Xx^{(2)} + Yy^{(2)} + Zz^{(2)}) \\ \qquad\qquad + 2t'\theta'(Xx^{(3)} + Yy^{(3)} + Zz^{(3)}) \\ \qquad\qquad + \theta'\theta'\ (Xx^{(4)} + Yy^{(4)} + Zz^{(4)}), \end{cases}$$

[und durch diese Gleichung ist die Normalkrümmung bestimmt.]

[3.]

Für das Mass der Seitenkrümmung der Linie, für die θ constant ist, [stellen wir folgende Betrachtung an.

In diesem Falle sei $t = u$, also

$$t' = 1, \qquad \theta' = 0.$$

Alsdann wird der Reihe nach:]

$$[5']\qquad aa + bb + cc = ss, \qquad ss' = aa' + bb' + cc'$$

$$[4']\qquad \begin{cases} s\xi = a \\ s\eta = b \\ s\zeta = c \end{cases}$$

$$[12']\qquad \begin{cases} \tau s\xi' + \xi s' = a' \\ \tau s\eta' + \eta s' = b' \\ \tau s\zeta' + \zeta s' = c' \end{cases}$$

$$[8']\qquad \begin{cases} \eta c' - \zeta b' = \tau s\xi'' \\ \zeta a' - \xi c' = \tau s\eta'' \\ \xi b' - \eta a' = \tau s\zeta''. \end{cases}$$

[Werden die letzten drei Gleichungen der Reihe nach mit σsX, σsY, σsZ multiplicirt und addirt, so ergibt sich wegen 9:

$$\sigma\tau ss\sin\psi = \sigma s\{a'(Y\zeta - Z\eta) + b'(Z\xi - X\zeta) + c'(X\eta - Y\xi)\}.$$

Es ist aber:

$$\sigma s(Y\zeta - Z\eta) = (c\alpha - a\gamma)c - (a\beta - b\alpha)b,$$

also]

$$\sigma s(Y\zeta - Z\eta) = (aa + bb + cc)\alpha - a(a\alpha + b\beta + c\gamma)$$

[oder

$$= P\alpha - Qa.$$

Mithin wird:]

$$\sigma s^3 \cdot \frac{\tau}{s}\sin\psi = P(\alpha a' + \beta b' + \gamma c') - Q(aa' + bb' + cc').$$

[Vorher wurde gesetzt:]

$$aa+bb+cc = P$$
$$a\alpha+b\beta+c\gamma = Q$$
$$\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma = R,$$

[mithin wird:]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a'\alpha+b'\beta+c'\gamma+\tfrac{1}{2}\frac{\partial P}{\partial \theta}.$$

[Setzt man nun ein für allemal

$$\frac{\partial P}{\partial t} = P', \qquad \frac{\partial P}{\partial \theta} = P'',$$
$$\frac{\partial Q}{\partial t} = Q', \qquad \frac{\partial Q}{\partial \theta} = Q'',$$
$$\frac{\partial R}{\partial t} = R', \qquad \frac{\partial R}{\partial \theta} = R'',$$

so wird:

$$\sigma s^3 \cdot \frac{\tau}{s} \sin\psi = P(Q'-\tfrac{1}{2}P'')-\tfrac{1}{2}QP'.$$

Nun ist

$$\frac{\tau}{s}\sin\psi \,.\, s\,du = \tau \sin\psi\, du$$

das Differential der Seitenkrümmung, also ergibt sich, dass]

$$(P(Q'-\tfrac{1}{2}P'')-\tfrac{1}{2}QP')\,dt$$

gleich σss mal dem Differential der Seitenkrümmung [ist. Es war aber]

$$\sigma\sigma = PR-QQ$$
$$ss = P;$$

[demnach erhält man schliesslich die Formel:]

[14] $$\text{Diff. d. Seitenkr.} = \frac{(PQ'-\tfrac{1}{2}PP''-\tfrac{1}{2}QP')\,dt}{\sqrt{(PR-QQ)}\,.\,P}.$$

[4.]

Allgemein ist [das] Differential der Seitenkrümmung

$$\begin{aligned} df &= \tau\, du \,.\, \sin\psi \\ &= \tau\, du \{\xi'(Y\zeta-Z\eta)+\eta'(Z\xi-X\zeta)+\zeta'(X\eta-Y\xi)\}, \end{aligned}$$

[also nach 12:]

$$\begin{aligned} s\frac{df}{du} = {} & t'\{a'(Y\zeta-Z\eta)+b'(Z\xi-X\zeta)+c'(X\eta-Y\xi)\} \\ & +\theta'\{\alpha'(Y\zeta-Z\eta)+\beta'(Z\xi-X\zeta)+\gamma'(X\eta-Y\xi)\} \\ & +t''\{a\,(Y\zeta-Z\eta)+b\,(Z\xi-X\zeta)+c\,(X\eta-Y\xi)\} \\ & +\theta''\{\alpha\,(Y\eta-Z\eta)+\beta\,(Z\xi-X\zeta)+\gamma\,(X\eta-Y\xi)\}. \end{aligned}$$

[Setzt man]

$$\frac{\partial\partial x}{\partial t^2} = a^{(2)}, \qquad \frac{\partial\partial x}{\partial t\,\partial\theta} = a^{(3)}, \qquad \left[\frac{\partial\partial x}{\partial\theta^2} = a^{(4)},\right]$$

[so wird]

$$a' = a^{(2)}t'+a^{(3)}\theta'$$
$$\alpha' = a^{(3)}t'+a^{(4)}\theta'$$

etc.

[und wegen der Identität $\frac{\partial a}{\partial\theta} = \frac{\partial\alpha}{\partial t}$:]

[15] $$\left\{\begin{aligned} aa' &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial(aa)}{\partial t}\cdot t'+\tfrac{1}{2}\frac{\partial(aa)}{\partial\theta}\cdot\theta' \\ a\alpha' &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial(aa)}{\partial\theta}\cdot t'+\frac{\partial(a\alpha)}{\partial\theta}\cdot\theta'-\tfrac{1}{2}\frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial t}\cdot\theta' \\ \alpha a' &= -\tfrac{1}{2}\frac{\partial(aa)}{\partial\theta}\cdot t'+\frac{\partial(a\alpha)}{\partial t}\cdot t'+\tfrac{1}{2}\frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial t}\cdot\theta' \\ \alpha\alpha' &= \tfrac{1}{2}\frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial t}\cdot t'+\tfrac{1}{2}\frac{\partial(\alpha\alpha)}{\partial\theta}\cdot\theta'. \end{aligned}\right.$$

[Ferner war]

$$s\xi = at'+\alpha\theta'$$
$$s\eta = bt'+\beta\theta'$$
$$s\zeta = ct'+\gamma\theta'$$

[und]

$$\sigma X = b\gamma-c\beta$$
$$\sigma Y = c\alpha-a\gamma$$
$$\sigma Z = a\beta-b\alpha.$$

[Mithin ist:]

$$s\sigma(Y\zeta-Z\eta) = t'(\alpha P-aQ)+\theta'(\alpha Q-aR)$$
$$s\sigma(Z\xi-X\zeta) = t'(\beta P-bQ)+\theta'(\beta Q-bR)$$
$$s\sigma(X\eta-Y\xi) = t'(\gamma P-cQ)+\theta'(\gamma Q-cR)$$

[oder auch

$$
\begin{aligned}
s\sigma(Y\zeta - Z\eta) &= \alpha(t'P+\theta'Q)-a(t'Q+\theta'R)\\
s\sigma(Z\xi - X\zeta) &= \beta(t'P+\theta'Q)-b(t'Q+\theta'R)\\
s\sigma(X\eta - Y\xi) &= \gamma(t'P+\theta'Q)-c(t'Q+\theta'R).
\end{aligned}
$$

Werden diese Werthe von $Y\zeta - Z\eta$, $Z\xi - X\zeta$, $X\eta - Y\xi$ in dem Ausdrucke für $s\frac{df}{du}$ substituirt, so erhält man vermöge 15:]

$$
\begin{aligned}
ss\sigma\frac{df}{du} = &-(t''\theta'-\theta''t')(PR-QQ)\\
&+(Pt'+Q\theta')\{(-\tfrac{1}{2}P''t'+Q't'+\tfrac{1}{2}R'\theta')t'+(\tfrac{1}{2}R't'+\tfrac{1}{2}R''\theta')\theta'\}\\
&-(Qt'+R\theta')\{(\tfrac{1}{2}P't'+\tfrac{1}{2}P''\theta')t'+(\tfrac{1}{2}P''t'+Q''\theta'-\tfrac{1}{2}R'\theta')\theta'\}.
\end{aligned}
$$

[Mithin ergibt sich schliesslich für $\frac{df}{du}$ die Gleichung]

$$
[16]\quad \left\{
\begin{aligned}
&(Pt't'+2Qt'\theta'+R\theta'\theta')\sqrt{(PR-QQ)}\cdot\frac{df}{du}\\
&\quad=(t'\theta''-\theta't'')(PR-QQ)\\
&\quad+\tfrac{1}{2}(Pt'+Q\theta')(-P''t't'+2Q't't'+2R't'\theta'+R''\theta'\theta')\\
&\quad-\tfrac{1}{2}(Qt'+R\theta')(P't't'+2P''t'\theta'+2Q''\theta'\theta'-R'\theta'\theta'),
\end{aligned}
\right.
$$

[in der ausser $t'=\frac{dt}{du}$, $t''=\frac{ddt}{du^2}$, $\theta'=\frac{d\theta}{du}$, $\theta''=\frac{dd\theta}{du^2}$ nur die Coefficienten P, Q, R von ss und deren erste Ableitungen nach t und θ vorkommen.]

[5.]

Um den Ausdruck $\left[\text{für } \frac{df}{du}\right]$ einfacher zu machen, führe man ein [den Winkel χ, den die Tangente der Curve mit der Tangente der Linie $\theta = \text{const.}$ in dem betrachteten Punkte der Fläche bildet. Dann ist:]

$$
[17]\quad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{tang}\chi &= \frac{\theta'\sqrt{(PR-QQ)}}{Pt'+Q\theta'}\\
\cos\chi &= \frac{Pt'+Q\theta'}{\sqrt{P}\sqrt{(Pt't'+2Qt'\theta'+R\theta'\theta')}}\\
\sin\chi &= \frac{\theta'\sqrt{(PR-QQ)}}{\sqrt{P}\sqrt{(Pt't'+2Qt'\theta'+R\theta'\theta')}}.
\end{aligned}
\right.
$$

[Ferner sei ω der Winkel zwischen den Linien $t = \text{const.}$ und $\theta = \text{const.}$,

also]

$$
[18]\quad \left\{
\begin{aligned}
Q &= \sqrt{PR}.\cos\omega\\
\sqrt{(PR-QQ)} &= \sqrt{PR}.\sin\omega\\
\operatorname{tg}\omega.d\omega &= \tfrac{1}{2}\frac{dP}{P}-\frac{dQ}{Q}+\tfrac{1}{2}\frac{dR}{R},
\end{aligned}
\right.
$$

[und wenn]

$$h = \sqrt{(PR-QQ)}$$

[gesetzt wird:]

$$[18']\quad 2\,d\omega.h = Q\left(\frac{dP}{P}-2\frac{dQ}{Q}+\frac{dR}{R}\right).$$

[Endlich hat man, da der Winkel zwischen der Curventangente und der Linie $t = \text{const.}$ gleich $\omega-\chi$ ist:]

$$
[19]\quad \left\{
\begin{aligned}
\sin(\omega-\chi) &= \frac{t'\sqrt{(PR-QQ)}}{\sqrt{R}\sqrt{(Pt't'+2Qt'\theta'+R\theta'\theta')}}\\
\cos(\omega-\chi) &= \frac{Qt'+R\theta'}{\sqrt{R}\sqrt{(Pt't'+2Qt'\theta'+R\theta'\theta')}}.
\end{aligned}
\right.
$$

[Aus der Gleichung

$$\frac{\sin\chi}{\sin(\omega-\chi)} = \frac{\theta'}{t'}\cdot\frac{\sqrt{R}}{\sqrt{P}}$$

erhält man durch logarithmische Differentiation nach u:]

$$\frac{\theta''}{\theta'}-\frac{t''}{t'} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{du}-\frac{1}{R}\frac{dR}{du}\right)-\cot(\omega-\chi)\left(\frac{d\omega}{du}-\frac{d\chi}{du}\right)+\cot\chi\cdot\frac{d\chi}{du}$$

[oder]

$$[20]\quad \frac{\theta''}{\theta'}-\frac{t''}{t'} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{du}-\frac{1}{R}\frac{dR}{du}\right)-\cot(\omega-\chi)\cdot\frac{d\omega}{du}+\frac{ss}{t'\theta'\sqrt{(PR-QQ)}}\cdot\frac{d\chi}{du}.$$

[Nunmehr ergibt sich mit Hülfe von 17, 19 und 20]

$$
\begin{aligned}
hss\frac{df}{du} = &\ \tfrac{1}{2}hht'\theta'\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{du}-\frac{1}{R}\frac{dR}{du}\right)+hss\frac{d\chi}{du}\\
&+\tfrac{1}{2}\cot\chi.\theta'h\{-P''t't'+2Q't't'+2R't'\theta'+R''\theta'\theta'\}\\
&-\tfrac{1}{2}\cot(\omega-\chi).t'h\{2\theta'\frac{d\omega}{du}h+P't't'+2P''t'\theta'+2Q''\theta'\theta'-R'\theta'\theta'\};
\end{aligned}
$$

[mithin wird:

$$
[21]\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{df}{du} = &\ \frac{d\chi}{du}+\tfrac{1}{2}\frac{ht'\theta'}{ss}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{du}-\frac{1}{R}\frac{dR}{du}\right)\\
&+\tfrac{1}{2}\cot\chi\cdot\frac{\theta'}{ss}\{-P''t't'+2Q't't'+2R't'\theta'+R''\theta'\theta'\}\\
&-\tfrac{1}{2}\cot(\omega-\chi)\cdot\frac{t'}{ss}\{2\theta'\frac{d\omega}{du}h+P't't'+2P''t'\theta'+2Q''\theta'\theta'-R'\theta'\theta'\}.]
\end{aligned}
\right.
$$

[6.]

Ist df das Differential der Seitenkrümmung, welches dem Differential du entspricht, so ist in den Zeichen der Entwickelung:

$$
\begin{aligned}
2(Pt't'+2Qt'\theta'+R\theta'\theta')\sqrt{(PR-QQ)}\,.\,df
&= 2(PR-QQ)(t'd\theta'-\theta'dt')\\
&\quad + t'^3(-QP'+2PQ'-PP'')\,du\\
&\quad + t't'\theta'(-RP'+2QQ'+2PR'-3QP'')\,du\\
&\quad + t'\theta'\theta'(3QR'-2RP''-2QQ''+PR'')\,du\\
&\quad + \theta'^3(RR'-2RQ''+QR'')\,du.
\end{aligned}
$$

Wenn man bloss das erste Glied des zweiten Theils der Gleichung berücksichtigt, ist das Integral

$$f = \operatorname{Arc\,tang}\frac{\theta'\sqrt{(PR-QQ)}}{Pt'+Q\theta'} + \text{const.} = \chi + \text{const.}$$

Aus der vollständigen Differentiation von χ erhält man aber (weil

$$2\sqrt{b}(cc+aab)\,.\,d\chi = 2bc\,.\,da + ac\,.\,db - 2ab\,.\,dc, \qquad \operatorname{tang}\chi = \frac{a\sqrt{b}}{c} \quad \text{gesetzt,)}$$

[die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&2P(Pt't'+2Qt'\theta'+R\theta'\theta')\sqrt{(PR-QQ)}\,d\chi\\
&= 2(PR-QQ)(Pt'+Q\theta')d\theta'+\theta'(Pt'+Q\theta')d(PR-QQ)-2\theta'(PR-QQ)d(Pt'+Q\theta')
\end{aligned}
$$

oder]

$$
\begin{aligned}
2(Pt't'+2Qt'\theta'+R\theta'\theta')\sqrt{(PR-QQ)}\,d\chi
&= 2(PR-QQ)(t'd\theta'-\theta'dt')\\
&\quad + ((2QQ-PR)t'\theta'+QR\theta'\theta')\,.\,\frac{dP}{P}\\
&\quad - 2(Qt'\theta'+R\theta'\theta')\,.\,dQ\\
&\quad + (Pt'\theta'+Q\theta'\theta')\,.\,dR.
\end{aligned}
$$

Diess substituirt, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
2(Pt't'+2Qt'\theta'+R\theta'\theta')\sqrt{(PR-QQ)}\,.\,(df-d\chi)
&= t'^3(-QP'+2PQ'-PP'')\,du\\
&\quad + t't'\theta'\left(PR'-3QP''-\frac{2QQ}{P}P'+4QQ'\right)du\\
&\quad + t'\theta'\theta'\left(2QR'-\frac{2QQ}{P}P''-\frac{RQ}{P}P'+2RQ'-RP''\right)du\\
&\quad + \theta'^3\left(RR'-\frac{QR}{P}P''\right)du.
\end{aligned}
$$

[Die rechte Seite ist aber identisch]

$$= (Pt't'+2Qt'\theta'+R\theta'\theta')\left\{\left(-\frac{Q}{P}P'+2Q'-P''\right)t'du+\left(R'-\frac{Q}{P}P''\right)\theta'du\right\}.$$

Wir haben also:

$$
\begin{aligned}
[22]\quad 2P\sqrt{(PR-QQ)}(df-d\chi) &= \{(-QP'+2PQ'-PP'')t'+(PR'-QP'')\theta'\}du\\
&= -QdP+(2PQ't'+PR'\theta')du-PP''t'du,
\end{aligned}
$$

[wofür man auch schreiben kann:]

$$
\begin{aligned}
[23]\quad 2\sqrt{(PR-QQ)}(df-d\chi) &= \frac{-QP'+2PQ'-PP''}{P}dt-\frac{-RR'+2RQ''-QR''}{R}d\theta\\
&\quad - Q\left(\frac{P''}{P}-2\frac{Q''}{Q}+\frac{R''}{R}\right)d\theta.
\end{aligned}
$$

BEMERKUNGEN.

In § 13 der *Disquisitiones generales circa superficies curvas* stellt GAUSS die Veröffentlichung weiterer Untersuchungen über die »absoluten« Eigenschaften krummer Flächen in Aussicht, die wie das Krümmungsmass und die geodätischen Linien gegenüber Biegungen der Flächen invariant sind. Als Vorarbeit hierzu ist die vorstehende Notiz aufzufassen, die höchst wahrscheinlich aus der Zeit zwischen 1822 und 1825 stammt. Sie ist auf einzelne Zettel geschrieben, augenscheinlich in grosser Eile. Daher kommt es wohl, dass GAUSS die »Bestimmenden der Fläche« bald t, u, bald t, θ nennt, während hier durchgängig t, θ gesetzt worden ist; ebenso, dass er die Buchstaben σ und ψ, die in den Gleichungen 3 und 9 vorkommen, später auch für die Grössen verwendet, die hier mit τ (Gleichung 6) und χ (Gleichung 17) bezeichnet worden sind. Auch sonst finden sich zahlreiche Flüchtigkeiten, die verbessert werden mussten; so fehlt im Besondern in der Formel 20 das erste Glied $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{du}-\frac{1}{R}\frac{dR}{du}\right)$. Vielleicht rührt das daher, dass Gauss, wie eine ausgestrichene Stelle zeigt, ursprünglich die Variabeln t, θ so gewählt hatte, dass

$$P = aa+bb+cc = 1$$
$$R = \alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma = 1$$

ist, sodass also die Linien t = const. und θ = const. geodätische Linien werden. In diesem Falle nimmt die Gleichung 21 die einfache Form an:

$$\frac{df}{du} = \frac{d\chi}{du}+\frac{\theta' t'}{ss}\left\{\cot\chi \cdot Q't' - \cot(\omega-\chi)\left(\frac{d\omega}{du}h + Q''\theta'\right)\right\}.$$

Stäckel.

[GENERALISIRUNG DES LEGENDRESCHEN THEOREMS.]

[I.]

Gauss an Olbers. Göttingen, 9. October 1825.

. . . . Ich habe dieser Tage angefangen, in Beziehung auf mein künftiges Werk über Höhere Geodäsie, einen (sehr) kleinen Theil dessen, was die krummen Flächen betrifft, in Gedanken etwas zu ordnen. Allein ich überzeuge mich, dass ich bei der Eigenthümlichkeit meiner ganzen Behandlung des Zusammenhanges wegen gezwungen bin, sehr weit auszuholen, so dass ich sogar meine Ansicht über die Krümmungshalbmesser bei planen Curven vorausschicken muss. Ich bin darüber fast zweifelhaft geworden, ob es nicht gerathener sein wird, einen Theil dieser Lehren, der ganz rein geometrisch (in analytischer Form) ist und Neues mit Bekanntem gemischt in neuer Form enthält, erst besonders auszuarbeiten, es vielleicht von dem Werke abzutrennen und als eine oder zwei Abhandlungen in unsere Commentationen einzurücken. Indessen kann ich noch vorerst die Form der Bekanntmachung auf sich beruhen lassen, und werde einstweilen in dem zu Papier bringen fortfahren. . . .

Gauss an Olbers. Göttingen, 30. October 1825.

.... Über meine Bedenklichkeiten rücksichtlich der Anordnung meines künftig auszuarbeitenden Werks über Höhere Geodäsie muss ich mich in meinem Briefe wohl nicht deutlich ausgedrückt haben. In der That ist der Gegenstand meiner Bedenklichkeiten nicht die Frage, ob ich meine Ansicht über die Krümmungshalbmesser aufnehmen soll oder nicht, sondern ob ich die mir immer mehr unter den Händen wachsenden ganz allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen, die darauf gebildeten Figuren, die Natur der kürzesten und nicht kürzesten Linien und eine Menge anderer Gegenstände, die ich hier nicht anführen kann, weil die Begriffe davon noch nicht gangbar sind und selbst noch keine Namen dafür existiren — ob ich diess alles mit aufnehmen soll oder nicht, zumal da ich täglich mehr Materien finde, auf die ich auch noch zurückgehen muss, weil sie meines Wissens nicht aus dem Gesichtspunkte bisher betrachtet sind, wie es zur Verkettung des Ganzen nöthig ist; zu diesen gehörte (als ein unbedeutendes Beispiel) selbst die Lehre von den Krümmungshalbmessern in Plano.

Ich hätte auch die Lehre von dem Flächeninhalt der Figuren überhaupt nennen können, die ich gleichfalls seit 30 und mehrern Jahren aus einem von mir bisher für neu gehaltenen Gesichtspunkt betrachtet habe. Dieses letztere ist aber zum Theil ein Irrthum: in der That habe ich erst vor kurzem eine Abhandlung von Meister (einem meiner Meinung nach sehr genialen Kopf) im ersten Bande der Novi Commentarii Gotting. kennen gelernt, worin die Sache fast ganz auf gleiche Art betrachtet und sehr schön entwickelt wird. Allein diese treffliche Abhandlung ist den Mathematikern fast ganz unbekannt: auch würde es nicht zureichen, mich darauf zu beziehen, da sie doch nur die ersten Grundbegriffe hat. In so fern man nemlich geometrische Relationen analytisch behandelt, hat man zwar längst Linien von positivem und negativem Werth recht wohl verstanden, und eingesehen, dass dabei immer explicite oder implicite ein gewisser Sinn (sens, Richtung) zum Grunde liege, nach welcher die Linien als wachsend angesehen werden etc. Allein in so fern man Flächen (areas) durch Formeln ausdrückt, muss natürlich auch ein nega-

tiver Werth seine gute verschiedene Bedeutung haben, und der Begriff der Area muss also so festgesetzt werden, dass diess klar einleuchte. Allein dann muss man noch einen Schritt weiter gehen und Figuren betrachten, deren Umfang sich selbst einmal oder mehreremale schneidet, z. B.

etc.

Man kommt dann auf einen Gesichtspunkt, aus welchem z. B. der Inhalt

von 1:	entweder	$a-b$	oder	$b-a$
der von 2:		$a+2b$		
der von 3:		$a-d$	oder	$d-a$

etc. wird.

Alles diess gibt eine völlig consequente Theorie, die bei allgemeiner Behandlung solcher Gegenstände unerlässlich nöthig ist, auch auf krumme Flächen angewandt werden kann, aber die noch mehrerer Modificationen oder Bestimmungen bedarf, wenn die krumme Fläche eine geschlossene ist. Sie sehen, dass selbst dieses Capitel schon etwas sehr weitschichtiges ist, und doch muss diess und manches andere mitgenommen werden, um z. B. zu einer befriedigenden Darstellung von der **allgemeinsten** Generalisirung der Legendreschen Methode (die Kugeldreiecke zu berechnen) zu gelangen, worin die Seiten den Sinussen der um $\frac{1}{3}$ des sphärischen Excesses verminderten Winkel proportional gesetzt werden, welche Generalisirung ich besitze und die als ein Theil der Höhern Geodäsie nöthig ist.

So wie die mathematische Seite einer Arbeit mir gewöhnlich die interessanteste ist, so kann ich auch von der andern Seite nicht leugnen, dass ich, um an einer so ausgedehnten Arbeit Freude zu haben, doch am Ende ein schön organisirtes Ganzes muss hervorgehen sehen, was durch ein zu buntscheckiges Ansehen nicht verunstaltet wird. Diess ist die Ursache meiner Bedenklichkeit, über die aber wohl nicht eher recht gründlich geurtheilt werden kann, bis ich alle Materialien zu jenen Sachen zusammenhabe. Es wird aber damit so geschwind nicht gehen, theils wegen der Menge der Gegenstände, theils wegen der vielen immer vermehrt und neu erscheinenden Schwierigkeiten. Das Nachdenken darüber wird jetzt auch wieder durch einiges Collegienlesen gestört werden.

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 21. November 1825.

. . . . Ich habe seit einiger Zeit angefangen, einen Theil der allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen wieder vorzunehmen, die die Grundlage meines projectirten Werks über Höhere Geodäsie werden sollen. Es ist ein eben so reichhaltiger als schwieriger Gegenstand, vor dem ich jetzt zu andern Arbeiten gar nicht kommen kann. Ich finde leider, dass ich dabei sehr weit werde ausholen müssen, da auch das Bekannte in einer andern, den neuen Untersuchungen anpassenden Form entwickelt werden muss. Man muss den Baum zu allen seinen Wurzelfäden verfolgen, und manches davon kostet mir wochenlanges angestrengtes Nachdenken. Vieles davon gehört sogar in die Geometria situs, ein noch fast ganz unbearbeitetes Feld. Der Wunsch, den ich immer bei meinen Arbeiten gehabt habe, ihnen eine solche Vollendung zu geben, ut nihil amplius desiderari possit, erschwert sie mir freilich ausserordentlich, eben so wie die Notwendigkeit, heterogener Sachen wegen oft davon abspringen zu müssen. Wenn ich meinen Kopf voll davon habe, stellen Sie Sich schwerlich vor, wie angreifend es manchmal für mich ist, Vormittags nach einer schlaflosen Nacht, die ich leider jetzt häufig habe, mich mit Frische in die Sachen hineinzudenken, die ich meinen Zuhörern vorzutragen habe, und nachher wieder mit Lebendigkeit gleich wieder in meinen Meditationen zu Hause zu sein. Doch werde ich mitunter noch durch manchen glücklichen neuen Fund belohnt. So habe ich z. B. die Generalisirung des LEGENDREschen Theorems, dass auf der Kugel die Seiten proxime den Sinus der

um $\frac{1}{3}$ des sphärischen Excesses verminderten Winkel proportional sind, auf krumme Flächen jeder Art (wo die Vertheilung ungleich geschehen muss), welche ich der Materie nach schon seit vielen Jahren besessen, aber noch nicht zur möglichen Mittheilung an andere entwickelt hatte, jetzt in eine überaus elegante Gestalt gebracht. . . . .

[II.]

[1.]

EINFACHSTER BEWEIS VON LEGENDRES LEHRSATZ DIE SPHÄRISCHEN DREIECKE BETREFFEND.

3ω	Sphärischer Excess
$A+\omega,\ B+\omega,\ C+\omega$	Winkel
$a,\ b,\ c$	Seiten
$A+B+C$	$= 180^0$.

Man hat dann nach aller Schärfe

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\sin\frac{3}{2}\omega\,.\,\sin(A-\frac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\,.\,\sin(C+\omega)}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\sin(B-\frac{1}{2}\omega)\,.\,\sin(C-\frac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\,.\,\sin(C+\omega)}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a^6}{\cos\frac{1}{2}a^2} = \frac{\sin\frac{3}{2}\omega^3\,.\,\sin(A+\omega)^3\,.\,\sin(A-\frac{1}{2}\omega)^4}{\sin(A+\omega)^2\,.\,\sin(A-\frac{1}{2}\omega)\,.\,\sin(B+\omega)^2\,.\,\sin(B-\frac{1}{2}\omega)\,.\,\sin(C+\omega)^2\,.\,\sin(C-\frac{1}{2}\omega)}$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a^3}{\cos\frac{1}{2}a}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}b^3} = \frac{\sin(A+\omega)\,.\,\sin(A-\frac{1}{2}\omega)^2}{\sin(B+\omega)\,.\,\sin(B-\frac{1}{2}\omega)^2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}\sqrt[3]{\left(\frac{a^3\cos\frac{1}{2}a}{8\sin\frac{1}{2}a^3}\cdot\frac{8\sin\frac{1}{2}b^3}{b^3\cos\frac{1}{2}b}\cdot\frac{\sin(A+\omega)\,.\,\sin(A-\frac{1}{2}\omega)^2}{\sin A^3}\cdot\frac{\sin B^3}{\sin(B+\omega)\,.\,\sin(B-\frac{1}{2}\omega)^2}\right)}$$

oder

$$\log\frac{a\sin B}{b\sin A} = \frac{b^4-a^4}{180}+\cdots+\frac{\omega\omega}{4}\left(\frac{1}{\sin B^2}-\frac{1}{\sin A^2}\right).$$

Auch ist hinreichend scharf

$$aa = \frac{4\sin\frac{1}{2}\omega\,.\,\sin A^2}{\sin(A+\frac{1}{3}\omega)\,.\,\sin(B+\frac{1}{3}\omega)\,.\,\sin(C+\frac{1}{3}\omega)}$$

$$\log\frac{a\sin B}{b\sin A} = \frac{(bb-aa)(4aa+4bb-5cc)}{720}$$

$$\log\frac{3\omega}{\frac{1}{2}ab\sin C} = \tfrac{1}{2}\omega\,\{\operatorname{cotg}A+\operatorname{cotg}B+\operatorname{cotg}C\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\omega\,\frac{1+\cos A\cos B\cos C}{\sin A\sin B\sin C}.$$

[2.]

Die allgemeine Untersuchung der Dreiecke auf krummen Flächen hat uns folgendes wichtige Resultat gegeben.

Es seien $\sqrt{\frac{1}{\alpha}}, \sqrt{\frac{1}{\beta}}, \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$ die Halbmesser der Kugeln, die dieselbe Krümmung haben wie die krumme Fläche resp. an den Punkten A, B, C: dann ist

$$\log\frac{b\sin C}{c\sin B} = \tfrac{1}{24}(bb-cc)\alpha+\tfrac{1}{48}(-aa+3bb-3cc)\beta+\tfrac{1}{48}(aa+3bb-3cc)\gamma$$

$$A+B+C = 180^0+\tfrac{1}{6}(\alpha+\beta+\gamma)\,bc\sin A,$$

und wenn man

$$dA = \frac{bc\sin A}{24}(2\alpha+\beta+\gamma)$$

$$dB = \frac{bc\sin A}{24}(\alpha+2\beta+\gamma)$$

$$dC = \frac{bc\sin A}{24}(\alpha+\beta+2\gamma)$$

macht, so wird

$$\frac{\sin(A-dA)}{a} = \frac{\sin(B-dB)}{b} = \frac{\sin(C-dC)}{c}.$$

Es ist unnöthig zu bemerken, dass hier A, B, C die Winkel des sphäroidischen Dreiecks selbst bedeuten.

Hiernach finden sich z. B. in unserm grössten Dreiecke zwischen Hohehagen—Brocken—Inselsberg die Winkelcorrectionen

Inselsberg	$-\ 4'',95247$	$4'',95119$
Hohehagen	$-\ 4,95264$	$4,95102$
Brocken	$-\ 4,95273$	$4,95093$
Summe	$-\ 14,85784$	$14,85314.$

[3.]

Hauptmomente des Beweises der vorstehenden Lehrsätze sind folgende.

Es sei r die Länge einer vom Punkt A auslaufenden kürzesten Linie auf der krummen Fläche, θ der Winkel, den sie mit einer ähnlichen festen Linie macht, $\sqrt{\frac{1}{f}}$ Halbmesser der Kugel, die dieselbe Krümmung hat, wie die krumme Fläche am Endpunkte von r, $\rho d\theta$ das Linearelement zwischen zwei Punkten, denen r, θ und r, $\theta+d\theta$ zugehören. Es werden demnach sowohl f als ρ Functionen von r und θ sein und man hat

$$\frac{\partial\partial\rho}{\partial r^2} = -f\rho.$$

Es sei dt ein Element einer zweiten kürzesten Linie und ζ sein Winkel mit dem zugehörigen r. Man hat dann

$$dr = dt.\cos\zeta, \qquad \rho d\theta = dt.\sin\zeta, \qquad d\zeta = -\frac{\partial\rho}{\partial r}\cdot d\theta.$$

Setzt man

$$f = F+F'r+F''rr+\cdots,$$

so wird

$$\rho = r+*-\tfrac{1}{6}Fr^3-\tfrac{1}{12}F'r^4-(\tfrac{1}{20}F''-\tfrac{1}{120}FF)r^5-(\tfrac{1}{30}F'''-\tfrac{1}{120}FF')r^6+\cdots$$

$$\rho = r+*-\tfrac{1}{12}(F+f)r^3+*+(\tfrac{1}{30}F''+\tfrac{1}{120}FF)r^5+(\tfrac{1}{20}F'''+\tfrac{1}{120}FF')r^6+\cdots$$

$$d\log\sin\zeta = -\frac{\partial\rho}{\partial r}\frac{1}{\rho}dr$$

$$= -\frac{dr}{r}+r\,dr\{\tfrac{1}{3}F+\tfrac{1}{4}F'r+(\tfrac{1}{5}F''+\tfrac{1}{45}FF)rr+(\tfrac{1}{6}F'''+\tfrac{1}{36}FF')r^3+\cdots\},$$

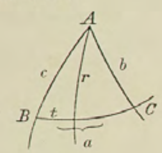
$$d\log(r\sin\zeta) = \tfrac{1}{12}(F+3f)r\,dr-(\tfrac{1}{20}F''-\tfrac{1}{45}FF)r^3dr-(\tfrac{1}{12}F'''-\tfrac{1}{36}FF')r^4dr+\cdots$$

Man hat nun [in dem geodätischen Dreieck ABC] für $\theta = 0$:

$\zeta = 180^0-B$, $\quad r = c$, $\quad f = \beta$, $\quad F = \alpha$, $\quad t = 0$

[und für] $\theta = A$:

$\zeta = C$, $\quad r = b$, $\quad f = \gamma$, $\quad t = a$.



[Ferner ist] allgemein

$$rr = cc + tt - 2tc\cos B, \qquad [rdr = (t - c\cos B)dt]$$

[und]

$$f = \beta + \frac{t(\gamma-\beta)}{a};$$

[folglich erhält man durch Integration der Formel für $d\log(r\sin\zeta)$ nach t von 0 bis a:]

$$\begin{aligned}
\log\frac{b\sin C}{c\sin B} &= \tfrac{1}{24}\alpha(bb-cc) + \tfrac{1}{6}\beta(bb-cc) + \tfrac{1}{4}(\gamma-\beta)\int\frac{tt - tc\cos B}{a}\,dt \\
&= \tfrac{1}{24}\alpha(bb-cc) + \tfrac{1}{6}\beta(bb-cc) + \tfrac{1}{24}(\gamma-\beta)(2aa - 3ac\cos B) \\
&= \tfrac{1}{24}\alpha(bb-cc) + \tfrac{1}{6}\beta(bb-cc) + \tfrac{1}{48}(\gamma-\beta)(aa + 3bb - 3cc) \\
&= \tfrac{1}{24}\alpha(bb-cc) + \tfrac{1}{48}\beta(-aa + 3bb - 3cc) + \tfrac{1}{48}\gamma(aa + 3bb - 3cc).
\end{aligned}$$

W. Z. B. W.

BEMERKUNGEN.

Die Notiz [II] findet sich in einem Handbuche und zwar kurz vor einer S. 444 abgedruckten, 1825. Dec. 4 datirten Aufzeichnung. Man wird daher annehmen dürfen, dass sie von GAUSS bei der Abfassung der unter [I] abgedruckten Briefe an OLBERS und SCHUMACHER niedergeschrieben ist. Den Inhalt des ersten Abschnittes der Notiz [II] hat GAUSS im Jahre 1841 in CRELLEs Journal veröffentlicht; der Vollständigkeit wegen ist diese kleine, in den vierten Band der Werke nicht aufgenommene Abhandlung S. 451 bis 452 dieses Bandes ebenfalls abgedruckt worden.

In den *Disquisitiones generales circa superficies curvas* § 28 sind die Winkelcorrectionen S. 402 folgendermassen angegeben:

Inselsberg	4,"95131
Hohehagen	4,95113
Brocken	4,95104
Summe	14,85348

Die Figur auf S. 403 ist dem Texte hinzugefügt worden.

STÄCKEL.

ZUR TRANSFORMATION DER FLÄCHEN.

Die Punkte einer an sich gegebenen Fläche, deren Form aber noch unbestimmt bleibt, werden durch r und θ bestimmt, wo r die Entfernung von einem gegebenen Punkt, gemessen in kürzester Linie, und θ den Winkel dieser kürzesten Linie mit einer constanten andern, gleichfalls durch jenen Punkt gehenden [kürzesten Linie] bedeutet. Jede Linie, für die θ constant ist, wird dann von jeder andern, für die r constant ist, unter einem rechten Winkel geschnitten. Setzt man ein Element der letztern $= md\theta$, so ist m bloss von der Natur der Fläche, aber nicht von ihrer Form abhängig, und also eine gegebene Function von r und θ.

Sobald man der Fläche eine bestimmte Form gegeben, findet folgendes statt für eine Linie, für die θ constant ist.

Es seien x, y, z indefinite Coordinaten eines Punkts derselben, ferner

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \xi, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \eta, \qquad \frac{\partial z}{\partial r} = \zeta,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial r} = pX, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial r} = pY, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial r} = pZ,$$

wo

$$p = \sqrt{\left(\frac{\partial\xi^2}{\partial r^2} + \frac{\partial\eta^2}{\partial r^2} + \frac{\partial\zeta^2}{\partial r^2}\right)},$$

also $\frac{1}{p}$ Krümmungshalbmesser und

$$XX + YY + ZZ = 1.$$

Es bezeichnet dann X, Y, Z die Richtung der Normale auf die Oberfläche und es ist ferner

$$(1)\quad \frac{\partial x}{\partial\theta} = m(\eta Z-\zeta Y),\qquad \frac{\partial y}{\partial\theta} = m(\zeta X-\xi Z),\qquad \frac{\partial z}{\partial\theta} = m(\xi Y-\eta X).$$

Man sieht hieraus, dass wenn man Einer Linie constanter θ eine bestimmte Lage im Raume angewiesen hat, die ganze Fläche eine bestimmte Lage bekommt.

Die Differentiation von (1) gibt:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\xi}{\partial\theta} &= \frac{\partial m}{\partial r}(\eta Z-\zeta Y)+m\left(\eta\frac{\partial Z}{\partial r}-\zeta\frac{\partial Y}{\partial r}\right)\\
\frac{\partial\eta}{\partial\theta} &= \frac{\partial m}{\partial r}(\zeta X-\xi Z)+m\left(\zeta\frac{\partial X}{\partial r}-\xi\frac{\partial Z}{\partial r}\right)\\
\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} &= \frac{\partial m}{\partial r}(\xi Y-\eta X)+m\left(\xi\frac{\partial Y}{\partial r}-\eta\frac{\partial X}{\partial r}\right)\\
\xi\cdot\frac{\partial m}{\partial r} &= \frac{Y\partial\zeta-Z\partial\eta}{\partial\theta}\\
\eta\cdot\frac{\partial m}{\partial r} &= \frac{Z\partial\xi-X\partial\zeta}{\partial\theta}\\
\zeta\cdot\frac{\partial m}{\partial r} &= \frac{X\partial\eta-Y\partial\xi}{\partial\theta}\\
\frac{\partial m}{\partial r} &= \sqrt{\left\{\frac{\partial\xi^2+\partial\eta^2+\partial\zeta^2}{\partial\theta^2}-\left(X\frac{\partial\xi}{\partial\theta}+Y\frac{\partial\eta}{\partial\theta}+Z\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)^2\right\}}.
\end{aligned}\right.$$

Die abermalige Differentiation gibt, $\frac{\partial X}{\partial r} = X'$, $\frac{\partial X'}{\partial r} = X''$ etc. gesetzt:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
X\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}+p\cdot\frac{\partial X}{\partial\theta} &= \frac{\partial\partial m}{\partial r^2}(\eta Z-\zeta Y)+2\frac{\partial m}{\partial r}(\eta Z'-\zeta Y')+m(\eta Z''-\zeta Y'')+mp(YZ'-ZY')\\
Y\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}+p\cdot\frac{\partial Y}{\partial\theta} &= \frac{\partial\partial m}{\partial r^2}(\zeta X-\xi Z)+2\frac{\partial m}{\partial r}(\zeta X'-\xi Z')+m(\zeta X''-\xi Z'')+mp(ZX'-XZ')\\
Z\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}+p\cdot\frac{\partial Z}{\partial\theta} &= \frac{\partial\partial m}{\partial r^2}(\xi Y-\eta X)+2\frac{\partial m}{\partial r}(\xi Y'-\eta X')+m(\xi Y''-\eta X'')+mp(XY'-YX').
\end{aligned}\right.$$

Hieraus:

$$\xi\cdot\frac{\partial X}{\partial\theta}+\eta\cdot\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\zeta\cdot\frac{\partial Z}{\partial\theta} = m(\xi YZ'+\eta ZX'+\zeta XY' \\ -\xi ZY'-\eta XZ'-\zeta YX')$$

[oder, da]

$$\eta Z'-\zeta Y' = qX,\qquad \zeta X'-\xi Z' = qY,\qquad \xi Y'-\eta X' = qZ$$

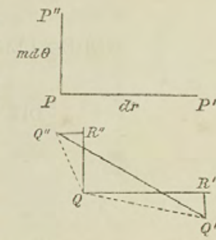
[ist:]

$$(4)\quad \xi\cdot\frac{\partial X}{\partial\theta}+\eta\cdot\frac{\partial Y}{\partial\theta}+\zeta\cdot\frac{\partial Z}{\partial\theta} = -mq$$

[und]

$$(5)\quad (YZ'-ZY')\frac{\partial X}{\partial\theta}+(ZX'-XZ')\frac{\partial Y}{\partial\theta}+(XY'-YX')\frac{\partial Z}{\partial\theta} = \frac{\partial\partial m}{\partial r^2}.$$

Die Bedeutung der Gleichung (4) kann so versinnlicht werden. Es sind dr und $md\theta$ zwei auf einander senkrechte Linearelemente auf der Fläche. Auf der Himmelskugel stellen Q, Q', Q'' resp. die Normalen in P, P', P'' vor. QR' stellt vor die Verticalebene durch PP', QR'' die Verticalebene durch PP''. Dann bedeutet:



Gleichung (4), dass

$$\frac{Q''R''}{PP''} = \frac{Q'R'}{PP'},$$

Gleichung (5), dass die Fläche

$$2\,QQ'Q'' = \frac{\partial\partial m}{m\,\partial r^2}PP'.PP''.$$

BEMERKUNG.

Die vorstehende Notiz findet sich in einem Handbuche. Sie stammt vermuthlich aus dem Jahre 1825 und enthält Ergebnisse der Forschungen, die GAUSS in den nachfolgend abgedruckten *Neuen allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen* ausführlich darzustellen begonnen hat.

STÄCKEL.

NEUE ALLGEMEINE UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

DIE KRUMMEN FLÄCHEN.

[1825.]

Wenn gleich der Zweck dieses Werks eigentlich in der Ausführung neuer seinen Gegenstand betreffender Lehren besteht, so werden wir doch anfangs auch das schon Bekannte entwickeln, theils des Zusammenhanges und der Vollständigkeit wegen, theils weil die Art unserer Behandlung von der bisherigen verschieden ist. Wir werden sogar zuerst einiges die Curven in der Ebene betreffende aus denselben Gründen vorausschicken.

1.

Um die verschiedenen Richtungen von geraden Linien in Einer Ebene bequem unter einander vergleichen zu können, denke man sich in derselben Ebene um einen beliebigen Mittelpunkt einen Kreis mit dem Halbmesser 1 beschrieben; die Lage des mit einer vorgegebenen Linie parallel gezogenen Radius dieses Kreises versinnlicht dann die Lage von jener, und die Neigung zweier geraden Linien gegen einander wird durch den Winkel der beiden repräsentirenden Radien, oder durch den Bogen zwischen ihren Endpunkten gemessen. Es versteht sich, dass, wo genaue Bestimmung nöthig ist, bei jeder

geraden Linie zugleich angegeben werde, in welchem Sinn sie als beschrieben gedacht wird: ohne eine solche Unterscheidung würde die Richtung einer geraden Linie immer zweien einander entgegengesetzten Radien entsprechen.

2.

In dem Hülfskreise nimmt man einen beliebigen Radius als den ersten, oder seinen Endpunkt in der Peripherie als den Anfangspunkt an, und entschliesst sich über den Sinn, in welchem man von diesem aus die Bögen als positiv fortzählen will (ob von der Linken nach der Rechten oder umgekehrt); nach der entgegengesetzten Seite werden die Bögen also als negativ betrachtet. So wird also jede Richtung einer geraden Linie durch Grade etc. oder auch durch eine Zahl ausgedrückt, die dieselben in Theilen des Halbmessers angibt.

Solche Angaben, die um 360^0 oder ein Vielfaches davon verschieden sind, beziehen sich also eigentlich auf gleiche Richtungen, und können, allgemein zu reden, als gleichgültig betrachtet werden; in solchen Fällen jedoch, wo die Entstehungsart einer veränderlichen Neigung mit in Betracht gezogen wird, kann es nöthig sein, dergleichen Angaben sorgfältig zu unterscheiden.

Hat man z. B. sich bestimmt, die Bögen von der Linken zur Rechten zu zählen, und entsprechen zweien geraden Linien l, l' die Richtungen L, L', so ist $L'-L$ die Neigung jener geraden Linien, und man sieht leicht, dass, in so fern $L'-L$ zwischen -180^0 und $+180^0$ fällt, der positive oder negative Werth zugleich anzeigt, dass vom Durchschnittspunkte aus l' rechts oder links von l liegt; allgemein wird diess durch das Zeichen von $\sin(L'-L)$ entschieden.

Es sei aa' ein Stück einer krummen Linie und es entsprechen den Tangenten in a, a' resp. die Richtungen α, α', durch welche Buchstaben nemlich die betreffenden Punkte des Hülfskreises, so wie deren Bogenentfernungen vom Anfangspunkte durch A, A' bezeichnet werden sollen. Die Grösse des Kreisbogens $\alpha\alpha'$ oder $A'-A$ heisst die Amplitudo von aa'.

Die Vergleichung der Amplitudo des Bogens aa' mit seiner Länge wird uns den Begriff von Krümmung geben. Es sei l indefinite ein Punkt des Bogens aa' und in Beziehung auf denselben seien λ, Λ dasselbe, was a, A und a', A' in Beziehung auf a und a' sind. Ist nun $a\lambda$ oder $\Lambda - A$ dem Stück des Bogens al proportional, so werden wir sagen, dass aa' in seiner ganzen Länge gleichförmig gekrümmt sei und

$$\frac{\Lambda - A}{al}$$

das Krümmungsmass oder schlechtweg die Krümmung nennen; man sieht leicht, dass diess nur dann eintrifft, wenn aa' wirklich ein Kreisbogen ist, und dass dann nach unserer Definition seine Krümmung $= \pm \frac{1}{r}$ sein wird, wenn r den Halbmesser bedeutet. In so fern man immer r als positiv ansieht, wird das obere oder untere Zeichen gelten, je nachdem das Centrum rechts oder links vom Bogen aa' liegt (a als Anfangs-, a' als Endpunkt betrachtet, und die Richtungen im Hülfskreise von der Linken zur Rechten gezählt); die Veränderung Einer dieser Bedingungen ändert das Zeichen, die Veränderung von zweien stellt es wieder her.

Ist hingegen $\Lambda - A$ dem al nicht proportional, so nennen wir den Bogen ungleichförmig gekrümmt und der Quotient

$$\frac{\Lambda - A}{al}$$

kann dann seine mittlere Krümmung heissen. Krümmung geradezu hingegen setzt immer die Bestimmung der Stelle voraus und wird durch die mittlere Krümmung eines Elements an dieser Stelle erklärt, ist also

$$= \frac{d\Lambda}{d\,al}.$$

Man sieht also, dass Bogen, Amplitudo und Krümmung in einem solchen Verhältniss zu einander stehen, wie Zeit, Bewegung und Geschwindigkeit, oder Volumen, Masse und Dichtigkeit. Das Reciprokum der Krümmung, nemlich

$$\frac{d\,al}{d\Lambda}$$

heisst der Krümmungshalbmesser an der Stelle l, und nach obigen Voraussetzungen heisst die Curve an dieser Stelle concav nach der Rechten, convex nach der Linken, wenn der Werth der Krümmung oder des Krümmungshalbmessers positiv ausfällt; bei einem negativen verhält es sich umgekehrt.

3.

Wenn wir die Lage der Punkte in der Ebene auf zwei auf einander senkrechte Coordinatenaxen beziehen, denen die Richtungen 0 und 90° entsprechen, so dass die erste Coordinate den nach der Richtung der ersten Axe gemessenen Abstand von der zweiten Axe, die zweite Coordinate hingegen den nach der Richtung der zweiten Axe gemessenen Abstand von der ersten Axe vorstellen; wenn ferner x, y unbestimmt die Coordinaten eines Punktes der krummen Linie, s deren Länge von einem beliebigen Anfangspunkte an bis zu diesem gezählt, φ die Richtung der Tangente an demselben, r den Krümmungshalbmesser ausdrücken, so wird

$$dx = \cos\varphi \,.\, ds$$
$$dy = \sin\varphi \,.\, ds$$
$$r = \frac{ds}{d\varphi}.$$

Wird die Natur der krummen Linie durch die Gleichung $V = 0$ vorgestellt, wo V eine Function von x und y ist, und setzt man

$$dV = p\,dx + q\,dy,$$

so wird in der krummen Linie

$$p\,dx + q\,dy = 0$$

sein; also

$$p\cos\varphi + q\sin\varphi = 0,$$

woraus also

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{p}{q}.$$

Es ist ferner

$$\cos\varphi \,.\, dp + \sin\varphi \,.\, dq - (p\sin\varphi - q\cos\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Setzt man also nach einem bekannten Lehrsatz

$$dp = P\,dx + Q\,dy$$
$$dq = Q\,dx + R\,dy,$$

so wird

$$(P\cos\varphi^2 + 2Q\cos\varphi\sin\varphi + R\sin\varphi^2)\,ds = (p\sin\varphi - q\cos\varphi)\,d\varphi,$$

also

$$\frac{1}{r} = \frac{P\cos\varphi^2 + 2Q\cos\varphi\sin\varphi + R\sin\varphi^2}{p\sin\varphi - q\cos\varphi}$$

oder, da

$$\cos\varphi = \frac{\mp q}{\sqrt{(pp+qq)}}, \qquad \sin\varphi = \frac{\pm p}{\sqrt{(pp+qq)}}:$$

$$\pm\frac{1}{r} = \frac{Pqq - 2Qpq + Rpp}{(pp+qq)^{\frac{3}{2}}}.$$

4.

Das zweideutige Zeichen in der letzten Formel könnte anfangs auffallen, findet sich jedoch bei näherer Betrachtung ganz in der Ordnung. In der That, da dieser Ausdruck bloss von den partiellen Differentialien von V abhängt und die Function V an sich bloss die Natur der krummen Linie darstellt, ohne zugleich den Sinn anzugeben, in welchem sie als beschrieben gedacht wird, so muss die Frage, ob die Curve nach der rechten oder linken Seite convex ist, so lange unentschieden bleiben, bis dieser Sinn anders woher bestimmt ist. Eben so verhält es sich mit der Bestimmung von φ durch seine Tangente, wobei für sich eine Unbestimmtheit von 180^0 zurückbleibt. Die Angabe, in welchem Sinn die Curve beschrieben wird, kann auf verschiedene Arten gemacht werden.

I. Durch das Zeichen der Veränderung von x. Ist x im Zunehmen, so muss $\cos\varphi$ positiv sein; die obern Zeichen gelten daher, wenn q einen negativen, die untern, wenn q einen positiven Werth hat; beim Abnehmen von x ist es umgekehrt.

II. Durch das Zeichen der Veränderung von y. Ist y im Zunehmen, so schreibt ein positiver Werth von p die obern, ein negativer die untern vor; umgekehrt bei abnehmendem y.

III. Durch das Zeichen des Werths, welchen die Function V erhält, wenn man die Curve verlässt. Es seien die Variationen von x, y, wenn man die Curve senkrecht auf die Tangente nach der Rechten, also in der Richtung $\varphi + 90^0$, verlässt, δx, δy, und die Grösse dieser Normale $= \delta\rho$; man hat dann

offenbar

$$\delta x = \delta\rho\,.\cos(\varphi + 90^0)$$
$$\delta y = \delta\rho\,.\sin(\varphi + 90^0)$$

oder

$$\delta x = -\delta\rho\,.\sin\varphi$$
$$\delta y = +\delta\rho\,.\cos\varphi.$$

Da nun, wenn $\delta\rho$ unendlich klein ist,

$$\begin{aligned}\delta V &= p\,\delta x + q\,\delta y\\ &= (-p\sin\varphi + q\cos\varphi)\,\delta\rho\\ &= \mp\,\delta\rho\sqrt{(pp+qq)}\end{aligned}$$

und V in der Curve selbst $= 0$, werden die obern Zeichen gelten, wenn V beim Durchgange durch die Curve von der Linken zur Rechten aus dem positiven ins negative übergeht und umgekehrt; verbindet man diess mit dem, was am Ende des 2. Art. gesagt ist, so folgt, dass die Curve immer nach der Seite convex ist, nach welcher V das Zeichen erhält, welches

$$Pqq - 2Qpq + Rpp$$

hat.

Ist z. B. die Curve ein Kreis und setzt man

$$V = xx + yy - aa,$$

so wird

$$p = 2x, \qquad q = 2y,$$
$$P = 2, \qquad Q = 0, \qquad R = 2,$$
$$Pqq - 2Qpq + Rpp = 8yy + 8xx = 8aa,$$
$$(pp+qq)^{\frac{3}{2}} = 8a^3,$$
$$r = \pm a$$

und die Curve nach der Seite convex, wo

$$xx + yy > aa,$$

wie gehörig.

Die Seite, nach welcher die Curve convex, oder die Zeichen in obigen Formeln werden also beim Fortgehen in der Curve so lange immer ungeändert bleiben als

$$\frac{\partial V}{\partial p}$$

sein Zeichen nicht ändert. In so fern V eine stetige Function ist, kann eine solche Änderung des Zeichens nur nach einem Durchgang durch den Werth 0 erfolgen; dieser aber setzt nothwendig voraus, dass zugleich p und $q = 0$ werden. An einer solchen Stelle wird der Krümmungshalbmesser unendlich gross, oder die Krümmung verschwindet und in so fern dann, allgemein zu reden, hier

$$-p\sin\varphi + q\cos\varphi$$

sein Zeichen ändern wird, findet hier ein Wendungspunkt statt.

5.

Der Fall, wo die Natur der Curve dadurch ausgedrückt wird, dass y einer gegebenen Function von x gleich gesetzt wird, nemlich $y = X$, ist in dem vorigen enthalten, wenn man

$$V = X - y$$

setzt. Macht man

$$dX = X'dx, \qquad dX' = X''dx,$$

so wird

$$p = X', \qquad q = -1,$$

$$P = X'', \qquad Q = 0, \qquad R = 0,$$

also

$$\pm\frac{1}{r} = \frac{X''}{(1+X'X')^{\frac{3}{2}}}.$$

Da hier q negativ ist, so gilt für wachsende x das obere Zeichen. Man kann sich also hier kurz so ausdrücken, dass bei einem positiven X'' die Curve nach derselben Seite ihre Concavität hat, nach welcher die Axe der y gegen die Axe der x liegt; während bei negativem X'' die Curve nach dieser Seite zu convex ist.

6.

Wenn man x und y als Functionen von s betrachtet, so fallen die Formeln noch zierlicher aus. Man setze

$$\frac{dx}{ds} = x', \qquad \frac{dx'}{ds} = x'',$$

$$\frac{dy}{ds} = y', \qquad \frac{dy'}{ds} = y''.$$

Es ist dann

$$x' = \cos\varphi, \qquad y' = \sin\varphi,$$

$$x'' = -\frac{\sin\varphi}{r}, \qquad y'' = \frac{\cos\varphi}{r},$$

oder

$$y' = -rx'', \qquad x' = ry''$$

oder auch

$$1 = r(x'y'' - y'x''),$$

so dass

$$x'y'' - y'x''$$

die Krümmung und

$$\frac{1}{x'y'' - y'x''}$$

den Krümmungshalbmesser vorstellt.

7.

Wir schreiten jetzt zur Betrachtung der krummen Flächen fort. Zur Versinnlichung der Richtungen von geraden Linien im Raume nach seinen drei Dimensionen betrachtet denken wir uns um einen beliebigen Mittelpunkt eine Kugelfläche mit dem Halbmesser 1 beschrieben; ein Punkt derselben repräsentirt demnach die Richtung aller mit dem Radius, an dessen Endpunkt er liegt, parallelen geraden Linien. So wie die Lagen aller Punkte im Raume durch die senkrechten Abstände x, y, z von dreien auf einander senkrechten Ebenen bestimmt werden, so soll die Richtung der drei Hauptaxen, welche auf diese Hauptebenen senkrecht sind, auf der Oberfläche der Hülfskugel durch die 3 Punkte (1), (2), (3) bezeichnet werden, die also je 90^0 von einander entfernt sind, und zugleich den Sinn bezeichnen sollen, in welchem die Coordinaten als wachsend betrachtet werden. Wir stellen hier einige bekannte Sätze, von denen beständig Gebrauch gemacht werden wird, zusammen.

1) Der Winkel zweier sich schneidenden geraden Linien wird durch den Bogen [des grössten Kreises] zwischen den Punkten gemessen, die auf der Kugelfläche ihre Richtung vorstellen.

2) Die Lage einer jeden Ebene kann auf der Kugelfläche durch den grössten Kreis vorgestellt werden, in welchem jene von einer mit ersterer Ebene parallel durch den Mittelpunkt der Kugel gelegten Ebene geschnitten wird.

3) Der Winkel zweier Ebenen ist gleich dem Winkel der grössten Kreise, die die Lage von jenen repräsentiren, und wird also auch durch den Winkel zwischen den Polen der grössten Kreise gemessen.

4) Sind x, y, z; x', y', z' die Coordinaten zweier Punkte, r ihre Entfernung von einander und L der Punkt der Kugelfläche, der die Richtung der geraden Linie vom ersten zum zweiten vorstellt, so ist

$$x' = x + r\cos(1)L$$
$$y' = y + r\cos(2)L$$
$$z' = z + r\cos(3)L.$$

5) Es folgt hieraus leicht, dass allemal

$$\cos(1)L^2 + \cos(2)L^2 + \cos(3)L^2 = 1$$

[und] auch, wenn L' irgend ein anderer Punkt der Kugelfläche ist,

$$\cos(1)L.\cos(1)L' + \cos(2)L.\cos(2)L' + \cos(3)L.\cos(3)L' = \cos LL'.$$

Wir fügen noch ein anderes Theorem bei, welches unseres Wissens sonst nirgends vorkommt und öfters mit Nutzen gebraucht werden kann.

Es seien L, L', L'', L''' vier Punkte der Kugelfläche, und A der Winkel, welchen $LL''', L'L''$ an ihrem Durchschnittspunkte bilden. [Dann hat man]

$$\cos LL'.\cos L''L''' - \cos LL''.\cos L'L''' = \sin LL'''.\sin L'L''.\cos A.$$

Der Beweis ist leicht so zu führen. Es sei

$$AL = t, \quad AL' = t', \quad AL'' = t'', \quad AL''' = t''';$$

man hat dann

$$\cos LL' = \cos t \cos t' + \sin t \sin t' \cos A$$
$$\cos L''L''' = \cos t'' \cos t''' + \sin t'' \sin t''' \cos A$$
$$\cos LL'' = \cos t \cos t'' + \sin t \sin t'' \cos A$$
$$\cos L'L''' = \cos t' \cos t''' + \sin t' \sin t''' \cos A.$$

Also

$$\begin{aligned}
&\cos LL' \cos L''L''' - \cos LL'' \cos L'L''' \\
&= \cos A\{\cos t \cos t' \sin t'' \sin t''' + \cos t'' \cos t''' \sin t \sin t' \\
&\qquad - \cos t \cos t'' \sin t' \sin t''' - \cos t' \cos t''' \sin t \sin t''\} \\
&= \cos A(\cos t \sin t''' - \cos t''' \sin t)(\cos t' \sin t'' - \cos t'' \sin t') \\
&= \cos A \sin(t''' - t)\sin(t'' - t') \\
&= \cos A \sin LL'''.\sin L'L''.
\end{aligned}$$

Da jeder der beiden grössten Kreise von A aus in zwei entgegengesetzten Richtungen ausläuft, so bilden sich daselbst zwei einander zu 180^0 ergänzende Winkel; man sieht aber aus unserer Analyse, dass man diejenigen Schenkel wählen muss, die in dem Sinn von L nach L''' und von L' nach L'' laufen.

Statt des Winkels A kann man auch die Distanz des Pols des grössten Kreises LL''' vom Pol des grössten Kreises $L'L''$ nehmen; da jedoch jeder grösste Kreis zwei Pole hat, so sieht man, dass man diejenigen verbinden muss, um welche resp. die grössten Kreise von L nach L''' und von L' nach L'' in einerlei Sinn laufen.

Die Ausführung des speciellen Falls, wo von den Bögen $LL''', L'L''$ einer oder beide 90^0 gross sind, überlassen wir dem Leser.

6) Noch ein nützlicher Satz ergibt sich aus folgender Analyse. Es seien L, L', L'' drei Punkte auf der Kugelfläche und

$$\cos L(1) = x, \quad \cos L(2) = y, \quad \cos L(3) = z,$$
$$\cos L'(1) = x', \quad \cos L'(2) = y', \quad \cos L'(3) = z',$$
$$\cos L''(1) = x'', \quad \cos L''(2) = y'', \quad \cos L''(3) = z''.$$

Wir nehmen an, dass die Punkte so geordnet sind, dass sie in demselben Sinn um das von ihnen eingeschlossene Dreieck laufen, wie die Punkte (1), (2), (3); es sei ferner λ derjenige Pol des grössten Kreises $L'L''$, welcher auf derselben Seite liegt wie L. Man hat dann aus unserm vorigen Lemma

$$y'z''-z'y'' = \sin L'L''.\cos\lambda(1)$$
$$z'x''-x'z'' = \sin L'L''.\cos\lambda(2)$$
$$x'y''-y'x'' = \sin L'L''.\cos\lambda(3).$$

Multiplicirt man also diese Gleichungen mit x, y, z und addirt die Producte, so wird

$$xy'z''+x'y''z+x''yz'-xy''z'-x'yz''-x''y'z = \sin L'L''.\cos\lambda L,$$

wofür man nach den bekannten Lehren der sphärischen Trigonometrie auch

$$\sin L'L''.\sin L L''.\sin L'$$
$$= \sin L'L''.\sin L L'.\sin L''$$
$$= \sin L'L''.\sin L'L''.\sin L$$

schreiben kann, wenn L, L', L'' die drei Winkel des sphärischen Dreiecks $LL'L''$ bedeuten. Man überzeugt sich zugleich leicht, dass diese Grösse der sechste Theil der Pyramide ist, die zwischen dem Centrum der Kugel und den Punkten L, L', L'' gebildet wird (und zwar p o s i t i v, wenn etc.).

8.

Die Natur einer krummen Fläche wird durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten ihrer Punkte dargestellt, die wir durch

$$f(x, y, z) = 0$$

vorstellen; es sei das vollständige Differential von $f(x, y, z)$

$$= Pdx+Qdy+Rdz,$$

wo P, Q, R Functionen von x, y, z sein werden. Wir werden immer an der Fläche zwei Seiten unterscheiden, wovon wir die eine die obere, die andere die untere nennen wollen; allgemein zu reden wird beim Durchgang durch

die Fläche der Werth von V sein Zeichen ändern, so dass, so lange die Stetigkeit nicht unterbrochen wird, auf der einen Seite die positiven, auf der andern die negativen [Werthe] stattfinden.

Die Richtung der Normale auf die Fläche nach derjenigen Seite zu, die wir als obere betrachten, werde auf der Hülfskugel durch den Punkt L bezeichnet und es sei

$$\cos L(1) = X, \qquad \cos L(2) = Y, \qquad \cos L(3) = Z.$$

Es sei ferner ds eine unendlich kleine Linie auf der Fläche, und indem deren Richtung auf der Hülfskugel durch den Punkt λ bezeichnet wird, sei

$$\cos\lambda(1) = \xi, \qquad \cos\lambda(2) = \eta, \qquad \cos\lambda(3) = \zeta.$$

Wir haben dann

$$dx = \xi ds, \qquad dy = \eta ds, \qquad dz = \zeta ds,$$

also

$$P\xi+Q\eta+R\zeta = 0$$

und, da $\lambda L = 90^0$ sein muss, auch

$$X\xi+Y\eta+Z\zeta = 0.$$

Da P, Q, R, X, Y, Z bloss von der Stelle der Fläche abhängen, von wo man das Element ausgehen lässt, und diese Gleichungen für jede Richtung des Elements in der Fläche richtig sind, so sieht man leicht, dass P, Q, R den X, Y, Z proportional sein müssen, also

$$P = X\mu, \qquad Q = Y\mu, \qquad R = Z\mu,$$

also, da

$$XX+YY+ZZ = 1$$

wird:

$$\mu = PX+QY+RZ$$

und

$$\mu\mu = PP+QQ+RR$$

oder

$$\mu = \pm\sqrt{(PP+QQ+RR)}.$$

Entfernt man sich von der Fläche in der Richtung nach der Normale um das Element $\partial\rho$, so wird:

$$\partial x = X\partial\rho, \qquad \partial y = Y\partial\rho, \qquad \partial z = Z\partial\rho$$

und

$$\partial V = P\partial x + Q\partial y + R\partial z = \mu\partial\rho.$$

Man sieht also, wie das Zeichen von μ von der Zeichenänderung des Werthes von V beim Durchgang von der untern auf die obere Seite abhängt.

9.

Man schneide die krumme Fläche mit einer Ebene in dem Punkte, auf den sich unsere Bezeichnungen beziehen; es entsteht so eine plane krumme Linie, von welcher ds ein Element sei, in Beziehung auf welches wir die obigen Bezeichnungen beibehalten. Als obere Seite der Ebene betrachten wir die, auf welcher die Normale auf die krumme Fläche liegt; auf die Ebene errichten wir eine Normale, deren Richtung durch den Punkt $\mathfrak{L}$ der Hülfskugel bezeichnet werde. Beim Fortschreiten in der krummen Linie werden also λ und L ihre Stelle verändern, während $\mathfrak{L}$ constant bleibt und immer λL und $\lambda\mathfrak{L} = 90^0$ sind: λ beschreibt daher den grössten Kreis, dessen einer Pol $\mathfrak{L}$ ist. Das Element dieses grössten Kreises wird

$$= \frac{ds}{r}$$

sein, wenn r den Krümmungshalbmesser der Curve bedeutet; und wird wiederum die Richtung eben dieses Elements auf der Hülfskugel mit λ' bezeichnet, so wird offenbar λ' in eben dem grössten Kreise liegen, und sowohl von λ als von $\mathfrak{L}$ um 90^0 abstehen. Setzt man nun noch

$$\cos\lambda'(1) = \xi', \qquad \cos\lambda'(2) = \eta', \qquad \cos\lambda'(3) = \zeta',$$

so wird

$$d\xi = \xi'\frac{ds}{r}, \qquad d\eta = \eta'\frac{ds}{r}, \qquad d\zeta = \zeta'\frac{ds}{r}$$

sein, da in der That ξ, η, ζ nichts anderes sind, als die Coordinaten des Punktes λ gegen den Mittelpunkt der Kugel.

Da durch Elimination aus der Gleichung $f(x, y, z) = 0$ die eine Coordinate z in der Form einer Function von x und y dargestellt werden kann, so wollen wir grösserer Einfachheit wegen annehmen, dass diess geschehen und

$$z = F(x, y)$$

gefunden sei; man kann dann gleich als Gleichung der Fläche

$$z - F(x, y) = 0$$

setzen oder

$$f(x, y, z) = z - F(x, y).$$

Es wird sonach, wenn wir

$$dF(x, y) = t\,dx + u\,dy$$

setzen,

$$P = -t, \qquad Q = -u, \qquad R = 1,$$

wo t, u bloss Functionen von x und y sind. Wir setzen noch ferner

$$dt = T dx + U dy, \qquad du = U dx + V dy.$$

Es ist demnach auf der ganzen Fläche

$$dz = t\,dx + u\,dy$$

und also in der Curve

$$\zeta = t\xi + u\eta.$$

Die Differentiation gibt demnach durch Substitution obiger Werthe für $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$:

$$\begin{aligned}(\zeta' - t\xi' - u\eta')\frac{ds}{r} &= \xi\,dt + \eta\,du \\ &= (\xi\xi T + 2\xi\eta U + \eta\eta V)\,ds\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{\xi\xi T + 2\xi\eta U + \eta\eta V}{-\xi' t - \eta' u + \zeta'} \\ &= \frac{Z(\xi\xi T + 2\xi\eta U + \eta\eta V)}{X\xi' + Y\eta' + Z\zeta'} \\ &= \frac{Z(\xi\xi T + 2\xi\eta U + \eta\eta V)}{\cos L\lambda'}.\end{aligned}$$

10.

Ehe wir den eben gefundenen Ausdruck weiter umformen, wollen wir über denselben einige Bemerkungen machen.

Eine Normale auf die Curve in ihrer Ebene entspricht zweien Richtungen auf der Kugelfläche, je nachdem man jene auf die eine oder auf die andere Seite der Curve zieht; die eine Richtung, nach welcher die Curve concav ist, wird durch λ' bezeichnet, die andere durch den gegenüberliegenden Punkt der Kugelfläche. Diese beiden Punkte, eben so wie L und $\mathfrak{L}$, sind von λ um 90^0 entfernt und liegen also in einem grössten Kreise; und da auch $\mathfrak{L}$ von λ um 90^0 entfernt ist, so wird $\mathfrak{L}L = 90^0 - L\lambda'$ oder $= L\lambda' - 90^0$ sein, und daher

$$\cos L\lambda' = \pm \sin \mathfrak{L}L,$$

wo $\sin \mathfrak{L}L$ nothwendig positiv ist. Da in unserer Analyse r als positiv betrachtet ist, so wird das Zeichen von $\cos L\lambda'$ dem von

$$Z(\xi\xi T + 2\xi\eta U + \eta\eta V)$$

gleich sein, und also ein positiver Werth von letzterer Grösse anzeigen, dass $L\lambda'$ unter 90^0 ist, oder dass die Curve nach der Seite concav ist, wo die Projection auf die Ebene der Normale auf die krumme Fläche liegt, ein negativer Werth hingegen, dass die Curve nach dieser Seite convex ist. Wir können daher auch allgemein

$$\frac{1}{r} = \frac{Z(\xi\xi T + 2\xi\eta U + \eta\eta V)}{\sin \mathfrak{L}L}$$

setzen, wenn wir den Krümmungshalbmesser im ersten Fall als positiv, im andern als negativ betrachten wollen. $\mathfrak{L}L$ ist nunmehro der Winkel, welchen unsere schneidende Ebene mit der die krumme Fläche berührenden Ebene macht, und man sieht, dass in verschiedenen schneidenden Ebenen, die durch denselben Punkt und dieselbe Tangente gelegt sind, die Krümmungshalbmesser dem Sinus der Neigung proportional sind. Wegen dieser einfachen Beziehung wollen wir uns hinfort auf den Fall einschränken, wo dieser Winkel ein rechter ist und also die schneidende Ebene durch die Normale auf die krumme

Fläche selbst gelegt wird. Für den Krümmungshalbmesser haben wir also die einfache Formel

$$\frac{1}{r} = Z(\xi\xi T + 2\xi\eta U + \eta\eta V).$$

11.

Da sich durch diese Normale unendlich viele Ebenen legen lassen, so können hiernach unendlich viele verschiedene Werthe des Krümmungshalbmessers stattfinden. In dieser Beziehung sind T, U, V, Z als constant, ξ, η, ζ als veränderlich zu betrachten. Um die letztern von Einer veränderlichen Grösse abhängig zu machen, nehme man in dem grössten Kreise, dessen Pol L ist, zwei feste um 90^0 von einander entfernte Punkte an, die M, M' heissen mögen. Es seien ihre Coordinaten gegen den Mittelpunkt der Kugel α, β, γ; α', β', γ'. Man hat dann

$$\cos\lambda(1) = \cos\lambda M . \cos M(1) + \cos\lambda M' . \cos M'(1) + \cos\lambda L . \cos L(1).$$

Setzt man nun

$$\lambda M = \varphi,$$

so ist

$$\cos\lambda M' = \sin\varphi$$

und die Formel wird

$$\xi = \alpha\cos\varphi + \alpha'\sin\varphi$$

und eben so

$$\eta = \beta\cos\varphi + \beta'\sin\varphi$$

$$\zeta = \gamma\cos\varphi + \gamma'\sin\varphi.$$

Also, wenn man

$$A = (\alpha\alpha T + 2\alpha\beta U + \beta\beta V)Z$$

$$B = (\alpha\alpha' T + (\alpha\beta' + \alpha\beta')U + \beta\beta' V)Z$$

$$C = (\alpha'\alpha' T + 2\alpha'\beta' U + \beta'\beta' V)Z$$

setzt:

$$\frac{1}{r} = A\cos\varphi^2 + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin\varphi^2$$
$$= \frac{A+C}{2} + \frac{A-C}{2}\cos 2\varphi + B\sin 2\varphi.$$

Macht man

$$\frac{A-C}{2} = E\cos 2\theta$$
$$B = E\sin 2\theta,$$

wo man annehmen kann, dass E dasselbe Zeichen wie $\frac{A-C}{2}$ hat, so wird

$$\frac{1}{r} = \tfrac{1}{2}(A+C) + E\cos 2(\varphi-\theta).$$

Offenbar bedeutet φ den Winkel zwischen der schneidenden Ebene und einer andern durch die Normale und diejenige Tangente gehenden, der die Richtung M entspricht. Offenbar hat also $\frac{1}{r}$ seinen grössten (absoluten) oder r seinen kleinsten Werth, wenn $\varphi = \theta$, und $\frac{1}{r}$ den kleinsten, wenn $\varphi = \theta + 90^0$ wird; die grösste und kleinste Krümmung finden also in zweien einander unter rechten Winkeln schneidenden Ebenen statt. Diese äussersten Werthe für $\frac{1}{r}$ sind folglich

$$\tfrac{1}{2}(A+C) \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{A-C}{2}\right)^2 + BB\right\}},$$

ihre Summe $= A+C$ und ihr Product $= AC-BB$ oder das Product der beiden äussersten Krümmungshalbmesser

$$= \frac{1}{AC-BB}.$$

Dieses Product, welches von grosser Wichtigkeit ist, verdient genauer entwickelt zu werden. Wir finden nemlich aus obigen Formeln

$$AC-BB = (\alpha\beta'-\beta\alpha')^2(TV-UU)ZZ.$$

Nach der dritten Formel in [Lehrsatz] 6, Art. 7, folgert man aber leicht, dass

$$\alpha\beta'-\beta\alpha' = \pm Z,$$

also

$$AC-BB = Z^4(TV-UU).$$

Übrigens ist nach Art. 8

$$Z = \pm\frac{R}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}}$$
$$= \pm\frac{1}{\sqrt{(1+tt+uu)}},$$

also

$$AC-BB = \frac{TV-UU}{(1+tt+uu)^2}.$$

So wie jedem Punkt der krummen Fläche vermöge der daselbst gezogenen Normale und des dieser parallelen Radius der Hülfskugel ein besonderer Punkt L auf der Fläche der Hülfskugel correspondirt, so wird aus den, allen Punkten einer Linie auf der krummen Fläche auf der Oberfläche der Hülfskugel correspondirenden, Punkten eine Linie gebildet, die jener correspondirt, und eben so wird jeder begrenzten Figur auf der krummen Fläche eine begrenzte Figur auf der Hülfskugel entsprechen; die Area auf der letztern soll als das Mass der Amplitudo der erstern betrachtet werden: wir werden diese Area entweder als eine Zahl betrachten, wobei das Quadrat des Halbmessers der Hülfskugel als Einheit zum Grunde liegt, oder auch sie durch Grade u. s. w. ausdrücken, indem wir die Area der Halbkugel $= 360^0$ setzen.

Die Vergleichung der Area auf der krummen Fläche mit der entsprechenden Amplitudo führt auf den Begriff von dem, was wir das Krümmungsmass der Fläche nennen. Ist jene dieser proportional, so soll die Krümmung gleichförmig heissen, und der Quotient, wenn man die Amplitudo mit der Fläche dividirt, soll das Krümmungsmass heissen: diess ist der Fall, wenn die krumme Fläche eine Kugel ist, und das Krümmungsmass ist dann ein Bruch, dessen Zähler 1, der Nenner das Quadrat des Halbmessers ist.

Wir werden das Krümmungsmass als positiv betrachten, wenn die Grenzen um die Figuren auf der krummen Fläche und auf der Hülfskugel in einerlei Sinn laufen, negativ, wenn die Grenzen im entgegengesetzten Sinn die Figuren umgeben. Findet jene Proportionalität nicht statt, so ist die Fläche ungleichförmig gekrümmt, und an jeder Stelle findet ein besonderes Krümmungsmass statt, welches aus der Vergleichung unendlich kleiner auf der krummen Fläche und der Hülfskugel zusammengehörender Theile hervorgeht. Es sei $d\sigma$ ein Flächenelement auf jener, $d\Sigma$ das correspondirende auf der Hülfskugel, so wird

$$\frac{d\Sigma}{d\sigma}$$

das Krümmungsmass an dieser Stelle sein.

Um dessen Grenze zu bestimmen, projiciren wir zuerst beide auf die Ebene der x, y; die Grössen der Projectionen werden $Zd\sigma$, $Zd\Sigma$ sein; das Zeichen von Z wird den gleichen oder entgegengesetzten Sinn, in welchem die Grenzen die Flächen und ihre Projectionen umgeben, ausdrücken. Man stelle sich die Figur als ein Dreieck vor, die Projection auf die Ebene der x, y habe die Coordinaten

$$x, y; \qquad x+dx,\ y+dy; \qquad x+\delta x,\ y+\delta y;$$

und so wird sein doppelter Inhalt

$$2Zd\sigma = dx.\delta y - dy.\delta x$$

sein. Der Projection des correspondirenden Elements auf der Kugelfläche werden die Coordinaten entsprechen

$$\begin{array}{ll} X, & Y, \\ X+\frac{\partial X}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial X}{\partial y}\cdot dy, & Y+\frac{\partial Y}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot dy, \\ X+\frac{\partial X}{\partial x}\cdot \delta x+\frac{\partial X}{\partial y}\cdot \delta y, & Y+\frac{\partial Y}{\partial x}\cdot \delta x+\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot \delta y. \end{array}$$

Daraus findet sich die doppelte Area des Elements

$$\begin{aligned} 2Zd\Sigma = & \left(\frac{\partial X}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial X}{\partial y}\cdot dy\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\cdot \delta x+\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot \delta y\right) \\ & -\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cdot \delta x+\frac{\partial X}{\partial y}\cdot \delta y\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\cdot dx+\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot dy\right) \\ = & \left(\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}\right)(dx.\delta y-dy.\delta x). \end{aligned}$$

Das Krümmungsmass ist also

$$= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \omega.$$

Nun hat man, da

$$X = -tZ, \qquad Y = -uZ,$$

$$(1+tt+uu)ZZ = 1:$$

$$dX = -Z^3(1+uu)dt+Z^3tu.du$$

$$dY = +Z^3tu.dt-Z^3(1+tt)\,du,$$

also

$$\frac{\partial X}{\partial x} = Z^3\{-(1+uu)T+tuU\}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial x} = Z^3\{tuT-(1+tt)U\},$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = Z^3\{-(1+uu)U+tuV\}, \qquad \frac{\partial Y}{\partial y} = Z^3\{tuU-(1+tt)V\}$$

und

$$\begin{aligned} \omega &= Z^6(TV-UU)((1+tt)(1+uu)-ttuu) \\ &= Z^6(TV-UU)(1+tt+uu) \\ &= Z^4(TV-UU) \\ &= \frac{TV-UU}{(1+tt+uu)^2}, \end{aligned}$$

ganz derselbe Ausdruck, den wir am Schluss des vorigen Artikels gefunden haben. Man sieht also, dass

> »das Krümmungsmass allemal durch den Bruch ausgedrückt wird, dessen Zähler = 1, der Nenner das Product des grössten und kleinsten Krümmungshalbmessers in den durch die Normale gehenden Ebenen«.

12.

Wir wollen jetzt die Natur der kürzesten Linie auf der krummen Fläche untersuchen. Die Natur einer krummen Linie im Raume im allgemeinen wird dadurch bestimmt, dass die Coordinaten jedes Punkts x, y, z als Functionen Einer veränderlichen Grösse, die wir w nennen wollen, betrachtet werden; die Länge der Curve bis zu diesem Punkte, von einem beliebigen Anfangspunkte an gezählt, ist dann

$$= \int\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2\right\}}\cdot dw.$$

Lässt man die Curve ihre Lage um eine unendlich kleine Variation verändern, so wird die Variation der ganzen Länge

$$= \int \frac{\frac{dx}{dw}\cdot d\delta x + \frac{dy}{dw}\cdot d\delta y + \frac{dz}{dw}\cdot d\delta z}{\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2\right\}}} = \frac{\frac{dx}{dw}\cdot\delta x + \frac{dy}{dw}\cdot\delta y + \frac{dz}{dw}\cdot\delta z}{\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2\right\}}}$$

$$-\int\left\{\delta x\,.\,d\frac{\frac{dx}{dw}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2\right\}}} + \delta y\,.\,d\frac{\frac{dy}{dw}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2\right\}}} + \delta z\,.\,d\frac{\frac{dz}{dw}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2\right\}}}\right\}.$$

Was hier unter dem Integrationszeichen steht, muss bekanntlich für den Fall des Minimum verschwinden; in so fern nun die krumme Linie sich auf einer gegebenen krummen Fläche befinden soll, deren Gleichung

$$P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$$

ist, muss auch zwischen den Variationen δx, δy, δz die Gleichung

$$P\delta x + Q\delta y + R\delta z = 0$$

statthaben, woraus man nach bekannten Principien leicht schliesst, dass die Differentiale

$$d\cdot\frac{\frac{dx}{dw}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2\right\}}},\quad d\cdot\frac{\frac{dy}{dw}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2\right\}}},\quad d\cdot\frac{\frac{dz}{dw}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2+\left(\frac{dy}{dw}\right)^2+\left(\frac{dz}{dw}\right)^2\right\}}}$$

resp. den Grössen P, Q, R proportional sein müssen. Ist ds ein Element der Curve, λ der Punkt auf der Hülfskugel, der die Richtung dieses Elements, L der Punkt, der wie oben die Richtung der Normale ausdrückt, und sind ξ, η, ζ; X, Y, Z die Coordinaten der Punkte λ, L in Beziehung auf den Mittelpunkt der Hülfskugel, dann hat man:

$$dx = \xi ds, \qquad dy = \eta ds, \qquad dz = \zeta ds,$$

$$\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1;$$

man sieht also, dass die obigen Differentiale $= d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ werden. Und da P, Q, R den Grössen X, Y, Z proportional sind, so ist der Character der kürzesten Linie der, dass

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\zeta}{Z}.$$

13.

Einem jeden Punkte einer krummen Linie auf der krummen Fläche entsprechen auf der Kugelfläche nach unserer Ansicht bereits zwei Punkte, nemlich der Punkt λ, der die Richtung des Linienelements und der Punkt L, der die Richtung der Normale auf die Fläche vorstellt. Beide sind offenbar 90^0 von einander entfernt. Bei unserer frühern Untersuchung (Art. 9), wo [wir] die krumme Linie in Einer Ebene liegend vorausgesetzt hatten, hatten wir noch zwei andere Punkte auf der Kugelfläche, nemlich $\mathfrak{L}$, der die Richtung der Normale auf die Ebene, und λ', der die Richtung der Normale auf das Element der Curve in der Ebene vorstellte; hierbei war also $\mathfrak{L}$ ein fester Punkt und λ, λ' immer in Einem grössten Kreise, dessen Pol $\mathfrak{L}$. Indem wir jetzt die Betrachtung generalisiren, wollen wir zwar die Bezeichnungen $\mathfrak{L}$, λ' beibehalten, müssen aber ihre Bedeutung aus einem allgemeinern Gesichtspunkt auffassen. Indem nemlich die Curve s beschrieben wird, werden die Punkte L, λ auf der Hülfskugelfläche auch krumme Linien beschreiben, die, allgemein zu reden, keine grössten Kreise mehr sind. Mit dem Element der zweiten Linie parallel ziehe man einen Radius der Hülfskugel zum Punkt λ', statt dessen wir aber den gegenüberliegenden Punkt wählen, wenn jener mehr als 90^0 von L entfernt ist; im ersten Fall betrachten wir das Element an λ als positiv, im andern als negativ; endlich sei $\mathfrak{L}$ der Punkt der Hülfskugel, der von λ und λ' zugleich 90^0 entfernt ist und zwar so, dass λ, λ', $\mathfrak{L}$ in derselben Ordnung liegen wie (1), (2), (3).

Die Coordinaten der vier Punkte auf der Hülfskugel relativ gegen den Mittelpunkt sind für

	X	Y	Z
L	X	Y	Z
λ	ξ	η	ζ
λ'	ξ'	η'	ζ'
$\mathfrak{L}$	α	β	γ.

Jeder dieser 4 Punkte beschreibt also auf der Hülfskugel selbst eine Linie, deren Elemente wir durch dL, $d\lambda$, $d\lambda'$, $d\mathfrak{L}$ ausdrücken wollen. Wir haben also

$$d\xi = \xi'\,d\lambda$$
$$d\eta = \eta'\,d\lambda$$
$$d\zeta = \zeta'\,d\lambda.$$

Der Analogie nach nennen wir nun

$$\frac{d\lambda}{ds}$$

das Krümmungsmass der krummen Linie auf der krummen Fläche, und dessen Reciprocum

$$\frac{ds}{d\lambda}$$

den Krümmungshalbmesser; bezeichnen wir letztern durch ρ, so ist

$$\rho\,d\xi = \xi'\,ds$$
$$\rho\,d\eta = \eta'\,ds$$
$$\rho\,d\zeta = \zeta'\,ds.$$

Ist also unsere Linie eine kürzeste Linie, so werden ξ', η', ζ' den Grössen X, Y, Z proportional sein müssen; allein, da zugleich

$$\xi'\xi' + \eta'\eta' + \zeta'\zeta' = XX + YY + ZZ = 1,$$

so wird

$$\xi' = \pm X, \qquad \eta' = \pm Y, \qquad \zeta' = \pm Z,$$

und da ferner

$$\begin{aligned} \xi' X + \eta' Y + \zeta' Z &= \cos \lambda' L \\ &= \pm (XX + YY + ZZ) \\ &= \pm 1 \end{aligned}$$

wird und wir den Punkt λ' immer so wählen, dass

$$\lambda' L < 90^0$$

ist, so wird für die kürzeste Linie

$$\lambda' L = 0$$

sein oder λ' mit L zusammenfallen müssen. Es ist also

$$\rho\,d\xi = X\,ds$$
$$\rho\,d\eta = Y\,ds$$
$$\rho\,d\zeta = Z\,ds$$

und wir haben hier anstatt 4 krummer Linien auf der Oberfläche der Hülfskugel nur 3 zu betrachten. Jedes Element der zweiten Linie ist also als in dem grössten Kreise $L\lambda$ liegend anzusehen, und der positive oder negative Werth von ρ wird sich auf die Concavität oder Convexität der Curve nach der Richtung der Normale beziehen.

14.

Wir wollen nunmehro den sphärischen Winkel auf der Hülfskugel untersuchen, den der grösste Kreis von L nach λ mit demjenigen macht, der von L nach einem der festen Punkte (1), (2), (3), z. B. nach (3), geht. Um hierin etwas bestimmtes zu haben, zählen wir von $L(3)$ nach $L\lambda$ in demjenigen Sinn herum, in welchem (1), (2) und (3) liegen. Nennen wir φ diesen Winkel, so ist in Folge des Satzes Art. 7

$$\sin L(3) . \sin L\lambda . \sin\varphi = Y\xi - X\eta$$

oder, da $L\lambda = 90^0$ und

$$\sin L(3) = \sqrt{(XX+YY)} = \sqrt{(1-ZZ)}:$$

$$\sin\varphi = \frac{Y\xi - X\eta}{\sqrt{(XX+YY)}}.$$

Es ist ferner

$$\sin L(3) . \sin L\lambda . \cos\varphi = \zeta$$

oder

$$\cos\varphi = \frac{\zeta}{\sqrt{(XX+YY)}}$$

und

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{Y\xi - X\eta}{\zeta} = \frac{\zeta'}{\zeta}.$$

Man hat also

$$d\varphi = \frac{\zeta Y d\xi - \zeta X d\eta - (Y\xi - X\eta)\,d\zeta + \xi\zeta\,dY - \eta\zeta\,dX}{(Y\xi - X\eta)^2 + \zeta\zeta}.$$

Der Nenner dieses Ausdrucks ist

$$\begin{aligned}
&= YY\xi\xi - 2XY\xi\eta + XX\eta\eta + \zeta\zeta \\
&= -(X\xi + Y\eta)^2 + (XX + YY)(\xi\xi + \eta\eta) + \zeta\zeta \\
&= -ZZ\zeta\zeta + (1 - ZZ)(1 - \zeta\zeta) + \zeta\zeta \\
&= 1 - ZZ
\end{aligned}$$

oder

$$d\varphi = \frac{\zeta Y d\xi - \zeta X d\eta + (X\eta - Y\xi)\,d\zeta - \eta\zeta\, dX + \xi\zeta\, dY}{1 - ZZ}.$$

Man verificirt leicht durch Entwickelung die identische Gleichung

$$\begin{aligned}
&\eta\zeta(XX + YY + ZZ) + YZ(\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta) \\
&= (X\xi + Y\eta + Z\zeta)(Z\eta + Y\zeta) + (X\zeta - Z\xi)(X\eta - Y\xi)
\end{aligned}$$

und eben so

$$\begin{aligned}
&\xi\zeta(XX + YY + ZZ) + XZ(\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta) \\
&= (X\xi + Y\eta + Z\zeta)(X\zeta + Z\xi) + (Y\xi - X\eta)(Y\zeta - Z\eta).
\end{aligned}$$

Wir haben demnach

$$\begin{aligned}
\eta\zeta &= -YZ + (X\zeta - Z\xi)(X\eta - Y\xi) \\
\xi\zeta &= -XZ + (Y\xi - X\eta)(Y\zeta - Z\eta).
\end{aligned}$$

Diess substituirt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
d\varphi = {} & \frac{Z}{1-ZZ}(YdX - XdY) + \frac{\zeta Y d\xi - \zeta X d\eta}{1-ZZ} \\
& + \frac{X\eta - Y\xi}{1-ZZ}\{d\zeta - (X\zeta - Z\xi)\,dX - (Y\zeta - Z\eta)\,dY\}.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
XdX + YdY + ZdZ &= 0 \\
\xi dX + \eta dY + \zeta dZ &= -Xd\xi - Yd\eta - Zd\zeta.
\end{aligned}$$

Diess substituirt, erhalten wir anstatt dessen, was in der Parenthese steht,

$$d\zeta - Z(Xd\xi + Yd\eta + Zd\zeta).$$

Hieraus wird

$$\begin{aligned}
d\varphi = \frac{Z}{1-ZZ}(YdX - XdY) & + \frac{d\xi}{1-ZZ}\{\zeta Y - \eta XXZ + \xi XYZ\} \\
& - \frac{d\eta}{1-ZZ}\{\zeta X - \eta XYZ + \xi YYZ\} \\
& + d\zeta(\eta X - \xi Y).
\end{aligned}$$

Da nun ferner

$$\begin{aligned}
\eta XXZ - \xi XYZ &= \eta XXZ + \eta YYZ + \zeta ZYZ \\
&= \eta Z(1 - ZZ) + \zeta YZZ \\
\eta XYZ - \xi YYZ &= -\xi XXZ - \zeta XZZ - \xi YYZ \\
&= -\xi Z(1 - ZZ) - \zeta XZZ,
\end{aligned}$$

so wird unser ganzer Ausdruck

$$\begin{aligned}
d\varphi = {} & \frac{Z}{1-ZZ}(YdX - XdY) \\
& + (\zeta Y - \eta Z)\,d\xi + (\xi Z - \zeta X)\,d\eta + (\eta X - \xi Y)\,d\zeta.
\end{aligned}$$

15.

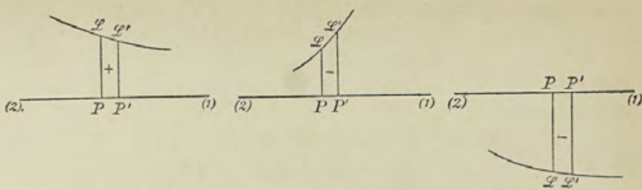
Die gefundene Formel ist allgemein richtig, wie auch die krumme Linie beschaffen sei: ist aber diese eine kürzeste Linie, so ist klar, dass sich die drei letzten Theile destruiren, und folglich wird

$$d\varphi = -\frac{Z}{1-ZZ}(XdY - YdX).$$

Man sieht aber leicht, dass

$$\frac{Z}{1-ZZ}(XdY - YdX)$$

nichts anderes ist, als die Area des Theils der Fläche der Hülfskugel, welcher zwischen dem Elemente der Linie L, den beiden durch seine Endpunkte und (3) gezogenen grössten Kreisen und dem dadurch abgeschnittenen Element des grössten Kreises durch (1) und (2) gebildet wird, diese Fläche als positiv betrachtet, wenn L mit (3) auf derselben Seite von (1)(2) liegt und die Richtung von P nach P' der von (2) nach (1) gleich, negativ, wenn von einer dieser Bedingungen das Gegentheil, und wieder positiv, wenn von beiden das Gegentheil stattfindet oder mit andern Worten als positiv, wenn man den Um-



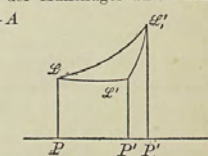
fang der Figur $LL'P'P$ in demselben Sinn umgeht, wie (1)(2)(3), negativ beim entgegengesetzten.

Man denke sich nun ein endliches Stück der Linie von L nach L' und nenne φ, φ' die an beiden Endpunkten geltenden Werthe des Winkels, so ist

$$\varphi' = \varphi + \text{Area}\, LL'P'P,$$

das Zeichen der Area eben so verstanden.

Man nehme nun ferner an, dass von dem Anfangspunkte auf der krummen Fläche unzählige andere kürzeste Linien auslaufen und nenne den Winkel, den indefinite das erste Element mit dem ersten Elemente der ersten Linie links herum macht, A; durch das zweite Ende dieser verschiedenen krummen Linien sei eine krumme Linie gezogen, von der wir vorerst unentschieden lassen, ob sie eine kürzeste Linie sei oder nicht. Setzen wir nun, dass indefinite für jede dieser Linien das, was für die erste φ, φ' war, durch ψ, ψ' bezeichnet wird, so ist $\psi'-\psi$ auf ähnliche Weise auf der Hülfskugel durch den Raum $LL'P'P$ darzustellen, und da offenbar $\psi = \varphi - A$ wird, so ist der Raum



$$\begin{aligned} LL_1'P_1'P'L'L &= \psi'-\psi-\varphi'+\varphi \\ &= \psi'-\varphi'+A \\ &= LL_1'L'L + L'L_1'P_1'P'. \end{aligned}$$

Ist nun die Grenzlinie auch eine kürzeste und macht sie fortschreitend genommen mit LL', LL_1' die Winkel B, B_1, wird ferner für sie in den Punkten L', L_1' durch χ, χ_1 dasselbe bezeichnet, was φ für L in der Linie LL'

war, so ist

$$\chi_1 = \chi + \text{Area}\, L'L_1'P_1'P'$$
$$\psi' - \varphi' + A = LL_1'L'L + \chi_1 - \chi;$$

allein

$$\varphi' = \chi + B$$
$$\psi' = \chi_1 + B_1,$$

also

$$B_1 - B + A = LL_1'L'L.$$

Die Winkel des Dreiecks $LL'L_1'$ sind offenbar

$$A, \qquad 180^0 - B, \qquad B_1,$$

also ihre Summe

$$180^0 + LL_1'L'L.$$

Der Beweis wird in der Form einiger Modification und Erläuterung bedürfen, wenn der Punkt (3) innerhalb des Dreiecks fällt. Allgemein aber schliessen wir:

»Die Summe der drei Winkel eines Dreiecks, welches auf einer beliebigen krummen Fläche durch kürzeste Linien gebildet wird, ist gleich der Summe von 180^0 und dem Inhalt des Dreiecks auf der Hülfskugel, dessen Begrenzung durch die Punkte L gebildet wird, welche den Punkten in der Begrenzung jenes Dreiecks entsprechen, und zwar so, dass der gedachte Inhalt des Dreiecks als positiv oder negativ anzusehen ist, je nachdem es von seiner Begrenzung in demselben Sinn umgeben wird wie die Figur oder im entgegengesetzten«.

Man schliesst hieraus ferner leicht, dass die Summe aller Winkel eines Polygons von n Seiten, die auf der krummen Fläche kürzeste Linien sind, [gleich] der Summe von $(n-2)\,180^0$ + Inhalt des Polygons auf der Kugelfläche etc.

16.

Wenn eine krumme Fläche vollkommen auf die andere abgewickelt werden kann, so behalten dabei offenbar alle Linien auf der ersten Fläche bei der Übertragung auf einander ihre Grösse, eben so wie die Winkel, die durch das

Zusammentreffen zweier Linien gebildet werden: offenbar bleiben daher auch solche Linien, die auf der einen Fläche kürzeste Linien waren, bei der Übertragung wieder kürzeste Linien. Hieraus folgt leicht, dass, wenn einem beliebigen durch kürzeste Linien gebildeten Polygon, in so fern es auf der ersten Fläche ist, die Figur der Zenithe auf der Hülfskugel entspricht, deren Area $= A$ ist, demselben Polygon hingegen, in so fern es durch Abwickelung auf die zweite Fläche übertragen wird, eine Figur der Zenithe auf der Hülfskugel, deren Inhalt $= A'$ wird, allemal

$$A = A'$$

sein wird. Obgleich dieser Beweis ursprünglich die Begrenzung der Figuren durch kürzeste Linien voraussetzt, so sieht man doch leicht, dass er allgemein gültig ist, wie auch die Begrenzung sein möge: denn in der That, wenn das Theorem von der Anzahl der Seiten unabhängig ist, so hindert nichts, für jedes Polygon, dessen Seiten alle oder einige keine kürzeste Linien sind, ein anderes von unendlich vielen Seiten, die jede kürzeste Linien sind, zu denken.

Ferner ist klar, dass bei der Übertragung durch Abwickelung jede Figur auch ihre Area behält.

Es ist nun hier von 4 Figuren die Rede:

1) eine beliebige Figur auf der ersten Fläche,

2) die Figur auf der Hülfskugel, die den Zenithen von jener entspricht,

3) die Figur auf der zweiten Fläche, welche Nro 1 vermöge der Abwickelung bildet,

4) die Figur auf der Hülfskugel, die den Zenithen von Nro 3 entspricht.

Nach dem, was wir bewiesen haben, haben also 2 und 4 gleichen Inhalt, eben so wie 1 und 3. In so fern nun diese Figuren unendlich klein angenommen werden, ist der Quotient, wenn man 2 durch 1 dividirt, das Krümmungsmass an der Stelle der ersten krummen Fläche, und eben so der Quotient 4 durch 3 bei der zweiten. Hieraus folgt also der wichtige Lehrsatz, dass

> »bei der Übertragung der Flächen durch Abwickelung das Krümmungsmass an jeder Stelle unverändert bleibt«.

Dasselbe gilt also von dem Product des grössten und kleinsten Krümmungshalbmessers.

Bei der Ebene ist offenbar das Krümmungsmass überall $= 0$: hieraus

folgt also der wichtige Lehrsatz, dass

> »bei allen Flächen, die sich in eine Ebene abwickeln lassen, das Krümmungsmass überall verschwindet«

oder dass

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x . \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0$$

wird, welches Criterium sonst aus andern Gründen abgeleitet wird, obwohl, wie uns scheint, nicht mit der zu wünschenden Evidenz. Es ist klar, dass bei allen solchen Flächen die Zenithe aller Punkte keinen Raum ausfüllen können, und daher alle in einer Linie liegen.

17.

Von einem gegebenen Punkte auf einer krummen Fläche wollen wir unzählige kürzeste Linien auf dieser Fläche ausgehen lassen, die von einander durch den Winkel unterschieden werden sollen, welchen ihr erstes Element mit dem ersten Element Einer bestimmten kürzesten Linie macht: dieser Winkel soll θ heissen. Es soll ferner s die [von dem gegebenen Punkte aus gemessene] Länge eines Stücks von einer solchen kürzesten Linie sein und deren Endpunkte die Coordinaten x, y, z haben. Da θ und s also einem ganz bestimmten Punkt der krummen Fläche angehören, so kann man x, y, z wie Functionen von θ und s betrachten. Die Richtung des Elements von s entspreche auf der Kugelfläche dem Punkte λ, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, so dass man

$$\xi = \frac{\partial x}{\partial s}, \qquad \eta = \frac{\partial y}{\partial s}, \qquad \zeta = \frac{\partial z}{\partial s}$$

haben wird.

Die Endpunkte aller kürzesten Linien von gleicher Länge s entsprechen einer krummen Linie, deren Länge t heissen mag. Man kann offenbar t als eine Function von s und θ betrachten, und wenn die Richtung des Elements von t auf der Kugelfläche dem Punkte λ' entspricht, dessen Coordinaten ξ', η', ζ' sind, wird man

$$\xi' . \frac{\partial t}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta}, \qquad \eta' . \frac{\partial t}{\partial \theta} = \frac{\partial y}{\partial \theta}, \qquad \zeta' . \frac{\partial t}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

haben. Es ist folglich

$$(\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta')\frac{\partial t}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta},$$

welche Grösse wir mit u bezeichnen wollen, und die also ihrerseits wieder Function von θ und s sein wird.

Man findet dann, wenn man nach s differentiirt:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial\partial x}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial\partial y}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial\partial z}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta}+\tfrac{1}{2}\,\frac{\partial\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right\}}{\partial \theta}$$
$$= \frac{\partial\partial x}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial\partial y}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial\partial z}{\partial s^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \theta},$$

weil

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1,$$

also sein Differential $= 0$.

Allein da alle zu constantem θ [gehörigen] Punkte in einer kürzesten Linie liegen, so ist, wenn L das Zenith des Punktes, welchem s, θ entsprechen, bedeutet und die Coordinaten von L durch X, Y, Z bezeichnet werden:

$$\frac{\partial\partial x}{\partial s^2} = \frac{X}{p}, \qquad \frac{\partial\partial y}{\partial s^2} = \frac{Y}{p}, \qquad \frac{\partial\partial z}{\partial s^2} = \frac{Z}{p},$$

wenn p den Krümmungshalbmesser bedeutet. Wir haben also

$$p\cdot\frac{\partial u}{\partial s} = X\frac{\partial x}{\partial \theta}+Y\frac{\partial y}{\partial \theta}+Z\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial t}{\partial \theta}(X\xi'+Y\eta'+Z\xi').$$

Allein

$$X\xi'+Y\eta'+Z\zeta' = \cos L\lambda' = 0,$$

weil offenbar λ' in dem grössten Kreise liegt, dessen Pol L ist. Wir haben daher

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 0$$

oder u von s unabhängig und daher bloss Function von θ. Allein für $s = 0$ ist offenbar $t = 0$, $\frac{\partial t}{\partial \theta} = 0$ und also $u = 0$: wir schliessen daraus, dass allgemein $u = 0$ sein wird oder

$$\cos\lambda\lambda' = 0.$$

Es folgt hieraus der schöne Lehrsatz:

»Wenn von einem Punkte der krummen Fläche aus lauter kürzeste Linien von gleicher Länge gezogen sind, so machen diese mit der ihre Endpunkte verbindenden Linie überall rechte Winkel«.

Man kann auf ganz ähnliche Art beweisen, dass wenn auf der krummen Fläche irgend eine krumme Linie gegeben ist, und man von jedem Punkte derselben nach Einer Seite derselben und unter rechten Winkeln zu derselben lauter kürzeste Linien von gleicher Länge ausgehen lässt, deren Endpunkte durch eine Linie verbunden werden, diese von jenen überall unter rechten Winkeln geschnitten wird. Man braucht nur in der vorigen Entwickelung θ die Länge der gegebenen krummen Linie von einem beliebigen Punkte an bedeuten zu lassen, wo dann die vorigen Rechnungen ihre Gültigkeit behalten, nur dass die Richtigkeit des Werthes $u = 0$ für $s = 0$ jetzt schon in der Voraussetzung liegt.

18.

Die bei diesen Constructionen vorkommenden Grössenverhältnisse verdienen noch ausführlicher entwickelt zu werden. Wir haben also zuvörderst, wenn man Kürze halber m für $\frac{\partial t}{\partial \theta}$ schreibt:

(1) $$\frac{\partial x}{\partial s} = \xi, \qquad \frac{\partial y}{\partial s} = \eta, \qquad \frac{\partial z}{\partial s} = \zeta,$$

(2) $$\frac{\partial x}{\partial \theta} = m\xi', \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = m\eta', \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = m\zeta',$$

(3) $$\xi\xi+\eta\eta+\zeta\zeta = 1$$

(4) $$\xi'\xi'+\eta'\eta'+\zeta'\zeta' = 1$$

(5) $$\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta' = 0.$$

Ferner

(6) $$XX+YY+ZZ = 1$$

(7) $$X\xi+Y\eta+Z\zeta = 0$$

(8) $$X\xi'+Y\eta'+Z\zeta' = 0$$

und

[9] $$\left\{\begin{aligned} X &= \zeta\eta'-\eta\zeta' \\ Y &= \xi\zeta'-\zeta\xi' \\ Z &= \eta\xi'-\xi\eta' \end{aligned}\right.$$

$$[10]\qquad \begin{cases} \xi' = \eta Z - \zeta Y \\ \eta' = \zeta X - \xi Z \\ \zeta' = \xi Y - \eta X \end{cases}$$

$$[11]\qquad \begin{cases} \xi = Y\zeta' - Z\eta' \\ \eta = Z\xi' - X\zeta' \\ \zeta = X\eta' - Y\xi'. \end{cases}$$

Imgleichen sind $\frac{\partial \xi}{\partial s}$, $\frac{\partial \eta}{\partial s}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial s}$ den X, Y, Z proportional, und wenn wir

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} = pX, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial s} = pY, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial s} = pZ$$

setzen, wo $\frac{1}{p}$ den Krümmungshalbmesser der Linie s bedeuten wird, so ist:

$$p = X\frac{\partial \xi}{\partial s} + Y\frac{\partial \eta}{\partial s} + Z\frac{\partial \zeta}{\partial s}.$$

Durch Differentiation von (7) nach s erhält man daher

$$-p = \xi\frac{\partial X}{\partial s} + \eta\frac{\partial Y}{\partial s} + \zeta\frac{\partial Z}{\partial s}.$$

Man kann leicht zeigen, dass auch $\frac{\partial \xi'}{\partial s}$, $\frac{\partial \eta'}{\partial s}$, $\frac{\partial \zeta'}{\partial s}$ den X, Y, Z proportional sind; in der That sind die Werthe jener Grössen [nach 10] auch [gleich]

$$\eta\frac{\partial Z}{\partial s} - \zeta\frac{\partial Y}{\partial s}, \qquad \zeta\frac{\partial X}{\partial s} - \xi\frac{\partial Z}{\partial s}, \qquad \xi\frac{\partial Y}{\partial s} - \eta\frac{\partial X}{\partial s},$$

also

$$\begin{aligned} Y\frac{\partial \xi'}{\partial s} - X\frac{\partial \eta'}{\partial s} &= -\zeta\left(\frac{Y\partial Y}{\partial s} + \frac{X\partial X}{\partial s}\right) + \frac{\partial Z}{\partial s}(Y\eta + X\xi) \\ &= -\zeta\left(\frac{X\partial X + Y\partial Y + Z\partial Z}{\partial s}\right) + \frac{\partial Z}{\partial s}(X\xi + Y\eta + Z\zeta) \\ &= 0, \end{aligned}$$

und eben so die andern. — Wir setzen demnach

$$\frac{\partial \xi'}{\partial s} = p'X, \qquad \frac{\partial \eta'}{\partial s} = p'Y, \qquad \frac{\partial \zeta'}{\partial s} = p'Z,$$

wodurch

$$p' = \pm\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial \xi'}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta'}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta'}{\partial s}\right)^2\right\}}$$

und auch

$$p' = X\frac{\partial \xi'}{\partial s} + Y\frac{\partial \eta'}{\partial s} + Z\frac{\partial \zeta'}{\partial s}.$$

Ferner [erhalten wir] aus der Differentiation von (8):

$$-p' = \xi'\frac{\partial X}{\partial s} + \eta'\frac{\partial Y}{\partial s} + \zeta'\frac{\partial Z}{\partial s}.$$

Wir können aber dafür noch zwei andere Ausdrücke finden. Es ist nemlich

$$\frac{\partial m\xi'}{\partial s} = \frac{\partial \xi}{\partial \theta},$$

also [wegen (8)]

$$mp' = X\frac{\partial \xi}{\partial \theta} + Y\frac{\partial \eta}{\partial \theta} + Z\frac{\partial \zeta}{\partial \theta},$$

[und daher nach (7)]

$$-mp' = \xi\frac{\partial X}{\partial \theta} + \eta\frac{\partial Y}{\partial \theta} + \zeta\frac{\partial Z}{\partial \theta}.$$

Nach diesen Vorbereitungen wollen wir nun zuerst m in die Form setzen

$$m = \xi'\frac{\partial x}{\partial \theta} + \eta'\frac{\partial y}{\partial \theta} + \zeta'\frac{\partial z}{\partial \theta}$$

und nach s differentiiren, woraus hervorgeht *)

$$\begin{aligned} \frac{\partial m}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \xi'}{\partial s} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \eta'}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \zeta'}{\partial s} \\ &\quad + \xi'\frac{\partial\partial x}{\partial s.\partial \theta} + \eta'\frac{\partial\partial y}{\partial s.\partial \theta} + \zeta'\frac{\partial\partial z}{\partial s.\partial \theta} \\ &= mp'(\xi'X + \eta'Y + \zeta'Z) \\ &\quad + \xi'\frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \eta'\frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \zeta'\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \\ &= \xi'\frac{\partial \xi}{\partial \theta} + \eta'\frac{\partial \eta}{\partial \theta} + \zeta'\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

---

*) Besser mm zu differentiiren. [In der That ist

$$mm = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2,$$

also

$$\begin{aligned} m\frac{\partial m}{\partial s} &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial\partial x}{\partial \theta\partial s} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial\partial y}{\partial \theta\partial s} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial\partial z}{\partial \theta\partial s} \\ &= m\xi'\frac{\partial \xi}{\partial \theta} + m\eta'\frac{\partial \eta}{\partial \theta} + m\zeta'\frac{\partial \zeta}{\partial \theta}.\,] \end{aligned}$$

Differentiirt man abermals nach s und bemerkt, dass

$$\frac{\partial\partial\xi}{\partial s\partial\theta} = \frac{\partial(pX)}{\partial\theta} \quad \text{u. s. w.}$$

und dass

$$X\xi' + Y\eta' + Z\zeta' = 0,$$

so wird

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\partial m}{\partial s^2} &= p\left(\xi'\frac{\partial X}{\partial\theta} + \eta'\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \zeta'\frac{\partial Z}{\partial\theta}\right) + p'\left(X\frac{\partial\xi}{\partial\theta} + Y\frac{\partial\eta}{\partial\theta} + Z\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\right)\\
&= p\left(\xi'\frac{\partial X}{\partial\theta} + \eta'\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \zeta'\frac{\partial Z}{\partial\theta}\right) + mp'p'\\
&= -\left(\xi\frac{\partial X}{\partial s} + \eta\frac{\partial Y}{\partial s} + \zeta\frac{\partial Z}{\partial s}\right)\left(\xi'\frac{\partial X}{\partial\theta} + \eta'\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \zeta'\frac{\partial Z}{\partial\theta}\right)\\
&\quad + \left(\xi'\frac{\partial X}{\partial s} + \eta'\frac{\partial Y}{\partial s} + \zeta'\frac{\partial Z}{\partial s}\right)\left(\xi\frac{\partial X}{\partial\theta} + \eta\frac{\partial Y}{\partial\theta} + \zeta\frac{\partial Z}{\partial\theta}\right)\\
&= \left(\frac{\partial Y}{\partial\theta}\frac{\partial Z}{\partial s} - \frac{\partial Y}{\partial s}\frac{\partial Z}{\partial\theta}\right)X + \left(\frac{\partial Z}{\partial\theta}\frac{\partial X}{\partial s} - \frac{\partial Z}{\partial s}\frac{\partial X}{\partial\theta}\right)Y + \left(\frac{\partial X}{\partial\theta}\frac{\partial Y}{\partial s} - \frac{\partial X}{\partial s}\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)Z.
\end{aligned}$$

[Wird aber das zum Punkte x, y, z gehörige Flächenelement

$$m\,ds\,d\theta$$

mittelst paralleler Normalen auf die Hülfskugel vom Radius 1 abgebildet, so entspricht ihm daselbst ein Flächenraum von der Grösse

$$\left\{X\left(\frac{\partial Y}{\partial s}\frac{\partial Z}{\partial\theta} - \frac{\partial Y}{\partial\theta}\frac{\partial Z}{\partial s}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial s}\frac{\partial X}{\partial\theta} - \frac{\partial Z}{\partial\theta}\frac{\partial X}{\partial s}\right) + Z\left(\frac{\partial X}{\partial s}\frac{\partial Y}{\partial\theta} - \frac{\partial X}{\partial\theta}\frac{\partial Y}{\partial s}\right)\right\} ds\,d\theta;$$

mithin ist das Krümmungsmass der Fläche in dem betrachteten Punkte gleich

$$-\frac{1}{m}\frac{\partial\partial m}{\partial s^2}.]$$

BEMERKUNGEN.

Die S. 397 dieses Bandes wiedergegebenen Mittheilungen an Olbers vom 9. October 1825 zeigen, dass Gauss zu dieser Zeit begonnen hat, die Untersuchungen zu Papier zu bringen, die den Gegenstand seiner *Disquisitiones generales circa superficies curvas* vom Jahre 1827 bilden. Das vorstehend abgedruckte Fragment: *Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen* unterscheidet sich von den *Disquisitiones* nicht nur durch den geringeren Umfang des Stoffes, sondern auch durch die Art der Behandlung und die Anordnung der Sätze. Dort nimmt Gauss an, dass die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Fläche als Functionen von irgend zwei unabhängigen Veränderlichen p und q dargestellt seien, während er hier als neue Veränderliche die geodätischen Coordinaten s und θ wählt. Hier beweist er zuerst den Satz, dass die Summe der drei Winkel eines Dreiecks, das auf einer beliebigen krummen Fläche durch kürzeste Linien gebildet wird, sich von 180° um den Inhalt des Dreiecks unterscheidet, das ihm bei der Abbildung durch parallele Normalen auf der Hülfskugel vom Radius 1 entspricht, und leitet daraus durch einfache geometrische Betrachtungen das fundamentale Theorem her, dass »bei der Übertragung der Flächen durch Abwicklung das Krümmungsmass an jeder Stelle unverändert bleibt«, während er dort zuerst in § 12 zeigt, dass das Krümmungsmass sich allein durch die drei Grössen E, F, G und deren Ableitungen nach p und q ausdrücken lässt, woraus der Satz über die Erhaltung des Krümmungsmasses als Corollar folgt, und erst viel später, in § 20, ganz unabhängig davon den Satz über die Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks beweist.

Stäckel.

[ABWICKELUNGSFÄHIGE FLÄCHEN.]

[1.]

1825 Dec. 4. Das Nachdenken über die Theorie der abwickelungsfähigen Flächen hat uns folgendes elegante analytische Theorem an die Hand gegeben.

Ist z eine solche Function von x, y, dass

$$\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)^2,$$

so lassen sich statt x, y zwei andere veränderliche Grössen t, u einführen, so dass x, y, z als Functionen von t, u ausgedrückt, in Beziehung auf u lineärische Functionen sind. In der That kann man für u jede beliebige linearische Function von x, y, z wählen.

[2.]

Gauss an Olbers. Göttingen, Juli 1828.

..... Die Übersetzung des Artikels der Göttingischen Gelehrten Anzeigen über meine die krummen Flächen betreffende Abhandlung rührt, wie mir Schumacher sagte, von Baily her. Er sagte mir zugleich von dem Ausfall des p. Fayolles und wünschte etwas, was Baily zur Erwiederung brauchen könne,

zu erhalten. Ich sagte ihm, dass es für einen Geometer bloss eines Winkes bedürfe, um die Unzulänglichkeit von Monges angeblichem Beweise einzusehen. In der That enthält offenbar der Begriff einer in eine Ebene abwickelungsfähigen Fläche nichts als dass jedes Element der einen Fläche auf das correspondirende Element der andern nach Grösse und Gestalt passt; darin aber findet sich noch gar nichts von dem Vorhandensein von geraden Linien, die ganz in der ersten Fläche liegen und nach denen sie nur gebrochen werden darf. Dieses Vorhandensein von solchen geraden Linien ist in allen mir bekannten angeblichen Beweisen, vor dem meinigen, bloss erschlichen ....

[ZUR THEORIE DES KRÜMMUNGSMASSES.]

Die Bedingungsgleichung, dass

$$pdx^2+2qdxdy+rdy^2$$

das reine Product aus zwei vollständigen Differentialen sei, ist folgende:

$$0=2(qq-pr)\left(\frac{\partial\partial p}{\partial y^2}-2\frac{\partial\partial q}{\partial x\partial y}+\frac{\partial\partial r}{\partial x^2}\right)+p\left(\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}-2\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}+\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right)$$
$$+q\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+4\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}-2\frac{\partial q}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}-2\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}\right)+r\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}-2\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

BEMERKUNGEN.

Nachdem GAUSS den Ausdruck für das Krümmungsmass einer Fläche zuerst unter der Voraussetzung, dass das Quadrat des Linienelementes die Form

$$dS^2=mm(dt^2+du^2)$$

besitzt (S. 381 und 385 dieses Bandes) und darauf unter der Annahme geodätischer Coordinaten, für die

$$dS^2=ds^2+mmd\theta^2$$

wird (S. 407 und 442 dieses Bandes), hergeleitet hatte, ist er, wie die vorstehende Notiz zeigt, die sich in einem Handbuche findet, zu dem Zähler des Ausdruckes des Krümmungsmasses bei beliebigen Coordinaten durch die Überlegung gelangt, dass das Krümmungsmass der auf die Ebene abwickelbaren Flächen verschwindet. Die vollständige Formel für das Krümmungsmass wird dann in demselben Handbuche auf dieselbe Art, wie in § 11 der *Disquisitiones generales circa superficies curvas* hergeleitet, sodass es nicht erforderlich schien, diese Rechnungen zu veröffentlichen. Unmittelbar darauf folgt mit derselben Schrift und Tinte die auf Seite 447 bis 448 abgedruckte Notiz: *Allgemeinste Auflösung des Problems der Abwickelung der Flächen.*

STÄCKEL.

[ALLGEMEINSTE AUFLÖSUNG DES PROBLEMS DER ABWICKELUNG DER FLÄCHEN.]

Die ganz allgemeine Auflösung des Problems der Abwickelung der Flächen ist folgende:

1) Die Natur einer krummen Fläche wird dadurch gegeben, dass z als endliche Function von x, y vorgestellt wird; die Differentiation gebe

$$dz=pdx+qdy.$$

2) Man setze

$$t=\frac{1}{\sqrt{(pp+qq+1)}}$$

und nehme an, dass aus der Differentiation einer beliebigen Function von t, T hervorgeht

$$udt+UdT,$$

wo u, U gegebene Functionen von t und T sein werden.

Durch Elimination werden also T, U Functionen von t, u und wenn

$$\operatorname{tang} u=\frac{q}{p}$$

gesetzt wird, von x und y.

3) Man setze nun

$$\frac{Q}{P}=\operatorname{tang} U,\qquad T\sqrt{(1+PP+QQ)}=1,$$

so werden P, Q Functionen von x und y.

4) Man hat nun noch die Gleichung

$$dZ = PdX + QdY$$

zu integriren, wozu noch

$$dZ^2 + dX^2 + dY^2 = dz^2 + dx^2 + dy^2$$

zu setzen ist.

BEMERKUNGEN.

Wenn man die Coordinaten zweier correspondirender Punkte P und P' der auf einander abwickelbaren Flächen S und S' als Functionen zweier unabhängig veränderlicher Variabeln p, q dargestellt denkt, so wird das Quadrat des Linienelements dieser Flächen durch den quadratischen Differentialausdruck

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2$$

dargestellt. Betrachtet man gleichzeitig die zwei sphärischen Abbildungen dieser Flächen auf die Einheitskugel, bezeichnet durch ξ, η, ζ die Coordinaten des Bildes von P, durch ξ', η', ζ' die entsprechenden des Bildes von P', und bestimmt die Quadrate der Linienelemente dieser Abbildungen aus den Gleichungen:

$$\xi = \sqrt{1-\zeta^2}\cos u, \qquad \eta = \sqrt{1-\zeta^2}\sin u,$$
$$\xi' = \sqrt{1-\zeta'^2}\cos u', \qquad \eta' = \sqrt{1-\zeta'^2}\sin u',$$

so erhält man:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{d\zeta^2}{1-\zeta^2} + (1-\zeta^2)du^2$$

$$d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2 = \frac{d\zeta'^2}{1-\zeta'^2} + (1-\zeta'^2)du'^2.$$

Führt man die Grössen ζ, ζ' als diejenigen Variabeln ein, durch welche die Lage der Punkte P und P' in S und S' bestimmt werden, so folgen die drei nachstehenden Gleichungen:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = Ed\zeta^2 + 2Fd\zeta d\zeta' + Gd\zeta'^2$$

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{d\zeta^2}{1-\zeta^2} + (1-\zeta^2)\left[\frac{\partial u}{\partial \zeta}d\zeta + \frac{\partial u}{\partial \zeta'}d\zeta'\right]^2 = \mathfrak{E}\,d\zeta^2 + 2\mathfrak{F}\,d\zeta d\zeta' + \mathfrak{G}\,d\zeta'^2$$

$$d\xi'^2 + d\eta'^2 + d\zeta'^2 = \frac{d\zeta'^2}{1-\zeta'^2} + (1-\zeta'^2)\left[\frac{\partial u'}{\partial \zeta}d\zeta + \frac{\partial u'}{\partial \zeta'}d\zeta'\right]^2 = \mathfrak{E}'d\zeta^2 + 2\mathfrak{F}'d\zeta d\zeta' + \mathfrak{G}'d\zeta'^2.$$

Stellt k den Werth des Krümmungsmasses im Punkte P von S oder im Punkte P' von S' dar, so gelten ferner die Beziehungen:

$$\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2 = k^2(EG - F^2) = \mathfrak{E}'\mathfrak{G}' - \mathfrak{F}'^2,$$

welche nach Benutzung der durch $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{E}', \mathfrak{F}', \mathfrak{G}'$ bezeichneten Werthe die nachstehende Gleichung herbeiführen:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta'}\right)^2 = \left(\frac{\partial u'}{\partial \zeta}\right)^2.$$

Hiernach wird der lineare Differentialausdruck:

$$u\,d\zeta \pm u'd\zeta' = d\varphi$$

das totale Differential einer Function φ der Variabeln ζ, ζ' darstellen. Diese Eigenschaft kann jedoch für je zwei auf einander abwickelbare Flächen S und S' nur bestehen, wenn das untere Vorzeichen angenommen wird, da bei entgegengesetzter Annahme im Falle des Zusammenfallens von S mit S' das Product $2u\,d\zeta$ für jede Fläche ein Totaldifferential sein müsste, ein Umstand, der nur für developpable Flächen eintritt.

In der vorstehenden Gleichung ist der von Gauss in No. 2 gewählte Ausgangspunkt für die allgemeine Lösung des Problems der Deformation enthalten.

Diese Gleichung besteht für je zwei auf einander abwickelbare Flächen S und S', aber nicht nur für solche.

In welcher Weise Gauss dieselbe für diese allgemeine Lösung zu verwerthen gedachte, lässt sich aus No. 4 der Bemerkung nicht ohne weiteres erkennen, und bedarf diese Frage noch weiterer eingehender Untersuchungen in Betreff der Eigenschaften der im besondern Fall zu wählenden Function φ.

Weingarten.

EINFACHSTE ABLEITUNG DES GRUND-LEHRSATZES

BETREFFEND

DIE KÜRZESTEN LINIEN AUF REVOLUTIONSFLÄCHEN.

P, P' — zwei Punkte auf einer solchen Fläche

r — Länge der kürzesten Linie zwischen P und P'

A, A' — Azimuthe derselben in P und P', letztere von Ost nach West gezählt

$\varphi, \lambda;\ \varphi', \lambda'$ — Breite und Länge der Punkte P, P'

ρ, ρ' — Halbmesser der Parallelkreise durch P und P'

R, R' — Krümmungshalbmesser der Meridiane in diesen Punkten.

$r+dr,\ \varphi+d\varphi,\ \lambda+d\lambda,\ \varphi'+d\varphi',\ \lambda'+d\lambda'$ Werthe, in welche $r, \varphi, \lambda, \varphi', \lambda'$ übergehen, indem man anstatt P, P' zwei andere ihnen unendlich nahe Punkte substituirt.

Man hat dann

$$dr = R\cos A\,.\,d\varphi - R'\cos A'.\,d\varphi' - \rho\sin A\,.\,d\lambda + \rho'\sin A'.\,d\lambda'.$$

Offenbar wird aber $dr = 0$, wenn

$$d\varphi = 0, \qquad d\varphi' = 0, \qquad d\lambda' = d\lambda$$

genommen wird. Also

$$\rho\sin A = \rho'\sin A'.$$

W. Z. B. W.

BEMERKUNG.

Die vorstehende Notiz, die sich in einem Handbuche befindet, stammt wahrscheinlich aus dem Anfange der vierziger Jahre.

STÄCKEL.

Journal für die reine und angewandte Mathematik herausgegeben von CRELLE.
Bd. 22. S. 96. Berlin 1841.

Elementare Ableitung eines zuerst von LEGENDRE *aufgestellten Satzes der sphärischen Trigonometrie.*

Sphärische Dreiecke mit kleinen Seiten darf man wie ebene behandeln, wenn man die sphärischen Winkel jeden um den dritten Theil des ganzen sphärischen Excesses vermindert. Die Befugniss dazu lässt sich ganz elementarisch auf folgende Art nachweisen.

Bezeichnet man den ganzen sphärischen Excess eines sphärischen Dreiecks mit 3ω; die drei Seiten mit a, b, c und die ihnen gegenüberstehenden sphärischen Winkel mit $A+\omega$, $B+\omega$, $C+\omega$; so erhalten ein Paar bekannte Formeln der sphärischen Trigonometrie folgende Gestalt:

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\sin\tfrac{3}{2}\omega\,\sin(A-\tfrac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a^2 = \frac{\sin(B-\tfrac{1}{2}\omega)\sin(C-\tfrac{1}{2}\omega)}{\sin(B+\omega)\sin(C+\omega)},$$

aus deren Verbindung folgt

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}a^6}{\cos\tfrac{1}{2}a^6} = \frac{\sin\tfrac{3}{2}\omega^3\sin(A-\tfrac{1}{2}\omega)^3}{\sin(B+\omega)^2\sin(B-\tfrac{1}{2}\omega)\sin(C+\omega)^2\sin(C-\tfrac{1}{2}\omega)}.$$

Auf gleiche Weise wird

$$\frac{\sin\tfrac{1}{2}b^6}{\cos\tfrac{1}{2}b^6} = \frac{\sin\tfrac{3}{2}\omega^3\sin(B-\tfrac{1}{2}\omega)^3}{\sin(A+\omega)^2\sin(A-\tfrac{1}{2}\omega)\sin(C+\omega)^2\sin(C-\tfrac{1}{2}\omega)}.$$

Indem man diese beiden Gleichungen mit einander dividirt und dann die Quadratwurzel auszieht, ergibt sich

$$\frac{\sin\frac{1}{2}a^3}{\cos\frac{1}{2}a}\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}b^3}=\frac{\sin(A+\omega)\sin(A-\frac{1}{2}\omega)^3}{\sin(B+\omega)\sin(B-\frac{1}{2}\omega)^3}.$$

Man kann diese Gleichung auch in die Form setzen

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}\cdot\sqrt[3]{D},$$

wo zur Abkürzung D anstatt

$$\frac{a^3\cos\frac{1}{2}a}{8\sin\frac{1}{2}a^3}\cdot\frac{8\sin\frac{1}{2}b^3}{b^3\cos\frac{1}{2}b}\cdot\frac{\sin(A+\omega)\sin(A-\frac{1}{2}\omega)^3}{\sin A^3}\cdot\frac{\sin B^3}{\sin(B+\omega)\sin(B-\frac{1}{2}\omega)^3}$$

geschrieben ist.

Diese Formel ist strenge richtig: man sieht aber sofort, dass wenn a, b, c sehr klein sind, und als Grössen erster Ordnung betrachtet werden, jeder der vier Factoren, aus denen D zusammengesetzt ist, von der Einheit nur um Grössen vierter Ordnung abweicht.

Nach allgemeinern Principien ist dieser Gegenstand abgehandelt und auf die Dreiecke ausgedehnt, die auf irgendwelchen krummen Flächen zwischen kürzesten Linien gebildet werden, in meinen *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

BEMERKUNGEN ZUM ACHTEN BANDE.

Der vorliegende achte Band von GAUSS' Werken gibt Ergänzungen zu den drei ersten Bänden und zum vierten Bande mit Ausnahme des geodätischen Theils. Er enthält:

unter den Abtheilungen *Arithmetik, Analysis* und *Numerisches Rechnen* eine Reihe einzelner Notizen und Aufsätze, die sich nachträglich in GAUSS' Nachlass vorgefunden haben;

aus der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* hauptsächlich eine Anzahl Belege über die Entdeckung der Methode der kleinsten Quadrate;

aus der *Geometrie* Notizen und Briefe, die sich auf die Grundlagen der Geometrie, die Geometria situs, Lehrsätze und Aufgaben aus der elementaren Geometrie, die Verwendung complexer Grössen für die Geometrie und die Theorie der krummen Flächen beziehen.

Die Bearbeitung der Abtheilungen *Arithmetik und Algebra* und *Analysis und Functionentheorie* rührt von Herrn FRICKE in Braunschweig, die der Abtheilungen *Numerisches Rechnen* und *Wahrscheinlichkeitsrechnung* von den Herren BÖRSCH und KRÜGER in Potsdam und die der *geometrischen* Abtheilungen von Herrn STÄCKEL in Kiel her; die Notiz *Allgemeinste Auflösung des Problems der Abwickelung der Flächen* (Seite 447 bis 449) ist von Herrn WEINGARTEN in Charlottenburg bearbeitet worden.

Die allgemeine Redaction wurde von Herrn BRENDEL in Göttingen besorgt.

SCHERING, welcher dem vierten Bande einen Ergänzungsband hinzuzufügen beabsichtigte, hat eine Reihe von Vorarbeiten hinterlassen, hauptsächlich Abschriften aus dem Nachlass und dem Briefwechsel, welche bei der Herausgabe benutzt werden konnten.

F. KLEIN.

BERICHTIGUNGEN UND ZUSÄTZE.

Seite 20 in der Fussnote ist statt »Band 9« zu lesen: »Band X«.

Seite 69 in der Überschrift ist vor »12. December 1813« einzufügen: »Göttingen«.

Seite 90 „ „ „ „ „ »18. December 1811« „ »Göttingen«.

INHALT.

GAUSS WERKE BAND VIII. NACHTRÄGE ZU BAND I—IV.

ARITHMETIK UND ALGEBRA.

ANALYSIS UND FUNCTIONENTHEORIE.

NUMERISCHES RECHNEN.

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE.

GEOMETRIA SITUS.

AUFGABEN UND LEHRSÄTZE DER ELEMENTAREN GEOMETRIE ANGEHÖRIG.

VERWENDUNG COMPLEXER GRÖSSEN FÜR DIE GEOMETRIE.

THEORIE DER KRUMMEN FLÄCHEN.

Göttingen, Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

C. F. GAUSS WERKE

HERAUSGEGEBEN VON DER KGL. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN.

IN COMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

A. AUSGABE AUF DRUCKPAPIER.

Band I. DISQUISITIONES ARITHMETICAE. Zweiter Abdruck. 1870. Preis Mk. 20.—.
II. HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 1876. Preis Mk. 20.—.
Nachträge zum ersten Abdruck des zweiten Bandes. 1876. Preis Mk. 2.—.
III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck. 1876. Preis Mk. 20.—.
IV. WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck 1880. Preis Mk. 2[illegible].—.
V. MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweiter Abdruck. 1877. Preis Mk. 25.—.
VI. ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN UND AUFSÄTZE. 1874. Preis Mk. [illegible].—.
VIII. ARITHMETIK, ANALYSIS, WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG, GEOMETRIE. (Nachtr[illegible] zu Band I—IV.) 1900. Preis Mk. 24.—.

Die Bände V[illegible], IX, X nebst einem Generalregister befinden sich in Vorbereitung.

B. AUSGABE AUF SCHREIBPAPIER.

Band I—VI (nur vollständig abzugeben). Preis Mk. 180.—.
Band VIII. Preis Mk. 30.—.

Berichte über den Stand der Herausgabe von Gauss' Werken werden, von 1898 beginnend, alljährlich in den Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (geschäftliche Mitteilungen) veröffentlicht.

GÖTTINGEN
GEDRUCKT IN DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI
W. FR. KAESTNER.