CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ACHTER BAND

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

IN COMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

1900.

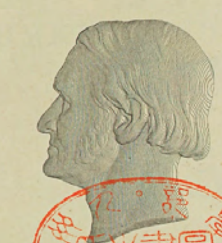
CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

BAND VIII.

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

ACHTER BAND.



HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN.

IN COMMISSION BEI B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1900.

ARITHMETIK UND ALGEBRA.

NACHTRÄGE ZU BAND I—III.

NACHLASS.

[ZWEI NOTIZEN ÜBER DIE AUFLÖSUNG DER CONGRUENZ $xx+yy+zz \equiv 0 \pmod{p}$.]

[1.]

Jede Zerlegung einer durch die Primzahl p theilbaren Zahl in vier Quadrate $= aa+bb+cc+dd$ entspricht einer Auflösung der Congruenz

$$xx+yy+zz \equiv 0 \pmod{p}.$$

Zusammen giebt es pp solcher Auflösungen. Die Eine $x \equiv 0$, $y \equiv 0$, $z \equiv 0$ davon weggenommen, zerfallen die übrigen $pp-1$ in $p+1$ Classen, wenn man $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$ mit $x \equiv k\xi$, $y \equiv k\eta$, $z \equiv k\zeta$ zu Einer Classe zählt.

Es sind nämlich proportional

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & aa+bb & -ad-bc & bd-ac \\ y & ac+bd & ab-cd & aa+dd \\ z & ad-bc & aa+cc & -ab-cd \end{array}$$

[2.]

Alle Auflösungen der Congruenz

$$1+xx+yy \equiv 0 \pmod{p}$$

zu finden.

Es sind zugleich die Auflösungen der Congruenz

$$1+(x+iy)^{p+1} \equiv 0 \quad \text{für} \quad p \equiv 3 \pmod{4}.$$

Aus einem Werthe $x+iy$ folgen alle, indem man für u alle Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots, p-1$ substituirt, vermöge der Formel [*])]

$$(x+iy)\left(\frac{uu-1+2iu}{uu+1}\right) \quad \text{oder} \quad \frac{(x+iy)(u+i)}{u-i}.$$

Für $p \equiv 1 \pmod{4} = aa+bb$ enthält die Formel $\frac{b}{a}\cdot\frac{u+i}{u-i}$ alle Werthe von $x+iy$, wo nur für u die Werthe $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{a}$ auszuschliessen sind.

[*) Neben dieser Entwickelung stehen im Manuscript die Formeln:]

$$1-xx \equiv yy, \qquad x = 1-uy, \qquad 2u-uuy = y$$
$$\frac{1-uu}{1+uu} = x, \qquad \frac{2u}{1+uu} = y,$$

[welche die Rolle des Zusatzfactors $\frac{uu-1+2iu}{uu+1}$ erläutern.]

[NOTIZEN ÜBER CUBISCHE UND BIQUADRATISCHE RESTE.]

[1.]

Observatio venustissima inductione facta.

2 est Residuum vel non residuum cubicum numeri primi p formae $3n+1$, prout p repraesentabilis est per formam

$$xx+27yy \quad \text{vel} \quad 4xx+2xy+7yy.$$

3 est Residuum vel non residuum, prout p repraesentabilis est per

$$xx+243yy \quad \text{aut} \quad 4xx+2xy+61yy$$
$$\text{vel} \quad 7xx+6xy+36yy \quad \text{aut} \quad 9xx+6xy+28yy.$$

5 est $\left.\begin{matrix}\text{Residuum}\\ \text{Nonresiduum}\end{matrix}\right\}$ si p repraesentatur

$$\text{per} \begin{cases} (1, 0, 675), (25, 0, 27), (13, 1, 52), (4, 1, 169) \\ (7, 2, 97), (9, 3, 76), (19, 3, 36), (25, 5, 28), (25, 10, 31), (27, 9, 28). \end{cases}$$

[2.]

Criterium, per quod diiudicatur, utrum numerus m sit residuum cubicum numeri primi p formae $3n+1$.

Fiat

$$4p = aa+27bb$$

Tunc erit

	$m\ R\ p$	$m\ N\ p$
1)	$m = 2$, si b par	b impar
2)	$m = 3$ b divis. per 3	
3)	$m =$ primus alius, si $\frac{a+b\sqrt{-27}}{a-b\sqrt{-27}}$ Res. cub. ipsius m	
4)	$m = 6$, si aut $2b$ aut $a+b$ aut $a-b$ per 12 divis.	
5)	$m = 10$, si aut $2b$ aut $2a$ aut $a\pm 3b$ aut $a\pm 9b$ per 20 divis.	
6)	$m = 12$ $2b$, $a+5b$, $a-5b$ per 12	
7)	$m = 15$ b, $3a+5b$, $a\pm b$, $a\pm 2b$ per 15	
8)	$m = 20$ $2b$, $2a$, $a\pm b$, $a\pm 7b$ per 20	
9)	$m = 45$ b, $3a+5b$, $a\pm 4b$, $a\pm 7b$ per 15	
10)	$m = 14$ $2b$, $2a$, $a\pm 5b$, $a\pm 11b$ per 28	
11)	$m = 28$ $2b$, $2a$, $a\pm 3b$, $a\pm 9b$ per 28.	

Criterium, per quod diiudicari potest, utrum numerus m sit residuum biquadraticum numeri primi p formae $4n+1$.

Fiat

$$p = aa + 4bb$$

Tunc erit $m\ R\ p$, si

1) $m = -1$ si b par $\qquad \pm 4$ si b par
2) $m = \pm 2$ si b per 4 divisib. $\qquad -4$ generaliter
3) $m = +3$ si b aut $a+3b$ per 6
4) $m = -3$ si b per 3
5) $m = +5$ si b per 5
6) $m = -5$ si b aut $a+5b$ per 10
7) $m = +6$ $\quad b$, $2a+3b$, $a\pm b$ per 12
8) $m = -6$ $\quad b$, $2a+3b$, $a\pm 5b$ per 12
9) $m = +7$ $\quad 2a+7b$, b, $a\pm 5b$ per 14

10) $m = -7$ $\quad a$, b per 7
11) $m = +10$ si $2a+5b$, b, $a\pm 7b$ per 20
12) $m = -10$ $\quad 2a+5b$, b, $a\pm 3b$ per 20
13) $m = +11$ $\quad 2a+11b$, b, $2a\pm 3b$, $a\pm b$ per 22
14) $m = -11$ $\quad b$, $a\pm 4b$ per 11.

[3.]

Die cubischen Reste.

p eine Primzahl der Form $3m+1$

$$4p = aa + 27bb,$$

q eine andere Primzahl der Form $3n\pm 1$

$$(a+3b\sqrt{-3})^{\frac{q\mp 1}{3}} \equiv A \pm B\sqrt{-3}.$$

Nun gibt es drei Fälle

I. $B \equiv 0$ (mod. q). Dann ist $q^{\frac{p-1}{3}} \equiv 1$ (mod. p).

II. $B \equiv A$ (mod. q). Dann ist $q^{\frac{p-1}{3}} \equiv -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{a}{3b}$ (mod. p).

III. $B \equiv -A$ (mod. q). Dann ist $q^{\frac{p-1}{3}} \equiv -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{a}{3b}$ (mod. p).

Erstes Beispiel. $\qquad p = 13$, $q = 5$

$a = 5$, $b = 1$

$(5+3\sqrt{-3})^2 = -2+30\sqrt{-3}$, $\quad B \equiv 0$ mod. 5 also Casus I

$5^4 = 625 \equiv 1$.

Zweites Beispiel. $\qquad p = 19$, $q = 5$

$a = 7$, $b = 1$

$(7+3\sqrt{-3})^2 = 22+42\sqrt{-3}$, $\quad B \equiv -A$ also Casus III

$5^6 \equiv 7$ mod. 19, $\quad 42 \equiv -3+7$ mod. 19.

Drittes Beispiel. $\quad p = 7, \quad q = 5$

$$a = 1, \quad b = 1$$

$$(1+3\sqrt{-3})^2 = -26+6\sqrt{-3}, \quad B \equiv +A \quad \text{mod. } 5 \quad \text{Casus II}$$

$$5^2 \equiv 4, \quad 24 \equiv -3-1 \quad \text{mod. } 7.$$

Viertes Beispiel. $\quad p = 13, \quad q = 11$

$$(5+3\sqrt{-3})^4 = -2696-120\sqrt{-3}, \quad A \equiv -1, \quad B = 120 \equiv -1$$

$$11^4 \equiv 3, \quad 18+3 \equiv -5 \quad \text{mod. } 13 \quad \text{Casus II.}$$

Die biquadratischen Reste.

p eine Primzahl von der Form $4n+1$

$$p = aa+4bb,$$

q eine Primzahl der Form $4n\pm 1$

$$(a+2b\sqrt{-1})^{\frac{q\mp 1}{4}} = A \pm B\sqrt{-1}.$$

Nun gibt es vier Fälle

I. $B \equiv 0 \pmod{q}$, $\quad (\pm q)^{\frac{p-1}{4}} \equiv 1 \pmod{p}$.

II. $A \equiv 0 \quad\quad (\pm q)^{\frac{p-1}{4}} \equiv -1$.

III. $A \equiv B \quad\quad (\pm q)^{\frac{p-1}{4}} \equiv -\frac{a}{2b}$.

IV. $A \equiv -B \quad\quad (\pm q)^{\frac{p-1}{4}} \equiv \frac{a}{2b}$.

Erstes Beispiel. $\quad p = 13, \quad q = 5$

$$a = 3, \quad b = 1$$

$$(3+2\sqrt{-1})^1 = 3+2\sqrt{-1}, \quad A \equiv -B \quad \text{Casus IV}$$

$$5^3 \equiv 8 \equiv \frac{3}{2.b}.$$

Zweites Beispiel. $\quad p = 13, \quad q = 7$

$$(3+2\sqrt{-1})^2 = 5+12\sqrt{-1}, \quad A \equiv -B \quad \text{Casus IV}$$

$$(-7)^3 \equiv 8 \equiv \frac{3}{2.b}.$$

Drittes Beispiel. $\quad p = 13, \quad q = 11$

$$(3+2\sqrt{-1})^3 = -9+46\sqrt{-1}, \quad A \equiv -B \quad \text{Casus IV}$$

$$(-11)^3 \equiv 8 \equiv \frac{3}{2.b}.$$

Viertes Beispiel. $\quad p = 17, \quad q = 11$

$$(1+4\sqrt{-1})^3 = -47-52\sqrt{-1}, \quad -47 = A, \quad +52 = B$$

$$A \equiv B \quad \text{Casus III}$$

$$(-11)^4 \equiv 4 \equiv -\tfrac{1}{4}.$$

[4.]

Es sei p eine Primzahl, n eine Primzahl $= 3m+1$, R Wurzel der Gleichung $x^3-1=0$, r Wurzel der Gleichung $r^n-1=0$, g Radix primitiva für mod. n.

$$r+Rr^g+R^2r^{g^2}+R^3r^{g^3}+\cdots+R^{n-2}r^{g^{n-2}} = P,$$

$$P^3 = \tfrac{1}{2}n(M+N\sqrt{-27}),$$

wo

$$M \equiv 1 \pmod{3}, \quad 0 \equiv M+3N(g^m-g^{2m}) \pmod{n}$$

$$3k = M+2$$

$$a = \tfrac{1}{3}(n+1+M)$$

$$b-c = N.$$

$$P^{pp} \equiv r^{pp}+Rr^{ppg}+\cdots \equiv P(R^{\text{ind.}p})$$

$$\{\tfrac{1}{2}n(M+N\sqrt{-27})\}^{\frac{1}{3}(pp-1)} \equiv \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3} \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3} \end{matrix} \pmod{p} \quad\Bigg|\quad \text{ind.}\, p \equiv \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \pmod{3}$$

$$4n = (M+N\sqrt{-27})(M-N\sqrt{-27})$$

$$\frac{M}{3N} \equiv g^{2m}-g^m, \quad -1 \equiv g^{2m}+g^m$$

$$\left\{\frac{M-N\sqrt{-27}}{M+N\sqrt{-27}}\right\}^{\frac{1}{3}(pp-1)} \equiv \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3} \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3} \end{matrix} \pmod{p} \quad\Bigg|\quad p^{\frac{1}{3}(n-1)} \equiv \begin{matrix} 1 \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{M}{3N} \\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{M}{3N} \end{matrix} \pmod{n}$$

$$P^4 \equiv PR^{\text{ind. }2}$$

$$\tfrac{1}{2}M + \tfrac{3}{2}N(R - R^2) = \tfrac{1}{2}(M + 3N) + 3NR$$

$$2^{\frac{1}{4}(n-1)} \equiv \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{M}{3N} \pmod{n} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{M}{3N} \end{cases}$$

$\tfrac{1}{2}(M+3N)$	impar	$3N$	par
	impar		impar
	par		impar.

Für den cubischen Rest 3.

$$\begin{aligned} p^3 = m(a-1) &+ \{m + (a-1)^2 + bb + cc\}p \\ &+ \{(a-1)b + bc + ac\}p' \\ &+ \{(a-1)c + ab + bc\}p'' \\ = A + Bp &+ Cp' + Dp''. \end{aligned}$$

Nun ist

1) $aa + bb + cc = ab + ac + bc + a$

2) $a + b + c = m$

3) $3k - 2 = M$

4) $4a = kk + 3NN$

5) $4n = (3k-2)^2 + 27NN$

6) $4m = 3kk - 4k + 9NN.$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} A &\equiv 0 \pmod{3} \\ B &= \tfrac{1}{3}(mm - a) - a + m + 1 \\ C &= \tfrac{1}{3}(mm - a) - b \\ D &= \tfrac{1}{3}(mm - a) - c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{3}(mm - a) &\equiv -2k^3 + kk - NN \pmod{3} \\ &\equiv kk + k - NN \pmod{3} \\ &\equiv 4a - 4m - NN \pmod{3}. \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} B &\equiv -NN + 1 \equiv -(b-c)^2 + 1 \\ C &\equiv -NN + b - c \equiv -(b-c)^2 + b - c \\ D &\equiv -NN - (b-c) \equiv -(b-c)^2 - (b-c) \end{aligned}$$

$b - c \equiv 0$	$B \equiv 1$	$C \equiv 0$	$D \equiv 0$
1	0	0	1
2	0	1	0.

Ist also 3 Res. n, so ist N durch 3 theilbar.

BEMERKUNGEN ZU DEN VORSTEHENDEN NOTIZEN ÜBER CUBISCHE UND BIQUADRATISCHE RESTE.

Die Notiz [1] ist von Gauss auf das Vorsatzblatt des Einbandes seines Handexemplars der Disquisitiones arithmeticae geschrieben. Die Angaben unter [2] finden sich in einem mit der Überschrift »Uraniae sacrum« versehenen Hefte, und ebenda folgen zwei Seiten später die beiden allgemeinen Sätze [3]. Die Entwicklungen unter [4] sind einigen losen Zetteln entnommen.

Gauss giebt zu Beginn seiner Commentatio prima über die Theorie der biquadratischen Reste an, dass er mit dem Jahre 1805 begonnen habe, die Theorie der cubischen und biquadratischen Reste zu durchforschen. Die hier unter [2] und [3] gegebenen Entwicklungen folgen in dem genannten Hefte unmittelbar auf Notizen, welche das Datum 1804 tragen. Die »Observatio venustissima« [1], welche weniger weit greifend ist, als die »Criterien« [2] und [3], kann zeitlich nicht wohl später liegen als letztere. Man wird es demnach hier mit den ältesten Gauss'schen Untersuchungen und damit überhaupt mit den ältesten Urkunden über die höheren Reciprocitätsgesetze zu thun haben.

Wie die Observatio so sind vermuthlich auch die Criterien Inductionsresultate. Es ist aber sehr bemerkenswerth, dass schon hier bei den Criterien die Zerlegung der quadratischen Form $aa + 27bb$ in ihre beiden complexen Factoren und damit der Zahl p in ihre beiden complexen Primtheiler auftritt. Es war bereits hiermit die Bahn gewonnen, auf welcher Gauss späterhin wenigstens das biquadratische Reciprocitätsgesetz in seine einfachste Gestalt kleidete. Bei gewissen Beweisansätzen des allgemeinen cubischen Reciprocitätssatzes (siehe die gleich folgenden Notizen), welche jedenfalls vor 1809 liegen, ist übrigens Gauss wenigstens am Beginn allein vom Gebrauch rationaler Zahlen ausgegangen.

Die zu Anfang von [2] unter 3) gemachte Angabe lässt sich als Specialfall aus dem ersten allgemeinen Satze unter [3] entnehmen. Letzterer liefert direct den Reciprocitätssatz in der allgemeinsten und einfachsten Gestalt, falls $p = 3m + 1$ und $q = 3n - 1$ ist. Der cubische Charakter des Primtheiler $\pi_1 = \frac{a + 3b\sqrt{-3}}{2}$ in Bezug auf q ist nämlich durch

$$\left[\frac{\pi_1}{q}\right] \equiv (A - B\sqrt{-3})^{q-1} \qquad \pmod{q}$$

angegeben, ein Ausdruck, der entweder mit 1, ρ oder ρ^2 mod. q congruent ist, unter ρ die Einheitswurzel $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ verstanden. Da nun im Gebiete der aus ρ zu bildenden ganzen complexen Zahlen die Lösungen der Congruenz $x^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ die $(q-1)$ von 0 verschiedenen rationalen ganzen Reste mod. q sind, so kommt die von GAUSS vermöge der Congruenzen $B \equiv 0$, $B \equiv A$, $B \equiv -A \pmod{q}$ vollzogene Dreitheilung darauf hinaus, dass der cubische Charakter $\left[\frac{\pi_1}{q}\right]$ gleich 1 bez. ρ, ρ^2 ist. Im anderen Falle $q = 3n+1$ ist hier der einfachste Ausdruck des Reciprocitätssatzes deshalb noch nicht erreicht, weil die Zerlegung von q in seine Primtheiler noch nicht vollzogen ist. Die Beziehung des GAUSS'schen Theorems zum Reciprocitätsgesetze ist die folgende:

Sind die Zerlegungen der rationalen Primzahlen p, q in ihre primären Primfactoren gegeben durch:

$$p = \pi_1 . \pi_2, \qquad q = \varkappa_1 . \varkappa_2, \qquad \pi'_k = 2\pi_k = a \pm 3b\sqrt{-3},$$

so hat man zu setzen:

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{\pi'_1}{\varkappa_1}\right] &= \rho^{\varepsilon_1} \equiv \pi_1'^{\frac{q-1}{3}} \equiv A + B\rho - B\rho^2 \\ \left[\frac{\pi'_2}{\varkappa_1}\right] &= \rho^{\varepsilon_2} \equiv \pi_2'^{\frac{q-1}{3}} \equiv A - B\rho + B\rho^2 \end{aligned}\right\} \pmod{\varkappa_1}.$$

Die GAUSS'sche Dreitheilung kommt dann mit der folgenden überein:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 \pmod{3}, && \left[\frac{\pi'_1}{\varkappa_1}\right] = \left[\frac{\pi'_2}{\varkappa_1}\right], \\ &\text{II.} \quad \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 + 1 \pmod{3}, && \left[\frac{\pi'_1}{\varkappa_1}\right] = \rho\left[\frac{\pi'_2}{\varkappa_1}\right], \\ &\text{III.} \quad \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2 - 1 \pmod{3}, && \left[\frac{\pi'_1}{\varkappa_1}\right] = \rho^2\left[\frac{\pi'_2}{\varkappa_1}\right], \end{aligned}$$

wobei in den drei letzten Gleichungen offenbar auch π_k an Stelle von π'_k treten kann. Liegt nämlich z. B. der Fall II vor, so folgt durch Addition und Subtraction obiger Congruenzen in Bezug auf den Modul $\varkappa_1$:

$$2A \equiv \rho^{\varepsilon_2}(1+\rho) \equiv -\rho^{\varepsilon_2 - 1}, \qquad 2B \equiv -\rho^{\varepsilon_2 - 1} \qquad \pmod{\varkappa_1},$$

so dass $(A - B)$ durch $\varkappa_1$ und als rationale Zahl demnach auch durch q theilbar ist. Man hat also wirklich $B \equiv A \pmod{q}$. Das Reciprocitätsgesetz liefert nun:

$$\left[\frac{\pi'_1}{\varkappa_1}\right] = \left[\frac{2}{\varkappa_1}\right] \cdot \left[\frac{\pi_1}{\varkappa_1}\right] = \left[\frac{2}{\varkappa_1}\right] \cdot \left[\frac{\varkappa_1}{\pi_1}\right],$$

$$\left[\frac{\pi'_2}{\varkappa_1}\right] = \left[\frac{2}{\varkappa_1}\right] \cdot \left[\frac{\pi_2}{\varkappa_1}\right] = \left[\frac{2}{\varkappa_1}\right] \cdot \left[\frac{\varkappa_1}{\pi_2}\right],$$

so dass man für den Fall II weiter gewinnt:

$$\left[\frac{\varkappa_1}{\pi_1}\right] = \rho\left[\frac{\varkappa_1}{\pi_2}\right] = \rho\left[\frac{\varkappa_2}{\pi_1}\right]^2, \qquad \left[\frac{\varkappa_1}{\pi_1}\right] \cdot \left[\frac{\varkappa_2}{\pi_1}\right] = \left[\frac{q}{\pi_1}\right] = \rho$$

$$\left[\frac{q}{\pi_1}\right] \equiv q^{\frac{p-1}{3}} \equiv -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \equiv -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\frac{a}{3b} \qquad \pmod{\pi_1}.$$

Soll aber die rationale Zahl $q^{\frac{p-1}{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{a}{3b} \equiv 0$ mod. π_1 sein, so ist sie auch durch π_2 und also durch p theilbar. Hiermit ist die unter II von GAUSS angegebene Congruenz in Bezug auf den Modul p gewonnen. Ebenso erledigen sich die Fälle I und III.

Die Umkehrung der vorstehenden Entwicklung lehrt, dass man aus den GAUSS'schen Angaben im Falle $q = 3n+1$ zunächst auf die Proportion:

$$\left[\frac{\varkappa_1}{\pi_1}\right] : \left[\frac{\pi_1}{\varkappa_1}\right] = \left[\frac{\varkappa_1}{\pi_2}\right] : \left[\frac{\pi_2}{\varkappa_1}\right]$$

schliessen kann. Unter nochmaliger Benutzung des in dieser Proportion ausgesprochenen Gesetzes findet man:

$$\frac{\left[\frac{\varkappa_1}{\pi_1}\right]}{\left[\frac{\pi_1}{\varkappa_1}\right]} = \frac{\left[\frac{\varkappa_2}{\pi_1}\right]}{\left[\frac{\pi_1}{\varkappa_2}\right]} = \frac{\left[\frac{\varkappa_1}{\pi_2}\right]^2}{\left[\frac{\pi_2}{\varkappa_1}\right]^2} \quad \text{und also} \quad \frac{\left[\frac{\varkappa_1}{\pi_2}\right]}{\left[\frac{\pi_2}{\varkappa_1}\right]} = \frac{\left[\frac{\varkappa_1}{\pi_2}\right]^2}{\left[\frac{\pi_2}{\varkappa_1}\right]^2}.$$

Da hieraus $\left[\frac{\varkappa_1}{\pi_2}\right] = \left[\frac{\pi_2}{\varkappa_1}\right]$ hervorgeht, so ist auch für $q = 3n+1$ in GAUSS' Angaben das allgemeine Reciprocitätsgesetz in seiner einfachsten Form implicite enthalten.

Unter [4] sind diejenigen Aufzeichnungen gesammelt, durch welche GAUSS seine cubischen Reciprocitätstheoreme bewiesen hat. Da diese Aufzeichnungen mehreren losen Zetteln ohne Datumangabe entnommen sind, so lässt sich die Entstehungszeit der fraglichen Beweise nicht mit Sicherheit angeben. Es ist aber wahrscheinlich, dass die Entwicklungen alsbald nach Gewinnung der »Observatio« und der »Criterien« durchgeführt sind; sie schliessen sich nämlich im Gedankengang sehr eng an die ersten Angaben unter [2] und übrigens an den Art. 358 der Disquisitiones arithmeticae an, und andrerseits ist GAUSS zufolge seiner eigenen Aussage*) jedenfalls vor Mitte des Jahres 1808 im Besitze des sechsten Beweises des quadratischen Reciprocitätsgesetzes gewesen, welcher mit den hier gemeinten Beweisen am nächsten verwandt ist.

Dem GAUSS'schen Beweise des cubischen Reciprocitätssatzes liegt die Kreistheilung zu Grunde. Die einzelnen Formeln unter [4] können entweder unmittelbar aus Art. 358 der Disquisitiones arithmeticae entnommen werden, oder sie lassen sich doch mit sehr geringer Mühe aus den dortigen Entwicklungen ableiten. Die Congruenz:

$$P^{pp} \equiv r^{pp} + Rr^{ppg} + \ldots \equiv P(R^{\text{ind.}\,p})$$

bezieht sich auf den Modul p und entspringt aus dem Umstande, dass alle von 1 verschiedenen Polynomialcoefficienten der Potenz pp durch p theilbar sind. Die Fallunterscheidung

$$\left\{\frac{M - N\sqrt{-27}}{M + N\sqrt{-27}}\right\}^{\frac{1}{3}(pp-1)} \equiv 1, \quad -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-3} \qquad \pmod{p}$$

correspondirt sowohl für $p = 3m - 1$ wie $p = 3m + 1$ genau der oben unter I, II und III getroffenen Unterscheidung $B \equiv 0 \pmod{q}$, etc. Die Zuordnung jener drei Congruenzen zu den folgenden

$$p^{\frac{1}{3}(n-1)} \equiv 1, \quad -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\frac{M}{3N}, \quad -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\frac{M}{3N} \qquad \pmod{n},$$

wie sie in [4] entwickelt wird, enthält demnach bereits einen vollständigen Beweis der GAUSS'schen Angaben und damit implicite des allgemeinen cubischen Reciprocitätssatzes.

Die weiteren Ausführungen unter [4] betreffen die Criterien über die cubischen Reste 2 und 3. Wegen des cubischen Restes 3 bemerke man nur, dass (unter Benutzung der in [4] gebrauchten Bezeichnung) $p^3 \equiv p, p'$ oder p'' (mod. 3) zutrifft, je nachdem ind. $3 \equiv 0, 1$ oder 2 (mod. 3) stattfindet. Die Bedingung $N \equiv 0$ (mod. 3), damit 3 cubischer Rest von n ist, ergiebt sich daraufhin unmittelbar aus den Schlussangaben von [4].

*) Siehe den Art. 33 der am 24. August 1808 der Göttinger Societät vorgelegten Abhandlung »Summatio quarumdam serierum singularium«.

Die Observatio kann aus den Criterien leicht abgeleitet werden. Z. B. war für den cubischen Rest 3 soeben die Bedingung $N \equiv 0 \pmod{3}$ gewonnen und unter [2] ebenso angegeben. Sind nun M und N gerade, so setze man:

$$M = 2x, \qquad N = 6y,$$

so dass aus $4n = M^2 + 27N^2$ die Darstellbarkeit von n in der quadratischen Form der Determinante -243:

$$n = x^2 + 243y^2$$

vermöge ganzzahliger x, y entspringt. Umgekehrt folgt bei der Möglichkeit einer solchen Darstellung von n die Gültigkeit der Congruenz $N \equiv 0 \pmod{3}$. Sind M und N ungerade, so setze man unter richtiger Auswahl des Vorzeichens:

$$M \pm \frac{N}{3} = 4x, \qquad \mp \frac{N}{3} = y,$$

woraus man die Darstellung gewinnt:

$$n = 4x^2 + 2xy + 61y^2.$$

Aus dieser Formel würde umgekehrt folgen $N \equiv 0 \pmod{3}$, so dass 3 stets und nur dann cubischer Rest von n ist, wenn n durch eine der Formen $(1, 0, 243)$, $(4, 1, 61)$, darstellbar ist.

Durch Herrn R. Dedekind, dem ich mehrere für mich sehr förderliche Unterhaltungen über die in Rede stehenden Gegenstände verdanke, bin ich darauf aufmerksam gemacht, dass für den Fall des cubischen Nichtrestes 3 von n Gauss' Angaben nicht ganz vollständig sind. Es giebt insgesammt neun Classen ursprünglicher Formen erster Art der Determinante $D = -243$, deren reducirte Formen die folgenden sind:

$$(1, 0, 243), \quad (4, \pm 1, 61), \quad (13, \pm 2, 19), \quad (7, \pm 3, 36), \quad (9, \pm 3, 28).$$

Es fehlen in [1] die Formen $(13, \pm 2, 19)$. Das Theorem muss demnach so lauten, dass 3 stets und nur dann cubischer Nichtrest von n ist, wenn n eine Darstellung in einer der Formen gestattet:

$$n = 13xx + 4xy + 19yy,$$
$$n = 7xx + 6xy + 36yy,$$
$$n = 9xx + 6xy + 28yy.$$

Diese Darstellungen erreicht man immer unter richtiger Fixirung des Vorzeichens durch folgende Transformationen:

I. Wenn $M \equiv N \equiv 1 \pmod{2}$, $\quad M \pm 7N \equiv 0 \pmod{12}$,

$$M = 5x + 7y, \qquad \pm N = x - y.$$

II. Wenn $M \equiv N \equiv 1 \pmod{2}$, $\quad M \pm 7N \equiv 6 \pmod{12}$,

$$M = x + 6y, \qquad \mp N = x.$$

III. Wenn $M \equiv N \equiv 0 \pmod{2}$, $\quad M \pm N \equiv 0 \pmod{3}$,

$$M = 6x + 2y, \qquad \mp N = 2y.$$

Die über die Zahl 5 unter 1 gemachten Angaben folgen in ähnlicher Weise aus dem Restcriterium $MN \equiv 0 \pmod{5}$.

Übrigens sei noch bemerkt, dass sich im Original der Notiz [1] eine bis 223 fortgesetzte Tabelle derjenigen Primzahlen $p = 3n + 1$ findet, von denen die Zahlen 2, 3, 5, 7 cubische Reste sind.

Fricke.

ZUR THEORIE DER CUBISCHEN RESTE.

[1.]

$p = mm + 3nn$ eine Primzahl.

Man setze für irgend eine ganze durch p nicht theilbare Zahl x

$$\left[\frac{2mx}{p}\right] = \alpha, \quad \left[\frac{(3n-m)x}{p}\right] = \beta, \quad \left[\frac{(-3n-m)x}{p}\right] = \gamma.$$

Hieraus wird, wie man leicht sieht,

$$\frac{2mx}{p} - \alpha + \frac{(3n-m)x}{p} - \beta + \frac{(-3n-m)x}{p} - \gamma$$

die Summe aus drei echten Brüchen, und muss daher exclusive zwischen den Grenzen 0 und 3 liegen; da aber offenbar dieselbe Summe $= -\alpha - \beta - \gamma$, also eine ganze Zahl ist, so kann sie keinen andern Werth als $+1$ und $+2$ haben. Es ist also entweder

$$\alpha + \beta + \gamma = -1 \quad \text{oder} \quad \alpha + \beta + \gamma = -2.$$

Hieraus folgt ferner, dass die Grössen α, β, γ nicht alle drei unter einander nach dem Modulus 3 congruent sein können; unter den Differenzen $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$, $\gamma - \alpha$ wird also wenigstens Eine (und eben deswegen wenigstens noch eine, weil die Summe von allen $= 0$) sein, die nicht $\equiv 0$ ist. Ebenso wenig aber können die Grössen α, β, γ alle unter einander incongruent sein, weil sie sonst, gleichviel in welcher Ordnung, den Zahlen 0, 1, 2 congruent sein und also ihre Summe durch 3 theilbar sein müsste; es wird folglich unter den Differenzen $\alpha-\beta, \beta-\gamma, \gamma-\alpha$ gewiss Eine, aber auch nur Eine sein, die $\equiv 0$ ist. Es gibt mithin drei Fälle, die einander ausschliessen:

I. Wenn $\beta \equiv \gamma \pmod{3}$
II. Wenn $\gamma \equiv \alpha \pmod{3}$
III. Wenn $\alpha \equiv \beta \pmod{3}$.

Welcher dieser drei Fälle statthat, hängt von x ab; wir werden daher nach Maassgabe dieser drei Fälle sämmtliche durch p nicht theilbare Zahlen in drei Classen theilen, in die erste nämlich diejenigen setzen, wo der erste; in die zweite die, wo der zweite; in die dritte die, wo der dritte Fall stattfindet.

Erstes Theorem: Alle nach dem Modulus p congruente Zahlen gehören in Einerlei Classe.

Zweites Theorem: Gleiche, aber mit entgegengesetzten Zeichen afficirte Zahlen gehören in Eine Classe.

Hieraus ist klar, dass man bloss die Zahlen $1, 2, 3, \ldots, \frac{1}{2}(p-1)$ zu classificiren braucht, um sofort alle übrigen classificiren zu können.

Drittes Theorem: Die Zahlen $(3n-m)x$, $2mx$ gehören in zwei auf einander folgende Classen.

Viertes Theorem: Also wenn $\frac{2n-m}{3m} \equiv f$, also

$$1+f+ff \equiv 0 \pmod{p}, \quad 1 \equiv f^3 \pmod{p},$$

so gehören x und die Reste von fx, ffx in drei in umgekehrter Ordnung auf einander folgende Classen.

Beispiele der Abtheilungen.

$p = 7 = 4+3$, 4, 1, -5
I. 3. 4.
II. 2. 5.
III. 1. 6.

$p = 13 = 1+12$, 2, 5, -7
I. 3. 6. 7. 10.
II. 4. 5. 8. 9.
III. 1. 2. 11. 12.

$p = 19 = 16+3$, 8, -1, -7
I. 1. 2. 9. 10. 17. 18.
II. 3. 4. 8. 11. 15. 16.
III. 5. 6. 7. 12. 13. 14.

$p = 31 = 4+27$, 4, 7, -11
I. 5. 9. 10. 11. 15. 16. 20. 21. 22. 26.
II. 6. 7. 12. 13. 14. 17. 18. 19. 24. 25.
III. 1. 2. 3. 4. 8. 23. 27. 28. 29. 30.

$p = 37 = 25+12$, 10, 1, -11
I. 7. 8. 9, 10. 17. 18. 19. 20. 27. 28. 29. 30.
II. 4. 5. 6. 11. 15. 16. 21. 22. 26. 31. 32. 33.
III. 1. 2. 3. 12. 13. 14. 23. 24. 25. 34. 35. 36.

$p = 43 = 16+27$, 8, 5, -13
I. 7. 8. 14. 15. 16. 20. 21. 22. 23. 27. 28. 29. 35. 36.
II. 6. 11. 12. 13. 17. 18. 19. 24. 25. 26. 30. 31. 32. 37.
III. 1. 2. 3. 4. 5. 9. 10. 33. 34. 38. 39. 40. 41. 42.

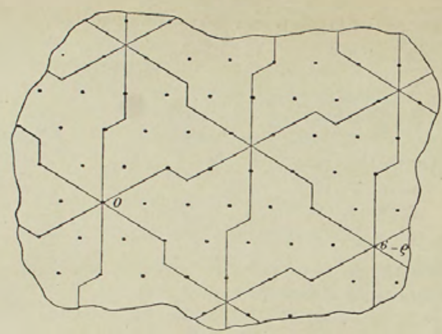
7, $2-\varrho$

1	$-\varrho\varrho$	ϱ
-1	$\varrho\varrho$	$-\varrho$

13, $3-\varrho$

1	$1-\varrho$	$-\varrho\varrho$
$1-\varrho\varrho$	ϱ	$\varrho-\varrho\varrho$
-1	$-1+\varrho$	$\varrho\varrho$
$-1+\varrho\varrho$	$-\varrho$	$-\varrho+\varrho\varrho$

Schema für 43.



[2.]

1. Jede ganze Function $\equiv \alpha + \beta x$ (mod. $1+x+xx$).

2. Zusammengesetzte und Primfunctionen nach dem Modulus $(1+x+xx)$.

3. $P \equiv Q$ (mod. $1+x+xx, R$),
wenn $P-Q$ in die Summe zweier Vielfachen von $1+x+xx$ und R zerlegbar.

4. Wenn $R \equiv R'$ (mod. $1+x+xx$), so gelten alle Congruenzen für Modulus $1+x+xx, R$ auch für Modulus $1+x+xx, R'$.

5. Ist dann $R' = \alpha+\beta x$, so muss der kleinste Rest von $(P-Q)(\alpha+\beta xx)$ mod. $(1+x+xx)$ durch $(\alpha\alpha-\alpha\beta+\beta\beta)$ theilbar sein.

6. Regel für Prim- und zusammengesetzte Functionen.

7. Es gibt in allem $\alpha\alpha-\alpha\beta+\beta\beta$ incongruente Functionen mod. $(1+x+xx, \alpha+\beta x)$, die den Zahlen $1, 2, \ldots, \alpha\alpha-\alpha\beta+\beta\beta$ congruent sind.

8. Gemeinschaftliche Theiler mod. $(1+x+xx)$.

9. Numerus $\alpha\alpha-\alpha\beta+\beta\beta$ Determinans functionum, quae sunt $\equiv \alpha+\beta x$ (mod. $1+x+xx$).

10. Wenn ξ eine Primfunction mod. $(1+x+xx)$ und ihr Determinant $= D$, so ist allgemein

$$\zeta^D \equiv \zeta \quad (\text{mod. } 1+x+xx, \xi).$$

11. Quadratische, cubische Reste Modulus . . .

12. Ist P cubischer Rest von ξ, so ist:

$$P^{\frac{1}{3}(D-1)} \equiv 1 \quad (\text{mod. } 1+x+xx, \xi).$$

BEMERKUNGEN UBER DIE ENTWICKELUNGEN »ZUR THEORIE DER CUBISCHEN RESTE«.

Gauss hat hier den Versuch gemacht, seinen dritten Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes auf die cubischen Reste zu übertragen. Der erste Ansatz bezieht sich allein auf das Gebiet der rationalen ganzen Zahlen und benutzt folgenden Grundgedanken:

Ist die Primzahl $p \equiv 1$ (mod. 3), so hat die Congruenz $x^3 \equiv 1$ (mod. p) drei verschiedene Wurzeln, unter denen eine von 1 verschiedene f heisse. In dem System aller $p-1$ modulo p incongruenten und gegen p primen ganzen Zahlen bilden dann die drei Zahlen $1, f, f^2$ gegenüber Multiplication eine Gruppe des Index $\frac{p-1}{3}$, für welche wir auf irgend eine der mannigfachen möglichen Arten ein Repräsentantensystem S, bestehend aus den Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\frac{p-1}{3}}$, ausgewählt denken. Bei diesen Zahlen ist charakteristisch, dass die Congruenz $\alpha_i \equiv f^{\pm 1}\alpha_k$ (mod. p) für keine zwei Indices i, k bestehen kann. Definirt man übrigens die Systeme S' und S'' zu je $\frac{p-1}{3}$ Zahlen β, γ durch

$$\beta_i \equiv f\alpha_i, \qquad \gamma_i \equiv f^2\alpha_i \quad (\text{mod. } p),$$

so erschöpfen die $(p-1)$ Zahlen α, β, γ gerade das gesammte Restsystem $1, 2, \ldots, p-1$ (mod. p).

Ist a eine beliebige durch p nicht theilbare Zahl, so ist

$$a^{\frac{p-1}{3}} \equiv f^\lambda \equiv \left[\frac{a}{p}\right] \quad (\text{mod. } p)$$

der »cubische Charakter« von a in Bezug auf p, und es ist hierbei $\lambda = 0, 1$ oder 2.

Um einen Satz über diesen cubischen Charakter zu gewinnen, bilde man die $\frac{p-1}{3}$ Producte $a\alpha_1, a\alpha_2, \ldots a\alpha_{\frac{p-1}{3}}$. Diese Zahlen bilden offenbar wieder ein Repräsentantensystem, da aus der Congruenz $a\alpha_i \equiv f^{\pm 1} a\alpha_k$ sofort $\alpha_i \equiv f^{\pm 1}\alpha_k$ (mod. p) folgen würde. Gehören nun μ unter den Zahlen $a\alpha_i$ dem System S', ν dem System S'' an, so ist offenbar ihr Product mod. p mit $f^{\mu+2\nu}.\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{\frac{p-1}{3}}$ congruent; man gewinnt also als Ergebniss:

$$\left[\frac{a}{p}\right] \equiv a^{\frac{p-1}{3}} \equiv f^{\mu+2\nu} \quad (\text{mod. } p),$$

welches das genaue Analogon zu dem bekannten Lemma ist, das Gauss seinem dritten Beweise des quadratischen Reciprocitätsgesetzes zu Grunde legte.

GAUSS' eigene Auseinandersetzungen beziehen sich auf eine specielle Eintheilung der $(p-1)$ Reste mod. p in drei Classen S, S', S'', wobei die Darstellung von p in der Form $(mm+3nn)$ benutzt wird. Vermuthlich haben aber die mit dieser Bestimmung der Zahl f verbundenen Umständlichkeiten GAUSS davon abgehalten, auf dem hier betretenen Wege weiterzugehen. In der That wird an dieser Stelle die Nothwendigkeit der Erweiterung des Zahlgebietes auf die complexen ganzen Zahlen $(a+b\rho)$, wo alsdann an Stelle von f die Einheitswurzel $\rho = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ selbst tritt, ganz besonders überzeugend.

Die fraglichen Untersuchungen sind jedenfalls in der Zeit vor 1809 ausgeführt und haben sich wahrscheinlich unmittelbar an die genannten Entwicklungen über quadratische Reste angeschlossen, welche im Januar 1808 der Gött. Gesellsch. d. Wiss. vorgelegt sind. Nach Notizen in einem von GAUSS seit Ende März 1796 während einer längeren Reihe von Jahren über seine Untersuchungen geführten Tagebuche*) ist derselbe Mitte Februar 1807 ausführlicher an die Theorie der cubischen und biquadratischen Reste herangegangen. Andererseits aber hat sich auch der Ersatz von f durch ρ wahrscheinlich unmittelbar daran angeschlossen, wie aus der Urschrift der hier vorstehend mitgetheilten Notizen hervorgeht. Man darf demnach annehmen, dass GAUSS bereits um die bezeichnete Zeit (1808) den so folgenreichen Schritt der Einführung der ganzen complexen Zahlen definitiv vollzogen hat.

GAUSS hat auch für die complexen Primzahlen $2-\rho$ und $3-\rho$ die drei Classen S, S', S'' aufgestellt (die oben reproducirt sind) sowie gleichfalls noch für den Primtheiler $3-2\rho$ von 19. Besonders interessant ist, dass GAUSS diese Ueberlegungen (wie entsprechend auch bei den biquadratischen Resten) in geometrische Gestalt kleidete. Die ganzen complexen Zahlen $a+b\rho$ liefern Punkte der Ebene, welche ein rhombisches Punktgitter darstellen. Die Gitterpunkte eines einzelnen Systems S lassen sich dabei in einen Bereich eingrenzen, welcher (im neueren Sinne gesprochen) als Discontinuitätsbereich einer unendlichen Gruppe linearer Substitutionen aufgefasst werden kann. GAUSS hat für verschiedene Fälle Zeichnungen angefertigt; die für die Primzahl $6-\rho$ ist oben mitgetheilt. Es würde sich hier um die Gruppe handeln:

$$u' = \rho^\nu u + (a+b\rho),$$

wo u eine complexe Variabele bedeutet, $\nu = 1, 2, 3$ zu setzen ist und $a+b\rho$ alle der Congruenz

$$a+b\rho \equiv 0 \pmod{6-\rho}$$

genügende ganze Zahlen zu durchlaufen hat. Die in der GAUSS'schen Figur angegebenen Bereiche beziehen sich auf die durch Zusatz der Substitution $u' = \pm u$ erweiterte Gruppe. Die Willkür in der Auswahl des Repräsentantensystems S läuft jetzt auf die Willkür in der Auswahl der Bereichgrenzen hinaus. Welche Absicht GAUSS mit der von ihm gewählten Gestalt dieser Grenzen befolgt hat, ist leider nicht angegeben.

Die am Schlusse der obigen Notizen unter [2] zusammengestellten zwölf Thesen folgen in der Urschrift direct auf die Betrachtungen der Zahlen $a+b\rho$. Das System aller ganzen complexen Zahlen $a+b\rho$ erscheint hier eindeutig ersetzt durch das mod. $(1+x+xx)$ reducirte System aller ganzen Functionen von x mit ganzen rationalen Coefficienten.

FRICKE.

---

*) Über dieses höchst werthvolle Tagebuch sollen in Bd. 9 der ges. Werke nähere Angaben gemacht werden.

[FRAGMENTE ZUR THEORIE DER AUS EINER CUBIKWURZEL ZU BILDENDEN GANZEN ALGEBRAISCHEN ZAHLEN.]

[1.]

Es sei

$$a+b\nu+c\nu\nu = t, \qquad \nu^3 = n,$$

so setzen wir

$$a^3+nb^3+nnc^3-3nabc = \varphi t,$$

$$(bb-ac)\nu\nu+(ncc-ab)\nu+(aa-nbc) = Ft.$$

Theorem I.

$$tFt = \varphi t,$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi kt = k^3\varphi t \\ Fkt = kkFt\end{array}\right\}\text{ wenn } k \text{ eine Zahl}$$

$$\varphi tu = \varphi t.\varphi u, \qquad Ftu = Ft.Fu,$$

$$\varphi(Ft) = (\varphi t)^2, \qquad F(Ft) = (\varphi t)t.$$

Wenn die Coefficienten in t keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, hingegen die in Ft den gemeinschaftlichen Theiler k und $Ft = kt'$ gesetzt wird, so ist

$$F(Ft) = kkFt' = t\varphi t$$

also nothwendig φt durch kk theilbar und die Coefficienten in Ft' durch $\frac{\varphi t}{kk}$ theilbar.

Es sei k der grösste gemeinschaftliche Theiler der Coefficienten in Ft und $Ft = ku$. Es sei l der grösste gemeinschaftliche Theiler der Coefficienten in Fu, so ist

$$Fu = lt,$$
$$\varphi t = kkl, \quad \varphi u = kll, \quad tu = kl.$$

Ferner werden die Coefficienten von $\nu\nu$ in t, u respective Primzahlen sein zu k, l. Man setze $\alpha u \equiv v \pmod{l}$, wo man α so annehmen kann, dass der Coefficient von $\nu\nu$ in v gleich 1 wird und der Zahlwerth von $v < \frac{1}{2}l$. Alsdann ist

$$tv \equiv \alpha tu \equiv \alpha kl \equiv 0 \pmod{l};$$

man macht also

$$\frac{tv}{l} = t',$$

wo

$$\varphi t' = \frac{kk\varphi v}{ll}$$

wird und der Zahlwerth $t' < \frac{1}{2}t$.

$$\begin{array}{llll}
t = 1, & \varphi t = 1 & & \\
t' = v, & \varphi t' = A', & l' = \frac{A'}{(\mathrm{Div.}\, Ft')^2}, & v' \equiv \alpha' \frac{Ft'}{\mathrm{Div.}} \pmod{l'}, \\
t'' = \frac{t'v'}{l'}, & \varphi t'' = A'', & l'' = \frac{A''}{(\mathrm{Div.}\, Ft'')^2}, & \\
t''' = \frac{t''v''}{l''}, & \varphi t''' = A''', & l''' = \frac{A'''}{(\mathrm{Div.}\, Ft''')^2}, & \\
\text{etc.} & & &
\end{array}$$

[2.]

$$a^3 + nb^3 + nnc^3 - 3nabc = D,$$
$$n = \nu^3,$$
$$a + b\nu + c\nu\nu = \Delta,$$

$$\begin{array}{lll}
bb - ac = A, & C - \nu\nu A = (a - \nu b)\Delta, & CC - nAB = aD, \\
ncc - ab = B, & \nu A - B = (b - \nu c)\Delta, & nAA - BC = bD, \\
aa - nbc = C, & \nu B - C = (\nu\nu c - a)\Delta, & BB - AC = cD.
\end{array}$$

$$D = \Delta(\nu\nu A + \nu B + C) = aC + nbA + ncB,$$
$$aA + bB + cC = 0 = aB + ncA + bC.$$

$$nA^3 - B^3 = (bA - cB)D = (b^3 - nc^3)D,$$
$$nB^3 - C^3 = (ncB - aC)D = (nnc^3 - a^3)D,$$
$$C^3 - nnA^3 = (aC - nbA)D = (a^3 - nb^3)D.$$

$$\Delta^3 - 3a\Delta^2 + 3C\Delta - D = 0,$$
$$\Delta^3 - 3\nu b\Delta^2 + 3\nu\nu A\Delta - D = 0,$$
$$\Delta^3 - 3\nu\nu c\Delta^2 + 3\nu B\Delta - D = 0.$$

$$\frac{B}{A} + \frac{C}{B} + \frac{nA}{C} = 3\nu + \frac{\Delta\Delta}{ABC}\{a(aA - bB) + \nu b(bB - cC) + \nu\nu c(cC - aA)\}.$$

[3.]

Wenn eine Zahl A oder ein Vielfaches derselben in der Form

$$x^3 + ny^3 + nnz^3 - 3nxyz$$

enthalten ist, so ist n ein cubischer Rest von A und der Werth des Ausdrucks

$$\sqrt[3]{n} \pmod{A} \equiv \frac{xx - nyz}{nzz - xy} \equiv \frac{nyy - nxz}{xx - nyz} \equiv \frac{nzz - xy}{yy - xz}.$$

[4.]

$$n = 2, \quad D = 1$$

a	b	c	A	B	C
−1	1	0	1	1	1
1	−2	1	3	4	5
1	3	−3	12	15	19
−7	−2	6	46	58	73
19	−5	−8	177	223	281
−35	24	3	681	858	1081
41	−59	21	2620	3301	4159
1	100	−80	10080	12700	16001
−161	−99	180	38781	48861	61561

n	a	b	c
2	-1	1	0
3	2	0	-1
4	1	1	-1
5	1	-4	2
6	1	-6	3
7	1	-1	0
8	-2	0	1
9	-2	0	1
10	1	6	-3
11	1	4	-2
12	-107	33	6
13	4	3	-2
14	1	2	-1
15	1	-30	12
16	1	50	-20
17	18	-7	0
19	-8	3	0
37	10	-3	0

BEMERKUNGEN UBER DIE FRAGMENTE ZUR THEORIE DER AUS EINER CUBIKWURZEL ZU BILDENDEN GANZEN ALGEBRAISCHEN ZAHLEN.

Die hier reproducirten Entwicklungen stammen ungefähr aus derselben Zeit wie die voraufgehenden »Zur Theorie der cubischen Reste«. Nach einer Tagebuchnotiz hat GAUSS im speciellen die Untersuchung über Auflösung der Gleichung $x^3+ny^3+nnz^3-3nxyz=1$ am 23. Dec. 1808 begonnen. Es liegt damit ein neues Zeugniss für das so frühzeitige Auftreten ganzer algebraischer Zahlen vor.

Im Sinne der neueren Zahlentheorie handelt es sich hier um ganze Zahlen desjenigen reellen cubischen Körpers, der durch die reine Gleichung $x^3=n$ definirt ist. Es bedeutet t eine ganze Zahl dieses Körpers, φt die Norm von t und Ft das gleichfalls im Körper enthaltene Product der mit t conjugirten Zahlen, welche etwa t_1, t_2 heissen mögen:

$$\varphi t = t t_1 t_2, \qquad Ft = t_1 t_2.$$

Die unter [1] als »Theorem I« angegebenen Formeln sind hiernach leicht ersichtlich; und es ist freilich nicht gewiss, aber sehr wahrscheinlich, dass GAUSS dieselben unter Benutzung der complexen Factoren t_1, t_2 aufgestellt hat.

Welche Absicht GAUSS mit der Bildung der Zahlenreihe $t', t'', t''', \ldots$ gehabt hat, ist nicht angegeben.

In den weiter folgenden Entwicklungen sind an Stelle von t, φt, Ft die Bezeichnungen Δ, D, $\nu\nu A+\nu B+C$ getreten. Es handelt sich darum, die gegenseitige Beziehung der beiden Zahlen $a+b\nu+c\nu\nu$ und $\nu\nu A+\nu B+C$ weiter zu verfolgen. Nach handschriftlichen Aufzeichnungen SCHERINGS kann man diese Formeln unmittelbar aus den Gleichungen des »Theorems I« ablesen. Setzt man z. B. in

$$F(Ft) = (\varphi t)t$$

die jetzige Bedeutung von t, φt und Ft ein, so folgt:

$$F(Ft) = (BB-AC)\nu\nu+(nAA-BC)\nu+(CC-nAB)$$
$$(\varphi t)t = D(c\nu\nu+b\nu+a),$$

sowie aus der Identität beider Ausdrücke:

$$CC-nAB = Da, \qquad nAA-BC = Db, \qquad BB-AC = Dc.$$

In GAUSS' Handschrift findet sich bei der Notiz [2] noch die Angabe:

$$\textit{Correction von } \nu \textit{ à peu près} = -\frac{D^3}{9BCC},$$

sowie der unvollendete Satz:

Forma ternaria per subst.

$$x = ax'+by'+cz',$$
$$y = ncx'+ay'+bz',$$
$$z = nbx'+ncy'+az',$$

welcher dahin zu deuten ist, dass die ternäre Form

$$nnx^3+ny^3+z^3-3nxyz$$

vermöge jener Substitution übergeht in

$$D(nnx'^3+ny'^3+z'^3-3nx'y'z').$$

Der Satz [3] über cubische Reste entspringt direct aus den durch die voraufgehenden Formeln begründeten Congruenzen:

$$nA^3-B^3\equiv 0, \qquad nB^3-C^3\equiv 0, \qquad C^3-nnA^3\equiv 0 \pmod{D}.$$

Endlich liefern die beiden numerischen Tabellen am Schlusse der Fragmente, abgesehen von der für $n=8$ angegebenen Zahl $-2+\sqrt[3]{64}$ und den beiden für $n=7$ und $n=9$ gemachten Angaben, bei denen indess nur Schreibfehler vorzuliegen scheinen, lauter Zahlen $a+b\nu+c\nu\nu$ von der Norm ± 1, d. i. lauter Einheiten. In der ersten Tabelle, derjenigen für $n=2$, ist $1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ die Fundamentaleinheit des Körpers, deren erste neun Potenzen sammt ihren reciproken Einheiten berechnet werden. Einer brieflichen

Mittheilung von Herrn MEHMKE danke ich die Kenntniss, dass GAUSS auch in der zweiten Tabelle (abgesehen von den drei genannten Fällen) für das System derjenigen Einheiten, welche mit Hülfe ganzzahliger a, b, c in der Gestalt $a+b\nu+c\nu\nu$ darstellbar sind, jedesmal die zur Fundamentaleinheit reciproke Einheit angegeben hat. In der Mehrzahl der Fälle handelt es sich auch um die Fundamentaleinheit des Körpers. Ausnahmen von dieser Regel liegen vor bei $n = 16$, wo die achte Potenz der Fundamentaleinheit angegeben ist, und bei $n = 10$ und $n = 19$, wo die reciproken Fundamentaleinheiten die folgenden sind:

$$\frac{7+\sqrt[3]{10}-2\sqrt[3]{100}}{3}, \qquad \frac{2+2\sqrt[3]{19}-\sqrt[3]{19^2}}{3}.$$

FRICKE.

BEWEIS DER IRRATIONALITÄT DER TANGENTEN RATIONALER BÖGEN IN EINER NEUEN GESTALT.

Die unendlichen Reihen

$$P = 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{mm}{nn}+\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{1.3}\cdot\frac{m^4}{n^4}-\frac{1}{2.4.6}\cdot\frac{1}{1.3.5}\cdot\frac{m^6}{n^6}+\text{u. s. w.}$$

$$P_1 = \frac{m}{n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.3}\cdot\frac{m^3}{n^3}+\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{1.3.5}\cdot\frac{m^5}{n^5}-\frac{1}{2.4.6}\cdot\frac{1}{1.3.5.7}\cdot\frac{m^7}{n^7}+\text{u. s. w.}$$

$$P_2 = \frac{1}{1.3}\cdot\frac{m^3}{n.n}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.3.5}\cdot\frac{m^5}{n^4}+\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{1.3.5.7}\cdot\frac{m^7}{n^6}-\frac{1}{2.4.6}\cdot\frac{1}{1.3.5.7.9}\cdot\frac{m^9}{n^8}+\text{u. s. w.}$$

$$P_3 = \frac{1}{1.3.5}\cdot\frac{m^5}{n^3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.3.5.7}\cdot\frac{m^7}{n^5}+\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{1.3.5.7.9}\cdot\frac{m^9}{n^7}-\frac{1}{2.4.6}\cdot\frac{1}{1.3.5.7.9.11}\cdot\frac{m^{11}}{n^9}+\text{u. s. w.}$$

und allgemein, von $\theta = 1$ an,

$$P_\theta = \frac{1}{1.3.5\ldots(2\theta-1)}\cdot\frac{m^{2\theta-1}}{n^\theta}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1.3.5\ldots(2\theta+1)}\cdot\frac{m^{2\theta+1}}{n^{\theta+2}}+\frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{1.3.5\ldots(2\theta+3)}\cdot\frac{m^{2\theta+3}}{n^{\theta+4}}$$
$$-\frac{1}{2.4.6}\cdot\frac{1}{1.3.5\ldots(2\theta+5)}\cdot\frac{m^{2\theta+5}}{n^{\theta+6}}+\text{u. s. w.},$$

wo m, n zunächst beliebige gegebene positive Grössen bedeuten, sind offenbar alle, wenn nicht vom Anfange an, doch nach hinlänglich weiter Fortsetzung convergent, und zwar mehr als jede fallende geometrische Progression. Es hat daher jede einen endlichen bestimmten Zahlenwerth.

Ist schon das zweite Glied von P_θ kleiner als das erste, oder auch nur diesem gleich, so wird von selbst das dritte kleiner als das zweite, das vierte kleiner als das dritte u.s.w. In diesem Falle, wozu nur gefordert wird, dass $2\theta+1$ nicht kleiner ist als $\frac{mm}{2nn}$, wird der Werth von P_θ jedenfalls positiv, kleiner als das erste Glied, und grösser als die Summe der beiden ersten sein.

Es wird dann folglich der Werth des Bruchs $\frac{P_\theta}{P_{\theta+1}}$ zu klein gefunden, wenn man im Zähler die beiden ersten Glieder, und im Nenner nur das erste in Rechnung bringt, oder mit anderen Worten, der wahre Werth jenes Bruches ist grösser als $(2\theta+1)\cdot\frac{n}{mm}\left\{1-\frac{1}{2(2\theta+1)}\frac{mm}{nn}\right\}$ oder $\frac{n}{mm}(2\theta+1)-\frac{1}{2n}$. Es folgt hieraus, dass $P_\theta, P_{\theta+1}, P_{\theta+2}$ u. s. w. eine stets abnehmende unendliche Reihe von Grössen bilden, wenn nur $2\theta+1$ nicht kleiner ist als $\frac{mm}{n}+\frac{mm}{2nn}$. Es ist also unmöglich, dass sämmtliche Glieder der Reihe P, P_1, P_2, P_3 u. s. w. ganzen Zahlen proportional seien. Diess würde aber nothwendig der Fall sein, wenn man annimmt, dass m und n ganze Zahlen sind und zugleich die beiden ersten Glieder jener Reihe P, P_1 zu einander in einem rationalen Verhältniss stehen. Man hat nemlich:

$$P_2 = nP_1 - mP$$
$$P_3 = 3nP_2 - mmP_1$$
$$P_4 = 5nP_3 - mmP_2$$
$$P_5 = 7nP_4 - mmP_3$$
u. s. w.,

allgemein, von der zweiten Formel an,

$$P_{\theta+2} = (2\theta+1)nP_{\theta+1} - mmP_\theta.$$

Offenbar kann man in diesen Formeln anstatt der Grössen P, P_1, P_2 u. s. w. auch ihnen proportionale setzen. Wären aber von diesen die zwei ersten ganze Zahlen, so würden auch alle folgenden ganze Zahlen sein, was, wie eben gezeigt wurde, unmöglich ist.

Es kann folglich, wenn m, n ganze Zahlen bedeuten, der Werth des Bruchs $\frac{P_1}{P}$, welcher nichts anderes ist als die Tangente des Bogens $\frac{m}{n}$, nicht rational sein.

BEMERKUNGEN ZU DEM AUFSATZE »BEWEIS DER IRRATIONALITÄT DER TANGENTEN RATIONALER BÖGEN IN EINER NEUEN GESTALT«.

Der erste einwandfreie Beweis, dass $\operatorname{tg}\frac{m}{n}$ für ganze Zahlen m, n irrational ist, wurde von LEGENDRE in der vierten Note seiner »Éléments de géométrie« (1794) entwickelt. Die GAUSS'schen Ausführungen weichen in den Grundgedanken nicht von dem LEGENDREschen Beweise ab. Neu ist die Art, wie GAUSS direct aus den Potenzreihen der P_θ die unbegrenzte Abnahme dieser Grössen bei wachsendem θ nachweist. Über die hier in Betracht kommenden Untersuchungen LAMBERTs und LEGENDREs, sowie namentlich über die vom letzteren a. a. O. gegebene Darstellung hat übrigens GAUSS eine kritische Besprechung aufgezeichnet, die jedoch hier nicht abgedruckt ist.

Eine andere Entwicklung, welche gleichfalls nicht abgedruckt ist, leitet aus den Recursionsformeln der P_θ angenäherte Darstellungen von $\operatorname{tg} m$ durch Quotienten ganzer rationaler Functionen von m ab. GAUSS benutzt diese Darstellungen zur Berechnung von Näherungswerthen von $\frac{1}{2}\pi$.

FRICKE.

[NOTIZ ÜBER AUFLÖSUNG EINES SPECIELLEN SYSTEMS LINEARER GLEICHUNGEN.]

Aufgabe.

Vermittelst der fünf Gleichungen

$$
\begin{aligned}
aP+bQ+cR+dS+eT &= A,\\
bP+cQ+dR+eS+aT &= B,\\
cP+dQ+eR+aS+bT &= C,\\
dP+eQ+aR+bS+cT &= D,\\
eP+aQ+bR+cS+dT &= E,
\end{aligned}
$$

die unbekannten P, Q, R, S, T aus den übrigen zu finden.

Auflösung.

Man bestimme p, q, r, s, t so, dass

$$
\begin{aligned}
ap+bq+cr+ds+et &= 1,\\
bp+cq+dr+es+at &= 0,\\
cp+dq+er+as+bt &= 0,\\
dp+eq+ar+bs+ct &= 0,\\
ep+aq+br+cs+dt &= 0,
\end{aligned}
$$

werde. Dann ist

$$
\begin{aligned}
P &= Ap+Bq+Cr+Ds+Et,\\
Q &= Aq+Br+Cs+Dt+Ep,\\
R &= Ar+Bs+Ct+Dp+Eq,\\
S &= As+Bt+Cp+Dq+Er,\\
T &= At+Bp+Cq+Dr+Es.
\end{aligned}
$$

Das Geforderte wird auf folgende Art geleistet. Es sei ε eine Wurzel der Gleichung $x^5 = 1$. Man mache

$$
\begin{aligned}
p+q+r+s+t &= \frac{1}{a+b+c+d+e},\\
p+q\varepsilon+r\varepsilon\varepsilon+s\varepsilon^3+t\varepsilon^4 &= \frac{1}{a+b\varepsilon^4+c\varepsilon^3+d\varepsilon\varepsilon+e\varepsilon},\\
p+q\varepsilon\varepsilon+r\varepsilon^4+s\varepsilon+t\varepsilon^3 &= \frac{1}{a+b\varepsilon^3+c\varepsilon+d\varepsilon^4+e\varepsilon\varepsilon},\\
p+q\varepsilon^3+r\varepsilon+s\varepsilon^4+t\varepsilon\varepsilon &= \frac{1}{a+b\varepsilon\varepsilon+c\varepsilon^4+d\varepsilon+e\varepsilon^3},\\
p+q\varepsilon^4+r\varepsilon^3+s\varepsilon\varepsilon+t\varepsilon &= \frac{1}{a+b\varepsilon+c\varepsilon\varepsilon+d\varepsilon^3+e\varepsilon^4},
\end{aligned}
$$

woraus p, q, r, s, t leicht abgeleitet werden.

Man setze nemlich

$$
\begin{aligned}
(a+b\varepsilon+c\varepsilon\varepsilon+d\varepsilon^3+e\varepsilon^4)(a+b\varepsilon\varepsilon+c\varepsilon^4+d\varepsilon+e\varepsilon^3)(a+b\varepsilon^3+c\varepsilon+d\varepsilon^4+e\varepsilon\varepsilon)&\\
= \mathfrak{A}+\mathfrak{B}\varepsilon+\mathfrak{C}\varepsilon\varepsilon+\mathfrak{D}\varepsilon^3+\mathfrak{E}\varepsilon^4&,\\
\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}+\mathfrak{E} = \mathfrak{M}&,\\
a+b+c+d+e = m&,\\
\mathfrak{A}a+\mathfrak{B}b+\mathfrak{C}c+\mathfrak{D}d+\mathfrak{E}e = M&,\\
\frac{M-m\mathfrak{M}}{m(5M-m\mathfrak{M})} = n&.
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{4\mathfrak{A}}{5M-m\mathfrak{M}}+n,\\
q &= \frac{4\mathfrak{B}}{5M-m\mathfrak{M}}+n,\\
r &= \frac{4\mathfrak{C}}{5M-m\mathfrak{M}}+n,\\
s &= \frac{4\mathfrak{D}}{5M-m\mathfrak{M}}+n,\\
t &= \frac{4\mathfrak{E}}{5M-m\mathfrak{M}}+n.
\end{aligned}
$$

[MECHANISCHER SATZ ÜBER DIE WURZELN EINER GANZEN FUNCTION $f(x)$ UND IHRER ABLEITUNG $f'(x)$.]

Sind $\begin{matrix} a, b, c, \ldots, m, n \\ a', b', c', \ldots, m' \end{matrix}$ die Wurzeln der Gleichung $\begin{matrix} fx = 0 \\ f'x = 0 \end{matrix}$, wo $f'x = \frac{dfx}{dx}$, und werden durch dieselben Buchstaben die entsprechenden Punkte in plano bezeichnet, so ist, wenn man sich in $a, b, c, \ldots, m, n$ gleiche abstossende oder anziehende Massen denkt, die im umgekehrten Verhältniss der Entfernung wirken, in $a', b', c', \ldots, m'$ Gleichgewicht.

BEMERKUNGEN ZU DEN BEIDEN VORSTEHENDEN ALGEBRAISCHEN NOTIZEN.

Die erste der beiden mitgetheilten Notizen stammt wahrscheinlich aus den Jahren 1826—28. Sie bezweckt die Auflösung eines Systems von fünf linearen Gleichungen mit besonders einfach und zwar symmetrisch gebauter Determinante vermittelst der fünften Einheitswurzeln. Beim Beweise der schliesslich herauskommenden Darstellungen für die fünf Grössen p, q, r, s, t beachte man, dass die Norm der complexen Zahl $a + b\varepsilon + c\varepsilon\varepsilon + d\varepsilon^3 + e\varepsilon^4$ sich in der Gestalt $\frac{1}{4}(5M - m\mathfrak{M})$ darstellen lässt.

Die zweite Notiz hat GAUSS wahrscheinlich im Jahre 1846 aufgezeichnet. Zum Beweise orientire man die Ebene so, dass eine der Lösungen von $f'(x) = 0$ in den Nullpunkt zu liegen kommt. Dann ist:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \cdots + \frac{1}{n} = 0,$$

$$\frac{a_0}{aa_0} + \frac{b_0}{bb_0} + \frac{c_0}{cc_0} + \cdots + \frac{n_0}{nn_0} = 0,$$

wo a_0 zu a, b_0 zu b, etc. conjugirt complex sein sollen. Die mechanische Deutung der letzten Gleichung liefert den GAUSS'schen Satz.

FRICKE.

ANALYSIS UND FUNCTIONENTHEORIE.

NACHTRÄGE ZU BAND III.

NACHLASS.

DE INTEGRATIONE FORMULAE DIFFERENTIALIS
$(1+n\cos\varphi)^\nu \cdot d\varphi.$

P r o o e m i u m. Maxima pars Calculi, qui Integralis vocatur, serierum evolutione et tractatione absolvitur. Unica nimirum methodus, quam in illo praeter tentamina et differentiatione in memoriam revocata invenies, hoc agit, ut data quantitas differentialis in seriem expandatur terminorum, quorum singulus quilibet facile ad integrationem perducitur. In serie finita hoc modo ad expressionem omnibus numeris absolutam pervenitur; series infinita, licet incognitarum relationem quaesitam minus perfecte exhibeat, modo ita procedat, ut adproximationi locus detur, id quod plurimis casibus apta tractatione obtinebitur, ad vulgares usus sufficere et aequationi, si qua talis revera inter variabiles propositas detur, aequipollere recte censetur. Est autem plerumque propter terminorum seriem ingredientium prolixitatem et adparentem anomaliam arduum sane negotium, legem istarum expressione generali circumscribere, circumscriptam demonstratione munire; utrumque imminens erroris, irrepentis ex sola coniectura producto calculo ad verisimilitatem elata, periculum et scientiae dignitas postulant. Exemplum eiusmodi disquisitionis sistet dissertatiuncula proposita, quae in formulae $d\varphi(1+n\cos\varphi)^\nu$, existentibus n et ν numeris definitis pro lubitu adsumtis, integratione per series absolvenda versatur. Formula haec, cuius eximius est in Astronomia physica usus, adeo gravis Ill. EULERO visa fuit, ut illi integrum Institutionum Calculi Integralis caput*) di-

*) Cap. VI T. I.

care nullus dubitaverit. Legem ibi, licet non summa generalitate expressam, signis concinnioribus circumscribere, et ex genuino fonte rigida demonstratione derivare, operae pretium mihi visum est.

Praemonenda autem ante omnia quaedam, de novo signo in exhibendis serierum terminis generalibus utilissimo, brevibus exponam. In seriebus nimirum, imprimis complicatioribus saepe accidit, ut aliam termini impares, aliam pares legem sequi videantur, et tunc in binas, a se invicem seiunctas dirimi soleant. Quod, cum non sine prolixitate fieri possit et, ut ita dicam, unitatem expressionis, qua sola tractabilis redditur series indefinita, tollat, nisi aliqua ratione medela adferatur, serierum usum arctis circumscribet limitibus. Sponte autem ex methodo, qua simplicissima quae dari potest inter terminos seriei pares et impares discrepantia, ut nimirum alteri positivi, alteri negativi sint, in ipsum terminum generalem infertur, generalior ista, quam nunc proponere conor, sese offerre videtur. Sit terminus seriei alicuius generalis $m^{\text{tus}} = Q$; si illum positivum velis existente m pari, negativum m impari, hoc praefixo factore $(-1)^m$; sin contrario ordine procedere signa malis, praeposito $(-1)^{m+1}$ exhibeo*). Simili ratione, sit expressio generalis termini m^{ti} existente m pari $= P$, existente impari $= Q$, ita, ut P aliam prorsus, quam Q legem sequatur. Dico fore generatim terminum $m^{\text{tum}}\ \frac{1-(-1)^m}{2}Q + \frac{1-(-1)^{m+1}}{2}P$. Ex hac enim expressione, si fuerit m numerus par, ob $(-1)^m = 1$, evadente $\frac{1-(-1)^m}{2} = 0$, et ob $(-1)^{m+1} = -1$, evadente $\frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = 1$, eliditur pars prima, fitque altera uti fas est $= P$. Sin vero m fuerit impar, cum sit $(-1)^{m+1} = 1$, adeoque $\frac{1-(-1)^{m+1}}{2} = 0$, et simul $(-1)^m = -1$ et inde $\frac{1-(-1)^m}{2} = 1$, evanescente parte posteriore restat prior ut assumta fuit $= Q$. Ut unicum tantum exemplum adferam, ex quo notae utilitas elucescat, sumam, quod infra demonstrabitur, posse potestatem indefinitam cosinus dati cuiusdam anguli v. g. $\cos\varphi^n$ semper in seriem secundum cosinus multiplorum eiusdem anguli expandi, ea tamen lege, ut ista, existente n pari, secundum multipla paria procedat, sitque adeo terminus illius r^{tus}, misso coefficiente, $\cos 2r\varphi$; existente autem n impari secundum multipla imparia, sitque tunc terminus eiusdem $r^{\text{tus}} = \cos(2r+1)\varphi$. Tunc expressio generalis sic adornari potest: fore seriei in quam $\cos\varphi^n$ evolvitur, terminum generalem $r^{\text{tum}} = \cos\left(2r + \frac{1-(-1)^n}{2}\right)\varphi$. Manifesto enim existente n pari contrahitur haec forma in $\cos 2r\varphi$, existente impari abit in $\cos(2r+1)\varphi$.

*) Adsensum huic signo non recusare dignatus est, cum ipsi de illo proponerem, Ill. KAESTNERUS. Qua auctoritate fretus saepius iam in disquisitionibus analyticis idem illud adhibui.

In dissertatiuncula ipsa generalem hunc notandi modum nonnisi in formula finitima (§ 11) adhibui. Licet enim iam in disquisitionibus quibus ad istam pervenitur cum fructu adplicari possit, abstinendum ipso censui, ne propter addenda quaedam de transmutationibus eiusmodi signorum, si in calculos ipsos ingrediantur, ad nimiam prolixitatem abreptus, dissertatiunculae limites excederem. Satius mihi visum est, notarum eiusmodi tractationem, si calculos subeant prolixos termini, quos adficiunt, et artificia, quibus ad servandam in illis concinnitatem opus est, singulari disquisitione complecti.

1. Formulae propositae integratio initio quidem facillime perfici posse videtur. Potest enim quantitas data $(1+n\cos\varphi)^\nu$ secundum theorema binomiale in seriem per successivas ipsius $\cos\varphi$ potestates integras procedentem converti. Quo facto singuli eius termini, in $d\varphi$ ducti, et ad integrationem revocati, quaesitum exhibebunt. Recte hoc quidem, verum hac via incedendo ad expressiones complicatissimas deducimur; quaelibet enim quaesitae integralis particula serie continebitur haud parum prolixa. Praestat igitur aliam sequi rationem, in eo fundatam, quod ex Trigonometriae analyticae praeceptis quaelibet ipsius $\cos\varphi$ potestas exponentis integri positivi possit in seriem valde concinnam, per terminos qui solummodo cosinus multiplorum ipsius φ continent, progredientem evolvi. Ita igitur absolvetur negotium propositum, ut primo quidem $(1+n\cos\varphi)^\nu$ per seriem, secundum potestates ipsius $\cos\varphi$ procedentem, exhibeatur, mox vero, ex lege generali, antea stabilita, quilibet eius terminus in seriem novam, per cosinus multiplorum progredientem mutetur, atque colligantur demum ex omnibus hisce seriebus membra, qui eiusdem anguli cosinum contineant. Series nova, eaque rite ordinata, quae, peractis hisce laboribus exsurgit, in $d\varphi$ ducta statim ad integrationem poterit perduci.

2. Ante omnia igitur lex, qua potestas aliqua cosinus dati per angulorum multiplorum cosinus exhibetur, scrutanda erit. Huic disquisitioni fundamento est formula trigonometrica elementaris*), esse

*) KAESTNER, Astron. Abh., Erste Sammlung, I, 10.

$$\cos a \cos b = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) + \tfrac{1}{2}\cos(a+b).$$

Sumatur iam $\cos\varphi$, quae, in $\cos\varphi$ ducta, dabit $\cos\varphi\cdot\cos\varphi$, quod productum tum, si revera multiplicemus, per $\cos\varphi^2$, tum si per formulam modo expositam in summam solvamus, per $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi$ exhibebitur. Est igitur $\cos\varphi^2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi$. Simili ratione ad potestates altiores provecti, sensim formulas eruimus sequentes

$$\cos\varphi^3 = \tfrac{3}{4}\cos\varphi + \tfrac{1}{4}\cos 3\varphi;$$
$$\cos\varphi^4 = \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{8}\cos 4\varphi;$$
$$\cos\varphi^5 = \tfrac{10}{16}\cos\varphi + \tfrac{5}{16}\cos 3\varphi + \tfrac{1}{16}\cos 5\varphi;$$
$$\cos\varphi^6 = \tfrac{10}{32} + \tfrac{15}{32}\cos 2\varphi + \tfrac{6}{32}\cos 4\varphi + \tfrac{1}{32}\cos 6\varphi;$$
$$\cos\varphi^7 = \tfrac{35}{64}\cos\varphi + \tfrac{21}{64}\cos 3\varphi + \tfrac{7}{64}\cos 5\varphi + \tfrac{1}{64}\cos 7\varphi;$$
$$\cos\varphi^8 = \tfrac{35}{128} + \tfrac{56}{128}\cos 2\varphi + \tfrac{28}{128}\cos 4\varphi + \tfrac{8}{128}\cos 6\varphi + \tfrac{1}{128}\cos 8\varphi.$$

Facile ex his calculis lex generalis eruitur. In potestatibus $\cos\varphi$ paribus non nisi parium ipsius φ multiplorum, quorum maximum dato exponente definitur, cosinus adparent, in imparibus eadem lege multiplorum imparium cosinus. Sed pares non eandem omnino quam impares legem sequuntur.

α. Terminus initialis in paribus, in $\cos 0\varphi = 1$ ductus, coefficiente gaudet, cuius denominator, ut ceterorum omnium, est ipsius 2 potestas, cuius exponens unitate exceditur ab exponente propositae potestatis. Numerator est fere coefficiens binomialis ad potestatem propositam pertinens, et quidem, si illos suo ordine evolutos concipias, mediorum inter illos dimidius. Cetera membra, multiplum ipsius φ, indicis membri duplum, in coefficiente adiecto eundem quem initiale denominatorem, pro numeratore autem coefficientem binomialem eiusdem potestatis, illo quem initiale gerit tot gradibus posteriorem, quot index membri indicat, continent. Quae lex ita generatim exponi potest: fore $\cos\varphi^{2m}$ seriem, cuius terminus initialis *)

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\cdot\frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2},$$

*) Expressio legis huius EULERiana, ad coefficientes binomiales non revocata, cum proposita si ipsa congruit, sed non aeque concinna videtur.

Ceterum coefficientes binomiales a me semper more HINDENBURGiano notari, et serierum terminos, duce Ill. KAESTNERO, semper in initialem et sequentes distingui, vix est quod moneam.

terminus generalis r^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)} . \cos 2r\varphi.$$

β. Potestates impares eidem legi subiectae inveniuntur, nisi quod terminus initialis in numeratore, coefficientium binomialium, ad potestatem datam pertinentium medium posteriorem (quippe bini in exponente impari occurrunt et medii et aequales) totum contineat. Lex seriei generalis igitur haec erit: esse $\cos\varphi^{2m-1}$ seriem, cuius terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi,$$

terminus generalis r^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)}\cos(2r+1)\varphi.$$

3. Sumamus igitur primo loco legem propositam in indefinita aliqua potestate impari, v. g. $(2m-1)^{\text{ta}}$ valere, adeoque esse

$$\cos\varphi^{2m-1} =$$
$$\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi + \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cos 3\varphi + \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+2)}\cos 5\varphi + \text{etc.},$$

obtinebitur potestas par unitate maior, utramque aequationis partem per $\cos\varphi$ multiplicando. Quodlibet serie membrum hoc pacto productum binorum cosinuum continet, nec difficulter ex theoremate noto in summam binorum cosinuum solvetur. Sic fiet

$$\cos\varphi^{2m} = \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi\cdot\cos\varphi + \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\cos 3\varphi\cdot\cos\varphi$$
$$+ \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+2)}\cos 5\varphi\cdot\cos\varphi + \cdots$$

Evadet igitur, quia

$$\cos\varphi\cos\varphi = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos 2\varphi,$$

terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\frac{\cos 2\varphi}{2},$$

eademque lege terminus primus

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+1)} . \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+1)}\frac{\cos 4\varphi}{2}.$$

Initio patet ex solo termino initiali in summam soluto eventurum terminum in $\cos 0\varphi = 1$ ductum, h. e. novae seriei terminum initialem; ceteri enim termini in utraque summae ex illis provenientis parte cosinum multipli alicuius paris ipsius φ continent. Est igitur novae seriei terminus initialis

$$\frac{1}{2^{2m-2}} \cdot \frac{1}{2}\, {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)} = \frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}.$$

Haec vero expressio, cum sit hic coefficiens binomialis inter ceteros suae potestatis mediorum posterior, adeoque cum altero mediorum, cui aequalis est, addendo iunctus potestatis uno gradu altioris coefficientem eiusdem indicis producat, sitque hac ratione

$${}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)} \cdot 2 = {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)},$$

sic poterit exhiberi: esse terminum initialem

$$= \frac{1}{2^{2m-1}} \frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2}.$$

Ad legem terminorum reliquorum generalem enodandam sumatur $\cos\varphi^{2m-1} \cdot \cos\varphi$ terminus generalis r^{tus}

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\, {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos(2r+1)\varphi \cdot \cos\varphi.$$

Hic, cum sit

$$\cos(2r+1)\varphi \cdot \cos\varphi = \tfrac{1}{2}\cos 2r\varphi + \tfrac{1}{2}\cos(2r+2)\varphi,$$

solvetur in partes:

$$\frac{1}{2^{2m-2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos 2r\varphi + \frac{1}{2^{2m-2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos(2r+2)\varphi.$$

Ex quo adparet, ex quolibet multiplo impari hac transformatione bina paria, alterum proxime maius, alterum proxime minus dato impari enasci. Sic nonnisi cosinus multiplorum parium in nova serie occurrunt, quorum quilibet coefficientem ex binis seriei adsumtae coefficientibus contiguis conflatum obtinebit. Patet enim ex transformatione in termino r^{to} ipsius

$$\cos\varphi^{2m-1} \cdot \cos\varphi$$

instituta, non solum huius partem primam, quae iam ante inventa fuit

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos 2r\varphi,$$

sed quoque antecedentis $(r-1)^{\text{ti}}$ posteriorem

$$= \frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r-1)} \cos 2r\varphi,$$

esse in $\cos 2r\varphi$ ductam, ex ceteris terminis vero multipla aut minora aut maiora proficisci. Iunctis igitur terminis hisce habebitur novae seriei pro $\cos\varphi^{2m}$ terminus generalis r^{tus}, qui, cum sit

$${}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} + {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r-1)} = {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)},$$

induet formam

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cdot \cos 2r\varphi.$$

Haec expressio legi infra pro potestatibus paribus adsumtae prorsus consentanea est, ex quo sequitur, valituram illam pro potestati pari, simulac impari proxime minori demonstrata fuerit.

4. Denuo igitur derivata modo pro $\cos\varphi^{2m}$ series:

$$\cos\varphi^{2m} = \frac{1}{2^{2m-1}} \frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2} + \frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+1)} \cos 2\varphi + \frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+2)} \cos 4\varphi + \cdots$$
$$+ \frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos 2r\varphi + \cdots$$

in $\cos\varphi$ ducatur, ut habeatur ex una parte $\cos\varphi^{2m+1}$, ex altera, excepto initiali, in quolibet termino binorum cosinuum productum, ut antea in binas partes dirimendum. Dabit sic terminus primus

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+1)} \cos 2\varphi \cos\varphi$$

partes

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+1)} \frac{1}{2} \cos\varphi + \frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+1)} \frac{1}{2} \cos 3\varphi.$$

Pars eius prima, cum unica, quam terminus initialis praebet

$$\frac{1}{2^{2m-1}} \frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2} \cos\varphi,$$

in summam collecta, dabit novae seriei initialem

$$\frac{1}{2^{2m}}\, {}^{2m+1}\mathfrak{B}^{(m+1)} \cos\varphi.$$

Terminus generalis r^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos 2r\varphi \cos\varphi,$$

in partes diremtus, dabit

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cdot \frac{1}{2} \cos(2r-1)\varphi + \frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cdot \frac{1}{2} \cos(2r+1)\varphi.$$

Igitur sola multipla imparia hic occurrunt, quorum bina contigua ex quolibet datae seriei termino generantur. Si igitur velim novae seriei terminum $(r-1)^{\text{tum}}$, quem in $\cos(2r-1)\varphi$ ductum fore adparet, ex evolutae seriei termino $(r-1)^{\text{to}}$ partem posteriorem

$$= \frac{1}{2^{2m}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r-1)} \cos(2r-1)\varphi,$$

ex r^{to} autem partem priorem

$$\frac{1}{2^{2m}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos(2r-1)\varphi$$

iungendo, obtinerem:

$$\frac{1}{2^{2m}}\, {}^{2m+1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos(2r-1)\varphi.$$

Sic evadet ipsius $\cos\varphi^{2m+1}$ terminus generalis $(r-1)^{\text{tus}}$ qualis hic propositus est, aut, si malis, pro r substituendo $r+1$, terminus r^{tus}

$$\frac{1}{2^{2m}}\, {}^{2m+1}\mathfrak{B}^{(m+1+r)} \cos(2r+1)\varphi.$$

Atque iam adparet hanc legem, ipsius $\cos\varphi^{2m+1}$ terminum r^{tum} sistentem, cum adsumta illa pro $\cos\varphi^{2m-1}$ termino r^{to}

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\, {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos(2r+1)\varphi,$$

ita congruere, ut, simulac in hac loco m substituatur $m+1$, illa sponte prodeat.

Esse igitur legem tam pro paribus quam pro imparibus ipsius $\cos\varphi$ potestatibus generalem, hoc progressu indefinito demonstratione munito, per se patet.

5. Quamvis ad disquisitionem propositam haud pertineat, liceat hoc loco monere, ex lege pro cosinuum potestatibus per dati anguli multiplos exhibitis similem pro sinuum potestatibus statim exsurgere, idque sola observatione esse $\cos(90^0-\varphi) = \sin\varphi$.

Cum sit igitur $\cos\varphi^{2m-1}$ series, cuius terminus initialis

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\, {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)} \cos\varphi$$

erit, substituendo $90^0-\varphi$ in locum ipsius φ, $\sin\varphi^{2m-1}$ terminus initialis

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\, {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)} \sin\varphi$$

et generatim, eadem substitutione $\sin\varphi^{2m-1}$ terminus r^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\, {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos(2r+1)(90^0-\varphi).$$

Est autem

$$\begin{aligned}\cos(2r+1)(90^0-\varphi) &= \cos\big((2r+1)\,90^0-(2r+1)\varphi\big)\\ &= \cos(2r+1)\,90^0 \cdot \cos(2r+1)\varphi + \sin(2r+1)\,90^0 \cdot \sin(2r+1)\varphi.\end{aligned}$$

Iam vero, cum sit

$$\sin(2r+1)\,90^0 = (-1)^r, \qquad \cos(2r+1)\,90^0 = 0,$$

fiet haec quantitas

$$= (-1)^r \sin(2r+1)\varphi,$$

et terminus ipsius $\sin\varphi^{2m-1}$ generalis r^{tus}

$$= \frac{(-1)^r}{2^{2m-2}}\, {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+r)} \sin(2r+1)\varphi.$$

Si vero in serie $\cos\varphi^{2m}$ exhibente in locum ipsius φ substituas $90^0-\varphi$, terminus initialis non afficitur, generalis r^{tus}, qui est

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos 2r\varphi,$$

mutatur ita, ut

$$\begin{aligned}\cos 2r(90^0-\varphi) &= \cos(2r\,90^0-2r\varphi)\\ &= \cos 2r\,90^0 \cdot \cos 2r\varphi + \sin 2r\,90^0 \cdot \sin 2r\varphi\end{aligned}$$

contineat. Est autem

$$\sin 2r\,90^0 = 0, \qquad \cos 2r\,90^0 = (-1)^r,$$

qua re mutatur ista expressio in $(-1)^r \cos 2r\varphi$, fitque ipsius $\sin\varphi^{2m}$ terminus r^{tus}

$$\frac{(-1)^r}{2^{2m-1}}\, {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+r)} \cos 2r\varphi.$$

6. Nunc sine mora ad finem propositum accedere licet. Nimirum evolvatur per theorema binomiale $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ in seriem per potestates ipsius $\cos\varphi$ progredientem, solvatur deinde quodlibet huius seriei membrum in novam seriem secundum cosinus multiplorum anguli dati procedentem, seligantur ex his seriebus termini in eiusdem anguli cosinum ducti, hique in unum terminum cogantur. Cognita terminorum sic provenientium lege totum negotium tantum non perfectum erit. In serie fundamentali

$$(1+n\cos\varphi)^{\nu} = 1+{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(1)}\, n\cos\varphi+{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2)} n^2\cos\varphi^2+{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(3)} n^3\cos\varphi^3+\ldots+{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(q)} n^q\cos\varphi^q+\ldots$$

omnes ipsius $\cos\varphi$ potestates ex ordine occurrunt, pares et impares. Ex paribus, si evolvantur, nonnisi cosinus multiplorum parium, ex imparibus nonnisi imparium prodeunt, quare ad has, si de cosinu multipli imparis, ad illas si de cosinu multipli paris agitur, recurrendum est.

A) Habebitur seriei quaesitae terminus initialis, si ex omnibus propositae terminis, illorum, qui evoluti a $\cos 0\varphi = 1$ ordiuntur, initialia membra ordine suo servato uniantur. Sunt vero solae potestates ipsius $\cos\varphi$ pares, quae evolutae eiusmodi membrum initiale praebeant. Quaelibet harum partem huc pertinentem praebet; h^{ta} igitur pars ex seriei fundamentalis termino $2h^{\text{to}}$, qui est ${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} n^{2h}\cos\varphi^{2h}$, proficiscitur. Est autem $\cos\varphi^{2h}$ terminus initialis, qui solus huc pertinet

$$= \frac{1}{2^{2h-1}}\,\frac{{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}}{2} = \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)};$$

adeoque adiecto ipsius $\cos\varphi^{2h}$ coefficiente pars h^{ta} seriei in $\cos 0\varphi = 1$ ductae

$$\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} n^{2h}.$$

Sic inventus est terminus generalis h^{tus} seriei, quae terminum initialem eius constituit, quam $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ secundum cosinus angulorum multiplorum evolvendo adipiscimur. Esse terminum eius initialem $= 1$ per se patet. Quod si ponamus esse

$$(1+n\cos\varphi)^{\nu} = A+A^{(1)}\cos\varphi+A^{(2)}\cos 2\varphi+\ldots,$$

erit

$$A = 1+\frac{1}{2^2}\,{}^{2}\mathfrak{B}^{(1)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2)} n^2+\frac{1}{2^4}\,{}^{4}\mathfrak{B}^{(2)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(4)} n^4+\ldots+\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} n^{2h}+\ldots$$

sive

$$A = 1+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{2}{1}\,\frac{\nu\,.\,\nu-1}{1\,.\,2}\,n^2+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{4\,.\,3}{1\,.\,2}\cdot\frac{\nu\,.\,\nu-1\,.\,\nu-2\,.\,\nu-3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,n^4+\text{etc.}$$

B) Quaeramus iam generatim legem coefficientis, quam cosinus multipli alicuius imparis v. g. $\cos(2q-1)\varphi$ nanciscitur. Inter terminos seriei $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ secundum potestates ipsius $\cos\varphi$ procedentis primus ille, qui $\cos\varphi^{2q-1}$ continet, secundum cosinus multiplorum evolutus, in termino suo $(q-1)^{\text{to}}$ multiplum requisitum continet. Est nimirum ex lege antea (2, β) exposita, ipsius $\cos\varphi^{2q-1}$ terminus $(q-1)^{\text{tus}}$

$$= \frac{1}{2^{2q-2}}\,{}^{2q-1}\mathfrak{B}^{(2q-1)}\cos(2q-1)\varphi,$$

sive, cum sit ${}^{2q-1}\mathfrak{B}^{(2q-1)} = 1$,

$$\frac{1}{2^{2q-2}}\cos(2q-1)\varphi.$$

Erat autem in serie fundamentali terminus $\cos\varphi^{2q-1}$ continens ductus in ${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q-1)} n^{2q-1}$. Quo factore adiecto habebitur pars prima coefficientis, qui ad $\cos(2q-1)\varphi$ pertinet, sive terminus initialis seriei, qua coefficiens ille exhibetur

$$= \frac{1}{2^{2q-2}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q-1)} n^{2q-1}.$$

Iam vero quaelibet ipsius $\cos\varphi$ potestas impar, cuius exponens $2q-1$ excedit, si per cosinus multiplorum exprimatur, praebebit terminum in $\cos(2q-1)$ ductum; estque horum h^{tus}, qui ex h^{ta} post $\cos\varphi^{2q-1}$ potestate impari, cuius igitur exponens est $2q+2h-1$, originem trahit. Sumitur autem ex quantitate

$${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h-1)} n^{2q+2h-1}\cos\varphi^{2q+2h-1}$$

secundum cosinus multiplorum evoluta terminus $(q-1)^{\text{tus}}$; fit autem ille (cum sit ex lege cognita, ipsius $\cos\varphi^{2q+2h-1}$ terminus $(q-1)^{\text{tus}}$

$$= \frac{1}{2^{2q+2h-2}}\,{}^{2q+2h-1}\mathfrak{B}^{(2q+h-1)}\cos(2q-1))$$

$$= \frac{1}{2^{2q+2h-2}}\,{}^{2q+2h-1}\mathfrak{B}^{(2q+h-1)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h-1)} n^{2q+2h-1}\cos(2q-1)\varphi.$$

Huius igitur quantitatis coefficiens est h^{tus} illorum, quos ex successiva partium seriei fundamentalis evolutione adsumta $\cos(2q-1)\varphi$ sortitur. Quare si, uti fas est, in nova serie condenda istarum partium summam pro uno habeamus coefficiente, fiet ipsius $\cos(2q-1)\varphi$ coefficiens seriei aequalis, cuius terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{2q-2}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q-1)} n^{2q-1}$$

et generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q+2h-2}}\,{}^{2q+2h-1}\mathfrak{B}^{(2q+h-1)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h-1)}\,n^{2q+2h-1}.$$

C) Eadem ratione lex coefficientis in cosinum multipli alicuius paris cadentis, v. g. in $\cos 2q\varphi$, eruitur. In solis enim potestatibus ipsius $\cos\varphi$ paribus, inde ab illa, cuius exponens est $2q$, eiusmodi multipli cosinus occurrit. Quare seriei, qua coefficiens ipsius $\cos 2q\varphi$ exprimitur, terminus initialis ex eo seriei fundamentalis membro, quo $\cos\varphi^{2q}$ continetur, i. e. ex ${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q)}n^{2q}\cos\varphi^{2q}$, et quidem ex huius termino q^{to} sumetur, fietque (cum sit $\cos\varphi^{2q}$ term. q^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q-1}}\,{}^{2q}\mathfrak{B}^{(2q)}\cos 2q\varphi = \frac{1}{2^{2q-1}}\cos 2q\varphi) \qquad = \frac{1}{2^{2q-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q)}\,n^{2q}.$$

Generatim ex h^{to} post hoc primum seriei fundamentalis membro pari, adeoque ex quantitate ${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h)}n^{2q+2h}\cos\varphi^{2q+2h}$ proveniet coefficientis, ad $\cos 2q\varphi$ pertinentis, pars h^{ta}. Est autem ipsius $\cos\varphi^{2q+2h}$, si evolvatur, terminus q^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q+2h-1}}\,{}^{2q+2h}\mathfrak{B}^{(2q+h)}\cos 2q\varphi.$$

Sic igitur provenit coefficientis, ad $\cos 2q\varphi$ pertinentis terminus post primum h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2q+2h-1}}\,{}^{2q+2h}\mathfrak{B}^{(2q+h)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h)}\,n^{2q+2h}.$$

D) Perfectum revera est negotium propositum. Non solum enim seriei ex $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$, dum pro quavis potestate series cosinuum multiplorum substituitur, rite ordinatae terminus initialis (cf. A), verum etiam pro utroque genere terminorum, qui in illa occurrere possunt, quorum alteri continent cosinum multipli alicuius imparis, $\cos(2q-1)\varphi$ (cf. B), alteri cosinum multipli alicuius paris $\cos 2q\varphi$ (conf. C), debiti coefficientis terminus initialis et generalis rite exhibitus est. Sed haec delineatio legis inventae contrahitur observatione prorsus eandem esse legem, quae in coefficientibus cosinuum parium, et quae in imparium valet. Quod sic perspicitur. Erat coefficientis ad $\cos(2q-1)\varphi$ pertinentis terminus initialis

$$\frac{1}{2^{2q-2}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q-1)}\,n^{2q-1},$$

terminus generalis h^{tus}

$$\frac{1}{2^{2q+2h-2}}\,{}^{2q+2h-1}\mathfrak{B}^{(2q+h-1)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h-1)}\,n^{2q+2h-1}.$$

Sit in hac expressione $(2q-1)=r$, habebimus hac substitutione ipsius $\cos r\varphi$ (existente r impari) coefficientem ita constitutum, ut sit eius terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r)}\,n^{r},$$

terminus h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{r+2h-1}}\,{}^{r+2h}\mathfrak{B}^{(r+h)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r+2h)}\,n^{r+2h}.$$

Erat porro coefficientis ad $\cos 2q\varphi$ pertinentis terminus initialis

$$\frac{1}{2^{2q-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q)}\,n^{2q}, \qquad h^{\text{tus}} = \frac{1}{2^{2q+2h-1}}\,{}^{2q+2h}\mathfrak{B}^{(2q+h)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2q+2h)}\,n^{2q+2h}.$$

Sit eadem ratione $2q=r$, veniet hac substitutione pro coefficiente ipsius $\cos r\varphi$ (existente r pari) expressio ita comparata, ut sit eius terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r)}\,n^{r},$$

generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{r+2h-1}}\,{}^{r+2h}\mathfrak{B}^{(r+h)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r+2h)}\,n^{r+2h}.$$

Identitas expressionum, quas, sive par sit sive impar assumtus r, pro coefficiente ipsius $\cos r\varphi$ adipiscimur, identitatem legis arguit, quam igitur, pro omnibus ipsius $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ terminis unam eandemque, concinnius finitima hac formula designabimus.

Est igitur quantitas nostra $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ seriei aequalis, quae sic procedit, ut sit

$$A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi + \cdots\cdot + A^{(r)}\cos r\varphi + \cdots$$

ea coefficientium lege, ut initialis A aequetur seriei, cuius terminus initialis $=1$, generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\,.\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}\,n^{2h};$$

cuius coefficiens indefinitus r^{tus} $A^{(r)}$ contineatur serie, cuius terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r)}\,n^{r};$$

coefficiens termini in eadem serie h^{ti}

$$= \frac{1}{2^{r+2h-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r+2h)}\,.\,{}^{r+2h}\mathfrak{B}^{(r+h)}\,n^{r+2h}.$$

Sic per coefficientes binomiales brevissime exprimi posse videtur lex complicatissima. Licet enim, evolutis, ut fieri potest, in producta his coefficientibus, factores alterius nonnulli tollantur ab alterius factoribus, tamen expressio finitima longe prolixior fit, ac prior fuerat. Sic enim, ut facto rei veritas comprobetur, brevissime exhibetur illa ratione coefficientis indefiniti r^{ti} terminus generalis h^{tus}

$$\frac{\nu.(\nu-1)\ldots(\nu-(r+2h-1))}{1.2^2.3^2\ldots h^2}\cdot\frac{1}{(h+1)(h+2)\ldots(h+r)}\,\frac{1}{2^{r+2h-1}}\,n^{r+2h}.$$

Adnotatio. Eiusmodi formulam sortietur, qui ex seriebus pro coefficientibus aliquot initialibus ab Eulero *) propositis legem generalem abstrahere velit. Licet via, quam ad scrutandam legem istam indicat Auctor Illustris, ad obtinendas series iamiam expositas minus directa ac facilis videatur, alio tamen respectu praeclara, et minime negligenda videtur. Omne artificium in eo consistit, ut ficta pro quantitate $(1+n\cos\varphi)^\nu$ serie

$$A+A^{(1)}\cos\varphi+A^{(2)}\cos 2\varphi+\ldots.$$

per differentiationem eruatur scala recursionis, qua istius coefficientes a se invicem pendent. Quae, cum tantummodo tripartita sit, per binos quosvis antecedentes coefficientem quemvis exhibet, ut igitur, modo priores bini finiti fuerint, ceteri omnes forma finita exhiberi queant. Quae mutua coefficientium relatio, licet ex seriebus iamiam inventis erui possit, facilius tamen artificio Euleriano evincitur.

7. Sit, ut antea

$$(1+n\cos\varphi)^\nu=A+A^{(1)}\cos\varphi+A^{(2)}\cos 2\varphi+\ldots.+A^{(h)}\cos h\varphi+\ldots$$

Sumtis ab utraque parte logarithmorum differentialibus, habebitur, remoto divisione ipso $d\varphi$

$$\frac{\nu n\sin\varphi}{1+n\cos\varphi}=\frac{A^{(1)}\sin\varphi+2A^{(2)}\sin 2\varphi+3A^{(3)}\sin 3\varphi+\cdots+hA^{(h)}\sin h\varphi+\cdots}{A+A^{(1)}\cos\varphi+A^{(2)}\cos 2\varphi+\cdots+A^{(h)}\cos h\varphi+\cdots}$$

α) Sublatis multiplicando utrimque divisoribus habetur ex una parte

$$\nu n\sin\varphi(A+A^{(1)}\cos\varphi+A^{(2)}\cos 2\varphi+\ldots.+A^{(h)}\cos h\varphi+A^{(h+1)}\cos(h+1)\varphi$$
$$+A^{(h+2)}\cos(h+2)\varphi+\ldots.).$$

*) Euler l. c. Probl. 36.

Quae series, ducta in factorem praefixum, ex formula nota, esse

$$\sin\varphi\cos\lambda\varphi=\tfrac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi-\tfrac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi,$$

solvetur in terminos, secundum sinus multiplorum procedentes. Quodlibet membrum praeter initiale et primum in bina sic dirimitur, quorum alterum ... maius, quam illud, ... membrum

... praebet seriei

... ta nanciscitur ... e evoluti pars

... oriri queant,

....)

ex qua forma, si explicetur, duplex series originem trahit. Altera est

$$A^{(1)}\sin\varphi+2A^{(2)}\sin 2\varphi+\ldots.+(h+1)A^{(h+1)}\sin(h+1)\varphi+\ldots.$$

nullo negotio prodiens.

Sic per coefficientes binomiales brevissime exprimi posse videtur lex complicatissima. Licet enim, evolutis, ut fieri potest, in producta his coefficientibus, factores alterius nonnulli tollantur ab alterius factoribus, tamen expressio finitima longe prolixior fit, ac prior fuerat. Sic enim, ut facto rei veritas comprobetur, brevissime exhibetur illa ratione coefficientis indefiniti r^{ti} terminus generalis h^{tus}

A d
tibus
velit.
ad ob
tamen
eo co

per d
vicem
cedent
rint,
relatio
EULER
7

Sumti
vision

α)

$$\nu n \sin\varphi \,(A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi + \dots + A^{(h)}\cos h\varphi + A^{(h+1)}\cos(h+1)\varphi$$
$$+ A^{(h+2)}\cos(h+2)\varphi + \dots).$$

*) EULER l. c. Probl. 36.

Quae series, ducta in factorem praefixum, ex formula nota, esse

$$\sin\varphi\cos\lambda\varphi = \tfrac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi - \tfrac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi,$$

solvetur in terminos, secundum sinus multiplorum procedentes. Quodlibet membrum praeter initiale et primum in bina sic dirimitur, quorum alterum multiplum proxime minus, alterum vero multiplum proxime maius, quam illud, cuius cosinum continet, quod dirimitur, sortietur. Sic v. g. membrum

$$\nu n \cdot \sin\varphi\, A^{(2)}\cos 2\varphi$$

praebet

$$-\nu\frac{nA^{(2)}}{2}\sin\varphi + \nu\frac{nA^{(2)}}{2}\sin 3\varphi;$$

quorum primum, adiectum illi, quod ex initiali gignitur $\nu n A\sin\varphi$, praebet seriei evolutae terminum initialem

$$= \left(\nu n A - \nu\frac{nA^{(2)}}{2}\right)\sin\varphi.$$

Generatim si quaeram coefficientem, quem in serie evoluta nanciscitur $\sin(h+1)\varphi$; soli sunt in data termini $\nu n A^{(h)}\sin\varphi\cos h\varphi$ (eiusque evoluti pars prior

$$+\nu\frac{nA^{(h)}}{2}\sin(h+1)\varphi)$$

ac $\nu n . A^{(h+2)}\sin\varphi\cos(h+2)\varphi$ (huius vero evoluti pars posterior

$$-\nu\frac{nA^{(h+2)}}{2}\sin(h+1)\varphi),$$

ex quibus membra, requisitum continentia ipsius φ multiplum, oriri queant, estque adeo in hac serie ipsius $\sin(h+1)\varphi$ coefficiens completus

$$= \nu\frac{n . A^{(h)}}{2} - \nu\frac{nA^{(h+2)}}{2}.$$

β) Ex altera vero parte habebitur

$$(1+n\cos\varphi)(A^{(1)}\sin\varphi + 2A^{(2)}\sin 2\varphi + \dots + hA^{(h)}\sin h\varphi + \dots)$$

ex qua forma, si explicetur, duplex series originem trahit. Altera est

$$A^{(1)}\sin\varphi + 2A^{(2)}\sin 2\varphi + \dots + (h+1)A^{(h+1)}\sin(h+1)\varphi + \dots$$

nullo negotio prodiens.

Altera vero

$$n\cos\varphi\,(A^{(1)}\sin\varphi + 2A^{(2)}\sin 2\varphi + \cdots + hA^{(h)}\sin h\varphi + (h+1)A^{(h+1)}\sin(h+1)\varphi + \cdots),$$

ut cum priore in unam summam conflari possit, cum in singulis terminis productum ex $\cos\varphi$ in sinum multipli alicuius ipsius φ contineat, ex nota formula

$$\cos\varphi\sin\lambda\varphi = \tfrac{1}{2}\sin(\lambda+1)\varphi + \tfrac{1}{2}\sin(\lambda-1)\varphi,$$

mutationem subeat necesse est. Sic in ista membrum, quo $\sin\varphi$ contineatur, ex termino

$$n\cos\varphi\,.\,2A^{(2)}\sin 2\varphi$$

procedens, fit $n\,.\,A^{(2)}\sin\varphi$. Si generatim ex illa quaesiveris membra, quibus $\sin(h+1)\varphi$ contineatur, sumendus terminus

$$hA^{(h)}\sin h\varphi\,.\,n\cos\varphi$$

(eiusque pars prior

$$\frac{nhA^{(h)}}{2}\sin(h+1)\varphi)$$

cum termino

$$(h+2)A^{(h+2)}\sin(h+2)\varphi\,.\,n\cos\varphi$$

(ex hoc autem evoluto pars posterior

$$\frac{n(h+2)A^{(h+2)}}{2}\sin(h+1)\varphi);$$

quo facto evadit ipsius $\sin(h+1)\varphi$ in serie quaesita coefficiens

$$\frac{nhA^{(h)}}{2} + \frac{n(h+2)A^{(h+2)}}{2}.$$

γ) Iam vero, cum series ab una parte (α) aequalis sit seriebus ab altera positis (β), coefficientes homologi, i. e. hoc loco in eiusdem anguli sinum ducti aequales sint oportet. Sic est ex una parte ipsius $\sin\varphi$ coefficiens

$$= \nu nA - \nu\frac{nA^{(2)}}{2}$$

ex altera autem $A^{(1)} + nA^{(2)}$. Quibus aequatis habebitur:

$$\nu nA - \nu\frac{nA^{(2)}}{2} = A^{(1)} + nA^{(2)}, \qquad \text{unde} \qquad A^{(2)} = \frac{2(\nu nA - A^{(1)})}{(\nu+2)n}.$$

Generalibus via etiam hic iam strata est. Si enim ab utraque parte, quae in $\sin(h+1)\varphi$ ducta reperiuntur, aequalia, uti fas est, ponantur, eveniet:

$$\frac{\nu nA^{(h)}}{2} - \frac{\nu nA^{(h+2)}}{2} = (h+1)A^{(h+1)} + \frac{nhA^{(h)}}{2} + \frac{n(h+2)A^{(h+2)}}{2}.$$

Soluta aequatione habebitur

$$A^{(h+2)} = \frac{n(\nu-h)A^{(h)} - 2(h+1)A^{(h+1)}}{n(\nu+h+2)},$$

qua formula generali, excepto, quod veniret pro $h = 0$, $A^{(2)}$, antea iam singulari disquisitione inventa, continetur lex cuiuslibet coefficientis in serie nostra fictitia, quatenus nimirum ille per binos antecedentes facili eruitur calculo. Sic, ut exemplum adsit

$$A^{(2)} = \frac{2(\nu nA - A^{(1)})}{n(\nu+2)}; \qquad A^{(3)} = \frac{n(\nu-1)A^{(1)} - 4A^{(2)}}{n(\nu+3)};$$

$$A^{(4)} = \frac{n(\nu-2)A^{(2)} - 6A^{(3)}}{n(\nu+4)}; \quad \text{etc.}$$

δ) Fieri autem potest, existente ν numero aliquo negativo, ut coefficiens aliquis, evanescente denominatore, non definiatur; tunc ad series infinitas ante exhibitas recurrendum est. Idem hoc fieri oportet in coefficientibus binis prioribus A et $A^{(1)}$, quos ut cognitos scala recursionis iamiam supponit. Potest vero singulari artificio $A^{(1)}$ per A exhiberi. Erat enim

$$A = 1 + \cdots + \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}\,.\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\,n^{2h} + \cdots,$$

$$A^{(1)} = {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(1)}\,n + \cdots + \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h+1)}\,.\,{}^{2h+1}\mathfrak{B}^{(h+1)}\,n^{2h+1} + \cdots.$$

Est, si sumamus $2nA + A^{(1)}$, huius seriei terminus initialis

$$= ({}^{\nu}\mathfrak{B}^{(1)} + 2)\,n = (\nu+2)\,n,$$

generalis h^{tus}

$$2n\cdot\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}\,.\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\,n^{2h} + \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h+1)}\,.\,{}^{2h+1}\mathfrak{B}^{(h+1)}\,n^{2h+1},$$

qui, cum sit

$${}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h+1)} = {}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}\cdot\frac{\nu-2h}{2h+1} \qquad \text{et} \qquad {}^{2h+1}\mathfrak{B}^{(h+1)} = {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\cdot\frac{2h+1}{h+1},$$

sic contrahitur

$$\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}\,.\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\left(2 + \frac{\nu-2h}{2h+1}\cdot\frac{2h+1}{h+1}\right)n^{2h+1}$$

sive brevius

$$= \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}\,.\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\frac{\nu+2}{h+1}n^{2h+1}.$$

Sumatur porro, posita n variabili, $\int A n\,\mathrm{d}n$, cuius terminus initialis $= \frac{1}{2} nn$, terminus generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}\,.\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\frac{1}{2h+2}n^{2h+2}.$$

Quae nova series, si per

$$\frac{2(\nu+2)}{n}$$

multiplicetur, dabit initialem $= (\nu+2)n$, generalem h^{tum}

$$= \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}\,.\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\frac{\nu+2}{h+1}n^{2h+1}.$$

Consentientibus igitur ab utraque parte terminis, fit

$$2n\cdot A + A^{(1)} = \frac{2\cdot(\nu+2)}{n}\int A n\,\mathrm{d}n,$$

sumto sine addita constante integrali. Fluit inde, esse

$$A^{(1)} = \frac{2\cdot(\nu+2)}{n}\int A n\,\mathrm{d}n - 2n\cdot A.$$

Hac igitur formula $A^{(1)}$ ad inventam A reducitur, atque haec sola restat ex genesi seriei ipsius, ut antea factum est, derivanda.

8. Confectis quae in problemate generalissime proposito sperari poterant, superest, ut ad casus speciales animum advertamus; in illis enim contrahere formulas universales nonnunquam licet. Cuius rei exemplum praebet casus, quo est ν numerus integer positivus. Tunc enim quaelibet serierum, antea ad coefficientes ipsius $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ exprimendos inventarum, cum coefficientes binomiales ad exponentem ν pertinentes, suo ordine quilibet, contineant, abrumpatur necesse est, et finita evadit pro quavis expressio. Simili ratione eo casu, quo ν est numerus integer negativus, ad expressiones finitas singulorum coefficientium pervenire licet. Cum ad hunc casum formulae usus plurimum revocetur, e re erit in illo enucleando paulum morari. Artificium, quo in hac disquisitione opus est, duabus absolvitur partibus; prima, ut pro coefficientibus, existente $\nu = -1$, eruantur expressiones finitae; altera, ut via monstretur, qua, concessis ipsius $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ coefficientibus, potestatis uno gradu inferioris

$(1+n\cos\varphi)^{\nu-1}$ coefficientes derivari queant. Sic enim ab ipsa $(1+n\cos\varphi)^{-1}$ transire licebit ad potestates negativas altiores, vitatis seriebus pro singulo coefficiente infinitis.

α) Ad scrutandam, cui subiecta est, posito $\nu = -1$, coefficiens initialis A, legem, in expressione indefinita termini eiusdem h^{ti} ponamus $\nu = -1$, provenietque, ob

$${}^{-1}\mathfrak{B}^{(2h)} = 1, \qquad \text{ille} \qquad = \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}n^{2h}.$$

Est autem

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)} &= \frac{1}{2^{2h}}\frac{2h\,.\,(2h-1)\ldots\,(h+1)}{1\,.\,2\ldots h}\\ &= \frac{1}{2^{2h}}\cdot\frac{2h\,.\,(2h-1)\ldots 1}{1\,.\,2\ldots h}\cdot\frac{1}{h\,.\,(h-1)\ldots 1}\\ &= \frac{1}{2^{2h}}\frac{(2h-1)(2h-3)\ldots 1}{1\,.\,2\ldots h}\cdot\frac{2h\,.\,(2h-2)\ldots 2}{h\,.\,(h-1)\ldots 1}\\ &= \frac{1}{2^{h}}\cdot\frac{(2h-1)(2h-3)\ldots 1}{1\,.\,2\ldots h},\end{aligned}$$

fitque his transformationibus terminus ille h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{h}}\frac{(2h-1)\,.\,(2h-3)\ldots 1}{1\,.\,2\ldots h}\cdot n^{2h}.$$

Quare, cum haec expressio sit manifesto quantitatis $(1-nn)^{-\frac{1}{2}}$, in seriem evolutae, terminus h^{tus}, sequitur, fore ipsam A, casu quo $\nu = -1$,

$$= (1-nn)^{-\frac{1}{2}}$$

β) Coefficiens post initialem primus $A^{(1)}$ definitur relatione ante demonstrata (7, δ)

$$A^{(1)} = \frac{2\,.\,(\nu+2)}{n}\int A n\,\mathrm{d}n - 2n\,.\,A,$$

quae hic, ob $\nu = -1$, mutatur in

$$A^{(1)} = \frac{2}{n}\int A n\,\mathrm{d}n - 2nA = \frac{2}{n}\int(1-nn)^{-\frac{1}{2}}\,n\,\mathrm{d}n - 2n(1-nn)^{-\frac{1}{2}}.$$

Peracta integratione (sic instituenda, ut cum n et integrale evanescat) habebitur

$$A^{(1)} = -\frac{2}{n}(1-nn)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{n} - 2n(1-nn)^{-\frac{1}{2}},$$

sive brevius

$$A^{(1)} = \frac{2}{n}\left(1-(1-nn)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

γ) His praecognitis facile coefficientium reliquorum expressiones finitae per scalam recursionis ante erutam deducuntur. Erat illa

$$A^{(h+2)} = \frac{n(\nu-h)A^{(h)} - 2(h+1)A^{(h+1)}}{n(\nu+h+2)}$$

adeoque h. l. ob $\nu = -1$

$$A^{(h+2)} = \frac{-n(h+1)A^{(h)} - 2(h+1)A^{(h+1)}}{n(h+1)}$$

sive

$$A^{(h+2)} = -\left(A^{(h)} + \frac{2}{n}A^{(h+1)}\right).$$

Si per hanc scalam calculos instituas, occurret lex simplicissima *), fore

$$A^{(h)} = (-1)^h \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^h.$$

Ut illa demonstratione firmetur, sumamus valere ipsam pro coefficientibus usque ad h^{tum}, eritque per scalam recursionis

$$\begin{aligned} A^{(h+1)} &= (-1)^h \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{h-1} \\ &\quad + (-1)^{h+1}\frac{2}{n}\frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^h \end{aligned}$$

sive, separato factore communi

$$(-1)^h \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{h-1}\left\{1 - \frac{2}{n}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)\right\}.$$

Est factor, uncinis inclusus

$$= \frac{nn-2+2\sqrt{(1-nn)}}{nn} = -\frac{(1-nn)-2\sqrt{(1-nn)}+1}{nn} = -\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2,$$

quo adiecto habebitur

$$\begin{aligned} A^{(h+1)} &= (-1)^h \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{h-1} \cdot -\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^2 \\ &= (-1)^{h+1} \cdot \frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{h+1}, \end{aligned}$$

unde legis universalitas perspicitur.

---

*) Falsa est, vitio forsan typothetae, legis huius apud EULERUM l. c. § 275 expressio.

Pars prima negotii propositi confecta est, circumscriptis formula finita ipsius $(1+n\cos\varphi)^{-1}$ coefficientibus. Restat altera, ut videamus, qua ratione a potestatis alicuius coefficientibus datis transire liceat ad quaesitos potestatis proxime inferioris.

δ) Facillime hoc negotium ita perficitur, ut in expressionibus, quibus tum coefficiens seriei indefinitae pro $(1+n\cos\varphi)^\nu$ initialis, tum generalis exhibentur, in locum ipsius ν substituatur $\nu-1$, et tunc eliciatur resultantium cum anterioribus relatio.

I. Erat (6) ipsius coefficientis initialis A, in seriem evoluti, terminus initialis 1, qui igitur substitutione non adficitur. Erat generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\, n^{2h},$$

qui, substituendo $\nu-1$ loco ν, mutatur in:

$$\frac{1}{2^{2h}}\,{}^{\nu-1}\mathfrak{B}^{(2h)} \cdot {}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\, n^{2h}.$$

Manifesto igitur nascetur ex priore posterior, si in

$$\frac{\nu-2h}{\nu} = 1 - \frac{2h}{\nu}$$

ducatur ille; adeoque, cum idem sit, terminum generalem ipsius A h^{tum} in $\frac{2h}{\nu}$ ducere, ac eundem, secundum n differentiatum, per $\nu\, dn$ dividere et per n multiplicare, habebimus, si vocetur B ipsius $(1+n\cos\varphi)^{\nu-1}$ terminus initialis, generatim

$$B = A - \frac{n\, {}^{n}dA}{\nu\, dn}.$$

II. Erat coefficientis indefiniti ad $(1+n\cos\varphi)^\nu$ pertinentis $A^{(r)}$ terminus initialis

$$\frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r)}\, n^r,$$

fit itaque, si vocetur $B^{(r)}$ qui, ad $(1+n\cos\varphi)^{\nu-1}$ pertinens, elicitur substituendo in istum $\nu-1$ loco ν, huius terminus initialis

$$\frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{\nu-1}\mathfrak{B}^{(r)}\, n^r.$$

Hic vero, cum obtineatur illum per $\frac{\nu-r}{\nu}$ multiplicando sive, quod idem est, per $\left(1-\frac{r}{\nu}\right)$, et multiplicatio per $\frac{r}{\nu}$ ita confici possit, ut ille, secundum n differentiatus, denuo in n ducatur et per $\nu\,\mathrm{d}n$ dividatur, relationem sequentem praebet: esse $B^{(r)}$ term. init.

$$= A^{(r)}\text{term. init.} - \frac{n\,\mathrm{d}A^{(r)}\text{term. init.}}{\nu\,\mathrm{d}n}.$$

Prorsus eadem est relatio, quae in terminis generalibus obtinet. Est nimirum ipsius $A^{(r)}$ terminus h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{r+2h-1}}\,{}^{r+2h}\mathfrak{B}^{(r+h)}\cdot{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(r+2h)}\,n^{r+2h}.$$

Fit igitur, mutato ν in $\nu-1$, ipsius $B^{(r)}$ terminus h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{r+2h-1}}\,{}^{r+2h}\mathfrak{B}^{(r+h)}\cdot{}^{\nu-1}\mathfrak{B}^{(r+2h)}\,n^{r+2h},$$

qui solo factore

$$\frac{\nu-(r+2h)}{\nu} = 1-\frac{r+2h}{\nu}$$

ad priorem expressionem adiecto, ex ista sponte procedit. Cum autem idem sit, ipsius $A^{(r)}$ terminum h^{tum} per $\frac{r+2h}{\nu}$ multiplicare, ac eundem, secundum n differentiatum, per $\nu\,\mathrm{d}n$ dividere et in n denuo ducere, habebimus

$$B^{(r)}\text{term.}\,h = A^{(r)}\text{term.}\,h - \frac{n\,\mathrm{d}A^{(r)}\text{term.}\,h}{\nu\,\mathrm{d}n},$$

quae relatio, cum pro omnibus sine discrimine membris obtineat, praebet aequationem

$$B^{(r)} = A^{(r)} - \frac{n\,\mathrm{d}A^{(r)}}{\nu\,\mathrm{d}n}.$$

ε) Per hanc igitur scalam relationis $(1+n\cos\varphi)^{\nu-1}$ ad $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ ita reducitur, ut ex istius coefficientibus, qui in hanc expressionem cadant, differentiatione facillime eliciantur. Licet adeo, cum ipsius $(1+n\cos\varphi)^{-1}$ coefficientes formulis finitis circumscripti in potestate sint, ad exponentes negativos maiores sensim adscendere, eoque omnino potestates negativas easque integras coefficientibus finitis exhibere.

Non tamen series infinitae, pro coefficientibus hisce ante inventae, inutiles sunt. Est iis locus, simulac ν fuerit numerus fractus, quo casu, ex EULERI iudicio, in his speculationibus gravissimo, formulae finitae nulla ratione sperari

possunt. Tunc igitur necessarium est, ut sit n numerus fractus, isque verus, sin minus series omnes, cum divergant, usu prorsus destituuntur.

9. Hucusque, in sola evolutione seriei $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ morati, integrationem formulae propositae $\mathrm{d}\varphi(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ negleximus. Illa autem, inventa serie ipsa, nullo absolvitur negotio. Si enim fuerit:

$$(1+n\cos\varphi)^{\nu} = A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi + \cdots + A^{(r)}\cos r\varphi + \cdots$$

fiet

$$\int\mathrm{d}\varphi(1+n\cos\varphi)^{\nu} = A\varphi + A^{(1)}\sin\varphi + \tfrac{1}{2}A^{(2)}\sin 2\varphi + \cdots + \frac{1}{r}A^{(r)}\sin r\varphi + \cdots,$$

cuius seriei coefficientes ex praecedentibus noti sunt.

10. Subiunxit in fine Cap. VI EULERUS integrationem formulae

$$\mathrm{d}\varphi\log(1+n\cos\varphi),$$

quam ut priorem ita perficit, ut peculiari artificio $\log(1+n\cos\varphi)$ in seriem secundum cosinus angulorum multiplorum evolvat, antequam integrationem ipsam adgrediatur. Revera autem haec series, ut casus specialis, iam in illa continetur, quam pro $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ invenimus. Opus est in hoc negotio nota propositione: esse

$$\log(1+x) = \frac{(1+x)^0-1}{0},$$

cui consentienter

$$\log(1+n\cos\varphi) = \frac{(1+n\cos\varphi)^0-1}{0}.$$

In expressione igitur generali pro $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ coefficiens initialis unitate mulctetur, dein in illo et ceteris omnibus ponatur $\nu=0$, et dividatur quivis per ipsam 0.

α) Est ipsius A, coefficientis initialis ad seriem $(1+n\cos\varphi)^{\nu}$ pertinentis, et termino suo initiali, qui est $=1$, iamiam mulctati, generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2h}}\cdot{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\cdot{}^{\nu}\mathfrak{B}^{(2h)}\,n^{2h}.$$

Quodsi in illo ponatur $\nu=0$, fiet

$$\frac{1}{2^{2h}}\cdot\frac{0.(-1).(-2)\cdots(-2h+1)}{1.2\ldots.2h}\cdot{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}\,n^{2h},$$

quo per 0 diviso restat

$$\frac{1}{2^{2h}}(-1)^{2h-1}\frac{1.2\ldots.(2h-1)}{1.2\ldots.\;2h}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}n^{2h} = (-1)^{2h-1}\frac{1}{2^{2h}}\cdot\frac{1}{2h}\,{}^{2h}\mathfrak{B}^{(h)}n^{2h}$$
$$= \frac{1}{2^{2h}}(-1)^{2h-1}.\frac{(2h-1)(2h-2)\ldots(h+1)}{1.2\ldots h}n^{2h}$$
$$= \frac{1}{2^{h}}(-1)^{2h-1}\frac{1.3.5\ldots(2h-1)}{1.2.3\ldots.h.}\frac{n^{2h}}{2h}$$

sive cum $(-1)^{2h-1}$, quidquid fuerit h, sit negativum

$$= -\frac{1}{2^h}\frac{1.3.5\ldots(2h-1)}{1.2.3\ldots h}\frac{n^{2h}}{2h}.$$

Differentiata hac expressione secundum n, provenit, abiecto dn,

$$-\frac{1}{2^h}\frac{1.3.5..(2h-1)}{1.2.3\ldots h}n^{2h-1},$$

quae est manifesto quantitatis

$$\frac{-(1-nn)^{-\frac{1}{2}}}{n}$$

terminus h^{tus}. Quare, cum hic non adsit, qui in illa terminus initialis $\frac{-1}{n}$, illa mulctata formulae nostrae aequalis fiet, adeoque si ponatur ipsius $\log(1+n\cos\varphi)$ coefficiens initialis $= C$ habebitur

$$\frac{n\;{}^{n}\mathrm{d}C}{\mathrm{d}n} = -(1-nn)^{-\frac{1}{2}}+1.$$

Qua aequatione, sic expressa

$${}^{n}\mathrm{d}C = \frac{\mathrm{d}n}{n}(1-(1-nn)^{-\frac{1}{2}}),$$

fit integrando

$$C = \log n - \log\frac{1-(1-nn)^{\frac{1}{2}}}{n} + \text{const};$$

est vero, cum evanescere debeat posito $n = 0$, expressio const. $= \log\frac{1}{2}$. Quare

$$C = \log\left(\frac{nn}{(1-\sqrt{1-nn})2}\right),$$

aut, si malis,

$$C = -\log\left(\frac{2(1-\sqrt{1-nn})}{nn}\right).$$

β) Coefficiens, qui initialem excipit, $C^{(1)}$ vocemus, ex scala relationis antea tradita inveniri potest. Est nimirum

$$C^{(1)}\cdot n = -2\int nn\,\mathrm{d}C + nn,$$

quo substituto et ad calculos revocato, fit

$$C^{(1)}n = 2(1-(1-nn)^{\frac{1}{2}}),$$

adeoque

$$C^{(1)} = 2\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}.$$

γ) Ceteros coefficientes ex scala relationis ante evicta una formula generali circumscribere licet, quae sic enuntiari potest, fore, si ipsius $\log(1+n\cos\varphi)$ in seriem evolutae coefficiens $h^{\text{tus}} = C^{(h)}$, hunc

$$= (-1)^{h+1}\frac{2}{h}\left(\frac{1-\sqrt{1-nn}}{n}\right)^h.$$

Sumamus, legem valere pro h primis, erit tunc ex scala generali, posito $\nu = 0$, (7, γ)

$$C^{(h+1)} = \frac{-n(h-1)C^{(h-1)} - 2h.C^{(h)}}{n(h+1)},$$

fit substituendo debitos valores

$$C^{(h+1)} = -\frac{n.(h-1)(-1)^h\frac{2}{h-1}\left(\frac{1-\sqrt{1-nn}}{n}\right)^{h-1} + 2h(-1)^{h+1}\frac{2}{h}\left(\frac{1-\sqrt{1-nn}}{n}\right)^h}{n.(h+1)}$$

sive, separato factore communi

$$C^{(h+1)} = -\frac{(-1)^h 2\left(\frac{1-\sqrt{1-nn}}{n}\right)^{h-1}}{n(h+1)}\left(n - \frac{2(1-\sqrt{1-nn})}{n}\right).$$

Est vero factor uncinis inclusus

$$= \frac{nn-2+2\sqrt{1-nn}}{n} = -\frac{(1-\sqrt{(1-nn)})^2}{n}.$$

Si igitur alter per illum revera multiplicetur, fit

$$C^{(h+1)} = (-1)^{h+2}\frac{2}{h+1}\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right)^{h+1},$$

unde perspicitur legis generalitas.

δ) Est igitur, si ponatur

$$\left(\frac{1-\sqrt{(1-nn)}}{n}\right) = a,$$

$$\log(1+n\cos\varphi) = -\log\frac{2a}{n} + \tfrac{2}{1}a\cos\varphi - \tfrac{2}{2}a^2\cos 2\varphi + \\ + \tfrac{2}{3}a^3\cos 3\varphi + \ldots\ldots + (-1)^{h+1}\tfrac{2}{h}a^h\cos h\varphi + \ldots\ldots$$

Adnotatio. Formula haec ad functionum trigonometricarum logarithmos obtinendos summi usus est.

Sit enim $n = 1$, fiet $a = 1$, et habebitur

$$\log(1+\cos\varphi) = -\log 2 + \tfrac{2}{1}\cos\varphi - \tfrac{2}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{2}{3}\cos 3\varphi - \tfrac{2}{4}\cos 4\varphi + \ldots,$$

quae series, cum sit $1+\cos\varphi = 2\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2$, dat quoque

$$\log\cos\tfrac{1}{2}\varphi = -\log 2 + \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 4\varphi + \ldots$$

adeoque, substituendo 2φ in locum ipsius φ

$$\log\cos\varphi = -\log 2 + \cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 4\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 6\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 8\varphi + \ldots.$$

Similiter, si ponatur $n = -1$, ut fiat $a = -1$, habebitur

$$\log(1-\cos\varphi) = -\log 2 - \tfrac{2}{1}\cos\varphi - \tfrac{2}{2}\cos 2\varphi - \tfrac{2}{3}\cos 3\varphi - \tfrac{2}{4}\cos 4\varphi - \ldots.$$

adeoque, cum sit $1-\cos\varphi = 2\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2$,

$$\log\sin\tfrac{1}{2}\varphi = -\log 2 - \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 2\varphi - \tfrac{1}{3}\cos 3\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 4\varphi - \ldots.$$

aut, ut antea, 2φ in locum ipsius φ substituendo

$$\log\sin\varphi = -\log 2 - \cos 2\varphi - \tfrac{1}{2}\cos 4\varphi - \tfrac{1}{3}\cos 6\varphi - \tfrac{1}{4}\cos 8\varphi - \ldots$$

Sequitur ex his, cum sit $\log\operatorname{tang}\varphi = \log\sin\varphi - \log\cos\varphi$

$$\log\operatorname{tang}\varphi = -2(\cos 2\varphi + \tfrac{1}{3}\cos 6\varphi + \tfrac{1}{5}\cos 10\varphi + \tfrac{1}{7}\cos 14\varphi + \ldots.)$$

et ex eodem fonte ceterarum functionum trigonometricarum logarithmi, licet per series non celeriter convergentes, habebuntur.

ε) Cum sit

$$\log(1+n\cos\varphi) = -\log\frac{2a}{n} + \tfrac{2}{1}a\cos\varphi - \tfrac{2}{2}a^2\cos 2\varphi + \tfrac{2}{3}a^3\cos 3\varphi - \ldots\ldots,$$

integratio formulae $\log(1+n\cos\varphi).\mathrm{d}\varphi$ in aperto est, fitque

$$\int \mathrm{d}\varphi \log(1+n\cos\varphi) = -\left(\log\frac{2a}{n}\right)\varphi + \tfrac{2}{1}a\sin\varphi - \tfrac{2}{4}a^2\sin 2\varphi + \tfrac{2}{9}a^3\sin 3\varphi - \ldots$$

Confectum est igitur, quatenus per series fieri potuit, negotium propositum.

Cognata est disquisitio, quam Ill. Klügel (de functione potentiali

$$(1-2x\cos\varphi+xx)^{-m}$$

in Commentat. Societatis huius Tom. XII) exhibuit. Forma, quam ille contemplatus est, abludit quidem ab illa, quae ducente Eulero in hac dissertatiuncula in censum vocata fuit, verum difficile non foret, alteram ex altera deducere. Ne igitur acta omnino egisse videar, moneam, omnem disquisitionem eum in finem a me institutam, ut serierum infinitarum tractationem per terminos generales nulla difficultate laborare et facilius saepe, ac artificia singularia, ad eruendas leges generales perducere, exemplo aliquo ostenderem. Non igitur in principali dissertatiunculae parte usus sum via, qua VV. Ill. Euler et Klügel incessere; in ceteris omnia ad expressiones generales revocare et demonstratione ubicunque munire conatus.

Corollarium.

11. Occurrere in Analysi altiore series, sive finitas, sive infinitas, quarum termini non unam eandemque legem primo obtutu sequi videntur, imprimis eiusmodi, in quibus termini indicis paris aliter ac imparis constructi sunt, notissimum est. Solent tunc singulari lege hi, singulari illi circumscribi. Praeter prolixitatem autem eiusmodi definitionum, inest illis aliquid contra naturam ac vim Analyseos. In eo enim ipso huius consistit dignitas, ut valores unius quantitatis, si eiusmodi fuerint, diversissimos sub una expressione generali comprehendat, et ex hac expressione cunctos derivare doceat. Sic, si in problemate aliquo geometrico solvendo plures una quantitate solutionem praestent, hae omnes in aequatione, qua datarum cum quaesita relationem circumscribimus, involutae reperiuntur. Simile quid ab expressionibus, quibus serierum termini generales sistuntur, postulari potest. Si fuerit igitur inter terminos pares et impares aliqua diversitas, ita comparata sit oportet, si perfecta fuerit, termini generalis formula, ut alios valores sumto pro termini indice numero indefinito pari, alios pro impari praebeat. Quod qua ratione praestari possit, iam in prooemio dissertatiunculae exposui. Est nimirum $(-1)^m$ existente m pari $= +1$, existente impari $= -1$; estque adeo

$$\frac{1-(-1)^m}{2} \text{ existente } m \text{ pari} = 0, \text{ existente impari} = 1$$
$$\frac{1-(-1)^{m+1}}{2} \quad - \qquad - = 1, \quad - \qquad - = 0$$

et sic per eiusmodi factorem adiectum quaesitum semper praestari poterit.

Luculentum, in quo adplicari potuisset hoc notandi genus, exemplum dissertatio ipsa praebet. Si nimirum potestas aliqua cosinus dati per cosinus multiplorum exhibenda sit, notum est aliam legem in serie pro potestatibus paribus, aliam pro imparibus servari. Videamus igitur, qua ratione haec discrepantia sub formulam unam generalem cogi queat.

Lex pro potestatibus paribus v. g. $\cos\varphi^{2m}$, ut antea demonstratum est, ita se habet, ut seriei, secundum cosinus multiplorum parium procedentis, terminus initialis sit

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\frac{{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)}}{2};$$

terminus generalis h^{tus}

$$= \frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+h)}\cos 2h\varphi.$$

Lex potestatum imparium, quarum termini solis multiplis imparibus adficiuntur, ita constituta est, ut sit seriei pro $\cos\varphi^{2m-1}$ terminus initialis

$$= \frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)}\cos\varphi,$$

terminus generalis h^{tus}

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+h)}\cos(2h+1)\varphi.$$

His expressionibus consentienter erit seriei pro $\cos\varphi^r$ (ubi r sine discrimine numerus par imparve esse potest) terminus initialis

$$\left(1-\frac{1-(-1)^{r+1}}{4}\right)\frac{1}{2^{r-1}}\cdot{}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^r}{4}\right)}\cos\frac{1-(-1)^r}{2}\varphi.$$

Sit enim $r = 2m$, fiet

$$\frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^{2m-1}},$$

atque cum sit index coefficientis binomialis

$$\tfrac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^r}{4} = m, \qquad {}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^r}{4}\right)}\cos\frac{1-(-1)^r}{2}\varphi = {}^{2m}\mathfrak{B}^{(m)},$$

ut antea.

Sit $r = 2m-1$; fiet

$$\frac{1}{2^{r-1}} = \frac{1}{2^{2m-2}},$$

et ob

$$\frac{1-(-1)^r}{4} = \frac{1-(-1)^{2m-1}}{4} = +\tfrac{1}{2},$$

$${}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^r}{4}\right)} = {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}(2m-1)+\frac{1}{2}\right)} = {}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m)},$$

tandem

$$\cos\frac{1-(-1)^r}{2}\varphi = \cos\frac{1-(-1)^{2m-1}}{2}\varphi = \cos\varphi.$$

Tandem factor praefixus fit, existente r numero impari, $= 1$, existente pari, $= 1-\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, uti fas est.

Similiter, dico fore ipsius $\cos\varphi^r$ terminum indefinitum h^{tum}

$$= \frac{1}{2^{r-1}}\,{}^{r}\mathfrak{B}^{\left(\frac{1}{2}r+\frac{1-(-1)^r}{4}+h\right)}\cos\left(2h+\frac{1-(-1)^r}{2}\right)\varphi.$$

Existente enim r pari $= 2m$, ob

$$\frac{1-(-1)^r}{2} = 0,$$

fit expressio

$$\frac{1}{2^{2m-1}}\,{}^{2m}\mathfrak{B}^{(m+h)}\cos 2h\varphi;$$

existente impari $= 2m-1$, cum sit tunc

$$\frac{1-(-1)^{2m-1}}{2} = 1,$$

fiet eadem

$$\frac{1}{2^{2m-2}}\,{}^{2m-1}\mathfrak{B}^{(m+h)}\cos(2h+1)\varphi,$$

ut oportet.

Ad vitandam in scribendo molestiam pro quantitate simplici

$$\frac{1-(-1)^r}{2}$$

signum unicum v. g. $= \alpha$, ut in analysi solet fieri, usurpari posset. Habetur tunc, contracta expressione

$$\cos\varphi^r = (1+\alpha)\frac{1}{2^r}\cdot {}^r\mathfrak{B}^{(\frac{1}{2}(r+\alpha))}\cos\alpha\varphi + \cdots + \frac{1}{2^{r-1}}\,\mathfrak{B}^{(\frac{1}{2}(r+\alpha)+h)}\cos(2h+\alpha)\varphi + \cdots,$$

atque sic binae series, quae primo adspectu diversissimae videbantur, sub una expressione, eaque satis simplici, comprehendi possunt.

BEMERKUNGEN.

Das Manuscript der vorliegenden »Dissertatiuncula« wurde 1893 von Herrn Prof. WILHELM MEYER (Göttingen) in den Acten der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen gefunden und ist von E. SCHERING mit einer Reihe erläuternder Bemerkungen in den »Göttinger Nachrichten« von 1893 No. 15 veröffentlicht. Es fehlt in der Urschrift der Name des Verfassers und ebenso auch eine Angabe über Ort und Zeit der Abfassung. Indessen beseitigte der Vergleich sonstiger Manuscripte von GAUSS mit der vorliegenden Handschrift jeden Zweifel, welcher sonst vielleicht an GAUSS' Autorschaft bestehen könnte.

Sachlich ist zu bemerken, dass GAUSS vermuthlich schon zu der Zeit, als er das Collegium Carolinum zu Braunschweig besuchte (1792 bis 1795), die Werke von LAGRANGE und EULER studirte. Es finden sich im Nachlass (wahrscheinlich aus dieser Zeit stammend) verschiedene Auszüge aus Werken von LAGRANGE und EULER, und darunter insbesondere solche aus EULERs Institutiones calculi integralis, Theil I Kapitel 6, an welches die Dissertatiuncula unmittelbar anknüpft.

Ist hiernach auch sachlich GAUSS' Verfasserschaft unzweifelhaft, so wird man gleichwohl die fast vollständige Abhängigkeit der ganzen Entwicklung von EULER nur mit der Annahme vereinigen können, dass die Entstehung der fraglichen Untersuchung entweder in den ersten Anfang der Göttinger Studienzeit von GAUSS (Herbst 1795 bis 1798) oder auch noch vor diese Zeit fällt. Es löst nämlich EULER die Aufgabe der Entwicklung von $(1+n\cos\varphi)^\nu$ in die Reihe

$$A + A^{(1)}\cos\varphi + A^{(2)}\cos 2\varphi + A^{(3)}\cos 3\varphi + \cdots$$

so, dass er nur A und $A^{(1)}$ direct angiebt, sich aber wegen der weiter folgenden Coefficienten auf eine Recursionsformel beruft, welche durch einen naheliegenden Kunstgriff gewonnen wird. Unter Vermeidung des letzteren giebt GAUSS auch die höheren Coefficienten $A^{(2)}, \ldots$ durch directe Betrachtung, reproducirt aber übrigens alle Ansätze und Weiterentwicklungen EULERs.

Die Citate auf KÄSTNER sprechen dafür, dass die definitive Abfassung der Dissertatiuncula in den Beginn der Göttinger Studienzeit fällt. Die gegen Ende von No. 10 genannte Abhandlung KLÜGELs gehört den mathematischen Commentationen der Göttinger Societät von 1793 und 94 an. Dieselben sind als Gesammtband allerdings erst 1796 ausgegeben; doch sind GAUSS die einzelnen Abhandlungen wahrscheinlich schon früher zugänglich gewesen.

Für die Annahme, dass die Entstehung der Dissertatiuncula spätestens Anfang 1796 anzusetzen ist, würde auch der Umstand sprechen, dass in dem Ende März 1796 beginnenden wissenschaftlichen Tagebuche keine Notiz über diese Abhandlung gefunden wird.

Eine Einzelbemerkung erfordert noch die Entwicklung unter Nr. 8, γ. Der Vorwurf eines Fehlers bei EULER ist nicht berechtigt; vielmehr hat sich GAUSS versehen, indem er bei der Berechnung der Gleichungen für $A^{(h)}$, $A^{(h+1)}$ rechter Hand den Factor $\frac{2}{\sqrt{(1-nn)}}$ übersah. Indem SCHERING in der von ihm veranstalteten Ausgabe diesen Factor zufügte, stellte er die Übereinstimmung mit EULER her. Der vorliegende Abdruck gibt gleichfalls die berichtigten Formeln.

FRICKE.

[BEWEIS EINES VON EULER AUFGESTELLTEN SATZES ÜBER EXACTE DIFFERENTIALAUSDRÜCKE.]

Supponendo $dW = V dx$, designante W functionem ipsarum x, y, p, q, r, s, erit

$$V = \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) + q\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right) + r\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right) + s\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right) + t\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right).$$

Hinc

$$N = \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{d\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)}{dx},$$

$$P = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right) + \frac{d\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right)}{dx},$$

$$Q = \left(\frac{\partial V}{\partial q}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial p}\right) + \frac{d\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)}{dx},$$

$$R = \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial q}\right) + \frac{d\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)}{dx},$$

$$S = \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{d\left(\frac{\partial W}{\partial s}\right)}{dx},$$

$$T = \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial W}{\partial s}\right).$$

Hinc sponte sequitur

$$S-\frac{dT}{dx}=\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right),$$

$$R-\frac{dS}{dx}+\frac{d^2T}{dx^2}=\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right),$$

$$Q-\frac{dR}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}-\frac{d^3T}{dx^3}=\left(\frac{\partial W}{\partial p}\right),$$

$$P-\frac{dQ}{dx}+\frac{d^2R}{dx^2}-\frac{d^3S}{dx^3}+\frac{d^4T}{dx^4}=\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right),$$

$$N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\text{etc.}=0.$$

Ex iisdem principiis theorema inversum nullo negotio demonstrare licet. (Sept. 1800.)

Den Beweis des Satzes, dass die Bedingungsgleichung

$$\left[N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\dots=0\right]$$

statthat, wenn Vdx ein vollständiges Differential ist, habe ich in meinem Exemplar von EULERS Integralrechnung [Band III, Seite 518] gegeben. Der Beweis des [umgekehrten] Satzes beruht auf folgenden Momenten.

Da der Ausdruck $N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\text{etc.}$ auf eine ganz bestimmte Art aus der Natur der Function V abgeleitet wird, so bezeichnen wir ihn durch fV, und eben so $P-\frac{dQ}{dx}+\frac{ddR}{dx^2}-\text{etc.}$ durch $f'V$ u. s. w.

Man setze $\int f'V\cdot dy=W^0$, so integrirt, dass bloss y als veränderlich betrachtet wird, und das vollständige Differential $dW^0=V^0dx$. Dann wird*)

$$\left.\begin{array}{l} f'V^0=f'V \\ fV^0=fV \end{array}\right\}\ \text{und daher}\ \begin{array}{l} f'(V-V^0)=0, \\ f(V-V^0)=0. \end{array}$$

Da nun

$$\frac{\partial(V-V^0)}{\partial y}=f(V-V^0)+\frac{df'(V-V^0)}{dx}$$

[gilt, so ist auch $\frac{\partial(V-V^0)}{\partial y}=0$] und $V-V^0$ enthält kein y.

*) Diese beiden Schlüsse hängen mit dem Beweise a. a. O. in EULER's Integralrechnung zusammen, wonach, W^0 statt W gesetzt, $f'V^0=\frac{\partial W^0}{\partial y}$ also $=f'V$ wird, und $fV^0=0$ also $=fV$.

Man setze ferner

$$\int f''(V-V^0)\,dp=W',$$

die Integration so gemeint, dass bloss p als variabel (d. i. x, q, r etc. als constant) betrachtet werden, und

$$dW'=V'dx.$$

Dann ist, weil W' kein y enthält,

$$fV'=0,\qquad f'V'=0,\qquad f''V'=f''(V-V^0),$$

also auch

$$f(V-V^0-V')=0,\qquad f'(V-V^0-V')=0,\qquad f''(V-V^0-V')=0,$$

und $V-V^0-V'$ wird weder y noch p enthalten.

Man setze ferner

$$\int f'''(V-V^0-V')\,dq=W''\qquad\text{und}\qquad dW''=V''dx,$$

so wird ebenso

$$f(V-V^0-V'-V'')=f'(V-V^0-V'-V'')$$
$$=f''(V-V^0-V'-V'')=f'''(V-V^0-V'-V'')=0,$$

und $V-V^0-V'-V''$ enthält weder y noch p noch q, sondern bloss x, r, s etc.

Ebenso enthält

$$V-V^0-V'-V''-V'''\quad\text{bloss } x, s, t,$$
$$V-V^0-V'-V''-V'''-V^{\text{IV}}\quad\text{bloss } x, t,$$
$$V-V^0-V'-\dots-V^{\text{V}}\quad\text{bloss } x.$$

Es sei nun

$$\int(V-V^0-V'-\dots-V^{\text{V}})\,dx=\Omega,$$

so ist

$$\int Vdx=\Omega+W^0+W'+W''+\dots+W^{\text{V}},$$

welches zu beweisen war.

BEMERKUNGEN ZU DEN BEIDEN VORSTEHENDEN FRAGMENTEN ÜBER EINEN EULERSCHEN SATZ.

Das hier von GAUSS behandelte EULERsche Theorem besagt folgendes: »Die Function $V(x, y, p, q, r, s, \ldots)$ von $x, y, p = \frac{dy}{dx}, q = \frac{dp}{dx}, r = \frac{dq}{dx}, s = \frac{dr}{dx}, \cdots$ liefert stets und nur unter der Bedingung:

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} - \frac{d^3 R}{dx^3} + \frac{d^4 S}{dx^4} - \cdots = 0$$

ein exactes Differential Vdx, wenn hierbei unter $N, P, Q, R, S, \ldots$ die partiellen Ableitungen:

$$N = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad P = \frac{\partial V}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial V}{\partial q}, \quad R = \frac{\partial V}{\partial r}, \quad S = \frac{\partial V}{\partial s}, \cdots$$

von V verstanden werden«. EULER hat diesen Satz sowie auch seine Umkehrung im dritten Theile seiner »Institutiones calculi integralis« und zwar in § 92 des die Variationsrechnung behandelnden Anhanges ausgesprochen und aus den vorangehenden Entwicklungen der Variationsrechnung bewiesen. GAUSS hat seinen vorstehend reproducirten directen Beweis des genannten Satzes in sein Handexemplar von EULERS Institutiones calculi integralis an der betreffenden Stelle aufgezeichnet. Den im zweiten Fragmente entwickelten Beweis der Umkehrung hat GAUSS in sein Exemplar von KLÜGELS Lexicon Bd. I eingeschrieben.

FRICKE.

[VIER NOTIZEN ÜBER INVERSION DER POTENZREIHEN.]

GAUSS an OLBERS, 12. December 1813.

...... Heute habe ich einen artigen kleinen Fund gemacht, den ich Ihnen doch mittheilen will. Es ist ein specieller sehr kurzer Beweis für die Umkehrungsformel der Reihen: man kann sie zwar als einen einzelnen Fall sehr leicht aus der allgemeinen LAGRANGischen Umkehrungsformel ableiten; aber es ist doch angenehm, sie mit wenigen Federstrichen unabhängig von dieser ableiten zu können.

Ich setze

$$x + \alpha xx + \beta x^3 + \gamma x^4 + \text{etc.} = X,$$
$$y + \alpha yy + \beta y^3 + \gamma y^4 + \text{etc.} = Y,$$
$$\log\left(1 - \frac{x}{y}\right) - \log\left(1 - \frac{X}{Y}\right) = \Omega,$$
$$Y^{-n} = y^{-n}(1 + (n, 1)y + (n, 2)yy + (n, 3)y^3 + \text{etc.}).$$

Man hat erstlich:

$$\begin{aligned}
\Omega = {} & \frac{X}{Y} + \frac{X^2}{2Y^2} + \frac{X^3}{3Y^3} + \text{etc.} \\
& - \frac{x}{y} - \frac{x^2}{2y^2} - \frac{x^3}{3y^3} - \text{etc.} \\
= {} & \frac{X}{y} + (1, 1)X + (1, 2)Xy + \cdots \\
& + \frac{X^2}{2yy} + (2, 1)\frac{X^2}{2y} + (2, 2)\frac{X^2}{2} + (2, 3)\frac{X^2 y}{2} + \cdots \\
& + \frac{X^3}{3y^3} + (3, 1)\frac{X^3}{3yy} + (3, 2)\frac{X^3}{3y} + (3, 3)\frac{X^3}{3} + (3, 4)\frac{X^3 y}{3} + \cdots \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \cdots\cdots - \frac{x^3}{3y^3} - \frac{xx}{2yy} - \frac{x}{y}.
\end{aligned}$$

Zweitens hat man aber auch:

$$\Omega = -\log\left(\frac{Y-X}{y-x}\cdot\frac{y}{Y}\right) = -\log\left\{\frac{1+\alpha(y+x)+\beta(yy+yx+xx)+\text{etc.}}{1+\alpha y+\beta yy+\gamma y^3+\text{etc.}}\right\}$$

$$= -\log\left\{1+\frac{\alpha x+\beta(yx+xx)+\gamma(yyx+yxx+x^3)+\text{etc.}}{1+\alpha y+\beta yy+\gamma y^3+\text{etc.}}\right\}.$$

Dieser zweite Ausdruck zeigt, dass Ω gar keine Potenzen von y mit negativen Exponenten enthält; es muss also

$$\frac{X}{y}+(2,1)\frac{X^2}{2y}+(3,2)\frac{X^3}{3y}+\text{etc.}-\frac{x}{y}$$

identisch $=0$ werden oder

$$x = X+\tfrac{1}{2}(2,1)X^2+\tfrac{1}{3}(3,2)X^3+\text{etc.},$$

welches die Reversionsformel ist.

Eben so folgen hieraus die Coefficienten der Reihen, die x^2, x^3 etc. oder jede positive ganze Potenz von x durch X ausdrücken, und durch leichte Kunstgriffe kann man es auch auf gebrochene Exponenten ausdehnen. Für negative Exponenten müssten noch andere etwas künstlichere Betrachtungen hinzukommen. . . . .

REVERSIO SERIERUM.

$$x-a'xx-a''x^3-a'''x^4-a^{\mathrm{IV}}x^5-\ldots\ldots=y$$

$$x^m = \Sigma\, a'^{\lambda'}a''^{\lambda''}a'''^{\lambda'''}\ldots y^{m+\nu}\,\frac{m(\mu+\nu+m-1)(\mu+\nu+m-2)(\mu+\nu+m-3)\ldots(\nu+m+1)}{1.2.3\ldots\lambda'.1.2.3\ldots\lambda''.1.2.3\ldots\lambda'''\text{ etc.}},$$

wo

$$\mu = \lambda'+\lambda''+\lambda'''+\text{etc.}$$
$$\nu = \lambda'+2\lambda''+3\lambda'''+\text{etc.}$$

und λ', λ'', λ''' etc. alle möglichen Combinationen von Werthen erhalten, die weder gebrochen noch negativ sind.

DIE UMKEHRUNG DER REIHEN.

Es sei

$$x+axx+bx^3+cx^4+\text{etc.}=y,$$
$$u+axuu+bxxu^3+cx^3u^4+\text{etc.}=z,$$
$$-\log\left(1-\frac{xz}{y}\right)=\Omega,$$
$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x}(1+(1,1)x+(1,2)xx+(1,3)x^3+\text{etc.}),$$
$$\frac{1}{yy} = \frac{1}{xx}(1+(2,1)x+(2,2)xx+(2,3)x^3+\text{etc.}),$$
$$\frac{1}{y^3} = \frac{1}{x^3}(1+(3,1)x+(3,2)xx+(3,3)x^3+\text{etc.}),$$

u. s. w., oder allgemein

$$y^{-m} = x^{-m}(1+(m,1)x+(m,2)xx+(m,3)x^3+\text{etc.}).$$

Dadurch wird

$$\begin{aligned}\Omega = \quad & z+(1,1)xz+(1,2)xxz+(1,3)x^3z+\text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{2}zz+\tfrac{1}{2}(2,1)xzz+\tfrac{1}{2}(2,2)xxzz+\tfrac{1}{2}(2,3)x^3zz+\text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{3}(3,1)xz^3+\tfrac{1}{3}(3,2)xxz^3+\tfrac{1}{3}(3,3)x^3z^3+\text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{4}z^4+\tfrac{1}{4}(4,1)xz^4+\tfrac{1}{4}(4,2)xxz^4+\tfrac{1}{4}(4,3)x^3z^4+\text{etc.}\\ &+\text{etc.}\end{aligned}$$

Nehmen wir an, dass die Substitution des Werthes z in diesem Ausdrucke gebe

$$\begin{aligned}\Omega = \quad & u+[1,1]xu+[1,2]xxu+[1,3]x^3u+\text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{2}uu+[2,1]xuu+[2,2]xxuu+[2,3]x^3uu+\text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{3}u^3+[3,1]xu^3+[3,2]xxu^3+[3,3]x^3u^3+\text{etc.}\\ &+\tfrac{1}{4}u^4+[4,1]xu^4+[4,2]xxu^4+[4,3]x^3u^4+\text{etc.}\\ &+\text{etc.},\end{aligned}$$

so wird sein

I. $$u+[2,1]xuu+[3,2]xxu^3+[4,3]x^3u^4+\text{etc.} =$$
$$z+\tfrac{1}{2}(2,1)xzz+\tfrac{1}{3}(3,2)xxz^3+\tfrac{1}{4}(4,3)x^3z^4+\text{etc.},$$

II. $$\tfrac{1}{2}uu+[3,1]xu^3+[4,2]xxu^4+[5,3]x^3u^5+\text{etc.} =$$
$$\tfrac{1}{2}zz+\tfrac{1}{3}(3,1)xz^3+\tfrac{1}{4}(4,2)xxz^4+\tfrac{1}{5}(5,3)x^3z^5+\text{etc.},$$

III. $$\tfrac{1}{3}u^3+[4,1]xu^4+[5,2]xxu^5+[6,3]x^3u^6+\text{etc.} =$$
$$\tfrac{1}{3}z^3+\tfrac{1}{4}(4,1)xz^4+\tfrac{1}{5}(5,2)xxz^5+\tfrac{1}{6}(6,3)x^3z^6+\text{etc.},$$

IV. $$\tfrac{1}{4}u^4+[5,1]xu^5+[6,2]xxu^6+[7,3]x^3u^7+\text{etc.} =$$
$$\tfrac{1}{4}z^4+\tfrac{1}{5}(5,1)xz^5+\tfrac{1}{6}(6,2)xxz^6+\tfrac{1}{7}(7,3)x^3z^7+\text{etc.},$$

u. s. w.

Nun aber ist auch

$$\Omega = -\log(1-u)-\log\left(1+\frac{axu+bx^2(u+uu)+cx^3(u+uu+u^3)+dx^4(u+uu+u^3+u^4)+\cdots}{1+ax+bxx+cx^3+dx^4+\text{etc.}}\right).$$

Der erste Theil gibt

$$u+\tfrac{1}{2}uu+\tfrac{1}{3}u^3+\tfrac{1}{4}u^4+\text{etc.},$$

der andere giebt nur solche Theile, die u und x zugleich als Factoren enthalten, und zwar x mit gleichem oder grösserem Exponenten als u. Hieraus folgt:

$$[2,1]=0,$$
$$[3,1]=0,\quad [3,2]=0,$$
$$[4,1]=0,\quad [4,2]=0,\quad [4,3]=0$$

u. s. w.

Hierdurch fallen also in den ersten Gliedern der Gleichungen I, II, III, IV etc. alle Theile nach dem ersten aus, und man hat, wenn man dieselben mit x, $2xx$, $3x^3$, $4x^4$ u. s. w. resp. multiplicirt und dann $u=1$ setzt,

I. $$x = y+\tfrac{1}{2}(2,1)yy+\tfrac{1}{3}(3,2)y^3+\tfrac{1}{4}(4,3)y^4+\text{etc.},$$

II. $$xx = yy+\tfrac{2}{3}(3,1)y^3+\tfrac{2}{4}(4,2)y^4+\tfrac{2}{5}(5,3)y^5+\text{etc.},$$

III. $$x^3 = y^3+\tfrac{3}{4}(4,1)y^4+\tfrac{3}{5}(5,2)y^5+\tfrac{3}{6}(6,3)y^6+\text{etc.},$$

IV. $$x^4 = y^4+\tfrac{4}{5}(5,1)y^5+\tfrac{4}{6}(6,2)y^6+\tfrac{4}{7}(7,3)y^7+\text{etc.}$$

u. s. w., oder allgemein

$$x^m = y^m+\frac{m}{m+1}(m+1,1)\,y^{m+1}+\frac{m}{m+2}(m+2,2)\,y^{m+2}+\frac{m}{m+3}(m+3,3)\,y^{m+3}+\text{etc.}$$

oder

$$\frac{x^m\,\text{Coeff.}\,y^n}{m} = \frac{y^{-n}\,\text{Coeff.}\,x^{-m}}{n}.$$

1820 Jun. 22.

ALLGEMEINE UMKEHRUNG DER REIHEN.

Es sei vorgegeben die Gleichung

$$p^m = q^n+aq^{n+\nu}+bq^{n+2\nu}+cq^{n+3\nu}+\text{etc.} = Q.$$

Man wünscht q^θ als Function von p darzustellen.

Auflösung: Man setze

$$q^\nu = x,\qquad (1+ax+bxx+cx^3+\text{etc.})^{-\frac{\nu}{n}} = fx,\qquad p^{\frac{\nu m}{n}} = u,$$

so wird die vorgegebene Gleichung $x = u\,.\,fx$ und gewünscht wird

$$q^\theta = x^{\frac{\theta}{\nu}} = u^{\frac{\theta}{\nu}}fx^{\frac{\theta}{\nu}}.$$

Man setze zuvörderst

$$x = t+u\,.\,fx,$$

so wird aus Lagranges Lehrsatz

$$fx^\lambda = ft^\lambda+\frac{\lambda u}{\lambda+1}\frac{dft^{\lambda+1}}{dt}+\frac{\lambda uu}{(\lambda+2)1.2}\frac{d^2ft^{\lambda+2}}{dt^2}+\frac{\lambda u^3}{(\lambda+3)1.2.3}\frac{d^3ft^{\lambda+3}}{dt^3}+\cdots,$$

welches, da nach den Differentiationen $t=0$ gesetzt werden soll, auch so ausgedrückt werden kann:

$$fx^\lambda = [ft^\lambda]_{\text{Coeff}\,t^0}+\frac{\lambda u}{\lambda+1}[ft^{\lambda+1}]_{\text{Coeff}\,t}+\frac{\lambda uu}{\lambda+2}[ft^{\lambda+2}]_{\text{Coeff}\,tt}+\text{etc.}$$

Hier kann statt t auch jeder andere Buchstabe z. B. q^ν gesetzt werden, also, da $fq^\nu = \left(\frac{Q}{q^n}\right)^{-\frac{\nu}{n}} = q^\nu Q^{-\frac{\nu}{n}}$,

$$fx^\lambda = \left[q^{\nu\lambda}Q^{-\frac{\lambda\nu}{n}}\right]_{\text{Coeff}\,q^0}+\frac{\lambda u}{\lambda+1}\left[q^{\nu(\lambda+1)}Q^{-\frac{(\lambda+1)\nu}{n}}\right]_{\text{Coeff}\,q^\nu}+\frac{\lambda uu}{\lambda+2}\left[q^{\nu(\lambda+2)}Q^{-\frac{(\lambda+2)\nu}{n}}\right]_{\text{Coeff}\,q^{2\nu}}+\text{etc.}$$

oder auch

$$fx^{\lambda} = \left[Q^{-\frac{\lambda\nu}{n}}\right]_{\mathrm{Coeff}\, q^{-n\lambda}} + \frac{\lambda u}{\lambda+1}\left[Q^{-\frac{(\lambda+1)\nu}{n}}\right]_{\mathrm{Coeff}\, q^{-n\lambda}} + \frac{\lambda uu}{\lambda+2}\left[Q^{-\frac{(\lambda+2)\nu}{n}}\right]_{\mathrm{Coeff}\, q^{-n\lambda}} + \cdots.$$

Mithin, $\lambda = \frac{\theta}{\nu}$ gesetzt,

$$q^{\theta} = u^{\frac{\theta}{\nu}}\left[Q^{-\frac{\theta}{n}}\right]_{\mathrm{Coeff}\, q^{-\theta}} + \frac{\theta}{\theta+\nu}\cdot u^{\frac{\theta+\nu}{\nu}}\left[Q^{-\frac{\theta+\nu}{n}}\right]_{\mathrm{Coeff}\, q^{-\theta}}$$
$$+ \frac{\theta}{\theta+2\nu}\cdot u^{\frac{\theta+2\nu}{\nu}}\left[Q^{-\frac{\theta+2\nu}{n}}\right]_{\mathrm{Coeff}\, q^{-\theta}} + \cdots$$

oder

$$q^{\theta} = p^{\frac{\theta m}{n}}\left[Q^{-\frac{\theta}{n}}\right]_{\mathrm{Coeff}\, q^{-\theta}} + \frac{\theta}{\theta+\nu}\cdot p^{\frac{(\theta+\nu)m}{n}}\left[Q^{-\frac{\theta+\nu}{n}}\right]_{\mathrm{Coeff}\, q^{-\theta}}$$
$$+ \frac{\theta}{\theta+2\nu}\cdot p^{\frac{(\theta+2\nu)m}{n}}\left[Q^{-\frac{\theta+2\nu}{n}}\right]_{\mathrm{Coeff}\, q^{-\theta}} + \cdots.$$

Setzt man also $q^{\theta} = P$, so ist

$$[P]_{\mathrm{Coeff}\, p^{\mu}} = \frac{\theta m}{\mu n}\left[Q^{-\frac{\mu}{m}}\right]_{\mathrm{Coeff}\, q^{-\theta}}.$$

Man kann dies Resultat auch so ausdrücken: $\frac{dP}{dp}$ ist dasjenige Glied in der Entwicklung von

$$\frac{m\theta\left(\frac{p^m}{Q}\right)^{\frac{\theta}{n}} q^{\theta}}{np\left(1-\left(\frac{p^m}{Q}\right)^{\frac{\nu}{n}}\right)}$$

nach Potenzen von q, welches kein q enthält.

Hiernach wäre die allgemeine Aufgabe diese: Die Relation zwischen p und q ist durch die Gleichung gegeben:

$$P = Q,$$

wo P Function von p, Q eine Function von q von der Form

$$q^n + aq^{n+\nu} + bq^{n+2\nu} + cq^{n+3\nu} + \text{etc.}$$

ist. Man wünscht fq durch eine Function von p darzustellen.

Es sei $\mathfrak{P}$ die verlangte Function, so ist:

$$\left(\frac{d\mathfrak{P}}{dP}\right) = \text{pars absoluta sive a } q \text{ libera in } \frac{q\cdot f'q\cdot f\frac{P^{\frac{1}{n}}}{Q}}{nP\left(1-\left(\frac{P}{Q}\right)^{\frac{\nu}{n}}\right)}.$$

BEMERKUNGEN ZU DEN NOTIZEN ÜBER REIHENINVERSION.

Die erste Notiz ist aus einem Briefe an OLBERS vom 12. Dec. 1813 entnommen. Der daselbst symbolisch durch (n, ν) bezeichnete Entwicklungscoefficient stellt sich auf Grund des polynomischen Lehrsatzes explicit dar in der Gestalt:

$$(n, \nu) = \sum_{\lambda} \frac{(n+\mu-1)(n+\mu-2)\ldots(n+1)n}{\lambda'!\,\lambda''!\,\lambda'''!\ldots}\, a'^{\lambda'} a''^{\lambda''} a'''^{\lambda'''}\ldots,$$

wenn hierbei $a' = -\alpha$, $a'' = -\beta$, $a''' = -\gamma$, ... gesetzt wird; die Summe bezieht sich auf alle Systeme ganzer, nicht-negativer Zahlen $\lambda', \lambda'', \ldots$, welche die Gleichung $\lambda' + 2\lambda'' + 3\lambda''' + \cdots = \nu$ befriedigen, und es ist $\mu = \lambda' + \lambda'' + \lambda''' + \cdots$.

Die zweite Notiz, welche GAUSS in sein Exemplar von »HOBERT und IDELER, trigonometrische Tafeln« (erste Seite des Umschlages) geschrieben hat, giebt in expliciter Gestalt die am Schlusse der ersten Notiz angedeutete Verallgemeinerung. Man wird die fragliche Inversionsformel mit Hilfe des eben entwickelten Ausdrucks für (n, ν) leicht bestätigen.

In der dritten Notiz, welche sich auf einem einzelnen Zettel findet, und welche das Datum 1820 Jun. 22 trägt, ist nach einer geringfügig abgeänderten Methode gleichfalls die Verallgemeinerung der ersten Notiz für beliebige Potenzen von x explicit entwickelt. Dem Schlusse von den beiden Darstellungen des Ω auf die Gleichungen I, II, ... liegt eine Homogeneitätsbetrachtung zu Grunde.

Die vierte Entwicklung stammt vermuthlich aus dem Jahre 1816 und findet sich in einem Handbuche. Unter dem Symbol $[F(x)]_{\mathrm{Coeff.}\, x^n}$ ist hier der Coefficient von x^n in der Entwicklung von $F(x)$ nach Potenzen von x verstanden.

FRICKE.

NEUER BEWEIS DES LAGRANGISCHEN LEHRSATZES.

Der wichtige Lehrsatz des Herrn DE LA GRANGE, wonach jede Function von x durch eine Reihe nach den Potenzen von u dargestellt wird, wenn $x = t + uX$, ist schon von dem Erfinder auf eine scharfsinnige Art bewiesen worden *). Allein da dieser Beweis sich darauf gründet, dass X die Gestalt habe

$$ax^2 + bx^3 + cx^4 + \ldots \text{**)}$$

und zugleich etwas weitläuftig ist, so haben verschiedne Geometer gesucht, den Satz bloss aus der Natur der Functionen herzuleiten ***). Von allen diesen Bemühungen ist indess bloss der Beweis des Hrn. Prof. PFAFF völlig streng; die übrigen sind im Grunde blosse Induction. Ich hoffe, es werde manchem Leser nicht unangenehm sein, hier einen andern gleichfalls strengen Beweis zu finden, der mit dem des Hrn. Prof. PFAFF nichts gemein hat. Die Hauptidee ist eigentlich wie in dem COUSINschen, aber die Ausführung scheint mir neu und einfach. Verschiedenheit der Methoden dient immer, mehr Licht über eine Wahrheit zu verbreiten, und gegenwärtiger Satz scheint unter uns bisher weniger bekannt zu sein, als er es verdient.

---

*) Hist. de l'Ac. de Berlin T. XXIV, Année 1768 (Berlin 1770), p. 275. Man findet die ganze Abhandlung übersetzt in dem dritten Bande, womit Hr. MICHELSEN EULERS Analysis des Unendlichen begleitet hat. Auch hat neuerlich Hr. D. MURHARD diesen Beweis in einem eignen Programme durch einen gedrängten Auszug bekannter zu machen gesucht.

**) Eben das gilt von der Umkehrungsformel, die Hr. ESCHENBACH für sich erfunden und Hr. M. ROTHE bewiesen hat, und die sich leicht mit dem LAGRANGischen Satze verbinden lässt.

***) LEXELL, Comm. nov. Petr., T. XVI (1772), p. 230.
CONDORCET, Miscell. Taurin., T. V (1770—73), Classe Math. p. 7.
COUSIN, Astronomie physique, p. 15 (Paris 1787).
PFAFF, Archiv der r. u. a. M., 1. Band (1795), S. 81.

I.

Da für $u = 0$, $x = t$ wird, so ist nach TAYLORS Lehrsatze

$$\varphi x = \varphi t + u\frac{d\varphi x}{du} + \frac{uu}{1.2}\frac{d^2\varphi x}{du^2} + \frac{u^3}{1.2.3}\frac{d^3\varphi x}{du^3} + \text{etc.},$$

wo der Werth der Grössen $\frac{d\varphi x}{du}$, $\frac{d^2\varphi x}{du^2}$ etc. für $u = 0$ zu nehmen ist. Allein es ist allgemein

$$\frac{d\varphi x}{du} = \mathrm{X}\frac{d\varphi x}{dt},$$

$$\frac{d^2\varphi x}{du^2} = \frac{d\mathrm{X}^2\frac{d\varphi x}{dt}}{dt},$$

$$\frac{d^3\varphi x}{du^3} = \frac{d^2\mathrm{X}^3\frac{d\varphi x}{dt}}{dt^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

wie ich sogleich beweisen werde. Ferner wird man leicht einsehen, dass für $u = 0$, d. i. $x = t$ diese Ausdrücke

$$\mathrm{X}\frac{d\varphi x}{dt},\ \frac{d\mathrm{X}^2\frac{d\varphi x}{dt}}{dt},\ \text{etc. in }\ \mathrm{X}\frac{d\varphi x}{dx},\ \frac{d\mathrm{X}^2\frac{d\varphi x}{dx}}{dx},\ \text{etc.}$$

übergehen, worin dann $x = t$ zu setzen ist. Dadurch wird also

$$\varphi x = \varphi t + u\mathrm{X}\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{uu}{1.2}\frac{d\mathrm{X}^2\frac{d\varphi x}{dx}}{dx} + \frac{u^3}{1.2.3}\frac{d^2\mathrm{X}^3\frac{d\varphi x}{dx}}{dx^2} + \cdots,$$

wo $x = t$ zu setzen ist, und dieses ist die Formel des Herrn DE LA GRANGE.

II.

Die hierbei gebrauchten Verwandlungen beweise ich so:

Ich differentiire die vorgegebne Gleichung $x = t + u\mathrm{X}$ nach t und nach u, woraus ich erhalte

$$\frac{dx}{dt} = 1 + u\frac{d\mathrm{X}}{dt} = 1 + u\frac{d\mathrm{X}}{dx}\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dx}{du} = \mathrm{X} + u\frac{d\mathrm{X}}{du} = \mathrm{X} + u\frac{d\mathrm{X}}{dx}\frac{dx}{du}.$$

Hieraus $\frac{dX}{dx}$ eliminirt gibt

$$\frac{dx}{du} = X\frac{dx}{dt}.$$

Da nun

$$\frac{d\varphi x}{dt} = \frac{d\varphi x}{dx}\,\frac{dx}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi x}{du} = \frac{d\varphi x}{dx}\,\frac{dx}{du},$$

so wird:

$$\frac{d\varphi x}{du} = X\frac{d\varphi x}{dt}, \tag{1}$$

folglich auch, wenn man statt φx X setzt (welches erlaubt ist)

$$\frac{dX}{du} = X\frac{dX}{dt}, \tag{2}$$

Differentiirt man aufs neue (1) nach t und u, so erhält man

$$\frac{d^2\varphi x}{dt\,du} = \frac{dX}{dt}\,\frac{d\varphi x}{dt} + X\frac{d^2\varphi x}{dt^2}, \tag{3}$$

$$\frac{d^2\varphi x}{du^2} = \frac{dX}{du}\,\frac{d\varphi x}{dt} + X\frac{d^2\varphi x}{dt\,du},$$

Hierin die gefundnen Werthe von $\frac{d^2\varphi x}{dt\,du}$ und $\frac{dX}{du}$ substituirt gibt

$$\frac{d^2\varphi x}{du^2} = 2X\frac{dX}{dt}\,\frac{d\varphi x}{dt} + X^2\frac{d^2\varphi x}{dt^2}$$

oder

$$\frac{d^2\varphi x}{du^2} = \frac{dX^2\frac{d\varphi x}{dt}}{dt}. \tag{4}$$

Differentiirt man wiederum diese Gleichung nach u, so wird

$$\frac{d^3\varphi x}{du^3} = \frac{d^2X^2\frac{d\varphi x}{dt}}{dt\,du}.$$

Da es aber bekanntlich gleichgültig ist, ob man $X^2\frac{d\varphi x}{dt}$ erst nach t und dann nach u differentiirt oder in umgekehrter Ordnung, und

$$\frac{dX^2\frac{d\varphi x}{dt}}{du} = 2X\frac{dX}{du}\frac{d\varphi x}{dt} + X^2\frac{d^2\varphi x}{dt\,du}$$

oder, wenn man die Werthe von $\frac{dX}{du}$, $\frac{d^2\varphi x}{dt\,du}$ aus (2) und (3) substituirt,

$$= X^3\frac{d^2\varphi x}{dt\,du} + 3X^2\frac{dX}{dt}\frac{d\varphi x}{dt} = \frac{dX^3\frac{d\varphi x}{dt}}{dt},$$

so folgt

$$\frac{d^3\varphi x}{du^3} = \frac{d^2X^3\frac{d\varphi x}{dt}}{dt^2}. \tag{5}$$

Man findet ebenso

$$\frac{d^4\varphi x}{du^4} = \frac{d^3X^4\frac{d\varphi x}{dt}}{dt^3} \quad \text{u. s. f.}$$

Allgemein aber gibt $X^n\frac{d\varphi x}{dt}$ nach u differentiirt durch die Substitutionen (3) und (4)

$$\frac{dX^n\frac{d\varphi x}{dt}}{du} = \frac{dX^{n+1}\frac{d\varphi x}{dt}}{dt}. \tag{6}$$

Ist also das Gesetz bis auf das n^{te} Glied richtig oder

$$\frac{d^n\varphi x}{du^n} = \frac{d^{n-1}X^n\frac{d\varphi x}{dt}}{dt^{n-1}},$$

so wird, nach u differentiirt,

$$\frac{d^{n+1}\varphi x}{du^{n+1}} = \frac{dd^{n-1}X^n\frac{d\varphi x}{dt}}{du\,.\,dt^{n-1}} = \frac{d^{n-1}dX^n\frac{d\varphi x}{dt}}{dt^{n-1}du},$$

[also] nach (6)

$$\frac{d^{n+1}\varphi x}{du^{n+1}} = \frac{d^nX^{n+1}\frac{d\varphi x}{dt}}{dt^n}, \tag{7}$$

d. i. [die Regel gilt] auch für das nächstfolgende Glied.

Aus den Gleichungen (1), (4), (5) folgen also die obigen Verwandlungen für die drei ersten Glieder, und aus (6) ihre Richtigkeit für alle folgenden.

BEMERKUNG ZUM AUFSATZE »NEUER BEWEIS DES LAGRANGISCHEN LEHRSATZES«.

Zufolge einer Notiz in dem S. 20 erwähnten Tagebuche hat GAUSS am 27. December 1796 einen Beweis des Lehrsatzes von LAGRANGE gefunden. Der vorstehend abgedruckte Aufsatz ist zwar ohne jede Datumangabe auf einem einzelnen Zettel aufgezeichnet; indessen ist nicht zu bezweifeln, dass es sich hier um die Entwicklung handelt, welche GAUSS Ende 1796 auffand. Die Veröffentlichung wurde seiner Zeit nur durch verschiedene Zufälligkeiten verhindert (Vgl. SARTORIUS VON WALTERSHAUSEN, Gauss zum Gedächtniss, S. 22).

FRICKE.

LAGRANGES LEHRSATZ,
AUF MÖGLICH LICHTVOLLSTE ART ABGELEITET.

I. Specieller Fall.

Grundgleichung: $x = t + ux^{\lambda}$,

Gesucht: $x^n = t^n + T_1 u + T_2 uu + T_3 u^3 + \text{u. s. w.}$

Hier sind T_1, T_2, T_3, u. s. w. Functionen von t, die in Θ_1, Θ_2, Θ_3, u. s. w. übergehen mögen, wenn man anstatt n, soweit es in ihnen vorkommt, $n+\lambda$ schreibt. Man hat also offenbar:

$$x^{n+\lambda} = t^{n+\lambda} + \Theta_1 u + \Theta_2 uu + \Theta_3 u^3 + \text{u. s. w.}$$

Allgemein ist für irgend eine Function Fx von x

$$\frac{dFx}{du} = x^{\lambda} \cdot \frac{dFx}{dt},$$

also

$$\frac{dx^n}{du} = \frac{x^{\lambda} dx^n}{dt} = \frac{n}{n+\lambda} \frac{dx^{n+\lambda}}{dt}$$

und folglich:

$$T_1 + 2\,T_2 u + 3\,T_3 uu + \text{u.s.w.} = \frac{n}{n+\lambda}\Big\{(n+\lambda)\,t^{n+\lambda-1} + \frac{d\Theta_1}{dt}u + \frac{d\Theta_2}{dt}uu + \frac{d\Theta_3}{dt}u^3 + \text{u.s.w.}\Big\}.$$

Man hat also $T_1 = nt^{n+\lambda-1}$, und hieraus, wenn man $n+\lambda$ statt n schreibt,

$$\Theta_1 = (n+\lambda)\,t^{n+2\lambda-1};$$

sodann

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{n+\lambda} \frac{d\Theta_1}{dt} = \frac{n(n+2\lambda-1)}{2}\,t^{n+2\lambda-2}$$

und auf ähnliche Weise hieraus

$$\Theta_2 = \frac{(n+\lambda)(n+3\lambda-1)}{2}\,t^{n+3\lambda-2},$$

$$T_3 = \frac{1}{3}\frac{n}{n+\lambda}\frac{d\Theta_2}{dt} = \frac{n(n+3\lambda-1)(n+3\lambda-2)}{2.3}\,t^{n+3\lambda-3},$$

$$\Theta_3 = \frac{(n+\lambda)(n+4\lambda-1)(n+4\lambda-2)}{2.3}\,t^{n+4\lambda-3},$$

$$T_4 = \frac{1}{4}\frac{n}{n+\lambda}\frac{d\Theta_3}{dt} = \frac{n(n+4\lambda-1)(n+4\lambda-2)(n+4\lambda-3)}{2.3.4}\,t^{n+4\lambda-4},$$

wo das Fortschreitungsgesetz klar ist.

II. Allgemein.

Grundgleichung: $x = t + u\psi x$,

Gesucht: $fx = ft + T_1 u + T_2 uu + T_3 u^3 + \text{u. s. w.}$;

ψx, fx sind gegebene Functionen von x, hingegen T_1, T_2, T_3 u. s. w. erst noch zu bestimmende Functionen von t, und zwar wird ihre Bestimmung von der Beschaffenheit der Functionen ψx, fx abhängig sein. Die derivirte Function $\frac{dfx}{dx}$ soll mit Fx bezeichnet werden.

Es sei nun φx eine andere Function von x und $\Phi x = \frac{d\varphi x}{dx}$ ihre derivirte. Es wird mithin auch gesetzt werden können:

$$\varphi x = \varphi t + \Theta_1 u + \Theta_2 uu + \Theta_3 u^3 + \text{u. s w.},$$

wo Θ_1, Θ_2, Θ_3 u. s. w. gleichfalls Functionen von t sein werden, die von der Natur der Functionen ψ, φ ebenso abhängen werden, wie T_1, T_2, T_3 u. s. w. von ψ, f. Sollte sich zeigen, dass in letzterer Abhängigkeit die Function f selbst nicht vorkommt, sondern nur F, so werden, da ψ bei beiden die gleiche Rolle spielt, T_1, T_2, T_3 u. s. w. übergehen in Θ_1, Θ_2, Θ_3 u. s. w., wenn man in dem Ausdruck der ersteren Function, soweit Ft darin vorkommt, an die Stelle davon setzt Φt.

Nehmen wir nun an, die Functionen fx und φx stehen in einem solchen Zusammenhange mit einander, dass

$$\Phi x = \psi x \cdot Fx$$

oder, was dasselbe ist, dass

$$\varphi x = \int \psi x \cdot \frac{dfx}{dx} dx,$$

und überlegen, dass

$$\frac{dfx}{du} = \psi x \frac{dfx}{dt},$$

so wird

$$\frac{dfx}{du} = \frac{d\varphi x}{dt}.$$

Mithin [folgt], da

$$\frac{d\varphi t}{dt} = \Phi t = \psi t \cdot Ft,$$

$$T_1 + 2\,T_2 u + 3\,T_3 uu + \text{u. s. w.} = \psi t \cdot Ft + \frac{d\Theta_1}{dt} u + \frac{d\Theta_2}{dt} uu + \frac{d\Theta_3}{dt} u^3 + \text{u. s. w.}$$

Wir haben demnach zuvörderst

$$T_1 = \psi t \cdot Ft.$$

Mithin, da nach obiger Bemerkung T_1 in Θ_1 übergehen muss, wenn man in dem Ausdruck für jene Function an die Stelle von Ft treten lässt Φt, d. i. $\psi t \cdot Ft$, so wird

$$\Theta_1 = (\psi t)^2 \cdot Ft.$$

Hiernach wird ferner

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{d(\psi t)^2 Ft}{dt},$$

und dann abermals, kraft der obigen Bemerkung,

$$\Theta_2 = \frac{1}{2} \frac{d(\psi t)^3 Ft}{dt}.$$

Sodann

$$T_3 = \frac{1}{2\,.\,3} \frac{dd(\psi t)^3 Ft}{dt^2},$$

$$\Theta_3 = \frac{1}{2\,.\,3} \frac{dd(\psi t)^4 Ft}{dt^2},$$

$$T_4 = \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} \frac{d^3(\psi t)^4 Ft}{dt^3},$$

u. s. w.

Als Endresultat haben wir also

$$fx = ft + \psi t \cdot \frac{dft}{dt} \cdot u + \frac{1}{2} \frac{d(\psi t)^2 \cdot \frac{dft}{dt}}{dt} \cdot uu + \frac{1}{2\,.\,3} \frac{dd(\psi t)^3 \cdot \frac{dft}{dt}}{dt^2} \cdot u^3$$

$$+ \frac{1}{2\,.\,3\,.\,4} \frac{d^3(\psi t)^4 \frac{dft}{dt}}{dt^3} u^4 + \text{u. s. w.},$$

welches der Lagrangische Lehrsatz in seiner ganzen Allgemeinheit ist.

1847 Mai 13.

ENTWICKLUNG VON $\frac{1}{(h-\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}$ IN DIE REIHE

$$A^{(0)}+2A^{(1)}\cos\varphi+2A^{(2)}\cos 2\varphi+2A^{(3)}\cos 3\varphi+\text{etc.}$$

Wir setzen

$$h=\tfrac{1}{2}\left(t+\tfrac{1}{t}\right)\quad\text{oder}\quad t=h-\sqrt{(hh-1)},$$

$$a=\frac{(1-tt)^2}{(2t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{b}{\sqrt{(1-tt)}},\qquad b=\left(\frac{1-tt}{2t}\right)^{\frac{3}{2}},\qquad c=\tfrac{1}{4}t,$$

$$a'=\tfrac{1}{2}(a+b),\qquad b'=\sqrt{a\,b},\qquad c'=\left(\frac{ac}{a'}\right)^2,$$

$$a''=\tfrac{1}{2}(a'+b'),\qquad b''=\sqrt{a'b'},\qquad c''=\left(\frac{a'c'}{a''}\right)^2,$$

$$a'''=\tfrac{1}{2}(a''+b''),\qquad b'''=\sqrt{a''b''},\qquad c'''=\left(\frac{a''c''}{a'''}\right)^2\quad\text{etc.}$$

Man setze ferner

$$u=2c\{1+2c'(1+2c''(1+2c'''(1+\cdots\},$$

und $a^{(\infty)}$ sei die gemeinschaftliche Grenze von a, a', a'', a''' etc. und b, b', b'', b''' etc. Sodann ist

$$A^{(0)}=\frac{h-u}{a^{(\infty)}},\qquad A^{(1)}=\frac{1-hu}{a^{(\infty)}}.$$

Wir setzen ferner

$$\frac{A^{(1)}}{A^{(0)}}=B^{(0)},\qquad\frac{A^{(2)}}{A^{(1)}}=B^{(1)},\qquad\frac{A^{(3)}}{A^{(2)}}=B^{(2)}\quad\text{etc.;}$$

man hat so folgende Gleichungen

$$B^{(0)}=\frac{\frac{3}{2}}{2h-\frac{1}{2}B^{(1)}},\quad B^{(1)}=\frac{\frac{5}{4}}{2h-\frac{3}{4}B^{(2)}},\quad B^{(2)}=\frac{\frac{7}{6}}{2h-\frac{5}{6}B^{(3)}},\quad B^{(3)}=\frac{\frac{9}{8}}{2h-\frac{7}{8}B^{(4)}}\quad\text{u. s. w.}$$

Man bedient sich dieser Formeln, um die Grössen $B^{(0)}, B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}$ u. s. w. in verkehrter Ordnung aus einer vom Anfang entferntern, etwa der letzten, welche man nöthig hat, abzuleiten. Diese zu finden dient die Formel

$$B^{(k)}=\frac{2k+3}{2k+2}t\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{3}{(2k+2)(2k+4)}tt}{1-\cfrac{\frac{(2k+1)(2k+5)}{(2k+4)(2k+6)}tt}{1-\cfrac{\frac{1.5}{(2k+6)(2k+8)}tt}{1-\cfrac{\frac{(2k+3)(2k+7)}{(2k+8)(2k+10)}tt}{1-\cfrac{\frac{3.7}{(2k+10)(2k+12)}tt}{1-\text{etc.}}}}}}},$$

also z. B.

$$B^{(9)}=\tfrac{21}{20}t\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{3}{440}tt}{1-\cfrac{\frac{437}{528}tt}{1-\cfrac{\frac{5}{624}tt}{1-\cfrac{\frac{75}{104}tt}{1-\cfrac{\frac{1}{40}tt}{1-\cfrac{\frac{207}{320}tt}{1-\cfrac{\frac{45}{1088}tt}{1-\text{etc.}}}}}}}}$$

$$B^{(11)}=\tfrac{25}{24}t\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{\frac{1}{208}tt}{1-\cfrac{\frac{621}{728}tt}{1-\cfrac{\frac{1}{168}tt}{1-\cfrac{\frac{145}{192}tt}{1-\cfrac{\frac{21}{1088}tt}{1-\cfrac{\frac{93}{136}tt}{1-\cfrac{\frac{5}{152}tt}{1-\text{etc.}}}}}}}}.$$

BEMERKUNGEN ZUR »ENTWICKLUNG VON $(h-\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}}$ IN DIE REIHE $A^{(0)}+2A^{(1)}\cos\varphi+2A^{(2)}\cos 2\varphi+\cdots$«.

Diese Entwicklung von $(h-\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}}$ stammt vermuthlich aus der Zeit um 1813. Das besondere Interesse derselben ist in ihren mehrfachen Beziehungen zu sonstigen Untersuchungen von Gauss begründet.

Für die beiden ersten Coefficienten $A^{(0)}, A^{(1)}$ hat man zunächst die folgenden Integraldarstellungen:

$$A^{(0)}=\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi(h-\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}},\qquad A^{(1)}=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{2\pi(h-\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituirt man hier $\varphi=2T$ und setzt $h-1=m^2$, $h+1=n^2$, so ergiebt sich:

$$A^{(0)}=\int_0^{2\pi}\frac{dT}{2\pi(mm\cos T^2+nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$A^{(1)}=\int_0^{2\pi}\frac{(\cos^2 T-\sin^2 T)\,dT}{2\pi(mm\cos T^2+nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Berechnung von $A^{(0)}$ und $A^{(1)}$ aus m und n durch den Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels hat Gauss in den Artikeln 16 ff. seiner Abhandlung »Determinatio attractionis etc.« (ges. Werke III p. 331 ff.) geleistet. Die daselbst in Art. 19 mit P und Q bezeichneten Integrale liefern:

$$A^{(0)}=P+Q,\qquad A^{(1)}=P-Q.$$

Um die damaligen mit den hier vorliegenden (bei Berechnung des arithmetisch-geometrischen Mittels benutzten) Bezeichnungen in Einklang zu setzen, hat man an $m^2=h-1$, $n^2=h+1$ anzuknüpfen und findet in t:

$$m=\frac{1-t}{\sqrt{2t}},\qquad n=\frac{1+t}{\sqrt{2t}}.$$

Die Zahlen a, b, von denen hier das Mittel $a^{(\varkappa)}$ gebildet ist, sind demnach:

$$a=\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2 m',\qquad b=\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2 n',$$

und es gilt:

$$a^{(\varkappa)}=\left(\frac{1-t^2}{2t}\right)^2\mu,$$

wo μ, wie a. a. O., das arithmetisch-geometrische Mittel zwischen m und n ist. Die am Schlusse von Art. 17 der genannten Abhandlung angegebene Gleichung für ν schreibt sich auf Grund der ebenda nächst voraufgehenden Relationen:

$$\nu=2\frac{\lambda'}{m'}\left(1+2\frac{\lambda''}{m''}\left(1+2\frac{\lambda'''}{m'''}\left(1+\cdots\right\}.\right.\right.$$

Die Definitionsgleichung für λ' liefert nach kurzer Umrechnung zunächst $\left(\frac{\lambda'}{m'}\right)^2=c^2$; hier hat man:

$$\frac{\lambda'}{m'}=-c,\qquad\text{jedoch weiter}\qquad\frac{\lambda''}{m''}=c',\qquad\frac{\lambda'''}{m'''}=c'',\ \ldots$$

zu setzen, um die Formeln der vorliegenden Notiz zu gewinnen. Folglich bestehen die Gleichungen:

$$\nu=-u,\qquad P=\frac{(1+t)^2}{4t}\,\frac{1-u}{a^{(\varkappa)}},\qquad Q=\frac{(1-t)^2}{4t}\,\frac{1+u}{a^{(\varkappa)}},$$

wie aus den Schlussformeln in Art. 19 a. a. O. hervorgeht. Durch Addition und Subtraction dieser letzten beiden Formeln findet man:

$$A^{(0)}=\frac{h-u}{a^{(\varkappa)}},\qquad A^{(1)}=\frac{1-hu}{a^{(\varkappa)}}.$$

Für's zweite subsumirt sich die hier gelöste Aufgabe der Entwicklung von $(h-\cos\varphi)^{-\frac{3}{2}}$ dem allgemeinen in der Dissertatiuncula (p. 35 ff.) behandelten Probleme. Es werden daselbst unter Nr. 7 die dreigliedrigen Eulerschen Relationen aufgestellt, vermöge deren man aus den beiden ersten Coefficienten $A^{(0)}, A^{(1)}$ successive alle folgenden $A^{(2)}, A^{(3)}, \ldots$ berechnen kann. Für die Quotienten $B^{(k)}$ der A entspringen aus den Eulerschen Recursionsformeln die hier von Gauss aufgestellten Formeln zwischen $B^{(k)}$ und $B^{(k+1)}$.

Es ist endlich noch erwähnenswerth, dass sich der für $B^{(k)}$ angegebene Kettenbruch direct der allgemeinen Formel [25] in Art. 12 der »Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc.« (ges. Werke III p. 134) unterordnet, in welcher der Quotient zweier hypergeometrischen Functionen in einen Kettenbruch entwickelt wird. In den daselbst erklärten Bezeichnungen würde sich die Formel für $B^{(k)}$ folgendermassen schreiben:

$$B^{(k)}=\frac{k+\frac{3}{2}}{k+1}\,t\cdot G\left(-\tfrac{1}{2}, k-\tfrac{1}{2}, k+1; t^2\right)$$

oder auch:

$$B^{(k)}=\frac{k+\frac{3}{2}}{k+1}\,t\cdot\frac{F\left(-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}, k+2; t^2\right)}{F\left(-\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}, k+1; t^2\right)}.$$

Fricke.

SCHÖNES THEOREM DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG.

Wenn [man setzt]:

$$\int e^{itu} \varphi t\, dt = \psi u \cdot \sqrt{2\pi},$$

das Integral von $t = -\infty$ bis $t = +\infty$ ausgedehnt, so ist

$$\int e^{-itu} \psi u\, du = \varphi t \cdot \sqrt{2\pi},$$

das Integral ebenso genommen.

Die Begründung dieses Satzes ist in der Formel enthalten:

$$\Sigma \varphi\left(t + \frac{2\pi k}{\omega}\right) = \frac{\omega}{2\pi} \Sigma e^{-ikt\omega} \int \varphi\theta \cdot d\theta \cdot e^{ik\theta\omega},$$

wo das Integralzeichen die Ausdehnung $\theta = -\infty$ bis $\theta = +\infty$ voraussetzt, und das Σ-Zeichen sich auf alle ganzen positiven und negativen Werthe von k bezieht, indem man darin nur ω unendlich abnehmen zu lassen braucht.

BEMERKUNGEN ZUM THEOREM DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG.

Das vorliegende Theorem hat Gauss in den Einbanddeckel eines Buches eingetragen, welches den Titel »Opuscula mathematica, 1799—1813« trägt. Eine genaue Zeitangabe, wann der Satz gefunden wurde, ist nicht vorhanden.

Man kann dem Theorem durch leichte Umrechnung auch die völlig gleichwerthige Gestalt verleihen:

$$2\pi\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(du \int_{-\infty}^{+\infty} \cos u(t-x) \cdot \varphi(x)\, dx\right).$$

Es handelt sich also um eines aus der Reihe jener Theoreme, welche Fourier seit 1807 auffand und 1822 in der »Théorie analytique de la chaleur« ausführlich bekannt gab. Die von Gauss zum Beweise des Theorems angegebene Summenformel liefert für $\lim. \omega = 0$ direct die Fouriersche Integralformel. Man wolle nur bemerken, dass die Gleichung $\lim\limits_{x=\pm\infty} \varphi(x) = 0$ hier gültig sein muss, eine Bedingung, welche thatsächlich für die von Gauss in der Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzte Function $\varphi(x)$ zutrifft (cf. »Theoria combinationis observationum etc.« Art. 4, ges. Werke IV p. 5).

Was die Gauss'sche Summenformel selbst angeht, so lässt sich dieselbe zunächst durch Spaltung des rechtsseitigen Integrals in die Gestalt setzen:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi\left(t + \frac{2\pi k}{\omega}\right) = \frac{\omega}{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-ilt\omega} \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{\frac{2k\pi}{\omega}}^{\frac{2(k+1)\pi}{\omega}} \varphi(\theta) \cdot e^{il\theta\omega}\, d\theta\right).$$

Führt man hier eine neue Integrationsvariabele x durch $\theta\omega = x + 2k\pi$ ein und ordnet rechter Hand die Reihenfolge der Summationen um, so entspringt als neue Gestalt der Summenformel:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi\left(t + \frac{2\pi k}{\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-ilt\omega} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\left(\frac{x + 2k\pi}{\omega}\right) e^{ilx}\, dx\right).$$

Die Richtigkeit dieser Formel geht aber direct hervor aus der Fourierschen Reihe:

$$\varphi\left(t + \frac{2\pi k}{\omega}\right) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \left(e^{-ilt\omega} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\left(\frac{x + 2k\pi}{\omega}\right) e^{ilx}\, dx\right).$$

Fricke.

[ÜBER DAS WESEN UND DIE DEFINITION DER FUNCTIONEN.]

Gauss an Bessel, 18. December 1811.

. . . . . . Zuvörderst würde ich jemand, der eine neue Function in die Analyse einführen will, um eine Erklärung bitten, ob er sie schlechterdings bloss auf reelle Grössen (reelle Werthe des Arguments der Function) angewandt wissen will, und die imaginären Werthe des Arguments gleichsam nur als ein Überbein ansieht — oder ob er meinem Grundsatze beitrete, dass man in dem Reiche der Grössen die imaginären $a+b\sqrt{-1} = a+bi$ als gleiche Rechte mit den reellen geniessend ansehen müsse. Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist mir eine selbständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingirten Grössen ausserordentlich an Schönheit und Rundung verlieren und alle Augenblick Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genöthigt sein würde. . . . . . .

. . . Was soll man sich nun bei $\int \varphi x \cdot dx$ für $x = a+bi$ denken? Offenbar, wenn man von klaren Begriffen ausgehen will, muss man annehmen, dass x durch unendlich kleine Incremente (jedes von der Form $\alpha+\beta i$) von demjenigen Werthe, für welchen das Integral 0 sein soll, bis zu $x = a+bi$ übergeht und dann alle $\varphi x \cdot dx$ summirt. So ist der Sinn vollkommen festgesetzt. Nun aber kann der Übergang auf unendlich viele Arten geschehen: so wie man sich das ganze Reich aller reellen Grössen durch eine unendliche gerade Linie denken kann, so kann man das ganze Reich aller Grössen, reeller und

imaginärer Grössen sich durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt, durch Abscisse $= a$, Ordinate $= b$ bestimmt, die Grösse $a+bi$ gleichsam repräsentirt. Der stetige Übergang von einem Werthe von x zu einem andern $a+bi$ geschieht demnach durch eine Linie und ist mithin auf unendlich viele Arten möglich. Ich behaupte nun, dass das Integral $\int \varphi x \cdot dx$ nach zweien verschiednen Übergängen immer einerlei Werth erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Übergänge repräsentirenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi x = \infty$ wird. Dies ist ein sehr schöner Lehrsatz*), dessen eben nicht schweren Beweis ich bei einer schicklichen Gelegenheit geben werde. Er hängt mit schönen andern Wahrheiten, die Entwicklungen in Reihen betreffend, zusammen. Der Übergang nach jedem Punkte lässt sich immer ausführen, ohne jemals eine solche Stelle wo $\varphi x = \infty$ wird zu berühren. Ich verlange daher, dass man solchen Punkten ausweichen soll, wo offenbar der ursprüngliche Grundbegriff von $\int \varphi x \cdot dx$ seine Klarheit verliert und leicht auf Widersprüche führt. Übrigens ist zugleich hieraus klar, wie eine durch $\int \varphi x \cdot dx$ erzeugte Function für einerlei Werthe von x mehrere Werthe haben kann, indem man nemlich beim Übergange dahin um einen solchen Punkt wo $\varphi x = \infty$ entweder gar nicht, oder einmal, oder mehreremale herumgehen kann. Definirt man z. B. $\log x$ durch $\int \frac{1}{x} dx$, von $x = 1$ anzufangen, so kommt man zu $\log x$ entweder ohne den Punkt $x = 0$ einzuschliessen oder durch ein- oder mehrmaliges Umgehen desselben; jedesmal kommt dann die Constante $+2\pi i$ oder $-2\pi i$ hinzu: so sind die vielfachen Logarithmen von jeder Zahl ganz klar. Kann φx nie für einen endlichen Werth von x unendlich werden, so ist das Integral immer nur eine einförmige Function. Diess ist z. B. der Fall für $\varphi x = \frac{e^x-1}{x}$, so dass $\int \frac{e^x-1}{x} dx$ gewiss eine einförmige Function von x ist, deren Werth durch die immer convergirende, also immer einen und nur Einen Sinn habende Reihe dargestellt wird

$$x + \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{18}x^3 + \tfrac{1}{96}x^4 + \text{etc.}$$

Ich wollte, Herr Soldner hätte, da er doch einmal eine neue Function ein-

*) Eigentlich ist hiebei noch angenommen, dass φx selbst eine einförmige Function von x ist, oder wenigstens für deren Werthe innerhalb jenes ganzen Flächenraumes nur Ein System von Werten ohne Unterbrechung der Stetigkeit angenommen wird.

führen wollte, statt seines $\mathrm{li}\,x = \int \frac{dx}{\log x}$ lieber jene gewählt, da eine einförmige Function immer ohne Vergleich als classischer und einfacher anzusehen ist als eine vielförmige, zumal da $\log x$ selbst schon eine vielförmige Function ist. . . . .

. . . . Übrigens glaube ich, dass die Ausdehnung der Untersuchungen auf imaginäre Argumente zu höchst interessanten Resultaten Anlass geben wird. Doch möchte ich aus den oben angeführten Gründen lieber die Function $\int \frac{e^x-1}{x}\,dx$ als $\int \frac{dx}{\log x}$ wählen, weil ich vermuthe, dass erstere concinnere Resultate geben wird. So zum Beispiel möchte ich sehr gern wissen, ob jene Function oder, was dasselbe ist, die Reihe

$$x + \tfrac{1}{4}xx + \tfrac{1}{18}x^3 + \text{etc.}$$

für gewisse endliche Werthe von x von der Form $a+bi$ wohl 0 werden kann. Mit Gewissheit kann ich es noch nicht behaupten, obwohl es mir sehr wahrscheinlich ist. Gibt es solche Werthe (dann gewiss unendlich viele), so werden diess sehr merkwürdige Grössen sein, und die ganze Reihe wird sich in unendliche Factoren der Form $(1+2\alpha x+\beta xx)$ zerlegen lassen. —

. . . .

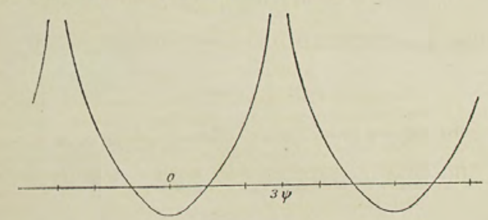
BEMERKUNG.

Diese principielle Erörterung über die Theorie der Functionen einer complexen Variabelen ist, wie aus dem Texte hervorgeht, einem Briefe an Bessel vom 18. December 1811 entnommen, der bereits in dem »Briefwechsel zwischen Gauss und Bessel« (Leipzig, 1880) veröffentlicht worden ist. Es ist übrigens wahrscheinlich, dass die von Gauss hier entwickelte Auffassung ihm bereits lange vor Abfassung des fraglichen Briefes geläufig war. Eben auf Grund dieser Anschauungen wird Gauss z. B. die vermuthlich einer weit früheren Periode angehörenden Untersuchungen in der zweiten Hälfte des Art. 12 vom »Arithmetisch-geometrischen Mittel« (ges. Werke III p. 378) angestellt haben.

Fricke.

UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE TRANSCENDENTEN FUNCTIONEN, DIE AUS DEM INTEGRAL $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^3)}}$ IHREN URSPRUNG HABEN.

Man bezeichne den Werth des Integrals $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^3)}}$ von $x=-1$ bis zu $x=z$ allgemein durch Πz; umgekehrt, wenn $\Pi z = y$, setze man $z = Py$. Dann ist P eine einförmige und zwar periodische Function von y, welche durch folgendes Schema sinnlich gemacht werden kann:



y sind die Abscissen, Py die Ordinaten.

Den Werth von Πz, $z=0$ gesetzt, bezeichnen wir durch ψ (näherungsweise $= 1{,}402186$). Dann ist 6ψ allgemein die Grösse der Periode, d. i. $P\varphi = P(\varphi + 6k\psi)$, wenn k irgend eine ganze Zahl bedeutet.

$$P(0) = -1, \qquad P\varphi = P(-\varphi), \qquad P\psi = 0, \qquad P(2\varphi) = 2, \qquad P(3\psi) = \infty,$$

$$P(\varphi+3\psi) = \frac{2-P(\varphi)}{1+P(\varphi)}, \qquad P(1\tfrac{1}{2}\psi) = \sqrt{3}-1.$$

Wenn

$$P\varphi = s, \qquad P(\varphi+2\psi) = c,$$

so ist

$$sscc = 4s+4c, \qquad c = \frac{2(1+\sqrt{1+s^3})}{ss},$$

$$P(3\psi+\varphi+\varphi') = \frac{2+ss'(s+s')-\frac{1}{2}(css-2)(c's's'-2)}{(s-s')^2},$$

$$P(3\psi+\varphi-\varphi') = \frac{2+ss'(s+s')+\frac{1}{2}(css-2)(c's's'-2)}{(s-s')^2}.$$

Die vorigen Sätze gelten für die angezeigte Bedeutung unserer Begriffe. Allein lassen wir Πz den Werth des Integrals $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^3)}}$ von $x=-1$ bis $x=z-1$ bedeuten (welches sinnlich gemacht wird, wenn man die Abscissenlinie um 1 herunterrückt), so wird:

$$P(0) = 0, \qquad P\psi = 1, \qquad P(2\psi) = 3, \qquad P(3\psi) = \infty, \qquad P(3\psi-\varphi) = \frac{3}{P(\psi)},$$

$$P(2\varphi) = \frac{12P\varphi(P(\varphi)^2-3P\varphi+3)}{(P(\varphi)^2-3)^2},$$

$$P(\varphi+\varphi') = \frac{3(s+s')ss'-18ss'+9(s+s')+6\sqrt{(s^3-3ss+3s)(s'^3-3s's'+3s')}}{(ss'-3)^2}.$$

$$\Pi(1+z) = \psi+z-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}z^4+\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3}{2.4}z^7-\frac{1}{10}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}z^{10}+\cdots,$$

$$\Pi(1+z) = 3\psi-2\sqrt{z}\Big(\frac{1}{z}-\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{z^4}+\frac{1}{13}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{z^7}-\cdots\Big),$$

$$\psi = 1{,}4021822$$

$$\log\psi = 0{,}1468045$$

$$\log\mathrm{hyp}\,\psi = 0{,}3380399.$$

BEMERKUNGEN ZU DEN UNTERSUCHUNGEN ÜBER DIE AUS DEM INTEGRAL $\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^3)}}$ ENTSPRINGENDEN FUNCTIONEN.

Zufolge einer Tagebuchnotiz hat GAUSS die Inversion des hier behandelten Integrals in die am Schlusse gewonnene Potenzreihe bereits am 9. September 1796 durchgeführt.

Der entwickelte Ansatz steht zur WEIERSTRASS'schen Theorie in entsprechender Beziehung, wie die Untersuchung des lemniscatischen Integrals zur JACOBIschen Theorie. Liefert letzteres Integral den sogen. »harmonischen« Fall des elliptischen Gebildes, so hat man es hier mit dem »aequianharmonischen« Falle zu thun.

Die GAUSS'schen Angaben gehen sämmtlich leicht aus dem Additionstheorem für $P(\varphi)$ hervor, d. i. aus der oben für $P(3\psi+\varphi+\varphi')$ gegebenen Formel, welche, etwas anders geschrieben, so lautet:

$$P(3\psi+\varphi+\varphi') = \frac{P(\varphi)P(\varphi')(P(\varphi)+P(\varphi'))+2-2\sqrt{1+P(\varphi)^3}\sqrt{1+P(\varphi')^3}}{(P(\varphi)-P(\varphi'))^2},$$

und welche GAUSS zweifellos auf dem auch beim Lemniscatenintegral befolgten Wege, d. i. vermöge des ursprünglichen EULERschen Gedankenganges gewonnen hat. Übrigens kommt diese Formel unmittelbar auf das Additionstheorem der WEIERSTRASS'schen Function $\wp(u)$ für $g_2 = 0$, $g_3 = -4$ zurück.

Aus dem Additionstheorem ergeben sich leicht die Formeln:

$$P(2\varphi+3\psi) = \frac{P(\varphi)(P(\varphi)^3-8)}{4(P(\varphi)^3+1)}, \qquad P(3\varphi) = \frac{P(\varphi)^9-96P(\varphi)^6+48P(\varphi)^3+64}{9P(\varphi)^2(P(\varphi)^3+4)^2}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen entwickelt man von $P(0)=-1$, $P(\psi)=0$ aus ohne Mühe die weiteren GAUSS'schen Angaben.

FRICKE.

[INVERSION DES ELLIPTISCHEN INTEGRALS ERSTER GATTUNG.]

De functione transcendente $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)(1-\mu xx)}} = \varphi$, ubi statuimus $x = f\varphi$.

Ponendo $\log x = y$, habemus

$$\frac{x\,dy}{d\varphi} = \sqrt{(1-xx)(1-\mu xx)},$$

$$\frac{ddy}{d\varphi^2} = -\frac{dx}{x\,d\varphi}\cdot\frac{dy}{d\varphi} - \frac{x\,dx}{(1-xx)\,d\varphi}\cdot\frac{dy}{d\varphi} - \frac{\mu x\,dx}{(1-\mu xx)\,d\varphi}\cdot\frac{dy}{d\varphi},$$

$$\frac{ddy}{d\varphi^2} = -\frac{(1-xx)(1-\mu xx)}{xx} - (1-\mu xx) - \mu(1-xx),$$

$$\frac{ddy}{d\varphi^2} = -\frac{1}{xx} + \mu xx.$$

Sit

$$\int \frac{d\varphi}{xx} = t, \qquad \int \mu xx\,d\varphi = u,$$

eritque

$$\frac{dy}{d\varphi} = u - t.$$

Sit porro

$$\int u\,d\varphi = v, \qquad \int t\,d\varphi = w,$$

eritque

$$y = v - w.$$

Faciemus

$$e^{-w} = P\varphi, \qquad e^{-v} = Q\varphi,$$

$$PP'' = P'P' - QQ, \qquad QQ'' = Q'Q' - \mu PP.$$

$$P = \varphi - \tfrac{1}{6}(1+\mu)\varphi^3 + \tfrac{1}{120}(1+4\mu+\mu\mu)\varphi^5 - \dots,$$

$$Q = 1 + * - \tfrac{1}{12}\mu\varphi^4 + \tfrac{1}{90}(\mu+\mu\mu)\varphi^6 - \tfrac{1}{10080}(8\mu+17\mu\mu+8\mu^3)\varphi^8 - \dots.$$

BEMERKUNGEN ZUR INVERSION DES ELLIPTISCHEN INTEGRALS ERSTER GATTUNG.

Diese Notiz, deren Entstehungszeit man vermuthlich nach einer Tagebuchangabe vom 6. Mai 1800 »Theoriam quantitatum transcendentium $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-\alpha xx)(1-\beta xx)}}$ ad summam universalitatem perduximus« wird festsetzen dürfen, gehört zu den interessantesten Entwicklungen, welche GAUSS im Gebiete der elliptischen Functionen angestellt hat. Im Hinblick auf Problemstellung und Bezeichnungsweise schliesst sich dieselbe an die Untersuchungen »Elegantiores integralis $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ proprietates« (ges. Werke III p. 404 ff.) an, welche der frühesten Periode der Beschäftigung mit den lemniscatischen Functionen angehören. Andrerseits hat sich GAUSS 1799 mit der Inversion des allgemeinen Integrals erster Gattung $\int \frac{du}{\sqrt{(1+\mu\mu\sin u^2)}}$ beschäftigt.

Sachlich wird die hier vorliegende Entwicklung durch den oben abgedruckten Brief von GAUSS an BESSEL in sehr interessanter Weise beleuchtet. GAUSS betont daselbst wiederholt die Bedeutung der ganzen transcendenten Functionen. Hier wird in eleganter Entwicklung die Function $f\varphi$, welche später von JACOBI mit $\sin \operatorname{am} \varphi$ bezeichnet wurde, als Quotient zweier Functionen $P\varphi$ und $Q\varphi$ dargestellt, welche GAUSS unzweifelhaft in ihrer Eigenschaft als ganze transcendente Functionen gekannt hat.

Es sei noch die Bemerkung gestattet, dass die Functionen P, Q, welche GAUSS hier einführt, keine anderen sind als diejenigen, welche späterhin WEIERSTRASS in Anknüpfung an ABELS Arbeiten mit der Bezeichnung $\mathrm{Al}(\varphi)_1$ und $\mathrm{Al}(\varphi)_0$ belegte.

FRICKE.

THEOREMA ELEGANTISSIMUM.

Sit

$$1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}xx+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{4}x^4+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{6}x^6+\text{etc.} = fx,$$

$$\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{4}x^3+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{5}{6}x^5+\text{etc.} = f'x,$$

eritque

$$\sin\varphi\ f\sin\varphi\ f'\cos\varphi+\cos\varphi\ f\cos\varphi\ f'\sin\varphi = \frac{2}{\pi\sin\varphi\cos\varphi}.$$

BEMERKUNGEN ZUM »THEOREMA ELEGANTISSIMUM«.

Dieses Theorem hat GAUSS auf die letzte Seite seines Handexemplars von »EULER, Methodus inveniendi curvas Maximi Minimive proprietate gaudentes« geschrieben. Der Satz fand hier Aufnahme wegen der eleganten Gestalt der Schlussformel, welche offenbar GAUSS selbst frappirte. In der Sache handelt es sich um eine der einfachsten Differentialrelationen aus der Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels, wie sich mit Hülfe einiger weniger Formeln aus Art. 13 und 14 des »Arithmetisch-geometrischen Mittels« (cf. ges. Werke III p. 379 ff.) zeigen lässt. Es erweist sich nämlich fx als die GAUSSische Reihe $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;x^2)$, so dass man auf Grund der beiden letzten Formeln p. 381 l. c. setzen kann:

$$x = \sin\varphi = \frac{b}{a}, \qquad \sqrt{1-x^2} = \cos\varphi = \frac{c}{a},$$

$$f\sin\varphi = \frac{a}{M(a,c)}, \qquad f\cos\varphi = \frac{a}{M(a,b)}.$$

Das hier aufgestellte Theorem kleidet sich daraufhin nach einer einfachen Zwischenrechnung in die Gestalt:

$$\frac{b^2.\,d\log\frac{a}{M(a,b)}}{d\log\frac{c}{a}} - \frac{c^2.\,d\log\frac{a}{M(a,c)}}{d\log\frac{a}{b}} = \frac{2}{\pi}M(a,b)\,M(a,c),$$

eine Formel, die eine einfache Folge der ersten Gleichungen p. 380 l. c. ist.

FRICKE.

[DREI FRAGMENTE ÜBER ELLIPTISCHE MODULFUNCTIONEN.]

[1.]

Ist

$$\frac{n}{m} = \frac{\mu(1-2e^{-M\pi}+2e^{-4M\pi}-2e^{-9M\pi}+\cdots)^2}{\mu(1+2e^{-M\pi}+2e^{-4M\pi}+2e^{-9M\pi}+\cdots)^2},$$

so kann man statt M setzen

$$\cfrac{1}{2ai+\cfrac{1}{2bi+\cfrac{1}{2ci+\cfrac{1}{2di+\cfrac{1}{2ei+\text{etc.}+\cfrac{1}{M}}}}}},$$

wo a, b, c, d, e u. s. w. eine beliebige ungerade Menge ganzer reeller Zahlen bedeuten; oder auch

$$\frac{pM+2qi}{r+2sMi} = \frac{M+2(qr-psMM)i}{rr+4ssMM},$$

wo p, q, r, s beliebige, der Bedingung

$$pr+4qs = 1$$

Genüge leistende ganze reelle Zahlen sind.

[2.]

DIE REDUCTION VON pM, qM, rM AUF DIE EINFACHSTE FORM.

Es sei $M = \frac{\alpha+\beta i}{\delta-\gamma i}$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze reelle Zahlen und Zähler und Nenner ohne gemeinschaftlichen Factor. Man setze

$$\alpha\alpha+\beta\beta = A, \quad \alpha\gamma+\beta\delta = B, \quad \gamma\gamma+\delta\delta = C, \quad \alpha\delta-\beta\gamma = \sqrt{(AC-BB)} = D.$$

Man suche die einfachste Form des Determinanten $-DD$, welche der Form (A, B, C) aequivalent ist; sie sei (a, b, c).

Dann lassen sich die Functionen von M auf Functionen von

$$\frac{D+bi}{a}$$

zurückführen. Der Algorithmus ist dieser

$$\begin{array}{lll}
\frac{D+Bi}{A} = M, & DD+BB = AA', & B+B' = hA', \\
\frac{D+B'i}{A'} = M', & DD+B'B' = A'A'', & B'+B'' = h'A'', \\
\frac{D+B''i}{A''} = M'', & DD+B''B'' = A''A''', & B''+B''' = h''A''', \\
\ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{D+Bi}{A}}\cdot pM &= pM' \quad \text{für gerades } h, \\ &= qM' \quad \text{für ungerades } h,\end{aligned}$$

$$\varepsilon^h\sqrt{\frac{D+Bi}{A}}\cdot qM = rM', \qquad \varepsilon = \sqrt{i},$$

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{D+Bi}{A}}\cdot rM &= qM' \quad \text{für gerades } h, \\ &= pM' \quad \text{für ungerades } h.\end{aligned}$$

Wenn man aus h, h', h'' u. s. w. die Transformation von (A, B, A') in (a, b, c) ableitet, so werden deren Elemente (ob sie gerade oder ungerade sind) entscheiden, welche Function von $\frac{D+bi}{a}$ mit der gegebnen von M so zusammen-

hängt, dass letztere in

$$\varepsilon^H\sqrt{\left(\frac{D+Bi}{A}\cdot\frac{D+B'i}{A'}\cdot\frac{D+B''i}{A''}\ldots\right)}$$

multiplicirt werden muss.

Wo M nicht rational ist, mag man $D = -1$ setzen und den Algorithmus ebenso bilden; nemlich, wenn $M = g+hi$, so geht man von der Form $\left(\frac{1}{g}, \frac{h}{g}, \frac{gg+hh}{g}\right)$ (Det. -1) aus, sucht ihre Aequivalente etc.

[3.]

$$\begin{aligned}
pt &= 1+2e^{-\pi t}+2e^{-4\pi t}+2e^{-9\pi t}+\text{etc.} \\
qt &= 1-2e^{-\pi t}+2e^{-4\pi t}-2e^{-9\pi t}+\text{etc.} \\
rt &= 2e^{-\frac{1}{4}\pi t}+2e^{-\frac{9}{4}\pi t}+2e^{-\frac{25}{4}\pi t}+\text{etc.}
\end{aligned}$$

Um die Gleichung

$$\frac{qt}{pt} = A$$

aufzulösen, setze man $AA = \frac{n}{m}$ und suche das a.-g. Mittel zwischen m und n; es sei dasselbe $= \mu$. Man suche ferner das a.-g. Mittel zwischen m und $\sqrt{(mm-nn)}$ oder, was dasselbe ist, zwischen $(m+n)$ und $(m-n)$; dieses sei $= \lambda$. Man hat dann $t = \frac{\mu}{\lambda}$.

Man erhält so nur Einen Werth von t; sämmtliche andere werden dann in der Formel

$$\frac{\alpha t-2\beta i}{\delta-2\gamma ti}$$

enthalten sein, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle ganzen Zahlen bedeuten, die der Gleichung:

$$\alpha\delta-4\beta\gamma = 1$$

Genüge leisten.

Um aus A abzuleiten

$$B = \frac{q(\frac{1}{2}t)}{p(\frac{1}{2}t)},$$

ist eine biquadratische Gleichung aufzulösen:

$$(B-A)^4 = 4(A-A^3)(B-B^3),$$

oder

$$(1-AB)^4 = (1-A^4)(1-B^4).$$

Den vier Wurzeln correspondiren $\frac{1}{3}t,\ \frac{1}{3}t+\frac{2}{3}i,\ \frac{1}{3}t+\frac{4}{3}i,\ 3t.$

Für $A = \frac{1}{2}$ suche man zwei a.-g. Mittel

$$m = 4, \qquad n = 1$$

$$\mu = 2{,}2430340, \qquad \lambda = 3{,}9364917.$$

Also

$$\begin{aligned} t &= 0{,}56983, \\ \log t &= 9{,}7557537, \\ \log(\pi \log e) &= 0{,}1349342, \\ \hline & \ 9{,}8906879, \\ \log e^{-\pi t} &= -0{,}7774777, \\ &= 9{,}2225223, \\ pt &= 1{,}33540375, \\ qt &= 0{,}66770187. \end{aligned}$$

BEMERKUNGEN ZU DEN FRAGMENTEN ÜBER ELLIPTISCHE MODULFUNCTIONEN.

Der durch den Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels gegebene Ansatz, vermöge dessen sich Gauss den Zugang zur Theorie der elliptischen Functionen und der zugehörigen Modulfunctionen gebahnt hat, brachte es mit sich, dass bei Gauss (entgegen der neuerdings für gewöhnlich befolgten Entwicklungsweise) die Modulfunctionen den allgemeinen elliptischen Functionen voranstehen. Dieser Standpunkt ist insofern der natürliche, als die Modulfunctionen Functionen einer einzigen Variabelen bez. zweier homogener Variabelen sind, während die allgemeinen elliptischen Functionen von zwei Argumenten bez. von drei homogenen Argumenten abhängen.

Der fragliche Algorithmus in richtiger Allgemeinheit ist in Art. 12 *) definirt. Aus drei zunächst reellen

*) Hier und weiterhin sind die Artikel der aus dem Nachlass herausgegebenen Abhandlung über das arithmetisch-geometrische Mittel (ges. Werke III p. 361—403) gemeint.

Grössen a, b, c werden die beiden Mittel $M(a, b)$ und $M(a, c)$ abgeleitet und in ihrer Abhängigkeit vom gegebenen Tripel a, b, c studirt.

Zwei Gesichtspunkte werden alsdann für die Gauss'sche Entwicklung fundamental. Erstlich handelt es sich um den auch in der späteren Entwicklung der Theorie der elliptischen Functionen so bedeutungsvollen Gedanken der Inversion, d. i. um das Problem, die ursprünglich gegebenen a, b, c in ihrer Abhängigkeit von $M(a,b)$ und $M(a,c)$ aufzufassen. Andrerseits wird beim Ausbau dieser Auffassung die Annahme der a, b, c bez. $M(a,b)$, $M(a,c)$ als complexer Variabeler natürlich bez. nothwendig.

In erster Hinsicht ist es ein wichtiges Ergebniss, dass Gauss bereits in den neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts die Reihenentwicklungen für die Nullwerthe der drei geraden ϑ-Functionen gekannt hat. Die hierbei angewendete Überlegung (s. Art. 16) ist sowohl im Hinblick auf die Erfassung des wahren Zieles der Untersuchung, wie auch wegen der im einzelnen befolgten Schlussweisen höchst bemerkenswerth.

Die Zulassung complexer Variabelen erschien namentlich wegen der Entwicklungen in Art. 17 geboten. Es werden daselbst die Grundformeln für die lineare Transformation der ϑ-Nullwerthe aufgestellt. Von hier aus aber hat Gauss eine Reihe wichtiger Grundsätze der Theorie der Modulfunctionen erkannt, die erst in neuerer Zeit allgemein zugänglich geworden sind.

Man wolle in dieser Hinsicht erstlich die Angaben des Art. 17 vergleichen, demnächst aber die vorstehend abgedruckten Fragmente. Die Grösse t des Fragmentes [3] hängt mit dem Periodenquotienten ω der neueren Theorie vermöge der Gleichung $\omega = it$ zusammen. Die Erzeugenden der Gruppe aller linearen Periodentransformationen werden daraufhin:

$$t' = t + i, \qquad t' = \frac{1}{t}.$$

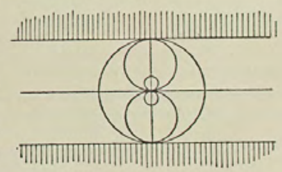
Mit der Zusammensetzung der übrigen Substitutionen der genannten Gruppe aus diesen Erzeugenden hat sich Gauss wiederholt beschäftigt. Neben den Angaben des Fragmentes [1] sei noch die Formel erwähnt

$$\frac{[\alpha, \beta, \ldots, \nu]\,\theta + [\beta, \gamma, \ldots, \nu]\,i}{-i\,[\alpha, \beta, \ldots, \mu]\,\theta + [\beta, \gamma, \ldots, \mu]},$$

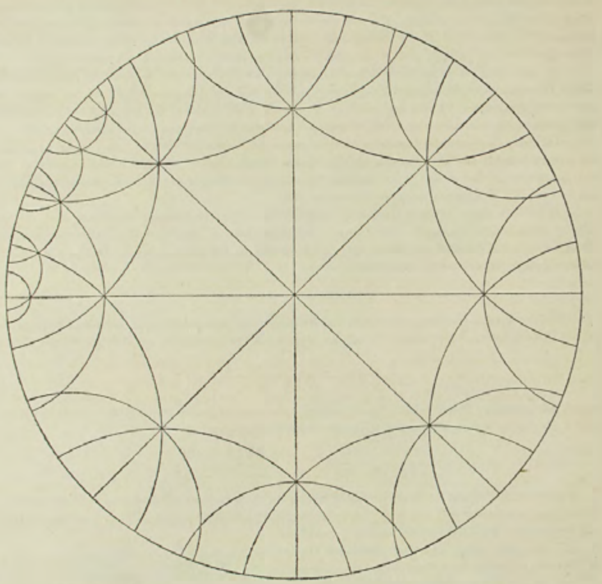
welche sich in einem »Cereri Palladi Junoni sacrum, Febr. 1805« betitelten Hefte findet. Als Beispiele sind ebenda die Kettenbruchentwicklungen der beiden Substitutionen gegeben:

$$\frac{128\theta + 37i}{-45i\theta + 13}, \qquad \frac{121\theta + 36i}{-84i\theta + 25}.$$

Sowohl zur Erläuterung der Kettenbruchentwicklung der Substitutionen als auch zum Vollzug functionentheoretischer Schlüsse hat sich Gauss derjenigen geometrischen Darstellungsweise bedient, welche zur Grundlage der neueren Theorie der Modulfunctionen geworden ist. In dem eben schon erwähnten Hefte hat Gauss die hierneben wiedergegebene Figur gezeichnet. Da sich daneben die erwähnten Kettenbruchentwicklungen von Substitutionen finden, so wird Gauss die Figur als Mittel zur Veranschaulichung dieser Kettenbruchentwicklungen benutzt haben. In der That hat man ja hier den Beginn des wohlbekannten Netzes der Kreisbogendreiecke, welches der Theorie der Modulfunctionen zu Grunde liegt.



Dass Gauss das hierbei in Betracht kommende »Princip der symmetrischen Vervielfältigung von Kreisbogendreiecken« allgemein aufgefasst hat, ja dass ihm sogar der Charakter der »natürlichen Grenze« eines so zu gewinnenden Dreiecksnetzes nicht verborgen blieb, geht auch aus der zweiten hier zum Abdruck kommenden Zeichnung hervor, welche sich im Nachlass auf einem



gesonderten Blatte vorfand. Es handelt sich dabei um Kreisbogendreiecke der Winkel $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$, bei denen der in der Zeichnung hervorgehobene Orthogonalkreis die natürliche Grenze abgiebt. Neben der Zeichnung finden sich, von Gauss' Hand geschrieben, folgende Angaben:

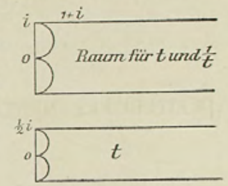
»*Mittelpunkt des ersten Kr.* $\sqrt[4]{2}$,

Halbmesser $\sqrt{(\sqrt{2}-1)}$,

M. d. zw. Kr. $\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(\sqrt{2}+1)}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)}\right\}$,

Halbmesser $\frac{1}{2}\left\{\sqrt{(\sqrt{2}+1)}-\sqrt{(\sqrt{2}-1)}\right\}$.«

Einen mehr functionentheoretischen Charakter haben die in Bd. III p. 477 u. f. der ges. Werke kurz angedeuteten Figuren, welche hier etwas ausführlicher nochmals reproducirt sind. Den in der oberen Figur gezeichneten Bereich charakterisirt Gauss dahin, dass für ihn die imaginären Bestandtheile von t und $\frac{1}{t}$ zwischen $-i$ und $+i$ liegen. Es handelt sich hier um den »Discontinuitätsbereich der Congruenzgruppe zweiter Stufe« im Sinne der neueren Theorie der Modulfunctionen. Gauss hat erkannt, dass die Punkte dieses Bereiches eindeutig auf alle diejenigen complexen Werthe der Function



$$\left(\frac{qt}{pt}\right)^2$$

bezogen sind, welche positiven reellen Bestandtheil haben. Es handelt sich hierbei um die Function k' der neueren Theorie, welche den sogen. complementären Modul des elliptischen Integrals erster Gattung in seiner Abhängigkeit vom Periodenquotienten darstellt. In der a. a. O. von Gauss angegebenen Gleichung:

$$\left(\frac{qt}{pt}\right)^2 = A$$

ist übrigens A als complexe Zahl mit einem absoluten Betrage ≤ 1 anzunehmen; andrenfalls müsste man den Bereich der t-Ebene in geeigneter Weise verdoppeln.

Hiermit hängen auch die Angaben zu Anfang des Fragmentes [3] unmittelbar zusammen. Es ist dazu nur noch zu bemerken, dass man sogar alle Lösungen der Gleichung:

$$\left(\frac{qt}{pt}\right)^4 = A^4$$

erhält, falls man in der angegebenen Weise alle der Bedingung $\alpha\delta - 4\beta\gamma = 1$ genügenden ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zulässt.

Nicht direct im Zusammenhang hiermit stehen die gegen Ende des Fragmentes [3] angeschlossenen Bemerkungen über die Berechnung von $B = \frac{q(\frac{1}{3}t)}{p(\frac{1}{3}t)}$ aus A. Die hier mitgetheilte Gleichung hat Jacobi späterhin als Modulargleichung für Transformation dritten Grades wiedergefunden, und sie tritt bekanntlich in besonders eleganter (irrationaler) Gestalt auch bei Legendre auf.

Die am Schlusse des Fragmentes beigefügten numerischen Angaben sind übrigens in den letzten Decimalstellen mehrfach ungenau.

Den Zusammenhang zwischen der Theorie der Modulfunctionen und der Arithmetik der binären quadratischen Formen von negativer Determinante hat Gauss frühzeitig erkannt. Neben Art. 17 ist für die Reductionstheorie der Formen namentlich das Fragment [2] von Wichtigkeit. Dabei beachte man insbesondere die Schlusszeile; Gauss hat daselbst ausgesprochen, dass die Reductionstheorie keineswegs an die Voraussetzung ganzzahliger oder rationaler Coefficienten gebunden ist.

Fricke.

[WEITERE FRAGMENTE ÜBER DAS PENTAGRAMMA MIRIFICUM.]

[9.]

Die Exponenten der Verjüngung der Hauptaxen der centralen Projectionsellipse sind:

$$\sqrt{\frac{G'-1}{G'}} = \frac{2G'-1}{\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}} \quad \text{für die erste Axe} \quad \frac{1}{\sqrt{G'}},$$

$$\sqrt{\frac{G''-1}{G''}} = \frac{2G''-1}{\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}} \quad \text{für die zweite Axe} \quad \frac{1}{\sqrt{G''}},$$

oder weil

$$GG'G'' = -\tfrac{1}{4}\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon,$$

$$(G-1)(G'-1)(G''-1) = -\tfrac{1}{4},$$

$$(2G-1)(2G'-1)(2G''-1) = -\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$$

[gilt], die Verjüngung der projicirten Axen $= \frac{1}{1-2G}$.

Es ist vortheilhaft, neben den vorigen Grössen G, G', G'' auch die Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{u^3+u}{uu-1} = \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$$

einzuführen. Sind dieselben ξ, η, ζ, so ist:

$$\xi+\eta+\zeta = -\xi\eta\zeta = \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon},$$

$$\xi\eta+\eta\zeta+\zeta\xi = 1,$$

$$G = \frac{\zeta\zeta}{\zeta\zeta-1} \qquad \text{oder} \qquad \zeta = \sqrt{\frac{G}{G-1}},$$

$$G' = \frac{\xi\xi}{\xi\xi-1} \qquad \text{oder} \qquad \xi = \sqrt{\frac{G'}{G'-1}},$$

$$G'' = \frac{\eta\eta}{\eta\eta-1} \qquad \text{oder} \qquad \eta = \sqrt{\frac{G''}{G''-1}}.$$

Auf das innere Pentagon (das sphärische) beziehen sich die Coordinaten:

$$\frac{\frac{x}{\xi}}{\sqrt{\frac{xx}{\xi\xi}+\frac{yy}{\eta\eta}+\frac{zz}{\zeta\zeta}}}, \qquad \frac{\frac{y}{\eta}}{\sqrt{\frac{xx}{\xi\xi}+\frac{yy}{\eta\eta}+\frac{zz}{\zeta\zeta}}}, \qquad \frac{\frac{z}{\zeta}}{\sqrt{\frac{xx}{\xi\xi}+\frac{yy}{\eta\eta}+\frac{zz}{\zeta\zeta}}};$$

auf das folgende innere würde sich beziehen:

$$\frac{\frac{x}{\xi\xi}}{\sqrt{\frac{xx}{\xi^4}+\frac{yy}{\eta^4}+\frac{zz}{\zeta^4}}}, \qquad \frac{\frac{y}{\eta\eta}}{\sqrt{\frac{xx}{\xi^4}+\frac{yy}{\eta^4}+\frac{zz}{\zeta^4}}}, \qquad \frac{\frac{z}{\zeta\zeta}}{\sqrt{\frac{xx}{\xi^4}+\frac{yy}{\eta^4}+\frac{zz}{\zeta^4}}}$$

u. s. f. Für das äussere hingegen sind die Coordinaten:

$$\frac{\xi x}{\sqrt{\xi\xi xx+\eta\eta yy+\zeta\zeta zz}}, \qquad \frac{\eta y}{\sqrt{\xi\xi xx+\eta\eta yy+\zeta\zeta zz}}, \qquad \frac{\zeta z}{\sqrt{\xi\xi xx+\eta\eta yy+\zeta\zeta zz}},$$

u. s. f.

Für unser Beispiel, wo $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 20$ ist, sind die Zahlwerthe:

$$\xi = 3{,}9276268 \qquad \eta = 1{,}3735071 \qquad \zeta = -0{,}8289980.$$

[10.]

λ, μ Verjüngungscoefficienten (negative Brüche).

$$\left.\begin{array}{lllll} a, & a\lambda, & a\lambda\lambda, & a\lambda^3, & \dots \\ b, & b\mu, & b\mu\mu, & b\mu^3, & \dots \end{array}\right\} \quad \text{successive Hauptaxen der Projectionsellipsen.}$$

$a\xi+b\eta i$, $a\xi'+b\eta' i$ u. s. w. die fünf Polygonpunkte (in Sternform).

λ, μ, ν Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\lambda\lambda+1}{\lambda^3-\lambda} = \frac{\mu\mu+1}{\mu^3-\mu} = \frac{\nu\nu+1}{\nu^3-\nu} = \sqrt{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon} = \frac{1}{\omega}.$$

$$\lambda+\mu+\nu = \lambda\mu\nu = \omega,$$

$$\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda+1 = 0,$$

$$\lambda\lambda+\mu\mu+\nu\nu = \omega\omega+2.$$

$$\lambda = \operatorname{tang} L, \qquad \mu = \operatorname{tang} M, \qquad \nu = \operatorname{tang} N,$$

$$L+M+N = 0.$$

In unserm Beispiele:

$$L = -14^0 17' 4'', \qquad M = -36^0 3' 26'', \qquad N = 50^0 20' 30''.$$

$$G' = \frac{1}{1-\lambda\lambda} = \frac{\cos L^2}{\cos 2L},$$

$$G'' = \frac{1}{1-\mu\mu} = \frac{\cos M^2}{\cos 2M},$$

$$G = \frac{1}{1-\nu\nu} = \frac{\cos N^2}{\cos 2N},$$

$$(1-\lambda\lambda)\xi\xi'+(1-\mu\mu)\eta\eta'+(1-\nu\nu) = 0,$$

$$\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)\xi\xi'+\left(\mu+\frac{1}{\mu}\right)\eta\eta'+\left(\nu+\frac{1}{\nu}\right) = 0,$$

$$\left(\lambda-\frac{1}{\lambda}\right)\xi\xi''+\left(\mu-\frac{1}{\mu}\right)\eta\eta''+\left(\nu-\frac{1}{\nu}\right) = 0,$$

$$\frac{\lambda\lambda+1}{\lambda\lambda}\,\xi\xi''+\frac{\mu\mu+1}{\mu\mu}\,\eta\eta''+\frac{\nu\nu+1}{\nu\nu} = 0,$$

$$\frac{\xi\xi'}{\sin 2L}+\frac{\eta\eta'}{\sin 2M}+\frac{1}{\sin 2N} = 0,$$

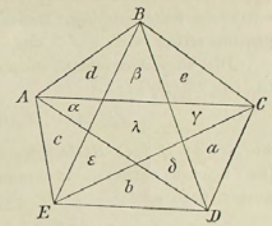
$$\frac{\xi\xi''}{\operatorname{tang} 2L}+\frac{\eta\eta''}{\operatorname{tang} 2M}+\frac{1}{\operatorname{tang} 2N} = 0.$$

Die vier Punkte $\lambda\xi+\mu\eta i$, $\xi'+\eta' i$, $\xi''+\eta'' i$, $\lambda\xi'''+\mu\eta''' i$ liegen in einer geraden Linie, und ebenso vier andere Combinationen von je vier anderen Punkten.

$$\frac{\lambda\lambda+1}{\lambda}(\xi'''-\xi)\xi'''' = \frac{\mu\mu+1}{\mu}(\eta-\eta''')\eta'''',$$

$$\frac{\lambda\lambda+1}{\lambda\lambda}(\xi'-\xi'')\xi'''' = \frac{\mu\mu+1}{\mu\mu}(\eta''-\eta')\eta''''.$$

[11.]



$$\beta+\varepsilon+\lambda = A,$$

$$\gamma+\alpha+\lambda = B,$$

$$\delta+\beta+\lambda = C,$$

$$\varepsilon+\gamma+\lambda = D,$$

$$\alpha+\delta+\lambda = E,$$

$$\gamma+\delta+\lambda = A', \qquad c+d+\alpha = \mathfrak{A},$$

$$\delta+\varepsilon+\lambda = B', \qquad d+e+\beta = \mathfrak{B},$$

$$\varepsilon+\alpha+\lambda = C', \qquad e+a+\gamma = \mathfrak{C},$$

$$\alpha+\beta+\lambda = D', \qquad a+b+\delta = \mathfrak{D},$$

$$\beta+\gamma+\lambda = E', \qquad b+c+\varepsilon = \mathfrak{E},$$

$$a+b+c+d+e = s,$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = \sigma,$$

$$A+B+C+D+E = S = A'+B'+C'+D'+E',$$

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}+\mathfrak{D}+\mathfrak{E} = \mathfrak{S},$$

$$S = 2\sigma+5\lambda = S',$$

$$\mathfrak{S} = \sigma+2s, \qquad \omega = s+\sigma+\lambda.$$

Proportionalitäten:

$$aA = (e+\gamma)(b+\delta),$$

$$bB = (a+\delta)(c+\varepsilon),$$

$$cC = (b+\varepsilon)(d+\alpha),$$

$$dD = (c+\alpha)(e+\beta),$$

$$eE = (d+\beta)(a+\gamma),$$

alle aus dem Princip, dass die Producte aus den von einander abgekehrten (bloss gemeinschaftliche Spitze habenden, oder noch concinner, keine gemeinschaftliche Seite habenden) Dreiecken, in welche ein Viereck durch die Diagonalen zerlegt wird, gleich sind.

Die allgemeine barycentrische Gleichung zwischen vier Punkten, z. B. (A), (B), (C), (D) ist:

$$\triangle_{A}(A)+\triangle_{B}(B)+\triangle_{C}(C)+\triangle_{D}(D)=0,$$

wo $\triangle_{A}$ das Dreieck BCD, $\triangle_{B}$ das Dreieck CDA u. s. w. (mit Rücksicht auf [das] Zeichen) vorstellt. In unserm Fall wird, wenn man zu obigen Bezeichnungen noch setzt:

$$A^{*}=\alpha+\gamma+\delta+a+\lambda, \quad \text{u. s. w.}$$

$$A^{*}=\omega-\mathfrak{B}-\mathfrak{E}, \quad \text{u. s. w.},$$

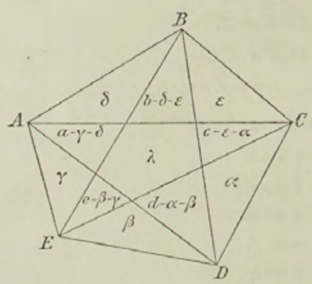
der Typus der Gleichung zwischen vier Punkten:

$$\mathfrak{C}(A)+D^{*}(C)=A^{*}(B)+\mathfrak{B}(D),$$

wo (A) den betreffenden Eckpunkt des äussern Pentagons ausdrückt, oder:

$$\mathfrak{C}(A)+(\omega-\mathfrak{E}-\mathfrak{C})(C)=(\omega-\mathfrak{B}-\mathfrak{C})(B)+\mathfrak{B}(D)=(\omega-\mathfrak{C})(e),$$

wo (e) den betreffenden Punkt des inneren Pentagons ausdrückt.



$$Ac\varepsilon+Cc(b-\varepsilon)=Bb(c-\varepsilon)+Db\varepsilon,$$
$$Bd\alpha+Dd(c-\alpha)=Cc(d-\alpha)+Ec\alpha,$$
$$Ce\beta+Ee(d-\beta)=Dd(e-\beta)+Ad\beta,$$
$$Da\gamma+Aa(e-\gamma)=Ee(a-\gamma)+Be\gamma,$$
$$Eb\delta+Bb(a-\delta)=Aa(b-\delta)+Ca\delta,$$

$$\lambda\alpha=(c-\alpha)(d-\alpha)-(e+b-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon)\alpha,$$
$$\lambda\beta=(d-\beta)(e-\beta)-(a+c-\gamma-\delta-\varepsilon-\alpha)\beta,$$
$$\lambda\gamma=(e-\gamma)(a-\gamma)-(b+d-\delta-\varepsilon-\alpha-\beta)\gamma,$$
$$\lambda\delta=(a-\delta)(b-\delta)-(c+e-\varepsilon-\alpha-\beta-\gamma)\delta,$$
$$\lambda\varepsilon=(b-\varepsilon)(c-\varepsilon)-(d+a-\alpha-\beta-\gamma-\delta)\varepsilon,$$

oder in den folgenden Zeichen

$$\lambda(0)=(8+9)(1+2)-0(3+7)$$

oder, wenn

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=\sigma, \qquad a+b+c+d+e=s$$

gesetzt wird,

$$cd=(s+\lambda-\sigma-a)\alpha,$$
$$de=(s+\lambda-\sigma-b)\beta,$$
$$ea=(s+\lambda-\sigma-c)\gamma,$$
$$ab=(s+\lambda-\sigma-d)\delta,$$
$$bc=(s+\lambda-\sigma-e)\varepsilon.$$

Also [ergibt sich]

$$\lambda=\omega-s+\frac{cd}{\omega-a}+\frac{de}{\omega-b}+\frac{ea}{\omega-c}+\frac{ab}{\omega-d}+\frac{bc}{\omega-e},$$
$$=\frac{acd}{\omega\omega-\omega a}+\frac{bde}{\omega\omega-\omega b}+\frac{cea}{\omega\omega-\omega c}+\frac{dab}{\omega\omega-\omega d}+\frac{ebc}{\omega\omega-\omega e}.$$

Folglich, $ab+bc+cd+de+ea=S$ und $a\alpha+b\beta+c\gamma+d\delta+e\varepsilon=\Sigma$ gesetzt,

$$S=\sigma(s+\lambda-\sigma)-\Sigma.$$

Der Inhalt des äussern Polygons ist $=s+\lambda-\sigma=\omega$; also

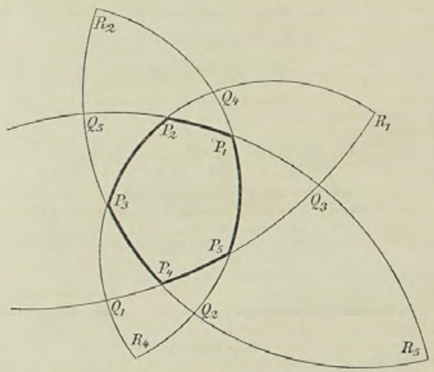
$$S=\sigma\omega-\Sigma.$$

BEMERKUNGEN ZU DEN ELF PENTAGRAMM-FRAGMENTEN.

Die zahlreichen Entwicklungen und Notizen über das »Pentagramma mirificum«, welche sich in GAUSS' Nachlass vorgefunden haben, stammen aus sehr verschiedenen Zeiten und zeigen eine vielfach wechselnde Bezeichnungsweise. Dem entsprechen die vielen verschiedenartigen Standpunkte, von denen aus das Pentagramm von GAUSS betrachtet wurde. Neben den acht in Bd. III der ges. Werke p. 481 ff. veröffentlichten Fragmenten kommen in dieser Hinsicht noch zwei Auffassungen in Betracht, welche in den drei hier vorstehend abgedruckten Fragmenten die Grundlage abgeben. Einige weitere nicht publicirte Entwicklungen enthalten theils Wiederholungen theils ausführliche numerische Rechnungen zu dem von GAUSS immer wieder herangezogenen Beispiele mit $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = 20$.

Um eine sachliche Erläuterung der Fragmente [9] bis [11] zu geben, ist es nöthig auf die Fragmente [1] bis [8] zurückzugreifen.

Als »Pentagramma mirificum« bezeichnet GAUSS ein bereits von NEPER*) bei seinen Untersuchungen über das rechtwinklige sphärische Dreieck benutztes sphärisches Fünfeck ohne einspringende Winkel, in welchem jede einzelne Ecke den Pol der Gegenseite darstellt, und in dem hiernach die fünf Diagonalen Quadranten der Kugel sind. Alle diese offenbar sich selbst polaren Fünfecke bilden ein zweifach unendliches Continuum. Die beigefügte Figur liefert (in stereographischer Projection) ein Pentagramm $P_1P_2P_3P_4P_5$.



Dasselbe ist begleitet von zwei weiteren zwei- bez. dreifach gewundenen Fünfecken $Q_1Q_3Q_5Q_2Q_4$ und $R_1R_4R_2R_5R_3$. Zufolge der Grundeigenschaft des Pentagramma sind die Winkel dieser beiden letzteren Fünf-

*) Da die fraglichen NEPERschen Untersuchungen verhältnissmässig wenig bekannt sind, so sei es erlaubt hier ein paar Bemerkungen über dieselben einzuschalten. Sie sind enthalten im Liber II, Caput IV

ecke durchweg rechte; sind s_k die Seitenlängen des Pentagramms $P_1 \ldots P_5$ (den Kugelradius gleich 1 gesetzt), so findet man die Seiten der weiteren Fünfecke aus:

$$\widehat{P_kQ_{k+2}} = \frac{\pi}{2} - s_{k-2}, \qquad \widehat{P_kQ_{k-2}} = \frac{\pi}{2} - s_{k+2},$$
$$\widehat{Q_kR_{k+2}} = s_{k+1}, \qquad \widehat{Q_kR_{k-2}} = s_{k-1}.$$

Unter den Pentagrammen befindet sich insbesondere ein reguläres. Dieses hat die Seitenlänge $s = \arcsin\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ und lässt sich aus dem sphärischen Dreieck der Winkel $\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$ durch Reproduction um die Ecke des ersten Winkels erzeugen.

Die soeben am allgemeinen Pentagramm aufgewiesenen geometrischen Relationen lassen sich vermöge der Grundformeln des rechtwinkligen sphärischen Dreiecks in Gestalt einer Reihe von Gleichungen ansetzen; dies ist in den Fragmenten [1] und [3] ausgeführt. —

Projicirt man das Pentagramm aus dem Kugelmittelpunkt auf eine Tangentialebene mit einem im Pentagramm gelegenen Berührungspunkt O, so entsteht ein ebenes Fünfeck, in dem die fünf Geraden $\overline{OP_k}$ die Höhen liefern. Das ebene Fünfeck hat somit die beiden, übrigens für dasselbe bestimmenden, Eigenschaften:

1) die fünf Höhen laufen alle durch einen und denselben Punkt O;

2) die einzelne Höhe wird durch O in zwei Stücke getheilt, deren Product für alle Höhen gleich (und zwar gleich dem Quadrat des Kugelradius) ist.

Die Projectionsebene macht GAUSS nun zur Trägerin der complexen Zahlen (cf. Fragment [2]) und wählt insbesondere O als Nullpunkt. Die weiterhin im Fragmente [2] gegebenen Entwicklungen haben folgenden Sinn. Auf fünf von O ausziehenden Strahlen werden fünf Punkte $p, p', \ldots, p''''$ willkürlich gewählt; die von GAUSS angegebene Verschiebung dieser Punkte je auf ihren Strahlen bis in die Lagen $q, q', \ldots, q''''$ liefert alsdann in diesen letzten Punkten die Ecken eines Pentagramms unserer Art. —

Ist M der Kugelmittelpunkt, so lässt sich durch die fünf nach den Pentagrammecken P_k ziehenden Strahlen $\overline{MP_k}$ ein eindeutig bestimmter Kegel zweiten Grades legen. Der letztere und namentlich die Trans-

von NEPERs »Mirifici Logarithmorum canonis descriptio« (Lugduni 1619) und gipfeln in dem heute als »NEPERsche Regel« bezeichneten Theorem: Sind h die Hypothenuse, a, b die Katheten eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks, und sind α, β die a bez. b gegenüberliegenden Winkel, so sind mit a, b, h, α, β stets auch

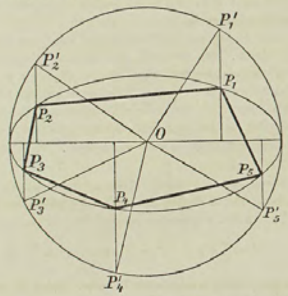
$$a' = \frac{\pi}{2} - h, \quad b' = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad h' = \frac{\pi}{2} - b, \quad \alpha' = \frac{\pi}{2} - a, \quad \beta' = \alpha$$

fünf Bestimmungsstücke eines rechtwinkligen sphärischen Dreiecks. Dabei ist der Übergang vom ersten zum zweiten Dreieck eine Operation, welche sich nach fünfmaliger Wiederholung von selbst schliesst, insofern man alsdann zu den ursprünglichen Bestimmungsstücken a, b, h, α, β zurückgelangt. Von dieser Regel sagt NEPER selbst, sie gehe handgreiflich hervor aus der Figur eines Fünfecks, wie es eben auch GAUSS in den in Rede stehenden Fragmenten studirt. In der That ertheilen wir in der sogleich im Texte näher zu beschreibenden Figur dem Dreieck $P_1P_2Q_4$, auf der Kugel gedacht, die Bestimmungsstücke $\widehat{P_1Q_4} = a$, $\widehat{P_2Q_4} = b$, $\widehat{P_1P_2} = h$, etc., so ist es gerade das benachbarte rechtwinklige Dreieck $P_2P_3Q_5$, welches die vorhin mit $a', b', h', \alpha', \beta'$ bezeichneten Bestimmungsstücke bekommt. Man kann hiernach geradezu ein einzelnes rechtwinkliges sphärisches Dreieck zum Ausgangspunkt nehmen und von ihm aus durch Verlängern zweier Seiten um ihre Complemente u. s. w. zu den übrigen vier Dreiecken der Figur und damit zum Pentagramm gelangen. —

formation desselben auf seine Hauptaxen spielen in den weiteren Gauss'schen Entwicklungen eine grundlegende Rolle. Die cubische Gleichung dieser Hauptaxentransformation, welche allein vom Product der fünf Tangenten der Pentagrammseiten abhängt, wird auch nach ihrer numerischen Seite in [5] behandelt. Will man übrigens die zahlreichen Relationen der Fragmente [5] und [6] beweisen, so knüpft man am besten an die wohlbekannten neueren Grundformeln für die Hauptaxentransformation eines Kegels an. Bei dem von Gauss zunächst ausgewählten Coordinatensystem x, y, z kann man aus jenen Grundformeln die Gleichungen der genannten Fragmente fast ohne Rechnung ableiten. —

Die Entwicklungen unter [7] und [8], welche das Datum 1843 April 20 tragen, begründen die Beziehung des Pentagramms zur Fünftheilung der elliptischen Functionen. Es ist unzweifelhaft, dass Gauss diese Beziehung auf Anregung von Jacobis Abhandlung »Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie«*) erkannt hat. Jacobi studirt daselbst Fünfecke, deren einzelnes einem Kreise eingeschrieben und zugleich einem zweiten Kreise umschrieben ist, und weist deren Beziehung zu den elliptischen Functionen auf.

Um den Übergang vom Pentagramm zum Jacobischen Fünfeck zu bewerkstelligen, projicire man ersteres vom Kugelmittelpunkt auf diejenige Tangentialebene der Kugel, deren Berührungspunkt der Durchschnittspunkt der Kugel mit der Kegelaxe ist. Der Kegel wird von dieser Projectionsebene in einer Ellipse geschnitten, welcher das projicirte Pentagramm eingeschrieben ist. Die hierneben in der Figur angedeutete affine Transformation liefert in $P_1' P_2' \ldots P_5'$ ein Jacobisches Fünfeck.



Die Richtigkeit dieser Angaben geht aus der Übereinstimmung der Gauss'schen Formeln in [7] und [8] mit den von Jacobi a. a. O. entwickelten Gleichungen hervor. Zum Beweise der Gauss'schen Relationen kann man so verfahren:

Benutzt man in der Projectionsebene die Hauptaxen der Ellipse als Axen x, y und setzt den Kugelradius gleich 1, so liegt der Kugelmittelpunkt senkrecht zur Ebene unter O in der Entfernung 1. Die Grundeigenschaft des Pentagramms, dass nämlich $\sphericalangle P_{k-1} M P_{k+1} = \frac{\pi}{2}$ ist, liefert die fünf Gleichungen:

$$x_{k-1} x_{k+1} + y_{k-1} y_{k+1} + 1 = 0, \tag{1}$$

*) Crelles Journal Bd. 3 (1828).

wenn x_k, y_k die Coordinaten von P_k sind. Das einzelne Paar x_k, y_k kommt in zwei Gleichungen vor, durch deren Auflösung man findet:

$$x_k = \frac{y_{k+2} - y_{k-2}}{x_{k+2} y_{k-2} - x_{k-2} y_{k+2}}, \qquad y_k = \frac{x_{k-2} - x_{k+2}}{x_{k+2} y_{k-2} - x_{k-2} y_{k+2}}. \tag{2}$$

Ist nun, wie bei Gauss, φ_k die excentrische Anomalie von P_k, so sind die Coordinaten von P_k' offenbar $\cos\varphi_k$, $\sin\varphi_k$, und man findet als Coordinaten von P_k:

$$x_k = \sqrt{\frac{-G}{G'}} \cos\varphi_k, \qquad y_k = \sqrt{\frac{-G}{G''}} \sin\varphi_k,$$

G, G' und G'' im Sinne von Gauss gebraucht. Durch Eintragung dieser Werthe in die Gleichungen (2) ergeben sich die ersten unter [7] angegebenen Gauss'schen Gleichungen:

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi_{k+2} + \varphi_{k-2})}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_{k+2} - \varphi_{k-2})} = \frac{G}{G'} \cos\varphi_k, \qquad \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_{k+2} + \varphi_{k-2})}{\cos\frac{1}{2}(\varphi_{k+2} - \varphi_{k-2})} = \frac{G}{G''} \sin\varphi_k.$$

Eliminirt man hier φ_k und schreibt hernach k statt $k+2$, so folgt:

$$G'^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{k+1}) + G''^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_k + \varphi_{k+1}) = G^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\varphi_k - \varphi_{k+1}),$$

$$G^2 \cos(\varphi_{k+1} - \varphi_k) + (G''^2 - G'^2) \cos(\varphi_{k+1} + \varphi_k) = G'^2 + G''^2 - G^2.$$

Durch Entwicklung der Cosinus und Einführung der Coordinaten der Punkte P_k folgt weiter:

$$(G^2 - G'^2 + G''^2)\, G' x_k x_{k+1} + (G^2 + G'^2 - G''^2)\, G'' y_k y_{k+1} + (-G^2 + G'^2 + G''^2)\, G = 0. \tag{3}$$

Nun sind die G, G', G'' Wurzeln der Gleichung

$$G(2G-1)^2 = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon(G-1).$$

Es ergibt sich demnach für das Absolutglied der letzten Gleichung:

$$(G^2 + G'^2 + G''^2 - 2G^2)\, G = \left(\frac{1 + \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{2} - 2G^2\right) G = \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{2G-1},$$

und man findet analoge Ausdrücke für die Coefficienten der beiden ersten Glieder der Gleichung (3), so dass jene Gleichung übergeht in:

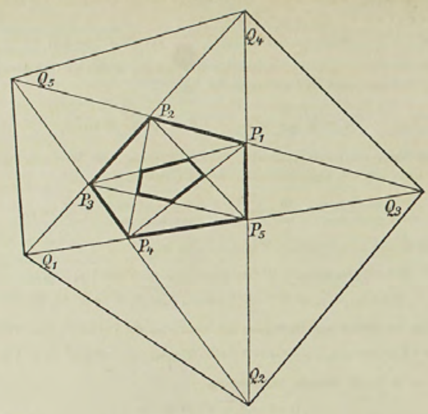
$$\frac{x_k x_{k+1}}{2G'-1} + \frac{y_k y_{k+1}}{2G''-1} + \frac{1}{2G-1} = 0. \tag{4}$$

Indem man diese Gleichung ebenso behandelt wie (1), ergeben sich die weiteren im Fragmente [7] zusammengestellten Relationen.

Die vorstehenden Angaben über die Beziehung zwischen Gauss und Jacobi werden in ein neues Licht durch die Bemerkung gesetzt, dass jedes beliebige gewöhnliche Fünfeck ohne einspringende Winkel collinear in ein Jacobisches und also auch in ein Gauss'sches Pentagramm transformirt werden kann. Dem gegebenen Fünfeck lässt sich nämlich eine bestimmte Ellipse einschreiben und ein gleichfalls bestimmter Kegelschnitt umschreiben. Man hat nur nöthig, dieses Kegelschnittpaar in ein Kreispaar collinear zu überführen, was nach heute wohlbekannten Methoden keine Schwierigkeit hat.

Diese Bemerkung ist auch für die Entwicklungen in den Fragmenten [9] bis [11] von Wichtigkeit. Gauss construirt hier zunächst durch fortgesetztes Diagonalenziehen bez. Seitenverlängern eine nach beiden

Seiten hin unendliche Kette von Fünfecken und erkennt, dass dieses Netz einander umschliessender Fünfecke



durch die Collineation:

$$x' = \frac{2G-1}{2G'-1}\,x, \qquad y' = \frac{2G-1}{2G''-1}\,y \tag{5}$$

in sich transformirt wird. Zur Erläuterung vergl. man die beigefügte Figur; Gauss hat selber Zeichnungen dieser Art angefertigt, in denen die Fünfecknetze noch viel weiter fortgesetzt sind. Die in (5) rechter Hand stehenden Coefficienten sind die »Exponenten« oder »Coefficienten der Verjüngung«, welche in [9] und [10] auftreten. Es liegt sehr nahe, das hier vorliegende Sachverhältniss im Sinne der modernen Theorie der discontinuirlichen Substitutionsgruppen aufzufassen. Der Nullpunkt O erscheint dabei als der innere Grenzpunkt des Pentagrammnetzes und ist einer der drei Grenzpunkte der aus (5) entspringenden cyclischen Collineationsgruppe.

Zufolge der voraufgesandten Bemerkung findet die gleiche Sachlage bei jedem Fünfeck mit einspringenden Winkeln statt. Diese Verhältnisse sind in der neueren Litteratur wohlbekannt.

Die Richtigkeit der Gauss'schen Angaben kann man so bestätigen: Das an $P_1 P_2 \ldots P_5$ sich zunächst anschliessende äussere Fünfeck $Q_1 Q_2 \ldots Q_5$ ist dasselbe, welches aus dem so benannten sphärischen Fünfeck bei der Projection entsteht. Hat Q_k die Coordinaten x'_k, y'_k, so gelten, da $\sphericalangle\, Q_k M P_{k+1} = \frac{\pi}{2}$ ist, die fünf Gleichungen:

$$x'_k x_{k+1} + y'_k y_{k+1} + 1 = 0.$$

Der Vergleich mit den fünf Gleichungen (4) lässt für alle Indices k die Formeln (5) als richtig erscheinen.

Dass Gauss den projectiven Charakter seiner zuletzt besprochenen Entwicklungen gekannt hat, macht namentlich das Fragment [11] wahrscheinlich. Gauss wendet hier die Grundsätze von Moebius' barycentrischem Calcul auf die Figur des geradlinigen Pentagramms an; man wird die Gauss'schen Formeln im Sinne dieses Calculs ohne Mühe verstehen. Dem projectiven Charakter des letzteren entsprechend wird hier an ein beliebiges Fünfeck angeknüpft. Zufolge eines Briefes an Schumacher vom 15. Mai 1843 hat Gauss erst am 14. Mai dieses Jahres das (1827 erschienene) Moebius'sche Werk über den barycentrischen Calcul kennen gelernt und zwar vermuthlich aus Anlass der Aufgabe, den Mittelpunkt eines durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitts durch Construction zu finden. Für die speciellen Fünfecknetze, auf welche sich die Formeln der Fragmente [5] bis [10] beziehen, würde jene Aufgabe identisch sein mit dem Problem, den inneren Grenzpunkt des einzelnen Netzes zu construiren. Übrigens stammt die Entwicklung der Fragmente [7] und [8] aus dem April 1843, und diejenige des Fragmentes [11] schliesst sich (wahrscheinlich unmittelbar) an den 14. Mai 1843. Hiernach wird man annehmen dürfen, dass die in [9] und [10] aufgenommenen Untersuchungen in den zwischen beiden Daten gelegenen Wochen ausgeführt sind.

Fricke.

NUMERISCHES RECHNEN.

NACHTRÄGE ZU BAND III.

ANZEIGE.

Allgemeine Literatur-Zeitung vom Jahre 1808. Halle-Leipzig 1808. Nr. 45. Februar 12. S. 353—358.

Dresden, in der Waltherschen Hofbuchhandlung: Leonellis *logarithmische Supplemente, als ein Beitrag, Mängel der gewöhnlichen Logarithmentafeln zu ersetzen. Aus dem Französischen nebst einigen Zusätzen von* Gottfried Wilhelm Leonhardi, *Souslieutenant beim kurfürstl. sächsischen Feldartilleriecorps.* 1806. 88 S. in Octav.

Diese kleine Schrift enthält zwei von einander unabhängige Abhandlungen, die indessen in so fern einen gemeinschaftlichen Zweck haben, als beide etwas zu leisten bestimmt sind, was sich mit den gewöhnlichen logarithmischen Tafeln ohne anderweitige Hülfsmittel entweder nicht so vollkommen, oder nicht so bequem erreichen lässt. Die eine soll nemlich dazu dienen, vermittelst einiger sehr geschmeidiger, hier zugleich mitgelieferter, Hülfstafeln, zu jeder gegebenen Zahl ohne zu grosse Mühe den Logarithmen auf mehrere Decimalen, als die gewöhnlichen Tafeln verstatten, zu berechnen. Die andere entwickelt die Idee einer besondern Tafel, vermittelst welcher die Logarithmen von Summen oder Differenzen zweier bloss durch ihre Logarithmen gegebenen Grössen durch eine einzige Operation mit einer Bequemlichkeit sollen bestimmt werden können, wie sie bei andern Verfahrungsarten nicht Statt findet; und zwar, des Vfs. Plane nach, gleichfalls mit einer ungewöhnlich grossen Anzahl von Decimalen (14); von dieser Tafel ist jedoch nur erst eine Probe beigefügt. Da das Numerische der Logarithmen und jede sich darauf beziehende Erleichterung jedem, der viel mit Zahlenrechnungen zu thun hat, von grosser Wichtigkeit ist: so wird es sich wohl der Mühe verlohnen, diesen Untersuchungen eine nicht bloss oberflächliche Aufmerksamkeit zu widmen, um besonders den praktischen Werth der davon zu hoffenden Vortheile würdigen zu können.

Der Vf. hatte seine Schrift dem französischen Nationalinstitute zur Beurtheilung vorgelegt; der Bericht, welchen Delambre darüber abgestattet und welchen das Institut gebilligt hat, ist der Schrift selbst beigefügt. Leonelli ist damit nicht ganz zufrieden gewesen, und äussert in seinen gleichfalls angehängten Gegenbemerkungen seine Empfindlichkeit einigemal mit vieler Lebhaftigkeit. Wir werden nicht umhin können, auch Delambres Bericht und Leonellis Beantwortung mit zu berühren, da beide nun einen Theil des Buchs selbst ausmachen.

Bei der in der *ersten* Abtheilung vorgetragenen Methode, den Logarithmen jeder vorgegebenen Grösse A zu berechnen, liegt die Hauptidee zum Grunde, dass diese Grösse in ein Product von der Form

$$10^{\mu}a\left(1+\tfrac{1}{10}b\right)\left(1+\tfrac{1}{100}c\right)\left(1+\tfrac{1}{1000}d\right)\ldots$$

verwandelt werde, so dass $a, b, c, d\ldots$ einfache ganze Zahlen bedeuten. Man sieht erstlich, dass die Logarithmen dieser einzelnen Factoren eine abnehmende Reihe bilden werden, von denen man sich mit einer gewissen grössern oder kleinern Zahl begnügen kann, je nachdem man den Logarithmen des Products mit mehr oder weniger Decimalstellen verlangt; zweitens dass man alle jene einzelnen Logarithmen sogleich in einer ein für allemal berechneten Tafel vorräthig haben kann. Eine solche Tafel liefert Leonelli hier zuerst für die Briggischen Logarithmen auf 20 Decimalstellen. Diese enthält zuerst die Logarithmen der ganzen Zahlen von 2 bis 9; sodann die Logarithmen für alle $1+\frac{1}{10}b$, d. i. für 1,1; 1,2; 1,3 bis 1,9; nachher für alle $1+\frac{1}{100}c$ u. s. w. Ausser den 8 ganzen Zahlen kommen also, für jede Ordnung der gebrochenen, 9 Logarithmen; weiter als bis zur 11ten Ordnung brauchte aber die Tafel nicht ausgedehnt zu werden, da bei der zwölften die Logarithmen mit den Logarithmen der eilften einerlei bedeutende Ziffern haben, und so bei den folgenden. Auf diese Weise umfasst die Tafel nur 107 Logarithmen, welche hinreichen, um den Logarithmen jedes Products der obigen Form auf 18 oder 19 Ziffern durch blosse Addition zu berechnen; die 20ste Stelle bleibt dabei offenbar immer schwankend. Für die hyperbolischen Logarithmen hat Leonelli eine ähnliche Tafel von demselben Umfange beigefügt.

Wie sich übrigens jede Zahl A unter obige Form bringen lasse, wird man leicht übersehen; μ und a ergeben sich sogleich von selbst; macht man dann $A = 10^{\mu}aB$: so ist b die Ziffer in der ersten Decimalstelle von B; setzt man ferner $B = \left(1+\frac{1}{10}b\right)C$, so ist c die Ziffer in der zweiten Decimalstelle von C u. s. w. Bei näherer Untersuchung findet sich, dass man noch bequemer $\frac{1}{A}$, ohne diesen Quotienten wirklich zu berechnen, unter die obige Form bringen kann, indem man successive $10^{\mu}aA = B$, $\left(1+\frac{1}{10}b\right)B = C$ u. s. w. macht, wo man also B aus A, C aus B u. s. w. durch Multiplication erhält, indem bei der ersten Methode Division nöthig ist. Leonelli hat indessen den Calcul bei beiden Methoden durch Reduction auf einen bestimmten Mechanismus noch abgekürzt; wer häufigen Gebrauch von diesen Tafeln zu machen denkt, thut wohl, sich mit demselben vertraut zu machen. Nach einiger Übung wird man es dann gewiss bald dahin bringen, sich die anzuwendende Aufmerksamkeit mechanisch zu machen, und wir halten daher mit Leonelli den Vorwurf Delambres für übereilt, dass eine ermüdende Aufmerksamkeit nöthig sei, wenn man nicht jedesmal alle die vielen überflüssigen Nullen aufschreibe.

Man sieht leicht, dass man auf ähnliche Weise auch A oder $\frac{1}{A}$ unter die Form

$$10^{\mu}a\left(1+\tfrac{1}{100}b\right)\left(1+\tfrac{1}{10000}c\right)\ldots$$

setzen könne, so dass $a, b, c\ldots$ lauter ganze Zahlen unter 100 bedeuten. Bei jedem einzelnen Falle wird man dann nur halb so viele Glieder nöthig haben; dagegen wird die Hülfstafel zwar auch nur halb so viel Ordnungen, aber in jeder 99 Logarithmen enthalten, also einen fast fünfmal so grossen Umfang haben müssen. Leonelli hat auch eine solche Hülfstafel, aber nur für die Briggischen Logarithmen, und nur auf 15 Decimalen beigefügt; sie enthält 485 Logarithmen. Es ist schade, dass nicht auch diese Tafel für 20 Decimalen eingerichtet ist.

Für die umgekehrte Aufgabe, zu einem gegebenen Logarithmen die Zahl zu finden, sind Leonellis Tafeln nicht weniger anwendbar. Durch Zerlegung des gegebenen Logarithmen in seine in den Tafeln befindlichen Bestandtheile erhält man die Factorenreihe der Zahl, und durch deren Multiplication (wofür sich leicht ein geschmeidiger Algorithmus findet) die Zahl selbst.

Wo man übrigens mit sieben oder zehn Decimalen ausreicht, gewähren freilich die gewöhnlichen oder die VLACQschen, auch von VEGA herausgegebenen Tafeln bei weitem mehr Bequemlichkeit, als die LEONELLIschen. Und in der That sind jene auch bei den allerfeinsten astronomischen oder sonst auf die Körperwelt sich beziehenden Rechnungen, ohne Ausnahme, überflüssig genau. Bei analytischen Rechnungen, oder auch bei der primitiven Construction von Tafeln, kommt man jedoch öfters in den Fall, wo man eine grössere Schärfe wünscht, und dann, wenn man anders nicht noch mehr als 13 oder 18 Ziffern verlangt, sind LEONELLIS Tafeln unstreitig das Brauchbarste und Bequemste, was man zu diesem Behufe anwenden kann.

Dem DELAMBREschen Berichte zufolge hat übrigens BRIGG ganz dieselbe Methode in seiner *arithmetica logarithmica* vorgetragen, und eine ähnliche Hülfstafel auf 14 Decimalen berechnet; allein die französischen Geometer selbst haben von diesem seltenen Werke nur Ein Exemplar auftreiben können, worin gerade dieser Theil gefehlt hat. Das Verdienst der eigenen Erfindung und eigenen Berechnung bleibt also LEONELLI immer ungeschmälert, und es ist billig, dass wir ihm besonders für letztere den gebührenden Dank zollen.

Den Zweck der zweiten Abhandlung haben wir bereits oben angezeigt; wir wollen nun sehen, wie LEONELLI denselben erreichen will. Er schlägt eine aus drei Columnen bestehende Tafel vor; um uns kürzer zu fassen, wollen wir, anstatt LEONELLIS schwerfällige und unnöthige Terminologie zu gebrauchen, die zusammengehörigen Glieder dieser drei Columnen durch P, Q, R bezeichnen. Diese Grössen sollen so von einander abhängen, dass, wenn man die Zahl, deren Logarithm P ist, durch x bezeichnet,

$$Q = \log\left(1+\frac{1}{x}\right), \qquad R = \log(1+x)$$

sei; daher immer $R = P + Q$ sein wird; ferner soll diese Tafel nicht nach x, sondern nach P geordnet sein, oder P soll gleichförmig wachsen, und zwar von Null bis ins Unendliche, oder vielmehr bis Q als verschwindend betrachtet werden kann. Der Gebrauch einer solchen Tafel lässt sich leicht übersehen. Soll aus $\log a$ und $\log b$ der Logarithm von $a+b$ bestimmt werden: so geht man (wenn man voraussetzt, dass a grösser ist als b) mit $\log a - \log b$ in die erste Columne ein, oder setzt diese Differenz $= P$: dann ist offenbar

$$\log(a+b) = Q + \log a = R + \log b.$$

Soll man hingegen den Logarithmen der Differenz bestimmen: so wird man $\log a - \log b$ entweder in der zweiten oder dritten Columne finden, je nachdem diese Differenz kleiner oder grösser ist, als $\log 2$. Im ersten Falle, wenn man $\log a - \log b = Q$ macht, wird $\log(a-b) = \log b - P = \log a - R$ sein; im zweiten hingegen, wenn man $\log a - \log b = \log R$ setzt, wird der gesuchte Logarithm

$$= \log b + P = \log a - Q.$$

Sonderbar ist's, dass LEONELLI diese Art, den Logarithmen der Differenz zu bestimmen, wenn die Differenz der Logarithmen kleiner als $\log 2$ ist, nicht gleich bemerkt hat; in der Schrift selbst gibt er für diesen Fall ein anderes verwickelteres Verfahren, und erst durch die Rüge dieser Unvollkommenheit in dem DELAMBREschen Berichte ist er auf die doch so nahe liegende Art, die Tafel zu benutzen, geführt, welche er in seinen Bemerkungen über diesen Bericht mit vieler Weitschweifigkeit erklärt.

Obgleich wir LEONELLIS Gedanken, durch eine solche Tafel die logarithmischen Rechnungen zu erleichtern, im Ganzen genommen unsern Beifall nicht versagen können, sondern vielmehr die wirkliche Ausführung einer solchen Tafel für wünschenswerth halten: so können wir doch allem übrigen, was LEONELLI über diesen Gegenstand sagt, nur wenig Werth beilegen. Seine Entwickelung des Gebrauchs ist für einen so elementarischen Gegenstand mit unnöthiger Weitläuftigkeit vorgetragen. Auch nur etwas tiefere Untersuchungen über das Gesetz des Fortganges der Tafeln und der Differenzen, welche doch zur Bestimmung des ihnen zu gebenden Umfanges sehr nöthig wären, findet man gar nicht, wohl aber einige bloss hingeworfene, und zum Theil ziemlich verworren ausgedrückte Äusserungen, aus denen sich schliessen lässt, dass LEONELLI dergleichen gar nicht, oder doch ganz unrichtig angestellt hat. Dahin gehört z. B. die grundfalsche Behauptung, dass, wenn P immer um die Differenz 0,0005 zunimmt und sich dem Werth 6 nähert, die ersten Differenzen von Q nur noch eine oder zwei bedeutende Ziffern haben sollen, wenn Q mit 14 Decimalen ausgedrückt wird. Eine leichte Rechnung zeigt, dass diese Differenzen bis dahin wenigstens fünf bedeutende Ziffern behalten; noch weniger verschwinden sie, wenn P den Werth 6 übersteigt, sondern erst für $P = 10{,}7$ werden sie bis auf eine Einheit in der vierzehnten Decimale abgenommen haben; bis dahin hätte aber die Tafel über 21000 Glieder. Was aber noch wichtiger ist: man darf keineswegs die dritten Differenzen überall als verschwindend betrachten, wie Leonelli sich einbildet, der nur auf die zweiten Rücksicht zu nehmen für hinreichend hält. Zu diesem Irrthume scheint ihn die von ihm berechnete Probe des Anfangs der Tafel verleitet zu haben, wo freilich die dritten Differenzen verschwinden; allein eine leichte Rechnung zeigt, dass diese dritten Differenzen weiterhin *zunehmen* und allerdings bedeutend werden können, wenn man 14 Decimalen geben, und keine kleinern Differenzen bei P, als 0,0005 gebrauchen will: für $x = 2 + \sqrt{3}$, oder für $P = 0{,}5719$, wo die dritten Differenzen ihr Maximum erreichen, finden wir unter obigen Voraussetzungen ihren Werth = 6377 Einheiten in der vierzehnten Decimale. Weit entfernt also, dass Leonelli mit weniger als 5000 Gliedern ausreichen könnte, müsste die Tafel, wenn die zweiten Differenzen überall hinlänglich sein sollen, eine so grosse Ausdehnung erhalten, dass ihre Berechnung die Mühe keineswegs belohnen würde. Allein wozu auch vierzehn Decimalen? Rechnungen, wo eine solche Schärfe nöthig wäre, kommen ja nur höchst selten vor, und für einen so seltenen Fall eine doch nicht sehr bedeutende Abkürzung der Arbeit zu erhalten, daran ist wenig gelegen. Hingegen für Rechnungen, die täglich vorkommen, und wo sieben Decimalen völlig hinreichen, würde eine, wenn auch nur mässige, aber oft wiederkommende Erleichterung der Arbeit allerdings schätzbar sein. Dann müsste aber die Tafel, um auch die nöthige Bequemlichkeit zu gewähren, so eingerichtet werden, dass überall auch die zweiten Differenzen verschwinden; mit etwas mehr als 15000 Gliedern liesse sich diess bequem erreichen, die nur ein mässiges Bändchen machen würden. Doch zu einer weitern Ausführung ist hier nicht der Ort.

Noch eine Probe, wie oberflächlich Leonelli seinen Gegenstand behandelt hat, gibt die S. 60 vorgetragene Formel, für einen vorgegebenen Werth von R, der zwischen zwei der Tafel fällt, den entsprechenden von Q mit Rücksicht auf die zweiten Differenzen zu finden. Diese Formel, deren Deduction dem Übersetzer, seinem Geständnisse zufolge, so viele vergebliche Mühe gemacht hat, ist ganz falsch; statt

$$2\delta(r'n - n) \quad \text{sollte nemlich stehen} \quad \frac{(D+d)\delta r n}{d}.$$

Übrigens bemerken wir noch, dass, wenn man die Zahlen der ersten Columne als die doppelten Logarithmen von Tangenten betrachtet, die Zahlen der zweiten und dritten die doppelten Complemente der Logarithmen der dazu gehörigen Sinus und Cosinus sein werden. Man kann daher mit den gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln den vorgesetzten Zweck ganz auf dieselbe Art erreichen, als mit den von Leonelli vorgeschlagenen; nur erspart theils die letztere die Division und Multiplication mit 2 (die aber doch ein mässig geübter Rechner leicht im Kopfe macht), theils gibt sie, wenn sie auf dieselbe Zahl von Decimalen berechnet ist, doppelt so viele Schärfe. Sonderbar ist es, dass die sich hierauf gründende Art, die trigonometrischen Tafeln zu gleicher Absicht anzuwenden, von Delambre nicht erwähnt wird, da er doch eine andere weit weniger bequeme anführt. Leonelli hat sehr Recht, sich zu beschweren, dass man ein solches Verfahren dem seinigen an die Seite setzen wollte.

NACHLASS.

[I.]

VORSCHRIFTEN, UM DEN LOGARITHMEN DES SINUS EINES KLEINEN BOGENS ZU FINDEN.

$$\log \text{hyp} \sin \varphi = \log \varphi - \tfrac{1}{6}\varphi\varphi - \tfrac{1}{180}\varphi^4 - \tfrac{1}{2835}\varphi^6 - \tfrac{1}{37800}\varphi^8 - \ldots$$

$\log \text{brigg} \sin n'' = 4{,}6855748.668 + \log n'' - An''n''$;

$\log A$ proxime $= -\left\{{11 \atop 4}\right\},7692172 + \tfrac{1}{5}n''n''A$.

Noch genauer:

$\log A' = -\left\{{11 \atop 4}\right\},7692172;\qquad \log A = -\left\{{11 \atop 4}\right\},7692172 + \tfrac{1}{5}n''n''\{A + \tfrac{17}{42}(A - A')\}$.

Hiernach findet man den Log. bis über 30^0 auf die letzte Ziffer [7. Decimale] genau.

$$\log \text{hyp} \cos \varphi = -\tfrac{1}{2}\varphi\varphi - \tfrac{1}{12}\varphi^4 - \tfrac{1}{45}\varphi^6 - \ldots$$

$\log \text{brigg} \cos n'' = -Bn''n''$;

$\log B$ proxime $= -\left\{{11 \atop 4}\right\},2920960 + \tfrac{1}{3}n''n''B$

$= -\left\{{11 \atop 4}\right\},2920960 + \tfrac{1}{3}n''n''\{B + \tfrac{1}{10}(B - B')\}$.

$$\log \text{hyp} \operatorname{tang} \varphi = \log \varphi + \tfrac{1}{3}\varphi\varphi + \tfrac{7}{90}\varphi^4 + \tfrac{62}{2835}\varphi^6 + \ldots$$

$\log \text{brigg} \operatorname{tang} n'' = 4{,}6855748.668 + \log n'' + Cn''n''$;

$\log C$ proxime $= -\left\{{11 \atop 4}\right\},4681872 + \tfrac{7}{10}n''n''\{C - \tfrac{599}{2058}(C - C')\}$.

[II.]

[INTERPOLATION DER COTANGENTEN UND COSECANTEN KLEINER BÖGEN.]

Zur Interpolation der Cotangenten und Cosecanten kleiner Bögen sind folgende Formeln die brauchbarsten:

Es gehören

zu den Bögen	die Cotangenten (oder Cosecanten)
a	θ
x	y
a'	θ',

so ist

$$\text{I.}\qquad x = a + \frac{(\theta-y)a(a'-a)}{(\theta-y)a+(y-\theta')a'} = a + \frac{(\theta-y)(a'-a)}{\theta-\theta'+\frac{a'-a}{a}(y-\theta')}$$

$$= a' - \frac{(y-\theta')a'(a'-a)}{(\theta-y)a+(y-\theta')a'} = a' - \frac{(y-\theta')(a'-a)}{\theta-\theta'+\frac{a'-a}{a'}(y-\theta)}.$$

$$\text{II.}\qquad y = \frac{a'\theta'-a\theta}{a'-a} + \frac{(\theta-\theta')aa'}{(a'-a)x} = \theta - \frac{(\theta-\theta')(x-a)a'}{(a'-a)x}$$

$$= \theta' + \frac{(\theta-\theta')(a'-x)a}{(a'-a)x}.$$

Beispiel zu II. Man sucht cotg 0,060335.

$\theta =$	10,5259499		
$\theta' =$	10,5084181		
$\theta-\theta' =$	175318	log	8,2438265 − 10
$x-a =$	0,000035	log	5,5440680 − 10
[$a' =$	0,0604]	log	8,7810369 − 10
		Compl. $\log x(a'-a)$ ..	5,2194307
	0,00614274	....	7,7883621 − 10
	10,5259499		
	10,5198072		

[III.]

MUSTERRECHNUNG, UM AUS $A = p\cos P,\ B = p\sin P$ p UND P ZU FINDEN.

B . . . . . . 9,56905 69225 n		
A . . . . . . 0,28523 04177 n		
$\operatorname{tg} P$ 9,28382 65048		$P = 190^0 52' 52'',913567$
$\operatorname{tg} P^*$ 9,28379 34121		$P^* = 190\ 52\ 50$
$\cos P^*$ . . . 9,99212 15841 n		
-11792		5,5197322 . . . . 3 30927
$\cos P$ . . . . 9,99212 04049 n		9,9842419 . . . . $\cos P \cos P^*$
p 0,29311 00128		5,5039741
	11792	9,2838100 . . . . $\sqrt{(\operatorname{tg} P \operatorname{tg} P^*)}$
		4,7877841
	$\left[-\log \frac{\text{Mod.}}{206264,8}\right] = \text{Const.}$ . . .	$-4,3233592$
		$\Big\}\ 2'',913567.$

BEMERKUNGEN.

Dass die Anzeige, S. 121—127, von GAUSS herrührt, geht aus einem Briefe von GAUSS an OLBERS vom 3. December 1808 hervor, worin es heisst:

»*So wünschte ich z. B. sehr, dass eine solche Tafel, wie* LEONELLI *vorgeschla-* »*gen hat (meine Anzeige: Hallische L.Z. 1808 vom 12. Febr.), ausgeführt würde.* »*Für bloss 5 Decimalen habe ich selbst einmal einen Anfang gemacht. Bei solchen* »*Rechnungen, wo sehr viele Logarithmen von Summen oder Differenzen gesucht* »*werden (wie z. B. bei meiner Methode die Störungen zu berechnen), würde eine* »*solche Tafel eine bedeutende Erleichterung geben*«.

Die Notiz [I.] ist einem Handbuch entnommen; [II.] und [III.] finden sich auf Blättern, die den Büchern der GAUSS-Bibliothek: HOBERT und IDELER, Trigonometrische Tafeln, und VEGA, Thesaurus Logarithmorum, angeheftet sind.

BÖRSCH, KRÜGER.

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG.

NACHTRÄGE ZU BAND IV.

NACHLASS UND BRIEFWECHSEL.

[I.]

[AUFGABE AUS DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG.]

Es sei μ die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Erfolges E aus einem einfachen Versuche, mithin $1-\mu$ die Wahrscheinlichkeit des Ausbleibens dieses Erfolges.

Die Wahrscheinlichkeit, dass unter n von einander unabhängigen Versuchen k den Erfolg E geben, ist

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+1)}{1.2.3\ldots.k}(1-\mu)^{n-k}\mu^k = \varphi k.$$

Der	mittlere	Werth	von	k	ist	$n\mu$,
»	»	»	»	$k(k-1)$	»	$n(n-1)\mu\mu$,
»	»	»	»	$k(k-1)(k-2)$	»	$n(n-1)(n-2)\mu^3$,
				u. s. w.		
»	»	»	»	$(k-n\mu)^2$	»	$n\mu(1-\mu)$.

[II.]

AUFGABE.

Es sind p Plätze vorhanden, auf welchen m Gegenstände vertheilt werden, ganz nach Zufall, wobei angenommen wird, für jeden Gegenstand habe jeder Platz gleiche Wahrscheinlichkeit.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der so besetzten Plätze $= m - n$ sein werde, bezeichnen wir mit (m, n) und setzen $\frac{1}{p} = x$.

Man hat dann:

$(2,0) = 1 - x$
$(2,1) = x$
$(3,0) = (1-x)(1-2x)$
$(3,1) = 3x(1-x)$
$(3,2) = xx$
$(4,0) = (1-x)(1-2x)(1-3x)$
$(4,1) = 6x(1-x)(1-2x)$
$(4,2) = 7xx(1-x)$
$(4,3) = x^3$
$(5,0) = (1-x)(1-2x)(1-3x)(1-4x)$
$(5,1) = 10x(1-x)(1-2x)(1-3x)$
$(5,2) = 25xx(1-x)(1-2x)$
$(5,3) = 15x^3(1-x)$
$(5,4) = x^4$.

Coefficienten für die folgenden Werthe von m:

n	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1
1	10	15	21	28	36
2	25	65	140	266	462
3	15	90	350	1050	2646
4	1	31	301	1701	6951
5		1	63	966	7770
6			1	127	3025
7				1	255
8					1

Es ist der mittlere Werth von n [für $m = 5$ und 6]

$$(5,1) + 2(5,2) + 3(5,3) + 4(5,4)$$
$$= 10x - 10xx + 5x^3 - x^4,$$
$$(6,1) + 2(6,2) + 3(6,3) + 4(6,4) + 5(6,5)$$
$$= 15x - 20xx + 15x^3 - 6x^4 + x^5$$

und allgemein

$$(m, 1) + 2(m, 2) + 3(m, 3) + \dots = \frac{(1-x)^m - (1-mx)}{x}.$$

Bezeichnet man die Zahlencoefficienten zum Beispiel von (8,5) mit $C^{8.5}$, so ist z. B. $3C^{8.5} + C^{8.6} = C^{9.6}$, [und allgemein

$$(m-n)C^{m.n} + C^{m.n+1} = C^{m+1.n+1}.$$

Ferner ist] allgemein

$$(m-n)x(m,n) + (1-(m-n-1)x)(m,n+1) = (m+1, n+1).$$

Hieraus folgt leicht, wenn man

$$(m, 1) + 2(m, 2) + 3(m, 3) + 4(m, 4) + \dots = S_m$$

setzt, und sich erinnert, dass

$$(m, 0) + (m, 1) + (m, 2) + (m, 3) + \dots = 1$$

ist,

$$S_{m+1} = (1-x)S_m + mx,$$

und daraus der oben angegebene Werth

$$\frac{(1-x)^m - (1-mx)}{x}.$$

[III.]

[ZUR GESCHICHTE DER ENTDECKUNG DER METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE.]

Allgemeine Geographische Ephemeriden. Herausgegeben von F. VON ZACH.
Vierter Band. 4. Stück. October 1799. S. 378. Weimar, 1799.

Erlauben Sie, dass ich einen im Julius-St. der A. G. E. bemerkten Druckfehler anzeige. S. xxxv der Einleitung, bei der Angabe des Bogens zwischen dem Panthéon und Évaux, muss statt 76545,74 stehen 76145,74. Die Summe ist richtig, und der Fehler kann auf kein anderes als dieses Stück fallen*). Ich entdeckte diesen Fehler, indem ich meine Methode, von der ich Ihnen eine Probe gegeben habe**), anwandte, um bloss aus diesen vier gemessenen Stücken die Ellipse zu bestimmen, und $\frac{1}{150}$ Abplattung fand; nach Verbesserung jenes Fehlers fand ich $\frac{1}{187}$, und den ganzen Quadranten 2565006 Modulen (nemlich ohne Rücksicht auf den Grad in Peru). Der Unterschied von $\frac{1}{150}$ und $\frac{1}{187}$ ist in diesem Falle eben nicht erheblich, da die End-Punkte zu nahe liegen.

Braunschweig, den 24. Aug. 1799. C. F. GAUSS.

*) Dieser Druckfehler hat seine Richtigkeit, und ist auch aus dem beigesetzten Decimal-Grade $2^{\circ},66868$ zu erkennen. v. Z.

**) Hiervon ein andermal. v. Z.

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde. Herausgegeben von F. VON ZACH.
Erster Band. S. 193. Gotha, 1800.

Verbesserungen zum IV. Bande der Allg. Geogr. Ephemer.

. . . .

Ebendaselbst S. 378 Nr. 3 Zeile 9 statt $\frac{1}{150}$ Abplattung muss es heissen $\frac{1}{50}$ Abplattung. Zeile 12 statt der Worte »*Der Unterschied von* $\frac{1}{150}$ *und* $\frac{1}{187}$ *ist in diesem Falle eben nicht erheblich*« kann man zu mehrerer Verständlichkeit folgendes setzen »*Der Unterschied von* $\frac{1}{150}$, [*welche Abplattung*] *die Französischen Grad-Messer (A. G. E. IV. B. S. XXXVII der Einleitung und S. 42) und* $\frac{1}{187}$, *die ich gefunden habe, ist in diesem Falle eben nicht erheblich*«.

[SCHUMACHER *an* GAUSS. *Altona, 30. November 1831.*]

. . . .

[Ich glaube Ihnen schon einmal gesagt zu haben, dass ZACH in den Geographischen Ephemeriden (1799, October. p. 378) einen Brief von Ihnen hat abdrucken lassen, in dem Sie offenbar die Methode der kleinsten Quadrate erwähnen, die Sie also damals schon ZACH mitgetheilt haben. Sie sprechen von der französischen Gradmessung:

»Ich entdeckte diesen Fehler, indem ich meine Methode, von der ich
»Ihnen eine Probe gegeben habe, anwandte« u. s. w.

ZACH bemerkt dabei: »Hiervon ein andermal«, das andere Mal ist aber nie gekommen. Da Sie die Resultate Ihrer Rechnung geben, so scheint es mir, ist es leicht zu zeigen, dass diese durch die Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet sind. ZACH lebt zudem noch, und hat gewiss Ihren Brief aufgehoben. Finden Sie es nicht der Mühe werth, endlich die Sache einmal, selbst gegen die mir vor allen widerlichen höflichen Zweifel der Franzosen, unwidersprechlich abzumachen?]

. . . .

Gauss an Schumacher. Göttingen, 3. December 1831.

. . . .

Die von Ihnen erwähnte Stelle in Zachs A. G. E. ist mir wohl bekannt; die Anwendung der M. der kl. Q., deren dort Erwähnung geschieht, betrifft einen früher in derselben Zeitschrift abgedruckten Auszug aus Ulugh Beighs Zeitgleichungs-Tafel, die zu manchen ganz curiosen Resultaten geführt hatte. Diese Resultate hatte ich Zach mitgetheilt mit der Bemerkung, dass ich dabei eine mir eigenthümliche seit Jahren gebrauchte Methode benutzt habe, Grössen, die zufällige Fehler involviren, auf eine willkürfreie consequente Art zu combiniren, ohne ihm jedoch das Wesen der Methode selbst mitzutheilen. Ich glaube Ihnen schon einmal geschrieben zu haben, dass ich auf keinen Fall diese Stelle, worin die Methode zum erstenmale öffentlich angedeutet ist, releviren werde, auch nicht wünsche, dass einer meiner Freunde mit meiner Zustimmung es thue. Diess hiesse anerkennen, als bedürfe meine Anzeige (Theoria Motus Corporum Coelestium), dass ich seit 1794 diese Methode vielfach gebraucht habe, einer Rechtfertigung, und dazu werde ich mich nie verstehen. Als Olbers attestirte [*)], dass ich ihm 1802 [**)] die ganze Methode mitgetheilt habe, war diess zwar gut gemeint; hätte er mich aber vorher gefragt, so würde ich es hautement gemissbilligt haben.

. . . .

Gauss an Olbers. Braunschweig, 30. Juli 1806.

. . . .

Hr. von Zach schreibt mir noch, dass Sie Sich zur Recension von Legendres Werk über die Kometenbahnen erboten hätten. Mit Vergnügen werde ich Ihnen also das mir von Hrn. von Zach zugeschickte Exemplar nach Bremen

[*) In seiner Abhandlung: Über den veränderlichen Stern im Halse des Schwans; v. Lindenau und Bohnenberger, Zeitschrift für Astronomie. Band II. Seite 192. September-October 1816.]

[**) Sollte heissen »1803«.]

senden, doch erlauben Sie wohl, dass ich es erst noch einige Wochen behalte. Bei vorläufigem Durchblättern scheint es mir sehr viel Schönes zu enthalten. Vieles von dem, was ich in meiner Methode besonders in ihrer ersten Gestalt Eigenthümliches hatte, finde ich auch in diesem Buche wieder. Es scheint mein Schicksal zu sein, fast in allen meinen theoretischen Arbeiten mit Legendre zu concurriren. So in der höhern Arithmetik, in den Untersuchungen über transcendente Functionen, die mit der Rectification der Ellipse zusammenhangen, bei den ersten Gründen der Geometrie und nun wieder hier. So ist z. B. auch das von mir seit 1794 gebrauchte Princip, dass man, um mehrere Grössen, die man nicht alle genau darstellen kann, am besten darzustellen, die Summe der Quadrate zu einem Minimum machen müsse, auch in Legendres Werke gebraucht und recht wacker ausgeführt.

. . . .

Gauss an Olbers. Göttingen, 4. October 1809.

. . . . Erinnern Sie sich wohl noch, liebster Freund, dass ich bei meiner ersten Anwesenheit in Bremen 1803 mit Ihnen über das Princip gesprochen habe, dessen ich mich bediente, Beobachtungen am genauesten darzustellen, dass nemlich bei gleichem Werthe der Beobachtungen die Summe der Quadrate der Differenzen ein Kleinstes sein muss? Dass wir darüber 1804 in Rehburg gesprochen haben, davon sind mir noch alle Umstände gegenwärtig. Es ist mir daran gelegen, diess zu wissen. Über die Ursache der Frage ein andermal.

. . . .

Gauss an Olbers. Göttingen, 24. Januar 1812.

. . . . Hr. Delambre soll, wie ich höre, im franz. Moniteur eine ad modum suum sehr weitläuftige Chrie über die moindres carrés gegeben haben; ich lese den Moniteur nicht, welcher auch nur in jährlichen Lieferungen hierher kommt. Vielleicht finden Sie einmal Gelegenheit, öffentlich zu bezeugen, dass ich Ihnen schon bei unserer ersten persönlichen Bekanntschaft im Jahr 1803 die Hauptmomente davon declarirt habe. Unter meinen Papieren finde ich, dass ich im Junius 1798, wo mir jene Methode eine längst angewandte Sache war, zuerst Laplaces Methode gesehen und die Unverträglichkeit derselben mit den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in einem kurzen Notizen-Journal [*)] über meine mathematischen Beschäftigungen angezeigt habe. Im Herbst 1802 habe ich die VIII$^{\text{ten}}$ Cereselemente in meinem Astronomischen Brouillonbuche nach der Methode der kleinsten Quadrate gefunden eingetragen. Die Papiere, worin ich in frühern Jahren, z. B. im Frühjahr 1799, auf Ulugh Beighs Zeitgleichungstafel jene Methode angewandt habe, sind verloren gegangen. Das einzige, worüber man sich wundern kann, ist, dass dieses Princip, was sich so leicht von selbst darbietet, dass man auf den Gedanken allein gar keinen besondern Werth legen kann, nicht schon 50 oder 100 Jahr früher von andern, z. B. Euler oder Lambert oder Halley oder Tobias Mayer angewandt ist, obwohl es ja sehr leicht sein kann, dass z. B. letzterer so etwas angewandt hat, ohne es zu proclamiren, so wie jeder Rechner nothwendig sich selbst eine Menge Vortheile und Methoden schafft, die er nur gelegentlich durch mündliche Tradition fortpflanzt.

. . . .

[*) In dem auf Seite 20 bereits erwähnten Tagebuche von Gauss findet sich aus dem Jahre 1798 die Notiz: »*Calculus probabilitatis contra La Place defensus. Gott. Jun. 17*«.]

Gauss an Schumacher. Göttingen, 6. Juli 1840.

. . . .

Sie wissen, dass ich selbst auf das von mir seit 1794 gebrauchte Verfahren, dem später der Name Méthode des moindres quarrés beigelegt ist, niemals grossen Werth gelegt habe. Verstehen Sie mich recht; nicht in Beziehung auf den grossen Nutzen, den sie leistet, der ist klar genug, aber danach taxire ich die Dinge nicht. Sondern deshalb oder in so fern legte ich nicht viel Werth darauf, als vom ersten Anfang an der Gedanke mir so natürlich, so äusserst nahe liegend schien, dass ich nicht im Geringsten zweifelte, viele Personen, die mit Zahlenrechnung zu verkehren gehabt, müssten von selbst auf einen solchen Kunstgriff gekommen sein, und ihn gebraucht haben, ohne deswegen es der Mühe werth zu halten, viel Aufhebens von einer so natürlichen Sache zu machen. Namentlich fiel mir vor allen Tobias Mayer ein, und ich erinnere mich sehr bestimmt, dass ich oft, wo ich mit andern von meiner Methode sprach (wie z. B. während meiner Studirzeit 1795—1798 wirklich vielfach geschehen ist), geäussert habe, ich wolle die allergrösste Wette eingehen, dass Tobias Mayer bei seinen Rechnungen dieselbe Methode schon gebraucht habe. Ich weiss nun jetzt aus jenen Papieren, dass ich jene Wette verloren haben würde. In der That enthalten sie Eliminationen, z. B. von 3 unbekannten Grössen aus 4 oder 5 Gleichungen, aber so, wie es der ordinärste Rechner machen würde, ohne alle Spur irgend einer subtilern Kunst.

. . . .

[IV.]

[KRITISCHE BEMERKUNGEN ZUR METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE.]

Gauss an Olbers. Göttingen, 22. Februar 1819.

. . . . Auch bin ich jetzt mit einer neuen Begründung der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate beschäftigt. Meine erste Begründung setzt voraus, dass die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungsfehlers x durch e^{-hhxx} dargestellt werde, wo denn jene Methode nach aller Strenge und in allen Fällen die wahrscheinlichsten Resultate gibt. Ist das Gesetz der Fehler unbekannt, so ist es unmöglich die wahrscheinlichsten Resultate aus schon gemachten Beobachtungen anzugeben. Laplace hat die Sache von einer verschiedenen Seite angesehen und ein Princip gewählt, welches auch auf die M. d. kl. Q. führt*), wenn die Anzahl der Beobachtungen unendlich gross ist. Allein bei einer mässigen Anzahl Beobachtungen bleibt man, wenn das Fehlergesetz unbekannt, ganz im Dunkeln, und Laplace weiss auch selbst für diesen Fall nichts besseres zu sagen, als dass man die Meth. der kl. Quadrate auch hier anwenden möge, weil sie bequeme Rechnung gewähre. Ich habe jetzt gefunden, dass bei der Wahl eines etwas andern Princips als das Laplacesche (und zwar eines solchen, wo niemand in Abrede stellen kann, dass man wenigstens eben so gut zu dessen Annahme befugt sei als zu dem von Laplace, und welches, meiner Meinung nach, jeder nicht im Voraus Eingenommene für natürlicher erklären muss als das Laplacesche) man alle jene Vortheile vereinigt geniesst, nemlich die M. d. kl. Q. wird in allen Fällen und bei jedem Fehlergesetz die absolut-vortheilhafteste, und die Vergleichung der Genauigkeit der Resultate mit der der Beobachtungen, die ich in meiner Theoria auf das Fehlergesetz e^{-hhxx} gegründet hatte, bleibt allgemein gültig. Zugleich hat man den Vortheil, dass alles durch sehr klare einfache analytische Entwickelungen bewiesen und aufgelöst wird, was bei Laplaces Princip und Behandlung keineswegs der Fall zu sein scheint, so wie namentlich die Generalisirung seines Schlusses von 2 unbekannten Grössen auf jede Anzahl noch nicht die nöthige Evidenz zu haben scheint.

. . . .

*) und zwar unabhängig von dem Fehlergesetz.

Gauss an Schumacher. Göttingen, 2. Februar 1825.

. . . .

Die sogenannten wahrscheinlichen Fehler wünsche ich eigentlich, als von Hypothese abhängig, ganz proscribirt; man mag sie aber berechnen, indem man die mittlern mit 0,6744897 multiplicirt.

. . . .

Gauss an Olbers. Göttingen, 15. März 1827.

Ich bin Ihnen sehr verpflichtet, mein allertheuerster Freund, für die gefällige Übersendung der drei Hefte des Philosophical Magazine. Ich habe die Aufsätze von Ivory durchgesehen, und ich würde sagen müssen, dass ich dadurch sehr befremdet sei, wenn ich nicht durch die Abhandlung in den Philosophical Transactions (1824), deren ich in meinem letzten Briefe erwähnte, schon vorbereitet gewesen wäre. Ich hatte Herrn I. längst als einen scharfsinnigen Mathematiker geschätzt, der im Calcul grosse Gewandtheit hat: von diesem Urtheil gehe ich auch noch nicht ab; allein rücksichtlich des Hauptpunkts in der erwähnten Abhandlung vermisse ich den logischen Zusammenhang, und erkenne darin nichts weiter als eine baare Petitio principii. Sie werden mich nicht missverstehen. Ich lege wenig Werth auf eine streng logische Einkleidung, die, in Schriften für Männer und Kenner, oft nur Pedanterie sein würde; aber der streng logische Zusammenhang muss sich, wo es nur gefordert wird, überall nachweisen lassen, diess ist eine unerlässliche Bedingung eines guten Vortrags. Wenn ich einen Mathematiker sehr hochschätze, und hierin etwas vermisse, so denke ich immer zuerst, dass es bloss im Vortrag liegt, und gehe schwer daran, anzunehmen, dass der Gedanke selbst leer ist. Aber bei Herrn Ivorys drei Aufsätzen bin ich leider dazu genöthigt.

Die Abhandlung über die Kleinsten Quadrate ist denn doch wirklich unter aller Kritik. Welche Verworrenheit, Unklarheit und völliger Mangel logischer Bündigkeit! Aber darüber könnte man noch wegsehen, wenn wirklich ein reeller Gedanke zum Grunde läge. Allein das ist durchaus nicht der Fall. Wie ist es möglich, dass das Geschwätz p. 163 und 164 uns als ein proof that this principle leads necessarily to the method of the least squares venditirt wird!

In der That weit entfernt, dass daraus eine Nothwendigkeit der M. der kl. Q. folge, kann man dieses Ganze*) auf jede beliebige andere Behandlung der vorgegebenen Gleichungen anwenden; z. B. wenn, anstatt sie mit a, a', a'' zu multipliciren, man sie mit irgend einer Potenz dieser Coefficienten multiplicirte, oder auch sie dividirte. Die Abhandlung scheint in der That halb im Schlafe geschrieben zu sein, und Sie erlassen mir wohl noch mehrere einzelne Stellen anzustechen, die Sie sogleich selbst bemerken werden, sobald Sie nur nicht von einer vorgefassten Meinung ausgehen, dass irgend etwas daran ist.

Wenig besser scheint mir der andere Aufsatz über die Pendellängen; die Vorwürfe, die er der Anwendung der M. der kl. Q. macht, zeigen nur, dass ihr Geist dem Hrn. I. ganz fremd ist. Ich finde, dass Hr. Sabine diese Methode im Wesentlichen ganz richtig angewandt hat (— die Form der Anwendung ist allerdings nicht die zweckmässigste, und ich habe, unter uns gesagt, eigentlich Sabine, Paucker und Muncke in der neuen Ausgabe von Gehler, bei meiner

*) Versteht sich mit Ausnahme der Folge, dass $\varepsilon\varepsilon + \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon''\varepsilon'' + \cdots$ ein Minimum wird; aber diess soll ja eben nicht Axiom sein, sondern bewiesen werden.

Anmerkung in den A. N. Nr. 110, p. 230 [*]), mit im Sinn gehabt —); aber darin hat er gefehlt, dass er den mittlern zu befürchtenden Fehler in den Resultaten nicht mit berechnet hat, und dass er durch einen Umstand, welchen Herr Ivory mit Recht tadelt, nemlich durch die Zusammenstellung der verschiedenen Resultate aus verschiedenen Combinationen, wobei immer seine Beobachtungen in der Nähe des Äquators einen überwiegenden Einfluss behalten müssen, den Schein einer viel grössern Genauigkeit der Endresultate hervorbringt, als diese wirklich haben. In der That ist es damit gewissermassen so, obwohl lange nicht in dem Masse, wie der verstorbene Ende zuweilen Polhöhenbestimmungen nach Douwes' Methode machte, indem er immer dieselbe Höhe in der Nähe des Mittags mit verschiedenen weit davon entfernten verband und dann Resultate fand, die innerhalb 0",01 übereinstimmten.

Einzeln widerlegen kann man diesen Aufsatz von Ivory eben so schwer, da darin eben so wenig logische Ordnung ist; ich finde auch nicht den allerkleinsten Grund gegen die Zweckmässigkeit der M. der kl. Q. darin, aber was soll man von dem Verfahren sagen, welches Ivory dafür substituiren will, indem er die kleinste Pendellänge mit vielen in grosser Breite combinirt, das ist ja eines verständigen Mathematikers ganz unwürdig und eigentlich das Endesche Verfahren [**]). . . . .

Gauss an Encke. Göttingen, 23. August 1831.

. . . .

Nicht ohne Interesse habe ich aus Ihrem Briefe den Gang gesehen, den Sie zur Rechtfertigung des Verfahrens, das arithmetische Mittel zu nehmen, eingeschlagen haben. Ich finde diesen Gang sehr beifallswerth, in so fern auf die Frage, was zu thun sei, eine von allen Betrachtungen der Wahrscheinlich-

[*) Vgl. Band VI, S. 457.]

[**) Die vorstehende Kritik bezieht sich auf folgende Arbeiten J. Ivorys:

1. On the method of least squares. Phil. Mag. (Tilloch), LXVIII, 1826, S. 161—165.
2. On the Ellipticity of the Earth, as deduced from Experiments made with the Pendulum. Phil. Mag. (Tilloch), LXVIII, 1826, S. 3—16, 92—101, 241—245, 246—251, 321—326, 350—353.]

keitsrechnung ganz unabhängige Antwort gegeben werden soll. Nur kann ich nicht wohl einräumen, das, was man auf diese Art erhält, den wahrscheinlichsten Werth zu nennen. In der That ist die Aufgabe, den wahrscheinlichsten Werth zu finden, eine mathematisch ganz bestimmte, die aber ihrer Natur nach die Kenntniss des Fehlergesetzes voraussetzt und nur in dem einzigen Falle, wo diess durch die Form e^{-kkxx} ausgedrückt wird, auf die arithmetischen Mittel führt. Allgemein zu reden ist die Wahrscheinlichkeit des wahrscheinlichsten Werths auch nur unendlich klein, nemlich wenn a der wahrscheinlichste Werth aus einer stetigen Gesammtheit ist, so bedeutet diess im Grunde nur so viel, dass

> die Wahrscheinlichkeit, der wahre Werth liege zwischen $a-\omega$ und $a+\omega$, grösser ist als die Wahrscheinlichkeit, der wahre Werth liege zwischen irgend einem andern Paar eben so weiter Grenzen, in so fern ω unendlich klein ist.

Genau besehen hat aber eben deshalb solcher wahrscheinlichster Werth nur wenig praktisches Interesse, viel weniger als derjenige Werth, wobei der zu befürchtende Irrthum im Durchschnitt am wenigsten schädlich ist, daher ich (ausser andern freilich eben so wichtigen oder noch viel wichtigern Gründen) dieses zweite mit dem ersten ja nicht zu verwechselnde Princip vorgezogen habe.

. . . .

GAUSS an BESSEL. Göttingen, 28. Februar 1839.

. . . .

Ihren Aufsatz in den Astronomischen Nachrichten über die Annäherung des Gesetzes für die Wahrscheinlichkeit aus zusammengesetzten Quellen entspringender Beobachtungsfehler an die Formel $e^{-\frac{xx}{hh}}$ habe ich mit grossem Interesse gelesen; doch bezog sich, wenn ich aufrichtig sprechen soll, dieses Interesse weniger auf die Sache selbst, als auf Ihre Darstellung. Denn jene ist mir seit vielen Jahren familiär, während ich selbst niemals dazu gekommen bin, die Entwickelung vollständig auszuführen.

Dass ich übrigens die in der Theoria Motus Corporum Coelestium angewandte Metaphysik für die Methode der kleinsten Quadrate späterhin habe fallen lassen, ist vorzugsweise auch aus einem Grunde geschehen, den ich selbst öffentlich nicht erwähnt habe. Ich muss es nemlich in alle Wege für weniger wichtig halten, denjenigen Werth einer unbekannten Grösse auszumitteln, dessen Wahrscheinlichkeit die grösste ist, die ja doch immer nur unendlich klein bleibt, als vielmehr denjenigen, an welchen sich haltend man das am wenigsten nachtheilige Spiel hat; oder wenn fa die Wahrscheinlichkeit des Werths a für die Unbekannte x bezeichnet, so ist weniger daran gelegen, dass fa ein Maximum werde, als daran, dass $\int fx \cdot F(x-a)\,dx$, ausgedehnt durch alle möglichen Werthe des x, ein Minimum werde, indem für F eine Function gewählt wird, die immer positiv und für grössere Argumente auf eine schickliche Art immer grösser wird. Dass man dafür das Quadrat wählt, ist rein willkürlich und diese Willkürlichkeit liegt in der Natur der Sache. Ohne die bekannten ausserordentlich grossen Vortheile, die die Wahl des Quadrats gewährt, könnte man jede andere jenen Bedingungen entsprechende wählen und thut es auch in ganz singulären Fällen. Ich weiss aber nicht, ob ich mich hinlänglich klar über das, was ich eigentlich mit dieser Distinction meine, ausgedrückt habe, und bitte im entgegengesetzten Fall um gütige Entschuldigung.

. . . .

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 25. November 1844.

. . . .

Beim mündlichen Vortrage der Lehre von der Methode der kleinsten Quadrate pflege ich gerade den umgekehrten Weg von demjenigen zu nehmen, den in einer gedruckten Abhandlung einzuschlagen verständig ist. Ich lehre nemlich zuerst die Art sie anzuwenden, nach Massgabe der Umstände, mehr oder weniger von den feinern Kunstgriffen einmischend. Dann erst nehme ich, soweit dazu Zeit übrig bleibt, die verschiedenen Begründungsarten vor, welche kennen zu lernen erst für den ein lebhaftes Interesse haben kann, der die Methoden schon zu gebrauchen versteht. Ich pflege drei Begründungsarten vorzutragen:

1) eine bloss auf Principien der Zweckmässigkeit basirte, die sich, sehr einleuchtend, leicht machen lässt,
2) die in der Th. M. C. C. gelehrte Anknüpfungsart an die Wahrscheinlichkeitsrechnung,
3) die davon durchaus verschiedene Anknüpfungsart an die Wahrscheinlichkeitsrechnung, welche in der Theoria Combinationis Observationum vorgetragen, und nach meiner Überzeugung die ausschliesslich einzige zulässige ist.

Für jeden, der mit dieser Lehre noch ganz unbekannt ist, halte ich diese Reihefolge für die zweckmässigste. Fremde Darstellungen kenne ich aber keine, die ich empfehlen könnte. Was aber No. 1) betrifft, so kann Herr Warensdorf diess aus unzähligen Büchern lernen (was das A. B. C. der Sache betrifft) und es ist ziemlich einerlei, welches er wählt, wenn er nur das, was fast bei allen schlecht ist, nachher Gelegenheit nimmt bei sich zu verbessern. So z. B. legen diese Bücher keinen hinlänglichen Druck darauf, dass man auch dann, wenn die beobachteten Grössen schon linearische Functionen von den unbekannten Elementen sind (wie bei der Pendellänge $x+y\sin\varphi^2$), man doch nicht diese Elemente als die unbekannten Grössen der Aufgabe betrachten, sondern dazu die an schon bekannte möglichst genäherte Werthe anzubringenden Correctionen wählen soll, u. s. w.

. . . .

[V.]

[KLEINERE BEITRÄGE ZUR METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE.]

$A, B, B', \ldots B^{(n-1)}$ seien linearische Functionen von x und andern unbekannten Grössen.

$$\begin{aligned} A &= \alpha x + \cdots \\ B &= \beta x + \cdots \\ B' &= \beta' x + \cdots \\ &\vdots \\ B^{(n-1)} &= \beta^{(n-1)} x + \cdots . \end{aligned}$$

$$\Omega = (\lambda A)^2 + (\mu B)^2 + (\mu' B')^2 + (\mu'' B'')^2 + \cdots$$

soll ein Minimum werden.

Man setze

$$\frac{\alpha}{\beta} = l, \qquad \frac{\mu}{\lambda l} = \operatorname{tang}\varphi, \qquad \frac{\mu \operatorname{tang}\varphi}{\lambda} = k,$$
$$A + kB = A', \qquad A - lB = C,$$
$$\lambda\cos\varphi = \lambda', \qquad \lambda\sin\varphi = \nu,$$

so ist

$$(\lambda' A')^2 + (\nu C)^2 = (\lambda A)^2 + (\mu B)^2,$$

und C von x frei.

Der Coefficient von x in A' wird $= \frac{\alpha}{\cos\varphi^2}$.

Fährt man auf dieselbe Art weiter fort, so erhält Ω die Gestalt

$$\Omega = (\nu C)^2 + (\nu' C')^2 + (\nu'' C'')^2 + \ldots + (\nu^{(n-1)} C^{(n-1)})^2 + (\beta^{(n)} B^{(n)})^2,$$

wo alle C von x frei sind.

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 14. April 1819.

. . . .

Eben so ist mir Ihre Erinnerung gegen die richtige Formel für das Gewicht des Resultats einer Combination von 2 Bestimmungen, deren Gewichte p, q sind, nemlich $\frac{pq}{p+q}$, nicht recht erklärlich, es sei denn, dass Sie meinen Brief nicht mit der Stelle bei LITTROW zusammengehalten haben. Allerdings setze ich voraus, dass die partiellen Resultate von einander unabhängig sind. Aber es kommt darauf an, von *was für* Combinationen die Rede ist, und da ist in dem *vorliegenden Fall* der Umstand, dass $\frac{pq}{p+q}$ immer $< p$ und $< q$ wird, nicht ungereimt, sondern das Gegentheil würde ungereimt sein. Nehmen wir einen andern ganz ähnlichen Fall. SCHUMACHER hat die Absicht einen Längengradbogen zu messen. Es seien seine äussersten Punkte A und C. Er kann dieselben, d. h. seine Raketen, nicht unmittelbar vergleichen, sondern bedarf eines Zwischenpunkts B; vergleicht er zuerst A mit B 100mal, und nachher C mit B auch 100mal, so haben die partiellen Längenunterschiede $B-A$, $C-B$ eine grosse, und gleich grosse Zuverlässigkeit, deren Gewicht durch $100 = p$, $100 = q$ angezeigt wird. Allein die aus der Verbindung von beiden abgeleitete Differenz der Örter C, A wird ja offenbar weniger zuverlässig sein, als wenn sie aus 100 unmittelbaren Vergleichungen abgeleitet wäre. Wie viel das Gewicht des Resultats aus dieser Combination geringer sei, kann nur die Wahrscheinlichkeitstheorie lehren. Sie ergibt, dass dieses geschlossene Resultat nur so genau sei, als das Mittel aus 50 directen Vergleichungen. Nur wenn $q = \infty$, also $C-B$ absolut genau, wird das geschlossene Resultat für $C-A$ eben so genau, wie das benutzte $B-A$ war, wie es ja auch die Natur der Sache mit sich bringt. LITTROWS falsche Formel würde für $q = \infty$ das absurde Resultat $4p$ geben. — Ich vermuthe, dass LITTROW dadurch irre geleitet ist, dass der

Bestimmung der Polhöhe aus p untern und q obern Culminationen das Gewicht $\frac{4pq}{p+q}$ beigelegt wird, welches auch ganz richtig ist; aber die Polhöhe ist nicht die Summe, sondern nur die halbe Summe der Zenith-Distanzen in oberer und unterer Culmination. Der Fall ist also ganz verschieden. Allgemein lässt sich zeigen, ohne viele Mühe aus den Grundsätzen meiner Theoria, und äusserst leicht bei meiner neuen Begründung, dass, — wenn eine Grösse w aus der Combination der Grössen x, y, z etc. entsteht, so dass $w = \alpha x + \beta y + \gamma z +$ etc.; wenn dann ferner die Werthe von x, y, z etc. unabhängig von einander so ausgemittelt sind, dass diesen Bestimmungen resp. die Gewichte p, q, r etc. beizulegen sind, — dass dann der hieraus hervorgehende Werth von w eine solche Zuverlässigkeit habe, deren Gewicht durch $\frac{1}{\frac{\alpha\alpha}{p} + \frac{\beta\beta}{q} + \frac{\gamma\gamma}{r} + \text{etc.}}$ ausgedrückt wird.

(Gewicht ist übrigens immer dem Quadrate der Genauigkeit direct, oder dem Quadrate des sogenannten wahrscheinlichen Fehlers umgekehrt proportional; welches aber kein Lehrsatz, sondern bloss die Definition des Worts Gewicht ist.)

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 25. Februar 1825.

. . . .

P. S. Die Vertheilung der Fehler in Gruppen, um die Summe der Quadrate zu finden, hat allemal die Wirkung, diese zu klein, also die Genauigkeit scheinbar grösser zu machen, als sie ist.

Es seien die Fehler

$$\begin{array}{lll} a, a', a'' \ldots\ldots, & \text{Anzahl} = \alpha, & \text{Mittel} = A, \\ b, b', b'' \ldots\ldots, & \quad » \quad \beta, & \quad » \quad B, \\ c, c', c'' \ldots\ldots, & \quad » \quad \gamma, & \quad » \quad C, \\ & \text{etc.}, & \end{array}$$

so ist genau

$$\begin{aligned} aa + a'a' + a''a'' \ \ldots &= \alpha A^2 + (a-A)^2 + (a'-A)^2 + (a''-A)^2 + \text{etc.} \\ bb + b'b' + b''b'' \ \ldots &= \beta B^2 + (b-B)^2 + (b'-B)^2 + (b''-B)^2 + \text{etc.} \\ cc + c'c' + c''c'' \ \ldots &= \gamma C^2 + (c-C)^2 + (c'-C)^2 + (c''-C)^2 + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Indem man also für die Summe $\alpha A^2+\beta B^2+\gamma C^2+\cdots$ annimmt, vernachlässigt man alle $(a-A)^2+(a'-A)^2+\cdots$, $(b-B)^2+(b'-B)^2+\cdots, \cdots$, die alle positiv sind.

Der Beweis ist leicht: nemlich

$$\begin{aligned} aa &= [A+(a-A)]^2 = AA+2A(a-A)+(a-A)^2 \\ a'a' &= [A+(a'-A)]^2 = AA+2A(a'-A)+(a'-A)^2 \\ a''a'' &= [A+(a''-A)]^2 = AA+2A(a''-A)+(a''-A)^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

$$\Sigma aa = \alpha AA+2A\Sigma(a-A)+\Sigma(a-A)^2$$

oder da $\Sigma(a-A) = \Sigma a-\alpha A = 0$,

$$\Sigma aa = \alpha AA+\Sigma(a-A)^2.$$

Gauss an Olbers. Göttingen, 3. Mai 1827.

. . . .

Zu einer erfolgreichen Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf Beobachtungen ist allemal umfassende Sachkenntniss von höchster Wichtigkeit. Wo diese fehlt, ist das Ausschliessen wegen grösserer Differenz immer misslich, wenn nicht die Anzahl der vorhandenen Beobachtungen sehr gross ist. Alle einzelnen Bestandtheile des Beobachtungsfehlers, deren Vermeidung ausser unserer Gewalt liegt, haben gewiss Grenzen, wenn wir auch nicht im Stande sind, sie scharf anzugeben. Es gibt sehr viele Fälle, wo wir mit Gewissheit sagen können, dass ein vorgekommener grosser Fehler ausserhalb der Grenzen der Möglichkeit solcher Fehler liegt, und ein ausserordentliches Versehen begangen sein muss. Die muss man natürlich ausschliessen. So lange man sich aber die Möglichkeit denken kann, dass der Fehler durch unglückliche Conspiration der Bestandtheile hervorgegangen ist, soll man nicht ausschliessen. Zuweilen kann es freilich auch Fälle geben, wo man zweifelhaft ist, ob man sie zur ersten oder zweiten Classe zählen soll; da halte man es wie man will,

mache sich aber zum Gesetz, nichts zu verschweigen, damit andere nach Gefallen auch anders rechnen können. Die Zahlwerthe der Resultate werden, man halte es, wie man wolle, gleiche Brauchbarkeit haben, aber ihre Zuverlässigkeit riskirt man für zu gross auszugeben, wenn man mit dem Ausschliessen zu schnell bei der Hand ist. Geschäfte dieser Art scheinen mir schon mehr Analogie mit dem Handeln im Leben zu haben, wo man selten oder nie mathematische Strenge und Gewissheit hat und wo man sich begnügen muss, nach bester überlegter Einsicht zu verfahren.

. . . .

Gauss an Gerling. Göttingen, 2. April 1840.

. . . . In Beziehung auf den wissenschaftlichen Inhalt Ihres Briefes will ich bloss auf die Bedenklichkeit, die Sie Sich, unnöthigerweise, wegen Heterogeneität von Winkel- und Linien-Messungen machen, ein Paar Worte erwiedern.

Sind q, q', q'', q''' etc. überhaupt durch Beobachtung gefundene Grössen, homogen oder heterogen ist ganz gleichgültig, und bezeichnet man mit dq, $dq', dq''\ldots$ die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung nach irgend einem System von Elementen, so ist das Princip der Methode der kleinsten Quadrate durchaus nicht, dass

$$dq^2+dq'^2+dq''^2+\text{etc.}$$

ein Minimum werden soll, sondern dass $\left(\frac{dq}{m}\right)^2+\left(\frac{dq'}{m'}\right)^2+\left(\frac{dq''}{m''}\right)^2+$ etc. ein Minimum werde, wo $m, m', m''\ldots$ die respectiven bei den einzelnen Daten zu befürchtenden mittlern Fehler bedeuten. Nur dadurch, dass in der Praxis so überwiegend oft solche Fälle vorkommen, wo $m = m' = m'' = m'''$ etc. gesetzt werden kann oder muss, wird man verleitet, das erste Énoncé gelten zu lassen und zu vergessen, dass nur das zweite das allgemein gültige ist.

Um von diesem Princip Gebrauch machen zu können, muss man, wenn auch nicht genau, doch einigermassen genähert, wenn auch nicht die Grössen

m, m', m'', m''' etc. selbst, doch ihr Verhältniss (i. e. das Verhältniss der Zahlen, wodurch sie ausgedrückt werden, indem im Fall der Heterogeneität beliebig Einheiten für jedes zum Grunde gelegt werden) kennen. Mittel zu einiger Schätzung wenigstens wird man bei Mutterwitz fast immer finden; wo aber alle Kenntniss gänzlich fehlt, da liegt es doch wahrhaftig nicht an der Methode selbst, dass sie ihre Dienste versagen muss. Sachkenntniss kann bei Anwendung der M. d. kl. Q. niemals erlassen werden. So wird es also eben von der Sachkenntniss jedesmal abhängen, in wie fern man bei Linearmessungen den zu befürchtenden mittlern Fehler für kleinere und grössere Distanzen gleich oder ungleich, und im letztern Falle, wie man ihn von der Grösse abhängig setzen soll. Exempli gratia bei kleinen Distanzen, wo z. B. mit einer 3 Meter langen Messruthe gemessen ist, wird, wenn die Distanz selbst nur sehr wenige Meter beträgt, der Fehler ganz oder fast allein von der Theilung abhängen; muss aber der Massstab viele hundert male umgeschlagen werden, so tritt eine ganz verschiedene Fehlerquelle ins Spiel.

. . . .

[VI.]

[EINE AUSGLEICHSFORMEL FÜR MORTALITÄTSTAFELN.]

Das reine Resultat der Erfahrungen über die Tontinen ist folgendes:

a Anzahl der zu Anfang des 3^{ten}, $\frac{a}{x}$ Anzahl der zu Anfang des n^{ten} Jahres Lebenden:

n	$\log x$	n	$\log x$
3	0	52	0,24220
7	0,03547	57	0,28735
12	0,06075	62	0,34577
17	0,07687	67	0,42323
22	0,09718	72	0,54021
27	0,11871	77	0,72623
32	0,14038	82	1,02073
37	0,16404	87	1,43402
42	0,18579	92	2,09812
47	0,21004	97	3,17730

Befriedigend wird $\log x$ dargestellt durch die Formel

$$\log x = A + Bb^n - Cc^n,$$

wo

$$
\begin{aligned}
A &= 0{,}48213\\
\log B &= 6{,}66231-10\\
\log C &= 9{,}67925-10\\
\log b &= 0{,}03909.7\\
\log c &= -0{,}00422.25
\end{aligned}
$$

Der Werth von A ergibt sich aus

$n =$		$n =$	
3	0,46347	52	0,48081
7	0,48097	57	0,48409
12	0,48459	62	0,48527
17	0,47976	67	0,48097
22	0,47966	72	0,47736
27	0,48097	77	0,48150
32	0,48224	82	0,49766
37	0,48463	87	0,48097
42	0,48325	92	0,47698
47	0,48097	97	0,51417

BEMERKUNGEN.

Die Aufgaben [I.] und [II.] sowie die erste Notiz unter [V.], S. 149/150, sind ein und demselben Handbuch entnommen. [VI.] befindet sich auf einem Blatte am Ende des Buchs der GAUSS-Bibliothek: Essai sur les probabilités de la durée de la vie humaine. Par M. DEPARCIEUX. Paris, 1746.

BÖRSCH, KRÜGER.

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE.

NACHTRÄGE ZU BAND IV.

NACHLASS UND BRIEFWECHSEL.

[ÜBER DIE ERSTEN GRÜNDE DER GEOMETRIE.]

Gauss an Bolyai. Helmstedt, 16. December 1799.

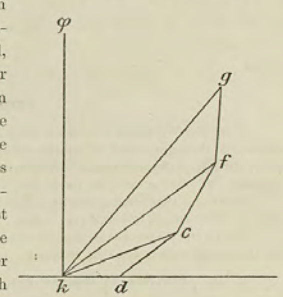
.... Es thut mir sehr leid, dass ich unsere ehemalige grössere Nähe nicht benutzt habe, um mehr von Deinen Arbeiten über die ersten Gründe der Geometrie zu erfahren; ich würde mir gewiss dadurch manche vergebliche Mühe erspart haben und ruhiger geworden sein, als jemand wie ich es sein kann, so lange bei einem solchen Gegenstande noch so viel zu desideriren ist. Ich selbst bin in meinen Arbeiten darüber weit vorgerückt (wiewohl mir meine andern ganz heterogenen Geschäfte wenig Zeit dazu lassen); allein der Weg, den ich eingeschlagen habe, führt nicht so wohl zu dem Ziele, das man wünscht und welches Du erreicht zu haben versicherst, als vielmehr dahin, die Wahrheit der Geometrie zweifelhaft zu machen. Zwar bin ich auf manches gekommen, was bei den meisten schon für einen Beweis gelten würde, aber was in meinen Augen so gut wie NICHTS beweist, z. B. wenn man beweisen könnte, dass ein geradliniges Dreieck möglich sei, dessen Inhalt grösser wäre als eine jede gegebene Fläche, so bin ich im Stande die ganze Geometrie völlig strenge zu beweisen. Die meisten würden nun wohl jenes als ein Axiom gelten lassen; ich nicht; es wäre ja wohl möglich, dass, so entfernt man auch die drei Endpunkte des Dreiecks im Raume von einander annähme, doch der Inhalt immer unter (infra) einer gegebenen Grenze wäre. Dergleichen Sätze habe ich mehrere, aber in keinem finde ich etwas Befriedigendes. Mach' doch ja Deine Arbeit bald bekannt; gewiss wirst Du dafür den Dank nicht zwar des grossen Publikums (worunter auch mancher gehört, der für einen geschickten Mathematiker gehalten wird) einernten, denn ich überzeuge mich immer mehr, dass die Zahl wahrer Geometer äusserst gering ist und die meisten die Schwierigkeiten bei solchen Arbeiten weder beurtheilen noch selbst einmal sie verstehen können — aber gewiss den Dank aller derer, deren Urtheil Dir allein wirklich schätzbar sein kann. — In Braunschweig ist ein Emigrant Namens Chauvelot, ein nicht schlechter Geometer, welcher vorgibt, die Theorie der Parallellinien ganz begründet zu haben und seine Arbeit nächstens wird drucken lassen, aber ich verspreche mir eben nichts von ihm. In Hindenburgs Archiv, 9tes Stück, befindet sich gleichfalls ein neuer Versuch über denselben Gegenstand, von einem gewissen Hauff, welcher unter aller Kritik ist. . . . .

Gauss an Bolyai. Braunschweig, 25. November 1804.

. . . . Ich habe Deinen Aufsatz mit grossem Interesse und Aufmerksamkeit durchgelesen, und mich recht an dem ächten gründlichen Scharfsinne ergötzt. Du willst aber nicht mein leeres Lob, das auch gewissermassen schon darum parteiisch scheinen könnte, weil Dein Ideengang sehr viel mit dem meinigen Ähnliches hat, worauf ich ehemals die Lösung dieses Gordischen Knoten versuchte, und vergebens bis jetzt versuchte. Du willst nur mein aufrichtiges unverholenes Urtheil. Und diess ist, dass Dein Verfahren mir noch **nicht** Genüge leistet. Ich will versuchen, den Stein des Anstosses, den ich noch darin finde (und der auch wieder zu derselben **Gruppe** von Klippen gehört, woran meine Versuche bisher scheiterten) mit so vieler Klarheit, als mir möglich ist, ans Licht zu ziehen. Ich habe zwar noch immer die Hoffnung, dass jene Klippen einst, und noch vor meinem Ende, eine Durchfahrt erlauben werden. Indess habe ich jetzt so manche andere Beschäftigungen vor der Hand, dass ich gegenwärtig daran nicht denken kann, und glaube mir, es soll mich herzlich herzlich freuen, wenn Du mir zuvorkommst, und es Dir

gelingt alle Hindernisse zu übersteigen. Ich würde dann mit der innigsten Freude alles thun, um Dein Verdienst gelten zu machen und ins Licht zu stellen, so viel in meinen Kräften steht. Ich komme nun sogleich zur Sache.

Bei allen **übrigen** Schlüssen finde ich gar nichts wesentliches einzuwenden: was mich **nicht** überzeugt hat, ist bloss das Räsonnement im XIII Artikel. Du denkst Dir daselbst eine ins Unbestimmte fortgeführte Linie $\Pi \ldots kdcfg \ldots$, die aus lauter geraden und gleichen Stücken besteht: kd, dc, cf, fg etc., und wo die Winkel kdc, dcf, cfg etc. einander gleich sind, und willst beweisen, dass Π über kurz oder lang nothwendig über $k\varphi$ hinaus gehen werde. Zu dieser Absicht lässest Du die gerade Linie $kd\infty = Q$ sich nach der Seite zu, wo Π liegt, um k herumbewegen, so dass sie nach und nach von einer Seite des Polygons Π zur folgenden kommt. Du zeigst vortrefflich, dass Q so, wie es stufenweise durch d, c, f, g etc. geht, jedesmal näher an $k\varphi$ kommt: gegen alles diess lässt sich **Nichts** einwenden: aber nun fährst Du fort



> »Quapropter Q moveri potest modo praescripto usque dum in $k\varphi$, $\varphi\infty$ pervenerit« etc.

und diese Schlussfolge ist es, die mir nicht einleuchtet. Aus Deinem Räsonnement folgt, meiner Einsicht nach, noch gar nicht, dass der Winkel, um den Q, beim Durchlaufen einer Seite von Π (nach oben herum), der $k\varphi$ näher kommt, nicht etwa immer unbedeutender werde, so dass das Aggregat aller successiven Annäherungen, so oft sie auch wiederholt werden, dennoch immer noch nicht gross [genug] werden könnte, um Q in $k\varphi$ zu bringen. Könntest Du **beweisen**, dass $dkc = ckf = fkg$ etc., so wäre die Sache gleich aufs Reine. Aber dieser Satz ist zwar wahr, allein schwerlich ohne die Theorie der Parallelen schon vorauszusetzen, strenge zu beweisen. Man könnte also immer noch besorgen, dass die Winkel dkc, ckf, fkg etc. successive abnehmen. Geschähe diess (bloss **exempli gratia**) in einer geometrischen Progression, so dass $ckf = \psi \times dkc$, $fkg = \psi \times dkc$ etc. (so dass ψ kleiner als 1), so würde

die Summe aller Annäherungen, so viele male man sie auch fortsetzte, doch immer kleiner als $\frac{1}{1-\psi} \times ckf$ bleiben, und diese Grenze könnte denn immer noch kleiner als der rechte Winkel $dk\varphi$ sein. Du hast mein aufrichtiges Urtheil verlangt: ich habe es gegeben, und ich wiederhole nochmals die Versicherung, dass es mich innig freuen soll, wenn Du alle Schwierigkeiten überwindest.
. . . .

BEMERKUNGEN.

GAUSS und WOLFGANG BOLYAI aus Bolya in Siebenbürgen haben vom Herbst 1796 bis Herbst 1798 zusammen in Göttingen studirt und freundschaftlich verkehrt. Vor BOLYAIS Heimreise sind sie noch einmal am 25. Mai 1799 in Clausthal zusammengetroffen; der Brief vom 16. December 1799, von dem hier ein Stück mitgetheilt wird, ist der erste, den GAUSS nach dem Abschiede an seinen Freund gerichtet hat.

BOLYAI hat seine »Göttingische Theorie der Parallelen« erst im Jahre 1804 an GAUSS geschickt, dessen Kritik der Brief vom 25. November 1804 enthält.

Was GAUSS' Untersuchungen über die ersten Gründe der Geometrie betrifft, so werden die vorstehenden Äusserungen ergänzt durch die Notizen:

»*Plani possibilitatem demonstravi.* [*1797*] *Jul. 28. Gotting.*«

und

»*In principiis Geometriae egregios progressus fecimus. Br*[*unovici 1799*] *Sept.*«

die sich in dem bereits S. 20 dieses Bandes erwähnten Tagebuche finden.

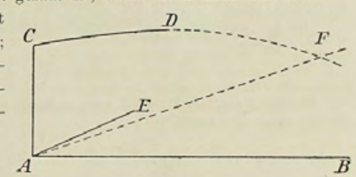
STÄCKEL.

EINIGE SÄTZE DIE ERSTEN GRÜNDE DER GEOMETRIE BETREFFEND.

1) Parallellinie mit einer Geraden heisst die, von welcher die Senkrechten auf letztere überall von gleicher Grösse sind.

2) Ob die Parallellinie selbst gerade ist, bleibt noch unentschieden.

3) AB gerade, [AC senkrecht auf AB,] CD mit ihr parallel; AE gerade, unter gegebenem Winkel BAE, wird weit genug fortgesetzt gewiss CD schneiden. Beweis so zu führen:

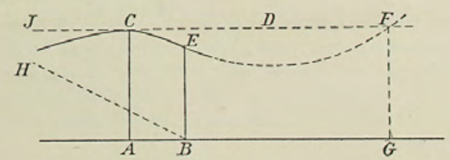


Es sei

$$2^n > \frac{90^\circ}{BAE}, \qquad BAF = \frac{90^\circ}{2^n}, \qquad AF \geqq 2^n AC,$$

so liegt gewiss F jenseits CD, also schneidet AF die CD und a potiori schneidet AE die CD.

4) BE und AC auf AB senkrecht, CD parallel, CE gerade. [ACE ein Rechter.] Falls BEC stumpf ist, wird $BE < AC$: alsdann liegt CE ganz unterhalb CD.



Gesetzt, CD würde von CE in F geschnitten, so sei FG auf AB senkrecht und GFE wird $= ACF$ sein, aber $< BEF$. Q[uod]. E[st]. A[bsurdum].

5) Man mache iisdem suppositis $EBH = BEF$, so wird BH die EC nicht schneiden, wohl aber die Parallele CJ, welches absurd ist.

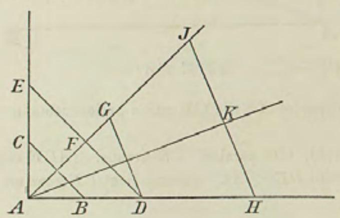
BEMERKUNGEN.

Die vorstehende Notiz findet sich auf der letzten Seite eines Handbuches, das den Titel trägt: Mathematische Brouillons. October 1805. Lässt sich auch die Zeit der Abfassung nicht genau feststellen, so zeigt doch der Inhalt der Notiz, dass sie an den Anfang von Gauss' Untersuchungen über die ersten Gründe der Geometrie gehört.

Der in 3) angedeutete Beweis beruht auf dem Hülfssatze: Trägt man auf dem einen Schenkel eines Winkels der Grösse

$$\frac{90^\circ}{2^n}$$

vom Scheitelpunkte aus die Strecke $2^n . l$ ab, so ist das vom Endpunkte dieser Strecke auf den andern Schenkel gefällte Loth grösser als l.



Es sei nemlich BAC ein rechter Winkel und $AB = AC = l$. Dann ist $BC > l$. Halbirt man den Winkel BAC durch AF und macht $AD = AE = 2l$, so wird $DE > 2l$, folglich ist das von D auf AF gefällte Loth $DF > l$.

Trägt man jetzt auf der Halbirungslinie AF des rechten Winkels BAC die Strecke $AG = 2l$ ab, so ist a fortiori $DG > l$. Halbirt man den Winkel DAG durch AK und macht $AH = AJ = 4l$, so wird $HJ > 2l$, folglich ist das von H auf AK gefällte Loth $HK > l$.

Wird diese Construction n-mal hintereinander ausgeführt, so ergibt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung.

Stäckel.

[ZUR THEORIE DER PARALLELLINIEN.]

[1.]

Gauss an Olbers. Braunschweig, 30. Juli 1806.

. . . . . Hr. von Zach schreibt mir noch, dass Sie Sich zur Recension von Legendres Werk über die Kometenbahnen erboten hätten. Mit Vergnügen werde ich Ihnen also das mir von Hrn. von Zach zugeschickte Exemplar nach Bremen senden, doch erlauben Sie wohl, dass ich es erst noch einige Wochen behalte. Bei vorläufigem Durchblättern scheint es mir sehr viel Schönes zu enthalten. Vieles von dem, was ich in meiner Methode besonders in ihrer ersten Gestalt Eigenthümliches hatte, finde ich auch in diesem Buche wieder. Es scheint mein Schicksal zu sein, fast in allen meinen theoretischen Arbeiten mit Legendre zu concurriren. So in der höhern Arithmetik, in den Untersuchungen über transcendente Functionen, die mit der Rectification der Ellipse zusammenhangen, bei den ersten Gründen der Geometrie und nun wieder hier. So ist z. B. auch das von mir seit 1794 gebrauchte Princip, dass man, um mehrere Grössen, die man nicht alle genau darstellen kann, am besten darzustellen, die Summe der Quadrate zu einem Minimum machen müsse, auch in Legendres Werke gebraucht und recht wacker ausgeführt. . . . . .

[2.]

[Aus Schumachers Tagebuch: »Gaussiana«. Göttingen, November 1808.]

{Gauss hat die Theorie der Parallellinien darauf zurückgebracht, dass wenn die angenommene Theorie nicht wahr wäre, es eine constante a priori der Länge nach gegebene Linie geben müsste, welches absurd ist. Doch hält er selbst diese Arbeit noch nicht für hinreichend.}

[3.]

Ideen.

Die schärfste Bestimmung der Declinationen der Sterne würde in der Nähe des Äquators durch gute Repetitionstheodolithen gemacht werden können, indem ihre Azimuthalunterschiede mit terrestrischen Objecten zur Zeit der grössten östlichen und westlichen Digressionen beobachtet würden. 1813 April 21.

In der Theorie der Parallellinien sind wir jetzt noch nicht weiter als Euklid war. Diess ist die partie honteuse der Mathematik, die früh oder spät eine ganz andere Gestalt bekommen muss. 1813 April 27.

Eben so wie eine Classe von Wahrheiten der höhern Arithmetik, auf reelle Zahlen beschränkt, in inniger Verbindung mit den Kreisfunctionen steht, eben so werden sich die allgemeinern Wahrheiten der H. A., auf imaginäre Grössen ausgedehnt, in den Lemniscatischen Functionen gleichsam spiegeln. Diese Ideen öffnen die Pforte zu einem höchst reichhaltigen Felde der Analyse.

Das Krystallprisma an den Fernröhren vergrössert deren Länge etwa um $\frac{1}{3}$ der Seite des Prisma, stört aber etwas die vollkommene Farbenlosigkeit.

BEMERKUNG.

Schumacher hat sich während des Winters 1808 bis 1809 in Göttingen aufgehalten. Über Gauss' Gespräche mit ihm hat er Aufzeichnungen in einem »GAUSSIANA« betitelten Hefte gemacht. Aus diesem Hefte ist die Notiz [2.] entnommen, während die Notiz [3.] auf einem einzelnen Zettel verzeichnet ist.

Stäckel.

BRIEFWECHSEL.

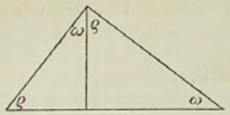
[LEGENDRES THEORIE DER PARALLELEN.]

[Gerling an Gauss. *Kassel, 11. März 1816.*]

[. . . . . . . Am Schlusse dieses fällt mir ein, dass ich schon oft vergessen habe, Sie um Ihr Urtheil über Legendres Theorie der Parallelen in seinen élémens de géom. zu bitten. — Er definirt die gerade Linie als den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten, und beweist mit Hülfe dieser Definition, dass die Summe 3er Winkel im Dreieck nicht grösser sein kann als $2R$, nachher beweist er, dass sie auch nicht kleiner sein könne als $2R$, wobei aber vorausgesetzt wird, dass man eine Linie durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels der $< \frac{2}{3}R$ ist, immer so legen könne, dass beide Schenkel geschnitten werden. Diese Voraussetzung rechtfertigt er in einer Anmerkung (pag. 280, 6te edit. 1806) durch das Einholen und Überholen des Punktes durch Verbindungslinien zwischen gleich weit vom Scheitel abliegenden Punkten auf den Schenkeln. — In diesem letzten scheint mir aber derselbe Fehler zu stecken, dessen Sie mich bei meinem letzten Aufenthalt in Göttingen überführten. Er erklärt es für assez évident, und glaubt, man könne es zu keiner grössern Strenge bringen, ohne von einer andern Erklärung der geraden Linie auszugehen. — Hinterher aber zeigt er, dass die Summe der 3 Winkel im Dreieck $= 2R$ sein müsse, noch auf eine andere mir neue und, wie mir scheint, stringente Weise; etwa so: durch 2 Winkel und die zwischenliegende Seite A, B, c ist das ganze Dreieck bestimmt, also

$$C = \varphi(A, B, c).$$

Setzt man nun den rechten Winkel = 1, so sind C, A, B Zahlen, es muss also c aus der Function wegfallen, weil sonst



$$c = \psi(C, A, B) = \text{einer Zahl},$$

q[uod] e[st] a[bsurdum]. Demnach im rechtwinkligen Dreiecke die Summe der beiden spitzen Winkel = $1R$, woraus das andere weiter folgt.

Ich hatte diesen Satz im Legendre schon gelesen, als ich in G[öttingen] studirte, und ärgerte mich auf meiner letzten Rückkehr von Göttingen nicht wenig, dass er mir nicht eingefallen war, als ich die Freude hatte, Sie damals darüber sprechen zu hören. Jetzt finde ich bei nochmaligem Nachlesen, dass er gegen den Einwurf der sphärischen Dreiecke, »der ihm gemacht sei«, erwiedert, bei ihnen sei nicht $C = \varphi(A, B, c)$, sondern $C = \varphi(A, B, c, \text{rad.})$ »ou seulement

$$C = \varphi\left(A, B, \frac{c}{r}\right)$$

en vertu de la loi des homogènes«. — Dieses letzte will mir nicht recht klar werden, und ich wünsche sehr gelegentlich die ganze Sache mit ein Paar Worten von Ihnen erwähnt zu sehen.}

Gauss an Gerling. Göttingen, 11. April 1816.

. . . . Sie wünschen mein Urtheil über Legendres Beweis der Parallelen zu haben. Ich gestehe, dass für mich gar keine Beweiskraft in seinem Schlusse liegt. Er schliesst, dass $c = \psi(A, B, C)$, also = einer Zahl, welches absurd. Aber dieses also folgt nicht, denn die Gleichung $c = \psi(A, B, C)$ sagt nichts weiter aus, als dass c bestimmt ist, sobald A, B, C bestimmt sind, schliesst aber nicht aus, dass noch eine constante Linie mit in der Form ψ vorkomme. Aus der Gleichung $C = \varphi(A, B, c)$ braucht c nicht wegzufallen, sondern jene kann recht gut bestehen, sobald in der Function φ eine constante Linie $= m$ mit vorkommt, so dass eigentlich

$$C = \varphi\left(A, B, \frac{c}{m}\right).$$

Es ist leicht zu beweisen, dass, wenn Euklids Geometrie nicht die wahre ist, es gar keine ähnliche Figuren gibt: die Winkel in einem gleichseitigen Dreieck sind dann auch nach der Grösse der Seite verschieden, wobei ich gar nichts absurdes finde. Es ist dann der Winkel Function der Seite und die Seite Function des Winkels, natürlicher Weise eine solche Function, in der zugleich eine constante Linie vorkommt. Es scheint etwas paradox, dass eine constante Linie gleichsam a priori möglich sein könne; ich finde aber darin nichts widersprechendes. Es wäre sogar wünschenswerth, dass die Geometrie Euklids nicht wahr wäre, weil wir dann ein allgemeines Mass a priori hätten, z. B. könnte man als Raumeinheit die Seite desjenigen gleichseitigen Dreiecks annehmen, dessen Winkel = $59°59'59''\!.99999$. . . . . . .

ANZEIGE.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1816 April 20.

Stuttgart.

Typis J. F. Steinkopf: *Commentatio in primum elementorum Euclidis librum, qua veritatem geometriae principiis ontologicis niti evincitur, omnesque propositiones, axiomatum geometricorum loco habitae, demonstrantur. Auctore* J. C. Schwab, *Regi Württembergiae a consiliis aulicis secretioribus, academiae scientiarum Petropolitanae, Berolinensis et Harlemensis Sodali.* 1814. 65 Seiten in Octav.

Mainz.

Auf Kosten des Verfassers und in Commission bei Florian Kupferberg: *Vollständige Theorie der Parallellinien. Nebst einem Anhange, in welchem der erste Grundsatz zur Technik der geraden Linie angegeben wird. Herausgegeben von* Matthias Metternich, *Doctor der Philosophie, Professor der Mathematik, Mitglied der gelehrten Gesellschaft nützlicher Wissenschaften zu Erfurt.* 1815. 44 Seiten in Octav.

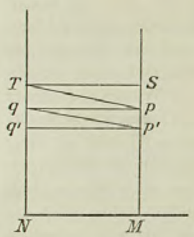
Es wird wenige Gegenstände im Gebiete der Mathematik geben, über welche so viel geschrieben wäre, wie über die Lücke im Anfange der Geometrie bei Begründung der Theorie der Parallellinien. Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgend ein neuer Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne dass wir doch, wenn wir ehrlich und offen reden wollen, sagen könnten, dass wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jahren war. Ein solches aufrichtiges und unumwundenes Ge-

ständniss scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener, als das eitele Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen.

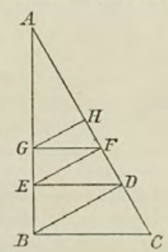
Der Verfasser der erstern Schrift hatte bereits vor 15 Jahren in einer kleinen Abhandlung: »Tentamen novae parallelarum theoriae notione situs fundatae« einen ähnlichen Versuch gemacht, indem er alles auf den Begriff von Identität der Lage zu stützen suchte. Er definirt Parallellinien als solche gerade Linien, die einerlei Lage haben, und schliesst daraus, dass solche Linien von jeder dritten geraden Linie nothwendig unter gleichen Winkeln geschnitten werden müssen, weil diese Winkel nichts anderes seien, als das Mass der Verschiedenheit der Lage dieser dritten Linie von den Lagen der beiden Parallellinien. Diese Beweisart ist in der vorliegenden neuen Schrift wiederholt, ohne dass wir sagen könnten, dass sie durch die eingewebten philosophischen Betrachtungen an Stärke gewonnen hätte. Der Behauptung S. 24: »Notionem situs e geometria adeo non excludi posse, ut potius notionibus ejus fundamentalibus annumeranda sit, dudum omnes agnovere geometrae« muss in dem Sinne, in welchem der Verf. den Begriff Lage in seinem Beweise gebraucht, jeder Geometer widersprechen. Wenn wir von des Verfassers Definition: »Situs est modus, quo plura coëxistunt vel juxta se existunt in spatio« ausgehen, so ist Lage ein blosser Verhältnissbegriff, und man kann wohl sagen, dass zwei gerade Linien A, B eine gewisse Lage gegen einander haben, die mit der gegenseitigen Lage zweier andern C, D einerlei ist. Aber der Verf. gebraucht das Wort Lage in seinem Beweise als absoluten Begriff, indem er von Identität der Lage zweier nicht coincidirenden geraden Linien spricht. Diese Bedeutung ist offenbar so lange leer und ohne Haltung, bis wir wissen, was wir uns bei einer solchen Identität denken und woran wir dieselbe erkennen sollen. Soll sie an der Gleichheit der Winkel mit einer dritten geraden Linie erkannt werden, so wissen wir ohne vorangegangenen Beweis noch nicht, ob eben dieselbe Gleichheit auch bei den Winkeln mit einer vierten geraden Linie Statt haben werde: soll die Gleichheit der Winkel mit jeder andern geraden Linie das Criterium sein, so wissen wir wiederum nicht, ob gleiche Lage ohne Coincidenz möglich ist. Wir stehen mithin nach des Verf. Beweise noch gerade auf demselben Punkte, wo wir vor demselben standen.

Ein grosser Theil der Schrift dreht sich um die Behauptung gegen Kant, dass die Gewissheit der Geometrie sich nicht auf Anschauung, sondern auf Definitionen und auf das »Principium identitatis« und das »Principium contradictionis« gründe. Dass von diesen logischen Hülfsmitteln zur Einkleidung und Verkettung der Wahrheiten in der Geometrie fort und fort Gebrauch gemacht werde, hat wohl Kant nicht läugnen wollen: aber dass dieselben für sich nichts zu leisten vermögen, und nur taube Blüthen treiben, wenn nicht die befruchtende lebendige Anschauung des Gegenstandes selbst überall waltet, kann wohl niemand verkennen, der mit dem Wesen der Geometrie vertraut ist. Hrn. Schwabs Widerspruch scheint übrigens zum Theil nur auf Missverständniss zu beruhen: wenigstens scheint uns, nach dem 16ten Paragraph seiner Schrift, welcher von Anfang bis zu Ende gerade das Anschauungsvermögen in Anspruch nimmt, und am Ende beweisen soll, »postulata Euclidis in generaliora resolvi posse, non sensu et intuitione sed intellectu fundata«, dass Hr. Schwab sich bei diesen Benennungen verschiedener Zweige des Erkenntnissvermögens etwas anderes gedacht haben müsse, als der Königsberger Philosoph.

Obgleich der Verfasser der zweiten Schrift seinen Gegenstand auf eine ganz andere und wirklich mathematische Art behandelt hat, so können wir doch über das Resultat derselben nicht günstiger urtheilen. Wir haben nicht die Absicht, hier den ganzen Gang seines versuchten Beweises darzulegen, sondern begnügen uns, dasjenige hier herauszuheben, worauf im Grunde alles ankommt.



Man denke sich zwei im Punkte N unter rechten Winkeln einander schneidende gerade Linien, und fälle von einem Punkte S, der ausserhalb dieser geraden Linien, aber in derselben Ebene liegt, Senkrechte auf dieselben: ST und SM. Es kommt nun darauf an zu beweisen, dass MST ein rechter Winkel wird. Der Verf. sucht dies apagogisch zu beweisen; zuvörderst nimmt er an, MST sei spitz, fällt von T auf MS das Perpendikel Tp, und beweist, dass p zwischen S und M fallen muss. Hierauf fällt er wieder aus p auf NT das Perpendikel pq, wo q zwischen T und N fallen wird. Dann fällt er abermals aus q auf MS das Perpendikel qp', wo p' zwischen p und M liegen wird. Sodann abermals aus p' auf NT das Perpendikel $p'q'$ u. s. w. Diese Operationen lassen sich ohne Aufhören fortsetzen, und so werden von der Linie MS nach und nach die Stücke Sp, pp' u. s. w. abgeschnitten, die jedes eine angebliche Grösse haben, und deren Zahl unbegrenzt ist. Der Verfasser meint nun, dass diess widersprechend sei, weil auf diese Weise nothwendig MS zuletzt erschöpft werden müsste. Es ist kaum begreiflich, wie er sich auf eine solche Weise selbst täuschen konnte. Er macht sich sogar selbst den Einwurf, dass die Summe der Stücke Sp, pp' u. s. w., wenn diese Stücke immer kleiner und kleiner werden, doch ungeachtet ihre Anzahl ohne Aufhören zunehme, nicht über eine gewisse Grenze hinauswachsen könnte, und meint diesen Einwurf damit zu heben, dass jene Stücke, auch wenn sie immer kleiner und kleiner werden, doch immer grösser bleiben, als eine angebliche Grösse; nemlich jene Stücke sind Katheten von rechtwinkligen Dreiecken, und folglich immer grösser als der Unterschied zwischen Hypotenuse und der andern Kathete. Fast scheint es, dass eine grammatische Zweideutigkeit den Verf. irre geleitet hat, nemlich der zwiefache Sinn des Artikels eine angebliche Grösse. Der Schluss des Verf. würde nur dann richtig sein, wenn sich zeigen liesse, dass die Stücke Sp, pp' u. s. w. immer grösser bleiben als Eine bestimmte angebliche Grösse, z. B. als der Unterschied zwischen der Hypotenuse pT und der Kathete ST. Aber das lässt sich nicht beweisen, sondern nur, dass jedes Stück immer grösser bleibt, als eine angebliche Grösse, die aber selbst für jedes Stück eine andere ist, nemlich Sp grösser als der Unterschied zwischen pT und ST, ferner pp' grösser als der Unterschied zwischen qp' und qp u. s. w. Hiermit verschwindet nun aber die ganze Kraft des Beweises.



Auf dieselbe Art, wie er seinen Beweis führen zu können geglaubt hat, könnte er auch beweisen, dass in einem ebenen Dreiecke ABC, worin B ein rechter Winkel ist, C nicht spitz sein könne; er brauchte nur aus B ein Perpendikel BD auf die Hypotenuse AC zu fällen, dann wieder das Perpendikel DE auf AB und so ohne Aufhören die Perpendikel EF, FG, GH u. s. w. wechselsweise auf AC und AB. Die Stücke CD, DF, FH u. s. w.

sind immer grösser als der angebliche Unterschied zwischen Hypotenuse und einer Kathete desjenigen rechtwinkligen Dreiecks, worin jede der Reihe nach die andere Kathete ist, demungeachtet erschöpft ihre Summe offenbar die Hypotenuse AC nie, so gross auch ihre Anzahl genommen wird.

Wir müssten fast bedauern, bei so bekannten und leichten Dingen so lange verweilt zu haben, wenn nicht diese Schrift, deren Verf. es übrigens wirklich um Wahrheit zu thun zu sein scheint, durch die Art, wie sie schon vor ihrer Erscheinung in öffentlichen Blättern angekündigt wurde, eine mehr als gewöhnliche Aufmerksamkeit auf sich gezogen hätte. Wir bemerken daher hier nur noch, dass der Verf. nachher auf eine ganz ähnliche, und daher eben so nichtige Art beweisen will, dass der Winkel MST nicht stumpf sein kann: allein hierbei ist doch ein wesentlicher Unterschied, weil in der That die Unmöglichkeit dieses Falles in aller Strenge bewiesen werden kann, welches weiter auszuführen aber hier nicht der Ort ist.

BEMERKUNG.

Diese bereits in Band IV, Seite 364 bis 368 abgedruckte Anzeige ist hier der Vollständigkeit wegen reproducirt worden. Zwei Figuren, die sich weder beim Originale noch bei dem ersten Abdrucke finden, sollen das Verständniss des Textes erleichtern. STÄCKEL.

BRIEFWECHSEL.

[DIE TRANSCENDENTE TRIGONOMETRIE.]

[WACHTER an GAUSS. *Danzig, 12. December 1816.*]

[. . . . . Also die anti-Euklideische oder Ihre Geometrie wäre wahr. Die Constante in ihr aber bleibt unbestimmt: warum? liesse sich vielleicht durch Folgendes begreiflich machen. . . . .

. . . . Das Resultat des Bisherigen wäre also so auszusprechen:

Die Euklideische Geometrie ist falsch; aber dennoch muss die wahre Geometrie mit demselben elften Euklideischen Axiom oder mit dem Postulat von Linien und Flächen anfangen, welche die in jenem Axiom behauptete Eigenschaft haben. Statt der geraden Linie und Ebene sind nur die grössten Kreise jener mit unendlichem Radius beschriebenen Kugel nebst ihrer Oberfläche zu setzen. Es entsteht zwar die eine Unbequemlichkeit daraus, dass die Theile dieser Fläche bloss symmetrisch, nicht, wie bei der Ebene, congruent sind; oder dass der Radius nach der einen Seite hin unendlich, nach der andern imaginär ist; allein wie jene Unbequemlichkeit durch viele andere Vortheile, welche die Construction auf einer Kugelfläche darbietet, wieder aufgewogen werde, ist klar: so dass vielleicht auch dann noch, wenn die Euklideische Geometrie wahr wäre, zwar nicht mehr die Nothwendigkeit obwaltete, die Ebene als eine unendliche Kugelfläche zu betrachten, aber doch noch die Fruchtbarkeit dieser Ansicht dieselbe empfehlen könnte.

Allein, als ich alles diess durchdacht, als ich mich über das Resultat schon völlig beruhigt hatte, theils weil ich glaubte, der Grund (la métaphysique) jener der Geometrie nothwendig anhaftenden Unbestimmtheit, — auch selbst der vollendeten Unentschiedenheit in dieser Sache, dann, wenn jener Beweis gegen die Euklideische Geometrie, wie ich nicht erwarten durfte, nicht für stringent zu halten sei — [sei von mir erkannt worden]; theils, weil doch alle die vielen bisherigen Untersuchungen aus der ebenen Geometrie nicht für verloren zu achten: sondern mit wenigen Modificationen zu gebrauchen wären, und denn doch wenigstens bis zu einer ziemlich weiten Grenze hin, die sich vielleicht noch näher bestimmen liesse, auch die Sätze der körperlichen Geometrie und der Mechanik näherungsweise Gültigkeit hätten; fand ich heute Abend — eben mit einem Versuch beschäftigt, einen Eingang zu Ihrer transcendenten Trigonometrie zu finden, und weil es mir nicht gelingen wollte, in der Ebene dafür hinreichende, bestimmte Functionen zu erhalten, zu räumlichen Constructionen fortgehend, zu meiner nicht geringen Überraschung folgenden Beweis für die Euklideische Parallel-Theorie. . . . . .

. . . . . . Gerade im Begriff zu schliessen bemerke ich noch, dass der obige Beweis für die Euklideische Parallel-Theorie fehlerhaft ist. . . . . . Also wäre auch hier die Hoffnung verschwunden, zu einem völlig entschiedenen Resultat zu kommen, und ich muss mich wieder bei dem vorhin Angeführten beruhigen. Übrigens glaube ich auf jenem Wege wenigstens einen Schritt zu Ihrer transcendenten Trigonometrie gethan zu haben, indem ich, mit Hülfe der sphärischen Trigonometrie, die Verhältnisse aller Constanten, wenigstens durch Construction der rechtwinkligen Dreiecke angeben kann. Es fehlt mir noch die wirkliche Berechnung der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks aus der Seite, wofür ich suchen werde vom gleichseitigen Dreieck auszugehen. . . .}

BEMERKUNG.

In dem Briefe vom 12. December 1816, von dem hier Stücke mitgetheilt sind, bezieht sich WACHTER wiederholt auf ein Gespräch mit GAUSS, das während seines »letzten Aufenthalts in Göttingen« stattgefunden und die antieuklidische Geometrie zum Gegenstand gehabt hatte. Aus einem Briefe von GAUSS an OLBERS vom 4. Juni 1816 geht hervor, dass dieser Besuch WACHTERS in den April 1816 zu setzen ist.

STÄCKEL.

GAUSS an OLBERS. Göttingen, 28. April 1817.

. . . . WACHTER hat eine kleine Piece drucken lassen über die ersten Gründe der Geometrie, wovon Sie durch LINDENAU vermuthlich ein Exemplar erhalten werden. Obgleich W. in das Wesen der Sache mehr eingedrungen ist, als seine Vorgänger, so ist sein Beweis doch nicht bündiger als alle andern. Ich komme immer mehr zu der Überzeugung, dass die Nothwendigkeit unserer Geometrie nicht bewiesen werden kann, wenigstens nicht vom **menschlichen** Verstande noch für den menschlichen Verstand. Vielleicht kommen wir in einem andern Leben zu andern Einsichten in das Wesen des Raums, die uns jetzt unerreichbar sind. Bis dahin müsste man die Geometrie nicht mit der Arithmetik, die rein a priori steht, sondern etwa mit der Mechanik in gleichen Rang setzen. . . . . . .

[ASTRALGEOMETRIE.]

[Gerling an Gauss. *Marburg, 23. Juli 1818.*]

[. . . . . . Mir steht im künftigen Semester eine Arbeit bevor, für welche ich schon jetzt so frei bin Sie um Rath zu bitten, und diess zu thun, wahrscheinlich öfter so frei sein werde. — Fleckeisen hat mich nemlich gebeten, die Besorgung einer neuen Auflage von Lorenz' reiner Mathematik zu übernehmen; und ich kann diess um so lieber thun, da ich hier nach diesem Buch selbst lese; und es nun schon 6 Jahre immer beim Unterricht gebraucht habe.

. . . . In der Geometrie habe ich weniger Anstösse, möchte aber besonders gern Ihre Meinung wissen, wie es mit der Parallelentheorie wohl am besten zu halten ist. Was Lorenz darüber hat, ist theils falsch, theils ungründlich. — Dass die Euklidische Manier vorzutragen sei, dabei aber der Mangel derselben einzugestehen, halte ich für Recht; das quomodo aber ist mir nicht klar. Ich habe gedacht, es sei am besten, den Satz: Eine gerade Linie kann durch einen Punkt nur eine Parallele haben, als Axiom hinzustellen, und in einer Anmerkung zu sagen, dass man einen Beweis für diesen Satz noch nicht habe finden können, und deshalb ihn so lange bis einer gefunden, oder die Unwahrheit des Satzes bewiesen sei, als Axiom annehmen müsse, wie im Grunde schon Euklides gethan. — Haben Sie doch die Güte mir auch hierüber Ihr Urtheil zu eröffnen. . . . . . .]

Gauss an Gerling. Göttingen, 25. August 1818.

. . . . . . Von Ihren Fragen wegen des Lorenzischen Lehrbuchs kann ich heute nur auf einige antworten. . . . . . .

. . . . . . Ich freue mich, dass Sie den Muth haben sich so auszudrücken, als wenn Sie die Möglichkeit, dass unsere Parallelentheorie, mithin unsere ganze Geometrie, falsch wäre, anerkennten. Aber die Wespen, deren Nest Sie aufstören, werden Ihnen um den Kopf fliegen. . . . . . .

[Gerling an Gauss. *Marburg, 25. Januar 1819.*]

[. . . . . Die Stelle über die Parallelentheorie habe ich nun so gefasst: »Der Satz § 72 ist in Euklids Elementen (1. Buch, 11. Grundsatz) als Grundsatz aufgestellt. Dass er aber kein Grundsatz sei, sondern eines Beweises bedürfe, lehrt die Betrachtung: dass zwei wesentlich verschiedene Anschauungen (Winkel zweier Linien mit einer dritten und Zusammentreffen derselben unter sich) darin vorkommen, deren nothwendiger Zusammenhang durch einen Beweis nachgewiesen werden muss. — Dieser Beweis (die Parallelentheorie) ist auf mannichfaltige Weise von scharfsinnigen Mathematikern versucht, bis jetzt aber noch nicht vollkommen genügend aufgefunden worden. Solange er fehlt, bleibt der Satz, so wie alles was sich auf ihn stützt, eine Hypothese, deren Gültigkeit für unser Leben freilich durch die Erfahrung dargethan wird, deren allgemeine, nothwendige Richtigkeit aber ohne Absurdität bezweifelt werden könnte«.

Ad vocem Parallelentheorie muss ich Ihnen noch etwas erzählen, und eines Auftrags mich entledigen. Ich erfuhr im vorigen Jahr, dass mein College Schweikart (Prof. juris, jetzt Prorector) sich ehedem mit Mathematik viel beschäftigt und namentlich auch über Parallelen geschrieben habe. Ich bat ihn also mir sein Buch zu leihen. Indem er mir diess versprach, sagte er mir, dass er jetzt wohl einsehe, wie in seinem Buche (1808) Fehler vorgekommen (er hatte z. B. Vierecke mit gleichen Winkeln als einen ursprünglichen Begriff gebraucht), dass er aber nicht abgelassen habe, sich mit dem Gegenstande zu beschäftigen, und jetzt beinahe überzeugt sei, dass ohne irgend ein datum der Euklidische Satz nicht zu beweisen sei, dass es ihm auch nicht unwahrscheinlich sei, dass unsere Geometrie nur ein Kapitel einer allgemeinern sei. Ich erzählte ihm darauf, wie Sie vor einigen Jahren öffentlich geäussert hätten, dass man seit Euklids Zeiten im Grunde hiermit nicht weiter gekommen sei; ja dass Sie gegen mich mehrmals geäussert hätten, wie Sie durch vielfältige Beschäftigung mit diesem Gegenstand, auch nicht zum Beweise von der Absurdität einer solchen Annahme gekommen seien. — Als er mir darauf das verlangte Buch schickte, lag der beigehende Zettel bei, und er bat mich kurz darauf (Ende December) mündlich, Ihnen doch gelegentlich diesen seinen Zettel beizuschliessen, und Sie in seinem Namen zu ersuchen, gelegentlich ihm Ihr Urtheil über seine Ideen wissen zu lassen.

Das Buch selbst hat, abgesehen von allem übrigen, das angenehme, dass eine reichhaltige Literatur des Gegenstandes sich darin findet; welche er auch, wie er mir sagt, ferner zu sammeln nicht abgelassen hat. . . . . .|

[*Beilage: Notiz von* SCHWEIKART. *Marburg, December 1818.*]

|Es gibt eine zwiefache Geometrie, — eine Geometrie im engern Sinn — die Euklidische; und eine astralische Grössenlehre.

Die Dreiecke der letztern haben das Eigene, dass die Summe der drei Winkel nicht zwei Rechten gleich ist.

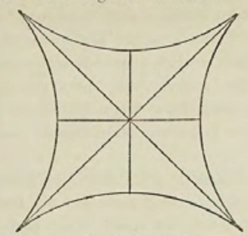
Diess vorausgesetzt, lässt es sich auf das strengste beweisen:

a) dass die Summe der 3 Winkel in dem Dreieck kleiner als 2 Rechte sei;

b) dass diese Summe immer kleiner werde, je mehr Inhalt das Dreieck umfasst;

c) dass die Höhe eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks zwar immer zunimmt, je mehr man die Schenkel verlängert, dass sie aber eine gewisse Linie, die ich die Constante nenne, nicht übersteigen könne.

Die Quadrate haben daher folgende Gestalt:



Ist diese Constante für uns die halbe Erdaxe (wonach jede im Weltraume von einem Fixstern zum andern, die 90^0 von einander entfernt sind, gezogene Linie eine Tangente der Erdkugel sein würde), so ist sie in Beziehung auf die, im täglichen Leben vorkommenden, Räume unendlich gross.

Die Euklidische Geometrie gilt nur unter der Voraussetzung, dass die Constante unendlich gross sei. Nur dann ist es wahr, dass die drei Winkel eines jeden Dreiecks zwei Rechten gleich seien; auch lässt sich diess, so wie man sich den Satz, dass die Constante unendlich gross sei, geben lässt, leicht beweisen.

SCHWEIKART.|

GAUSS an GERLING. Marburg, 16. März 1819.

. . . . . . Die Notiz von Hrn. Prof. SCHWEIKART hat mir ungemein viel Vergnügen gemacht, und ich bitte ihm darüber von mir recht viel Schönes zu sagen. Es ist mir fast alles aus der Seele geschrieben. Nur bloss bei dem einen Artikel der so anfängt:

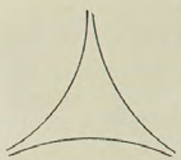
Ist diese Constante für uns die halbe Erdaxe u. s. w., muss ich drei Bemerkungen machen:

1) sehe ich die Möglichkeit nicht ein, dass eine Constante bloss für uns gelten könne, und für andere Wesen eine andere. Ich weiss auch nicht, ob Hr. SCHW. diess so gemeint habe, nur hat er das für uns selbst unterstrichen.

2) fährt er fort: »wonach jede im Weltraum von einem Fixstern zum andern, die 90^0 von einander entfernt sind, gezogene Linie eine Tangente der Erdkugel sein würde«. Hierbei ist die Entfernung der Fixsterne verglichen mit der Constante als unermesslich gross betrachtet, aber demungeachtet hat das um 90^0 von einander entfernt sein dann nur einen bestimmten Sinn, in so fern es auf einen bestimmten Scheitelpunkt des Winkels bezogen wird, z. B. den Mittelpunkt der Erde, was ohne Zweifel auch Hr. Prof. SCH. tacite vorausgesetzt hat.

3) hat ohne Zweifel diess Hr. Prof. SCH. bloss Beispielshalber als Erläuterung gesagt, denn obgleich ich mir recht gut die Unrichtigkeit der Euklidischen Geometrie denken kann, so müsste doch nach unsern astronomischen Erfahrungen die besagte Constante unermesslich viel grösser sein, als der Erdradius.

Ich vermuthe, dass Hr. SCH. mit allem diesen einverstanden sein wird, was mich bei dem gänzlichen Zusammentreffen seiner Ansicht mit der meinigen sehr freuen wird. Ich bemerke nur noch, dass ich die Astralgeometrie so weit ausgebildet habe, dass ich alle Aufgaben vollständig auflösen kann, sobald die Constante $= C$ gegeben wird. Der Defect der Winkelsumme im ebenen Dreieck gegen 180^0 ist z. B. nicht bloss desto grösser, je grösser der Flächeninhalt ist, sondern ihm genau proportional, so dass der Flächeninhalt eine Grenze hat, die er nie erreichen kann, und welche Grenze selbst dem Inhalt der zwischen drei sich asymptotisch berührenden geraden Linien enthaltenen Fläche gleich ist, die Formel für diese Grenze ist



$$\text{Limes areae trianguli plani} = \frac{\pi CC}{\{\log\text{hyp}\,(1+\sqrt{2})\}^2}.$$

Auch jedes andere Polygon von einer bestimmten Seitenzahl $= n$ hat in Beziehung auf seinen Flächeninhalt eine bestimmte Grenze, der es so nahe man will kommen, aber sie nie erreichen kann,

$$= \frac{(n-2)\pi CC}{(\log\text{hyp}\,(1+\sqrt{2}))^2}.$$

Theilen Sie gefälligst diess Hrn. SCHW. mit. . . . . . .

ANZEIGE.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1822 October 28.

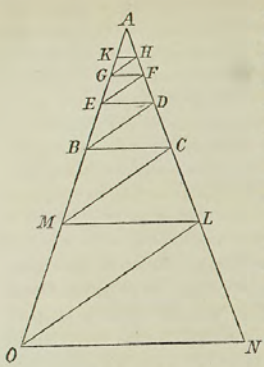
Marburg.

Theorie der Parallelen, von CARL REINHARD MÜLLER, *Doctor der Philosophie, ausserordentlichem Professor der Mathematik* u. s. w. 1822. 40 Seiten in Quart.

Rec. hat bereits vor sechs Jahren in diesen Blättern seine Überzeugung ausgesprochen, dass alle bisherigen Versuche, die Theorie der Parallellinien streng zu beweisen, oder die Lücke in der Euklidischen Geometrie auszufüllen, uns diesem Ziele nicht näher gebracht haben, und kann nicht anders, als dieses Urtheil auch auf alle spätern ihm bekannt gewordenen Versuche ausdehnen. Inzwischen bleiben doch manche solcher Versuche, obgleich der eigentliche Hauptzweck verfehlt ist, wegen des darin bewiesenen Scharfsinns den Freunden der Geometrie lesenswerth, und Rec. glaubt in dieser Rücksicht die vorliegende bei Gelegenheit einer Schulprüfung bekannt gemachte kleine Schrift besonders auszeichnen zu müssen. Den ganzen sinnreichen Ideengang des Verf. hier ausführlich darzulegen, wäre für unsere Blätter zu weitläuftig und auch überflüssig, da die Schrift selbst gelesen zu werden verdient: aber sie hat ihre schwache Stelle, wie alle übrigen Versuche, und diese herauszuheben, ist der Zweck dieser Anzeige.

Wir finden diese schwache Stelle S. 15 in dem Beweise des Lehrsatzes des 15. Artikels. Dieser Lehrsatz ist der wahre Nerv der ganzen Theorie, welche fällt, sobald jener nicht streng bewiesen werden kann. Wir führen daher zuvörderst diesen Lehrsatz hier auf; die dazu gehörige Figur wird jeder leicht selbst zeichnen können.

Wenn jeder Winkel an der Grundlinie ON eines gleichschenkligen Dreiecks grösser ist, als der Winkel an der Spitze A, und man setzt in O an die Seite OA



einen Winkel von der Grösse des Winkels A, dessen anderer Schenkel OL die AN in dem Punkte L zwischen A und N trifft, schneidet alsdann von AO ein Stück $OM = NL$ ab und zieht ML; wenn man ferner in M an MA abermals einen Winkel von der Grösse des Winkels A setzt, dessen anderer Schenkel MC die AN in dem Punkte C zwischen A und L trifft, hierauf von AM ein Stück $MB = LC$ abschneidet und BC zieht, und sodann diese Construction auf ähnliche Art fortsetzt, so dass auf der Linie OA die Punkte O, M, B, E, G, K u. s. w., auf der Linie NA hingegen die Punkte N, L, C, D, F, H u. s. w. liegen, so wird behauptet, dass die Stücke OM, MB, BE, EG, GK u. s. w. oder die ihnen resp. gleichen NL, LC, CD, DF, FH u. s. w. eine abweichende Progression bilden.

Den Beweis dieses Lehrsatzes sucht der Verf. apagogisch so zu führen, dass er die übrigen möglichen Fälle, wenn der Lehrsatz nicht wahr wäre, aufzählt, und die Unstatthaftigkeit eines jeden zu erweisen versucht. Der Verf. behauptet nemlich, dass unter jener Voraussetzung einer von folgenden fünf Fällen Statt haben müsste. Die auf einander folgenden Stücke, von OM an gerechnet, wären

1) alle einander gleich, oder
2) jedes nachfolgende grösser als das vorhergehende, oder
3) einige einander gleich und das darauf folgende grösser oder kleiner, oder
4) einige auf einander folgende nähmen fortschreitend ab, und die darauf folgenden fortschreitend zu, oder
5) sie würden abwechselnd grösser und kleiner.

In dieser Aufzählung ist der mögliche Fall übergangen, dass die Stücke anfangs fortschreitend zu- und dann fortschreitend abnähmen, und nach Rec. eigener Überzeugung (deren tiefer liegende Gründe hier aber nicht angeführt werden können) wäre dessen Erledigung gerade die Hauptsache und die eigent-

liche Auflösung des Gordischen Knotens. Inzwischen kann man zugeben, dass diese Auslassung hier in so fern wenig auf sich hat, als die Beweisart des Verf. für die Unstatthaftigkeit des dritten Falls, wenn sie zulässig wäre, auch auf diesen Fall von selbst erstreckt werden könnte. Allein eben diesem angeblichen Beweise der Unstatthaftigkeit des dritten Falls können wir keine Gültigkeit zugestehen. Der Verf. stellt die Sache so vor. Wenn z. B. in dem dritten Falle angenommen wird, die beiden ersten Stücke seien gleich, das dritte aber grösser, so wäre DC also grösser als CL. Da nun aber AML gleichfalls ein gleichschenkliges Dreieck ist, dem dieselbe Grundbedingung zukommt, wie dem ursprünglichen Dreieck AON, so müsste, wenn jener dritte Fall mit seiner angenommenen Unterabtheilung der gültige wäre, $DC = CL$ sein, in Widerspruch mit dem vorher Gefundenen.

Wir haben, wie wir glauben, bei diesem Moment des Beweises das, worauf es ankommt, noch etwas klarer und bestimmter nach der Ansicht des Verf. angedeutet, als er es selbst gethan hat, wodurch dann aber auch die Schwäche desselben, wie uns scheint, leichter erkannt wird. Denn offenbar ist hier ganz willkürlich angenommen, dass bei allen gleichschenkligen Dreiecken mit dem Winkel A an der Spitze und grösserm Winkel an der Basis, wenn mit ihnen die im Lehrsatz angezeigte Construction vorgenommen wird, die Folge der abgeschnittenen Stücke in Rücksicht auf ihr Gleichbleiben, Grösser- oder Kleinerwerden, allemal, unabhängig von der Grösse der Seiten, nothwendig dieselbe sein müsse, eine Annahme, die doch unmöglich als von selbst evident betrachtet werden darf. Da sich nun aber hierauf allein der versuchte Beweis der Unstatthaftigkeit des dritten (wie auch vierten und fünften) Falls stützt, und der ganze Artikel auch keine andere Ressourcen zum Beweise der Unstatthaftigkeit des übergangenen Falls darbietet, so glauben wir hierdurch das oben ausgesprochene Urtheil hinlänglich gerechtfertigt zu haben, wobei wir aber gern der ganzen übrigen sinnreichen Durchführung in den folgenden Artikeln volle Gerechtigkeit widerfahren lassen.

BEMERKUNG.

Diese bereits in Band IV, Seite 368 bis 370 abgedruckte Anzeige ist hier der Vollständigkeit wegen reproducirt worden. Die Figur, die sich weder beim Originale noch bei dem ersten Abdrucke findet, soll das Verständniss des Textes erleichtern.

STÄCKEL.

NACHLASS UND BRIEFWECHSEL.

[ZUR PARALLELENTHEORIE.]

Gauss an Taurinus. Göttingen, 8. November 1824.

Ewr. Wohlgeboren

gefälliges Schreiben vom 30. Oct. nebst dem beigefügten kleinen Aufsatz habe ich nicht ohne Vergnügen gelesen, um so mehr, da ich sonst gewohnt bin, bei der Mehrzahl der Personen, die neue Versuche über die sogenannte Theorie der Parallellinien [machen,] gar keine Spur von wahrem geometrischen Geiste anzutreffen. Gegen Ihren Versuch habe ich nichts (oder nicht viel) anderes zu erinnern als dass er unvollständig ist. Zwar lässt Ihre Darstellung des Beweises, dass die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks nicht grösser als 180° sein kann, in Rücksicht auf geometrische Schärfe noch zu desideriren übrig. Allein diess würde sich ergänzen lassen, und es leidet keinen Zweifel, dass jene Unmöglichkeit sich auf das allerstrengste beweisen lässt. Ganz anders verhält es sich aber mit dem 2^n. Theil, dass die Summe der Winkel nicht kleiner als 180° sein kann; diess ist der eigentliche Knoten, die Klippe, woran alles scheitert. Ich vermuthe, dass Sie Sich noch nicht lange

mit diesem Gegenstande beschäftigt haben. Bei mir ist es über 30 Jahr, und ich glaube nicht, dass jemand sich eben mit diesem 2^n. Theil mehr beschäftigt haben könne als ich, obgleich ich niemals darüber etwas bekannt gemacht habe. Die Annahme, dass die Summe der 3 Winkel kleiner sei als 180°, führt auf eine eigene, von der unsrigen (Euklidischen) ganz verschiedene Geometrie, die in sich selbst durchaus consequent ist, und die ich für mich selbst ganz befriedigend ausgebildet habe, so dass ich jede Aufgabe in derselben auflösen kann mit Ausnahme der Bestimmung einer Constante, die sich a priori nicht ausmitteln lässt. Je grösser man diese Constante annimmt, desto mehr nähert man sich der Euklidischen Geometrie und ein unendlich grosser Werth macht beide zusammenfallen. Die Sätze jener Geometrie scheinen zum Theil paradox, und dem Ungeübten ungereimt; bei genauerer ruhiger Überlegung findet man aber, dass sie an sich durchaus nichts unmögliches enthalten. So z. B. können die drei Winkel eines Dreiecks so klein werden als man nur will, wenn man nur die Seiten gross genug nehmen darf, dennoch kann der Flächeninhalt eines Dreiecks, wie gross auch die Seiten genommen werden, nie eine bestimmte Grenze überschreiten, ja sie nicht einmal erreichen. Alle meine Bemühungen, einen Widerspruch, eine Inconsequenz in dieser Nicht-Euklidischen Geometrie zu finden, sind fruchtlos gewesen, und das Einzige, was unserm Verstande darin widersteht, ist, dass es, wäre sie wahr, im Raum eine an sich bestimmte (obwohl uns unbekannte) Lineargrösse geben müsste. Aber mir deucht, wir wissen, trotz der nichtssagenden Wort-Weisheit der Metaphysiker eigentlich zu wenig oder gar nichts über das wahre Wesen des Raums, als dass wir etwas uns unnatürlich vorkommendes mit Absolut Unmöglich verwechseln dürfen. Wäre die Nicht-Euklidische Geometrie die wahre, und jene Constante in einigem Verhältnisse zu solchen Grössen, die im Bereich unserer Messungen auf der Erde oder am Himmel liegen, so liesse sie sich a posteriori ausmitteln. Ich habe daher wohl zuweilen im Scherz den Wunsch geäussert, dass die Euklidische Geometrie nicht die wahre wäre, weil wir dann ein absolutes Mass a priori haben würden.

Von einem Manne, der sich mir als einen denkenden mathematischen Kopf gezeigt hat, fürchte ich nicht, dass er das Vorstehende missverstehen werde: auf jeden Fall aber haben Sie es nur als eine Privat-Mittheilung anzusehen, von der auf keine Weise ein öffentlicher oder zur Öffentlichkeit führen könnender Gebrauch zu machen ist. Vielleicht werde ich, wenn ich einmal mehr Musse gewinne, als in meinen gegenwärtigen Verhältnissen, selbst in Zukunft meine Untersuchungen bekannt machen.

Mit Hochachtung verharre ich

Ewr. Wohlgeboren

Göttingen den 8. November 1824.

ergebenster Diener

C. F. Gauss.

Gauss an Olbers. Göttingen, 3. Mai 1827.

. . . . Vor etwa 6 Wochen hatte ich das Vergnügen, Hrn. Dirichlet, von dem ich, glaube ich, Ihnen schon einmal geschrieben habe, hier persönlich kennen zu lernen. Ich erwähnte gegen ihn des schlechten Aufsatzes von Ivory; er kannte ihn nicht selbst, sagte mir aber, Hr. Fourier habe ihm gesagt, dass er »Unsinn« sei, und dass er (F.) sehr über einen lobhudelnden Artikel darüber im Férussac gelacht habe. Ungefähr eben so wie ich habe er auch über sein Mémoire von der Gleichgewichtsgestalt einer rotirenden homogenen Flüssigkeit geurtheilt. Es war mir überraschend noch in mehrern andern Beziehungen, über Personen und Sachen, eine ausserordentliche Übereinstimmung Hrn. Fouriers mit meinem Urtheile zu erfahren; z. B. über imaginäre Grössen, über die Unbeweisbarkeit der Geometrie a priori u. s. w. Nachdem ich Hrn. Dirichlet z. B. über letztere meine Ansicht kurz angedeutet hatte, sagte er, dass ihm Fourier die seinige fast mit den nemlichen Worten gesagt habe. . . . . . .

BEMERKUNG.

In einem Notizbuche von Gauss ist unter Aufzeichnungen aus den Jahren 1824 bis 1828 vermerkt:

»Journal de l'École Normale. Fouriers Defin. der Ebene. Lacroix I. p. 503.«

In der That enthalten die Séances des Écoles Normales T. I (Séance du 25 pluviose an III (1795)), Nouvelle Édition, Paris 1800, S. 28 Äusserungen Fouriers, in denen er neue Erklärungen der Geraden und der Ebene vorschlägt; Fourier beginnt dabei, ähnlich wie Bolyai und Lobatschefskij, mit der Kugel. Weitere Veröffentlichungen Fouriers über die Grundlagen der Geometrie scheinen nicht zu existiren.

Der Discours préliminaire der Éléments de Géométrie von Lacroix (Quatrième édition. Paris, An VIII [1804] S. xv.) enthält einen Hinweis auf das *Journal des Séances de l'École Normale*; wenn dabei nicht Fourier, sondern Laplace genannt wird, so erklärt sich das daraus, dass jener seine Theorie in den von diesem geleiteten geometrischen Übungen der École Normale vorgetragen hatte.

Stäckel.

Gauss an Schumacher. Göttingen, 11. October 1827.

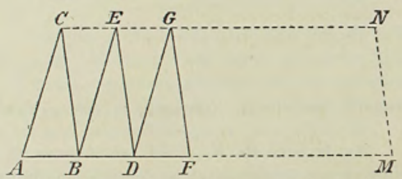
. . . . Wer ist wohl Hr. Koch auf dem Cremon Nr. 83? Er hat mir seine Parallelentheorie [*]) zugeschickt, an der freilich nichts ist; aber etwas seltenes ist, dass er meine Anzeige der Blösse sogleich anerkannt hat; eben so wie meine Bemerkungen über seine nachher mir schriftlich zugesandten, aber eben so erfolglosen Versuche. . . . . .

[*) Christian Adolf Koch, *Über Parallellinien*. Ein Versuch, dem Urtheil Sachkundiger gewidmet. Hamburg 1827. 8°. 12 S.]

[ÜBER DIE WINKEL DES DREIECKS.]

[1.]

Der Beweis, dass die Summe der drei Winkel eines Dreiecks nicht grösser sein kann als 180^0, ist unabhängig vom 11. Axiom so zu führen.



Es sei $A+B+C > 180^0$; man verlängere AB in infin. und wiederhole das vorige Dreieck; dann ist per hyp.

$$CBE < ACB \quad \text{also} \quad (\text{Elemente I. 24}) \quad CE < AB.$$

Eben so $EG = CE$ u. s. w. Man leitet daraus leicht ab, dass, wenn das Dreieck nur oft genug wiederholt wird, die gerade [Linie] AM grösser ist als die gebrochene $ACEG \ldots . NM$, worin sich das Widersprechende leicht nachweisen lässt. Eine $n$malige Wiederholung reicht hin, wenn

$$AC + CB - AB < n(AB - CE).$$

(gefunden 1828 Nov. 18).

[2.]

[*Satz 1* = Euklid I. 13: Die Winkel, die eine Gerade mit einer andern bildet, auf der sie steht, sind entweder beide Rechte oder zusammen gleich zwei Rechten.

Satz 2 = Euklid I. 5: In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Satz 3 = Euklid I. 6: Sind in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Satz 4: In einem Dreieck können nicht zwei Winkel gleich Rechten sein.]

5. Lehrsatz. Kein Winkel eines Dreiecks kann dem Nebenwinkel eines andern Winkels desselben Dreiecks gleich sein.

Es ist nicht möglich, dass $ACB = ABD$.

Beweis. Nehmen wir an, es sei $ACB = ABD$ und unterscheiden drei Fälle.

I. Es sei $AB = AC$. Fig. 1. Also (Satz 2) $ABC = ACB$, folglich $ABC = ABD$; es sind daher ABC, ACB rechte Winkel [Satz 1], welches unmöglich ist (Satz 4).

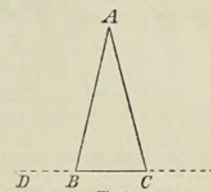


Fig. 1.

II. Es sei AB kleiner als AC. (Fig. 2.) Es liegt daher B innerhalb einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt A, Halbmesser $= AC$. Die gerade Linie CB über B hinaus verlängert muss folglich die Kugelfläche schneiden; das geschehe in E. Es ist also $AE = AC$, daher $AEB = ACB$ (Satz 2), dann $AEB = ABD = ABE$, ferner (Satz 3) $AB = AE = AC$ gegen die Voraussetzung.

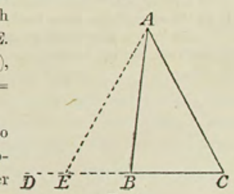


Fig. 2.

III. Es sei AB grösser als AC. Es liegt also C innerhalb einer Kugelfläche, Centrum A, Halbmesser AB, diese Kugelfläche werde von der über C fortgesetzten BC in E geschnitten. Es ist also

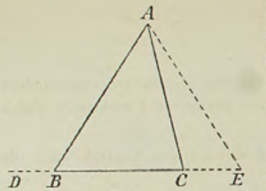
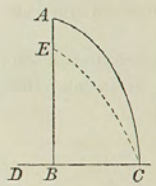


Fig. 3.

$AB = AE$, $ABE = AEB$; folglich ist nun aus der Voraussetzung $ACB = ABD$ sogleich (Satz 1) $ACE = ABC = ABE = AEB$. Also ist $AC = AE = AB$ gegen die Voraussetzung.

6. *Lehrsatz*. Kein Winkel eines Dreiecks kann grösser sein als der Nebenwinkel eines andern Winkels in demselben Dreieck.

ACB kann nicht grösser sein als ABD.



Beweis. Man beschreibe eine Kegelfläche, Axe CB, Spitze C, Winkel dem ABD gleich. Wäre nun ABD kleiner als ACB, so würde die Linie CA ausserhalb des Kegels liegen (Definition) und da B, als Punkt in der Axe, innerhalb liegt, so muss die Gerade AB die Kegelfläche schneiden. Das geschehe in E. Es wird also $ECB = EBD$, welches nicht möglich ist (Satz 5).

BEMERKUNG.

Das Princip des Aneinanderreihens congruenter Dreiecke, auf dem der Beweis in der Notiz [1] beruht, den GAUSS auf der hintern Seite des Titelblatts seines Exemplars von BAERMANN, Elementorum Euclidis Libri XV, Leipzig 1769 notirt hat, war bereits von LEGENDRE im Jahre 1798 angewandt worden (Éléments de géométrie, 2ième édition, Proposition XIX); genau derselbe Beweis findet sich auch bei LOBATSCHEFSKIJ in der Abhandlung Новыя начала геометріи (Neue Anfangsgründe der Geometrie) Kap. VI, § 90 vom Jahre 1836.

Die Notiz [2] befindet sich auf einem einzelnen, nicht datirten Zettel. Der darin enthaltene *Lehrsatz 6* ist gleichbedeutend mit Euklid I. 17.

STÄCKEL.

[ZUR THEORIE DER GERADEN LINIE UND DER EBENE.]

[1.]

[Euklids Elemente Buch I. Lehrsatz 7: »Sind von den Endpunkten einer Geraden nach einem Punkt ausserhalb zwei Gerade gezogen, so ist es unmöglich, von diesen Endpunkten aus nach einem andern Punkt auf derselben Seite jener Geraden zwei Gerade zu ziehen, die den ersten beziehungsweise gleich sind.]

Um Euklids Beweis I. 7 stringent zu machen, ohne vorher die Ebene anders definirt zu haben, als »die Fläche, welche durch Umdrehung einer Geraden um eine Axe [entsteht], mit der sie rechte Winkel macht«, muss man in der 2. und 3. Figur CD in M halbiren und durch M ein Planum legen, gegen welches CD normal ist, *in* diesem liegen A und B, während C und D ausserhalb liegen. Es braucht also nur bewiesen zu werden, dass kein Punkt von AD und BC (AD für die Fig. 2 indefinite verlängert) in dem Planum liegt, was keine Schwierigkeit hat. Es folgt dann von selbst, dass die Voraussetzung absurd ist, sobald AD und BC einander schneiden.

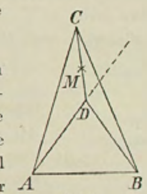


Fig. 2.

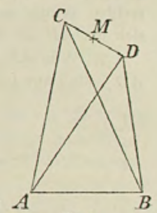
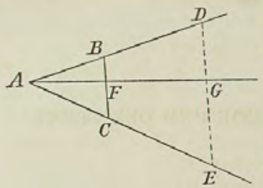


Fig. 3.

[2.]

Es gibt viele solche Dinge, selbst in der Elementargeometrie, die eines strengen Beweises bedürfen, z. B. die Möglichkeit der Ebene, deren Definition eigentlich schon ein Theorem involvirt; z. B. wenn ABD, AFG, ACE, BFC gerade Linien sind, dass dann die gerade Linie durch DE nicht oberhalb oder unterhalb G weggehen kann.



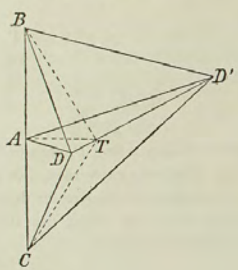
Der Beweis ist zwar nicht sehr schwer, aber doch auch nicht ganz leicht, und auf jeden Fall in dieser oder einer andern Form unerlässlich.

[3.]

BEGRÜNDUNG DES PLANUM.

1. Ebene nennen wir die Fläche, in der jede durch einen gegebenen Punkt A gehende Gerade AD liegt, die mit der gegebenen Geraden AB einen rechten Winkel macht. Eine solche Ebene wird also beschrieben, wenn AD sich um AB als Axe dreht.

2. Wird AB rückwärts nach C fortgesetzt, so macht auch AC mit jeder AD rechte Winkel.



3. Es seien nun AD, AD' zwei im Planum liegende Gerade und $AD = AD'$; es sei ferner $AC = AB$: es deckt dann das Vierpunkt-System $ACD'D$ das Vierpunkt-System $ABDD'$; also das Dreieck $CD'D$ das Dreieck BDD'; allein auch das Dreieck $BD'D$ deckt BDD'; also deckt auch $CD'D$ $BD'D$. Ist also T ein beliebiger Punkt in der Geraden DD', so decken sich auch BDT, CDT, also BT und CT. Es ist also BCT gleichschenklig, also decken sich BCT und CBT, also BAT und CAT, folglich sind die Winkel BAT und CAT Rechte und T liegt im Planum.

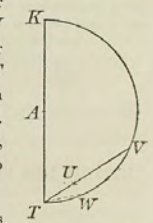
4. *Theorem.* Eine durch zwei im Planum P liegende Punkte T, U gezogene Gerade liegt ganz in jenem.

Beweis. I) Liegt A in der Geraden $\ldots TU \ldots$, so ist der Satz aus der Definition des Planum von selbst klar. Liegt A nicht in der Geraden TU, so machen AT, AU einen Winkel mit einander; ist nun

II) $AT = AU$, so folgt der Satz aus 3; sind hingegen

III) AT und AU ungleich, so sei $AT > AU$. Man verlängere AT rückwärts bis $AK = AT$; die Kreislinie, welche T durch Drehung um A beschreibt, wird dann durch K gehen, und die Kreisfläche, die ein Theil des Planum P ist, wird durch KT in zwei Theile getheilt, in deren einem U liegt.

Indem nun eine Gerade TK sich so bewegt, dass ihr einer Endpunkt in T, der andere in der Peripherie KVW bleibt, beschreibt sie das Planum, vollendet die Figur immer vollkommener und hat sie ganz erschöpft, wenn W in T angekommen ist. In einer Lage der beweglichen Geraden ist sie also durch U gegangen, es sei diess die Lage TV. Die Gerade TU ist also nur ein Theil der Geraden TV, letztere aber liegt ganz in der Ebene, dasselbe gilt also auch von TU.



Dass übrigens auf vorbeschriebene Art die Fläche des Halbkreises ganz ausgefüllt wird, kann leicht mit vollkommener Strenge bewiesen werden. Gesetzt Ein Theil könne nicht erreicht werden und U sei ein Punkt in demselben. Mit einem Radius kleiner als TU beschreibe man [um T] eine Kugelfläche, wodurch jener Halbkreis in die Theile M, M' getheilt wird, so dass M ausserhalb, M' innerhalb der Kugelfläche liege; offenbar ist dann U in M. Es sei ferner W der Punkt der Peripherie des Halbkreises, wo dieselbe von der Kugelfläche geschnitten wird; die gerade Linie TW liegt dann innerhalb M', also U innerhalb der Figur $KTWK$, diese aber wird beschrieben, indem die bewegliche Linie sich von der Lage TK bis zu der Lage TW dreht. Also ist die Voraussetzung, dass U nicht getroffen werde, absurd.

[4.]

[Bei LÜBSEN, *Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie*, Hamburg 1851, Seite 11 heisst es:]

{Erklärung: Eine gerade Linie ist diejenige, welche nicht aus ihrer Lage kommt, indem sie sich um ihre beiden festen Endpunkte dreht *).}

{*) So ungefähr hörten wir einmal GAUSS bei der Erklärung des Fernrohrs und dessen richtigen Gebrauchs den Begriff der geraden Linie festsetzen. Diese Erklärung ist theoretisch fruchtbar, wie die gleich daraus folgenden Sätze zeigen; ausserdem ist das angegebene Merkmal praktisch wichtig, z. B. bei der Justirung eines Fernrohrs, richtigen Bohrung eines Cylinders etc.}

[5.]

THEORIE DES VORTRAGS VON LEHREN, DIE RAUMVERHÄLTNISSE BETREFFEN.

1) Alle die Gegenstände, die bei einem Satz relevant sind, zeichne man, und bezeichne sie durch Buchstaben oder Ziffern, Punkte durch einen, Linien durch 2, Flächen durch 3, Körper allenfalls durch 4, welches jedoch öfters auch durch einen geschehen kann.

2) Relativ bewegliche Räume, deren Bewegung ohne Stetigkeit bei dem Geschäft in Frage kommt, zeichne man besonders.

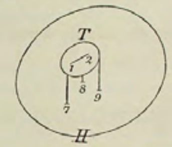
3) Die Grössenrelationen, die relevant sind, bezeichne man auch durch Buchstaben.

4) Man stelle sich das, was man beweisen will, in Form einer Gleichung vor und gehe successive auf deren Gründe zurück.

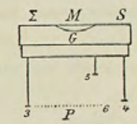
So wird das ganze Geschäft in seine Elemente gleichsam zerlegt, die man nachher rückwärts wieder zusammensetzt. Dabei bemerkt man dann leicht, was beim wirklichen Vortrag zusammengezogen werden kann.

Beispiel an der Theorie des Nivellirens einer Ebene.

[H(orizont) und T(isch)]



[Libelle]



Man will bewirken, dass Eine Linie 12 horizontal wird und zuletzt beweisen, dass die gemachten Operationen diess bewirken. Man nenne also die Richtung von 12 gegen H[orizont]: v.

Es soll also bewiesen werden, dass das letzte $v = 0$. Überlegt man die Quelle der Gewissheit, so findet man, dass sie darauf beruht, dass die beiden vorletzten Werthe einander entgegengesetzt waren.

Weshalb waren sie einander entgegengesetzt? Weil eine andere Linie, die beidemale gleiche Neigung gegen H hatte, mit ihr in entgegengesetzten Lagen zusammenfiel. Diese andere Linie ist 36. Es heisse ihre Neigung gegen H[orizont]: u. Es muss also bewiesen werden, dass u in den Experimenten gleich war. Woran erkannte man diess? An der gleichen Stellung der Libelle.

Die Stellung der Libelle muss also u bestimmen. Wie wird diess bewiesen? Fragt sich erst: ist diess wahr? Man sieht ein, dass es nicht genau wahr ist, sondern nur im Fall einer berichtigten Libelle.

Man suche also eine Zwischengrösse, die 0 sein muss, wenn die Libelle wirklich berichtigt ist. Diess ist die Neigung von G gegen P, welche i heisst. Nennt man die Neigung von G gegen H[orizont]: g, so ist klar, dass die Stellung der Libelle von g abhängt, und dass sehr nahe

$$g = i + u$$

ist. Jetzt bezeichne man die Experimente mit:

I

Umgestellt

II

An 7 geschraubt

III

An 7 halb zurückgeschraubt

IV

An 3 geschraubt, wenn zugleich die Libelle berichtigt werden soll.

V

Die Schlüsse rückwärts sind also:

(1) $v^4 = 0$, weil (2) $v^3 = -v^2$ und kleine gleiche Bewegungen von 7 das v gleich viel verändern.

(2) $v^3 = -v^2$, weil $v^2 = u^1$, $v^3 = -u^3$ und (3) $u^1 = u^3$.

(3) $u^1 = u^3$, weil $S^1 = S^3 = u$ von u abhängig, also $u^1 = u^3$.

Da also S^1 hier in Consideration kommt, so ist klar, dass man vor I schon die Ebene T in die Lage gebracht haben muss, dass die Enden der Blase sichtbar sind.

Soll nun noch die Berichtigung der Libelle bewirkt werden, so ist zu zeigen, dass $i^5 = 0$.

Diess erkennt man an der Normalstellung von S, aber offenbar hängt sie nicht unmittelbar mit $i = 0$, sondern nur mit $g = 0$ zusammen.

Die Synthesis geht nun am besten von den ursprünglichen Werthen aus:

$$S = M+h+i+u,$$
$$\Sigma = M-h+i+u,$$

	u	v	i
[I]	v^1	v^1	i^1
[II]	$-v^1$	v^1	i^1
[III]	v^1	$-v^1$	i^1
[IV]	0	0	i^1
[V]	0	0	0

Da v bei 5 verschiedenen Stellungen nur 1 mal $= +u$ und 4 mal $= -u$ ist, so kann man v als Zeichen ganz ignoriren und [nur] von u sprechen.

Man kann also den Vortrag so einkleiden: Die Gleichung

$$\left.\begin{matrix} S \\ \Sigma \end{matrix}\right\} = M \pm h+i+u$$

lehrt, dass gleiche Stellungen der Blase, bei ungeändertem Werth von i, gleiche Werthe von u anzeigen. Nun sind die Werthe von u in I und II entgegengesetzt; hat [die Blase] also in II dieselbe Stellung wie in I, so ist $u' = u'' = 0$.

Im entgegengesetzten Fall schliesst man, dass u nicht $= 0$ war und jetzt den entgegengesetzten Werth vom vorigen hatte. Bringt man also durch stetiges Schrauben an 7 das u wieder auf den vorigen Werth, so geht es dabei durch 0, und das halbe Schrauben zurück bringt 0 hervor. Dann ist also die Linie 1 2 oder 2 1 oder 3 4 horizontal, aber die Blase hat sich ihrerseits wieder gleichfalls der 2^{ten} Stellung um die Hälfte genähert. Man ändert nun i durch Schrauben an 3, bis $\left.\begin{matrix} S \\ \Sigma \end{matrix}\right\} = M \pm h$ wird.

BEMERKUNGEN.

Die erste der vorstehenden Notizen findet sich auf dem hintern Schmutzblatte des Werkes: *Mathematische Abhandlungen* von Jacob Wilhelm Heinrich LEHMANN, Zerbst 1829 und stammt vermuthlich aus diesem Jahre. Die Notiz [2] steht auf einem einzelnen Blatte; die Zeit ihrer Abfassung lässt sich nicht genau angeben, doch darf man vermuthen, dass sie zwischen 1820 und 1830 fällt. Die Notiz [3] hat GAUSS in einem Handbuche verzeichnet, höchst wahrscheinlich im März 1832, denn sie bezieht sich auf GAUSS' Brief an BOLYAI vom 6. März 1832. Die Notiz [4] beruht auf einer mündlichen Mittheilung von GAUSS an LÜBSEN, der im Jahre 1830 bei ihm Vorlesungen hörte (vergl. LÜBSEN, *Ausführliches Lehrbuch der Analysis*, Hamburg 1853, S. 171). Endlich ist die Notiz [5] auf einem Zettel verzeichnet, der nicht datirt ist, jedoch deutet die Handschrift auf eine spätere Periode aus GAUSS' Leben, etwa die Zeit zwischen 1840—1850; wahrscheinlich hat GAUSS die Notiz bei der Vorbereitung für eine Vorlesung über praktische Astronomie niedergeschrieben. Für ihre Unterbringung an dieser Stelle ist lediglich ihr Inhalt massgebend gewesen.

Dass GAUSS sich schon sehr früh mit der Definition der Ebene beschäftigt hat, zeigt die bereits S. 162 dieses Bandes abgedruckte Stelle aus seinem Tagebuche vom 28. Juli 1797.

Die beiden Figuren in der Notiz [1] sind dem Texte hinzugefügt worden.

STÄCKEL.

[ÜBER DIE ERSTEN GRÜNDE DER GEOMETRIE.]

Gauss an Bessel. Göttingen, 27. Januar 1829.

.... Auch über ein anderes Thema, das bei mir schon fast 40 Jahr alt ist, habe ich zuweilen in einzelnen freien Stunden wieder nachgedacht, ich meine die ersten Gründe der Geometrie: ich weiss nicht, ob ich Ihnen je über meine Ansichten darüber gesprochen habe. Auch hier habe ich manches noch weiter consolidirt, und meine Überzeugung, dass wir die Geometrie nicht vollständig a priori begründen können, ist, wo möglich, noch fester geworden. Inzwischen werde ich wohl noch lange nicht dazu kommen, meine sehr ausgedehnten Untersuchungen darüber zur öffentlichen Bekanntmachung auszuarbeiten, und vielleicht wird diess auch bei meinen Lebzeiten nie geschehen, da ich das Geschrei der Böotier scheue, wenn ich meine Ansicht ganz aussprechen wollte. — Seltsam ist es aber, dass ausser der bekannten Lücke in Euklids Geometrie, die man bisher umsonst auszufüllen gesucht hat, und nie ausfüllen wird, es noch einen andern Mangel in derselben gibt, den meines Wissens niemand bisher gerügt hat, und dem abzuhelfen keinesweges leicht (obwohl möglich) ist. Diess ist die Definition des Planum als einer Fläche, in der die, irgend zwei Punkte verbindende, gerade Linie ganz liegt. Diese Definition enthält mehr, als zur Bestimmung der Fläche nöthig ist, und involvirt tacite ein Theorem, welches erst bewiesen werden muss. ......

[Bessel an Gauss. *Königsberg i. Pr., 10. Februar 1829.*]

{...... Ich würde sehr beklagen, wenn Sie Sich »durch das Geschrei der Böotier« abhalten liessen, Ihre geometrischen Ansichten aus einander zu setzen. Durch das, was Lambert gesagt hat, und was Schweikart mündlich äusserte, ist mir klar geworden, dass unsere Geometrie unvollständig ist, und eine Correction erhalten sollte, welche hypothetisch ist und, wenn die Summe der Winkel des ebenen Dreiecks = 180° ist, verschwindet. Das wäre die wahre Geometrie, die Euklidische die praktische, wenigstens für Figuren auf der Erde. ......}

Gauss an Bessel. Göttingen, 9. April 1830.

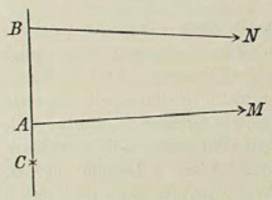
.... Wahre Freude hat mir die Leichtigkeit gemacht, mit der Sie in meine Ansichten über die Geometrie eingegangen sind, zumal da so wenige offenen Sinn dafür haben. Nach meiner innigsten Überzeugung hat die Raumlehre in unserm Wissen a priori eine ganz andere Stellung, wie die reine Grössenlehre; es geht unserer Kenntniss von jener durchaus diejenige vollständige Überzeugung von ihrer Nothwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letztern eigen ist; wir müssen in Demuth zugeben, dass, wenn die Zahl bloss unsers Geistes Product ist, der Raum auch ausser unserm Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können. ....

[ZUR THEORIE DER PARALLELLINIEN.]

[1.]

PARALLELLINIEN.

1. Wenn die Geraden $AM\ldots$, $BN\ldots$ einander nicht schneiden, jede durch A zwischen $AM\ldots$ und $AB\ldots$ gelegte Gerade hingegen die $BN\ldots$ schneidet: so heisst $AM\ldots$ mit $BN\ldots$ parallel.

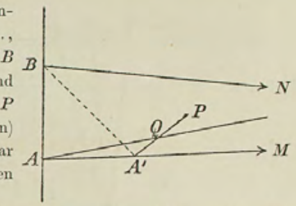


2. Geht eine Gerade beständig durch den Punkt A, und gelangt durch Drehung aus der Lage $AB\ldots$ auf der Seite, wo BN liegt, zuletzt in die Lage $AC\ldots$, die der ersten entgegengesetzt ist, so ist sie anfangs schneidend, zuletzt nicht schneidend, also muss es gewiss Eine und nur Eine Lage geben, die die Scheidung der schneidenden und nicht schneidenden [Geraden] ist, und zwar wird diess die erste nicht schneidende sein, also nach unserer Definition die Parallele $AM\ldots$, da es offenbar keine letzte schneidende geben kann.

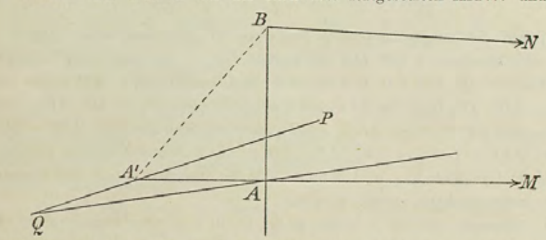
3. In unserer Definition sind in beiden Linien bestimmte Anfangspunkte A, B vorausgesetzt. Man sieht aber leicht, dass der Parallelismus davon unabhängig ist, in so fern nur der Sinn der Richtungen, nach welchen die Linien als unbegrenzt betrachtet werden, derselbe bleibt. Nimmt man nemlich statt B einen andern Anfangspunkt B', sei es auf der Linie $BN\ldots$, oder wo immer

auf ihrer Fortsetzung rückwärts, so ist von selbst klar, dass diess keinen Unterschied macht.

Nimmt man dagegen anstatt A einen andern Anfangspunkt A' auf der Linie $AM\ldots$, zieht durch A' zwischen $A'M\ldots$ und $A'B$ die Gerade $A'P$ in beliebiger Richtung, und durch einen Punkt Q zwischen A' und P die Gerade $AQ\ldots$, so wird solche (Definition) die $BN\ldots$ schneiden, woraus von selbst klar ist, dass auch $QP\ldots$ die $BN\ldots$ schneiden wird.



Nimmt man aber A' auf der rückwärts fortgesetzten $AM\ldots$ und zieht



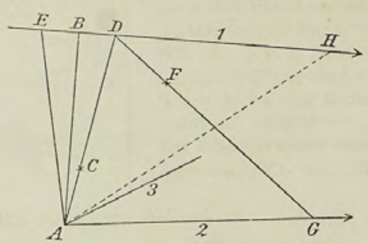
durch A' zwischen $A'M\ldots$ und $A'B\ldots$ in beliebiger Richtung die Gerade $A'P$, verlängert solche rückwärts und nimmt darauf einen beliebigen Punkt Q, so wird $QA\ldots$ die $BN\ldots$ schneiden (Definition), z. B. in R. $A'P$ ist also in der geschlossenen Figur $A'ARB$ und wird daher eine der vier Seiten $A'A$, AR, RB, BA' schneiden, offenbar muss diess aber die dritte RB sein, daher also auch $A'M\ldots$ mit $BN\ldots$ parallel ist.

4. Nicht ganz so evident ist die Reciprocität des Parallelismus. Es sei die Gerade 1 parallel mit 2. Von einem beliebigen Punkte in 2, A, fälle man ein Perpendikel AB auf 1. Es sei 3 eine beliebige Gerade durch A zwischen AB und 2, und AC eine Gerade zwischen denselben Grenzen, so dass der Winkel

$$BAC = \tfrac{1}{2}(3,2).$$

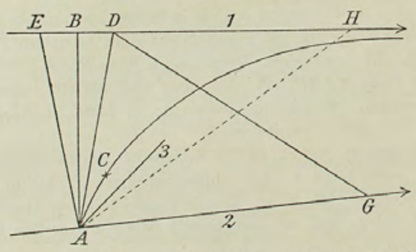
Wir haben nun zwei Fälle zu unterscheiden.

I. Schneidet $AC\ldots$ die Linie 1 in D, so mache man $BE = BD$, indem



E in 1 auf der entgegengesetzten Seite von D genommen wird. Durch D ziehe man zwischen 1 und DA die Gerade $DF\ldots$, so dass $ADF = AED$. Diese Gerade wird also 2 in G schneiden. Man mache [auf 1] $EH = DG$ und verbinde AH. Die Dreiecke ABD, ABE werden congruent sein, also $AE = AD$; folglich auch die Dreiecke ADG, AEH congruent, also $EAH = DAG$. [Mithin ist] $GAH = DAE = (2,3)$, [d. h.] AH ist mit 3 identisch oder 3 schneidet 1 in H und folglich ist, weil 3 jede beliebige zwischen 2 und AB liegende Gerade bedeuten kann, 2 mit 1 parallel.

II. Schneidet AC die 1 nicht, so sei D ein beliebiger Punkt auf 1. Es

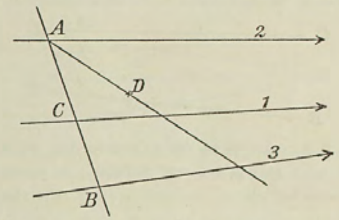


gelten dann dieselben Schlüsse wie vorher bis zu dem Resultat $GAH = DAE$.

Allein in diesem Fall ist $DAB < CAB$ oder $DAE < (2,3)$. Also $(2,3) > GAH$ und 3 wird folglich in der geschlossenen Figur AHD liegen, also DH schneiden. Das übrige wie in I.

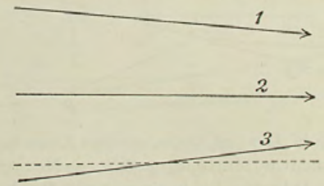
5. *Lehrsatz.* Ist die Gerade 1 sowohl mit 2 als mit 3 parallel, so ist auch 2 mit 3 parallel.

Beweis. Erster Fall, wenn 1 zwischen 2 und 3 liegt. Es seien A, B



Punkte auf 2 und 3 und AB schneide die 1 in C. Durch A ziehe man eine beliebige Gerade $AD\ldots$ zwischen 2 und AB, welche also 1 schneiden wird; weiter fortgesetzt wird sie also auch 3 schneiden; da diess von jeder $AD\ldots$ gilt, so ist 2 mit 3 parallel.

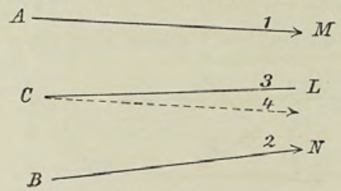
Zweiter Fall, wenn 1 ausserhalb 2 und 3 liegt. Es liege 2 zwischen 1



und 3. Wäre 2 mit 3 nicht parallel, so lässt sich durch einen beliebigen Punkt von 3 eine von 3 verschiedene Gerade ziehen, die mit 2 parallel ist. Diese ist also vermöge des ersten Falls auch mit 1 parallel, welches absurd ist. (Lehrsatz oben nachzusehen.)

6. *Lehrsatz.* Eine Gerade $CL\ldots$ oder 3, die sich zwischen zwei Parallelen $AM\ldots$ oder 1, $BN\ldots$ oder 2 befindet, und keine von beiden schneidet, ist mit denselben parallel.

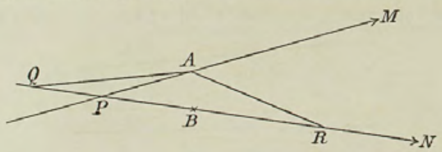
Beweis. Man ziehe durch einen beliebigen Punkt C in der Geraden 3



eine Parallele 4 mit 2; wäre diese von 3 verschieden, so müsste 3 entweder zwischen 1 und 4 oder zwischen 2 und 4 fallen; in jenem Fall würde sie (Definition der Parallelen) die 1, im andern die 2 schneiden müssen, gegen die Voraussetzung.

7. *Lehrsatz.* Zwei Parallellinien, rückwärts fortgesetzt, können einander auf dieser Seite nicht schneiden.

Beweis. Gesetzt $AM\ldots$, $BN\ldots$ schnitten einander auf ihren Fort-



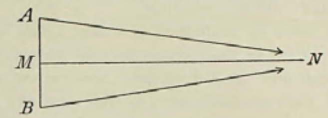
setzungen rückwärts in P, so sei Q ein beliebiger Punkt in der noch über P hinaus rückwärts geführten Fortsetzung von $BN\ldots$. Man verbinde QA, welche Gerade noch weiter fortgesetzt PN in einem Punkt R schneiden wird. Wir haben also durch die Punkte Q, R zwei verschiedene gerade Linien, welches absurd ist.

[2.]

[CORRESPONDIRENDE PUNKTE IN PARALLELLINIEN.]

1. ***Definition.*** Correspondirende Punkte in Parallellinien, auf den gleichen Winkeln an der Verbindungslinie beruhend.

2. Sind A, B correspondirende Punkte und M in der Mitte von AB,



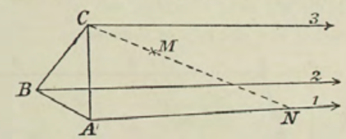
MN senkrecht auf AB, so wird 1) MN mit beiden parallel sein, 2) jeder Punkt, welcher mit A auf Einer Seite von MN liegt, wird dem A näher sein als [dem] B.

. . . .

4. *Theorem.* Sind A, B correspondirende Punkte auf den Parallelen 1, 2 und A', B' desgleichen, so ist $AA' = BB'$ und vice versa.

5. *Theorem.* Sind A, B, C Punkte auf den Parallelen 1, 2, 3 und A mit B, B mit C correspondirend; so ist auch A mit C correspondirend.

Beweis. Im entgegengesetzten Fall sei der Winkel $C > A$; man nehme



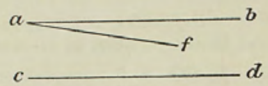
$ACM = A$, so wird CM die AN in N schneiden. Man hat also $AN = CN$; allein vermöge *Th.Th.* ist $AN < BN$ und $BN < CN$, welches also ein Widerspruch ist.

Setzte man voraus, dass $A = B$; $A = C$, und wäre B nicht $= C$, so sei $B = C'$, woraus $A = C'$ folgen würde.

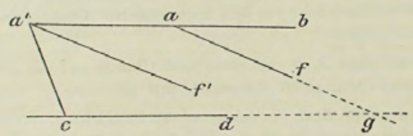
[3.]

PARALLELISMUS.

1. $ab{*}$ ist mit $cd{*}$ parallel, wenn
   1) beide in einer Ebene sind,
   2) einander nicht schneiden,
   3) jede Linie $af{*}$ innerhalb des Raumes ${*}bacd{*}$ die $cd{*}$ schneidet.

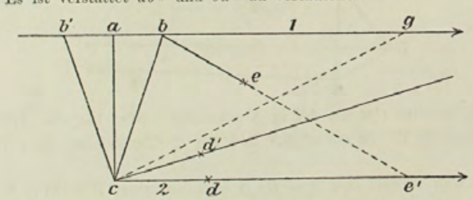


2. Der Parallelismus ist unabhängig von dem Anfang der Linie $cd{*}$.
3. Der Parallelismus ist unabhängig von dem Anfang der Linie $ab{*}$.
   I. Es ist auch $a'b{*}$ parallel mit $cd{*}$, wenn a' auf $ab{*}$.
   Beweis. $af{*}$ schneidet $cd{*}$; so wird auch $a'f{*}$ schneiden.
   II. [Es ist auch $a'b{*}$ parallel mit $cd{*}$,] wenn a' ausserhalb $ab{*}$.



Man mache $baf = ba'f'$; es schneide $af{*}$ die $cd{*}$ in g, so wird $a'f'$ die $af{*}$ nicht schneiden, also cg.

4. Es ist verstattet $ab{*}$ und $cd{*}$ zu vertauschen.



Es sei 1 und 2 parallel. Wäre nun nicht 2 mit 1 parallel, so sei cd' mit 1 parallel. Es sei ca senkrecht auf 1 und $acb = acb' = \frac{1}{2}dcd'$. Ferner

$cbe = cb'b$. Es wird also be die 2 schneiden, in e'. Macht man nun $b'g = be'$, so wird cg und cd' mit cb' einerlei Winkel machen. Welches absurd ist.

5. Wenn 1 mit 2 und 1 mit 3 parallel, so ist auch 2 mit 3 parallel.
6. Was correspondirende Punkte auf zwei Parallelen sind.
7. Aequidistanz der correspondirenden Punkte.
8. Der Punkt auf einer dritten Parallelen correspondirt correspondirenden Punkten auf den beiden ersten.
9. Trope ist die L[inie, die von correspondirenden Punkten gebildet wird, wenn man alle Parallelen zu einer Geraden betrachtet.]

BEMERKUNG.

In dem Briefe an SCHUMACHER vom 17. Mai 1831 (S. 213 dieses Bandes) sagt GAUSS, dass er von seinen Meditationen über die Theorie der Parallellinien, die schon gegen 40 Jahr alt seien, früher nie etwas aufgeschrieben habe, dass er jedoch vor einigen Wochen begonnen habe, einiges aufzuschreiben; auch in dem Briefe an BOLYAI vom 6. März 1832 erwähnt GAUSS solche Aufzeichnungen. Man wird daher nicht fehlgehen, wenn man annimmt, dass die vorstehenden nicht datirten Notizen, die sich auf einzelnen Zetteln befinden, aus dem Jahre 1831 stammen.

Die Figuren in der Notiz [1] sowie die erste Figur in der Notiz [3] sind dem Texte hinzugefügt worden.

STÄCKEL.

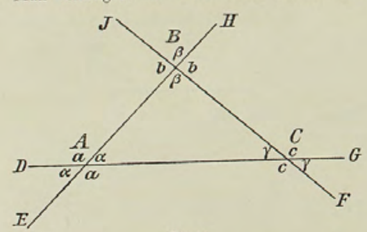
[ZUR PARALLELENTHEORIE.]

[SCHUMACHER *an* GAUSS. *Copenhagen, 3. Mai 1831.*]

[. . . . . Ich bin so frei Ihnen anbei einen Versuch zu senden, ohne Parallellinien und ihre Theorie zu gebrauchen, den Satz zu beweisen, dass die Summe aller drei Winkel eines geradlinigen Dreiecks $= 180^0$ sei, aus dem dann der Beweis des Euklidischen Axioms folgen würde. Ich setze nichts voraus, als dass die Summe aller um einen Punkt liegenden Winkel $= 360^0 = 4R$, und dass die Wechselwinkel sich gleich sind.

Da ich aus Erfahrung weiss, wie sonderbar blind man (ich wenigstens) mitunter in Bezug auf eigene Arbeiten ist, so fürchte ich sehr, dass eine petitio principii dabei zum Grunde liegt. Ich bin aber jetzt nicht im Stande sie zu entdecken, und erwarte Belehrung von Ihnen.

[Beilage.] Man verlängere die Seiten eines geradlinigen Dreiecks ABC



[Fig. 1.]

unbestimmt, oder man betrachte ein System von drei geraden Linien in einer

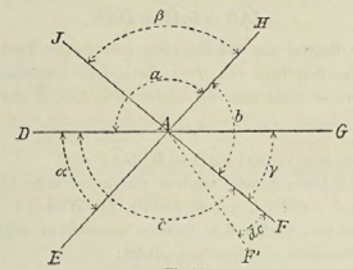
Ebene, deren Durchschnitte das Dreieck ABC bilden, so geben die drei Winkelpunkte uns die Gleichungen:

$$2a + 2\alpha = 4R,$$
$$2b + 2\beta = 4R,$$
$$2c + 2\gamma = 4R,$$

also

$$\alpha + \beta + \gamma = 6R - (a + b + c).$$

Da diese Relationen bestehen, wie auch die Punkte A, B, C liegen mögen, oder, was einerlei ist, wie auch die drei Linien im Raume gezogen sind, so lasse man die Linien $\overline{DG}$, $\overline{EH}$ unverrückt, und ziehe $\overline{JF}$ durch den Punkt A, so dass sie denselben Winkel als in ihrer vorigen Lage mit EH macht oder, da



[Fig. 2.]

dieser Winkel beliebig ist, überhaupt nur so, dass sie innerhalb des Winkels a fällt, so haben wir

$$a + b + c = 4R,$$

also

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R.$$

Kann man dagegen sagen, dass freilich

$$b\ [\text{1ste Figur}] = b\ [\text{2te Figur}]$$

nach der Annahme, dass aber der Satz

$$c\ [\text{1ste Figur}] = c\ [\text{2te Figur}]$$

dann bewiesen werden müsse?

Mir scheint bei der Willkürlichkeit der Winkel dieser Beweis nicht nothwendig.

Diess sind die Grundzüge des Beweises und ich erwarte Ihre Entscheidung. Ich füge nur, um meinen Beweis zu rechtfertigen, hinzu, dass freilich durch die zweite Operation das Dreieck ABC verschwindet, aber nicht die Winkel des Dreiecks. Wie die Linien auch liegen, so ist immer

$$J\widehat{B}H = \beta, \qquad G\widehat{C}F = \gamma, \qquad D\widehat{A}E = \alpha$$

im endlichen, so wie im verschwindenden Dreiecke, mithin die Summe

$$J\widehat{A}H + G\widehat{A}F + D\widehat{A}E$$

immer gleich der Summe der Winkel eines geradlinigen Dreiecks.

Soll man also den Satz von einem beliebigen Dreiecke (dessen Winkel A, B, C) beweisen, so zieht man die Linien DG, EH, so dass

$$\alpha = A,$$

man nimmt ferner den Winkel $J\widehat{A}H = B$, $G\widehat{A}F = C$.

Ist dann JAF keine gerade, sondern eine gebrochene Linie JAF', so ist freilich der Winkel c dadurch um dc kleiner, der Winkel b aber um eben so viel grösser geworden, mithin ihre Summe unverändert geblieben, oder wir haben, was zur Stringenz des Beweises gehört:

$$b + c\ [\text{Fig. 1}] = b + c\ [\text{Fig. 2}].\}$$

Gauss an Schumacher. Göttingen, 17. Mai 1831.

. . . . Bei dem, was Sie über die Parallellinien schreiben, haben Sie, genau besehen, in Ihren Syllogismen einen Zwischensatz gebraucht, ohne ihn ausdrücklich auszusprechen, der so lauten müsste:

Wenn zwei einander schneidende gerade Linien (1) und (2) mit einer dritten (3), von der sie geschnitten werden, respective die Winkel A', A'' machen, und dann eine vierte (4) in derselben Ebene liegende Gerade von (1) gleichfalls unter dem Winkel A' geschnitten wird, so wird (4) von (2) unter dem Winkel A'' geschnitten werden.

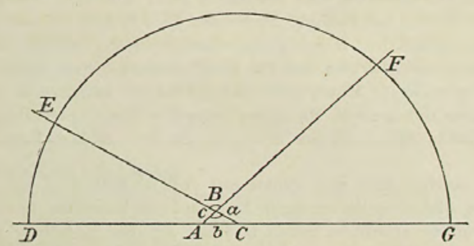
Allein dieser Satz ist nicht bloss eines Beweises bedürftig, sondern man kann sagen, dass er im Grunde der zu beweisende Satz selbst ist.

Von meinen eigenen Meditationen, die zum Theil schon gegen 40 Jahr alt sind, wovon ich aber nie etwas aufgeschrieben habe, und daher manches 3 oder 4 mal von neuem auszusinnen genöthigt gewesen bin, habe ich vor einigen Wochen doch einiges aufzuschreiben angefangen. Ich wünschte doch, dass es nicht mit mir unterginge.

[Schumacher an Gauss. *Lübeck, 25. Mai 1831.*]

{Ich falle Ihnen, mein theuerster Freund! noch einmal mit der Parallelentheorie beschwerlich.

Man verlängere die Seiten des geradlinigen Dreiecks unbestimmt, und



nehme einen Radius R so gross, dass $\frac{a}{R}$, $\frac{b}{R}$, $\frac{c}{R}$ kleiner als jede gegebene Grösse werden. Mit diesem Radius beschreibe man aus C den Halbkreis $DEFG$.

Weil in Bezug auf diesen Halbkreis a, b, c als verschwindend zu betrachten sind, also die Punkte A, B als in C fallend, so ist dieser Halbkreis das Mass der drei Winkel des Dreiecks, die mithin weniger als jede gegebene Grösse von 180° differiren.

Mir scheint, wenn man den Begriff des endlos Wachsenden nicht ausschliesst, so zeigt dieser Beweis sehr einfach, dass in jedem endlichen geradlinigen Dreiecke die Summe der Winkel $= 180^\circ$ ist, oder eigentlich, dass die Constante, die, wenn Euklids Geometrie nicht wahr wäre, zu der Summe der Winkel kommt, um die Gleichheit mit 180° zu bewirken, kleiner als jede gegebene Grösse ist, und da sich diess für jedes Dreieck beweisen lässt, so kann diese Constante eben so wenig von der Grösse des Dreiecks abhängen. . . . . . .}

[SCHUMACHER *an* GAUSS. *Altona, 29. Juni 1831.*]

{. . . . . Nur etwas habe ich in Ihrem Briefe vermisst — Ihr Urtheil über meinen Beweis, dass die Summe der Winkel in einem geradlinigen Dreiecke nur um eine Grösse, die kleiner als jede gegebene ist, von 180° verschieden sei. Sie können leicht denken, dass mir Ihr Urtheil sehr wichtig ist, da Sie jede Schwäche eines Beweises so leicht entdecken. Ausser Ihnen, meinem Gehülfen, und Professor HANSEN vom Seeberg habe ich noch niemandem etwas mitgetheilt. Keiner von uns kann einen Paralogismus entdecken.

Sollte jemand den Satz, dass man die Winkelpunkte eines endlichen Dreiecks als coincidirende Mittelpunkte eines Kreises von unendlichem (brevitatis causa unendlich genannt) Halbmesser betrachten könne, eines Beweises bedürfend halten, obgleich ich diess nicht glaube, so lässt sich dieser Beweis strenge führen.

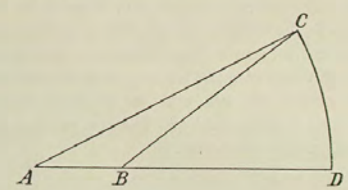
Mir scheint, wenn zwei Punkte eine endliche Entfernung von einander haben, so wird diese Entfernung in Bezug auf eine unendliche Linie $= 0$ zu setzen sein, sie coincidiren mithin in Bezug auf diese unendliche Linie betrachtet. . . . .}

GAUSS an SCHUMACHER. Göttingen, 12. Juli 1831.

. . . . Was die Parallellinien betrifft, so würde ich Ihnen mein Urtheil sehr gern schon auf Ihren ersten Brief geschrieben haben, wenn ich nicht hätte voraussetzen müssen, dass Ihnen mit demselben ohne vollständige Entwickelungen wenig gedient sein würde. Zu solchen vollständigen Entwickelungen, wenn sie wahrhaft überzeugend sein sollen, würden aber vielleicht Bogenlange Auseinandersetzungen in Erwiederung auf das, was Sie in wenigen Zeilen im Grunde nur angedeutet haben, nöthig sein, zu welchen Auseinandersetzungen mir aber gegenwärtig die erforderliche Geistesheiterkeit fehlt. Um Ihnen jedoch meinen guten Willen zu bethätigen, will ich folgendes hersetzen.

Die eigentliche Pointe richten Sie sogleich auf jedes Dreieck; allein Sie würden im Grunde Ihr nemliches Räsonnement anwenden, wenn Sie das Geschäft zuerst auf den einfachsten Fall anwendeten und den Satz aufstellten:

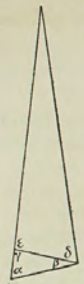
1) In jedem Dreieck, dessen eine Seite endlich, die zweite und folglich auch die dritte hingegen unendlich ist, ist die Summe der beiden Winkel an jener $= 180^\circ$.



Beweis nach Ihrer Manier:

Der Kreisbogen CD ist eben so gut das Mass des Winkels CAD als CBD, weil bei einem Kreise von unendlichem Halbmesser eine endliche Verrückung des Mittelpunkts für 0 zu achten ist. Also

$$CAD = CBD, \qquad CAD + CBA = CBD + CBA = 180^\circ.$$



Das Übrige ergibt sich dann leicht von selbst. Es ist nemlich nach diesem Lehrsatze

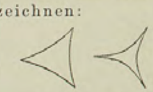
$$\alpha+\beta+\delta = 180^0$$
$$180^0 = \varepsilon+\delta$$
$$\gamma+\varepsilon = 180^0.$$

Also addendo

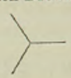
$$\alpha+\beta+\gamma = 180^0.$$

Was nun aber Ihren Beweis für 1) betrifft, so protestire ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während andern ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist. In diesem Sinne enthält die Nicht-Euklidische Geometrie durchaus nichts widersprechendes, wenn gleich diejenigen[, die sie kennen lernen,] viele Ergebnisse derselben anfangs für paradox halten müssen, was aber für widersprechend zu halten nur eine Selbsttäuschung sein würde, hervorgebracht von der frühen Gewöhnung, die Euklidische Geometrie für streng wahr zu halten.

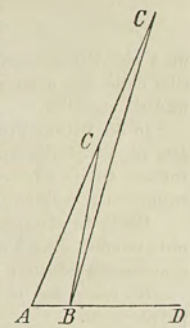
In der Nicht-Euklidischen Geometrie gibt es gar keine ähnlichen Figuren ohne Gleichheit, z. B. die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind nicht bloss von $\frac{2}{3}R$, sondern auch [bei verschiedenen Dreiecken] nach Massgabe der Grösse der Seiten unter sich verschieden und können, wenn die Seite über alle Grenzen wächst, so klein werden, wie man will. Es ist daher schon an sich widersprechend, ein solches Dreieck durch ein kleineres zeichnen zu wollen, man kann es im Grunde nur bezeichnen:



Die Bezeichnung des unendlichen Dreiecks in diesem Sinne wäre am Ende:

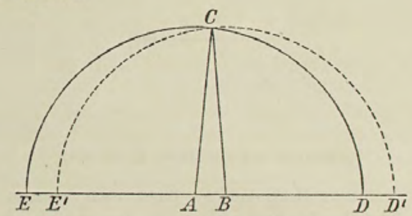


In der Euklidischen Geometrie gibt es nichts absolut grosses, wohl aber in der Nicht-Euklidischen, diess ist gerade ihr wesentlicher Charakter, und diejenigen, die diess nicht zugeben, setzen eo ipso schon die ganze Euklidische Geometrie; aber, wie gesagt, nach meiner Überzeugung ist diess blosse Selbsttäuschung.



Für den fraglichen Fall ist nun durchaus nichts widersprechendes darin, dass, wenn die Punkte A, B und die Richtung AC gegeben sind, während C ohne Beschränkung wachsen kann, dass dann, obgleich so DBC dem DAC immer näher kommt, doch der Unterschied nie unter eine gewisse endliche Differenz heruntergebracht werden könne.

Ihr Hineinziehen des Bogens CD macht allerdings den Schluss um vieles captiöser, allein wenn man, was Sie nur angedeutet haben, klar entwickeln will, so müsste es so lauten:



Es ist

$$CAB : CBD = \frac{CD}{ECD} : \frac{CD'}{E'CD'}$$

und indem AC ins Unendliche wächst, kommen CD und CD' einerseits und ECD, $E'CD'$ andererseits der Wahrheit immer näher.

Beides ist in der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht wahr, wenn man darunter versteht, dass ihre geometrischen Verhältnisse der Gleichheit so nahe kommen wie man will. In der That ist in der Nicht-Euklidischen Geometrie der halbe Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$:

$$= \tfrac{1}{2}\pi k\left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right),$$

wo k eine Constante ist, von der wir durch Erfahrung wissen, dass sie gegen alles durch uns messbare ungeheuer gross sein muss. In Euklids Geometrie wird sie unendlich.

In der Bildersprache des Unendlichen würde man also sagen müssen, dass die Peripherien zweier unendlichen Kreise, deren Halbmesser um eine endliche Grösse verschieden sind, selbst um eine Grösse verschieden sind, die zu ihnen ein endliches Verhältniss hat.

Hierin ist aber nichts widersprechendes, wenn der endliche Mensch sich nicht vermisst, etwas Unendliches als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen.

Sie sehen, dass hier in der That der Fragepunkt unmittelbar an die Metaphysik streift.

[SCHUMACHER *an* GAUSS. *Altona, 19. Juli 1831.*]

{Meinen herzlichsten Dank statte ich Ihnen, mein theuerster Freund, für Ihren letzten Brief ab. Ich kann nicht sagen, dass er mich schon überzeugt hätte. Ich glaube die unendliche Grösse nicht als geschlossen gebraucht zu haben. Mir scheint, man kann zeigen, dass mit dem Wachsen des Halbmessers die Differenz der Winkelpunkte des Dreiecks immer mehr verschwindet, und sich der Grenze des Zusammenfallens, so viel man immer will, nähert. Sagt man also, der Kürze halber, sie fallen für einen unendlichen Radius wirklich zusammen, so wird diess eben so wie gewöhnlich verstanden, und es folgt daraus, dass, in Bezug auf die Peripherie, die von den geraden Linien intercaptirten Bögen, sich ohne Grenze dem Masse der Winkel nähern. Indessen gebe ich gern zu, dass ich mich täusche, und werde theils selbst die Sache reiflicher durchdenken, theils und vorzüglich den Augenblick erwarten, wo mündliche Belehrung von Ihrer Seite möglich wird. Warum man bei Linien nicht, wie bei allgemeinen Grössen, Schlüsse brauchen soll, die sich auf ohne Ende wachsende Linien gründen, sehe ich nicht ein, vorausgesetzt, dass man die Grenzen bestimmen kann, denen man sich dabei, so weit man will, nähert. . . . .}
