

SECTION QUARTA

Relationes inter locos plures in spatio.

110.

Relationes in hac Sectione considerandae ab orbitae indole independentes solique suppositioni innixae erunt, omnia orbitae puncta in eodem plano cum Sole iacere. Placuit autem, hic quasdam simplicissimas tantum attingere, aliasque magis complicatas et speciales ad Librum alterum nobis reservare.

Situs plani orbitae per duos locos corporis coelestis in spatio plene determinatus est, siquidem hi loci non iacent in eadem recta cum Sole. Quare quum duobus potissimum modis locus puncti in spatio assignare possit, duo hinc problema solvenda se offerunt.

Supponemus primo, duos locos dari per longitudes et latitudes heliocentricas resp. per λ, λ' ; ℓ, ℓ' designandas: distantiae a Sole in calculum non ingredientur. Tunc si longitudo nodi ascendentis per Ω , inclinatio orbitae ad eclipticam per i denotatur, erit

$$\tan \ell = \tan i \sin (\lambda - \Omega)$$

$$\tan \ell' = \tan i \sin (\lambda' - \Omega)$$

Determinatio incognitarum Ω , $\tan i$ hic ad problema in art. 78. II. consideratum refertur; habemus itaque, ad normam solutionis primae

$$\tan i \sin (\lambda - \Omega) = \tan \ell$$

$$\tan i \cos (\lambda - \Omega) = \frac{\tan \ell' - \tan \ell \cos (\lambda' - \lambda)}{\sin (\lambda' - \lambda)}$$

ad normam solutionis tertiae autem invenimus Ω per aequationem

$$\tan (\tfrac{1}{2} \lambda + \tfrac{1}{2} \lambda' - \Omega) = \frac{\sin (\ell' + \ell) \tan \tfrac{1}{2} (\lambda' - \lambda)}{\sin (\ell' - \ell)}$$

utique aliquanto commodius, si anguli ℓ, ℓ' immediate dantur, neque vero per logarithmos tangentium: sed ad determinandum i , recurrendum erit ad aliquam formularum

$$\tan i = \frac{\tan \ell}{\sin (\lambda - \Omega)} = \frac{\tan \ell'}{\sin (\lambda' - \Omega)}$$

Ceterum ambiguitas in determinatione anguli $\lambda - \Omega$, vel $\tfrac{1}{2} \lambda + \tfrac{1}{2} \lambda' - \Omega$ per tangentem suam ita erit decidenda, ut $\tan i$ positiva evadat vel negativa, prout motus ad eclipticam proiectus directus est vel retrogradus: hanc incertitudinem itaque tunc tantum tollere licet, ubi constat, a quam parte corpus coeleste a loco primo ad secundum pervenerit; quod si ignoraretur, utique impossibile esset, nodum ascendentem a descendente distinguere.

Postquam anguli Ω, i inventi sunt, eruentur argumenta latitudinum u' , u per formulas

$$\tan u = \frac{\tan (\lambda - \Omega)}{\cos i},$$

$$\tan u' = \frac{\tan (\lambda' - \Omega)}{\cos i}$$

quae in semicirculo primo vel secundo accipienda sunt, prout latitudes respondentes boreales sunt vel australes. His formulis adhuc sequentes adiciamus, e quibus, si placet, una vel altera ad calculum confirmandum in usum vocari poterit:

$$\cos u = \cos \ell \cos (\lambda - \Omega),$$

$$\cos u' = \cos \ell' \cos (\lambda' - \Omega)$$

$$\sin u = \frac{\sin \ell}{\sin i},$$

$$\sin u' = \frac{\sin \ell'}{\sin i}$$

$$\sin (u' + u) = \frac{\sin (\lambda + \lambda' - 2 \Omega) \cos \ell \cos \ell'}{\cos i}, \quad \sin (u' - u) = \frac{\sin (\lambda' - \lambda) \cos \ell \cos \ell'}{\cos i}$$

111.

Supponamus secundo, duos locos dari per distantias suas a tribus planis in Sole sub angulis rectis se secantibus; designemus has distantias pro loco primo per x, y, z , pro secundo per x', y', z' , supponamusque planum tertium esse ipsam eclipticam, plani primi et secundi autem polos positivos in longitudine N et $90^\circ + N$ sitos esse. Ita erit per art. 53., duobus radiis vectoribus per r, r' designatis,

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos u \cos(N-\Omega) + r \sin u \sin(N-\Omega) \cos i \\
 y &= r \sin u \cos(N-\Omega) \cos i - r \cos u \sin(N-\Omega) \\
 z &= r \sin u \sin i \\
 x' &= r' \cos u' \cos(N-\Omega) + r' \sin u' \sin(N-\Omega) \cos i \\
 y' &= r' \sin u' \cos(N-\Omega) \cos i - r' \cos u' \sin(N-\Omega) \\
 z' &= r' \sin u' \sin i
 \end{aligned}$$

Hinc sequitur

$$\begin{aligned}
 zy' - yz' &= rr' \sin(u'-u) \sin(N-\Omega) \sin i \\
 xz' - zx' &= rr' \sin(u'-u) \cos(N-\Omega) \sin i \\
 xy' - yx' &= rr' \sin(u'-u) \cos i
 \end{aligned}$$

E combinatione formulae primae cum secunda habebitur $N-\Omega$ atque $rr' \sin(u'-u) \sin i$, hinc et ex formula tertia probabit i atque $rr' \sin(u'-u)$.

Quatenus locus, cui coordinatae x, y, z' respondent, tempore posterior supponitur, u' maior quam u fieri debet: quodsi itaque insuper constat, utrum angulus inter locum primum et secundum circa Solem descriptus duobus rectis minor an maior sit, $rr' \sin(u'-u) \sin i$ atque $rr' \sin(u'-u)$ esse debent quantitates positivae in casu primo, negativae in secundo: tunc itaque $N-\Omega$ sine ambiguitate determinatur, simulque ex signo quantitatis $xy'-yx'$ deciditur, utrum motus directus sit, an retrogradus. Vice versa, si de motus directione constat, e signo quantitatis $xy'-yx'$ decidere licebit, utrum $u'-u$ minor an maior quam 180° accipiendus sit. Sin vero tum motus directio, tum indoles anguli circa Solem descripti plane incognitae sunt, manifestum est, inter nodum ascendentem ac descendentem distinguere non licere.

Ceterum facile perspicitur, sicuti $\cos i$ est cosinus inclinationis plani orbitae versus planum tertium, ita $\sin(N-\Omega) \sin i$, $\cos(N-\Omega) \sin i$ esse resp. cosinus inclinationum plani orbitae versus planum primum et secundum; nec non exprimere $rr' \sin(u'-u)$ duplam aream trianguli inter duos radios vectores inclusi, atque $zy'-yz'$; $xz'-zx'$, $xy'-yx'$ duplam aream projectionum eiusdem trianguli ad singula plana.

Denique patet, planum tertium pro ecliptica quodvis aliud planum esse posse, si modo omnes magnitudines per relationes suas ad eclipticam definitae perinde ad planum tertium, quidquid sit, referantur.

112.

Sint x'', y'', z'' coordinatae alienius loci tertii, atque u'' eius argumentum latitudinis, r'' radius vector. Designabimus quantitates $r'r'' \sin(u'-u')$, $rr'' \sin(u''-u)$, $rr' \sin(u'-u)$, quae sunt areae duplae triangulorum inter radium vectorem secundum et tertium, primum et tertium, primum et secundum, resp. per n, n', n'' . Habebuntur itaque pro x'', y'', z'' expressiones iis similes, quas in art. praec. pro x, y, z et x', y', z' tradidimus, unde adiumento lemmatis I. art. 78. facile deducuntur aequationes sequentes:

$$\begin{aligned}
 0 &= nx - n'x' + n''x'' \\
 0 &= ny - n'y' + n''y'' \\
 0 &= nz - n'z' + n''z''
 \end{aligned}$$

Sint iam longitudes geocentricae corporis coelestis tribus illis locis respondentes $\alpha, \alpha', \alpha''$; latitudes geocentricae ℓ, ℓ', ℓ'' ; distantiae a terra ad eclipticam proiectae $\delta, \delta', \delta''$; porro respondentes longitudes heliocentricae terrae L, L', L'' ; latitudes B, B', B'' , quas non statuimus $= 0$, ut liceat, tum parallaxis rationem habere, tum, si placet, pro ecliptica quodvis aliud planum adoptare; denique D, D', D'' distantiae terrae a Sole ad eclipticam proiectae. Quodsi tunc x, y, z per $L, B, D, \alpha, \ell, \delta$ exprimuntur, similiterque coordinatae ad locum secundum et tertium spectantes, aequationes praecedentes sequentem formam induunt:

$$\begin{aligned}
 [1.] \quad 0 &= n(\delta \cos \alpha + D \cos L) - n'(\delta' \cos \alpha' + D' \cos L) + n''(\delta'' \cos \alpha'' + D'' \cos L) \\
 [2.] \quad 0 &= n(\delta \sin \alpha + D \sin L) - n'(\delta' \sin \alpha' + D' \sin L) + n''(\delta'' \sin \alpha'' + D'' \sin L) \\
 [3.] \quad 0 &= n(\delta \tan \ell + D \tan B) - n'(\delta' \tan \ell' + D' \tan B) + n''(\delta'' \tan \ell'' + D'' \tan B)
 \end{aligned}$$

Si hic α, ℓ, D, L, B quantitatesque analogae pro duobus reliquis locis, tamquam cognitae spectantur, aequationesque per n , vel per n' , vel per n'' dividuntur, quinque incognitae remanent, e quibus itaque duas eliminare, sive per duas quascunque tres reliquas determinare licet. Hoc modo illae tres aequationes ad conclusiones plurimas gravissimas viam sternunt, e quibus quasdam imprimis insignes hic evolvemus.

113.

Ne formularum prolixitate nimis obruamur, sequentibus abbreviationibus uti placet. Primo designamus quantitatem

$\text{tang } \delta \sin(\alpha'' - \alpha') + \text{tang } \delta' \sin(\alpha - \alpha'') + \text{tang } \delta'' \sin(\alpha' - \alpha)$ per (0.1.2):

si in expressione illa pro longitudine et latitudine loco cuius geocentrico respondentibus substituuntur longitudo et latitudo cuilibet trium locorum heliocentricorum terrae respondentis, in signo (0.1.2) numerum illi respondentem cum numero romano eo commutamus, qui posteriori respondet. Ita e. g. character (0.1.I) exprimet quantitatem

$$\text{tang } \delta \sin(L' - \alpha') + \text{tang } \delta' \sin(\alpha - L) + \text{tang } B' \sin(\alpha' - \alpha)$$

nec non character (0.0.2) hanc

$$\text{tang } \delta \sin(\alpha'' - L) + \text{tang } B \sin(\alpha - \alpha'') + \text{tang } \delta'' \sin(L - \alpha)$$

Simili modo characterem mutamus, si in expressione prima pro duabus longitudinibus et latitudinibus geocentricis duae quaecunque heliocentricae terrae substituuntur. Si duae longitudines et latitudines in eandem expressionem ingredientibus tantummodo inter se permutantur, etiam in characterem numeros respondentes permutare oportet: hinc autem valor ipse non mutatur, sed tantummodo e positivo negativus, e negativo positivus evadit. Ita e. g. fit (0.1.2) = -(0.2.1) = (1.2.0) = -(1.0.2) = (2.0.1) = -(2.1.0). Omnes itaque quantitates hoc modo oriundae ad sequentes 19 reducuntur

(0.1.2)
(0.1.0), (0.1.I), (0.1.II), (0.0.2), (0.I.2), (0.II.2), (0.I.2), (I.1.2), (II.1.2)
(0.0.I), (0.0.II), (0.I.I), (I.0.I), (I.0.II); (I.I.II), (2.0.I), (2.0.II), (2.I.II)
quibus accedit vigesima (0.I.II).

Ceterum facile demonstratur, singulas has expressiones, per productum e tribus cosinibus latitudinum ipsas ingredientium multiplicatas, aequales fieri volumini sextuplo pyramidis, cuius vertex est in Sole, basis vero triangulum formatum inter tria sphaerae coelestis puncta, quae locis expressionem illam ingredientibus respondent, statuto sphaerae radio = 1. Quoties itaque hi tres loci in eodem circulo maximo iacent, valor expressionis fieri debet = 0; quod quum in tribus locis heliocentricis terrae semper locum habeat, quoties ad parallaxes et latitudines terrae a perturbationibus ortas non respicimus, i. e. quoties terram in ipso eclipticae plano constituimus, semper, hacce suppositione valente, erit (0.I.II) = 0,

quae quidem aequatio identica est, si pro plano tertio ecliptica ipsa accepta fuit. Ceterum quoties tum B , tum B' , tum $B'' = 0$, omnes istae expressiones, prima excepta, multo simpliciores fiunt; singulae scilicet a secunda usque ad decimam binis partibus conflatae erunt, ab undecima autem usque ad undevigesimam unico termino constabunt.

114.

Multiplicando aequationem [1.] per $\sin \alpha'' \text{tang } B'' - \sin L' \text{tang } \delta''$, aequationem [2.] per $\cos L' \text{tang } \delta'' - \cos \alpha'' \text{tang } B''$, aequationem [3.] per $\sin(L'' - \alpha'')$, addendoque producta, prodit

$$[4.] \quad 0 = n \{ (0.2.II) \delta + (0.2.II) D \} - n' \{ (1.2.II) \delta' + (1.2.II) D' \}$$

similique modo, vel commodius per solam locorum inter se permutationem

$$[5.] \quad 0 = n \{ (0.1.I) \delta + (0.1.I) D \} + n'' \{ (2.1.I) \delta'' + (II.1.I) D'' \}$$

$$[5.] \quad 0 = n \{ (1.0.0) \delta + (I.0.0) D \} - n'' \{ (2.0.0) \delta'' + (II.0.0) D'' \}$$

Quodsi itaque ratio quantitatum n, n' data est, adiumento aequationis 4. ex δ determinare licebit δ' , vel δ ex δ' ; similiterque de aequationibus 5. 6. E combinatione aequationum 4. 5. 6. oritur haec

$$[7.] \quad \frac{(0.2.II)\delta + (0.2.II)D}{(0.1.I)\delta + (0.1.I)D} \times \frac{(1.0.0)\delta' + (I.0.0)D'}{(1.2.II)\delta' + (1.2.II)D'} \times \frac{(2.1.I)\delta'' + (II.1.I)D''}{(2.0.0)\delta'' + (II.0.0)D''} = -1,$$

per quam e duabus distantis corporis coelestis a terra determinare licet tertiam. Ostendi potest autem, hanc aequationem 7. fieri identicam, adeoque ad determinationem unius distantiae e duabus reliquis ineptam, quoties fuerit

$$\left. \begin{aligned} & \text{tang } \delta \text{tang } \delta' \sin(L'' - L) \sin(L - \alpha) + \text{tang } B' \text{tang } B' \sin(\alpha' - \alpha') \sin(L - \alpha) \\ & + \text{tang } \delta \text{tang } \delta' \sin(L - L') \sin(L' - \alpha') + \text{tang } B \text{tang } B \sin(\alpha - \alpha') \sin(L' - \alpha') \\ & + \text{tang } \delta \text{tang } \delta' \sin(L' - L) \sin(L'' - \alpha'') + \text{tang } B \text{tang } B \sin(\alpha' - \alpha'') \sin(L' - \alpha'') \\ & - \text{tang } \delta \text{tang } B' \sin(\alpha' - L) \sin(L - \alpha) - \text{tang } B \text{tang } \delta' \sin(L' - \alpha') \sin(L - \alpha) \\ & - \text{tang } \delta \text{tang } B \sin(\alpha - L') \sin(L' - \alpha') - \text{tang } B' \text{tang } \delta \sin(L - \alpha') \sin(L' - \alpha') \\ & - \text{tang } \delta \text{tang } B' \sin(\alpha' - L) \sin(L' - \alpha') - \text{tang } B \text{tang } \delta' \sin(L' - \alpha') \sin(L - \alpha') \end{aligned} \right\} = 0$$

Ab hoc incommodo libera est formula sequens, ex aequationibus 1. 2. 3. facile demanans:

$$[8.] \quad (0.1.2)\delta\delta'\delta'' + (0.1.2)D\delta'\delta'' + (0.1.2)D'\delta\delta'' + (0.1.II)D'\delta\delta'' \\ + (0.1.II)D'D\delta'' + (0.1.II)D'D'\delta'' + (0.1.2)DD'\delta'' + (0.1.II)DD'D'' = 0.$$

Multiplicando aequationem 1. per $\sin \alpha' \operatorname{tang} \delta'' - \sin \alpha'' \operatorname{tang} \delta'$, aequationem 2. per $\cos \alpha' \operatorname{tang} \delta'' - \cos \alpha'' \operatorname{tang} \delta'$, aequationem 3. per $\sin(\alpha'' - \alpha')$, addendoque producta, prodit

$$[9.] \quad 0 = n\{(0.1.2)\delta + (0.1.2)D\} - n'(I.1.2)D' + n''(II.1.2)D''$$

et perinde

$$[10.] \quad 0 = n(0.0.2)D - n'\{(0.1.2)\delta + (0.1.2)D'\} + n''(0.II.2)D''$$

$$[11.] \quad 0 = n(0.1.0)D - n'(0.1.I)D' + n'\{(0.1.2)\delta + (0.1.II)D'\}$$

Adiumento harum aequationum e ratione inter quantitates n, n', n'' cognita eruere licebit distantias $\delta, \delta', \delta''$. Sed haec conclusio generaliter tantum loquendo valet, exceptionemque patitur, quoties fit $(0.1.2) = 0$. Ostendi enim potest, in hoc casu ex aequationibus 9. 10. 11. nihil aliud sequi, nisi relationem necessariam inter quantitates n, n', n'' , et quidem e singulis tribus eandem. Restrictiones analogae circa aequationes 4. 5. 6. lectori perito sponte se offerent.

Ceterum omnes conclusiones hic evolutae nullius sunt usus, quoties planum orbitae cum ecliptica coincidit. Si enim $\delta, \delta', \delta'', B, B', B''$ omnes sunt $= 0$, aequatio 3. *identica* est, ac proin omnes quoque sequentes.

LIBER SECUNDUS

INVESTIGATIO ORBITARUM CORPORUM COELESTIUM EX OBSERVATIONIBUS GEOCENTRICIS

SECTIO PRIMA

Determinatio orbitae e tribus observationibus completis.

115.

Ad determinationem completam motus corporis coelestis in orbita sua requiruntur elementa *septem*, quorum autem numerus uno minor evadit, si corporis massa vel cognita est vel negligitur; haec licentia vix evitari poterit in determinatione orbitae penitus adhuc incognitae, ubi omnes quantitates ordinis perturbationum tantisper seponere oportet, donec massae a quibus pendent aliunde innotuerint. Quamobrem in disquisitione praesente massa corporis neglecta elementorum numerum ad sex reducimus, patetque adeo, ad determinationem orbitae incognitae totidem quantitates ab elementis pendentes ab invicem verò independentes requiri. Quae quantitates nequeunt esse nisi loca corporis coelestis e terra observata, quae singula quum bina data subministrant, puta longitudinem et latitudinem, vel ascensionem rectam et declinationem, simplicissimum utique erit, *tria loca geocentrica* adoptare, quae generaliter loquendo sex elementis incognitis determinandis sufficient. Hoc problema tanquam gravissimum huius operis spectandum erit, summaque ideo cura in hac Sectione pertractabitur.

Verum enim vero in casu speciali, ubi planum orbitae cum ecliptica coincidit, adeoque omnes latitudines tum heliocentricae tum geocentricae natura sua evanescent, tres latitudines geocentricae evanescentes haud amplius considerare licet tanquam tria data ab invicem independentia: tunc igitur problema istud indeterminatum maneret, tribusque locis geocentricis per orbitas infinite multas

satisfieri posset. In tali itaque casu necessario quatuor longitudes geocentricas datas esse oportet, ut quatuor elementa incognita reliqua (excentibus inclinatione orbitae et longitudine nodi) determinare liceat. Etiam si vero per principium indiscernibilium haud expectandum sit, talem casum in rerum natura unquam se oblaturum esse, tamen facile praesumitur, problema, quod in orbita cum plano eclipticae omnino coincedente absolute indeterminatum fit, *in orbitis perparum ad eclipticam inclinatis* propter observationum praecisionem limitatum tantum non indeterminatum manere debere, ubi vel levissimi observationum errores incognitarum determinationem penitus turbare valent. Quamobrem ut huic quoque casui consulamus, alia sex data eligere oportebit: ad quem finem in Sectione secunda orbitam incognitam e quatuor observationibus determinare docebimus, quarum duae quidem completae sint, duae reliquae autem incompletae, latitudinibus vel declinationibus deficientibus.

Denique quum omnes observationes nostrae propter instrumentorum sensuumque imperfectionem non sint nisi approximationes ad veritatem, orbita, sex tantum datis absolute necessariis superstructa, erroribus considerabilibus adhuc obnoxia esse poterit. Quos ut quantum quidem licet extenuemus, summamque adeo praecisionem possibilem attingamus, via alia non dabitur, nisi ut observationes perfectissimas quam plurimas congeramus, elementaque ita perpoliamus, ut non quidem his vel illis praecisione absoluta satisficiant, sed cum cunctis quam optime conspirent. Quonam pacto talem consensum, si nullibi absolutum tamen ubique quam arctissimum, secundum principia calculi probabilitatis obtinere liceat, in Sectione tertia ostendemus.

Hoc itaque modo determinatio orbitarum, quatenus corpora coelestia secundum leges KEPLERI in ipsis moventur, ad omnem quae desiderari potest perfectionem evecta erit. Ultimam quidem expolitionem tunc demum suscipere licebit, ubi etiam perturbationes, quas planetae reliqui motui inducunt, ad calculum erunt revocatae: quarum rationem quomodo habere oporteat, quantum quidem ad institutum nostrum pertinere videbitur, in Sectione quarta breviter indicabimus.

Antequam determinatio alicuius orbitae ex observationibus geocentricis suscipitur, his quaedam reductiones applicandae erunt, propter nutationem, praecessionem,

cessionem, parallaxin et aberrationem, siquidem summa praecisio requiritur: in crassiori enim calculo has minutias negligere licebit.

Planetarum et cometarum observationes vulgo expressae proferuntur per ascensiones rectas et declinationes apparentes, i. e. ad situm aequatoris apparentem relatas. Qui situs quum propter nutationem et praecessionem variabilis adeoque pro diversis observationibus diversus sit, ante omnia loco plani variabilis planum aliquod fixum introducere conveniet, ad quem finem vel aequator situ suo medio pro aliqua epocha, vel ecliptica adoptari poterit: planum posterius plerumque adhiberi solet, sed prius quoque commodis peculiaribus haud spernendis se commendat.

Quoties itaque planum aequatoris eligere placuit, ante omnia observationes nutatione purgandae, ac dein adhibita praecessione ad epocham quandam arbitariam reducendae sunt: haec operatio prorsus convenit cum ea, per quam e loco stellae fixae observato eiusdem positio media pro epocha data derivatur, adeoque explicatione hic non indiget. Sin vero planum eclipticae adoptare constitutum est, duplex methodus patebit: scilicet vel ex ascensionibus rectis et declinationibus ob nutationem et praecessionem correctis deduci poterunt longitudes et latitudes adiumento obliquitatis mediae, unde longitudes iam ad aequinoctium medium relatae prodibunt; vel commodius ex ascensionibus rectis et declinationibus apparentibus adiumento obliquitatis apparentis computabuntur longitudes et latitudes, ac dein illae a nutatione et praecessione purgabuntur.

Loci terrae singulis observationibus respondentes per tabulas solares computantur, manifesto autem ad idem planum referendi erunt, ad quod observationes corporis coelestis relatae sunt. Quamobrem in computo longitudinis Solis negligetur nutatio; dein vero haec longitudo adhibita praecessione ad epocham fixam reducetur, atque 180 gradibus augebitur; latitudini Solis, siquidem eius rationem habere operae pretium videtur, signum oppositum tribuetur: sic positio terrae heliocentrica habebitur, quam, si aequator pro plano fundamentali electus est, adiumento obliquitatis mediae in ascensionem rectam et declinationem transformare licebit.

Positio terrae hoc modo e tabulis computata ad terrae centrum referenda est, locus observatus autem corporis coelestis ad punctum in terrae superficie spe-

ctat: huic dissensui tribus modis remedium afferre licet. Potest scilicet vel observatio ad centrum terrae reduci, sive a parallaxi liberari; vel locus heliocentricus terrae ad locum ipsum observationis reduci, quod efficitur, si loco Solis e tabulis computato parallaxis rite applicatur; vel denique utraque positio ad punctum aliquod tertium transferri, quod commodissime in intersectione radii visus cum plano eclipticae assumitur: observatio ipsa tunc immutata manet, reductionemque loci terrae ad hoc punctum in art. 72. docuimus. Methodus prima adhiberi nequit, nisi corporis coelestis distantia a terra proxime saltem nota fuerit: tunc autem satis commoda est, praesertim quoties observatio in ipso meridiano instituta est, ubi sola declinatio parallaxi afficitur. Ceterum praestabit, hanc reductionem loco observato immediate applicare, antequam transformationes art. praec. adeantur. Si vero distantia a terra penitus adhuc incognita est, ad methodum secundam vel tertiam confugiendum est, et quidem illa in usum vocabitur, quoties aequator pro plano fundamentalis accipitur, tertia autem praefertur, quoties omnes positiones ad eclipticam referre placuit.

118.

Si corporis coelestis distantia a terra alicui observationi respondens proxime iam nota est, hanc ab effectu *aberrationis* liberare licet pluribus modis, qui methodis diversis in art. 71. traditis innituntur. Sit t tempus verum observationis; θ intervallum temporis, intra quod lumen a corpore coelesti ad terram descendit, quod prodiit ducendo $493''$ in distantiam; l locus observatus, l' idem locus adiumento motus geocentrici diurni ad tempus $t + \theta$ reductus; l'' locus l ab ea aberrationis parte purgatus, quae planetis cum fixis communis est; L locus terrae verus tempori t respondens (i. e. tabularis $20'25''$ auctus); denique L' locus terrae verus tempori $t - \theta$ respondens. His ita factis erit

I. l locus verus corporis coelestis ex L visus tempore $t - \theta$

II. l' locus verus corporis coelestis ex L visus tempore t

III. l'' locus verus corporis coelestis ex L visus tempore $t - \theta$

Per methodum I. itaque locus observatus immutatus retinetur, pro tempore vero autem fictum $t - \theta$ substituitur, loco terrae pro eodem computato; methodus II. soli observationi mutationem applicat, quae autem praeter distantiam insuper per-

tum diurnum requirit; in methodo III. observatio correctionem patitur a distantia non pendente, pro tempore vero fictum $t - \theta$ substituitur, sed retento loco terrae tempori vero respondente. Ex his methodis prima longe commodissima est, quoties distantia eatenus iam nota est, ut reductio temporis θ praecisione sufficiente computari possit.

Quodsi autem haec distantia penitus adhuc incognita est, nulla harum methodorum immediate applicari potest: in prima scilicet habetur quidem corporis coelestis locus geocentricus, sed desideratur tempus et positio terrae a distantia incognita pendente: in secunda e contrario adsunt haec, deest ille; denique in tertia habetur locus geocentricus corporis coelestis atque positio terrae, sed tempus deest cum illis datis iungendum.

Quid faciendum est itaque in problemate nostro, si in tali casu solutio respectu aberrationis quoque exacta postulatur? Simplicissimum utique est, orbitam primo neglecta aberratione determinare, quae quum effectum considerabilem nunquam producere possit, distantiae hinc ea certe praecisione demanabunt, ut iam observationes per aliquam methodorum modo expositarum ab aberratione purgare, orbitaeque determinationem accuratius iterare liceat. Iam in hocce negotio methodus tertia ceteris longe praeferenda erit: in methodo enim prima omnes operationes a positione terrae pendentes ab ovo rursus inchoandae sunt: in secunda (quae ne applicabilis quidem est, nisi tanta observationum copia adsit, ut motus diurnus inde elici possit) omnes operationes a loco geocentrico corporis coelestis pendentes denuo instituere oportet: contra in tertia (siquidem iam calculus primus superstructus fuerat locis geocentricis ab aberratione fixarum purgatis) omnes operationes praeliminares a positione terrae et loco geocentrico corporis coelestis pendentes, in computo novo invariatae retineri poterunt. Quin adeo hoc modo primo statim calculo aberrationem complecti licebit; si methodus ad determinationem orbitae adhibita ita comparata est, ut valores distantiarum prodeant prius, quam tempora correctae in calculum introducere opus fuerit. Tunc aberrationis quidem causa calculus duplex haud necessarius erit, uti in tractatione ampliori problematis nostri clarius apparebit.

119.

Haud difficile esset, e nexu inter problematis nostri data atque incognitas, eius statum ad sex aequationes reducere, vel adeo ad pauciores, quum unam

alteramve incognitam satis commode eliminare liceret: sed quoniam nexus ille complicatissimus est, hae aequationes maxime intractabiles evaderent; incognitarum separatio talis, ut tandem aequatio unicum tantummodo continens prodeat, generaliter loquendo*) pro impossibili haberi potest, multoque adeo minus problematis solutionem integram per solas operationes directas absolvere licebit.

Sed ad *duarum* aequationum solutionem $X = 0$, $Y = 0$, in quibus duae tantum incognitae x , y intermixtae remanserunt, utique reducere licet problema nostrum, et quidem variis modis. Haud equidem necesse est, ut x , y sint duo ex elementis ipsis: esse poterunt quantitates qualicumque modo cum elementis connexae, si modo illis inventis elementa inde commode derivare liceat. Praeterea manifesto haud opus est, ut X , Y per functiones explicitas ipsarum x , y exhibeantur: sufficit, si cum illis per systema aequationum ita iunctae sunt, ut a valoribus datis ipsarum x , y ad valores respondentes ipsarum X , Y descendere in potestate sit.

120.

Quoniam itaque problematis natura reductionem ulteriorem non permittit, quam ad duas aequationes, duas incognitas mixtim implicantes, rei summa primo quidem in idonea harum incognitarum *electione* aequationumque *adornatione* versabitur, ut tum X et Y quam simplicissime ab x , y pendeant, tum ex harum valoribus inventis elementa ipsa quam commodissime demanent: dein vero circumspectiendum erit, quo pacto incognitarum valores aequationibus satisfaciens per operationes non nimis operosas eruere liceat. Quod si coecis quasi tentaminibus tantum efficiendum esset, ingens sane ac vix tolerandus labor requireretur, qualem fere nihilominus saepius susceperunt astronomi, qui cometarum orbitas per methodum quam indirectam vocant determinaverunt: magnopere utique in tali negotio labor sublevatur eo, quod in tentaminibus primis calculi crassiores sufficiunt, donec ad valores approximatos incognitarum perventum fuerit. Quamprimum vero determinatio approximata iam habetur, rem tutis semper expeditis-que methodis ad finem perducere licebit, quas antequam ulterius progrediamur hic explicavisse iuvabit.

*) Quoties observationes ab invicem tam parum remotae sunt, ut temporum intervalla tanquam quantitates infinite parvas tractare liceat, huiusmodi separatio utique succedit, totumque problema ad solutionem aequationis algebraicae septimi octave gradus reducitur.

Aequationibus $X = 0$, $Y = 0$, si pro x , y valores veri ipsi accipiuntur, ex asse sponte satisfiet; contra si pro x , y valores a veris diversi substituuntur, X et Y inde valores a 0 diversos nanciscentur. Quo propius vero illi ad veros accedunt, eo minores quoque valores ipsarum X , Y emergere debent, quotiesque illorum differentiae a veris perexiguae sunt, supponere licebit, variationes in valoribus ipsarum X , Y proxime proportionales esse variationi ipsius x , si y , vel variationi ipsius y , si x non mutetur. Quodsi itaque valores veri ipsarum x , y resp. designantur per ξ , η , valores ipsarum X , Y suppositioni $x = \xi + \lambda$, $y = \eta + \mu$ respondentes per formam $X = a\lambda + \varepsilon\mu$, $Y = \gamma\lambda + \delta\mu$ exhibebuntur, ita ut coefficientes a , ε , γ , δ pro constantibus haberi queant, dum λ et μ perexiguae manent. Hinc concluditur, si pro tribus systematibus valorum ipsarum x , y , a veris parum diversorum, valores respondentes ipsarum X , Y determinati sint, valores veros ipsarum x , y inde derivari posse, quatenus quidem suppositionem istam admittere liceat. Statuamus

$$\begin{array}{lll} \text{pro } x = a, & y = b & \text{fieri } X = A, \quad Y = B \\ x = a', & y = b' & X = A', \quad Y = B' \\ x = a'', & y = b'' & X = A'', \quad Y = B'' \end{array}$$

habebimusque

$$\begin{array}{ll} A = a(a - \xi) + \varepsilon(b - \eta), & B = \gamma(a - \xi) + \delta(b - \eta) \\ A' = a(a' - \xi) + \varepsilon(b' - \eta), & B' = \gamma(a' - \xi) + \delta(b' - \eta) \\ A'' = a(a'' - \xi) + \varepsilon(b'' - \eta), & B'' = \gamma(a'' - \xi) + \delta(b'' - \eta) \end{array}$$

Hinc fit, eliminatis a , β , γ , δ

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{a(A'B'' - A''B') + a'(A''B - AB'') + a''(AB' - A'B)}{A'B'' - A''B' + A''B - AB'' + AB' - A'B} \\ \eta &= \frac{b(A'B'' - A''B') + b'(A''B - AB'') + b''(AB' - A'B)}{A'B'' - A''B' + A''B - AB'' + AB' - A'B} \end{aligned}$$

sive in forma ad calculum commodiori

$$\begin{aligned} \xi &= a + \frac{(a' - a)(A''B - AB'') + (a'' - a)(AB' - A'B)}{A'B'' - A''B' + A''B - AB'' + AB' - A'B} \\ \eta &= b + \frac{(b' - b)(A''B - AB'') + (b'' - b)(AB' - A'B)}{A'B'' - A''B' + A''B - AB'' + AB' - A'B} \end{aligned}$$

Manifesto quoque in his formulis quantitates a , b , A , B , cum a' , b' , A' , B' , vel cum his a'' , b'' , A'' , B'' permutare licet.



Ceterum denominator communis omnium harum expressionum, quem etiam sub formam $(A'-A)(B''-B)-(A''-A)(B'-B)$ ponere licet, fit

$$= (a\delta - \xi\gamma) \{ (a'-a)(b''-b) - (a''-a)(b'-b) \} :$$

unde patet, a, a', a'', b, b', b'' ita accipi debere, ut non fiat $\frac{a''-a}{b''-b} = \frac{a'-a}{b'-b}$, alioquin enim haec methodus haud applicabilis esset, sed pro ξ et γ valores fractos suggereret, quorum numeratores et denominatores simul evanescerent. Simul hinc manifestum est, si forte fiat $a\delta - \xi\gamma = 0$, eundem defectum methodi usum omnino destruere, quomocunque a, a', a'', b, b', b'' accipiantur. In tali casu pro valoribus ipsius X formam talem supponere oporteret $\alpha\lambda + \xi\mu + \epsilon\lambda\lambda + \zeta\lambda\mu + \theta\mu\mu$, similemque pro valoribus ipsius Y , quo facto analysis methodos praecedenti analogas suppedicaret, e valoribus ipsarum X, Y pro quatuor systematibus valorum ipsarum x, y computatis harum valores veros eruendi. Hoc vero modo calculus permolestus evaderet, praeterea ostendi potest, in tali casu orbitae determinationem praecisionem necessariam per ipsius rei naturam non admittere: quod incommodum quum aliter evitari nequeat, nisi novis observationibus magis idoneis adscitis, huic argumento hic non immoramur.

121.

Quoties itaque incognitarum valores approximati iam in potestate sunt, veri inde per methodum modo explicatam omni quae desideratur praecisione derivari possunt. Primo scilicet computabuntur valores ipsarum X, Y istis valoribus approximatis (a, b) respondentes: qui nisi sponte iam evanescunt, calculus duobus aliis valoribus ab illis parum diversis (a', b') repetetur, ac dein tertio systemate a'', b'' , nisi fortuito ex secundo X et Y evanuerunt. Tunc per formulas art. praec. valores veri elicientur, quatenus suppositio, cui illae formulae immituntur, a veritate haud sensibilibiter discrepat. De qua re quo melius iudicium ferri possit, calculus valorum ipsarum X, Y cum illis valoribus correctis repetitur: qui si aequationibus $X = 0, Y = 0$ nondum satisfieri monstrat, certe valores multo minores ipsarum X, Y inde prodibunt, quam per tres priores hypotheses, adeoque elementa orbitae hinc resultantia longe exactiora erunt, quam ea, quae primis hypothesis respondent. Quibus si acquiescere nolumus, consultissimum erit, omnia ea hypothesis quae maximas differentias produxerat, duas reliquas cum quarta denuo iungere, atque sic ad normam art. praec. quintum

systema valorum ipsarum x, y formare: eodemque modo, ubi operae pretium videbitur, ad hypothesin sextam etc. progredi licebit, donec aequationibus $X = 0, Y = 0$ tam exacte satisfactum fuerit, quam tabulae logarithmicae et trigonometricae permittunt. Rarissime tamen opus erit, ultra systema quartum progredi, nisi hypotheses primae nimis adhuc a veritate aberrantes suppositae fuerint.

122.

Quum incognitarum valores in hypothesi secunda et tertia supponendi quodammodo arbitrarii sint, si modo ab hypothesi prima non nimis differant, praeterea caveatur, ne ratio $(a'-a):(b''-b)$ ad aequalitatem huius $(a'-a):(b'-b)$ convergat, plerumque statui solet $a' = a, b'' = b$. Duplex hinc lucrum derivatur: namque non solum formulae pro ξ, γ paullo adhuc simpliciores evadunt, sed pars quoque calculi primi eadem manebit in hypothesi secunda, aliaque pars in tertia.

Est tamen casus, ubi aliae rationes ab hac consuetudine discedere suadent: fingamus enim, X habere formam $X' - x$, atque Y hanc $Y' - y$, functionesque X', Y' per problematis naturam ita comparatas esse, ut erroribus mediocribus in valoribus ipsarum x, y commissis perparum afficiantur, sive ut $\left(\frac{dX'}{dx}\right), \left(\frac{dY'}{dy}\right)$ sint quantitates perexiguae, patetque, differentias inter valores istarum functionum systemati $x = \xi, y = \eta$ respondententes, eosque qui ex $x = a, y = b$ prodeunt, ad ordinem quasi altiore referri posse, quam differentias $\xi - a, \eta - b$ at valores illi sunt $X' = \xi, Y' = \eta$, hi vero $X' = a + A, Y' = b + B$, unde sequitur, $a + A, b + B$ esse valores multo exactiores ipsarum x, y , quam a, b . Quibus si hypothesis secunda superstruitur, persaepe aequationibus $X = 0, Y = 0$ tam exacte iam satisfit, ut ulterius progredi haud opus sit; sin secus, eodem modo ex hypothesi secunda tertia formabitur faciendo $a' = a + A' = a + A + A', b'' = b + B' = b + B + B'$, unde tandem, si nondum satis praecisa reperitur, quarta ad normam art. 120. elicietur.

123.

In praec. supposuimus, valores approximatos incognitarum x, y alicunde iam haberi. Quoties quidem totius orbitae dimensiones approximatae in potestate sunt (ex aliis forte observationibus per calculos anteriores deductae iamque per novas corrigendae), conditioni illi absque difficultate satisfieri poterit, quam-



cunque significationem incognitis tribuamus. Contra in determinatione prima orbitae penitus adhuc ignotae (quae est problema longe difficillimum) nequam indifferens est, quasnam incognitas adhibeamus; arte potius talique modo eligendae sunt, ut valores approximatos ex ipsius problematis natura haurire liceat. Quod exoptatissime succedit, quoties tres observationes ad orbitae investigationem adhibitae motum heliocentricum corporis coelestis non nimis magnum completuntur. Huiusmodi itaque observationes ad determinationem primam semper adhibendae sunt, quam dein per observationes magis ab invicem remotas ad libitum corrigere conveniet. Nullo enim negotio perspicitur, observationum errores inevitabiles calculum eo magis turbare, quo propiores observationes adhibeantur. Hinc colligitur, observationes ad determinationem primam haud temere eligendas, sed cavendum esse, *primo* ne sint nimis sibi invicem vicinae, *dein* vero etiam ne nimis ab invicem distent; in primo enim casu calculus elementorum observationibus satisfaciendum expeditissime quidem absolveretur, sed his elementis ipsis parum fidendum foret, quinimo erroribus tam enormiter depravata evadere possent, ut ne approximationis quidem vice fungi valerent; in casu altero vero artificis, quibus ad determinationem approximatum incognitarum utendum est, destitueremur, neque inde aliam derivaremus, nisi vel crassissimam ubi hypotheses multo plures, vel omnino ineptam, ubi tentamina fastidiosissima haud evitare liceret. Sed de hisce methodi limitibus scite indicare melius per usum frequentem quam per praecepta ediscitur: exempla infra tradenda ostendent, ex observationibus Iunonis 22 tantum diebus ab invicem dissitis motumque heliocentricum $7^{\circ}35'$ complectentibus elementa multa iam praecisione gaudentia derivari, ac vicissim, methodum nostram optimo etiamnum successu ad observationes Cereris applicari, quae 260 diebus ab invicem distant, motumque heliocentricum $62^{\circ}55'$ includunt, quatuorque hypothesis seu potius approximationibus successivis adhibitis elementa optime cum observationibus conspirantia producere.

124.

Progredimur iam ad enumerationem methodorum maxime idonearum principis praecedentibus innixarum, quarum quidem praecipua momenta in libro primo exposita sunt, atque hic tantum instituto nostro accommodari debent.

Methodus simplicissima esse videtur, si pro x, y distantiae corporis coelestis a terra in duabus observationibus accipiantur, aut potius vel logarithmi

harum distantiarum vel logarithmi distantiarum ad eclipticam sive aequatorem proiectarum. Hinc per art. 64, V. elicientur loca heliocentrica et distantiae a Sole ad eadem loca pertinentia; hinc porro per art. 110. situs plani orbitae atque longitudes heliocentricae in ea; hinc atque ex radiis vectoribus temporibusque respondentibus per problema in artt. 85 . . . 105. copiose pertractatum cuncta reliqua elementa, per quae illas observationes exacte repraesentari manifestum est, quicunque valores ipsis x, y tributi fuerint. Quodsi iam per haec elementa locus geocentricus pro tempore observationis tertiae computatur, huius consensus cum observato vel dissensus decideret, utrum valores suppositi veri fuerint, an ab iis discrepent; unde quum comparatio duplex derivetur, differentia altera (in longitudine vel ascensione recta) accipi poterit pro X , alteraque (in latitudine vel declinatione) pro Y . Nisi igitur, valores harum differentiarum X, Y sponte prodeunt $= 0$, valores veros ipsarum x, y per methodum in art. 120 sqq. descriptam eruere licebit. Ceterum per se arbitrarium est, a quibusnam trium observationum proficiscamur: plerumque tamen praestat, primam et postremam adoptare, casu speciali de quo statim dicemus excepto.

Haecce methodus plerisque post explicandis eo nomine praeferenda est, quod applicationem maxime generalem patitur. Excipere oportet casum, ubi duae observationes extremae motum heliocentricum 180 vel 360 vel 540 etc. graduum complectuntur; tunc enim positio plani orbitae e duobus locis heliocentricis determinari nequit (art. 110.). Perinde methodum applicare haud conveniet, quoties motus heliocentricus inter duas observationes extremas perparum differt ab 180° vel 360° etc. quoniam in hoc casu determinatio positionis orbitae accurata obtineri nequit, sive potius, quoniam variationes levissimae in valoribus suppositis incognitarum tantas variationes in positione orbitae et proin etiam in valoribus ipsarum X, Y producerent, ut hae illis non amplius proportionales censerentur. Veruntamen remedium hic praesto est; scilicet in tali casu non proficiscamur a duabus observationibus extremis, sed a prima et media, vel a media et ultima, adeoque pro X, Y , accipiemus differentias inter computum et observationem in loco tertio vel primo. Quodsi autem tum locus secundus a primo tum tertius a secundo propemodum 180 gradibus distarent, incommodum illud hoc modo tollere non liceret; sed praestat, huiusmodi observationes, e quibus per rei naturam determinatio accurata situs orbitae erui omnino nequit, ad calculum elementorum haud adhibere.

Præterea hæc methodus eo quoque se commendat, quod nullo negotio aestimari potest, quantas variationes elementa patiantur, si manentibus locis extremis medius paullulum mutetur: hoc itaque modo iudicium ferri poterit quæcunque de gradu præcisionis elementis inventis tribuendæ.

125.

Levi mutatione applicata e methodo præcedente *secundam* eliciemus. A distantis in duabus observationibus profecti, perinde ut in illa, euncta elementa determinabimus; ex his vero non locum geocentricum pro observatione tertia computabimus, sed tantummodo usque ad locum heliocentricum in orbita progrediemur; ex altera parte eundem locum heliocentricum per problema in art. 74. 75. tractatum e loco geocentrico observato atque situ plani orbitæ derivabimus; hæc duæ determinationes inter se differentes (nisi forte valores veri ipsarum x , y suppositæ fuerint), ipsas X , Y nobis suppeditabunt, accepta pro X differentia inter duos valores longitudinis in orbita, atque pro Y differentia inter duos valores radii vectoris, aut potius logarithmi eius. Hæc methodus iisdem monitionibus obnoxia est, quas in art. præc. attigimus: adiungere oportet aliam, scilicet, quod locus heliocentricus in orbita e geocentrico deduci nequit, quoties locus terræ in alterutrum nodorum orbitæ incidit; tunc itaque hanc methodum applicare non licet. Sed in eo quoque casu, ubi locus terræ ab alterutro nodorum perparum distat, hac methodo abstinere conveniet, quoniam suppositio, variationibus parvis ipsarum x , y respondere variationes proportionales ipsarum X , Y , nimis erronea evaderet, per rationem ei quam in art. præc. attigimus similem. Sed hic quoque remedium e permutatione loci medii cum aliquo extremorum, cui locus terræ a nodis magis remotus respondeat, petere licebit, nisi forte in omnibus tribus observationibus terra in nodorum vicinis versata fuerit.

126.

Methodus præcedens ad *tertiam* illico sternit viam. Determinentur, perinde ut ante, e distantis corporis coelestis a terra in observationibus extremis longitudines respondententes in orbita cum radiis vectoribus. Adiumento positionis plani orbitæ, quam hic calculus suppeditaverit, eruatur ex observatione media longitudo in orbita atque radius vector. Tunc autem computentur ex his tribus locis heliocentricis elementa reliqua per problema in art. 82. 83. tractatum, quæ

operatio ab observationum temporibus independens erit. Hoc itaque modo innolescent tres anomalie mediae atque motus diurnus, unde ipsa temporum intervalla inter observationem primam et secundam, atque inter secundam et tertiam computare licebit. Horum differentie ab intervallis veris pro X et Y accipiuntur.

Hæc methodus minus idonea esset, quoties motus heliocentricus arcum exiguum tantum complectitur. In tali enim casu ista orbitæ determinatio (ut iam in art. 82. monuimus) a quantitibus tertii ordinis pendet, adeoque præcisionem sufficientem non admittit. Variationes levissimæ in valoribus ipsarum x , y producere possent variationes permagnas in elementis adeoque etiam in valoribus ipsarum X , Y neque has illis proportionales supponere liceret. Quoties autem tres loci motum heliocentricum considerabilem subtendunt, methodi usus utique succedet optime, siquidem exceptionibus in art. præc. explicatis haud turbetur, ad quas manifesto in hæc quoque methodo respiciendum erit.

127.

Postquam tres loci heliocentri eo quem in art. præc. descripsimus modo eruti sunt, sequenti quoque modo procedi poterit. Determinentur elementa reliqua per problema in artt. 85 . . . 105. tractatum primo e loco primo et secundo cum intervallo temporis respondente, dein vero eodem modo e loco secundo et tertio temporisque intervallo respondente: ita pro singulis elementis duo valores prodibunt, e quorum differentiis duas ad libitum pro X et Y accipere licebit. Magnopere hanc methodum commendat commodum haud spernendum, quod in hypothesibus primis elementa reliqua, præter duo ea quæ ad stabiliendum X et Y eliguntur, omnino negligere licet, quæ in ultimo demum calculo, valoribus correctis ipsarum x , y superstructo, determinabuntur sive e sola combinatione prima, sive e sola secunda, sive quod plerumque præferendum est e combinatione loci primi cum tertio. Ceterum electio illorum duorum elementorum, quæ generaliter loquendo arbitraria est, magnam solutionum varietatem suppeditat; adoptari poterunt e. g. logarithmus semiparametri cum logarithmo semiaxis maioris, vel prior cum excentricitate, vel cum eadem posterior, vel cum aliquo horum elementorum longitudo perihelii; combinari quoque poterit aliquod horum quatuor elementorum cum anomalia excentrica loco medio in utroque calculo respondente, siquidem orbita elliptica evaserit, ubi formulæ 27 . . . 30. art. 96. calculum maxime expeditum afferent. In casibus specialibus autem hæc electio quadam circum-

spectione indiget; ita e. g. in orbitis ad parabolae similitudinem vergentibus semi-axis maior a ipsiusve logarithmus minus idonei forent, quippe quorum variationes immodicae variationibus ipsarum x, y haud proportionales censerentur: in tali casu magis e re esset eligere $\frac{1}{a}$. Sed his cautelis eo minus immoramur, quum methodus quinta in art. seq. explicanda quatuor hactenus expositis in omnibus fere casibus palman praeripiat.

128.

Designemus tres radios vectores eodem modo erutos ut in art. 125. 126. per r, r', r'' ; motum angularem heliocentricum in orbita a loco secundo ad tertium per $2f$, a primo ad tertium per $2f'$, a primo ad secundum per $2f''$, ita ut habeatur $f' = f + f''$; sit porro $r' r'' \sin 2f = n$, $r r'' \sin 2f' = n'$, $r r' \sin 2f'' = n''$; denique producta quantitatis constantis k (art. 2.) in temporis intervalla ab observatione secunda ad tertiam, a prima ad tertiam, a prima ad secundam resp. $\theta, \theta', \theta''$. Incipiatur computus duplex elementorum (perinde ut in art. praec.) tum ex r, r', f'' et θ'' , tum ex $r', r'' f, \theta$: in utroque vero calculo non ad elementa ipsa progredieris, sed subsistes, quamprimum quantitas ea, quae rationem sectoris elliptici ad triangulum exprimit, supraque (art. 91.) per y vel $-Y$ denotata est, eruta fuerit. Sit valor huius quantitatis in calculo primo η'' , in secundo η . Habebimus itaque per formulam 18. art. 95. pro semiparametro p valorem duplicem:

$$\sqrt{p} = \frac{\eta'' n''}{\theta'' w''}, \text{ atque } \sqrt{p} = \frac{\eta n}{\theta}$$

Sed per art. 82. habemus insuper valorem tertium

$$p = \frac{4 r r' r'' \sin f \sin f' \sin f''}{n - n' + n''}$$

qui tres valores manifesto identici esse deberent, si pro x, y ab initio valores veri accepti fuissent. Quamobrem esse deberet

$$\frac{\theta''}{\eta''} = \frac{\eta'' n''}{\eta n} = \frac{4 \theta \theta' r r' r'' \sin f \sin f' \sin f''}{\eta \eta' n n''} = \frac{n' \theta \theta''}{2 \eta \eta' r r' r'' \cos f \cos f' \cos f''}$$

Nisi itaque his aequationibus iam in primo calculo sponte satisfit, statuere licebit

$$X = \log \frac{\eta n \theta''}{\eta' n' \theta'} \\ Y = n - n' + n'' - \frac{n' \theta \theta''}{2 \eta \eta' r r' r'' \cos f \cos f' \cos f''}$$

Haec methodus applicationem aequae generalem patitur, ac secunda in art. 125. explicata, magnum vero lucrum est, quod in hac quinta hypotheses primae evolutionem elementorum ipsorum non requirunt, sed in media quasi via subsistunt. Ceterum simulatque in hac operatione eo perventum est, ut praevideri possit, hypothesin novam a veritate haud sensibilibiter discrepaturam esse, in hac elementa ipsa vel duntaxat ex $r, r', f'' \theta''$, vel ex r', r'', f, θ , vel quod praestat ex r, r'', f', θ' , determinare sufficiet.

129.

Quinque methodi hactenus expositae protinus ad totidem alias viam sternunt, quae ab illis eo tantum differunt, quod pro x et y loco distantiarum a terra, inclinatio orbitae atque longitudo nodi ascendentis accipiuntur. Hae igitur methodi novae ita se habent:

I. Determinantur ex x et y duobusque locis geocentricis extremis secundum art. 74. 75. longitudines heliocentricae in orbita radiique vectores, atque hinc et ex temporibus respondentibus omnia reliqua elementa; ex his denique locus geocentricus pro tempore observationis mediae, cuius differentiae a loco observato in longitudine et latitudine ipsas X et Y suppeditabunt.

Quatuor reliquae methodi in eo conveniunt, quod e positione plani orbitae locisque geocentricis omnes tres longitudines heliocentricae in orbita radiique vectores respondentes computantur. Dein autem

II. elementa reliqua determinantur e duobus locis extremis tantum atque temporibus respondentibus; secundum haec elementa calculantur pro tempore observationis mediae longitudo in orbita atque radius vector, quarum quantitatum differentiae a valoribus prius inventis, i. e. e loco geocentrico deductis, ipsas X, Y exhibebunt.

III. Aut derivantur orbitae dimensiones reliquae ex omnibus tribus locis heliocentricis (art. 82. 83.), in quem calculum tempora non ingrediuntur: dein temporum intervalla eruuntur, quae in orbita ita inventa inter observationem pri-

mam et secundam, atque inter hanc et tertiam elapsa esse deberent, et quorum differentiae a veris ipsas X , Y nobis suggerent.

IV. Calculantur elementa reliqua duplici modo, puta tum e combinatione loci primi cum secundo, tum e combinatione secundi cum tertio, adhibitis temporum intervallis respondentibus. Comparatis hisce duobus elementorum systematibus inter se, e differentiis duae quaecunque pro X , Y accipi poterunt.

V. Sive denique idem calculus duplex tantummodo usque ad valores quantitatis in art. 91. per y denotatae producit, ac dein pro X , Y expressiones in art. praec. traditae adoptantur.

Ut quatuor ultimis harum methodorum tuto uti liceat, loci terrae pro omnibus tribus observationibus orbitae nodis non nimis vicini esse debent: contra usus methodi primae tantummodo requirit, ut eadem conditio in duabus observationibus extremis locum habeat, sive potius (quoniam locum medium pro aliquo extremorum substituere licet), ut e tribus locis terrae non plures quam unus in nodorum vicinis versentur.

130.

Decem methodi inde ab art. 124. explicatae innituntur suppositioni, valores approximatos distantiarum corporis coelestis a terra, aut positionis plani orbitae, iam in potestate esse. Quoties quidem id agitur, ut dimensiones orbitae, quarum valores approximati iam alicunde innotuerunt, puta per calculum anteriorem observationibus aliis innixum, per observationes magis ab invicem remotas corrigantur, postulatum illud nulla manifesto difficultatibus obnoxium erit. Sed hinc nondum liquet, quonam modo calculum primum aggredi liceat, ubi omnes orbitae dimensiones penitus adhuc incognitae sunt; hic vero problematis nostri casus longe gravissimus atque difficillimus est, uti iam ex problemate analogo in theoria cometarum praesumi potest, quod quamdiu geometras torserit, quotque tentaminibus irritis originem dederit satis constat. Ut problema nostrum recte solum censi possit, manifesto conditionibus sequentibus satisfieri oportet, siquidem solutio ad instar normae inde ab art. 119. explicatae exhibetur: *Primo* quantitates x , y tali modo sunt eligendae, ut valores ipsarum approximatos ex ipsa problematis natura petere liceat, saltem, quamdiu corporis coelestis motus heliocentricus intra observationes non nimis magnus est. *Secundo* autem requiritur, ut variationibus exiguis quantitatum x , y variationes non nimis magnae

in quantitatibus inde derivandis respondeant, ne errores in illarum valoribus suppositis forte commissi impedian, quominus has quoque pro approximatis habere liceat. Denique *tertio* postulamus, ut operationes, per quas a quantitatibus x , y successive usque ad X , Y progrediendum est, non nimis prolixae evadant.

Hae conditiones criterium subministrabunt, secundum quod de cuiusvis methodi praestantia iudicium ferri poterit: adhuc evidentius quidem ea applicationibus frequentibus se manifestabit. Methodus ea, quam exponere iam accingimur, et quae quodammodo tamquam pars gravissima huius operis considerata est, illis conditionibus ita satisfacit, ut nihil amplius desiderandum relinquere videatur. Quam antequam in forma ad praxin commodissima explicare aggrediamur, quasdam considerationes praeliminares praemittimus, aditumque quasi ad illam, qui alias forsitan obscurior minusque obvis videri possit, illustrabimus atque aperiemus.

131.

In art. 114. ostensum est, si ratio inter quantitates illic atque in art. 128. per n , n' , n'' denotatas cognita fuerit, corporis coelestis distantias a terra per formulas persimplices determinari posse. Quodsi itaque pro x , y assumerentur quotientes $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$, pro his quantitatibus in eo casu, ubi motus heliocentricus inter observationes haud ita magnus est, statim valores approximati $\frac{\theta}{\theta'}$, $\frac{\theta''}{\theta'}$ se offerrent (accipiendo characteres θ , θ' , θ'' in eadem significatione ut in art. 128.): hinc itaque solutio obvia problematis nostri demanare videtur, si ex x et y distantiae duae a terra eliciantur, ac dein ad instar alicuius ex quinque methodis artt. 124...128. procedatur. Revera, acceptis quoque characteribus r_1 , r_2 in significatione art. 128., designatoque analogice per r_1' quotiente orto ex divisione sectoris inter duos radios vectores contenti per aream trianguli inter eosdem, erit $\frac{n}{n'} = \frac{\theta}{\theta'} \cdot \frac{r_1'}{r_1}$, $\frac{n''}{n'} = \frac{\theta''}{\theta'} \cdot \frac{r_2'}{r_2}$, patetque facile, si n , n' , n'' tamquam quantitates parvae primi ordinis spectentur, esse generaliter loquendo $r_1 - 1$, $r_2 - 1$, $r_1' - 1$ quantitates secundi ordinis, adeoque valores ipsarum x , y approximatos $\frac{\theta}{\theta'}$, $\frac{\theta''}{\theta'}$ a veris differre tantummodo quantitatibus secundi ordinis. Nihilominus re propius considerata methodus haecce omnino inepta invenitur, cuius phaenomeni rationem paucis explicabimus. Levi scilicet negotio perspicitur, quantitatem (θ . 1. 2), per quam distantiae in formulis 9. 10. 11. art. 114. multiplicatae sunt, ad minimum tertii ordinis fieri, contra e. g. in aequ. 9. quantitates (θ . 1. 2),

(I. 1. 2), (II. 1. 2) primi ordinis; hinc autem facile sequitur, errorem secundi ordinis in valoribus quantitatum $\frac{n}{n'}$, $\frac{n''}{n'}$ commissum producere in valoribus distantiarum errorem ordinis 0. Quamobrem, secundum vulgarem loquendi usum, distantiae tunc quoque errore finito, affectae prodirent, quando temporum intervalla infinite parva sunt, adeoque neque has distantias neque reliquas quantitates inde derivandas ne pro approximatis quidem habere liceret, methodusque conditioni secundae art. praec. adversaretur.

132.

Statuendo brevitatis gratia

$$(0.1.2) = a, (0.I.2) D' = -b, (0.O.2) D = c, (0.II.2) D'' = d,$$

ita ut aequatio 10. art. 114. fiat $a\delta' = b + c \cdot \frac{n}{n'} + d \cdot \frac{n''}{n'}$, coefficientes c et d quidem erunt primi ordinis, facile vero ostendi potest, differentiam $c - d$ ad secundum ordinem referendam esse. Hinc vero sequitur, valorem quantitatis $\frac{cn + dn''}{n + n''}$ ex suppositione approximata $n:n'' = \theta:\theta'$ prodeuntem errore quarti tantum ordinis affectum esse, quin adeo quinti tantum, quoties observatio media ab extremis aequalibus intervallis distat. Fit enim iste error

$$= \frac{c\theta + d\theta''}{\theta + \theta''} - \frac{cn + dn''}{n + n''} = \frac{\theta\theta''(d-c)(\eta''-\eta)}{(\theta+\theta'')(\eta'\theta + \eta\theta'')}$$

ubi denominator secundi ordinis est, numeratorisque factor alter $\theta\theta''(d-c)$ quarti, alter $\eta'' - \eta$ secundi, vel in casu isto speciali tertii ordinis. Exhibita itaque aequatione illa in hacce forma

$$a\delta' = b + \frac{cn + dn''}{n + n''} \cdot \frac{n + n''}{n'}$$

manifestum est, vitium methodi in art. praec. propositae non inde oriri, quod quantitates n , n'' hisce θ , θ'' proportionales suppositae sunt, sed inde, quod *insuper* n' ipsi θ' proportionalis statuta est. Hoc quippe modo loco factoris $\frac{n + n''}{n'}$, valor minus exactus $\frac{\theta + \theta''}{\theta'}$ = 1 introducitur, a quo verus

$$= 1 + \frac{\theta\theta''}{2\eta\eta'rr'r''\cos f \cos f''}$$

quantitate ordinis secundi discrepat (art. 128.).

133.

Quum cosinus angulorum f , f' , f'' , perinde ut quantitates η , η'' ab unitate differentia secundi ordinis discrepent, patet, si pro $\frac{n+n''}{n'}$ valor approximatus $1 + \frac{\theta\theta''}{2rr'r''}$ introducatur, errorem quarti ordinis committi. Quodsi itaque loco aequationis art. 114. haecce adhibetur

$$a\delta' = b + \frac{c\theta + d\theta''}{\theta'} \left(1 + \frac{\theta\theta''}{2rr'r''}\right)$$

in valorem distantiae δ' redundabit error secundi ordinis, quando observationes extremae a media aequidistant, vel primi ordinis in casibus reliquis. Sed haecce nova aequationis illius forma ad determinationem ipsius δ' haud idonea est, quia quantitates adhuc incognitas r , r' , r'' involvit.

Iam generaliter loquendo quantitates $\frac{r}{r'}$, $\frac{r''}{r'}$ ab unitate differentia primi ordinis distant, et perinde etiam productum $\frac{rr''}{r'^2}$: in casu speciali saepius commemorato facile perspicitur, hoc productum differentia secundi ordinis tantum ab unitate discrepare. Quin adeo quoties orbita ellipsis parum excentrica est, ita ut excentricitatem tamquam quantitatem primi ordinis spectare liceat, differentia $\frac{rr''}{r'^2}$ ad ordinem uno gradu adhuc altiore referri poterit. Manifestum est itaque, errorem illum eiusdem ordinis ut antea manere, si in aequatione nostra pro $\frac{\theta\theta''}{2rr'r''}$ substituat $\frac{\theta\theta''}{2r'^2}$, unde nanciscitur formam sequentem

$$a\delta' = b + \frac{c\theta + d\theta''}{\theta'} \left(1 + \frac{\theta\theta''}{2r'^2}\right)$$

Continet quidem haec aequatio etiamnum quantitatem incognitam r' , quam tamen eliminari posse patet, quum tantummodo a δ' atque quantitibus cognitis pendeat. Quodsi dein aequatio rite ordinaretur, ad octavum gradum ascenderet.

134.

Ex praecedentibus iam ratio percipitur, cur in methodo nostra pro x , y resp. quantitates

$$\frac{n''}{n} = P \text{ atque } 2 \left(\frac{n+n''}{n'} - 1 \right) r'^2 = Q$$

accepturi simus. Patet enim primo, si P et Q tamquam cognitae spectentur, δ' inde per aequationem

$$a\delta' = b + \frac{c+P}{1+P} \left(1 + \frac{Q}{2r'^2}\right)$$

determinari posse, ac dein δ et δ'' per aequationes 4. 6. art. 114., quum habeatur

$$\frac{n}{n'} = \frac{1}{1+P} \left(1 + \frac{Q}{2r'^2}\right), \quad \frac{n''}{n'} = \frac{P}{1+P} \left(1 + \frac{Q}{2r'^2}\right)$$

Secundo manifestum est, in hypothesi prima pro quantitibus P , Q , quarum valores exacte veri sunt

$$\frac{q''}{q} = \frac{q''}{q_1 q_2}, \quad \frac{r' r'' q q''}{r r'' q_1 q_2 \cos f \cos f' \cos f''}$$

statim obvios esse valores approximatos $\frac{q''}{q}$, $q q''$, ex qua hypothesi in determinationem ipsius δ' et proin etiam ipsarum δ , δ'' , redundabunt errores primi ordinis, vel secundi in casu speciali pluries commemorato. Ceterum etiamsi his conclusionibus, generaliter loquendo, tutissime fidendum sit, tamen in casu quodam speciali vim suam perdere possunt, scilicet quoties quantitas (0. 1. 2), quae in genere est ordinis tertii, fortuito fit = 0, vel tam parva, ut ad altiorem ordinem referri debeat. Hoc evenit, quoties motus geocentricus in sphaera coelesti prope locum medium punctum inflexionis sistit. Denique apparet, ut methodus nostra in usum vocari possit, necessario requiri, ut motus heliocentricus inter tres observationes non nimis magnus sit: sed haec restrictio, per problematis complicatissimi naturam, nullo modo evitari potest, neque etiam pro incommodo habenda est, quoniam semper in votis erit, determinationem primam orbitae incognitae corporis coelestis novi quam primum licet suscipere. Praeterea restrictio illa sensu satis lato accipi potest, uti exempla infra tradenda ostendent.

135.

Disquisitiones praecedentes cum in finem allatae sunt, ut principia, quibus methodus nostra innititur, verusque eius quasi nervus eo clarius perspiciantur: tractatio ipsa autem methodum in forma prorsus diversa exhibebit, quam post applicationes frequentissimas tamquam commodissimam inter plures alias a nobis tentatas commendare possumus. Quum in determinanda orbita incognita e tribus observationibus totum negotium semper ad aliquot hypotheses, aut potius approximationes successivas reducat, pro luero exinio habendum erit, si calculum ita adornare successerit, ut iam ab initio operationes quam plurimas, quae non a P et Q sed unice a combinatione quantitatum cognitarum pendeant, ab ipsis hypothesibus separare liceat. Tunc manifesto has operationes praeliminares, sin-

gulis hypothesibus communes, semel tantum exsequi oportet, hypothesesque ipsae ad operationes quam paucissimas reducuntur. Perinde maximi momenti erit, si in singulis hypothesibus usque ad ipsa elementa progredi haud opus fuerit, horumque computum usque ad hypothesin postremam reservare liceat. Utroque respectu methodus nostra, quam exponere iam aggredimur, nihil desiderandum relinquare videtur.

136.

Ante omnia tres locos heliocentricos terrae in spspera coelesti A , A' , A'' (Fig. 4.) cum tribus locis geocentricis respondentibus corporis coelestis B , B' , B'' per circulos maximos iungere, atque tum positionem horum circulorum maximorum respectu eclipticae (siquidem eclipticam pro plano fundamentalis adoptamus), tum situm punctorum B , B' , B'' in ipsis computare oportet. Sint α , α' , α'' tres corporis coelestis longitudines geocentricae; δ , δ' , δ'' latitudines, l , l' , l'' longitudines heliocentricae terrae, cuius latitudines statuimus = 0 (artt. 117. 72.). Sint porro γ , γ' , γ'' , circulorum maximorum ab A , A' , A'' resp. ad B , B' , B'' ductorum inclinationes ad eclipticam: quas inclinationes, ut in ipsarum determinatione normam fixam sequamur, perpetuo respectu eius eclipticae partis mensurabimus, quae a punctis A , A' , A'' secundum ordinem signorum sita est, ita ut ipsarum magnitudo a 0 usque ad 360° numeretur, sive quod eodem redit, in parte boreali a 0 usque ad 180°, in australi a 0 usque ad -180°. Arcus AB , $A'B'$, $A''B''$, quos semper intra 0 et 180° statuere licebit, designamus per δ , δ' , δ'' . Ita pro determinatione ipsarum γ , δ habemus formulas

$$[1.] \quad \tan \gamma = \frac{\tan \delta}{\sin(\alpha - l)}$$

$$[2.] \quad \tan \delta = \frac{\tan(\alpha - l)}{\cos \gamma}$$

quibus si placet ad calculi confirmationem adici possunt sequentes:

$$\sin \delta = \frac{\sin \delta}{\sin \gamma}, \quad \cos \delta = \cos \delta \cos(\alpha - l)$$

Pro determinandis γ' , δ' , γ'' , δ'' , manifesto formulae prorsus analogae habentur. Quodsi simul fuerit $\delta = 0$, $\alpha - l = 0$ vel $= 180^\circ$, i. e. si corpus coeleste simul in oppositione vel coniunctione atque in ecliptica fuerit, γ fieret indeterminata: at supponemus, hunc casum in nulla trium observationum locum habere.

Si loco eclipticae aequator tamquam planum fundamentale adoptatum est, ad positionem trium circulorum maximorum respectu aequatoris determinandam praeter inclinationes insuper requiruntur rectascensiones intersectionum cum aequatore: nec non praeter distantias punctorum B, B', B'' ab his intersectionibus etiam distantias punctorum A, A', A'' ab iisdem computare oportebit. Quae quum a problemate in art. 110. tractato pendeant, formularum evolutioni hic non immoramur.

137.

Negotium secundum erit determinatio situs relativi illorum trium circulorum maximorum inter se, qui pendeat a situ intersectionum mutuarum et ab inclinationibus. Quae si absque ambiguitate ad notiones claras ac generales reducere cupimus, ita ut non opus sit pro singulis casibus diversis ad figuras peculiare recurrere, quasdam dilucidationes praeliminares praemittere oportebit. Primo scilicet in quovis circulo maximo duae directiones oppositae aliquo modo distinguendae sunt, quod fiet, dum alteram tamquam progressivam seu positivam, alteram tamquam retrogradam seu negativam consideramus. Quod quum per se prorsus arbitrium sit, ut normam certam stabiliamus, semper directiones ab A, A', A'' versus B, B', B'' seu positivas considerabimus; ita e.g. si intersectio circuli primi cum secundo per distantiam positivam a puncto A exhibetur, haec capienda subintelligetur ab A versus B (ut D'' in figura nostra); si vero negativa esset, ipsam ab altera parte ipsius A sumere oporteret. Secundo vero etiam duo haemisphaeria, in quae omnis circulus maximus sphaeram integram dirimit, denominationibus idoneis distinguenda sunt: et quidem haemisphaerium superius vocabimus, quod in superficie interiori sphaerae circulum maximum directione progressiva permeantem ad dextram est, alterum inferius. Plaga itaque superior analoga erit haemisphaerio boreali respectu eclipticae vel aequatoris, inferior australi.

His rite intellectis, ambas duorum circulorum maximorum intersectiones commodè ab invicem distinguere licebit: in una scilicet circulus primus e secundi regione inferiori in superiorem tendit, vel quod idem est secundus e primi regione superiore in inferiorem; in altera intersectione opposita locum habent. Per se quidem prorsus arbitrium est, quasnam intersectiones in problemate nostro eligere velimus: sed ut hic quoque iuxta normam invariabilem procedamus, eas

semper adoptabimus (D, D', D'' in Fig. 4.), ubi resp. circulus tertius AB'' in secundi AB' , tertius in primi AB , secundus in primi plagam superiorem transit. Situs harum intersectionum determinabitur per ipsarum distantias a punctis A et A', A et A', A et A' , quas simpliciter per $AD, AD', AD'', AD', AD'', AD''$ designabimus. Quibus ita factis circulorum inclinationes mutuae erunt anguli, qui resp. in his intersectionum punctis D, D', D'' inter circulorum se secantium partes eas continentur, quae in directione progressiva iacent: has inclinationes, semper inter 0 et 180° accipiendas, per $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ denotabimus. Determinatio harum novem quantitatum incognitarum e cognitis manifesto ab eodem problemate pendet, quod in art. 55. tractavimus: habemus itaque aequationes sequentes:

$$[3.] \quad \sin \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} (A'D + A''D) = \sin \frac{1}{2} (l'' - l') \sin \frac{1}{2} (\gamma'' + \gamma')$$

$$[4.] \quad \sin \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} (A'D + A''D) = \cos \frac{1}{2} (l'' - l') \sin \frac{1}{2} (\gamma'' - \gamma')$$

$$[5.] \quad \cos \frac{1}{2} \varepsilon \sin \frac{1}{2} (A'D - A''D) = \sin \frac{1}{2} (l'' - l') \cos \frac{1}{2} (\gamma'' + \gamma')$$

$$[6.] \quad \cos \frac{1}{2} \varepsilon \cos \frac{1}{2} (A'D - A''D) = \cos \frac{1}{2} (l'' - l') \cos \frac{1}{2} (\gamma'' - \gamma')$$

Ex aequationibus 3. et 4. innotescunt $\frac{1}{2} (A'D + A''D)$ et $\sin \frac{1}{2} \varepsilon$, e duabus reliquis $\frac{1}{2} (A'D - A''D)$ et $\cos \frac{1}{2} \varepsilon$; hinc $A'D, A''D$ et ε . Ambiguitas determinationi arcuum $\frac{1}{2} (A'D + A''D), \frac{1}{2} (A'D - A''D)$ per tangentes adhaerens conditione ea decidetur, quod $\sin \frac{1}{2} \varepsilon$ et $\cos \frac{1}{2} \varepsilon$ positivi evadere debent, consensusque inter $\sin \frac{1}{2} \varepsilon$ et $\cos \frac{1}{2} \varepsilon$ toti calculo confirmando inserviet.

Determinatio quantitatum $AD', A'D', \varepsilon', AD'', A'D'', \varepsilon''$ prorsus simili modo perficietur, neque opus erit octo aequationes ad hunc calculum adhibendas huc transscribere, quippe quae ex aequ. 3... 6. sponte prodeunt, si

$$\begin{array}{l} \begin{array}{cc|cc|cc} A'D & A''D & \varepsilon & l''-l' & \gamma'' & \gamma' \\ \text{cum } AD' & A''D' & \varepsilon' & l''-l' & \gamma'' & \gamma' \\ \text{vel cum } AD'' & A'D'' & \varepsilon'' & l''-l' & \gamma' & \gamma'' \end{array} \end{array}$$

resp. commutantur.

Nova adhuc totius calculi confirmatio derivari potest e relatione mutua inter latera angulosque trianguli sphaerici inter puncta D, D', D'' formati, unde demanant aequationes generalissime verae, quaecumque situm haec puncta habeant:

$$\frac{\sin(A'D' - A'D'')}{\sin \varepsilon} = \frac{\sin(A'D - A'D'')}{\sin \varepsilon'} = \frac{\sin(A''D - A'D')}{\sin \varepsilon''}$$

Denique si loco eclipticae aequator tamquam planum fundamentale electus est, calculus mutationem non subit, nisi quod pro terrae locis heliocentricis A , A' , A'' substituere oportet ea aequatoris puncta, ubi a circulis AB , $A'B'$, $A''B''$ secatur; accipiendae sunt itaque pro l , l' , l'' ascensiones rectae harum intersectionum, nec non pro $A'D$ distantia puncti D ab intersectione secunda etc.

138.

Negotium tertium iam in eo consistit, ut duo loci geocentrici extremi corporis coelestis, i. e. puncta B , B' , per circulum maximum iungantur, huiusque intersectio cum circulo maximo $A'B'$ determinetur. Sit B^* haec intersectio, atque $\delta - \sigma$ eius distantia a puncto A' , nec non α^* eius longitudo, δ^* latitudo. Habemus itaque, propterea quod B , B^* , B'' in eodem circulo maximo iacent, aequationem satis notam

$$0 = \tan \delta \sin(\alpha'' - \alpha^*) - \tan \delta^* \sin(\alpha'' - \alpha) + \tan \delta'' \sin(\alpha^* - \alpha)$$

quae, substituendo $\tan \gamma' \sin(\alpha^* - l')$ pro $\tan \delta^*$, sequentem formam induit

$$0 = \begin{cases} \cos(\alpha^* - l') \{ \tan \delta \sin(\alpha'' - l') - \tan \delta'' \sin(\alpha - l') \} \\ - \sin(\alpha^* - l') \{ \tan \delta \cos(\alpha'' - l') + \tan \gamma' \sin(\alpha'' - \alpha) - \tan \delta'' \cos(\alpha - l') \} \end{cases}$$

Quare quum sit $\tan(\alpha^* - l') = \cos \gamma' \tan(\delta' - \sigma)$ habebimus

$$\tan(\delta' - \sigma) = \frac{\tan \delta \sin(\alpha'' - l') - \tan \delta'' \sin(\alpha - l')}{\cos \gamma' \{ \tan \delta \cos(\alpha'' - l') - \tan \delta'' \cos(\alpha - l') \} + \sin \gamma' \sin(\alpha'' - \alpha)}$$

Hinc derivantur formulae sequentes, ad calculum numericum magis accommodatae. Statuatur

$$[7.] \quad \tan \delta \sin(\alpha'' - l') - \tan \delta'' \sin(\alpha - l') = S$$

$$[8.] \quad \tan \delta \cos(\alpha'' - l') - \tan \delta'' \cos(\alpha - l') = T \sin t$$

$$[9.] \quad \sin(\alpha'' - \alpha) = T \cos t$$

(art. 14. II.), eritque

$$[10.] \quad \tan(\delta' - \sigma) = \frac{S}{T \sin(t + \gamma')}$$

Ambiguitas in determinatione arcus $\delta' - \sigma$ per tangentem inde oritur, quod circuli maximi $A'B'$, $B B''$ in duobus punctis se intersecant: nos pro B^* semper adoptabimus intersectionem puncto B' proximam, ita ut σ semper cadat inter

limites -90° et $+90^\circ$, unde ambiguitas illa tollitur. Plerumque tunc valor arcus σ (qui pendet a curvatura motus geocentrici) quantitas satis modica erit, et quidem generaliter loquendo secundi ordinis, si temporum intervalla tamquam quantitates primi ordinis spectantur.

Quaenam modificationes calculo applicandae sint, si pro ecliptica aequator tamquam planum fundamentale electum est, ex annotatione art. praec. sponte patebit.

Ceterum manifestum est, situm puncti B^* indeterminatum manere, si circuli $B B''$, $A'B'$ omnino coinciderent: hunc casum, ubi quatuor puncta A , B , B' , B'' in eodem circulo maximo iacerent, a disquisitione nostra excludimus. Conveniet autem in eligendis observationibus eum quoque casum evitare, ubi situs horum quatuor punctorum a circulo maximo parum distat: tunc enim situs puncti B^* , qui in operationibus sequentibus magni momenti est, per levissimos observationum errores nimis afficeretur, nec praecisione necessaria determinari posset. — Perinde punctum B^* indeterminatum manere patet, quoties puncta B , B'' in unum coincidunt*), in quo casu ipsius circuli $B B''$ positio indeterminata fieret. Quamobrem hunc quoque casum excludemus, quemadmodum, per rationes praecedentibus similes, talibus quoque observationibus abstinendum erit, ubi locus geocentricus primus et ultimus in puncta sphaerae sibi proxima cadunt.

139.

Sint in sphaera coelesti C , C' , C'' tria corporis coelestis loca heliocentrica, quae resp. in circulis maximis AB , $A'B'$, $A''B''$, et quidem inter A et B , A' et B' , A'' et B'' sita erunt (art. 64. III.): praeterea puncta C , C' , C'' in eodem circulo maximo iacebunt, puta in eo, quem planum orbitae in sphaera coelesti proicit. Designabimus per r , r' , r'' tres corporis coelestis distantias a Sole; per ρ , ρ' , ρ'' eiusdem distantias a terra; per R , R' , R'' terrae distantias a Sole. Porro statuimus arcus $C'C$, CC' , CC'' resp. $= 2f$, $2f'$, $2f''$, atque $r'r' \sin 2f = n$, $r'r'' \sin 2f' = n'$, $r'r' \sin 2f'' = n''$. Habemus itaque $f = f + f'$, $AC + CB = \delta$, $AC' + CB' = \delta'$, $AC'' + CB'' = \delta''$, nec non

*) Sive etiam quoties sibi opposita sunt, sed de hoc casu non loquimur, quum methodus nostra ad observationes tantum intervallum complectentes non sit extendenda.

$$\begin{aligned}\frac{\sin \delta}{r} &= \frac{\sin AC}{p} = \frac{\sin CB}{R} \\ \frac{\sin \delta'}{r'} &= \frac{\sin A'C'}{p'} = \frac{\sin C'B'}{R'} \\ \frac{\sin \delta''}{r''} &= \frac{\sin A''C''}{p''} = \frac{\sin C''B''}{R''}\end{aligned}$$

Hinc patet, simulac situs punctorum C , C' , C'' innouerit, quantitates r , r' , r'' , p , p' , p'' determinabiles fore. Iam ostendemus, quomodo ille e quantitatibus

$$\frac{n''}{n} = P, \quad 2\left(\frac{n+n''}{n''}-1\right)r^3 = Q$$

elici possit, a quibus methodum nostram proficisci iam supra declaravimus.

140.

Primo observamus, si N fuerit punctum quodeunque circuli maximi $CC'C$, distantiaeque punctorum C , C' , C'' a puncto N secundum directionem eandem numerentur, quae tendit a C ad C' , ita ut generaliter fiat

$$NC''-NC' = 2f, \quad NC'-NC = 2f', \quad NC-NC' = 2f''$$

haberi aequationem

$$0 = \sin 2f \sin NC - \sin 2f' \sin NC' + \sin 2f'' \sin NC'' \dots \dots (I.)$$

Iam supponemus, N accipi in intersectione circulorum maximorum BB^*B' , $CC'C$, quasi in nodo ascendente prioris supra posteriorem. Designemus per $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ resp. distantias punctorum C , C' , C'' , D , D' , D'' a circulo maximo BB^*B' , ab alterutra ipsius parte positive, ab altera opposita negative acceptas. Hinc manifesto $\sin \mathfrak{C}$, $\sin \mathfrak{C}'$, $\sin \mathfrak{C}''$ resp. proportionales erunt ipsis $\sin NC$, $\sin NC'$, $\sin NC''$, unde aequatio (I.) sequentem induit formam

$$0 = \sin 2f \sin \mathfrak{C} - \sin 2f' \sin \mathfrak{C}' + \sin 2f'' \sin \mathfrak{C}''$$

sive multiplicando per $rr'r''$

$$0 = nr \sin \mathfrak{C} - n'r' \sin \mathfrak{C}' + n''r'' \sin \mathfrak{C}'' \dots \dots (II.)$$

Porro patet, esse $\sin \mathfrak{C}$ ad $\sin \mathfrak{D}$, ut sinum distantiae puncti C a B ad sinum distantiae puncti D a B , utraque distantia secundum eandem directionem mensurata. Habetur itaque

$$-\sin \mathfrak{C} = \frac{\sin \mathfrak{D}' \sin CB}{\sin (AD' - \delta)}$$

prorsusque simili modo eruitur

$$-\sin \mathfrak{C} = \frac{\sin \mathfrak{D}'' \sin CB}{\sin (AD'' - \delta)}$$

$$-\sin \mathfrak{C} = \frac{\sin \mathfrak{D} \sin C'B^*}{\sin (AD - \delta' + \alpha)} = \frac{\sin \mathfrak{D}'' \sin C'B^*}{\sin (AD'' - \delta'' + \alpha)}$$

$$-\sin \mathfrak{C} = \frac{\sin \mathfrak{D} \sin C''B''}{\sin (AD - \delta'')} = \frac{\sin \mathfrak{D}'' \sin C''B''}{\sin (AD'' - \delta'')}$$

Dividendo itaque aequationem (II.) per $r'' \sin \mathfrak{C}''$, prodit

$$0 = n \cdot \frac{r \sin CB}{r' \sin C'B^*} \cdot \frac{\sin (AD'' - \delta'')}{\sin (AD - \delta)} - n' \cdot \frac{r' \sin C'B^*}{r'' \sin C''B''} \cdot \frac{\sin (AD - \delta)}{\sin (AD'' - \delta'' + \alpha)} + n''$$

Quodsi hic arcum $C'B'$ per z designamus, pro r , r' , r'' valores suos ex art. praec. substituimus, brevitatique caussa ponimus

$$[11.] \quad \frac{R \sin \delta \sin (AD'' - \delta'')}{R'' \sin \delta' \sin (AD - \delta)} = a$$

$$[12.] \quad \frac{R' \sin \delta' \sin (AD - \delta)}{R'' \sin \delta'' \sin (AD'' - \delta'')} = b$$

aequatio nostra ita se habebit

$$0 = an - b n' \frac{\sin (z - \alpha)}{\sin z} + n'' \dots \dots (III.)$$

Coefficientem b etiam per formulam sequentem computare licet, quae ex aequationibus modo allatis facile deducitur:

$$[13.] \quad a \times \frac{R' \sin \delta' \sin (AD'' - \delta'')}{R \sin \delta \sin (AD - \delta' + \alpha)} = b$$

Calculi confirmandi caussa haud inutile erit, utraque formula 12 et 13 uti. Quoties $\sin (AD'' - \delta'' + \alpha)$ maior est quam $\sin (AD - \delta' + \alpha)$, formula posterior a tabularum erroribus inevitabilibus minus afficietur, quam prior, adeoque huic praefenda erit, si forte parvula discrepantia illine explicanda in valoribus ipsius b se prodiderit; contra formulae priori magis fidendum erit, quoties $\sin (AD'' - \delta'' + \alpha)$

minor est quam $\sin(AD - \delta' + \sigma)$: si magis placet, medium idoneum inter ambos valores adoptabitur.

Calculo examinando sequentes quoque formulae inservire possunt, quarum tamen derivationem non ita difficile brevitas causa supprimimus:

$$0 = \frac{a \sin(l'' - l')}{R} - \frac{b \sin(l'' - l)}{R'} \cdot \frac{\sin(\delta' - \sigma)}{\sin \delta'} + \frac{\sin(l' - l)}{R'' d}$$

$$b = \frac{R' \sin \delta'}{R'' \sin \delta''} \cdot \frac{U \cos \delta \cos \delta''}{\sin(AD' - b) \sin \sigma}$$

ubi U exprimit quotientem $\frac{S}{\sin(\delta' - \sigma)} = \frac{T \sin(l' + \gamma')}{\cos(\delta' - \sigma)}$ (art. 138. aequ. 10.).

141.

Ex $P = \frac{w''}{n}$, atque aequatione III. art. praec. sequitur $(n + n') \frac{P+a}{P+1} = b n \frac{\sin(z - \sigma)}{\sin z}$; hinc vero et ex $Q = 2 \left(\frac{n + n''}{w} - 1 \right) r'^3$ atque

$$r' = \frac{R' \sin \delta'}{\sin z} \text{ elicitor}$$

$$\sin z + \frac{Q \sin z^4}{2 R'^3 \sin \delta'^3} = b \frac{P+1}{P+a} \sin(z - \sigma), \text{ sive}$$

$$\frac{Q \sin z^4}{2 R'^3 \sin \delta'^3} = \left(b \frac{P+1}{P+a} - \cos \sigma \right) \sin(z - \sigma) - \sin \sigma \cos(z - \sigma)$$

Statuendo itaque brevitas causa

$$[14.] \quad \frac{1}{2 R'^3 \sin \delta'^3 \sin z} = c$$

introducendoque angulum auxiliarem ω talem ut fiat

$$\tan \omega = \frac{\sin \sigma}{b \frac{P+1}{P+a} - \cos \sigma}$$

prodit aequatio (IV.)

$$c Q \sin \omega \sin z^4 = \sin(z - \omega - \sigma)$$

ex qua incognitam z eruere oportebit. Ut angulus ω commodius computetur, formulam praecedentem pro $\tan \omega$ ita exhibere conveniet

$$\tan \omega = \frac{(P+a) \tan \sigma}{P \left(\frac{b}{\cos \sigma} - 1 \right) + \left(\frac{b}{\cos \sigma} - a \right)}$$

Quamobrem statuendo

$$[15.] \quad \frac{\frac{b}{\cos \sigma} - a}{\frac{b}{\cos \sigma} - 1} = d$$

$$[16.] \quad \frac{\tan \sigma}{\frac{b}{\cos \sigma} - 1} = e$$

habebimus ad determinandum ω formulam simplicissimam

$$\tan \omega = \frac{e(P+a)}{P+d}$$

Computum quantitatum a, b, c, d, e per formulas 11...16., a solis quantitativis datis pendentem, tamquam negotium quartum consideramus. Quantitates b, c, e ipsae non erunt necessariae, verum soli ipsarum logarithmi.

Ceterum datur casus specialis, ubi haec praecepta aliqua mutatione indigent. Quoties scilicet circulus maximus BB'' cum $A'B''$ coincidit, adeoque puncta B, B'' resp. cum D', D , quantitates a, b valores infinitos nanciscerentur. Statuendo in hoc casu

$$\frac{R \sin \frac{1}{2} \sin(A'D' - \delta' + \sigma)}{R' \sin \delta' \sin(A'D' - b)} = \pi$$

habebimus loco aequationis III. hancce: $0 = \pi n - \frac{n' \sin(z - \sigma)}{\sin z}$, unde faciendo

$$\tan \omega = \frac{\pi \sin \sigma}{P + (1 - \pi \cos \sigma)}, \text{ eadem aequatio IV. elicitor.}$$

Perinde in casu speciali, ubi $\sigma = 0$, fit c infinita atque $\omega = 0$, unde factor $c \sin \omega$ in aequatione IV. indeterminatus esse videtur: nihilominus revera determinatus est, ipsiusque valor

$$= \frac{P+a}{2 R'^3 \sin \delta'^3 (b-1) (P+d)}$$

uti levis attentio docebit. In hoc itaque casu fit

$$\sin z = R' \sin \delta' \sqrt[3]{\frac{2(b-1)(P+d)}{Q(P+a)}}$$

142.

Aequatio IV., quae evoluta ad ordinem octavum ascenderet, in forma sua non mutata expeditissime tentando solvitur. Ceterum e theoria aequationum facile

ostendi potest (quod tamen fusius evolvere brevitatis causa hic supersedemus), hanc aequationem vel duas vel quatuor solutiones per valores reales admittere. In casu priori valor alter ipsius $\sin z$ positivus erit, alterum negativum reicere oportebit, quia per problematis naturam r' negativus evadere nequit. In casu posteriori inter valores ipsius $\sin z$ vel unus positivus erit, tresque reliqui negativi — ubi igitur haud ambiguum erit, quemnam adoptare oporteat — vel tres positivi cum uno negativo; in hoc casu e valoribus positivis ii quoque si qui adsunt reiici debent, ubi z maior evadit quam δ' , quoniam per aliam problematis conditionem essentialem ρ' adeoque etiam $\sin(\delta - z)$ quantitas positiva esse debet.

Quoties observationes mediocribus temporum intervallis ab invicem distant, plerumque casus postremus locum habebit, ut tres valores positivi ipsius $\sin z$ aequationi satisfaciant. Inter has solutiones praeter veram reperiri solet aliqua, ubi z parum differt a δ' , modo excessu, modo defectu: hoc phaenomenon sequenti modo explicandum est. Problematis nostri tractatio analytica ei soli conditioni superstructa est, quod tres corporis coelestis in spatio loci iacere debent in rectis, quarum situs per locum absolutum terrae positionemque observatam determinatur. Iam per ipsius rei naturam loci illi iacere quidem debent in iis rectorum partibus, unde lumen ad terram descendit: sed aequationes analyticae hanc restrictionem non agnoscunt, omniaque locorum systemata, qui quidem cum KEPLERI legibus consentiunt, perinde complecti debent, sive ab hac terrae parte in illis rectis iaceant, sive ab illa, sive denique cum ipsa terra coincident. Iam hic ultimus casus utique problemati nostro satisfaciet, quum terra ipsa ad normam illarum legum moveatur. Hinc patet, aequationes comprehendere debere solutionem, in qua puncta, C , C' , C'' cum punctis A , A' , A'' coincident (quatenus variationes minutissimas locis terrae ellipticis a perturbationibus et parallaxi inductas negligimus): aequatio itaque IV semper admittere deberet solutionem $z = \delta'$, si pro P et Q valores veri locis terrae respondentes acciperentur. Quatenus autem illis quantitibus valores tribuantur ab his non multum discrepantes (quod semper supponere licet, quoties temporum intervalla modica sunt), inter solutiones aequationis IV. necessario aliqua reperiri debet, quae proximae ad valorem $z = \delta'$ accedit.

Plerumque quidem in eo casu, ubi aequatio IV. tres solutiones per valores positivos ipsius $\sin z$ admittit, tertia ex his (praeter veram eamque de qua modo diximus) valorem ipsius z maiorem quam δ' sistet, adeoque analyticae tantum

possibilis, physice vero impossibilis erit: tunc itaque quamnam adoptare oporteat ambiguum esse nequit. Attamen contingere utique potest, ut aequatio illa duas solutiones idoneas diversas admittat, adeoque problemati nostro per duas orbitas prorsus diversas satisfacere liceat. Ceterum in tali casu orbita vera a falsa facile dignoscetur, quamprimum observationes alias magis remotas ad examen revocare licebit.

143.

Simulac angulus z erutus est, statim habetur r' per aequationem

$$r' = \frac{R' \sin \delta'}{\sin z}$$

Porro ex aequationibus $P = \frac{n''}{n}$ atque III. elicimus

$$\frac{n' r'}{n} = \frac{(P + a) R' \sin \delta'}{b \sin(z - a)}$$

$$\frac{n' r'}{n''} = \frac{1}{P} \cdot \frac{n' r'}{n}$$

Iam ut formulas, secundum quas situs punctorum C , C'' e situ puncti C' determinandus est, tali modo tractemus, ut ipsarum veritas generalis pro iis quoque casibus, quos Fig. 4. non monstrat, statim eluceat, observamus, sinum distantiae puncti C' a circulo maximo CB (positive sunt in regione superiori, negative in inferiori) aequalem fieri producto ex $\sin \epsilon''$ in sinum distantiae puncti C' a D'' secundum directionem progressivam mensurae, adeoque $= -\sin \epsilon' \sin C'D'' = -\sin \epsilon' \sin(z + A'D'' - \delta')$; perinde fit sinus distantiae puncti C'' ab eodem circulo maximo $= -\sin \epsilon' \sin C'D'$. Manifesto autem iidem sinus sunt ut $\sin CC'$ ad $\sin CC''$, sive ut $\frac{n'}{rr'}$ ad $\frac{n'}{rr''}$, sive ut $n''r$ ad $n'r'$. Statuendo itaque $C'D' = \zeta''$, habemus

$$\text{V.} \quad r' \sin \zeta'' = \frac{n' r'}{n''} \cdot \frac{\sin \epsilon''}{\sin \epsilon'} \sin(z + A'D'' - \delta')$$

Prorsus simili modo statuendo $CD' = \zeta$ eruitur

$$\text{VI.} \quad r \sin \zeta = \frac{n' r'}{n} \cdot \frac{\sin \epsilon}{\sin \epsilon'} \sin(z + A'D - \delta')$$

$$\text{VII.} \quad r \sin(\zeta + A'D'' - A'D) = r'' P \cdot \frac{\sin \epsilon}{\sin \epsilon''} \sin(\zeta'' + A'D'' - A'D)$$

Combinando aequationes V. et VI. cum sequentibus ex art. 139. transcriptis

$$\text{VIII. } r'' \sin(\zeta'' - A'D' + \delta) = R' \sin \delta$$

$$\text{IX. } r \sin(\zeta - A'D' + \delta) = R \sin \delta$$

quantitates ζ , ζ'' , r , r'' ad normam art. 78. inde derivabuntur. Qui calculus quo commodius absolvatur, formulas ipsas hac attulisse haud ingratum erit. Statuatur

$$[17.] \quad \frac{R \sin \delta}{\sin(A'D' - \delta)} = x$$

$$[18.] \quad \frac{R' \sin \delta''}{\sin(A'D' - \delta'')} = x''$$

$$[19.] \quad \frac{\cos(A'D' - \delta)}{R \sin \delta} = \lambda$$

$$[20.] \quad \frac{\cos(A'D' - \delta'')}{R' \sin \delta''} = \lambda''$$

Computus harum quantitatum, aut potius logarithmorum earum, a P et Q etiamnum independens, tamquam negotium *quintum* et ultimum in operationibus quasi praeliminaribus spectandum est, commodeque statim cum computo ipsarum a , b sive cum negotio quarto absolvitur, ubi fit $a = \frac{x}{x''}$. — Faciendo dein

$$\frac{n'r'}{n} \cdot \frac{\sin \epsilon}{\sin \epsilon'}, \sin(z + A'D - \delta) = p$$

$$\frac{n'r''}{n''} \cdot \frac{\sin \epsilon''}{\sin \epsilon'''}, \sin(z + A'D' - \delta'') = p''$$

$$x(\lambda p - 1) = q$$

$$x''(\lambda'' p'' - 1) = q''$$

eliciemus ζ et r ex $r \sin \zeta = p$, $r \cos \zeta = q$, atque ζ'' et r'' ex $r'' \sin \zeta'' = p''$, $r'' \cos \zeta'' = q''$. Ambiguitas in determinandis ζ et ζ'' hic adesse nequit, quia r et r'' necessario evadere debent quantitates positivae. Calculus perfectus per aequationem VII. si lubet confirmari poterit.

Sunt tamen duo casus, ubi aliam methodum sequi oportet. Quoties scilicet punctum D' cum B vel coïncidit vel ipsi in sphaera oppositum est, sive quoties $A'D' - \delta = 0$ vel $= 180^\circ$, aequationes VI. et IX. necessario identicae esse debent, fieretque $x = \infty$, $\lambda p - 1 = 0$, adeoque q indeterminata. In hoc casu ζ et r quidem eo quo docuimus modo determinabuntur, dein vero ζ et r e

combinatione aequationis VII. cum VI. vel IX. elicere oportebit. Formulas ipsas ex art. 78. desumendas huc transscribere supersedemus; observamus tantummodo, quod in eo quoque casu, ubi est $A'D' - \delta$ non quidem $= 0$ neque $= 180^\circ$, attamen arcus valde parvus, eandem methodum sequi praestat, quoniam tunc methodus prior praecisionem necessariam non admitteret. Et quidem adoptabitur combinatio aequationis VII. cum VI. vel cum IX., prout $\sin(A'D' - AD)$ maior vel minor est quam $-\sin(A'D'' - \delta)$.

Perinde in casu, ubi punctum D' vel ipsi oppositum, cum B'' vel coïncidit vel parum ab eodem distat, determinatio ipsarum ζ' , r'' per methodum praecedentem vel impossibilis vel parum tuta foret. Tunc itaque ζ et r quidem per illam methodum determinabuntur, dein vero ζ'' et r'' e combinatione aequationis VII. vel cum V. vel cum VIII., prout $\sin(A'D' - A'D)$ maior vel minor est quam $\sin(A'D'' - \delta'')$. Ceterum haud metuendum est, ne simul D' cum punctis B , B'' vel cum punctis oppositis coïncidat, vel parum ab ipsis distet: casum enim eum, ubi B cum B'' coïncidit, vel perparum ab eo distat, iam supra art. 138. a disquisitione nostra exclusimus.

144.

Arcubus ζ , ζ'' inventis, punctorum C , C'' positio data erit, poteritque distantia $CC'' = 2f'$ ex ζ , ζ'' et ϵ determinari. Sint u , u'' inclinationes circulorum maximorum AB , $A'B''$ ad circulum maximum CC'' (quae in Fig. 4. resp. erunt anguli $C'CD'$ et $180^\circ - CC'D''$), habebimusque aequationes sequentes, aequationibus 3...6. art. 137. prorsus analogas:

$$\sin f' \sin \frac{1}{2}(u' + u) = \sin \frac{1}{2} \epsilon \sin \frac{1}{2}(\zeta + \zeta')$$

$$\sin f' \cos \frac{1}{2}(u' + u) = \cos \frac{1}{2} \epsilon \sin \frac{1}{2}(\zeta - \zeta')$$

$$\cos f' \sin \frac{1}{2}(u' - u) = \sin \frac{1}{2} \epsilon \cos \frac{1}{2}(\zeta + \zeta')$$

$$\cos f' \cos \frac{1}{2}(u' - u) = \cos \frac{1}{2} \epsilon \cos \frac{1}{2}(\zeta - \zeta')$$

Duae priores dabunt $\frac{1}{2}(u' + u)$ et $\sin f'$, duae posteriores $\frac{1}{2}(u' - u)$ et $\cos f'$; ex $\sin f'$ et $\cos f'$ habebitur f' . Angulos $\frac{1}{2}(u' + u)$ et $\frac{1}{2}(u' - u)$, qui in ultima demum hypothesi ad determinandum situm plani orbitae adhibebuntur, in hypothesibus primis negligere licebit.

Prorsus simili modo f ex ε , OD et $C'D$, nec non f'' ex ε'' , OD' , $C'D'$ derivari possent: sed multo commodius ad hunc finem formulae sequentes adhibentur.

$$\sin 2f = r \sin 2f' \cdot \frac{n}{n' r'}$$

$$\sin 2f'' = r'' \sin 2f'' \cdot \frac{n''}{n'' r''}$$

ubi logarithmi quantitatum $\frac{n}{n' r'}$, $\frac{n''}{n'' r''}$ iam e calculis praecedentibus adsunt. Totus denique calculus confirmationem novam inde nanciscetur, quod fieri debet $2f + 2f'' = 2f'$: si qua forte differentia prodeat, nullius certe momenti esse poterit, siquidem omnes operationes quam accuratissime peractae fuerint. Interdum tamen, calculo ubique septem figuris decimalibus subducto, ad aliquot minuti secundi partes decimas assurgere poterit, quam si operae pretium videtur facillimo negotio inter $2f$ et $2f''$ ita dispertiemur, ut logarithmi sinuum aequaliter vel augeantur vel diminuantur, quo pacto aequationi $P = \frac{r \sin 2f''}{r'' \sin 2f} = \frac{n}{n''}$ omni quam tabulae permittunt praecisione satisfactum erit. Quoties f et f'' parum differunt, differentiam illam inter $2f$ et $2f''$ aequaliter distribuere sufficit.

145.

Postquam hoc modo corporis coelestis positiones in orbita determinatae sunt, duplex elementorum calculus tum e combinatione loci secundi cum tertio, tum e combinatione primi cum secundo, una cum temporum intervallis respondentibus, inchoabitur. Antequam vero haec operatio suscipiatur, ipsa temporum intervalla quadam correctione opus habent, siquidem constitutum fuerit, secundum methodum tertiam art. 118. aberrationis rationem habere. In hoc scilicet casu pro temporibus veris ficta substituenda sunt, illis resp. 493 ρ , 493 ρ' , 493 ρ'' minutis secundis anteriora. Pro computandis distantis ρ , ρ' , ρ'' habemus formulas

$$\rho = \frac{R \sin(A'D' - \zeta)}{\sin(\zeta' - A'D' + \zeta)} = \frac{r \sin(A'D' - \zeta)}{\sin \zeta}$$

$$\rho' = \frac{R' \sin(\zeta' - \zeta)}{\sin \zeta} = \frac{r' \sin(\zeta' - \zeta)}{\sin \zeta'}$$

$$\rho'' = \frac{R'' \sin(A''D'' - \zeta'')}{\sin(\zeta'' - A''D'' + \zeta'')} = \frac{r'' \sin(A''D'' - \zeta'')}{\sin \zeta''}$$

Ceterum si observationes ab initio statim per methodum primam vel secundam art. 118. ab aberratione purgatae fuissent, hicce calculus omittendus, neque adeo necessarium foret, valores distantiarum ρ , ρ' , ρ'' eruere, nisi forte ad confirmandum, an ii, quibus calculus aberrationum superstructus erat, satis exacti fuerint. Denique sponte patet, totum istum calculum tunc quoque supprimendum esse, quando aberrationem omnino negligere placuerit.

146.

Calculus elementorum, hinc ex r' , r'' , $2f$ atque temporis intervallo correcto inter observationem secundam et tertiam, cuius productum in quantitatem k (art. 1.) per θ denotamus, illinc ex r , r' , $2f''$ atque temporis intervallo inter observationem primam et secundam, cuius productum per k esto $= \theta'$, secundum methodum in art. 88...105. expositam tantummodo usque ad quantitatem illie per y denotatam producendus est, cuius valorem in combinatione priori per η , in posteriori per η'' denotabimus. Fiat deinde

$$\frac{\theta'' \eta}{\theta \eta''} = P; \quad \frac{r' r'' \eta \eta''}{r r'' \eta \eta'' \cos f \cos f''} = Q$$

patetque, si valores quantitatum P , Q , quibus totus hucusque calculus superstructus erat, ipsi veri fuerint, evadere debere $P = P$, $Q' = Q$. Vice versa facile perspicitur, si prodeat $P' = P$, $Q' = Q$, duplicem elementorum calculum, si utrumque ad finem perducatur, numeros prorsus aequales suppeditaturum esse, per quos itaque omnes tres observationes exacte representabuntur, adeoque problemati ex asse satisfiet. Quoties autem non fit $P' = P$, $Q' = Q$, accipiantur $P' - P$, $Q' - Q$ pro X et Y , siquidem P et Q pro x et y acceptae fuerint: adhuc magis commodum erit statuere $\log P = x$, $\log Q = y$, $\log P' - \log P = X$, $\log Q' - \log Q = Y$. Dein calculus cum aliis valoribus ipsarum x , y repetendus erit.

147.

Proprie quidem etiam hic, sicuti in decem methodis supra traditis, arbitrium esset, quosnam valores novos pro x et y in hypothesis secunda supponamus, si modo conditionibus generalibus supra explicatis non adversentur: attamen quum manifesto pro lucro magno habendum sit, si statim a valoribus magis exactis proficisci liceat, in methodo haec parum prudenter ageres, si valores

secundos temere quasi adoptares, quum ex ipsa rei natura facile perspiciatur, si valores primi ipsarum P , Q levibus erroribus affecti fuerint, ipsas P , Q valores multo exactiores exhibituras esse, siquidem motus heliocentricus fuerit modicus. Quamobrem semper ipsas P , Q pro valoribus secundis ipsarum P , Q adoptabimus, sive $\log P$, $\log Q$ pro valoribus secundis ipsarum x , y si $\log P$, $\log Q$ primos designare suppositi sunt.

Iam in hac hypothesis secunda, ubi omnes operationes praeliminares per formulas 1...20. exhibitae invariatae retinendae sunt, calculus prorsus simili modo repetetur. Primo scilicet determinabitur angulus ω ; dein z , r , $\frac{r'r'}{n}$, $\frac{r'r'}{n'}$, ζ , r , ζ' , r' , f , f' . E differentia plus minusve considerabili inter valores novos harum quantitatum atque primos facile aestimabitur, utrum operae pretium sit, necne, correctionem quoque temporum propter aberrationem denuo computare: in casu posteriori temporum intervalla, adeoque etiam quantitates θ et θ'' eadem manebunt ut ante. Denique ex f , r , r' ; f' , r , r' temporumque intervallis eruentur η , η'' atque hinc valores novi ipsarum P , Q , qui plerumque ab iis, quos hypothesis prima suppeditaverat, multo minus different, quam hi ipsi a valoribus primis ipsarum P , Q . Valores secundi ipsarum X , Y itaque multo minores erunt, quam primi, valoresque secundi ipsarum P , Q tamquam valores tertii ipsarum P , Q adoptabuntur, et cum his calculus denuo repetetur. Hoc igitur modo sicuti ex hypothesis secunda numeri exactiores resultaverant, quam ex prima, ita e tertia iterum exactiores resultabunt, quam e secunda, possentque valores tertii ipsarum P , Q tamquam quarti ipsarum P , Q adoptari, atque sic calculus toties repeti, usque dum ad hypothesis perveniatur, in qua X et Y pro evanescentibus habere liceret: sed quoties hypothesis tertia nondum sufficiens videatur, valores ipsarum P , Q in hypothesis quarta adoptandos secundum methodum in artt. 120. 121. explicatam e tribus primis deducere praestabit, quo pacto approximatio celerior obtinebitur, raroque opus erit, ad hypothesis quintam progredi.

148.

Quoties elementa e tribus observationibus derivanda adhuc penitus incognita sunt (cui casui methodus nostra imprimis accommodata est), in hypothesis prima ut iam monuimus pro P et Q valores approximati $\frac{\theta''}{\theta}$ et $\theta\theta''$ accipiantur, ubi θ et θ'' aliquantisper ex intervallis temporum non correctis derivandae sunt. Quo-

rum ratione ad intervalla correctae per $\mu:1$ et $\mu':1$ resp. expressa, habebimus in hypothesis prima

$$X = \log \mu - \log \mu' + \log \eta - \log \eta''$$

$$Y = \log \mu + \log \mu' - \log \eta - \log \eta'' + \text{Comp. log cos } f + \text{Comp. log cos } f' \\ + \text{Comp. log cos } f'' + 2 \log r' - \log r - \log r''$$

Logarithmi quantitatum μ , μ' respectu partium reliquarum nullius sunt momenti; $\log \eta$ et $\log \eta''$, qui ambo sunt positivi, in X aliquatenus se invicem destruunt, praesertim quoties temporum intervalla fere aequalia sunt, unde X valorem exiguum modo positivum modo negativum obtinet; contra in Y e partibus negativis $\log \eta$ et $\log \eta''$ compensatio quidem aliqua partium positivarum $\text{Comp. log cos } f$, $\text{Comp. log cos } f'$, $\text{Comp. log cos } f''$ oritur, sed minus perfecta, plerumque enim hae illas notabiliter superant. De signo ipsius $\log \frac{r'r'}{r''}$ in genere nihil determinare licet.

Iam quoties motus heliocentricus inter observationes modicus est, raro opus erit, usque ad hypothesis quartam progredi: plerumque tertia, saepius iam secunda praecisionem sufficientem praestabit, quin adeo interdum numeris ex ipsa hypothesis prima resultantibus acquiescere licebit. Inuvabit semper, ad maiorem minoremve praecisionis gradum, qua observationes gaudent, respicere: ingratum enim foret opus, in calculo praecisionem affectare centies milliesve maiorem ea quam observationes permittunt. In his vero rebus iudicium per exercitationem frequentem practicum melius quam per praecepta acuitur, peritque facile acquirere facultatem quandam, ubi consistere conveniat recte diiudicandi.

149.

In ultima demum hypothesis elementa ipsa calculabuntur, vel ex f , r , r' , vel ex f' , r , r' , perducendo scilicet ad finem calculum alterutrum, quem in hypothesis antecedentibus tantummodo usque ad η vel η'' prosequi oportuerat: si utrumque perficere placuerit, harmonia numerorum resultantium novam totius laboris confirmationem suppeditabit. Attamen praestat, quam primum f , f' , f'' erutae sunt, elementa e sola combinatione loci primi cum tertio derivare, puta ex f , r , r' atque temporis intervallo, tandemque ad maiorem calculi certitudinem locum medium in orbita secundum elementa inventa determinare.

Hoc itaque modo sectionis conicae dimensiones innotescunt, puta excentricitas, semiaxis maior sive semiparameter, positio perihelii respectu locorum heliocentricorum C, C', C'' , motus medius, atque anomalia media pro epocha arbitraria, siquidem orbita elliptica est, vel tempus transitus per perihelium, si orbita sit hyperbolica vel parabolica. Superest itaque tantummodo, ut positio locorum heliocentricorum in orbita respectu nodi ascendentis, positio huius nodi respectu puncti aequinoctialis, atque inclinatio orbitae ad eclipticam (vel aequatorem) determinentur. Haec omnia per solutionem unius trianguli sphaerici efficere licet. Sit Ω longitudo nodi ascendentis; i inclinatio orbitae; g et g'' argumenta latitudinis in observatione prima et tertia; denique $l - \Omega = h$, $l' - \Omega = h'$. Exprimente iam in figura quarta Ω nodum ascendentem, trianguli ΩAC latera erunt $AD = \zeta$, g, h , angulique his resp. oppositi $i, 180^\circ - \gamma, u$. Habebimus itaque

$$\sin \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (g + h) = \sin \frac{1}{2} (AD - \zeta) \sin \frac{1}{2} (\gamma + u)$$

$$\sin \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (g + h) = \cos \frac{1}{2} (AD - \zeta) \sin \frac{1}{2} (\gamma - u)$$

$$\cos \frac{1}{2} i \sin \frac{1}{2} (g - h) = \sin \frac{1}{2} (AD - \zeta) \cos \frac{1}{2} (\gamma + u)$$

$$\cos \frac{1}{2} i \cos \frac{1}{2} (g - h) = \cos \frac{1}{2} (AD - \zeta) \cos \frac{1}{2} (\gamma - u)$$

Duae primae aequationes dabunt $\frac{1}{2}(g + h)$ et $\sin \frac{1}{2} i$, duae reliquae $\frac{1}{2}(g - h)$ et $\cos \frac{1}{2} i$; ex g innotescet situs perihelii respectu nodi ascendentis, ex h situs nodi in ecliptica; denique innotescet i , sinu et cosinu se mutuo confirmantibus. Ad eundem scopum pervenire possumus adiumento trianguli $\Omega A' C'$, ubi tantummodo in formulis praecedentibus characteres $g, h, A, \zeta, \gamma, u$ in $g', h', A', \zeta', \gamma', u'$ mutare oportet. Ut toti labori adhuc alia confirmatio concilietur, haud abs re erit, calculum utroque modo perficere: unde si quae levisculae differentiae inter valores ipsius i, Ω atque longitudinis perihelii in orbita prodeunt, valores medios adoptare conveniet. Raro tamen hae differentiae ad $0''1$ vel $0''2$ ascendent, siquidem omnes calculi septem figuris decimalibus accurate elaborati fuerant.

Ceterum quoties loco eclipticae aequator tanquam planum fundamentale adoptatum est, nulla hinc in calculo differentia orietur, nisi quod loco punctorum A, A'' intersectiones aequatoris cum circulis maximis $AB, A'B''$ accipiendae sunt.

150.

Progredimur iam ad illustrationem huius methodi per aliquot exempla copiose explicanda, quae simul evidentissime ostendent, quam late pateat, et quam commode et expedite semper ad finem exoptatum perducatur *).

Exemplum *primum* planeta novus Iuno nobis suppeditabit, ad quem finem observationes sequentes Grenovici factas et a cel. MASKELYNE nobiscum communicatas eligimus.

Temp. med. Grenov.				Ascens. recta app.	Decl. austr. app.
1804	Oct. 5.	10 ^h 51 ^m 6 ^s		357° 10' 22" 35	6° 40' 8"
	17	9 58 10		355 43 45,30	8 47 25
	27	9 16 41		355 11 10,95	10 2 28

E tabulis Solaribus pro iisdem temporibus invenitur

	longit. Solis ab aequin. appar.	mutatio	distantia a terra	latitudo Solis	obliquitas appar. eclipticae
Oct. 5	192° 28' 53" 72	+ 15" 43	0,9988839	— 0° 49'	23° 27' 59" 48
17	204 20 21,54	+ 15,51	0,9953968	+ 0,79	59,26
27	214 16 52,21	+ 15,60	0,9928340	— 0,15	59,06

Calculum ita adstruemus, ac si orbita adhuc penitus incognita esset: quamobrem loca Iunonis a parallaxi liberare non licebit, sed hanc ad loca terrae transferre oportebit. Primo itaque ipsa loca observata ab aequatore ad eclipticam reducimus, adhibita obliquitate apparente, unde prodit:

	Longit. appar. Iunonis	Latit. appar. Iunonis
Oct. 5	354° 44' 54" 27	— 4° 59' 31" 59
17	352 34 44,51	— 6 21 56,25
27	351 34 51,57	— 7 17 52,70

Cum hoc calculo statim iungimus determinationem longitudinis et latitudinis ipsius zenith loci observationis in tribus observationibus: rectascensio quidem cum

*) Male loquuntur, qui methodum aliquam alia *magis minusve exactam* pronunciant. Ea enim sola methodus problema solvisse censi potest, per quam quemvis praecisionis gradum attingere saltem in potestate est. Quamobrem methodus alia alii eo tantum nomine palmam praeripit, quod *eundem* praecisionis gradum per aliam celerius minorique labore, per aliam tardius graviorque opera assequi licet.

rectascensione Iunonis convenit (quod observationes in ipso meridiano sunt factae),
declinatio autem aequalis est altitudini poli = $51^{\circ}28'39''$. Ita obtinemus

	Long. ipsius zenith	latitudo
Oct. 5	$24^{\circ}29'$	$46^{\circ}53'$
17	$23^{\circ}25'$	$47^{\circ}24'$
27	$23^{\circ}1'$	$47^{\circ}36'$

Iam ad normam praeceptorum in art. 72. traditorum determinabuntur terrae loci
ficti in ipso plano eclipticae, in quibus corpus coeleste perinde apparuisset, atque
in locis veris observationum. Hoc modo prodit, statuendo parallaxin Solis me-
diam = $8''6$

	Reductio longit.	Reductio distantiae	Reductio temporis
Oct. 5	$-22^{\circ}39'$	$+0,0003856$	$-0^{\circ}19'$
17	$-27,21$	$+0,0002329$	$-0,12$
27	$-35,82$	$+0,0002085$	$-0,12$

Reductio temporis ideo tantum adiecta est, ut appareat, eam omnino insensibili-
lem esse.

Deinde omnes longitudes tum planetae tum terrae reducendae sunt ad
aequinoctium vernale medium pro aliqua epocha, pro qua adoptabimus initium
anni 1805; subducta itaque nutatione adhuc adicienda est praecessio, quae pro
tribus observationibus resp. est $11^{\circ}87'$, $10^{\circ}23'$, $8^{\circ}86'$, ita ut pro observatione
prima addere oporteat $-3^{\circ}56'$, pro secunda $-5^{\circ}28'$, pro tertia $-6^{\circ}74'$.

Denique longitudes et latitudes Iunonis ab aberratione fixarum purgan-
dae sunt; sic per regulas notas invenitur, a longitudinibus resp. subtrahi debere
 $19^{\circ}12'$, $17^{\circ}11'$, $14^{\circ}52'$, latitudinibus vero addi $0^{\circ}53'$, $1^{\circ}18'$, $1^{\circ}75'$, per quam
additionem valores absoluti diminutionem patientur, quoniam latitudes australes
tamquam negativae spectantur.

151.

Omnibus hisce reductionibus rite applicatis, vera problematis data ita se
habent:

Observationum tempora ad meri- dianum Parisinum reducta. . .	Oct. 5, 458644	17, 421885	27, 393077
Iunonis longitudes $\alpha, \alpha', \alpha''$. . .	$354^{\circ}44'31''60$	$352^{\circ}34'22''12$	$351^{\circ}34'30''01$
latitudes $\delta, \delta', \delta''$	$-4^{\circ}59'31,06$	$-6^{\circ}21'55,07$	$-7^{\circ}17'50,95$
longitudes terrae l, l', l''	$12^{\circ}28'27,76$	$24^{\circ}19'49,05$	$34^{\circ}16'9,65$
logarithmi distantiarum R, R', R''	9,9996826	9,9980979	9,9969678

Hinc calculi art. 136. 137. numeros sequentes producant

$\gamma, \gamma', \gamma''$	$196^{\circ}0'8,36$	$191^{\circ}58'0,33$	$190^{\circ}41'46,17$
$\delta, \delta', \delta''$	$18^{\circ}23'59,20$	$32^{\circ}19'24,93$	$43^{\circ}11'42,05$
logarithmi sinuum	9,4991995	9,7281105	9,8353631
AD, AD', AD''	$232^{\circ}6'26,44$	$213^{\circ}12'29,82$	$209^{\circ}43'7,47$
AD, AD', AD''	$241^{\circ}51'15,22$	$234^{\circ}27'0,90$	$221^{\circ}13'57,87$
$\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$	$2^{\circ}19'34,00$	$7^{\circ}13'37,70$	$4^{\circ}55'46,19$
logarithmi sinuum	8,6083885	9,0996915	8,9341440
$\log \sin \frac{1}{2} \varepsilon$		8,7995259	
$\log \cos \frac{1}{2} \varepsilon$		9,9991357	

Porro secundum art. 138. habemus

$\log \tan \delta$	8,9412494 n	$\log \tan \delta''$	9,1074080 n
$\log \sin(\alpha - l)$	9,7332391 n	$\log \sin(\alpha - l')$	9,6935181 n
$\log \cos(\alpha - l)$	9,9247904	$\log \cos(\alpha - l')$	9,9393180

Hinc

$\log(\tan \delta \cos(\alpha'' - l) - \tan \delta' \cos(\alpha - l)) = \log T \sin t$. . .	8,5786513
$\log \sin(\alpha'' - \alpha) = \log T \cos t$	8,7423191 n
Hinc t	$145^{\circ}32'57,78$
$t + \gamma$	$337^{\circ}30'58,11$
$\log T$	8,8260683
$\log \sin(t + \gamma)$	9,5825441 n

Denique

$\log(\tan \delta \sin(\alpha'' - l) - \tan \delta' \sin(\alpha - l)) = \log S$	8,2033319 n
$\log T \sin(t + \gamma)$	8,4086124 n
unde $\log \tan(\delta'' - \sigma)$	9,7947195
$\delta'' - \sigma = 31^{\circ}56'11,81$, adeoque $\sigma = 0^{\circ}23'13,12$.	

Secundum art. 140. fit

$A'D' - \delta''$	$= 191^{\circ} 15' 18'' 85$	$\log \sin . .$	$9,2904352n$	$\log \cos . .$	$9,9915661n$
$A'D' - \delta$	$= 194\ 48\ 30,62$	" "	$9,4975427n$	" "	$9,9853301n$
$A'D - \delta''$	$= 198\ 39\ 33,17$	" "	$9,5050667n$		
$A'D - \delta' + \sigma$	$= 200\ 10\ 14,63$	" "	$9,5375909n$		
$A'D'' - \delta$	$= 191\ 19\ 8,27$	" "	$9,2928554n$		
$A'D'' - \delta' + \sigma$	$= 189\ 17\ 46,06$	" "	$9,2082723n$		

Hinc sequitur

$$\log a 9,5494437, \quad a = +0,3543592$$

$$\log b 9,8613533$$

Formula 13. produceret $\log b = 9,8613531$, sed valorem illum praeferimus, quoniam $\sin(A'D - \delta' + \sigma)$ maior est quam $\sin(A'D'' - \delta' + \sigma)$.

Porro fit per art. 141.

$$3 \log R' \sin \delta' . . . 9,1786252$$

$$\log 2 0,3010390$$

$$\log \sin \sigma 7,8295601$$

$$7,3092153 \quad \text{adeoque} \quad \log c = 2,6907847.$$

$$\log b 9,8613533$$

$$\log \cos \sigma 9,9999901$$

$$9,8613632, \quad \text{unde} \quad \frac{b}{\cos \sigma} = 0,7267135.$$

Hinc eruitur

$$d = -1,3625052$$

$$\log e = 8,3929518n$$

Denique per formulas art. 143. eruitur

$$\log x 0,0913394n$$

$$\log x'' 0,5418957n$$

$$\log \lambda 0,4864480n$$

$$\log \lambda'' 0,1592352n$$

152.

Calculus praeliminaribus hoc modo absolutis, ad hypothesin primam transimus. Intervallum temporis (non correctum) inter observationem secundam et tertiam est dierum 9,971192, inter primam et secundam 11,963241. Logarithmi horum numerorum sunt 0,9987471 et 1,0778489, unde $\log b = 9,2343285$, $\log b' = 9,3134303$. Statuimus itaque ad *hypothesin primam*

$$x = \log P = 0,0791018$$

$$y = \log Q = 8,5477588$$

Hinc fit

$$P = 1,1997804, \quad P + a = 1,5541396, \quad P + d = -0,1627248$$

$$\log e 8,3929518n$$

$$\log(P + a) . . . 0,1914900$$

$$C \log(P + d) . . . 0,7885463n$$

$$\log \tan \omega . . . 9,3729881, \quad \text{unde} \quad \omega = +13^{\circ} 16' 51'' 89, \quad \omega + \sigma = +13^{\circ} 40' 5'' 01.$$

$$\log Q 8,5477588$$

$$\log c 2,6907847$$

$$\log \sin \omega 9,3612147$$

$$\log Q c \sin \omega . . . 0,5997582$$

Aequationi $Qc \sin \omega \sin z' = \sin(z - 13^{\circ} 40' 5'' 01)$ paucis tentaminibus factis satisfieri invenitur per valorem $z = 14^{\circ} 35' 4'' 90$, unde fit $\log \sin z = 9,4010744$, $\log r' = 0,3251340$. Aequatio illa praeter hanc solutionem tres alias admittit, puta

$$z = 32^{\circ} 2' 28''$$

$$z = 137^{\circ} 27' 59''$$

$$z = 193^{\circ} 4' 18''$$

Tertiam reicere oportet, quod $\sin z$ negativus evadit; secundam, quod z maior fit quam δ ; prima respondet approximationi ad orbitam terrae, de qua in art. 142. loquuti sumus.

Porro habemus secundum art. 143.

$$\begin{aligned}\log \frac{R \sin \delta'}{b} & \dots\dots\dots 9,5648551 \\ \log(P+a) & \dots\dots\dots 0,1914900 \\ C.\log \sin(z-\sigma) & \dots\dots\dots 0,6103578 \\ \log \frac{n'r'}{n} & \dots\dots\dots 0,6667029 \\ \log P' & \dots\dots\dots 0,0791018 \\ \log \frac{n'r'}{n''} & \dots\dots\dots 0,5876011\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z+AD-\delta' &= z+199^{\circ}47'15'' = 214^{\circ}22'6''41; \log \sin = 9,7516736 n \\ z+AD'-\delta &= z+188^{\circ}54'32,94'' = 203^{\circ}29'37,84''; \log \sin = 9,6005923 n\end{aligned}$$

Hinc fit

$$\log p = 9,9270735 n \quad \log p'' = 0,0226459 n$$

ac dein

$$\log q = 0,2930977 n \quad \log q'' = 0,2580086 n$$

unde prodit

$$\begin{aligned}\zeta &= 203^{\circ}17'31''22 & \log r &= 0,3300178 \\ \zeta'' &= 210^{\circ}10'58,88 & \log r'' &= 0,3212819\end{aligned}$$

Denique per art. 144. obtinemus

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(u''+u) &= 205^{\circ}18'10''53 \\ \frac{1}{2}(u'-u) &= -3^{\circ}14'2,02 \\ f' &= 3^{\circ}48'14,66 \\ \log \sin 2f'' &\dots\dots\dots 9,1218791 & \log \sin 2f' &\dots\dots\dots 9,1218791 \\ \log r &\dots\dots\dots 0,3300178 & \log r'' &\dots\dots\dots 0,3212819 \\ C.\log \frac{n'r'}{n} &\dots\dots\dots 9,3332971 & C.\log \frac{n'r'}{n''} &\dots\dots\dots 9,4123989 \\ \log \sin 2f &\dots\dots\dots 8,7851940 & \log \sin 2f'' &\dots\dots\dots 8,8555599 \\ 2f &= 3^{\circ}29'46''03 & 2f'' &= 4^{\circ}6'43''28\end{aligned}$$

Aggregatum $2f+2f''$ hic a $2f'$ tantummodo $0^{\circ}01$ differt.

Iam ut tempora propter aberrationem corrigantur, distantias ρ, ρ', ρ'' per formulas art. 145. computare, ac dein per ipsas tempus 493^s vel $0^{\circ}005706$ multiplicare oportet. Ecce calculum

$$\begin{aligned}\log r &\dots\dots\dots 0,33002 & \log r' &\dots\dots\dots 0,32513 & \log r'' &\dots\dots\dots 0,32128 \\ \log \sin(AD-\zeta) &\dots\dots\dots 9,23606 & \log \sin(\delta'-z) &\dots\dots\dots 9,48384 & \log \sin(AD'-\zeta) &\dots\dots\dots 9,61384 \\ C.\log \sin \delta &\dots\dots\dots 0,50080 & C.\log \sin \delta' &\dots\dots\dots 0,27189 & C.\log \sin \delta'' &\dots\dots\dots 0,16464 \\ \log \rho &\dots\dots\dots 0,06688 & \log \rho' &\dots\dots\dots 0,08086 & \log \rho'' &\dots\dots\dots 0,09976 \\ \log \text{const.} &\dots\dots\dots 7,75633 & & & & 7,75633 \\ \log \text{reductionis} &\dots\dots\dots 7,82321 & & & & 7,83719 \\ \text{reductio} &= 0,006656 & & & & 0,006874 & & 0,007179\end{aligned}$$

Observationum	Tempora correcta	Intervalla	Logarithmi
I.	Oct. 5,451988		
II.	17,415011	11 ^h 963023	1,0778409
III.	27,385898	9,970887	0,9987339

Fiunt itaque logarithmi quantitatum θ, θ'' correcti $9,2343153$ et $9,3134223$. Incipiendo iam determinationem elementorum ex f, r, r', θ prodit $\log \eta = 0,0002285$, perinde ex f', r, r', θ'' fit $\log \eta' = 0,0003191$. Hunc calculum in Libri primi Sect. III. copiose explicatum hic apponere supersedemus.

Tandem habemus per art. 146.

$$\begin{aligned}\log \theta &\dots\dots\dots 9,3134223 & 2 \log r' &\dots\dots\dots 0,6502680 \\ C.\log \theta &\dots\dots\dots 0,7656847 & C.\log r r'' &\dots\dots\dots 9,3487003 \\ \log \eta &\dots\dots\dots 0,0002285 & \log \theta \theta'' &\dots\dots\dots 8,5477376 \\ C.\log \eta &\dots\dots\dots 9,9996809 & C.\log \eta \eta' &\dots\dots\dots 9,9994524 \\ \log P' &\dots\dots\dots 0,0790164 & C.\log \cos f &\dots\dots\dots 0,0002022 \\ & & C.\log \cos f' &\dots\dots\dots 0,0009579 \\ & & C.\log \cos f'' &\dots\dots\dots 0,0002797 \\ & & \log Q' &\dots\dots\dots 8,5475981\end{aligned}$$

E prima itaque hypothesis resultat $X = -0,0000854$, $Y = -0,0001607$.

153.

In hypothesis secunda ipsis P, Q eos ipsos valores tribuimus, quos in prima pro P', Q' invenimus. Statuamus itaque

$$\begin{aligned}x &= \log P = 0,0790164 \\ y &= \log Q = 8,5475981\end{aligned}$$

Quum calculus hic prorsus eodem modo tractandus sit, ut in hypothesi prima, praecipua eius momenta hic apposuisse sufficiet:

ω	13° 15' 38" 13	ζ''	210° 8' 24" 98
$\omega + \sigma$	13 38 51,25	$\log r$	0,3307676
$\log Qe \sin \omega$	0,5989389	$\log r''$	0,3222280
z	14 33 19,00	$\frac{1}{2}(u'' + u)$	205 22 15,58
$\log r'$	0,3259918	$\frac{1}{2}(u'' - u)$	-3 14 4,79
$\log \frac{u'r'}{n}$	0,6675193	$2f''$	7 34 53,32
$\log \frac{u'r'}{n''}$	0,5885029	$2f$	3 29 0,18
ζ	203 16 38,16	$2f''$	4 5 53,12

Reductiones temporum propter aberrationem denuo computare operae haud pretium esset, vix enim 1" ab iis quas in hypothesi prima eruiamus differunt.

Calculi ultiores praebent $\log \gamma = 0,0002270$, $\log \gamma' = 0,0003173$, unde deducitur

$$\log P' = 0,0790167, \quad X = +0,0000003$$

$$\log Q' = 8,5476110, \quad Y = +0,0000129$$

Hinc patet, quanto adhuc magis exacta sit hypothesis secunda quam prima.

154.

Ne quidquam desiderandum relinquatur, adhuc *tertiam hypothesin* ex-truemus, ubi rursus valores ipsarum P' , Q' in hypothesi secunda erutos tamquam valores ipsarum P , Q adoptabimus. Statuendo itaque

$$x = \log P = 0,0790167$$

$$y = \log Q = 8,5476110$$

praecipua calculi momenta haec inveniuntur:

ω	13° 15' 38" 39	ζ''	210° 8' 25" 65
$\omega + \sigma$	13 38 51,51	$\log r$	0,3307610
$\log Qe \sin \omega$	0,5989542	$\log r''$	0,3222239
z	14 33 19,50	$\frac{1}{2}(u'' + u)$	205 22 14,57
$\log r'$	0,3259878	$\frac{1}{2}(u'' - u)$	-3 14 4,78
$\log \frac{u'r'}{n}$	0,6675154	$2f''$	7 34 53,73
$\log \frac{u'r'}{n''}$	0,5884987	$2f$	3 29 0,39
ζ	203 16 38,41	$2f''$	4 5 53,34

Omnes hi numeri ab iis quos hypothesis secunda suppeditaverat tam parum differunt, ut certo concludere liceat, hypothesin tertiam nulla amplius correctione indigere *). Progredi itaque licet ad ipsam elementorum determinationem ex $2f$, r , r'' , θ , quam huc transcribere supersedemus, quum iam supra art. 97. exempli loco in extenso allata sit. Nihil itaque superest, nisi ut positionem plani orbitae ad normam art. 149. computemus, epochamque ad initium anni 1805 transferamus. Calculus ille superstruendus est numeris sequentibus:

$$AD' - \zeta'' = 9^{\circ} 55' 51'' 41$$

$$\frac{1}{2}(\gamma + u) = 202 18 13,555$$

$$\frac{1}{2}(\gamma - u) = -6 18 5,495$$

unde derivamus

$$\frac{1}{2}(g + h) = 196^{\circ} 43' 14'' 62$$

$$\frac{1}{2}(g - h) = -4 37 24,41$$

$$\frac{1}{2}i = 6 33 12,05$$

Fit igitur $h = 201^{\circ} 20' 39'' 03$, adeoque $\Omega = l - h = 171^{\circ} 7' 48'' 73$; porro $g = 192^{\circ} 5' 50'' 21$, et proin, quum anomalia vera pro observatione prima in art. 97. inventa sit $= 310^{\circ} 55' 29'' 64$, distantia perihelii a nodo ascendente in orbita $= 241^{\circ} 10' 20'' 57$, longitudoque perihelii $= 52^{\circ} 18' 9'' 30$; denique inclinatio orbitae $= 13^{\circ} 6' 44'' 10$. — Si ad eundem calculum a loco tertio proficisci malumus, habemus

$$AD' - \zeta'' = 24^{\circ} 18' 35'' 25$$

$$\frac{1}{2}(\gamma + u) = 196 24 54,98$$

$$\frac{1}{2}(\gamma - u) = -5 43 14,81$$

Hinc elicitur

$$\frac{1}{2}(g + h) = 211^{\circ} 24' 32'' 45$$

$$\frac{1}{2}(g - h) = -11 43 48,48$$

$$\frac{1}{2}i = 6 33 22,05$$

atque hinc longitudo nodi ascendentis $= l'' - h'' = 171^{\circ} 7' 48'' 72$, longitudo perihelii $= 52^{\circ} 18' 9'' 30$, inclinatio orbitae $= 13^{\circ} 6' 44'' 10$, prorsus eadem ut ante.

*) Si calculus perinde ut in hypothesibus antecessibus ad finem perduceretur, prodiret $X = 0$, $Y = +0,0000003$, qui valor tamquam evanescens considerandus est, et vix supra incertitudinem figurae decimali ultimae semper inhaerentem exurgit.

Intervallum temporis ab observatione ultima usque ad initium anni 1805 et dierum 64,614102; cui respondet motus heliocentricus medius 53293°66 = 14°48'13"66; hinc fit epocha anomaliae mediae pro initio anni 1805 in meridiano Parisino = 349°34'12"38, atque epocha longitudinis mediae = 41°52'21"68.

155.

Quo clarius elucescat, quanta praecisione elementa inventa gaudeant, locum medium ex ipsis computabimus. Pro Oct. 17,415011 anomaliam media invenitur = 332°28'54"77; hinc vera 315°1'23"02 atque $\log r' = 0,3259877$ (vid. exempla art. 13. 14.); illa aequalis esse deberet anomaliae verae in observatione prima auctae angulo $2f''$, vel anomaliae verae in observatione tertia diminutae angulo $2f$, i. e. = 315°1'22"98; logarithmus radii vectoris vero = 0,3259878; differentiae pro nihilo habendae sunt. Si calculus pro observatione media usque ad locum geocentricum continuatur, numeri resultant ab observatione paucis tantum minuti secundi partibus centesimis deviantes (art. 63.), quales differentiae ab erroribus inevitabilibus e tabularum praecisione limitata oriundis quasi absorbentur.

Exemplum praecedens summa praecisione ideo tractavimus, ut appareat, quam facile per methodum nostram solutio quam accuratissima obtineri possit. In ipsa praxi raro opus erit, hunc typum aequae anxie imitari: plerumque sufficit, sex figuras decimales ubique adhibere, et in exemplo nostro secunda iam hypothesis praecisionem haud minorem, primaque praecisionem abunde sufficientem suppeditavisset. Haud ingratis fore lectoribus censemus comparisonem elementorum ex hypothesis tertia erutorum cum iis, quae prodeunt, si hypothesis secunda vel adeo prima perinde ad eundem scopum adhibitae fuissent. Haec tria elementorum systemata in schemate sequente exhibemus:

	ex hypothesis III.	ex hypothesis II.	ex hypothesis I.
Epocha longit. med. 1805	41°52'21"68	41°52'18"40	42°12'37"83
Motus medius diurnus	824°7989	824°7983	823°5025
Perihelium	52 18 9,30	52 18 6,66	52 41 9,81
φ	14 12 1,87	14 11 59,94	14 24 27,49
Logar. semiaxis maioris	0,4224389	0,4224392	0,4228944
Nodus ascendens	171 7 48,73	171 7 49,15	171 5 48,86
Inclinatio orbitae	13 6 44,10	13 6 45,12	15 2 37,50

Computando locum heliocentricum in orbita pro observatione media per secundum elementorum systema, invenitur error logarithmi radii vectoris = 0, error longitudinis in orbita = 0"03; computando vero istum locum per systema ex hypothesis prima derivatum prodit error logarithmi radii vectoris = 0,0000002, error longitudinis in orbita = 1"31. Continuando vero calculum usque ad locum geocentricum invenitur:

	ex hypothesis II.	ex hypothesis I.
Longitudo geocentrica	352°34'22"26	352°34'19"97
Error	0,14	2,15
Latitudo geocentrica	6 21 55,06	6 21 54,47
Error	0,01	0,60

156.

Exemplum secundum a Pallade sumemus, cuius observationes sequentes Mediolani factus e Commercio literario clar. DE ZACH, Vol. XIV. pag. 90 excerpimus:

Tempus medium Mediol.	Asc. recta app.	Declin. app.
1805 Nov. 5. 14 ^h 14 ^m 4"	78°20'37"8	27°16'56"7 Austr.
Dec. 6. 11 51 27	73 8 48,8	32 52 44,3
1806 Ian. 15. 8 50 36	67 14 11,1	28 38 8,1

Loco eclipticae hic aequatorem tanquam planum fundamentale accipimus, calculoque ita defungemur, ac si orbita penitus adhuc incognita esset. Primo e tabulis Solis pro temporibus propositis sequentia petimus:

	Longitudo Solis ab aequin. med.	Distantia a terra	Latitudo Solis
Nov. 5	223°14' 7"61	0,9904311	+ 0°59
Dec. 6	254 28 42,59	0,9846753	+ 0,12
Ian. 15	295 5 47,62	0,9838153	— 0,19

Longitudines Solis, adiectis praecessionibus + 7"59, + 3"36, — 2"11 ad initium anni 1806 reducimus, ac dein, adhibita obliquitate media 23°27'53"53
G. THE M.

latitudinumque ratione rite habita, ascensiones rectas et declinationes inde deducimus. Ita invenimus

	Ascensio recta Solis	Declinatio Solis
Nov. 5	220° 46' 44" 65	15° 49' 43" 94 Austr.
Dec. 6	253 9 23,26	22 33 39,45
Ian. 15	297 2 51,11	21 8 12,98

Hae positiones ad centrum terrae referuntur, adeoque parallaxi adiecta ad locum observationis reducendae sunt, quum positiones planetae a parallaxi purgare non liceat. Rectascensiones ipsius zenith in hoc calculo adhibendae cum rectascensionibus planetae conveniunt (quoniam observationes in ipso meridiano sunt institutae), declinatio vero ubique erit altitudo poli = 45° 28'. Hinc erunt numeri sequentes:

	Asc. recta terrae	Declinatio terrae	Log. dist. a Sole
Nov. 5	40° 46' 48" 51	15° 49' 48" 59 Bor.	9,9958375
Dec. 6	73 9 23,26	22 33 42,83	9,9933099
Ian. 15	117 2 46,09	21 8 17,29	9,9929259

Loca observata Palladis a nutatione et aberratione fixarum liberanda, ac dein adiecta praecessione ad initium anni 1806 reducenda sunt. Hisce titulis sequentes correctiones positionibus observatis applicare oportebit:

	Observatio I.		Observatio II.		Observatio III.	
	Asc. r.	Decl.	Asc. r.	Decl.	Asc. r.	Decl.
Nutatio	-12' 86	- 3' 08	-13' 68	- 3' 42	-13' 06	- 3' 75
Aberratio	-18,13	- 9,89	-21,51	- 1,63	-15,60	+ 9,76
Praecessio	+ 5,43	+ 0,62	+ 2,55	+ 0,39	- 1,51	- 0,33
Summa	-25,56	-12,35	-32,64	- 4,66	-30,17	+ 5,68

Hinc prodeunt positiones sequentes Palladis, calculo substruendae:

T. m. Parisinum	Asc. recta	Declinatio
Nov. 5,574074	78° 20' 12" 24	-27° 17' 9" 05
36,475035	73 8 16,16	-32 52 48,96
76,349444	67 13 40,93	-28 38 2,42

157.

Primo nunc situm circularum maximorum a locis heliocentricis terrae ad locos geocentricos planetae ductorum determinabimus. Intersectionibus horum circularum cum aequatore, aut si mavis illorum nodis ascendentibus, characteres $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$ adscriptos concipimus, distantiasque punctorum B , B' , B'' ab his punctis per Δ , Δ' , Δ'' designamus. In maiori operationum parte pro A , A' , A'' iam $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, et pro δ , δ' , δ'' iam Δ , Δ' , Δ'' substituere oportebit; ubi vero A , A' , A'' , δ , δ' , δ'' retinere oporteat, lector attentus vel nobis non momentibus facile intelliget.

Calculo facto iam invenimus

Ascens. recta punctorum			
$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$	233° 54' 57" 10	253° 8' 57" 01	276° 40' 25" 87
γ , γ' , γ''	51 17 15,74	90 1 3,19	131 59 58,03
Δ , Δ' , Δ''	215 58 49,27	212 52 48,96	220 9 12,96
δ , δ' , δ''	56 26 34,19	55 26 31,79	69 10 57,84
$\mathcal{A}'D$, $\mathcal{A}D'$, $\mathcal{A}D''$	23 54 52,13	30 18 3,25	29 8 43,32
$\mathcal{A}''D$, $\mathcal{A}''D'$, $\mathcal{A}''D''$. . .	33 3 26,35	31 59 21,14	22 20 6,91
ϵ , ϵ' , ϵ''	47 1 54,69	89 34 57,17	42 33 41,17
logarithmi sinuum . . .	9,8643525	9,9999885	9,8301910
log sin $\frac{1}{2}\epsilon$		9,8478971	
log cos $\frac{1}{2}\epsilon$		9,8510614	

In calculo art. 138. pro l' ascensio recta puncti $\mathcal{A}'$ adhibebitur. Sic invenitur

$$\log T \sin t \dots\dots 8,4868236n$$

$$\log T \cos t \dots\dots 9,2848162n$$

Hinc $t = 189^\circ 2' 48'' 83$, $\log T = 9,2902527$; porro $t + \gamma' = 279^\circ 3' 52'' 02$,

$$\log S \dots\dots 9,0110566n$$

$$\log T \sin(t + \gamma') \dots\dots 9,2847950n$$

unde $\Delta' - \sigma = 208^\circ 1' 55'' 64$, atque $\sigma = 4^\circ 50' 53'' 32$.

In formulis art. 140. pro α , δ , et $\frac{b}{a}$ ipsos $\sin \delta$, $\sin \delta'$, $\sin \delta''$ retinere oportet, et perinde in formulis art. 142. Ad hos calculos habemus

$\mathcal{A}''D' - \Delta''$	$= 171^{\circ}50' 8''18$	$\log \sin \dots 9,1523306$	$\log \cos \dots 9,9955759n$
$\mathcal{A}'D' - \Delta$	$= 174 19 13,98$	$\dots 8,9954722$	$\dots 9,9978629n$
$\mathcal{A}''D - \Delta''$	$= 172 54 13,39$	$\dots 9,0917972$	
$\mathcal{A}'D] - \Delta + \sigma$	$= 175 52 56,49$	$\dots 8,8561520$	
$\mathcal{A}'D'' - \Delta$	$= 173 9 54,05$	$\dots 9,0755844$	
$\mathcal{A}'D'' - \Delta + \sigma$	$= 174 18 11,27$	$\dots 8,9967978$	

Hinc elicimus

$$\begin{aligned}\log x &= 0,9211850, & \log \lambda &= 0,0812057n \\ \log x'' &= 0,8112762, & \log \lambda'' &= 0,0319691n \\ \log a &= 0,1099088, & a &= +1,2879790 \\ \log b &= 0,1810404 \\ \log \frac{b}{a} &= 0,0711314, \text{ unde fit } \log b = 0,1810402.\end{aligned}$$

Inter hos duos valores tantum non aequales medium $\log b = 0,1810403$ adoptabimus. Denique prodit

$$\begin{aligned}\log e &= 1,0450295 \\ d &= +0,4489906 \\ \log e &= 9,2102894\end{aligned}$$

quo pacto calculi praeliminares absoluti sunt.

Temporis intervallum inter observationem secundam et tertiam est dierum 39,874409, inter primam et secundam dierum 30,900961: hinc fit $\log \theta = 9,8362757$, $\log \theta'' = 9,7255533$. Statuimus itaque *ad hypothesin primam*

$$\begin{aligned}x &= \log P = 9,8892776 \\ y &= \log Q = 9,5618290\end{aligned}$$

Præcipua dein calculi momenta hæc prodeunt:

$$\begin{aligned}\omega + \sigma &= 20^{\circ}8'46''72 \\ \log Q \sin \omega &= 0,0282028\end{aligned}$$

Hinc fit valor verus ipsius $z = 21^{\circ}11'24''30$, atque $\log r' = 0,3509379$. Tres reliqui valores ipsius z æquationi IV. art. 141. satisfaciētes in hoc casu fiunt

$$\begin{aligned}z &= 63^{\circ}41'12'' \\ z &= 101 12 58 \\ z &= 199 24 7\end{aligned}$$

e quibus primus tamquam approximatio ad orbitam terrestrem spectandus est, cuius quidem aberratio, propter nimium temporis intervallum, longe hic maior est, quam in exemplo præcedente. — E calculo ulteriori sequentes numeri resultant:

$$\begin{aligned}\zeta &\dots\dots\dots 195^{\circ}12' 2''48 \\ \zeta'' &\dots\dots\dots 196 57 50,78 \\ \log r &\dots\dots\dots 0,3647022 \\ \log r'' &\dots\dots\dots 0,3355758 \\ \frac{1}{2}(u''+u) &\dots\dots\dots 266 47 50,47 \\ \frac{1}{2}(u''-u) &\dots\dots\dots -43 39 5,33 \\ 2f' &\dots\dots\dots 22 32 40,86 \\ 2f &\dots\dots\dots 13 5 41,17 \\ 2f'' &\dots\dots\dots 9 27 0,05\end{aligned}$$

Differentiam inter $2f'$ et $2f+2f''$, quæ hic est $0''36$, inter $2f$ et $2f''$ ita dispertiemur, ut statuamus $2f = 13^{\circ}5'40''96$, $2f'' = 9^{\circ}26'59''90$.

Corrigenda iam sunt tempora propter aberrationem, ubi in formulis art. 145. statuendum est $AD' - \zeta = \mathcal{A}D' - \Delta + \delta - \zeta$, $AD' - \zeta'' = \mathcal{A}D' - \Delta + \delta' - \zeta''$. Habemus itaque

$\log r \dots\dots\dots 0,36470$	$\log r' \dots\dots\dots 0,35094$	$\log r'' \dots\dots\dots 0,33557$
$\log \sin(AD' - \zeta) \dots\dots 9,76462$	$\log \sin(\delta - z) \dots\dots 9,75038$	$\log \sin(AD' - \zeta'') \dots\dots 9,84220$
$C. \log \sin \delta \dots\dots\dots 0,07918$	$C. \log \sin \delta' \dots\dots\dots 0,08431$	$C. \log \sin \delta'' \dots\dots\dots 0,02932$
$\log \text{const} \dots\dots\dots 7,75633$	$\log \text{const} \dots\dots\dots 7,75633$	$\log \text{const} \dots\dots\dots 7,75633$
$7,96483$	$7,94196$	$7,96342$
Reductio temporis $0,009222$	$0,008749$	$0,009192$

Hinc prodeunt

Tempora correcta	Intervalla	Logarithmi
Nov. 5,564852	30,901434	1,4899785
36,466286	39,873966	1,6006894
76,340252		

unde derivantur logarithmi correcti quantitatum θ , θ' resp. 9,8362708 atque 9,7255599. Incipiendo dein calculum elementorum ex r , r' , $2f$, θ , prodit $\log \eta = 0,0031921$, sicuti ex r , r' , $2f$, θ' obtinemus $\log \eta' = 0,0017300$. Hinc colligitur $\log P = 9,8907512$, $\log Q = 9,5712864$, adeoque

$$X = +0,0014736, \quad Y = +0,0094574$$

Praecipua momenta *hypothesis secundae*, in qua statuimus

$$x = \log P = 9,8907512$$

$$y = \log Q = 9,5712864$$

haec sunt:

$\omega + \sigma$	20° 8' 0" 87
$\log Qe \sin \omega$	0,0373071
z	21 12 6,09
$\log r'$	0,3507110
ζ	195 16 59,90
ζ'	196 52 40,63
$\log r$	0,3630642
$\log r''$	0,3369708
$\frac{1}{2}(u'' + u)$	267 6 10,75
$\frac{1}{2}(u'' - u)$	— 43 39 4,00
$2f''$	22 32 8,69
$2f$	13 1 54,65
$2f'''$	9 30 14,38

Differentia 0"34 inter $2f$ et $2f + 2f''$, ita distribuenda est, ut statuatur $2f = 13^{\circ}1'54".45$, $2f'' = 9^{\circ}30'14".24$.

Si operae pretium videtur, correctiones temporum hic denuo computare, invenietur pro observatione prima 0,009169, pro secunda 0,008742, pro tertia 0,009236, adeoque tempora correcta Nov. 5,564905, Nov. 36,466293, Nov. 76,340280. Hinc fit

$\log \theta$	9,8362703
$\log \theta''$	9,7255594
$\log \eta$	0,0031790
$\log \eta'$	0,0017413
$\log P$	9,8907268
$\log Q'$	9,5710593

Hoc itaque modo ex hypothesis secunda resultat

$$X = -0,0000244, \quad Y = -0,0002271$$

Denique in *hypothesi tertia*, in qua statuimus

$$x = \log P = 9,8907268$$

$$y = \log Q = 9,5710593$$

praecipua calculi momenta ita se habent:

$\omega + \sigma$	20° 8' 1" 62	$\log r''$	0,3369536
$\log Qe \sin \omega$	0,0370857	$\frac{1}{2}(u'' + u)$	267° 5' 53" 09
z	21 12 4,60	$\frac{1}{2}(u'' - u)$	— 43 39 4,19
$\log r'$	0,3507191	$2f''$	22 32 7,67
ζ	195 16 54,08	$2f$	13 1 57,42
ζ'	196 52 44,45	$2f'$	9 30 10,63
$\log r$	0,3630960		

Differentia 0"38 hic ita distribuetur, ut statuatur $2f = 13^{\circ}1'57".20$, $2f'' = 9^{\circ}30'10".47^*)$.

Quum differentiae omnium horum numerorum ab iis, quos hypothesis secunda suppeditaverat, levissimae sint, tuto iam concludere licebit, hypothesis

*) Haec differentia minuscula, in omnibusque hypothesis tantum non aequalis, ad maximam partem inde orta est, quod σ duobus fere partibus centesimis minuti secundi iusto minor, logarithmusque ipsius b aliquot unitatibus iusto maior erutus erat.

tertiam nulla amplius correctione opus habituram, adeoque hypothesin novam superfluum esse. Quocirca nunc ad calculum elementorum ex $2f'$, θ' , r , r' progredi licebit: qui quum operationibus supra amplissime iam explicatis contineatur, elementa ipsa inde resultantia in eorum gratiam, qui proprio Marte eum exsequi cupient, hic apposuisse sufficiet:

Ascensio recta nodi ascendentis in aequatore	158° 40' 38" 93
Inclinatio orbitae ad aequatorem	11 42 49,13
Distantia perihelii a nodo illo ascendente	323 14 56,92
Anomalia media pro epocha 1806	335 4 13,05
Motus medius (sidereus) diurnus	770 2662
φ	14 9 3,91
Logarithmus semiaxis maioris	0,4422438

158.

Duo exempla praecedentia occasionem nondum suppeditaverunt, methodum art. 120. in usum vocandi: hypotheses enim successivae tam rapide convergebant, ut iam in secunda subsistere licuisset, tertiaque a veritate vix sensibilibiter aberraret. Revera hocce commodo semper fruemur, quartaque hypothesi supersedere poterimus, quoties motus heliocentricus modicus est, tresque radii vectores non nimis inaequales sunt, praesertim si insuper temporum intervalla parum inter se discrepant. Quanto magis autem problematis conditiones hinc recedunt, tanto fortius valores primi suppositi quantitatum P , Q a veris different, tantoque lentius valores sequentes ad veros convergent. In tali itaque casu tres quidem primae hypotheses ita absolvendae sunt, uti duo exempla praecedentia monstrant (ea sola differentia, quod in hypothesi tertia non elementa ipsa, sed, perinde ut in hypothesi prima et secunda, quantitates η , η' , P' , Q' , X , Y computare oportet): dein vero haud amplius valores postremi ipsarum P , Q tamquam valores novi quantitatum P , Q in hypothesi quarta accipiuntur, sed hi per methodum art. 120. e combinatione trium primarum hypothesium eruentur. Rarissime tunc opus erit, ad hypothesin quintam secundum praecepta art. 121. progredi. — Iam hos quoque calculos exemplo illustrabimus, ex quo simul elucebit, quam late methodus nostra pateat.

159.

Ad exemplum tertium observationes sequentes Cereris eligimus, quarum prima Bremae a clar. OLBERS, secunda Gottingae a clar. HARDING, tertia Lilienthalii a clar. BESSEL instituta est.

Tempus medium loci observationis	Asc. recta	Declin. boreal.
1805 Sept. 5. 13 ^h 8 ^m 54 ^s	95° 59' 25"	22° 21' 25"
1806 Ian. 17. 10 58 51	101 18 40,6	30 21 22,3
1806 Maii 23. 10 23 53	121 56 7	28 2 45

Quum methodi, per quas parallaxis et aberrationis rationem habere licet, si distantiae a terra tamquam omnino incognitae spectantur, per duo exempla praecedentia abunde iam illustratae sint: superfluae laboris augmentationi in hoc tertio exemplo renunciabimus, distantiasque approximatas e Commercio litterario clar. DE ZACH (Vol. XI. p. 284) [GAUSS Werke B. VI. S. 261] eum in finem excerpemus, ut observationes ab effectu parallaxis et aberrationis purgentur. Has distantias una cum reductionibus inde derivatis tabula sequens exhibet:

Distantia Cereris a terra	2,599	1,638	2,964
Tempus, intra quod lumen ad terram descendit	23 ^m 49 ^s	13 ^m 28 ^s	24 ^m 21 ^s
Tempus observationis reductum	12 ^h 45 ^m 5 ^s	10 ^h 45 ^m 23 ^s	9 ^h 59 ^m 32 ^s
Tempus sidereum in gradibus .	355° 55'	97° 59'	210° 41'
Parallaxis ascensionis rectae . .	+1° 90'	+0° 22'	—1° 97'
Parallaxis declinationis	—2,08	—1,90	—2,04

Problematis itaque data, postquam a parallaxi et aberratione liberata, temporisque ad meridianum Parisinum reducta sunt, ita se habent:

	Asc. recta	Declinatio
1805 Sept. 5. 12 ^h 19 ^m 14 ^s	95° 59' 23" 10	22° 21' 27" 08
1806 Ian. 17. 10 15 2	101 18 40,38	30 21 24,20
1806 Maii 23. 9 33 18	121 56 8,97	28 2 47,04

Ex his ascensionibus rectis et declinationibus deductae sunt longitudines et latitudines adhibita obliquitate eclipticae $23^{\circ}27'55''00$, $23^{\circ}27'54''59$, $23^{\circ}27'53''27$; dein longitudines a nutatione purgatae sunt, quae resp. fuit $+17^{\circ}31'$, $+17^{\circ}88'$, $+18^{\circ}00'$, posteaque ad initium anni 1806 reductae, applicata praecessione $+15^{\circ}98'$, $-2^{\circ}39'$, $-19^{\circ}68'$. Denique pro temporibus reductis et tabulis excerpta sunt loca Solis, ubi in longitudinibus nutatio praetermissa, contra praecessio perinde ut longitudinibus Cereris adiecta est. Latitudo Solis omnino neglecta. Hoc modo numeri sequentes in calculo adhibendi resultaverunt:

Tempus 1805. Sept.	5,51336	139,42711	265,39813
α , α' , α''	$95^{\circ}32'18''56$	$99^{\circ}49'5''87$	$118^{\circ}5'28''85$
δ , δ' , δ''	$-0^{\circ}59'34,06$	$+7^{\circ}16'36,80$	$+7^{\circ}38'49,39$
l , l' , l''	$342^{\circ}54'56,00$	$117^{\circ}12'43,25$	$241^{\circ}58'50,71$
$\log R$, $\log R'$, $\log R''$	0,0031514	9,9929861	0,0056974

Iam calculi praeliminares in artt. 136 ... 140. explicati sequentia supple-
dunt:

γ , γ' , γ''	$358^{\circ}55'28''09$	$156^{\circ}52'11''49$	$170^{\circ}48'44''79$
δ , δ' , δ''	$112^{\circ}37'9,66$	$18^{\circ}48'39,81$	$123^{\circ}32'52,13$
AD , AD' , AD''	$15^{\circ}32'41,40$	$252^{\circ}42'19,14$	$136^{\circ}2'22,38$
AD , AD' , AD''	$138^{\circ}45'4,60$	$6^{\circ}26'41,10$	$358^{\circ}5'57,00$
ϵ , ϵ' , ϵ''	$29^{\circ}18'8,21$	$170^{\circ}32'59,08$	$156^{\circ}6'25,25$

$\sigma =$	$8^{\circ}52'4''05$	
$\log a =$	0,1840193 n	$a = -1,5276340$
$\log b =$	0,0040987	
$\log c =$	2,0066735	
$d =$	117,50873	
$\log e =$	0,8568244	
$\log x =$	0,1611012	
$\log x' =$	9,9770819 n	
$\log \lambda =$	9,9164090 n	
$\log \lambda' =$	9,7320127 n	

Intervallum temporis inter observationem primam et secundam est dierum 133,91375, inter secundam et tertiam 125,97102: hinc fit $\log \theta = 0,3358520$, $\log \theta' = 0,3624066$, $\log \frac{\theta''}{\theta} = 0,0265546$, $\log \theta \theta' = 0,6982586$. Iam praecipua momenta hypothesis trium primarum deinceps formatarum in conspectu sequenti exhibemus:

	I.	II.	III.
$\log P = x$	0,0265546	0,0256968	0,0256275
$\log Q = y$	0,6982586	0,7390190	0,7481055
$\omega + \sigma$	$7^{\circ}15'13''523$	$7^{\circ}14'47''139$	$7^{\circ}14'45''071$
$\log Q \sin \omega$	1,1546650 n	1,1973925 n	1,2066327 n
z	$7^{\circ}3'59''018$	$7^{\circ}2'32''870$	$7^{\circ}2'16''900$
$\log r'$	0,4114726	0,4129371	0,4132107
ζ	$160^{\circ}10'46''74$	$160^{\circ}20'7''82$	$160^{\circ}22'9''42$
ζ''	262 6 1,03	262 12 18,26	262 14 19,49
$\log r$	0,4323934	0,4291773	0,4284841
$\log r''$	0,4094712	0,4071975	0,4064697
$\frac{1}{2}(u''+u)$	$262^{\circ}55'23''22$	$262^{\circ}57'6''83$	$262^{\circ}57'31''17$
$\frac{1}{2}(u''-u)$	$273^{\circ}28'50,95$	$273^{\circ}29'15,06$	$273^{\circ}29'19,56$
$2f'$	$62^{\circ}34'28,40$	$62^{\circ}49'56,50$	$62^{\circ}53'57,06$
$2f$	$31^{\circ}8'30,03$	$31^{\circ}15'59,09$	$31^{\circ}18'13,83$
$2f''$	$31^{\circ}25'58,43$	$31^{\circ}33'57,32$	$31^{\circ}35'43,32$
$\log \eta$	0,0202496	0,0203158	0,0203494
$\log \eta''$	0,0211074	0,0212429	0,0212751
$\log P'$	0,0256968	0,0256275	0,0256289
$\log Q'$	0,7390190	0,7481055	0,7502337
X	-0,0008578	-0,0000693	+0,0000014
Y	+0,0407604	+0,0090865	+0,0021282

Iam designando tres valores ipsius X per A , A' , A'' ; tres valores ipsius Y per B , B' , B'' ; quotientes et divisione quantitatum $AB' - A'B$, $A'B - AB'$, $AB' - A'B$ per earundem aggregatum ortos resp. per k , k' , k'' , ita ut habeatur $k + k' + k'' = 1$, denique valores ipsorum $\log P'$ et $\log Q'$ in hypothesi tertia per M et N (qui forent valores novi ipsarum x , y , si hypothesin quartam perinde e tertia derivare conveniret, ut tertia e secunda derivata fuerat): e formulis art. 120.

facile colligitur, valorem correctum ipsius x fieri $= M - k(A + A') - kA'$, valoremque correctum ipsius $y = N - k(B + B') - kB'$. Calculo facto prior eruitur $= 0,0256331$, posterior $= 0,7509143$. Hisce valoribus correctis iam *hypothesin quartam* superstruimus, cuius praecipua momenta haec sunt;

$\omega + \sigma$	$7^{\circ} 14' 45'' 247$	$\log r''$	$0,4062033$
$\log Q \sin \omega$. . .	$1,2094284 n$	$\frac{1}{2}(u'' + u)$. .	$262^{\circ} 57' 38'' 78$
z	$7^{\circ} 2' 12'' 736$	$\frac{1}{2}(u'' - u)$. .	$273^{\circ} 29' 20'' 73$
$\log r'$	$0,4132817$	$2f$	$62^{\circ} 55' 16'' 64$
ζ	$160^{\circ} 22' 45'' 38$	$2f$	$31^{\circ} 19' 14'' 49$
ζ''	$262^{\circ} 15' 3'' 90$	$2f''$	$31^{\circ} 36' 15'' 20$
$\log r$	$0,4282792$		

Inter $2f'$ et $2f + 2f''$ differentia $0^{\circ} 05'$ emergit, quam ita distribuemus, ut statuamus $2f' = 31^{\circ} 19' 14'' 47$, $2f'' = 31^{\circ} 36' 15'' 17$. Quodsi iam e duobus locis extremis elementa ipsa determinantur, sequentes numeri resultant:

Anomalia vera pro loco primo	$289^{\circ} 7' 39'' 75$
Anomalia vera pro loco tertio	$352^{\circ} 2' 56'' 39$
Anomalia media pro loco primo	$297^{\circ} 41' 35'' 65$
Anomalia media pro loco tertio	$353^{\circ} 15' 22'' 49$
Motus medius diurnus sidereus	$769^{\circ} 67' 55''$
Anomalia media pro initio anni 1806	$322^{\circ} 35' 52'' 51$
Angulus φ	$4^{\circ} 37' 57'' 78$
Logarithmus semiaxis maioris	$0,4424661$

Computando ex hisce elementis locum heliocentricum pro tempore observationis mediae, invenitur anomalia media $326^{\circ} 19' 25'' 72$, logarithmus radii vectoris $0,4132825$, anomalia vera $320^{\circ} 43' 54'' 87$: haecce distare deberet ab anomalia vera pro loco primo differentia $2f'$, sive ab anomalia vera pro loco tertio differentia $2f''$, adeoque fieri deberet $= 320^{\circ} 43' 54'' 92$, sicuti logarithmus radii vectoris $= 0,4132817$: differentia $0^{\circ} 05'$ in anomalia vera, octoque unitatum in isto logarithmo nullius momenti censenda est.

Si hypothesis quarta eodem modo ad finem perduceretur, ut tres praecedentes, prodiret $X = 0$, $Y = -0,0000168$, unde valores correcti ipsarum x, y hi colligerentur

$$x = \log P = 0,0256331 \quad (\text{idem ut in hypothesis quarta})$$

$$y = \log Q = 0,7508917$$

Quibus valoribus si hypothesis quinta superstrueretur, solutio ultimam quam tabulae permittunt praecisionem nancisceretur: sed elementa hinc resultantia vix sensibilibus ab iis discreparent, quae hypothesis quarta suggessit.

Ut elementa completa habeantur, nihil iam superest, nisi ut situs plani orbitae computetur. Ad normam praeceptorum art. 149. hic prodit

	e loco primo	e loco tertio
g	$354^{\circ} 9' 44'' 22$	g'' $57^{\circ} 5' 0'' 91$
h	$261^{\circ} 56' 6'' 94$	h'' $161^{\circ} 0' 1'' 61$
i	$10^{\circ} 37' 33'' 02$	i'' $10^{\circ} 37' 33'' 00$
Ω	$80^{\circ} 58' 49'' 06$	Ω'' $80^{\circ} 58' 49'' 10$
Distantia perihelii a nodo ascendente	$65^{\circ} 2' 4'' 47$	$65^{\circ} 2' 4'' 52$
Longitudo perihelii	$146^{\circ} 0' 53'' 53$	$146^{\circ} 0' 53'' 62$

Sumto itaque medio statuatur $i = 10^{\circ} 37' 33'' 01$, $\Omega = 80^{\circ} 58' 49'' 08$, longitudo perihelii $= 146^{\circ} 0' 53'' 57$. Denique longitudo media pro initio anni 1806 erit $= 108^{\circ} 36' 46'' 08$.

160.

In expositione methodi, cui disquisitiones praecedentes dicatae fuerunt, in quosdam casus speciales incidimus, ubi applicationem non patitur, saltem non in forma ea, in qua a nobis exhibita est. Hunc defectum locum habere vidimus:

primo, quoties aliquis trium locorum geocentricorum vel cum loco respondente heliocentrico terrae, vel cum puncto opposito coincidit (casus posterior manifesto tunc tantum occurrere potest, ubi corpus coeleste inter Solem et terram transit);

secundo, quoties locus geocentricus primus corporis coelestis cum tertio coincidit;

tertio, quoties omnes tres loci geocentrici una cum loco heliocentrico terrae secundo in eodem circulo maximo siti sunt.

In casu primo situs alicuius circulorum maximorum $AB, A'B, A'B''$ indeterminatus manebit, in secundo atque tertio situs puncti B^* . In hisce itaque casibus methodi supra expositae, per quas, si quantitates P, Q tamquam cognitae spectantur, e locis geocentricis heliocentricos determinare docuimus, vim suam

perdunt: attamen discrimen essenziale hic notandum est, scilicet in casu primo hic defectus soli methodo attribuendus erit, in casu secundo et tertio autem ipsius problematis naturae; in casu primo itaque ista determinatio utique effici poterit, si modo methodus apte varietur, in secundo et tertio autem absolute impossibilis erit, locique heliocentrii indeterminati manebunt. Haud pigebit, hasce relationes paucis evolvere: omnia vero, quae ad hoc argumentum pertinent exhaurire eo minus e re esset, quod in omnibus his casibus specialibus orbitae determinatio exacta impossibilis est, ubi a levissimis observationum erroribus enormiter afficeretur. Idem defectus etiamnum valebit, quoties observationes haud quidem exacte, attamen proxime ad aliquem horum casuum referuntur: quamobrem in eligendis observationibus huc respiciendum, probeque cavendum est, ne adhibeatur ullus locus, ubi corpus coeleste simul in viciniis nodi atque oppositionis vel conjunctionis versatur, neque observationes tales, ubi corpus coeleste in ultima ad eundem locum geocentricum proxime rediit, quem in prima occupaverat, neque demum tales, ubi circulus maximus a loco heliocentrico terrae medio ad locum geocentricum medium corporis coelestis ductus angulum acutissimum cum directione motus geocentrii format, atque locum primum et tertium quasi stringit.

161.

Casus primi tres subdivisiones faciemus.

I. Si punctum B cum A vel cum puncto opposito coïncidit, erit $\delta = 0$ vel $= 180^\circ$; $\gamma, \epsilon, \epsilon''$ atque puncta D, D' indeterminata erunt; contra $\gamma', \gamma'', \epsilon$ atque puncta D, B^* determinata; punctum C necessario coïncidet cum A . Per ratiocinia, iis, quae in art. 140. tradita sunt, analogia, facile elicietur aequatio haecce:

$$0 = n \frac{\sin(\alpha - \delta)}{\sin \alpha} \cdot R \frac{\sin \delta'}{\sin \delta''} \cdot \frac{\sin(A''D - \delta'')}{\sin(A'D - \delta' + \delta)} - n''$$

Omnia itaque, quae in artt. 141. 142. exposita sunt, etiam huc transferre licebit, si modo statuatur $\alpha = 0$, atque b per ipsam aequationem 12. art. 140. determinetur, quantitatesque $z, r, \frac{n'r'}{n}, \frac{n''r''}{n''}$ perinde ut supra computabuntur. Iam simulae z adeoque situs puncti C innotuit, assignare licebit situm circuli maximi CC , huius intersectionem cum circulo maximo AB^* i. e. punctum C' , et proin arcus CC', CC'', CC''' sive $2f, 2f', 2f''$: hinc denique habebitur

$$r = \frac{n'r'}{n} \cdot \frac{\sin 2f}{\sin 2f'}, \quad r'' = \frac{n''r''}{n''} \cdot \frac{\sin 2f''}{\sin 2f''}$$

II. Ad casum eum, ubi punctum B'' cum A'' vel cum puncto opposito coïncidit, omnia quae modo tradidimus transferre licet, si modo omnia, quae ad locum primum spectant, cum iis, quae ad tertium referuntur, permutantur.

III. Paulo aliter vero casum eum tractare oportet, ubi B' vel cum A' vel cum puncto opposito coïncidit. Hic punctum C' cum A' coïncidet; $\gamma', \epsilon, \epsilon''$ punctaque D, D'', B^* indeterminata erunt: contra assignari poterit intersectio circuli maximi BB'' cum ecliptica *), cuius longitudo ponatur $= l' + \pi$. Per ratiocinia, iis, quae in art. 140. evoluta sunt, similia, eruetur aequatio

$$0 = n \frac{R \sin \delta \sin(A''D' - \delta'')}{R' \sin \delta' \sin(A'D - \delta)} + n' r' \frac{\sin \pi}{R'' \sin(l'' - l' - \pi)} + n''$$

Designemus coefficientem ipsius n , qui convenit cum a art. 140., per eundem characterem a , coefficientemque ipsius $n'r'$ per ϵ : ipsum a hic etiam per formulam

$$a = - \frac{R \sin(l' + \pi - \delta)}{R' \sin(l'' - l' - \pi)}$$

determinare licet. Habemus itaque $0 = an + \epsilon n'r' + n''$, qua aequatione cum his combinata

$$P = \frac{n''}{n}, \quad Q = 2 \left(\frac{n + n''}{n'} - 1 \right) r'^3, \quad \text{emergit} \quad \frac{\epsilon(P+1)}{P+a} r'^4 + r'^3 + \frac{1}{2} Q = 0$$

unde distantiam r' elicere poterimus, siquidem non fuerit $\epsilon = 0$, in quo casu nihil aliud illinc sequeretur, nisi $P = -a$. Ceterum etiamsi non fuerit $\epsilon = 0$ (ubi ad casum tertium in art. sequ. considerandum delaberemur), tamen semper ϵ quantitas perexigua erit, adeoque P parum a $-a$ differre debet: hinc vero manifestum est, determinationem coefficientis $\frac{\epsilon(P+1)}{P+a}$ valde lubricam fieri, neque adeo r' ulla praecisione determinabilem esse.

Porro habebimus $\frac{n'r'}{n} = - \frac{P+a}{\epsilon}, \quad \frac{n''r''}{n''} = - \frac{P+a}{\epsilon P}$: dein simili modo ut in art. 143. facile evolvuntur aequationes

$$r \sin \zeta = \frac{n'r'}{n} \cdot \frac{\sin \gamma''}{\sin \epsilon} \sin(l'' - l')$$

$$r'' \sin \zeta'' = - \frac{n''r''}{n''} \cdot \frac{\sin \gamma'}{\sin \epsilon} \sin(l' - l)$$

$$r \sin(\zeta - AD) = r'' \frac{\sin \gamma''}{\sin \gamma'} \sin(\zeta'' - A''D)$$

*) Generalius, cum circulo maximo AA'' : sed brevittatis causa cum tantummodo casum hic consideramus, ubi ecliptica tanquam planum fundamentale accipitur.

e quarum combinatione cum aequatt. VIII. et IX. art. 143., quantitates r, ζ, r', ζ' determinare licebit. Calculi operationes reliquae cum supra descriptis convenient.

162.

In casu *secundo*, ubi B'' cum B coincidit, etiam D' cum iisdem vel cum puncto opposito coincidit. Erunt itaque $AD' - \delta$ et $A'D' - \delta''$ vel $= 0$ vel $= 180^\circ$: unde ex aequationibus art. 143. derivamus

$$\frac{n' r'}{n} = \pm \frac{\sin \epsilon'}{\sin \epsilon} \cdot \frac{R \sin \delta}{\sin(z + AD' - \delta)}$$

$$\frac{n' r'}{n''} = \pm \frac{\sin \epsilon'}{\sin \epsilon''} \cdot \frac{R'' \sin \delta''}{\sin(z + A'D'' - \delta'')}$$

$$R \sin \delta \sin \epsilon \sin(z + AD' - \delta) = P R'' \sin \delta'' \sin \epsilon'' \sin(z + A'D'' - \delta'')$$

Hinc manifestum est, z , independente a Q , per solam P determinabilem esse (nisi forte fuerit $AD' = AD$ vel $= AD \pm 180^\circ$, ubi ad casum tertium delaberemur): inventa autem z , innotescet etiam r' , et proin adiumento valorum quantitaturn $\frac{n' r'}{n}$, $\frac{n' r'}{n''}$ etiam $\frac{n}{n''}$ et $\frac{n''}{n}$; hinc denique etiam

$$Q = 2 \left(\frac{n}{n''} + \frac{n''}{n} - 1 \right) r'^2$$

Manifesto igitur, P et Q tamquam data ab invicem independentia considerari nequeunt, sed vel unicum tantummodo datum exhibebunt, vel data incongrua. Situs punctorum C, C'' in hoc casu arbitrarius manebit, si modo in eodem circulo maximo cum C' capiantur.

In casu *tertio*, ubi A, B, B' in eodem circulo maximo iacent, D et D' resp. cum punctis B', B , vel cum punctis oppositis coincident: hinc e combinatione aequationum VII. VIII. IX. art. 143. colligitur

$$P = \frac{R \sin \delta \sin \epsilon''}{R'' \sin \delta'' \sin \epsilon} = \frac{R \sin(l' - l)}{R'' \sin(l'' - l')}$$

In hoc itaque casu valor ipsius P , per ipsa problematis data iam habetur, adeoque positio punctorum C, C', C'' indeterminata manebit.

163.

Methodus, quam inde ab art. 136. exposuimus, praecipue quidem determinationi primae orbitae penitus adhuc incognitae accommodata est: attamen successu aequae felici tunc quoque in usum vocatur, ubi de correctione orbitae proximae

iam cognitae per tres observationes quantumvis ab invicem distantes agitur. In tali autem casu quaedam immutare conveniet. Scilicet quoties observationes motum heliocentricum permagnam complectuntur, haud amplius licebit, $\frac{q''}{q}$ atque $66''$ tamquam valores approximatos quantitatum P, Q considerare: quin potius ex elementis proximae cognitae valores multo magis exacti elici poterunt. Calculabuntur itaque levi calamo per ista elementa pro tribus observationum temporibus loca heliocentrica in orbita, unde designando anomalias veras per v, v', v'' , radios vectores per r, r', r'' , semiparametrum per p , prodibunt valores approximati sequentes:

$$P = \frac{r \sin(v' - v)}{r'' \sin(v'' - v)}, \quad Q = \frac{4 r'^4 \sin \frac{1}{2}(v' - v) \sin \frac{1}{2}(v'' - v)}{p \cos \frac{1}{2}(v' - v)}$$

His itaque hypothesis prima superstruetur, paullulumque ad libitum immutatis secunda et tertia: haud enim e re esset, P et Q hic pro novis valoribus adoptare (uti supra fecimus), quum hos valores magis exactos evadere haud amplius supponere liceat. Hac ratione omnes tres hypotheses commodissime simul absolvi poterunt: quarta dein secundum praecepta art. 120. formabitur. Ceterum haud abnuemus, si quis unam alteramve decem methodorum in artt. 124...129. expositarum in tali casu si non magis tamen aequae fere expeditam existimet, ideoque in usum vocare malit.



SECTIO SECUNDA

Determinatio orbitae e quatuor observationibus, quarum duae tantum completae sunt.

164.

Iam in ipso limine Libri secundi (art. 115.) declaravimus, usum problematis in Sect. praec. pertractati ad eas orbitas limitari, quarum inclinatio nec evanescit, nec nimis exigua est, determinationemque orbitarum parum inclinarum necessario quatuor observationibus superstrui debere. Quatuor autem observationes completae, quum octo aequationibus aequivalent, incognitarumque numerus ad sex tantum ascendat, problema plus quam determinatum redderent: quapropter a duabus observationibus latitudines (sive declinationes) seponere oportebit, ut datis reliquis exacte satisfieri possit. Sic oritur problema, cui haec Sectio dicata erit: solutio autem, quam hic trademus, non solum ad orbitas parum inclinatatas patebit, sed etiam ad orbitas inclinationis quantumvis magnae pari successu applicari poterit. Etiam hic, perinde ut in problemate Sect. praec., casum eum, ubi orbitae dimensiones approximatae iam in potestate sunt, segregare oportet a determinatione prima orbitae penitus adhuc incognitae: ab illo initium faciemus.

165.

Methodus simplicissima, orbitam proxime iam cognitam quatuor observationibus adaptandi, haec esse videtur. Sint x, y distantiae approximatae corporis coelestis a terra in duabus observationibus completis: harum adiumento

LIBER II. SECTIO II. DETERMINATIO ORBITAE E QUATUOR OBSERVATIONIBUS. 211

computentur loci respondentes heliocentrici, atque hinc ipsa elementa: ex his dein elementis longitudes vel ascensiones rectae geocentricae pro duabus reliquis observationibus. Quae si forte cum observatis conveniunt, elementa nulla amplius correctione egeant: sin minus, differentiae X, Y notabuntur, idemque calculus iterum bis repetetur, valoribus ipsarum x, y paullulum mutatis. Ita prodibunt tria systemata valorum quantitatum x, y atque differentiarum Y, X , unde per praecepta art. 120. valores correcti quantitatum x, y eruentur, quibus valores $X=0, Y=0$ respondebunt. Calculo itaque simili huic quarto systemati superstructo elementa emergent, per quae omnes quatuor observationes rite repraesentabuntur.

Ceterum, siquidem eligendi potestas datur, eas observationes completas retinere praestabit, e quibus situm orbitae maxima praecisione determinare licet, proin duas observationes extremas, quoties motum heliocentricum 90 graduum minoremve complectuntur. Sin vero praecisione aequali non gaudent, earum latitudes vel declinationes sepones, quas minus exactas esse suspicaberis.

166.

Ad determinationem primam orbitae penitus adhuc incognitae e quatuor observationibus necessario eiusmodi positiones adhibendae erunt, quae motum heliocentricum non nimis magnum complectuntur: alioquin enim careremus subsidiis ad approximationem primam commode formandam. Methodus tamen ea quam statim trademus extensione tam lata gaudet, ut absque haesitatione observationes motum heliocentricum 30 vel 40 graduum complectentes in usum vocare liceat, si modo distantiae a Sole non nimis inaequales fuerint: quoties eligendi copia datur, temporum intervalla inter primam et secundam, secundam et tertiam, tertiam et quartam ab aequalitate parum recedentia accipere iuvabit. Sed hoc quoque respectu anxietate nimia haud opus erit, uti exemplum subnexum monstrabit, ubi temporum intervalla sunt 48, 55 et 59 dierum, motusque heliocentricus ultra 50°.

Porro solutio nostra requirit, ut completae sint observatio secunda et tertia, adeoque latitudes vel declinationes in observationibus extremis negligantur. Supra quidem monuimus, praecisionis maioris gratia plerumque praestare, si elementa duabus observationibus extremis completis, atque intermediarum longitudinibus vel ascensionibus rectis accommodentur: attamen in prima orbitae deter-

minatione huic lucro renuntiavisse haud poenitebit, quum approxinatio expeditissima longe maioris momenti sit, iacturamque illam, quae praecipue tantum in longitudinem nodi atque inclinationem orbitae cadit, elementaque reliqua vix sensibilibiter afficiat, postea facile explere liceat.

Brevitatis causa methodi expositionem ita adornabimus, ut omnes locos ad eclipticam referamus, adeoque quatuor longitudes cum duabus latitudinibus datas esse supponemus: attamen quoniam in formulis nostris ad terrae latitudinem quoque respicietur, sponte ad eum casum transferri poterunt, ubi aequator tamquam planum fundamentale accipitur, si modo ascensiones rectae ac declinationes in locum longitudinum et latitudinum substituuntur.

Ceterum respectu nutationis, praecessionis et parallaxis, nec non aberrationis, omnia quae in Sectione praee. exposuimus etiam hic valent: nisi itaque distantiae approximatae a terra aliunde iam innotuerint, ut respectu aberrationis methodum I. art. 118. in usum vocare liceat, loca observata initio tantum ab aberratione fixarum purgabuntur, temporaque corrigentur, quamprimum inter calculi decursum distantiarum determinatio approximata in potestatem venit, uti infra clarius elucebit.

167.

Solutionis expositioni signorum praecipuorum indicem praemittimus. Erunt nobis

t, t', t'', t''' quatuor observationum tempora
 $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ corporis coelestis longitudes geocentricae
 $\theta, \theta', \theta'', \theta'''$ eiusdem latitudes
 r, r', r'', r''' distantiae a Sole
 $\rho, \rho', \rho'', \rho'''$ distantiae a terra
 l, l', l'', l''' terrae longitudes heliocentricae
 B, B', B'', B''' terrae latitudes heliocentricae
 R, R', R'', R''' terrae distantiae a Sole.
 $(n01), (n12), (n23), (n02), (n13)$ areae duplicatae triangulorum, quae resp. inter Solem atque corporis coelestis locum primum et secundum, secundum et tertium, tertium et quartum, primum et tertium, secundum et quartum continentur.

$\frac{1}{(n01)}, \frac{1}{(n12)}, \frac{1}{(n23)}$ quotientes e divisione arearum $\frac{1}{2}(n01), \frac{1}{2}(n12), \frac{1}{2}(n23)$ per areas sectorum respondentium oriundi.

$$P' = \frac{(n12)}{(n01)},$$

$$P'' = \frac{(n12)}{(n23)}$$

$$Q' = \left(\frac{(n01) + (n12)}{(n02)} - 1 \right) r'^3, \quad Q'' = \left(\frac{(n12) + (n23)}{(n13)} - 1 \right) r''^3$$

v, v', v'', v''' corporis coelestis longitudes in orbita a puncto arbitrario numeratae.

Denique pro observatione secunda et tertia locos heliocentricos terrae in sphaera coelesti per A', A'' denotabimus, locos geocentricos corporis coelestis per B', B'' , eisdemque locos heliocentricos per C', C'' .

His ita intellectis negotium primum perinde ut in problemate Sect. praee. (art. 136.) consistet in determinatione situs circulorum maximorum $A'C'B', A'C'B''$, quorum inclinationes ad eclipticam per γ', γ'' designamus: cum hoc calculo simul iungetur determinatio arcuum $AB' = \delta', AB'' = \delta''$. Hinc manifeste erit

$$r' = \sqrt{(\rho' \cos \delta' + 2 \rho' R' \cos \delta' + R' R')}$$

$$r'' = \sqrt{(\rho'' \cos \delta'' + 2 \rho'' R'' \cos \delta'' + R'' R'')}$$

sive statuendo $\rho' + R' \cos \delta' = x', \rho'' + R'' \cos \delta'' = x'', R' \sin \delta' = a', R'' \sin \delta'' = a'',$

$$r' = \sqrt{(x' x' + a' a')}$$

$$r'' = \sqrt{(x'' x'' + a'' a'')}$$

168.

Combinando aequationes 1. et 2. art. 112., prodeunt in signis disquisitionis praesentis aequationes sequentes:

$$0 = (n12) R \cos B \sin(l-a) - (n02) (\rho' \cos \theta' \sin(a'-a) + R' \cos B' \sin(l'-a)) \\ + (n01) (\rho'' \cos \theta'' \sin(a''-a) + R'' \cos B'' \sin(l''-a))$$

$$0 = (n23) (\rho' \cos \theta' \sin(a''-a') + R' \cos B' \sin(a''-l')) \\ - (n13) (\rho'' \cos \theta'' \sin(a''-a') + R'' \cos B'' \sin(a''-l')) + (n12) R'' \cos B'' \sin(a''-l'')$$

Hae aequationes, statuendo

$$\frac{R' \cos B' \sin(l' - a)}{\cos \delta' \sin(a' - a)} - R' \cos \delta' = b'$$

$$\frac{R' \cos B'' \sin(a'' - l'')}{\cos \delta'' \sin(a'' - a)} - R'' \cos \delta'' = b''$$

$$\frac{R' \cos B' \sin(a'' - l')}{\cos \delta' \sin(a'' - a)} - R' \cos \delta' = x'$$

$$\frac{R'' \cos B'' \sin(l'' - a)}{\cos \delta'' \sin(a'' - a)} - R'' \cos \delta'' = x''$$

$$\frac{R \cos B \sin(l - a)}{\cos \delta \sin(a'' - a)} = \lambda$$

$$\frac{R'' \cos B'' \sin(a'' - l'')}{\cos \delta' \sin(a'' - a)} = \lambda''$$

$$\frac{\cos \delta' \sin(a' - a)}{\cos \delta'' \sin(a'' - a)} = \mu'$$

$$\frac{\cos \delta'' \sin(a'' - a'')}{\cos \delta' \sin(a'' - a')} = \mu''$$

omnibusque rite reductis, transeunt in sequentes

$$\frac{\mu'(1+P')(\alpha'+b')}{1+\frac{Q'}{(\alpha'x'+a'a')^{\frac{1}{2}}}} = x'' + x'' + \lambda'P'$$

$$\frac{\mu''(1+P'')(\alpha''+b'')}{1+\frac{Q''}{(\alpha''x''+a''a'')^{\frac{1}{2}}}} = x' + x' + \lambda''P''$$

sive, statuendo insuper

$$-x'' - \lambda'P' = c', \quad \mu'(1+P') = d'$$

$$-x' - \lambda''P'' = c'', \quad \mu''(1+P'') = d''$$

in hasce

$$I. \quad x'' = c' + \frac{d'(x'+b')}{1+\frac{Q'}{(\alpha'x'+a'a')^{\frac{1}{2}}}}$$

$$II. \quad x' = c'' + \frac{d''(x''+b'')}{1+\frac{Q''}{(\alpha''x''+a''a'')^{\frac{1}{2}}}}$$

Adiumento harum duarum aequationum x' et x'' ex $a', b', c', d', Q', a'', b'', c'', d'', Q''$, determinari poterunt. Quodsi quidem x' vel x'' inde eliminanda esset, ad aequationem ordinis permagni delaberemur: attamen per methodos indirectas incognitarum x', x'' valores ex illis aequationibus forma non mutata satis expedite elicientur. Plerumque valores incognitarum approximati iam prodeunt, si primo Q' atque Q'' negliguntur; scilicet

$$x' = \frac{c'' + d''(b'' + c'') + d'd''b'}{1 - d'd''}$$

$$x'' = \frac{c' + d'(b' + c') + d'd'b''}{1 - d'd''}$$

Quamprimum autem valor approximatus alterutrius incognitae habetur, valores aequationibus exacte satisfaciens facillime elicientur. Sit scilicet ξ' valor approximatus ipsius x' , quo in aequatione I. substituto prodeat $x'' = \xi''$; perinde substituto $x'' = \xi''$ in aequatione II. prodeat inde $x' = X'$; repetantur eadem operationes, substituendo pro x' in I. valorem alium $\xi' + v'$, unde prodeat $x'' = \xi'' + v''$, quo valore in II. substituto prodeat inde $x' = X' + N'$. Tum valor correctus ipsius x' erit

$$= \xi' + \frac{(\xi' - X')v'}{N' - v'} = \frac{\xi'N' - X'v'}{N' - v'}$$

valorque correctus ipsius

$$x'' = \xi'' + \frac{(\xi'' - X'')v''}{N'' - v''}$$

Si operae pretium videtur, cum valore correcto ipsius x' alioque levius mutato eadem operationes repetentur, donec valores ipsarum x', x'' aequationibus I, II. exacte satisfaciens prodierint. Ceterum analystae vel mediocriter tantum exercitatus subsidia calculum contrahendi haud deerunt.

In his operationibus quantitates irrationales $(x'x' + a'a')^{\frac{1}{2}}$, $(x''x'' + a''a'')^{\frac{1}{2}}$ commodè calculantur per introductionem arcuum z, z'' , quorum tangentes resp. sunt $\frac{a'}{x'}$, $\frac{a''}{x''}$, unde fit

$$\sqrt{(x'x' + a'a')} = r' = \frac{a'}{\sin z'} = \frac{x'}{\cos z'}$$

$$\sqrt{(x''x'' + a''a'')} = r'' = \frac{a''}{\sin z''} = \frac{x''}{\cos z''}$$

Hi arcus auxiliares, quos inter 0 et 180° accipere oportet, ut r' , r'' positivi evadant, manifesto cum arcubus $C'B'$, $C''B''$ identici erunt, unde patet, hacce ratione non modo r' et r'' , sed etiam situm punctorum C' , C'' innoscere.

Haece determinatio quantitatum z , z' requirit, ut a' , a'' , b' , b'' , c' , c'' , d' , d'' , Q' , Q'' cognitae sint, quarum quantitatum quatuor primae quidem per problematis data habentur, quatuor sequentes autem a P' , P'' pendent. Iam quantitates P' , P'' , Q' , Q'' exacte quidem nondum determinari possunt; attamen quum habeatur

$$\text{III. } P' = \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \frac{(\eta 01)}{(\eta 12)}$$

$$\text{IV. } P'' = \frac{t'' - t'}{t'' - t} \cdot \frac{(\eta 23)}{(\eta 12)}$$

$$\text{V. } Q' = \frac{1}{2} k k' (t' - t) (t'' - t') \cdot \frac{r' r''}{r r''} \cdot \frac{1}{(\eta 01)(\eta 12) \cos \frac{1}{2} (v' - v) \cos \frac{1}{2} (v'' - v) \cos \frac{1}{2} (v'' - v')}$$

$$\text{VI. } Q'' = \frac{1}{2} k k' (t'' - t) (t'' - t') \cdot \frac{r'' r''}{r' r''} \cdot \frac{1}{(\eta 12)(\eta 23) \cos \frac{1}{2} (v'' - v') \cos \frac{1}{2} (v'' - v) \cos \frac{1}{2} (v'' - v')}$$

statim adsunt approximati

$$P' = \frac{t'' - t'}{t' - t},$$

$$P'' = \frac{t'' - t'}{t'' - t},$$

$$Q' = \frac{1}{2} k k' (t' - t) (t'' - t'), \quad Q'' = \frac{1}{2} k k' (t'' - t) (t'' - t')$$

quibus calculus primus superstruatur.

169.

Absolute calculo art. praec. ante omnia arcum $C'C''$ determinare oportebit. Quod fiet commodissime, si antea perinde ut in art. 137. intersectio D circulorum maximorum $A'C'B'$, $A''C''B''$, mutuaque inclinatio ε eruta fuerit: invenietur dein ex ε , $C'D = z' + B'D$, atque $C''D = z'' + B''D$, per formulas easdem quas in art. 144. tradidimus, non modo $C'C'' = v'' - v'$, sed etiam anguli (u' , u''), sub quibus circuli maximi $A'B'$, $A''B''$ circum maximum $C'C''$ secant.

Postquam arcus $v'' - v'$ inventus est, $v'' - v$ et r eruentur e combinatione aequationum

$$r \sin (v' - v) = \frac{r'' \sin (v'' - v')}{P'}$$

$$r \sin (v' - v + v'' - v') = \frac{1 + P''}{P'} \cdot \frac{r' \sin (v'' - v')}{1 + \frac{Q''}{r' s}}$$

et perinde r'' atque $v'' - v'$ e combinatione harum

$$r'' \sin (v'' - v') = \frac{(r' \sin (v'' - v'))}{P''}$$

$$r'' \sin (v'' - v' + v'' - v') = \frac{1 + P''}{P''} \cdot \frac{r'' \sin (v'' - v')}{1 + \frac{Q''}{r'' s}}$$

Omnes numeri hoc modo inventi exacti forent, si ab initio a valoribus veris ipsarum P' , P'' , Q' , Q'' proficisci licuisset: tumque situm plani orbitae perinde ut in art. 149. vel ex $A'C'$, u' et γ' , vel ex $A''C''$, u'' et γ'' determinare conveniret, ipsasque orbitae dimensiones vel ex r' , r'' , t' , et $v'' - v'$, vel, quod exactius est, ex r , r'' , t' , et $v'' - v$. Sed in calculo primo haec omnia praeteribimus, atque in id potissimum incumbemus, ut valores magis approximatos pro quantitatibus P' , P'' , Q' , Q'' obtineamus. Hunc finem assequemur, si per methodum inde ab art. 88. expositam

$$\text{ex } r, r', v' - v, t' - t \text{ eliciamus } (\eta 01)$$

$$r', r'', v'' - v', t'' - t' \dots \dots (\eta 12)$$

$$r'', r''', v'' - v'', t'' - t'' \dots \dots (\eta 23)$$

Has quantitates, nec non valores ipsarum r , r' , r'' , r''' , $\cos \frac{1}{2} (v' - v)$ etc. in formulis III...VI. substituemus, unde valores ipsarum P' , Q' , P'' , Q'' resultabunt multo magis exacti quam ii, quibus hypothesis prima superstructa erat. Cum illis itaque hypothesis secunda formabitur, quae si prorsus eodem modo ut prima ad finem perducitur, valores ipsarum P' , Q' , P'' , Q'' multo adhuc exactiores suppeditabit, atque sic ad hypothesin tertiam deducet. Hae operationes tam diu iterabuntur, donec valores ipsarum P' , Q' , P'' , Q'' nulla amplius correctione opus habere videantur, quod recte iudicare exercitatio frequens mox docebit. Quoties motus heliocentricus parvus est, plerumque prima hypothesis illos valores iam satis exacte subministrat: si vero ille arcum maiorem complectitur, si insuper temporum intervalla ab aequalitate notabiliter recedunt, hypothesibus pluries

repetitis opus erit; in tali vero casu hypotheses primae magnam calculi praecisionem haud postulant. In ultima denique hypothesis elementa ipsa ita ut modo indicavimus determinabuntur.

170.

In hypothesis prima quidem temporibus non correctis t, t', t'' uti oportebit, quum distantias a terra computare nondum liceat: simulac vero valores approximati quantitatum x', x'' innotuerint, illas distantias quoque proxime determinare poterimus. Attamen quum formulae pro ρ et ρ'' hic paullo complicatiores evadant, computum correctionis temporum eoque differre conveniet, ubi distantiarum valores satis praecisi evaserunt, ne calculo repetito opus sit. Quamobrem e re erit, hanc operationem iis valoribus quantitatum x, x' superstruere, ad quas hypothesis penultima produxit, ita ut ultima demum hypothesis a valoribus correctis temporum atque quantitatum P', P'', Q', Q'' proficiscatur. Ecce formulas, ad hunc finem in usum vocandas:

$$\text{VII. } \rho' = x' - R' \cos \delta'$$

$$\text{VIII. } \rho'' = x'' - R'' \cos \delta''$$

$$\text{IX. } \rho \cos \ell = -R \cos B \cos(\alpha - l) + \frac{1+P'}{P'(1+\frac{Q'}{r^2})} (\rho' \cos \ell' \cos(\alpha' - \alpha) + R' \cos B' \cos(l' - \alpha)) - \frac{1}{P''} (\rho'' \cos \ell'' \cos(\alpha'' - \alpha) + R'' \cos B'' \cos(l'' - \alpha))$$

$$\text{X. } \rho \sin \ell = -R \sin B + \frac{1+P'}{P'(1+\frac{Q'}{r^2})} (\rho' \sin \ell' + R' \sin B') - \frac{1}{P''} (\rho'' \sin \ell'' + R'' \sin B'')$$

$$\text{XI. } \rho'' \cos \ell'' = -R'' \cos B'' \cos(\alpha'' - l'') + \frac{1+P''}{P''(1+\frac{Q''}{r^2})} (\rho' \cos \ell' \cos(\alpha'' - \alpha') + R' \cos B' \cos(\alpha'' - l')) - \frac{1}{P''} (\rho' \cos \ell' \cos(\alpha'' - \alpha') + R' \cos B' \cos(\alpha'' - l'))$$

$$\text{XII. } \rho'' \sin \ell'' = -R'' \sin B'' + \frac{1+P''}{P''(1+\frac{Q''}{r^2})} (\rho' \sin \ell' + R' \sin B') - \frac{1}{P''} (\rho' \sin \ell' + R' \sin B')$$

Formulae IX...XII. nullo negotio ex aequationibus 1, 2, 3 art. 112. derivantur, si modo characteres illic adhibiti in eos quibus hic utimur rite convertuntur. Manifesto formulae multo simpliciores evadunt, si B, B', B'' evanescent. E combinatione formularum IX. et X. non modo ρ sed etiam ℓ , et perinde ex XI. et XII. praeter ρ'' etiam ℓ'' demanat: valores harum latitudinum cum observatis (calculum non ingredientibus), siquidem datae sunt, comparati ostendent, quonam praecisionis gradu latitudines extremae per elementa sex reliquis datis adaptata repraesentari possint.

171.

Exemplum ad illustrationem huius disquisitionis a *Vesta* desumere conveniet, quae inter omnes planetas recentissime detectos inclinatione ad eclipticam minima gaudet*). Eligimus observationes sequentes Bremae, Parisiis, Lilienthalii et Mediolani ab astronomis clari. OLBERS, BOUVARD, BESSEL et ORIANI institutas:

Tempus med. loci observationis	Ascensio recta	Declinatio
1807 Martii 30. 12 ^h 33 ^m 17 ^s	183° 52' 40" 8	11° 54' 27" Bor.
Maii 17. 8 16 5	178 36 42,3	11 39 46,8 . .
Iulii 11. 10 30 19	189 49 7,7	3 9 10,1 Bor.
Sept. 8. 7 22 16	212 50 3,4	8 38 17,0 Austr.

Pro iisdem temporibus e tabulis motuum Solis invenimus

	Longit. Solis ab acquino. app.	Nutatio	Distantia a terra	Latitudo Solis	Obliquitas eclipt. apparens
Martii 30	9° 21' 59" 5	+16" 8	0,9996448	+0" 23	23° 27' 50" 82
Maii 17	55 56 20,0	+16,2	1,0119789	-0,63	49,83
Iulii 11	108 34 53,3	+17,3	1,0165795	-0,46	49,19
Sept. 8	165 8 57,1	+16,7	1,0067421	+0,29	49,26

*) Nihilominus haec inclinatio etiamnum satis considerabilis est, ut orbitae determinationem satuto atque exacte tribus observationibus superstruere liceat: revera elementa prima, quae hoc modo ex observationibus 19 tantum diebus ad invicem distantibus deducta erant (vid. von ZACH Monatl. Corresp., Vol. XV. p. 595. 1807 Iuni) [Gauss Werke B. VI. S. 283], proxime iam accedunt ad ea, quae hic ex observationibus quatuor, 162 diebus ad invicem distitis, derivabuntur.

Iam loca observata planetae, adhibita eclipticae obliquitate apparente, in longitudes et latitudes conversa, a nutatione et aberratione fixarum purgata, tandemque demta praecessione ad initium anni 1807 reducta sunt, dein e locis Solis ad normam praeceptorum art. 72. derivata sunt loca terrae ficta (ut paralaxis ratio habeatur), longitudesque demta nutatione et praecessione ad eandem epocham translatae; tandem tempora ab initio anni numerata et ad meridianum Parisinum reducta. Hoc modo orti sunt numeri sequentes:

t, t', t'', t'''	89,505162	137,344502	192,419502	251,288102
$\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$	178° 43' 38" 87	174° 1' 30" 08	187° 45' 42" 23	213° 34' 15" 63
$\delta, \delta', \delta'', \delta'''$	12 27 6,16	10 8 7,80	6 47 25,51	4 20 21,63
l, l', l'', l'''	189 21 33,71	235 56 0,63	288 35 20,32	345 9 18,69
$\log R, R', R'', R'''$	9,9997990	0,0051376	0,0071739	0,0030625

Hinc deducimus

$$\begin{aligned}\gamma &= 168^{\circ} 32' 41'' 34, & \delta &= 62^{\circ} 23' 4'' 88, & \log a &= 9,9526104 \\ \gamma &= 173 \ 5 \ 15,68, & \delta &= 100 \ 45 \ 1,40, & \log a &= 9,9994839 \\ b &= -11,009449, & x &= -1,083306, & \log \lambda &= 0,0728800, & \log \mu &= 9,7139702n \\ b &= -2,082036, & x &= +6,322006, & \log \lambda &= 0,0798512n, & \log \mu &= 9,8387061 \\ A'D &= 37^{\circ} 17' 51'' 50, & A'D &= 89^{\circ} 24' 11'' 84, & \epsilon &= 9^{\circ} 5' 5'' 48 \\ B'D &= -25 \ 5 \ 13,38, & B'D &= -11 \ 20 \ 49,56\end{aligned}$$

His calculis praeliminaribus absolutis, *hypothesin primam* aggredimur. E temporum intervallis elicimus

$$\begin{aligned}\log k(t-t) &= 9,9153666 \\ \log k(t'-t') &= 9,9765359 \\ \log k(t''-t'') &= 0,0054651\end{aligned}$$

atque hinc valores primos approximatos

$$\begin{aligned}\log P' &= 0,06117 & \log(1+P') &= 0,33269 & \log Q' &= 9,59087 \\ \log P'' &= 9,97107 & \log(1+P'') &= 0,28681 & \log Q'' &= 9,68097\end{aligned}$$

hinc porro

$$\begin{aligned}c' &= -7,68361 & \log d' &= 0,04666n \\ c'' &= +2,20771 & \log d'' &= 0,12552\end{aligned}$$

Hisc valoribus, paucis tentaminibus factis, solutio sequens aequationum I. II. elicitur:

$$\begin{aligned}x' &= 2,04856 & z' &= 23^{\circ} 38' 17'' & \log r' &= 0,34951 \\ x'' &= 1,95745 & z'' &= 27 \ 2 \ 0 & \log r'' &= 0,34194\end{aligned}$$

Ex z', z'' atque ϵ eruiamus $C'C'' = v'' - v' = 17^{\circ} 7' 5''$: hinc $v' - v, r, v'' - v'', r''$ per aequationes sequentes determinandae erunt:

$$\begin{aligned}\log r \sin(v' - v) &= 9,74942 & \log r \sin(v' - v + 17^{\circ} 7' 5'') &= 0,07500 \\ \log r'' \sin(v'' - v'') &= 9,84729 & \log r'' \sin(v'' - v'' + 17^{\circ} 7' 5'') &= 0,10733\end{aligned}$$

unde eruiamus

$$\begin{aligned}v' - v &= 14^{\circ} 14' 32'' & \log r &= 0,35865 \\ v'' - v'' &= 18 \ 48 \ 33 & \log r'' &= 0,33887\end{aligned}$$

Denique invenitur $\log(n 01) = 0,00426$, $\log(n 12) = 0,00599$, $\log(n 23) = 0,00711$, atque hinc valores correcti ipsarum P', P'', Q', Q'' .

$$\begin{aligned}\log P' &= 0,05944 & \log Q' &= 9,60374 \\ \log P'' &= 9,97219 & \log Q'' &= 9,69581\end{aligned}$$

quibus *hypothesis secunda* superstruenda erit. Huius praecipua momenta ita se habent:

$$\begin{aligned}c' &= -7,67820 & \log d' &= 0,045736n \\ c'' &= +2,21061 & \log d'' &= 0,126054 \\ x' &= 2,03308 & z' &= 23^{\circ} 47' 54'' & \log r' &= 0,346747 \\ x'' &= 1,94290 & z'' &= 27 \ 12 \ 25 & \log r'' &= 0,339373 \\ C'C'' &= v'' - v' = 17^{\circ} 8' 0'' \\ v' - v &= 14^{\circ} 21' 36'' & \log r &= 0,354687 \\ v'' - v'' &= 18 \ 50 \ 43 & \log r'' &= 0,334564 \\ \log(n 01) &= 0,004359 & \log(n 12) &= 0,006102 & \log(n 23) &= 0,007280\end{aligned}$$

Hinc prodeunt valores denuo correcti ipsarum P' , P'' , Q' , Q'' :

$$\begin{aligned}\log P' &= 0,059426 & \log Q' &= 9,604749 \\ \log P'' &= 9,972249 & \log Q'' &= 9,697564\end{aligned}$$

quibus si ad *tertiam hypothesin* progredimur, numeri sequentes resultant:

$$\begin{aligned}c' &= -7,67815 & \log d' &= 0,045729n \\ c'' &= +2,21076 & \log d'' &= 0,126082 \\ x' &= 2,03255 & z' &= 23^{\circ}48'14'' & \log r' &= 0,346653 \\ x'' &= 1,94235 & z'' &= 27\ 12\ 49 & \log r'' &= 0,339276 \\ C'C'' &= v'' - v' = 17^{\circ}8'4'' \\ v' - v &= 14^{\circ}21'49'' & \log r &= 0,354522 \\ v'' - v'' &= 18\ 51\ 7 & \log r'' &= 0,334290\end{aligned}$$

$$\log(n01) = 0,004363 \quad \log(n12) = 0,006106 \quad \log(n23) = 0,007290$$

Quodsi iam ad normam praeceptorum art. praec. distantiae a terra supputantur, prodit:

$$\begin{aligned}p' &= 1,5635 & p'' &= 2,1319 \\ \log p \cos \ell &= 0,09876 & \log p'' \cos \ell'' &= 0,42842 \\ \log p \sin \ell &= 9,44252 & \log p'' \sin \ell'' &= 9,30905 \\ \ell &= 12^{\circ}26'40'' & \ell'' &= 4^{\circ}20'39'' \\ \log p &= 0,10909 & \log p'' &= 0,42967\end{aligned}$$

Hinc inveniuntur

	Corrections temporum	Tempora correcta
I	0,007335	89,497827
II	0,008921	135,335581
III	0,012165	192,407337
IV	0,015346	251,272756

unde prodeunt valores quantitatum P' , P'' , Q' , Q'' denuo correcti

$$\begin{aligned}\log P' &= 0,059415 & \log Q' &= 9,604782 \\ \log P'' &= 9,972263 & \log Q'' &= 9,697687\end{aligned}$$

Tandem si hisce valoribus novis *hypothesis quarta* formatur, numeri sequentes prodeunt:

$$\begin{aligned}c' &= -7,678116 & \log d' &= 0,045723n \\ c'' &= +2,210773 & \log d'' &= 0,126084 \\ x' &= 2,032473 & z' &= 23^{\circ}48'16''7 & \log r' &= 0,346638 \\ x'' &= 1,942281 & z'' &= 27\ 12\ 51,7 & \log r'' &= 0,339263 \\ v'' - v' &= 17^{\circ}8'51'' & \frac{1}{2}(u'' + u') &= 176\ 7\ 50\ 5 & \frac{1}{2}(u'' - u') &= 4^{\circ}33'23''6 \\ v' - v &= 14\ 21\ 51,9 & \log r &= 0,354503 \\ v'' - v'' &= 18\ 51\ 9,5 & \log r'' &= 0,334263\end{aligned}$$

Hi numeri ab iis, quos hypothesis tertia suppeditaverat, tam parum differunt, ut iam tuto ad ipsorum elementorum determinationem progressi liceat. Primo situm plani orbitae eruimus. Per praecepta art. 149. invenitur ex γ' , u' atque $A'C' = \delta' - z'$, inclinatio orbitae $= 7^{\circ}8'14''8$, longitudo nodi ascendentis $103^{\circ}16'37''2$, argumentum latitudinis in observatione secunda $94^{\circ}36'4''9$, adeoque longitudo in orbita $197^{\circ}52'42''1$; perinde ex γ'' , u'' atque $A'C'' = \delta'' - z''$ elicitor inclinatio orbitae $= 7^{\circ}8'14''8$, longitudo nodi ascendentis $103^{\circ}16'37''5$, argumentum latitudinis in observatione tertia $111^{\circ}44'9''7$, adeoque longitudo in orbita $215^{\circ}0'47''2$. Hinc erit longitudo in orbita pro observatione prima $183^{\circ}30'50''2$, pro quarta $233^{\circ}51'56''7$. Quodsi iam ex $t'' - t$, r , r'' atque $v'' - v = 50^{\circ}21'6''5$ orbitae dimensiones determinantur, prodit

Anomalia vera pro loco primo	293^{\circ}33'43''7
Anomalia vera pro loco quarto	343\ 54\ 50,2
Hinc longitudo perihelii	249\ 57\ 6,5
Anomalia media pro loco primo	302\ 33\ 32,6
Anomalia media pro loco quarto	346\ 32\ 25,2
Motus medius diurnus sidereus	978^{\circ}7216

Anomalia media pro initio anni 1807	278° 13' 39" 1
Longitudo media pro eadem epocha	168 10 45,6
Angulus φ	5 2 58,1
Logarithmus semiaxis maioris	0,372898

Si secundum haec elementa pro temporibus t, t', t'', t''' correctis loca planetae geocentrica computantur, quatuor longitudo cum $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$, duaeque latitudines intermediae cum δ, δ'' ad unam minuti secundi partem decimam conspirant; latitudines extremae vero prodeunt 12° 26' 43" 7 atque 4° 20' 40" 1, illa 22' 4" errans defectu, haec 18' 5" excessu. Attamen si manentibus elementis reliquis tantummodo inclinatio orbitae 6" augetur, longitudoque nodi 4' 40" diminuat, errores inter omnes latitudines distributi ad pauca minuta secunda deprimentur, longitudoque levissimis tantum erroribus afficiuntur, qui et ipsi propemodum ad nihilum reducentur, si insuper epocha longitudinis 2" diminuat.

SECTIO TERTIA

Determinatio orbitae observationibus quocunque quam proxime satisfaciatis.

172.

Si observationes astronomicae ceterique numeri, quibus orbitarum computus innititur, absoluta praecisione gauderent, elementa quoque, sive tribus observationibus sive quatuor superstructa fuerint, absolute exacta statim prodirent (quatenus quidem motus secundum leges KEPLERI exacte fieri supponitur), adeoque accitis aliis aliisque observationibus confirmari tantum possent, haud corrigi. Verum enim vero quum omnes mensurationes atque observationes nostrae nihil sint nisi approximationes ad veritatem, idemque de omnibus calculis illis innitentibus valere debeat, scopum summum omnium computorum circa phaenomena concreta institutorum in eo ponere oportebit, ut ad veritatem quam proxime fieri potest accedamus. Hoc autem aliter fieri nequit, nisi per idoneam combinationem observationum plurium, quam quot ad determinationem quantitatum incognitarum absolute requiruntur. Hoc negotium tunc demum suscipere licebit, quando orbitae cognitio approximata iam innuit, quae dein ita rectificanda est, ut omnibus observationibus quam exactissime satisfaciatur. Etiam si haec expressio aliquid vagi implicare videatur, tamen infra principia tradentur, secundum quae problema solutioni legitimae ac methodicae subiicietur.

Praecisionem summam ambire tunc tantummodo operae pretium esse potest, quando orbitae determinandae postrema quasi manus apponenda est. Contra quamdiu spes affulget, mox novas observationes novis correctionibus occasionem

daturas esse, prout res fert plus minusve ab extrema praecisione remittere conveniet, si tali modo operationum prolixitatem notabiliter sublevare licet. Nos utriusque casui consulere studebimus.

173.

Maximi imprimis momenti est, ut singulae corporis coelestis positiones geocentricae, quibus orbitam superstruere propositum est, non ex observationibus solitariis petitae sint, sed si fieri potest e pluribus ita combinatis, ut errores forte commissi quantum licet sese mutuo destruxerint. Observationes scilicet tales, quae paucorum dierum intervallo ab invicem distant — vel adeo prout res fert intervallo 15 aut 20 dierum — in calculo non adhibendae erunt tanquam totidem positiones diversae, sed potius positio unica inde derivabitur, quae inter cunctas quasi media est, adeoque praecisionem longe maiorem admittit, quam observationes singulae seorsim consideratae. Quod negotium sequentibus principiis innititur.

Corporis coelestis loca geocentrica ex elementis approximatis calculata a locis veris parum discrepare, differentiaeque inter haec et illa mutationes lentissimas tantum subire debent, ita ut intra paucorum dierum decursum propemodum pro constantibus haberi queant, vel saltem variationes tanquam temporibus proportionales spectandae sint. Si itaque observationes ab omni errore immunes essent, differentiae inter locos observatos temporibus t, t', t'' etc. respondent, eosque qui ex elementis computati sunt, i. e. differentiae tum longitudinum tum latitudinum, sive tum ascensionum rectarum tum declinationum, observatarum a computatis, forent quantitates vel sensibilibus aequales, vel saltem uniformiter lentissimeque increscentes aut decrescentes. Respondeant e. g. illis temporibus ascensiones rectae observatae $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ etc., computatae autem sint $\alpha + \delta, \alpha' + \delta', \alpha'' + \delta'', \alpha''' + \delta'''$ etc.; tunc differentiae $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$ etc. a veris elementorum deviationibus eatenus tantum discrepabunt, quatenus observationes ipsae sunt erroneae: si itaque illas deviationes pro omnibus istis observationibus tanquam constantes spectare licet, exhibebunt quantitates $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$ etc. totidem determinationes diversae eiusdem magnitudinis, pro cuius valore correcto itaque assumere conveniet medium arithmeticum inter illas determinationes, quatenus quidem nulla adest ratio, cur unam alteramve praefereamus. Sin vero observationibus singulis idem praecisionis gradus haud attribuendus videtur, supponamus

praecisionis gradum in singulis resp. proportionalem aestimandum esse numeris e, e', e'' etc., i. e. errores his numeris reciproce proportionales in observationibus aequae facile committi potuisse; tum secundum principia infra tradenda valor medius maxime probabilis haud amplius erit medium arithmeticum simplex, sed $= \frac{ee\delta + e'e'\delta' + e''e''\delta'' + e'''e'''\delta''' + \text{etc.}}{ee + e'e' + e''e'' + e'''e''' + \text{etc.}}$. Statuendo iam hunc valorem medium $= \Delta$, pro ascensionibus rectis veris assumere licebit resp. $\alpha + \delta - \Delta, \alpha' + \delta' - \Delta, \alpha'' + \delta'' - \Delta, \alpha''' + \delta''' - \Delta$, tumque arbitrium erit, quam in calculo utamur. Quodsi vero vel observationes temporis intervallo nimis magno ab invicem distant, aut si orbitae elementa satis approximata nondum innotuerant, ita ut non licerit, horum deviationes tanquam constantes pro observationibus cunctis spectare, facile perspicitur, aliam hinc differentiam non oriri, nisi quod deviatio media sic inventa non tam omnibus observationibus communis supponenda erit, quam potius ad tempus medium quoddam referenda, quod perinde e singulis temporum momentis derivare oportet, ut Δ ex singulis deviationibus, adeoque generaliter ad tempus $\frac{ee\delta + e'e'\delta' + e''e''\delta'' + e'''e'''\delta''' + \text{etc.}}{ee + e'e' + e''e'' + e'''e''' + \text{etc.}}$. Si itaque summam praecisionem appetere placet, pro eodem tempore locum geocentricum ex elementis computare, ac dein ab errore medio Δ liberare oportebit, ut positio quam accuratissima emergat: plerumque tamen abunde sufficiet, si error medius ad observationem tempori medio proximam referatur. Quae hic de ascensionibus rectis diximus, perinde de declinationibus, aut si mavis de longitudinibus et latitudinibus valent: attamen semper praestabit, immediate ascensiones rectas et declinationes ex elementis computatas cum observatis comparare; sic enim non modo calculum magis expeditum lucramur, praesertim si methodis in artt. 53...60. expositis utimur, sed eo insuper titulo illa ratio se commendat, quod observationes incompletas quoque in usum vocare licet, praetereaque si omnia ad longitudines et latitudines referrentur metuendum esset, ne observatio quoad ascensionem recte, quoad declinationem male instituta (vel vice versa) ab utraque parte depravetur, atque sic prorsus inutilis evadat. — Ceterum gradus praecisionis medio ita invento attribuendus secundum principia mox explicanda erit $= \sqrt{(ee + e'e' + e''e'' + e'''e''' + \text{etc.})}$, ita ut quatuor vel novem observationes aequae exactae requirantur, si medium praecisione dupla vel tripla gaudere debet, et sic porro.

174.

Si corporis coelestis orbita secundum methodos in Sectionibus praeced. traditas

e tribus quatuorve positionibus geocentricis talibus determinata est, quae ipsae singulae ad normam art. praec. e compluribus observationibus petitae fuerant, orbita ista inter omnes hasce observationes medium quasi tenebit, neque in differentiis inter locos observatos et calculatos ullum ordinis vestigium remanebit quod per elementorum correctionem tollere vel sensibilibus extenuare liceat. Iam quoties tota observationum copia intervallum temporis non nimis magnum complectitur, hoc modo consensum exoptatissimum elementorum cum omnibus observationibus assequi licebit, si modo tres quatuorve positiones quasi normales scite eligantur. In determinandis orbitis cometarum planetarumve novorum, quorum observationes annum unum nondum egrediuntur, ista ratione plerumque tantum proficiemus, quantum ipsa rei natura permittit. Quoties itaque orbita determinanda angulo considerabili versus eclipticam inclinata est, in genere tribus observationibus superstruetur, quas quam remotissimas ab invicem eligemus: si vero hoc pacto in aliquem casuum supra exclusorum (artt. 160...162.) fortuito incidemus, aut quoties orbitae inclinatio nimis parva videtur, determinationem ex positionibus quatuor praefereamus, quas itidem quam remotissimas ab invicem accipiemus.

Quando autem iam adest observationum series longior plures annos complectens, plures inde positiones normales derivari poterunt: quamobrem praecisioni maxinae male consuleremus, si ad orbitae determinationem tres tantum quatuorve positiones excerpteremus, omnesque reliquas omnino negligeremus. Quin potius in tali casu, si summam praecisionem assequi propositum est, operam dabimus, ut positiones exquisitas quam plurimas congeramus, atque in usum vocemus. Tunc itaque aderunt data plura, quam ad incognitarum determinationem requiruntur: sed omnia ista data erroribus utut exiguis obnoxia erunt, ita ut generaliter impossibile sit, omnibus ex asse satisfacere. Iam quum nulla adsit ratio, cur ex hisce datis sex haec vel illa tamquam absolute exacta consideremus, sed potius, secundum probabilitatis principia, in cunctis promiscue errores maiores vel minores aequae possibiles supponere oporteat; porro quum generaliter loquendo errores leviores saepius committantur quam graviores; manifestum est, orbitam talem, quae dum sex datis ad amissim satisficit a reliquis plus minusve deviat, principii calculi probabilitatis minus consentaneam censendam esse, quam aliam, quae dum ab illis quoque sex datis aliquantulum discrepat, consensum tanto meliorem cum reliquis praestat. Investigatio orbitae, sensu stricto maximam probabilitatem

prae se ferentis a cognitione legis pendeat, secundum quam errorum crescentium probabilitas decrescit: illa vero a tot considerationibus vagis vel dubiis — physiologicis quoque — pendet, quae calculo subiaci nequeunt, ut huiusmodi legem vix ac ne vix quidem in ullo astronomiae practicae casu rite assignare liceat. Nihilominus indagatio nexus inter hanc legem orbitamque maxime probabilem, quam summa iam generalitate suscipimus, neutiquam pro speculatione sterili habenda erit.

175.

Ad hunc finem a problemate nostro speciali ad disquisitionem generalissimam in omni calculi ad philosophiam naturalem applicatione fecundissimam ascendemus. Sint V, V', V'' etc. functiones incognitarum p, q, r, s etc., μ multitudo illarum functionum, ν multitudo incognitarum, supponamusque, per observationes immediatas valores functionum ita inventos esse $V = M, V' = M', V'' = M''$ etc. Generaliter itaque loquendo evolutio valorum incognitarum constituit problema indeterminatum, determinatum, vel plus quam determinatum, prout fuerit $\mu < \nu, \mu = \nu$, vel $\mu > \nu$ *). Hic de ultimo tantum casu sermo erit, in quo manifesto exacta cunctarum observationum repraesentatio tunc tantum possibilis foret, ubi illae omnes ab erroribus absolute immunes essent. Quod quum in rerum natura locum non habeat, omne systema valorum incognitarum p, q, r, s etc. pro possibili habendum erit, ex quo valores functionum $M = V, M' = V', M'' = V''$, etc. oriuntur, limitibus errorum, qui in istis observationibus committi potuerunt, non maiores: quod tamen neutiquam ita intelligendum est, ac si singula haec systemata possibilia aequali probabilitatis gradu gauderent.

Supponemus primo, eum rerum statum fuisse in omnibus observationibus, ut nulla ratio adsit, cur aliam alia minus exactam esse suspicemur, sive ut errores aequae magnos in singulis pro aequae probabilibus habere oporteat. Probabilitas itaque cuilibet errori Δ tribuenda exprimitur per functionem ipsius Δ , quam per $\varphi\Delta$ denotabimus. Iam etiamsi hanc functionem praecise assignare non liceat,

*) Si in casu tertio functiones V, V', V'' , etc. ita comparatae essent, ut $\mu + 1 = \nu$, ex ipsis ve plures tanquam functiones reliquarum spectare liceret, problema respectu harum functionum etiamnum plus quam determinatum foret, respectu quantitatum p, q, r, s etc. autem indeterminatum: harum scilicet valores ne tunc quidem determinare liceret, quando valores functionum V, V', V'' etc. absolute exacti dati essent: sed hunc casum a disquisitione nostra excludemus.

saltem affirmare possumus, eius valorem fieri debere maximum pro $\Delta = 0$, plerumque aequalem esse pro valoribus aequalibus oppositis ipsius Δ , denique evanescere, si pro Δ accipiat error maximus vel maior valor. Proprie itaque $\varphi \Delta$ ad functionum discontinuarum genus referre oportet, et si quam functionem analyticam istius loco substituere ad usus practicos nobis permittimus, haec ita comparata esse debet, ut utrinque a $\Delta = 0$ asymptotice quasi ad 0 convergat, ita ut ultra istum limitem tamquam vere evanescens considerari possit. Porro probabilitas, errorem iacere inter limites Δ et $\Delta + d\Delta$ differentia infinite parva $d\Delta$ ab invicem distantes, exprimenda erit per $\varphi \Delta \cdot d\Delta$; proin generaliter probabilitas, errorem iacere inter D et D' , exhibebitur per integrale $\int \varphi \Delta \cdot d\Delta$, a $\Delta = D$ usque ad $\Delta = D'$ extensum. Hoc integrale a valore maximo negativo ipsius Δ usque ad valorem maximum positivum, sive generalius a $\Delta = -\infty$ usque ad $\Delta = +\infty$ sumtum, necessario fieri debet $= 1$.

Supponendo igitur, systema aliquod determinatum valorum quantitatum p, q, r, s etc. locum habere, probabilitas, pro V ex observatione proditura esse valorem M , exprimitur per $\varphi(M-V)$, substitutis in V pro p, q, r, s etc. valoribus suis; perinde $\varphi(M'-V')$, $\varphi(M''-V'')$ etc. expriment probabilitates, ex observationibus resultaturos esse functionum V, V' etc. valores M, M' etc. Quamobrem quandoquidem omnes observationes tamquam eventus ab invicem independentes spectare licet, productum

$$\varphi(M-V) \cdot \varphi(M'-V') \cdot \varphi(M''-V'') \text{ etc.} = Q$$

exprimet expectationem seu probabilitatem, omnes istos valores simul ex observationibus prodituros esse.

176.

Iam perinde, ut positis valoribus incognitarum determinatis quibuscunque, cuivis systemati valorum functionum V, V', V'' etc. ante observationem factam probabilitas determinata competit, ita vice versa, postquam ex observationibus valores determinati functionum prodierunt, ad singula systemata valorum incognitarum, e quibus illi demanare potuerunt, probabilitas determinata redundabit: manifesto enim systemata ea pro magis probabilibus habenda erunt, in quibus eventus eius qui prodit expectatio maior affuerat. Huiusce probabilitatis aestimatio sequenti theoremati innititur:

Si posita hypothesis aliqua H probabilitas alicuius eventus determinati E est $= h$, posita autem hypothesis alia H' illam excludente et per se aeque probabili eiusdem eventus probabilitas est $= h'$: tum dico, quando eventus E revera apparuerit, probabilitatem, quod H fuerit vera hypothesis, fore ad probabilitatem, quod H' fuerit hypothesis vera, ut h ad h' .

Ad quod demonstrandum supponamus, per distinctionem omnium circumstantiarum, a quibus pendet, num H aut H' aut alia hypothesis locum habeat, utrum eventus E an alius emergere debeat, formari systema quoddam casuum diversorum, qui singuli per se (i. e. quandiu incertum est, utrum eventus E an alius proditura sit) tamquam aeque probabiles considerandi sint, hosque casus ita distribui:

ut inter ipsos reperiuntur	ubi locum habere debet hypothesis	cum modificationibus talibus ut prodire debeat eventus
m	H	E
n	H	ab E diversus
m'	H'	E
n'	H'	ab E diversus
m''	ab H et H' diversa	E
n''	ab H et H' diversa	ab E diversus

Tunc erit $h = \frac{m}{m+n}$, $h' = \frac{m'}{m'+n'}$; porro ante eventum cognitum probabilitas hypothesis H erat $= \frac{m}{m+n+m'+m''+n'+n''}$, post eventum cognitum autem, ubi casus n, n', n'' e possibile numero abeunt, eiusdem hypothesis probabilitas erit $= \frac{m}{m+m'+m''}$; perinde hypothesis H' probabilitas ante et post eventum resp. exprimitur per $\frac{m'}{m+n+m'+m''+n'+n''}$ et $\frac{m'}{m+m'+m''}$: quoniam itaque hypothesis H et H' ante eventum cognitum eadem probabilitas supponitur, erit $m+n = m'+n'$, unde theorematum veritas sponte colligitur.

Iam quatenus supponimus, praeter observationes $V=M, V'=M', V''=M''$ etc. nulla alia data ad incognitarum determinationem adesse, adeoque omnia systemata valorum harum incognitarum ante illas observationes aeque probabilia fuisse, manifesto probabilitas cuiusvis systematis determinati post illas observationes ipsi Q proportionalis erit. Hoc ita intelligendum est, probabilitatem, quod valores incognitarum resp. iaceant inter limites infinite vicinos p et $p+dp$, q et $q+dq$, r et $r+dr$, s et $s+ds$ etc., exprimi per $\lambda Q dp dq dr ds$ etc.,

ubi λ erit quantitas constans a p, q, r, s etc. independens. Et quidem manifesto erit $\frac{1}{\lambda}$ valor integralis ordinis $\int \Omega dp dq dr ds \dots$, singulis variabilibus p, q, r, s etc. a valore $-\infty$ usque ad valorem $+\infty$ extensis.

177.

Hinc iam sponte sequitur, systema maxime probabile valorum quantitatum p, q, r, s etc. id fore, in quo Ω valorem maximum obtineat, adeoque ex ∇ aequationibus $\frac{d\Omega}{dp} = 0, \frac{d\Omega}{dq} = 0, \frac{d\Omega}{dr} = 0, \frac{d\Omega}{ds} = 0$ etc. erendum esse. Hae aequationes, statuendo $M - V = v, M' - V' = v', M'' - V'' = v''$ etc., atque $\frac{d\varphi}{d\Delta} = \varphi' \Delta$, formam sequentem nanciscuntur:

$$\frac{dv}{dp} \varphi' v + \frac{dv'}{dp} \varphi' v' + \frac{dv''}{dp} \varphi' v'' + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{dv}{dq} \varphi' v + \frac{dv'}{dq} \varphi' v' + \frac{dv''}{dq} \varphi' v'' + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{dv}{dr} \varphi' v + \frac{dv'}{dr} \varphi' v' + \frac{dv''}{dr} \varphi' v'' + \text{etc.} = 0$$

$$\frac{dv}{ds} \varphi' v + \frac{dv'}{ds} \varphi' v' + \frac{dv''}{ds} \varphi' v'' + \text{etc.} = 0, \text{ etc.}$$

Hinc itaque per eliminationem problematis solutio plene determinata derivari poterit, quamprimum functionis φ' indoles innotuit. Quae quoniam a priori definiri nequit, rem ab altera parte aggredientes inquiremus, cuinam functioni, tacite quasi pro basi acceptae, proprie innixum sit principium trivium, cuius praestantia generaliter agnoscitur. Axiomatis scilicet loco haberi solet hypothesis, si quae quantitas per plures observationes immediatas, sub aequalibus circumstantiis aequalique cura institutas, determinata fuerit, medium arithmeticum inter omnes valores observatos exhibere valorem maxime probabilem, si non absoluto rigore, tamen proxime saltem, ita ut semper tutissimum sit illi inhaerere. Statuendo itaque $V = V' = V''$ etc. $= p$, generaliter esse debet $\varphi'(M - p) + \varphi'(M' - p) + \varphi'(M'' - p) + \text{etc.} = 0$, si pro p substituitur valor $\frac{1}{\mu} (M + M' + M'' + \text{etc.})$, quemcumque integrum positivum exprimat μ . Supponendo itaque $M' = M'' = \text{etc.} = M - \mu N$, erit generaliter, i. e. pro quovis valore integro positivo ipsius μ , $\varphi'(\mu - 1)N = (1 - \mu)\varphi'(-N)$, unde facile colligitur, generaliter esse debere $\frac{\varphi' \Delta}{\Delta}$ quantitatem constantem, quam per k designabimus. Hinc fit, $\log \varphi \Delta =$

$\frac{1}{2} k \Delta \Delta + \text{Const.}$, sive designando basin logarithmorum hyperbolicorum per e , supponendoque $\text{Const.} = \log z$,

$$\varphi \Delta = z e^{\frac{1}{2} k \Delta \Delta}$$

Porro facile perspicitur, k necessario negativam esse debere, quo Ω revera fieri possit maximum, quamobrem statuimus $\frac{1}{2} k = -h$; et quum per theorema elegans primo ab ill. LAPLACE inventum, integrale $\int e^{-h h \Delta \Delta} d\Delta$, a $\Delta = -\infty$ usque ad $\Delta = +\infty$, fiat $= \sqrt{\frac{\pi}{h}}$ (denotando per π semicircumferentiam circuli cuius radius 1), functio nostra fiet

$$\varphi \Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h h \Delta \Delta}$$

178.

Functio modo eruta omni quidem rigore errorum probabilitates exprimere certo non potest: quum enim errores possibiles semper limitibus certis coercerentur, errorum maiorum probabilitas semper evadere deberet $= 0$, dum formula nostra semper valorem finitum exhibet. Attamen hic defectus, quo omnis functio analytica natura sua laborare debet, ad omnes usus practicos nullius momenti est, quum valor functionis nostrae tam rapide decrescat, quamprimum $h \Delta$ valorem considerabilem acquisivit, ut tuto ipsi 0 aequivalens censi possit. Praeterea ipsos errorum limites absoluto rigore assignare, rei natura numquam permittit.

Ceterum constans h tamquam mensura praecisionis observationum considerari poterit. Si enim probabilitas erroris Δ in aliquo observationum systemate per $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h h \Delta \Delta}$, in alio vero systemate observationum magis minusve exactarum per $\frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h' h' \Delta \Delta}$ exprimi concipitur, expectatio, in observatione aliqua e systemate priori errorem inter limites $-\delta$ et $+\delta$ contineri, exprimitur per integrale $\int_{-\delta}^{+\delta} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h h \Delta \Delta} d\Delta$ a $\Delta = -\delta$ usque ad $\Delta = +\delta$ sumtum, et perinde expectatio, errorem alicuius observationis e systemate posteriori limites $-\delta'$ et $+\delta'$ non egredi, exprimitur per integrale $\int_{-\delta'}^{+\delta'} \frac{h'}{\sqrt{\pi}} e^{-h' h' \Delta \Delta} d\Delta$ a $\Delta = -\delta'$ usque ad $\Delta = +\delta'$ extensum: ambo autem integralia manifesto aequalia fiunt, quoties habetur $h \delta = h' \delta'$. Quodsi igitur e. g. $h' = 2h$, aequae facile in systemate priori error duplex committi poterit, ac simplex in posteriori, in quo casu observationibus posterioribus secundum vulgarem loquendi morem praecisio duplex tribuitur.

179.

Iam ea quae ex hac lege sequuntur evolvemus. Sponte patet, ut productum $Q = h^p \pi^{-\frac{1}{2}p} e^{-h(h(vv+v'v'+v''v''+\dots))}$ fiat maximum, aggregatum $vv+v'v'+v''v''+\dots$ etc. minimum fieri debere. *Systema itaque maxime probabile valorum incognitarum* p, q, r, s etc. *id erit, in quo quadrata differentiarum inter functionum* V, V', V'' etc. *valores observatos et computatos summam minimam efficiunt, siquidem in omnibus observationibus idem praecisionis gradus praesumendus est.*

Hocce principium, quod in omnibus applicationibus mathesis ad philosophiam naturalem usum frequentissimum offert, ubique axiomatis loco eodem iure valere debet, quo medium arithmeticum inter plures valores observatos eiusdem quantitatis tamquam valor maxime probabilis adoptatur.

Ad observationes praecisionis *inaequalis* principium nullo iam negotio extendi potest. Scilicet si mensura praecisionis observationum, per quas inventum est $V=M, V'=M', V''=M''$ etc. resp. per h, h', h'' etc. exprimitur, i. e. si supponitur, errores his quantitibus reciproce proportionales in istis observationibus aequae facile committi potuisse, manifesto hoc idem erit, ac si per observationes praecisionis aequalis (cuius mensura $=1$) valores functionum $hV, h'V', h''V''$ etc. immediate inventi essent $=hM, h'M', h''M''$ etc.: quamobrem systema maxime probabile valorum pro quantitibus p, q, r, s etc. id erit, ubi aggregatum $hhvv+hh'v'v'+hh''v''v''+\dots$ etc. i. e. ubi *summa quadratorum differentiarum inter valores revera observatos et computatos per numeros qui praecisionis gradum metiuntur multiplicatarum fit minimum.* Hoc pacto ne necessarium quidem est, ut functiones V, V', V'' etc. ad quantitates homogeneas referantur, sed heterogeneas quoque (e. g. minuta secunda arcuum et temporis) repraesentare poterunt, si modo rationem errorum, qui in singulis aequae facile committi poterunt, aestimare licet.

180.

Principium in art. praec. expositum eo quoque nomine se commendat, quod determinatio incognitarum numerica ad algorithmum expeditissimum reducitur, quoties functiones V, V', V'' etc. lineares sunt. Supponamus esse

$$M-V=v=-m+ap+bq+cr+ds+\text{etc.}$$

$$M'-V'=v'=-m'+a'p+b'q+c'r+d's+\text{etc.}$$

$$M''-V''=v''=-m''+a''p+b''q+c''r+d''s+\text{etc.}$$

etc., statuamusque

$$av+a'v'+a''v''+\text{etc.}=P$$

$$bv+b'v'+b''v''+\text{etc.}=Q$$

$$cv+c'v'+c''v''+\text{etc.}=R$$

$$dv+d'v'+d''v''+\text{etc.}=S$$

etc. Tunc v aequationes art. 177., e quibus incognitarum valores determinare oportet, manifesto hae erunt:

$$P=0, Q=0, R=0, S=0, \text{ etc.}$$

siquidem observationes aequae bonas supponimus, ad quem casum reliquos reducere in art. praec. docuimus. Adsunt itaque totidem aequationes lineares, quot incognitae determinandae sunt, unde harum valores per eliminationem vulgarem elicientur.

Videamus nunc, utrum haec eliminatio semper possibilis sit, an unquam solutio indeterminata vel adeo impossibilis evadere possit. Ex eliminationis theoria constat, casum secundum vel tertium tunc locum habiturum esse, quando ex aequationibus $P=0, Q=0, R=0, S=0$ etc., omitta una, aequatio conflari potest vel identica cum omitta vel eidem repugnans, sive quod eodem redit, quando assignare licet functionem linearem $\alpha P+\epsilon Q+\gamma R+\delta S+\text{etc.}$, quae fit identice vel $=0$ vel saltem ab omnibus incognitis p, q, r, s etc. libera. Supponamus itaque fieri $\alpha P+\epsilon Q+\gamma R+\delta S+\text{etc.}=x$. Sponte habetur aequatio identica

$$(v+m)v+(v'+m')v'+(v''+m'')v''+\text{etc.}=pP+qQ+rR+sS+\text{etc.}$$

Quodsi itaque per substitutiones $p=\alpha x, q=\epsilon x, r=\gamma x, s=\delta x$ etc. functiones v, v', v'' etc. resp. in $-m+\lambda x, -m'+\lambda'x, -m''+\lambda''x$ etc. transire supponimus, manifesto aderit aequatio identica

$$(\lambda\lambda+\lambda'\lambda'+\lambda''\lambda''+\text{etc.})xx-(\lambda m+\lambda'm'+\lambda''m''+\text{etc.})x=xx$$

i. e. erit $\lambda\lambda + \lambda\lambda' + \lambda\lambda'' + \text{etc.} = 0$, $x + \lambda m + \lambda m' + \lambda m'' + \text{etc.} = 0$: hinc vero necessario esse debebit $\lambda = 0$, $\lambda' = 0$, $\lambda'' = 0$ etc. atque $x = 0$. Hinc patet, functiones omnes V , V' , V'' etc. ita comparatas esse, ut valores ipsarum non mutantur, si quantitates p , q , r , s etc. capiant incrementa vel decrementa quaecunque numeris α , β , γ , δ etc. proportionalia: huiusmodi autem casus, in quibus manifesto determinatio incognitarum ne tunc quidem possibilis esset, si ipsi veri valores functionum V , V' , V'' etc. darentur, huc non pertinere iam supra monuimus.

Ceterum ad casum hic consideratum omnes reliquos, ubi functiones V , V' , V'' etc. non sunt lineares, facile reducere possumus. Scilicet designantibus π , χ , ρ , σ etc. valores approximatos incognitarum p , q , r , s etc. (quos facile eliciemus, si ex μ aequationibus $V = M$, $V' = M'$, $V'' = M''$ etc. primo tantum in usum vocamus), introducemus incognitarum loco alias p' , q' , r' , s' etc., statuendo $p = \pi + p'$, $q = \chi + q'$, $r = \rho + r'$, $s = \sigma + s'$ etc.: manifesto harum novarum incognitarum valores tam parvi erunt, ut quadrata productaque negligere liceat, quo pacto aequationes sponte evadent lineares. Quodsi dein calculo absoluto contra expectationem valores incognitarum p' , q' , r' , s' etc. tanti emergerent, ut parum tutum videatur, quadrata productaque neglexisse, eiusdem operationis repetitio (acceptis loco ipsarum π , χ , ρ , σ etc. valoribus correctis ipsarum p , q , r , s etc.) remedium promptum affert.

181.

Quoties itaque unica tantum incognita p adest, ad cuius determinationem valores functionum $ap + n$, $a'p + n'$, $a''p + n''$ etc. resp. inventi sunt $= M$, M' , M'' etc. et quidem per observationes aequae exactas, valor maxime probabilis ipsius p erit

$$= \frac{am + a'm' + a''m'' + \text{etc.}}{aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.}} = A$$

scribendo m , m' , m'' etc. pro $M - n$, $M' - n'$, $M'' - n''$ etc.

Iam ut gradus praecisionis in hoc valore praesumendae aestimetur, supponemus, probabilitatem erroris Δ in observationibus exprimi per $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-hh\Delta\Delta}$. Hinc probabilitas, valorem verum ipsius p esse $= A + p'$, proportionalis erit functioni

$$e^{-hh((ap - m)^2 + (a'p - m')^2 + (a''p - m'')^2 + \text{etc.})}$$

si pro p substituitur $A + p'$. Exponens huius functionis reduci potest ad formam $-hh(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})(pp - 2pA + B)$, ubi B a p independens est: proin functio ipsa proportionalis erit huic

$$e^{-hh(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})p'p'}$$

Patet itaque, valori A eundem praecisionis gradum tribuendum esse, ac si inventus esset per observationem immediatam, cuius praecisio ad praecisionem observationum primitivarum esset ut $h\sqrt{(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})}$ ad h , sive ut $\sqrt{(aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.})}$ ad 1.

182.

Disquisitioni de gradu praecisionis incognitarum valoribus tribuendo, quoties plures adsunt, praemittere oportebit considerationem accuratiorem functionis $vv + v'v' + v''v'' + \text{etc.}$, quam per W denotabimus.

I. Statuamus $\frac{dW}{dp} = p' = \lambda + \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \text{etc.}$, atque $W - \frac{p'p'}{2} = W'$, patetque fieri $p' = P$, et, quum sit $\frac{dW'}{dp} = \frac{dW}{dp} - \frac{p'}{2} \cdot \frac{dp'}{dp} = 0$, functionem W' a p liberam fore. Coefficientes $\alpha = aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.}$ manifesto semper erit quantitas positiva.

II. Perinde statuemus $\frac{dW'}{dq} = q' = \lambda' + \beta'q + \gamma'r + \delta's + \text{etc.}$, atque $W' - \frac{q'q'}{2} = W''$, eritque $q' = \frac{1}{2} \cdot \frac{dW'}{dq} - \frac{p'}{2} \cdot \frac{dp'}{dq} = Q - \frac{\beta}{\alpha} \cdot p'$, atque $\frac{dW''}{dq} = 0$, unde patet, functionem W'' tum a p tum a q liberam fore. Haec locum non habent, si fieri posset $\beta = 0$. Sed patet, W' oriri ex $vv + v'v' + v''v'' + \text{etc.}$, eliminata quantitate p ex v , v' , v'' etc. adiumento aequationis $p' = 0$; hinc β' erit summa coefficientium ipsius qq in vv , $v'v'$, $v''v''$ etc. post illam eliminationem, hi vero singuli coefficientes ipsi sunt quadrata, neque omnes simul evanescere possunt, nisi in casu supra excluso, ubi incognitae indeterminatae manent. Patet itaque, β' esse debere quantitatem positivam.

III. Statuendo denuo $\frac{dW''}{dr} = r' = \lambda'' + \gamma''r + \delta''s + \text{etc.}$, atque $W'' - \frac{r'r'}{2} = W'''$, erit $r' = R - \frac{\gamma}{\alpha} p' - \frac{\beta}{\alpha} q'$, atque W''' libera tum a p , tum a q , tum a r . Ceterum coefficientem γ'' necessario positivum fieri, simili modo probatur, ut in II. Facile scilicet perspicitur, γ'' esse summam coefficientium ipsius rr in vv , $v'v'$, $v''v''$ etc., postquam quantitates p et q adiumento aequationum $p = 0$, $q = 0$ ex v , v' , v'' etc. eliminatae sunt.

IV. Eodem modo statuendo $\frac{1}{2} \frac{dW''}{ds} = s' = \lambda'' + \delta'' s + \text{etc.}$, $W'' = W'' - \frac{s's'}{\delta''}$, erit $s' = S - \frac{1}{a} p' - \frac{1}{c'} q' - \frac{1}{\gamma''} r'$, W'' a p, q, r, s libera, atque δ'' quantitas positiva.

V. Hoc modo, si praeter p, q, r, s adhuc aliae incognitae adsunt, ulterius progredi licebit, ita ut tandem habeatur

$$W = \frac{1}{a} p p' + \frac{1}{c'} q' q' + \frac{1}{\gamma''} r' r' + \frac{1}{\delta''} s s' + \text{etc.} + \text{Const.}$$

ubi omnes coefficientes $a, c', \gamma'', \delta''$ etc. erunt quantitates positivae.

VI. Iam probabilitas alicuius systematis valorum determinatorum pro quantitatibus p, q, r, s etc. proportionalis est functioni e^{-hhW} , quamobrem, manente valore quantitatis p indeterminato, probabilitas systematis valorum determinatorum pro reliquis, proportionalis erit integrali $\int e^{-hhW} dp$ a $p = -\infty$ usque ad $p = +\infty$ extenso, quod per theorema ill. LAPLACE fit

$$= h^{-1} a^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-hh(\frac{1}{c'} q' q' + \frac{1}{\gamma''} r' r' + \frac{1}{\delta''} s s' + \text{etc.})}$$

haecce itaque probabilitas proportionalis erit functioni $e^{-hhW'}$. Perinde si insuper q tamquam indeterminata tractatur, probabilitas systematis valorum determinatorum pro r, s etc. proportionalis erit integrali $\int e^{-hhW'} dq$ a $q = -\infty$ usque ad $q = +\infty$ extenso, quod fit

$$= h^{-1} c'^{-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-hh(\frac{1}{\gamma''} r' r' + \frac{1}{\delta''} s s' + \text{etc.})}$$

sive proportionalis functioni $e^{-hhW''}$. Prorsus simili modo, si etiam r tamquam indeterminata consideratur, probabilitas valorum determinatorum pro reliquis s etc. proportionalis erit functioni $e^{-hhW''}$ et sic porro. Supponamus, incognitarum numerum ad quatuor ascendere, eadem enim conclusio valebit, si maior vel minor est. Valor maxime probabilis ipsius s hic erit $= -\frac{\lambda''}{\delta''}$, probabilitasque, hunc a vero differentia σ distare, proportionalis erit functioni $e^{-hh\delta''\sigma^2}$, unde concludimus, mensuram praecisionis relativae isti determinationi tribuendae exprimi per $\sqrt{\delta''}$, si mensura praecisionis observationibus primitivis tribuendae statuatur $= 1$.

183.

Per methodum art. praec. mensura praecisionis pro ea sola incognita commode exprimitur, cui in eliminationis negotio ultimus locus assignatus est, quod incommodum ut evitemus, coefficientem δ'' alio modo exprimere conveniet. Ex aequationibus

$$P = p'$$

$$Q = q' + \frac{c'}{a} p'$$

$$R = r' + \frac{\gamma''}{c'} q' + \frac{1}{a} p'$$

$$S = s' + \frac{\delta''}{\gamma''} r' + \frac{\delta''}{c'} q' + \frac{1}{a} p'$$

sequitur, ipsas p', q', r', s' per P, Q, R, S ita exprimi posse

$$p' = P$$

$$q' = Q + \mathcal{A}P$$

$$r' = R + \mathcal{B}Q + \mathcal{A}'P$$

$$s' = S + \mathcal{C}R + \mathcal{B}'Q + \mathcal{A}''P$$

ita ut $\mathcal{A}, \mathcal{A}', \mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{C}$ sint quantitates determinatae. Erit itaque (incognitarum numerum ad quatuor restringendo)

$$s = -\frac{\lambda''}{\delta''} + \frac{\mathcal{A}''}{\delta''} P + \frac{\mathcal{B}'}{\delta''} Q + \frac{\mathcal{C}}{\delta''} R + \frac{1}{\delta''} S$$

Hinc conclusionem sequentem deducimus. Valores maxime probabiles incognitarum p, q, r, s etc. per eliminationem ex aequationibus $P = 0, Q = 0, R = 0, S = 0$ etc. deducendi, manifesto, si aliquantisper P, Q, R, S etc. tamquam indeterminatae spectentur, secundum eandem eliminationis operationem in forma lineari per P, Q, R, S etc. exprimentur, ita ut habeatur

$$p = L + AP + BQ + CR + DS + \text{etc.}$$

$$q = L' + A'P + B'Q + C'R + D'S + \text{etc.}$$

$$r = L'' + A''P + B''Q + C''R + D''S + \text{etc.}$$

$$s = L''' + A'''P + B'''Q + C'''R + D'''S + \text{etc.}$$

etc.

His ita factis, valores maxime probabiles ipsarum p, q, r, s etc. manifesto erunt resp. L, L', L'', L''' etc., mensuraque praecisionis his determinationibus tribuendae resp. exprimitur per $\sqrt{\frac{1}{A}}, \sqrt{\frac{1}{B}}, \sqrt{\frac{1}{C}}, \sqrt{\frac{1}{D}}$ etc., posita praecisione observationum primitivarum $= 1$. Quae enim de determinatione incognitae s ante demonstravimus (pro qua δ'' respondet ipsi $\frac{1}{D''}$), per solam incognitarum permutationem ad omnes reliquas transferre licebit.

184.

Ut disquisitiones praecedentes per exemplum illustrentur, supponamus, per observationes, in quibus praecisio aequalis praesumenda sit, inventum esse

$$\begin{aligned} p - q + 2r &= 3 \\ 3p + 2q - 5r &= 5 \\ 4p + q + 4r &= 21 \end{aligned}$$

per quartam vero, cui praecisio dimidia tantum tribuenda est, prodiisse

$$-2p + 6q + 6r = 28$$

Loco aequationis ultimae itaque hanc substituemus

$$-p + 3q + 3r = 14$$

hancque ex observatione prioribus praecisione aequali provenisse supponemus. Hinc fit

$$\begin{aligned} P &= 27p + 6q - 88 \\ Q &= 6p + 15q + r - 70 \\ R &= q + 54r - 107 \end{aligned}$$

atque hinc per eliminationem

$$\begin{aligned} 19899p &= 49154 + 809P - 324Q + 6R \\ 19899q &= 70659 - 324P + 1458Q - 27R \\ 19899r &= 38721 + 6P - 27Q + 369R \end{aligned}$$

Incognitarum itaque valores maxime probabiles erunt

$$\begin{aligned} p &= 2,470 \\ q &= 3,551 \\ r &= 1,916 \end{aligned}$$

atque praecisio relativa his determinationibus tribuenda, posita praecisione observationum primitivarum $= 1$,

$$\begin{aligned} \text{pro } p \dots \sqrt{\frac{19899}{809}} &= 4,96 \\ \text{pro } q \dots \sqrt{\frac{19899}{1458}} &= 3,69 \\ \text{pro } r \dots \sqrt{\frac{19899}{369}} &= 7,34 \end{aligned}$$

185.

Argumentum hactenus pertractatum pluribus disquisitionibus analyticis elegantibus occasionem dare posset, quibus tamen hic non immoramur, ne nimis ab instituto nostro distrahamur. Eadem ratione expositionem artificiorum, per quae calculus numericus ad algorithmum magis expeditum reduci potest, ad aliam occasionem nobis reservare debemus. Unicam observationem hic adicere liceat. Quoties multitudo functionum seu aequationum propositarum considerabilis est, calculus ideo potissimum paullo molestior evadit, quod coefficientes per quos aequationes primitivae multiplicandae sunt ut P, Q, R, S etc. obtineantur, plerumque fractiones decimales parum commodas involvunt. Si in hoc casu operae pretium non videtur, has multiplicationes adiumento tabularum logarithmicarum quam accuratissime perficere, in plerisque casibus sufficit, horum multiplicatorum loco alios ad calculum commodiores adhibere, qui ab illis parum differant. Haec licentia errores sensibiles producere nequit, eo tantummodo casu excepto, ubi mensura praecisionis in determinatione incognitarum multo minor evadit, quam praecisio observationum primitivarum fuerat.

186.

Ceterum principium, quod quadrata differentiarum inter quantitates observatas et computatas summam quam minimam producere debeant, etiam independentem a calculo probabilitatis sequenti modo considerari poterit.

Quoties multitudo incognitarum multitudini quantitatum observatarum independentium aequalis est, illas ita determinare licet, ut his exacte satisfiat. Quoties autem multitudo illa hac minor est, consensus absolute exactus obtineri nequit, quatenus observationes praecisione absoluta non gaudent. In hoc itaque casu operam dare oportet, ut consensus quam optimus stabiliatur, sive ut differentiae quantum fieri potest extenuentur. Haec vero notio natura sua aliquid vagi involvit. Etiam si enim systema valorum pro incognitis, quod omnes diffe-

rentias resp. minores reddit quam aliud, procul dubio huic praefendum sit, nihilominus optio inter duo systemata, quorum alterum in aliis observationibus consensum meliorem offert, alterum in aliis, arbitrio nostro quodammodo relinquitur, manifestoque innumera principia diversa proponi possunt, per quae conditio prior impletur. Designando differentias inter observationes et calculum per Δ , Δ' , Δ'' etc., conditioni priori non modo satisfiet, si $\Delta\Delta + \Delta'\Delta' + \Delta''\Delta'' + \text{etc.}$ fit minimum (quod est principium nostrum), sed etiam si $\Delta^4 + \Delta'^4 + \Delta''^4 + \text{etc.}$, vel $\Delta^6 + \Delta'^6 + \Delta''^6 + \text{etc.}$, vel generaliter summa potestatum exponentis cuiuscunque par in minimum abit. Sed ex omnibus his principiis nostrum simplicissimum est, dum in reliquis ad calculos complicatissimos deferremur. Ceterum principium nostrum, quo iam inde ab anno 1795 usi sumus, nuper etiam a clar. LEGENDRE in opere *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, Paris 1806 prolatum est, ubi plures aliae proprietates huius principii expositae sunt, quas hic brevitatis caussa supprimimus.

Si potestatem exponentis par infinite magni adoptarem, ad systema id reduceremur, in quo differentiae maximae fiunt quam minimae.

III. LAPLACE ad solutionem aequationum linearium, quarum multitudo maior est quam multitudo incognitarum, principio alio utitur, quod olim iam a clar. BOSCOVICH propositum erat, scilicet ut differentiae ipsae sed omnes positive sumtae summam minimam faciant. Facile ostendi potest, systema valorum incognitarum, quod ex hoc solo principio erutum sit, necessario*) tot aequationibus e propositarum numero exacte satisfacere debere, quot sint incognitae, ita ut reliquae aequationes eatenus tantum in considerationem veniant, quantum ad optionem decidendam conferunt: si itaque e. g. aequatio $V = M$ est ex earum numero, quibus non satisfiet, systema valorum secundum illud principium inventorum nihil mutaretur, etiamsi loco ipsius M valor quicunque alius N observatus esset, si modo designando per n valorem computatum, differentiae $M - n$, et $N - n$ eodem signo affectae sint. Ceterum ill. LAPLACE principium istud per adiectionem conditionis novae quodammodo temperat: postulat scilicet, ut summa differentiarum ipsa, signis non mutatis, fiat $= 0$. Hinc efficitur, ut multitudo aequationum exacte repraesentatarum unitate minor fiat quam multitudo

*) Casibus specialibus exceptis, ubi solutio quodammodo indeterminata manet.

quantitatum incognitarum, verumtamen quod ante observavimus etiamnum locum habebit, siquidem duae saltem incognitae affuerint.

187.

Revertimur ab his disquisitionibus generalibus ad propositum nostrum proprium, cuius causa illae susceptae fuerant. Antequam determinationem quam exactissimam orbitae ex observationibus pluribus, quam quot necessario requiruntur, aggredi liceat, determinatio approximata iam adesse debet, quae ab omnibus observationibus datis haud multum discrepet. Correctiones his elementis approximatis adhuc applicandae, ut consensus quam accuratissimus efficiatur, tamquam problematis quaesita considerabuntur. Quas quum tam exiguas evasuras esse supponi possit, ut quadrata productaque negligere liceat, variationes, quas corporis coelestis loca geocentrica computata inde nanciscuntur, per formulas differentiales in Sect. secunda Libri primi traditas computari poterunt. Loca igitur secundum elementa correctae quae quaerimus computata, exhibebuntur per functiones lineares correctionum elementorum, illorumque comparatio cum locis observatis secundum principia supra exposita ad determinationem valorum maxime probabilium perducet. Hae operationes tanta simplicitate gaudent, ut ulteriori illustratione opus non habeant, sponteque patet, observationes quotcumque et quantumvis ab invicem remotas in usum vocari posse. — Eadem methodo etiam ad correctionem orbitarum *parabolicarum* cometarum uti licet, si forte observationum series longior adest, consensusque quam optimus postulatur.

188.

Methodus praecedens iis potissimum casibus adaptata est, ubi praecisio summa desideratur: saepissime autem occurrunt casus, ubi sine haesitatione paululum ab illa remitti potest, si hoc modo calculi prolixitatem considerabiliter contrahere licet, praesertim quando observationes magnum temporis intervallum nondum includunt: adeoque de orbitae determinatione ut sic dicam definitiva nondum cogitur. In talibus casibus methodus sequens lucro notabili in usum vocari poterit.

Eligantur e tota observationum copia duo loca completa L et L' , computenturque pro temporibus respondentibus ex elementis approximatis corporis coelestis distantiae a terra. Formentur dein respectu harum distantiarum tres

hypotheses, retentis in prima valoribus computatis, mutataque in hypothesi secunda distantia prima, secundaque in hypothesi tertia; utraque mutatio pro ratione incertitudinis, quae in illis distantis remanere praesumitur, ad libitum accipi poterit. Secundum has tres hypotheses, quas in schemate sequente exhibemus,

	Hyp. I.	Hyp. II.	Hyp. III.
Distantia*) loco primo respondens	D	$D + \delta$	D
Distantia loco secundo respondens	D'	D'	$D' + \delta'$

computentur e duobus locis L, L' per methodos in Libro primo explicatas tria elementorum systemata, ac dein ex his singulis loca geocentrica corporis coelestis temporibus omnium reliquarum observationum respondentia. Sint haec (singulis longitudinibus et latitudinibus, vel ascensionibus rectis et declinationibus seorsim denotatis)

in systemate primo . . .	$M,$	$M',$	M''	etc.
in systemate secundo . . .	$M + \alpha,$	$M' + \alpha',$	$M'' + \alpha''$	etc.
in systemate tertio . . .	$M + \epsilon,$	$M' + \epsilon',$	$M'' + \epsilon''$	etc.
Sint porro resp. loca observata . . .	$N,$	$N',$	N''	etc.

Iam quatenus mutationibus parvis distantiarum D, D' respondent mutationes proportionales singulorum elementorum, nec non locorum geocentricorum ex his computatorum; supponere licebit, loca geocentrica e quarto elementorum systemate computata, quod distantis a terra $D + x\delta, D' + y\delta'$ superstructum sit, resp. fore $M + \alpha x + \epsilon y, M' + \alpha'x + \epsilon'y, M'' + \alpha''x + \epsilon''y$, etc. Hinc dein, secundum disquisitiones praecedentes, quantitates x, y ita determinabuntur, ut illae quantitates cum N, N', N'' etc. resp. quam optime consentiant (ratione praecisionis relativae observationum habita). Systema elementorum correctum ipsum vel perinde ex L, L' et distantis $D + x\delta, D' + y\delta'$, vel secundum regulas notas e tribus elementorum systematibus primis per simplicem interpolationem derivari poterit.

*) Adhuc commodius erit, loco distantiarum ipsarum logarithmis distantiarum eurtatarum uti.

189.

Methodus haecce a praecedente in eo tantum differt, quod duobus locis geocentricis exacte, ac dein reliquis quam exactissime satisfit, dum secundum methodum alteram observatio nulla reliquis praefertur, sed errores quantum fieri potest inter omnes distribuuntur. Methodus art. praec. itaque priori eatenus tantum postponenda erit, quatenus locis L, L' aliquam errorum partem recipientibus errores in locis reliquis notabiliter diminuere liceat: attamen plerumque per idoneam electionem observationum L, L' facile caveri potest, ne haec differentia magni momenti evadere possit. Operam scilicet dare oportebit, ut pro L, L' tales observationes adoptentur, quae non solum exquisita praecisione gaudeant, sed ita quoque comparatae sint, ut elementa ex ipsis distantis derivata a variationibus parvis ipsarum positionum geocentricarum non nimis afficiantur. Parum prudenter itaque ageres, si observationes parvo temporis intervallo ab invicem distantes eligeres, talesve, quibus loci heliocentri proxime oppositi vel coincidentes responderent.

SECTIO QUARTA

De determinatione orbitalum, habita ratione perturbationum.

190.

Perturbationes, quas planetarum motus per actionem planetarum reliquorum patiuntur, tam exiguae lentaeque sunt, ut post longius demum temporis intervallum sensibiles fiant: intra tempus brevius — vel adeo, prout circumstantiae sunt, per revolutionem integram unam pluresve — motus tam parum differet a motu in ellipsi perfecta secundum leges KEPLERI exacte descripta, ut observationes deviationem indicare non valeant. Quamdiu res ita se habet, operae haud pretium esset, calculum praematurum perturbationum suscipere, sed potius sufficiet, sectionem conicam quasi osculatricem observationibus adaptare: dein vero, postquam planeta per tempus longius accurate observatus est, effectus perturbationum tandem ita se manifestabit, ut non amplius possibile sit, omnes observationes per motum pure ellipticum exacte conciliare; tunc itaque harmonia completa et stabilis parari non poterit, nisi perturbationes cum motu elliptico rite iungantur.

Quum determinatio elementorum ellipticorum, cum quibus perturbationes iungendae sunt, ut observationes exacte repraesententur, illarum cognitionem supponat, vicissim vero theoria perturbationum accurate stabiliri nequeat, nisi elementa iam proxime cognita sint: natura rei non permittit, arduum hoc negotium primo statim conatu perfectissime absolvere, sed potius perturbationes et elementa per correctiones alternis demum vicibus pluries repetitas ad summum praecisionis

fastigium evehi poterunt. Prima itaque perturbationum theoria superstruetur elementis pure ellipticis, quae observationibus proxime adaptata fuerant: dein orbita nova investigabitur, quae cum his perturbationibus iuncta observationibus quam proxime satisfaciatur. Quae si a priori considerabiliter discrepat, iterata perturbationum evolutio ipsi superstruenda erit, quae correctiones alternis vicibus toties repetentur, donec observationes, elementa et perturbationes quam arctissime consentiant.

191.

Quum evolutio theoriae perturbationum ex elementis datis ab instituto nostro aliena sit, hic tantummodo ostendendum erit, quomodo orbita approximata ita corrigi possit, ut cum perturbationibus datis iuncta observationibus satisfaciatur quam proxime. Simplicissime hoc negotium absolvitur per methodum iis quas in artt. 124. 165. 188. exposuimus analogam. Pro temporibus omnium observationum quibus ad hunc finem uti propositum est, et quae prout res fert esse poterunt vel tres, vel quatuor vel plures, computabuntur ex aequationibus perturbationum harum valores numerici, tum pro longitudinibus in orbita, tum pro radiis vectoribus, tum pro latitudinibus heliocentricis: ad hunc calculum argumenta desumentur ex elementis ellipticis approximatis, quibus perturbationum theoria superstructa erat. Dein ex omnibus observationibus eligentur duae, pro quibus distantiae a terra ex iisdem elementis approximatis computabuntur: hac hypothesin primam constituent; hypothesis secunda et tertia formabuntur, distantis illis paullulum mutatis. In singulis dein hypothesibus e duobus locis geocentricis determinabuntur positiones heliocentricae distantiaeque a Sole; ex illis, postquam latitudines a perturbationibus purgatae fuerint, deducuntur longitudo nodi ascendentis, inclinatio orbitae, longitudinesque in orbita. In hoc calculo methodus art. 110. aliqua modificatione opus habet, siquidem ad variationem secularem longitudinis nodi et inclinationis respicere operae pretium videtur. Scilicet designantibus ζ, ζ' latitudines heliocentricas a perturbationibus periodicis purgatas; λ, λ' longitudines heliocentricas; $\Omega, \Omega + \Delta$ longitudines nodi ascendentis; $i, i + \delta$ inclinationes orbitae; aequationes in hac forma exhibere conveniet:

$$\begin{aligned} \text{tang } \zeta &= \text{tang } i \sin(\lambda - \Omega) \\ \frac{\text{tang } i}{\text{tang}(i + \delta)} \text{ tang } \zeta' &= \text{tang } i \sin(\lambda - \Delta - \Omega) \end{aligned}$$

Hic valor ipsius $\frac{\tan i}{\tan(i+\delta)}$ omni praecisione necessaria obtinetur, substituendo pro i valorem approximatum: dein i et Ω per methodos vulgares erui poterunt.

A duabus porro longitudinibus in orbita, nec non a duobus radiis vectoribus aggregata perturbationum subtrahentur, ut valores pure elliptici prodeant. Hic vero etiam effectus, quem variationes seculares positionis perihelii et excentricitatis in longitudinem in orbita radiumque vectorem exserunt, et qui per formulas differentiales Sect. I. Libri primi determinandus est, statim cum perturbationibus periodicis iungendus est, siquidem observationes satis ab invicem distant, ut illius rationem habere operae pretium videatur. Ex his longitudinibus in orbita radiisque vectoribus correctis, una cum temporibus respondentibus, elementa reliqua determinabuntur: tandemque ex his elementis positiones geocentricae pro omnibus reliquis observationibus calculabuntur. Quibus cum observatis comparatis, eodem modo quem in art. 188. explicavimus systema id distantiarum elicietur, ex quo elementa omnibus reliquis observationibus quam optime satisfaciencia demanabunt.

192.

Methodus in art. praec. exposita praecipue determinationi *primae* orbitae perturbationes implicantis accommodata est: quamprimum vero tum elementa media elliptica tum aequationes perturbationum proxime iam sunt cognitae, determinatio exactissima adiumento observationum quam plurimarum commodissime per methodum art. 187., absolvetur, quae hic explicatione peculiari opus non habebit. Quodsi hic observationum praestantissimarum copia satis magna est, magnumque temporis intervallum complectitur, haec methodus in pluribus casibus simul determinationi exactiori massarum planetarum perturbantium, saltem maiorum, inservire poterit. Scilicet, si massa cuiusdam planetae perturbantis in calculo perturbationum supposita nondum satis certa videtur, introducetur, praeter sex incognitas a correctionibus elementorum pendentes, adhuc alia μ , statuendo rationem massae correctae ad massam suppositam ut $1+\mu$ ad 1; supponere tunc licebit, perturbationes ipsas in eadem ratione mutari, unde manifesto in singulis positionibus calculatis terminus novus linearis ipsam μ continens producet, cuius evolutio nulli difficultati obnoxia erit. Comparatio positionum calculatarum cum observatis secundum principia supra exposita, simul cum correctionibus elementorum etiam correctionem μ suppeditabit. Quinadeo hoc modo massae

plurium planetarum exactius determinari poterunt, qui quidem perturbationes satis considerabiles exercent. Nullum dubium est, quin motus planetarum novorum, praesertim Palladis et Iunonis, qui tantas a Iove perturbationes patiuntur, post aliquot decennia hoc modo determinationem exactissimam massae Iovis allaturi sint: quinadeo forsitan ipsam massam unius alteriusve horum planetarum novorum ex perturbationibus, quas in reliquos exercet, aliquando cognoscere licebit.



TABULAE.

A	Ellipsis			Hyperbola		
	log B	C	T	log B	C	T
0,000	0	0	0,00000	0	0	0,00000
0,001	0	0	100	0	0	100
0,002	0	1	200	0	1	200
0,003	1	4	304	1	4	299
0,004	1	7	404	1	7	399
0,005	1	11	504	1	11	498
0,006	3	16	604	3	16	597
0,007	4	21	704	4	21	696
0,008	5	29	805	5	29	795
0,009	6	37	0,00907	6	37	894
0,010	7	46	0,01008	7	46	0,00991
0,011	9	56	110	9	55	0,01090
0,012	11	66	212	11	66	189
0,013	13	78	314	13	77	287
0,014	15	90	416	15	89	384
0,015	17	103	518	17	102	481
0,016	19	118	621	19	116	580
0,017	22	133	723	21	131	677
0,018	24	149	826	24	147	774
0,019	27	166	0,01909	27	164	872
0,020	30	184	0,02012	30	182	0,01968
0,021	33	203	136	33	200	0,02065
0,022	36	223	239	36	220	164
0,023	40	244	343	39	240	258
0,024	43	265	447	43	261	355
0,025	47	288	551	46	283	451
0,026	51	312	655	50	306	547
0,027	55	336	760	54	330	643
0,028	59	361	864	58	355	739
0,029	63	388	0,02969	63	381	834
0,030	67	416	0,03074	67	407	0,02930
0,031	71	444	179	71	435	0,03025
0,032	77	473	281	76	461	120
0,033	83	503	384	80	492	215
0,034	87	535	495	85	523	310
0,035	92	567	601	91	554	404
0,036	97	600	707	96	584	499
0,037	103	634	813	101	618	593
0,038	108	669	0,03919	107	652	688
0,039	114	704	0,04025	112	686	781
0,040	120	741	132	118	724	876

A	Ellipsis			Hyperbola		
	log B	C	T	log B	C	T
0,040	130	741	0,041319	118	722	0,038757
0,041	136	779	2387	124	758	0,039695
0,042	143	818	3487	130	795	0,040612
0,043	149	858	4588	136	831	1567
0,044	146	898	5601	143	872	2500
0,045	151	940	6676	149	912	3433
0,046	159	984	7753	156	951	4365
0,047	166	1026	8831	163	994	5296
0,048	173	1070	0,049911	170	1037	6220
0,049	181	1116	0,050993	177	1080	7147
0,050	188	1162	2077	184	1124	8071
0,051	196	1210	3153	191	1169	8995
0,052	204	1258	4250	199	1215	0,049917
0,053	211	1307	5339	207	1262	0,050838
0,054	220	1358	6430	215	1310	1757
0,055	228	1409	7513	223	1358	2675
0,056	236	1461	8618	231	1407	3592
0,057	245	1514	0,059744	239	1458	4507
0,058	251	1568	0,060812	247	1509	5420
0,059	261	1623	1912	256	1561	6332
0,060	271	1679	3044	265	1614	7243
0,061	281	1736	4118	273	1667	8152
0,062	290	1794	5213	282	1722	9060
0,063	300	1853	6311	291	1777	0,059967
0,064	309	1913	7440	301	1833	0,060872
0,065	319	1974	8551	310	1891	1776
0,066	329	2036	0,066664	320	1949	2678
0,067	339	2099	0,067779	329	2007	3579
0,068	350	2163	1866	339	2067	4479
0,069	360	2228	3014	349	2128	5377
0,070	371	2294	4135	359	2189	6274
0,071	381	2360	5257	370	2251	7170
0,072	392	2428	6381	380	2314	8064
0,073	403	2497	7507	390	2378	8957
0,074	415	2567	8635	401	2443	0,066848
0,075	426	2638	0,079765	412	2509	0,070738
0,076	437	2709	0,080837	421	2575	1627
0,077	449	2782	2030	434	2643	2514
0,078	461	2856	3166	445	2711	3400
0,079	473	2930	4303	457	2780	4285
0,080	485	3006	5443	468	2850	5168

A	Ellipsis			Hyperbola		
	log B	C	T	log B	C	T
0,080	485	3006	0,08441	468	2850	0,075168
0,081	498	3081	0,0854	480	2921	0,0760
0,082	510	3160	2717	492	2992	0,0770
0,083	523	3239	0,088872	504	3065	2810
0,084	535	3319	0,090019	516	3138	2868
0,085	548	3399	1168	528	3212	0,09564
0,086	561	3481	1319	540	3287	0,080439
0,087	575	3564	3472	553	3363	1313
0,088	588	3647	4627	566	3440	1186
0,089	602	3731	5784	578	3517	1257
0,090	615	3818	6943	591	3595	1327
0,091	629	3904	8104	604	3674	4706
0,092	643	3992	0,099266	618	3754	5663
0,093	658	4081	0,100431	631	3835	5530
0,094	672	4170	1198	645	3917	7391
0,095	687	4261	1266	658	3999	8157
0,096	701	4353	3937	672	4081	9119
0,097	716	4446	5110	686	4167	0,089980
0,098	731	4539	6284	700	4252	0,090840
0,099	746	4634	7461	714	4338	1698
0,100	762	4730	8640	728	4424	1555
0,101	777	4826	0,109820	743	4512	3410
0,102	793	4924	0,111003	758	4600	4265
0,103	809	5023	1188	772	4689	5118
0,104	825	5123	1375	787	4779	5969
0,105	841	5224	1563	802	4870	6820
0,106	857	5325	5751	817	4961	7669
0,107	873	5428	6947	833	5054	8517
0,108	890	5531	8142	848	5148	0,099964
0,109	907	5637	0,119139	864	5242	0,100009
0,110	924	5743	0,120538	880	5337	1053
0,111	941	5850	1739	895	5432	1896
0,112	958	5958	2948	911	5529	2738
0,113	975	6067	4148	928	5626	3580
0,114	993	6177	5355	944	5724	4417
0,115	1011	6288	6564	960	5823	5255
0,116	1029	6400	7776	977	5923	6094
0,117	1047	6513	0,128969	994	6024	6937
0,118	1065	6627	0,130005	1010	6125	7781
0,119	1083	6742	1413	1027	6228	8624
0,120	1102	6858	2643	1045	6331	9468

A	Ellipsis			Hyperbola		
	log B	C	T	log B	C	T
0,120	1102	6858	0,131043	1045	6331	0,109426
0,121	1121	6976	3865	1061	6435	0,110416
0,122	1139	7094	5089	1079	6539	1083
0,123	1158	7213	6315	1097	6645	1913
0,124	1178	7334	7543	1114	6751	2740
0,125	1197	7455	0,135774	1131	6858	3566
0,126	1217	7577	0,140007	1150	6966	4390
0,127	1236	7701	1221	1168	7075	5213
0,128	1256	7825	2478	1186	7185	6035
0,129	1276	7951	3717	1205	7295	6855
0,130	1296	8077	4959	1223	7406	7675
0,131	1317	8205	6202	1242	7518	8493
0,132	1337	8334	7448	1261	7631	0,119310
0,133	1358	8463	8695	1280	7745	0,120216
0,134	1378	8594	0,149945	1299	7859	0940
0,135	1399	8726	0,151197	1318	7974	1754
0,136	1421	8859	2458	1337	8090	2566
0,137	1442	8993	3708	1357	8207	3377
0,138	1463	9128	4957	1376	8325	4186
0,139	1485	9264	6228	1396	8443	4995
0,140	1507	9401	7494	1416	8562	5802
0,141	1529	9539	0,158766	1436	8682	6609
0,142	1551	9678	0,160024	1456	8803	7414
0,143	1573	9819	1294	1476	8925	8217
0,144	1596	9960	2566	1497	9047	9020
0,145	1618	10102	3840	1517	9170	0,129812
0,146	1641	10246	5116	1538	9294	0,130612
0,147	1664	10390	6395	1559	9419	1211
0,148	1687	10536	7676	1580	9545	2119
0,149	1710	10683	0,168959	1601	9671	3026
0,150	1734	10830	0,170245	1622	9798	3832
0,151	1757	10979	1533	1643	9926	4636
0,152	1781	11129	2813	1665	10055	5439
0,153	1805	11280	4115	1686	10185	6241
0,154	1829	11432	5410	1708	10315	7042
0,155	1854	11585	6707	1730	10446	7842
0,156	1878	11739	8006	1751	10578	8641
0,157	1903	11894	0,179308	1774	10711	0,139349
0,158	1927	12051	0,180611	1797	10844	0,140155
0,159	1952	12208	1928	1819	10978	0920
0,160	1977	12366	3226	1842	11113	1704

A	Ellipsis			Hyperbola		
	log B	C	T	log B	C	T
0.160	1977	12366	0.181226	1842	11113	0.141704
0.161	2003	12326	4537	1864	11129	1487
0.162	2028	12286	5850	1887	11146	2169
0.163	2054	12248	7166	1910	11163	4050
0.164	2080	12211	8484	1933	11180	4829
0.165	2106	12175	0.189804	1956	11197	5608
0.166	2132	12140	0.191127	1980	11214	6385
0.167	2158	12106	2451	2003	11231	7161
0.168	2184	12073	3779	2027	11248	7937
0.169	2211	12041	5109	2051	11264	8710
0.170	2238	12010	6441	2075	11281	0.149183
0.171	2265	11978	7775	2099	11298	0.150255
0.172	2292	11948	0.199912	2123	11315	1026
0.173	2319	11918	0.200451	2147	11332	1795
0.174	2347	11889	1793	2172	11349	2564
0.175	2374	11863	3137	2196	11366	3331
0.176	2402	11839	4484	2221	11383	4097
0.177	2430	11816	5833	2246	11400	4862
0.178	2458	11794	7184	2271	11417	5626
0.179	2486	11773	8538	2296	11434	6389
0.180	2515	11754	0.209894	2321	11451	7151
0.181	2543	11735	0.211253	2346	11468	7911
0.182	2572	11718	2614	2372	11485	8671
0.183	2601	11701	3977	2398	11502	0.159489
0.184	2630	11686	5343	2423	11519	0.160187
0.185	2660	11672	6712	2449	11536	0.160885
0.186	2689	11658	8083	2475	11553	1698
0.187	2719	11645	0.219456	2502	11570	2453
0.188	2749	11633	0.220832	2528	11587	3206
0.189	2779	11621	2111	2554	11604	3958
0.190	2809	11610	3591	2581	11621	4709
0.191	2839	11600	4975	2608	11638	5458
0.192	2870	11591	6361	2634	11655	6207
0.193	2900	11582	7750	2661	11672	6955
0.194	2931	11574	0.219441	2688	11689	7702
0.195	2962	11566	0.220555	2716	11706	8447
0.196	2993	11559	1931	2743	11723	9192
0.197	3025	11552	3319	2771	11740	0.169915
0.198	3056	11546	4731	2798	11757	0.170618
0.199	3088	11540	6155	2826	11774	1419
0.200	3120	11534	7541	2854	11791	2159

A	Ellipsis			Hyperbola		
	log B	C	T	log B	C	T
0.200	3120	11534	0.217541	2854	11791	0.172159
0.201	3152	11528	0.218950	2882	11797	0.17317
0.202	3184	11522	0.220361	2910	11803	0.17418
0.203	3216	11516	0.221772	2938	11809	0.17519
0.204	3249	11510	0.223183	2967	11815	0.17620
0.205	3281	11504	0.224594	2995	11821	0.17721
0.206	3315	11498	0.226005	3024	11827	0.17822
0.207	3348	11492	0.227416	3053	11833	0.17923
0.208	3381	11486	0.228827	3082	11839	0.18024
0.209	3414	11480	0.230238	3111	11845	0.18125
0.210	3448	11474	0.231649	3140	11851	0.18226
0.211	3482	11468	0.233060	3169	11857	0.18327
0.212	3516	11462	0.234471	3199	11863	0.18428
0.213	3550	11456	0.235882	3228	11869	0.18529
0.214	3584	11450	0.237293	3258	11875	0.18630
0.215	3618	11444	0.238704	3288	11881	0.18731
0.216	3652	11438	0.240115	3318	11887	0.18832
0.217	3686	11432	0.241526	3348	11893	0.18933
0.218	3721	11426	0.242937	3378	11899	0.19034
0.219	3755	11420	0.244348	3409	11905	0.19135
0.220	3790	11414	0.245759	3439	11911	0.19236
0.221	3824	11408	0.247170	3470	11917	0.19337
0.222	3859	11402	0.248581	3500	11923	0.19438
0.223	3894	11396	0.249992	3531	11929	0.19539
0.224	3929	11390	0.251403	3562	11935	0.19640
0.225	3964	11384	0.252814	3593	11941	0.19741
0.226	4000	11378	0.254225	3624	11947	0.19842
0.227	4035	11372	0.255636	3655	11953	0.19943
0.228	4071	11366	0.257047	3686	11959	0.20044
0.229	4106	11360	0.258458	3717	11965	0.20145
0.230	4142	11354	0.259869	3748	11971	0.20246
0.231	4178	11348	0.261280	3779	11977	0.20347
0.232	4214	11342	0.262691	3810	11983	0.20448
0.233	4250	11336	0.264102	3841	11989	0.20549
0.234	4286	11330	0.265513	3872	11995	0.20650
0.235	4322	11324	0.266924	3903	12001	0.20751
0.236	4358	11318	0.268335	3934	12007	0.20852
0.237	4394	11312	0.269746	3965	12013	0.20953
0.238	4430	11306	0.271157	3996	12019	0.21054
0.239	4466	11300	0.272568	4027	12025	0.21155
0.240	4502	11294	0.273979	4058	12031	0.21256

A	Ellipsis			Hyperbola		
	log B	C	T	log B	C	T
0.240	4537	28644	0.299980	4076	24996	0.200931
0.241	4576	28894	7498	4110	24991	1850
0.242	4615	29145	0.299985	4143	24986	2318
0.243	4654	29397	0.299990	4176	24981	2785
0.244	4694	29652	2068	4210	24976	3251
0.245	4734	29903	3997	4244	24971	3716
0.246	4774	30164	5829	4277	24966	4180
0.247	4814	30418	6644	4311	24961	4643
0.248	4854	30676	8402	4346	24956	5105
0.249	4894	30935	0.300000	4380	24951	5566
0.250	4935	31196	0.311386	4414	24946	6025
0.251	4976	31458	2831	4449	24941	6483
0.252	5017	31721	4682	4483	24936	6940
0.253	5058	31985	5915	4518	24931	7396
0.254	5099	32250	7490	4553	24926	7851
0.255	5141	32517	0.3119048	4588	24921	8305
0.256	5182	32784	0.3226610	4623	24916	8758
0.257	5224	33053	2474	4658	24911	9210
0.258	5266	33323	3741	4694	24906	9661
0.259	5309	33595	5122	4729	24901	10111
0.260	5351	33867	6585	4765	24896	10560
0.261	5394	34141	0.323461	4801	24891	11008
0.262	5436	34416	0.333041	4838	24886	11455
0.263	5479	34692	1629	4873	24881	11901
0.264	5521	34970	3208	4909	24876	12346
0.265	5566	35248	4797	4945	24871	12790
0.266	5609	35528	6388	4981	24866	13233
0.267	5653	35809	7983	5018	24861	13675
0.268	5697	36091	0.339980	5055	24856	14116
0.269	5741	36375	0.341184	5091	24851	14556
0.270	5785	36659	2085	5128	24846	14995
0.271	5829	36945	4391	5165	24841	15433
0.272	5874	37232	6002	5202	24836	15870
0.273	5919	37521	7615	5240	24831	16306
0.274	5964	37811	0.349111	5277	24826	16741
0.275	6009	38101	0.359840	5315	24821	17175
0.276	6054	38393	2473	5352	24816	17608
0.277	6100	38686	4098	5390	24811	18040
0.278	6145	38981	5727	5428	24806	18471
0.279	6191	39277	7359	5466	24801	18901
0.280	6237	39573	8994	5504	24796	19330

A	Ellipsis			Hyperbola		
	log B	C	T	log B	C	T
0.280	6283	39873	0.358994	5544	24791	19758
0.281	6329	40171	0.360612	5582	24786	20195
0.282	6376	40472	2174	5620	24781	20631
0.283	6423	40774	3918	5658	24776	21066
0.284	6470	41077	5666	5696	24771	21500
0.285	6517	41381	7417	5734	24766	21933
0.286	6564	41687	0.368871	5772	24761	22365
0.287	6611	41994	0.370539	5810	24756	22796
0.288	6658	42302	2189	5848	24751	23226
0.289	6705	42611	3951	5886	24746	23655
0.290	6752	42922	5714	5924	24741	24083
0.291	6800	43233	0.378865	5962	24736	24510
0.292	6847	43547	0.380514	6000	24731	24936
0.293	6894	43862	2122	6038	24726	25361
0.294	6942	44177	3906	6076	24721	25785
0.295	6989	44493	5693	6114	24716	26208
0.296	7037	44811	7485	6152	24711	26630
0.297	7084	45131	0.388977	6190	24706	27051
0.298	7132	45452	0.390673	6228	24701	27471
0.299	7179	45774	2374	6266	24696	27890

<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>
0,0000	0,0000000	0,0040	0,0038331	0,0080	0,0076113
01	0965	41	0,0039284	81	0,0152071
02	1930	42	0,0040235	82	0,0153022
03	2894	43	1186	83	0,0153973
04	3858	44	2150	84	0,0154924
05	4821	45	3114	85	0,0155875
06	5784	46	4078	86	0,0156826
07	6747	47	5042	87	0,0157777
08	7710	48	5994	88	0,0158728
09	8673	49	6956	89	0,0159679
10	0,0009634	50	7918	90	0,0160630
11	0,0010585	51	8880	91	0,0161581
12	1556	52	0,0049728	92	0,0162532
13	2517	53	0,0050675	93	0,0163483
14	3478	54	1622	94	0,0164434
15	4438	55	2583	95	0,0165385
16	5398	56	3544	96	0,0166336
17	6357	57	4504	97	0,0167287
18	7316	58	5464	98	0,0168238
19	8275	59	6424	99	0,0169189
20	0,0019134	60	7384	0,0100	0,0170140
21	0,0020085	61	8343	01	0,0171091
22	1150	62	0,0039187	02	0,0172042
23	2107	63	0,0040131	03	0,0172993
24	3064	64	1075	04	0,0173944
25	4021	65	2039	05	0,0174895
26	4977	66	2992	06	0,0175846
27	5933	67	3955	07	0,0176797
28	6889	68	4917	08	0,0177748
29	7845	69	5879	09	0,0178699
30	8800	70	6832	10	0,0179650
31	0,0029755	71	7784	11	0,0180601
32	0,0030709	72	8744	12	0,0181552
33	1661	73	0,0069555	13	0,0182503
34	2617	74	0,0070506	14	0,0183454
35	3570	75	1436	15	0,0184405
36	4523	76	2396	16	0,0185356
37	5476	77	3356	17	0,0186307
38	6428	78	4315	18	0,0187258
39	7380	79	5274	19	0,0188209
0,0040	0,0038331	0,0080	0,0076113	0,0120	0,0189160

<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>
0,0120	0,0113477	0,0160	0,0159202	0,0200	0,0204927
11	4341	61	1115	01	0,0205878
21	5288	62	2078	02	0,0206829
31	6193	63	2941	03	0,0207780
41	7118	64	3854	04	0,0208731
51	8043	65	4766	05	0,0209682
61	8967	66	5678	06	0,0210633
71	0,0119690	67	6589	07	0,0211584
81	0,0120641	68	7500	08	0,0212535
91	1737	69	8411	09	0,0213486
10	2660	70	0,0159311	10	0,0214437
11	3581	71	0,0160262	11	0,0215388
12	4505	72	1142	12	0,0216339
13	5427	73	2053	13	0,0217290
14	6348	74	2964	14	0,0218241
15	7269	75	3875	15	0,0219192
16	8190	76	4786	16	0,0220143
17	0,0120911	77	5697	17	0,0221094
18	0,0121862	78	6608	18	0,0222045
19	0,0122813	79	7519	19	0,0222996
20	1871	80	8430	20	0,0223947
21	2791	81	0,0169319	21	0,0224898
22	3710	82	0,0170270	22	0,0225849
23	4629	83	1113	23	0,0226800
24	5547	84	2029	24	0,0227751
25	6465	85	2945	25	0,0228702
26	7383	86	3851	26	0,0229653
27	8301	87	4757	27	0,0230604
28	0,0121211	88	5668	28	0,0231555
29	0,0122162	89	6579	29	0,0232506
30	1051	90	7490	30	0,0233457
31	1968	91	8396	31	0,0234408
32	2884	92	0,0179280	32	0,0235359
33	3800	93	0,0180231	33	0,0236310
34	4716	94	1087	34	0,0237261
35	5631	95	1990	35	0,0238212
36	6546	96	2893	36	0,0239163
37	7460	97	3796	37	0,0240114
38	8374	98	4698	38	0,0241065
39	0,0123388	99	5600	39	0,0242016
0,0160	0,0159202	0,0200	0,0204927	0,0240	0,0242967

<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>
40	0,02440	80	0,0247700	120	0,0249166
41	3220	81	8579	121	3494
42	4109	82	0,0259457	122	4361
43	4998	83	0,0260335	123	5238
44	5887	84	1213	124	6095
45	6776	85	2090	125	6961
46	7664	86	2967	126	7827
47	8553	87	3844	127	8693
48	0,0219440	88	4721	128	0,0299559
49	0,0230318	89	5597	129	0,0300484
50	1215	90	6473	130	1290
51	1103	91	7349	131	2154
52	1988	92	8224	132	3019
53	3875	93	9099	133	3883
54	4761	94	0,0269974	134	4747
55	5647	95	0,0270849	135	5611
56	6532	96	1723	136	6475
57	7417	97	2597	137	7338
58	8302	98	3471	138	8201
59	0,0239187	99	4345	139	9064
60	0,0240071	0,0300	5218	140	0,0309926
61	0,0256	01	6091	141	0,0310788
62	1839	02	6964	142	1650
63	2723	03	7836	143	2512
64	3606	04	8708	144	3373
65	4489	05	0,0279380	145	4234
66	5372	06	0,0280431	146	5095
67	6254	07	1183	147	5956
68	7136	08	2094	148	6816
69	8018	09	2965	149	7676
70	8900	10	3836	150	8536
71	0,0229781	11	4806	151	0,0319996
72	0,0230661	12	5676	152	0,0320855
73	1543	13	6546	153	1114
74	2423	14	7415	154	1973
75	3303	15	8284	155	2831
76	4183	16	0,0289153	156	3689
77	5063	17	0,0290022	157	4547
78	5942	18	0890	158	5405
79	6821	19	1758	159	6262
0,02280	0,0245700	0,02380	0,0296166	0,02380	0,0327120

<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>
0,0360	0,0327120	0,040	0,0361192	0,080	0,0681037
61	7976	0,041	6966	0,081	8262
62	8851	0,042	7875	0,082	0,0696146
63	0,0329689	0,043	8678	0,083	0,0703661
64	0,0330546	0,044	0,0391856	0,084	11157
65	1401	0,045	0,0403109	0,085	18633
66	2257	0,046	11537	0,086	26090
67	3112	0,047	19841	0,087	33557
68	3967	0,048	28121	0,088	40945
69	4822	0,049	36376	0,089	48345
70	5677	0,050	44607	0,090	55755
71	6531	0,051	52814	0,091	63087
72	7385	0,052	60997	0,092	70420
73	8239	0,053	69157	0,093	77754
74	9092	0,054	77294	0,094	85060
75	0,0339946	0,055	85407	0,095	92348
76	0,0340799	0,056	0,0493496	0,096	0,0799617
77	1651	0,057	0,0501561	0,097	0,0806868
78	2504	0,058	0,0507	0,098	14101
79	3358	0,059	17618	0,099	21316
80	4208	0,060	25626	0,100	28513
81	5059	0,061	33602	0,101	35693
82	5911	0,062	41556	0,102	42854
83	6763	0,063	49488	0,103	49999
84	7613	0,064	57397	0,104	57125
85	8464	0,065	65285	0,105	64235
86	0,0349114	0,066	73150	0,106	71327
87	0,0350164	0,067	80994	0,107	78401
88	1014	0,068	88817	0,108	85459
89	1864	0,069	0,0496618	0,109	92500
90	2713	0,070	0,0504398	0,110	0,0899513
91	3562	0,071	12157	0,111	0,0906550
92	4411	0,072	19895	0,112	13520
93	5259	0,073	27612	0,113	20494
94	6108	0,074	35308	0,114	27451
95	6956	0,075	42984	0,115	34391
96	7804	0,076	50639	0,116	41315
97	8651	0,077	58274	0,117	48223
98	0,0359499	0,078	65888	0,118	55114
0,03999	0,0360346	0,079	73483	0,119	61990
0,04000	0,0361192	0,080	0,0681037	0,120	0,0968849

<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>
0,130	0,0968849	0,160	0,1230957	0,200	0,1471869
0,131	75691	0,161	37192	0,201	77653
0,132	82580	0,162	43444	0,202	83447
0,133	89331	0,163	49682	0,203	89189
0,134	0,0996127	0,164	55908	0,204	0,1493940
0,135	0,1000907	0,165	62121	0,205	0,1500681
0,136	09672	0,166	68321	0,206	0,6411
0,137	16421	0,167	74508	0,207	12130
0,138	23154	0,168	80685	0,208	17858
0,139	29873	0,169	86845	0,209	23555
0,140	36576	0,170	92994	0,210	29212
0,141	43264	0,171	0,1299131	0,211	34899
0,142	49936	0,172	0,1305155	0,212	40565
0,143	56594	0,173	11367	0,213	46220
0,144	63237	0,174	17466	0,214	51865
0,145	69865	0,175	23553	0,215	57499
0,146	76478	0,176	29628	0,216	63123
0,147	83076	0,177	35690	0,217	68737
0,148	89660	0,178	41740	0,218	74340
0,149	0,1096229	0,179	47778	0,219	79933
0,140	0,1103783	0,180	53804	0,220	85516
0,141	09133	0,181	59818	0,221	91089
0,142	15849	0,182	65821	0,222	0,1396651
0,143	22560	0,183	71811	0,223	0,1602204
0,144	28557	0,184	77789	0,224	0,7747
0,145	35340	0,185	83755	0,225	13579
0,146	41809	0,186	89710	0,226	18805
0,147	48264	0,187	0,1395513	0,227	24315
0,148	54704	0,188	0,1404585	0,228	29817
0,149	61131	0,189	0,7504	0,229	35310
0,150	67544	0,190	13412	0,230	40793
0,151	73943	0,191	19309	0,231	46267
0,152	80319	0,192	25194	0,232	51730
0,153	86671	0,193	31068	0,233	57184
0,154	93009	0,194	36931	0,234	62628
0,155	0,1199904	0,195	42782	0,235	68063
0,156	0,1205735	0,196	48622	0,236	73488
0,157	12053	0,197	54450	0,237	78903
0,158	18337	0,198	60268	0,238	84309
0,159	24649	0,199	66074	0,239	89705
0,160	0,1230927	0,200	0,1471869	0,240	0,1695091

<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>	<i>h</i>	<i>log yy</i>
0,240	0,1695092	0,280	0,1903220	0,320	0,2098315
0,241	0,1700470	0,281	0,181	0,321	0,2103040
0,242	0,098	0,282	0,182	0,322	0,2107759
0,243	11197	0,283	0,183	0,323	0,2112470
0,244	16547	0,284	0,184	0,324	0,2117174
0,245	21887	0,285	0,185	0,325	0,2121871
0,246	27218	0,286	0,186	0,326	0,2126566
0,247	32540	0,287	0,187	0,327	0,2131251
0,248	37853	0,288	0,188	0,328	0,2135941
0,249	43156	0,289	0,189	0,329	0,2140634
0,250	48451	0,290	0,190	0,330	0,2145333
0,251	53736	0,291	0,191	0,331	0,2149999
0,252	59013	0,292	0,192	0,332	0,2154658
0,253	64280	0,293	0,193	0,333	0,2159300
0,254	69538	0,294	0,194	0,334	0,2163935
0,255	74788	0,295	0,195	0,335	0,2168564
0,256	80029	0,296	0,196	0,336	0,2173185
0,257	85261	0,297	0,197	0,337	0,2177790
0,258	90484	0,298	0,198	0,338	0,2182388
0,259	0,1797468	0,299	0,199	0,339	0,2186980
0,260	0,1800903	0,300	0,200	0,340	0,2191565
0,261	0,6100	0,301	0,201	0,341	0,2196133
0,262	11288	0,302	0,202	0,342	0,2200695
0,263	16467	0,303	0,203	0,343	0,2205250
0,264	21648	0,304	0,204	0,344	0,2209808
0,265	26820	0,305	0,205	0,345	0,2214350
0,266	31993	0,306	0,206	0,346	0,2218895
0,267	37168	0,307	0,207	0,347	0,2223433
0,268	42335	0,308	0,208	0,348	0,2227965
0,269	47503	0,309	0,209	0,349	0,2232491
0,270	52673	0,310	0,210	0,350	0,2237011
0,271	57844	0,311	0,211	0,351	0,2241533
0,272	63016	0,312	0,212	0,352	0,2246054
0,273	68189	0,313	0,213	0,353	0,2250576
0,274	73362	0,314	0,214	0,354	0,2255093
0,275	78535	0,315	0,215	0,355	0,2259609
0,276	83704	0,316	0,216	0,356	0,2264121
0,277	88875	0,317	0,217	0,357	0,2268635
0,278	94048	0,318	0,218	0,358	0,2273143
0,279	0,1898183	0,319	0,219	0,359	0,2277651
0,280	0,1903220	0,320	0,220	0,360	0,2282159

h	log y y	h	log y y	h	log y y
0.360	0.2282031	0.400	0.4455716	0.440	0.6620486
0.361	86490	0.401	59990	0.441	24499
0.362	99913	0.402	64158	0.442	28607
0.363	95390	0.403	68371	0.443	32711
0.364	0.2299831	0.404	72578	0.444	36809
0.365	0.2304165	0.405	76779	0.445	40903
0.366	08694	0.406	80975	0.446	44991
0.367	13116	0.407	85166	0.447	49075
0.368	17531	0.408	89351	0.448	53154
0.369	21941	0.409	93531	0.449	57228
0.370	26346	0.410	0.4497705	0.450	61307
0.371	30743	0.411	0.2302874	0.451	65382
0.372	35135	0.412	06038	0.452	69451
0.373	39541	0.413	10196	0.453	73516
0.374	43990	0.414	14369	0.454	77576
0.375	48374	0.415	18496	0.455	81631
0.376	52642	0.416	22638	0.456	85681
0.377	57003	0.417	26775	0.457	89726
0.378	61339	0.418	30906	0.458	93767
0.379	65799	0.419	35031	0.459	97803
0.380	70053	0.420	39153	0.460	0.2699824
0.381	74391	0.421	43269	0.461	0.2703741
0.382	78723	0.422	47379	0.462	07652
0.383	83050	0.423	51485	0.463	11559
0.384	87370	0.424	55584	0.464	15461
0.385	91685	0.425	59679	0.465	19365
0.386	0.2309991	0.426	63768	0.466	23253
0.387	0.2400096	0.427	67853	0.467	27141
0.388	04594	0.428	71931	0.468	31025
0.389	08885	0.429	76006	0.469	34904
0.390	13171	0.430	80075	0.470	38778
0.391	17451	0.431	84139	0.471	42648
0.392	21725	0.432	88198	0.472	46513
0.393	25994	0.433	92251	0.473	50374
0.394	30257	0.434	0.2306300	0.474	54230
0.395	34514	0.435	0.2600344	0.475	58081
0.396	38766	0.436	0.23081	0.476	61929
0.397	43012	0.437	08215	0.477	65771
0.398	47251	0.438	12444	0.478	69609
0.399	51487	0.439	16667	0.479	73441
0.400	0.2455716	0.440	0.2620486	0.480	0.2777272

h	log y y	h	log y y	h	log y y
0.480	0.2777272	0.520	0.2966864	0.560	0.3069938
0.481	81096	0.521	30518	0.561	73437
0.482	84916	0.522	31468	0.562	76911
0.483	88731	0.523	32418	0.563	80412
0.484	92543	0.524	33368	0.564	83910
0.485	0.2796349	0.525	34318	0.565	87394
0.486	0.2800151	0.526	48736	0.566	90874
0.487	03909	0.527	52155	0.567	94350
0.488	07743	0.528	55981	0.568	0.3097823
0.489	11531	0.529	59802	0.569	0.3101891
0.490	15316	0.530	63620	0.570	04758
0.491	19096	0.531	67433	0.571	08220
0.492	22871	0.532	71243	0.572	11678
0.493	26644	0.533	75049	0.573	15133
0.494	30411	0.534	78850	0.574	18584
0.495	34173	0.535	82648	0.575	22031
0.496	37931	0.536	86441	0.576	25475
0.497	41686	0.537	90232	0.577	28915
0.498	45436	0.538	94018	0.578	32353
0.499	49181	0.539	97800	0.579	35785
0.500	52923	0.540	0.2999178	0.580	39215
0.501	56660	0.541	0.3002753	0.581	42641
0.502	60392	0.542	06123	0.582	46064
0.503	64121	0.543	09800	0.583	49483
0.504	67845	0.544	13452	0.584	52898
0.505	71565	0.545	17011	0.585	56310
0.506	75281	0.546	20666	0.586	59719
0.507	78991	0.547	24317	0.587	63124
0.508	82700	0.548	27964	0.588	66525
0.509	86403	0.549	31608	0.589	69923
0.510	90102	0.550	35248	0.590	73318
0.511	93797	0.551	38884	0.591	76709
0.512	0.2807487	0.552	42516	0.592	80096
0.513	0.2809174	0.553	46144	0.593	83481
0.514	02835	0.554	49769	0.594	86861
0.515	08535	0.555	53390	0.595	90239
0.516	12209	0.556	56997	0.596	93612
0.517	15879	0.557	60600	0.597	0.3196983
0.518	19545	0.558	64200	0.598	0.3200350
0.519	23207	0.559	67806	0.599	03714
0.520	0.2809684	0.560	0.3069938	0.600	0.3207074

x vel z	ξ	ζ	x vel z	ξ	ζ
0,000	0,0000000	0,0000000	0,040	0,0000936	0,0000894
0,001	001	001	0,041	094	0938
0,002	002	002	0,042	1033	0984
0,003	003	003	0,043	1084	1031
0,004	004	004	0,044	1135	1079
0,005	014	014	0,045	1188	1128
0,006	011	010	0,046	1243	1178
0,007	018	016	0,047	1298	1229
0,008	027	025	0,048	1354	1281
0,009	047	045	0,049	1412	1334
0,010	057	057	0,050	1471	1389
0,011	070	069	0,051	1531	1444
0,012	083	082	0,052	1591	1500
0,013	097	096	0,053	1656	1558
0,014	113	111	0,054	1720	1616
0,015	130	127	0,055	1785	1675
0,016	148	145	0,056	1851	1736
0,017	167	164	0,057	1920	1798
0,018	187	183	0,058	1989	1860
0,019	209	204	0,059	2060	1924
0,020	231	226	0,060	2131	1988
0,021	255	249	0,061	2204	2054
0,022	280	273	0,062	2278	2121
0,023	306	298	0,063	2354	2189
0,024	334	315	0,064	2431	2257
0,025	362	342	0,065	2509	2327
0,026	392	381	0,066	2588	2398
0,027	423	410	0,067	2669	2470
0,028	455	441	0,068	2751	2541
0,029	489	473	0,069	2834	2617
0,030	523	506	0,070	2918	2694
0,031	559	539	0,071	3004	2767
0,032	596	575	0,072	3091	2844
0,033	634	611	0,073	3180	2921
0,034	674	648	0,074	3269	3001
0,035	714	686	0,075	3360	3081
0,036	756	726	0,076	3453	3162
0,037	799	766	0,077	3546	3244
0,038	844	807	0,078	3641	3327
0,039	889	850	0,079	3738	3411
0,040	0,0000936	0,0000894	0,080	0,0000835	0,0000796

x vel z	ξ	ζ	x vel z	ξ	ζ
0,080	0,0000835	0,0000796	0,120	0,0008845	0,0008698
0,081	8934	8931	0,121	8999	8998
0,082	4034	3969	0,122	9154	9153
0,083	4136	3757	0,123	9311	9310
0,084	4139	3846	0,124	9469	9468
0,085	4343	3936	0,125	9628	9627
0,086	4448	4027	0,126	9789	9788
0,087	4555	4119	0,127	0,0009931	8990
0,088	4663	4212	0,128	0,0010115	8721
0,089	4773	4306	0,129	0,0010300	8853
0,090	4884	4401	0,130	0,0010487	8986
0,091	4996	4496	0,131	0,0010675	9120
0,092	5109	4591	0,132	0,0010864	9255
0,093	5224	4691	0,133	0,0011054	9390
0,094	5341	4790	0,134	0,0011245	9527
0,095	5458	4890	0,135	0,0011437	9665
0,096	5577	4991	0,136	1,477	9803
0,097	5697	5092	0,137	1,654	0,0009941
0,098	5819	5195	0,138	1,832	0,0010083
0,099	5942	5299	0,139	2,012	0,0010224
0,100	6066	5403	0,140	2,193	0,0010366
0,101	6192	5509	0,141	2,376	0,0010509
0,102	6319	5616	0,142	2,560	0,0010651
0,103	6448	5723	0,143	2,745	0,0010795
0,104	6578	5831	0,144	2,931	0,0010940
0,105	6709	5941	0,145	3,118	0,0011084
0,106	6842	6051	0,146	3,311	0,0011238
0,107	6976	6161	0,147	3,503	0,0011387
0,108	7111	6271	0,148	3,696	0,0011536
0,109	7248	6381	0,149	3,891	0,0011686
0,110	7386	6493	0,150	4,087	0,0011838
0,111	7526	6608	0,151	4,285	0,0011990
0,112	7667	6734	0,152	4,484	0,0012143
0,113	7809	6861	0,153	4,684	0,0012296
0,114	7953	6989	0,154	4,886	0,0012451
0,115	8098	7088	0,155	5,090	0,0012607
0,116	8245	7208	0,156	5,295	0,0012763
0,117	8393	7329	0,157	5,502	0,0012921
0,118	8542	7451	0,158	5,710	0,0013079
0,119	8693	7574	0,159	5,920	0,0013238
0,120	0,0008845	0,0008698	0,160	0,0018131	0,0018398

x vel z	ξ	ζ	x vel z	ξ	ζ
0.160	0.0016131	0.0013398	0.200	0.0018777	0.002097
0.161	6144	3559	0.201	6154	3570
0.162	6559	3711	0.202	6431	3877
0.163	6775	3883	0.203	6713	4094
0.164	6992	4047	0.204	6995	4321
0.165	7211	4211	0.205	7278	4550
0.166	7431	4377	0.206	7564	4789
0.167	7654	4543	0.207	7851	5030
0.168	7878	4710	0.208	8139	5270
0.169	8103	4878	0.209	8429	5511
0.170	8330	5047	0.210	8721	5754
0.171	8558	5216	0.211	9015	5997
0.172	8788	5387	0.212	9311	6241
0.173	9020	5558	0.213	9608	6486
0.174	9253	5730	0.214	0.0020977	3311
0.175	9487	5903	0.215	0.0020207	3548
0.176	9724	6077	0.216	0.00209	3785
0.177	0.0019961	6252	0.217	0.00214	3932
0.178	0.0020201	6428	0.218	1119	4181
0.179	0.0020441	6604	0.219	1447	4432
0.180	0.0020685	6782	0.220	1776	4684
0.181	0.0020929	6960	0.221	2047	4934
0.182	1175	7139	0.222	2359	5186
0.183	1421	7319	0.223	2674	5439
0.184	1671	7500	0.224	2990	5693
0.185	1922	7681	0.225	3308	5947
0.186	2174	7864	0.226	3627	6202
0.187	2428	8047	0.227	3949	6458
0.188	2683	8231	0.228	4272	6715
0.189	2941	8416	0.229	4597	6973
0.190	3199	8602	0.230	4924	7231
0.191	3460	8789	0.231	5252	7491
0.192	3722	8976	0.232	5582	7751
0.193	3985	9165	0.233	5914	8011
0.194	4251	9354	0.234	6248	8271
0.195	4518	9544	0.235	6584	8531
0.196	4786	9735	0.236	6921	8791
0.197	5056	0.0019916	0.237	7260	9051
0.198	5328	0.0020219	0.238	7601	9311
0.199	5602	0.0020527	0.239	7944	9571
0.200	0.0020877	0.0020877	0.240	0.0020877	0.0020877

x vel z	ξ	ζ	x vel z	ξ	ζ
0.240	0.0028189	0.0028939	0.270	0.0049485	0.0050687
0.241	8635	9166	0.271	0.0049888	6137
0.242	8953	9394	0.272	0.0050291	6387
0.243	9271	9623	0.273	0.0050694	6639
0.244	0.0029685	0.0029842	0.274	1107	7091
0.245	0.0030039	0.0030083	0.275	1517	7344
0.246	0.0030394	0.0030438	0.276	1930	7598
0.247	0.0030751	0.0030795	0.277	2344	7852
0.248	1111	0.0031151	0.278	2760	8107
0.249	1472	1011	0.279	3178	8361
0.250	1835	1245	0.280	3598	8616
0.251	2199	1480	0.281	4020	8872
0.252	2565	1716	0.282	4444	9128
0.253	2934	1952	0.283	4870	9384
0.254	3305	2189	0.284	5298	9641
0.255	3677	2427	0.285	5728	0.0039914
0.256	4051	2666	0.286	6160	0.0040175
0.257	4427	2905	0.287	6594	0.0040437
0.258	4804	3145	0.288	7030	0.0040700
0.259	5182	3387	0.289	7468	0.0040963
0.260	5566	3628	0.290	7908	1127
0.261	5949	3871	0.291	8350	1491
0.262	6334	4114	0.292	8795	1757
0.263	6721	4358	0.293	9241	2023
0.264	7111	4603	0.294	0.0039689	2290
0.265	7502	4848	0.295	0.0040139	2557
0.266	7894	5094	0.296	0.0040591	2826
0.267	8289	5341	0.297	1045	3095
0.268	8686	5589	0.298	1502	3364
0.269	9085	5838	0.299	1960	3633
0.270	0.0049485	0.0049485	0.300	0.0049485	0.0049485



TAFEL

ZUR BERECHNUNG DER WAHREN ANOMALIE IN EINER PARABOLISCHEN BAHN

VON

E. J. SCHERING.



$\lg \frac{1}{2} \lg \frac{1}{2} w^2 = m, \log m = \log M + \mu, \log \lg \frac{1}{2} w = \log \lg W + N\mu + N''\mu^2 + N'''\mu^3$					
$10 + \log M$	$10 + \log \lg W$	N	$10 + \log N$	$10 + \log N''$	$10 + \log N'''$
8,5885901	8,5885719	$1 - 10^0$	9,9995649	7,56138 n	7,5452 n
8,6662719	8,6662642	$1 - 10^1$	9,9993794	7,515565 n	7,6036 n
8,73961843	8,73961305	$1 - 10^2$	9,99913054	7,661071 n	7,6420 n
8,78837604	8,7883747	$1 - 10^3$	9,99891290	7,757437 n	7,9381 n
8,85130031	8,85057346	$1 - 10^4$	9,9984993	7,881467 n	8,0603 n
8,89125539	8,89038443	$1 - 10^5$	9,99815934	7,999921 n	8,1373 n
8,94025794	8,93916137	$1 - 10^6$	9,99781208	8,055739 n	8,2309 n
8,98039716	8,97908443	$1 - 10^7$	9,99738638	8,133827 n	8,3068 n
9,04396688	9,04221115	$1 - 10^8$	9,99681167	8,235174 n	8,4251 n
9,09351618	9,09131751	$1 - 10^9$	9,99613519	8,31187 n	8,5153 n
9,14336824	9,14261080	$1 - 10^{10}$	9,99545370	8,45443 n	8,6039 n
9,1735886	9,17280034	$1 - 10^{11}$	9,99575405	8,50464 n	8,6358 n
9,20816384	9,20446770	$1 - 10^{12}$	9,9950006	8,56370 n	8,7147 n
9,24962910	9,24517476	$1 - 10^{13}$	9,9942668	8,64144 n	8,7815 n
9,27661939	9,27159214	$1 - 10^{14}$	9,99351677	8,69605 n	8,8250 n
9,30091914	9,29531516	$1 - 10^{15}$	9,99290462	8,731361 n	8,8621 n
9,31303352	9,3168999	$1 - 10^{16}$	9,99288661	8,771443 n	8,8947 n
9,34337093	9,33660457	$1 - 10^{17}$	9,99277173	8,806112 n	8,9237 n
9,36817654	9,36661200	$1 - 10^{18}$	9,99257674	8,848095 n	8,9576 n
9,40443645	9,39469344	$1 - 10^{19}$	9,99230249	8,90390 n	9,0005 n
9,43099990	9,42105087	$1 - 10^{20}$	9,99207664	8,95610 n	9,0353 n
9,44018200	9,4498747	$1 - 10^{21}$	9,99200337	8,965080 n	9,0496 n
9,4664164	9,45445977	$1 - 10^{22}$	9,99772361	9,005051 n	9,0727 n
9,48974967	9,47691391	$1 - 10^{23}$	9,99754381	9,04616 n	9,0954 n
9,51168702	9,49760056	$1 - 10^{24}$	9,99731278	9,072536 n	9,1137 n
9,53114310	9,51677870	$1 - 10^{25}$	9,997081161	9,101388 n	9,1289 n
9,55134305	9,53468313	$1 - 10^{26}$	9,99684895	9,127600 n	9,1411 n
9,56946545	9,55149208	$1 - 10^{27}$	9,996614173	9,151587 n	9,1508 n
9,58665444	9,5679999	$1 - 10^{28}$	9,99637873	9,173576 n	9,1684 n
9,60302803	9,58321237	$1 - 10^{29}$	9,996142109	9,193811 n	9,1855 n
9,61868412	9,59665883	$1 - 10^{30}$	9,995901139	9,212516 n	9,1669 n
9,63370482	9,61009037	$10^0 + 10^1$	9,995664838	9,229822 n	9,1685 n
9,64815975	9,62331617	$10^1 + 10^2$	9,995412151	9,245877 n	9,1684 n
9,66210845	9,63585531	$10^2 + 10^3$	9,995182304	9,260798 n	9,1668 n
9,67854372	9,65051500	$10^3 + 10^4$	9,994948748	9,276739 n	9,1617 n
9,68868582	9,65951055	$10^4 + 10^5$	9,994691317	9,287615 n	9,1591 n
9,70139815	9,67072933	$10^5 + 10^6$	9,99442867	9,299693 n	9,1551 n

$\lg \frac{1}{2} \lg \frac{1}{2} w^2 = m, \log m = \log M + \mu, \log \lg \frac{1}{2} w = \log \lg W + N\mu + N''\mu^2 + N'''\mu^3$					
$10 + \log M$	$10 + \log \lg W$	N	$10 + \log N$	$10 + \log N''$	$10 + \log N'''$
9,70139815	9,67072933	$10^6 + 10^7$	9,94448267	9,299693 n	9,1531 n
9,71377363	9,68158945	$1 - 10^1$	9,94200805	9,310957 n	9,1457 n
9,72584274	9,69211937	$1 - 10^2$	9,93951945	9,324474 n	9,1371 n
9,73763458	9,70347117	$1 - 10^3$	9,93701611	9,338196 n	9,1270 n
9,75565285	9,71786428	$1 - 10^4$	9,93453111	9,352436 n	9,1085 n
9,77780504	9,73674179	$1 - 10^5$	9,93205665	9,367354 n	9,0800 n
9,78706311	9,74456508	$1 - 10^6$	9,929573397	9,382540 n	9,0661 n
9,80719686	9,76143937	$1 - 10^7$	9,927081875	9,397945 n	9,0510 n
9,827176763	9,77847927	$1 - 10^8$	9,924557570	9,413233 n	8,9875 n
9,84120417	9,7949734	$1 - 10^9$	9,92204483	9,428404 n	8,9543 n
9,85441839	9,80046941	$1 - 10^{10}$	9,90848502	9,403760 n	8,9171 n
9,8740355	9,81601161	10^0	9,90308999	9,44143 n	8,8528 n
9,89114651	9,83130999	$1 - 10^{11}$	9,89762709	9,417751 n	8,7755 n
9,91211917	9,84619157	$1 - 10^{12}$	9,89204960	9,421808 n	8,6801 n
9,92103832	9,86078890	$10^0 + 10^1$	9,88649073	9,426676 n	8,5575 n
9,93969488	9,87561166	$1 - 10^{13}$	9,88081359	9,429421 n	8,3879 n
9,96815691	9,8907368	$1 - 10^{14}$	9,87504126	9,431097 n	8,1121 n
9,98821504	9,90438750	$1 - 10^{15}$	9,86857942	9,431766 n	7,7428 n
9,99101455	9,91195417	$1 - 10^{16}$	9,86530143	9,431617 n	7,7427
10,01433818	9,92310804	$1 - 10^{17}$	9,860393801	9,430394 n	8,1571
10,03000990	9,93436054	$1 - 10^{18}$	9,85531721	9,429498 n	8,1593
10,04443091	9,94121040	$10^0 + 10^1$	9,85121835	9,427920 n	8,1687
10,06116026	9,95612491	10^1	9,84509804	9,424798 n	8,1886
10,08004489	9,96954959	$10^0 + 10^2$	9,83884909	9,420780 n	8,6771
10,09214046	9,97816715	$1 - 10^{19}$	9,83463161	9,417610 n	8,7246
10,10552481	9,98667735	$1 - 10^{20}$	9,830127478	9,414048 n	8,7652
10,12039374	10,00000000	$1 - 10^{21}$	9,82590874	9,409979 n	8,8199
10,14463598	10,01303275	$1 - 10^{22}$	9,821734497	9,4040108 n	8,8572
10,15791599	10,02173185	$10^0 + 10^1$	9,81791336	9,395891 n	8,8803
10,17240311	10,03107395	$10^1 + 10^2$	9,80814447	9,389958 n	8,9019
10,189199921	10,04137599	$1 - 10^{23}$	9,80163235	9,381332 n	8,9260
10,20947449	10,05457223	$10^2 + 10^3$	9,79538000	9,373105 n	8,9434
10,22012643	10,06120320	$10^3 + 10^4$	9,79239169	9,367860 n	8,9533
10,23993544	10,07036402	$10^4 + 10^5$	9,78612018	9,357950 n	8,9655
10,26141689	10,08043563	10^5	9,77815125	9,344487 n	8,9778
10,28709848	10,10170719	$10^6 + 10^7$	9,77085201	9,331312 n	8,9851
10,31079568	10,11536941	$10^7 + 10^8$	9,76344799	9,317095 n	8,9892

$\lg \frac{1}{2} w + \frac{1}{2} \lg \frac{1}{2} w^3 = m, \log m = \log M + \mu, \log \lg \frac{1}{2} w = \log \lg \frac{1}{2} W + N\mu + N''\mu^2 + N'''\mu^3$					
$10 + \log M$	$10 + \log \lg \frac{1}{2} W$	N	$10 + \log N$	$10 + \log N''$	$10 + \log N'''$
10.31079268	10.11556944	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.76544799	9.317095 n	8.9892
10.31511218	10.11666568	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.75874666	9.301787 n	8.9921
10.35074162	10.11402551	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.74813801	9.285335 n	8.9884
10.38718953	10.11587021	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.74036269	9.267674 n	8.9857
10.40083224	10.11661796	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.73659650	9.258567 n	8.9803
10.41477576	10.11737437	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.73293176	9.248729 n	8.9761
10.43386587	10.11839889	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.72698793	9.235341 n	8.9697
10.45899496	10.11970735	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.72015930	9.217706 n	8.9598
10.48438041	10.12100266	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.71311044	9.199206 n	8.9479
10.50584503	10.12215807	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.70573701	9.181218 n	8.9370
10.52447376	10.12299596	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.70191938	9.170890 n	8.9280
10.53995962	10.12386063	$\frac{1}{2}$	9.69897000	9.158096 n	8.9183
10.55722890	10.12473355	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.69605020	9.144824 n	8.9077
10.57542500	10.12563679	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.69309608	9.131050 n	8.8964
10.59149582	10.12641368	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.68688088	9.118823 n	8.8861
10.61365452	10.12748359	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.68121224	9.101883 n	8.8714
10.63378029	10.12844451	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.67669361	9.086418 n	8.8577
10.65453063	10.12943066	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.67209786	9.070343 n	8.8430
10.66900678	10.13010900	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.66900678	9.059251 n	8.8327
10.67634484	10.13044397	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.66745935	9.053599 n	8.8274
10.69886994	10.13148657	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.66475783	9.045612 n	8.8108
10.72236097	10.13256125	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2$	9.66181120	9.037887 n	8.7933
10.74688242	10.13367095	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.65531251	8.998829 n	8.7746
10.77545373	10.13492500	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.64781748	8.976609 n	8.7526
10.79941245	10.13600795	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.64345168	8.957976 n	8.7338
10.81808085	10.13686651	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2$	9.64015004	8.942463 n	8.7191
10.83739467	10.13766683	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.63681110	8.928157 n	8.7058
10.86767664	10.13870793	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2$	9.63178187	8.904955 n	8.6796
10.89908987	10.14034117	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2$	9.62668247	8.880157 n	8.6539
10.92109389	10.14178795	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.62131493	8.862836 n	8.6358
10.94542777	10.14254902	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.61697887	8.844831 n	8.6169
10.96220717	10.14372810	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.61279996	8.831521 n	8.6009
10.97601309	10.14531276	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.61542395	8.812181 n	8.5921
10.99520873	10.14611227	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.61278386	8.806599 n	8.5765
11.01109601	10.14693974	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2$	9.61006016	8.794416 n	8.5636
11.03564644	10.14999988	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.60794502	8.775596 n	8.5437

$\lg \frac{1}{2} w + \frac{1}{2} \lg \frac{1}{2} w^3 = m, \log m = \log M + \mu, \log \lg \frac{1}{2} w = \log \lg \frac{1}{2} W + N\mu + N''\mu^2 + N'''\mu^3$					
$10 + \log M$	$10 + \log \lg \frac{1}{2} W$	N	$10 + \log N$	$10 + \log N''$	$10 + \log N'''$
11.03564644	10.45999988	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.67455502	8.775596 n	8.5437
11.04979168	10.46531687	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.66564112	8.764801 n	8.5312
11.07918125	10.47711215	$\frac{1}{2}$	9.65009999	8.744427 n	8.5083
11.11016159	10.48946249	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.59842571	8.718912 n	8.4811
11.14291768	10.50239944	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.59176075	8.694169 n	8.4568
11.17764677	10.51600008	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.59106461	8.668239 n	8.4188
11.21459567	10.53034891	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2$	9.58731673	8.640339 n	8.3994
11.25405556	10.54554023	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.58357659	8.610924 n	8.3677
11.29617802	10.56169246	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.57978360	8.579489 n	8.3340
11.34199396	10.57891913	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2$	9.57595719	8.548070 n	8.2980
11.39141382	10.59748850	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.57209677	8.519500 n	8.2593
11.44357359	10.61753456	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2$	9.56821072	8.470120 n	8.2173
11.50047813	10.63937680	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.56427443	8.420089 n	8.1715
11.57018816	10.66339543	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.56030524	8.379646 n	8.1212
11.64434813	10.69000564	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}u$	9.55630250	8.315758 n	8.0643
11.68494068	10.70646474	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.55188721	8.297844 n	8.0348
11.75438072	10.72840786	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2$	9.54846661	8.250734 n	7.9853
11.82488860	10.75181544	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.54518461	8.198202 n	7.9303
11.88786997	10.77447846	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2$	9.54611200	8.159748 n	7.8899
11.94166034	10.79553330	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.54406830	8.117137 n	7.8538
11.97911566	10.80862729	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}u^2$	9.54288468	8.091036 n	7.8186
12.03991000	10.82979966	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.54110357	8.048814 n	7.7749
12.12555478	10.85998920	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.53886685	7.989772 n	7.7139
12.20606644	10.88542601	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.53711948	7.937793 n	7.6613
12.26897900	10.90867249	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.53571597	7.891364 n	7.6116
12.33597908	10.93181866	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.53449919	7.845004 n	7.5614
12.41198531	10.95777875	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.53317870	7.792121 n	7.5122
12.49781844	10.98711225	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.53190449	7.744634 n	7.4524
12.59799959	11.02091557	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.53061652	7.667667 n	7.3856
12.71511815	11.06083463	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.52934479	7.587261 n	7.3026
12.85952557	11.10964757	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.52809966	7.499721 n	7.2039
12.97765665	11.14901254	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.52720012	7.410118 n	7.1234
13.16421607	11.21216833	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.52612380	7.284648 n	6.9969
13.30944413	11.26078695	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.52544673	7.187418 n	6.8990
13.51801211	11.34115128	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.52475603	7.040922 n	6.7418
13.79971682	11.41668211	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}u$	9.52417968	6.855723 n	6.5960

EINRICHTUNG DER TAFEL.

Die Tafel gibt zum logarithmus der mittleren Anomalie den logarithmus tangens der halben wahren Anomalie nach der in der Ueberschrift stehenden Formel für Werthe von $10 + \log m$ innerhalb der Grenzen 8,5 und 13,8 auf weniger als drei Einheiten der achten Decimale genau, wenn für $\log M$ derjenige Werth in der Tafel genommen wird, der dem Werthe $\log m$ zunächst liegt.

Für Werthe von $10 + \log m$, die weniger als 8,5 betragen, ist zu setzen

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} w &= \log m - m^2 \cdot \text{num} [\log = 9,160663 - 10] \\ &\quad - m^4 \cdot \text{num} [\log = 9,0815 - 10] \end{aligned}$$

für Werthe, die über 13,8 hinausgehen, entweder

$$\begin{aligned} \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} w &= \frac{1}{2} \log 3m - (3m)^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{num} [\log = 9,637784 - 10] \\ &\quad - (3m)^{-\frac{3}{2}} \cdot \text{num} [\log = 9,3368 - 10] \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \log \sin w &= \frac{1}{2} \log \frac{2}{3} m - (\frac{2}{3} m)^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{num} [\log = 8,4337 - 10] \\ \log 3 &= 0,47712125 \quad \log \frac{2}{3} = 9,57403127 - 10 \end{aligned}$$

Die Grössen $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} w$ und $\log \sin w$ bestimmen sich, wenn in allen Formeln die Glieder höherer Ordnung als der zweiten unbeachtet gelassen, und die Glieder zweiter Ordnung mit Hilfe vierstelliger Logarithmentafeln berechnet werden, in so weit genau, dass die Fehler vor w weniger als 0'1 beträgt.

BEMERKUNGEN.

Der vorliegende Abdruck der Theoria motus corporum coelestium bildet in Vereinigung mit den sechs Bänden Gauss'scher Werke, welche ich im Auftrage der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgebe, eine Gesamtausgabe von GAUSS Werken. Sie enthält mit Ausschluss einiger Tabellenwerke und der Karten für den Erdmagnetismus alle von GAUSS veröffentlichten Arbeiten, ferner aus dem handschriftlichen Nachlasse, der sich im Besitze der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen befindet, alle Aufzeichnungen, die mir ein wissenschaftliches Interesse zu haben schienen. Die Benutzung dieses Nachlasses, auch für die Ausgabe der Theoria motus, hat mir die königliche Gesellschaft freigestellt.

Das von GAUSS im Jahre 1809 in 4^o veröffentlichte Werk ist hier unverändert abgedruckt. Die Ankündigung, die er selbst von dem Werke in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen 1809 Juni 17 gegeben, habe ich in GAUSS Werken, Band VI. Seite 83 aufgenommen. Die frühern Druckfehler, die grössten Theils schon öffentlich angemerkt waren, zu denen auch noch einige andere von GAUSS in seinem Exemplare angezeichnete hinzukommen, habe ich berücksichtigt, über die wenigen den Inhalt betreffenden Abänderungen im Folgenden ausführlich berichtet. Meine Einschaltungen sind von GAUSS Worten überall durch besondere [Klammern] abgetrennt. Zur Erleichterung der Benutzung dieser Ausgabe bei Citaten, die sich auf Seitenzahlen der älteren beziehen, habe ich bei dem Inhaltsverzeichniss dieses Bandes die (pag.) der Anfänge der Sectionen in der früheren Ausgabe mit angegeben.

Zu Art. 1.

In einem Briefe vom 23. Febr. 1810 (abgedruckt in der von Freiherrn von ZACH herausgegebenen Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, Gotha 1810, März. Band XXI. Seite 280) schreibt GAUSS: Für die Notirung der Druckfehler [Monatl. Corr. Bd. XXI. S. 281] in meiner Theoria, bin ich Herrn ORIANI sehr verbunden. Er hat ganz recht, dass ich [Art. 114. Zeile 16] hinzu zu fügen vergessen habe, dass $B, B', B'' = 0$, vorausgesetzt werden müssen, wenn die Bedingungs-Gleichung, bei welcher die Gleichung [7] unbrauchbar ist, die dort angegebene Gestalt [nämlich:

$$\left. \begin{aligned} & \tan \delta' \tan \delta'' \sin(L - \alpha) \sin(L' - L'') \\ & + \tan \delta' \tan \delta \sin(L' - \alpha) \sin(L - L'') \\ & + \tan \delta \tan \delta'' \sin(L'' - \alpha) \sin(L - L') \end{aligned} \right\} = 0$$

wie sie in der Ausgabe von 1809 steht] haben soll. Es ist übrigens klar, dass, wenn auch nicht $B, B', B'' = 0$ sind, doch die Gleichung [7] unbrauchbar sein kann, wenn nämlich der 12gliedrige Ausdruck, welchen ORIANI entwickelt hat, zufällig $= 0$ oder sehr klein wird.

Dass EULER schon das Theorem gefunden hat, woraus der schöne von mir LA PLACE beigelegte Lehrsatz sehr leicht abgeleitet werden kann, fiel mir selbst schon früher ein, als aber die Stelle Art. 177. schon abgedruckt war; ich wollte es aber nicht unter die Errata setzen, weil LA PLACE wenigstens das obige Theorem doch erst in der dort gebrauchten Form aufgestellt hat.

Die meisten der von ORIANI angezeigten Druckfehler hatte ich mir auch schon notirt. Hier sind noch drei andere von ihm übersehene!

Art. 1, Zeile 17: statt inversa lies composita — —

Zu Art. 8.

Handschriftliche Aufzeichnung von GAUSS:

$$\begin{aligned} 1 &= \cos v \cos E + \frac{\sin v \sin E}{\cos \varphi} \\ \cos \varphi &= \frac{\sin v \sin E}{1 - \cos v \cos E} \\ \sin \varphi &= \frac{\cos E - \cos v}{1 - \cos v \cos E} \end{aligned}$$

Zu Art. 17.

Neben die Formeln dieses Art. hat GAUSS in sein Handexemplar geschrieben:

$$\begin{aligned} \sin E &= \frac{\sqrt{\cos \varphi + 2\sqrt{\cos \varphi} + \cos \varphi^2}}{(1 + \sqrt{\cos \varphi})(1 + \cos \varphi)} \\ \text{aequatio centri} &= 2 \arcsin \left(\frac{1}{1 + \cos \varphi} \sqrt{\frac{1 - e}{2}} \right) + e \sin E \\ &= \arccos \frac{-1 + \sqrt{\cos \varphi + \cos \varphi^2}}{1 + \cos \varphi} + e \sin E \\ &= \arcsin \tan \frac{1}{2} \varphi^2 \tan E + e \sin E \end{aligned}$$

Zu Art. 40.

GAUSS hat in seinem Handexemplar Folgendes aufgezeichnet:

$$\begin{aligned} \log \frac{A}{T} &= -2 Am = -\frac{1}{3} A - \frac{1}{15} A^3 - \frac{1}{35} A^5 \dots \\ &= -2 Tm' = -\frac{1}{3} T + \frac{1}{15} T^3 - \frac{1}{35} T^5 \dots \end{aligned}$$

A	log m	log n	T	log m'
0,000	9,23984	9,63778	0,000	9,23984
0,010	9,24134	9,63909	0,010	9,23787
0,020	9,24284	9,64041	0,020	9,23591
0,030	9,24435	9,64172		

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2} v &= M \tan \frac{1}{2} w & r &= \frac{q \sec \frac{1}{2} w}{N} \\ \log M &= Am & \log N &= An \end{aligned}$$

Zu Art. 39. 43. 46.

In Bezug auf die Benutzung der BARKER'schen Tafel bemerkt GAUSS in den Astronomischen Nachrichten Nr. 474, 1843 (GAUSS Werke Bd. VI. S. 191), dass sie bei grossen Anomalien wegen des beschwerlichen Interpolirens sehr unbequem wird, und gibt ein Verfahren an, wie die Rechnung mit seinen Logarithmen-

tafeln auf fünf Decimalstellen und dann mit MATTHIESSEN'S Tafeln bis zu sieben Decimalstellen zu führen ist.

Zur Vermeidung der weitläufigen Rechnungen, die mit dem einen oder dem andern Verfahren noch verbunden sind, habe ich oben Seite 274 eine Tafel angefügt, mit deren Hülfe $\log \frac{1}{2} \pi$ aus $\log m$ bestimmt wird. Auf Seite 278 habe ich den Grad der Genauigkeit angegeben, der bei der verschiedenen Art der Benutzung dieser Tafel erreicht wird.

Zu Art. 54.

Handschriftliche Aufzeichnung von GAUSS:

Si duo triangula, communia habent duo latera b, c, erit

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{\sin \frac{1}{2}(a'-a)}{\sin \frac{1}{2}(A'-A)} = \frac{\sin b \sin \frac{1}{2}(C'+C)}{\cos \frac{1}{2}(B'-B)} = \frac{\sin c \sin \frac{1}{2}(B'+B)}{\cos \frac{1}{2}(C'-C)} \\ \text{II.} \quad & -\frac{\sin \frac{1}{2}(a'+a)}{\sin \frac{1}{2}(A'+A)} = \frac{\sin b \cos \frac{1}{2}(C'+C)}{\sin \frac{1}{2}(B'-B)} = \frac{\sin c \cos \frac{1}{2}(B'+B)}{\sin \frac{1}{2}(C'-C)} \\ \text{III.} \quad & -\frac{\sin \frac{1}{2}(a'-a)}{\sin \frac{1}{2}(A'+A)} = \frac{\sin b \sin \frac{1}{2}(C'-C)}{\cos \frac{1}{2}(B'+B)} = \frac{\sin c \sin \frac{1}{2}(B'-B)}{\cos \frac{1}{2}(C'+C)} \\ \text{IV.} \quad & \frac{\sin \frac{1}{2}(a'+a)}{\sin \frac{1}{2}(A'+A)} = \frac{\sin b \cos \frac{1}{2}(C'-C)}{\sin \frac{1}{2}(B'+B)} = \frac{\sin c \cos \frac{1}{2}(B'-B)}{\sin \frac{1}{2}(C'+C)} \end{aligned}$$

[Vergl. GAUSS Werke Bd. IV, S. 401 und 405.]

Zu Art. 67.

Handschriftliche Aufzeichnung von GAUSS:

$$\begin{aligned} \sin a \cos b &= -\sin a \sin b + \cos a \cos b \sin l \\ \cos a \cos b &= \cos b \cos l \\ \sin b &= +\cos a \sin b + \sin a \cos b \sin l \end{aligned}$$

Zu Art. 88.

Handschriftliche Aufzeichnung von GAUSS:

Vorschriften um den Logar.-Sinus eines kleinen Bogens zu finden:

$$\log \sin n'' = \log \sin \varphi = \log \varphi - x \left\{ \frac{1}{2} \varphi^2 + \frac{1}{24} \varphi^4 + \frac{1}{720} \varphi^6 + \frac{1}{30240} \varphi^8 + \text{etc.} \right\}$$

Man bilde die Grössen $\left(\begin{matrix} \lambda, \lambda', \lambda'', \lambda''' \dots \\ \mu, \mu', \mu'', \mu''' \dots \end{matrix} \right)$ nach folgendem Gesetze:

$$\begin{aligned} \lambda &= 2 \log n + 8,2307828 - 20 & \lambda &= \log \mu \\ \lambda' &= \lambda + \frac{1}{2} \mu & \lambda' &= \log \mu' \\ \lambda'' &= \lambda' + \frac{1}{2^2} \mu^2 (\mu' - \mu) & \lambda'' &= \log \mu'' \\ \lambda''' &= \lambda'' + \frac{1}{2^3} \mu^3 (\mu'' - \mu') & \lambda''' &= \log \mu''' \\ u. s. w. & & u. s. w. & \end{aligned}$$

so ist $\log \sin \varphi = 4,6855749 - 10$

$$+ \log n \\ - \mu^\infty$$

Beispiel: $\varphi = 37'6'' = 133560''$

	4,6855749	8,2307828	
$\log n \dots$	5,1256764	$2 \log n \dots$	10,2513528
	9,8112513	$\lambda =$	8,4821356
$\mu^\infty \dots$	0,0307842		+ 60696.8
$\log \sin \varphi \dots$	9,7804671	$\lambda' =$	8,4882052.8
			+ 1200.0
		$\lambda'' =$	8,4883252.8
			+ 24.3
		$\lambda''' =$	8,4883277.1
		$\mu =$	0,0303483.85
			4271.25
		$\mu' =$	0,0307755.1
			85.0
		$\mu'' =$	0,0307840.1
			1.9
		$\mu''' =$	0,0307841.9

Um aus $\sin \frac{1}{2} \varphi$ den Logarithmen von

$$\frac{\varphi - \sin \varphi}{\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} \varphi^3}$$

zu finden, bediene man sich folgender Näherungsformel:

$$\log \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2} \varphi} + \frac{1}{2} \right) - \log \left(\frac{1}{\sin \frac{1}{2} \varphi} - \frac{1}{2} \right)$$

Hiedurch findet man den gesuchten Logarithmen zu gross: folgende Tafel gibt die anzubringende Correction in der 7. Decimale an:

Grenze von		Abzuziehende Correction
log sin $\frac{1}{2}\varphi$	φ	
...	0	0
9,069	26° 54'	1
9,147	32 18	2
9,184	35 9	3
9,208	37 10	4
9,226	38 45	5
9,240	40 3	6
9,252	41 10	7
9,262	42 10	8
9,271	43 3	9
9,279	43 51	10
9,286	44 35	11
9,293	45 15	

Zu Art. 90 und 100.

GAUSS an BODE. Göttingen 1811, Sept. 10.

[Abgedruckt im Astronomischen Jahrbuche für das Jahr 1814, S. 256; herausgegeben von BODE, Berlin 1811.]

— — — Noch füge ich Ihrem Wunsche zufolge einen kleinen Zusatz zu meiner *Theoria motus corporum coelestium* bei.

Zur Auflösung der wichtigen Aufgabe, aus zweien Radiis vectoribus und dem eingeschlossenen Winkel die elliptischen oder hyperbolischen Elemente zu bestimmen, habe ich mich mit grossem Vortheil einer Hilfsgrösse ξ bei der Ellipse, ζ bei der Hyperbel bedient, für welche ich jenem Werke eine Tafel angehängt habe. Berechnet ist diese Tafel nach einem dort angefügten continuirten Bruche, dessen vollständige Ableitung aber dort nicht gegeben ist, und zu dessen theoretischer Entwicklung, die mit andern Untersuchungen zusammenhängt, ich bisher noch nicht Gelegenheit gefunden habe. Es wird daher manchem lieb sein, hier einen andern Weg angezeigt zu finden, auf welchem man jene Hilfsgrösse ebenso bequem hätte berechnen können.

Wir haben (Art. 90.)

$$\xi = x - \frac{1}{2} + \frac{10}{9X} = \frac{xX - \frac{1}{2}X + \frac{10}{9}}{X}$$

Der Zähler dieses Bruches verandert sich leicht, wenn man für X die dort gegebene Reihe substituirt, in

$$1 - \frac{1}{9}x + \frac{2.8}{9}x^2 + \frac{5.8.10}{9.11}xx^3 + \frac{4.8.10.12}{9.11.13}x^4 + \frac{5.8.10.12.14}{9.11.13.15}x^5 + \text{etc.}$$

Setzt man also die Reihe

$$1 + \frac{2.8}{9}x + \frac{5.8.10}{9.11}xx^2 + \text{etc.} = A,$$

so wird

$$xX - \frac{1}{2}X + \frac{10}{9} = \frac{1}{9}Ax$$

$$X = \frac{\frac{1}{9}(1 - \frac{1}{9}Ax)}{1 - \frac{1}{9}x}$$

$$\xi = \frac{\frac{1}{9}Ax(1 - \frac{1}{9}x)}{1 - \frac{1}{9}Ax}$$

nach welcher Formel man ξ immer bequem und sicher berechnen kann. Für ζ braucht man nur $-x$ statt x zu setzen.

Ich bemerke nur noch, dass man A noch bequemer nach folgender Formel berechnen kann:

$$A = (1-x)^{-\frac{1}{9}} \left(1 + \frac{1.5}{2.9}x + \frac{1.3.5.7}{2.4.9.11}xx^2 + \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.9.11.13}x^3 + \text{etc.} \right)$$

Allein die Ableitung dieser Reihe aus der vorigen beruht auf Gründen, die hier nicht ausgeführt werden können. [Sie findet sich in Art. 40. der aus dem handschriftlichen Nachlass in GAUSS Werken Bd. III. S. 209 aufgenommenen Abhandlung: *Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis.*]

Zu Art. 91.

GAUSS hat in sein Handexemplar die Formeln

$$y - 1 = \frac{1+x}{1 - \frac{1}{9}(x-\xi)}$$

$$y = 1 + \frac{10}{9}h - \frac{110}{81}h^2 + \frac{7410}{729}h^3$$

$$yy = 1 + \frac{20}{9}h - \frac{110}{81}hh + \frac{7410}{729}h^3$$

$$\frac{1}{yy} = 1 - \frac{20}{9}h + \frac{520}{81}hh - \frac{17490}{729}h^3$$

$$\text{Prope fit } y = \frac{1}{(1 - \frac{1}{3}h)^{\frac{1}{2}}}$$

eingeschrieben; in Bezug auf die letzte will ich hier hinzufügen, dass den gesuchten Werthen von y für kleine Werthe von h noch näher diejenigen liegen, welche durch die Formel

$$y = (1 + \frac{33}{8}h)^{\frac{1}{2}}$$

bestimmt werden.

Zu Art. 92.

Handschriftliche Aufzeichnung von GAUSS: Die Gleichung 15* hat:

- 1) Eine reelle negative Wurzel, wenn H zwischen den Grenzen 0 und $\frac{+1+\sqrt{5}}{6}$ liegt, nebst zwei imaginären.
- 2) Drei reelle Wurzeln, worunter Eine positive, wenn H zwischen $\frac{+1-\sqrt{5}}{6}$ und 0.
- 3) Eine reelle positive Wurzel und zwei imaginäre, wenn H zwischen $\frac{+1-\sqrt{5}}{6}$ und $-\infty$.
- 4) Drei reelle Wurzeln, unter denen Eine negativ, wenn H zwischen $\frac{+1+\sqrt{5}}{6}$ und $+\infty$.

Offenbar kann also nur von Fall 4 hier die Rede sein, wo sich zwei positive Wurzeln finden. Allein die Eine derselben ist hier immer kleiner als $\frac{+1+\sqrt{5}}{6}$, die andere grösser; letztere kann also allein gültig sein.

Bei dem im Text angezeichneten Verfahren ist klar, dass die letzte Gleichung nur dann zwei positive Wurzeln haben konnte, wenn zugleich $1-H$ negativ und $\frac{1}{2}H - \frac{1}{3}H$ positiv wäre, welches offenbar unmöglich ist, da $\frac{1}{2}H - \frac{1}{3}H = \frac{1}{6}(1-H) - \frac{1}{3}$.

Zu Art. 108.

In sein Handexemplar der Theoria motus hat GAUSS die folgenden Formeln eingeschrieben:

η est cosecans anguli inter chardam et azem

$\frac{1}{2}(\eta + \frac{1}{\eta})$ ejusdem cotangens

$\frac{r-r'}{p}$ ejusdem cosinus = $\cos \sigma$

$$p = (r+r') \frac{r-r'}{pp} \left\{ 1 - \frac{1}{(r-r')^2} - \frac{1}{(r+r')^2} + \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \sin \sigma^2 \left\{ (r+r') + \sqrt{(r+r')^2 - pp} \right\}$$

Tempus medium inter duo loca parabolica exhibetur per formulam

$$+ \frac{1}{k\sqrt{18}} \left\{ - \left(\sqrt{\frac{r'+r+p}{2}} - \sqrt{\frac{r'+r-p}{2}} \right)^3 + \sqrt{\frac{3(r'r'-rr')}{2}} - \sqrt{\frac{r'+r-p}{2}} \right\}$$

$$= - \frac{1}{3k} \left(\sqrt{(r'+r+p)} - \sqrt{(r'+r-p)} \right)^3 + \frac{1}{2k} \sqrt{(r'+r+p)} - \sqrt{(r'+r-p)}$$

$$\text{Distantia in perihelio} = 4 \frac{r'+r - \sqrt{(r'+r)^2 - pp}}{pp - (r'-r)^2}$$

An anderen Stellen des handschriftlichen Nachlasses von GAUSS finden sich ferner die in diesem Abdrucke mit der Bezeichnungsweise des Art. 108. wiedergegebenen Formeln:

Zur Berechnung der Chorde p aus Zeit $t-t'$ und Summe der beiden Radien $= r+r'$

$$(r+r'+p)^{\frac{1}{2}} - (r+r'-p)^{\frac{1}{2}} = 6k(t-t')$$

$$\text{Es sei } \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{p}{r+r'}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{p}{r+r'}\right)}}{\sqrt{8}} = \sin \frac{1}{2}\phi$$

$$[\text{so wird}] \frac{1 - \sqrt{\left(1 - \frac{pp}{(r+r')^2}\right)}}{4} = \sin^2 \frac{1}{2}\phi$$

$$\frac{1 + \sqrt{\left(1 - \frac{pp}{(r+r')^2}\right)}}{2} = \cos 2 \frac{1}{2}\phi$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{p}{r+r'} = \sin \frac{1}{2}\phi \cdot \sqrt{\cos 2 \frac{1}{2}\phi}$$

$$\frac{6}{\sqrt{8}} \cdot \frac{k(t-t')}{(r+r')^{\frac{1}{2}}} = \sin 3 \frac{1}{2}\phi$$

$$[\text{Setzt man:}] \frac{p}{r+r'} = \sin \varphi, \quad \frac{r'-r}{p} = \sin \tau$$

$$[\text{so wird:}] 2k(t-t') = p \sqrt{(r+r')} \cdot \frac{2 + \cos \varphi}{3 \cos \frac{1}{2}\varphi}$$

$$\text{Ausschnitt Dreieck} = \frac{2 + \cos \varphi}{3 \cos \frac{1}{2}\varphi}$$

$$\frac{1}{6k} (t-t') = \frac{1}{\sqrt{8}} 2(r+r')^{\frac{1}{2}} \sin \tau \cos \frac{1}{2}\varphi (3 - 2 \sin^2 \tau \cos \frac{1}{2}\varphi^2)$$

$$p = (r+r') \sin^2 \tau \cdot \cos \frac{1}{2}\varphi^2 = (r+r') \sin^2 \tau \cdot \cos 2 \frac{1}{2}\varphi$$

$$\cos \tau \cdot \operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} f$$

$$\operatorname{tang} \tau \cdot \cos \varphi = \operatorname{tang} (F - \tau)$$

$$\sin f \cdot \sin \tau \cdot \operatorname{tang} \frac{1}{2} \varphi = \sin (2\tau - F)$$

$$\sin f \cdot \sin \tau \cdot \cotang \frac{1}{2} \varphi = \sin F$$

$F - f$ und $F + f$ die wahren Anomalien.

Zu Art. 114.

Statt der von GAUSS in dem ersten Drucke gegebenen Bedingungsgleichung für die Identität der Gleichung [7] habe ich dort die allgemeine gesetzt. Vergl. oben die Bemerkungen zu Art. 1.

Zu Art. 141.

Handschriftliche Aufzeichnung von GAUSS:

z saltem duos valores reales habet, quoniam valores ipsius

$$Q \sin z^4 - \sin(z + H)$$

pro $z = 0$ atque pro $z = 180^\circ$ signa opposita habent, z non habet plures valores reales quam 4, quoniam

$$\frac{\sin(z + A)}{\sin z^4}$$

inter $z = 0$ atque $z = 180^\circ$ semel tantum fit maximum semel minimum, ac perinde inter $z = 180^\circ$ et 360° . Scilicet hoc evenit quoties

$$2 \operatorname{tang} z = -3 \cotang A \pm \sqrt{9 \cotang^2 A - 16} = 8 \operatorname{tang}(z + A)$$

Zu Art. 168.

Handschriftliche Aufzeichnung von GAUSS, die Gleichungen I. und II. betreffend:

Quodsi quidem x' et x'' inde eliminanda esset, ad aequationem ordinis 64^{a} delaberemur.

Zu Art. 176.

Handschriftliche Aufzeichnung von GAUSS:

Hätten die Hypothesen H, H' an sich (d. i. vor dem Eintreten von E oder

vor erlangter Kenntniss von diesem Eintreten) ungleiche Wahrscheinlichkeiten μ, μ' gehabt, so wird man ihnen, nach der Erscheinung von E , Wahrscheinlichkeiten beilegen müssen, die den Producten $\mu h, \mu' h'$ proportional sind.

Zu Art. 177.

In Bezug des Theorems, welches hier dem LA PLACE zugeschrieben wird, ist eine Aeußerung von GAUSS schon oben in der Bemerkung zu Art. 1. mitgetheilt.

Das dort erwähnte Verzeichniss der Druckfehler in Dr. GAUSS' Theoria motus corporum coelestium etc. Hamburgi 1809 vom Senator BAR. ORIANI [Monatl. Corr. Bd. XXI. S. 283] enthält folgende Stelle: Elegans theorema, quod tribuitur Illustr. LA PLACE, revera a LEONARDO EULERO primum inventum est. Et enim in Comment. Acad. Petropol. Tom. XVI, EULERUS ostendit, integrale

$$-\int \frac{dx}{\sqrt{\log \frac{1}{x}}}$$

sumtum ab $x = 1$ ad $x = 0$ esse $= \sqrt{\pi}$ existente π semicircumferentia circuli, radio $= 1$ descripti. Iamvero ponendo $x = e^{-tt}$ habetur

$$\frac{-dx}{\sqrt{\log \frac{1}{x}}} = 2e^{-tt} dt$$

Idoque integrale $\int e^{-tt} dt$ a $t = 0$ ad $t = \infty$ erit $= \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$ et propterea idem integrale a $t = -\infty$ ad $t = +\infty$ fiet $= \sqrt{\pi}$.

Neben diese Stelle hat GAUSS in sein Handexemplar der Monatl. Corr. die Bemerkung eingeschrieben:

Dies Theorem findet sich a. a. O. nicht, wohl aber p. 101. [Evolutio formulae integralis

$$\int x^{f-1} dx (\log x)^{\frac{m}{n}}$$

integratione a valore $x = 0$ ad $x = 1$ extensa auctore L. EULERO, Theorema 2, Coroll. 4. §. 16.] folgendes:

$$\int_0^1 dx \cdot \sqrt{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

Schreibt man hier $x = e^{-tt}$, so wird

$$\int_0^{\infty} 2tt e^{-tt} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Es ist aber $2tte^{-tt} dt = -d(te^{-tt}) + e^{-tt} dt$ und $te^{-tt} = 0$, sowohl für $t = 0$ als für $t = \infty$ also

$$\int_0^{\infty} e^{-tt} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

In seinen Vorlesungen „*Methodus quadratorum minimorum ejusque usus in Astronomia, Geodæsia Sublimiori et Scientia naturali*“ pflegte GAUSS diesen Satz in der Weise abzuleiten, dass er die Gleichung

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-tt} dt\right)^2 = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-xx-yy} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho^2} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi$$

mit Hülfe geometrischer Betrachtungen aufstellte, und dabei x, y als rechtwinkelige Coordinaten, ρ, φ als Polar-Coordinaten der Punkte in einer Ebene voraussetzte.

Göttingen. Sternwarte. 1871. Juni.

SCHERING.

INHALT

GAUSS WERKE BAND VII.

Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium	(pag. I) Seite 1
PRAEFATIO	(pag. III) Seite 3
LIBER PRIMUS. Relationes generales inter quantitates, per quas corporum coelestium motus circa Solem definiuntur	
Sectio I. <i>Relationes ad locum simplicem in orbita spectantes</i>	(pag. 1) Seite 11
Sectio II. <i>Relationes ad locum simplicem in spatio spectantes</i>	(pag. 45) Seite 53
Sectio III. <i>Relationes inter locos plures in orbita</i>	(pag. 82) Seite 92
Sectio IV. <i>Relationes inter loco plures in spatio</i>	(pag. 125) Seite 138
LIBER SECUNDUS. Investigatio orbitarum corporum coelestium ex observationibus geocentricis.	
Sectio I. <i>Determinatio orbitae e tribus observationibus completis</i>	(pag. 131) Seite 145
Sectio II. <i>Determinatio orbitae e quatuor observationibus, quarum duae tantum completae sunt</i>	(pag. 192) Seite 210
Sectio III. <i>Determinatio orbitae observationibus quocunque quam proxime satisfaciendis</i>	(pag. 205) Seite 225
Sectio IV. <i>De determinatione orbitarum, habita ratione perturbationum</i>	(pag. 225) Seite 246
TABULA I. (AD ARTT. 42. 45.)	(pag. 1*) Seite 252
TABULA II. (AD ARTT. 93.)	(pag. 9*) Seite 260
TABULA III. (AD ARTT. 99. 109.)	(pag. 17*) Seite 268
TAFEL für mittlere und wahre Anomalie in parabolischen Bahnen (zu ARTT. 39. 43. 46)	
	Seite 273
BEMERKUNGEN	
	Seite 279

GOTHA.
PERTHES' BUCHDRUCKEREI.

