



桑本支庫  
洋書

0055

CARL FRIEDRICH GAUSS  
WERKE

S I E B E N T E R B A N D.

MIT EINER STEINDRUCKTADEL.

HERAUSGEGEBEN

VON

ERNST JULIUS SCHERING

MITGLIED DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

GOTHA

FRIEDRICH ANDREAS PERTHES

1871.

桑本文庫  
洋書  
0355

物理  
08  
4  
2.7

九州帝國大學理學部  
8309  
物理學教室

九州帝國大學工學部  
807857  
昭和 年 月 日  
數學力學物理學教室

CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

SIEBENTER BAND.

理學部 洋 邇及  
022232002005418  
九州大學藏書



CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

SIEBENTER BAND



ERNST JULIUS SCHERING

MITGLIED DER KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN.

---

GOTHA  
FRIEDRICH ANDREAS PERTHES  
1871.



THEORIA  
MOTUS CORPORUM COELESTIUM

IN

SECTIONIBUS CONICIS SOLEM AMBIENTUM

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS.

---

HAMBURGI SUMTIBUS FRID. PERTHES ET I. H. BESSER  
1809.

---

Venditur

PARISIIS ap. Treuttel & Würtz.  
STOCKHOLMIAE ap. A. Wiberg.  
MADRETI ap. Saucha.

LONDINI ap. R. H. Evans.  
PETROFOLI ap. Klostermann.  
FLORENTIAE ap. Molini, Landi & C<sup>o</sup>.

AMSTELODAMI in libraria: Kunst-und Industrie-Comptoir, dicta.

G. TH. M.

1



## PRAEFATIO.

Detectis legibus motus planetarum KEPLERI ingenio non defuerunt subsidia ad singulorum planetarum elementa ex observationibus eruenda. TYCHO BRAHE, a quo astronomia practica ad fastigium antea ignotum evecta erat, cunctos planetas per longam annorum seriem summa cura tantaque perseverantia observaverat, ut KEPLERO talis thesauri dignissimo heredi seligendi tantummodo cura restaret, quae ad scopum quemvis propositum facere viderentur. Nec mediocriter sublevabant hunc laborem motus planetarum medii summa iamdudum praecisione per observationes antiquissimas determinati.

Astronomi, qui post KEPLERUM conati sunt planetarum orbitas adiumento observationum recentiorum vel perfectiorum adhuc accuratius dimetiri, iisdem vel adhuc maioribus subsidiis adiuti sunt. Neque enim amplius de elementis plane incognitis eliciendis agebatur, sed nota leviter tantum corrigenda arctioribusque limitibus circumscribenda erant.

Principium gravitationis universalis a summo NEWTON detectum campum plane novum aperuit, legibusque iisdem, quibus quinque planetas regi KEPLER expertus fuerat, levi tantum mutatione facta omnia corpora coelestia necessario obsequi debere edocuit, quorum quidem motus a vi Solis tantum moderentur. Scilicet observationum testimonio fretus KEPLER cuiusvis planetae orbitam



ellipsem esse pronuntiaverat, in qua areae circa Solem, focum alterum ellipsis occupantem, uniformiter describantur, et quidem ita, ut tempora revolutionum in ellipsis diversis sint in ratione sesquialtera semiaxium maiorum. Contra NEWTON, principio gravitationis universalis posito, a priori demonstravit, corpora omnia a Solis vi attractiva gubernata in sectionibus conicis moveri debere, quarum quidem speciem unam, ellipses puta, planetae nobis exhibeant, dum species reliquae, parabolae et hyperbolae, pro aequae possibilitibus haberi debeant, modo adsint corpora Solis vi velocitate debita occurrentia; Solem semper focum alterum sectionis conicae tenere; areas, quas corpus idem temporibus diversis circa Solem describat, his temporibus proportionales, areas denique a corporibus diversis, temporibus aequalibus, circa Solem descriptas, esse in ratione subduplicata semiparametrorum orbitarum: postrema harum legum, in motu elliptico cum ultima KEPLERi lege identica, ad motum parabolicum hyperbolicumque patet, ad quos haecce applicari nequit, revolutionibus deficientibus. Iam filum repertum, quo ducente labyrinthum motuum cometarum antea inaccessum ingredi licuit. Quod tam feliciter successit, ut omnium cometarum motibus, qui quidem accurate observati essent, explicandis sufficeret unica hypothesis, orbitas parabolae esse. Ita systema gravitationis universalis novos analysi triumphos eosque splendidissimos paraverat; cometaeque usque ad illum diem semper indomiti, vel si devicti videbantur mox seditiosi et rebelles, frena sibi iniici passi, atque ex hostibus hospites redditi, iter suum in transitibus a calculo delineatis prosequuti sunt, iisdem quibus planetae legibus aeternis religiose obtemperantes.

Iam in determinandis cometarum orbitis parabolicis ex observationibus difficultates suboriebantur longe maiores, quam in determinandis orbitis ellipticis planetarum, inde potissimum, quod cometae per brevius temporis intervallum visi delectum observationum ad haec vel illa imprimis commodarum non concedebant, sed iis uti geometram cgebant, quas fors obtulerat, ita ut

methodos speciales in calculis planetarum adhibitas vix unquam in usum vocare licuerit. Magnus ipse NEWTON, primus saeculi sui geometra, problematis difficultatem haud dissimulavit, attamen, ceu expectari poterat, ex hoc quoque certamine victor evasit. Multi post NEWTONum geometrae eidem problemati operam suam navaverunt, varia utique fortuna, ita tamen, ut nostris temporibus parum desiderandum relictum sit.

Verum enim vero non est praetermittendum, in hoc quoque problemate peropportune difficultatem diminui per cognitionem unius elementi sectionis conicae, quum per ipsam suppositionem orbitae parabolicae, axis maior infinite magnus statuatur. Quippe omnes parabolae, siquidem situs negligatur, per solam maiorem minoremve distantiam verticis a foco inter se differunt, dum sectiones conicae generaliter spectatae varietatem infinites maiorem admittant. Haud equidem aderat ratio sufficiens, cur cometarum trajectoriae absoluta praecisione parabolicae praesumerentur: quin potius infinite parum probabile censi debet, rerum naturam unquam tali suppositioni annuisse. Attamen quum constaret, phaenomena corporis coelestis in ellipsi vel hyperbola incidentis, cuius axis maior permagnus sit ratione parametri, prope perihelium perparum discrepare a motu in parabola, cui eadem verticis a foco distantia, differentiamque eo leviores evadere, quo maior fuerit illa ratio axis ad parametrum; porro quum experientia docuisset, inter motum observatum motumque in orbita parabolica computatum vix unquam maiores differentias remanere, quam quae ipsis observationum erroribus (hic plerumque satis notabilibus) tuto tribui poterant: astronomi apud parabolam subsistendum esse rati sunt. Recte sane, quum omnino deessent subsidia, e quibus, num ullae quantaevae differentiae a parabola adsint, satis certo colligi potuisset. Excipere oportet cometam celebrem HALLEYANUM, qui ellipsem valde oblongam describens in reditu ad perihelium pluries observatus tempus periodicum nobis patefecit: tunc autem axi maiori inde cognito computus reliquorum elementorum vix



pro difficiliori habendus est, quam determinatio orbitae parabolicae. Silentio quidem praeterire non possumus, astronomos etiam in nonnullis aliis cometis per tempus aliquanto longius observatis determinationem aberrationis a parabola tentavisse; attamen omnes methodi ad hunc finem propositae vel adhibitae, inmittuntur suppositioni, discrepantiam a parabola haud considerabilem esse, quo pacto in illis tentaminibus ipsa parabola antea iam computata cognitionem approximationem singulorum elementorum (praeter axem maiorem vel tempus revolutionis inde pendens) iam subministravit, levibus tantum mutationibus corrigendam. Praeterea fatendum est, omnia ista tentamina vix unquam aliquid certi decidere valuisse, si forte cometam anni 1770 excipias.

Quamprimum motum planetae novi anno 1781 detecti cum hypothesei parabolica conciliari non posse cognitum est, astronomi orbitam circularem illi adaptare inchoaverunt, quod negotium per calculum perfacilem ac simplicem absolvitur. Fausta quadam fortuna orbita huius planetae mediocriter tantum excentrica erat, quo pacto elementa per suppositionem illam eruta saltem approximationem qualemcumque suppeditabant, cui dein determinationem elementorum ellipticorum superstruere licuit. Accedebant plura alia peropportuna. Quippe tardas planetae motus, perparvae orbitae ad planum eclipticae inclinatio non solum calculos longe simpliciores reddebant, methodosque speciales aliis casibus haud accommodandas in usum vocare concedebant, sed metum quoque dissipabant, ne planeta radiis Solis immersus postea quaeritantium curas eluderet (qui metus alias, praesertim si insuper lumen minus vividum fuisset, utique animos turbare potuisset), quo pacto accuratior orbitae determinatio tuto differri poterat, donec ex observationibus frequentioribus magisque remotis eligere liceret, quae ad propositum maxime commodae viderentur.

In omnibus itaque casibus, ubi corporum coelestium orbitas ex observationibus deducere oportuit, commoda aderant quaedam haud spernenda,

methodorum specialium applicationem suadentia vel saltem permittentia, quorum commodorum potissimum id erat, quod per suppositiones hypotheticas cognitionem approximationem quorundam elementorum iamiam acquirere liceret, antequam calculus elementorum ellipticorum susciperetur. Nihilominus satis mirum videtur, problema generale

*Determinare orbitam corporis coelestis, absque omni suppositione hypothetica, ex observationibus tempus haud magnum complectentibus neque adeo delectum, pro applicatione methodorum specialium, patientibus usque ad initium huius saeculi penitus propemodum neglectum esse, vel saltem a nemine serio ac digne tractatum, quum certe theoreticis propter difficultatem atque elegantiam sese commendare potuisset, etiamsi apud practicos de summa eius utilitate nondum constaret. Scilicet invaluerat apud omnes opinio, impossibilem esse talem determinationem completam ex observationibus breviori temporis intervallo inclusis, male sane fundata, quum nunc quidem certissimo iam evictum sit, orbitam corporis coelestis ex observationibus bonis paucos tantummodo dies complectentibus absque ulla suppositione hypothetica satis approximate iam determinari posse.*

Incideram in quasdam ideas, quae ad solutionem problematis magni de quo dixi facere videbantur, mense Septembri a. 1801, tunc in labore plane diverso occupatus. Haud raro in tali casu, ne nimis a grata investigatione distrahamur, neglectas interire sinimus idearum associationes, quae attentius examinatae uberrimos fructus ferre potuissent. Forsan et illis ideolis eadem fortuna instabat, nisi peropportune incidissent in tempus, quo nullum sane faustius ad illas conservandas atque fovendas eligi potuisset. Scilicet eodem circiter tempore rumor de planeta novo Ian. 1 istius anni in specula Panormitana detecto per omnium ora volitabat, moxque ipsae observationes inde ab epocha illa usque ad 11. Febr. ab astronomo praestantissimo PIAZZI institutae ad notitiam publicam pervenerunt. Nullibi sane in annalibus astronomiae

Ita non solum methodorum efficaciae maior fiducia conciliabitur, ususque clarius ob oculos ponetur, sed id quoque cautum iri spero, ut nec minus exercitati a studio harum rerum deterreantur, quae procul dubio partem foecundissimam et pulcherrimam astronomiae theoriae constituunt.

Scripsi Gottingae d. 28 Martii 1809.

## LIBER PRIMUS

RELATIONES GENERALES INTER QUANTITATES  
PER QUAS CORPORUM COELESTIUM MOTUS CIRCA SOLEM DEFINIUNTUR.

### SECTIO PRIMA

*Relationes ad locum simplicem in orbita spectantes.*

#### 1.

Corporum coelestium motus in hoc opere eatenus tantum considerabimus, quatenus a Solis vi attractiva gubernantur. Excluduntur itaque ab instituto nostro omnes planetae secundarii, excluduntur perturbationes, quas primarii in se invicem exercent, excluditur omnis motus rotatorius. Corpora mota ipsa ut puncta mathematica spectamus, motusque omnes ad normam legum sequentium fieri supponimus, quae igitur pro basi omnium disquisitionum in hoc opere sunt habendae.

I. Motus cuiusvis corporis coelestis perpetuo fit in eodem plano, in quo simul centrum Solis est situm.

II. Traectoria a corpore descripta est sectio conica focum in centro Solis habens.

III. Motus in ista traectoria fit ita, ut areae spatiorum in diversis temporum intervallis circa Solem descriptorum hisce intervallis ipsis sint proportionales. Temporibus igitur et spatiis per numeros expressis, spatium quodvis per tempus intra quod describitur divisum quotientem invariabilem suppeditat.

IV. Pro corporibus diversis circa Solem se moventibus horum quotientium quadrata sunt in ratione composita parametrorum orbitis respondentium, atque aggregatorum massae Solis cum massis corporum motorum.

Designando itaque per  $2p$  parametrum orbitae, in qua corpus incedit, per  $\mu$  quantitatem materiae huius corporis (posita amassa Solis = 1), per  $\frac{1}{2}g$  aream



occasionem tam gravem reperimus, vixque gravior excogitari posset, ad dignitatem istius problematis luculentissime ostendendam, quam tunc in tanto discrimine urgenteque necessitate, ubi omnis spes, atomum planetarium post annum fere elapsum in coelis inter innumeras stellulas reinveniendi, unice pendebat ab orbitae cognitione satis approximata, solis illis pauculis observationibus superstruenda. Umquamne opportunius experiri potuissem, ecquid valeant ideolae meae ad usum practicum, quam si tunc istis ad determinationem orbitae Cereris uterer, qui planeta inter 41 illos dies geocentrice arcum trium tantummodo graduum descriperat, et post annum elapsum in coeli plaga longissime illinc remota indagari debebat? Prima haecce methodi applicatio facta est mense Oct. 1801, primaque nox serena, ubi planeta ad normam numerorum inde deductorum quaesitus est<sup>\*)</sup>, transfugam observationibus reddidit. Tres alii planetae novi inde ab illo tempore detecti, occasiones novas suppeditaverunt, methodi efficaciam ac generalitatem examinandi et comprobandi.

Optabant plures astronomi, statim post reinventionem Cereris, ut methodos ad istos calculos adhibitas publici iuris facerem; verum obstant plura, quominus amicis hisce sollicitationibus tunc morem gererem: negotia alia, desiderium rem aliquando copiosius pertractandi, imprimisque expectatio, continuatam in hac disquisitione occupationem varias solutionis partes ad maius generalitatis, simplicitatis et elegantiae fastigium evecturam esse. Quae spes quum me haud fefellerit, non esse arbitror, cur me huius morae poeniteat. Methodi enim ab initio adhibitae identidem tot tantasque mutationes passae sunt, ut inter modum, quo olim orbita Cereris calculata est, institutionemque in hoc opere traditam vix ullum similitudinis vestigium remanserit.

<sup>\*)</sup> Dec. 7, 1801 a clar. Dr. ZACH.

Quamquam vero a proposito meo alienum esset, de cunctis his disquisitionibus paulatim magis magisque perfectis narrationem completam perscribere, tamen in pluribus occasionibus, praesertim quoties de problemate quodam graviori agebatur, methodos anteriores quoque haud omnino supprimendas esse censui. Quin potius praeter problematum principalium solutiones plurima, quae in occupatione satis longa circa motus corporum coelestium in sectionibus conicis vel propter elegantiam analyticam vel imprimis propter usum practicum attentione digniora se mihi obtulerunt, in hoc opere exsequutus sum. Semper tamen vel rebus vel methodis mihi propriis maiorem curam dicavi, nota leviter tantum, quatenusque rerum nexus postulare videbatur, attingens.

Totum itaque opus in duas partes dividitur. In Libro primo evolvuntur relationes inter quantitates, a quibus motus corporum coelestium circa Solem secundum KEPLERI leges pendet, et quidem in duabus primis Sectionibus relationes eae, ubi unus tantum locus per se consideratur, in Sectione tertia et quarta vero eae, ubi plures loci inter se conferuntur. Illae continent expositionem methodorum tum vulgo usitatarum, tum potissimum aliarum illis ni fallor ad usum practicum longe praeferendarum, per quas ab elementis cognitis ad phaenomena descenditur; hae problemata multa gravissima tractant, quae viam ad operationes inversas sternunt. Scilicet quum ipsa phaenomena ex artificiosa intricataque quadam complicatione elementorum componantur, hanc texturae rationem penitus perspexisse oportet, antequam florum explicationem operisque in elementa sua resolutionem cum spe successus suscipere liceat. Comparantur itaque in Libro primo instrumenta atque subsidia, per quae dein in Libro altero arduum hoc negotium ipsum perficitur: maxima laboris pars tunc iam in eo consistit, ut illa subsidia rite colligantur, ordine apto disponantur et in scopum propositum dirigantur.

Problemata graviora ad maximam partem per exempla idonea illustrata sunt, semper quoties quidem licuit ab observationibus non fictis desumpta.



quam tempore  $t$  circa Solem describit, erit  $\frac{g}{t\sqrt{p}\sqrt{1+p}}$  numerus pro omnibus corporibus coelestibus constans. Quum igitur nihil intersit, quoniam corpore ad valorem huius numeri determinandum utamur, e motu terrae eum depromemus, cuius distantiam mediam a Sole pro unitate distantiarum adoptabimus: unitas temporum semper nobis erit dies medius solaris. Denotando porro per  $\pi$  rationem circumferentiae circuli ad diametrum, area ellipsis integrae a terra descriptae manifesto erit  $\pi\sqrt{p}$ , quae igitur poni debet  $= \frac{1}{2}g$ , si pro  $t$  accipitur annus sideralis, quo pacto constans nostra fit  $= \frac{2\pi}{t\sqrt{1+p}}$ . Ad valorem numericum huius constantis, in sequentibus per  $k$  denotandae, explorandum, statuimus, secundum novissimam determinationem, annum sideralem sive  $t = 365,2563835$ , massam terrae sive  $\mu = \frac{1}{354710} = 0,0000028192$ , unde prodit

$$\begin{aligned}\log 2\pi & \dots\dots\dots 0,798179864 \\ \text{Compl. } \log t & \dots\dots\dots 7,4374021852 \\ \text{Compl. } \log \sqrt{1+p} & \dots\dots\dots 9,9999993878 \\ \log k & \dots\dots\dots 8,2355814414\end{aligned}$$

$$k = 0,01720209895$$

## 2.

Leges modo expositae ab iis, quae KEPLERUS noster detexit, aliter non differunt, nisi quod in forma ad omnia sectionum conicarum genera patente exhibitae sunt, actionisque corporis moti in Solem, a qua pendet factor  $\sqrt{1+p}$ , ratio est habita. Si has leges tanquam phaenomena ex innumeris atque indubiis observationibus deprompta consideramus, geometria docebit, qualis actio in corpora circa Solem mota ab hoc exerceri debeat, ut ista phaenomena perpetuo producantur. Hoc modo invenitur, Solis actionem in corpora ambientia perinde se exercere, ac si vis attractiva, cuius intensitas quadrato distantiae reciproce proportionalis esset, corpora versus centrum Solis propelleret. Quodsi vero vice versa a suppositione talis vis attractivae tanquam principio proficiscimur, phaenomena illa ut consequentiae necessariae inde derivantur. Hic leges tantum enarravisse sufficiat, quarum nexui cum principio gravitationis hoc loco eo minus opus erit immorari, quum post summum NEWTON auctores plures hoc argumentum tractaverint, interque eos ill. LAPLACE in opere perfectissimo, Mécanique Céleste, tali modo, ut nihil amplius desiderandum reliquerit.

## 3.

Disquisitiones circa motus corporum coelestium, quatenus fiunt in sectionibus conicis, theoriam completam huius curvarum generis neuntquam postulant: quin adeo unica aequatio generalis nobis sufficiet, cui omnia superstruantur. Et quidem maxime e re esse videtur, eam ipsam eligere, ad quam tanquam aequationem characteristicam deferimur, dum curvam secundum attractionis legem descriptam investigamus. Determinando scilicet quemvis corporis locum in orbita sua per distantias  $x, y$  a duabus rectis in plano orbitae ductis atque in centro Solis i. e. in altero curvae foco sub angulis rectis se secantibus, et denotando insuper corporis distantiam a Sole (positive semper accipiendam) per  $r$ , habebimus inter  $r, x, y$  aequationem linearem  $r + ax + by = \gamma$ , in qua  $a, b, \gamma$  quantitates constantes expriment, et quidem  $\gamma$  quantitatem naturae sua semper positivam. Mutando rectarum, ad quas distantiae  $x, y$  referuntur, situm per se arbitrium, si modo sub angulis rectis se intersectare perseverent, manifesto forma aequationis valorque ipsius  $\gamma$  non mutabuntur,  $a$  et  $b$  autem alios aliosque valores nanciscuntur, patetque, situm illum ita determinari posse, ut  $\gamma$  evadat  $= 0$ ,  $a$  autem saltem non negativa. Hoc modo scribendo pro  $a, \gamma$  resp.  $e, p$ , aequatio nostra induit formam  $r + ex = p$ . Recta, ad quam tunc distantiae  $y$  referuntur, *linea apsidum* vocatur,  $p$  *semiparameter*,  $e$  *excentricitas*; sectio conica denique *ellipsis*, *parabola* vel *hyperbolae* nomine distinguitur, prout  $e$  unitate minor, unitati aequalis, vel unitate maior est.

Ceterum facile intelligitur, situm lineae apsidum per conditiones traditas plene determinatum esse, unico casu excepto, ubi tum  $a$  tum  $b$  iam per se erant  $= 0$ ; in hoc casu semper fit  $r = p$ , ad quascunque rectas distantiae  $x, y$  referantur. Quoniam itaque habetur  $e = 0$ , curva (quae erit circulus) secundum definitionem nostram ellipsium generi annumeranda est, id vero singulare habet, quod apsidum positio prorsus arbitraria manet, siquidem istam notionem ad hunc quoque casum extendere placet.

## 4.

Pro distantia  $x$  iam angulum  $v$  introducamus, qui inter lineam apsidum et rectam a Sole ad corporis locum ductam (*radius vectorem*) continetur, et quidem hic angulus ab ea lineae apsidum parte ubi distantiae  $x$  sunt positivae incipiat, versusque eam regionem, quorsum motus corporis dirigitur, crescere supponatur.

Hoc modo fit  $x = r \cos v$ , adeoque formula nostra  $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$ , unde protinus derivantur conclusiones sequentes:

I. Pro  $v = 0$  valor radii vectoris  $r$  fit minimum, puta  $= \frac{p}{1+e}$ : hoc punctum *perihelium* dicitur.

II. Valoribus oppositis ipsius  $v$  respondent valores aequales ipsius  $r$ ; quo circa linea apsidum sectionem conicam in duas partes aequales dirimit.

III. In *ellipsi*  $r$  inde a  $v = 0$  continuo crescit, donec valorem maximum  $\frac{p}{1-e}$  assequatur in *aphelio* pro  $v = 180^\circ$ ; post aphelium eodem modo rursus decrescit, quo ante increverat, donec pro  $v = 360^\circ$  perihelium denuo attigerit. Lineae apsidum pars perihelio hinc aphelio illinc terminata *axis minor* dicitur; hinc semiaxis maior, qui etiam *distantia media* vocatur, fit  $= \frac{p}{1-e^2}$ ; distantia puncti in medio axe iacentis (*centri ellipsis*) a foco erit  $\frac{ep}{1-e^2} = ea$ , denotando per  $a$  semiaxem maiorem.

IV. Contra in *parabola* proprie non datur aphelium, sed  $r$  ultra omnes limites augetur, quo propius  $v$  ad  $+180^\circ$  vel  $-180^\circ$  accedit. Pro  $v = \pm 180^\circ$  valor ipsius  $r$  fit infinitus, quod indicat, curvam a linea apsidum a parte perihelio opposita non secari. Quare proprie quidem loquendo de axi maiore vel centro curvae sermo esse nequit, sed secundum analyseos usum consuetum per ampliatiorem formularum in ellipsi inventarum axi maiori valor infinitus tribuitur, centrumque curvae in distantia infinita a foco collocatur.

V. In *hyperbola* denique  $v$  inter limites adhuc arctiores coërcetur, scilicet inter  $v = -(180^\circ - \psi)$  et  $v = +(180^\circ - \psi)$ , denotando per  $\psi$  angulum, cuius cosinus  $= \frac{1}{e}$ . Dum enim  $v$  ad hosce limites appropinquat,  $r$  in infinitum crescit; si vero pro  $v$  alter horum limitum ipse acciperetur, valor ipsius  $r$  infinitus prodiret, quod indicat, hyperbolam a recta ad lineam apsidum angulo  $180^\circ - \psi$  supra vel infra inclinata omnino non secari. Pro valoribus hoc modo exclusis, puta a  $180^\circ - \psi$  usque ad  $180^\circ + \psi$ , formula nostra ipsi  $r$  valorem negativum assignat; recta scilicet sub tali angulo contra lineam apsidum inclinata ipsa quidem hyperbolam non secat, si vero retro producitur in alteram hyperbolae partem incidit, quam a prima parte omnino separatam versusque eum focum quem Sol occupat convexam esse constat. Sed in disquisitione nostra, quae ut iam monuimus suppositioni innitur,  $r$  sumi positive, ad hanc alteram hyperbolae partem non respiciemus, in qua corpus coeleste tale tantummodo incedere posset, in quod Sol vim non attractivam sed secundum easdem leges repulsivam exerceret. — Proprie

itaque loquendo etiam in hyperbola non datur aphelium; pro aphelii analogo id partis aversae punctum quod in linea apsidum iacet, et quod respondet valoribus  $v = 180^\circ$ ,  $r = -\frac{p}{e-1}$ , haberi poterit. Quodsi ad instar ellipsis valorem expressionis  $\frac{p}{1-ee}$  etiam hic, ubi negativus evadit, semiaxem maiorem hyperbolae dicere lubet, duplum huius quantitatis puncti modo commemorati distantiam a perihelio simulque situm ei qui in ellipsi locum habet oppositum indicat. Perinde  $\frac{ep}{1-ee}$ , i. e. distantia puncti inter haec duo puncta medii (centri hyperbolae) a foco, hic obtinet valorem negativum propter situm oppositum.

5.

Angulum  $v$ , qui pro parabola intra terminos  $-180^\circ$  et  $+180^\circ$ , pro hyperbola intra  $-(180^\circ - \psi)$  et  $+(180^\circ - \psi)$  coërcetur, pro ellipsi vero circulum integrum periodis perpetuo renovatis percurrit, corporis moti *anomaliam veram* nuncupamus. Hactenus quidem omnes fere astronomi anomaliam veram in ellipsi non a perihelio sed ab aphelio inchoare solebant, contra analogiam parabolae et hyperbolae, ubi aphelium non datur adeoque a perihelio incipere oportuit: nos analogiam inter omnia sectionum conicarum genera restituere eo minus dubitavimus, quod astronomi gallici recentissimi exemplo suo iam praeverunt.

Ceterum expressionis  $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$  formam saepius aliquantulum mutare convenit; imprimis notentur formae sequentes:

$$r = \frac{p}{1 + e - 2e \sin \frac{1}{2} v} = \frac{p}{1 - e + 2e \cos \frac{1}{2} v} = \frac{p}{(1+e) \cos \frac{1}{2} v + (1-e) \sin \frac{1}{2} v}$$

In parabola itaque habemus  $r = \frac{p}{2 \cos \frac{1}{2} v}$ ; in hyperbola expressio sequens imprimis est commoda  $r = \frac{p \cos \psi}{2 \cos \frac{1}{2}(v + \psi) \cos \frac{1}{2}(v - \psi)}$ .

6.

Progredimur iam ad comparisonem motus cum *tempore*. Statuendo ut in art. 1 spatium tempore  $t$  circa Solem descriptum  $= \frac{1}{2}g$ , massam corporis moti  $= \mu$ , posita massa Solis  $= 1$ , habemus  $g = kt\sqrt{p} \cdot \sqrt{(1+\mu)}$ . Differentiale spatii autem fit  $= \frac{1}{2}rrdv$ , unde prodit  $kt\sqrt{p} \cdot \sqrt{(1+\mu)} = \int rrdv$ , hoc integrati ita sumto, ut pro  $t = 0$  evanescat. Haec integratio pro diversis sectionum conicarum generibus diverso modo tractari debet, quoniam singula iam seorsim considerabimus, initiumque ab ELLIPSI faciemus.

Quum  $r$  ex  $v$  per fractionem determinetur, cuius denominator e duabus partibus constat, ante omnia hoc incommodum per introductionem quantitatis novae pro  $v$  auferemus. Ad hunc finem statuimus  $\tan \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \tan \frac{1}{2} E$ , quo pacto formula ultima art. praec. pro  $r$  praebet

$$r = \frac{p \cos \frac{1}{2} E^2}{(1+e) \cos \frac{1}{2} v^2} = p \left( \frac{\cos \frac{1}{2} E^2}{1+e} + \frac{\sin \frac{1}{2} E^2}{1-e} \right) = \frac{p}{1-ee} (1-e \cos E)$$

Porro fit  $\frac{dE}{\cos \frac{1}{2} E^2} = \frac{dv}{\cos \frac{1}{2} v^2} \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$ , adeoque  $dv = \frac{p dE}{r \sqrt{1-ee}}$ ;

hinc  $r dv = \frac{r p dE}{\sqrt{1-ee}} = \frac{pp}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}} (1-e \cos E) dE$ ,

atque integrando  $kt \sqrt{p} \cdot \sqrt{1+\mu} = \frac{pp}{(1-ee)^{\frac{3}{2}}} (E - e \sin E) + \text{Const.}$

Quodsi itaque tempus a transitu per perihelium inchoamus, ubi  $v = 0$ ,  $E = 0$  adeoque  $\text{Const.} = 0$ , habebimus, propter  $\frac{p}{1-ee} = a$ ,

$$E - e \sin E = \frac{k t \sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

In hac aequatione angulus auxiliaris  $E$ , qui *anomaliam excentricam* dicitur, in partibus radii exprimi debet. Manifesto autem hunc angulum in gradibus etc. retinere licet, si modo etiam  $e \sin E$  atque  $\frac{k t \sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}$  eodem modo exprimantur; in minutis secundis hae quantitates exprimentur, si per numerum 206264,896 multiplicentur. Multiplicatione quantitatis posterioris supersedere possumus, si statim quantitatem  $k$  in secundis expressam adhibemus adeoque, loco valoris supra dati, statuimus  $k = 3548', 18761$ , cuius logarithmus = 3,5500665746. — Hoc modo expressa quantitas  $\frac{k t \sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}$  *anomaliam media* vocatur, quae igitur in ratione temporis crescit, et quidem quotidie augmento  $\frac{k \sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}$ , quod *motus medius diurnus* dicitur. Anomaliam mediam per  $M$  denotabimus.

7.

In perihelio itaque anomaliam vera, anomaliam excentricam, et anomaliam media sunt = 0; crescente dein vera, etiam excentrica et media augentur, ita tamen, ut excentrica minor maneat quam vera, mediaque minor quam excentrica, usque ad aphelium, ubi omnes tres simul fiunt = 180°; hinc vero usque ad perihelium excentrica perpetuo est maior quam vera, mediaque maior quam excentrica, donec in perihelio omnes tres fiant = 360°, sive, quod eodem redit, omnes iterum = 0. Generaliter vero patet, si anomaliam verae  $v$  respondeat excentrica  $E$  mediaque  $M$ ,

verae 350° —  $v$  respondere excentricam 360° —  $E$  atque mediam 360° —  $M$ . Differentia inter anomaliam veram et mediam  $v - M$  *aequatio centri* appellatur, quae itaque a perihelio ad aphelium positiva, ab aphelio ad perihelium negativa est, in perihelio ipso autem et aphelio evanescit. Quum igitur  $v$  et  $M$  circulum integrum a 0 usque ad 360° eodem tempore percurrant, tempus revolutionis unius, quod et *tempus periodicum* dicitur, in diebus expressum invenitur, dividendo 360° per motum diurnum  $\frac{k \sqrt{1+\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}$ , unde patet, pro corporibus diversis circa Solem revolventibus quadrata temporum periodicorum cubis distantiarum mediarum proportionalia esse, quatenus ipsorum massas, aut potius massarum inaequalitatem negligere liceat.

8.

Eas iam inter anomalias atque radium vectorem relationes, quae imprimis attentione dignae sunt, colligamus, quarum deductio nemini in analysi trigonometrica vel mediocriter versato difficultates obicere poterit. Pluribus harum formularum concinnitas maior conciliatur, introducto pro  $e$  angulo cuius sinus est =  $e$ . Quo per  $\varphi$  designato, habemus  $\sqrt{1-ee} = \cos \varphi$ ,  $\sqrt{1+e} = \cos(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) \cdot \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{1-e} = \cos(45^\circ + \frac{1}{2}\varphi) \cdot \sqrt{2}$ ,  $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ ,  $\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e} = 2 \cos \frac{1}{2}\varphi$ ,  $\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e} = 2 \sin \frac{1}{2}\varphi$ . Ecce iam relationes praecipuas inter  $a$ ,  $p$ ,  $r$ ,  $e$ ,  $\varphi$ ,  $v$ ,  $E$ ,  $M$ .

I.  $p = a \cos^2 \varphi$

II.  $r = \frac{p}{1+e \cos v}$

III.  $r = a(1-e \cos E)$

IV.  $\cos E = \frac{\cos v + e}{1+e \cos v}$ , sive  $\cos v = \frac{\cos E - e}{1-e \cos E}$

V.  $\sin \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos E)} = \sin \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e \cos v}} = \sin \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{r(1-e)}{p}}$   
 $= \sin \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{r}{a(1+e)}}$

VI.  $\cos \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos E)} = \cos \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1+e \cos v}} = \cos \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{r(1+e)}{p}}$   
 $= \cos \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{r}{a(1-e)}}$

VII.  $\tan \frac{1}{2} E = \tan \frac{1}{2} v \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$

VIII.  $\sin E = \frac{r \sin v \cos \varphi}{p} = \frac{r \sin v}{a \cos \varphi}$

G. TH. M.



$$\text{IX. } r \cos v = a(\cos E - e) = 2a \cos(\tfrac{1}{2}E + \tfrac{1}{2}\varphi + 45^\circ) \cos(\tfrac{1}{2}E - \tfrac{1}{2}\varphi - 45^\circ)$$

$$\text{X. } \sin \tfrac{1}{2}(v - E) = \sin \tfrac{1}{2}\varphi \sin v \cdot \sqrt{\frac{r}{p}} = \sin \tfrac{1}{2}\varphi \sin E \cdot \sqrt{\frac{a}{r}}$$

$$\text{XI. } \sin \tfrac{1}{2}(v + E) = \cos \tfrac{1}{2}\varphi \sin v \cdot \sqrt{\frac{r}{p}} = \cos \tfrac{1}{2}\varphi \sin E \cdot \sqrt{\frac{a}{r}}$$

$$\text{XII. } M = E - e \sin E.$$

9.

Si perpendicularum e puncto quocunque ellipsis in lineam apsidum demissum retro producitur, usquedum circulo e centro ellipsis radio  $a$  descripto occurrat, inclinatio eius radii, qui puncto intersectionis respondet, contra lineam apsidum (simili modo intellecta ut supra pro anomalia vera) anomaliae excentricae aequalis erit, ut nullo negotio ex aequ. IX. art. praec. deducitur. Porro patet,  $rs \sin v$  esse distantiam cuiusque puncti ellipsis a linea apsidum; quae quum per aequ. VIII. fiat  $= a \cos \varphi \sin E$ , maxima erit pro  $E = 90^\circ$ , i. e. in centro ellipsis. Haecce distantia maxima, quae fit  $= a \cos \varphi = \frac{p}{\cos \varphi} = \sqrt{ap}$ , *semiaxis minor* appellatur. In foco ellipsis, i. e. pro  $v = 90^\circ$ , distantia ista manifesto fit  $= p$ , sive semiparametro aequalis.

10.

Aequationes art. 8. omnia continent, quae ad computum anomaliae excentricae et mediae e vera, vel excentricae et verae e media requiruntur. Pro deducenda excentrica e vera vulgo formula VII. adhibetur; plerumque tamen praestat ad hunc finem aequ. X. uti, praesertim quoties excentricitas non nimis magna est, in quo casu  $E$  per X. maiori praecisione computari potest, quam per VII. Praeterea adhibita aequatione X., logarithmus sinus  $E$ , qui in XII. requiritur; protinus per aequationem VIII. habetur, quem adhibita VII. e tabulis arcossere oporteret; si igitur in illa methodo hic logarithmus etiam e tabulis desumitur, simul calculi recte instituti confirmatio hinc obtinetur. Huiusmodi calculi examina et comprobationes magni semper sunt aestimanda, quibus igitur consulere in omnibus methodis in hoc opere tradendis, ubi quidem commode fieri potest, assiduae nobis ubique curae erit. — Ad maiorem illustrationem exemplum complete calculatum adiungimus.

Data sint  $v = 310^\circ 55' 29'' 64$ ,  $\varphi = 14^\circ 12' 1'' 87$ ,  $\log r = 0,3307640$ ; quaeruntur  $p$ ,  $a$ ,  $E$  et  $M$ .

$$\log \sin \varphi \dots\dots\dots 9,3897262$$

$$\log \cos v \dots\dots\dots 9,8162877$$

$$9,2060139 \text{ unde } e \cos v = 0,1606993$$

$$\log(1 + e \cos v) \dots\dots\dots 0,0647197$$

$$\log r \dots\dots\dots 0,3307640$$

$$\log p \dots\dots\dots 0,3954837$$

$$\log \cos \varphi^2 \dots\dots\dots 9,9730448$$

$$\log a \dots\dots\dots 0,4224389$$

$$\log \sin v \dots\dots\dots 9,8782740 \text{ n.}^*)$$

$$\log \sqrt{\frac{p}{r}} \dots\dots\dots 0,0323598.5$$

$$9,8459141.5 \text{ n}$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2}\varphi \dots\dots\dots 9,0920395$$

$$\log \sin \tfrac{1}{2}(v - E) \dots\dots\dots 8,9379536.5 \text{ n} \text{ hinc } \tfrac{1}{2}(v - E) = -4^\circ 58' 22'' 94;$$

$$v - E = -9^\circ 56' 45'' 88; E = 320^\circ 52' 15'' 52$$

Porro fit

$$\log e \dots\dots\dots 9,3897262$$

Calculus pro  $\log \sin E$  per formulam VIII.

$$\log 206264,8 \dots\dots\dots 5,3144251$$

$$\log \frac{r}{p} \sin v \dots\dots\dots 9,8135543 \text{ n}$$

$$\log e \text{ in sec.} \dots\dots\dots 4,7041513$$

$$\log \cos \varphi \dots\dots\dots 9,9865224$$

$$\log \sin E \dots\dots\dots 9,8000767 \text{ n}$$

$$\log \sin E \dots\dots\dots 9,8000767 \text{ n}$$

$$4,5042278 \text{ n} \text{ hinc } e \sin E \text{ in secundis} = 31932'' 14$$

$$= 8^\circ 52' 12'' 14$$

atque  $M = 329^\circ 44' 27'' 66$ . — Per formulam VII. calculus pro  $E$  ita se haberet:

$$\tfrac{1}{2}v = 155^\circ 27' 44'' 82$$

$$\log \tan \tfrac{1}{2}v \dots\dots\dots 9,6594579 \text{ n}$$

$$45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi = 37^\circ 53' 59'' 065$$

$$\log \tan(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi) \dots\dots\dots 9,8912427$$

$$\log \tan \tfrac{1}{2}E \dots\dots\dots 9,5507006 \text{ n}$$

unde  $\tfrac{1}{2}E = 160^\circ 26' 7'' 76$  atque  $E = 320^\circ 52' 15'' 52$  ut supra.

11.

Problema inversum, celebre sub nomine *problematis KEPLERI*, scilicet ex anomalia media invenire veram atque radium vectorem, longe frequentioris usus est. Astronomi aequationem centri per seriem infinitam secundum sinus angulorum  $M$ ,  $2M$ ,  $3M$  etc. progredientem exhibere solent, quorum sinuum coefficientes singuli

\*) Litera n logarithmo affixa indicat, numerum cui respondet negativum esse.



et ipsi sunt series secundum potestates excentricitatis in infinitum excurrentes. Huic formulae pro aequatione centri, quam plures auctores evolverunt, hic immorari eo minus necessarium duximus, quod, nostro quidem iudicio, ad usum practicum, praesertim si excentricitas perparva non fuerit, longe minus idonea est, quam methodus indirecta, quam itaque in ea forma, quae maxime commoda nobis videtur, aliquanto fusius explicabimus.

Aequatio XII.,  $E = M + e \sin E$ , quae ad transcendentiū genus referenda est solutionemque per operationes finitas directas non admittit, tentando solvenda est, incipiendo a valore quodam approximato ipsius  $E$ , qui per methodos idoneas toties repetitas corrigitur, usque dum illi aequationi exacte satisfaciat, i. e. vel omni quam tabulae sinuum permittunt praecisione, vel ea saltem, quae ad scopum propositum sufficit. Quodsi hae correctiones haud temere sed per normam tutam atque certam instituuntur, vix ullum discrimen essentielle inter methodum talem indirectam atque solutionem per series adest, nisi quod in illa valor primus incognitae aliquatenus est arbitrarius, quod potius pro lucro habendum, quum valor apte electus correctiones insigniter accelerare permittat. Supponamus,  $e$  esse valorem approximatum ipsius  $E$ , atque  $x$  correctionem illi adhuc adiciendam (in secundis expressam), ita ut valor  $E = e + x$  aequationi nostrae exacte satisfaciat. Computetur  $e \sin e$  in secundis per logarithmos, quod dum perficitur, simul e tabulis notetur variatio ipsius  $\log \sin e$  pro 1" variatione ipsius  $e$ , atque variatio  $\log e \sin e$  pro variatione unius unitatis in numero  $e \sin e$ ; sint hae variationes sine respectu signorum resp.  $\lambda$ ,  $\mu$  ubi vix opus est monere, utrumque logarithmum per aequae multas figuras decimales expressum supponi. Quodsi iam  $e$  ad verum ipsius  $E$  valorem tam prope iam accedit, ut variationes logarithmi sintus ab  $e$  usque ad  $e + x$ , variationesque logarithmi numeri ab  $e \sin e$  usque ad  $e \sin(e + x)$  pro uniformibus habere liceat, manifesto statui poterit  $e \sin(e + x) = e \sin e \pm \frac{\lambda x}{\rho}$ , signo superiori pro quadrante primo et quarto, inferiori pro secundo et tertio valente. Quare quum sit  $e + x = M + e \sin(e + x)$ , fit  $x = \frac{\mu}{\rho + \lambda} (M + e \sin e - e)$ , valorque verus ipsius  $E$  sive  $e + x = M + e \sin e \pm \frac{\lambda}{\rho + \lambda} (M + e \sin e - e)$ , signis ea qua diximus ratione determinatis. Ceterum facile perspicitur, esse sine respectu signi  $\mu : \lambda = 1 : e \cos e$ , adeoque semper  $\mu > \lambda$ , unde concluditur, in quadrante primo et ultimo  $M + e \sin e$  iacere inter  $e$  atque  $e + x$ , in secundo ac tertio vero  $e + x$  inter  $e$  atque  $M + e \sin e$ , quae regula attentionem ad signa sublevare potest. Si valor suppositus  $e$  nimis adhuc a vero aberraverat, quam ut suppositionem supra traditam

pro satis exacta habere liceret, certe per hanc methodum invenietur valor multo propior, quo eadem operatio iterum adhuc, pluriesve si opus videtur, repetenda erit. Nullo vero negotio patet, si differentia valoris primi  $e$  a vero tamquam quantitas ordinis primi spectetur, errorem valoris novi ad ordinem secundum referendum fore, et per operationem iteratam ad ordinem quartum, octavum etc. deprimi. Quo minor insuper fuerit excentricitas, eo velocius correctiones successivae convergent.

## 12.

Valor approximatus ipsius  $E$ , a quo calculus incipi possit, plerumque satis obvius erit, praesertim ubi problema pro pluribus valoribus ipsius  $M$  solvendum est, e quibus quidam iam absoluti sunt. Dificientibus omnibus aliis subsidiis id saltem constat, quod  $E$  inter limites  $M$  et  $M + e$  iacere debet (excentricitate  $e$  in secundis expressa, signoque superiori in quadrante primo et secundo, inferiori in tertio et quarto accepto); quocirca pro valore initiali ipsius  $E$  vel  $M$  vel valor secundum aestimationem qualemcumque auctus seu deminutus adoptari poterit. Vix opus est monere, calculum primum, quoties a valore parum accurato inchoetur, anxia praecisione haud indigere, tabulasque minores quales cel. LALANDE curavit, abunde sufficere. Praeterea, ut calculi commoditati consulatur, tales semper valores pro  $e$  eligentur, quorum sinus e tabulis ipsis absque interpolatione excerpti licet; puta in minutis seu secundorum denariis completis, prout tabulae per singula minuta seu per singulos secundorum denarios progredientes adhibentur. Ceterum modificationes, quas haec praecepta patiuntur, si anguli secundum divisionem novam decimalem exprimantur, quisque sponte evolvere poterit.

## 13.

*Exemplum.* Sit excentricitas eadem quae in exemplo art. 10.  $M = 332^{\circ} 28' 54'' 77$ . Hic igitur est  $\log e$  in secundis 4,7041513, adeoque  $e = 50600'' = 14^{\circ} 3' 20''$ . Quare quum hic  $E$  minor esse debeat quam  $M$ , statuimus ad calculum primum  $e = 326''$ , unde per tabulas minores fit

|                          |                                                               |
|--------------------------|---------------------------------------------------------------|
| $\log \sin e$ . . . . .  | 9,7475611, mutatio pro 1' . . . . . 19, unde $\lambda = 0,32$ |
| $\log e$ in sec. . . . . | 4,70415                                                       |
|                          | 4,4517111                                                     |



hinc  $e \sin \varepsilon = -28295'' = -7^{\circ} 51' 35''$ . Mutatio logarithmi pro unitate tabulae, quae hinc  
 $M + e \sin \varepsilon \dots \dots \dots 324 \ 37 \ 20$  10 secundis aequivalet, . . . 16; unde  $\mu = 1,6$   
 Differt ab  $\varepsilon \dots \dots \dots 1 \ 22 \ 40 = 4960''$ . Hinc  $\frac{0,32}{1,76} \times 4960'' = 1240''$   
 $= 20' 40''$ . Quare valor correctus ipsius  $E$  fit  $= 324^{\circ} 37' 20'' - 20' 40'' = 324^{\circ} 16' 40''$ ,  
 cum quo calculum secundum tabulas maiores repetemus.

$$\begin{array}{rcl} \log \sin \varepsilon \dots & 9,7663058 n & \lambda = 29,25 \\ \log e \dots & 4,7041513 & \\ \hline & 4,4704571 n & \mu = 147 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} e \sin \varepsilon & = -29543'',18 = -8^{\circ} 12' 23'',18 \\ M + e \sin \varepsilon & \dots \dots \dots 324 \ 16 \ 31,59 \end{array}$$

Differt ab  $\varepsilon \dots \dots \dots 8,41$ . Multiplicata hac differentia per  $\frac{\lambda}{\mu - \lambda}$   
 $= \frac{29,25}{147,75}$ , prodit  $2' 09''$ , unde valor denuo correctus ipsius  $E = 324^{\circ} 16' 31'' 59'' - 2' 09''$   
 $= 324^{\circ} 16' 29'' 50''$ , intra  $0' 01''$  exactus.

## 14.

Pro derivatione anomaliae verae radiique vectoris ex anomalia excentrica  
 aequationes art. 8. plures methodos suppeditant, e quibus praestantissimas explica-  
 bimus.

I. Secundum methodum vulgarem  $v$  per aequationem VII., atque tunc  $r$  per  
 aequationem II. determinantur; hoc modo exemplum art. praec. ita se habet, reti-  
 nendo pro  $p$  valorem in art. 10. traditum:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} E = 162^{\circ} 8' 14'' 75. & \log e \dots \dots \dots & 9,3897262 \\ \log \tan \frac{1}{2} E \dots \dots \dots & 9,5082198 n & \log \cos v \dots \dots \dots 9,8496597 \\ \log \tan (45^{\circ} - \frac{1}{2} \varphi) \dots & 9,8912427 & \hline \log \tan \frac{1}{2} v \dots \dots \dots & 9,6169771 n & e \cos v = 0,1735345 \\ \frac{1}{2} v = 157^{\circ} 30' 41'' 50 & & \log p \dots \dots \dots 0,3954837 \\ v = 315 \ 1 \ 23,00 & & \log (1 + e \cos v) \dots & 0,0694959 \\ & & \log r \dots \dots \dots & 0,3259878 \end{array}$$

II. Brevior est methodus sequens, siquidem plures loci calculandi sunt, pro  
 quibus logarithmos constantes quantitatum  $\sqrt{a(1+e)}$ ,  $\sqrt{a(1-e)}$  semel tantum  
 computare oportet. Ex aequationibus V. et VI. habetur

$$\begin{array}{l} \sin \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{r} = \sin \frac{1}{2} E \cdot \sqrt{a(1+e)} \\ \cos \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{r} = \cos \frac{1}{2} E \cdot \sqrt{a(1-e)} \end{array}$$

unde  $\frac{1}{2} v$  atque  $\log \sqrt{r}$  expedite determinantur. Generaliter nimirum, quoties habe-  
 tur  $P \sin Q = A$ ,  $P \cos Q = B$ , invenitur  $Q$  per formulam  $\tan Q = \frac{A}{B}$ , atque tunc  
 $P$  per hanc  $P = \frac{A}{\sin Q}$ , vel per  $P = \frac{B}{\cos Q}$ ; priorem adhibere praestat, quando  
 $\sin Q$  est maior quam  $\cos Q$ ; posteriorem, quando  $\cos Q$  maior est quam  $\sin Q$ .  
 Plerumque problemata, in quibus ad tales aequationes pervenitur (qualia in hoc  
 opere frequentissime occurrunt), conditionem implicant, quod  $P$  esse debet quantitas  
 positiva; tunc dubium, utrum  $Q$  inter  $0$  et  $180^{\circ}$  an inter  $180^{\circ}$  et  $360^{\circ}$  accipere  
 oporteat, sponte hinc tollitur. Si vero talis conditio non adest, haec determinatio  
 arbitrio nostro relinquitur.

In exemplo nostro habemus  $e = 0,2453162$ ,

$$\begin{array}{rcl} \log \sin \frac{1}{2} E \dots \dots \dots & 9,4867632 & \log \cos \frac{1}{2} E \dots \dots \dots 9,9785434 n \\ \log \sqrt{a(1+e)} \dots \dots \dots & 0,2588593 & \log \sqrt{a(1-e)} \dots \dots \dots 0,1501020 \end{array}$$

Hinc

$$\begin{array}{rcl} \log \sin \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{r} \dots \dots \dots & 9,7456225 & \} \text{ unde } \log \tan \frac{1}{2} v = 9,6169771 n \\ \log \cos \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{r} \dots \dots \dots & 0,1286454 n & \frac{1}{2} v = 157^{\circ} 30' 41'' 50 \\ \log \cos \frac{1}{2} v \dots \dots \dots & 9,9656515 n & v = 315 \ 1 \ 23,00 \\ \log \sqrt{r} \dots \dots \dots & 0,1629939 & \\ \log r \dots \dots \dots & 0,3259878 & \end{array}$$

III. His methodis tertiam adiciamus, quae aequae fere expedita est ac secunda,  
 sed praecisione, si ultima desideretur, isti plerumque praeferenda. Scilicet primo  
 determinatur  $r$  per aequationem III., ac dein  $v$  per X. Ecce exemplum nostrum  
 hoc modo tractatum:

$$\begin{array}{rcl} \log e \dots \dots \dots & 9,3897262 & \log \sin E \dots \dots \dots 9,7663366 n \\ \log \cos E \dots \dots \dots & 9,9094637 & \log \sqrt{(1-e \cos E)} \dots & 9,9517744 \\ & 9,2991899 & \hline e \cos E = & 0,1991544 & \log \sin \frac{1}{2} \varphi \dots \dots \dots 9,0920395 \\ \log a \dots \dots \dots & 0,4224389 & \log \sin \frac{1}{2} (v-E) \dots & 8,9066017 n \\ \log (1-e \cos E) \dots \dots & 9,9035488 & \frac{1}{2} (v-E) = & 4^{\circ} 37' 33'' 24 \\ \log r \dots \dots \dots & 0,3259877 & (v-E) = & 9 \ 15 \ 6,48 \\ & & v = & 315 \ 1 \ 23,02 \end{array}$$

Ad calculum confirmandum formula VIII. vel XI. percommoda est, praesertim, si  $v$  et  $r$  per methodum tertiam determinatae sunt. Ecce calculum:

|                                       |             |                                                    |             |
|---------------------------------------|-------------|----------------------------------------------------|-------------|
| $\log \frac{a}{r} \sin E \dots \dots$ | 9,8627878 n | $\log \sin E \cdot \sqrt{\frac{a}{r}} \dots \dots$ | 9,8145622 n |
| $\log \cos \varphi \dots \dots$       | 9,9865224   | $\log \cos \frac{1}{2} \varphi \dots \dots$        | 9,9966567   |
|                                       | 9,8493102 n |                                                    | 9,8112189 n |
| $\log \sin v \dots \dots$             | 9,8493102 n | $\log \sin \frac{1}{2} (v+E) \dots \dots$          | 9,8112189 n |

15.

Quum anomalia media  $M$ , ut vidimus, per  $v$  et  $\varphi$  complete determinata sit, sicuti  $v$  per  $M$  et  $\varphi$ , si omnes tres quantitates simul ut variables spectentur, inter ipsarum variationes differentiales aequationem conditionalem locum habere debere, cuius investigatio hand superflua erit. Differentiando primo aequationem VII. art. 8., prodit  $\frac{dE}{\sin E} = \frac{dv}{\sin v} - \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$ ; differentiando perinde aequationem XII., fit  $dM = (1 - e \cos E) dE - \sin E \cos \varphi d\varphi$ . Eliminando ex his aequationibus differentialibus  $dE$ , obtenemus

$$dM = \frac{\sin E(1 - e \cos E)}{\sin v} dv - \left( \sin E \cos \varphi + \frac{\sin E(1 - e \cos E)}{\cos \varphi} \right) d\varphi$$

sive substituendo pro  $\sin E$ ,  $1 - e \cos E$  valores suos ex aequatt. VIII., III.

$$dM = \frac{r}{a} \frac{dv}{\cos \varphi} - \frac{r(r+p)}{a^2 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

sive denique, exprimendo utrumque coefficientem per  $v$  et  $\varphi$  tantum,

$$dM = \frac{\cos \varphi^2}{(1 + e \cos \varphi)^2} dv - \frac{(2 + e \cos \varphi) \sin \varphi \cos \varphi^2}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi$$

Vice versa considerando  $v$  tanquam functionem quantitatum  $M$ ,  $\varphi$ , aequatio hancee formam obtinet:

$$dv = \frac{a \cos \varphi}{rr} dM + \frac{(2 + e \cos \varphi) \sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi$$

sive introducendo  $E$  pro  $v$

$$dv = \frac{a \cos \varphi}{rr} dM + \frac{a}{rr} (2 - e \cos E - e) \sin E d\varphi.$$

16.

Radius vector  $r$  per  $v$  et  $\varphi$  vel per  $M$  et  $\varphi$  plene nondum determinatus est, sed insuper a  $p$  vel  $a$  pendet; constabit igitur eius differentiale tribus membris. Per differentiationem aequationis II. art. 8. nanciscimur

$$\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} + \frac{e \sin v}{1 + e \cos v} dv - \frac{\cos \varphi \cos v}{1 + e \cos v} d\varphi$$

Statuendo hic  $\frac{dp}{p} = \frac{da}{a} - 2 \tan \varphi d\varphi$  (quod sequitur e differentiatione aequ. I.), exprimendoque secundum art. praec.  $dv$  per  $dM$  et  $d\varphi$ , prodit post debitas reductiones

$$\frac{dr}{r} = \frac{da}{a} + \frac{a}{r} \tan \varphi \sin v dM - \frac{a}{r} \cos \varphi \cos v d\varphi, \text{ sive}$$

$$dr = \frac{r}{a} da + a \tan \varphi \sin v dM - a \cos \varphi \cos v d\varphi$$

Ceterum hae formulae, sicut eae quas in art. praec. evolvimus, suppositioni immituntur,  $v$ ,  $\varphi$  et  $M$  sive potius  $dv$ ,  $d\varphi$ , et  $dM$  in partibus radii exprimi. Quodsi igitur variationes angulorum  $v$ ,  $\varphi$ ,  $M$  in secundis exprimere placet: vel eas formularum partes quae  $dv$ ,  $d\varphi$  aut  $dM$  implicant, per 206264,8 dividere oportet, vel eas, quae continent  $dr$ ,  $dp$  aut  $da$ , per eundem numerum multiplicare. Formulae igitur art. praec., quae hoc respectu sunt homogeneae, mutatione opus non habebunt.

17.

De indagatione aequationis centri maximae pauca adiecisse hand poenitebit. Primo sponte obvium est, differentiam inter anomaliam excentricam et mediam maximum esse pro  $E = 90^\circ$ , ubi fit  $= e$  (in gradibus etc. exprimenda); radius vector in hoc puncto est  $= a$ , unde  $v = 90^\circ + \varphi$ , adeoque aequatio centri tota  $= \varphi + e$ , quae tamen hic non est maximum, quoniam differentia inter  $v$  et  $E$  adhuc ultra  $\varphi$  crescere potest. Haecce differentia fit maximum pro  $d(v - E) = 0$  sive pro  $dv = dE$ , ubi excentricitas manifesto ut constans spectanda est. Qua suppositione quum generaliter fiat  $\frac{dv}{\sin v} = \frac{dE}{\sin E}$ , patet, in eo puncto ubi differentia inter  $v$  et  $E$  maximum est, esse debere  $\sin v = \sin E$ ; unde erit, per aequatt. VIII. III.,  $r = a \cos \varphi$ ,  $e \cos E = 1 - \cos \varphi$ , sive  $\cos E = + \tan \frac{1}{2} \varphi$ . Perinde invenitur  $\cos v = - \tan \frac{1}{2} \varphi$ , quapropter erit \*)  $v = 90^\circ + \arcsin \tan \frac{1}{2} \varphi$ ,  $E = 90^\circ - \arcsin \tan \frac{1}{2} \varphi$ ; hinc porro  $\sin E = \sqrt{(1 - \tan^2 \frac{1}{2} \varphi)} = \frac{\sqrt{\cos \varphi}}{\cos \frac{1}{2} \varphi}$ , ita ut aequatio centri tota in hoc puncto fiat  $= 2 \arcsin \tan \frac{1}{2} \varphi + 2 \sin \frac{1}{2} \varphi \cdot \sqrt{\cos \varphi}$ , parte

\*) Ad ea maxima, quae inter aphelium et perihelium iacent, non opus est respicere, quum manifesto ab his, quae inter perihelium et aphelium sita sunt, in signis tantum differant.

secunda in gradibus etc. expressa. — In eo denique puncto, ubi tota aequatio centri ipsa maximum est, fieri debet  $dv = dM$ , adeoque secundum art. 15,  $r = a/\cos \varphi$ ; hinc fit  $\cos v = -\frac{1 - \cos \varphi}{e}$ ,  $\cos E = \frac{1 - \sqrt{\cos \varphi}}{e} = \frac{1 - \cos \varphi}{e(1 + \sqrt{\cos \varphi})} = \frac{\tan \frac{1}{2} \varphi}{1 + \sqrt{\cos \varphi}}$ ; per quam formulam  $E$  ultima praecisione determinare licet. Inventa  $E$ , erit per aequ. X., XII., aequatio centri  $= 2 \arcsin \frac{\sin \frac{1}{2} \varphi \sin E}{\sqrt{\cos \varphi}} + e \sin E$ . Expressioni aequationis centri maximae per seriem secundum potestates excentricitatis progredientem, quam plures auctores tradiderunt, hic non immoramur. Ut exemplum habeatur, conspectum trium maximorum, quae hic contemplati sumus, pro Iunone adiungimus, ubi excentricitas secundum elementa novissima  $= 0,2554996$  supposita est.

| Maximum | $E$       | $E - M$        | $v - E$        | $v - M$        |
|---------|-----------|----------------|----------------|----------------|
| $E - M$ | 90° 0' 0" | 14° 38' 20" 57 | 14° 48' 11" 48 | 29° 26' 32" 05 |
| $v - E$ | 82 32 9   | 14 30 54,01    | 14 55 41,79    | 29 26 35,80    |
| $v - M$ | 86 14 40  | 14 36 27,39    | 14 53 49,57    | 29 30 16,96    |

18.

In PARABOLA anomalia excentrica, anomalia media atque motus medius fierent  $= 0$ ; hic igitur istae notiones comparationi motus cum tempore inservire nequeunt. Attamen in parabola angulo auxiliari ad integrandum  $rrdv$  omnino opus non habemus; fit enim  $rrdv = \frac{ppdr}{4 \cos \frac{1}{2} v^4} = \frac{ppd \tan \frac{1}{2} v}{2 \cos \frac{1}{2} v^4} = \frac{1}{2} pp(1 + \tan \frac{1}{2} v^2) d \tan \frac{1}{2} v$ , adeoque  $\int rrdv = \frac{1}{2} pp(\tan \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \tan \frac{3}{2} v) + \text{Const.}$  Si tempus a transitu per perihelium incipere supponitur, Constans fit  $= 0$ ; habetur itaque

$$\tan \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \tan \frac{3}{2} v^3 = \frac{2tk\sqrt{1+p}}{p^3}$$

per quam formulam  $t$  ex  $v$ , atque  $v$  ex  $t$  derivare licet, simulac  $p$  et  $p$  sunt cognitae. Pro  $p$  inter elementa parabolica radius vector in perihelio quiescit  $\frac{1}{2} p$  exhiberi, massaque  $p$  omnino negligi solet. Vix certe unquam possibile erit, massam corporis talis cuius orbita tanquam parabola computatur, determinare, reveraque omnes cometae per optimas recentissimasque observationes densitatem atque massam tam exiguum habere videntur, ut haec insensibilis censi tutoque negligi possit.

19.

Solutio problematis, ex anomalia vera deducere tempus, multoque adhuc magis solutio problematis inversi, magnopere abbreviari potest per tabulam auxiliarem, qualis in pluribus libris astronomicis reperitur. Longe vero commodissima est tabula BARKERIANA, quae etiam operi egregio cel. OLBERS (*Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode, die Bahn eines Cometen zu berechnen*. Weimar 1797) annexa est. Continet ea pro omnibus anomaliis veris a 0 usque ad 180° per singula 5 minuta valorem expressionis  $75 \tan \frac{1}{2} v + 25 \tan \frac{1}{2} v^3$  sub nomine *motus medii*. Si itaque tempus desideratur anomaliae verae  $v$  respondens, dividere oportebit motum medium e tabula argumento  $v$  excerptum per  $\frac{150k}{p^3}$ ; quae quantitas *motus medius diurnus* dicitur; contra si e tempore anomalia vera computanda est, illud in diebus expressum per  $\frac{150k}{p^3}$  multiplicabitur, ut motus medius prodeat, quo anomalias respondens e tabula sumere licebit. Ceterum manifesto valori negativo ipsius  $v$  motus medius tempusque idem sed negative sumtum respondet: eadem igitur tabula anomaliis negativis et positivis perinde inservit. Si pro  $p$  distantia in perihelio  $\frac{1}{2} p = q$  uti malimus, motus medius diurnus exprimitur per  $k\sqrt{2512,5}$ , ubi factor constans  $k\sqrt{2512,5}$  fit  $= 0,912279061$ , ipsiusque logarithmus 9,9601277069. — Inventa anomalia  $v$  radius vector determinabitur per formulam iam supra traditam  $r = \frac{q}{\cos \frac{1}{2} v^2}$ .

20.

Per differentiationem aequationis  $\tan \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \tan \frac{3}{2} v^3 = 2tkp^{-1}$ , si omnes quantitates  $v, t, p$  seu variables tractantur, prodit

$$\frac{dv}{2 \cos \frac{1}{2} v^4} = 2kp^{-1} dt - 3tkp^{-1} dp, \text{ sive}$$

$$dv = \frac{k\sqrt{p}}{rr} dt - \frac{3tk}{rr\sqrt{p}} dp$$

Si variationes anomaliae  $v$  in secundis expressae desiderantur, etiam ambae partes ipsius  $dv$  hoc modo exprimendae sunt, i. e. pro  $k$  valorem in art. 6. traditum 3548'188 accipere oportet. Quodsi insuper pro  $p$  introducatur  $\frac{1}{2} p = q$ , formula ita se habebit

$$dv = \frac{k\sqrt{2q}}{rr} dt - \frac{3kt}{rr\sqrt{2q}} dq$$

ubi logarithmi constantes adhibendi sunt  $\log k\sqrt{2} = 3,7005215724$ ,  $\log 3k\sqrt{\frac{1}{2}} = 3,8766128315$ .

Porro differentiatio aequationis  $r = \frac{p}{2 \cos \frac{1}{2} v}$ , suppeditat

$$\frac{dr}{r} = \frac{dp}{p} + \tan \frac{1}{2} v dv, \text{ sive exprimendo } dv \text{ per } dt \text{ et } dp$$

$$\frac{dr}{r} = \left( \frac{1}{p} - \frac{3kt \tan \frac{1}{2} v}{2r r' p} \right) dp + \frac{k\sqrt{p} \tan \frac{1}{2} v}{rr} dt$$

Coëfficiens ipsius  $dp$ , substituendo pro  $t$  valorem suum per  $v$  transit in

$$\frac{1}{p} - \frac{3p \tan \frac{1}{2} v}{4rr} - \frac{p \tan \frac{1}{2} v}{4rr} = \frac{1}{r} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} v^2 - \frac{3}{2} \sin \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} v^2 \tan \frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\cos v}{2r}$$

coëfficiens ipsius  $dt$  autem fit  $= \frac{k \sin v}{r\sqrt{p}}$ . Hinc prodit  $dr = \frac{1}{2} \cos v dp + \frac{k \sin v}{\sqrt{p}} dt$ , sive introducendo  $q$  pro  $p$ ,

$$dr = \cos v dq + \frac{k \sin v}{\sqrt{2} q} dt$$

Logarithmus constans hic adhibendus est  $\log k\sqrt{\frac{1}{2}} = 8,0850664436$ .

## 21.

In HYPERBOLA  $\varphi$  atque  $E$  quantitates imaginariae fient, quales si aversamur, illarum loco aliae quantitates auxiliares sunt introducendae. Angulum cuius cosinus  $= \frac{1}{e}$  iam supra per  $\psi$  designavimus, radiumque vectorem  $= \frac{2e \cos \frac{1}{2}(\psi - \phi)}{p}$  invenimus. Factores in denominatore huius fractionis,  $\cos \frac{1}{2}(\psi - \phi)$  et  $\cos \frac{1}{2}(\psi + \phi)$ ; aequales fiunt pro  $v=0$ , secundus evanescit pro valore maximo positivo ipsius  $v$ , primus vero pro valore maximo negativo. Statuendo igitur  $\frac{\cos \frac{1}{2}(\psi - \phi)}{\cos \frac{1}{2}(\psi + \phi)} = u$ , erit  $u=1$  in perihelio; crescet in infinitum, dum  $v$  ad limitem suum  $180^\circ - \psi$  appropinquat; contra decrescet in infinitum, dum  $v$  ad limitem alterum  $-(180^\circ - \psi)$  regredi supponitur: quod fiet ita, ut valoribus oppositis ipsius  $v$  valores reciproci ipsius  $u$ , vel quod idem est valores tales quorum logarithmi oppositi sunt, respondeant.

Hic quotiens  $u$  percommode in hyperbola ut quantitas auxiliaris adhibetur; aequali fere concinnitate istius vice fungi potest angulus cuius tangens  $= \tan \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$ , quem ut analogiam cum ellipsi sequamur, per  $\frac{1}{2} F$  denotabimus. Hoc modo facile sequentes relationes inter quantitates  $v, r, u, F$  colliguntur, ubi  $a = -b$  statuimus, ita ut  $b$  evadat quantitas positiva.

$$\text{I. } b = p \cotang \frac{1}{2} \psi$$

$$\text{II. } r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{p \cos \frac{1}{2} \psi}{2 \cos \frac{1}{2}(\psi - \phi) \cos \frac{1}{2}(\psi + \phi)}$$

$$\text{III. } \tan \frac{1}{2} F = \tan \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = \tan \frac{1}{2} v \tan \frac{1}{2} \psi = \frac{u-1}{u+1}$$

$$\text{IV. } u = \frac{\cos \frac{1}{2}(\psi - \phi)}{\cos \frac{1}{2}(\psi + \phi)} = \frac{1 + \tan \frac{1}{2} F}{1 - \tan \frac{1}{2} F} = \tan(45^\circ + \frac{1}{2} F)$$

$$\text{V. } \frac{1}{\cos F} = \frac{1}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right) = \frac{1 + \cos \phi \cos v}{2 \cos \frac{1}{2}(\psi - \phi) \cos \frac{1}{2}(\psi + \phi)} = \frac{e + \cos v}{1 + e \cos v}$$

Subtrahendo ab aequ. V. utrumque 1, prodit

$$\text{VI. } \sin \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{r} = \sin \frac{1}{2} F \cdot \sqrt{\frac{p}{(e-1) \cos F}} = \sin \frac{1}{2} F \cdot \sqrt{\frac{(e+1)b}{\cos F}} \\ = \frac{1}{2} (u-1) \sqrt{\frac{p}{(e-1)u}} = \frac{1}{2} (u-1) \sqrt{\frac{(e+1)b}{u}}$$

Simili modo addendo utrumque 1 fit

$$\text{VII. } \cos \frac{1}{2} v \cdot \sqrt{r} = \cos \frac{1}{2} F \cdot \sqrt{\frac{p}{(e+1) \cos F}} = \cos \frac{1}{2} F \cdot \sqrt{\frac{(e-1)b}{\cos F}} \\ = \frac{1}{2} (u+1) \sqrt{\frac{p}{(e+1)u}} = \frac{1}{2} (u+1) \sqrt{\frac{(e-1)b}{u}}$$

Dividendo VI. per VII. ad III. reveniremus; multiplicatio producit

$$\text{VIII. } r \sin v = p \cotang \frac{1}{2} \psi \tan F = b \tan \frac{1}{2} \psi \tan F \\ = \frac{1}{2} p \cotang \frac{1}{2} \psi \cdot \left( u - \frac{1}{u} \right) = \frac{1}{2} b \tan \frac{1}{2} \psi \cdot \left( u - \frac{1}{u} \right)$$

E combinatione aequatt. II. V. porro facile deducitur

$$\text{IX. } r \cos v = b \left( e - \frac{1}{\cos F} \right) = \frac{1}{2} b (2e - u - \frac{1}{u})$$

$$\text{X. } r = b \left( \frac{e}{\cos F} - 1 \right) = \frac{1}{2} b \left( e \left( u + \frac{1}{u} \right) - 2 \right)$$

## 22.

Per differentiationem formulae IV. prodit (spectando  $\phi$  ut quantitatem constantem)  $\frac{du}{u} = \frac{1}{2} (\tan \frac{1}{2}(\psi + \phi) - \tan \frac{1}{2}(\psi - \phi)) dv = \frac{r \tan \frac{1}{2} \psi}{p} dv$ ; hinc

$$rr dv = \frac{pr}{u \tan \frac{1}{2} \psi} du, \text{ sive substituendo pro } r \text{ valorem ex X,}$$

$$rr dv = b \tan \frac{1}{2} \psi \cdot \left( \frac{1}{2} \left( e \left( u + \frac{1}{u} \right) - 2 \right) \right) du$$

Integrando deinde ita, ut integrale in perihelio evanescat, fit

$$\int r r d v = b b \tan \phi \cdot \left( \frac{1}{2} e \left( u - \frac{1}{u} \right) - \log u \right) = k t \sqrt{p} \cdot \sqrt{1+u} = k t \tan \phi \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{1+u}$$

Logarithmus hic est hyperbolicus; quodsi logarithmos e systemate Baroico vel generaliter e systemate cuius modulus =  $\lambda$  adhibere placet, massaque  $\mu$  (quam pro corpore in hyperbola incidente haud determinabilem esse supponere possumus) negligitur, aequatio hancce formam induit:

$$\text{XI. } \frac{1}{2} \lambda e \frac{u u - 1}{u} - \log u = \frac{\lambda k t}{b^{\frac{1}{2}}}$$

sive introducendo  $F$

$$\lambda e \tan F - \log \tan \left( 45^\circ + \frac{1}{2} F \right) = \frac{\lambda k t}{b^{\frac{1}{2}}}$$

Si logarithmus Baroicos adhiberi supponimus, habemus  $\log \lambda = 9,6377843113$ ,  $\log \lambda k = 7,8733657527$ , sed praecisionem aliquantulum maiorem attingere licet, si logarithmi hyperbolici immediate applicantur. Tangentium logarithmi hyperbolici in pluribus tabularum collectionibus reperiuntur, e. g. in iis quas SCHULZE curavit, maioriq. adhuc extensioni in BENI. URSINI MAGNO CANONE TRIANGULORUM logarithmico, Colon. 1624, ubi persingula  $10''$  progrediuntur. — Ceterum formula XI. ostendit, valoribus reciprocis ipsius  $u$ , sive valoribus oppositis ipsius  $F$  et  $v$  respondere valores oppositos ipsius  $t$ , quapropter partes hyperbolae aequales a perihelioque utrimque acquidistantes temporibus aequalibus describuntur.

23.

Si pro inveniend. tempore ex anomalia vera quantitate auxiliari  $u$  uti placuerit, huius valor commodissime per aequ. IV. determinatur; formula dein II. absque novo calculo statim dat  $p$  per  $r$ , vel  $r$  per  $p$ . Inventa  $u$  formula XI. dabit quantitatem  $\frac{\lambda k t}{b^{\frac{1}{2}}}$ , quae analogae est anomaliae mediae in ellipsi et per  $N$  denotabitur, unde demanabit tempus post transitum per perihelium elapsum. Quum pars prior ipsius  $N$  puta  $\frac{\lambda e (u u - 1)}{2 u}$  per formulam VIII. fiat  $= \frac{\lambda r \sin v}{b \sin \phi}$ , calculus duplex huius quantitatis ipsius praecisioni examinandae inservire, aut si mavis,  $N$  absque  $u$  ita exhiberi potest

$$\text{XII. } N = \frac{\lambda \tan \phi \sin v}{1 \cos \frac{1}{2} (v + \phi) \cos \frac{1}{2} (v - \phi)} - \log \frac{\cos \frac{1}{2} (v - \phi)}{\cos \frac{1}{2} (v + \phi)}$$

Exemplum. Sit  $e = 1,2618821$  sive  $\phi = 37^\circ 35' 0''$ ,  $v = 18^\circ 51' 0''$ ,  $\log r = 0,0333585$ . Tum calculus pro  $u, p, b, N, t$  ita se habet:

|                                          |             |                                |             |
|------------------------------------------|-------------|--------------------------------|-------------|
| $\log \cos \frac{1}{2} (v - \phi)$ . . . | 9,9941706   | hinc $\log u$ . . . . .        | 0,0491129   |
| $\log \cos \frac{1}{2} (v + \phi)$ . . . | 9,9450577   | $u$ . . . . .                  | = 1,1197289 |
| $\log r$ . . . . .                       | 0,0333585   | $u u$ . . . . .                | = 1,2537928 |
| $\log 2 e$ . . . . .                     | 0,4020488   |                                |             |
| $\log p$ . . . . .                       | 0,3746356   |                                |             |
| $\log \cotang \frac{\phi}{2}$ . . . . .  | 0,2274244   |                                |             |
| $\log b$ . . . . .                       | 0,6020600   | Calculus alter                 |             |
| $\log \frac{r}{b}$ . . . . .             | 9,4312985   | $\log (u u - 1)$ . . . . .     | 9,4044793   |
| $\log \sin v$ . . . . .                  | 9,5093258   | Compl. $\log u$ . . . . .      | 9,9508871   |
| $\log \lambda$ . . . . .                 | 9,6377843   | $\log \lambda$ . . . . .       | 9,6377843   |
| Compl. $\log \sin \phi$ . . . . .        | 0,2147309   | $\log \frac{1}{2} e$ . . . . . | 9,7999888   |
|                                          | 8,7931395   |                                | 8,7931395   |
| Pars prima ipsius $N$ . . . . .          | = 0,0621069 |                                |             |
| $\log u$ . . . . .                       | = 0,0491129 |                                |             |
| $N$ . . . . .                            | = 0,0129940 | $\log N$ . . . . .             | 8,1137429   |
| $\log \lambda k$ . . . . .               | 7,8733658   | Differentia . . . . .          | 6,9702758   |
| $\frac{1}{2} \log b$ . . . . .           | 0,9030900   | $\log t$ . . . . .             | 1,1434671   |
|                                          |             | $t$ =                          | 13,91448    |

24.

Si calculum per logarithmos hyperbolicos exsequi constitutum est, quantitate auxiliari  $F$  uti praestat, quae per aequ. III. determinabitur, atque inde  $N$  per XI; semiparameter e radio vectore, vel vicissim hic ex illo per formulam VIII. computabitur; pars secunda ipsius  $N$  duplici si lubet modo erui potest, scil. per formulam  $\log \text{hyp} \tan \left( 45^\circ + \frac{1}{2} F \right)$ , et per hanc  $\log \text{hyp} \cos \frac{1}{2} (v - \phi) - \log \text{hyp} \cos \frac{1}{2} (v + \phi)$ . Ceterum patet, quantitatem  $N$  hic ubi  $\lambda = 1$  in ratione  $1:\lambda$  maiorem evadere, quam si logarithmi Baroici adhibeantur. Ecce exemplum nostrum hoc modo tractatum:

|                                                      |              |                                                      |
|------------------------------------------------------|--------------|------------------------------------------------------|
| $\log \tan \frac{1}{2} \phi$ . . . . .               | 9,5318179    |                                                      |
| $\log \tan \frac{1}{2} v$ . . . . .                  | 9,2201009    |                                                      |
| $\log \tan \frac{1}{2} F$ . . . . .                  | 8,7519188    | $\frac{1}{2} F = 3^{\circ} 13' 58'' 12$              |
| $\log e$ . . . . .                                   | 0,1010188    |                                                      |
| $\log \tan F$ . . . . .                              | 9,0543366    |                                                      |
|                                                      | 9,1553554    | C. log hyp cos $\frac{1}{2} (v - \phi) = 0,01342266$ |
| $e \tan F$ . . . . .                                 | = 0,14300638 | C. log hyp cos $\frac{1}{2} (v + \phi) = 0,12650930$ |
| $\log \text{hyp} \tan(45^{\circ} + \frac{1}{2} F) =$ | 0,11308666   | Differentia . . . . . = 0,11308664                   |
| $N$ . . . . .                                        | = 0,02991972 | $\log N$ . . . . . = 8,4759575                       |
| $\log k$ . . . . .                                   | 8,2355814    |                                                      |
| $\frac{1}{2} \log b$ . . . . .                       | 0,0030900    | Differentia . . . . . = 7,3324914                    |
|                                                      |              | $\log t$ . . . . . = 1,1434661                       |
|                                                      |              | $t =$ . . . . . 13,91445                             |

25.

Ad solutionem problematis inversi, e tempore anomaliam veram radiumque vectorem determinare, primo ex  $N = \lambda k b^{-1} t$  per aequationem XI. elicienda est quantitas auxiliaris  $u$  vel  $F$ . Solutio huius aequationis transcendens tentando perficienda erit, et per artificia iis quae in art. 11. exposuimus analogia abbreviari poterit. Haec autem fusius explicare supersedemus; neque enim operae pretium esse videtur, praecepta pro motu hyperbolico in coelis vix unquam fortasse se oblaturum aequae anxie expolire ac pro motu elliptico, practerea quae omnes casus qui forte occurrere possent per methodum aliam infra tradendam absolvere licebit. Postquam  $F$  vel  $u$  inventa erit,  $e$  inde per formulam III., ac dein  $r$  vel per II. vel per VIII. determinabitur; commodius adhuc per formulas VI. et VII.  $v$  et  $r$  simul eruentur; e formulis reliquis una alterave pro confirmatione calculi, si lubet, in usum vocari poterit.

26.

*Exemplum.* Manentibus  $e$  et  $b$  ut in exemplo praecedente, sit  $t = 65,41236$ ; quaeruntur  $v$  et  $r$ . Utendo logarithmis Briggsiis habemus

|                                   |                                    |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| $\log t$ . . . . .                | 1,8156598                          |
| $\log \lambda k b^{-1}$ . . . . . | 6,9702758                          |
| $\log N$ . . . . .                | 8,7859356, unde $N = 0,06108514$ . |

Hinc aequationi  $N = \lambda e \tan F - \log \tan(45^{\circ} + \frac{1}{2} F)$  satisfieri invenitur per  $F = 25^{\circ} 24' 27'' 66$ , unde fit per formulam III.

|                                        |                                                                                                |
|----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\log \tan \frac{1}{2} F$ . . . . .    | 9,3530120                                                                                      |
| $\log \tan \frac{1}{2} \phi$ . . . . . | 9,5318179                                                                                      |
| $\log \tan \frac{1}{2} v$ . . . . .    | 9,8211941 adeoque $\frac{1}{2} v = 33^{\circ} 31' 29'' 89$ atque $v = 67^{\circ} 2' 59'' 78$ . |

Hinc porro habetur

|                                               |           |                                 |
|-----------------------------------------------|-----------|---------------------------------|
| C. log cos $\frac{1}{2} (v + \phi)$ . . . . . | 0,2137476 | Differentia . . . . . 0,1992279 |
| C. log cos $\frac{1}{2} (v - \phi)$ . . . . . | 0,0145197 |                                 |
| $\log \frac{p}{re}$ . . . . .                 | 9,9725868 |                                 |
| $\log r$ . . . . .                            | 0,2008541 |                                 |

27.

Si aequatio IV. ita differentiat, ut  $u, v, \phi$  simul ut variables tractentur, prodit

$$\frac{du}{u} = \frac{\sin \phi dv + \sin e d\phi}{2 \cos \frac{1}{2} (v - \phi) \cos \frac{1}{2} (v + \phi)} = \frac{r \tan \phi}{p} dv + \frac{r \sin e}{p \cos \phi} d\phi$$

Differentiando perinde aequationem XI., inter variationes differentiales quantitatum  $u, \phi, N$  emergit relatio

$$\frac{dN}{N} = \left( \frac{1}{2} e \left( 1 + \frac{1}{u} \right) - \frac{1}{u} \right) du + \frac{(u-1) \sin \phi}{2u \cos \frac{1}{2} \phi} d\phi, \text{ sive}$$

$$\frac{dN}{N} = \frac{r}{b u} du + \frac{r \sin e}{b \cos \phi} d\phi$$

Hinc eliminando  $du$  adiumento aequationis praecedentis obtinemus

$$\frac{dN}{N} = \frac{r r}{b b \tan \phi} dv + \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \frac{r \sin e}{b \cos \phi} d\phi, \text{ sive}$$

$$dv = \frac{b b \tan \phi}{\lambda r r} dN - \left( \frac{b}{r} + \frac{b}{p} \right) \frac{\sin e \tan \frac{1}{2} \phi}{\cos \frac{1}{2} \phi} d\phi$$

$$= \frac{b b \tan \phi}{\lambda r r} dN - \left( 1 + \frac{p}{r} \right) \frac{\sin e}{\sin \phi} d\phi$$

28.

Differentiando aequationem X., omnibus  $r, b, e, u$  pro variabilibus habitis,

substituendo  $d\psi = \frac{\sin\phi}{\cos\phi^2} d\phi$ , eliminandoque  $du$  adiumento aequationis inter  $dN$ ,  $du$ ,  $d\phi$  in art. praec. traditae, prodit

$$dr = \frac{r}{b} db + \frac{bbe(u-1)}{2\lambda ur} dN + \frac{b}{2\cos\phi^2} \left\{ \left(u + \frac{1}{u}\right) \sin\phi - \left(u - \frac{1}{u}\right) \sin v \right\} d\phi$$

Coëfficiens ipsius  $dN$  per aequ. VIII. transit in  $\frac{b \sin v}{\lambda \sin\phi}$ ; coëfficiens ipsius  $d\phi$  autem, substituendo per aequ. IV.,  $u(\sin\phi - \sin v) = \sin(\phi - v)$ ,  $\frac{1}{u}(\sin\phi + \sin v) = \sin(\phi + v)$ , mutatur in  $\frac{b \sin\phi \cos v}{\cos\phi^2} = \frac{p \cos v}{\sin\phi}$ , ita ut habeatur

$$dr = \frac{r}{b} db + \frac{b \sin v}{\lambda \sin\phi} dN + \frac{p \cos v}{\sin\phi} d\phi$$

Quatenus porro  $N$  ut functio ipsarum  $b$  et  $t$  spectatur, fit  $dN = \frac{N}{r} dt - \frac{N}{b} db$ , quo valore substituto,  $dr$ , ac perinde in art. praec. de, per  $dt$ ,  $db$ ,  $d\phi$  expressae habebuntur. Ceterum quod supra monuimus etiam hic repetendum est, scilicet si angulorum  $v$  et  $\phi$  variationes non in partibus radii sed in secundis expressae concipiantur, vel omnes terminos qui  $dr$ ,  $d\phi$  continent per 206264,8 dividi, vel omnes reliquos per hunc numerum multiplicari debere.

29.

Quum quantitates auxiliares in ellipsi adhibitae  $\varphi$ ,  $E$ ,  $M$ , in hyperbola valores imaginarios obtineant, haud abs re erit, horum nexum cum quantitibus realibus, quibus hic usi sumus, investigare: apponimus itaque relationes praecipuas, ubi quantitatem imaginariam  $\sqrt{-1}$  per  $i$  denotamus.

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= e = \frac{1}{\cos \phi} \\ \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = i\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = i \tan \frac{1}{2}\phi \\ \tan \varphi &= \frac{1}{2} \cotang(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) - \frac{1}{2} \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = -\frac{i}{\sin \phi} \\ \cos \varphi &= i \tan \frac{1}{2}\phi \\ \varphi &= 90^\circ + i \log(\sin \varphi + i \cos \varphi) = 90^\circ - i \log \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\phi) \\ \tan \frac{1}{2} E &= i \tan \frac{1}{2} F = \frac{i(u-1)}{u+1} \\ \frac{1}{\sin E} &= \frac{1}{2} \cotang \frac{1}{2} E + \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} E = -i \cotang F \quad \text{sive} \\ \sin E &= i \tan F = \frac{i(u-1)}{2u} \\ \cotang E &= \frac{1}{2} \cotang \frac{1}{2} E - \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2} E = -\frac{i}{\sin F} \quad \text{sive} \\ \tan E &= i \sin F = \frac{i(u-1)}{u+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos E &= \frac{1}{\cos F} = \frac{u+1}{2u} \\ iE &= \log(\cos E + i \sin E) = \log \frac{1}{u} \quad \text{sive} \\ E &= i \log u = i \log \tan(45^\circ + \frac{1}{2}F) \\ M &= E - e \sin E = i \log u - \frac{ie(u-1)}{2u} = -\frac{iN}{h} \end{aligned}$$

Logarithmi in his formulis sunt hyperbolici.

30.

Quum omnes quos e tabulis logarithmicis et trigonometricis depromimus numeri praecisionem absolutam non admittant, sed ad certum tantummodo gradum sint approximati, ex omnibus calculis illarum adiumento perfectis proxime tantum vera resultare possunt. In plerisque quidem casibus tabulae vulgares ad septimam figuram decimalem usque exactae, i. e. ultra dimidiam unitatem in figura septima excessu seu defectu nunquam aberrantes a vero, praecisionem plus quam sufficientem suppeditant, ita ut errores inevitabiles nullius plane sint momenti: nihilominus utique fieri potest, ut errores tabularum in casibus specialibus effectum suum exserant augmentatione tanta, ut methodum alias optimam plane abdicare aliamque ei substituere cogamur. Huiusmodi casus in iis quoque calculis, quos hactenus explicavimus, occurrere potest; quonobrem ab instituto nostro haud alienum erit, disquisitiones quasdam circa gradum praecisionis, quam tabulae vulgares in illis permittunt, hic instituere. Esti vero ad hoc argumentum calculatori practico gravissimum exhaustiendum hic non sit locus, investigationem eo perducemus, ut ad propositum nostrum sufficiat, et a quolibet, cuius interest, ulterius expoliri et ad quasvis alias operationes extendi possit.

31.

Quilibet logarithmus, sinus, tangens etc. (ant generaliter quaelibet quantitas irrationalis e tabulis excerpta) errori obnoxius est, qui ad dimidiam unitatem in figura ultima ascendere potest: designabimus huius erroris limitem per  $\omega$ , qui itaque in tabulis vulgaribus fit  $= 0,00000005$ . Quodsi logarithmus etc. e tabulis immediate desumi non potuit, sed per interpolationem erui debuit, error duplici caussa aliquantulum adhuc maior esse potest. Primo enim pro parte proportionali, quoties (figuram ultimam tanquam unitatem spectando) non est integer, adoptari solet integer proxime maior vel minor: hac ratione errorem tantum non usque ad

duplum augeri posse facile perspicitur. Ad hanc vero erroris augmentationem omnino hic non respicimus, quum nihil obstat, quominus unam alteramve figuram decimalem parti illi proportionali affigamus, nulloque negotio pateat, logarithmum interpolatum, si pars proportionalis absolute exacta esset, errori maiori obnoxium non esse quam logarithmos in tabulis immediate expressos, quatenus quidem horum variationes tanquam uniformes considerare liceat. Erroris augmentatio altera inde nascitur, quod suppositio ista omni rigore non est vera: sed hanc quoque negligimus, quoniam effectus differentiarum secundarum altiorumque in omnibus prope modum casibus nullius plane momenti est (praesertim si pro quantitibus trigonometricis tabulae excellentissimae quas TAYLOR curavit adhibentur), facilique negotio ipsius ratio haberi possit, ubi forte paullo maior evaderet. Statuamus itaque pro omnibus casibus tabularum errorem maximum inevitabilem  $= \omega$ , siquidem argumentum (i. e. numerus cuius logarithmus, seu angulus cuius sinus etc. quaeritur) praecisione absoluta habetur. Si vero argumentum ipsum proxime tantum innuit, errorique maximo, cui obnoxium esse potest, respondere supponitur logarithmi etc. variatio  $\omega'$  (quam per rationem differentialium definire licet), error maximus logarithmi per tabulas computati usque ad  $\omega + \omega'$  ascendere potest.

Vice versa, si adiumento tabularum argumentum logarithmo dato respondens computatur, error maximus ei eius variationi aequalis est, quae respondet variationi  $\omega$  in logarithmo, si hic exacte datur, vel quae respondet variationi logarithmi  $\omega + \omega'$ , si logarithmus ipse usque ad  $\omega'$  erroneus esse potest. Vix opus erit monere,  $\omega$  et  $\omega'$  eodem signo affici debere.

Si plures quantitates intra certos tantum limites exactae adduntur, aggregati error maximus aequalis erit aggregato singulorum errorum maximorum, iisdem signis affectorum; quare etiam in subtractione quantitatum proxime exactarum differentiae error maximus summae errorum singulorum maximorum aequalis erit. In multiplicatione vel divisione quantitatis non absolute exactae error maximus in eadem ratione augetur vel diminuitur ut quantitas ipsa.

## 32.

Progredimur iam ad applicationem horum principiorum ad utilissimas operationum supra explicatarum.

I. Adhibendo ad computum anomaliae verae ex anomalia excentrica in motu elliptico form. VII. art. 8., si  $\varphi$  et  $E$  exacte haberi supponuntur, in  $\log \tan(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\varphi)$

et  $\log \tan \frac{1}{2} E$  committi potest error  $\omega$ , adeoque in differentia  $= \log \tan \frac{1}{2} r$  error  $2\omega$ ; error maximus itaque in determinatione anguli  $\frac{1}{2} r$  erit  $\frac{3\omega \sin \varphi}{2}$ , designante  $\lambda$  modulum logarithmorum ad hunc calculum adhibitorum. Error itaque, cui anomalia vera  $r$  obnoxia est, in secundis expressus fit  $= \frac{3\omega \sin \varphi}{\lambda} 206265'' = 0.0712 \sin \varphi$ , si logarithmi Briggsii ad septem figuras decimales adhibentur, ita ut semper intra 0.07 de valore ipsius  $r$  certi esse possimus: si tabulae minores ad quinque tantum figuras adhibentur, error usque ad 7.12 ascendere posset.

II. Si  $e \cos E$  adiumento logarithmorum computatur, error committi potest usque ad  $\frac{3\omega e \cos E}{\lambda}$ ; eidem itaque errori obnoxia erit quantitas  $1 - e \cos E$  sive  $\frac{r}{a}$ . In computando ergo logarithmo huius quantitatis error usque ad  $(1 + \frac{1}{2})\omega$  ascendere potest, designando per  $\frac{3e \cos E}{1 - e \cos E}$  positive sumtam: ad eundem limitem  $(1 + \frac{1}{2})\omega$  ascendit error in  $\log r$  possibilis, siquidem  $\log a$  exacte datus supponitur. Quoties excentricitas parva est, quantitas  $\frac{3e \cos E}{1 - e \cos E}$  arctis semper limitibus coarctetur: quando vero  $e$  parum differt ab 1,  $1 - e \cos E$  perparva manet, quamdiu  $E$  parva est; tunc igitur  $\frac{3e \cos E}{1 - e \cos E}$  ad magnitudinem haud contemnendam increscere potest, quocirca in hoc casu formula III. art. 8. minus idonea esset. Quantitas  $\frac{3e \cos E}{1 - e \cos E}$  ita etiam exprimi potest  $\frac{3(a - r)}{r} = \frac{3e(\cos \varphi + e)}{1 - e^2}$ , quae formula adhuc clarius ostendit, quando errorem  $(1 + \frac{1}{2})\omega$  continere liceat.

III. Adhibendo formulam X. art. 8. ad computum anomaliae verae ex excentrica,  $\log \sqrt{\frac{a}{r}}$  obnoxius erit error  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2})\omega$ , adeoque  $\log \sin \frac{1}{2} \varphi \sin E \sqrt{\frac{a}{r}}$  huius  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2})\omega$ ; hinc error maximus in determinatione anguli  $r - E$  vel  $r$  possibilis eruitur  $= \frac{\omega}{\lambda} (7 + \frac{1}{2}) \tan \frac{1}{2} (r - E)$ , sive in secundis expressus, si septem figurae decimales adhibentur,  $= (0.166 + 0.024 \frac{1}{2}) \tan \frac{1}{2} (r - E)$ . Quoties excentricitas modica est,  $\frac{1}{2}$  et  $\tan \frac{1}{2} (r - E)$  quantitates parvae erunt, quapropter haec methodus praecisionem maiorem permittet, quam ea quam in I. contemplati sumus: haecce contra methodus tunc praefenda erit, quando excentricitas valde magna est propeque ad unitatem accedit, ubi  $\frac{1}{2}$  et  $\tan \frac{1}{2} (r - E)$  valores valde considerabiles nancisci possunt. Per formulas nostras, utra methodus alteri praefenda sit, facile semper decidi poterit.

IV. In determinatione anomaliae mediae ex excentrica per formulam XII. art. 8. error quantitatis  $e \sin E$ , adiumento logarithmorum computatae, adeoque etiam ipsius anomaliae  $M$ , usque ad  $\frac{3\omega e \sin E}{\lambda}$  ascendere potest, qui erroris lines si in secundis expressus desideratur per 206265'' est multiplicandus. Hinc facile concluditur, in problemate inverso, ubi  $E$  ex  $M$  tentando determinatur,  $E$  quan-



titate  $\frac{3\omega \sin E}{\lambda} \cdot \frac{dE}{dM} \cdot 206265'' = \frac{3\omega \sin E}{\lambda r} \cdot 206265''$  erroneam esse posse, etsi aequationi  $E - e \sin E = M$  omni quam tabulae permittunt praecisione satisfactum fuerit.

Anomalia vera itaque e media computata duabus rationibus erronea esse potest, siquidem mediam tanquam exacte datam consideramus, primo propter errorem in computo ipsius  $v$  ex  $E$  commissum, qui ut vidimus levis semper momenti est, secundo ideo quod valor anomaliae excentricae ipse iam erroneus esse potuit. Effectus rationis posterioris definitur per productum erroris in  $E$  commissi per  $\frac{dv}{dE}$ , quod productum fit  $= \frac{3\omega \sin E}{\lambda} \cdot \frac{dv}{dM} \cdot 206265'' = \frac{3\omega \sin e}{\lambda r} \cdot 206265'' = \left( \frac{e \sin v + \frac{1}{2} e \sin 2v}{1 - ee} \right) \cdot 0.0712$ , si septem figurae adhibentur. Hic error, pro valoribus parvis ipsius  $e$  semper modicus, permagnus evadere potest, quoties  $e$  ab unitate parum differt, uti tabella sequens ostendit, quae pro quibusdam valoribus ipsius  $e$  valorem maximum illius expressionis exhibet.

| $e$  | error maximus | $e$  | error maximus | $e$   | error maximus |
|------|---------------|------|---------------|-------|---------------|
| 0,90 | 0,42          | 0,94 | 0,73          | 0,98  | 2,28          |
| 0,91 | 0,48          | 0,95 | 0,89          | 0,99  | 4,59          |
| 0,92 | 0,54          | 0,96 | 1,12          | 0,999 | 46,23         |
| 0,93 | 0,62          | 0,97 | 1,50          |       |               |

V. In motu hyperbolico, si  $v$  per formulam III. art. 21. ex  $F$  et  $\psi$  exacte notis determinatur, error usque ad  $\frac{3\omega \sin v}{\lambda} \cdot 206265''$  ascendere potest; si vero per formulam  $\tan \frac{1}{2} v = \frac{(u-1) \cotang \frac{1}{2} \psi}{u+1}$  computatur,  $u$  et  $\psi$  exacte notis, erroris limites triente maior erit, puta  $= \frac{4\omega \sin v}{\lambda} \cdot 206265'' = 0.09 \sin v$  pro septem figuris.

VI. Si per formulam XI. art. 22. quantitas  $\frac{\lambda h t}{b^2} = N$  adiumento logarithmorum Barroicorum computatur,  $e$  et  $u$  vel  $e$  et  $F$  tanquam exacte notas supponendo, pars prima obnoxia erit errori  $\frac{3(uu-1)e\omega}{2u}$ , si computata est in forma  $\frac{\lambda e(u-1)(u+1)}{2u}$ , vel errori  $\frac{3(uu+1)e\omega}{2u}$ , si computata est in forma  $\frac{1}{2} \lambda eu - \frac{\lambda e}{2u}$ , vel errori  $3e\omega \tan F$ , si computata est in forma  $\lambda e \tan F$ , siquidem errorem in  $\log \lambda$  vel  $\log \frac{1}{2} \lambda$  commissum contemnimus. In casu primo error etiam per  $3e\omega \tan F$ , in secundo per  $\frac{3e\omega}{\cos F}$ , exprimi potest, unde patet, in casu tertio errorem omnium semper minimum esse, in primo autem vel secundo maior erit, prout  $u$  aut  $\frac{1}{u} > 2$

vel  $< 2$ , sive prout  $\pm F > 36^\circ 52'$  vel  $< 36^\circ 52'$ . — Pars secunda ipsius  $N$  autem semper obnoxia erit errori  $\omega$ .

VII. Vice versa patet, si  $u$  vel  $F$  ex  $N$  tentando eruatur,  $u$  obnoxiam fore errori  $(1 + 5e \tan F) \omega \frac{du}{dN}$ , vel huic  $(1 + \frac{3e}{\cos F}) \omega \frac{du}{dN}$ , prout membrum primum in valore ipsius  $N$  vel in factores vel in partes resolutum adhibeatur;  $F$  autem errori huic  $(1 + 3e \tan F) \omega \frac{dF}{dN}$ . Signa superiora post perihelium, inferiora ante perihelium valent. Quodsi hic pro  $\frac{du}{dN}$  vel pro  $\frac{dF}{dN}$  substituitur  $\frac{dv}{dN}$ , emerget effectus huius erroris in determinationem ipsius  $v$ , qui igitur erit  $\frac{bb \tan \psi (1 + 5e \tan F) \omega}{\lambda rr}$  aut  $\frac{bb \tan \psi (1 + 5e \sec F) \omega}{\lambda rr}$ , si quantitas auxiliaris  $u$  adhibita est; contra, si adhibita est  $F$ , ille effectus fit  $= \frac{bb \tan \psi (1 + 3e \tan F) \omega}{\lambda rr} = \frac{\omega}{\lambda} \left\{ \frac{(1 + e \cos v)^2}{\tan \psi^2} + \frac{3e \sin v (1 + e \cos v)}{\tan \psi^2} \right\}$ . Adicere oportet factorem  $206265''$ , si error in secundis exprimendus est. Manifesto hic error tunc tantum considerabilis evadere potest, quando  $\psi$  est angulus parvus, sive  $e$  paullo maior quam 1; ecce valores maximos huius tertiae expressionis pro quibusdam valoribus ipsius  $e$ , si septem figurae decimales adhibentur:

| $e$   | error maximus |
|-------|---------------|
| 1,3   | 0,34          |
| 1,2   | 0,54          |
| 1,1   | 1,31          |
| 1,05  | 3,03          |
| 1,01  | 34,41         |
| 1,001 | 1064,65       |

Huic errori ex erroneo valore ipsius  $F$  vel  $u$  orto adicere oportet errorem in V. determinatum, ut incertitudo totalis ipsius  $v$  habeatur.

VIII. Si aequatio XI. art. 22. adiumento logarithmorum hyperbolicorum solvitur,  $F$  pro quantitate auxiliari adhibita, effectus erroris in hac operatione possibilis in determinationem ipsius  $v$  per similia ratioecinia invenitur

$$= \frac{(1 + e \cos v)^2 \omega'}{\tan \psi^2} + \frac{3e \sin v (1 + e \cos v) \omega}{\lambda \tan \psi^2}$$

ubi per  $\omega'$  incertitudinem maximam in tabulis logarithmorum hyperbolicorum designamus. Pars secunda huius expressionis identica est cum parte secunda expressionis in VII. traditae, primo vero in ratione  $\lambda \omega' : \omega$  minor quam prima

in illa expressione, i. e. in ratione 1:23, si tabulam URSINI ad octo ubique figuras exactam sive  $\omega' = 0,000000005$  supponere liceret.\*

33.

In iis igitur sectionibus conicis, quarum excentricitas ab unitate parum differt, i. e. in ellipsis et hyperbolis, quae ad parabolam proxime accedunt, methodi supra expositae tum pro determinatione anomaliae verae e tempore, tum pro determinatione temporis ex anomalia vera\*), omnem quae desiderari posset praecisionem non patiuntur: quin adeo errores inevitabiles, crescentes dum orbita magis ad parabolae similitudinem vergit, tandem omnes limites egredierentur. Tabulae maiores ad plures quam septem figuras constructae hanc incertitudinem diminuerent quidem, sed non tollerent, nec impedirent, quominus omnes limites superaret, simulac orbita ad parabolam nimis prope accederet. Praeterea methodi supra traditae in hoc casu satis molestae fiunt, quoniam pars earum indirecta tentamina saepius repetita requirit: cuius incommodi taedium vel gravius est, si tabulis maioribus operamur. Haud sane igitur superfluum erit, methodum peculiarem excolere, per quam in hoc casu incertitudinem illam evitare, soloque tabulam vulgarium adminiculo praecisionem sufficientem assequi liceat.

34.

Methodus vulgaris, per quam istis incommodis remedium afferri solet, sequentibus principiis imititur. Respondeat in ellipsi vel hyperbola, cuius excentricitas  $e$ , semiparameter  $p$  adeoque distantia in perihelio  $= \frac{p}{1+e} = q$ , tempori post perihelium  $t$  anomalia vera  $v$ ; respondeat porro eidem tempori in parabola, cuius semiparameter  $= 2q$ , sive distantia in perihelio  $= q$ , anomalia vera  $w$ , massa  $\mu$  vel utrumque neglecta vel utrumque aequali supposita. Tunc patet haberi

$$\int \frac{p p dv}{(1+e \cos v)^3} : \int \frac{q q dw}{(1+\cos w)^3} = \sqrt{p} : \sqrt{2q}$$

integralibus a  $v = 0$  et  $w = 0$  incipientibus, sive

$$\int \frac{(1+e)^3 dv}{(1+e \cos v)^3 \sqrt{2}} = \int \frac{2 dw}{(1+\cos w)^3}$$

\*) Quoniam tempus implicat factorem  $a^3$  vel  $b^3$ , error in  $M$  vel  $N$  commissus eo magis augeatur quo maior fuerit  $a = \frac{p}{1-e}$ , vel  $b = \frac{p}{e-1}$ .

Designando  $\frac{1-e}{1+e}$  per  $a$ ,  $\tan \frac{1}{2} v$  per  $\theta$ , integrale prius invenitur

$$= \sqrt{(1+a) \cdot (\theta + \frac{1}{4} \theta^3 (1-2a) - \frac{1}{8} \theta^5 (2a-3a^2) + \frac{1}{16} \theta^7 (3a^2-4a^3) - \text{etc.})}$$

posterius  $= \tan \frac{1}{2} w + \frac{1}{4} \tan^3 \frac{1}{2} w$ . Ex hac aequatione facile est determinare  $w$  per  $a$  et  $v$ , atque  $v$  per  $a$  et  $w$ , adiumento serierum infinitarum: pro  $a$  si magis placet introduci potest  $1-e = \frac{2a}{1+a} = \hat{e}$ . Quum manifesto pro  $a = 0$  vel  $\hat{e} = 0$  fiat  $v = w$ , hae series sequentem formam habebunt:

$$\begin{aligned} w &= v + \hat{e} v' + \hat{e}^2 v'' + \hat{e}^3 v''' + \text{etc.} \\ v &= w + \hat{e} w' + \hat{e}^2 w'' + \hat{e}^3 w''' + \text{etc.} \end{aligned}$$

ubi  $v'$ ,  $v''$ ,  $v'''$  etc. erunt functiones ipsius  $v$ , atque  $w'$ ,  $w''$ ,  $w'''$  etc. functiones ipsius  $w$ . Quoties  $\hat{e}$  est quantitas perparva, hae series celeriter convergent, paucique termini sufficient ad determinandum  $w$  ex  $v$ , vel  $v$  ex  $w$ . Ex  $w$  invenitur  $t$ , vel  $w$  ex  $t$  eo quem supra pro motu parabolico explicavimus modo.

35.

Expressiones analyticas trium coefficientium primorum seriei secundae  $w'$ ,  $w''$ ,  $w'''$  BESSEL noster evolvit, simulque pro valoribus numericis duorum primorum  $w'$ ,  $w''$  tabulam ad singulos argumenti  $w$  gradus constructam addidit (vox ZACH *Monatliche Correspondenz*, vol. XII. p. 197). Pro coefficiente primo  $w'$  tabula iam ante habebatur a SIMPSON computata, quae operi clar. OLBERS supra laudato annexa est. In plerisque casibus haec methodo adiumento tabulae Besselianae anomaliam veram e tempore praecisione sufficiente determinare licet: quod adhuc desiderandum relinquitur, ad haecce fere momenta reducitur:

I. In problemate inverso, temporis puta ex anomalia vera determinatione ad methodum quasi indirectam confugere atque  $w$  ex  $v$  tentando derivare oportet. Cui incommodo ut obveneretur, series prior eodem modo tractata esse debet ac secunda: et quum facile perspicitur,  $-v'$  esse eandem functionem ipsius  $v$ , qualis  $w'$  est ipsius  $w$ , ita ut tabula pro  $w'$  signo tantum mutato pro  $v'$  inservire possit, nihil iam requireretur nisi tabula pro  $v''$ , quo utrumque problema aequali praecisione solvere liceat.

II. Interdum utique occurrere possunt casus, ubi excentricitas ab unitate parum quidem differt, ita ut methodi generales supra expositae praecisionem haud sufficientem dare videantur, nimis tamen etiamnum, quam ut in methodo pe-



culiari modo adumbrata effectum potestatis tertiae ipsius  $\delta$  altiorumque tuto continere liceat. In motu imprimis hyperbolico eiusmodi casus sunt possibiles, ubi, sive illas methodis adeptes sive hanc, errorem plurium secundorum evitare non possis, siquidem tabulis vulgaribus tantum ad septem figuras constructis utaris. Etiam si vero huiusmodi casus in praxi raro occurrant, aliquid certe deesse videri posset, si in *omnibus* casibus anomaliam veram intra  $0^{\circ}1$  aut saltem  $0^{\circ}2$  determinare non liceret, nisi tabulae maiores consulerentur, quas tamen ad libros rariores referendas esse constat. Haud igitur prorsus superfluum visum iri speramus expositionem methodi peculiaris, qua iamdudum usi sumus, quaeque eo etiam nomine se commendabit, quod ad excentricitates ab unitate parum diversas haud limitata est, sed hocce saltem respectu applicationem generalem patitur.

## 36.

Antequam hanc methodum exponere aggrediamur, observare conveniet, incertitudinem methodorum generalium supra traditarum in orbitis ad parabolae similitudinem vergentibus sponte desinere, simulac  $E$  vel  $F$  ad magnitudinem considerabilem increverint, quod quidem in magnis demum a Sole distantis fiet. Quod ut ostendamus, errorem maximum in ellipsi possibilem, quem in art. 32. IV. invenimus  $\frac{3\omega e a \sin v}{L P}$ . 206265° ita exhibemus  $\frac{3\omega e \sqrt{1-e^2} \sin E}{L(1-e \cos E)^3}$ . 206265°, unde sponte patet, errorem arcus semper limitibus circumscriptum esse, simulac  $E$  valorem considerabilem acquisiverit, sive simulac  $\cos E$  ab unitate magis recesserit, quantumvis magna sit excentricitas. Quod adhuc luculentius apparebit per tabulam sequentem, in qua valorem numericum maximum istius formulae pro quibusdam valoribus determinatis computavimus (pro septem figuris decimalibus):

|                |                      |
|----------------|----------------------|
| $E = 10^\circ$ | error maximus = 3,04 |
| 20             | 0,76                 |
| 30             | 0,34                 |
| 40             | 0,19                 |
| 50             | 0,12                 |
| 60             | 0,08                 |

Simili modo res se habet in hyperbola, ut statim apparet, si expressio in art. 32. VII. cruta sub hanc formam ponitur  $\frac{\omega \cos F (\cos F + 3 e \sin F) \sqrt{(e^2 - 1)}}{\lambda (e - \cos F)^3}$  206265°. Valores

maximos huius expressionis pro quibusdam valoribus determinatis ipsius  $F$  tabula sequens exhibet:

| $F$        | $u$   |       | error maximus |
|------------|-------|-------|---------------|
| $10^\circ$ | 1,192 | 0,839 | 8,66          |
| 20         | 1,428 | 0,700 | 1,38          |
| 30         | 1,732 | 0,577 | 0,47          |
| 40         | 2,144 | 0,466 | 0,22          |
| 50         | 2,747 | 0,364 | 0,11          |
| 60         | 3,732 | 0,268 | 0,06          |
| 70         | 5,671 | 0,176 | 0,02          |

Quoties itaque  $E$  vel  $F$  ultra  $40^\circ$  vel  $50^\circ$  egreditur (qui tamen casus in orbitis a parabola parum discrepantibus haud facile occurret, quin corpora coelestia in talibus orbitis incedentia in tantis a Sole distantis oculis nostris plerumque se subducant), nulla aderit ratio, cur methodum generalem deseramus. Ceterum in tali casu etiam series de quibus in art. 34. egimus nimis lente convergent: neuti-quam igitur pro defectu methodi nunc explicandae haberi potest, quod iis imprimis casibus adaptata est, ubi  $E$  vel  $F$  ultra valores modicos nondum excrevit.

## 37.

Resumamus in motu elliptico aequationem inter anomaliam excentricam et tempus

$$E - e \sin E = \frac{kt\sqrt{1+e}}{a^{\frac{3}{2}}}$$

ubi  $E$  in partibus radii expressam supponimus. Factorem  $\sqrt{1+e}$  abhinc omitemus; si unquam casus occurreret, ubi eius rationem habere in potestate operaeque pretium esset, signum  $t$  non tempus ipsum post perihelium, sed hoc tempus per  $\sqrt{1+e}$  multiplicatum exprimere deberet. Designamus porro per  $q$  distantiam in perihelio, et pro  $E$  et  $\sin E$  introducimus quantitates  $E - \sin E$  et  $E - \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}(E - \sin E) = \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}E + \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}\sin E$ : rationem cur has potissimum eligamus lector attentus ex sequentibus sponte deprehendet. Hoc modo aequatio nostra formam sequentem induit:

$$(1-e)(\frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}E + \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}\sin E) + (\frac{1}{q^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{q^{\frac{3}{2}}}e)(E - \sin E) = kt\left(\frac{1-e}{q}\right)^{\frac{3}{2}}$$



Quatenus  $E$  ut quantitas parva ordinis primi spectatur, erit  $\frac{1}{2}E + \frac{1}{24}E^3 + \frac{1}{240}E^5 + \dots$  etc. quantitas ordinis primi, contra  $E - \sin E = \frac{1}{6}E^3 - \frac{1}{120}E^5 + \frac{1}{3600}E^7 - \dots$  etc. quantitas ordinis tertii. Statuendo itaque

$$\frac{\frac{1}{6}(E - \sin E)}{\frac{1}{2}E + \frac{1}{24}E^3 + \frac{1}{240}E^5} = 4A, \quad \frac{\frac{1}{2}E + \frac{1}{24}E^3 + \frac{1}{240}E^5}{2\sqrt{A}} = B$$

erit  $4A = E^2 - \frac{1}{24}E^4 - \frac{1}{240}E^6 - \dots$  etc. quantitas ordinis secundi, atque  $B = 1 + \frac{1}{240}E^4 - \dots$  etc. ab unitate quantitate quarti ordinis diversa. Aequatio nostra autem hinc fit

$$B(2(1-e)A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e(1+9e)A^{\frac{3}{2}}) = kt\left(\frac{1-e}{q}\right)^{\frac{3}{2}} \dots \dots \dots [1]$$

Per tabulas vulgares trigonometricas  $\frac{1}{2}E + \frac{1}{24}E^3 + \frac{1}{240}E^5$  quidam praecisione sufficiente calculari potest, non tamen  $E - \sin E$ , quoties  $E$  est angulus parvus: haec igitur via quantitates  $A$  et  $B$  satis exacte determinare non liceret. Huic autem difficultati remedium afferret tabula peculiaris, ex qua cum argumento  $E$  aut ipsum  $B$  aut logarithmum ipsius  $B$  excerpere possemus: subsidia ad constructionem talis tabulae necessaria cuique in analysi vel mediocriter versato facile se offerent. Adiuvento aequationis

$$\frac{\frac{1}{2}E + \sin E}{2\sqrt{A}} = \sqrt{A}$$

etiam  $\sqrt{A}$ , atque hinc  $t$  per formulam [1] omni quae desiderari potest praecisione determinare liceret.

Ecce specimen talis tabulae, quod saltem lentam augmentationem ipsius  $\log B$  manifestabit: superfluum esset, hanc tabulam maiori extensione elaborare, infra enim tabulas formae multo commodioris descripturi sumus:

| $E$ | $\log B$  | $E$ | $\log B$  |
|-----|-----------|-----|-----------|
| 0°  | 0,0000000 | 35° | 0,0000645 |
| 5   | 000       | 40  | 1099      |
| 10  | 004       | 45  | 1758      |
| 15  | 022       | 50  | 2675      |
| 20  | 069       | 55  | 3910      |
| 25  | 168       | 60  | 5526      |
| 30  | 349       |     |           |

38.

Haud inutile erit, ea quae in art. praec. sunt tradita exemplo illustrare. Proposita sit anomalia vera  $= 100^\circ$ , excentricitas  $= 0,96764567$ ,  $\log q = 9,7656500$ . Ecce iam calculum pro  $E$ ,  $B$ ,  $A$  et  $t$ :

$$\begin{aligned} \log \tan \frac{1}{2}E & \dots 0,0761865 \\ \log \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} & \dots 9,1079927 \\ \log \tan \frac{1}{2}E & \dots 9,1841792, \text{ unde } \frac{1}{2}E = 84^\circ 19' 32'', \text{ atque } E = 17^\circ 22' 38'' 64. \end{aligned}$$

Huic valori ipsius  $E$  respondet  $\log B = 0,0000040$ ; porro invenitur in partibus radii  $E = 0,3032928$ ,  $\sin E = 0,2986643$ , unde  $\frac{1}{2}E + \frac{1}{24}E^3 + \frac{1}{240}E^5 = 0,1514159$ , cuius logarithmus  $= 9,1801689$ , adeoque  $\log A^{\frac{1}{2}} = 9,1801649$ . Hinc deducitur per formulam [1] art. praec.

$$\begin{aligned} \log \frac{2Bq^{\frac{1}{2}}}{k\sqrt{1-e}} & \dots 2,4589614 & \log \frac{2B(1+9e)}{15k} \left(\frac{q}{1-e}\right)^{\frac{3}{2}} & \dots 3,7601038 \\ \log A^{\frac{1}{2}} & \dots 9,1801649 & \log A^{\frac{1}{2}} & \dots 7,5404947 \\ \log 43,56386 & = 1,6391263 & \log 19,98014 & = 1,3005985 \\ 19,98014 & & & \\ 63,54400 & = t & & \end{aligned}$$

Tractando idem exemplum secundum methodum vulgarem, invenitur  $e \sin E$  in secundis  $= 59610'' 79 = 16^\circ 33' 30'' 79$ , unde anomalia media  $= 49^\circ 7' 85'' = 2947'' 85$ . Hinc et ex  $\log k \left(\frac{1-e}{q}\right)^{\frac{3}{2}} = 1,6664302$  derivatur  $t = 63,54410$ . Differentia, quae hic tantum est  $\frac{1}{1000000}$  pars unius dici, conspirantibus erroribus facile triplo vel quadruplo maior evadere potuisset.

Ceterum patet, solo adiuvento talis tabulae pro  $\log B$  etiam problema inversum omni praecisione solvi posse, determinando  $E$  per tentamina repetita, ita ut valor ipsius  $t$  inde calculatus cum proposito congruat. Sed haec operatio satis molesta foret: quamobrem iam ostendimus, quomodo tabulam auxiliarem multo commodius adornare, tentamina vaga omnino evitare, totumque calculum ad algorithmum maxime concinnum atque expeditum reducere liceat, qui nihil desiderandum relinquere videtur.

39.

Dimidiam fere partem laboris quem illa tentamina requirerent abscindi posse statim obvium est, si tabula ita adornata habeatur, ex qua  $\log B$  immediate

argumento  $A$  desumere liceat. Tres tunc superessent operationes; prima indirecta, puta determinatio ipsius  $A$ , ut aequationi [1] art. 37. satisfiat; secunda, determinatio ipsius  $E$  ex  $A$  et  $B$ , quae fit directe vel per aequationem  $E = 2B(A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}A^{\frac{3}{2}})$ , vel per hanc  $\sin E = 2B(A^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4}A^{\frac{3}{2}})$ ; tertia, determinatio ipsius  $v$  ex  $E$  per aequ. VII. art. 8. Operationem primam ad algorithmum expeditum et a tentaminibus vagis liberum reducemus; secundam et tertiam vero in unicum contrahemus, tabulae nostrae quantitatem novam  $C$  inserendo, quo pacto ipsa  $E$  omnino opus non habebimus, simulque pro radio vectore formulam elegantem et commodam nanciscemur. Quae singula ordine suo iam persequemur.

Primo aequationem [1] ita transformabimus, ut tabulam BARKERIANAM ad eius solutionem adhibere liceat. Statuamus ad hunc finem  $A^{\frac{1}{2}} = \tan \frac{1}{2} w \sqrt{\frac{1-\sin E}{1+\sin E}}$ , unde fit  $75 \tan \frac{1}{2} w + 25 \tan \frac{1}{2} w^3 = \frac{75k\sqrt{1+\frac{1}{2}E}}{2Bq^{\frac{1}{2}}} = \frac{2t}{B}$  designando constantem  $\frac{75k\sqrt{1+\frac{1}{2}E}}{2q^{\frac{1}{2}}}$  per  $a$ . Si itaque  $B$  esset cognita,  $w$  illico e tabula BARKERIANA desumi posset, ubi est anomalia vera, cui respondet motus medius  $\frac{2t}{B}$ ; ex  $w$  derivabitur  $A$  per formulam  $A = \ell \tan \frac{1}{2} w^2$ , designando constantem  $\frac{5-5\epsilon}{1+\epsilon}$  per  $\ell$ . Iam etsi  $B$  demum ex  $A$  per tabulam nostram auxiliarem innotescat, tamen propter perparvam ipsius ab unitate differentiam praevidere licet,  $w$  et  $A$  levi tantum errore affectas provenire posse, si ab initio divisor  $B$  omnino negligatur. Determinabimus itaque primo, levi tantum calamo,  $w$  et  $A$ , statuendo  $B = 1$ ; cum valore approximato ipsius  $A$  e tabula nostra auxiliari inveniemus ipsam  $B$ , cum qua eundem calculum exactius repetemus; plerumque respondebit valori sic correcto ipsius  $A$  prorsus idem valor ipsius  $B$ , qui ex approximato inventus erat, ita ut nova operationis repetitio superflua sit, talibus casibus exceptis, ubi valor ipsius  $E$  iam valde considerabilis fuerit. Ceterum vix opus erit monere, si forte iam ab initio valor ipsius  $B$  quomodocumque approximatus aliunde innotuerit (quod semper fiet, quoties e pluribus locis haud multum ab invicem distantibus computandis, unus aut alter iam sunt absoluti) praestare, hoc statim in prima approximatione uti: hoc modo calculator scitus saepissime ne una quidem calculi repetitione opus habebit. Hanc celerrimam approximationem inde assecuti sumus, quod  $B$  ab 1 differentia ordinis quarti tantum distat, in coefficientem perparvam numericum insuper multiplicata, quod commodum praeparatum esse iam perspicitur per introductionem quantitatum  $E - \sin E$ ,  $\frac{3}{4}E + \frac{1}{4}\sin E$  loco ipsarum  $E$ ,  $\sin E$ .

40.

Quum ad operationem tertiam, puta determinationem anomaliae verae, angulus  $E$  ipse non requiratur, sed tantum  $\tan \frac{1}{2} E$  sive potius  $\log \tan \frac{1}{2} E$ , operatio illa cum secunda commodè iungi posset, si tabula nostra immediate suppeditaret logarithmum quantitatis  $\frac{\tan \frac{1}{2} E}{\sqrt{A}}$ , quae ab 1 quantitate ordinis secundi differt. Maluimus tamen tabulam nostram modo aliquantulum diverso adornare, quo extensione minuta nihilominus interpolationem multo commodiorem assecuti sumus. Scribendo brevitate gratia  $T$  pro  $\tan \frac{1}{2} E^2$ , valor ipsius  $A$  in art. 37. traditus  $\frac{15(E - \sin E)}{8B + \sin E}$  facile transmutatur in

$$A = \frac{T - \frac{1}{2}T^2 + \frac{1}{24}T^4 - \frac{1}{240}T^6 + \frac{1}{2520}T^8 - \text{etc.}}{1 - \frac{1}{2}T + \frac{1}{24}T^2 - \frac{1}{240}T^3 + \frac{1}{2520}T^4 - \text{etc.}}$$

ubi lex progressionis obvia est. Hinc deducitur per conversionem serierum

$$\frac{A}{T} = 1 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{24}A^2 + \frac{1}{240}A^3 + \frac{1}{2520}A^4 + \frac{1}{2520}A^5 + \frac{1}{2520}A^6 + \text{etc.}$$

Statuendo igitur  $\frac{A}{T} = 1 - \frac{1}{2}A + C$ , erit  $C$  quantitas ordinis quarti, qua in tabulam nostram recepta, ab  $A$  protinus transire possumus ad  $v$  per formulam

$$\tan \frac{1}{2} v = \sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}} \sqrt{\frac{A}{1-\frac{1}{2}A+C}} = \frac{\gamma \tan \frac{1}{2} w}{\sqrt{1-\frac{1}{2}A+C}}$$

designando per  $\gamma$  constantem  $\sqrt{\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}}$ . Hoc modo simul lucramur calculum percommodum pro radio vectore. Fit enim (art. 8. VI.)

$$r = \frac{q \cos \frac{1}{2} E^2}{\cos \frac{1}{2} v^2} = \frac{q}{(1+T) \cos \frac{1}{2} v^2} = \frac{(1-\frac{1}{2}A+C)q}{(1+\frac{1}{2}A+C) \cos \frac{1}{2} v^2}$$

41.

Nihil iam superest, nisi ut etiam problema inversum, puta determinationem temporis ex anomalia vera, ad algorithmum expeditiorem reducamus: ad hunc finem tabulae nostrae columnam novam pro  $T$  adiecinus. Computabitur itaque primo  $T$  ex  $v$  per formulam  $T = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \tan \frac{1}{2} v^2$ ; dein ex tabula nostra argumento  $T$  desumetur  $A$  et  $\log B$ , sive (quod exactius, imo etiam commodius est)  $C$  et  $\log B$ , atque hinc  $A$  per formulam  $A = \frac{(1+C)T}{1+\frac{1}{2}T}$ ; tandem ex  $A$  et  $B$  eruatur  $t$  per formulam [1] art. 37. Quodsi hic quoque tabulam BARKERIANAM in usum vocare placet, quod tamen in hoc problemate inverso calculum nimis sublevar, non opus est ad  $A$  respicere, sed statim habetur

$$\tan \frac{1}{2} w = \tan \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1+C}{\gamma(1+\frac{1}{2}T)}}$$



atque hinc tempus  $t$ , multiplicando motum medium anomaliae verae  $w$  in tabula BARKERIANA respondentem per  $\frac{B}{a}$ .

42.

Tabulam, qualem hactenus descripsimus, extensione idonea construximus, operique huic adiecimus (Tab. I.). Ad ellipsin sola pars prior spectat; partem alteram, quae motum hyperbolicum complectitur, infra explicabimus. Argumentum tabulae, quod est quantitas  $A$ , per singulas partes millesimas a 0 usque ad 0,300 progreditur; sequuntur  $\log B$  et  $C$ , quas quantitates in partibus 10000000<sup>mis</sup>, sive ad septem figuras decimales expressas subintelligere oportet cifrae enim primae, figuris significativis praecedentes, suppressae sunt; columna denique quarta exhibet quantitatem  $T$  primo ad 5 dein ad 6 figuras computatam, quae praecisio abunde sufficit, quum haec columna ad eum tantummodo usum requiratur, ut argumento  $T$  valores respondententes ipsius  $\log B$  et  $C$  habeantur, quoties ad normam art. praec.  $t$  ex  $v$  determinare lubet. Quum problema inversum, quod longe frequentioris usus est, puta determinatio ipsius  $v$  et  $r$  ex  $t$ , omnino absque quantitate  $T$  subsidio absolvatur, quantitatem  $A$  pro argumento tabulae nostrae eligere maluimus quam  $T$ , quae alioquin argumentum aequae fere idoneum fuisset, imo tabulae constructionem aliquantulum facilitasset. Haud superfluum erit monere, omnes tabulae numeros ad decem figuras ab origine calculatos fuisse, septemque adeo figuris, quas hic damus, ubique tuto confidere licere; methodis autem analyticis ad hunc laborem in usum vocatis hoc loco immorari non possumus, quarum explicatione copiosa nimium ab instituto nostro distraheremur. Ceterum tabulae extensio omnibus casibus, ubi methodum hactenus expositam sequi prodest, abunde sufficit, quum ultra limitem  $A=0,3$ , cui respondet  $T=0,392374$  sive  $E=64^{\circ}7'$ , methodis artificialibus commode ut supra ostensum est abstinere liceat.

43.

Ad maiorem disquisitionum praecedentium illustrationem exemplum calculi completi pro anomalia vera et radio vectore ex tempore adiecimus, ad quem finem numeros art. 38. resumemus. Statuimus itaque  $e = 0,96764567$ ,  $\log q = 9,7656500$ ,  $t = 63,54400$ , unde primo deducimus constantes  $\log a = 0,3052357$ ,  $\log 6 = 8,2217364$ ,  $\log 7 = 0,0028755$ .

Hinc fit  $\log at = 2,1083102$ , cui respondet in tabula BARKERI valor approximatus ipsius  $w = 99^{\circ}6'$ , unde derivatur  $A = 0,022923$ , et ex tabula nostra  $\log B = 0,0000040$ . Hinc argumentum correctum quo tabulam BARKERI intrare oportet fit  $\log \frac{ae}{B} = 2,1083062$ , cui respondet  $w = 99^{\circ}6'13''14$ ; dein calculus ulterior ita se habet:

|                                             |                |                                                             |                     |
|---------------------------------------------|----------------|-------------------------------------------------------------|---------------------|
| $\log \tan \frac{1}{2} w^{\circ}$ . . . . . | 0,1385934      | $\log \tan \frac{1}{2} w$ . . . . .                         | 0,0692967           |
| $\log 6$ . . . . .                          | 8,2217364      | $\log 7$ . . . . .                                          | 0,0028755           |
| $\log A$ . . . . .                          | 8,3603298      | $\frac{1}{2} C \cdot \log(1 - \frac{1}{2} A + C)$ . . . . . | 0,0040143           |
| $A$ . . . . .                               | $= 0,02292608$ | $\log \tan \frac{1}{2} v$ . . . . .                         | 0,0761865           |
| hinc $\log B$ perinde ut ante;              |                | $\frac{1}{2} v$ . . . . .                                   | $= 50^{\circ}0'0''$ |
| $C$ . . . . .                               | $= 0,0000242$  | $v$ . . . . .                                               | $= 100\ 0\ 0$       |
| $1 - \frac{1}{2} A + C$ . . . . .           | $= 0,9816833$  | $\log q$ . . . . .                                          | 9,7656500           |
| $1 + \frac{1}{2} A + C$ . . . . .           | $= 1,0046094$  | 2 Comp. $\log \cos \frac{1}{2} v$ . . . . .                 | 0,3838650           |
|                                             |                | $\log(1 - \frac{1}{2} A + C)$ . . . . .                     | 9,9919714           |
|                                             |                | $C \cdot \log(1 + \frac{1}{2} A + C)$ . . . . .             | 9,9980028           |
|                                             |                | $\log r$ . . . . .                                          | 0,1394892           |

Si in hoc calculo factor  $B$  omnino esset neglectus, anomalia vera erroriscullo 0'1 tantum (in excessu) prodiisset affecta.

44.

Motum hyperbolicum eo brevius absolvere licebit, quoniam methodo ei quam hactenus pro motu elliptico exposuimus prorsus analogo tractandus est. Aequationem inter tempus  $t$  atque quantitatem auxiliarem  $u$  forma sequente exhibemus:

$$(e-1)\left(\frac{1}{2}e\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{1}{2}e\log u\right)+\left(\frac{1}{2}e+e^2\right)\left(\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u\right)=kt\left(\frac{e-1}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ubi logarithmi sunt hyperbolici, atque  $\frac{1}{2}e\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{1}{2}e\log u$  quantitas ordinis primi,  $\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u$  quantitas ordinis tertii, simulac  $\log u$  tamquam quantitas parva ordinis primi spectatur. Statuendo itaque

$$\frac{e\left(\frac{1}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)-\log u\right)}{\frac{1}{2}e\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{1}{2}e\log u}=4A, \quad \frac{\frac{1}{2}e\left(u-\frac{1}{u}\right)+\frac{1}{2}e\log u}{2\sqrt{A}}=B$$

erit  $A$  quantitas ordinis secundi,  $B$  autem ab unitate differentia ordinis quarti discrepabit. Aequatio nostra tunc formam sequentem induet:

$$B(2(e-1)A^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}e(1+9e)A^{\frac{3}{2}}) = kt\left(\frac{e-1}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \dots \dots \dots [2]$$

quae aequationi [1] art. 37. prorsus analogia est. Statuendo porro  $\left(\frac{u-1}{u+1}\right)^{\frac{1}{2}} = T$ , erit  $T$  ordinis secundi, et per methodum serierum infinitarum invenietur

$$\frac{A}{T} = 1 + \frac{1}{2}A + \frac{1}{8}eA^2 - \frac{1}{24}eA^3 + \frac{1}{80}e^2A^4 - \frac{1}{128}e^3A^5 + \frac{1}{256}e^4A^6 + \text{etc.}$$

Quamobrem ponendo  $\frac{A}{T} = 1 + \frac{1}{2}A + C$ , erit  $C$  quantitas ordinis quarti, atque  $A = \frac{(1+C)T}{1-\frac{1}{2}T}$ . Denique pro radio vectore ex aequ. VII. art. 21. facile sequitur

$$r = \frac{q}{(1-T)\cos\frac{1}{2}v} = \frac{(1+\frac{1}{2}A+C)q}{(1-\frac{1}{2}A+C)\cos\frac{1}{2}v}$$

45.

Pars posterior tabulae primae operi huic annexae ad motum hyperbolicum spectat, ut iam supra monuimus, et pro argumento  $A$  (utriusque tabulae parti communi) logarithmum ipsius  $B$  atque quantitatem  $C$  ad septem figuras decimales (cifris praecedentibus omissis), quantitatem  $T$  vero ad quinque dein ad sex figuras sistit. Extensa est haec pars, perinde ut prior, usque ad  $A = 0,300$ , cui respondet  $T = 0,241207$ ,  $u = 2,930$  vel  $= 0,341$ ,  $F = \pm 52'19''$ ; ulterio- extensio superflua fuisset (art. 36.).

Ecce iam ordinem calculi tum pro determinatione temporis ex anomalia vera tum pro determinatione anomaliae verae ex tempore. In problemate priori habebitur  $T$  per formulam  $T = \frac{e-1}{e+1} \tan \frac{1}{2}v$ ; ex  $T$  tabula nostra dabit  $\log B$  et  $C$ , unde erit  $A = \frac{(1+C)T}{1-\frac{1}{2}T}$ ; hinc tandem per formulam [2] art. praec. invenietur  $t$ . In problemate posteriori computabuntur primo logarithmi constantium

$$\alpha = \frac{75k\sqrt{(1+\frac{1}{2}e)}}{2q^{\frac{1}{2}}}$$

$$\beta = \frac{5e-5}{1+9e}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{5e+5}{1+9e}}$$

Tunc determinabitur  $A$  ex  $t$  prorsus eodem modo ut in motu elliptico, ita scilicet ut motui medio  $\frac{2t}{B}$  in tabula BARKERI respondeat anomalia vera  $v$  atque fiat  $A = \beta \tan \frac{1}{2}v$ ; eruetur scilicet primo valor approximatus ipsius  $A$  ne-

glecto vel si subsidia adsunt aestimato factore  $B$ ; hinc tabula nostra suppeditabit valorem approximatum ipsius  $B$ , cum quo operatio repetetur; valor novus ipsius  $B$  hoc modo prodians vix unquam correctionem sensibilem passus, neque adeo nova calculi iteratio necessaria erit. Correcto valore ipsius  $A$  e tabula desumetur  $C$ , quo facto habebitur

$$\tan \frac{1}{2}v = \frac{\gamma \tan \frac{1}{2}u}{\sqrt{(1+\frac{1}{2}A+C)}}, \quad r = \frac{(1+\frac{1}{2}A+C)q}{(1-\frac{1}{2}A+C)\cos\frac{1}{2}v}$$

Patet hinc, inter formulas pro motu elliptico et hyperbolico nullam omnino differentiam reperiri, si modo  $\beta$ ,  $A$  et  $T$  in motu hyperbolico tanquam quantitates negativae tractemus.

46.

Motum hyperbolicum quoque aliquot exemplis illustravisse haud inutile erit, ad quem finem numeros artt. 23. 26. resumemus.

I. Data sunt  $e = 1,2618820$ ,  $\log q = 0,0201657$ ,  $v = 18^{\circ}51'0''$ ; quaeritur  $t$ . Habemus

|                                                |              |                                                                      |             |
|------------------------------------------------|--------------|----------------------------------------------------------------------|-------------|
| $2 \log \tan \frac{1}{2}v$                     | 8,4402018    | $\log T$                                                             | 7,5038375   |
| $\log \frac{e-1}{e+1}$                         | 9,0636357    | $\log(1+C)$                                                          | 0,0000002   |
| $\log T$                                       | 7,5038375    | $C \log(1-\frac{1}{2}T)$                                             | 0,0011099   |
| $T$                                            | = 0,00319034 | $\log A$                                                             | 7,5049476   |
| $\log B$                                       | = 0,0000001  |                                                                      |             |
| $C$                                            | = 0,0000005  |                                                                      |             |
| $\log \frac{2Bq^{\frac{1}{2}}}{k\sqrt{(e-1)}}$ | 2,3866444    | $\log \frac{2B(1+9e)}{15k} \left(\frac{q}{e-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ | 2,8843582   |
| $\log A^{\frac{1}{2}}$                         | 8,7524738    | $\log A^{\frac{1}{2}}$                                               | 6,2574214   |
| $\log 13,77584$                                | = 1,1391182  | $\log 0,138605$                                                      | = 9,1417796 |
| 0,13861                                        |              |                                                                      |             |
| 13,91445                                       | = $t$        |                                                                      |             |

II. Manentibus  $e$  et  $q$  ut ante, datur  $t = 65,41236$ , quaeruntur  $v$  et  $r$ . Invenimus logarithmos constantium

$$\log \alpha = 9,9758345$$

$$\log \beta = 9,0251649$$

$$\log \gamma = 9,9807646$$



Porro prodit  $\log at = 1,7914943$ , unde per tabulam BARKERI valor approximatus ipsius  $w = 70^{\circ}31'44''$ , atque hinc  $A = 0,052983$ . Huic  $A$  in tabula nostra respondet  $\log B = 0,0000207$ ; unde  $\log \frac{a}{B} = 1,7914736$ , valor correctus ipsius  $w = 70^{\circ}31'36''.86$ . Calculi operationes reliquae ita se habent:

|                                       |                |                                                |                        |
|---------------------------------------|----------------|------------------------------------------------|------------------------|
| $2 \log \tan \frac{1}{2} w$ . . . . . | 9,6989398      | $\log \tan \frac{1}{2} w$ . . . . .            | 9,8494699              |
| $\log \frac{a}{B}$ . . . . .          | 9,0251649      | $\log \gamma$ . . . . .                        | 9,9807646              |
| $\log A$ . . . . .                    | 8,7241047      | $\frac{1}{2} C. \log(1 + \frac{1}{2} A + C)$ . | 9,9909602              |
| $A$ . . . . .                         | $= 0,05297911$ | $\log \tan \frac{1}{2} v$ . . . . .            | 9,8211947              |
| $\log B$ ut ante                      |                | $\frac{1}{2} v =$                              | $33^{\circ}31'30''.02$ |
| $C$ . . . . .                         | $= 0,0001252$  | $v =$                                          | $67^{\circ}3'0''.04$   |
| $1 + \frac{1}{2} A + C$ . . . . .     | $= 1,0425085$  | $\log q$ . . . . .                             | 0,0201657              |
| $1 - \frac{1}{2} A + C$ . . . . .     | $= 0,9895294$  | $2 C. \log \cos \frac{1}{2} v$ . . . . .       | 0,1580378              |
|                                       |                | $\log(1 + \frac{1}{2} A + C)$ . . . . .        | 0,0180796              |
|                                       |                | $C. \log(1 - \frac{1}{2} A + C)$ . . . . .     | 0,0045713              |
|                                       |                | $\log r$ . . . . .                             | 0,2008544              |

Quae supra (art. 26.) inveneramus  $v = 67^{\circ}2'59''.78$ ,  $\log r = 0,2008541$ , minus exacta sunt, proprieque evadere debuisset  $v = 67^{\circ}3'0''.00$ , quo valore supposito valor ipsius  $t$  per tabulas maiores fuerat computatus.

## SECTIO SECUNDA

*Relationes ad locum simplicem in spatio spectantes.*

47.

In Sectione prima de motu corporum coelestium in orbitis suis actum est, nulla situs, quem hae orbitae in spatio occupant, ratione habita. Ad hunc situm determinandum, quo relationem locorum corporis coelestis ad quaevis alia spatii puncta assignare liceat, manifesto requiritur tum situs plani in quo orbita iacet respectu cuiusdam plani cogniti (e. g. plani orbitae telluris, *eclipticae*), tum situs apsidum in illo plano. Quae quum commodissime ad trigonometriam sphaericam referantur, superficiem sphaericam radio arbitrario circa Solem ut centrum descriptam fingimus, in qua quodvis planum per Solem transiens circulum maximum, quaevis autem recta e Sole ducta punctum depinget. Planis aut rectis per Solem ipsum non transeuntibus plana rectasque parallelas per Solem ducimus, circulosque maximos et puncta in sphaerae superficie his respondentia etiam illa repraesentare concipimus: potest quoque sphaera radio ut vocant infinito magno descripta supponi, in qua plana rectaeque parallelae perinde repraesentantur.

Nisi itaque planum orbitae cum plano eclipticae coincidit, circuli maximi illis planis respondentes (quos etiam simpliciter orbitam et eclipticam vocabimus) duobus punctis se intersecant, quae *nodi* dicuntur; in nodorum altero corpus e Sole visum e regione australi per eclipticam in borealem transibit, in altero ex hac in illam revertet; nodus prior *ascendens*, posterior *descendens* appellatur. Nodorum situs in ecliptica per eorum distantiam ab aequinoctio vernali medio



(*longitudinem*) secundum ordinem signorum numeratam assignamus. Sit, in Fig. 1,  $\Omega$  nodus ascendens,  $A\Omega B$  pars eclipticae,  $C\Omega D$  pars orbitae; motus terrae et corporis coelestis fiant in directionibus ab  $A$  versus  $B$  et a  $C$  versus  $D$ , patetque angulum sphaericum, quem  $\Omega D$  facit cum  $\Omega B$ , a 0 usque ad  $180^\circ$  crescere posse, neque tamen ultra, quin  $\Omega$  nodus ascendens esse desinat: hunc angulum *inclinationem orbitae* ad eclipticam dicimus. Situ plani orbitae per longitudinem nodi atque inclinationem orbitae determinato, nihil aliud iam requiritur, nisi distantia perihelii a nodo ascendente, quam secundum ipsam directionem motus numeramus, adeoque negativam sive inter  $180^\circ$  et  $360^\circ$  assumimus, quoties perihelium ab ecliptica ad austrum situm est. Notentur adhuc expressiones sequentes. Longitudo cuiusvis puncti in circulo orbitae numeratur ab eo puncto, quod retrorsum a nodo ascendente in orbita tantundem distat, quantum aequinoctium vernalis ab eodem puncto retrorsum in ecliptica: hinc *longitudo perihelii* erit summa longitudinis nodi et distantiae perihelii a nodo; *longitudo vera corporis in orbita* autem summa anomaliae verae et longitudinis perihelii. Denique *longitudo media* vocatur summa anomaliae mediae et longitudinis perihelii: haec postrema expressio manifesto in orbitis ellipticis tantum locum habere potest.

## 48.

Ut igitur corporis coelestis locum in spatio pro quovis temporis momento assignare liceat, sequentia in orbita elliptica nota esse oportebit.

I. Longitudo media pro quodam temporis momento arbitrario, quod *epocha* vocatur: eodem nomine interdum ipsa quoque longitudo designatur. Plerumque pro epocha eligitur initium alicuius anni, scilicet meridies 1. Ianuarii in anno bissextili, sive meridies 31. Decembris anno communi praecedentis.

II. Motus medius inter certum temporis intervallum, e. g. in uno die solari medio, sive in diebus 365, 365½ aut 365¼.

III. Semiaxis maior, qui quidem omitti posset, quoties corporis massa aut nota est aut negligi potest, quum per motum medium iam detur (art. 7.): commoditatis tamen gratia uterque semper proferri solet.

IV. Excentricitas.

V. Longitudo perihelii.

VI. Longitudo nodi ascendentis.

VII. Inclination orbitae.

Haec septem momenta vocantur *elementa* motus corporis.

In parabola et hyperbola tempus transitus per perihelium elementi primi vice fungetur; pro II. tradentur quae in his sectionum conicarum generibus motui medio diurno analoga sunt (v. art. 19.; in motu hyperbolico quantitas  $kkb^{-1}$  art. 23.). In hyperbola elementa reliqua perinde retineri poterunt, in parabola vero, ubi axis maior infinitus atque excentricitas = 1, loco elementi III. et IV. sola distantia in perihelio proferetur.

## 49.

Secundum vulgarem loquendi morem inclinatio orbitae, quam nos a 0 usque ad  $180^\circ$  numeramus, ad  $90^\circ$  tantum extenditur, atque si angulus orbitae cum arcu  $\Omega B$  (Fig. 1) angulum rectum egreditur, angulus orbitae cum arcu  $\Omega A$  (qui est illius complementum ad  $180^\circ$  tanquam inclinatio orbitae spectatur; in tali tunc casu addere oportebit, motum esse *retrogradum* (veluti si in figura nostra  $E\Omega F$  partem orbitae repraesentat), ut a casu altero ubi motus *directus* dicitur distinguatur. Longitudo in orbita tunc ita numerari solet, ut in  $\Omega$  cum longitudine huius puncti in ecliptica conveniat, in directione  $\Omega F$  autem *decreseat*; punctum initiale itaque a quo longitudes contra ordinem motus numerantur in directione  $\Omega F$  tantundem a  $\Omega$  distat, quantum aequinoctium vernalis ab eodem  $\Omega$  in directione  $\Omega A$ . Quare in hoc casu longitudo perihelii erit longitudo nodi diminuta distantia perihelii a nodo. Hoc modo alteruter loquendi usus facile in alterum convertitur, nostrum autem ideo praetulimus, ut distinctione inter motum directum et retrogradum supersedere, et pro utroque semper formulas easdem adhibere possemus, quum usus vulgaris saepenumero praecepta duplicia requirat.

## 50.

Ratio simplicissima, puncti cuiusvis in superficie sphaerae coelestis situm respectu eclipticae determinandi, fit per ipsius distantiam ab ecliptica (*latitudinem*), atque distantiam puncti, ubi ecliptica a perpendiculari demisso secatur, ab aequinoctio (*longitudinem*). Latitudo, ab utraque eclipticae parte usque ad  $90^\circ$  numerata, in regione boreali ut positiva, in australi ut negativa spectatur. Respondeant corporis coelestis loco heliocentrico, i. e. projectioni rectae a Sole ad corpus ductae in sphaeram coelestem, longitudo  $\lambda$ , latitudo  $\ell$ ; sit porro  $u$  distantia loci helio-



centrici a nodo ascendente (quae *argumentum latitudinis* dicitur),  $i$  inclinatio orbitae,  $\Omega$  longitudo nodi ascendentis, habebunturque inter  $i, u, \ell, \lambda - \Omega$ , quae quantitates erunt partes trianguli sphaerici rectanguli, relationes sequentes, quas sine ulla restrictione valere facile evincitur:

- I.  $\tan(\lambda - \Omega) = \cos i \tan u$
- II.  $\tan \ell = \tan i \sin(\lambda - \Omega)$
- III.  $\sin \ell = \sin i \sin u$
- IV.  $\cos u = \cos \ell \cos(\lambda - \Omega)$

Quando  $i$  et  $u$  sunt quantitates datae,  $\lambda - \Omega$  inde per aequ. I. determinabitur, ac dein  $\ell$  per II. vel per III., siquidem  $\ell$  non nimis ad  $\pm 90^\circ$  appropinquat; formula IV. si placet ad calculi confirmationem adhiberi potest. Ceterum formulae I. et IV. docent,  $\lambda - \Omega$  et  $u$  semper in eodem quadrante iacere, quoties  $i$  est inter  $0$  et  $90^\circ$ ; contra  $\lambda - \Omega$  et  $360^\circ - u$  ad eundem quadrantem pertinebunt, quoties  $i$  est inter  $90^\circ$  et  $180^\circ$ , sive, secundum usum vulgarem, quoties motus est retrogradus: hinc ambiguitas, quam determinatio ipsius  $\lambda - \Omega$  per tangentem secundum formulam I. relinquit, sponte tollitur.

Formulae sequentes e praecedentium combinatione facile derivantur:

- V.  $\sin(u - \lambda + \Omega) = 2 \sin \frac{1}{2} i^2 \sin u \cos(\lambda - \Omega)$
- VI.  $\sin(u - \lambda + \Omega) = \tan \frac{1}{2} i \sin \ell \cos(\lambda - \Omega)$
- VII.  $\sin(u - \lambda + \Omega) = \tan \frac{1}{2} i \tan \ell \cos u$
- VIII.  $\sin(u + \lambda - \Omega) = 2 \cos \frac{1}{2} i^2 \sin u \cos(\lambda - \Omega)$
- IX.  $\sin(u + \lambda - \Omega) = \cotang \frac{1}{2} i \sin \ell \cos(\lambda - \Omega)$
- X.  $\sin(u + \lambda - \Omega) = \cotang \frac{1}{2} i \tan \ell \cos u$

Angulus  $u - \lambda + \Omega$ , quoties  $i$  est infra  $90^\circ$ , aut  $u + \lambda - \Omega$ , quoties  $i$  est ultra  $90^\circ$ , secundum usum vulgarem *reductio ad eclipticam* dicitur, est scilicet differentia inter longitudinem heliocentricam  $\lambda$  atque longitudinem in orbita quae secundum illum usum est  $\Omega \pm u$  (secundum nostrum  $\Omega + u$ ). Quoties inclinatio vel parva est vel a  $180^\circ$  parum diversa, ista reductio tamquam quantitas secundi ordinis spectari potest, et in hoc quidem casu praestabit,  $\ell$  primo per formulam III. ac dein  $\lambda$  per VII. aut X. computare, quo pacto praecisionem maiorem quam per formulam I. assequi licebit.

Demisso perpendiculo a loco corporis coelestis in spatio ad planum eclipti-

cae, distantia puncti intersectionis a Sole *distantia curtata* appellatur. Quam per  $r'$ , radium vectorem autem per  $r$  designando, habebimus

$$\text{XI. } r' = r \cos \ell.$$

51.

Exempli caussa calculum in artt. 13. 14. inchoatum, cuius numeros planeta Iunonis suppeditaverat, ulterius continuabimus. Supra inveneramus anomaliam veram  $315^\circ 1' 23'' . 02$ , logarithmum radii vectoris  $0,3259877$ : sit iam  $i = 13^\circ 6' 44'' . 10$ , distantia perihelii a nodo  $= 241^\circ 10' 20'' . 57$ , adeoque  $u = 196^\circ 11' 43'' . 59$ ; denique sit  $\Omega = 171^\circ 7' 48'' . 73$ . Hinc habemus:

|                                              |                           |                                     |                            |
|----------------------------------------------|---------------------------|-------------------------------------|----------------------------|
| $\log \tan u$ . . . . .                      | 9,4630573                 | $\log \sin(\lambda - \Omega)$ . . . | 9,4348691 n                |
| $\log \cos i$ . . . . .                      | 9,9885266                 | $\log \tan i$ . . . . .             | 9,3672305                  |
| $\log \tan(\lambda - \Omega)$ . . .          | 9,4515839                 | $\log \tan \ell$ . . . . .          | 8,8020996 n                |
| $\lambda - \Omega = 195^\circ 47' 40'' . 25$ |                           | $\ell$ . . . . .                    | $= -3^\circ 37' 40'' . 02$ |
| $\lambda$ . . . . .                          | $= 6^\circ 55' 28'' . 98$ | $\log \cos \ell$ . . . . .          | 9,9991289                  |
| $\log r$ . . . . .                           | 0,3259877                 | $\log \cos(\lambda - \Omega)$ . . . | 9,9832852 n                |
| $\log \cos \ell$ . . . . .                   | 9,9991289                 |                                     | 9,9824141 n                |
| $\log r'$ . . . . .                          | 0,3251166                 | $\log \cos u$ . . . . .             | 9,9824141 n                |

Calculus secundum formulas III. VII. ita se habet:

|                            |                            |                                     |                             |
|----------------------------|----------------------------|-------------------------------------|-----------------------------|
| $\log \sin u$ . . . . .    | 9,4454714 n                | $\log \tan \frac{1}{2} i$ . . . . . | 9,0604259                   |
| $\log \sin i$ . . . . .    | 9,3557570                  | $\log \tan \ell$ . . . . .          | 8,8020995 n                 |
| $\log \sin \ell$ . . . . . | 8,8012284 n                | $\log \cos u$ . . . . .             | 9,9824141 n                 |
| $\ell$ . . . . .           | $= -3^\circ 37' 40'' . 02$ | $\log \sin(u - \lambda + \Omega)$ . | 7,8449395                   |
|                            |                            | $u - \lambda + \Omega =$            | $0^\circ 24' 3'' . 34$      |
|                            |                            | $\lambda - \Omega$ . . . . .        | $= 195^\circ 47' 40'' . 25$ |

52.

Spectando  $i$  et  $u$  tamquam quantitates variabiles, differentiatio aequationis III. art. 50. suggerit:

$$\cotang \ell d\ell = \cotang i di + \cotang u du$$

sive

$$\text{XII. } d\ell = \sin(\lambda - \Omega) di + \sin i \cos(\lambda - \Omega) du$$



Perinde per differentiationem aequationis I. obtinemus

$$\text{XIII. } d(\lambda - \Omega) = -\tan \ell \cos(\lambda - \Omega) di + \frac{\cos i}{\cos \ell} du$$

Denique e differentiatione aequationis XI. prodit  $dr' = \cos \ell dr - r \sin \ell d\ell$  sive

$$\text{XIV. } dr' = \cos \ell dr - r \sin \ell \sin(\lambda - \Omega) di - r \sin \ell \sin i \cos(\lambda - \Omega) du$$

In hac ultima aequatione vel partes quae continent  $di$  et  $du$  per 206265' sunt dividendae, vel reliquae per hunc numerum multiplicandae, si mutationes ipsarum  $i$  et  $u$  in minutis secundis expressae supponuntur.

53.

Situs puncti cuiuscunque in spatio commodissime per distantias a tribus planis sub angulis rectis se secantibus determinatur. Assumendo pro planorum uno planum eclipticae, designandoque per  $z$  distantiam corporis coelestis ab hoc plano a parte boreali positive, ab australi negative sumendam, manifesto habebimus  $z = r \tan \ell = r \sin \ell = r \sin i \sin u$ . Plana duo reliqua, quae per Solem quoque ducta supponemus, in sphaera coelesti circulos maximos proiciunt, qui eclipticam sub angulis rectis secabunt, quorumque adeo poli in ipsa ecliptica iacebunt et 90° ab invicem distabunt. Utriusque plani polum istum, a cuius parte distantiae positivae censentur, *polum positivum* appellamus. Sint itaque  $N$  et  $N + 90^\circ$  longitudes polorum positivorum, designenturque distantiae a planis quibus respondent respective per  $x$ ,  $y$ . Tunc facile perspicitur haberi

$$\begin{aligned} x &= r' \cos(\lambda - N) = r \cos \ell \cos(\lambda - \Omega) \cos(N - \Omega) + r \cos \ell \sin(\lambda - \Omega) \sin(N - \Omega) \\ y &= r' \sin(\lambda - N) = r \cos \ell \sin(\lambda - \Omega) \cos(N - \Omega) - r \cos \ell \cos(\lambda - \Omega) \sin(N - \Omega) \end{aligned}$$

qui valores transeunt in

$$\begin{aligned} x &= r \cos(N - \Omega) \cos u + r \cos i \sin(N - \Omega) \sin u \\ y &= r \cos i \cos(N - \Omega) \sin u - r \sin(N - \Omega) \cos u \end{aligned}$$

Quodsi itaque polus positivus plani ipsarum  $x$  in ipso nodo ascendente collocatur, ut sit  $N = \Omega$ , habebimus coordinatarum  $x$ ,  $y$ ,  $z$  expressiones simplicissimas

$$\begin{aligned} x &= r \cos u \\ y &= r \cos i \sin u \\ z &= r \sin i \sin u \end{aligned}$$

Si vero haec suppositio locum non habet, tamen formulae supra datae formam aequae fere commodam nanciscuntur per introductionem quatuor quantitatum auxiliarium  $a$ ,  $b$ ,  $A$ ,  $B$  ita determinatarum ut habeatur

$$\begin{aligned} \cos(N - \Omega) &= a \sin A \\ \cos i \sin(N - \Omega) &= a \cos A \\ -\sin(N - \Omega) &= b \sin B \\ \cos i \cos(N - \Omega) &= b \cos B \end{aligned}$$

(vid. art. 14. II). Manifesto tunc erit

$$\begin{aligned} x &= r a \sin(u + A) \\ y &= r b \sin(u + B) \\ z &= r \sin i \sin u \end{aligned}$$

54.

Relationes motus ad eclipticam in praeced. explicatae manifesto perinde valebunt, etiamsi pro ecliptica quodvis aliud planum substituitur, si modo situs plani orbitae ad hoc planum innoterit; expressiones longitudo et latitudo autem tunc supprimendae erunt. Offert itaque se problema: *e situ cognito plani orbitae aliasque plani novi ad eclipticam derivare situm plani orbitae ad hoc novum planum*. Sint  $n\Omega$ ,  $\Omega\Omega'$ ,  $n\Omega'$  partes circulorum maximorum, quos planum eclipticae, planum orbitae planumque novum in sphaera coelesti proiciunt (Fig. 2.). Ut inclinatio circuli secundi ad tertium locusque nodi ascendentes absque ambiguitate assignari possit, in circulo tertio alterutra directio eligi debet tamquam ei analogae, quae in ecliptica est secundum ordinem signorum; sit haec in fig. nostra directio ab  $n$  versus  $\Omega'$ . Praeterea duorum hemisphaeriorum, quae circulus  $n\Omega'$  separat, alterum censere oportebit analogum hemisphaerio boreali, alterum australi: haec vero hemisphaeria sponte iam sunt distincta, quatenus id semper quasi boreale spectatur, quod in circulo secundum ordinem signorum progredienti\*) a dextra est. In figura igitur nostra sunt  $\Omega$ ,  $n$ ,  $\Omega'$  nodi ascendentes circuli secundi in primo, tertii in primo, secundi in tertio;  $180^\circ - n\Omega\Omega'$ ,  $\Omega u\Omega'$ ,  $n\Omega'\Omega$  inclinationes secundi ad primum, tertii ad primum, secundi ad tertium. Pendet itaque problema nostrum a solutione trianguli sphaerici, ubi e latere uno

\*) Puta in interiori sphaerae superficie, quam figura nostra repraesentat.

angulisque adjacentibus reliqua sunt deducenda. Praecepta vulgaria, quae in trigonometria sphaerica pro hoc casu traduntur, tamquam abunde nota suppressimus: commodius autem methodus alia in usum vocatur ex aequationibus quibusdam petita, quae in libris nostris trigonometricis frustra quaeruntur. Ecce has aequationes, quibus in sequentibus frequenter utemur: designant  $a, b, c$  latera trianguli sphaerici atque  $A, B, C$  angulos illis resp. oppositos:

$$\begin{aligned} \text{I. } \frac{\sin \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}a} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}A} \\ \text{II. } \frac{\sin \frac{1}{2}(b+c)}{\sin \frac{1}{2}a} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}A} \\ \text{III. } \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}a} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(B+C)}{\cos \frac{1}{2}A} \\ \text{IV. } \frac{\cos \frac{1}{2}(b+c)}{\cos \frac{1}{2}a} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(B+C)}{\sin \frac{1}{2}A} \end{aligned}$$

Quamquam demonstrationem harum propositionum brevitatis caussa hic praeterire oporteat, quisque tamen earum veritatem in triangulis, quorum nec latera nec anguli  $180^\circ$  excedunt, haud difficile confirmare poterit. Quodsi quidem idea trianguli sphaerici in maxima generalitate concipitur, ut nec latera nec anguli ullis limitibus restringantur (quod plurima commoda insignia praestat, attamen quibusdam dilucidationibus praeliminaribus indiget), casus existere possunt, ubi in cunctis aequationibus praecedentibus signum mutare oportet; quoniam vero signa priora manifesto restituantur, simulac unus angulorum vel unum laterum  $360^\circ$  augetur vel diminuitur, signa, qualia tradidimus, semper tuto retinere licebit, sive e latere angulisque adjacentibus reliqua determinanda sint, sive ex angulo lateribusque adjacentibus; semper enim vel quaesitorum valores ipsi vel  $360^\circ$  a veris diversi hisque adeo aequivalentes per formulas nostras elicientur. Dilucidationem copiosiore huius argumenti ad aliam occasionem nobis reservamus: quod vero praecepta, quae tum pro solutione problematis nostri tum in aliis occasionibus formulis istis superstruimus, in omnibus casibus generaliter valent, tantisper adiumento inductionis rigorosae, i. e. completae omnium casuum enumerationis, haud difficile comprobari poterit.

55.

Designando ut supra longitudinem nodi ascendentis orbitae in eclipctica per  $\Omega$ , inclinationem per  $i$ ; porro longitudinem nodi ascendentis plani novi in eclip-

tica per  $n$ , inclinationem per  $\varepsilon$ ; distantiam nodi ascendentis orbitae in plano novo a nodo ascendente plani novi in eclipctica (arcum  $n\Omega'$  in Fig. 2.) per  $\Omega'$ , inclinationem orbitae ad planum novum per  $i'$ ; denique arcum ab  $\Omega$  ad  $\Omega'$  secundum directionem motus per  $\Delta$ : erunt trianguli sphaerici nostri latera  $\Omega-n$ ,  $\Omega'$ ,  $\Delta$ , angulique oppositi  $i$ ,  $180^\circ-i$ ,  $\varepsilon$ . Hinc erit secundum formulas art. praec.

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}i' \sin \frac{1}{2}(\Omega'+\Delta) &= \sin \frac{1}{2}(\Omega-n) \sin \frac{1}{2}(i+\varepsilon) \\ \sin \frac{1}{2}i' \cos \frac{1}{2}(\Omega'+\Delta) &= \cos \frac{1}{2}(\Omega-n) \sin \frac{1}{2}(i-\varepsilon) \\ \cos \frac{1}{2}i' \sin \frac{1}{2}(\Omega'-\Delta) &= \sin \frac{1}{2}(\Omega-n) \cos \frac{1}{2}(i+\varepsilon) \\ \cos \frac{1}{2}i' \cos \frac{1}{2}(\Omega'-\Delta) &= \cos \frac{1}{2}(\Omega-n) \cos \frac{1}{2}(i-\varepsilon) \end{aligned}$$

Duae primae aequationes suppeditant  $\frac{1}{2}(\Omega'+\Delta)$  atque  $\sin \frac{1}{2}i'$ ; duae reliquae  $\frac{1}{2}(\Omega'-\Delta)$  atque  $\cos \frac{1}{2}i'$ ; ex  $\frac{1}{2}(\Omega'+\Delta)$  et  $\frac{1}{2}(\Omega'-\Delta)$  demanabunt  $\Omega'$  et  $\Delta$ ; ex  $\sin \frac{1}{2}i'$  aut  $\cos \frac{1}{2}i'$  (quorum consensus calculo confirmando inservit) prodibit  $i'$ . Ambiguitas, utrum  $\frac{1}{2}(\Omega'+\Delta)$  et  $\frac{1}{2}(\Omega'-\Delta)$  inter  $0$  et  $180^\circ$  vel inter  $180^\circ$  et  $360^\circ$  accipere oporteat, ita tollitur, ut tum  $\sin \frac{1}{2}i'$  tum  $\cos \frac{1}{2}i'$  fiant positivi, quoniam per rei naturam  $i'$  infra  $180^\circ$  cadere debet.

56.

Praecepta praecedentia exemplo illustravisse haud inutile erit. Sit  $\Omega = 172^\circ 28' 13''7$ ,  $i = 34^\circ 38' 1''1$ ; porro sit planum novum aequatori parallelum, adeoque  $n = 180^\circ$ ; angulum  $\varepsilon$ , qui erit obliquitas eclipcticae, statuimus  $= 23^\circ 27' 55''8$ . Habemus itaque

|                                        |                        |                                        |                         |
|----------------------------------------|------------------------|----------------------------------------|-------------------------|
| $\Omega-n$                             | $= -7^\circ 31' 46''3$ | $\frac{1}{2}(\Omega-n)$                | $= -3^\circ 45' 53''15$ |
| $i+\varepsilon$                        | $= 58^\circ 5' 56''9$  | $\frac{1}{2}(i+\varepsilon)$           | $= 29^\circ 2' 58''45$  |
| $i-\varepsilon$                        | $= 11^\circ 10' 5''3$  | $\frac{1}{2}(i-\varepsilon)$           | $= 5^\circ 35' 2''65$   |
| $\log \sin \frac{1}{2}(\Omega-n)$      | $\dots 8,8173026n$     | $\log \cos \frac{1}{2}(\Omega-n)$      | $\dots 9,9990618$       |
| $\log \sin \frac{1}{2}(i+\varepsilon)$ | $\dots 9,6862484$      | $\log \sin \frac{1}{2}(i-\varepsilon)$ | $\dots 8,9881405$       |
| $\log \cos \frac{1}{2}(i+\varepsilon)$ | $\dots 9,9416108$      | $\log \cos \frac{1}{2}(i-\varepsilon)$ | $\dots 9,9979342$       |

Hinc fit

|                                                            |                          |                                                            |                          |
|------------------------------------------------------------|--------------------------|------------------------------------------------------------|--------------------------|
| $\log \sin \frac{1}{2}i' \sin \frac{1}{2}(\Omega'+\Delta)$ | $\dots 8,5035510n$       | $\log \cos \frac{1}{2}i' \sin \frac{1}{2}(\Omega'-\Delta)$ | $\dots 8,7589134n$       |
| $\log \sin \frac{1}{2}i' \cos \frac{1}{2}(\Omega'+\Delta)$ | $\dots 8,9872023$        | $\log \cos \frac{1}{2}i' \cos \frac{1}{2}(\Omega'-\Delta)$ | $\dots 9,9969960$        |
| unde $\frac{1}{2}(\Omega'+\Delta)$                         | $= 341^\circ 49' 19''01$ | unde $\frac{1}{2}(\Omega'-\Delta)$                         | $= 356^\circ 41' 31''43$ |
| $\log \sin \frac{1}{2}i'$                                  | $\dots 9,0094368$        | $\log \cos \frac{1}{2}i'$                                  | $\dots 9,9977202$        |

Obtinemus itaque  $\frac{1}{2}i' = 5^{\circ}51'56''445$ ,  $i' = 11^{\circ}43'52''89$ ,  $\Omega' = 338^{\circ}30'50''43$ ,  $\Delta = -14^{\circ}52'12''42$ . Ceterum punctum  $n$  in sphaera coelesti manifesto respondet aequinoctio autumnali; quocirca distantia nodi ascendentis orbitae in aequatore ab aequinoctio vernali (eius *rectascensio*) erit  $158^{\circ}30'50''43$ .

Ad illustrationem art. 53. hoc exemplum adhuc ulterius continuabimus, formulasque pro coordinatis respectu trium planorum per Solem transeuntium evolvemus, quorum unum aequatori parallelum sit, duorumque reliquorum poli positivi in ascensione recta  $0^{\circ}$  et  $90^{\circ}$  sint siti: distantiae ab his planis sint resp.  $z$ ,  $x$ ,  $y$ . Iam si insuper distantia loci heliocentrici in sphaera coelesti a punctis  $\Omega$ ,  $\Omega'$  resp. denotetur per  $u$ ,  $u'$ , fiet  $u' = u - \Delta = u + 14^{\circ}52'12''42$ , et quae in art. 53. per  $i$ ,  $N - \Omega$ ,  $u$  exprimebantur, hic erunt  $i'$ ,  $180^{\circ} - \Omega'$ ,  $u'$ . Sic per formulas illic datas prodit

$$\begin{array}{ll} \log a \sin A \dots\dots\dots 9,9687197 n & \log b \sin B \dots\dots\dots 9,5638058 \\ \log a \cos A \dots\dots\dots 9,5546380 n & \log b \cos B \dots\dots\dots 9,9595519 n \\ \text{unde } A \dots\dots\dots = 248^{\circ}55'22''97 & \text{unde } B \dots\dots\dots = 158^{\circ}5'54''97 \\ \log a \dots\dots\dots 9,9987923 & \log b \dots\dots\dots 9,9920848 \end{array}$$

Habemus itaque

$$\begin{array}{ll} x = a \sin(u' + 248^{\circ}55'22''97) = a \sin(u + 263^{\circ}47'35''39) \\ y = b \sin(u' + 158^{\circ}5'54''97) = b \sin(u + 172^{\circ}58'7''39) \\ z = c \sin u' = c \sin(u + 14^{\circ}52'12''42) \end{array}$$

ubi  $\log c = \log \sin i' = 9,3081870$ .

Alia solutio problematis hic tractati invenitur in vox *ZACH Monatliche Correspondenz*, Bd. IX, S. 385, Mai 1804 [GAUSS' Werke, Bd. VI, S. 94].

57.

Corporis itaque coelestis distantia a quovis plano per Solem transeunte reduci poterit ad formam  $kr \sin(v+K)$ , designante  $v$  anomaliam veram, eritque  $k$  sinus inclinationis orbitae ad hoc planum,  $K$  distantia perihelii a nodo ascendente orbitae in eodem plano. Quatenus situs plani orbitae, lineaque apsidi in eo, nec non situs plani ad quod distantiae referuntur pro constantibus haberi

possunt, etiam  $k$  et  $K$  constantes erunt. Frequentius tamen illa methodus in tali casu in usum vocabitur, ubi tertia saltem suppositio non permittitur, etiamsi perturbationes negligantur, quae primam atque secundam semper aliquatenus afficiunt. Illud evenit, quoties distantiae referuntur ad aequatorem, sive ad planum aequatorem sub angulo recto in rectascensione data secans: quum enim situs aequatoris propter praecessionem aequinoctiorum insuperque propter nutationem (siquidem de vero non de medio situ sermo fuerit) mutabilis sit, in hoc casu etiam  $k$  et  $K$  mutationibus, lentis utique, obnoxiae erunt. Computus harum mutationum per formulas differentiales absque difficultate eruendas absolvi potest: hic vero brevitatibus caussa sufficiat, variationes differentiales ipsarum  $i$ ,  $\Omega$ ,  $\Delta$  apponuisse, quatenus a variationibus ipsarum  $\Omega - n$  atque  $\varepsilon$  pendent.

$$d i' = \sin \varepsilon \sin \Omega' d(\Omega - n) - \cos \Omega' d \varepsilon$$

$$d \Omega' = \frac{\sin i \cos \Delta}{\sin i'} d(\Omega - n) + \frac{\sin \Omega'}{\tan i'} d \varepsilon$$

$$d \Delta = \frac{\sin \varepsilon \cos \Omega'}{\sin i'} d(\Omega - n) + \frac{\sin \Omega'}{\sin i'} d \varepsilon$$

Ceterum quoties id tantum agitur, ut plures corporis coelestis loci respectu talium planorum mutabilium calculentur, qui temporis intervallum medioere complectantur (e. g. unum annum), plerumque commodissimum erit, quantitates  $a$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $B$ ,  $c$ ,  $C$  pro duabus epochis intra quas illi cadunt reipsa calculare, ipsarumque mutationes pro singulis temporibus propositis ex illis per simplicem interpolationem eruere.

58.

Formulae nostrae pro distantis a planis datis involvunt  $v$  et  $r$ : quoties has quantitates e tempore prius determinare oportet, partem operationum adhuc contrahere, atque sic laborem notabiliter allevare licebit. Derivari enim possunt illae distantiae per formulam persimplicem statim ex anomalia excentrica in ellipti, vel e quantitate auxiliari  $F$  aut  $u$  in hyperbola, ita ut computo anomaliae verae radiique vectoris plane non sit opus. Mutetur scilicet expressio  $kr \sin(v+K)$

I. *pro ellipti*, retentis characteribus art. s., in

$$ak \cos \varphi \cos K \sin E + ak \sin K (\cos E - e)$$

Determinando itaque  $l$ ,  $L$ ,  $\lambda$  per aequationes

$$\begin{aligned} ak \sin K &= l \sin L \\ ak \cos \varphi \cos K &= l \cos L \\ -cak \sin K &= -el \sin L = \lambda \end{aligned}$$

expressio nostra transit in  $l \sin(E+L) + \lambda$ , ubi  $l$ ,  $L$ ,  $\lambda$  constantes erunt, quatenus  $k$ ,  $K$ ,  $e$  pro constantibus habere licet; sin minus, de illarum mutationibus computandis eadem valebunt, quae in art. praec. monuimus.

Exempli causa transformationem expressionis pro  $x$  in art. 56. inventi apponimus, ubi longitudinem perihelii  $= 121^\circ 17' 34''$ ,  $\varphi = 14^\circ 13' 31''$ ,  $97$ ,  $\log a = 0,4423790$  statuimus. Fit igitur distantia perihelii a nodo ascendente in ecliptica  $= 308^\circ 49' 26''$   $= u - v$ ; hinc  $K = 212^\circ 36' 56''$ . Habemus itaque

|                                  |           |                          |                      |      |
|----------------------------------|-----------|--------------------------|----------------------|------|
| $\log ak$ . . . . .              | 0,4411713 | $\log l \sin L$ . . . .  | 0,1727600            | $n$  |
| $\log \sin K$ . . . . .          | 9,7315887 | $\log l \cos L$ . . . .  | 0,3531154            | $n$  |
| $\log ak \cos \varphi$ . . . . . | 0,4276456 | unde $L$ . . . . .       | $213^\circ 25' 51''$ | $30$ |
| $\log \cos K$ . . . . .          | 9,9254698 | $\log l$ . . . . .       | 0,4316627            |      |
|                                  |           | $\log \lambda$ . . . . . | 9,5632352            |      |
|                                  |           | $\lambda$ . . . . .      | $+0,3657929$         |      |

II. In hyperbolica formula  $kr \sin(v+K)$  secundum art. 21. transit in  $\lambda + \mu \tan F + v \secans F$ , si statuitur  $ebk \sin K = \lambda$ ,  $bk \tan \varphi \cos K = \mu$ ,  $-bk \sin K = v$ ; manifesto eandem expressionem etiam sub formam  $\frac{n \sin(F+K) + v}{\cos F}$  reducere licet. Si loco ipsius  $F$  quantitas auxiliaris  $u$  adhibita est, expressio  $kr \sin(v+K)$  per art. 21. transibit in  $\alpha + \epsilon u + \frac{\gamma}{u}$ , ubi  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ,  $\gamma$  determinantur per formulas

$$\begin{aligned} \alpha &= \lambda = ebk \sin K \\ \epsilon &= \frac{1}{2}(v + \mu) = -\frac{1}{2}ebk \sin(K - \varphi) \\ \gamma &= \frac{1}{2}(v - \mu) = -\frac{1}{2}ebk \sin(K + \varphi) \end{aligned}$$

III. In parabola, ubi anomalia vera e tempore immediate derivatur, nihil aliud supererit, nisi ut pro radio vectore valor suus substituat. Denotando itaque distantiam in perihelio per  $q$ , expressio  $kr \sin(v+K)$  fit  $= \frac{qk \sin v + K}{\cos \frac{1}{2}v^2}$ .

59.

Praecepta pro determinandis distantibus a planis per Solem transeuntibus manifesto etiam ad distantias terrae applicare licet: hic vero simplicissimi tantum casus occurrere solent. Sit  $R$  distantia terrae a Sole,  $L$  longitudo heliocentrica terrae (quae  $150^\circ$  a longitudine geocentrica Solis differt), denique  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  distantiae terrae a tribus planis in Sole sub angulis rectis se secantibus. Iam si

I. Planum ipsarum  $Z$  est ipsa ecliptica, longitudinesque polorum planorum reliquorum, a quibus distantiae sunt  $X$ ,  $Y$ , resp.  $N$  et  $N+90^\circ$ : erit

$$X = R \cos(L-N), \quad Y = R \sin(L-N), \quad Z = 0.$$

II. Si planum ipsarum  $Z$  aequatori parallelum est, atque rectascensiones polorum planorum reliquorum, a quibus distantiae sunt  $X$ ,  $Y$ , resp.  $0$  et  $90^\circ$ , habebimus, obliquitate eclipticae per  $\epsilon$  designata

$$X = R \cos L, \quad Y = R \cos \epsilon \sin L, \quad Z = R \sin \epsilon \sin L.$$

Tabularum solarium recentissimarum editores, clarr. DE ZACH et DE LAMBE, latitudinis Solis rationem habere coeperunt, quae quantitas a perturbationibus reliquorum planetarum atque lunae producta vix unum minutum secundum attingere potest. Designando latitudinem heliocentricam terrae, quae latitudini Solis semper aequalis sed signo opposito affecta erit, per  $B$ , habebimus:

| in casu I.               | in casu II.                                                  |
|--------------------------|--------------------------------------------------------------|
| $X = R \cos B \cos(L-N)$ | $X = R \cos B \cos L$                                        |
| $Y = R \cos B \sin(L-N)$ | $Y = R \cos B \cos \epsilon \sin L - R \sin B \sin \epsilon$ |
| $Z = R \sin B$           | $Z = R \cos B \sin \epsilon \sin L + R \sin B \cos \epsilon$ |

Pro  $\cos B$  hic semper tuto substitui poterit 1, angulusque  $B$  in partibus radii expressus pro  $\sin B$ .

Coordinatae ita inventae ad centrum terrae referuntur: si  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  sunt distantiae puncti cuiuslibet in terrae superficie a tribus planis per centrum terrae ductis iisque quae per Solem ducta erant parallelis, distantiae illius puncti a planis per Solem transeuntibus manifesto erunt  $X+\xi$ ,  $Y+\eta$ ,  $Z+\zeta$ , valores coordinatarum  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  autem pro utroque casu facile determinantur sequenti modo. Sit  $\rho$  radius globi terrestris (sive sinus parallaxis horizontalis mediae Solis),  $\lambda$  longitudo puncti sphaerae coelestis, ubi recta a terrae centro ad punctum superficiei ductum proiicitur,  $\epsilon$  eiusdem latitudo,  $\alpha$  ascensio recta,  $\delta$  declinatio, eritque

|                                              |                                       |
|----------------------------------------------|---------------------------------------|
| in casu I.                                   | in casu II.                           |
| $\xi = \rho \cos \delta \cos (\lambda - N)$  | $\xi = \rho \cos \delta \cos \alpha$  |
| $\eta = \rho \cos \delta \sin (\lambda - N)$ | $\eta = \rho \cos \delta \sin \alpha$ |
| $\zeta = \rho \sin \delta$                   | $\zeta = \rho \sin \delta$            |

Punctum illud sphaerae coelestis manifesto respondet ipsi zenith loci in superficie (siquidem terra tamquam sphaera spectatur), quocirca ipsius ascensio recta conveniet cum ascensione recta medii coeli sive cum tempore siderali in gradus converso, declinatio autem cum elevatione poli; si operae pretium esset, figurae terrestres sphaeroidicae rationem habere, pro  $\delta$  elevationem poli *correctam*, atque pro  $\rho$  distantiam veram loci a centro terrae accipere oporteret, quae per regulas notas eruuntur. Ex  $\alpha$  et  $\delta$  longitudo et latitudo  $\lambda$  et  $\ell$  per regulas notas infra quoque tradendas deducuntur; ceterum patet,  $\lambda$  convenire cum longitudine *nonagesimi*, atque  $90^\circ - \ell$  cum eiusdem altitudine.

60.

Designantibus  $x, y, z$  distantias corporis coelestis a tribus planis in Sole sub angulis rectis se secantibus;  $X, Y, Z$  distantias terrae (sive centri sive puncti in superficie) ab iisdem planis: patet,  $x-X, y-Y, z-Z$  fore distantias corporis coelestis a tribus planis illis parallele per terram ductis, hasque distantias ad distantiam corporis a terra ipsiusque *locum geocentricum*\*), i. e. situm proiectionis rectae a terra ad ipsum ductae in sphaera coelesti, relationem eandem habituras, quam  $x, y, z$  habent ad distantiam a Sole locumque heliocentricum. Sit  $\Delta$  distantia corporis coelestis a terra; concipiatur in sphaera coelesti perpendiculum a loco geocentrico ad circulum maximum, qui respondet plano distantiarum  $z$ , demissum, sitque  $a$  distantia intersectionis a polo positivo circuli maximi, qui respondet plano ipsarum  $x$ , denique sit  $b$  longitudo ipsius perpendiculi sive distantia loci geocentri a circulo maximo distantis  $z$  respondente. Tunc erit  $b$  latitudo aut declinatio geocentrica, prout planum distantiarum  $z$  est ecliptica aut aequator; contra  $a+N$  longitudo seu ascensio recta geocentrica, si  $N$  designat in casu priori longitudinem in posteriori ascensionem rectam poli plani distantiarum  $x$ . Quamobrem erit

\*) In sensu latiori: proprie enim haec expressio ad eum casum refertur, ubi recta e terrae centro ducitur.

$$\begin{aligned} x-X &= \Delta \cos b \cos a \\ y-Y &= \Delta \cos b \sin a \\ z-Z &= \Delta \sin b \end{aligned}$$

Duae priores aequationes dabunt  $a$  atque  $\Delta \cos b$ ; quantitas posterior (quam positivam fieri oportet) cum aequatione tertia combinata dabit  $b$  atque  $\Delta$ .

61.

Tradidimus in praecedentibus methodum facillimam, corporis coelestis locum geocentricum respectu eclipticae seu aequatoris, a parallaxi liberum sive ea affectum, ac perinde a nutatione liberum seu ea affectum determinandi. Quod enim attinet ad nutationem, omnis differentia in eo versabitur, utrum aequatoris positionem mediam adoptemus an veram, adeoque, in casu priori longitudes ab aequinoctio medio, in posteriori a vero numeremus, sicuti in casu illo eclipticae obliquitas media, in hoc vera adhibenda est. Ceterum sponte elucet, quo plures abbreviationes in calculo coordinatarum introducuntur, eo plures operationes praeliminares esse instituendas: quamobrem praestantia methodi supra explicatae, coordinatas immediate ex anomalia excentrica deducendi, tunc potissimum se manifestabit, ubi multos locos geocentricos determinare oportet: contra quoties unus tantum locus computandus esset, aut perpauci, neutiquam operae pretium foret, laborem tot quantitates auxiliares calculandi suscipere. Quin potius in tali casu methodum vulgarem haud deserere praestabit, secundum quam ex anomalia excentrica deducitur vera atque radius vector; hinc locus heliocentricus respectu eclipticae; hinc longitudo et latitudo geocentrica, atque hinc tandem rectascensio et declinatio. Ne quid igitur hic deesse videatur, duas ultimas operationes adhuc breviter explicabimus.

62.

Sit corporis coelestis longitudo heliocentrica  $\lambda$ , latitudo  $\ell$ ; longitudo geocentrica  $l$ , latitudo  $b$ , distantia a Sole  $r$ , a terra  $\Delta$ ; denique terrae longitudo heliocentrica  $L$ , latitudo  $B$ , distantia a Sole  $R$ . Quum non statuamus  $B=0$ , formulae nostrae ad eum quoque casum applicari poterunt, ubi loci heliocentri et geocentri non ad eclipticam sed ad quodvis aliud planum referuntur, modo denominationes longitudinis et latitudinis suppressere oportebit: praeterea parallaxeos ratio statim haberi potest, si modo locus heliocentricus terrae non ad centrum

sed ad locum in superficie immediate refertur. Statuamus porro  $r \cos \ell = r'$ ,  $\Delta \cos b = \Delta'$ ,  $R \cos B = R'$ . Iam referendo locum corporis coelestis atque terrae in spatio ad tria plana, quorum unum sit eclipctica, secundumque et tertium polos suos habeant in longitudine  $N$  et  $N + 90^\circ$ , protinus emergent aequationes sequentes:

$$\begin{aligned} r \cos(\lambda - N) - R' \cos(L - N) &= \Delta' \cos(l - N) \\ r \sin(\lambda - N) - R' \sin(L - N) &= \Delta' \sin(l - N) \\ r \tan \ell - R' \tan B &= \Delta' \tan b \end{aligned}$$

ubi angulus  $N$  omnino arbitrarius est. Aequatio prima et secunda statim determinabunt  $l - N$  atque  $\Delta'$ , unde et ex tertia demanabit  $b$ ; ex  $b$  et  $\Delta'$  habebis  $\Delta$ . Iam ut labor calculi quam commodissimus evadat, angulum arbitrium  $N$  tribus modis sequentibus determinamus:

I. Statuendo  $N = L$ , faciemus  $\frac{r'}{R'} \sin(\lambda - L) = P$ ,  $\frac{r'}{R'} \cos(\lambda - L) - 1 = Q$  invenienturque  $l - L$ ,  $\frac{\Delta'}{R'}$  atque  $b$  per formulas

$$\begin{aligned} \tan(l - L) &= \frac{P}{Q} \\ \frac{\Delta'}{R'} &= \frac{P}{\sin(l - L)} = \frac{Q}{\cos(l - L)} \\ \tan b &= \frac{R' \tan \ell - \tan B}{\frac{\Delta'}{R'}} \end{aligned}$$

II. Statuendo  $N = \lambda$ , faciemus  $\frac{R'}{r'} \sin(\lambda - L) = P$ ,  $1 - \frac{R'}{r'} \cos(\lambda - L) = Q$ , eritque

$$\begin{aligned} \tan(l - \lambda) &= \frac{P}{Q} \\ \frac{\Delta'}{r'} &= \frac{P}{\sin(l - \lambda)} = \frac{Q}{\cos(l - \lambda)} \\ \tan b &= \frac{\tan \ell - \frac{R'}{r'} \tan B}{\frac{\Delta'}{r'}} \end{aligned}$$

III. Statuendo  $N = \frac{1}{2}(\lambda + L)$ , invenientur  $l$  atque  $\Delta'$  per aequationes

$$\begin{aligned} \tan(l - \tfrac{1}{2}(\lambda + L)) &= \frac{r' + R'}{r' - R'} \tan \tfrac{1}{2}(\lambda - L) \\ \Delta' &= \frac{(r' + R') \sin \tfrac{1}{2}(\lambda - L)}{\sin(l - \tfrac{1}{2}(\lambda + L))} = \frac{(r' - R') \cos \tfrac{1}{2}(\lambda - L)}{\cos(l - \tfrac{1}{2}(\lambda + L))} \end{aligned}$$

ac dein  $b$  per aequationem supra datam. Logarithmus fractionis  $\frac{r' + R'}{r' - R'}$  com-

mode calculatur, si statuitur  $\frac{R'}{r'} = \tan \zeta$ , unde fit  $\frac{r' + R'}{r' - R'} = \tan(45^\circ + \zeta)$ . Hoc modo methodus III. ad determinationem ipsius  $l$  aliquanto brevior est, quam I. et II., ad operationes reliquas autem has illi praeferendas censemus.

63.

Exempli causa calculum in art. 51. usque ad locum heliocentricum productum ulterius continuamus. Respondent illi loco longitudo heliocentrica terrae  $24^\circ 19' 49''.05 = L$ , atque  $\log R = 9,9980979$ ; latitudinem  $B$  statuimus  $= 0$ . Habemus itaque  $\lambda - L = -17^\circ 24' 20''.07$ ,  $\log R' = \log R$ , adeoque secundum methodum II.,

|                                     |                          |                               |                           |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------|---------------------------|
| $\log \frac{R'}{r'}$ . . . . .      | 9,6729813                | $\log(1 - Q)$ . . . .         | 9,6526258                 |
| $\log \sin(\lambda - L)$ . . . . .  | 9,4758653 n              | $1 - Q$ . . . . .             | 0,4493925                 |
| $\log \cos(\lambda - L)$ . . . . .  | 9,9796445                | $Q$ . . . . .                 | 0,5506075                 |
| $\log P$ . . . . .                  | 9,1488466 n              |                               |                           |
| $\log Q$ . . . . .                  | 9,7408421                |                               |                           |
| Hinc $l - \lambda$ . . . . .        | $= -14^\circ 21' 6''.75$ | unde $l$ . . . . .            | $= 352^\circ 34' 22''.23$ |
| $\log \frac{\Delta'}{r'}$ . . . . . | 9,7546117                | unde $\log \Delta'$ . . . . . | 0,0797283                 |
| $\log \tan \ell$ . . . . .          | 8,8020996 n              | $\log \cos b$ . . . . .       | 9,9973144                 |
| $\log \tan b$ . . . . .             | 9,0474879 n              | $\log \Delta$ . . . . .       | 0,0824139                 |
| $b$ . . . . .                       | $= -6^\circ 21' 55''.07$ |                               |                           |

Secundum methodum III. ex  $\log \tan \zeta = 9,6729813$  habetur  $\zeta = 25^\circ 13' 6''.31$ , adeoque

|                                                        |             |                                   |  |
|--------------------------------------------------------|-------------|-----------------------------------|--|
| $\log \tan(45^\circ + \zeta)$ . . . . .                | 0,4441091   |                                   |  |
| $\log \tan \tfrac{1}{2}(\lambda - L)$ . . . . .        | 9,1848938 n |                                   |  |
| $\log \tan(l - \tfrac{1}{2}(\lambda - L))$ . . . . .   | 9,6290029 n |                                   |  |
| $l - \tfrac{1}{2}(\lambda - L) = -23^\circ 3' 16''.79$ |             | unde $l = 352^\circ 34' 22''.225$ |  |
| $\tfrac{1}{2}(\lambda + L) = 15^\circ 37' 39''.015$    |             |                                   |  |

64.

Circa problema art. 62. sequentes adhuc observationes adiciamus.

I. Statuendo in aequatione secunda illic tradita  $N = \lambda$ ,  $N = L$ ,  $N = l$ , prodit  $R' \sin(\lambda - L) = \Delta' \sin(l - \lambda)$ ;  $r' \sin(\lambda - L) = \Delta' \sin(l - L)$ ;  $r' \sin(l - \lambda) = R' \sin(l - L)$ ; aequatio prima aut secunda, commode ad calculi confirmationem ap-

plicatur, si methodus I. aut II. art. 62. adhibita est. Ita habetur in exemplo nostro

$$\begin{array}{rcl} \log \sin (\lambda-L) & . . . . . & 9,4758653 n \\ \log \frac{\Delta'}{r} & . . . . . & 9,7546117 \\ \hline & & 9,7212536 n \\ \log \sin (l-L) & . . . . . & 9,7212536 n \end{array}$$

II. Sol duoque in plano eclipticae puncta, quae sunt projectiones loci corporis coelestis atque loci terrae, triangulum planum formant, cuius latera sunt  $\Delta$ ,  $R$ ,  $r$ , angulique oppositi vel  $\lambda-L$ ,  $l-\lambda$ ,  $180^\circ-l+L$ , vel  $L-\lambda$ ,  $\lambda-l$ ,  $130^\circ-L+l$ ; ex hoc principio relationes in I. traditae sponte sequuntur.

III. Sol, locus verus corporis coelestis in spatio, locusque verus terrae aliud triangulum formabunt, cuius latera erunt  $\Delta$ ,  $R$ ,  $r$ : angulis itaque his resp. oppositis per  $S$ ,  $T$ ,  $180^\circ-S-T$  denotatis, erit  $\frac{\sin S}{\Delta} = \frac{\sin T}{R} = \frac{\sin(S+T)}{r}$ . Planum huius trianguli in sphaera coelesti circulum maximum proiciet, in quo locus heliocentricus terrae, locus heliocentricus corporis coelestis eiusdemque locus geocentricus siti erunt, et quidem ita ut distantia secundi a primo, tertii a secundo, tertii a primo, secundum eandem directionem numeratae, resp. sint  $S$ ,  $T$ ,  $S+T$ .

IV. Vel ex notis variationibus differentialibus partium trianguli plani, vel aequae facile e formulis art. 62. sequentes aequationes differentiales derivantur:

$$\begin{aligned} d l &= \frac{r' \cos (\lambda-l)}{\Delta'} d \lambda + \frac{\sin (\lambda-l)}{\Delta'} d r' \\ d \Delta' &= -r' \sin (\lambda-l) d \lambda + \cos (\lambda-l) d r' \\ d b &= \frac{r' \cos b \sin b \sin (\lambda-l)}{\Delta} d \lambda + \frac{r' \cos b^2}{\Delta' \cos b} d \ell + \frac{\cos b^2}{\Delta} (\tan \ell - \cos (\lambda-l) \tan b) d r' \end{aligned}$$

ubi partes quae continent  $dr'$ ,  $d\Delta'$  per 206265 sunt multiplicandae, vel reliquae per 206265 dividendae, si mutationes angulorum in minutis secundis exprimuntur.

V. Problema inversum, scilicet determinatio loci heliocentrici et geocentrico problemati supra evoluto prorsus analogum est, quamobrem superfluum foret, illi amplius inhaerere. Omnes enim formulae art. 62. etiam pro illo problemate valent, si modo omnibus quantitibus quae ad locum corporis coelestis heliocentricum spectant cum analogis iis quae ad geocentricum referuntur permutatis, pro  $L$ ,  $B$  resp. substituitur  $L+180^\circ$ ,  $-B$ , sive quod idem est pro loco heliocentrico terrae geocentricus solis accipitur.

65.

Etiam si in eo casu, ubi ex elementis datis paucissimi tantum loci geocentri sunt determinandi, omnia artificia supra tradita, per quae ab anomalia excentrica statim ad longitudinem et latitudinem geocentricam, vel adeo ad rectascensionem et declinationem, transire licet, in usum vocare vix operae pretium sit, quoniam compendia inde demanantia a multitudine quantitatum auxiliarium antea computandarum absorberentur: semper tamen contractio reductionis ad eclipticam cum calculo longitudinis et latitudinis geocentricae lucrum haud spernendum praestabit. Si enim pro plano coordinatarum  $z$  assumitur ipsa ecliptica, poli autem planorum coordinatarum  $x$ ,  $y$  collocantur in longitudine  $\Omega$ ,  $90^\circ+\Omega$ , coordinatae facillime absque ulla quantitatum auxiliarium necessitate determinantur. Habetur scilicet

$$\begin{array}{ccc} x = r \cos u & X = R' \cos (L-\Omega) & x-X = \Delta' \cos (l-\Omega) \\ y = r \cos i \sin u & Y = R' \sin (L-\Omega) & y-Y = \Delta' \sin (l-\Omega) \\ z = r \sin i \sin u & Z = R' \tan g B & z-Z = \Delta' \tan g b \end{array}$$

Quoties  $B=0$ , est  $R'=R$ ,  $Z=0$ . Secundum has formulae exemplum nostrum numeris sequentibus absolvitur:  $L-\Omega = 213^\circ 12' 0'' 32$

$$\begin{array}{ccc} \log r & . . . . . & 0,3259877 \\ \log \cos u & . . . . . & 9,9824141 n \\ \log \sin u & . . . . . & 9,4454714 n \\ \log x & . . . . . & 0,3084018 n \\ \log r \sin u & . . . . . & 9,7714591 n \\ \log \cos i & . . . . . & 9,9885266 \\ \log \sin i & . . . . . & 9,3557570 \\ \log y & . . . . . & 9,7599857 n \\ \log z & . . . . . & 3,1272161 n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \log R' & . . . . . & 9,9980979 \\ \log \cos (L-\Omega) & . . & 9,9226027 n \\ \log \sin (L-\Omega) & . . & 9,7384353 n \\ \log X & . . . . . & 9,9207006 n \\ \log Y & . . . . . & 9,7365332 n \\ Z & = & 0 \end{array}$$

Hinc fit

$$\begin{array}{ccc} \log (x-X) & . . . . . & 0,0795906 n \\ \log (y-Y) & . . . . . & 8,4807165 n \\ \text{unde } (l-\Omega) & = & 181^\circ 26' 33'' 49 \\ \log \Delta' & . . . . . & 0,0797283 \\ \log \tan g b & . . . . . & 9,0474878 n \end{array} \quad \begin{array}{ccc} l & = & 352^\circ 34' 22'' 22 \\ b & = & -6^\circ 21' 55,96 \end{array}$$

66.

E longitudine et latitudine puncti cuiusvis in sphaera coelesti eius rect-  
ascensio et declinatio derivantur per solutionem trianguli sphaerici, quod ab illo  
puncto polisque arcticis eclipticae et aequatoris formatur. Sit  $\epsilon$  obliquitas eclipti-  
cae,  $l$  longitudo,  $b$  latitudo,  $\alpha$  ascensio recta,  $\delta$  declinatio, eruntque trianguli  
latera  $\epsilon$ ,  $90^\circ - b$ ,  $90^\circ - \delta$ ; pro angulis lateri secundo et tertio oppositis accipere  
licebit  $90^\circ + \alpha$ ,  $90^\circ - l$  (siquidem trianguli sphaerici ideam maxima generalitate  
concepimus); angulum tertium lateri  $\epsilon$  oppositum statuemus  $= 90^\circ - E$ . Ha-  
bebimus itaque per formulas art. 54.

$$\begin{aligned}\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta) \sin \tfrac{1}{2}(E + \alpha) &= \sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}l) \sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\epsilon + b)) \\ \sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta) \cos \tfrac{1}{2}(E + \alpha) &= \cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}l) \cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\epsilon - b)) \\ \cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta) \sin \tfrac{1}{2}(E - \alpha) &= \cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}l) \sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\epsilon - b)) \\ \cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta) \cos \tfrac{1}{2}(E - \alpha) &= \sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}l) \cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\epsilon + b))\end{aligned}$$

Aequationes duae primae dabunt  $\tfrac{1}{2}(E + \alpha)$  atque  $\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta)$ ; duae ultimae  
 $\tfrac{1}{2}(E - \alpha)$  atque  $\cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta)$ ; ex  $\tfrac{1}{2}(E + \alpha)$  et  $\tfrac{1}{2}(E - \alpha)$  habebitur  $\alpha$  simulque  $E$ ;  
ex  $\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta)$  aut  $\cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta)$ , quorum consensus calculo confirmando in-  
serviet, determinabitur  $45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta$  atque hinc  $\delta$ . Determinatio angulorum  $\tfrac{1}{2}(E + \alpha)$ ,  
 $\tfrac{1}{2}(E - \alpha)$  per tangentes suos ambiguitati non est obnoxia, quoniam tum sinus tum  
cosinus anguli  $45^\circ - \tfrac{1}{2}\delta$  positivus evadere debet.

Mutationes differentiales quantitatum  $\alpha$ ,  $\delta$  e mutationibus ipsarum  $l$ ,  $b$  se-  
cundum principia nota ita inveniuntur:

$$\begin{aligned}d\alpha &= \frac{\sin E \cos b}{\cos \delta} dl - \frac{\cos E}{\cos \delta} db \\ d\delta &= \cos E \cos b dl + \sin E db\end{aligned}$$

67.

Methodus alia, problema art. praec. solvendi, ex aequationibus

$$\begin{aligned}\cos \epsilon \sin l &= \sin \epsilon \tan b + \cos l \tan \alpha \\ \sin \delta &= \cos \epsilon \sin b + \sin \epsilon \cos b \sin l \\ \cos b \cos l &= \cos \alpha \cos \delta\end{aligned}$$

petitur. Determinetur angulus auxiliaris  $\theta$  per aequationem

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \frac{\tan b}{\sin l}, \text{ critique} \\ \tan \alpha &= \frac{\cos(\epsilon + \theta) \tan l}{\cos \theta} \\ \tan \delta &= \sin \alpha \tan(\epsilon + \theta)\end{aligned}$$

quibus aequationibus ad calculi confirmationem adiici potest

$$\cos \delta = \frac{\cos b \cos l}{\cos \alpha} \text{ sive } \cos \delta = \frac{\cos(\epsilon + \theta) \cos b \sin l}{\cos \theta \sin \alpha}$$

Ambiguitas in determinatione ipsius  $\alpha$  per aequ. secundam eo tollitur, quod  $\cos \alpha$   
et  $\cos l$  eadem signa habere debent.

Haec methodus minus expedita est, si praeter  $\alpha$  et  $\delta$  etiam  $E$  desideratur:  
formula commodissima ad hunc angulum determinandum tunc erit  $\cos E = \frac{\sin \epsilon \cos \alpha}{\cos b}$   
 $= \frac{\sin \epsilon \cos l}{\cos \delta}$ . Sed per hanc formulam  $E$  accurate computari nequit, quoties  $\pm \cos E$   
parum ab unitate differt; praeterea ambiguitas remanet, utrum  $E$  inter  $0$  et  $180^\circ$  an  
inter  $180^\circ$  et  $360^\circ$  accipere oporteat. Incommodum prius raro ullius momenti est,  
praesertim, quum ad computandas rationes differentiales ultima praecisio in valore  
ipsius  $E$  non requiratur: ambiguitas vero illa adiumento aequationis  $\cos b \cos \delta \sin E$   
 $= \cos \epsilon - \sin b \sin \delta$  facile tollitur, quae ostendit  $E$  inter  $0$  et  $180^\circ$ , vel inter  $180^\circ$   
et  $360^\circ$  accipi debere, prout  $\cos \epsilon$  maior fuerit vel minor quam  $\sin b \sin \delta$ : mani-  
festo hoc examen ne necessarium quidem est, quoties alteruter angulorum  $b$ ,  $\delta$   
limitem  $60^\circ 32'$  non egreditur: tunc enim  $\sin E$  semper fiet positivus. Ceterum  
eadem aequatio in casu supra addigitato ad determinationem exactiorem ipsius  $E$ ,  
si operae pretium videtur, adhiberi poterit.

68.

Solutio problematis inversi, puta determinatio longitudinis et latitudinis ex  
ascensione recta et declinatione, eidem triangulo sphaerico superstruitur: formulae  
itaque supra traditae huic fini accommodabuntur per solam permutationem ipsius  $b$   
cum  $\delta$ , ipsiusque  $l$  cum  $-\alpha$ . Etiam has formulas, propter usum frequentem, hic  
apposuisse haud pigebit:

Secundam methodum art. 66. habemus

$$\begin{aligned}\sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}b) \sin \tfrac{1}{2}(E - l) &= \cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) \sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\epsilon + \delta)) \\ \sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}b) \cos \tfrac{1}{2}(E - l) &= \sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) \cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\epsilon - \delta)) \\ \cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}b) \sin \tfrac{1}{2}(E + l) &= \sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) \sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\epsilon - \delta)) \\ \cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}b) \cos \tfrac{1}{2}(E + l) &= \cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\alpha) \cos(45^\circ - \tfrac{1}{2}(\epsilon + \delta))\end{aligned}$$

G. TH. M.

10

Contra ad instar methodi alterius art. 67. determinabimus angulum auxilium  $\zeta$  per aequationem

$$\begin{aligned}\operatorname{tang} \zeta &= \frac{\operatorname{tang} b}{\sin a}, \text{ eritque} \\ \operatorname{tang} l &= \frac{\cos(\zeta - \epsilon) \operatorname{tang} a}{\cos \zeta} \\ \operatorname{tang} b &= \sin l \operatorname{tang}(\zeta - \epsilon)\end{aligned}$$

Ad calculi confirmationem adiungi poterit

$$\cos b = \frac{\cos \zeta \cos a}{\cos l} = \frac{\cos(\zeta - \epsilon) \cos b \sin a}{\cos \zeta \sin l}$$

Pro determinatione ipsius  $E$  inservient perinde ut in art. praec. aequationes

$$\begin{aligned}\cos E &= \frac{\sin \epsilon \cos a}{\cos b} = \frac{\sin \epsilon \cos l}{\cos b} \\ \cos b \cos \zeta \sin E &= \cos \epsilon - \sin b \sin \zeta\end{aligned}$$

Variationes differentiales ipsarum  $l, b$  hisce formulis exhibebuntur:

$$\begin{aligned}dl &= \frac{\sin E \cos \zeta}{\cos b} da + \frac{\cos E}{\cos b} d\zeta \\ db &= -\cos E \cos \zeta da + \sin E d\zeta\end{aligned}$$

69.

Exempli causa ex ascensione recta  $355^{\circ}43'45''30'' = a$ , declinatione  $-8^{\circ}47'25'' = \zeta$ , obliquitate eclipticae  $23^{\circ}27'59''26'' = \epsilon$  longitudinem et latitudinem computabimus. Est igitur  $45^{\circ} + \frac{1}{2}a = 220^{\circ}51'52''65''$ ,  $45^{\circ} - \frac{1}{2}(\epsilon + \zeta) = 37^{\circ}39'42''87''$ ,  $45^{\circ} - \frac{1}{2}(\epsilon - \zeta) = 28^{\circ}52'17''87''$ ; hinc porro

$$\begin{aligned}\log \cos(45^{\circ} + \frac{1}{2}a) &\dots 9,8650820 \quad \log \sin(45^{\circ} + \frac{1}{2}a) \dots 9,8326803 \text{ n} \\ \log \sin(45^{\circ} - \frac{1}{2}(\epsilon + \zeta)) &\dots 9,7860418 \quad \log \sin(45^{\circ} - \frac{1}{2}(\epsilon - \zeta)) \dots 9,6838112 \\ \log \cos(45^{\circ} - \frac{1}{2}(\epsilon + \zeta)) &\dots 9,8985222 \quad \log \cos(45^{\circ} - \frac{1}{2}(\epsilon - \zeta)) \dots 9,9423572 \\ \log \sin(45^{\circ} - \frac{1}{2}b) \sin \frac{1}{2}(E - l) &\dots 9,6511238 \text{ n} \\ \log \sin(45^{\circ} - \frac{1}{2}b) \cos \frac{1}{2}(E - l) &\dots 9,7750375 \text{ n}\end{aligned}$$

$$\text{unde } \frac{1}{2}(E - l) = 216^{\circ}56'5''39''; \quad \log \sin(45^{\circ} - \frac{1}{2}b) = 9,8723171$$

$$\begin{aligned}\log \cos(45^{\circ} - \frac{1}{2}b) \sin \frac{1}{2}(E + l) &\dots 9,5164915 \text{ n} \\ \log \cos(45^{\circ} - \frac{1}{2}b) \cos \frac{1}{2}(E + l) &\dots 9,7636042 \text{ n}\end{aligned}$$

$$\text{unde } \frac{1}{2}(E + l) = 209^{\circ}30'49''94''; \quad \log \cos(45^{\circ} - \frac{1}{2}b) = 9,8239669$$

Fit itaque  $E = 426^{\circ}26'55''33''$ ,  $l = -7^{\circ}25'15''45''$ , sive quod eodem redit  $E = 66^{\circ}26'55''33''$ ,  $l = 352^{\circ}34'44''55''$ ; angulus  $45^{\circ} - \frac{1}{2}b$  e logarithmo sinus habetur  $48^{\circ}10'58''12''$ , e logarithmo cosinus  $48^{\circ}10'58''17''$ , e tangente, cuius logarithmus illorum differentia est,  $48^{\circ}10'58''14''$ ; hinc  $b = -6^{\circ}21'56''28''$ .

Secundum methodum alteram calculus ita se habet:

$$\begin{aligned}\log \operatorname{tang} b &\dots 9,1893062 \text{ n} & \text{C. } \log \cos \zeta &\dots 0,3626190 \\ \log \sin a &\dots 8,8719792 \text{ n} & \log \cos(\zeta - \epsilon) &\dots 9,8789703 \\ \log \operatorname{tang} \zeta &\dots 0,3173270 & \log \operatorname{tang} a &\dots 8,8731869 \text{ n} \\ \zeta &= 64^{\circ}17'6''83 & \log \operatorname{tang} l &\dots 9,1147762 \text{ n} \\ \zeta - \epsilon &= 40^{\circ}49'7,57 & l &= 352^{\circ}34'44''50 \\ & & \log \sin l &\dots 9,1111232 \text{ n} \\ & & \log \operatorname{tang}(\zeta - \epsilon) &\dots 9,9363874 \\ & & \log \operatorname{tang} b &\dots 9,0475106 \text{ n} \\ & & b &= -6^{\circ}21'56''26\end{aligned}$$

Ad determinandum angulum  $E$  habemus calculum duplicem:

$$\begin{aligned}\log \sin \epsilon &\dots 9,6001144 & \log \sin \epsilon &\dots 9,6001144 \\ \log \cos a &\dots 9,9987924 & \log \cos l &\dots 9,9963470 \\ \text{C. } \log \cos b &\dots 0,0026859 & \text{C. } \log \cos \zeta &\dots 0,0051313 \\ \log \cos E &\dots 9,6015927 & \log \cos E &\dots 9,6015927\end{aligned}$$

$$\text{unde } E = 66^{\circ}26'55''35''$$

70.

Ne quid eorum, quae ad calculum locorum geocentricorum requiruntur, hic desideretur, quaedam adhuc de *parallaxi* atque *aberratione* adicienda sunt. Methodum quidem supra iam descripsimus, secundam quam locus parallaxi affectus, i. e. cuilibet in superficie terrae puncto respondens, immediate maximaque facilitate determinari potest: sed quum in methodo vulgari in art. 62. et sequ. tradita locus geocentricus ad terrae centrum referri soleat, in quo casu a parallaxi liber dicitur, methodum peculiarem pro determinanda parallaxi, quae est inter utrumque locum differentia, adiciere oportebit.

Sint corporis coelestis longitudo et latitudo geocentrica respectu centri terrae  $\lambda, \delta$ ; eadem respectu puncti cuiusvis in superficie terrae  $l, b$ ; distantia cor-

poris a terrae centro  $r$ , a puncto superficiei  $\Delta$ ; denique respondeat in sphaera coelesti ipsi zenith huius puncti longitudo  $L$ , latitudo  $B$ , designeturque radius terrae per  $R$ . Sponte iam patet, omnes aequationes art. 62. etiam hic locum esse habituras; sed notabiliter contrahi poterunt, quum  $R$  hic exprimat quantitatem prae  $r$  et  $\Delta$  tantum non evanescentem. Ceterum eadem aequationes manifesto etiamnum valebunt, si  $\lambda$ ,  $l$ ,  $L$  pro longitudinibus ascensionibus rectas, atque  $\xi$ ,  $b$ ,  $B$  pro latitudinibus declinationes exprimunt. In hoc casu  $l - \lambda$ ,  $b - \xi$  erunt parallaxes ascensionis rectae et declinationis, in illo vero parallaxes longitudinis et latitudinis. Quodsi iam  $R$  ut quantitas primi ordinis tractatur, eiusdem ordinis erunt  $l - \lambda$ ,  $b - \xi$ ,  $\Delta - r$ , neglectisque ordinibus superioribus e formulis art. 62. facile derivabitur:

$$\text{I. } l - \lambda = \frac{R \cos B \sin(\lambda - L)}{r \cos \xi}$$

$$\text{II. } b - \xi = \frac{R \cos B \cos \xi}{r} (\tan \xi \cos(\lambda - L) - \tan B)$$

$$\text{III. } \Delta - r = -R \cos B \sin \xi (\cotang \xi \cos(\lambda - L) + \tan B)$$

Accipiendo angulum auxiliarem  $\theta$  ita ut fiat  $\tan \theta = \frac{\tan B}{\cos(\lambda - L)}$ , aequationes II. III. formam sequentem nanciscuntur:

$$\text{II. } b - \xi = \frac{R \cos B \cos(\lambda - L) \sin(\xi - \theta)}{r \cos \theta} = \frac{R \sin B \sin(\xi - \theta)}{r \sin \theta}$$

$$\text{III. } \Delta - r = -\frac{R \cos B \cos(\lambda - L) \cos(\xi - \theta)}{\cos \theta} = -\frac{R \sin B \cos(\xi - \theta)}{\sin \theta}$$

Ceterum patet, ut in I. et II.  $l - \lambda$  et  $b - \xi$  in minutis secundis obtineantur, pro  $R$  accipi debere parallaxem mediam solarem in minutis secundis expressam; in III. vero pro  $R$  eadem parallaxis per 206265" divisa accipienda est. Tandem nullo praecisionis detrimento in valoribus parallaxium pro  $r$ ,  $\lambda$ ,  $\xi$ , adhibere licebit  $\Delta$ ,  $l$ ,  $b$ , quoties in problemate inverso e loco parallaxi affecto locum ab eadem liberum determinare oportet.

*Exemplum.* Sit ascensio recta Solis pro centro terrae  $220^{\circ}46'44''.65 = \lambda$ , declinatio  $-15^{\circ}49'43''.94 = \xi$ , distantia  $0,9904311 = r$ ; porro tempus sidereum in aliquo loco in terrae superficiei gradibus expressa  $78^{\circ}20'38'' = L$ , loci elevatio poli  $45^{\circ}27'57'' = B$ , parallaxis media solaris  $8''.6 = R$ . Quaeritur locus Solis ex hoc loco visus, distantiaque ab eodem.

|                                    |                |                                     |                |
|------------------------------------|----------------|-------------------------------------|----------------|
| $\log R$ . . . . .                 | 0,93450        | $\log R$ . . . . .                  | 0,93450        |
| $\log \cos B$ . . . . .            | 9,84593        | $\log \sin B$ . . . . .             | 9,85299        |
| $C. \log r$ . . . . .              | 0,00418        | $C. \log r$ . . . . .               | 0,00418        |
| $C. \log \cos \xi$ . . . . .       | 0,01679        | $C. \log \sin \theta$ . . . . .     | 0,10317        |
| $\log \sin(\lambda - L)$ . . . . . | 9,78508        | $\log \sin(\xi - \theta)$ . . . . . | 9,77152 n      |
| $\log(l - \lambda)$ . . . . .      | 0,58648        | $\log(b - \xi)$ . . . . .           | 0,66636 n      |
| $l - \lambda$ . . . . .            | + 3'86         | $b - \xi$ . . . . .                 | - 4'64         |
| $l$ . . . . .                      | = 220°46'48"51 | $b$ . . . . .                       | = -15°49'48"58 |
| $\log \tan B$ . . . . .            | 0,00706        | $\log(b - \xi)$ . . . . .           | 0,66636 n      |
| $\log \cos(\lambda - L)$ . . . . . | 9,89909 n      | $\log \cot(\xi - \theta)$ . . . . . | 0,13522        |
| $\log \tan \theta$ . . . . .       | 0,10797 n      | $\log r$ . . . . .                  | 9,99582        |
| $\theta$ . . . . .                 | = 127°57' 0"   | $\log l$ . . . . .                  | 4,68557        |
| $\xi - \theta$ . . . . .           | = -143°46'44"  | $\log(r - \Delta)$ . . . . .        | 5,48297 n      |
|                                    |                | $r - \Delta$ . . . . .              | = -0,0000304   |
|                                    |                | $\Delta$ . . . . .                  | = 0,9904615    |

## 71.

Aberratio fixarum, nec non pars ea aberrationis planetarum et cometarum quae soli motui terrae debetur, oritur inde, quod cum terra integra *tubus* movetur, dum radius luminis ipsius axem opticum percurrit. Corporis coelestis locus observatus (qui et apparens seu aberratione affectus dicitur) determinatur per situm axis optici telescopii ita collocati, ut radius luminis ab illo egressus in via sua utramque huius axis extremitatem attingat: hic autem situs diversus est a situ vero radii luminis in spatio. Distinguamus duo temporis momenta  $t$ ,  $t'$ , ubi radius luminis extremitatem anteriorem (centrum vitri obiectivi), ubique posteriorem (focum vitri obiectivi) attingit; sint harum extremitatum loci in spatio pro momento priori  $a$ ,  $b$ ; pro posteriori  $a'$ ,  $b'$ . Tunc patet, rectam  $ab'$  esse situm verum radii in spatio, loco apparenti autem respondere rectam  $ab$  vel  $a'b'$  (quas pro parallelis habere licet): nullo porro negotio perspicitur, locum apparentem a longitudine tubi non pendere. Differentia inter situm rectarum  $ba$ ,  $ba'$  est aberratio qualis pro stellis fixis locum habet: modum eam calculandi hic tamquam notum silentio transimus. Pro stellis errantibus autem ista differentia nondum est aberratio completa: planeta scilicet, dum radius ex ipso egressus ad terram descendit, locum suum ipse

mutat, quapropter situs huius radii non respondet loco geocentrico verò tempore observationis. Supponamus, radium luminis qui tempore  $t$  in tubum impingit tempore  $T$  e planeta egressum esse; designeturque locus planetae in spatio tempore  $T$  per  $P$ , tempore  $t$  autem per  $p$ ; denique sit  $A$  locus extremitatis antecedentis axis tubi pro tempore  $T$ . Tunc patet

- 1° rectam  $AP$  exhibere locum verum planetae tempore  $T$ .
- 2° rectam  $ap$  autem locum verum tempore  $t$ .
- 3° rectam  $ba$  vel  $ba'$  locum apparentem tempore  $t$  vel  $t'$  (quorum differentia ceu quantitas infinite parva spectari potest).
- 4° rectam  $ba'$  eundem locum apparentem ab aberratione fixarum purgatum.

Iam puncta  $P$ ,  $a$ ,  $b'$  in linea recta iacent, eruntque partes  $Pa$ ,  $ab'$  proportionales temporum intervallis  $t-T$ ,  $t'-t$ , siquidem motus luminis celeritate uniformi peragitur. Temporis intervallum  $t-T$  propter immensam luminis velocitatem semper est parvum, intra quod motum terrae tanquam rectilineum ac celeritate uniformi peractum supponere licet: sic etiam  $A$ ,  $a$ ,  $a'$  in directum iacebunt, partesque  $Aa$ ,  $aa'$  quoque intervallis  $t-T$ ,  $t'-t$  proportionales erunt. Hinc facile concluditur, rectas  $AP$ ,  $ba'$  esse paralleas, adeoque locum primum cum tertio identicum.

Tempus  $t-T$  erit productum distantiae  $Pa$  in  $493''$ , intra quod lumen percurrit distantiam mediam terrae a Sole, quam pro unitate accepimus. In hoc calculo pro distantia  $Pa$  etiam  $PA$  vel  $pa$  accipere licebit, quum differentia nullius momenti esse possit.

Ex his principiis tres demanant methodi, planetae vel cometae locum apparentem pro quovis tempore  $t$  determinandi, e quibus modo hanc modo illam praeferre conveniet.

I. Subtrahatur a tempore proposito tempus intra quod lumen a planeta ad terram descendit: sic prodibit tempus reductum  $T$ , pro quo locus verus more solito computatus cum apparente pro  $t$  identicus erit. Ad computum reductionis temporis  $t-T$  distantiam a terra novisse oportet: plerumque ad hunc finem subsidia commoda non deerunt e. g. per ephemeridem vel levi tantum calamo calculatam, alioquin distantiam veram pro tempore  $t$  more solito sed neglecta praecisione nimia per calculum praeliminarem determinare sufficiet.

II. Computetur pro tempore proposito  $t$  locus verus atque distantia, ex hac

reductio temporis  $t-T$ , atque hinc adiumento motus diurni (in longitudine et latitudine vel in ascensione recta et declinatione) reductio loci veri ad tempus  $T$ .

III. Computetur locus heliocentricus terrae quidem pro tempore  $t$ : locus heliocentricus planetae autem pro tempore  $T$ : dein ex horum combinatione more solito locus geocentricus planetae, qui aberratione fixarum (per methodum notam eruenda sive e tabulis depromenda) auctus locum apparentem quaesitum suppetabit.

Methodus secunda, quae vulgo in usum vocari solet, eo quidem prae reliquis se commendat, quod ad distantiam determinandam numquam opus est calculo duplici, attamen eo laborat incommodo, quod adhiberi nequit, nisi plures loci vicini vel calculentur vel ex observationibus iam innotuerint; alioquin enim motum diurnum pro dato habere non liceret.

Incommodum, quo methodus prima et tertia premuntur, plane tollitur quoties plures loci sibi vicini calculandi sunt. Quam primum enim pro quibusdam distantiae iam innotuerunt, percommode et praecisione sufficiente distantias proximae sequentes per subsidia trita concludere licebit. Ceterum si distantia est nota, methodus prima tertiae ideo plerumque praeferrenda erit, quod aberratione fixarum opus non habet; sin vero ad calculum duplicem refugiendum est, tertia eo se commendat, quod in calculo altero locus terrae saltem retinendus est.

Sponte iam se offerunt, quae ad problema inversum requiruntur, puta si e loco apparente verus derivandus est. Scilicet secundum methodum I. retinebis locum ipsum immutatum, sed tempus  $t$ , cui locus propositus ut apparens respondet, convertes in reductum  $T$ , cui idem tanquam verus respondebit. Secundum methodum II. retinebis tempus  $t$ , sed loco proposito adicies motum intra tempus  $t-T$ , quasi istum ad tempus  $t+(t-T)$  reducere velles. Secundum methodum III. locum propositum ab aberratione fixarum liberatum tanquam locum verum pro tempore  $T$  considerabis, sed terrae locus verus temporis  $t$  respondens retinendus est ac si ad istud pertineret. Utilitas methodi tertiae in Libro secundo clarius elucebit.

Ceterum, ne quid desit, adhuc observamus, locum Solis ab aberratione perinde affici ac locum planetae: sed quoniam tum distantia a terra tum motus diurnus propemodum sunt constantes, aberratio ipsa semper valorem tantum non constantem obtinet motui medio solis in  $493''$  aequalem, adeoque  $= 20'25''$ , quae quantitas a longitudine vera subtrahenda est ut apparens prodeat. Valor aberratio-

nis exactus est in ratione composita distantiae et motus diurni, sive quod eodem redit in ratione inversa distantiae, unde ille valor medius in apogeo  $0^{\circ}34'$  diminuendus in perigeo tantundem augendus esset. Ceterum tabulae nostrae solares aberrationem constantem  $-20^{\circ}25'$  iam includunt; quapropter ad obtinendum longitudinem veram tabulari  $20^{\circ}25'$  addere oportebit.

## 72.

Finem huic Sectioni imponent quaedam problemata, quae in determinatione orbitarum planetarum et cometarum usum frequentem praestant. Ac primo quidem ad parallaxem reveniemus, a qua locum observatum liberare in art. 70. docuimus. Talis reductio ad centrum terrae, quum planetae distantiam a terra proxime saltem notam supponat, institui nequit, quoties planetae observati orbita omnino adhuc incognita est. Attamen in hoc quoque casu finem saltem eundem assequi licet, cuius causa reductio ad centrum terrae suscipitur, ideo scilicet, quod hoc centro in plano eclipticae iacente vel iacere supposito plures formulae maiorem simplicitatem et concinnitatem nanciscuntur, quam si observatio ad punctum extra planum eclipticae referretur. Hoc itaque respectu nihil interest, utrum observatio ad centrum terrae an ad quodvis aliud punctum in plano eclipticae reducatur. Iam patet, si ad hunc finem punctum intersectionis plani eclipticae cum recta a planeta ad locum verum observationis ducta eligatur, observationem ipsam nulla prorsus reductione opus habere, quum planeta ex omnibus punctis illius rectae perinde videatur \*): quamobrem hoc punctum quasi locum fictum observationis pro vero substituere licebit. Situm illius puncti sequenti modo determinamus.

Sit corporis coelestis longitudo  $\lambda$ , latitudo  $\ell$ , distantia  $\Delta$ , omnia respectu loci veri observationis in terrae superficie, cuius zenith respondeat longitudo  $l$ , latitudo  $b$ ; porro sit  $\pi$  semidiameter terrae,  $L$  longitudo heliocentrica centri terrae,  $B$  eiusdem latitudo,  $R$  eiusdem distantia a Sole; denique  $L'$  longitudo heliocentrica loci ficti,  $R'$  ipsius distantia a Sole,  $\Delta + \delta$  ipsius distantia a corpore coelesti. Tunc nullo negotio eruentur aequationes sequentes, denotante  $N$  angulum arbitrarium:

\*) Si ultima praecisio desideraretur, intervallum temporis, intra quod lumen a vero loco observationis ad fictum seu ab hoc ad illum delabitur, temporis proposito vel addere vel inde subducere oporteret, siquidem de locis aberratione affectis agitur: sed haec differentia vix ullius momenti esse potest, nisi latitudo perparva fuerit.

$$\begin{aligned} R' \cos(L'-N) + \delta \cos \ell \cos(\lambda-N) &= R \cos B \cos(L-N) + \pi \cos b \cos(l-N) \\ R' \sin(L'-N) + \delta \cos \ell \sin(\lambda-N) &= R \cos B \sin(L-N) + \pi \cos b \sin(l-N) \\ \delta \sin \ell &= R \sin B + \pi \sin b \end{aligned}$$

Statuendo itaque

$$\begin{aligned} \text{I. } (R \sin B + \pi \sin b) \cotang \ell &= \mu, \text{ erit} \\ \text{II. } R' \cos(L'-N) &= R \cos B \cos(L-N) + \pi \cos b \cos(l-N) - \mu \cos(\lambda-N) \\ \text{III. } R' \sin(L'-N) &= R \cos B \sin(L-N) + \pi \cos b \sin(l-N) - \mu \sin(\lambda-N) \\ \text{IV. } \delta &= \frac{\mu}{\cos \ell} \end{aligned}$$

Ex aequationibus II. III. determinari poterunt  $R'$  et  $L'$ , ex IV. intervallum temporis temporis observationis addendum quod erit minutis secundis  $= 493 \delta$ .

Hae aequationes sunt exactae et generales, poteruntque tunc quoque adhiberi, ubi pro plano ecliptica aequatore substituto  $L, L', l, \lambda$  designant ascensionem rectas,  $B, b, \ell$  declinationes. Sed in casu de quo hic potissimum agimus, scilicet ubi locus fictus in ecliptica situs esse debet, exiguitas quantitatum  $B, \pi, L'-L$  adhuc quandam formularum praecedentium contractionem permittit. Poterit enim pro  $\pi$  assumi parallaxis media solaris,  $B$  pro  $\sin B$ , 1 pro  $\cos B$  et  $\cos(L'-L)$ ,  $L'-L$  pro  $\sin(L'-L)$ . Ita faciendo  $N=L$ , formulae praecedentes assumunt formam sequentem:

$$\begin{aligned} \text{I. } \mu &= (RB + \pi \sin b) \cotang \ell \\ \text{II. } R' &= R + \pi \cos b \cos(l-L) - \mu \cos(\lambda-L) \\ \text{III. } L'-L &= \frac{\pi \cos b \sin(l-L) - \mu \sin(\lambda-L)}{R'} \end{aligned}$$

Proprie quidem hic  $B, \pi, L'-L$  in partibus radii exprimendi sunt; sed patet, si illi anguli in minutis secundis exprimantur, aequationes I. III. sine mutatione retineri posse, pro II. autem substitui debere

$$R' = R + \frac{\pi \cos b \cos(l-L) - \mu \cos(\lambda-L)}{206265''}$$

Ceterum in formula III. pro denominatore  $R'$  absque errore sensibili semper adhibere licebit  $R$ . Reductio temporis autem, angulis in minutis secundis expressis, fiet

$$= \frac{493'' \cdot \mu}{206265'' \cdot \cos \ell}$$

73.

*Exemplum.* Sit  $\lambda = 354^{\circ}44'54''$ ,  $\delta = -4^{\circ}59'32''$ ,  $l = 24^{\circ}29'$ ,  $b = 46^{\circ}53'$ ,  
 $L = 12^{\circ}28'54''$ ,  $B = +0^{\circ}49'$ ,  $R = 0,9988839$ ,  $\pi = 8^{\circ}60'$ . Ecce iam calculum:

|                     |         |                             |         |
|---------------------|---------|-----------------------------|---------|
| $\log R$ . . . . .  | 9,99951 | $\log \pi$ . . . . .        | 0,93150 |
| $\log B$ . . . . .  | 9,69020 | $\log \sin b$ . . . . .     | 9,86330 |
| $\log BR$ . . . . . | 9,68971 | $\log \pi \sin b$ . . . . . | 0,79780 |

|                                    |             |
|------------------------------------|-------------|
| Hinc $\log(BR + \pi \sin b)$ . . . | 0,83040     |
| $\log \cotang b$ . . . . .         | 1,05873 n   |
| $\log \mu$ . . . . .               | 1,88913 n   |
| $\log \pi$ . . . . .               | 0,93450     |
| $\log \cos b$ . . . . .            | 9,83473     |
| $\log l$ . . . . .                 | 4,68557     |
| $\log \cos(l-L)$ . . . . .         | 9,99040     |
| numerus                            | 5,44520     |
| numerus                            | + 0,0000279 |

|                                      |                            |
|--------------------------------------|----------------------------|
| Hinc colligitur $R' = R + 0,0003856$ | $= 0,9992695$ . Porro erit |
| $\log \pi \cos b$ . . . . .          | 0,76923                    |
| $\log \sin(l-L)$ . . . . .           | 9,31794                    |
| Compl. log $R'$ . . . . .            | 0,00032                    |
| numerus                              | 0,08749                    |
| numerus                              | + 1'22                     |

Unde colligitur  $L' = L - 22'39$ . Denique habetur

|                           |           |
|---------------------------|-----------|
| $\log \mu$ . . . . .      | 1,88913 n |
| C. log 206265 . . . . .   | 4,68557   |
| $\log 493$ . . . . .      | 2,69285   |
| C. log $\cos b$ . . . . . | 0,00165   |
|                           | 9,26920 n |

unde reductio temporis  $= -0^{\circ}186$ , adeoque nullius momenti.

74.

Problema aliud, *e corporis coelestis loco geocentrico atque situ plani orbitae eius locum heliocentricum in orbita derivare*, eatenus praecedenti affine est, quod quoque ab intersectione rectae inter terram et corpus coeleste ductae cum plano

positione dato pendet. Solutio commodissime petitur e formulis art. 65., ubi characterum significatio haec erat:

$L$  longitudo terrae,  $R$  distantia a Sole, latitudinem  $B$  statuimus  $= 0$  (quum casus, ubi non est  $= 0$ , ad hunc facile reduci possit per art. 72), unde  $R' = R$ ;  $l$  corporis coelestis longitudo geocentrica,  $b$  latitudo,  $\Delta$  distantia a terra,  $r$  distantia a Sole,  $u$  argumentum latitudinis,  $\Omega$  longitudo nodi assendentis,  $i$  inclinatio orbitae. Ita habemus aequationes

$$\begin{aligned} \text{I. } r \cos u &= R \cos(L - \Omega) = \Delta \cos b \cos(l - \Omega) \\ \text{II. } r \cos i \sin u &= R \sin(L - \Omega) = \Delta \cos b \sin(l - \Omega) \\ \text{III. } r \sin i \sin u &= \Delta \sin b \end{aligned}$$

Multiplicando aequationem I. per  $\sin(L - \Omega) \sin b$ , II. per  $-\cos(L - \Omega) \sin b$ , III. per  $-\sin(L - l) \cos b$ , fit additis productis

$$\cos u \sin(L - \Omega) \sin b - \sin u \cos i \cos(L - \Omega) \sin b - \sin u \sin i \sin(L - l) \cos b = 0$$

unde

$$\text{IV. } \tan u = \frac{\sin(L - l) \sin b}{\cos i \cos(L - \Omega) \sin b + \sin i \sin(L - l) \cos b}$$

Multiplicando autem I. per  $\sin(l - \Omega)$ , II. per  $-\cos(l - \Omega)$ , prodit productis additis

$$\text{V. } r = \frac{R \sin(L - l)}{\sin u \cos i \cos(l - \Omega) - \cos u \sin(l - \Omega)}$$

Ambiguitas in determinatione ipsius  $u$  per aequ. IV., sponte tollitur per aequ. III., quae ostendit,  $u$  inter  $0$  et  $180^{\circ}$  vel inter  $180^{\circ}$  et  $360^{\circ}$  accipi debere, prout latitudo  $b$  fuerit positiva vel negativa; sin vero fuerit  $b = 0$ , aequ. V. docet, statui debere  $u = 0$  vel  $u = 180^{\circ}$ , prout  $\sin(L - l)$  et  $\sin(l - \Omega)$  diversa signa habeant, vel eadem.

Computum numericum formularum IV. et V. variis modis per introductionem angulorum auxiliarum contrahere licet. E. g.

$$\begin{aligned} \text{statuendo } \frac{\tan b \cos(L - \Omega)}{\sin(l - l)} &= \tan A, \text{ fit } \tan u = \frac{\sin A \tan(L - \Omega)}{\sin(A + l)} \\ \text{statuendo } \frac{\tan i \sin(L - l)}{\cos(L - \Omega)} &= \tan B, \text{ fit } \tan u = \frac{\cos B \sin b \tan(L - \Omega)}{\sin(B + b) \cos i} \end{aligned}$$

Perinde aequ. V. per introductionem anguli cuius tangens  $= \cos i \tan u$ , vel

$= \frac{\tan(L-\Omega)}{\cos i}$  formam concinniores nanciscitur. Sicuti formulam V. e combinatione aequationum I. II. obtinimus, per combinationem aequationum II. III. ad sequentem pervenimus:

$$r = \frac{R \sin(L-\Omega)}{\sin u (\cos i - \sin i \sin(L-\Omega) \cotang b)}$$

et perinde per combinationem aequationum I. III. ad hanc

$$r = \frac{R \cos(L-\Omega)}{\cos u - \sin u \sin i \cos(L-\Omega) \cotang b}$$

Utramque perinde ut V. per introductionem angulorum auxiliarum simpliciores reddere licet. Solutiones e praecedentibus demanantes collectae exemploque illustratae inveniuntur in *VON ZACH Monatliche Correspondenz*, Bd. V. S. 540 [GAUSS *Werke*, Bd. VI. S. 87, 1802 Juni], quapropter hic evolutione ulteriori supersedemus. — Si praeter  $u$  et  $r$  etiam distantia  $\Delta$  desideratur, per aequationem III. determinari poterit.

## 75.

Alia solutio problematis praec. superstruitur observationi in art. 64. III. traditae, quod locus heliocentricus terrae, geocentricus corporis coelestis eiusdemque locus heliocentricus in uno eodemque circulo maximo sphaerae sunt siti. Sint in Fig. 3. illi loci resp.  $T, G, H$ ; porro  $\Omega$  locus nodi ascendentis;  $\Omega T, \Omega H$  partes eclipticae et orbitae,  $GP$  perpendicularum ad eclipticam ex  $G$  demissum, quod igitur erit  $= b$ . Hinc et ex arcu  $PT = L - l$  determinabitur angulus  $T$  atque arcus  $TG$ . Dein in triangulo sphaerico  $\Omega HT$  data sunt angulus  $\Omega = i$ , angulus  $T$  latusque  $\Omega T = L - \Omega$ , unde eruentur duo reliqua latera  $\Omega H = u$  atque  $TH$ . Tandem erit  $HG = TG - TH$  atque  $r = \frac{R \sin TG}{\sin HG}$ ,  $\Delta = \frac{R \sin TH}{\sin HG}$ .

## 76.

In art. 52. variationes differentiales longitudinis et latitudinis heliocentricae distantiaeque curtatae per variationes argumenti latitudinis  $u$ , inclinationis  $i$  radiique vectoris  $r$  exprimere docuimus, posteaque (art. 64. IV.) ex illis deduximus variationes longitudinis et latitudinis geocentricae,  $l$  et  $b$ ; per combinationem itaque harum formularum  $dl$  et  $db$  per  $du, di, d\Omega, dr$  expressae habebuntur. Sed operae pretium erit ostendere, quomodo in hoc quoque calculo reductione loci heliocentrici ad eclipticam supersedere liceat, sicuti in art. 65. locum geocentricum

immediate e loco heliocentrico in orbita deduximus. Ut formulae eo simpliciores evadant, latitudinem terrae negligemus, quum certe in formulis differentialibus effectum sensibilem habere nequeat. Praesto sunt itaque formulae sequentes, in quibus brevitatis caussa  $\omega$  pro  $l - \Omega$ , nec non ut supra  $\Delta'$  pro  $\Delta \cos b$  scribimus.

$$\begin{aligned} \Delta' \cos \omega &= r \cos u - R \cos(L - \Omega) &= \xi \\ \Delta' \sin \omega &= r \cos i \sin u - R \sin(L - \Omega) &= \eta \\ \Delta' \tang b &= r \sin i \sin u &= \zeta \end{aligned}$$

e quarum differentiatione prodit

$$\begin{aligned} \cos \omega \cdot d\Delta' - \Delta' \sin \omega \cdot d\omega &= d\xi \\ \sin \omega \cdot d\Delta' + \Delta' \cos \omega \cdot d\omega &= d\eta \\ \tang b \cdot d\Delta' + \frac{\Delta}{\cos b} db &= d\zeta \end{aligned}$$

Hinc per eliminationem

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{-\sin \omega \cdot d\xi + \cos \omega \cdot d\eta}{\Delta'} \\ db &= \frac{-\cos \omega \sin b \cdot d\xi - \sin \omega \sin b \cdot d\eta + \cos b \cdot d\zeta}{\Delta'} \end{aligned}$$

Si in his formulis pro  $\xi, \eta, \zeta$  valores sui rite substituuntur,  $d\omega$  et  $db$  per  $dr, du, di, d\Omega$  expressae prodibunt; dein, propter  $dl = d\omega + d\Omega$ , differentia partialia ipsarum  $l, b$  ita se habebunt:

- I.  $\Delta' \left( \frac{dl}{dr} \right) = -\sin \omega \cos u + \cos \omega \sin u \cos i$
- II.  $\frac{\Delta'}{r} \left( \frac{dl}{du} \right) = \sin \omega \sin u + \cos \omega \cos u \cos i$
- III.  $\frac{\Delta'}{r} \left( \frac{dl}{di} \right) = -\cos \omega \sin u \sin i$
- IV.  $\left( \frac{dl}{d\Omega} \right) = 1 + \frac{R}{\Delta'} \cos(L - \Omega - \omega) = 1 + \frac{R}{\Delta'} \cos(L - l)$
- V.  $\Delta' \left( \frac{db}{dr} \right) = -\cos \omega \cos u \sin b - \sin \omega \sin u \cos i \sin b + \sin u \sin i \cos b$
- VI.  $\frac{\Delta'}{r} \left( \frac{db}{du} \right) = \cos \omega \sin u \sin b - \sin \omega \cos u \cos i \sin b + \cos u \sin i \cos b$
- VII.  $\frac{\Delta'}{r} \left( \frac{db}{di} \right) = \sin \omega \sin u \sin i \sin b + \sin u \cos i \cos b$
- VIII.  $\frac{\Delta'}{R} \left( \frac{db}{d\Omega} \right) = \sin b \sin(L - \Omega - \omega) = \sin b \sin(L - l)$

Formulae IV. et VIII. hic iam in forma ad calculum commodissima apparent; formulae I. III. V. autem per substitutiones obvias ad formam concinnioremi refiguntur, puta

$$I^*. \left(\frac{dt}{dr}\right) = \frac{R}{r\Delta} \sin(L-l)$$

$$III^*. \left(\frac{dt}{di}\right) = -\cos\omega \tan b$$

$$V^*. \left(\frac{db}{dr}\right) = -\frac{R}{r\Delta} \cos(L-l) \sin b = -\frac{R}{r\Delta} \cos(L-l) \sin b \cos b$$

Denique formulae reliquae quoque II. VI. VII. per introductionem quorundam angulorum auxiliarium in formam simplicioremi abeunt: quod commodissime fit sequenti modo. Determinentur anguli auxiliares  $M$ ,  $N$  per formulas

$$\tan M = \frac{\tan\omega}{\cos i}, \quad \tan N = \sin\omega \tan i = \tan M \cos\omega \sin i$$

Tunc simul fit

$$\frac{\cos M^2}{\cos N^2} = \frac{1 + \tan N^2}{1 + \tan M^2} = \frac{\cos i^2 + \sin\omega^2 \sin i^2}{\cos i^2 + \tan\omega^2} = \cos\omega^2$$

iam quum ambiguitatem in determinatione ipsorum  $M$ ,  $N$  per tangentes suas remanentem ad lubitum decidere liceat, hoc ita fieri posse patet, ut habeatur  $\frac{\cos M}{\cos N} = +\cos\omega$ , ac proinde  $\frac{\sin N}{\sin M} = +\sin i$ . Quibus ita factis, formulae II. VI. VII. transeunt in sequentes:

$$II^*. \left(\frac{dt}{du}\right) = \frac{r \sin\omega \cos(M-u)}{\Delta \sin M}$$

$$VI^*. \left(\frac{db}{du}\right) = \frac{r}{\Delta} (\cos\omega \sin i \cos(M-u) \cos(N-b) + \sin(M-u) \sin(N-b))$$

$$VII^*. \left(\frac{db}{di}\right) = \frac{r \sin u \cos i \cos(N-b)}{\Delta \cos N}$$

Hae transformationes respectu formularum II. VII. neminem morabuntur, respectu formulae VI. autem aliqua explicatio haud superflua erit. Substituendo scilicet in formula VI. primo  $M-(M-u)$  pro  $u$ , prodit

$$\frac{\Delta}{r} \left(\frac{db}{du}\right) = \cos(M-u) (\cos\omega \sin M \sin b - \sin\omega \cos i \cos M \sin b + \sin i \cos M \cos b) - \sin(M-u) (\cos\omega \cos M \sin b + \sin\omega \cos i \sin M \sin b - \sin i \sin M \cos b)$$

Iam fit

$$\begin{aligned} \cos\omega \sin M &= \cos i^2 \cos\omega \sin M + \sin i^2 \cos\omega \sin M \\ &= \sin\omega \cos i \cos M + \sin i^2 \cos\omega \sin M \end{aligned}$$

unde pars prior illius expressionis transit in

$$\begin{aligned} \sin i \cos(M-u) (\sin i \cos\omega \sin M \sin b + \cos M \cos b) \\ = \sin i \cos(M-u) (\cos\omega \sin N \sin b + \cos\omega \cos N \cos b) \\ = \cos\omega \sin i \cos(M-u) \cos(N-b) \end{aligned}$$

Perinde fit

$$\cos N = \cos\omega^2 \cos N + \sin\omega^2 \cos N = \cos\omega \cos M + \sin\omega \cos i \sin M$$

unde expressionis pars posterior transit in

$$-\sin(M-u) (\cos N \sin b - \sin N \cos b) = \sin(M-u) \sin(N-b)$$

Hinc expressio VI\*. protinus demanat.

Angulus auxiliaris  $M$  etiam ad transformationem formulae I. adhiberi potest, quo introducto assumit formam

$$I^{**}. \left(\frac{dt}{dr}\right) = -\frac{\sin\omega \sin(M-u)}{\Delta \sin M}$$

e cuius comparatione cum formula I\*. concluditur  $-R \sin(L-l) \sin M = r \sin\omega \sin(M-u)$ ; hinc etiam formulae II\*. forma paullo adhuc simplicior tribui potest, puta

$$II^{**}. \left(\frac{dt}{du}\right) = -\frac{R}{\Delta} \sin(L-l) \cotang(M-u)$$

Ut formula VI\*. adhuc magis contrahatur, angulum auxiliarem novum introducere oportet, quod duplici modo fieri potest, scilicet statuendo

$$\text{vel } \tan P = \frac{\tan(M-u)}{\cos\omega \sin i}, \quad \text{vel } \tan Q = \frac{\tan(N-b)}{\cos\omega \sin i} : \text{ quo facto emergit}$$

$$VI^{**}. \left(\frac{db}{du}\right) = \frac{r \sin(M-u) \cos(N-b-P)}{\Delta \sin P} = \frac{r \sin(N-b) \cos(M-u-Q)}{\Delta \sin Q}$$

Ceterum quantitates auxiliares  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$  non sunt mere fictitiae, facileque, quidnam in sphaera coelesti singulis respondeat, assignare liceret: quin adeo hoc modo aequationum praecedentium plures adhuc elegantius exhiberi possent per arcus angulosve in sphaera, quibus tamen eo minus hic immoramur, quum in calculo numerico ipso formulas supra traditas superfluas reddere non valeant.

77.

Iunctis iis, quae in art. praec. evoluta sunt, cum iis quae in artt. 15. 16. 20. 27. 28. pro singulis sectionum conicarum generibus tradidimus, omnia praesto erunt, quae ad calculum variationum differentialium loco geocentrico a variationibus singulorum elementorum inductarum requiruntur. Ad maiorem illustrationem horum praeceptorum exemplum supra in artt. 13. 14. 51. 63. 65. tractatum resumemus. Ac primo quidem ad normam art. praec.  $dl$  et  $db$  per  $dr$ ,  $du$ ,  $di$ ,  $d\Omega$  exprimemus, qui calculus ita se habet:

|                                  |                                   |                                          |
|----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------|
| $\log \tan \omega \dots 8,40113$ | $\log \sin \omega \dots 8,40099n$ | $\log \tan(M-u) \dots 9,41932n$          |
| $\log \cos i \dots 9,98853$      | $\log \tan i \dots 9,36723$       | $\log \cos \omega \sin i \dots 9,35562n$ |
| $\log \tan M \dots 8,41260$      | $\log \tan N \dots 7,76822n$      | $\log \tan P \dots 0,06370$              |
| $M = 1^{\circ}28'52''$           | $N = 179^{\circ}39'50''$          | $P = 49^{\circ}11'13''$                  |
| $M-u = 165\ 17\ 8$               | $N-b = 186\ 1\ 45$                | $N-b-P = 136\ 50\ 32$                    |

|                                                   |                                                   |                                                    |
|---------------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| I*.                                               | II**.                                             | III*.                                              |
| $\log \sin(L-b) \dots 9,72125$                    | (*) $\dots 9,63962$                               | $\log \cos \omega \dots 9,99986n$                  |
| $\log R \dots 9,99810$                            | $L \cot(M-u) \dots 0,58068n$                      | $\log \tan b \dots 9,04749n$                       |
| $C \log \Delta \dots 9,92027$                     | $\log \left( \frac{dl}{du} \right) \dots 0,22030$ | $\log \left( \frac{dl}{di} \right) \dots 9,04735n$ |
| (*) $\dots 9,63962$                               |                                                   |                                                    |
| $C \log r \dots 9,67401$                          |                                                   |                                                    |
| $\log \left( \frac{dl}{dr} \right) \dots 9,31363$ |                                                   |                                                    |

|                                                |                                                   |                                                    |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| IV.                                            | V*.                                               | VI**.                                              |
| $\log \frac{R}{N} \dots 9,91837$               | (**) $\dots 9,84793$                              | $\log \frac{r}{\Delta} \dots 0,24357$              |
| $\log \cos(L-l) \dots 9,92956$                 | $\log \sin b \cos b \dots 9,04212n$               | $\log \sin(M-u) \dots 9,40484$                     |
| (**) $\dots 9,84793$                           | $C \log r \dots 9,67401$                          | $L \cos(N-b-P) \dots 9,86301n$                     |
| $= \log \left( \frac{dl}{d\Omega} \right) - 1$ | $\log \left( \frac{db}{dr} \right) \dots 8,56406$ | $C \log \sin P \dots 0,12099$                      |
|                                                |                                                   | $\log \left( \frac{db}{du} \right) \dots 9,63241n$ |

|                                                    |
|----------------------------------------------------|
| VII*.                                              |
| $\log r \sin u \cos i \dots 9,75999n$              |
| $\log \cos(N-b) \dots 9,99759n$                    |
| $C \log \Delta \dots 9,91759$                      |
| $C \log \cos N \dots 0,00001n$                     |
| $\log \left( \frac{db}{di} \right) \dots 9,67518n$ |

|                                                         |
|---------------------------------------------------------|
| VIII.                                                   |
| (*) $\dots 9,63962$                                     |
| $\log \sin b \cos b \dots 9,04212n$                     |
| $\log \left( \frac{db}{d\Omega} \right) \dots 8,68174n$ |

Collectis hisce valoribus prodit

$$dl = +0,20589 dr + 1,66073 du - 0,11152 di + 1,70458 d\Omega$$

$$db = +0,03665 dr - 0,42895 du - 0,47335 di - 0,04805 d\Omega$$

Vix necesse erit quod iam saepius monuimus hic repetere, scilicet, vel variationes  $dl$ ,  $db$ ,  $du$ ,  $di$ ,  $d\Omega$  in partibus radii exprimendus esse, vel coefficientes ipsius  $dr$  per 206265<sup>\*</sup> multiplicandos, si illae in minutis secundis expressae concipiantur.

Designando iam longitudinem perihelii (quae in exemplo nostro est  $52^{\circ}18'9''30$ ) per  $\Pi$  atque anomaliam veram per  $v$ , erit longitudo in orbita  $= u + \Omega = v + \Pi$ , adeoque  $du = dv + d\Pi - d\Omega$ , quo valore in formulis praecedentibus substituto,  $dl$  et  $db$  per  $dr$ ,  $dv$ ,  $d\Pi$ ,  $d\Omega$ ,  $di$  expressae habebuntur. Nihil itaque iam superest, nisi ut  $dr$  et  $dv$  ad normam artt. 15. 16. per variationes differentiales elementorum ellipticorum exhibeantur<sup>\*)</sup>.

$$\text{Erat in exemplo nostro, art. 14., } \log \frac{r}{a} = 9,90355 = \log \left( \frac{dr}{da} \right)$$

|                                                          |                                                          |
|----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\log \frac{aa}{rr} \dots 0,19290$                       | $\log a \dots 0,42244$                                   |
| $\log \cos \varphi \dots 9,98652$                        | $\log \tan \varphi \dots 9,40320$                        |
| $\log \left( \frac{dv}{dM} \right) \dots 0,17942$        | $\log \sin v \dots 9,84931n$                             |
| $2 - e \cos E = 1,80085$                                 | $\log \left( \frac{dr}{dM} \right) \dots 9,67493n$       |
| $ee = 0,06018$                                           | $\log a \dots 0,42244$                                   |
| $1,74067$                                                | $\log \cos \varphi \dots 9,98652$                        |
| $\log \dots 0,24072$                                     | $\log \cos v \dots 9,84966$                              |
| $\log \frac{aa}{rr} \dots 0,19290$                       | $\log \left( \frac{dr}{d\varphi} \right) \dots 0,25862n$ |
| $\log \sin E \dots 9,76634n$                             |                                                          |
| $\log \left( \frac{dv}{d\varphi} \right) \dots 0,19996n$ |                                                          |

Hinc colligitur

$$dv = +1,51154 dM - 1,58475 d\varphi$$

$$dr = -0,47310 dM - 1,81393 d\varphi + 0,80085 da$$

<sup>\*)</sup> Characterem  $M$  in calculo sequente haud amplius angulum nostrum auxiliarem exprimere, sed (ut in Sect. I.) anomaliam mediam, quisque sponte videbit.

quibus valoribus in formulis praecedentibus substitutis, prodit

$$\begin{aligned} dl &= +2,41287 dM - 3,00531 d\varphi + 0,16488 da + 1,66073 d\Pi - 0,11152 di \\ &\quad + 0,04385 d\Omega \\ db &= -0,66572 dM + 0,61331 d\varphi + 0,02935 da - 0,42895 d\Pi - 0,47335 di \\ &\quad + 0,38090 d\Omega \end{aligned}$$

Si tempus cui locus computatus respondet  $n$  diebus ab epocha distare supponitur, longitudoque media pro epocha per  $N$ , motus diurnus per  $\gamma$  denotatur erit  $M = N + n\gamma - \Pi$ , adeoque  $dM = dN + nd\gamma - d\Pi$ . In exemplo nostro tempus loco computato respondens est Octobris dies 17,41507 anni 1804 sub meridiano Parisiensi: quodsi itaque pro epocha assumitur initium anni 1805, est  $n = -74,58493$ ; longitudo media pro epocha ista statuta fuerat  $= 41^{\circ}52'21''.64$ , motusque diurnus  $= 824''.7988$ . Substituto iam in formulis modo inventis pro  $dM$  valore suo, mutationes differentiales loci geocentrici per solas mutationes elementorum expressae ita se habent:

$$\begin{aligned} dl &= 2,41287 dN - 179,96 d\gamma - 0,75214 d\Pi - 3,00531 d\varphi + 0,16488 da \\ &\quad - 0,11152 di + 0,04385 d\Omega \\ db &= -0,66572 dN + 49,65 d\gamma + 0,23677 d\Pi + 0,61331 d\varphi + 0,02935 da \\ &\quad - 0,47335 di + 0,38090 d\Omega \end{aligned}$$

Si corporis coelestis massa vel negligitur vel saltem tanquam cognita spectatur,  $\gamma$  et  $a$  ab invicem dependentes erunt, adeoque vel  $d\gamma$  vel  $da$  e formulis nostris eliminare licebit. Scilicet quum per art. 6. habeatur  $\gamma a^3 = kV(1+\mu)$ , erit  $\frac{d\gamma}{\gamma} = -\frac{3}{2} \frac{da}{a}$ , in qua formula, si  $d\gamma$  in partibus radii exprimenda est, etiam  $\gamma$  perinde exprimere oportebit. Ita in exemplo nostro habetur

$$\begin{array}{l} \log \gamma . . . . . 2,91635 \\ \log 1'' . . . . . 4,68557 \\ \log \frac{3}{2} . . . . . 0,17609 \\ \hline C. \log a . . . . . 9,57756 \\ \log \frac{d\gamma}{da} . . . . . 7,35557n, \text{ sive } d\gamma = -0,0022676 da, \end{array}$$

$$\text{atque } da = -440,99 d\gamma,$$

quo valore in formulis nostris substituto, tandem emergit forma ultima:

$$\begin{aligned} dl &= 2,41287 dN - 252,67 d\gamma - 0,75214 d\Pi - 3,00531 d\varphi - 0,11152 di \\ &\quad + 0,04385 d\Omega \\ db &= -0,66572 dN + 36,71 d\gamma + 0,23677 d\Pi + 0,61331 d\varphi - 0,47335 di \\ &\quad + 0,38090 d\Omega \end{aligned}$$

In evolutione harum formularum omnes mutationes  $dl$ ,  $db$ ,  $dN$ ,  $d\gamma$ ,  $d\Pi$ ,  $d\varphi$ ,  $di$ ,  $d\Omega$  in partibus radii expressas supposuimus, manifesto autem propter homogeneitatem omnium partium eadem formulae etiamnum valebunt, si omnes illae mutationes in minutis secundis exprimentur.



### SECTIO TERTIA

*Relationes inter locos plures in orbita.*

78.

Comparatio duorum pluriumve locorum corporis coelestis tum in orbita tum in spatio tantum propositionum elegantium copiam subministrat, ut volumen integrum facile compleant. Nostrum vero propositum non eo tendit, ut hoc argumentum fertile exauriamus, sed eo potissimum, ut amplum apparatus subsidiorum ad solutionem problematis magni de determinatione orbitarum incognitarum ex observationibus, inde adstruamus: quamobrem neglectis quae ab instituto nostro nimis aliena essent, eo diligentius omnia quae ullo modo illuc conducere possunt evolvemus. Disquisitionibus ipsis quasdam propositiones trigonometricas praemitimus, ad quas, quum frequentioris usus sint, saepius recurrere oportet.

I. Denotantibus  $A, B, C$  angulos quoscunque, habetur

$$\begin{aligned}\sin A \sin(C-B) + \sin B \sin(A-C) + \sin C \sin(B-A) &= 0 \\ \cos A \sin(C-B) + \cos B \sin(A-C) + \cos C \sin(B-A) &= 0\end{aligned}$$

II. Si duae quantitates  $p, P$  ex aequationibus talibus

$$\begin{aligned}p \sin(A-P) &= a \\ p \sin(B-P) &= b\end{aligned}$$

determinandae sunt, hoc fiet generaliter adiumento formularum

$$\begin{aligned}p \sin(B-A) \sin(H-P) &= b \sin(H-A) - a \sin(H-B) \\ p \sin(B-A) \cos(H-P) &= b \cos(H-A) - a \cos(H-B)\end{aligned}$$

in quibus  $H$  est angulus arbitrarius. Hinc deducuntur (art. 14. II.) angulus  $H-P$  atque  $p \sin(B-A)$ ; et hinc  $P$  et  $p$ . Plerumque conditio adiecta esse solet, ut  $p$  esse debeat quantitas positiva, unde ambiguitas in determinatione anguli  $H-P$  per tangentem suam deciditur; deficiente autem illa conditione, ambiguitatem ad libitum decidere licebit. Ut calculus commodissimus sit, angulum arbitrium  $H$  vel  $= A$  vel  $= B$  vel  $= \frac{1}{2}(A+B)$  statuere conveniet. In casu priori aequationes ad determinandum  $P$  et  $p$  erunt

$$\begin{aligned}p \sin(A-P) &= a \\ p \cos(A-P) &= \frac{b - a \cos(B-A)}{\sin(B-A)}\end{aligned}$$

In casu secundo aequationes prorsus analogae erunt, in casu tertio autem

$$\begin{aligned}p \sin(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P) &= \frac{b+a}{2 \cos \frac{1}{2}(B-A)} \\ p \cos(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P) &= \frac{b-a}{2 \sin \frac{1}{2}(B-A)}\end{aligned}$$

Quodsi itaque angulus auxiliaris  $\zeta$  introducitur, cuius tangens  $= \frac{a}{b}$ , invenietur  $P$  per formulam

$$\tan(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - P) = \tan(45^\circ + \zeta) \tan \frac{1}{2}(B-A)$$

ac dein  $p$  per aliquam formularum praecedentium, ubi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(b+a) &= \sin(45^\circ + \zeta) \sqrt{\frac{ab}{\sin 2\zeta}} = \frac{a \sin(45^\circ + \zeta)}{\sin \zeta \sqrt{2}} = \frac{b \sin(45^\circ + \zeta)}{\cos \zeta \sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}(b-a) &= \cos(45^\circ + \zeta) \sqrt{\frac{ab}{\sin 2\zeta}} = \frac{a \cos(45^\circ + \zeta)}{\sin \zeta \sqrt{2}} = \frac{b \cos(45^\circ + \zeta)}{\cos \zeta \sqrt{2}}\end{aligned}$$

III. Si  $p$  et  $P$  determinandae sunt ex aequationibus

$$\begin{aligned}p \cos(A-P) &= a \\ p \cos(B-P) &= b\end{aligned}$$

omnia in II. exposita statim applicari possent, si modo illic pro  $A$  et  $B$  ubique scriberetur  $90^\circ + A$ ,  $90^\circ + B$ : sed ut usus eo commodior sit, formulas evolutas apponere non piget. Formulae generales erunt

$$\begin{aligned}p \sin(B-A) \sin(H-P) &= -b \cos(H-A) + a \cos(H-B) \\ p \sin(B-A) \cos(H-P) &= b \sin(H-A) - a \sin(H-B)\end{aligned}$$

Transeunt itaque, pro  $H=A$  in

$$\begin{aligned} p \sin(A-P) &= \frac{a \cos(B-A)-b}{\sin(B-A)} \\ p \cos(A-P) &= a \end{aligned}$$

Pro  $H=B$ , formam similem obtinent; pro  $H=\frac{1}{2}(A+B)$  autem fiunt

$$\begin{aligned} p \sin(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) &= \frac{a-b}{2 \sin \tfrac{1}{2}(B-A)} \\ p \cos(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) &= \frac{a+b}{2 \cos \tfrac{1}{2}(B-A)} \end{aligned}$$

ita ut introducto angulo auxiliari  $\zeta$ , cuius tangens  $= \frac{a}{b}$ , fiat

$$\cotang(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}B - P) = \cotang(\zeta - 45^\circ) \tan \tfrac{1}{2}(B-A)$$

Ceterum si  $p$  immediate ex  $a$  et  $b$  sine praevio computo anguli  $P$  determinare cupimus, habemus formulam

$$p \sin(B-A) = \sqrt{(aa + bb - 2ab \cos(B-A))}$$

tum in problemate praesente tum in II.

79.

Ad completam determinationem sectionis conicae in plano suo tria requiruntur, situs perihelii, excentricitas et semiparameter. Quae si e quantitatibus datis ab ipsis pendentes eruenda sunt, tot data adsint oportet, ut tres aequationes ab invicem independentes formare liceat. Quilibet radius vector magnitudine et positione datus unam aequationem suppeditat: quamobrem ad determinationem orbitae tres radii vectores magnitudine et positione dati requiruntur; si vero duo tantum habentur, vel unum elementum ipsum iam datum esse debet, vel saltem alia quaedam quantitas, cui aequationem tertiam superstruere licet. Hinc oritur varietas problematum, quae iam deinceps pertractabimus.

Sint  $r, r'$  duo radii vectores, qui cum recta in plano orbitae e Sole ad lumbum ducta faciant secundum directionem motus angulos  $N, N'$ ; sit porro  $\Pi$  angulus quem cum eadem recta facit radius vector in perihelio, ita ut radiis vectoribus  $r, r'$  respondeant anomaliae verae  $N-\Pi, N'-\Pi$ ; denique sit  $e$  excentricitas,  $p$  semiparameter. Tunc habentur aequationes

$$\begin{aligned} \frac{p}{r} &= 1 + e \cos(N-\Pi) \\ \frac{p}{r'} &= 1 + e \cos(N'-\Pi) \end{aligned}$$

e quibus, si insuper una quantitas  $p, e, \Pi$  data est, duas reliquas determinare licebit.

Supponamus primo, datum esse semiparametrum  $p$ , patetque determinationem quantitatuum  $e$  et  $\Pi$  aequationibus

$$\begin{aligned} e \cos(N-\Pi) &= \frac{p}{r} - 1 \\ e \cos(N'-\Pi) &= \frac{p}{r'} - 1 \end{aligned}$$

fieri posse ad normam lemmatis III. in art. praec. Habemus itaque

$$\begin{aligned} \tan(N-\Pi) &= \frac{\cotang(N'-N) - \frac{r(p-r')}{r'(p-r)\sin(N'-N)}}{1} \\ \tan(\tfrac{1}{2}N + \tfrac{1}{2}N' - \Pi) &= \frac{(\frac{r'-r}{r} \cotang \tfrac{1}{2}(N'-N))}{\frac{r'+r}{p} - \frac{2rr'}{p}} \end{aligned}$$

80.

Si angulus  $\Pi$  datus est,  $p$  et  $e$  determinabuntur per aequationes

$$\begin{aligned} p &= \frac{rr'(\cos(N-\Pi) - \cos(N'-\Pi))}{r \cos(N-\Pi) - r' \cos(N'-\Pi)} \\ e &= \frac{r'-r}{r \cos(N-\Pi) - r' \cos(N'-\Pi)} \end{aligned}$$

Denominatorem communem in his formulis reducere licet sub formam  $a \cos(A-\Pi)$ , ita ut  $a$  et  $A$  a  $\Pi$  sint independentes. Designante scilicet  $H$  angulum arbitrary, fit

$$r \cos(N-\Pi) - r' \cos(N'-\Pi) = \begin{cases} (r \cos(N-H) - r' \cos(N'-H)) \cos(H-\Pi) \\ -(r \sin(N-H) - r' \sin(N'-H)) \sin(H-\Pi) \end{cases}$$

adeoque  $= a \cos(A-\Pi)$ , si  $a$  et  $A$  determinantur per aequationes

$$\begin{aligned} r \cos(N-H) - r' \cos(N'-H) &= a \cos(A-H) \\ r \sin(N-H) - r' \sin(N'-H) &= a \sin(A-H) \end{aligned}$$

Hoc modo fit

$$p = \frac{2rr'\sin\frac{1}{2}(N'-N)\sin(\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}N'-\Pi)}{a\cos(A-\Pi)}$$

$$e = \frac{r'-r}{a\cos(A-\Pi)}$$

Hae formulae imprimis sunt commodae, quoties  $p$  et  $e$  pro pluribus valoribus ipsius  $\Pi$  computandae sunt, manentibus  $r, r', N, N'$ . — Quum ad calculum quantitatum auxiliarium  $a, A$  angulum  $H$  ad libitum assumere liceat, e re erit statuere  $H = \frac{1}{2}(N+N')$ , quo pacto formulae abeunt in has

$$(r'-r)\cos\frac{1}{2}(N'-N) = -a\cos(A-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}N')$$

$$(r'+r)\sin\frac{1}{2}(N'-N) = -a\sin(A-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}N')$$

Determinato itaque angulo  $A$  per aequationem

$$\tan(A-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}N') = \frac{r'+r}{r'-r}\tan\frac{1}{2}(N'-N)$$

statim habetur

$$e = -\frac{\cos(A-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}N')}{\cos\frac{1}{2}(N'-N)\cos(A-\Pi)}$$

Calculus logarithmi quantitatis  $\frac{r'+r}{r'-r}$  per artificium saepius iam explicatum contrahere licebit.

## § 1.

Si excentricitas  $e$  data est, angulus  $\Pi$  per aequationem

$$\cos(A-\Pi) = -\frac{\cos(A-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}N')}{e\cos\frac{1}{2}(N'-N)}$$

invenietur, postquam angulus auxiliaris  $A$  per aequationem

$$\tan(A-\frac{1}{2}N-\frac{1}{2}N') = \frac{r'+r}{r'-r}\tan\frac{1}{2}(N'-N)$$

determinatus est. Ambiguitas in determinatione anguli  $A-\Pi$  per ipsos cosinum remanens in natura problematis fundata est, ita ut problemati duabus solutionibus diversis satisfieri possit, e quibus quam adoptare quamve reicere oporteat aliunde decidendum erit, ad quem finem valor saltem approximatus ipsius  $\Pi$  iam cognitus esse debet. — Postquam  $\Pi$  inventus est,  $p$  vel per formulas

$$p = r(1 + e\cos(N-\Pi)) = r'(1 + e\cos(N'-\Pi))$$

vel per hanc computabitur

$$p = \frac{2rr'e\sin\frac{1}{2}(N'-N)\sin(\frac{1}{2}N+\frac{1}{2}N'-\Pi)}{r'-r}$$

## § 2.

Supponamus denique, tres radios vectores  $r, r', r''$  datos esse, qui cum recta ad libitum  $e$  Sole in plano orbitae ducta faciant angulos  $N, N', N''$ . Habebuntur itaque, retentis signis reliquis, aequationes (I.):

$$\frac{p}{r} = 1 + e\cos(N-\Pi)$$

$$\frac{p}{r'} = 1 + e\cos(N'-\Pi)$$

$$\frac{p}{r''} = 1 + e\cos(N''-\Pi)$$

e quibus  $p, \Pi, e$  pluribus modis diversis elici possunt. Si quantitatem  $p$  ante reliquas computare placet, multiplicentur tres aequationes (I.) resp. per  $\sin(N''-N)$ ,  $-\sin(N'-N)$ ,  $\sin(N'-N)$ , fietque additis productis per lemma I. art. 78.

$$p = \frac{\sin(N''-N') - \sin(N''-N) + \sin(N'-N)}{\frac{1}{r}\sin(N''-N') - \frac{1}{r'}\sin(N''-N) + \frac{1}{r''}\sin(N'-N)}$$

Haec expressio propius considerari meretur. Numerator manifesto fit

$$= 2\sin\frac{1}{2}(N''-N')\cos\frac{1}{2}(N''-N') - 2\sin\frac{1}{2}(N'-N')\cos(\frac{1}{2}N'+\frac{1}{2}N''-N)$$

$$= 4\sin\frac{1}{2}(N''-N')\sin\frac{1}{2}(N''-N)\sin\frac{1}{2}(N'-N)$$

Statuendo porro

$$r'r'\sin(N''-N') = n, \quad rr'\sin(N'-N) = n', \quad rr''\sin(N'-N) = n'',$$

patet  $\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n', \frac{1}{2}n''$  esse areas triangulorum inter radium vectorem secundum et tertium, inter primum et tertium, inter primum et secundum. Hinc facile perspicietur, in formula nova

$$p = \frac{4\sin\frac{1}{2}(N''-N')\sin\frac{1}{2}(N''-N)\sin\frac{1}{2}(N'-N).rr'r''}{n-n'+n''}$$

denominatore esse duplum areae trianguli inter trium radiorum vectorum extremitates i. e. inter tria corporis coelestis loca in spatio contenti. Quoties haec loca

parum ab invicem remota sunt, area ista semper erit quantitas perparva et quidem ordinis tertii, siquidem  $N''-N$ ,  $N''-N'$  ut quantitates parvae ordinis primi spectantur. Hinc simul concluditur, si quantitatibus  $r$ ,  $r'$ ,  $r''$ ,  $N$ ,  $N'$ ,  $N''$  una vel plures erroribus utut levibus affectae sint, in determinatione ipsius  $p$  errorem permagnum illine nasci posse; quamobrem haecce ratio orbitae dimensiones eruendi magnam praecisionem nunquam admittet, nisi tria loca heliocentrica intervallis considerabilibus ab invicem distent.

Ceterum simulac semiparameter  $p$  inventus est,  $e$  et  $\Pi$  determinabuntur e combinatione duarum quarumcunque aequationum I. per methodum art. 79.

## 83.

Si solutionem eiusdem problematis a computo anguli  $\Pi$  inchoare malimus, methodo sequente utemur. Subtrahimus ab aequationem (I.) secunda tertiam, a prima tertiam, a prima secundam, quo pacto tres novas sequentes obtinemus (II.):

$$\begin{aligned}\frac{\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'}}{2 \sin \frac{1}{2}(N''-N')} &= \frac{e}{p} \sin(\frac{1}{2}N' + \frac{1}{2}N'' - \Pi) \\ \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r''}}{2 \sin \frac{1}{2}(N''-N)} &= \frac{e}{p} \sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N'' - \Pi) \\ \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{2 \sin \frac{1}{2}(N'-N)} &= \frac{e}{p} \sin(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - \Pi)\end{aligned}$$

Duae quaecunque ex his aequationibus secundum lemma II. art. 78. dabunt  $\Pi$  et  $\frac{e}{p}$ , unde per quamlibet aequationum (I.) habebuntur etiam  $e$  et  $p$ . Quodsi solutionem tertiam in art. 78, II. traditam adoptamus, combinatio aequationis primae cum tertia algorithmum sequentem producit. Determinetur angulus auxiliaris  $\zeta$  per aequationem

$$\tan \zeta = \frac{\frac{r}{r'} - 1}{1 - \frac{r}{r''}} \frac{\sin \frac{1}{2}(N''-N')}{\sin \frac{1}{2}(N'-N)} \quad \text{eritque}$$

$$\tan(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' + \frac{1}{2}N'' - \Pi) = \tan(45^\circ + \zeta) \tan \frac{1}{2}(N''-N)$$

Permutando locum secundum cum primo vel tertio, duae aliae solutiones huius prorsus analogae prodibunt. Quum haec methodo adhibita formulae pro  $\frac{e}{p}$  minus expeditae evadant,  $e$  et  $p$  per methodum art. 80 et duabus aequationum (I.) eruere

praestabit. Ceterum ambiguitas in determinatione ipsius  $\Pi$  per tangentem anguli  $\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' + \frac{1}{2}N'' - \Pi$  ita decidi debeat, ut  $e$  fiat quantitas positiva: scilicet manifestum est, pro  $e$  valores oppositos prodituros esse, si pro  $\Pi$  valores  $180^\circ$  diversi accipiantur. Signum ipsius  $p$  autem ab hac ambiguitate non pendet, valorque ipsius  $p$  negativus evadere nequit, nisi tria puncta data in parte hyperbolae a Sole aversa iaceant, ad quem casum legibus naturae contrarium hic non respicimus.

Quae ex applicatione methodi primae in art. 78, II. post substitutiones operosiores oriantur, in casu praesente commodius sequenti modo obtineri possunt. Multiplicetur aequationum II. prima per  $\cos \frac{1}{2}(N''-N')$ , tertia per  $\cos \frac{1}{2}(N'-N)$  subtrahaturque productum posterius a priori. Tunc lemma I. art. 78. rite applicato\*) prodibit aequatio

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} \left( \frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) \cotang \frac{1}{2}(N''-N') - \frac{1}{p} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r''} \right) \cotang \frac{1}{2}(N'-N) \\ = \frac{e}{p} \sin \frac{1}{2}(N''-N) \cos(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - \Pi)\end{aligned}$$

Quam combinando cum aequationum II. secunda inveniuntur  $\Pi$  et  $\frac{e}{p}$ , et quidem  $\Pi$  per formulam

$$\tan(\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - \Pi) = \frac{\frac{r'}{r} - \frac{r'}{r''}}{\left(1 - \frac{r}{r''}\right) \cotang \frac{1}{2}(N''-N') - \left(\frac{r'}{r} - 1\right) \cotang \frac{1}{2}(N'-N)}$$

Etiam hinc duae aliae formulae prorsus analogae derivantur, permutando locum secundum cum primo vel tertio.

## 84.

Quum per duos radios vectores magnitudine et positione datos, atque elementum orbitae unum orbitam integram determinare liceat, per illa data etiam tempus, intra quod corpus coeleste ab uno radio vectore ad alterum movetur, determinabile erit, siquidem corporis massam vel negligimus vel saltem tanquam cognitam spectamus: nos suppositioni priori inhaerebimus, ad quam posterior facile reducit. Hinc vice versa patet, duos radios vectores magnitudine et positione datos una cum tempore, intra quod corpus coeleste spatium intermedium describit, orbitam integram determinare. Hoc vero problema, ad gravissima in theoria motus corporum coelestium referendum, haud ita facile solvitur, quum expressio temporis

\*) Statuendo scilicet in formula secunda  $A = \frac{1}{2}(N''-N')$ ,  $B = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N'' - \Pi$ ,  $C = \frac{1}{2}(N'-N)$ .

per elementa transcendens sit, insuperque satis complicata. Eo magis dignum est, quod omni cura tractetur: quamobrem lectoribus haud ingratum fore speramus, quod praeter solutionem post tradendam, quae nihil amplius desiderandum relinquere videtur, eam quoque oblivioni eripiendam esse censuimus, qua olim antequam ista se obtulisset frequenter usi sumus. Problemata difficiliora semper iuvat pluribus viis aggredi, nec bonam spernere etiam si meliorem praeferas. Ab expositione huius methodi anterioris initium facimus.

85.

Retinebimus characteres  $r, r', N, N', p, e, \Pi$  in eadem significatione, in qua supra accepti sunt; differentiam  $N' - N$  denotabimus per  $\Delta$ , tempusque intra quod corpus coeleste a loco priori ad posteriorem movetur per  $t$ . Jam patet, si valor approximatus alicuius quantitatum  $p, e, \Pi$  sit notus, etiam duas reliquas inde determinari posse, ac dein per methodos in Sectione prima explicatas tempus motui a loco primo ad secundum respondens. Quod si tempori proposito  $t$  aequale evadit, valor suppositus ipsius  $p, e$  vel  $\Pi$  est ipse verus, orbitaque ipsa iam inventa: sin minus, calculus cum valore alio a primo parum diverso repetitus docebit, quanta variatio in valore temporis variationi exiguae in valore ipsius  $p, e, \Pi$  respondeat, unde per simplicem interpolationem valor correctus eruitur. Cum quo si calculus demum repetitur, tempus emergens vel ex axe cum proposito quadrabit vel saltem perparum ab eo differet, ita ut certe novis correctionibus adhibitis consensum tam exactum attingere liceat, quantum tabulae logarithmicæ et trigonometricæ permittunt.

Problema itaque eo reductum est, ut pro eo casu, ubi orbita adhuc penitus incognita est, valorem saltem approximatum alicuius quantitatum  $p, e, \Pi$  determinare doceamus. Methodum iam trademus, per quam valor ipsius  $p$  tanta præcisione eruitur, ut pro parvis quidem valoribus ipsius  $\Delta$  nulla amplius correctione indigeat, adeoque tota orbita per primum calculum omni iam præcisione determinetur, quam tabulae vulgares permittunt. Vix unquam autem aliter nisi pro valoribus mediocribus ipsius  $\Delta$  ad hanc methodum recurrere oportebit, quum determinationem orbitæ omnino adhuc incognitæ, propter problematis complicationem nimis intricatam, vix aliter suscipere liceat, nisi per observationes non nimis ab invicem distantes, aut potius tales, quibus motus heliocentricus non nimis respondet.

86.

Designando radium vectorem indefinitum seu variabilem anomalie verae  $v - \Pi$  respondentem per  $\rho$ , erit area sectoris a corpore coelesti intra tempus  $t$  descripti  $= \frac{1}{2} \int \rho^2 d v$ , hoc integrali a  $v = N$  usque ad  $v = N'$  extenso, adeoque, accipiendo  $k$  in significatione art. 6.,  $kt/p = \int \rho^2 d v$ . Iam constat, per formulas a COTESIO evolutas, si  $\varphi x$  exprimat functionem quancunque ipsius  $x$ , valorem continuo magis approximatum integralis  $\int \varphi x dx$  ab  $x = u$  usque ad  $x = u + \Delta$  extensi exhiberi per formulas

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Delta (\varphi u + \varphi(u + \Delta)) \\ & \frac{1}{6} \Delta (\varphi u + 4 \varphi(u + \frac{1}{2} \Delta) + \varphi(u + \Delta)) \\ & \frac{1}{24} \Delta (\varphi u + 3 \varphi(u + \frac{1}{2} \Delta) + 3 \varphi(u + \frac{3}{2} \Delta) + \varphi(u + \Delta)) \end{aligned}$$

etc.: ad institutum nostrum apud duas formulas primas subsistere sufficit.

Per formulam itaque primam in problemate nostro habemus  $\int \rho^2 d v = \frac{1}{2} \Delta (rr' + r'r') = \frac{\Delta r r'}{\cos 2 \omega}$ , si statuitur  $\frac{r'}{r} = \tan(45^\circ + \omega)$ . Quamobrem valor approximatus primus ipsius  $\sqrt{p}$  erit  $= \frac{\Delta r r'}{kt \cos 2 \omega}$ , quem statuemus  $= 3a$ .

Per formulam secundam habemus exactius  $\int \rho^2 d v = \frac{1}{6} \Delta (rr' + r'r' + 4RR)$ , designante  $R$  radium vectorem anomalie intermediae  $\frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N' - \Pi$  respondentem. Iam exprimendo  $p$  per  $r, R, r', N, N + \frac{1}{2}\Delta, N + \Delta$  ad normam formulæ in art. 82. traditæ, invenimus

$$p = \frac{4 \sin \frac{1}{2} \Delta^2 \sin \frac{1}{2} \Delta}{\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \sin \frac{1}{2} \Delta - \frac{1}{R} \sin \Delta}, \text{ atque hinc}$$

$$\cos \frac{1}{2} \Delta \cdot \frac{\Delta}{R} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta^2}{p} = \frac{\cos \omega}{\sqrt{rr' \cos 2 \omega}} - \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta^2}{p}$$

Statuendo itaque

$$\frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta^2 \sqrt{rr' \cos 2 \omega}}{\cos \omega} = z, \text{ fit}$$

$$R = \frac{\cos \frac{1}{2} \Delta \sqrt{rr' \cos 2 \omega}}{\cos \omega \left(1 - \frac{z}{p}\right)}$$

unde valor approximatus secundus ipsius  $\sqrt{p}$  elicetur

$$\sqrt{p} = a + \frac{2z \cos \frac{1}{2} \Delta^2 \cos 2 \omega^2}{\cos \omega^2 \left(1 - \frac{z}{p}\right)^2} = a + \frac{z}{\left(1 - \frac{z}{p}\right)^2}$$

si statuitur  $2a \left( \frac{\cos \frac{1}{2} \Delta \cos 2\omega}{\cos \omega} \right)^2 = \varepsilon$ . Scribendo itaque  $\pi$  pro  $\sqrt{p}$ , determinabitur  $\pi$  per aequationem  $(\pi - a) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{\pi^2} \right) = \varepsilon$ , quae rite evoluta ad quintum gradum ascenderet. Statuamus  $\pi = q + \mu$ , ita ut sit  $q$  valor approximatus ipsius  $\pi$ , atque  $\mu$  quantitas perexigua, cuius quadrata altioresque potestates negligere liceat: Qua substitutione prodit

$$(q - a) \left( 1 - \frac{\varepsilon}{q^2} \right)^2 + \mu \left\{ \left( 1 - \frac{\varepsilon}{q^2} \right) + \frac{2\varepsilon(q - a)}{q^3} \left( 1 - \frac{\varepsilon}{q^2} \right) \right\} = \varepsilon, \text{ sive}$$

$$\mu = \frac{\varepsilon q^2 - (q - a)(q - \varepsilon)(q - \varepsilon)^2}{(q - \varepsilon)(q^3 + 3\varepsilon q - 4a\varepsilon)}, \text{ adeoque}$$

$$\pi = \frac{\varepsilon q^2 + (q - \varepsilon)(aqq + 4\varepsilon q - 5a\varepsilon)q}{(q - \varepsilon)(q^3 + 3\varepsilon q - 4a\varepsilon)}$$

Iam in problemate nostro habemus valorem approximatum ipsius  $\pi$ , puta  $= 3a$ , quo in formula praecedente pro  $q$  substituto, prodit valor correctus

$$\pi = \frac{243a^4\varepsilon + 3a(9aa - \varepsilon)(9aa + 7\varepsilon)}{(9aa - \varepsilon)(27aa + 5\varepsilon)}$$

Statuendo itaque  $\frac{\varepsilon}{27aa} = \delta$ ,  $\frac{\varepsilon}{(1 - 3\delta)a} = \gamma$ , formula induit formam hancce  $\pi = \frac{a(1 + \gamma + 21\delta)}{1 + 5\delta}$ , omnesque operationes ad problematis solutionem necessariae in his quinque formulis continentur:

$$\text{I. } \frac{r'}{r} = \tan(45^\circ + \omega)$$

$$\text{II. } \frac{\Delta rr'}{3kt \cos 2\omega} = a$$

$$\text{III. } \frac{2 \sin \frac{1}{2} \Delta^2 y(r' r' \cos 2\omega)}{27 a a \cos \omega} = \delta$$

$$\text{IV. } \frac{2 \cos \frac{1}{2} \Delta^2 \cos 2\omega^2}{(1 - 3\delta) \cos \omega^2} = \gamma$$

$$\text{V. } \frac{a(1 + \gamma + 21\delta)}{1 + 5\delta} = \sqrt{p}$$

Si quid a praecisione harum formularum remittere placet, expressiones adhuc simpliciores evolvere licebit. Scilicet faciendo  $\cos \omega$  et  $\cos 2\omega = 1$  et evolvendo valorem ipsius  $\sqrt{p}$  in seriem secundum potestates ipsius  $\Delta$  progredientem, prodit neglectis biquadratis altioribusque potestatibus

$$\sqrt{p} = a \left( 3 - \frac{1}{2} \Delta \Delta + \frac{\Delta^2 y r r'}{18 a a} \right)$$

ubi  $\Delta$  in partibus radii exprimendus est. Quare faciendo  $\frac{\Delta rr'}{kt} = \sqrt{p'}$ , habetur

$$\text{VI. } p = p' \left( 1 - \frac{1}{2} \Delta \Delta + \frac{\Delta^2 y r r'}{3 p'} \right)$$

Simili modo explicando  $\frac{\sqrt{p}}{kt}$  in seriem secundum potestates ipsius  $\sin \Delta$  progredientem emergit posito  $\frac{rr' \sin \Delta}{kt} = \sqrt{p''}$

$$\text{VII. } \sqrt{p} = \left( 1 + \frac{\sin \Delta^2 y r r'}{6 p''} \right) \sqrt{p'}, \text{ sive}$$

$$\text{VIII. } p = p' + \frac{1}{2} \sin \Delta^2 y r r'$$

Formulae VII. et VIII. conveniunt cum iis, quas ill. Euler tradidit in *Theoria motus planetarum et cometarum*, formula VI. autem cum ea, quae in usum vocata est in *Recherches et calculs sur la vraie orbite elliptique de la comète de 1769*, p. 80.

87.

Exempla sequentia usum praecceptorum praecedentium illustrabunt, simulque inde gradus praecisionis aestimari poterit.

I. Sit  $\log r = 0,3307640$ ,  $\log r' = 0,3222239$ ,  $\Delta = 7^\circ 34' 53'' 73 = 27293' 73$ ,  $t = 21,93391$  dies. Hic invenitur  $\omega = -33^\circ 47' 00$ , unde calculus ulterior ita se habet:

|                                |           |                                            |                  |
|--------------------------------|-----------|--------------------------------------------|------------------|
| $\log \Delta$ . . . . .        | 4,4360629 | $\frac{1}{2} \log r r' \cos 2\omega$ . . . | 0,3264519        |
| $\log r r'$ . . . . .          | 0,6529879 | $2 \log \sin \frac{1}{2} \Delta$ . . . . . | 7,0389972        |
| $C. \log 3k$ . . . . .         | 5,9728722 | $\log r^2$ . . . . .                       | 8,8696662        |
| $C. \log t$ . . . . .          | 8,6588840 | $C. \log a$ . . . . .                      | 0,5582180        |
| $C. \log \cos 2\omega$ . . . . | 0,0000840 | $C. \log \cos \omega$ . . . . .            | 0,0000210        |
| $\log a$ . . . . .             | 9,7208910 | $\log \delta$ . . . . .                    | 6,7933543        |
|                                |           | $\delta$                                   | $= 0,0006213757$ |

|                                          |               |                                   |           |
|------------------------------------------|---------------|-----------------------------------|-----------|
| $\log 2$ . . . . .                       | 0,3010300     | $1 + \gamma + 21\delta$ . . . . . | 3,0074471 |
| $2 \log \cos \frac{1}{2} \Delta$ . . . . | 9,9980976     | $\log$ . . . . .                  | 0,4781980 |
| $2 \log \cos 2\omega$ . . . .            | 9,9998320     | $\log a$ . . . . .                | 9,7208910 |
| $C. \log (1 - 3\delta)$ . . .            | 0,0008103     | $C. \log (1 + 5\delta)$ . . .     | 9,9986528 |
| $2 C. \log \cos \omega$ . . . .          | 0,0000420     | $C. \log \sqrt{p}$ . . . . .      | 0,1977418 |
| $\log \gamma$ . . . . .                  | 0,2998119     | $\log p$ . . . . .                | 0,3954836 |
| $\gamma$                                 | $= 1,9943982$ |                                   |           |
| $21\delta$                               | $= 0,0130489$ |                                   |           |

Hic valor ipsius  $\log p$  vix una unitate in figura septima a vero differt: formula VI. in hoc exemplo dat  $\log p = 0,3954822$ ; formula VII. producit  $0,3954780$ ; denique formula VIII. dat  $0,3954754$ .

II. Sit  $\log r = 0,4282792$ ,  $\log r' = 0,4062033$ ,  $\Delta = 62^\circ 55' 16'' 64$ ,  $t = 259,88477$  dies. Hinc eruitur  $\omega = -1^\circ 27' 20'' 14$ ,  $\log a = 9,7482348$ ,  $\delta = 0,04535216$ ,  $\gamma = 1,681127$ ,  $\log \sqrt{p} = 0,2198027$ ,  $\log p = 0,4396054$ , qui valor 183 unitatibus in figura septima iusto minor est. Valor enim versus in hoc exemplo est  $0,4396237$ ; per formulam VI. invenitur  $0,4368730$ ; per formulam VII. prodit  $0,4159824$ ; denique per formulam VIII. eruitur  $0,4051103$ : duo postremi valores hic a vero tantum discrepant, ut ne approximationis quidem vice fungi possint.

## 88.

Methodi secundae expositio permultis relationibus novis atque elegantibus enucleandis occasionem dabit: quae quum in diversis sectionum conicarum generibus formas diversas induant, singula seorsim tractare oportebit: ab ELLIPSI initium faciemus.

Respondeant duobus locis anomaliae verae  $v$ ,  $v'$  (e quibus  $v$  sit tempore anterior), anomaliae excentricae  $E$ ,  $E'$ , radiique vectores  $r$ ,  $r'$ ; porro sit  $p$  semiparameter,  $e = \sin \varphi$  excentricitas,  $a$  semiaxis maior,  $t$  tempus intra quod motus a loco primo ad secundum absolvitur; denique statuamus

$$v - v = 2f, \quad v' + v = 2F, \quad E - E = 2g, \quad E' + E = 2G, \quad a \cos \varphi = \frac{p}{\cos \varphi} = b$$

Quibus ita factis e combinatione formularum V. VI. art. 8. facile deducuntur aequationes sequentes:

$$[1.] \quad b \sin g = \sin f \cdot \sqrt{rr'}$$

$$[2.] \quad b \sin G = \sin F \cdot \sqrt{rr'}$$

$$p \cos g = (\cos \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v' \cdot (1+e) + \sin \frac{1}{2} v \sin \frac{1}{2} v' \cdot (1-e)) \sqrt{rr'}, \text{ sive}$$

$$[3.] \quad p \cos g = (\cos f + e \cos F) \sqrt{rr'}, \quad \text{et perinde}$$

$$[4.] \quad p \cos G = (\cos F + e \cos f) \sqrt{rr'}$$

E combinatione aequationum 3. 4. porro oritur

$$[5.] \quad \cos f \cdot \sqrt{rr'} = (\cos g - e \cos G) a$$

$$[6.] \quad \cos F \cdot \sqrt{rr'} = (\cos G - e \cos g) a$$

E formula III. art. 8. nanciscimur

$$[7.] \quad r' - r = 2ae \sin g \sin G$$

$$r' + r = 2a - 2ae \cos g \cos G = 2a \sin g^2 + 2 \cos f \cos g \sqrt{rr'}$$

unde

$$[8.] \quad a = \frac{r+r'-2 \cos f \cos g \sqrt{rr'}}{2 \sin g^2}$$

Statuamus

$$[9.] \quad \frac{\sqrt{r'}}{r} + \frac{\sqrt{r}}{r'} = 1 + 2l, \text{ eritque}$$

$$[10.] \quad a = \frac{2(l + \sin \frac{1}{2} g^2) \cos f \sqrt{rr'}}{\sin g^2}, \text{ nec non}$$

$$\sqrt{a} = \pm \frac{\sqrt{2(l + \sin \frac{1}{2} g^2) \cos f \sqrt{rr'}}}{\sin g}$$

ubi signum superius accipere oportet vel inferius, prout  $\sin g$  positivus est vel negativus. — Formula XII. art. 8. nobis suppedita aequationem

$$\begin{aligned} \frac{kt}{a^2} &= E' - e \sin E' - E + e \sin E = 2g - 2e \sin g \cos G \\ &= 2g - \sin 2g + 2 \cos f \sin g \frac{\sqrt{rr'}}{a} \end{aligned}$$

Quodsi iam in hac aequatione pro  $a$  substituitur ipsius valor ex 10, ac brevitatatis gratia ponitur

$$[11.] \quad \frac{kt}{2^2 \cos f^2 (rr')^2} = m$$

prodit omnibus rite reductis

$$[12.] \quad \pm m = (l + \sin \frac{1}{2} g^2)^{\frac{1}{2}} + (l + \sin \frac{1}{2} g^2)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^2} \right)$$

ubi ipsi  $m$  signum superius vel inferius praefigendum est, prout  $\sin g$  positivus est vel negativus.

Quoties motus heliocentricus est inter  $180^\circ$  et  $360^\circ$ , sive generalius quoties  $\cos f$  est negativus, quantitas  $m$  per formulam 11. determinata evaderet imagi-

itaria, atque  $l$  negativa, ad quod evitandum pro aequationibus 9. 11. in hoc casu hasce adoptabimus:

$$[9.*] \quad \frac{V'_r + V''_r}{2 \cos f} = 1 - 2L$$

$$[11.*] \quad \frac{kt}{2^{\frac{1}{2}}(-\cos f)^{\frac{1}{2}}(rr')^{\frac{1}{2}}} = M$$

unde pro 10. et 12. hasce obtinebimus

$$[10.*] \quad a = \frac{-2(L - \sin \frac{1}{2} g^2) \cos f \sqrt{rr'}}{\sin g^2}$$

$$[12.*] \quad \pm M = -(L - \sin \frac{1}{2} g^2)^{\frac{1}{2}} + (L - \sin \frac{1}{2} g^2)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2g - \sin 2g}{\sin g^2} \right)$$

ubi signum ambiguum eodem modo determinandum est ut ante.

## 89.

Duplex iam negotium nobis incumbit, primum, ut ex aequatione transcendente 12., quoniam solutionem directam non admittit, incognitam  $g$  quam commodissime eruamus; secundum, ut ex angulo  $g$  invento elementa ipsa deducamus. Quae antequam adeamus, transformationem quandam attingemus, cuius adiumento calculus quantitatis auxiliaris  $l$  vel  $L$  expeditius absolvitur, insuperque plures formulae post evolvendae ad formam elegantiores reducuntur.

Introducendo scilicet angulum auxiliarem  $\omega$  per formulam

$$V'_r = \tan g (45^\circ + \omega)$$

determinandum, fit

$$V'_r + V''_r = 2 + (\tan g (45^\circ + \omega) - \cotan g (45^\circ + \omega))^2 = 2 + 4 \tan g 2\omega^2$$

unde habetur

$$l = \frac{\sin \frac{1}{2} f^2}{\cos f} + \frac{\tan g 2\omega^2}{\cos f}$$

$$L = -\frac{\sin \frac{1}{2} f^2}{\cos f} - \frac{\tan g 2\omega^2}{\cos f}$$

## 90.

Considerabimus primo casum eum, ubi e solutione aequationis 12. valor non nimis magnus ipsius  $g$  emergit, ita ut  $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^2}$  in seriem secundum potestates ipsius  $\sin \frac{1}{2} g$  progredientem evolvere liceat. Numeratur huius expressionis, quam per  $X$  denotabimus, fit

$$= \frac{2}{3} \sin \frac{1}{2} g^2 - \frac{16}{15} \sin \frac{1}{2} g^4 + \frac{4}{7} \sin \frac{1}{2} g^6 - \text{etc.}$$

Denominatur autem

$$= 8 \sin \frac{1}{2} g^2 - 12 \sin \frac{1}{2} g^4 + 3 \sin \frac{1}{2} g^6 + \text{etc.}$$

Unde  $X$  obtinet formam

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sin \frac{1}{2} g^2 + \frac{8}{15} \sin \frac{1}{2} g^4 + \text{etc.}$$

Ut autem legem progressionis coefficientium eruamus, differentiamus aequationem

$$X \sin g^2 = 2g - \sin 2g, \text{ unde prodit}$$

$$3X \cos g \sin g^2 + \sin g^2 \frac{dX}{dg} = 2 - 2 \cos 2g = 4 \sin g^2$$

statuendo porro  $\sin \frac{1}{2} g^2 = x$ , fit  $\frac{dx}{dg} = \frac{1}{2} \sin g$ , unde concluditur

$$\frac{dX}{dx} = \frac{4 - 6X \cos g}{\sin g^2} = \frac{4 - 3X(1 - 2x)}{2x(1 - x)} \text{ et proin}$$

$$(2x - 2xx) \frac{dX}{dx} = 4 - (3 - 6x)X$$

Quodsi igitur statuimus

$$X = \frac{1}{2} (1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{etc.})$$

obtinemus aequationem

$$\frac{1}{2} (ax + (2b - a)xx + (3c - 2b)x^3 + (4d - 3c)x^4 + \text{etc.}) \\ = (8 - 4a)x + (8a - 4b)xx + (8b - 4c)x^3 + (8c - 4d)x^4 + \text{etc.}$$

quae identica esse debet. Hinc colligimus  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{3}a$ ,  $c = \frac{10}{9}b$ ,  $d = \frac{1}{3}c$  etc. ubi lex progressionis obvia est. Habemus itaque

$$X = \frac{1}{2} + \frac{1.6}{3.5}x + \frac{1.6.8}{3.5.7}xx + \frac{1.6.8.16}{3.5.7.9}x^3 + \frac{1.6.8.16.12}{3.5.7.9.11}x^4 + \text{etc.}$$

Hanc seriem transformare licet in fractionem continuam sequentem:

$$X = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{\frac{6}{5}x}{1 + \frac{\frac{2}{5.7}x}{1 - \frac{\frac{5.8}{7.9}x}{1 - \frac{\frac{1.4}{9.11}x}{1 - \frac{\frac{7.10}{11.13}x}{1 - \frac{\frac{3.6}{13.15}x}{1 - \frac{\frac{9.12}{15.17}x}{1 - \text{etc.}}}}}}}}}$$

Lex secundum quam coefficientes  $\frac{6}{5}, -\frac{2}{5.7}, \frac{5.8}{7.9}, \frac{1.4}{9.11}$  etc. progrediuntur, obvia est; scilicet terminus  $n^{\text{tus}}$  huius seriei fit pro  $n$  pari  $= \frac{n-3.n}{2n+1.2n+3}$ , pro  $n$  impari autem  $= \frac{n+2.n+5}{2n+1.2n+3}$ : ulterior huius argumenti evolutio nimis aliena esset ab instituto nostro. [V. Disquis. generales circa seriem infinitam etc. GAUSS Werke, Bd. III. S. 125.] Quodsi iam statuimus

$$\frac{x}{1 + \frac{\frac{2}{5.7}x}{1 - \frac{\frac{5.8}{7.9}x}{1 - \frac{\frac{1.4}{9.11}x}{1 - \text{etc.}}}}} = x - \xi$$

fit

$$X = \frac{1}{\frac{4}{5} - \sqrt{\frac{5}{6}(x-\frac{1}{5})}}, \text{ atque}$$

$$\xi = x - \frac{4}{5} + \frac{10}{9X}, \text{ sive}$$

$$\xi = \frac{\sin g^2 - \frac{1}{2}(2g - \sin 2g)(1 - \frac{1}{2}\sin \frac{1}{2}g^2)}{\frac{1}{2}(2g - \sin 2g)}.$$

Numerator huius expressionis est quantitas ordinis septimi, denominator ordinis tertii, adeoque  $\xi$  ordinis quarti, siquidem  $g$  tamquam quantitas ordinis

primi, sive  $x$  tamquam ordinis secundi spectatur. Hinc concluditur, formulam hancce ad computum numericum exactum ipsius  $\xi$  haud idoneam esse, quoties  $g$  angulum non valde considerabilem exprimat: tunc autem ad hunc finem commode adhibentur formulae sequentes, quae ab invicem per ordinem commutatam numeratorum in coefficientibus fractis differunt, et quarum prior e valore supposito ipsius  $x - \xi$  haud difficile derivatur \*):

$$[13.] \xi = \frac{\frac{2}{5}x^2}{1 + \frac{\frac{6}{5}x}{1 - \frac{\frac{2}{5.7}x}{1 - \frac{\frac{5.8}{7.9}x}{1 - \frac{\frac{1.4}{9.11}x}{1 - \frac{\frac{7.10}{11.13}x}{1 - \frac{\frac{3.6}{13.15}x}{1 - \frac{\frac{9.12}{15.17}x}{1 - \text{etc.}}}}}}}}}$$

sive

$$\xi = \frac{\frac{2}{5}x^2}{1 - \frac{\frac{6}{5}x}{1 - \frac{\frac{2}{5.7}x}{1 - \frac{\frac{5.8}{7.9}x}{1 - \frac{\frac{1.4}{9.11}x}{1 - \frac{\frac{7.10}{11.13}x}{1 - \frac{\frac{3.6}{13.15}x}{1 - \frac{\frac{9.12}{15.17}x}{1 - \text{etc.}}}}}}}}}$$

In tabula tertia huic operi annexa pro cunctis valoribus ipsius  $x$  a 0 usque ad 0,3, per singulas partes millesimas, valores respondentes ipsius  $\xi$  ad septem figuras decimales computati reperiuntur. Haec tabula primo aspectu monstrat exiguitatem ipsius  $\xi$  pro valoribus modicis ipsius  $g$ ; ita e. g. pro  $E' - E = 10'$ , sive  $g = 5'$ , ubi  $x = 0,00195$ , fit  $\xi = 0,0000002$ . Superfluum fuisset, tabulam adhuc ulterius continuare, quum termino ultimo  $x = 0,3$  respondeat  $g = 66^\circ 25'$  sive  $E' - E = 132^\circ 50'$ . Ceterum tabulae columna tertia, quae valores ipsius  $\xi$  valoribus negativis ipsius  $x$  respondentes continet, infra loco suo explicabitur.

\*) Deductio posterioris quasdam transformationes minus obvias allaque occasione explicandas supponit.

91.

Aequatio 12., in qua, eo de quo agimus casu, manifesto signum superius adoptare oportet, per introductionem quantitatis  $\xi$  obtinet formam

$$m = (l+x)^{\frac{1}{2}} + \frac{(l+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{10}(x-\xi)}$$

Statuendo itaque  $\sqrt{l+x} = \frac{m}{y}$ , atque

$$[14.] \quad \frac{mm}{\xi+l+\xi} = h, \text{ omnibus rite reductis prodit}$$

$$[15.] \quad h = \frac{(y-1)yy}{y+\xi}$$

Quodsi itaque  $h$  tamquam quantitatem cognitam spectare licet,  $y$  inde per aequationem cubicam determinabitur, ac dein erit

$$[16.] \quad x = \frac{mm}{yy} - l$$

Iam etiamsi  $h$  implicet quantitatem adhuc incognitam  $\xi$ , in approximatione prima eam negligere atque pro  $h$  accipere licebit  $\frac{mm}{\xi+l+\xi}$ , quoniam certe in eo de quo agimus casu  $\xi$  semper est quantitas valde parva. Hinc per aequationes 15. 16. elicientur  $y$  et  $x$ ; ex  $x$  per tabulam III. habebitur  $\xi$ , cuius adiumento per formulam 14. eruetur valor correctus ipsius  $h$ , cum quo calculus idem repetitus valores correctos ipsarum  $y$ ,  $x$  dabit: plerumque hi tam parum a praecedentibus differunt, ut  $\xi$  iterum e tabula III. desumpta haud diversa sit a valore primo: alioquin calculum denuo repetere oporteret, donec nullam amplius mutationem patiatur. Simulac quantitas  $x$  inventa erit, habebitur  $g$  per formulam  $\sin \frac{1}{2} g^2 = x$ .

Haec praecepta referuntur ad casum primum, ubi  $\cos f$  positivus est; in casu altero ubi negativus est statuimus  $\sqrt{l-x} = \frac{M}{Y}$  atque

$$[14*.] \quad \frac{MM}{L-\xi-\xi} = H, \text{ unde aequatio } 12* \text{ rite reducta transit in hanc}$$

$$[15*.] \quad H = \frac{(Y+1)YY}{Y-\frac{1}{2}}$$

Per hanc itaque aequationem cubicam determinare licet  $Y$  ex  $H$ , unde rursus  $x$  derivabitur per aequationem

$$[16*.] \quad x = L - \frac{MM}{YY}$$

In approximatione prima pro  $H$  accipietur valor  $\frac{MM}{L-\frac{1}{2}}$ ; cum valore ipsius  $x$

inde per aequationes 15\*. 16\*. derivato desumetur  $\xi$  ex tabula III.; hinc per formulam 14\*. habebitur valor correctus ipsius  $H$ , cum quo calculus eodem modo repetetur. Tandem ex  $x$  angulus  $g$  eodem modo determinabitur ut in casu primo.

92.

Quamquam aequationes 15. 15\*. in quibusdam casibus tres radices reales habere possint, tamen ambiguum nunquam erit, quannam in problemate nostro adoptare oporteat. Quum enim  $h$  manifesto sit quantitas positiva, ex aequationum theoria facile concluditur, aequationem 15. habere radicem unicam positivam vel cum duabus imaginariis vel cum duabus negativis: iam quum  $y = \sqrt{l+x}$  necessario esse debeat quantitas positiva, nullam hic incertitudinem remanere patet. Quod vero attinet ad aequationem 15\*, primo observamus,  $L$  necessario esse maiorem quam 1: quod facile probatur, si aequatio in art. 89. tradita sub formam

$$L = 1 + \frac{\cos \frac{1}{2} f^2}{-\cos f} + \frac{\tan 2\omega^2}{-\cos f}$$

ponitur. Porro substituendo in aequatione 12\*. pro  $M$ ,  $Y\sqrt{l-x}$ , prodit  $Y+1 = (L-x)X$ , adeoque

$$Y+1 > (1-x)X > \frac{1}{2} + \frac{1}{3.5}x + \frac{1.6}{3.5.7}xx + \frac{1.6.8}{3.5.7.9}x^2 + \text{etc.} > \frac{1}{2},$$

et proin  $Y > \frac{1}{2}$ . Statuendo itaque  $Y = \frac{1}{2} + Y'$ , necessario  $Y'$  erit quantitas positiva, aequatio 15\*. autem hinc transit in hanc

$$Y'^2 + 2Y'Y' + (1-H)Y' + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}H = 0,$$

quam plures radices positivas habere non posse ex aequationum theoria facile probatur. Hinc colligitur, aequationem 15\*. unicam radicem habituram esse maiorem quam  $\frac{1}{2}$ ), quam neglectis reliquis in problemate nostro adoptare oportebit.

93.

Ut solutionem aequationis 15. pro casibus in praxi frequentissimis quantum fieri potest commodissimam reddamus, ad calcem huius operis tabulam peculiarem adiungimus (tabulam II.), quae pro valoribus ipsius  $h$  a 0 usque ad 0.6 loga-

\*) Siquidem problema revera solubile esse supponimus.

rithmos respondentes ipsius  $yy$  ad septem figuras decimales summa cura computatos exhibet. Argumentum  $h$  a 0 usque ad 0,04 per singulas partes decies millesimas progreditur, quo pacto differentiae secundae ipsius  $\log yy$  evanescentes sunt redditae, ita ut in hac quidem tabulae parte interpolatio simplex sufficiat. Quoniam vero tabula, si ubivis eadem extensione gauderet, valde voluminosa evasisset, ab  $h = 0,04$  usque ad finem per singulas tantum millesimas partes progredi debuit; quamobrem in hac parte posteriori ad differentias secundas respicere oportebit, siquidem errores aliquot unitatum in figura septima evitare cupimus. Ceterum valores minores ipsius  $h$  in praxi longe sunt frequentissimi.

Solutio aequationis 15, quoties  $h$  limitem tabulae egreditur, nec non solutio aequationis 15\*, sine difficultate per methodum indirectam vel per alias methodos satis cognitas perfici poterit. Ceterum haud abs re erit monere, valorem parvum ipsius  $g$  cum valore negativo ipsius  $\cos f$  consistere non posse nisi in orbitis valde excentricis, ut ex aequatione 20. infra in art. 95. tradenda sponte elucebit\*).

## 94.

Tractatio aequationum 12. 12\*. in art. 91. 92. 93. explicata, innixa est suppositioni, angulum  $g$  non esse nimis magnum, certe infra limitem  $66^\circ 25'$ , ultra quem tabulam III. non extendimus. Quoties haec suppositio locum non habet, aequationes illae tantis artificiis non indigent: poterunt enim *forma non mutata* tutissime semper ac commodissime tentando solvi. *Tuto* scilicet, quoniam valor expressionis  $\frac{2g - \sin 2g}{\sin g^3}$ , in qua  $2g$  in partibus radii exprimendum esse sponte patet, pro valoribus maioribus ipsius  $g$  *omni praecisione* computari potest per tabulas trigonometricas, quod utique fieri nequit, quamdiu  $g$  est angulus parvus: *commode*, quoniam loci heliocentrici tanto intervallo ab invicem distantes vix umquam ad determinationem orbitae penitus adhuc incognitae adhibebuntur, ex orbitae autem cognitione qualicumque valor approximatus ipsius  $g$  nullo prope modum negotio per aequationem 1. vel 3. art. 88. demanat: denique e valore approximato ipsius  $g$  valor correctus, aequationi 12. vel 12\*. omni quae desideratur praecisione satisfaciens, semper paucis tentaminibus eruetur. Ceterum quoties duo loci heliocentrici propositi plus una revolutione integra complectuntur, memorem esse oportet, quod ab anomalia excentrica totidem revolutiones comple-

\* Ostendit ista aequatio, si  $\cos f$  sit negativus,  $\varphi$  certe maiorem esse debere quam  $90^\circ - g$ .

tae absolutae erunt, ita ut anguli  $E' - E$ ,  $v' - v$  vel ambo iaceant inter  $0$  et  $360^\circ$ , vel ambo inter multipla similia totius peripheriae, adeoque  $f$  et  $g$  vel simul inter  $0$  et  $180^\circ$ , vel inter multipla similia semiperipheriae. Quodsi tandem orbita omnino incognita esset, neque adeo constaret, utrum corpus coeleste, transeundo a radio vectore primo ad secundum, descriperit partem tantum revolutionis, an insuper revolutionem integram unam seu plures, problema nostrum nonnumquam plures solutiones diversas admitteret: attamen huic casui in praxi vix umquam occursuro hic non immoramur.

## 95.

Transimus ad negotium secundum, puta determinationem elementorum ex invento angulo  $g$ . Semiaxis maior hic statim habetur per formulas 10. 10\*, pro quibus etiam sequentes adhiberi possunt:

$$[17.] \quad a = \frac{2m \cos f \sqrt{rr'}}{yy \sin g^3} = \frac{kktt}{4yyrr' \cos f^3 \sin g^3}$$

$$[17*.] \quad a = \frac{-2M \cos f \sqrt{rr'}}{YY \sin g^3} = \frac{kktt}{4YYrr' \cos f^3 \sin g^3}$$

Semiaxis minor  $b = \sqrt{ap}$  habetur per aequationem 1., qua cum praecedentibus combinata prodit

$$[18.] \quad p = \left( \frac{yrr' \sin 2f}{kt} \right)^2$$

$$[18*.] \quad p = \left( \frac{Yrr' \sin 2f}{kt} \right)^2$$

Iam sector ellipticus inter duos radios vectores atque arcum ellipticum contentus fit  $= \frac{1}{2} kt \sqrt{p}$ , triangulum autem inter eosdem radios vectores atque chordam  $= \frac{1}{2} rr' \sin 2f$ : quamobrem ratio sectoris ad triangulum est ut  $y:1$  vel  $Y:1$ . Haec observatio maximi est momenti, simulque aequationes 12. 12\*. pulcherrime illustrat: patet enim hinc, in aequatione 12. partes  $m$ ,  $(l+x)^{\frac{1}{2}}$ ,  $X(l+x)^{\frac{1}{2}}$ , in aequatione 12\*. autem partes  $M$ ,  $(L-x)^{\frac{1}{2}}$ ,  $X(L-x)^{\frac{1}{2}}$  respective proportionales esse areae sectoris (inter radios vectores atque arcum ellipticum), areae trianguli (inter radios vectores atque chordam), areae segmenti (inter arcum atque chordam), quoniam manifesto area prima aequalis est vel summae vel differentiae duarum reliquarum, prout  $v' - v$  vel inter  $0$  et  $180^\circ$  iacet vel inter  $180^\circ$  et  $360^\circ$ . In casu eo, ubi  $v' - v$  maior est quam  $360^\circ$ , areae sectoris nec non areae segmenti aream integrae ellipsis toties adiectam concipere oportet, quot revolutiones integrae ille motus continet.

Quum  $b$  sit  $= a \cos \varphi$ , e combinatione aequationum 1. 10. 10\*. porro sequitur

$$[19.] \quad \cos \varphi = \frac{\sin g \tan f}{2(l + \sin \frac{1}{2} g^2)}$$

$$[19*.] \quad \cos \varphi = \frac{-\sin g \tan f}{2(L - \sin \frac{1}{2} g^2)}$$

unde substituendo pro  $l, L$  valores suos ex art. 89. prodit

$$[20.] \quad \cos \varphi = \frac{\sin f \sin g}{1 - \cos f \cos g + 2 \tan 2 \omega^2}$$

Haec formula ad calculum exactum excentricitatis non est idonea, quoties haecce modica est: sed facile ex ista deducitur formula aptior sequens

$$[21.] \quad \tan \frac{1}{2} \varphi^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (f-g)^2 + \tan 2 \omega^2}{\sin \frac{1}{2} (f+g)^2 + \tan 2 \omega^2}$$

cui etiam forma sequens tribui potest (multiplicando numeratorem et denominatorem per  $\cos 2 \omega^2$ )

$$[22.] \quad \tan \frac{1}{2} \varphi^2 = \frac{\sin \frac{1}{2} (f-g)^2 + \cos \frac{1}{2} (f-g)^2 \sin 2 \omega^2}{\sin \frac{1}{2} (f+g)^2 + \cos \frac{1}{2} (f+g)^2 \sin 2 \omega^2}$$

Per utramque formulam (adhibitis si placet angulis auxiliaribus quorum tangentes  $\frac{\tan 2 \omega}{\sin \frac{1}{2} (f-g)}$ ,  $\frac{\tan 2 \omega}{\sin \frac{1}{2} (f+g)}$  pro priori, vel  $\frac{\sin 2 \omega}{\tan \frac{1}{2} (f-g)}$ ,  $\frac{\sin 2 \omega}{\tan \frac{1}{2} (f+g)}$  pro posteriori) angulum  $\varphi$  omni semper praecisione determinare licebit.

Pro determinatione anguli  $G$  adhiberi potest formula sequens, quae sponte demanat e combinatione aequationum 5, 7 et sequentis non numeratae:

$$[23.] \quad \tan G = \frac{(r'-r) \sin g}{(r'+r) \cos g - 2 \cos f \sqrt{r' r}}$$

e qua, introducendo  $\omega$ , facile derivatur

$$[24.] \quad \tan G = \frac{\sin g \sin 2 \omega}{\cos 2 \omega^2 \sin \frac{1}{2} (f-g) \sin \frac{1}{2} (f+g) + \sin 2 \omega^2 \cos g}$$

Ambiguitas hic remanens facile deciditur adiumento aequationis 7., quae docet,  $G$  inter  $0$  et  $180^\circ$  vel inter  $180^\circ$  et  $360^\circ$  accipi debere, prout numerator in his duabus formulis positivus fuerit vel negativus.

Combinando aequationem 3. cum his, quae protinus demanant ex aequatione II. art. 8.

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{2e}{p} \sin f \sin F$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{2}{p} + \frac{2e}{p} \cos f \cos F$$

nullo negotio derivabitur sequens

$$[25.] \quad \tan F = \frac{(r'-r) \sin f}{2 \cos g \sqrt{r' r} - (r'+r) \cos f}$$

e qua, introducto angulo  $\omega$ , prodit

$$[26.] \quad \tan F = \frac{\sin f \sin 2 \omega}{\cos 2 \omega^2 \sin \frac{1}{2} (f-g) \sin \frac{1}{2} (f+g) - \sin 2 \omega^2 \cos f}$$

Ambiguitas hic perinde tollitur ut ante. — Postquam anguli  $F$  et  $G$  inventi erunt, habebitur  $v = F - f$ ,  $v' = F + f$ , unde positio perihelii nota erit; nec non  $E = G - g$ ,  $E' = G + g$ . Denique motus medius intra tempus  $t$  erit  $= \frac{kt}{a^2} = 2g - 2e \cos G \sin g$ , quarum expressionum consensus calculo confirmando inserviet; epocha autem anomaliae mediae, respondens temporis momento inter duo proposita medio, erit  $G - e \sin G \cos g$ , quae pro lubitu ad quodvis aliud tempus transferri poterit. Aliquanto adhuc commodius est, anomalias medias pro duobus temporum momentis datis per formulas  $E - e \sin E$ ,  $E' - e \sin E'$  computare, harumque differentia cum  $\frac{kt}{a^2}$  comparanda ad calculi confirmationem uti.

96.

Aequationes in art. praec. traditae tanta quidem concinnitate gaudent, ut nihil amplius desiderari posse videatur. Nihilominus eruere licet formulas quasdam alias, per quas elementa orbitae multo adhuc elegantius et commodius determinantur: verum evolutio harum formularum paullulo magis recondita est.

Resumimus ex art. 8. aequationes sequentes, quas commoditatis gratia numeris novis distinguimus:

$$\text{I.} \quad \sin \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{r}{a}} = \sin \frac{1}{2} E \sqrt{1+e}$$

$$\text{II.} \quad \cos \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{r}{a}} = \cos \frac{1}{2} E \sqrt{1-e}$$

$$\text{III.} \quad \sin \frac{1}{2} v' \sqrt{\frac{r'}{a}} = \sin \frac{1}{2} E' \sqrt{1+e}$$

$$\text{IV.} \quad \cos \frac{1}{2} v' \sqrt{\frac{r'}{a}} = \cos \frac{1}{2} E' \sqrt{1-e}$$

Multiplicamus I. per  $\sin \frac{1}{2} (F+g)$ , II. per  $\cos \frac{1}{2} (F+g)$ , unde productis additis nanciscimur

$$\cos \frac{1}{2} (f+g) \sqrt{\frac{r}{a}} = \sin \frac{1}{2} E \sin \frac{1}{2} (F+g) \sqrt{1+e} + \cos \frac{1}{2} E \cos \frac{1}{2} (F+g) \sqrt{1-e}$$

sive propter  $\sqrt{1+e} = \cos \frac{1}{2}\varphi + \sin \frac{1}{2}\varphi$ ,  $\sqrt{1-e} = \cos \frac{1}{2}\varphi - \sin \frac{1}{2}\varphi$ ,

$$\cos \frac{1}{2}(f+g) \sqrt{\frac{r}{a}} = \cos \frac{1}{2}\varphi \cos(\frac{1}{2}F - \frac{1}{2}G + g) - \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}(F+G)$$

Prorsus simili modo multiplicando III. per  $\sin \frac{1}{2}(F-g)$ , IV. per  $\cos \frac{1}{2}(F-g)$ , prodit productis additis

$$\cos \frac{1}{2}(f+g) \sqrt{\frac{r'}{a}} = \cos \frac{1}{2}\varphi \cos(\frac{1}{2}F - \frac{1}{2}G - g) - \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}(F+G)$$

Subtrahendo ab hac aequatione praecedentem, oritur

$$\cos \frac{1}{2}(f+g) (\sqrt{\frac{r'}{a}} - \sqrt{\frac{r}{a}}) = 2 \cos \frac{1}{2}\varphi \sin g \sin \frac{1}{2}(F-G)$$

sive introducendo angulum auxiliarem  $\omega$

$$[27.] \quad \cos \frac{1}{2}(f+g) \tan 2\omega = \sin \frac{1}{2}(F-G) \cos \frac{1}{2}\varphi \sin g \sqrt{\frac{aa}{rr'}}$$

Per transformationes prorsus similes, quarum evolutionem lectori perito relinquitur, invenitur

$$[28.] \quad \frac{\sin \frac{1}{2}(f+g)}{\cos 2\omega} = \cos \frac{1}{2}(F-G) \cos \frac{1}{2}\varphi \sin g \sqrt{\frac{aa}{rr'}}$$

$$[29.] \quad \cos \frac{1}{2}(f-g) \tan 2\omega = \sin \frac{1}{2}(F+G) \sin \frac{1}{2}\varphi \sin g \sqrt{\frac{aa}{rr'}}$$

$$[30.] \quad \frac{\sin \frac{1}{2}(f-g)}{\cos 2\omega} = \cos \frac{1}{2}(F+G) \sin \frac{1}{2}\varphi \sin g \sqrt{\frac{aa}{rr'}}$$

Quum partes primae in his quatuor aequationibus sint quantitates cognitae, ex 27. et 28. determinabuntur  $\frac{1}{2}(F-G)$  et  $\cos \frac{1}{2}\varphi \sin g \sqrt{\frac{aa}{rr'}} = P$ , nec non ex 29. et 30. perinde  $\frac{1}{2}(F+G)$  et  $\sin \frac{1}{2}\varphi \sin g \sqrt{\frac{aa}{rr'}} = Q$ ; ambiguitas in determinatione angulorum  $\frac{1}{2}(F-G)$ ,  $\frac{1}{2}(F+G)$  ita decidenda est, ut  $P$  et  $Q$  cum  $\sin g$  idem signum obtineant. Dein ex  $P$  et  $Q$  derivabuntur  $\frac{1}{2}\varphi$  et  $\sin g \sqrt{\frac{aa}{rr'}} = R$ . Ex  $R$  deduci potest  $a = \frac{RR\sqrt{rr'}}{\sin g^3}$ , nec non  $p = \frac{\sin f \sqrt{rr'}}{RR}$ , nisi illa quantitate, quae fieri debet  $= \pm \sqrt{2(l + \sin \frac{1}{2}g^2) \cos f} = \pm \sqrt{(-2(L - \sin \frac{1}{2}g^2) \cos f)}$ , unice ad calculi confirmationem uti malimus, in quo casu  $a$  et  $p$  commodissime determinantur per formulas

$$b = \frac{\sin f \sqrt{rr'}}{\sin g}, \quad a = \frac{b}{\cos \varphi}, \quad p = b \cos \varphi$$

Possunt etiam, pro lubito, plures aequationum art. 88. et 95. ad calculi confirmationem in usum vocari, quibus sequentes adhuc adiicimus:

$$\frac{2 \tan 2\omega}{\cos 2\omega} \sqrt{\frac{rr'}{aa}} = e \sin G \sin g$$

$$\frac{2 \tan 2\omega}{\cos 2\omega} \sqrt{\frac{pp}{rr'}} = e \sin F \sin f$$

$$\frac{2 \tan 2\omega}{\cos 2\omega} = \tan \varphi \sin G \sin f = \tan \varphi \sin F \sin g$$

Denique motus medius atque epocha anomaliae mediae perinde inveniuntur ut in art. praec.

97.

Ad illustrationem methodi inde ab art. 88. expositae duo exempla art. 87. resumemus: anguli auxiliaris  $\omega$  significationem hactenus observatam, non esse confundendam cum ea, in qua in artt. 86. 87. acceptum erat idem signum, vix opus erit monuisse.

I. In exemplo primo habemus  $f = 3^\circ 47' 26'' 865$ , porroque  $\log \frac{r'}{r} = 9,9914599$ ,  $\log \tan(45^\circ + \omega) = 9,997864975$ ,  $\omega = -8' 27'' 006$ . Hinc per art. 89.

|                                              |                       |                                         |                       |
|----------------------------------------------|-----------------------|-----------------------------------------|-----------------------|
| $\log \sin \frac{1}{2}f^2 \dots \dots \dots$ | 7,0389972             | $\log \tan 2\omega^2 \dots \dots \dots$ | 5,3832428             |
| $\log \cos f \dots \dots \dots$              | 9,9990488             | $\log \cos f \dots \dots \dots$         | 9,9990488             |
|                                              | 7,0399484             |                                         | 5,3841940             |
|                                              | $= \log 0,0010963480$ |                                         | $= \log 0,0000242211$ |

adeoque  $l = 0,0011205691$ ,  $l + l = 0,5344539$ . Porro fit  $\log kt = 9,5766974$

|                                             |           |
|---------------------------------------------|-----------|
| $2 \log kt \dots \dots \dots$               | 9,1533948 |
| $C. \frac{1}{2} \log rr' \dots \dots \dots$ | 9,0205181 |
| $C. \log 8 \cos f^2 \dots \dots \dots$      | 9,0997636 |
| $\log mm \dots \dots \dots$                 | 7,2736765 |
| $\log(l + l) \dots \dots \dots$             | 9,9214023 |
|                                             | 7,3522742 |

Est itaque valor approximatus ipsius  $h = 0,00225047$ , cui in tabula nostra II. respondet  $\log yy = 0,0021633$ . Habetur itaque  $\log \frac{mm}{yy} = 7,2715132$ , sive  $\frac{mm}{yy} = 0,001868587$ , unde per formulam 16. fit  $x = 0,0007480179$ : quamobrem quum  $\xi$  per tabulam III. omnino insensibilis sit, valores inventi pro  $h$ ,  $y$ ,  $x$  correctione non indigent. Iam determinatio elementorum ita se habet:

$$\begin{aligned}\log x & \dots\dots\dots 6,8739120 \\ \log \sin \frac{1}{2}g & \dots\dots\dots 8,4369560 \\ \frac{1}{2}g = 1^{\circ}34'2''0286, \frac{1}{2}(f+g) & = 3^{\circ}27'45''4611, \frac{1}{2}(f-g) = 19^{\circ}41'4039.\end{aligned}$$

Quare ad normam formularum 27. 28. 29. 30. habetur

|                                                                    |                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\log \tan 2\omega \dots\dots\dots 7,6916214 \text{ n}$            | $C. \log \cos 2\omega \dots\dots\dots 0,0000052$                      |
| $\log \cos \frac{1}{2}(f+g) \dots\dots\dots 9,9992065$             | $\log \sin \frac{1}{2}(f+g) \dots\dots\dots 8,7810188$                |
| $\log \cos \frac{1}{2}(f-g) \dots\dots\dots 9,9999929$             | $\log \sin \frac{1}{2}(f-g) \dots\dots\dots 7,7579709$                |
| $\log P \sin \frac{1}{2}(F-G) \dots\dots\dots 7,6908279 \text{ n}$ | $\log Q \sin \frac{1}{2}(F+G) \dots\dots\dots 7,6916143 \text{ n}$    |
| $\log P \cos \frac{1}{2}(F-G) \dots\dots\dots 8,7810240$           | $\log Q \cos \frac{1}{2}(F+G) \dots\dots\dots 7,7579761$              |
| $\frac{1}{2}(F-G) = -4^{\circ}38'41''54$                           | $\log P = \log R \cos \frac{1}{2}\varphi \dots\dots\dots 8,7824527$   |
| $\frac{1}{2}(F+G) = 319^{\circ}21'38,05$                           | $\log Q = \log R \sin \frac{1}{2}\varphi \dots\dots\dots 7,8778355$   |
| $F = 314^{\circ}42'56,51$                                          | Hinc $\frac{1}{2}\varphi = 7^{\circ}6'0''935$                         |
| $v = 310^{\circ}55'29,64$                                          | $\varphi = 14^{\circ}12'1,870$                                        |
| $v' = 318^{\circ}30'23,37$                                         | $\log R \dots\dots\dots 8,7857960$                                    |
| $G = 324^{\circ}0'19,59$                                           | Ad calculum confirmandum                                              |
| $E = 320^{\circ}52'15,53$                                          | $\frac{1}{2} \log 2 \cos f \dots\dots\dots 0,1500394$                 |
| $E' = 327^{\circ}8'23,65$                                          | $\frac{1}{2} \log (l+x) = \log \frac{m}{y} \dots\dots\dots 8,6357566$ |
|                                                                    | $8,7857960$                                                           |
| $\frac{1}{2} \log rr' \dots\dots\dots 0,3264939$                   | $\log \sin \varphi \dots\dots\dots 9,3897262$                         |
| $\log \sin f \dots\dots\dots 8,8202909$                            | $\log 206265 \dots\dots\dots 5,3144251$                               |
| $C. \log \sin g \dots\dots\dots 1,2621765$                         | $\log e \text{ in secundis} \dots\dots\dots 4,7041513$                |
| $\log b \dots\dots\dots 0,4089613$                                 | $\log \sin E \dots\dots\dots 9,8000767 \text{ n}$                     |
| $\log \cos \varphi \dots\dots\dots 9,9865224$                      | $\log \sin E' \dots\dots\dots 9,7344714 \text{ n}$                    |
| $\log p \dots\dots\dots 0,3954837$                                 | $\log e \sin E \dots\dots\dots 4,5042280 \text{ n}$                   |
| $\log a \dots\dots\dots 0,4224389$                                 | $\log e \sin E' \dots\dots\dots 4,4386227 \text{ n}$                  |
| $\log k \dots\dots\dots 3,5500066$                                 | $e \sin E = -31932''14 = -8^{\circ}52'12''14$                         |
| $\frac{1}{2} \log a \dots\dots\dots 0,6336584$                     | $e \sin E' = -27455,08 = -7^{\circ}37'35,08$                          |
|                                                                    | Hinc anomalia media                                                   |
| $\log t \dots\dots\dots 2,9163482$                                 | pro loco primo $= 329^{\circ}44'27,67$                                |
| $1,3411160$                                                        | pro secundo $= 334^{\circ}45'58,73$                                   |
| $4,2574642$                                                        | Differentia $= 5^{\circ}131,06$                                       |

Est itaque motus medius diurnus  
 $= 824^{\circ}7989$ . Motus medius intra  
tempus  $t = 18091^{\circ}07 = 5^{\circ}131^{\circ}07$

II. In exemplo altero fit  $f = 31^{\circ}27'38''32$ ,  $\omega = -21^{\circ}50'565$ ,  $l = 0,08635659$ ,  $\log mm = 9,3530651$ ,  $\frac{mm}{\frac{1}{2}+l}$  sive valor approximatus ipsius  $h = 0,2451454$ ; huic in tabula II. respondet  $\log yy = 0,1722663$ , unde deducitur  $\frac{mm}{yy} = 0,15163477$ ,  $x = 0,06527818$ , hinc e tabula III. sumitur  $\xi = 0,0002531$ . Quo valore adhibito prodeunt valores correcti  $h = 0,2450779$ ,  $\log yy = 0,1722303$ ,  $\frac{mm}{yy} = 0,15164737$ ,  $x = 0,06529078$ ,  $\xi = 0,0002532$ . Quodsi cum hoc valore ipsius  $\xi$ , unica tantum unitate in figura septima a priori diverso, calculus denuo repeteretur:  $h$ ,  $\log yy$ ,  $x$  mutationem sensibilem non acciperent, quamobrem valor inventus ipsius  $x$  iam est verus, statimque inde ad determinationem elementorum progredi licet. Cui hic non immoramur, quum nihil ab exemplo praecedente differat.

III. Haud abs re erit, etiam casum alterum ubi  $\cos f$  negativus est exemplo illustrare. Sit  $v'-v = 224^{\circ}0'0''$ , sive  $f = 112^{\circ}0'0''$ ,  $\log r = 0,1394892$ ,  $\log r' = 0,3978794$ ,  $t = 206,80919$  dies. Hic invenitur  $\omega = +4^{\circ}14'43''78$ ,  $L = 1,8942298$ ,  $\log MM = 0,6724333$ , valor primus approximatus ipsius  $\log H = 0,6467603$ , unde per solutionem aequationis 15\*. obtinetur  $Y = 1,591432$ , ac dein  $x = 0,037037$ , cui respondet, in tabula III.,  $\xi = 0,0000801$ . Hinc oriuntur valores correcti  $\log H = 0,6467931$ ,  $Y = 1,5915107$ ,  $x = 0,0372195$ ,  $\xi = 0,0000809$ . Calculo cum hoc valore ipsius  $\xi$  denuo repetito prodit  $x = 0,0372213$ , qui valor, quum  $\xi$  inde haud mutata prodeat, nulla amplius correctione indiget. Invenitur dein  $\frac{1}{2}g = 11^{\circ}7'25''40$ , atque hinc perinde ut in exemplo I.

|                                         |                                                                     |
|-----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $\frac{1}{2}(F-G) = 3^{\circ}33'53''59$ | $\log P = \log R \cos \frac{1}{2}\varphi \dots\dots\dots 9,9700507$ |
| $\frac{1}{2}(F+G) = 8^{\circ}26'6,38$   | $\log Q = \log R \sin \frac{1}{2}\varphi \dots\dots\dots 9,8580552$ |
| $F = 11^{\circ}59'59,97$                | $\frac{1}{2}\varphi = 37^{\circ}41'34''27$                          |
| $v = -100^{\circ}0'0,03$                | $\varphi = 75^{\circ}23'8,54$                                       |
| $v' = +123^{\circ}59'59,97$             | $\log R \dots\dots\dots 0,0717096$                                  |
| $G = 4^{\circ}52'12,79$                 | Ad calculi confirmationem eruitur                                   |
| $E = -17^{\circ}22'38,01$               | $\log \frac{M}{Y} \sqrt{-2 \cos f} \dots\dots\dots 0,0717097$       |
| $E' = +27^{\circ}7'3,59$                |                                                                     |

In orbitis tam excentricis angulus  $\varphi$  paullulo exactius computatur per formulam 19\*, quae in exemplo nostro dat  $\varphi = 75^{\circ}23'8''57$ ; excentricitas quoque  $e$  maiori

praeecisione determinatur per formulam  $1 - 2 \sin(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)^2$  quam per  $\sin \varphi$ ; secundum illam fit  $e = 0,96764630$ .

Per formulam 1. porro invenitur  $\log b = 0,6576611$ , unde  $\log p = 0,0595967$ ,  $\log a = 1,2557255$ , atque logarithmus distantiae in perihelio  $= \log \frac{p}{1+e} = \log a(1-e) = \log b \tan(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi) = 9,7656496$ .

In orbitis tantopere ad parabolae similitudinem vergentibus loco epochae anomaliae mediae assignari solet tempus transitus per perihelium; intervalla inter hoc tempus atque tempora duobus locis propositis respondentia determinari poterunt ex elementis cognitis per methodum in art. 41. traditam, quorum differentia vel summa (prout perihelium vel extra duo loca proposita iacet vel intra) quum consentire debeat cum tempore  $t$ , calculo confirmando inserviet. — Ceterum numeri huius tertii exempli superstructi erant elementis in exemplo art. 38. et 43. suppositis, quin adeo istud ipsum exemplum locum nostrum primum suppeditaverat: differentiae leviuseculae elementorum hic erutorum unice a limitata praeecisione tabularum logarithmicarum et trigonometricarum originem traxerunt.

98.

Solutio problematis nostri pro ellipsi in praec. evoluta etiam ad parabolam et hyperbolam transferri posset, considerando parabolam tamquam ellipsin, in qua  $a$  et  $b$  essent quantitates infinitae,  $\varphi = 90^\circ$ , tandem  $E, E', g, G = 0$ ; et perinde hyperbolam tamquam ellipsin in qua  $a$  esset negativa, atque  $b, E, E', g, G, \varphi$  imaginariae: malumus tamen his suppositionibus abstinere, problemaque pro utroque sectionum conicarum genere seorsim tractare. Analogia insignis inter omnia tria genera sic sponte se manifestabit.

Retinendo in PARABOLA characteres  $p, v, v', F, f, r, r', t$  in eadem significatione in qua supra accepti sunt, habemus e theoria motus parabolici:

$$[1.] \quad \sqrt{\frac{p}{2r}} = \cos \frac{1}{2}(F-f)$$

$$[2.] \quad \sqrt{\frac{p}{2r}} = \cos \frac{1}{2}(F+f)$$

$$\begin{aligned} \frac{2kt}{p} &= \tan \frac{1}{2}(F+f) - \tan \frac{1}{2}(F-f) + \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2}(F+f)^3 - \frac{1}{2} \tan \frac{1}{2}(F-f)^3 \\ &= \left\{ \tan \frac{1}{2}(F+f) - \tan \frac{1}{2}(F-f) \right\} \cdot \left\{ 1 + \tan \frac{1}{2}(F+f) \tan \frac{1}{2}(F-f) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\tan \frac{1}{2}(F+f) - \tan \frac{1}{2}(F-f))^2 \right\} \\ &= \frac{2 \sin f \sqrt{rr'}}{p} \left\{ \frac{2 \cos f \sqrt{rr'}}{p} + \frac{4 \sin^2 f \sqrt{rr'}}{3pp} \right\}, \text{ unde} \end{aligned}$$

$$[3.] \quad kt = \frac{2 \sin f \cos f \sqrt{rr'}}{\sqrt{p}} + \frac{4 \sin^3 f (rr')^{\frac{3}{2}}}{3p^{\frac{3}{2}}}$$

Porro deducitur ex multiplicatione aequationum 1. 2.

$$[4.] \quad \frac{p}{\sqrt{rr'}} = \cos F + \cos f$$

nec non ex additione quadratorum

$$[5.] \quad \frac{p(r+r')}{2rr'} = 1 + \cos F \cos f$$

Hinc eliminato  $\cos F$

$$[6.] \quad p = \frac{2rr' \sin^2 f}{r+r'-2 \cos f \sqrt{rr'}}$$

Quodsi itaque aequationes 9. 9\*. art. 88. hic quoque adoptamus, priorem pro  $\cos f$  positivo, posteriorem pro negativo, habebimus

$$[7.] \quad p = \frac{\sin^2 f \sqrt{rr'}}{2 \cos f}$$

$$[7*.] \quad p = \frac{\sin^2 f \sqrt{rr'}}{-2 \cos f}$$

quibus valoribus in aequatione 3. substitutis, prodibit, retinendo characteres  $m, M$  in significatione per aequationes 11. 11\*. art. 88. stabilita,

$$[8.] \quad m = l^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} l^{\frac{3}{2}}$$

$$[8*.] \quad M = -L^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} L^{\frac{3}{2}}$$

Hae aequationes conveniunt cum 12. 12\*. art. 88., si illic statuatur  $g = 0$ . Hinc colligitur, si duo loci heliocentrici, quibus per parabolam satisfit, ita tractentur, ac si orbita esset elliptica, ex applicatione praeceptorum art. 91. statim resultare debere  $x = 0$ ; vice versa facile perspicitur, si per praecepta ista procedat  $x = 0$ , orbitam pro ellipsi parabolam evadere, quum per aequationes 1. 16. 17. 19. 20. fit  $b = \infty$ ,  $a = \infty$ ,  $\varphi = 90^\circ$ . Determinatio elementorum facillime dein absolvitur. Pro  $p$  enim adhiberi poterit vel aequatio 7. art. praesentis, vel aequ. 18. art. 95.\*): pro  $F$  autem fit ex aequationibus 1. 2. huius art.  $\tan \frac{1}{2} F = \frac{\sqrt{r'} - \sqrt{r}}{\sqrt{r'} + \sqrt{r}} \cotang \frac{1}{2} f = \sin 2\omega \cotang \frac{1}{2} f$ , si angulus auxiliaris in eadem significatione accipitur, ut in art. 89.

\*) Unde simul patet,  $g$  et  $Y$  in parabola easdem rationes exprimere ut in ellipsi, v. art. 95.

Hacce occasione adhuc observamus, si in aequ. 3. pro  $p$  substituatür valor eius ex 6., prodire aequationem satis notam

$$kt = \frac{1}{2}(r + r' + \cos f \cdot \sqrt{rr'}) (r + r' - 2 \cos f \cdot \sqrt{rr'})^{\frac{1}{2}} \sqrt{2}$$

99.

In HYPERBOLA quoque characteres  $p, \psi, v, f, F, r, r', t$  in significatione eadem retinemus, pro semiaxi maiori  $a$  autem, qui hic negativus est, scribemus  $-a$ ; excentricitatem  $e$  perinde ut supra art. 21. etc. statuimus  $= \frac{1}{\cos \psi}$ . Quantitatem auxiliarem illie per  $u$  expressam, statuimus pro loco primo  $= \frac{C}{c}$ , pro secundo  $= Cc$ , unde facile concluditur,  $c$  semper esse maiorem quam 1., sed ceteris paribus eo minus differre ab 1., quo minus duo loci propositi ab invicem distent. Ex aequationibus in art. 21. evolutis huc transferimus forma paullulum mutata sextam et septimam

$$[1.] \quad \cos \frac{1}{2} v = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{C}{c}} + \sqrt{\frac{c}{C}} \right) \sqrt{\frac{(c-1)a}{r}}$$

$$[2.] \quad \sin \frac{1}{2} v = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{C}{c}} - \sqrt{\frac{c}{C}} \right) \sqrt{\frac{(c+1)a}{r}}$$

$$[3.] \quad \cos \frac{1}{2} v' = \frac{1}{2} \left( \sqrt{Cc} + \sqrt{\frac{1}{Cc}} \right) \sqrt{\frac{(c-1)a}{r'}}$$

$$[4.] \quad \sin \frac{1}{2} v' = \frac{1}{2} \left( \sqrt{Cc} - \sqrt{\frac{1}{Cc}} \right) \sqrt{\frac{(c+1)a}{r'}}$$

Hinc statim demanant sequentes:

$$[5.] \quad \sin F = \frac{1}{2} a \left( C - \frac{1}{C} \right) \sqrt{\frac{ce-1}{rr'}}$$

$$[6.] \quad \sin f = \frac{1}{2} a \left( c - \frac{1}{c} \right) \sqrt{\frac{ce-1}{rr'}}$$

$$[7.] \quad \cos F = \left( e \left( c + \frac{1}{c} \right) - \left( C + \frac{1}{C} \right) \right) \frac{a}{2\sqrt{rr'}}$$

$$[8.] \quad \cos f = \left( e \left( C + \frac{1}{C} \right) - \left( c + \frac{1}{c} \right) \right) \frac{a}{2\sqrt{rr'}}$$

Porro fit per aequ. X. art. 21.

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{2} e \left( \frac{C}{c} + \frac{c}{C} \right) - 1$$

$$\frac{r'}{a} = \frac{1}{2} e \left( Cc + \frac{1}{Cc} \right) - 1$$

atque hinc

$$[9.] \quad \frac{r'-r}{a} = \frac{1}{2} e \left( C - \frac{1}{C} \right) \left( c - \frac{1}{c} \right)$$

$$[10.] \quad \frac{r'+r}{a} = \frac{1}{2} e \left( C + \frac{1}{C} \right) \left( c + \frac{1}{c} \right) - 2$$

Haec aequatio 10. cum 8. combinata praebet

$$[11.] \quad a = \frac{r' + r - \left( c + \frac{1}{c} \right) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\frac{1}{2} \left( c - \frac{1}{c} \right)}$$

Statuendo itaque perinde ut in ellipsi  $\frac{\sqrt{\frac{r'}{r}} + \sqrt{\frac{r}{r'}}}{2 \cos f} = 1 + 2l$ , vel  $= 1 - 2L$ , prout  $\cos f$  est positivus vel negativus, fit

$$[12.] \quad a = \frac{s \left( 1 - l \left( \sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}} \right)^2 \right) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\left( c - \frac{1}{c} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$[12*.] \quad a = \frac{-s \left( L + \frac{1}{2} \left( \sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}} \right)^2 \right) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\left( c - \frac{1}{c} \right)^{\frac{3}{2}}}$$

Computus quantitatis  $l$  vel  $L$  hic perinde ut in ellipsi adiumento anguli auxiliaris  $\omega$  instituitur. Denique fit ex aequatione XI. art. 22. (accipiendo logarithmos hyperbolicos)

$$\begin{aligned} \frac{kt}{a^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{2} e \left( Cc - \frac{1}{Cc} - \frac{C}{c} + \frac{c}{C} \right) - \log Cc + \log \frac{C}{c} \\ &= \frac{1}{2} e \left( C + \frac{1}{C} \right) \left( c - \frac{1}{c} \right) - 2 \log c \end{aligned}$$

sive eliminata  $C$  adiumento aequationis 8.

$$\frac{kt}{a^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left( c - \frac{1}{c} \right) \cos f \cdot \sqrt{rr'}}{a} + \frac{1}{2} \left( cc - \frac{1}{cc} \right) - 2 \log c$$

In hac aequatione pro  $a$  substituimus valorem eius ex 12. 12\*.; dein characterem  $m$  vel  $M$  in eadem significatione, quam formulae 11. 11\*. art. 88. assignant, introducimus; tandemque brevitatis gratia scribimus

$$\frac{1}{2} \left( \sqrt{c} - \sqrt{\frac{1}{c}} \right)^2 = z, \quad \frac{c c - \frac{1}{c c} - 4 \log c}{\frac{1}{2} \left( c - \frac{1}{c} \right)^2} = Z$$

quo facto oriuntur aequationes

$$[13.] \quad m = (l-z)^{\frac{1}{2}} + (l-z)^{\frac{3}{2}} Z$$

$$[13*.] \quad M = -(L+z)^{\frac{1}{2}} + (L+z)^{\frac{3}{2}} Z$$

quae unicam incognitam  $z$  implicant, quum manifesto sit  $Z$  functio ipsius  $z$  per formulam sequentem expressa

$$Z = \frac{(1+2z)\sqrt{(z+z)} - \log \left( \sqrt{(1+z)} + \sqrt{z} \right)}{2(z+z)^{\frac{1}{2}}}$$

100.

In solvenda aequatione 13. vel 13\*. eum casum primo seorsim considerabimus, ubi  $z$  obtinet valorem haud magnum, ita ut  $Z$  per seriem secundum potestates ipsius  $z$  progredientem celeriterque convergentem exprimi possit. Iam fit

$$(1+2z)\sqrt{(z+z)} = z^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}z^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}z^{\frac{5}{2}} \dots, \quad \log \left( \sqrt{(1+z)} + \sqrt{z} \right) = z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{6}z^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{40}z^{\frac{5}{2}} \dots$$

adeoque numerator ipsius  $Z = \frac{3}{2}z^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}z^{\frac{5}{2}} \dots$ ; denominator autem fit  $= 2z^{\frac{1}{2}} + 3z^{\frac{3}{2}} \dots$ , unde  $Z = \frac{3}{4} - \frac{1}{8}z \dots$ . Ut legem progressionis detegamus, differentiamus aequationem

$$2(z+zz)^{\frac{1}{2}}Z = (1+2z)\sqrt{(z+z)} - \log \left( \sqrt{(1+z)} + \sqrt{z} \right)$$

unde prodit omnibus rite reductis

$$2(z+zz)^{\frac{1}{2}} \frac{dZ}{dz} + 3Z(1+2z)\sqrt{(z+z)} = 4\sqrt{(z+zz)}$$

sive

$$(2z+2zz)^{\frac{1}{2}} \frac{dZ}{dz} = 4 - (3+6z)Z$$

unde similis ratione ut in art. 90. deducitur

$$Z = \frac{4}{3} - \frac{4.6}{3.5}z + \frac{4.6.8}{3.5.7}z^2 - \frac{4.6.8.10}{3.5.7.9}z^3 + \frac{4.6.8.10.12}{3.5.7.9.11}z^4 - \dots$$

Patet itaque,  $Z$  prorsus eodem modo a  $-z$  pendere, ut supra in ellipsi  $X$  ab  $x$  quamobrem si statuimus

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}(z+Z)}$$

determinabitur etiam  $\zeta$  perinde per  $-z$  ut supra  $\xi$  per  $x$ , ita ut habeatur

$$[14.] \quad \zeta = \frac{\frac{3}{2}zZ}{1 - \frac{3}{2}z + \frac{\frac{5}{2}z}{1 + \frac{\frac{7}{2}z}{1 + \frac{\frac{9}{2}z}{1 + \dots}}}}$$

sive

$$\zeta = \frac{\frac{3}{2}zZ}{1 + \frac{1}{2}z + \frac{\frac{3}{2}z}{1 + \frac{\frac{5}{2}z}{1 + \frac{\frac{7}{2}z}{1 + \dots}}}}$$

Hoc modo computati sunt valores ipsius  $\zeta$  pro  $z = 0$  usque ad  $z = 0,3$  per singulas partes millesimas, quos columna tertia tabula III. exhibet.

101.

Introducendo quantitatem  $\zeta$  statuendoque  $\sqrt{(l-z)} = \frac{m}{y}$  vel  $\sqrt{(L+z)} = \frac{M}{Y}$ , nec non

$$[15.] \quad \frac{mm}{l+l+\zeta} = h, \quad \text{vel}$$

$$[15*.] \quad \frac{MM}{L-\frac{1}{2}-\zeta} = H$$

aequationes 13. 13\*. hancce formam induunt

$$[16.] \quad \frac{(y-1)yy}{y+\frac{1}{2}} = h$$

$$[16*.] \quad \frac{(Y+1)YY}{Y-\frac{1}{2}} = H$$

adeoque omnino identicae fiunt cum iis ad quas in ellipsi perventum est (15. 15\*. art. 91.). Hinc igitur, quatenus  $h$  vel  $H$  pro cognita haberi potest,  $y$  vel  $Y$  deduci poterit, ac dein erit

$$[17.] \quad z = l - \frac{m m}{y y}$$

$$[17*] \quad z = \frac{M M}{Y Y} - L$$

Ex his colligitur, omnes operationes supra pro ellipsi praescriptas perinde etiam pro hyperbola valere, donec e valore approximato ipsius  $h$  vel  $H$  eruta fuerit quantitas  $y$  vel  $Y$ ; dein vero quantitas  $\frac{m m}{y y} - l$  vel  $L - \frac{M M}{Y Y}$ , quae in ellipsi positiva evadere debebat, in parabolaque  $= 0$ , fieri debet negativa in hyperbola: hoc itaque criterio genus sectionis conicae definitur. Ex inventa  $z$  tabula nostra dabit  $\zeta$ , hinc oriatur valor correctus ipsius  $h$  vel  $H$ , cum quo calculus repetendus est, donec omnia ex asse conspirent.

Postquam valor verus ipsius  $z$  inventus est,  $c$  inde per formulam  $c = 1 + 2z + 2\sqrt{(z + z^2)}$  derivari posset, sed praestat, etiam ad usus sequentes, angulum auxiliarem  $n$  introducere, per aequationem  $\tan 2n = 2\sqrt{(z + z^2)}$  determinandum; hinc fiet  $c = \tan 2n + \sqrt{(1 + \tan 2n^2)} = \tan(45^\circ + n)$

102.

Quum in hyperbola perinde ut in ellipsi  $y$  necessario esse debeat positiva, solutio aequationis 16. hic quoque ambiguitati obnoxia esse nequit\*): sed respectu aequationis 16\*. hic paullo aliter ratiocinandum est quam in ellipsi. Ex aequationum theoria facile demonstratur, pro valore positivo ipsius  $H^{**})$  hanc aequationem (siquidem ullam radicem realem positivam habeat) cum una radice negativa duas positivas habere, quae vel ambae aequales erunt puta  $= \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} = 0,20601$ , vel altera hoc limite maior altera minor. Iam in problemate nostro (suppositioni superstructo,  $z$  esse quantitatem haud magnam, saltem non maiorem quam 0,3, ne tabulae tertiae usu destituamur) necessario semper radicem maiorem accipiendam esse sequenti modo demonstramus. Si in aequatione 13\*, pro  $M$  substituitur  $Y\sqrt{(L + z)}$ , prodit  $Y + 1 = (L + z)Z > (1 + z)Z$ , sive  $Y > \frac{1}{3} - \frac{4}{3.5}z + \frac{4.6}{3.5.7}z^2 - \frac{4.6.8}{3.5.7.9}z^3 + \text{etc.}$ , unde facile concluditur, pro valoribus

\*) Vix opus erit monere, tabulam nostram II. in hyperbola perinde ut in ellipsi ad solutionem huius aequationis adhiberi posse, quamdiu  $h$  ipsius limites non egrediatur.

\*\*) Quantitas  $H$  manifesto fieri nequit negativa, nisi fuerit  $\zeta > \frac{1}{2}$ ; tali autem valori ipsius  $\zeta$  responderet valor ipsius  $z$  maior quam 2,684, adeoque limites huius methodi longe egrediens.

tam parvis ipsius  $z$ , quales hic supponimus, semper fieri debere  $Y > 0,20601$ . Revera calculo facto invenimus, ut  $(1 + z)Z$  huic limiti aequalis fiat, esse debere  $z = 0,79858$ : multum vero abest, quin methodum nostram ad tantos valores ipsius  $z$  extendere velimus.

103.

Quoties  $z$  valorem maiorem obtinet, tabulae III. limites egredientem, aequationes 13. 13\*. tuto semper ac commode in forma sua non mutata tentando solventur, et quidem ob rationes iis similes quas in art. 94. pro ellipsi exposuimus. In tali casu elementa orbitae obiter saltem cognita esse supponere licet: tum vero valor approximatus ipsius  $n$  statim habetur per formulam  $\tan 2n = \frac{\sin f \sqrt{r r'}}{\sqrt{y(e-1)}}$ , quae sponte demanat ex aequatione 6. art. 99. Ex  $n$  autem habebitur  $z$  per formulam  $z = \frac{1 - \cos 2n}{2 \cos 2n} = \frac{\sin^2 n}{\cos 2n}$ , et ex valore approximato ipsius  $z$  paucis tentaminibus derivabitur ille, qui aequationi 13. vel 13\*. ex asse satisfacit. Possunt quoque illae aequationes in hac forma exhiberi

$$m = \left(l - \frac{\sin^2 n}{\cos 2n}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(l - \frac{\sin^2 n}{\cos 2n}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\tan 2n}{\cos 2n} - \log \text{hyp} \tan(45^\circ + n) \right\} \frac{1}{\tan 2n^3}$$

$$M = - \left(L + \frac{\sin^2 n}{\cos 2n}\right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(L + \frac{\sin^2 n}{\cos 2n}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\tan 2n}{\cos 2n} - \log \text{hyp} \tan(45^\circ + n) \right\} \frac{1}{\tan 2n^3}$$

atque sic, neglecta  $z$ , statim valor verus ipsius  $n$  erui.

104.

Superest, ut ex  $z$ ,  $n$  vel  $c$  elementa ipsa determinemus. Statuendo  $\sqrt{y(e-1)} = \zeta$ , habebitur ex aequatione 6. art. 99.

$$[18.] \quad \zeta = \frac{\sin f \sqrt{r r'}}{\tan 2n}$$

Combinando hanc formulam cum 12. 12\*. art. 99., eruitur

$$[19.] \quad \sqrt{y(e-1)} = \tan \phi = \frac{\tan f \tan 2n}{2(L-z)}$$

$$[19*] \quad \tan \phi = - \frac{\tan f \tan 2n}{2(L+z)}$$

unde excentricitas commode atque exacte computatur; ex  $\epsilon$  et  $\sqrt{(ee-1)}$  probabit per divisionem  $a$ , per multiplicationem  $p$ , ita ut sit

$$\begin{aligned} a &= \frac{2(l-z)\cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\tan^2 2n^3} = \frac{2mm\cos f \cdot \sqrt{rr'}}{yy\tan^2 2n^3} = \frac{kkt}{4yyrr'\cos f^2\tan^2 2n^3} \\ &= \frac{-2(L+z)\cos f \cdot \sqrt{rr'}}{\tan^2 2n^3} = \frac{-2MM\cos f \cdot \sqrt{rr'}}{YY\tan^2 2n^3} = \frac{kkt}{4YYrr'\cos f^2\tan^2 2n^3} \\ p &= \frac{\sin f \cdot \tan f \cdot \sqrt{rr'}}{2(l-z)} = \frac{yy\sin f \cdot \tan f \cdot \sqrt{rr'}}{2mm} = \frac{(yrr'\sin 2f)^2}{kt} \\ &= \frac{-\sin f \cdot \tan f \cdot \sqrt{rr'}}{2(L+z)} = \frac{-YY\sin f \cdot \tan f \cdot \sqrt{rr'}}{2MM} = \frac{(Yrr'\sin 2f)^2}{kt} \end{aligned}$$

Expressio tertia et sexta pro  $p$ , quae omnino identicae sunt cum formulis 18. 18\*. art. 95., ostendunt, ea quae illic de significatione quantitatum  $y$ ,  $Y$  tradita sunt, etiam pro hyperbola valere.

E combinatione aequationum 6. 9. art. 99. deducitur

$$(r'-r)\sqrt{\frac{ee-1}{rr'}} = e \sin f \cdot \left(C - \frac{1}{C}\right)$$

introducendo itaque  $\psi$  et  $\omega$ , statuendoque  $C = \tan(45^\circ + N)$ , fit

$$[20.] \quad \tan 2N = \frac{2 \sin \psi \tan 2m}{\sin f \cos 2\omega}$$

Invento hinc  $C$ , habebuntur valores quantitatis in art. 21. per  $u$  expressae pro utroque loco; dein fiet per aequationem III. art. 21.

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2}v &= \frac{C-c}{(C+c)\tan \frac{1}{2}\psi} \\ \tan \frac{1}{2}v' &= \frac{C-c-1}{(C+c+1)\tan \frac{1}{2}\psi} \end{aligned}$$

sive introducendo pro  $C$ ,  $c$  angulos  $N$ ,  $n$

$$[21.] \quad \tan \frac{1}{2}v = \frac{\sin(N-n)}{\cos(N+n)\tan \frac{1}{2}\psi}$$

$$[22.] \quad \tan \frac{1}{2}v' = \frac{\sin(N+n)}{\cos(N-n)\tan \frac{1}{2}\psi}$$

Hinc determinabuntur anomaliae verae  $v$ ,  $v'$ , quarum differentia cum  $2f$  comparata simul calculo confirmando inserviet

Denique per formulam XI. art. 22. facile deducitur, intervallum temporis a perihelio usque ad tempus loco primo respondens esse

$$= \frac{a^3}{k} \left\{ \frac{2e \cos(N+n) \sin(N-n)}{\cos 2N \cos 2n} - \log \text{hyp} \frac{\tan(45^\circ + N)}{\tan(45^\circ + n)} \right\}$$

et perinde intervallum temporis a perihelio usque ad tempus loco secundo respondens

$$= \frac{a^3}{k} \left\{ \frac{2e \cos(N-n) \sin(N+n)}{\cos 2N \cos 2n} - \log \text{hyp} \tan(45^\circ + N) \tan(45^\circ + n) \right\}$$

Si itaque tempus primum statuitur  $= T - \frac{1}{2}t$ , adeoque secundum  $= T + \frac{1}{2}t$ , fit

$$[23.] \quad T = \frac{a^3}{k} \left\{ \frac{e \tan 2N}{\cos 2N} - \log \tan(45^\circ + N) \right\}$$

unde tempus transitus per perihelium innotescet; denique

$$[24.] \quad t = \frac{2a^3}{k} \left\{ \frac{e \tan 2n}{\cos 2N} - \log \tan(45^\circ + n) \right\}$$

quae aequatio, si placet, ad ultimam calculi confirmationem adhiberi potest.

105.

Ad illustrationem horum praeceptorum exemplum e duobus locis in artt. 23. 24. 25. 46. secundum eadem elementa hyperbolica calculatis conficiemus. Sit itaque  $v'-v = 48^\circ 12' 0''$  sive  $f = 24^\circ 6' 0''$ ,  $\log r = 0,0333585$ ,  $\log r' = 0,2008541$ ,  $t = 51,49788$  dies. Hinc invenitur  $\omega = 2^\circ 45' 28,47$ ,  $l = 0,05796039$ ,  $\frac{mm}{1+l}$  sive valor approximatus ipsius  $h = 0,0644371$ ; hinc, per tabulam II.,  $\log yy = 0,0560848$ ,  $\frac{mm}{yy} = 0,05047454$ ,  $z = 0,00748585$ , cui in tabula III. respondet  $\zeta = 0,0000032$ . Hinc fit valor correctus ipsius  $h = 0,06443691$ ,  $\log yy = 0,0560846$ ,  $\frac{mm}{yy} = 0,05047456$ ,  $z = 0,00748583$ , qui valores, quum  $\zeta$  inde non mutetur, nulla amplius correctione opus habent. Iam calculus elementorum ita se habet:

|                                |                        |                                      |                        |
|--------------------------------|------------------------|--------------------------------------|------------------------|
| $\log z$ . . . . .             | 7,8742399              | $\log \tan f$ . . . . .              | 9,6506199              |
| $\log(1+z)$ . . . . .          | 0,0032389              | $\log \frac{1}{2} \tan 2n$ . . . . . | 8,9387394              |
| $\log \sqrt{(z+zz)}$ . . . . . | 8,9387394              | $C \cdot \log(l-z)$ . . . . .        | 1,2969275              |
| $\log 2$ . . . . .             | 0,3010300              | $\log \tan \psi$ . . . . .           | 9,8862868              |
| $\log \tan 2n$ . . . . .       | 9,2397694              | $\psi$ . . . . .                     | $= 37^\circ 34' 59,77$ |
| $2n$ . . . . .                 | $= 9^\circ 51' 11,816$ | (esse deberet $= 37^\circ 35' 0$ )   |                        |
| $n$ . . . . .                  | $= 4^\circ 55' 35,908$ |                                      |                        |

|                                                   |                           |                                                   |                            |
|---------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------|
| $\log \sin f$ . . . . .                           | 9,6110118                 | $C. \log \frac{1}{2} \sin f$ . . . . .            | 0,6900182                  |
| $\log \sqrt{rr'}$ . . . . .                       | 0,1171063                 | $\log \tan 2\omega$ . . . . .                     | 8,9848318                  |
| $C. \log \tan 2n$ . . . . .                       | 0,7602306                 | $C. \log \cos 2\omega$ . . . . .                  | 0,0020156                  |
| $\log b$ . . . . .                                | 0,4883487                 | $\log \sin \frac{1}{2}\psi$ . . . . .             | 9,7852685                  |
| $\log \tan \frac{1}{2}\psi$ . . . . .             | 9,8862868                 | $\log \tan 2N$ . . . . .                          | 9,4621341                  |
| $\log a$ . . . . .                                | 0,6020619                 | $2N$ . . . . .                                    | $= 16^{\circ} 9' 46'' 253$ |
| $\log p$ . . . . .                                | 0,3746355                 | $N$ . . . . .                                     | $= 8\ 4\ 53,127$           |
| (esse deberet . . . . .)                          | 0,6020600                 | $N-n$ . . . . .                                   | $= 3\ 9\ 17,219$           |
| atque . . . . .                                   | 0,3746356                 | $N+n$ . . . . .                                   | $= 13\ 0\ 29,035$          |
| $\log \sin (N-n)$ . . . . .                       | 8,7406274                 | $\log \sin (N+n)$ . . . . .                       | 9,3523527                  |
| $C. \log \cos (N+n)$ . . . . .                    | 0,0112902                 | $C. \log \cos (N-n)$ . . . . .                    | 0,0006587                  |
| $\log \cot \frac{1}{2}\psi$ . . . . .             | 0,4681829                 | $\log \cot \frac{1}{2}\psi$ . . . . .             | 0,4681829                  |
| $\log \tan \frac{1}{2}v$ . . . . .                | 9,2201005                 | $\log \tan \frac{1}{2}v'$ . . . . .               | 9,8211943                  |
| $\frac{1}{2}v$ . . . . .                          | $= 9^{\circ} 25' 29'' 97$ | $\frac{1}{2}v'$ . . . . .                         | $= 33^{\circ} 31' 29'' 93$ |
| $v$ . . . . .                                     | $= 18\ 50\ 59,94$         | $v'$ . . . . .                                    | $= 67\ 2' 59,86$           |
| (esse deberet . . . . .)                          | 18 51 0)                  | (esse deberet . . . . .)                          | 67 3 0)                    |
| $\log e$ . . . . .                                | 0,1010184                 | $\log e$ . . . . .                                | 0,1010184                  |
| $\log \tan 2N$ . . . . .                          | 9,4621341                 | $\log \tan 2n$ . . . . .                          | 9,2397694                  |
| $C. \log \cos 2n$ . . . . .                       | 0,0064539                 | $C. \log \cos 2N$ . . . . .                       | 0,0175142                  |
|                                                   | 9,5696064                 |                                                   | 9,3583020                  |
| numerus . . . . .                                 | $= 0,37119863$            | numerus . . . . .                                 | $= 0,22819284$             |
| $\log \text{hyp} \tan (45^{\circ} + N)$ . . . . . | $= 0,28591251$            | $\log \text{hyp} \tan (45^{\circ} + n)$ . . . . . | $= 0,17282621$             |
| Differentia . . . . .                             | $= 0,08528612$            | Differentia . . . . .                             | $= 0,05536663$             |
| $\log$ . . . . .                                  | 8,9308783                 | $\log$ . . . . .                                  | 8,7432480                  |
| $\frac{1}{2} \log a$ . . . . .                    | 0,9030928                 | $\frac{1}{2} \log a$ . . . . .                    | 0,9030928                  |
| $C. \log k$ . . . . .                             | 1,7644186                 | $C. \log k$ . . . . .                             | 1,7644186                  |
| $\log T$ . . . . .                                | 1,5983897                 | $\log 2$ . . . . .                                | 0,3010300                  |
| $T$ . . . . .                                     | $= 39,66338$              | $\log t$ . . . . .                                | 1,7117894                  |
|                                                   |                           | $t$ . . . . .                                     | $= 51,49788$               |

Distat itaque transitus per perihelium a tempore loco primo respondente 13,91444 diebus, a tempore loco secundo respondente 65,41232 diebus. — Ceterum differentias exiguas elementorum hic erutorum ab iis, secundum quae loca proposita calculata fuerant, tabularum praecisioni limitatae tribuere oportet.

In tractatu de relationibus maxime insignibus ad motum corporum coelestium in sectionibus conicis spectantibus, silentio praeterire non possumus expressionem elegantem temporis per semiaxem maiorem, summam  $r+r'$  atque chordam duo loca iungentem. Haec formula pro parabola quidem primo ab ill. EULER inventa esse videtur (Miscell. Berolin., T. VII. p. 20), qui tamen eam in posterum neglexit, neque etiam ad ellipsin et hyperbolam extendit: errant itaque, qui formulam clar. LAMBERT tribuunt, etiamsi huic geometrae meritum, hanc expressionem oblivione sepultam proprio Marte eruisse et ad reliquas sectiones conicas ampliavisse, non possit denegari. Quamquam hoc argumentum a pluribus geometris iam tractatum sit, tamen lectores attenti expositionem sequentem haud superfluum agnoscent. A motu elliptico initium facimus.

Ante omnia observamus, angulum circa Solem descriptum  $2f$  (art. 88., unde reliqua quoque signa desumimus) infra  $360^{\circ}$  supponi posse; patet enim, si iste angulus  $360^{\circ}$  gradibus augeatur, tempus una revolutione sive  $\frac{a^3 \cdot 360^{\circ}}{k} = a^3 \times 365,25$  diebus crescere. Iam si chordam per  $\rho$  denotamus, manifestum est fieri

$$\rho \rho = (r' \cos v' - r \cos v)^2 + (r' \sin v' - r \sin v)^2$$

adeoque per aequationes VIII. IX. art. 8.

$$\begin{aligned} \rho \rho &= a a (\cos E' - \cos E)^2 + a a \cos^2 (\sin E' - \sin E)^2 \\ &= 4 a a \sin^2 (\sin G^2 + \cos^2 \varphi^2 \cos G^2) = 4 a a \sin^2 (1 - e e \cos G^2) \end{aligned}$$

Introducamus angulum auxiliarem  $h$  talem, ut sit  $\cos h = e \cos G$ ; simul, quo omnis ambiguitas tollatur, supponemus,  $h$  accipi inter  $0$  et  $180^{\circ}$ , unde  $\sin h$  erit quantitas positiva. Quoniam itaque etiam  $g$  inter eosdem limites iacet (si enim  $2g$  ad  $360^{\circ}$  vel ultra ascenderet, motus circa Solem revolutionem integram attingeret vel superaret), ex aequatione praecedente sponte sequitur  $\rho = 2 a \sin g \sin h$ , siquidem chorda tamquam quantitas positiva consideratur. Quum porro habeatur  $r+r' = 2 a (1 - e \cos g \cos G) = 2 a (1 - \cos g \cos h)$ , patet, si statuatur  $h-g = \delta$ ,  $h+g = \varepsilon$ , fieri

$$[1.] \quad r+r'-\rho = 2 a (1 - \cos \delta) = 4 a \sin \frac{1}{2} \delta^2$$

$$[2.] \quad r+r'+\rho = 2 a (1 - \cos \varepsilon) = 4 a \sin \frac{1}{2} \varepsilon^2$$

Denique habetur  $kt = a^3(2g - 2e \sin g \cos G) = a^3(2g - 2 \sin g \cos h)$ , sive

$$[3.] \quad kt = a^3(\varepsilon - \sin \varepsilon - (\delta - \sin \delta))$$

Determinari poterunt itaque, secundum aequationes 1. 2., anguli  $\delta$  et  $\varepsilon$  ex  $r+r'$ ,  $\rho$  et  $a$ : quamobrem ex iisdem quantitibus determinabitur, secundum aequationem 3., tempus  $t$ . Si magis placet, haec formula ita exhiberi potest:

$$kt = a^3 \left\{ \arccos \frac{2a - (r+r') - \rho}{2a} - \sin \arccos \frac{2a - (r+r') - \rho}{2a} \right. \\ \left. - \arccos \frac{2a - (r+r') + \rho}{2a} + \sin \arccos \frac{2a - (r+r') + \rho}{2a} \right\}$$

Sed in determinatione angulorum  $\delta$ ,  $\varepsilon$  per cosinus suos ambiguitas remanet, quam propius considerare oportet. Sponte quidem patet,  $\delta$  iacere debere inter  $-180^\circ$  et  $+180^\circ$ , atque  $\varepsilon$  inter  $0$  et  $360^\circ$ : sed sic quoque uterque angulus determinationem duplicem, adeoque tempus resultans quadruplicem admittit videtur. Attamen ex aequatione 5. art. 88. habemus  $\cos f \cdot \sqrt{rr'} = a(\cos g - \cos h) = 2a \sin \frac{1}{2} \delta \sin \frac{1}{2} \varepsilon$ : iam  $\sin \frac{1}{2} \varepsilon$  necessario fit quantitas positiva, unde concludimus,  $\cos f$  et  $\sin \frac{1}{2} \delta$  necessario eodem signo affectos esse, adeoque  $\delta$  inter  $0$  et  $180^\circ$ , vel inter  $-180^\circ$  et  $0$  accipiendum esse, prout  $\cos f$  positivus fuerit vel negativus, i. e. prout motus heliocentricus  $2f$  fuerit infra vel supra  $180^\circ$ . Ceterum sponte patet, pro  $2f = 180^\circ$  necessario esse debere  $\delta = 0$ . Hoc itaque modo  $\delta$  plene determinatus est. At determinatio anguli  $\varepsilon$  necessario ambigua manet, ita ut semper pro tempore *duo* valores prodeant, quorum quis verus sit, nisi aliunde constet, decidi nequit. Ceterum ratio huius phaenomeni facile perspicitur: constat enim, per duo puncta data describi posse *duas* ellipses diversas, quae ambae focum suum habeant in eodem puncto dato, simulque eundem semiaxem maiorem\*); manifesto autem motus a loco primo ad secundum in his ellipsis temporibus inaequalibus absolvitur.

\*) Descriptio e loco primo circulo radio  $2a-r$  alioque radio  $2a-r'$  e loco secundo, ellipses focum alterum in intersectione horum circulorum iacere patet. Quare quum generaliter loquendo duae semper dentur intersectiones, duae ellipses diversae prodibunt.

107.

Denotando per  $\chi$  arcum quemcunque inter  $-180^\circ$  et  $+180^\circ$  situm, et per  $s$  sinum arcus  $\frac{1}{2}\chi$ , constat esse

$$\frac{1}{2}\chi = s + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}s^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} s^5 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} s^7 + \text{etc.}$$

Porro fit

$$\frac{1}{2} \sin \chi = s \sqrt{1-s^2} = s - \frac{1}{2}s^3 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} s^5 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} s^7 - \text{etc.}$$

adeoque

$$\chi - \sin \chi = 4 \left( \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}s^5 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} s^7 + \frac{1}{9} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} s^9 + \text{etc.} \right)$$

Substituimus in hac serie pro  $s$  deinceps  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r+r'-\rho}{a}}$ , et  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r+r'+\rho}{a}}$ , quaeque inde proveniunt multiplicamus per  $a^3$ ; ita respective oriuntur series

$$\frac{1}{4}(r+r'-\rho)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a} (r+r'-\rho)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{a^2} (r+r'-\rho)^{\frac{7}{2}} \\ + \frac{1}{128} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{a^3} (r+r'-\rho)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}$$

$$\frac{1}{4}(r+r'+\rho)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a} (r+r'+\rho)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{a^2} (r+r'+\rho)^{\frac{7}{2}} \\ + \frac{1}{128} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{a^3} (r+r'+\rho)^{\frac{9}{2}} + \text{etc.}$$

quarum summas denotabimus per  $T$ ,  $U$ . Iam nullo negotio patet, quum sit  $2 \sin \frac{1}{2} \delta = \pm \sqrt{\frac{r+r'-\rho}{a}}$ , signo superiori vel inferiori valente prout  $2f$  infra vel supra  $180^\circ$  est, fieri  $a^3(\delta - \sin \delta) = \pm T$ , signo perinde determinato. Eodem modo si pro  $\varepsilon$  accipitur valor minor infra  $180^\circ$  situs, fiet  $a^3(\varepsilon - \sin \varepsilon) = U$ ; accepto vero valore altero, qui est illius complementum ad  $360^\circ$ , manifesto fiet  $a^3(\varepsilon - \sin \varepsilon) = a^3 360^\circ - U$ . Hinc itaque colliguntur duo valores pro tempore  $t$

$$\frac{U \mp T}{k}, \text{ atque } \frac{a^3 360^\circ}{k} - \frac{U+T}{k}$$

108.

Si parabola tanquam ellipsis spectatur, cuius axis maior infinite magnus est, expressio temporis in art. praec. inventa transit in  $\frac{1}{ak}(r+r+\rho)^{\frac{3}{2}} \mp (r+r'-\rho)^{\frac{3}{2}}$ : sed quum haec formulae deductio fortasse quibusdam dubiis exposita videri possit, aliam ab ellipsi haud pendente exponemus.

Statuendo brevitatis caussa

$$\tan \frac{1}{2} v = \theta, \quad \tan \frac{1}{2} v' = \theta', \quad \text{fit}$$

$$r = \frac{1}{2} p (1 + \theta \theta), \quad r' = \frac{1}{2} p (1 + \theta' \theta')$$

$$\cos v = \frac{1 - \theta \theta}{1 + \theta \theta}, \quad \cos v' = \frac{1 - \theta' \theta'}{1 + \theta' \theta'}$$

$$\sin v = \frac{2 \theta}{1 + \theta \theta}, \quad \sin v' = \frac{2 \theta'}{1 + \theta' \theta'}$$

Hinc fit

$$r' \cos v' - r \cos v = \frac{1}{2} p (\theta \theta' - \theta' \theta), \quad r' \sin v' - r \sin v = p (\theta' - \theta)$$

adeoque

$$\rho \rho = \frac{1}{4} p p (\theta' - \theta)^2 (1 + (\theta' + \theta)^2)$$

Iam facile perspicitur

$$\theta' - \theta = \frac{\sin f}{\cos \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v'}$$

esse quantitatem positivam: statuendo itaque

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4} (\theta' + \theta)^2} = \gamma, \quad \text{erit } \rho = p (\theta' - \theta) \gamma$$

Porro fit

$$r + r' = \frac{1}{2} p (2 + \theta \theta + \theta' \theta') = p (\gamma \gamma + \frac{1}{4} (\theta' - \theta)^2)$$

quamobrem habetur

$$\frac{r + r' + \rho}{p} = (\gamma + \frac{1}{4} (\theta' - \theta))^2$$

$$\frac{r + r' - \rho}{p} = (\gamma - \frac{1}{4} (\theta' - \theta))^2$$

Ex aequatione priori sponte deducitur

$$\pm \sqrt{\frac{r + r' + \rho}{p}} = \gamma + \frac{1}{4} (\theta' - \theta)$$

quoniam  $\gamma$  et  $\theta' - \theta$  sunt quantitates positivae; sed quum  $\frac{1}{4} (\theta' - \theta)$  minor sit vel maior quam  $\gamma$ , prout

$$\gamma \gamma - \frac{1}{4} (\theta' - \theta)^2 = 1 + \theta \theta' = \frac{\cos f}{\cos \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} v'}$$

positiva est vel negativa, patet, ex aequatione posteriori concludere oportere

$$\pm \sqrt{\frac{r + r' - \rho}{p}} = \gamma - \frac{1}{4} (\theta' - \theta)$$

ubi signum superius vel inferius adoptandum est, prout angulus circa solem descriptus infra  $180^\circ$  vel supra  $180^\circ$  fuerit.

Ex aequatione, quae in art. 98. secundam sequitur, porro habemus

$$\frac{2kt}{p^2} = (\theta' - \theta) \left( (1 + \theta \theta' + \frac{1}{4} (\theta' - \theta)^2) \right) = (\theta' - \theta) (\gamma \gamma + \frac{1}{4} \theta' \theta' (\theta' - \theta)^2)$$

$$= \frac{1}{4} (\gamma + \frac{1}{4} (\theta' - \theta))^2 - \frac{1}{4} (\gamma - \frac{1}{4} (\theta' - \theta))^2$$

unde sponte sequitur

$$kt = \frac{1}{4} \left\{ (r + r' + \rho)^{\frac{1}{2}} \mp (r + r' - \rho)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

signo superiori vel inferiori valente, prout  $2f$  infra vel supra  $180^\circ$  est.

109.

Si in hyperbola signa  $a$ ,  $C$ ,  $c$  in eadem significatione accipimus, ut in art. 99., habemus ex aequationibus VIII., IX. art. 21.

$$r' \cos v' - r \cos v = -\frac{1}{2} \left( c - \frac{1}{c} \right) \left( C - \frac{1}{C} \right) a$$

$$r' \sin v' - r \sin v = \frac{1}{2} \left( c - \frac{1}{c} \right) \left( C + \frac{1}{C} \right) a \sqrt{ee - 1}$$

adeoque

$$\rho = \frac{1}{2} a \left( c - \frac{1}{c} \right) \sqrt{\left( ee \left( C + \frac{1}{C} \right)^2 - 4 \right)}$$

Supponamus  $\gamma$  esse quantitatem per aequationem  $\gamma + \frac{1}{\gamma} = e \left( C + \frac{1}{C} \right)$  determinatam: cui quum manifesto duo valores sibi invicem reciproci satisfaciunt, adoptamus eum qui est maior quam 1. Ita fit

$$\rho = \frac{1}{2} a \left( c - \frac{1}{c} \right) \left( \gamma - \frac{1}{\gamma} \right)$$

Porro fit

$$r + r' = \frac{1}{2} a \left( e \left( c + \frac{1}{c} \right) \left( C + \frac{1}{C} \right) - 4 \right) = \frac{1}{2} a \left( \left( c + \frac{1}{c} \right) \left( \gamma + \frac{1}{\gamma} \right) - 4 \right)$$

adeoque

$$r+r'+\rho = a\left(\sqrt{c\gamma} - \sqrt{\frac{1}{c\gamma}}\right)^2$$

$$r+r'-\rho = a\left(\sqrt{\frac{1}{c}} - \sqrt{\frac{c}{\gamma}}\right)^2$$

Statuendo itaque  $\sqrt{\frac{r+r'+\rho}{4a}} = m$ ,  $\sqrt{\frac{r+r'-\rho}{4a}} = n$ , erit necessario  $\sqrt{c\gamma} - \sqrt{\frac{1}{c\gamma}} = 2m$ ; ad decidendam vero quaestionem, utrum  $\sqrt{\frac{1}{c}} - \sqrt{\frac{c}{\gamma}} = +2n$  an  $= -2n$ , inquire oportet, utrum  $\gamma$  maior an minor sit quam  $c$ : sed ex aequatione 8. art. 99. facile sequitur, casum priorem locum habere, quoties  $2f$  sit infra  $180^\circ$ , posteriorem quoties  $2f$  sit supra  $180^\circ$ . Denique ex eodem art. habemus

$$\begin{aligned} \frac{kt}{a^2} &= \frac{1}{2}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)\left(c - \frac{1}{c}\right) - 2\log c = \frac{1}{2}\left(c\gamma - \frac{1}{c\gamma}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} - \frac{c}{\gamma}\right) - \log c\gamma + \log \frac{1}{c} \\ &= 2m\sqrt{(1+mm)} \mp 2n\sqrt{(1+nn)} - 2\log(\sqrt{(1+mm)} + m) \pm 2\log(\sqrt{(1+nn)} + n) \end{aligned}$$

signis inferioribus semper ad casum  $2f > 180^\circ$  spectantibus. Iam

$$\log(\sqrt{(1+mm)} + m)$$

facile evolvitur in seriem sequentem

$$m - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} m^3 + \frac{1}{8} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^5 - \frac{1}{16} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} m^7 + \text{etc.}$$

Hoc sponte colligitur ex  $d \log(\sqrt{(1+m^2)} + m) = \frac{m}{\sqrt{(1+m^2)}}$ . Prodit itaque

$$2m\sqrt{(1+mm)} - 2\log(\sqrt{(1+mm)} + m) = 4\left(\frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{8}m^5 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} m^7 - \text{etc.}\right)$$

et perinde formula alia prorsus similis, si  $m$  cum  $n$  permutatur. Hinc tandem colligitur, si statuatur

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(r+r'-\rho)^3 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a}(r+r'-\rho)^3 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1 \cdot 3}{a^2}(r+r'-\rho)^3 \\ &\quad - \frac{1}{128} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{a^3}(r+r'-\rho)^3 + \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(r+r'+\rho)^3 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a}(r+r'+\rho)^3 + \frac{1}{16} \cdot \frac{1 \cdot 3}{a^2}(r+r'+\rho)^3 \\ &\quad - \frac{1}{128} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{a^3}(r+r'+\rho)^3 + \text{etc.} \end{aligned}$$

fieri

$$kt = U \mp T$$

quae expressiones cum iis, quae in art. 107 traditae sunt, omnino coincidunt, si illie  $a$  in  $-a$  mutetur.

Ceterum hae series tum pro ellipsi tum pro hyperbola ad usum practicum tunc imprimis sunt commodae, ubi  $a$  vel  $a$  valorem pernagnum obtinet, i. e. ubi sectio conica magnopere ad parabolae similitudinem vergit. In tali casu etiam ad solutionem problematis supra tractati (art. 85—105.) adhiberi possent: sed quoniam, nostro iudicio, ne tunc quidem brevitatem solutionis supra traditae praebent, huic methodo fusius exponendae non immoramur.