CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

SECHSTER BAND

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

1874.

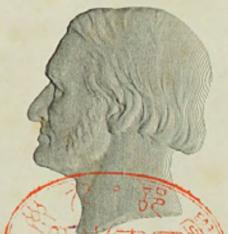
CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

BAND VI.

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

SECHSTER BAND.



HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

1874.

DISQUISITIO

DE

ELEMENTIS ELLIPTICIS PALLADIS

EX

OPPOSITIONIBUS ANNORUM 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE TRADITA XXV. NOV. MDCCCX.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. I.
Gottingae MDCCCXI.

DISQUISITIO

DE ELEMENTIS ELLIPTICIS PALLADIS

EX OPPOSITIONIBUS ANNORUM 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809.

1.

Planetae primarii Palladis mense Martio anni 1802 detecti septem quidem hactenus fuerunt apparitiones periodicae: attamen quum planeta eo quo primum detectus est die oppositionem cum sole iam transgressus esset, sex tantummodo oppositiones hucusque numerantur, quae ad maximam partem in pluribus speculis astronomicis satis bene observatae sunt, adeoque praecisione sufficiente determinari potuerunt. Unicam oppositionem anni 1808 excipere oportet, quo anno planeta in aphelio orbitae versatus propter luminis debilitatem magnas observantibus difficultates obiecit, et ut verum fateamur, ab astronomis aliquantulum neglectus est. Ascensionum quidem rectarum copiam satis magnam suppeditavit clar. DE LINDENAU, solita cura ad tubum meridianum praestantissimum speculae Seebergensis circa tempus oppositionis observatarum: sed declinationes paucas tantum longeque minus certas aliunde obtinere potui. Quamobrem haud licuit, hancce oppositionem eadem qua ceteras praecisione stabilire, imprimisque latitudo nimis incerta mansit.

2.

Quamprimum observationes cuiusvis apparitionis finitae essent, omnes quotannis colligere, diligenter discutere, et cum observationibus annorum antecedentium combinare solitus fui, ut elementorum ellipticorum determinatio tanto accuratior inde erueretur. E postremo huiuscemodi calculo, sub finem anni 1807 instituto, elementa prodierunt in Vol. XVII 1808 Jan. Commercii literarii astronomici clar. DE ZACH publici iuris facta, omnesque quatuor oppositiones eousque observatas optime conciliantia. Anno insequente post oppositionem quintam observationum certarum penuria a novis calculis me deterruit, ad quos tunc demum reverti, ubi observationes anno 1809 circa oppositionem sextam factae computum utriusque oppositionis simul suscipere permiserunt, quem in Novis nostris literariis anni 1810 Febr. 24. indicavi.

Ecce iam conspectum omnium sex oppositionum hactenus observatarum:

Tempus oppositionis ad meridianum Gottingensem	Dies inde ab initio anni 1803	Longitudo heliocentrica	Latitudo geocentrica
1803 Iun. 30. $0^h\ 27^m\ 32^s$	181.019120	277° 39′ 24″0	+46° 26′ 36″0
1804 Aug. 30. 4 58 27	608.207257	337 0 36.1	+15 1 49.8
1805 Nov. 29. 11 15 4	1064.468796	67 20 42.9	−54 30 54.9
1807 Maj. 4. 14 37 41	1585.609502	223 37 27.7	+42 11 25.6
1808 Iul. 26. 21 17 32	2034.887176	304 2 59.7	+37 43 53.7
1809 Sept. 22. 16 10 20	2457.673843	359 40 4.4	− 7 22 10.1

3.

Si Pallas exacte moveretur in ellipsi, atque secundum leges KEPLERI, elementa novissima quatuor oppositiones annorum 1803, 1804, 1805, 1807 optime conciliantia levissimis tantum erroribus adhuc affecta esse possent, certoque cum oppositionibus proximis quoque intra minutum primum unum duove consentire deberent. Tantum vero abfuit a consensu tam arcto, ut potius elementa ista discrepantiam ad quatuor minuta prima ascendentem iam in oppositione quinta monstraverint, a sexta vero duodecim minutis primis aberraverint. Scilicet tantas perturbationes patitur planeta noster a reliquis praesertimque a Iove, ut consensus exactus atque stabilis inter phaenomena motumque pure ellipticum obtineri nequeat. Hinc simul patet, elementa alia atque alia proditura esse, prout oppositionibus quaternis aliis aliisve superstruantur, quod confirmatum est per calculum duorum aliorum systematum elementorum, quorum alterum ex oppositionibus annorum 1804, 1805, 1807, 1808, alterum ex oppositionibus annorum 1805, 1807, 1808, 1809 nuper deduxi. Quo melius haec diversa elementorum systemata inter se conferri possint, singula hic profero.

I. *Elementa elliptica Palladis ex oppositionibus annorum* 1803, 1804, 1805, 1807.

Epocha longitudinis mediae pro anno 1803 ad meridianum Gottingensem . . . 221° 39′ 30″4
Motus diurnus medius tropicus . . . 770″2143
Longitudo perihelii 1803 . . . 121° 3′ 11″4
Longitudo nodi ascendentis 1803 . . . 172 28 56.9
Inclinatio orbitae . . . 34 37 41.0
Excentricitas (= sin. 14° 10′ 58″81) . . . 0.2450198
Logarithmus semiaxis maioris . . . 0.4423149

II. *Elementa elliptica Palladis ex oppositionibus annorum* 1804, 1805, 1807, 1808.

Epocha longitudinis mediae 1803 . . . 221° 34′ 56″7
Motus medius tropicus diurnus . . . 770″4467
Longitudo perihelii 1803 . . . 121° 5′ 22″1
Longitudo nodi ascendentis 1803 . . . 172 28 46.8
Inclinatio orbitae . . . 34 37 31.5
Excentricitas (= sin. 14° 10′ 4″08) . . . 0.2447624
Logarithmus semiaxis maioris . . . 0.4422276

III. *Elementa elliptica Palladis ex oppositionibus annorum* 1805, 1807, 1808, 1809.

Epocha longitudinis mediae 1803 . . . 221° 23′ 24″6
Motus medius tropicus diurnus . . . 770″9265
Longitudo perihelii 1803 . . . 120° 58′ 4″8
Longitudo nodi ascendentis 1803 . . . 172 27 52.4
Inclinatio orbitae . . . 34 36 49.4
Excentricitas (= sin. 14° 9′ 36″63) . . . 0.2446335
Logarithmus semiaxis maioris . . . 0.4420473

4.

Quonam modo orbita elliptica planetae e quatuor observationibus (quarum duae tantum completae sunt) determinari possit, in Sect. II. Libri II. Theoriae motus corporum coelestium monstravi. Solutio illic tradita problema maxima generalitate complectitur: attamen pro casu speciali, ubi quatuor observationes sunt oppositiones, methodum aliam in usum vocare praestat, cuius expositionem astronomis haud ingratam fore spero. Postulat quidem haecce methodus cognitionem approximatam singulorum elementorum, vel saltem horum quatuor, inclinationis orbitae, longitudinis nodi, longitudinis perihelii atque excentricitatis; sed nihil impedit, quominus hanc cognitionem per calculum anteriorem iam adesse supponamus. Rei summa pendet a solutione problematis sequentis:

'*Datis quatuor longitudinibus planetae in orbita, temporibus datis respondentibus, invenire longitudinem perihelii, excentricitatem, motum medium diurnum atque epocham longitudinis mediae*'

quam in art. sequ. tradam.

5.

Quum longitudo perihelii proxime iam nota esse supponatur, oriantur ex huius subtractione a longitudinibus in orbita anomaliae verae approximatae v, v', v'', v''', ubi longitudo illa vel tamquam constans spectari potest, vel si ipsius variatio annua nota fuerit, ad singula tempora rite transferenda est. Sit $e = \sin\varphi$ excentricitas approximata, qua adhibita computentur per methodos notas anomaliae mediae M, M', M'', M''' veris v, v', v'', v''' respondentes. Designando iam tempora per t, t', t'', t''', horum differentiae $t'-t, t''-t', t'''-t''$ differentiis $M'-M, M''-M', M'''-M''$ proportionales esse deberent, si a valoribus veris longitudinis perihelii atque anguli φ profecti essemus: sin secus evenit, correctiones his quantitatibus applicandae sequenti modo eruentur. Statuendo

$$m = -\frac{\cos\varphi^3}{(1+e\cos v)^2}, \qquad n = \frac{m(2+e\cos v)\sin v}{\cos\varphi},$$
$$m' = -\frac{\cos\varphi^3}{(1+e\cos v')^2}, \qquad n' = \frac{m'(2+e\cos v')\sin v'}{\cos\varphi}$$
$$m'' = -\frac{\cos\varphi^3}{(1+e\cos v'')^2}, \qquad n'' = \frac{m''(2+e\cos v'')\sin v''}{\cos\varphi}$$
$$m''' = -\frac{\cos\varphi^3}{(1+e\cos v''')^2}, \qquad n''' = \frac{m'''(2+e\cos v''')\sin v'''}{\cos\varphi}$$

ex art. 15 Theoriae Motus Corporum Coelestium patet, si perihelium incremento exiguo $d\Pi$, atque angulus φ incremento $d\varphi$ correcti concipiantur, valores correctos anomaliarum mediarum fieri

$$M + m\,d\Pi + n\,d\varphi$$
$$M' + m'\,d\Pi + n'\,d\varphi$$
$$M'' + m''\,d\Pi + n''\,d\varphi$$
$$M''' + m'''\,d\Pi + n'''\,d\varphi$$

siquidem potestates productaque correctionum $d\Pi$, $d\varphi$ negligere liceat. Habebuntur itaque tres expressiones motus medii diurni respectu perihelii, puta

$$\frac{M'-M}{t'-t} + \frac{m'-m}{t'-t}\,d\Pi + \frac{n'-n}{t'-t}\,d\varphi$$
$$\frac{M''-M'}{t''-t'} + \frac{m''-m'}{t''-t'}\,d\Pi + \frac{n''-n'}{t''-t'}\,d\varphi$$
$$\frac{M'''-M''}{t'''-t''} + \frac{m'''-m''}{t'''-t''}\,d\Pi + \frac{n'''-n''}{t'''-t''}\,d\varphi$$

e quarum aequalitate incognitae $d\Pi$, $d\varphi$ eruentur. Quibus in expressione una substitutis, prodibit motus medius correctus, unde per methodum notam etiam semiaxis maior determinabitur. Denique substitutis valoribus correctionum $d\Pi$, $d\varphi$ in expressione pro aliqua anomalia media, huius valor correctus, atque inde epocha longitudinis mediae at tempus arbitrarium transferenda sponte demanabunt.

Ceterum facile patet, quo pacto etiam perturbationum tum periodicarum tum saecularium, si opus videatur, ratio haberi possit. Scilicet ab illis tantummodo longitudines in orbita datas, antequam in calculum introducantur, purgare, per posteriores autem longitudinem perihelii atque excentricitatem pro epocha arbitraria suppositam ad singula tempora t, t', t'', t''' transferre oportebit.

6.

Iam videamus, quomodo haec ad determinationem orbitae e quatuor oppositionibus observatis adhiberi possint. Sit longitudo planetae in ecliptica oppositione prima α, latitudo geocentrica β, distantia terrae a Sole R, longitudo nodi ascendentis approximata Ω, inclinatio plani orbitae ad eclipticam approximata i. Quantitates ad oppositiones reliquas spectantes per characteres similes indice uno, duobus vel tribus distinctos denoto. Ex α, Ω, i deducetur per formulam notam longitudo in orbita, similisque calculus tribus longitudinibus reliquis in ecliptica superstruetur. Ex his quatuor longitudinibus in orbita per praecepta art. praec. derivabuntur elementa elliptica, atque hinc per formulas notas quatuor radii vectores r, r', r'', r'''. Statuendo iam

$$\frac{R\sin\beta}{r} = \sin(\beta-\gamma), \qquad \frac{R'\sin\beta'}{r'} = \sin(\beta'-\gamma') \quad \text{etc.}$$

erunt manifesto $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$ quatuor longitudines heliocentricae, e latitudinibus geocentricis deductae. Derivemus easdem e longitudinibus, ponendo

$$\operatorname{tang} i \sin(\alpha-\Omega) = \operatorname{tang}\delta, \qquad \operatorname{tang} i \sin(\alpha'-\Omega) = \operatorname{tang}\delta' \text{ etc.}$$

patetque, esse debere $\gamma = \delta$, $\gamma' = \delta'$, $\gamma'' = \delta''$, $\gamma''' = \delta'''$, si pro Ω atque i valores veri accepti essent, siquidem omnibus quatuor oppositionibus (quae problema plusquam determinatum reddunt) per eandem ellipsin satisfacere possibile fuerit. Quod si secus eveniat, correctiones $\mathrm{d}\Omega$, $\mathrm{d}i$ quantitatibus Ω, i applicandae sequenti modo elicientur. Quatenus hae correctiones tamquam quantitates exiguae primi ordinis spectantur, quarum potestates productaque negligere licet, manifesto adhibitis valoribus $\Omega+\mathrm{d}\Omega$, $i+\mathrm{d}i$, loco latitudinum $\gamma, \delta, \gamma', \delta'$ etc. prodibunt aliae huius formae

$$\begin{aligned} &\gamma+a\,\mathrm{d}\Omega+b\,\mathrm{d}i, && \delta+c\,\mathrm{d}\Omega+f\,\mathrm{d}i \\ &\gamma'+a'\mathrm{d}\Omega+b'\mathrm{d}i, && \delta'+c'\mathrm{d}\Omega+f'\mathrm{d}i \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

ubi coëfficientes c, f, c', f' etc. invenientur per formulas

$$\begin{aligned} c &= -\tfrac{1}{2}\sin 2\delta \operatorname{cotang}(\alpha-\Omega), && f = \tfrac{\sin 2\delta}{\sin 2i} \\ c' &= -\tfrac{1}{2}\sin 2\delta' \operatorname{cotang}(\alpha'-\Omega), && f' = \tfrac{\sin 2\delta'}{\sin 2i} \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Coëfficientes a, b etc. quoque per operationes analyticas determinare possemus, sed praefero methodum sequentem. Calculum modo indicatum denuo repeto, adhibendo loco longitudinis nodi Ω aliam exigua quantitate ad lubitum electa ab illa discrepantem, unde valores numerici coëfficientium a, a' etc. facile eruentur; nova eiusdem calculi repetitio, accepta inclinatione paullulum mutata simili modo valores coëfficientium b, b' etc. suppeditabit. Simul hoc modo patebit, quantas correctiones elementa elliptica passura sint, a correctionibus exiguis quantitatum Ω, i.

His ita factis, pro determinandis correctionibus $\mathrm{d}\Omega$, $\mathrm{d}i$ *quatuor* adsunt aequationes

$$\begin{aligned} \gamma-\delta+(a-c)\,\mathrm{d}\Omega+(b-f)\,\mathrm{d}i &= 0 \\ \gamma'-\delta'+(a'-c')\,\mathrm{d}\Omega+(b'-f')\,\mathrm{d}i &= 0 \\ \gamma''-\delta''+(a''-c'')\,\mathrm{d}\Omega+(b''-f'')\,\mathrm{d}i &= 0 \\ \gamma'''-\delta'''+(a'''-c''')\,\mathrm{d}\Omega+(b'''-f''')\,\mathrm{d}i &= 0 \end{aligned}$$

quibus exacte satisfieri vix poterit propter observationum errores inevitabiles; quapropter valores incognitarum $\mathrm{d}\Omega$, $\mathrm{d}i$ maxime idonei per principia in Sect. III. Libri secundi Theoriae Motus Corporum Coelestium explicata determinabuntur. Hinc simul, per ea, quae modo diximus, correctiones reliquorum elementorum facile derivabuntur.

7.

Liceat hisce praeceptis adhuc quasdam observationes adiicere.

I. Vix opus erit admonitione, formulas nostras ei quoque casui inservire posse, ubi nodi non spectantur tamquam quiescentes, si modo valor longitudinis nodi suppositus ab epocha sua ad quatuor tempora rite reducatur, atque hi quatuor valores diversi pro singulis quatuor locis in formulis istis adhibeantur. Idem valet de inclinatione, siquidem ipsius variatio saecularis innotuerit, ipsiusque rationem habere operae pretium videatur. Si insuper perturbationes latitudinis heliocentricae in calculum introducere placet, hae in aequationibus praecedentibus manifesto vel a $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$ subduci, vel ipsis $\delta, \delta', \delta'', \delta'''$ adiici debebunt.

III. Quoties inclinatio orbitae atque excentricitas modicae sunt, coëfficientes a, b, a', b' etc. tam parvi evadunt, ut ipsos negligere, adeoque computo secundo atque tertio supra praescripto supersedere liceat. Tunc inventis correctionibus $\mathrm{d}\Omega$, $\mathrm{d}i$ (nisi forte perparvae evaserint) calculum longitudinum in orbita novum valoribus correctis longitudinis nodi atque inclinationis, puta $\Omega+\mathrm{d}\Omega$, $i+\mathrm{d}i$, superstruere, atque calculum elementorum ellipticorum ad normam art. 5 repetere oportebit, siquidem longitudines in orbita correctae a prioribus non correctis pluribus minutis secundis diversae prodierint. Ceterum vix umquam opus erit, coëfficientes m, n, m' etc. denuo computare, quippe quorum valores iam per hypothesin primam satis exacti inveniuntur.

8.

Ad maiorem illustrationem praeceptorum praecedentium, calculum integrum, per quem systema elementorum tertium ex oppositionibus annorum 1805, 1807, 1808, 1809 determinatum est, hic apponam. Supposui longitudinem nodi ascendentis pro initio anni 1803, $172^\circ 28' 46''8 = \Omega$, inclinationem orbitae $34^\circ 37' 31''5$; reduxi illam ad tempora singularum oppositionum, addendo praecessionem $2' 26''01$, $3' 37''50$, $4' 39''12$, $5' 37''11$. Hinc derivavi ex longitudinibus latitudines heliocentricas

$$\begin{aligned} \delta &= -33^\circ\ 40'\ 50''63 \\ \delta' &= +28\ \ 14\ \ 51.24 \\ \delta'' &= +27\ \ 20\ \ 55.86 \\ \delta''' &= -\ \ 4\ \ 52\ \ 28.44 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= +0.1252, & f &= -0.9870 \\ c' &= -0.3366, & f' &= +0.8917 \\ c'' &= +0.3609, & f'' &= +0.8727 \\ c''' &= +0.6803, & f''' &= -0{,}1811 \end{aligned}$$

Porro prodeunt argumenta latitudinis

$$\begin{array}{rrr} 257^\circ & 25' & 6''73 \\ 56 & 24 & 5.96 \\ 126 & 2 & 55.07 \\ 188 & 36 & 2.69 \end{array}$$

e quibus elementa elliptica elicere oportet. Ad hunc finem statuo angulum $\varphi = 14^\circ 10' 4''08$ (uti in systemate elementorum secundo inventus erat), longitudinemque perihelii, pro initio anni 1803, $= 121^\circ 5' 22''1$. Perihelium (perinde ut nodus) respectu stellarum fixarum immobile supponitur, adeoque ipsius distantia a nodo ascendente constans $= 308^\circ 36' 35''3$. Hinc habemus per formulas notas:

$$\begin{aligned} v &= 308^\circ\ 48'\ 31''43, & M &= 328^\circ\ 15'\ 45''08 \\ v' &= 107\ \ 47\ \ 30.66, & M' &= \ \ 79\ \ 46\ \ 27.05 \\ v'' &= 177\ \ 26\ \ 19.77, & M'' &= 175\ \ 54\ \ 28.87 \\ v''' &= 239\ \ 59\ \ 27.39, & M''' &= 266\ \ 29\ \ 57.59 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m &= -0.68517, & n &= +1.18569 \\ m' &= -1.06482, & n &= -2.01318 \\ m'' &= -1.59701, & n &= -0.12921 \\ m''' &= -1.18352, & n &= +1.93947 \end{aligned}$$

Denotando igitur correctionem longitudinis perihelii per $d\Pi$, atque correctionem anguli φ per $d\varphi$, erit motus medius sidereus

ab oppositione prima usque ad secundam intra dies 521.140706

$$111^\circ\ 30'\ 41''97 - 0.37965\,d\Pi - 3.19887\,d\varphi$$

ab oppositione secunda usque ad tertiam intra dies 449.277674

$$96^\circ\ 8'\ 1''82 - 0.53219\,d\Pi + 1.88397\,d\varphi$$

ab oppositione tertia usque ad quartam intra dies 422.786667

$$90^\circ\ 35'\ 28''72 + 0.41349\,d\Pi + 2.06868\,d\varphi$$

Hinc eruuntur tres expressiones pro valore medio diurno sidereo

$$\begin{aligned} &770''31398 - 0.0007285\,d\Pi - 0.0061382\,d\varphi \\ &770.30718 - 0.0011845\,d\Pi + 0.0041933\,d\varphi \\ &771.37892 + 0.0009780\,d\Pi + 0.0048930\,d\varphi \end{aligned}$$

e quarum comparatione demanant aequationes:

$$\begin{aligned} 0 &= \ \ 0''00680 + 0.0004560\,d\Pi - 0.0103315\,d\varphi \\ 0 &= -1.07174 - 0.0021625\,d\Pi - 0.0006997\,d\varphi \end{aligned}$$

atque hinc $d\Pi = -488''82$, $d\varphi = -20''92$, ac proin

longitudo perihelii correcta pro initio anni 1803, $120^\circ 57' 13''28$,
valorque correctus anguli . . . . $\varphi = 14^\circ\ 9' 43''16$
Porro fit motus medius diurnus sidereus . . . . . . $770''7985$
anomalia media correcta pro oppositione prima . $328^\circ 20' 55''20$
longitudo media pro eadem epocha . . . . . . $89^\circ 20' 34''49$

Denique derivatur ex motu medio sidereo logarithmus semiaxis maioris 0.4420439, adeoque logarithmus semiparametri 0.4152361. Iam quum habeamus valores correctos anomaliarum verarum

$$\begin{aligned} v\ &= 308^0\ 56'\ 40''25 \\ v'\ &= 107\ \ 55\ \ 39.48 \\ v''\ &= 177\ \ 34\ \ 28.59 \\ v'''\ &= 240\ \ \ \ 7\ \ 36.21 \end{aligned}$$

computantur logarithmi radiorum vectorum

$$\begin{aligned} \log r\ &= 0.3531088 \\ \log r'\ &= 0.4492406 \\ \log r''\ &= 0.5369700 \\ \log r'''\ &= 0.4716739 \end{aligned}$$

E tabulis Solaribus porro habemus

$$\begin{aligned} \log R\ &= 9.9937332 \\ \log R'\ &= 0.0039862 \\ \log R''\ &= 0.0065917 \\ \log R'''\ &= 0.0011160 \end{aligned}$$

unde tandem deducimus

$$\begin{aligned} \gamma\ &= -33^0\ 39'\ 48''15 \\ \gamma'\ &= +28\ \ 15\ \ \ \ 0.73 \\ \gamma''\ &= +27\ \ 20\ \ \ \ 9.07 \\ \gamma'''\ &= -\ \ 4\ \ 52\ \ 53.99 \end{aligned}$$

Ut eruantur coëfficientes a, b etc., formo *hypothesin secundam*, retinendo inclinationem sed augendo longitudinem nodi uno minuto primo, ut sit pro initio anni 1803, $172^0\ 29'\ 46''8$. Statuendo dein, ut in hypothesi prima, longitudinem perihelii pro eadem epocha $= 121^0\ 5'\ 22''1$, inveniuntur anomaliae verae

$$\begin{aligned} v\ &= 308^0\ 48'\ 40''93 \\ v'\ &= 107\ \ 47\ \ 34.06 \\ v''\ &= 177\ \ 26\ \ 22.25 \\ v'''\ &= 239\ \ 59\ \ 15.00 \end{aligned}$$

atque hinc (statuendo quoque $\varphi = 14^0\ 10'\ 4''08$) anomaliae mediae

$$\begin{aligned} M\ &= 328^0\ 15'\ 51''59 \\ M'\ &= \ \ 79\ \ 46\ \ 30.67 \\ M''\ &= 175\ \ 54\ \ 32.83 \\ M'''\ &= 266\ \ 29\ \ 42.93 \end{aligned}$$

(Ceterum ad hunc computum non opus est, methodum vulgarem adhibere, sed sufficit, valoribus anomaliarum mediarum in hypothesi prima inventis addere producta e coëfficientibus m, m', m'', m''' positive sumtis in differentias inter valores respectivos anomaliarum verarum in utraque hypothesi, puta

$$\begin{aligned} +\ 9''50 \times 0.68517 &= +\ 6''51 \\ +\ 3.40 \times 1.06482 &= +\ 3.62 \\ +\ 2.48 \times 1.59701 &= +\ 3.96 \\ -12.39 \times 1.18352 &= -14.66) \end{aligned}$$

Hinc retinendo valores coëfficientium m, n etc. eruitur

$d\Pi = -468''21$, longitudo perihelii initio anni 1803, $120^0\ 57'\ 33''89$
$d\varphi = -\ 20''62$, $\varphi = 14^0\ 9'\ 43''46$

motus medius diurnus sidereus $= 770''7761$
logarithmus semiaxis maioris $= 0.4420523$
longitudo media in oppositione prima $= 89^0\ 20'\ 47''85$

$$\begin{aligned} \gamma\ &= -33^0\ 39'\ 51''10 \\ \gamma'\ &= +28\ \ 15\ \ \ \ 1.27 \\ \gamma''\ &= +27\ \ 20\ \ 10.97 \\ \gamma'''\ &= -\ \ 4\ \ 52\ \ 54.66 \end{aligned}$$

Tandem formo *hypothesin tertiam* statuendo $☊ = 172^0 28' 46''6$, $i = 34^0 38' 31''5$, unde perinde ut ante deducitur

longitudo perihelii pro initio anni 1803, $120^0\ 55'\ 34''46$
$\varphi = 14^0\ 9'\ 52''63$
motus medius diurnus sidereus $= 770''8398$
logarithmus semiaxis maioris $= 0.4420283$
longitudo media in oppositione prima $= 89^0\ 20'\ 20''65$

$$\begin{aligned}\gamma &= -33^\circ\ 39'\ 35''63\\ \gamma' &= +28\ \ 15\ \ \ 5.20\\ \gamma'' &= +27\ \ 20\ \ \ 9.32\\ \gamma''' &= -\ \ 4\ \ 52\ \ 52.65\end{aligned}$$

Comparatio valorum latitudinum heliocentricarum $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma'''$ in tribus hypothesibus inventarum producit

$$\begin{aligned} a &= -0.0492, & b &= +0.2087\\ a' &= +0.0212, & b' &= +0.0745\\ a'' &= +0.0317, & b'' &= +0.0042\\ a''' &= -0.0112, & b''' &= +0.0223\end{aligned}$$

Habentur itaque quatuor aequationes

$$\begin{aligned} +62''48 - 0.1744\,d\Omega + 1.1957\,di &= 0\\ +\ \ 9.49 + 0.3578\,d\Omega - 0.8172\,di &= 0\\ -46.79 - 0.3292\,d\Omega - 0.8685\,di &= 0\\ -25.55 - 0.6915\,d\Omega + 0.2034\,di &= 0\end{aligned}$$

e quibus per principium quadratorum minimorum deducitur

$$\begin{aligned} d\Omega &= -54''41\\ di &= -42.06\end{aligned}$$

ita ut habeatur

longitudo nodi ascendentis pro initio anni 1803,	172° 27′ 52″39
inclinatio orbitae	34 36 49.44

Elementa reliqua vel per comparationem eorum, quae in singulis tribus hypothesibus prodierunt, erui, vel quod accuratius est, per calculum novum longitudinum in orbita atque repetitionem operationum in art. 5 explicatarum determinari poterunt. Methodus prima suppeditat

longitudinem perihelii 1803	120° 58′ 3″86
angulum φ	14 9 36.25
longitudinem mediam in oppositione prima . .	89 20 32.08
motum medium diurnum sidereum	770″7899
logarithmum semiaxis maioris.	0.4420471

Per methodum alteram invenitur

longitudo perihelii 1803	120° 58′ 4″81
angulus φ	14 9 36.63
longitudo media in oppositione prima	89 20 31.81
motus medius diurnus sidereus	770″7893
logarithmus semiaxis maioris	0.4420473

Cum his elementis conveniunt ea, quae supra (art. 3) tradidi.

9.

Quantumvis magnae sint perturbationes, quas Pallas a reliquis planetis patitur, tamen, experientia teste, elementa elliptica quatuor oppositionibus adaptata planetae motui intra integrum hoc tempus satis bene satisfaciunt: quin adeo etiam a motu antecedente ac consequente, nisi intervallum temporis nimium assumatur, parum differunt, ita ut e. g. elementa secunda in art. 3 tradita, in oppositione anni 1803 tribus, in oppositione anni 1809 quinque minutis primis a longitudine heliocentrica observata discrepaverint. Quae quum ita sint, ad construendam ephemeridem pro motu planetae futuro semper commodissimum mihi videtur elementis pure ellipticis uti, quae e quatuor oppositionibus proxime antecedentibus derivata erant, siquidem multitudo aequationum a perturbationibus oriundarum tanta certo evasura est, ut computus vel unius loci heliocentrici planetae tantum non aeque operosus evadere debeat, ac calculus elementorum ellipticorum per praecepta supra tradita. Ita locum planetae geocentricum salvo errore paucorum minutorum primorum tuto semper praedicere licebit, quae praecisio ad inveniendum planetam sufficit.

10.

Attamen postulat scientiae dignitas, ut consensui stabiliori prospiciatur, quem antequam perturbationes in calculum introducantur obtineri non posse manifestum est. Praematurus fuisset, meo quidem iudicio, calculus tam prolixus taediique plenus, quamdiu observationum copia tempus nimis exiguum complectebatur, perturbationesque a planetis reliquis oriundae vix se manifestabant. Nunc vero, ubi motus ellipticus non amplius sufficit, ad omnia loca observata inter se concilianda, tempus adesse videtur, ubi de theoria accuratiori cogitari potest. Quo pacto calculum perturbationum, quas Pallas patitur praesertim a Iove, commodissime atque exactissime absolvendum censeam, quum methodis pro aliis planetis adhibitis propter nimiam excentricitatem atque inclinationem vix ac ne vix quidem uti liceat, mox alio loco fusius explicabo: de elementis autem ellipticis, quae maxime idonea videantur, ut calculus perturbationum ipsis superstruatur, in sequentibus adhuc agam. Eruenda scilicet mihi propono elementa elliptica, quae non his vel illis oppositionibus exacte, sed omnibus, quae hactenus observatae sunt, quam proxime satisfaciant. Methodum quidem, per quam tale negotium exsequi liceat, iam in Theoria Motus Corporum Coelestium art. 187 succincte descripsi: sed quum non solum ea, quae illic generaliter tractavi, in casu speciali, ubi loca observata sunt oppositiones, quaedam compendia admittant, sed etiam quaedam artificia practica, per quae applicationem methodi quadratorum minimorum faciliorem reddere iamdudum solitus sum, in opere illo desiderentur, astronomis haud ingratum fore spero, si hosce calculos aliquanto fusius hic tradidero. Quum totum negotium versetur in determinatione *correctionum* elementis approximatis, quae ab omnibus locis observatis haud multum aberrare supponuntur, adiiciendarum, totus labor a duobus momentis pendebit: primo scilicet formari debent aequationes lineares, quas singula loca observata suppeditant, dein ex his aequationibus valores incognitarum maxime idonei sunt eruendi.

11.

Sit secundum elementa approximata

L longitudo media planetae pro epocha arbitraria
t numerus dierum inde ab epocha usque ad momentum observationis elapsorum
7 motus medius diurnus sidereus in minutis secundis
Π longitudo perihelii
$e = \sin\varphi$ excentricitas
a semiaxis maior
r radius vector
v anomalia vera
E anomalia excentrica
Ω longitudo nodi ascendentis
i inclinatio orbitae
u argumentum latitudinis
λ longitudo heliocentrica

γ latitudo heliocentrica
β latitudo geocentrica
R distantia terrae a Sole.

Ex observatione autem suppono esse
α longitudinem heliocentricam
δ latitudinem geocentricam.

Denique per $\mathrm{d}L$, $\mathrm{d}7$, $\mathrm{d}\Pi$ etc. denoto correctiones quantitatum L, 7, Π etc. Fit itaque $\mathrm{d}L + t\mathrm{d}7$ correctio longitudinis mediae,
$\mathrm{d}L + t\mathrm{d}7 - \mathrm{d}\Pi$ correctio anomaliae mediae,
adeoque per art. 15, 16 Theoriae Motus Corp. Coel.

$$\mathrm{d}v = \frac{aa\cos\varphi}{rr}(\mathrm{d}L + t\mathrm{d}7 - \mathrm{d}\Pi) + \frac{aa}{rr}(2 - e\cos E - ee)\sin E\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\mathrm{d}r = \frac{r}{a}\mathrm{d}a + a\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin v(\mathrm{d}L + t\mathrm{d}7 - \mathrm{d}\Pi) - a\cos\varphi\cos v\,\mathrm{d}\varphi$$

Porro fit correctio argumenti latitudinis $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v + \mathrm{d}\Pi - \mathrm{d}\Omega$, atque per art. 52 Theoriae Motus C. C. correctio longitudinis heliocentricae:

$$\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}\Omega - \mathrm{tang}\,\gamma\cos(\lambda - \Omega)\mathrm{d}i + \frac{\cos i}{\cos\gamma^2}\mathrm{d}u$$

Hinc colligitur

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\lambda = &\frac{aa\cos\varphi\cos i}{rr\cos\gamma^2}\mathrm{d}L\\ &+ \frac{taa\cos\varphi\cos i}{rr\cos\gamma^2}\mathrm{d}7\\ &+ \left(\frac{\cos i}{\cos\gamma^2} - \frac{aa\cos\varphi\cos i}{rr\cos\gamma^2}\right)\mathrm{d}\Pi\\ &+ \frac{aa\cos i}{rr\cos\gamma^2}(2 - e\cos E - ee)\sin E\,\mathrm{d}\varphi\\ &+ \left(1 - \frac{\cos i}{\cos\gamma^2}\right)\mathrm{d}\Omega\\ &- \mathrm{tang}\,\gamma\cos(\lambda - \Omega)\,\mathrm{d}i\end{aligned}$$

Porro quum habeatur

$$\begin{aligned}a^3 7 &= \mathrm{Const.}\\ r\sin(\beta - \gamma) &= R\sin\beta\\ \mathrm{tang}\,\gamma &= \mathrm{tang}\,i\sin(\alpha - \Omega)\end{aligned}$$

fit per differentiationem

$$\frac{\mathrm{d}a}{a} = -\frac{2\,\mathrm{d}7}{37}$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{r} + \mathrm{cotang}(\text{ϐ}-\gamma).(\mathrm{d}\beta-\mathrm{d}\gamma) = \mathrm{cotg}\,\beta\,\mathrm{d}\beta, \text{ sive}$$

$$\mathrm{d}\beta = \frac{\sin\beta\cos(\beta-\gamma)}{\sin\gamma}\mathrm{d}\gamma - \frac{\sin\beta\sin(\beta-\gamma)}{r\sin\gamma}\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}\gamma = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2i}\mathrm{d}i - \tfrac{1}{2}\sin 2\gamma\,\mathrm{cotang}(\alpha-\Omega)\,\mathrm{d}\Omega$$

unde adhibito valore ipsius $\mathrm{d}r$ supra evoluto colligitur

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\beta = & -\frac{a\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin v}{r\sin\gamma}\mathrm{d}L \\ & + \left\{\frac{2\sin\beta\sin(\beta-\gamma)}{37\sin\gamma} - \frac{at\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin v}{r\sin\gamma}\right\}\mathrm{d}7 \\ & + \frac{a\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin v}{r\sin\gamma}\mathrm{d}\Pi \\ & + \frac{a\sin\beta\sin(\beta-\gamma)\cos\varphi\cos v}{r\sin\gamma}\mathrm{d}\varphi \\ & + \frac{2\sin\beta\cos(\beta-\gamma)\cos\gamma}{\sin 2i}\mathrm{d}i \\ & - \sin\beta\cos(\beta-\gamma)\cos\gamma\,\mathrm{cotang}(\alpha-\Omega)\,\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

Hinc valores longitudinis heliocentricae atque latitudinis geocentricae fiunt ex valoribus correctis elementorum $\lambda+\mathrm{d}\lambda$, $\beta+\mathrm{d}\beta$, adeoque quaevis oppositio suppeditat binas aequationes

$$\alpha = \lambda + \mathrm{d}\lambda$$
$$\text{ϐ} = \beta + \mathrm{d}\beta$$

12.

Applicando haecce praecepta ad sex oppositiones Palladis in art. 2 traditas, si calculum secundo elementorum systemati in art. 3 delineato superstruimus, sequentes duodecim aequationes obtinemus:

Ex oppositione *prima*, ubi longitudo computata inventa est $= 277^{0}\,36'\,20''07$,
latitudo geocentrica $= +46^{0}\,26'\,29''19$:

$$0 = -183''93 + 0.79363\,\mathrm{d}L + 143.66\,\mathrm{d}7 + 0.39493\,\mathrm{d}\Pi + 0.95920\,\mathrm{d}\varphi - 0.18856\,\mathrm{d}\Omega + 0.17387\,\mathrm{d}i$$

$$0 = -6''81 - 0.02658\,\mathrm{d}L + 46.71\,\mathrm{d}7 + 0.02658\,\mathrm{d}\Pi - 0.20858\,\mathrm{d}\varphi + 0.15946\,\mathrm{d}\Omega + 1.25782\,\mathrm{d}i$$

Ex oppositione *secunda*, ubi longitudo computata $= 337^{0}\,0'\,36''04$,
latitudo geocentrica $= +15^{0}\,1'\,46''71$:

$$0 = -0''06 + 0.58880\,\mathrm{d}L + 358.12\,\mathrm{d}7 + 0.26208\,\mathrm{d}\Pi - 0.85234\,\mathrm{d}\varphi + 0.14912\,\mathrm{d}\Omega + 0.17775\,\mathrm{d}i$$

$$0 = -3''09 + 0.01318\,\mathrm{d}L + 28.39\,\mathrm{d}7 - 0.01318\,\mathrm{d}\Pi - 0.07861\,\mathrm{d}\varphi + 0.91704\,\mathrm{d}\Omega + 0.54365\,\mathrm{d}i$$

Ex oppositione *tertia*, ubi longitudo computata $= 67^{0}\,20'\,42''88$,
latitudo geocentrica $= -54^{0}\,31'\,3''88$:

$$0 = -0''02 + 1.73436\,\mathrm{d}L + 1846.17\,\mathrm{d}7 - 0.54603\,\mathrm{d}\Pi - 2.05662\,\mathrm{d}\varphi - 0.18833\,\mathrm{d}\Omega - 0.17445\,\mathrm{d}i$$

$$0 = -8''98 - 0.12606\,\mathrm{d}L - 227.42\,\mathrm{d}7 + 0.12606\,\mathrm{d}\Pi - 0.38939\,\mathrm{d}\varphi + 0.17176\,\mathrm{d}\Omega - 1.35441\,\mathrm{d}i$$

Ex oppositione *quarta*, ubi longitudo computata $= 223^{0}\,37'\,25''39$,
latitudo geocentrica $= +42^{0}\,11'\,28''07$:

$$0 = -2''31 + 0.99584\,\mathrm{d}L + 1579.03\,\mathrm{d}7 + 0.06456\,\mathrm{d}\Pi + 1.99545\,\mathrm{d}\varphi - 0.06040\,\mathrm{d}\Omega - 0.33750\,\mathrm{d}i$$

$$0 = +2''47 - 0.08089\,\mathrm{d}L - 67.22\,\mathrm{d}7 + 0.08089\,\mathrm{d}\Pi - 0.09970\,\mathrm{d}\varphi - 0.46359\,\mathrm{d}\Omega + 1.22803\,\mathrm{d}i$$

Ex oppositione *quinta*, ubi longitudo computata $= 304^{0}\,2'\,59''71$,
latitudo geocentrica $= +37^{0}\,44'\,31''82$:

$$0 = +0''01 + 0.65311\,\mathrm{d}L + 1329.09\,\mathrm{d}7 + 0.38994\,\mathrm{d}\Pi - 0.08439\,\mathrm{d}\varphi - 0.04305\,\mathrm{d}\Omega + 0.34268\,\mathrm{d}i$$

$$0 = +38''12 - 0.00218\,\mathrm{d}L + 38.47\,\mathrm{d}7 + 0.00218\,\mathrm{d}\Pi - 0.18710\,\mathrm{d}\varphi + 0.47301\,\mathrm{d}\Omega - 1.14371\,\mathrm{d}i$$

Ex oppositione *sexta*, ubi longitudo computata $= 359^{0}\,34'\,46''67$,
latitudo geocentrica $= -7^{0}\,20'\,12''13$:

$$0 = -317''73 + 0.69957\,\mathrm{d}L + 1719.32\,\mathrm{d}7 + 0.12913\,\mathrm{d}\Pi - 1.38787\,\mathrm{d}\varphi + 0.17130\,\mathrm{d}\Omega - 0.08360\,\mathrm{d}i$$

$$0 = +117''97 - 0.01315\,\mathrm{d}L - 43.84\,\mathrm{d}7 + 0.01315\,\mathrm{d}\Pi + 0.02929\,\mathrm{d}\varphi + 1.02138\,\mathrm{d}\Omega - 0.27187\,\mathrm{d}i$$

Sed ex his duodecim aequationibus decimam omnino reiiciemus, quum latitudo geocentrica observata nimis incerta sit.

13.

Quum sex incognitas dL, $d7$ etc. ita determinare non liceat, ut omnibus undecim aequationibus exacte satisfiat, i. e. ut singulae incognitarum functiones quae sunt ad dextram simul fiant $= 0$, valores eos eruemus, per quos functionum harum quadrata summam quam minimam efficiant. Facile quidem perspicitur, si generaliter functiones lineares incognitarum p, q, r, s etc. propositae sint hae

$$\begin{aligned} n + ap + bq + cr + ds + \text{etc.} &= w \\ n' + a'p + b'q + c'r + d's + \text{etc.} &= w' \\ n'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \text{etc.} &= w'' \\ n''' + a'''p + b'''q + c'''r + d'''s + \text{etc.} &= w''' \end{aligned}$$

etc., aequationes conditionales, ut $ww + w'w' + w''w'' + w'''w''' + \text{etc.} = \Omega$ fiat minimum, esse hasce

$$\begin{aligned} aw + a'w' + a''w'' + a'''w''' + \text{etc.} &= 0 \\ bw + b'w' + b''w'' + b'''w''' + \text{etc.} &= 0 \\ cw + c'w' + c''w'' + c'''w''' + \text{etc.} &= 0 \\ dw + d'w' + d''w'' + d'''w''' + \text{etc.} &= 0 \end{aligned}$$

etc. sive

designando brevitatis causa

$an + a'n' + a''n'' + a'''n''' + \text{etc.}$ per $[an]$
$aa + a'a' + a''a'' + a'''a''' + \text{etc.}$ per $[aa]$
$ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \text{etc.}$ per $[ab]$
etc.
$bb + b'b' + b''b'' + b'''b''' + \text{etc.}$ per $[bb]$
$bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \text{etc.}$ per $[bc]$
etc. etc.

p, q, r, s etc. determinari debere per eliminationem ex aequationibus

$$\begin{aligned} [an] + [aa]p + [ab]q + [ac]r + [ad]s + \text{etc.} &= 0 \\ [bn] + [ab]p + [bb]q + [bc]r + [bd]s + \text{etc.} &= 0 \\ [cn] + [ac]p + [bc]q + [cc]r + [cd]s + \text{etc.} &= 0 \\ [dn] + [ad]p + [bd]q + [cd]r + [dd]s + \text{etc.} &= 0 \end{aligned}$$

etc.

Attamen quoties multitudo incognitarum p, q, r, s etc. paullo maior est, eliminatio laborem velde prolixum atque taediosum requirit, quem sequenti modo notabiliter contrahere licet. Praeter coëfficientes $[an]$, $[aa]$, $[ab]$ etc. (quorum multitudo fit $= \frac{1}{2}(ii + 3i)$, si multitudo incognitarum $= i$), etiam hunc computatum suppono $nn + n'n' + n''n'' + n'''n''' + \text{etc.} = [nn]$, perspicieturque facile fieri

$$\begin{aligned} \Omega = [nn] &+ 2[an]p + 2[bn]q + 2[cn]r + 2[dn]s + \text{etc.} \\ &+ [aa]pp + 2[ab]pq + 2[ac]pr + 2[ad]ps + \text{etc.} \\ &+ [bb]qq + 2[bc]qr + 2[bd]qs + \text{etc.} \\ &+ [cc]rr + 2[cd]rs + \text{etc.} \\ &+ [dd]ss + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Designando itaque

$$[an] + [aa]p + [ab]q + [ac]r + [ad]s + \text{etc.} \quad \text{per } A$$

patet, singulas partes ipsius $\frac{A^2}{[aa]}$, quae factorem p involvunt, in Ω contineri, adeoque $\Omega - \frac{A^2}{[aa]}$ esse functionem a p liberam. Quare statuendo

$$\begin{aligned} [nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} &= [nn, 1] \\ [bn] - \frac{[an].[ab]}{[aa]} &= [bn, 1] \\ [cn] - \frac{[an].[ac]}{[aa]} &= [cn, 1] \\ [dn] - \frac{[an].[ad]}{[aa]} &= [dn, 1] \text{ etc.} \\ [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} &= [bb, 1] \\ [bc] - \frac{[ab].[ac]}{[aa]} &= [bc, 1] \\ [bd] - \frac{[ab].[ad]}{[aa]} &= [bd, 1] \text{ etc. etc.: erit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega - \frac{A^2}{[aa]} = [nn, 1] &+ 2[bn, 1]q + 2[cn, 1]r + 2[dn, 1]s + \text{etc.} \\ &+ [bb, 1]qq + 2[bc, 1]qr + 2[bd, 1]qs + \text{etc.} \\ &+ [cc, 1]rr + 2[cd, 1]rs + \text{etc.} \\ &+ [dd, 1]ss + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

quam functionem designabimus per Ω'.

Similimodo ponendo

$$[bn,1]+[bb,1]q+[bc,1]r+[bd,1]s+\text{etc.}=B,$$

erit $\Omega'-\frac{B^2}{[bb,1]}$ functio a q libera, quam statuemus $=\Omega''$. Eodem modo faciemus

$$[nn,1]-\frac{[bn,1]^2}{[bb,1]}=[nn,2]$$
$$[cn,1]-\frac{[bn,1].[bc,1]}{[bb,1]}=[cn,2]$$
$$[cc,1]-\frac{[bc,1]^2}{[bb,1]}=[cc,2]$$

etc. etc. atque

$$[cn,2]+[cc,2]r+[cd,2]s+\text{etc.}=C$$

unde $\Omega''-\frac{C^2}{[cc,2]}$ erit functio ab r quoque libera. Eodem modo progrediemur, usquedum in progressione Ω, Ω', Ω'' etc. ad terminum ab omnibus incognitis liberum pervenerimus, qui erit $[nn,\mu]$, si multitudo incognitarum p, q, r, s etc. denotatur per μ. Habemus itaque

$$\Omega=\frac{A^2}{[aa]}+\frac{B^2}{[bb,1]}+\frac{C^2}{[cc,2]}+\frac{D^2}{[dd,3]}+\text{etc.}+[nn,\mu]$$

Iam quum $\Omega = ww + w'w' + w''w''$ etc. natura sua valorem negativum obtinere non possit, facile demonstratur, divisores $[aa]$, $[bb,1]$, $[cc,2]$, $[dd,3]$ etc. necessario *positivos* evadere debere (brevitatis tamen gratia hanc demonstrationem fusius hic non exsequor). Hinc vero sponte sequitur, valorem minimum ipsius Ω prodire, si fiat $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$ etc. Ex his itaque (μ) aequationibus incognitae p, q, r, s etc. determinari debebunt, quod ordine inverso facillime effici poterit, quum manifesto ultima aequatio unicam incognitam implicet, penultima duas et sic porro. Simul haec methodus eo nomine se commendat, quod valor minimus aggregati Ω sponte inde innotescit, quippe qui manifesto est $=[nn,\mu]$.

14.

Applicemus iam haecce praecepta ad exemplum nostrum, ubi p, q, r, s etc. sunt dL, $d7$, $d\Pi$, $d\varphi$, $d\Omega$, di. Calculo accurate absoluto hosce valores numericos inveni:

$[nn] = 148848$
$[an] = -371.09$
$[bn] = -580104$
$[cn] = -113.45$
$[dn] = +268.53$
$[en] = +94.26$
$[fn] = -31.81$
$[aa] = +5.91569$
$[ab] = +7203.91$
$[ac] = -0.09344$
$[ad] = -2.28516$
$[ae] = -0.34664$
$[af] = -0.18194$
$[bb] = +10834225$
$[bc] = -49.06$
$[bd] = -3229.77$
$[be] = -198.64$
$[bf] = -143.05$
$[cc] = +0.71917$
$[cd] = +1.13382$
$[ce] = +0.06400$
$[cf] = +0.26341$
$[dd] = +12.00340$
$[de] = -0.37137$
$[df] = -0.11762$
$[ee] = +2.28215$
$[ef] = -0.36136$
$[ff] = +5.62456$

Hinc porro deduxi

$[nn,1] = +125569$
$[bn,1] = -138534$
$[cn,1] = -119.31$
$[dn,1] = -125.18$
$[en,1] = +72.52$
$[fn,1] = -43.22$
$[bb,1] = +2458225$
$[bc,1] = +62.13$
$[bd,1] = -510.58$
$[be,1] = +213.84$
$[bf,1] = +73.45$
$[cc,1] = +0.71769$
$[cd,1] = +1.09773$
$[ce,1] = -0.05852$
$[cf,1] = +0.26054$
$[dd,1] = +11.12064$
$[de,1] = -0.50528$
$[df,1] = -0.18790$
$[ee,1] = +2.26185$
$[ef,1] = -0.37202$
$[ff,1] = +5.61905$

Atque hinc simili modo

$[nn,2] = +117763$
$[cn,2] = -115.81$
$[dn,2] = -153.95$
$[en,2] = +84.57$
$[fn,2] = -39.08$
$[cc,2] = +0.71612$
$[cd,2] = +1.11063$
$[ce,2] = -0.06392$
$[cf,2] = +0.25868$
$[dd,2] = +11.01463$
$[de,2] = -0.46088$
$[df,2] = -0.17265$
$[ee,2] = +2.24325$
$[ef,2] = -0.37841$
$[ff,2] = +5.61686$

Hinc porro

$[nn,3] = +99034$
$[dn,3] = +25.66$
$[en,3] = +74.23$
$[fn,3] = +2.75$
$[dd,3] = +9.29213$
$[de,3] = -0.36175$
$[df,3] = -0.57384$
$[ee,3] = +2.23754$
$[ef,3] = -0.35532$
$[ff,3] = +5.52342$

Hinc eodem modo

$[nn,4] = +98963$
$[en,4] = +75.23$
$[fn,4] = +4.33$
$[ee,4] = +2.22346$
$[ef,4] = -0.37766$
$[ff,4] = +5.48798$

Hinc

$[nn,5] = +96418$
$[fn,5] = +17.11$
$[ff,5] = +5.42383$

Atque hinc tandem

$[nn,6] = +96364$

Habemus itaque ad determinationem incognitarum sex aequationes sequentes:

$$0 = +17''11 + 5.42383\,di$$
$$0 = +75''23 + 2.22346\,d\Omega - 0.37766\,di$$
$$0 = +25''66 + 9.29213\,d\varphi - 0.36175\,d\Omega - 0.57384\,di$$
$$0 = -115''81 + 0.71612\,d\Pi + 1.11063\,d\varphi - 0.06392\,d\Omega + 0.25868\,di$$
$$0 = -13854'' + 2458225\,d7 + 62.13\,d\Pi - 510.58\,d\varphi + 213{,}84\,d\Omega + 73.45\,di$$
$$0 = -371''09 + 5.91569\,dL + 7203.91\,d7 - 0.09344\,d\Pi - 2.28516\,d\varphi - 0.34664\,d\Omega - 0.18194\,di$$

unde deducitur

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}i &= -\ \ 3''15 \\
\mathrm{d}\Omega &= -\ 34''37 \\
\mathrm{d}\varphi &= -\ \ 4''29 \\
\mathrm{d}\Pi &= +166''44 \\
\mathrm{d}7 &= +\ \ 0''054335 \\
\mathrm{d}L &= -\ \ 3''06
\end{aligned}
$$

Elementa itaque elliptica correcta, quae omnibus sex oppositionibus quam proxime satisfaciunt, haec sunt:

Epocha longitudinis mediae 1803, ad meridianum Gottingensem	221° 34′ 53″64
Motus medius tropicus diurnus	770″5010
Longitudo perihelii 1803	121° 8′ 8″54
Longitudo nodi ascendentis 1803	172 28 12.43
Inclinatio orbitae	34 37 28.35
Excentricitas = sin 14° 9′ 59″79	0.2447424
Logarithmus semiaxis maioris	0.4422071

15.

Substitutis valoribus correctionum dL, d7 etc., quos modo invenimus, in duodecim aequationibus art. 12, differentias sequentes inter valores longitudinum heliocentricarum atque latitudinum geocentricarum observatos atque computatos obtinemus:

in oppositione anni	differentia longitudinis	differentia latitudinis
1803	−111″00	− 8″31
1804	+ 59.18	−36.67
1805	+ 19.92	+ 0.07
1807	+ 85.77	+25.01
1808	+135.88	+28.72
1809	−216.54	+83.01

OBSERVATIONES
COMETAE SECUNDI A. MDCCCXIII
IN OBSERVATORIO GOTTINGENSI FACTAE

ADIECTIS

NONNULLIS ADNOTATIONIBUS CIRCA CALCULUM ORBITARUM PARABOLICARUM

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SC. EXHIBITAE D. X. SEPT. MDCCCXIII.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. II.
Gottingae MDCCCXIII.

OBSERVATIONES

COMETAE SECUNDI A. MDCCCXIII

IN OBSERVATORIO GOTTINGENSI FACTAE

ADIECTIS

NONNULLIS ADNOTATIONIBUS CIRCA CALCULUM ORBITARUM PARABOLICARUM.

Cometam a collega amicissimo cl. Harding d. 3 Aprilis huius anni in constellatione Tauri Poniatovii detectum ipse in specula nostra observare coepi inde a d. 7 Aprilis. Ecce determinationes, quas ope micrometri circularis telescopio decempedali adaptati obtinere licuit:

1813	T. med. Gott.	Asc. R. app.	Declin. app.
Apr. 7	$13^h\ 12^m\ 2^s$	$271^0\ 7'\ 19''3$	$5^0\ 34'\ 36''7$ Bor.
9	13 35 40	270 10 33.5	4 11 3.4 —
11	13 17 43	269 1 19.9	2 33 0.7 —
14	13 7 36	266 44 5.5	0 33 0.8 Austr.
21	14 23 0	256 39 19.3	12 57 56.0 —

Postea ad quadrantem muralem a clar. Harding observationes factae sunt hae:

Apr. 21	$15^h\ 7^m\ 21^s$	$256^0\ 34'\ 19''6$	$13^0\ 2'\ 26''5$ Austr.
24	14 22 50	248 23 21	21 45 2
25	14 4 21	244 44 42	25 10 42

D. 24 et 25 Aprilis cometa nudis quoque oculis valde conspicuus fuit. Noctibus insequentibus coelum nubibus tectum, moxque rapidus cometae ad austrum descensus finem observationibus imposuit.

Superfluum videtur, hocce loco elementa parabolica repetere, quae statim ab initio e tribus primis observationibus ipse deduxeram. Etenim horum accuratius expoliendorum curam demandavi calculatori valde exercitato atque perito, Doctori Gerling, cui sequentia elementa correcta debemus, cunctis observationibus tum nostris tum iis quas transmiserat clar. Olbers, quantum licuit adaptata.

Logarithmus distantiae in perihelio	0.0849212
Tempus transitus per perihelium, ad meridianum Gottingensem	1813 Mai. 19.44507
Longitudo perihelii	197° 43′ 7″7
Longitudo nodi ascendentis	42 40 15.2
Inclinatio orbitae	81 2 11.8

Motus *retrogradus*.

Observationes clar. Olbers fuerunt hae:

1813	T. med. Brem.	Asc. R. app.	Declin. app.
Apr. 14	13ʰ 31ᵐ 4ˢ	266° 42′ 51″2	0° 34′ 22″8 Austr.
15	12 14 29	265 48 47.9	1 46 4.5
19	11 38 0	260 40 39.1	8 15 23.7
21	12 0 35	256 51 59.3	12 42 54.3
24	11 58 38	248 43 57.7	21 25 9.8
25	11 41 30	245 8 18.0	24 49 2.4
	12 5 38	245 4 3.0	24 54 16.4

Accessit observatio clar. Bouvard in observatorio imp. Parisino facta:

1813	T. med. Paris.	Asc. R. app.	Declin. app.
Apr. 13	16ʰ 22ᵐ 2ˢ	267° 27′ 18″	0° 24′ 46″ Bor.

Consensus elementorum supra traditorum cum singulis hisce observationibus e calculis clar. Gerling ita se habet:

	Differentia		Observator
	Asc. R.	Declin.	
Apr. 7	+ 3″8	+ 8″5	Gauss
9	+ 2.0	+ 34.3	Gauss
11	− 5.3	− 17.7	Gauss
13	− 1.6	− 0.4	Bouvard
14	− 7.4	− 28.6	Gauss
	+ 2.7	− 8.4	Olbers
15	− 0.9	+ 28.7	Olbers
19	−25.1	+103.9	Olbers
21	−56.6	− 59.2	Olbers
	−30.1	− 5.2	Gauss
	−22.8	− 24.1	Harding
24	−45.2	− 41.4	Olbers
	+ 0.4	− 11.6	Harding
25	−23.3	− 67.8	Olbers
	− 9.4	− 27.4	Olbers
	+ 9.7	+ 1.4	Harding

In hacce comparatione tum aberrationis tum parallaxis ratio rite est habita.

Liceat his addere quaedam calculi compendia, quibus saepius in determinatione prima orbitae parabolicae secundum methodum clar. Olbers commode usus sum, et per quae methodus ista iam per se tam expedita adhuc magis contrahi vel ad calculum numericum magis idonea reddi videtur. Referuntur ea ad computum radiorum vectorum, atque imprimis chordae inter locum primum et ultimum. Clar. Olbers ad hunc finem adhibet expressiones huius formae $\sqrt{(f+g\rho+h\rho\rho)}$, atque coëfficientes f, g, h per operationes satis quidem simplices determinat, ita tamen comparatas, ut in plerisque casibus praecisio sufficiens obtineri nequeat, nisi tabulis logarithmorum maioribus ad septem vel saltem ad sex figuras decimales constructis perficiantur. Illarum expressionum loco alias substitui, quae tum per se aliquanto magis commodae ad calculum videntur, tum eo quoque nomine se commendant, quod omnibus operationibus quinque decimales adeoque tabulae logarithmorum minores sufficiunt. Rei summa hisce momentis innititur. Sint

$\odot$, $\odot'$, $\odot''$ longitudines Solis in observatione prima, secunda, tertia
R, R', R'' distantiae solis a terra
α, α', α'' longitudines atque
β, β', β'' latitudines geocentricae cometae
r, r', r'' distantiae eiusdem a sole
ρ, ρ', ρ'' eiusdem distantiae curtatae a terra
t, t', t'' tempora observationum
k chorda inter cometae locum primum atque tertium
$M = \frac{\rho''}{\rho}$

His positis facile perspicitur haberi

$$[1]\quad r = \surd[(\rho\cos\alpha - R\cos\odot)^2 + (\rho\sin\alpha - R\sin\odot)^2 + \rho\rho\,\mathrm{tang}\,\beta^2]$$
$$[2]\quad r'' = \surd[(M\rho\cos\alpha'' - R''\cos\odot'')^2 + (M\rho\sin\alpha'' - R''\sin\odot'')^2 + MM\rho\rho\,\mathrm{tang}\,\beta''^2]$$
$$\begin{aligned}[3]\quad k = \surd[&(M\rho\cos\alpha'' - \rho\cos\alpha - R''\cos\odot'' + R\cos\odot)^2\\ &+ (M\rho\sin\alpha'' - \rho\sin\alpha - R''\sin\odot'' + R\sin\odot)^2\\ &+ (M\rho\,\mathrm{tang}\,\beta'' - \rho\,\mathrm{tang}\,\beta)^2]\end{aligned}$$

Aequationes 1, 2 induunt formam hancce

$$r = \surd\left(\frac{\rho\rho}{\cos\beta^2} - 2\rho R\cos(\alpha - \odot'') + RR\right)$$
$$r'' = \surd\left(\frac{MM\rho\rho}{\cos\beta''^2} - 2M\rho R''\cos(\alpha'' - \odot'') + R''R''\right)$$

Statuendo itaque

$$\cos\beta\cos(\alpha - \odot) = \cos\psi, \quad R\sin\psi = B$$
$$\cos\beta''\cos(\alpha'' - \odot'') = \cos\psi'', \quad R''\sin\psi'' = B''$$

habebimus

$$r = \surd\left[\left(\frac{\rho}{\cos\beta} - R\cos\psi\right)^2 + BB\right]$$
$$r'' = \surd\left[\left(\frac{M\rho}{\cos\beta''} - R''\cos\psi''\right)^2 + B''B''\right]$$

Determinando porro quinque quantitates auxiliares g, G, h, H, ζ, ita ut habeatur

$$\begin{aligned}R''\cos\odot'' - R\cos\odot &= g\cos G\\ R''\sin\odot'' - R\sin\odot &= g\sin G\\ M\cos\alpha'' - \cos\alpha &= h\cos\zeta\cos H\\ M\sin\alpha'' - \sin\alpha &= h\cos\zeta\sin H\\ M\,\mathrm{tang}\,\beta'' - \mathrm{tang}\,\beta &= h\sin\zeta\end{aligned}$$

formula 3 transit in sequentem

$$\begin{aligned}k &= \surd[(\rho h\cos\zeta\cos H - g\cos G)^2 + (\rho h\cos\zeta\sin H - g\sin G)^2 + \rho\rho hh\sin\zeta^2]\\ &= \surd(\rho\rho hh - 2\rho hg\cos\zeta\cos(G - H) + gg)\end{aligned}$$

Quodsi itaque statuimus

$$\cos\zeta\cos(G - H) = \cos\varphi, \quad g\sin\varphi = A$$

erit

$$k = \surd[(\rho h - g\cos\varphi)^2 + AA]$$

aut si insuper statuimus $\rho h - g\cos\varphi = u$,

$$k = \surd(uu + AA)$$

Gratum fore censemus pluribus lectoribus, si non modo complexum omnium operationum ad has transformationes pertinentium rite ordinatum hic denuo sistamus, sed insuper omnes reliquas operationes simul adiiciamus, ita ut omnia, quae ad calculum primum orbitae parabolicae requiruntur, hic iuncta inveniantur. Simul haec praecepta per numeros a cometa nostro desumtos illustrabimus. Eligimus itaque observationes nostras dierum 7, 14, 21 Aprilis, quarum reductio sequentia *data* administrat:

$$\begin{array}{llll}
t = 7.55002 & & & \\
t' = 14.54694 & & & \\
t'' = 21.59931 & & & \\
\alpha = 271^\circ\ 16'\ 38'' & & & \beta = +29^\circ\ 2'\ 0''\\
\alpha' = 266\ \ 27\ \ 22 & & & \beta' = +22\ \ 52\ \ 18\\
\alpha'' = 256\ \ 48\ \ 8 & & & \beta'' = +\ 9\ \ 53\ \ 12\\
\odot = 17\ \ 47\ \ 41 & & & \log R = 0.00091\\
\odot' = 24\ \ 38\ \ 45 & & & \log R' = 0.00175\\
\odot'' = 31\ \ 31\ \ 25 & & & \log R'' = 0.00260
\end{array}$$

I. Operatio *prima* consistit in determinatione valoris approximati ipsius M, quem suppeditat formula

$$M = \frac{t''-t'}{t'-t} \cdot \frac{\operatorname{tang}\beta'\sin(\alpha-\odot')-\operatorname{tang}\beta\,\sin(\alpha'-\odot')}{\operatorname{tang}\beta''\sin(\alpha'-\odot')-\operatorname{tang}\beta'\sin(\alpha''-\odot')}$$

In exemplo nostro invenitur $\log M = 9.75799$.

II. Tunc determinare oportet quantitates g, G, h, H, ζ per formulas sequentes, quas supra traditis aequivalentes sed ad calculum commodiores esse patet.

$$\begin{aligned}
R''\cos(\odot''-\odot)-R &= g\cos(G-\odot)\\
R''\sin(\odot''-\odot) &= g\sin(G-\odot)\\
M-\cos(\alpha''-\alpha) &= h\cos\zeta\cos(H-\alpha'')\\
\sin(\alpha''-\alpha) &= h\cos\zeta\sin(H-\alpha'')\\
M\operatorname{tang}\beta''-\operatorname{tang}\beta &= h\sin\zeta
\end{aligned}$$

In exemplo nostro provenit

$$\begin{aligned}
G &= 113^0\ 43'\ 57''\\
\log g &= 9.38029\\
H &= 109^0\ \ 5'\ 49''\\
\zeta &= \ \ 44\ \ 13\ \ \ 9\\
\log h &= 9.81477
\end{aligned}$$

III. Postea statuemus

$$\begin{aligned}
\cos\zeta\cos(G-H) &= \cos\varphi\\
\cos\beta\,\cos(\alpha-\odot) &= \cos\psi\\
\cos\beta''\cos(\alpha''-\odot'') &= \cos\psi''
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g\sin\varphi &= A\\
R\sin\psi &= B\\
R''\sin\psi'' &= B''
\end{aligned}$$

In hoc calculo si forte cosinus angulorum φ, ψ, ψ'' parum ab unitate diversi evadant, figuras sex vel adeo septem adhibere conveniet. Ceterum angulos φ, ψ, ψ'' ipsos gradibus minutis et secundis describere non necessarium est, quum sufficiat, statim a logarithmis cosinuum ad logarithmos sinuum transire.

In exemplo nostro fit

$$\begin{aligned}
\log A &= 9.22527\\
\log B &= 9.98706\\
\log B'' &= 9.86038
\end{aligned}$$

IV. Denique statuatur

$$\begin{aligned}
h\cos\beta &= b\\
\frac{h\cos\beta''}{M} &= b''\\
g\cos\varphi - bR\cos\psi &= c\\
g\cos\varphi - b''R''\cos\psi'' &= c''
\end{aligned}$$

In exemplo nostro

$$\begin{aligned}
\log b &= 9.75645\\
\log b'' &= 0.05028\\
c &= +0.31365\\
c'' &= +0.95443
\end{aligned}$$

V. His ita praeparatis radii vectores r, r'' atque chorda k pendent ab incognita u sequenti modo

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{[(\tfrac{u+c}{b})^2+BB]}\\
r'' &= \sqrt{[(\tfrac{u+c''}{b''})^2+B''B'']}\\
k &= \sqrt{(uu+AA)}
\end{aligned}$$

quam incognitam ita per tentamina determinare oportet, ut satisfiat aequationi

$$(r+r''+k)^{\frac{3}{2}}-(r+r''-k)^{\frac{3}{2}} = \frac{t''-t}{m}$$

ubi notandum, m designare tempus 9.6887401 dierum atque esse

$$\log m = 0.9862673$$

Quantitati $(r+r''-k)^{\frac{3}{2}}$ signum $+$ praefigere oporteret, si motus heliocentricus cometae intra tempus $t''-t$ angulum 180^0 superaret, sed hic casus in suppositionibus, quibus haecce prima orbitae determinatio innititur, occurrere nequit. Ceterum vix opus erit monere, calculum numericum pro r ita instituendum esse, ut introducatur angulus auxiliaris θ, talis ut sit

$$\frac{bB}{u+c} = \operatorname{tang}\theta$$

unde fieri $r = \frac{B}{\sin\theta}$, ac perinde pro r'' et k. Nec non quisque sponte videbit, in omnibus his operationibus percommode adhiberi posse tabulam nostram pro logarithmis summarum atque differentiarum immediate inveniendis.

In exemplo nostro habetur $\log\frac{t''-t}{m} = 0.16139$, paucisque tentaminibus factis eruitur

$$u = 0.24388$$

VI. Inventa quantitate u, habemus

$$\rho = \frac{u+g\cos\varphi}{h}, \quad \rho'' = M\rho$$

(in exemplo nostro $\log\rho = 9.80364$, $\log\rho'' = 9.56163$).

Operationes reliquae satis quidem sunt notae: sed ut omnia hic adsint, formulas reliquas quoque, quibus uti solemus, apponere visum est. Sint itaque

λ, λ'' longitudines heliocentricae cometae in observatione prima atque tertia
β, β'' latitudines heliocentricae
υ, υ'' longitudines in orbita
Ω longitudo nodi ascendentis
i inclinatio orbitae intra 0 et 90^0 accipienda, si secundum modum vulgarem motum directum retrogradumque distinguimus
Π longitudo perihelii
T tempus transitus per perihelium
q distantia in perihelio.

VII. Positiones heliocentricae invenientur per formulas

$$\begin{aligned}
\rho\cos(\alpha-\odot)-R &= r\cos\beta\cos(\lambda-\odot)\\
\rho\sin(\alpha-\odot) &= r\cos\beta\sin(\lambda-\odot)\\
\rho\operatorname{tang}\sigma &= r\sin\beta\\
\rho''\cos(\alpha''-\odot'')-R'' &= r''\cos\beta''\cos(\lambda''-\odot'')\\
\rho''\sin(\alpha''-\odot'') &= r''\cos\beta''\sin(\lambda''-\odot'')\\
\rho''\operatorname{tang}\sigma'' &= r''\sin\beta''
\end{aligned}$$

Consensus valorum pro radiis vectoribus r, r'' hinc prodeuntium cum iis, qui antea ex u deducti fuerant, calculo confirmando inserviet. Motus directus erit vel retrogradus, prout λ'' maior evadit quam λ, vel minor.

In exemplo nostro invenimus

$$\begin{aligned}
&\lambda = 225^0\ 4'\ 22'', \quad &&\beta = +14^0\ 51'\ 39'', \quad &&\log r = 0.13896\\
&\lambda'' = 223\ \ 6\ \ 55, \quad &&\beta'' = +\ \ 2\ \ 49\ \ 28, \quad &&\log r'' = 0.11068
\end{aligned}$$

Cometae itaque motus est retrogradus.

VIII. Ad inveniendam longitudinem nodi atque inclinationem, adhibeantur formulae:

$$\pm\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang} i.\sin(\lambda-\Omega)$$

$$\pm\frac{\operatorname{tang}\beta''-\operatorname{tang}\beta.\cos(\lambda''-\lambda)}{\sin(\lambda''-\lambda)} = \operatorname{tang} i.\cos(\lambda-\Omega)$$

ubi signa superiora referuntur ad motum directum, inferiora ad retrogradum. Dein longitudines in orbita eruuntur per formulas

$$\frac{\operatorname{tang}(\lambda-\Omega)}{\cos i} = \operatorname{tang}(\upsilon-\Omega)$$

$$\frac{\operatorname{tang}(\lambda''-\Omega)}{\cos i} = \operatorname{tang}(\upsilon''-\Omega)$$

ubi $\upsilon-\Omega$, $\upsilon''-\Omega$ in iisdem resp. quadrantibus accipere oportet, in quibus sunt $\lambda-\Omega$, $\lambda''-\Omega$.

Pro cometa nostro invenimus

$$\begin{aligned}
\Omega &= 42^0\ 40'\ \ 8''\\
i &= 81\ \ \ 1\ \ \ 3\\
\upsilon &= 237\ 43\ \ 7\\
\upsilon'' &= 225\ 31\ 32
\end{aligned}$$

IX. Longitudinem perihelii atque distantiam in perihelio dant formulae

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{q}}.\cos\tfrac{1}{2}(\upsilon-\Pi)$$

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\upsilon''-\upsilon)}{\sqrt{r}} - \frac{1}{\sin\frac{1}{2}(\upsilon''-\upsilon).\sqrt{r''}} = \frac{1}{\sqrt{q}}.\sin\tfrac{1}{2}(\upsilon-\Pi)$$

Pro cometa nostro $\Pi = 197^0\ 37'\ 51''$, $\log q = 0{,}08469$.

X. Denique e tabula BARKERI desumantur motus medii anomaliis veris $\upsilon - \Pi$, $\upsilon'' - \Pi$ vel $\Pi - \upsilon$, $\Pi - \upsilon''$ respondentes, qui sint M, M''. Tunc erit

$$T = t \mp M n q^{\frac{3}{2}} = t'' \mp M'' n q^{\frac{3}{2}}$$

ubi signa superiora valent, si in motu directo $\upsilon > \Pi$, $\upsilon'' > \Pi$ vel in motu retrogrado $\upsilon < \Pi$, $\upsilon'' < \Pi$; inferiora in casibus oppositis. Quantitas n est constans, ipsiusque logarithmus $= 0.0398723$. Consensus duorum valorum ipsius T secundam calculi confirmationem subministrat.

In exemplo nostro invenimus

$$T = 49.518$$
$$T = 49.517$$

ita ut pro tempore transitus per perihelium adoptari possit Maii d. 19.5175.

Quodsi ex hisce elementis locus geocentricus pro tempore observationis mediae computatur, prodit longitudo $266^0\, 27'\, 15''$, latitudo $22^0\, 52'\, 18''$ bor., illa $7''$ ab observata discrepans, haec ex asse consentiens.

METHODUM PECULIAREM

ELEVATIONEM POLI DETERMINANDI

EXPLICAT

SIMULQUE PRAELECTIONES SUAS PROXIMO SEMESTRI HABENDAS

INDICAT

D. CAROLUS FRIDERICUS GAUSS.

GOTTINGAE, MDCCCVIII.

METHODUS PECULIARIS

ELPVATIONEM POLI DETERMINANDI.

1.

Methodos usitatissimas, quas observatores itinerantes ad determinationes geographicas adhibere solent, observationibus Solaribus inniti constat, altitudinibus correspondentibus determinationi temporis, altitudinibusque meridianis vel circummeridianis determinationi elevationis poli inservientibus. Pluribus utique nominibus hocce observationum genus se commendat, iis praesertim, qui ad altitudines mensurandas sextante Hadleyano utuntur: multo enim facilius est altitudines Solis hocce instrumento accurate observare, quam altitudines stellarum, limbique divisiones nocte minus commode dignoscuntur, quam interdiu; calculus praeterea altitudinum correspondentium et circummeridianarum tam simplex est, ut a quolibet etiam in mathesi parum versato facile addisci possit. — Quodsi forte propter nubes aliave impedimenta altitudines correspondentes assequi non licuerit, observationes culminationi proximae cum aliis magis inde remotis combinari solent, horologiique a tempore vero deviatio, nec non altitudo poli plerumque per methodos indirectas, e. g. per eam quae a CORNELIO DOUWES nomen accepit, inde derivari.

Quamquam vero nullum sit dubium, quin observationes Solares nocturnis praeferendae sint, quoties quidem illarum compotem fieri licet: tamen posteriores haud omnino negligi debere censemus. Saepissime coelum, postquam interdiu nubibus tectum fuit, ingruente nocte defaecatur, aut saltem stellas subinde conspicere concedit: saepissime etiam viator, cui interdiu itineri prosequendo intento observationibus vacare non licuerat, per determinationem geographicam loci, in quo pernoctat, bene meritum se praestare posset, si modo in observandis stellis dexteritatem sufficientem sibi comparavisset. Adnumeremus adhuc hisce rationibus incertitudinem observationum Solarium in mensibus hibernis, ubi nostris quidem regionibus Sol parum ultra vapores horizontis exsurgit, porro frequentiores observationum perturbationes a spectatoribus importunis, concussiones horizontis artificialis (praesertim si mercuriali utaris) a curribus praetervectis, a quibus per silentium noctis magis tutus eris, faterique oportebit, observationes stellarum perdignas esse, quae diligentius excolantur, atque in usum vocentur.

Quantam utilitatem hocce observationum genus *in itineribus maritimis* praestare possit, facile patebit, si perpendatur, quanti momenti sit, ut navis locus vel quotidie si fieri possit exploretur, a qua cognitione haud raro hominum salus et vita pendet. Haud equidem diffitendum est, in mari quoque observationes nocturnas difficultatibus peculiaribus premi, quum horizon maris, a quo altitudines capere oportet, nocte minus commode distinguatur: sed constat quoque, huic incommodo remedium afferri posse, si sextans tubo optico aperturae maioris muniatur.

2.

Quae in art. praec. in laudem observationum stellarum allata sunt, vim adhuc maiorem nanciscuntur, quum hoc modo brevissimo temporis intervallo, puta per observationes intra pauca minuta prima instituendas, non modo altitudo poli, sed insuper tempus mira praecisione determinari possit. Ad hunc finem duas tantummodo altitudines stellarum diversarum quarumcunque (quarum tamen positiones notae supponuntur) observare, horologiique tempora respondentia notare oportet: motus horologii diurnus ea tantummodo praecisione notus esse debet, ut intervallum temporis satis exacte in tempus sidereum converti possit. Certo ni fallimur hoc problema inter utilissima astronomiae nauticae referendum est, adeoque satis est mirandum, quod ab iis qui supra hac re scripserunt penitus neglectum esse videtur. Clar. Kraft in *Actis novis Acad. Petropol.* T. XIII. ex altitudinibus duarum stellarum elevationem poli determinare docuit: sed, quanam ratione inductus nescio, problema generale per conditionem specialem limitavit, supponendo scilicet, ambas observationes eodem temporis momento factas

esse. Tunc itaque requiruntur duo observatores, duo instrumenta, exacta observationum congruentia, quam sane haud ita facile assequi licebit. Verum enim vero haecce conditio prorsus inutilis et superflua est. Certo enim navis bene instructa carere nequit horologio, quod intervallum paucorum minutorum exacte dimetiri valeat; neque etiam motus navis intra tantillum tempus sensibilem positionis geographicae mutationem producere poterit; denique calculus problemati solvendo inserviens per conditionem illam nihilo fit simplicior, uti statim monstrabimus.

3.

Nullo negotio perspicietur, problema in forma ea, in qua a clar. Kraft tractatum est, ita quoque enunciari posse. 'Ex data positione duorum punctorum in superficie sphaerica respectu alicuius circuli maximi (qui hic est aequator) invenire positionem puncti tertii, cuius distantiae ab illis punctis sunt datae.' Puncta scilicet priora dabuntur per positiones duarum stellarum observatarum in sphaera coelesti, puta per harum ascensiones rectas et declinationes: punctum tertium autem respondebit ipsi zenith loci observationis, ipsiusque declinatio elevationem poli, ascensio recta punctum culminans aequatoris, adeoque tempus sidereum definiet. Solutio huius problematis statim obvia per tria triangula sphaerica perficitur. In primo, quod formabitur inter duo puncta data atque polum aequatoris, data sunt duo latera cum angulo incluso, unde derivabuntur latus tertium, atque alteruter duorum angulorum reliquorum, e. g. is qui puncto primo adiacet. In triangulo secundo, quod inter duo puncta data punctumque tertium quaesitum formabitur, data iam sunt latera omnia, unde derivabitur unus ex angulis, is scilicet qui itidem puncto primo adiacet, siquidem angulum eidem adiacentem in triangulo primo adoptaveramus. Summa vel differentia horum duorum angulorum constituet angulum notum in triangulo tertio, inter punctum primum, tertium polumque aequatoris formato, in quo insuper duo latera adiacentia cognita sunt: hinc denique angulus ad polum, punctique tertii distantia a polo (quae est complementum elevationis poli) derivabuntur. Haecce methodus iam ab astronomis saeculi XVI in usum vocata est: vid. e. g. *Tychonis Astronomiae instauratae progymnasmata* p. 211 sqq., ubi permultarum stellarum (interque eas etiam novae in Cassiopea) positiones e distantiis a binis stellis positione datis determinantur.

Simul hinc manifestum est, stricte loquendo problema duas semper solutiones admittere: si enim in superficie sphaerica e duobus punctis datis tamquam centris descripti supponantur duo circuli radiis, qui resp. distantiis propositis aequales sunt, hi circuli generaliter loquendo duobus punctis se secabunt, punctumque tertium quaesitum in utraque intersectione concipi poterit. Nihilominus in praxi ambiguitas hinc oriri nequit. Scilicet si circulus maximus per punctum primum et secundum ductus concipitur, superficiem sphaericam in duo hemisphaeria dirimens, dubium esse non potest, utrum punctum tertium (ipsum zenith) polusque arcticus in eodem hemisphaerio iacere debeant, an in oppositis: patet enim, casum primum locum habere debere, si excessus ascensionis rectae stellae eius, quae in observatione fuit ad laevam (respectu stellae alterius) supra ascensionem rectam stellae alterius, quae respectu prioris fuit ad dextram (adiectis si opus fuerit 360 gradibus) fuerit inter 0 et 180^0; contra, casum posteriorem valere, si excessus iste fuerit inter 180^0 et 360^0.

Ceterum huic ipsi solutionis ambiguitati, problemati a priori inhaerenti, attribui debet calculi prolixitas, qua solutio directa laborat; in sequentibus tamen illam notabiliter contrahere docebimus. Quodsi autem solutionem indirectam adhibere non recusemus, satis expedita adstrui potest, cuius explicationem ad aliam occasionem nobis reservamus.

Hactenus de casu speciali, ubi duae observationes simultaneae sunt, diximus: problema generale ad hunc casum sponte reducitur sequenti modo. Concipiatur pro stella, quae secundo loco observata est, alia fictitia eandem cum illa declinationem habens, sed ascensionem rectam tanto minorem, quanto temporis siderei intervallo observatio secunda primam sequuta est. Manifesto haec stella fictitia tempore observationis primae eandem altitudinem attigisset, quam stella revera observata habuit tempore observationis secundae, unde illa huic substituta iam calculus observationibus simultaneis superstruendus erit.

Haec omnia e considerationibus obviis quidem sed geometricis petita sunt: quamobrem speramus, solutionem directam solis operationibus analyticis innixam pluribus haud ingratam fore. Nova certe hinc prodibit confirmatio, quod vix quidquam e considerationibus geometricis hauriatur, quod non possit aeque concinne per analysin erui, si modo scite tractetur.

4.

Sit φ elevatio poli, α et α' ascensiones rectae, δ et δ' declinationes duarum stellarum, γ et γ' ascensiones rectae punctorum culminantium aequatoris resp. tempore observationis primae et secundae, sive quod idem est tempora ipsa siderea in gradus conversa, denique h altitudo observata stellae primae, h' altitudo stellae secundae. Manifesto $\gamma-\alpha$, $\gamma'-\alpha'$ erunt anguli horarii, duabus observationibus respondentes: statuemus $\gamma-\alpha=\lambda$, $\gamma'-\alpha'=\lambda-\theta$, unde $\theta=\alpha'-\alpha-(\gamma'-\gamma)$ erit quantitas cognita, quoniam $\gamma'-\gamma$ aequalis est intervallo temporis inter duas observationes in tempus sidereum ac dein in gradus converso. Problematis itaque solutio hisce duabus aequationibus superstruenda erit:

[1] $$\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos\lambda$$

[2] $$\sin h' = \sin\delta' \sin\varphi + \cos\delta' \cos\varphi \cos(\lambda-\theta)$$

Quodsi iam ex his aequationibus vel incognitam λ vel incognitam φ eliminare susciperemus, ad aequationem nimis complicatam deferremur: priorem quidem viam sequutus est clar. Kraft in diss. supra citata, sed nostro quidem iudicio solutio, quam hoc modo eruit, longior adhuc molestiorque est ea, quae immediate e consideratione trium triangulorum derivatur, etiamsi illa ad solam determinationem ipsius φ limitetur, determinatione temporis neglecta. Praestabit itaque, incognitam aliquam novam introducere, eiusque adiumento utramque φ, λ eliminare. Ad quam apte eligendam sequens observatio viam nobis sternet. Fit

$$(\sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos\lambda)^2 + (\cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos\lambda)^2$$
$$= \sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 \cos\lambda^2 = 1 - \cos\varphi^2 \sin\lambda^2$$

adeoque per aequationem 1

$$(\cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos\lambda)^2 + \cos\varphi^2 \sin\lambda^2 = \cos h^2,$$

sive

$$\left(\frac{\cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos\lambda}{\cos h}\right)^2 + \left(\frac{\cos\varphi \sin\lambda}{\cos h}\right)^2 = 1$$

Statuere itaque licebit

[3] $$\frac{\cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos\lambda}{\cos h} = \cos u$$

[4] $$\frac{\cos\varphi \sin\lambda}{\cos h} = \sin u$$

Iam si aequatio 3 cum 1 combinatur, eruimus

[5] $$\sin\varphi = \sin\delta \sin h + \cos\delta \cos h \cos u$$

[6] $$\cos\varphi \cos\lambda = \cos\delta \sin h - \sin\delta \cos h \cos u$$

Tribuamus aequationi 2 formam hancce

$$\sin h' = \sin\delta' \sin\varphi + \cos\theta \cos\delta' \cos\varphi \cos\lambda + \sin\theta \cos\delta' \cos\varphi \sin\lambda$$

substituamusque pro $\sin\varphi$, $\cos\varphi \cos\lambda$, $\cos\varphi \sin\lambda$ valores suos ex aequationibus 5, 6, 4, unde fiet

$$\begin{aligned}\sin h' - \sin h \sin\delta \sin\delta' - \sin h \cos\theta \cos\delta \cos\delta' - \cos u \cos h \cos\delta \sin\delta' \\ + \cos u \cos h \cos\theta \sin\delta \cos\delta' - \sin u \cos h \sin\theta \cos\delta' = 0\end{aligned}$$

Haec aequatio, statuendo

[7] $$\frac{\cos\delta \sin\delta' - \cos\theta \sin\delta \cos\delta'}{\sin\theta \cos\delta'} = \operatorname{cotang} v$$

transit in sequentem

$$\begin{aligned}\sin h' - \sin h \sin\delta \sin\delta' - \sin h \cos\theta \cos\delta \cos\delta' \\ - \cos h \sin\theta \cos\delta' (\cos u \operatorname{cotang} v + \sin u) = 0\end{aligned}$$

Quodsi itaque statuimus $v - u = w$, habebimus

[8] $$\cos w = \frac{\sin v (\sin h' - \sin h \sin\delta \sin\delta' - \sin h \cos\theta \cos\delta \cos\delta')}{\cos h \sin\theta \cos\delta'}$$

unde determinabitur w, atque hinc $u = v - w$.

Postquam angulus u inventus est, deducetur λ e combinatione aequationum 4 et 6, unde oritur

[9] $$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\cos h \sin u}{\cos\delta \sin h - \sin\delta \cos h \cos u}$$

Ex λ habebitur $\gamma = \alpha + \lambda$, quo angulo in tempus converso status horologii innotescet. Denique per combinationem aequationum 4 et 5 prodit

[10] $$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin\lambda (\sin\delta \sin h + \cos\delta \cos h \cos u)}{\cos h \sin u}$$

cui formulae, si placet, calculi confirmandi caussa ipsa aequatio 4 adiungi poterit.

5.

Circa solutionem in art. praec. traditam quasdam adhuc observationes adiicimus.

Quum e formula 8 pro angulo w, per cosinum suum determinando, duo valores prodeant, alter positivus, alter negativus, duas inde solutiones diversas emergere patet, ut iam supra monuimus: attamen utra sit vera, facile sequenti modo dignoscitur. Ostendi potest, sinum differentiae inter azimuthum circuli verticalis, in quo stella prima observata est, atque azimuthum circuli verticalis, in quo observata est stella secunda, sive exactius, sinum excessus azimuthi prioris supra posterius a laeva ad dextram mensurati, fieri

$$= \frac{\sin\theta \cos\delta' \sin w}{\cos h' \sin v}$$

Iam quum $\cos\delta'$, $\cos h'$ natura sua sint quantitates positivae, patet, $\sin w$ vel eodem signo affectum esse debere, quod habet $\frac{\sin\theta}{\sin v}$, vel opposito, prout circulus verticalis prior posteriori vel ad dextram fuerit vel ad laevam, de qua re incertitudo adesse nequit, quum observationes in circulis verticalibus vel prope conspirantibus, vel prope oppositis factae, ad praxin omnino non sint idoneae, adeoque sedulo evitari debeant, uti infra fusius exponemus.

Ceterum solutio adhuc aliquantulum contrahi calculoque numerico magis accommodari potest per introductionem duorum angulorum auxiliarium. Determinando scilicet angulum F per aequationem

[11] $$\operatorname{tang} F = \frac{\operatorname{tang}\delta'}{\cos\theta}$$

aequationes 7 et 8 transeunt in has:

[12] $$\operatorname{tang} v = \frac{\cos F \operatorname{tang}\theta}{\sin(F - \delta)}$$

[13] $$\cos w = \frac{\cos v \operatorname{tang} h}{\operatorname{tang}(F - \delta)} \left(\frac{\sin h' \sin F}{\sin h \sin\delta' \cos(F - \delta)} - 1\right)$$

Perinde introducendo angulum auxiliarem G talem, ut sit

[14] $$\operatorname{tang} G = \frac{\operatorname{tang} h}{\cos u}$$

aequationes 9 et 10 in has transibunt:

[15] $$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\cos G \operatorname{tang} u}{\sin(G - \delta)}$$

[16] $$\operatorname{tang}\varphi = \cos\lambda \operatorname{cotang}(G - \delta)$$

6.

Astronomi practici saepius queruntur, methodos a theoreticis propositas non semper ad usus practicos idoneas esse, vel saltem non praestare, quae inde exspectaverint. Quo melius talem suspicionem a methodo nostra avertamus simulque praeceptorum praecedentium usum illustremus, exemplum aliquod ab observationibus non fictis desumtum fusius exsequi conveniet. Sextante Troughtoniano, cuius radius decem pollicum, observavi in specula nostra Aug. 21 huius anni altitudinem duplicem non correctam stellae α Aquilae $91^0\ 34'\ 10''$, quum horologium Sheltonianum monstraret $20^h\ 40^m\ 8^s$; altitudinem aequalem assequuta est stella α Andromedae tempore horologii $20^h\ 46^m\ 59^s$; stella prior observata est in circulo verticali versus dextram, posterior versus laevam; motus horologii diurnus cum tempore sidereo vero exacte congruit. Purgato angulo observato ab errore indicis prodit angulus verus $91^0\ 31'\ 36''$, adeoque altitudo apparens $45^0\ 45'\ 48''$, hinc altitudo vera $45^0\ 44'\ 52''6 = h = h'$. Stellarum positiones, aberratione et nutatione rite applicatis, inventae sunt hae:

$$\alpha = 295^0\ 22'\ \ 6''6 \qquad \delta = +\ 8^0\ 22'\ 43''1$$
$$\alpha' = 359\ \ 38\ \ 18.5 \qquad \delta' = +28\ \ \ 2\ \ 13.4$$

Differentia temporum $6'\ 51''$ in arcum conversa producit $\gamma' - \gamma = 1^0\ 42'\ 45''$, unde $\theta = 62^0\ 33'\ 26''9$. Calculus ipse dein ita se habet (factor $\frac{\sin h'}{\sin h}$ in formula 13 propter altitudinum aequalitatem manifesto hic excidit):

$\log \operatorname{tang} \delta'$	9.7263516	
$\log \cos \theta$	9.6635677	
$\log \operatorname{tang} F$	0.0627839,	unde $F = 49^0\ \ 7'\ 37''70$
		atque $F - \delta = 40^0\ 44'\ 54''60$
$\log \operatorname{tang} \theta$	0.2845877	
$\log \cos F$	9.8158318	
Comp. $\log \sin (F - \delta)$.	0.1802598	
$\log \operatorname{tang} v$	0.2856793	unde $v = 62^0\ 36'\ 58''79$
$\log \sin F$	9.8786157	
Comp. $\log \sin \delta'$ . . .	0.3278629	
Comp. $\log \cos (F - \delta)$.	0.1205703	
	0.3270489	$= \log 2.123483 = \log n$

$\log (n - 1)$	0.0505666	
$\log \cos v$	9.6627075	
$\log \operatorname{tang} h$	0.0113399	
$\log \operatorname{cotang} (F - \delta)$ . .	0.0646895	
$\log \cos w$	9.7893035,	unde $w = +52^0\ \ 0'\ 14''25$
		atque $u = \ \ 10^0\ 36'\ 44''54$
$\log \operatorname{tang} h$	0.0113399	
$\log \cos u$	9.9925074	
$\log \operatorname{tang} G$	0.0188325,	unde $G = 46^0\ 14'\ 30''77$
		atque $G - \delta = 37^0\ 51'\ 47''67$
$\log \cos G$	9.8398647	
$\log \operatorname{tang} u$	9.2726964	
Comp. $\log \sin (G - \delta)$.	0.2119881	
$\log \operatorname{tang} \lambda$	9.3245492,	unde $\lambda = 11^0\ 55'\ 18''31$
$\log \cos \lambda$	9.9905300	
$\log \operatorname{cotang} (G - \delta)$ . .	0.1093281	
$\log \operatorname{tang} \varphi$	0.0998581,	unde $\varphi = 51^0\ 31'\ 47''19$

Haecce poli elevatio paucis tantummodo minutis secundis a vera discrepat. Ex λ porro invenitur $\gamma = 307^0\ 17'\ 24''91$, sive in tempore $20^h\ 29^m\ 9^s66$, unde praecessio horologii prae tempore sidereo vero $= +10^m\ 58^s34$, quae cum determinatione eodem die ex aliis observationibus petita intra dimidiam minuti secundi partem congruit.

7.

Manca certo foret disquisitio nostra, nisi insuper doceamus, quantus error in determinationem quantitatum incognitarum redundare possit ab erroribus levibus inevitabilibus in altitudinibus mensurandis commissis: simul hinc patebit, quales potissimum stellas eligere conveniat, ut determinationes quam exactissimae inde resultent. Ad hunc finem altitudines h, h' simulque quantitates φ et λ tamquam variabiles spectemus, quo pacto e differentiatione aequationis 1 prodit haecce:

$$\cos h \, \mathrm{d}h = (\sin\delta\cos\varphi - \cos\delta\sin\varphi\cos\lambda)\,\mathrm{d}\varphi - \cos\delta\cos\varphi\sin\lambda\,\mathrm{d}\lambda$$

Iam constat, si azimuthum circuli verticalis, in quo stella prima observata est, statuatur $= A$, haberi*)

$$\begin{aligned} \sin\delta\cos\varphi - \cos\delta\sin\varphi\cos\lambda &= -\cos h\cos A \\ \cos\delta\sin\lambda &= \cos h\sin A \end{aligned}$$

unde aequatio praecedens transit in hanc

[17] $$\mathrm{d}h = -\cos A\,\mathrm{d}\varphi - \cos\varphi\sin A\,\mathrm{d}\lambda$$

Prorsus simili modo, si azimuthum stellae secundae in observatione altera statuitur $= A'$, prodit e differentiatione aequationis 2

[18] $$\mathrm{d}h' = -\cos A'\mathrm{d}\varphi - \cos\varphi\sin A'\mathrm{d}\lambda$$

E combinatione harum aequationum demanant sequentes

[19] $$\mathrm{d}\varphi = -\frac{\sin A'}{\sin(A'-A)}\,\mathrm{d}h + \frac{\sin A}{\sin(A'-A)}\,\mathrm{d}h'$$

[20] $$\cos\varphi\,\mathrm{d}\lambda = \frac{\cos A'}{\sin(A'-A)}\,\mathrm{d}h - \frac{\cos A}{\sin(A'-A)}\,\mathrm{d}h'$$

Hinc sponte patet, errores admodum considerabiles in determinatione tum elevationis poli tum temporis produci posse vel a levissimis erroribus altitudinum observatarum, si $\sin(A'-A)$ fuerit quantitas perparva, i. e. si circulus verticalis secundus vel ipsi primo, vel ei qui primo oppositus est, valde vicinus fuerit: probe itaque cavendum est, ne stellae duae tali modo dispositae combinentur. Simul vero manifestum est, quoties $\sin(A'-A)$ valorem considerabilem positivum seu negativum obtineat, errores observationum certe haud multum auctos in determinatione elevationis poli prodire posse. Idem valet de determinatione temporis, cuius quidem praecisio insuper ab altitudine poli ipsa pendet: hoc vero non methodo sed ipsius rei naturae tribuendum est, quum constet, determinationem temporis minori semper praecisione in latitudinibus maioribus effici, quam in locis aequatori magis vicinis. — Optima quidem semper optio esset, si ad-

*) Azimutha inde a meridie dextram versus per occidentem, septentrionem etc. a 0 usque ad 360° numerari semper supponimus.

hibeantur stellae tales, ut $A'-A$ vel $A-A'$ fiat proxime $= 90^0$, i. e. si duo circuli verticales proxime sub angulis rectis se intersecent. In hoc casu facile demonstratur, valorem maximum ipsius $\mathrm{d}\varphi$ fieri $= \sqrt{(\mathrm{d}h^2 + \mathrm{d}h'^2)}$, valoremque maximum ipsius $\mathrm{d}\lambda = \frac{\sqrt{(\mathrm{d}h^2 + \mathrm{d}h'^2)}}{\cos\varphi}$. Quodsi itaque de singulis altitudinibus intra $10''$ certi esse possemus, error maximus in determinatione latitudinis foret $= 14''$, maximusque error in determinatione anguli λ, $\frac{14''}{\cos\varphi}$; unde nostris regionibus error maximus in determinatione temporis $= 1''5$ temporis. Vix opus erit monere, in hac errorum aestimatione ad solum effectum errorum in observationibus commissorum respici, quod utique sufficit, quum ipsae stellarum maiorum positiones nostra aetate tanta praecisione assignari queant, ut errores pro nihilo habere liceat.

In lectionibus, quas proximo semestri hiberno habiturus sum

publice h. IX theoriam motus cometarum parabolici illustrabo.

privatim h. X *Astronomiam* tradam, audientibus simul copiam exercitationum practicarum tum in observationibus tum in calculo astronomico facturus.

ANZEIGEN

EIGNER

SCHRIFTEN.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1809. Junius 17.

Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium. Auctore Carolo Frid. Gauss. Hamburgi 1809. Sumtibus *Frid. Perthes* et *J. H. Besser.* XII S. Vorrede, 228 S. Text und 20 S. Tabellen, nebst einer Kupfertafel. gr. Quart.

Mit demjenigen Theile der theorischen Astronomie, welcher die parabolische und elliptische Bewegung der Himmelskörper zum Gegenstande hat, haben sich bekanntlich viele Schriftsteller, und unter ihnen sogar Geometer vom ersten Range in eigenen Werken, beschäftigt: nach solchen Vorgängern durfte nur eine grosse Veranlassung eine neue Bearbeitung dieses Feldes motiviren. Dem eigentlichen Astronomen ist diese Veranlassung bekannt genug: nur solchen Freunden der Himmelskunde, die aus derselben kein Hauptgeschäft machen, und vielleicht, in den letzten verhängnissvollen Jahren, über die Angelegenheiten der Erde die Angelegenheiten des Himmels aus dem Gesicht verloren haben möchten, wollen wir mit Wenigem die Umstände in Erinnerung bringen, welche zunächst gegenwärtiges Werk veranlasst haben. Die Aufgabe, aus den nur eine mässig lange Zeit hindurch von der Erde aus beobachteten Bewegungen eines Himmelskörpers, von dem man nichts weiter weiss, als dass er in einem Kegelschnitte nach den Keplerschen Gesetzen sich um die Sonne bewegt, dessen Bahn mit hinreichender Genauigkeit zu bestimmen, war bisher eigentlich noch nie auf eine ernstliche Art bearbeitet. Allerdings sind einige auf dieses Problem Bezug habende Untersuchungen vorhanden: allein ohne den Scharfsinn und die analytische Kunst zu verkennen, wovon einige derselben Spuren zeigen, muss man den vorgeschlagenen Methoden doch alles absprechen, was zur wirklichen Brauchbarkeit erfordert wird, indem sie entweder statt möglich grösster Schärfe nur höchstens eine rohe Annäherung geben, oder statt eines geschmeidigen, für die wirkliche Anwendung geformten, Calculs nur einen verworrenen Haufen von unentwickelten und selbst den unverdrossensten Rechner zurückschreckenden Formeln aufstellen, oder endlich statt auf Beobachtungen, wie sie der heutige Zustand der practischen Astronomie erlaubt, anwendbar zu sein, selbst schon durch weit kleinere Fehler, als diejenigen, welche bei den Beobachtungen unvermeidlich sind, ganz unbrauchbar werden. Der Grund dieser Vernachlässigung eines Problems, welches unstreitig schon an sich von einem hohen Interesse ist, scheint zum Theil in dem Umstande zu liegen, dass diejenigen Geometer, welche sich mit jenem Problem beschäftigten, mit den Kräften und Bedürfnissen der Ausübung nicht vertraut genug waren, hauptsächlich aber wohl darin, dass die Geschichte der Astronomie noch keinen Fall aufgestellt hatte, wo das Bedürfniss einer angemessenen Auflösung der Aufgabe recht dringend, und ihr Nutzen recht fühlbar gewesen wäre. In der That, als Kepler nach Entdeckung seiner Gesetze die Bestimmung der Dimensionen der Bahnen der damals bekannten Planeten unternahm, stand ihm, ausser den schon sehr genau bekannten mittlern Bewegungen, ein Schatz von guten und vieljährigen Tychonischen Beobachtungen zu Gebote, aus welchen er nur auswählen durfte, was er zur Anwendung seiner zwar schönen, aber doch speciellen, und, verhältnissmässig, kunstlosen Methoden jedesmal nöthig fand. Dieselben Hülfsquellen, oder vielmehr noch grössere, hatten Kepler's Nachfolger, die bei dem Fortschreiten der Beobachtungskunst die schon ziemlich nahe bekannten Elemente der Planetenbahnen noch genauer zu bestimmen unternahmen.

Anders verhielt es sich bei den Cometen, in deren Bewegung man nach Newton's Entdeckungen nur einen besondern Fall der allgemeinen Kepler'schen Gesetze erkannte. Diese Weltkörper sind gewöhnlich nur eine kurze Zeit sichtbar: die Erscheinung ihrer Bewegungen hängt von den zufälligen Stellungen ab, welche die Erde während jener Sichtbarkeit eingenommen hatte, und der Geometer, welcher die Bestimmung der Bahnen aus den Erscheinungen unternimmt, kann dazu unter den Beobachtungen nicht viel aussuchen, er muss sie nehmen, wie er sie vorfindet, wie sie der Zufall gegeben hat, nur höchst selten stehen ihm Beobachtungen zu Gebote, die unter solchen Umständen gemacht sind, wie er sie zur Anwendung von speciellen Methoden verlangen möchte. Das Problem also, aus einigen Beobachtungen eines Cometen dessen parabolische Bahn zu bestimmen, war eben so wichtig, als schwer. Newton selbst erkannte die Schwierigkeiten an, und wusste sie zu besiegen; mit welchem Eifer und mit welchem Erfolge man seit Newton bis zu unsrer Zeit sich mit dieser Aufgabe beschäftigt hat, ist bekannt genug. Allein zwischen dieser Aufgabe und der oben von uns erwähnten findet ein wesentlicher Unterschied Statt: in jener wird die Art des Kegelschnitts *vorgeschrieben*, während sie in diesem aus der unendlichen Mannigfaltigkeit möglicher Kegelschnitte, von denen die Parabel nur Eine Art ist, ohne hypothetische Voraussetzungen, blos mit Hülfe der Beobachtungen selbst, ausgemittelt werden soll. Begreiflich erhält jene Aufgabe durch diese Einschränkung eine grosse Vereinfachung, welche man sich aber bei den meisten Cometen erlauben durfte, und erlauben musste, da der gewöhnlich ziemlich geringe Grad von Genauigkeit in den Beobachtungen und ihre kurze Dauer kaum jemals hinreichen, das Dasein einer Abweichung von der Parabel zu beweisen, und ihre Grösse zu bestimmen. Freilich hat man doch bei einigen Cometen diese Bestimmung wirklich versucht, allein, und dies ist wesentlich, immer erst, nachdem man schon eine parabolische Bahn berechnet hatte, die dann als Annäherung zu der zu bestimmenden Ellipse oder Hyperbel diente. So blieb also auch hier unser allgemeineres Problem gewissermassen entbehrlich.

Auch die Entdeckung eines neuen perennirenden Weltkörpers im Jahre 1781 machte das Bedürfniss einer Auflösung dieses Problems noch nicht fühlbar. Nachdem man die Unzulänglichkeit einer parabolischen Bahn eingesehen hatte, versuchte man einen Kreis, der bei der zufälliger Weise ziemlich kleinen Excentricität der Bahn des Planeten seine Bewegung während einiger Jahre erträglich genau darstellte; bei der so sehr langsamen Bewegung des Planeten, seiner geringen Entfernung von der Ecliptik und seinem noch ziemlich lebhaften Lichte war hier auch weiter kein *periculum in mora*; ohne alle Mühe fand man ihn von einem Jahre zum andern wieder auf, und zur Bestimmung der Abweichung vom Kreise oder der wahren Ellipse durfte man also warten, bis man die Beobachtungen nach seiner Bequemlichkeit aussuchen konnte.

Ganz anders aber verhielt es sich mit der im Jahr 1801 entdeckten Ceres. Dieser Weltkörper zeigt sich nur als Sternchen achter Gröse, ist nur mit Mühe und bei genauer Kenntniss seines jedesmaligen Platzes aus dem zahllosen Heere ganz ähnlicher Fixsterne herauszufinden: der Entdecker hatte ihn nur während des kurzen Zeitraums von 41 Tagen beobachtet, und als die Entdeckung in dem übrigen Europa bekannt wurde, war er bereits in den Sonnenstrahlen verloren, um erst nach einem Jahre in einer ganz verschiedenen Himmelsgegend wieder sichtbar zu werden. Jetzt galt es die möglich genaueste Vorhersagung des Orts, wo man ihn wieder zu suchen haben würde, und diese musste bloss auf die wenigen vorhandenen Beobachtungen und strengen Calcul, ohne unsichere Hypothesen, gegründet werden. Mehrere Astronomen versuchten die einfachste Hypothese, eine Kreisbahn, mit der sich die Beobachtungen freilich nur in eine unvollkommene Übereinstimmung bringen liessen, und deren Zulänglichkeit zur Wiederauffindung also wenigstens sehr precär blieb: in der That hat der Erfolg nachher bestätigt, dass diese Kreishypothese schon am Ende des Jahres 1801 um eilf Grade von dem wahren Orte des Planeten abwich, und diejenigen Astronomen, welchen das Glück zu Theil ward, denselben wieder aufzufinden, haben selbst erklärt, dass diese Wiederauffindung nach einer so fehlerhaften Hypothese unmöglich gewesen sein würde.

Dem Verfasser des vorliegenden Werks hatten sich im Sommer 1801 bei Gelegenheit einer ganz andern Beschäftigung einige Ideen dargeboten, die ihm zu einer Auflösung des erwähnten allgemeinen Problems führen zu können schienen. Zu einer andern Zeit würde er vielleicht diese Ideen, welche zunächst nur theoretischen Reiz für ihn hatten, nicht sogleich weiter verfolgt und ausgeführt haben: allein gerade in jenem Zeitpunkte, wo Piazzis Entdeckung die allgemeine Aufmerksamkeit gespannt hatte, und dessen Beobachtungen so eben ins Publicum gekommen waren, konnte er sich nicht enthalten, an diesen die practische Anwendbarkeit jener Ideen zu prüfen. Der Erfolg dieser Arbeit ist bekannt. Die bis dahin nicht geahnte Möglichkeit, aus einer kurzen Reihe von Beobachtungen eines Planeten eine schon sehr genäherte und zu seiner Wiederauffindung nach einem grössern Zeitraume überflüssig genaue Bestimmung seiner Bahn zu machen, war dadurch aufs schönste erwiesen, und die Brauchbarkeit der angewandten Methode bewährt: und wenn über die Allgemeinheit dieser Brauchbarkeit noch Zweifel hätten übrig bleiben können, so sind diese durch eben so

glückliche Erfolge bei drei andern seitdem entdeckten neuen Planeten auf das vollkommenste weggeräumt.

Jene Methoden sind die ersten Grundlagen des Werks, dem diese Anzeige gewidmet ist: allein die fortgesetzte Beschäftigung mit diesem Gegenstande hat dem Verfasser Gelegenheit gegeben, so viele wiederholte Zusätze und Abänderungen und Vervollkommnungen an denselben anzubringen, dass von ihrer ursprünglichen Gestalt fast gar keine Spuren übrig geblieben sind. Der Verfasser hofft daher, dass die Astronomen, welche von Anfang an ihr lebhaftes Interesse an diesen Untersuchungen und den Wunsch nach einer baldigen Bekanntmachung geäussert haben, mit der verspäteten Erscheinung nicht unzufrieden zu sein Ursache haben werden. Indem wir das Urtheil, in wie fern diese Hoffnung gegründet ist, den competenten Lesern des Werks selbst überlassen, begnügen wir uns hier, nur den Plan und Inhalt desselben in gedrängter Kürze darzulegen.

Jenes mehrerwähnte Problem war freilich die Veranlassung und der Hauptzweck des vorliegenden Werks: allein in der Ausführung konnte dasselbe doch nur ein Theil, ja nur der kleinere Theil desselben werden. Man wird leicht vermuthen, dass eine adäquate Auflösung desselben sich nicht geben liess, ohne eine Menge bisher noch unentwickelter Wahrheiten vorauszusetzen, die sich auf die Bewegung der Himmelskörper in Kegelschnitten beziehen. Diese neuen, auch an sich selbst schon sehr interessanten, Relationen waren so zahlreich, und standen unter sich in so inniger Verbindung, dass sie nothwendig im Zusammenhange vorgetragen werden mussten, daher ihnen die ganze erste Abtheilung des Werks gewidmet ist. Der Plan, wonach sie geordnet sind, ist sehr einfach: diese erste Abtheilung zerfällt in vier Abschnitte, wovon der erste und zweite die Relationen enthalten, die sich auf einen einzigen Ort des Himmelskörpers entweder in seiner Bahn, oder im Raume, beziehen; während der dritte und vierte Abschnitt die Relationen zwischen zweien oder mehreren Oertern entwickeln. Dass hier durchgehends neben den neuen Relationen auch die vornehmsten schon bekannten mit aufgeführt werden mussten, liess sich nicht wohl vermeiden: man wird indess letztere meistens in einer dem Verfasser eigenthümlichen Form entwickelt finden. Der beschränkte Raum dieser Blätter erlaubt es nicht, von allen hier abgehandelten Gegenständen auch nur eine Übersicht zu geben; wir schränken uns darauf ein, nur ein paar von denjenigen Untersuchungen zu berühren, die von etwas grösserem Umfange sind. Dahin gehört im ersten Abschnitte eine Digression über den Grad der Genauigkeit, den man im numerischen Calcul bei dem Gebrauche von Tafeln aller Art zu erreichen im Stande ist; ferner in demselben Abschnitte eine neue Methode, die Bewegung in solchen Ellipsen und Hyperbeln, welche sich der Parabel nähern, auf die Bewegung in der letztern zu reduciren; im zweiten Abschnitte ein Verfahren, die geocentrischen Örter der Himmelskörper mit Hülfe dreier Coordinaten zu bestimmen, worüber bekanntlich der Verfasser schon früher eine Abhandlung geliefert hatte, welches aber hier noch eine wesentliche Vervollkommnung erhält; eben daselbst die Bestimmung der Differential-Änderungen des geocentrischen Orts durch die Differential-Änderungen der einzelnen Elemente. Mit vorzüglicher Ausführlichkeit ist im dritten Abschnitte das äusserst wichtige Problem abgehandelt, aus zweien Örtern eines Himmelskörpers in seiner Bahn die Elemente zu bestimmen, wo besonders die zweite Auflösung zur Entwickelung von einer grossen Anzahl neuer Relationen Gelegenheit gegeben hat. Um die practische Brauchbarkeit der vorgetragenen Methoden desto besser ins Licht zu setzen, und das Studium derselben auch den weniger Geübten mehr zu erleichtern, sind die wichtigern Lehren durchgehends mit Beispielen erläutert, die an wirklichen Fällen gewählt sind und grösstentheils wieder unter einander im Zusammenhange stehen. Die Bewegung in der Hyperbel, die doch auch bei Cometen wirklich vorkommen kann, ist schon des analytischen Interesses wegen beinahe mit derselben Ausführlichkeit abgehandelt, wie die Bewegung in der Ellipse und Parabel.

Die in der ersten Abtheilung vorgetragenen Untersuchungen sind nun gleichsam der Stoff, aus welchem in der andern Abtheilung die Auflösung der grossen Aufgabe, aus der Zergliederung der geocentrischen Erscheinungen die Bahn des Himmelskörpers selbst zu bestimmen, zusammengesetzt wird. Eigentlich beruht dieses Geschäft wieder auf mehreren unter sich sehr verschiedenen Forderungen. Eine andere Arbeit ist nöthig, um zum ersten Male die noch ganz unbekannte Bahn eines Himmelskörpers näherungsweise zu bestimmen; eine andere, um die schon näherungsweise bekannten Elemente nach einer längern, vielleicht viele Jahre umfassenden, Reihe von Beobachtungen auszufeilen. Die erstere Aufgabe erfordert grössere Kunst, die andere grössere Arbeit. Zu jener wird man nicht mehr Beobachtungen anwenden, als eben nöthig sind, also, allgemein zu reden, drei, und das Problem, aus dreien vollständigen Beobachtungen die Bahn eines Himmelskörpers zu bestimmen, gewisser Maassen das Wichtigste des ganzen Werks, macht den Inhalt des ersten Abschnitts der zweiten Abtheilung aus. Die Auflösung selbst verträgt hier keinen Auszug; als eine Probe von der Allgemeinheit ihrer Anwendbarkeit führen wir nur an, dass sie in den drei erläuternden Beispielen mit gleichem Erfolge auf Beobachtungen, die 22 Tage, auf solche, die 71 Tage, und auf solche, die 260 Tage von einander abstehen, angewandt ist. Etwas Eigenthümliches ist es, dass man nach Gefallen die kleinen Modificationen, welche von der Parallaxe und Aberration herrühren, *sogleich* ohne bedeutende Erschwerung der Arbeit mit in Betrachtung ziehen kann, und also ihretwegen nicht nöthig hat, eine doppelte Rechnung zu führen.

Unter gewissen Umständen, besonders wenn die Ebene der Bahn wenig gegen die Ecliptik geneigt ist, würde es nicht zweckmässig sein, die Bestimmung der Elemente auf drei vollständige Beobachtungen zu gründen: man muss vier Beobachtungen zum Grunde legen, worunter aber nur zwei vollständige zu sein brauchen. So ergibt sich eine neue Aufgabe, welcher der zweite Abschnitt gewidmet ist. Ein Beispiel, von der Vesta hergenommen, wo die äussersten Beobachtungen 162 Tage von einander entfernt liegen, erläutert diese Methode. Auch hier kann man, wenn man will, *sogleich* auf Parallaxe und Aberration Rücksicht nehmen.

Zu der schärfern Ausfeilung der Elemente eines Himmelskörpers hat man, gerade umgekehrt, nicht die möglich kleinste Zahl von Beobachtungen, sondern so viele, als nur zu Gebote stehen, anzuwenden. Wie man sich dabei zu verhalten habe, lehrt der dritte Abschnitt. Hier war der Ort, die Haupt-Momente von einer für jede Anwendung der Mathematik auf die Körperwelt höchst wichtigen Frage zu entwickeln, wie Beobachtungen und Messungen, die bei der Unvollkommenheit unsrer Sinne und Werkzeuge unvermeidlich immer mit Fehlern, wenn auch noch so geringen, behaftet sind, am zweckmässigsten zur Festsetzung von Resultaten zu combiniren sind. Die Grundsätze, welche hier ausgeführt werden, und welche von dem Verfasser schon seit 14 Jahren angewandt, und von demselben schon vor geraumer Zeit mehreren seiner astronomischen Freunde mitgetheilt waren, führen zu derjenigen Methode, welche auch Legendre in seinem Werke: *Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes*, vor einigen Jahren unter dem Namen *Méthode des moindres carrés* aufgestellt hat: die Begründung der Methode, welche von dem Verfasser gegeben wird, ist diesem ganz eigenthümlich. Eine weitere Ausführung hat man von demselben in der Folge zu erwarten.

Um eine *bleibende* Übereinstimmung der Elemente mit den Bewegungen eines Planeten zu erreichen, darf man sich nicht auf eine rein elliptische Bewegung einschränken: man muss dazu nothwendig die von den andern Planeten hervorgebrachten Störungen mit in Betrachtung ziehen. Die Berechnung der Störungen selbst lag natürlich ausser dem Plane eines Werks, welches nur der Bewegung nach den Keplerschen Gesetzen gewidmet ist: allein von den nöthigen Operationen, um eine Planetenbahn mit Rücksicht auf die schon berechneten Störungen zu verbessern, und so gleichsam die lezte Hand an dieselbe zu legen, sind im vierten und letzten Abschnitte wenigstens die Haupt-Momente angedeutet.

Wir schliessen diese Anzeige mit dem Wunsche, dass dieses Werk, die Frucht einer siebenjährigen Beschäftigung mit diesen Untersuchungen, dazu beitragen möge, die Freunde dieses wichtigsten und schönsten Theils der theorischen Astronomie zu vermehren, und den Astronomen selbst ihre bei dem steten Wachsthume der Wissenschaft an Umfang zunehmenden Arbeiten zu erleichtern.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1810. December 13.

Am 25. November übergab Herr Prof. Gauss der königl. Societät der Wissenschaften eine Vorlesung:

Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809.

Seit drei Jahren hatte der Verfasser keine neue Rechnungen über die Bahn der Pallas angestellt. Die Beobachtungen vom Jahre 1808 waren bei der grossen Lichtschwäche des Planeten sehr dürftig und mangelhaft gewesen, und sind zum Theil erst später bekannt geworden, daher es nicht der Mühe werth schien, schon damals die Elemente darnach zu verbessern. Erst nachdem Herr Prof. Gauss die Beobachtungen der Pallas von 1809, welche von Bouvard auf der kaiserl. Sternwarte in Paris angestellt waren, erhalten hatte, berechnete er nebst der Opposition von 1809 zugleich die von 1808 (s. diese Gel. Anz. 1810 Febr. 24). Die fernere Discussion aller bisher beobachteten sechs Oppositionen ergab das Resultat, dass eine elliptische Bahn nicht mehr zureicht, sie alle genau darzustellen: eine Folge der grossen Störungen, die dieser Planet von den übrigen, und besonders von dem Jupiter, erleidet. Herr Prof. Gauss hat dies auf eine doppelte Art gezeigt. Zuvörderst berechnete er drei Systeme von elliptischen Elementen, jedes aus vier Oppositionen, nemlich das erste aus denen von 1803, 1804, 1805, 1807;

das zweite aus denen von 1804, 1805, 1807, 1808; das dritte aus den Oppositionen von 1805, 1807, 1808, 1809, unter denen sich nur kleine Verschiedenheiten hätten zeigen müssen, wenn die Bewegung rein elliptisch wäre. Wir stellen hier diese drei Systeme neben einander:

	I.	II.	III.
A	221° 39′ 30″4	221° 34′ 56″7	221° 23′ 24″6
B	770.2143	770.4467	770.9265
C	121 3 11.4	121 5 22.1	120 58 4.8
D	172 28 56.9	172 28 46.8	172 27 52.4
E	34 37 41.0	34 37 31.5	34 36 49.4
F	0.2450198	0.2447624	0.2446335
G	0.4423149	0.4422276	0.4420473

wo

A Epoche der mittlern Länge 1803 für den Meridian von Göttingen
B mittlere tägliche tropische Bewegung
C Länge der Sonnennähe 1803
D Länge des aufsteigenden Knotens 1803
E Neigung der Bahn
F Excentricität
G Logarithm der halben grossen Axe

bedeutet. So nothwendig es nun sein wird, die Störungen der Pallas durch die andern Planeten mit in Rechnung zu bringen, wenn man eine bleibende Übereinstimmung der Erscheinungen mit der Rechnung beabsichtigt, so wird man doch auch künftig zu manchen Zwecken eine rein-elliptische Bahn vorziehen, wenn man dadurch den unerträglich weitläuftigen Rechnungen ausweichen kann, die die grosse Anzahl der Störungsgleichungen sonst nothwendig machen würde. Namentlich ist es, wenn es bloss die Wiederauffindung des Planeten gilt, gewiss bequemer, rein-elliptische Elemente auf die zunächst vorhergegangenen vier Oppositionen zu gründen, und darnach die Ephemeride zu construiren, welche nach einem Jahre noch nicht sehr viel vom Himmel abweichen kann. Deshalb hat Herr Prof. Gauss auch die im Octoberheft der Mon. Corresp. abgedruckte Ephemeride für die Bewegung der Pallas in ihrer nächsten Erscheinung nach dem obigen III. System von Elementen berechnet.

Die zweite Art, wie Herr Prof. Gauss den Einfluss der Störungen nachgewiesen hat, besteht in der Berechnung von rein-elliptischen Elementen, die sich an *alle* sechs Oppositionen *möglichst* genau anschliessen, und die dessen ungeachtet sich von den einzelnen beobachteten Örtern bedeutend entfernen. Wir setzen auch dieses *vierte* System von Elementen hier her:

A	221° 34′ 53″64
B	770.5010
C	121 8 8.54
D	172 28 12.43
E	34 37 28.35
F	0.2447424
G	0.4422071

Die Fehler dieser Elemente stellt folgende Übersicht dar:

Opposition von	Unterschied der heliocentr. Länge	der geocentr. Breite
1803	− 111″00	− 8″31
1804	+ 59.18	− 36.67
1805	+ 19.92	+ 0.07
1807	+ 85.77	+ 25.01
1808	+ 135.88	+ 28.72
1809	− 216.54	+ 83.01

Den Hauptinhalt der vorliegenden Abhandlung macht die Entwickelung der Methoden aus, wie diese verschiedenen Systeme von Elementen gefunden sind, und in dieser Rücksicht kann dieselbe als eine Art von Supplement zu einigen Abschnitten der *Theoria motus corporum coelestium* betrachtet werden. Die Aufgabe, aus vier beobachteten Örtern eines Himmelskörpers seine Bahn zu bestimmen, war in jenem Werke zwar schon umständlich abgehandelt, und zwei Auflösungen gegeben, eine für den Fall, wo die Bahn noch ganz unbekannt ist, und eine für den Fall, wo die schon näherungsweise bekannte Bahn verbessert werden soll. Letztere hätte also auch zur Bestimmung obiger drei Systeme von Elementen in Anwendung gebracht werden können; allein gerade im vorliegenden Fall, wo die vier Beobachtungen Oppositionen sind, hat Herr Prof. Gauss es vortheilhafter gefunden, eine ganz andere Methode zu gebrauchen, welche in der

Abhandlung ausführlich erklärt, und durch das Beispiel der wirklichen Berechnung des dritten Systems der Elemente noch mehr erläutert ist. Eine nähere Beschreibung dieser Methode hier zu geben verstattet der Raum nicht.

Die Berechnung des vierten Systems von Elementen ist nach den Grundsätzen geführt, die in dem 3. Abschnitt des 2. Buchs der *Theoria motus corporum coelestium* entwickelt sind, und die vorliegende Abhandlung gibt auch hiezu mehrere Zusätze, die hoffentlich den Astronomen nicht unwillkommen sein werden. Zuerst eine bequeme Berechnung der Differential-Änderungen der heliocentrischen Länge und der geocentrischen Breite aus den Differential-Änderungen der einzelnen Elemente. Sodann ein eigenes Verfahren, die unbekannten Grössen dem oben erwähnten Grundsatze gemäss zu bestimmen. Sind nemlich w, w', w'' u.s.w. die vorgegebenen lineären Functionen der unbekannten Grössen p, q, r u.s.w., und soll das Aggregat $ww + w'w' + w''w'' +$ u.s.w. ein Kleinstes werden, so erhält man leicht so viele lineäre Gleichungen, als unbekannte Grössen sind, aus denen diese durch Elimination bestimmt werden müssen. Diese Elimination ist aber, wenn die Anzahl der unbekannten Grössen etwas beträchtlich ist, eine äusserst beschwerliche Arbeit, und zwar deswegen, weil jede der Gleichungen alle unbekannten Grössen enthält. Herr Prof. Gauss hat diese Arbeit sehr bedeutend abgekürzt; denn obgleich er die Auflösung auch auf so viele lineäre Gleichungen, als unbekannte Grössen sind, zurückführt, so sind diese Gleichungen so beschaffen, dass nur die erste alle unbekannten Grössen enthält, aber die zweite von p, die dritte von p und q, die vierte von p, q und r frei ist u.s.w., daher die Bestimmung der unbekannten Grössen in der umgekehrten Ordnung nur noch wenige Mühe macht. Ausserdem hat diese Methode noch den Vortheil, dass man den kleinsten Werth von $ww + w'w' + w''w'' +$ u.s.w. im voraus angeben, und so die Vergleichung desselben mit dem nachher berechneten, wenn in w, w', w'' etc. die für die unbekannten Grössen gefundenen Werthe substituirt werden, zu einer Controlle der Rechnung benutzt werden kann.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1814. Januar 3.

Wir haben noch die Anzeige einer kleinen vom Prof. Gauss am 10. Sept. des vorigen Jahrs der königl. Societät überreichten Abhandlung nachzuholen, überschrieben:

Observationes cometae secundi a. 1813 *in observatorio Gottingensi factae, adiectis nonnullis adnotationibus circa calculum orbitarum parabolicarum.*

Dieser Comet wurde bekanntlich am 3. April des vorigen Jahrs von unserm Herrn Prof. Harding im Poniatovskischen Stier entdeckt: die auf der hiesigen Sternwarte angestellten Beobachtungen desselben gehen vom 9. bis 25. April. Man findet sie in der Abhandlung *vollständig:* da indessen der grössere Theil derselben auch schon an einem andern Ort bekannt gemacht ist, so übergehen wir sie hier mit Stillschweigen, und heben aus der Abhandlung nur die parabolische Bahn aus, welche Prof. Gauss den Herrn Dr. Gerling in Cassel nach den hiesigen und einigen Bremer und Pariser Beobachtungen zu berechnen veranlasste:

Durchgangszeit durch die Sonnennähe 1813 Mai 19. $10^h\ 24^m\ 5^s$

M. Z. in Göttingen

Länge der Sonnennähe	197° 43′ 7″7
Länge des aufsteigenden Knoten .	42 40 15,2
Neigung der Bahn	81 2 11.8
Logarithm des kleinsten Abstandes	0.0849212

Bewegung *rückläufig.*

Noch vor wenigen Jahrzehnden war die Anzahl der Personen in ganz Europa, die eine Cometenbahn zu berechnen im Stande waren, nur klein: gegenwärtig ist dieses Geschäft durch vervollkommnete Methoden so erleichtert und vereinfacht, dass ein sonst fähiger Kopf sich ohne Schwierigkeit damit vertraut machen, und in weniger Stunden, als sonst Tage erforderlich waren, eine Cometenbahn bestimmen kann. Zur *ersten* Berechnung einer Bahn aus drei Beobachtungen lässt die bequeme Methode des Herrn Dr. Olbers fast nichts zu wünschen übrig, wenn man anders Beobachtungen wählen kann, bei welchen die Richtung der geocentrischen Bewegung nicht zu nahe an die Richtung des grössten Kreises fällt, welcher durch den mittelsten geocentrischen Ort des Cometen und den entsprechenden Sonnenort auf der Himmelskugel gezogen wird. Der zweite Theil der vorliegenden Abhandlung hat zum Zweck, einige Punkte dieser schönen Methode noch etwas mehr zu vereinfachen, und zur numerischen Berechnung noch etwas bequemer zu machen. Dieser Versuch betrifft das indirecte Verfahren, wodurch genäherte Werthe der Abstände des Cometen von der Sonne und der Chorde zwischen den beiden äussern Örtern bestimmt werden. Dass diess Verfahren indirect ist, könnte nur ein im astronomischen Calcul Unerfahrner der Methode zum Vorwurf machen: aber die Einrichtung, welche ihm Olbers gegeben hat, ist mit der Unbequemlichkeit verbunden, dass in den meisten Fällen, auch wenn man übrigens, wie billig bei einer ersten Näherung, nicht die äusserste Schärfe in die Rechnung legen will, doch die kleinern Tafeln mit fünf Decimalen dabei zu grosse Fehler hervorbringen würden, weil mehrere ihrer Natur nach sehr kleine Grössen in der Form von Differenzen anderer, welche beinahe gleich werden, erscheinen. Prof. Gauss suchte dieser Unbequemlichkeit dadurch zu begegnen, dass er durch Einführung mehrerer Hülfsgrössen, welche vermittelst der kleinen Tafeln immer hinreichend genau bestimmt werden können, den Formeln für die Abstände von der Sonne und die Chorde eine andere Gestalt gab, bei welcher auch die nachmaligen Versuche der indirecten Auflösung noch etwas an Bequemlichkeit zu gewinnen scheinen. Einen Auszug vertragen diese Umformungen nicht, wenn wir nicht diesen Theil der Abhandlung hier ganz abschreiben wollen: wir verweisen also auf den nächstens erscheinenden zweiten Band der Commentationen der Societät, in welchem die ganze Abhandlung bereits abgedruckt ist.

Der Verfasser glaubte manchem einen Dienst zu erweisen, wenn er mit den ihm hier eigenthümlichen Abänderungen zugleich eine gedrängte Übersicht der sämmtlichen übrigen Operationen verbinde, die zur ersten Bestimmung einer Cometenbahn erforderlich sind. Wir bemerken dabei, dass auch einige der andern Formeln hier in einer von der sonst gewöhnlichen verschiedenen Gestalt erscheinen, bei welcher man aber nur in der Voraussetzung noch etwas an Kürze gewinnt, dass man sich dabei der von dem Verfasser vor einem Jahre bekannt gemachten Tafel zur unmittelbaren Berechnung der Logarithmen von Summen und Differenzen bedient. Man hat auf diese Weise hier auf zwei oder drei Seiten alles beisammen, was ausser den Tafeln zu der Berechnung einer Cometenbahn nöthig ist, und alles ist zugleich durch ein Beispiel an dem letzten Cometen erläutert, wo der Verfasser aus seinen Beobachtungen vom 7., 14. und 21. April Elemente ableitet, welche von den oben mitgetheilten und auf die gesammten Beobachtungen gegründeten nur unbedeutend verschieden sind.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1808. December 5.

Das vor kurzem erschienene Programm, worin Hr. Prof. Gauss seine Vorlesungen für das gegenwärtige Winter-Halbjahr ankündigt, hat vornehmlich zum Zweck, die Astronomen auf die Vortheile aufmerksam zu machen, welche man aus den jetzt mit Unrecht zu sehr vernachlässigten *Sternhöhen* für Zeit- und Breitenbestimmungen ziehen kann. Es ist zwar nicht zu läugnen, dass diese Gattung von Beobachtungen, besonders mit Reflexions-Instrumenten, schwieriger ist, und mehr Übung erfordert, als Sonnen-Beobachtungen: indess ist es eben so gewiss, dass diese Schwierigkeiten nicht unüberwindlich sind, und dass die darauf gewandte Mühe sich in sehr vielen Fällen vielfach belohnt. Vorzüglich ist die Anwendung der Sternhöhen reisenden Beobachtern und Seefahrern sehr zu empfehlen, nicht bloss desswegen, weil sie die oft vereitelten Sonnenhöhen oftmals ersetzen können, sondern auch, weil jene einen wichtigen Vortheil geben können, den man entbehren muss, wenn man sich auf letztere einschränkt. Durch einzelne Sonnenhöhen kann man nur dann die Zeitbestimmung erhalten, wenn man die Breite schon kennt, und umgekehrt muss jene als bekannt vorausgesetzt werden, wenn man die Breite durch eine Sonnenhöhe ausser dem Meridian bestimmen will. Durch die Verbindung zweier Sonnenhöhen kann man allerdings Zeit und Breite zugleich nach bekannten Methoden bestimmen: allein, wenn das Resultat einige Schärfe haben soll, müssen jene Beobachtungen

nothwendig ziemlich weit von einander entfernt sein, wobei also eine gute Uhr ein wesentliches Bedürfniss ist, und zur See ausserdem noch die Bewegung des Schiffes in Betrachtung gezogen werden muss. Dagegen kann man aus der Verbindung der beobachteten Höhe eines Sternes mit der (wenn man will, unmittelbar nachher) beobachteten Höhe eines zweiten Sterns allemal Zeit und Breite zugleich mit grosser Schärfe bestimmen, wenn nur die Sterne selbst schicklich gewählt sind: der Gang der Uhr braucht dabei nur so weit zuverlässig bekannt zu sein, dass man die Zwischenzeit zwischen den beiden Beobachtungen in Sternzeit verwandeln kann. Die Auflösung dieses Problems lässt sich sogleich ohne Mühe auf die Auflösung dreier sphärischer Dreiecke zurückführen, wobei indess der numerische Calcul etwas weitläuftig wird. Hr. Prof. Gauss hat aber eine merklich kürzere Auflösung bloss auf analytischem Wege entwickelt, welche zugleich als eine Bestätigung angesehen werden kann, dass alles, was aus geometrischen Betrachtungen geschlossen wird, immer wenigstens eben so einfach und elegant durch die Analyse gefunden werden kann, wenn diese auf eine schickliche Art angewandt wird. Auch zum practischen Gebrauch wird man die gegenwärtige Auflösung weit bequemer finden, als diejenige welche Hr. Kraft im 13. Bande der *Nova Acta Petropol.* für dasselbe Problem (nur mit der, jedoch unwesentlichen, Einschränkung, dass die beiden Höhenmessungen gleichzeitig sein sollen) gegeben hat: eine noch bequemere indirecte Auflösung verspricht der Verfasser bei einer andern Gelegenheit mitzutheilen. Überdiess enthält die gegenwärtige Abhandlung die Entwickelung der Umstände, auf welche man bei der Wahl der Sterne zu sehen hat, damit die Resultate möglichst genau ausfallen, und die Erläuterung des gelehrten Verfahrens durch die wirkliche Anwendung auf ein paar auf der hiesigen Sternwarte gemessene Sternhöhen, aus denen die Polhöhe mit der von Tob. Mayer festgesetzten auf 7″ übereinstimmend, und die Zeitbestimmung nur um eine halbe Zeitsecunde verschieden von der an demselben Tage auf andere Art ausgemittelten abgeleitet wird.

VERSCHIEDENE AUFSÄTZE

ÜBER

A S T R O N O M I E.

BERECHNUNG DES OSTERFESTES.

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgegeben vom Freiherrn von Zach. August 1800.

Die Absicht dieses Aufsatzes ist nicht, das gewöhnliche Verfahren zur Bestimmung des Osterfestes zu erörtern, das man in jeder Anweisung zur mathematischen Chronologie findet, und das auch an sich leicht genug ist, wenn man einmal die Bedeutung und den Gebrauch der dabei üblichen Kunstwörter, *güldne Zahl*, *Epacte*, *Ostergränze*, *Sonnenzirkel* und *Sonntagsbuchstaben* weiss, und die nöthigen Hülfstafeln vor sich hat: sondern von dieser Aufgabe eine von jenen Hülfsbegriffen unabhängige und blos auf den einfachsten Rechnungs-Operationen beruhende rein analytische Auflösung zu geben. Hoffentlich wird dieselbe nicht allein dem blossen Liebhaber, dem jene Methode nicht geläufig ist, oder der wohl in den Fall kommt, die Bestimmung der Zeit des Osterfestes unter Umständen, wo ihm die nöthigen Hülfsmittel nicht zur Hand sind, oder für ein Jahr, worüber er keinen Kalender nachschlagen kann, auf der Stelle zu wünschen, nicht unangenehm sein, sondern sich auch dem Kenner durch ihre Einfachheit und Geschmeidigkeit empfehlen. Die folgenden Vorschriften, die jeder, der es der Mühe werth hält, leicht wird ins Gedächtniss fassen können, gelten für zwei Jahrhunderte, von 1700 bis 1899; sie können aber auch leicht, durch gehörige Veränderung der darin vorkommenden beständigen Zahlen und mit Beifügung einer unerheblichen Ausnahme, die eine Folge der Einrichtung unsers Kalenders ist, und zufälliger Weise während jenes Zeitraumes nicht Statt findet, für jedes andere gegebene Jahrhundert eingerichtet werden.

I. Man dividire die Zahl des Jahres, für welches man Ostern berechnen will, mit 19, mit 4 und mit 7, und nenne die Reste aus diesen Divisionen, respective a, b und c. Geht eine Division auf, so setzt man den zugehörigen Rest $= 0$; auf die Quotienten wird gar keine Rücksicht genommen. Eben das gilt von den folgenden Divisionen.

II. Man dividire ferner $19a + 23$ mit 30, und nenne den Rest d.

III. Endlich dividire man $2b + 4c + 6d + 3$, oder $2b + 4c + 6d + 4$, je nachdem das vorgegebene Jahr zwischen 1700 und 1799, oder zwischen 1800 und 1899 inclus. liegt, mit 7, und nenne den Rest e.

Alsdann fällt Ostern auf den $22 + d + e^{\text{ten}}$ März, oder wenn $d + e$ grösser als 9 ist, auf den $d + e - 9^{\text{ten}}$ April.

Beispiele. Für das Jahr 1744 findet man bei der Division der Zahl 1744 mit 19 den Rest $15 = a$; die Division mit 4 geht auf, also $b = 0$; die Division mit 7 gibt den Rest $1 = c$. Hieraus wird $19a + 23 = 308$, welches mit 30 dividirt den Rest $8 = d$ gibt. Endlich gibt $2b + 4c + 6d + 3 = 55$ mit 7 dividirt den Rest $6 = e$. Folglich ist Ostern den $22 + 8 + 6^{\text{ten}}$ März, oder den $14 - 9$ d. i. den 5. April.

Für 1800 wird $a = 14$, $b = 0$, $c = 1$; $19a + 23 = 289$, also $d = 19$; $2b + 4c + 6d + 4 = 122$, also $e = 3$; mithin Ostern den $19 + 3 - 9$ d. i. den 13. April.

Für 1818 ist $a = 13$, $b = 2$, $c = 5$; $19a + 23 = 270$, also $d = 0$; $2b + 4c + 6d + 4 = 28$, also $e = 0$, folglich Ostern den 22. März.

In dem letzten Beispiele fällt Ostern auf den möglich frühesten Tag, denn es ist einleuchtend, dass d und e hier ihre möglich kleinsten Werthe haben. Von der andern Seite erhellt, dass Ostern nie später als den $22 + 29 + 6^{\text{ten}}$ März, d. i. den 26. April eintreten könne, da d nicht grösser als 29, und e nicht grösser als 6 werden kann; allein in dem achtzehnten und neunzehnten Jahrhundert kann nie $d = 29$ werden *); der späteste Ostertag ist folglich, während dieses Zeitraumes, der 25. April, welcher Statt hat, wenn zugleich $d = 28$ und $e = 6$ wird. Diese beiden Bedingungen vereinigen sich in den Jahren 1734 und 1886. In andern Jahrhunderten könnte zwar $d = 29$ werden, allein ge-

*) Der Grund davon liegt darin, dass a nur 19 verschiedene Werthe (0, 1, 2 . . . 18) bekommen kann, und folglich auch d nur eben so viele, unter welchen der Werth 29 nicht mit begriffen ist.

rade in diesem Falle tritt die oben erwähnte Ausnahme ein, vermöge welcher alsdann der Werth von d wieder auf 28 heruntergebracht wird, so dass der 25. April der absolut späteste Ostertag ist. Eine weitere Entwickelung dieses Umstandes würde hier zu weitläuftig werden.

Die Analyse, vermittelst welcher obige Formel gefunden wird, beruhet eigentlich auf Gründen der ***höhern Arithmetik***, in Rücksicht auf welche ich mich gegenwärtig noch auf keine Schrift beziehen kann, und lässt sich daher freilich in ihrer ganzen Einfachheit hier nicht darstellen: inzwischen wird doch folgendes hinreichen, um sich von dem Grunde der Vorschriften einen Begriff zu machen und von ihrer Richtigkeit zu überzeugen.

I. Die güldene Zahl eines Jahres unserer Zeitrechnung ist bekanntlich der Rest, der entsteht, wenn man zu der Jahres-Zahl 1 addirt und die Summe mit 19 dividirt; nur muss derselbe $= 19$ gesetzt werden, wenn die Division aufgeht. Daraus folgt leicht, dass $a + 1$ die güldene Zahl des vorgegebnen Jahres sein werde.

II. Die Oster-Gränze, das ist der Tag des Oster-Vollmonds, fällt im 18. und 19. Jahrhundert für ein Jahr, dessen güldne Zahl 1 ist, auf den 13. April, und alsdann den ganzen Zirkel von 19 Jahren hindurch, d. i. bis zum Jahre, dessen güldne Zahl 19 ist, inclus., in jedem Jahre ***entweder*** 11 Tage früher, ***oder*** 19 Tage später, als in dem nächst vorhergehenden, je nachdem sie in diesem ***entweder*** in den April ***oder*** in den März gefallen war, wie man sich leicht aus einer Tafel der Oster-Gränzen überzeugen kann; folglich in dem Jahre, dessen güldne Zahl 2 ist, auf den 2. April, in dem folgenden auf den 22. März, in dem Jahre, dessen güldne Zahl 4 ist, auf den 10. April u. s. f. Hieraus folgt, dass die Oster-Gränze nie ***vor*** den 21. März und nie ***nach*** dem 19. April fällt; nimmt man also an, sie falle für das Jahr, dessen güldne Zahl $a + 1$ ist, auf den $21 + D^{\text{ten}}$ März (indem man die Tage des Aprils auf den März reducirt), so liegt D allemal zwischen Gränzen 0 und 29 inclus. Für $a = 0$ ist also $D = 23$, für $a = 1$ wird $D = 23 - 11$, für $a = 2$ wird $D = 23 - 2 \times 11$, für $a = 3$ wird $D = 23 - 2 \times 11 + 19$ u. s. f.; und allgemein $D = 23 - 11p + 19q$, wo p und q durch die Bedingungen bestimmt werden, dass $p + q = a$ werde und D zwischen die Gränzen 0 und 29 incl. falle. Es wird folglich $D = 23 + 19a - 30p$, woraus man leicht schliesst, dass D der Rest sei, der entsteht, wenn man $23 + 19a$ mit 30 dividirt, folglich $D = d$, oder die Oster-Gränze fällt auf den $21 + d^{\text{ten}}$ März.

III. Ostern selbst fällt nur auf den *ersten* Sonntag *nach* der Oster-Gränze, also wenigstens einen, höchstens sieben Tage später als diese, mithin gewiss nicht vor den $22+d^{\text{ten}}$ März. Nimmt man also an, Ostern falle auf den $22+d+E^{\text{ten}}$ März, so liegt E zwischen den Gränzen 0 und 6 incl., und muss durch die Bedingung bestimmt werden, dass dieser Tag ein Sonntag sei. Diese Bedingung lässt sich rein arithmetisch auf folgende Art ausdrücken: die Zwischenzeit zwischen dem $22+d+E^{\text{ten}}$ März des vorgegebenen Jahres und irgend einem bestimmten Sonntage muss eine durch 7 theilbare Zahl von Tagen (eine volle Anzahl Wochen) ausmachen. Man muss also einen bestimmten Sonntag annehmen; ich wähle dazu den 21. März 1700. Nennt man nun die Zahl des vorgegebenen Jahres A, und i die Anzahl der zwischen 1700 und dem Jahre A enthaltenen Schaltjahre, dieses, wenn es eines ist, eingeschlossen, so wird i zugleich die Anzahl der zwischen den 21. März 1700 und Ostern des Jahres A eingefallenen Schalttage sein, und die Anzahl *aller* Tage vom 21. März 1700 bis zum $22+d+E^{\text{ten}}$ März des Jahres A

$$= 1+d+E+i+365(A-1700)$$

Eben so leicht erhellt, dass zwischen 1700 und 1799 sein werde

$$i = \tfrac{1}{4}(A-b-1700)$$

zwischen 1800 und 1899 hingegen

$$i = \tfrac{1}{4}(A-b-1700)-1.$$

Zur Bestimmung von E hat man also die Bedingung, dass

$$1+d+E+365(A-1700)+\tfrac{1}{4}(A-b-1700)$$

oder

$$d+E+365(A-1700)+\tfrac{1}{4}(A-b-1700)$$

durch 7 theilbar sein müsse, je nachdem das Jahr zwischen 1700 und 1799 oder zwischen 1800 und 1899 fällt. Es muss also auch eine durch 7 theilbare Zahl herauskommen, wenn man ein Vielfaches von 7 zu jener addirt, oder davon abzieht, oder auch jene von einem Vielfachen von 7 abzieht. Ich addire zuvörderst, um den Bruch wegzuschaffen, $\tfrac{7}{4}(A-b-1700)$, welches, wie man leicht sieht, durch 7 theilbar ist; daraus erhalte ich

$$1+d+E+367(A-1700)-2b$$

oder

$$d+E+367(A-1700)-2b$$

Ich ziehe ferner ab $364(A-1700)$, so kommt

$$d+E+3A-5099-2b$$

oder

$$d+E+3A-5100-2b$$

Ferner 5096 addirt gibt

$$d+E+3A-3-2b$$

oder

$$d+E+3A-4-2b$$

Endlich $3A-3c$, welches offenbar durch 7 theilbar ist, abgezogen gibt

$$d+E+3c-3-2b$$

oder

$$d+E+3c-4-2b$$

Dies von $7c+7d$ abgezogen, kommt

$$3+2b+4c+6d-E$$

oder

$$4+2b+4c+6d-E$$

welches also durch 7 theilbar sein muss. Hieraus ist klar, dass E der Rest sein werde, den man erhält, wenn man

$$3+2b+4c+6d$$

oder

$$4+2b+4c+6d$$

mit 7 dividirt, folglich $E=e$.

Es fällt also Ostern auf den $22+d+e^{\text{ten}}$ März, oder (welches einerlei ist) auf den $d+e-9^{\text{ten}}$ April. W. Z. B. W.

Ganz allgemeine Vorschriften zur Berechnung des Osterfestes sowohl nach dem Julianischen, als nach dem Gregorianischen Kalender.

Es entstehe aus der Division	mit	der Rest
der Jahrzahl	19	a
der Jahrzahl	4	b
der Jahrzahl	7	c
der Zahl $19a+M$	30	d
der Zahl $2b+4c+6d+N$	7	e

so fällt Ostern den $22+d+e^{\text{ten}}$ März
oder den $d+e-9^{\text{ten}}$ April

M und N sind Zahlen, die im Julianischen Kalender auf immer, im Gregorianischen hingegen allemal wenigstens 100 Jahre hindurch unveränderliche Werthe haben; und zwar ist in jenem $M=15$. $N=6$; in diesem, von der Einführung desselben bis 1699, $M=22$, $N=2$

von 1700 bis 1799 $M=23$, $N=3$	von 2100 bis 2199 $M=24$, $N=6$
1800 . . . 1899 $M=23$, $N=4$	2200 . . . 2299 $M=25$, $N=0$
1900 . . . 1999 $M=24$, $N=5$	2300 . . . 2399 $M=26$, $N=1$
2000 . . . 2099 $M=24$, $N=5$	2400 . . . 2499 $M=25$, $N=1$

Allgemein findet man im Gregorianischen Kalender die Werthe von M und N für irgend ein gegebenes Jahrhundert von $100k$ bis $100k+99$ durch folgende Regel:

Es gebe

$$k \text{ mit } \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \text{ dividirt die (ganzen) Quotienten } \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$$

wobei auf die Reste keine Rücksicht genommen wird.
Dann ist

$$\begin{Bmatrix} M \\ N \end{Bmatrix} \text{ der } \textit{Rest}, \text{ den man erhält, wenn man } \begin{Bmatrix} 15+k-p-q \\ 4+k-q \end{Bmatrix} \text{ mit } \begin{Bmatrix} 30 \\ 7 \end{Bmatrix} \text{ dividirt.}$$

Beispiel. Für die 100 Jahre von 4700 bis 4799 ist $k=47$, $p=15$, $q=11$; also $15+k-p-q=36$; $4+k-q=40$; also $M=6$. $N=5$. So ist z. B. für das Jahr 4763

$a=13$	$19a+M=253$	$e=3$
$b=3$	$d=13$	Ostern den $13+3-9$ d. i. den 7. April
$c=3$	$2b+4c+6d+N=101$	nach dem Greg. Kalender

Nach dem Julianischen hingegen

$19a+M=262$	$e=2$
$d=22$	Ostern den $22+2-9$ d. i. den
$2b+4c+6d+N=156$	15. April

Von obigen Regeln finden im *Gregorianischen Kalender* einzig und allein folgende zwei Ausnahmen Statt.

I. Gibt die Rechnung Ostern auf den 26. April, so wird dafür *allemal* der 19. April genommen. (z. B. 1609. 1989).

Man sieht leicht, dass dieser Fall nur dann vorkommen kann, wo die Rechnung $d=29$ und $e=6$ gibt; den Werth 29 kann d nur dann erhalten, wenn $11M+11$ mit 30 dividirt einen Rest gibt, der *kleiner* als 19 ist; zu dem Ende muss M einen von folgenden 19 Werthen haben

0, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29

II. Gibt die Rechnung $d=28$, $e=6$, und kommt noch die Bedingung hinzu, dass $11M+11$ mit 30 dividirt einen Rest gibt, der kleiner als 19 ist, so fällt Ostern nicht, wie aus der Rechnung folgt, auf den 25., sondern auf den 18. April. — Man überzeugt sich leicht, dass dieser Fall nur in denjenigen Jahrhunderten eintreten könne, da M einen von folgenden acht Werthen hat:

2, 5, 10, 13, 16, 21, 24, 29

Diese zwei Ausnahmen abgerechnet, sind obige Regeln völlig allgemein.

[Handschriftliche Bemerkung:]
p wird bestimmt als Quotient bei der Division von $8k+13$ mit 25.
Von Ostern bis Michaelis sind im Durchschnitt . . $173\frac{3}{9}\frac{2}{5}$ Tage
und (Ostern ein, Michaelis ausgeschlossen) . . . $25\frac{2}{9}\frac{1}{5}$ Sonntage
$148\frac{1}{9}\frac{1}{5}$ Wochentage
Von Michaelis bis Ostern hingegen . . . . $164\frac{7}{9}\frac{2}{5}\frac{3}{8}$ Wochentage

BERECHNUNG DES JÜDISCHEN OSTERFESTES.

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgegeben vom Freiherrn von Zach. Mai 1802.

Der 15. Nisan des jüdischen Jahrs A, an welchem die Juden ihr Osterfest feiern, fällt in das Jahr $A-3760=B$ der christlichen Zeitrechnung; zur Bestimmung des entsprechenden Monatstages dient folgende rein arithmetische Regel:

Man dividire $12A+17$, oder welches hier einerlei ist, $12B+12$ mit 19, und nenne den Rest a; ferner dividire man A oder B mit 4, und setze den Rest $=b$. Man berechne den Werth

von	oder von	Werth der Decimalbrüche in gemeinen Brüchen
32.0440932	20.0955877	32[illegible] 20[illegible]
$+\ 1.5542418\,a$	$+\ 1.5542418\,a$	1[illegible]
$+\ 0.25\quad b$	$+\ 0.25\quad b$	$\frac{1}{4}$
$-\ 0.003177794\,A$	$-\ 0.003177794\,B$	[illegible]

und setze ihn $=M+m$, so dass M die ganze Zahl und m den (Decimal-)Bruch bedeute. Endlich dividire man $M+3A+5b+5$ oder $M+3B+5b+1$, mit 7, und setze den Rest $=c$. Nun hat man folgende vier Fälle zu unterscheiden:

I. Ist $c=2$ oder 4 oder 6, so fällt Ostern den $M+1^{\text{ten}}$ März *alten Styls*, wofür man den $M-30^{\text{ten}}$ April schreibt, wenn $M>30$ wegen *Adu*.

II. Ist $c=1$, zugleich $a>6$ und ausserdem $m\geqq 0.63287037$ ([illegible] $=$ [illegible]), so fällt Ostern den $M+2^{\text{ten}}$ März *a. St.* wegen *Getred*.

III. Ist $c=0$, zugleich $a>11$ und noch $m\geqq 0.89772376$ ([illegible] $=$ [illegible]), so ist Ostern den $M+1^{\text{ten}}$ März *a. St.* wegen *Batu Thakpad*.

IV. In allen übrigen Fällen ist Ostern den M^{ten} März alten Styls.

Erste Anmerk. Diese Vorschriften dienen zugleich zur Bestimmung des 1 *Tisri* oder Neujahrs, welches allezeit 163 Tage nach Ostern des vorhergehenden Jahres einfällt.

Zweite Anmerk. Das Jahr A ist ein gemeines Jahr (von 12 Monaten), wenn $a<12$, hingegen ein Schaltjahr (von 13 Monaten), wenn $a>11$.

Beispiel zu diesen Vorschriften: $A=5562$ $\qquad B=1802$

$12A+17=66761 \qquad 12B+12=21636$

mit 19 dividirt gibt $a=14$

5562 oder 1802 mit 4 dividirt gibt $b=2$.

Hieraus Werth obiger Formel:	32.0440932	20.0955877
	$+21.7593852$	21.7593852
	$+\ 0.5$	0.5
	-17.6748903	$-\ 5.7263848$
	36.6285881	36.6285881

also $M=36$, $\quad m=0.6285881$,

$$M+3A+5b+5=36+16686+10+5=16737$$
$$M+3B+5b+1=36+\ 5406+10+1=\ 5453$$

mit 7 dividirt gibt $c=0$.

Da m hier kleiner als 0.89772376, so kann die Regel III. hier nicht eintreten, und es ist daher nach IV. Ostern den 36. März alten Styls oder den 48. März neuen Styls, d. i. den 17. April.

In den *meisten* Fällen ist es hinreichend, von obiger Formel nur etwa 2 Decimalstellen zu berechnen.

NOCH ETWAS ÜBER DIE BESTIMMUNG DES OSTERFESTES.

Braunschweigisches Magazin. 1807. September 12.

Die cyclische Berechnung des Osterfestes, wovon einigemal in diesen Blättern die Rede gewesen ist, obgleich an sich nicht schwer, beruhet doch auf Gründen, die gerade nicht jedermann bekannt sind. Sie setzt ferner Hülfstafeln voraus, die auch nicht in eines jeden Händen sind, und wie das Beispiel des Hrn. Superint. Helmuth gezeigt hat, selbst in gedruckten Schriften fehlerhaft sein können. Gleichwohl tritt nicht selten der Fall ein, wo man gern für ein künftiges Jahr, oder für ein vergangenes, wofür man keinen Kalender zur Hand hat, das Datum des Ostertages wissen möchte. Manchem wird daher die Kenntniss eines besondern Verfahrens zur Bestimmung des Osterfestes nicht unwillkommen sein, wobei man von den Gründen und Kunstwörtern der cyclischen Berechnungsart gar nichts zu wissen braucht, keiner Hülfstafeln bedarf, und blos ein Paar ganz einfache Rechnungsoperationen zu machen hat. Ich habe diese Methode bereits vor sieben Jahren in des Hrn. von Zach *Monatlicher Correspondenz* (Augustheft 1800) mitgetheilt; da sie indess von den Lesern dieses Magazins wohl nur wenigen bekannt geworden sein wird, so ist vielleicht diesem und jenem damit gedient, hier das Nothwendigste von jenem Verfahren von neuem erklärt zu finden. Ich begnüge mich indess, hier die Regeln zur Bestimmung des Osterfestes im Gregorianischen Kalender für das gegenwärtige Jahrhundert, die nächst-

künftigen und die vergangenen, auf eine auch dem Ungeübtesten fassliche Art vorzutragen, wozu ich noch die Regeln für dieselbe Rechnung im Julianischen Kalender beifügen werde. Die Erweiterung der Regeln für die spätern Jahrhunderte, so wie ihren Zusammenhang mit der ursprünglichen Einrichtung unsers Kalenders muss man am angeführten Orte nachlesen. [S. 75. d. B.]

Zur Bestimmung des Osterfestes für jedes beliebige Jahr des gegenwärtigen Jahrhunderts von 1800 bis 1899 incl. hat man folgende Regeln zu beobachten:

1°. Die Jahrzahl wird mit 19 dividirt; auf den Quotienten wird gar keine Rücksicht genommen, sondern nur der übrig bleibende Rest bemerkt, den wir, um ihn von denjenigen Resten zu unterscheiden, die sich bei den folgenden Operationen ergeben werden, den *ersten* Rest nennen wollen. Falls die Division aufgeht, wird 0 als Rest angenommen, was auch bei den übrigen Divisionen zu bemerken ist.

2°. Dieser erste Rest wird mit 19 multiplicirt, zum Producte 23 hinzugefügt, und diese Summe mit 30 dividirt; auch hier wird blos der Rest bemerkt, den wir den *zweiten* Rest nennen.

3°. Die Jahrzahl wird mit 4 dividirt; der Rest soll der *dritte* Rest heissen.

4°. Man mache eine Summe aus der vierfachen Jahrzahl, dem sechsfachen zweiten Reste, dem doppelten dritten und der Zahl 4; diese Summe mit 7 dividirt, gibt uns den *vierten* Rest.

5°. Die Summe des zweiten und vierten Restes zeigt nunmehr an, wie viele Tage Ostern nach dem 22. März eintrifft. So oft also diese Summe nicht über 9 geht, fällt Ostern noch in den März, und das Datum ergibt sich, wenn man zu der gedachten Summe 22 addirt. Ist aber jene Summe grösser als 9, so fällt Ostern in den April, und das Datum erhält man, indem man von der erwähnten Summe 9 abzieht.

Ich will diese Regeln mit ein Paar Beispielen erläutern. Es sei zuerst Ostern für das Jahr 1801 zu berechnen. Hier gibt

nach der ersten Regel die Division mit 19 den Quotienten 94, um welchen wir uns nicht bekümmern, und den Rest 15, welches also der erste Rest ist.

Nach der zweiten Regel wird der neunzehnfache erste Rest 285; dazu 23 addirt, gibt 308; dies mit 30 dividirt, bleibt der zweite Rest 8.

Nach der dritten Regel wird der dritte Rest 1.

Nach der vierten Regel addiren wir die vierfache Jahrzahl	7204
den sechsfachen zweiten Rest	48
den doppelten dritten Rest .	2
und die Zahl	4
gibt Summe	7258

Diese mit 7 dividirt, bleibt der vierte Rest 6.

Nach der fünften Regel endlich haben wir die Summe des zweiten und vierten Restes 14; da diese um 5 grösser ist als 9, so fällt Ostern den 5. April. — Der grüne Donnerstag dieses Jahrs, dessen Andenken jetzt durch die Geschichte des Tages wieder erneuert wird, fiel also auf den 2. April.

Für das Jahr 1808, welches dem Hrn. Superint. HELMUTH zu seinem Aufsatze Veranlassung gegeben hat, findet sich auf gleiche Weise

nach der ersten Regel der Rest 3.

nach der zweiten Regel das neunzehnfache des ersten Restes 57, dazu 23 gibt 80; hieraus der zweite Rest 20.

nach der dritten Regel der dritte Rest 0.

Nach der vierten Regel haben wir zu addiren 7232, 120, 0 und 4, gibt die Summe 7356, also der vierte Rest 6.

Nach der fünften Regel erhalten wir die Summe 26; davon also 9 abgezogen, ergibt sich der 17. April als das Datum des Ostertags.

Nach diesen Erläuterungen wird jeder, dem nur die vier Species bekannt sind, die Rechnung für andere Jahre ohne Weiteres machen können.

So wie diese Regeln oben gegeben sind, gelten sie für die hundert Jahre von 1800 bis 1899, für andere Jahrhunderte erleiden sie aber einige Abänderungen. In dem vergangenen Jahrhundert von 1700 bis 1799 findet weiter kein Unterschied Statt, als dass in derjenigen Summe, die nach der vierten Regel zu machen ist, anstatt der Zahl 4 die Zahl 3 genommen werden muss. In dem siebenzehnten Jahrhundert hingegen, oder vielmehr von 1583 (wo Ostern zum erstenmal nach der neuen Einrichtung bestimmt wurde) bis 1699 muss nicht nur in der ebengedachten vierten Regel anstatt der Zahl 4 die Zahl 2 gebraucht, sondern noch ausserdem in der zweiten Regel zu dem 19fachen ersten Reste nicht 23 sondern 22 hinzugefügt werden. Alles übrige bleibt ungeändert. Blos eben diese beiden Punkte betreffen nun auch die Abänderungen, die in den nächstkünftigen Jahrhunderten zu machen sind. Nemlich statt der Zahl 23, die in der

ersten Regel für das achtzehnte und neunzehnte Jahrhundert gilt, hat man im zwanzigsten, ein und zwanzigsten und zwei und zwanzigsten die Zahl 24, im drei und zwanzigsten 25, im vier und zwanzigsten 26, im fünf und zwanzigsten wieder 25 zu setzen; und statt der Zahl 4, die bei der vierten Regel im neunzehnten, oder 3, welche im achtzehnten Jahrhundert gebraucht wird, muss man nehmen

im zwanzigsten und ein und zwanzigsten	5
im zwei und zwanzigsten	6
im drei und zwanzigsten	0
im vier und zwanzigsten und fünf und zwanzigsten	1

Die allgemeinen Regeln für diese Abänderungen findet man am angef. Orte der Mon. Corresp. [S. 78. d. B.]

Ich habe nur noch zu bemerken, dass die Einrichtung der Epactentafel im Gregorianischen Kalender so gemacht ist, dass in einzelnen Jahren von den obigen Regeln zweierlei Ausnahmen Statt finden können. Die erste besteht darin, dass allemal, wo der zweite Rest 29 und der vierte Rest 6 wird, und wo also nach der fünften Regel Ostern den 26. April sein sollte, dieses Fest eine Woche früher gefeiert wird, also den 19. April. Dieser Fall ist aber bisher nur einmal eingetreten, nemlich im Jahre 1609, und wird sich nicht eher wieder begeben als im Jahr 1981. Die zweite Ausnahme kann Statt finden, wenn der zweite Rest 28 und der vierte 6 wird, wo also nach der fünften Regel Ostern am 25sten April sein sollte, aber wirklich auf den 18. April versetzt wird, doch nur dann wenn der erste Rest nicht unter 11 war, in welchem Fall die Ausnahme nicht Statt findet, sondern Ostern auf dem 25. April bleibt. Diese zweite Ausnahme ist aber bisher noch nie eingetreten, und wird zum erstenmale erst im Jahr 1954 vorkommen.

Alles Vorhergehende betrifft die Berechnung des Osterfestes im Gregorianischen Kalender. Im Julianischen Kalender bedürfen die obigen fünf Regeln weiter keiner Abänderung, als dass in der zweiten Regel statt der Zahl 23 die Zahl 15, und in der vierten Regel statt 4 die Zahl 6 gebraucht werden muss. Mit diesen Änderungen gelten die Regeln denn allgemein für alle Jahrhunderte. Auch diese Rechnung will ich mit einem Beispiel erläutern. Für das Jahr 1808 hatten wir nach der ersten Regel, welche ungeändert bleibt, den ersten Rest 3. Dieser mit 19 multiplicirt und 15 addirt gibt 72, also mit 30 dividirt, wird der zweite Rest 12. Der dritte Rest ist wie oben 0. Nach der vierten Regel haben wir nun zu addiren 7232, 72, 0 und 6, welches gibt 7310, also der vierte Rest 2. Dessen Summe mit dem zweiten Rest wird 14, wovon nach der fünften Regel 9 abgezogen der Rest 5 bleibt. Ostern ist also den 5. April nach dem Julianischen Styl, welches der 17. April nach dem Gregorianischen ist. In diesem Jahr fällt also Ostern zufälligerweise in beiden Kalendern auf einerlei Tag, obwohl der Julianische ein 12 Tage kleineres Datum zählt.

Es lässt sich übrigens zeigen, dass im 143. Jahrhundert, d. i. von 14200 bis 14299 Ostern in beiden Kalendern immer auf einerlei Datum fallen würde, wenn dieselben so lange ungeändert im Gebrauch bleiben sollten, was freilich nicht zu erwarten ist. Einerlei Datum würde aber alsdann in den beiden Kalendern immer um 15 volle Wochen auseinander sein, und also die Julianischen Ostern um 15 Wochen später eintreten als die Gregorianischen. Mit dem Jahre 14300 hört diese Übereinstimmung wieder auf, um 43200 von neuem anzufangen, wo aber der Unterschied 46 Wochen betragen würde.

Schliesslich bemerke ich, dass im Maiheft der Mon. Corresp. 1802 [S. 80. d. B.] auch eine rein arithmetische Regel für die Berechnung des jüdischen Osterfestes gegeben ist, deren Anwendung von aller weitern Bekanntschaft mit der Einrichtung des jüdischen Kalenders unabhängig ist.

VORSCHRIFTEN, UM AUS DER GEOCENTRISCHEN LÄNGE UND BREITE EINES HIMMELSKÖRPERS, DEM ORTE SEINES KNOTENS, DER NEIGUNG DER BAHN, DER LÄNGE DER SONNE UND IHREM ABSTANDE VON DER ERDE ABZULEITEN: DES HIMMELSKÖRPERS HELIOCENTRISCHE LÄNGE IN DER BAHN, WAHREN ABSTAND VON DER SONNE UND WAHREN ABSTAND VON DER ERDE.

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgegeben vom Freiherrn von Zach. Juni 1802.

Bedeutung der Zeichen:

Gegeben:

Ω Länge des aufsteigenden Knotens.
$\odot$ Länge der Sonne.
α Geocentrische Länge des Himmelskörpers.
β Geocentrische Breite.
i Neigung der Bahn.
R Abstand der Sonne von der Erde.

Gesucht:

υ heliocentr. Länge des Himmelskörpers in der Bahn.
r Wahrer Abstand von der Sonne.
Δ Wahrer Abstand von der Erde.
$\left.\begin{array}{l} A \\ B \\ C \text{ etc.} \end{array}\right\}$ Hülfswinkel.

I.

$$1^0 \quad \frac{\cos(\odot-\Omega)\operatorname{tang}\beta}{\sin(\odot-\alpha)} = \operatorname{tang} A \qquad \frac{\sin A \operatorname{tang}(\odot-\Omega)}{\sin(A+i)} = \operatorname{tang}(\upsilon-\Omega)$$

$$2^0 \quad \frac{\sin(\odot-\alpha)\operatorname{tang} i}{\cos(\odot-\Omega)} = \operatorname{tang} B \qquad \frac{\cos B \sin\beta \operatorname{tang}(\odot-\Omega)}{\sin(B+\beta)\cos i} = \operatorname{tang}(\upsilon-\Omega)$$

$$3^0 \quad \frac{\sin(\odot-\Omega)\operatorname{tang}\beta}{\sin(\odot-\alpha)\operatorname{tang} i} = \operatorname{tang} C \qquad \frac{\sin C \sin(\odot-\Omega)}{\sin(C+\odot-\Omega)\cos i} = \operatorname{tang}(\upsilon-\Omega)$$

$$4^0 \quad \frac{\cos(\odot-\Omega)\operatorname{tang}\beta}{\cos(\odot-\alpha)\operatorname{tang} i} = \operatorname{tang} D \qquad \frac{\sin D \operatorname{tang}(\odot-\Omega)\cos(\odot-\alpha)}{\sin(D+\odot-\alpha)\cos i} = \operatorname{tang}(\upsilon-\Omega)$$

Anmerkung: Da Winkel, die um 180^0 verschieden sind, einerlei Tangenten haben, so ist hier noch eine Vorschrift nöthig, wie die durch ihre Tangenten bestimmten Winkel A, B, C etc. und $\upsilon-\Omega$ angesetzt werden müssen. Den Winkel $\upsilon-\Omega$ hat man allezeit zwischen 0 und 180^0 anzunehmen, wenn β

positiv (nördlich) ist; ist hingegen die Breite südlich, so muss $\upsilon - \Omega$ zwischen 180^0 und 360^0, oder was einerlei ist, zwischen -180^0 und 0 fallen. Ist $\beta = 0$, so ist der Himmelskörper in einem Knoten, und man wird nie zweifelhaft sein, ob es Ω oder $\mho$ ist *). Die Hülfswinkel, A, B, C, D aber, so wie die folgenden E, F etc., kann man in dieser Hinsicht ganz nach Belieben ansetzen; wobei es sich jedoch von selbst versteht, dass man auf die Zeichen $\pm$ gehörige Rücksicht nehme; ich habe sie in folgendem Beispiele immer zwischen -90^0 und $+90^0$ genommen. — Logarithmen, deren zugehörige Grössen negativ sind, habe ich durch ein beigeschriebenes n ausgezeichnet.

II.

5° $$\frac{\tan \beta}{\sin(\alpha - \Omega)} = \tan E \qquad \frac{\sin E \sin(\odot - \Omega)}{\sin(i - E)\sin(\upsilon - \Omega)} = \frac{r}{R}$$

6° $$\tan i \sin(\alpha - \Omega) = \tan F \qquad \frac{\cos F \sin(\odot - \Omega)\sin\beta}{\sin(F - \beta)\sin(\upsilon - \Omega)\cos i} = \frac{r}{R}$$

7° $$\cos i \tan(\upsilon - \Omega) = \tan G \qquad \frac{\cos G \sin(\odot - \alpha)}{\sin(\alpha - \Omega - G)\cos(\upsilon - \Omega)} = \frac{r}{R}$$

8° $$\frac{\tan(\alpha - \Omega)}{\cos i} = \tan H \qquad \frac{\sin H \sin(\odot - \alpha)}{\sin(H - (\upsilon - \Omega))\sin(\alpha - \Omega)} = \frac{r}{R}$$

9° $$\frac{\tan\beta}{\sin i \cos(\alpha - \Omega)} = \tan I \qquad \frac{\sin I \cos(\odot - \Omega)}{\sin(\upsilon - \Omega - I)} = \frac{r}{R}$$

10° $$\sin i \cos(\alpha - \Omega)\tan(\upsilon - \Omega) = \tan K \qquad \frac{\cos K \sin\beta \cos(\odot - \Omega)}{\sin(K - \beta)\cos(\upsilon - \Omega)} = \frac{r}{R}$$

11° $$\frac{\sin C \sin(\odot - \alpha)}{\cos(C + \odot - \alpha)\tan(\odot - \Omega)\cos i} = \tan L \qquad \frac{\sin L}{\sin(\upsilon - \Omega - L)\cos(\odot - \Omega)} = \frac{r}{R}$$

12° $$\frac{\sin D \cos(\odot - \Omega)}{\cos(D + \odot - \Omega)\cos i} = \tan M \qquad \frac{\sin M}{\sin(\upsilon - \Omega - M)\cos(\odot - \Omega)} = \frac{r}{R}$$

III.

13° $$\frac{r \sin(\upsilon - \Omega)\sin i}{\sin\beta} = \Delta$$

14° $$\frac{R \sin E \sin(\odot - \Omega)\sin i}{\sin(i - E)\sin\beta} = \frac{R\cos E \sin(\odot - \Omega)\sin i}{\sin(i - E)\sin(\alpha - \Omega)\cos\beta} = \Delta$$

15° $$\frac{R\cos F \sin(\odot - \Omega)\tan i}{\sin(F - \beta)} = \frac{R \sin F \sin(\odot - \Omega)\sin(\alpha - \Omega)}{\sin(F - \beta)} = \Delta$$

Und so lassen sich noch mehrere Ausdrücke für Δ aus der Verbindung von 13^0 mit allen Formeln II ableiten.

---

*) Der analytischen Vollständigkeit wegen bemerke ich, dass in diesem Falle der Himmelskörper in $\left\{\begin{matrix}\Omega\\ \mho\end{matrix}\right\}$ ist, je nachdem $\sin(\odot - \alpha)$ und $\sin(\alpha - \Omega)$ $\left\{\begin{matrix}\text{einerlei}\\ \text{entgegengesetzte}\end{matrix}\right\}$ Zeichen haben.

Beispiel.

$\Omega = 80^0\ 59'\ 12''07$
$\odot = 281\ \ 1\ \ 34.99$
$\alpha = 53\ \ 23\ \ 2.46$
$i = 10\ \ 37\ \ 9.55$
$\log \tan\beta = 8.7349698\,\text{n} \qquad \beta = -3^0\ 6'\ 33''561$ negativ oder südlich
$\log R = 9.9926158$

Folglich $\odot - \Omega = 200^0\ 2'\ 22''92$
$\odot - \alpha = 227\ \ 38\ \ 32.53$
$\alpha - \Omega = -27\ \ 36\ \ 9.61$

1°.

$\log \tan\beta$	8.7349698 n		
$\log \cos(\odot - \Omega)$	9.9728762 n		
Compl. $\log \sin(\odot - \alpha)$	0.1313827 n		
$\log \tan A$	8.8392287 n	folglich	$A = -3^0\ 57'\ 2''136$
$\log \sin A$	8.8381955 n		$A + i = 6\ \ 40\ \ 7.414$
$\log \tan(\odot - \Omega)$	9.5620014		
Compl. $\log \sin(A + i)$	0.9350608		
$\log \tan(\upsilon - \Omega)$	9.3352577 n	ferner	$\upsilon - \Omega = -12^0\ 12'\ 37''942$
		also	$\upsilon = 68\ \ 46\ \ 34.128$

2°.

$\log \sin(\odot - \alpha)$	9.8686173 n		
$\log \tan i$	9.2729872		
Compl. $\log \cos(\odot - \Omega)$	0.0271238 n		
$\log \tan B$	9.1687283	folglich	$B = 8^0\ 23'\ 21''888$
$\log \cos B$	9.9953277		$B + \beta = 5\ \ 16\ \ 48.327$
$\log \sin\beta$	8.7343300 n		
$\log \tan(\odot - \Omega)$	9.5620014		
Compl. $\log \sin(B + \beta)$	1.0360961		
Compl. $\log \cos i$	0.0075025		
$\log \tan(\upsilon - \Omega)$	9.3352577 n	wie oben	

3°.

log sin $(\odot-\Omega)$	9.5348776 n		
log tang σ	8.7349698 n		
Compl. log sin $(\odot-\alpha)$.	0.1313827 n		
Compl. log tang i . . .	0.7270128		
log tang C	9.1282429 n	also	$C = -\;7^{0}\;39'\;7''056$
log sin C	9.1243583 n		$C+\odot-\Omega = 192\;\;23\;\;15.864$
log sin $(\odot-\Omega)$	9.5348776 n		
Compl. log sin $(C+\odot-\Omega)$	0.6685194 n		
Compl. log cos i	0.0075025		
log tang $(\upsilon-\Omega)$	9.3352578 n	wie vorhin.	

4°.

log cos $(\odot-\Omega)$	9.9728762 n		
log tang σ	8.7349698 n		
Compl. log cos $(\odot-\alpha)$.	0.1714973 n		
Compl. log tang i	0.7270128		
log tang D	9.6063561 n	also	$D = -21^{0}\;59'\;51''182$
log sin D	9.5735295 n		$D+\odot-\alpha = 205\;\;38\;\;41.348$
log tang $(\odot-\Omega)$ . . .	9.5620014		
log cos $(\odot-\alpha)$	9.8285027 n		
Compl. log sin $(D+\odot-\alpha)$	0.3637217 n		
Compl. log cos i	0.0075025		
log tang $(\upsilon-\Omega)$	9.3352578 n	wie oben.	

5°.

log tang σ	8.7349698 n		
log sin $(\alpha-\Omega)$	9.6658973 n		
log tang E	9.0690725	also	$E = 6^{0}\;41'\;12''412$
log sin E	9.0661081		$i-E = 3\;\;55\;\;57.138$
log sin $(\odot-\Omega)$	9.5348776 n		
Compl. log sin $(i-E)$.	1.1637907		
Compl. log sin $(\upsilon-\Omega)$.	0.6746802 n		ferner
log $\frac{r}{R}$	0.4394566		$\log r = \log R + \log \frac{r}{R} = 0.4320724$

6°.

log tang i	9.2729872		
log sin $(\alpha-\Omega)$	9.6658973 n		
log tang F	8.9388845 n	daher	$F = -4^{0}\;57'\;53''955$
log cos F	9.9983674		$F-\sigma = -1\;\;51\;\;20.394$
log sin σ	8.7343300 n		
log sin $(\odot-\Omega)$	9.5348776 n		
Compl. log sin $(F-\sigma)$.	1.4896990 n		
Compl. log sin $(\upsilon-\Omega)$.	0.6746802 n		
Compl. log cos i	0.0075025		
log $\frac{r}{R}$	0.4394567	nahe wie vorher.	

7°.

log cos i	9.9924975		
log tang $(\upsilon-\Omega)$	9.3352577 n		
log tang G	9.3277552 n	also	$G = -12^{0}\;\;0'\;\;27''148$
log cos G	9.9903922		$\alpha-\Omega-G = -15\;\;35\;\;42.492$
log sin $(\odot-\alpha)$	9.8686173 n		
Compl. log sin $(\alpha-\Omega-G)$	0.5705092 n		
Compl. log cos $(\upsilon-\Omega)$.	0.0099379		
log $\frac{r}{R}$	0.4394566	wie oben.	

8°.

log tang $(\alpha-\Omega)$	9.7183744 n		
log cos i	9.9924975		
log tang H	9.7258769 n	folglich	$H = -28^{0}\;\;0'\;\;39''879$
log sin H	9.6717672 n		$H-(\upsilon-\Omega) = -15\;\;48\;\;1.937$
log sin $(\odot-\alpha)$	9.8686173 n		
Compl. log sin $(H-(\upsilon-\Omega))$	0.5649695 n		
Compl. log sin $(\alpha-\Omega)$.	0.3341027 n		
log $\frac{r}{R}$	0.4394567	wie vorher.	

9^0.

log tang σ	8.7349698 n		
Compl. log sin i	0.7345153		
Compl. log cos $(\alpha - \Omega)$.	0.0524771		
log tang I	9.5219622 n	hieraus	$I = -18^0\ 23'\ 55''334$
log sin I	9.4991749 n		$\upsilon - \Omega - I = \quad 6\ \ 11\ \ 17.392$
log cos $(\odot - \Omega)$ . . .	9.9728762 n		
Compl. log sin $(\upsilon - \Omega - I)$	0.9674054		
$\log \frac{r}{R}$	0.4394565	wie vorhin.	

10^0.

In der Nähe des Knotens weniger scharf.

log sin i	9.2654847		
log cos $(\alpha - \Omega)$	9.9475229		
log tang $(\upsilon - \Omega)$	9.3352577 n		
log tang K	8.5482653 n	also	$K = -2^0\ 1'\ 26''344$
log cos K	9.9997290		$K - \sigma = \quad 1\ \ 5\ \ 7.217$
log sin σ	8.7343300 n		
log cos $(\odot - \Omega)$	9.9728762 n		
Compl. log sin $(K - \sigma)$.	1.7225836		
Compl. log cos $(\upsilon - \Omega)$.	0.0099379		
$\log \frac{r}{R}$	0.4394567	wie vorhin.	

11^0.

$$C + \odot - \alpha = 219^0\ 59'\ 25''474$$

log sin C	9.1243583 n		
log sin $(\odot - \alpha)$	9.8686173 n		
Compl. log cos $(C + \odot - \alpha)$	0.1156850 n		
Compl. log tang $(\odot - \Omega)$	0.4379986		
Compl. log cos i	0.0075025		
log tang L	9.5541617 n	also	$L = -19^0\ 42'\ 32''533$
log sin L	9.5279439 n		$\upsilon - \Omega - L = \quad 7\ \ 29\ \ 54.591$
Compl. log sin $(\upsilon - \Omega - L)$	0.8843888		
Compl. log cos $(\odot - \Omega)$.	0.0271238 n		
$\log \frac{r}{R}$	0.4394565	wie zuvor.	

12^0.

$$D + \odot - \Omega = 178^0\ 2'\ 31''738$$

log sin D	9.5735295 n	
log cos $(\odot - \Omega)$	9.9728762 n	
Compl. log cos $(D + \odot - \Omega)$	0.0002536 n	
Compl. log cos i	0.0075025	
log tang $(M = L)$ . . .	9.5541618 n	wie oben in 11^0.

Der übrige Theil der Rechnung eben so wie dort.

13^0.

log r	0.4320724
log sin $(\upsilon - \Omega)$	9.3253198 n
log sin i	9.2654847
Compl. log sin σ	1.2656700 n
log Δ	0.2885469

EINIGE BEMERKUNGEN ZUR VEREINFACHUNG DER RECHNUNG FÜR DIE GEOCENTRISCHEN ÖRTER DER PLANETEN.

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgegeben vom Freiherrn von Zach. Mai 1804.

Seit der Erfindung der Pendeluhren beziehen sich alle unsere Beobachtungen der Fixsterne, Planeten und Cometen nicht auf ihre Lage gegen die Ecliptik, sondern unmittelbar auf ihre Lage gegen den Äquator. In unsern neuesten und besten Sternverzeichnissen und Sternkarten sind gleichfalls nicht Länge und Breite, sondern Rectascension und Declination zum Grunde gelegt. Man hat daher sehr häufig Veranlassung, für Planeten und Cometen ihre geocentrischen Örter in Beziehung auf den Äquator aus ihren heliocentrischen Örtern in ihrer Bahn zu berechnen; und man würde diese Veranlassung noch häufiger haben, wenn man sich entschlösse, in den astronomischen Ephemeriden anstatt der wenig nutzenden Längen und Breiten der Planeten durchgängig die in jeder practischen Hinsicht viel brauchbarern geraden Aufsteigungen und Abweichungen anzusetzen. Dies hat der vortreffliche Römer bereits vor hundert Jahren angerathen*), und besonders wird es ganz unentbehrlich für die beiden neuesten Planeten, die so schwer zu beobachten, und nur vermittelst sehr detaillirter Himmelskarten aus den sie umgebenden kleinen Fixsternen herauszufinden sind. Eben so häufig würde die allgemeinere Befolgung eines andern Vorschlages zu jener Rechnung Gelegenheit geben, nemlich bei Vergleichung des beobachteten Orts

*) In einem Briefe an Leibnitz. Horrebowii Opera T. II p. 142.

eines Planeten oder Cometen mit dem berechneten unmittelbar die beobachtete gerade Aufsteigung und Abweichung zum Grunde zu legen, und nicht erst, wie gewöhnlich geschieht, aus diesen eine sogenannte beobachtete Länge und Breite abzuleiten. Die mit diesem Verfahren verbundenen Vortheile sind bereits von einem competenten Richter im V. Bande der Mon. Corr. S. 594 erwähnt worden.

Aus diesem Gesichtspunkte hat man die geocentrische Länge und Breite des Planeten nur als Mittelgrössen anzusehen, um seine Lage gegen den Äquator zu finden. Es wird daher obigen Vorschlägen vielleicht zu einer Empfehlung mehr dienen, dass man dieser Zwischenrechnung, ja selbst der Reduction des heliocentrischen Orts in der Bahn auf den heliocentrischen Ort in Beziehung auf die Ecliptik ganz überhoben sein, und durch sehr einfache und geschmeidige Formeln, welche in gegenwärtigem Aufsatze entwickelt werden sollen, aus jenem die geocentrische Rectascension und Declination unmittelbar ableiten kann. Zu diesen Vortheilen kann man noch die grosse Leichtigkeit hinzufügen, womit sich bei diesem Verfahren die *Parallaxe* auch in dem Falle mit in Rechnung bringen lässt, wenn der Planet sich ausser dem Meridiane des Beobachtungsorts befindet, welches zwar seltener nöthig, dann aber auch bei andern Methoden ungleich beschwerlicher ist.

Durch den Mittelpunkt der Sonne lege man drei auf einander senkrechte Ebenen, die eine parallel mit dem Erd-Äquator, die zweite durch die Punkte der Nachtgleichen, also die dritte durch die Punkte der Sonnenwenden. Es heissen die senkrechten Abstände des Mittelpunkts der Erde von diesen drei Ebenen respective Z, Y, X, und die Abstände eines Planeten von eben denselben z, y, x. Diese Abstände sollen als positiv angenommen werden bei der ersten Ebene auf der Seite, wo der Nordpol liegt, bei der zweiten auf der Seite der Sommer-Sonnenwende, bei der dritten auf der Seite der Frühlings-Nachtgleiche. Es werden demnach $z-Z$, $y-Y$, $x-X$ die auf ähnliche Art genommenen senkrechten Abstände des Planeten von dreien, den obigen parallel durch den Mittelpunkt der Erde gelegten Ebenen sein. Bezeichnet man also die geocentrische gerade Aufsteigung des Planeten durch α, seine Abweichung durch δ, den Abstand von der Erde durch Δ, so wird

$$x-X = \Delta\cos\delta\cos\alpha$$
$$y-Y = \Delta\cos\delta\sin\alpha$$
$$z-Z = \Delta\sin\delta$$

Man findet folglich α durch die Formel $\tang \alpha = \frac{y-Y}{x-X}$, wo das positive oder negative Zeichen des Zählers entscheiden muss, ob α in den beiden ersten oder in den beiden letzten Quadranten anzunehmen ist. Sodann wird

$$\Delta \cos \delta = \frac{x-X}{\cos \alpha} = \frac{y-Y}{\sin \alpha}, \quad \text{und} \quad \tang \delta = \frac{z-Z}{\Delta \cos \delta}$$

Auf diese Weise erhält man also die Rectascension und Declination des Planeten aus dem Mittelpunkte der Erde gesehen. Verlangt man dieselben, wie sie aus einem Punkte auf der Oberfläche der Erde erscheinen, so ist in obigen Formeln weiter keine Änderung nöthig, als dass man statt der Coordinaten des Mittelpunkts X, Y, Z, die Abstände des Beobachtungsortes von den drei Fundamental-Ebenen gebrauchen muss. Ist der Halbmesser der Erde $= \rho$ *), die Polhöhe des Beobachtungsorts $= \varphi$, und die Sternzeit, die derselbe im Augenblicke der Beobachtung zählt, im Bogen, oder die gerade Aufsteigung des culminirenden Punkts des Äquators $= \vartheta$: so werden jene Abstände, wie man leicht übersehen wird:

$$\begin{aligned} &X + \rho \cos \varphi \cos \vartheta \\ &Y + \rho \cos \varphi \sin \vartheta \\ &Z + \rho \sin \varphi \end{aligned}$$

Hiebei ist die Erde als eine Kugel angenommen. Fände man es nöthig, auch auf die sphäroidische Gestalt der Erde Rücksicht zu nehmen (welcher Fall bei Cometen eintreten könnte, die der Erde sehr nahe kämen), so dürfte man nur für ρ die Entfernung des Beobachtungsorts vom Mittelpunkte der Erde, und für φ seine sogenannte verbesserte Polhöhe setzen, die nach bekannten Regeln bestimmt werden.

Man sieht jetzt also, dass es lediglich darauf ankommt, eine bequeme Methode zur Bestimmung der Coordinaten X, Y, Z, x, y, z aufzusuchen. In dieser Absicht sei um die Sonne eine Kugelfläche mit unbestimmtem Halbmesser beschrieben; auf derselben bezeichne P den Nordpol der Ecliptik, p den Nordpol der Ebene der Planeten-Bahn; K den Ort der Erde, k den heliocentrischen Ort des Planeten; endlich $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ diejenigen Pole der drei Fundamental-Ebenen, die auf der Seite liegen, wo die Abstände x, y, z positiv genommen wer-

*) Dieser ist also dem Sinus der mittleren Horizontal-Parallaxe der Sonne gleich, wenn die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Einheit angenommen wird.

den: also $\mathfrak{Z}$ den Nordpol des Äquators, $\mathfrak{X}$ den Punkt der Frühlings-Nachtgleiche, $\mathfrak{Y}$ den Punkt des Äquators, der 90^0 Rectascension hat (eine Figur wird sich hienach jeder, der es nöthig findet, leicht selbst entwerfen können). Setzen wir nun den Abstand der Erde von der Sonne $= R$, so wird offenbar

$$\begin{aligned} X &= R \cos \mathfrak{X} K \\ Y &= R \cos \mathfrak{Y} K \\ Z &= R \cos \mathfrak{Z} K \end{aligned}$$

Folglich, da in dem sphärischen Dreiecke $\mathfrak{X}PK$ die Seite $PK = 90^0$, also $\cos \mathfrak{X}K = \sin \mathfrak{X}P \cos \mathfrak{X}PK$ ist,

$$\begin{aligned} X &= R \sin \mathfrak{X}P \cos \mathfrak{X}PK, \quad \text{und eben so} \\ Y &= R \sin \mathfrak{Y}P \cos \mathfrak{Y}PK \quad \text{und} \\ Z &= R \sin \mathfrak{Z}P \cos \mathfrak{Z}PK \end{aligned}$$

Ganz auf ähnliche Weise werden die Coordinaten des Planeten, wenn wir dessen Abstand von der Sonne durch r bezeichnen,

$$\begin{aligned} x &= r \sin \mathfrak{X}p \cos \mathfrak{X}pk \\ y &= r \sin \mathfrak{Y}p \cos \mathfrak{Y}pk \\ z &= r \sin \mathfrak{Z}p \cos \mathfrak{Z}pk \end{aligned}$$

Wir bemerken hier ein für allemal, dass wir den sphärischen Winkel $\mathfrak{X}PK$ so verstanden wissen wollen, wie der Schenkel PK auf den Schenkel $P\mathfrak{X}$ *nach der Ordnung der Zeichen folgt*, so dass also derselbe mit $KP\mathfrak{X}$ nicht gleichbedeutend sein soll, sondern beide einander zu 360^0 ergänzen. Eben so soll jeder andere sphärische Winkel zu verstehen sein. Durch eine solche nähere Bestimmung gewinnen wir den Vortheil, dass die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie sich ohne weiteres auch auf Dreiecke mit Winkeln über 180^0 ausdehnen lassen, und weichen so der sonst Statt findenden Nothwendigkeit aus, mehrere einzelne Fälle unterscheiden zu müssen. Übrigens werden Winkel, deren Unterschied 360^0 oder ein Vielfaches davon beträgt, jederzeit als gleichbedeutend angesehen werden.

Wir nehmen nun zuvörderst die Coordinaten X, Y, Z vor, und setzen die Schiefe der Ecliptik $= \varepsilon$, die heliocentrische Länge der Erde $= \lambda$ ($=$ geocentrische Länge der Sonne $+180^0$). In obigen Formeln wird also $\mathfrak{X}P = 90^0$, $\mathfrak{Y}P = 90^0 + \varepsilon$, $\mathfrak{Z}P = \varepsilon$, $\mathfrak{X}PK = \lambda$, $\mathfrak{Y}PK = \mathfrak{Z}PK = \lambda - 90^0$, folglich

$$X = R\cos\lambda$$
$$Y = R\sin\lambda\cos\varepsilon$$
$$Z = R\sin\lambda\sin\varepsilon$$

Für den Planeten setzen wir Kürze halber $\mathfrak{X}p = a$, $\mathfrak{Y}p = b$, $\mathfrak{Z}p = c$, seine Entfernung in der Bahn vom aufsteigenden Knoten auf der Ecliptik $= t$, und die Winkel $\mathfrak{X}pP$, $\mathfrak{Y}pP$, $\mathfrak{Z}pP$ respective $= A, B, C$. Man wird leicht übersehen, dass $Ppk = t - 90^0$ (oder nach obiger Anmerkung $= t + 270^0$), also $\mathfrak{X}pk = A + t - 90^0$, $\mathfrak{Y}pk = B + t - 90^0$, $\mathfrak{Z}pk = C + t - 90^0$. Es wird demnach

$$x = r\sin a\sin(A+t)$$
$$y = r\sin b\sin(B+t)$$
$$z = r\sin c\sin(C+t)$$

Es bleibt uns jetzt noch übrig, die Grössen a, A u. s. w., die nur von der Lage der Bahn des Planeten, nicht von seinem jedesmaligen Orte in derselben abhängig sind, aus der Neigung der Ebene dieser Bahn und der Länge des aufsteigenden Knotens abzuleiten; wir bezeichnen jene mit i, diese mit Ω. Die Betrachtung des Dreiecks $\mathfrak{X}pP$ gibt uns folgende drei Gleichungen:

$$\operatorname{cotang}\mathfrak{X}pP = \frac{\sin pP\operatorname{cotang}\mathfrak{X}P - \cos pP\cos pP\mathfrak{X}}{\sin pP\mathfrak{X}}$$
$$\cos\mathfrak{X}p = \cos pP\cos\mathfrak{X}P + \sin pP\sin\mathfrak{X}P\cos pP\mathfrak{X}$$
$$\sin\mathfrak{X}p = \frac{\sin\mathfrak{X}P\sin pP\mathfrak{X}}{\sin\mathfrak{X}pP}$$

Eben so geben die Dreiecke $\mathfrak{Y}pP$, $\mathfrak{Z}pP$ jedes drei ähnliche Gleichungen, welche hier herzusetzen unnöthig ist, da man, um sie zu erhalten, in den drei obigen nur $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ zu vertauschen hat. Nun ist

$$pP = i,\quad pP\mathfrak{X} = 90^0 - \Omega,\quad pP\mathfrak{Y} = pP\mathfrak{Z} = 180^0 - \Omega$$

Mit diesen und den übrigen Substitutionen werden unsere neun Gleichungen diese:

$$\operatorname{cotang}A = -\cos i\operatorname{tang}\Omega$$
$$\cos a = \sin i\sin\Omega$$
$$\sin a = \frac{\cos\Omega}{\sin A}$$

$$\operatorname{cotang}B = \frac{-\sin i\operatorname{tang}\varepsilon + \cos i\cos\Omega}{\sin\Omega}$$
$$\cos b = -\cos i\sin\varepsilon - \sin i\cos\varepsilon\cos\Omega$$
$$\sin b = \frac{\cos\varepsilon\sin\Omega}{\sin B}$$
$$\operatorname{cotang}C = \frac{\sin i\operatorname{cotang}\varepsilon + \cos i\cos\Omega}{\sin\Omega}$$
$$\cos c = \cos i\cos\varepsilon - \sin i\sin\varepsilon\cos\Omega$$
$$\sin c = \frac{\sin\varepsilon\sin\Omega}{\sin C}$$

Die Unbestimmtheit, ob man A, B und C in den beiden ersten oder in den beiden letzten Quadranten anzunehmen habe, wird man so entscheiden, dass die Sinus von a, b und c positiv werden. Man nimmt also A in den beiden ersten Quadranten, wenn $\cos\Omega$ positiv, B und C in eben denselben, wenn $\sin\Omega$ positiv ist; in den entgegengesetzten Fällen aber in den beiden letzten Quadranten, also B und C in den beiden ersten oder letzten, je nachdem Ω in diesen oder jenen liegt.

Die vierte, fünfte, siebente und achte dieser Gleichungen lassen sich durch die Einführung von Hülfswinkeln noch bequemer einrichten. Dies kann auf eine doppelte Weise geschehen:

Erstlich, wenn man $\frac{\operatorname{tang}i}{\cos\Omega} = \operatorname{tang}E$ und $\operatorname{tang}i\cos\Omega = \operatorname{tang}F$ setzt, so wird

$$\operatorname{cotang}B = \frac{\sin i\cos(E+\varepsilon)}{\sin\Omega\cos\varepsilon\sin E} = \frac{\cos i\cos(E+\varepsilon)}{\operatorname{tang}\Omega\cos\varepsilon\cos E}$$
$$\cos b = -\frac{\cos i\sin(F+\varepsilon)}{\cos F} = -\frac{\sin i\cos\Omega\sin(F+\varepsilon)}{\sin F}$$
$$\operatorname{cotang}C = \frac{\sin i\sin(E+\varepsilon)}{\sin\Omega\sin\varepsilon\sin E} = \frac{\cos i\sin(E+\varepsilon)}{\operatorname{tang}\Omega\sin\varepsilon\cos E}$$
$$\cos c = \frac{\cos i\cos(F+\varepsilon)}{\cos F} = \frac{\sin i\cos\Omega\cos(F+\varepsilon)}{\sin F}$$

Zweitens, macht man $\frac{\operatorname{tang}\varepsilon}{\cos\Omega} = \operatorname{tang}G$, und $\operatorname{tang}\varepsilon\cos\Omega = \operatorname{tang}H$, so wird:

$$\operatorname{cotang}B = \frac{\cos(G+i)}{\operatorname{tang}\Omega\cos G} = \frac{\operatorname{tang}\varepsilon\cos(G+i)}{\sin\Omega\sin G}$$
$$\cos b = -\frac{\sin\varepsilon\sin(G+i)}{\sin G} = -\frac{\cos\Omega\cos\varepsilon\sin(G+i)}{\cos G}$$
$$\operatorname{cotang}C = \frac{\sin(H+i)}{\sin\Omega\operatorname{tang}\varepsilon\cos H} = \frac{\sin(H+i)}{\operatorname{tang}\Omega\sin H}$$
$$\cos c = \frac{\cos\varepsilon\cos(H+i)}{\cos H} = \frac{\sin\varepsilon\cos\Omega\cos(H+i)}{\sin H}$$

Es wird wohl der Mühe werth sein, noch einige Relationen zwischen den Grössen A, a u. s. w. zu entwickeln. Das sphärische Dreieck $\mathfrak{X}p\mathfrak{Y}$ gibt $\cos\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \cos\mathfrak{X}p\cos\mathfrak{Y}p + \sin\mathfrak{X}p\sin\mathfrak{Y}p\cos\mathfrak{X}p\mathfrak{Y}$. Allein $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = 90^0$ und $\mathfrak{X}p\mathfrak{Y} = \mathfrak{X}pP - \mathfrak{Y}pP = A - B$. Also

$$\cos(A-B) = -\operatorname{cotang} a \operatorname{cotang} b$$

Eben so geben die Dreiecke $\mathfrak{Y}p\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}p\mathfrak{X}$

$$\cos(B-C) = -\operatorname{cotang} b \operatorname{cotang} c$$
$$\cos(C-A) = -\operatorname{cotang} c \operatorname{cotang} a$$

Ferner wird in dem Dreiecke $\mathfrak{X}p\mathfrak{Y}$, $\cos a = \cos p\mathfrak{Y}\mathfrak{X}\sin b$, und in dem Dreiecke $\mathfrak{Y}p\mathfrak{Z}$, $\sin\mathfrak{Z}\mathfrak{Y}p = \sin\mathfrak{Y}p\mathfrak{Z}\sin c$. Da nun $\mathfrak{Z}\mathfrak{Y}p + p\mathfrak{Y}\mathfrak{X} = \mathfrak{Z}\mathfrak{Y}\mathfrak{X} = 90^0$, so hat man $\cos a = \sin b\sin c\sin\mathfrak{Y}p\mathfrak{Z}$, oder da $\mathfrak{Y}p\mathfrak{Z} = B - C$ ist

$$\sin(B-C) = \frac{\cos a}{\sin b\sin c}$$

Ganz auf ähnliche Art findet man

$$\sin(C-A) = \frac{\cos b}{\sin c\sin a}$$
$$\sin(A-B) = \frac{\cos c}{\sin a\sin b}$$

Die Verbindung dieser Gleichungen mit den vorigen gibt noch

$$\operatorname{cotang}(A-B) = -\frac{\cos a\cos b}{\cos c} = \operatorname{tang}(F+\varepsilon)\cos a$$
$$\operatorname{cotang}(B-C) = -\frac{\cos b\cos c}{\cos a}$$
$$\operatorname{cotang}(C-A) = -\frac{\cos c\cos a}{\cos b} = \operatorname{cotang}(F+\varepsilon)\cos a$$

$$\cos a^2 = \operatorname{cotang}(A-B)\operatorname{cotang}(C-A)$$
$$\cos b^2 = \operatorname{cotang}(B-C)\operatorname{cotang}(A-B)$$
$$\cos c^2 = \operatorname{cotang}(C-A)\operatorname{cotang}(B-C)$$

und auf ähnliche Art lassen sich die Quadrate der Sinus und Tangenten der Seiten a, b, c durch die Winkel $A-B$, $B-C$, $C-A$ darstellen.

Um den Gebrauch dieser Formeln zu erläutern, wollen wir einige derselben auf die Pallas anwenden, und dabei die neuesten [VII.] Elemente dieses Planeten für 1803 zum Grunde legen. Wir setzen also

$i = 34^0\ 38'\ \ 1''1$
☊ $= 172\ \ 28\ \ 13.7$
$\varepsilon = \ 23\ \ 27\ \ 55.8$ (mittlere Schiefe nach Maskelyne für 1803).

Mit diesen Elementen steht die Rechnung folgendermaassen (die den Logarithmen beigesetzten n zeigen an, dass sie zu negativen Grössen gehören):

log cos i . . .	9.9152958		
log tang ☊ . .	9.1211553n		
log cotang A .	9.0364511	also	$A = 263^0\ 47'\ 35''4$
log cos ☊ . . .	9.9962390n		
log sin A . . .	9.9974467n		
log sin a . . .	9.9987923		
log sin i . . .	9.7545982		
log sin ☊ . . .	9.1173944		
log cos a . . .	8.8719926	hieraus	$a = 85^0\ 43'\ 44''8$
log tang i . .	9.8393024		
log cos ☊ . . .	9.9962390n	also	
log tang E . .	9.8430634n,	$E = 145^0\ \ 8'\ \ 2''4$;	$E+\varepsilon = 168^0\ 35'\ 58''2$
log tang F . .	9.8355414n,	$F = 145\ \ 35\ \ 52.9$;	$F+\varepsilon = 169\ \ \ 3\ \ 48.7$
log cos i . . .	9.9152958		
Compl. log tang ☊	0.8788447n		
Compl. log cos E	0.0859260n		
log const. . . .	0.8800665		
log cos $(E+\varepsilon)$.	9.9913455n		
Compl. log cos ε	0.0374886		
log cotang B .	0.9089006n	hieraus	$B = 172^0\ 58'\ 7''4$

log const. . . .	0.8800665		
log $\sin(E+\varepsilon)$.	9.2959318		
Compl. log $\sin\varepsilon$	0.3999023		
log cotang C . .	0.5759006		$C = 14^0\ 52'\ 12''5$
log $\cos\varepsilon$	9.9625114		
log $\sin\Omega$	9.1173944		
Compl. log $\sin B$	0.9121791		
log $\sin b$	9.9920849		
log $\sin\varepsilon$ . . .	9.6000977		
log $\sin n$ . . .	9.1173944		
Compl. log $\sin C$	0.5906942		
log $\sin c$ . . .	9.3081863		
log $\cos i$ . . .	9.9152958		
log $\cos F$ . . .	9.9165035n		
	9.9987923n		
log $\sin(F+\varepsilon)$.	9.2781142		
log $\cos(F+\varepsilon)$.	9.9920399n		
log $\cos b$ . . .	9.2769065	also	$b = 79^0\ \ 5'\ 39''4$
log $\cos c$ . . .	9.9908322		$c = 11\ \ 43\ \ 52.8$

Wenn man nur die Sinus von a, b, c verlangt, so ist die Rechnung für ihre Cosinus nicht nöthig, und man kann also auch den Hülfswinkel F entbehren. Will man aber auch a, b, c selbst kennen, so dienen die Cosinus (wovon nachher noch ein Gebrauch vorkommt) dazu, die Zweideutigkeiten, welche die Sinus allein dabei übrig lassen, zu entscheiden. Auch geben sie dann, wenn die Sinus näher bei 1 sind, eine schärfere Bestimmung, und zugleich eine Controle für die Richtigkeit der Rechnung. Zu dieser letzten Absicht ist auch noch der Umstand brauchbar, dass $\frac{\cos i}{\cos F} = \pm \sin a$ ist, wo das obere Zeichen gilt, wenn F mit A zugleich in den beiden ersten oder letzten Quadranten liegt; das untere, wenn F in einer andern Hälfte des Umfanges angenommen ist als A.

(Zur Entwickelung des Grundes davon dient die Bemerkung, dass F im ersten Falle mit dem Winkel $P☿p$ einerlei, im zweiten 180^0 davon verschieden ist).

Die Grössen ε, Ω, i sind Secularänderungen unterworfen: dasselbe wird also auch der Fall mit den davon abhängigen A, a, B, b, C, c sein. Sind die jährlichen Änderungen von jenen bekannt, so können die Änderungen von A, a u.s.w. durch leicht zu entwickelnde Differentialformeln berechnet werden, bei welchen wir uns hier nicht aufhalten wollen. Man kann auch die Werthe von A, a u.s.w. für eine entferntere Epoche von neuem berechnen, und daraus ihre jährlichen Änderungen ableiten.

Ausserdem erleiden diese Grössen wegen der Nutation noch periodische Änderungen, die mit jedem Umlaufe der Mondsknoten wiederkehren. Da man nemlich die geocentrische Lage des Planeten gegen den wahren Äquator verlangt, so muss eigentlich für ε nicht die mittlere, sondern die wahre Schiefe der Ecliptik, und für Ω die Entfernung des aufsteigenden Knotens vom wahren, nicht vom mittlern Äquinoctialpunkte genommen werden. Die hieraus entspringenden periodischen Änderungen können nach eben den Differentialformeln wie die Secularänderungen berechnet, und in eine Tafel, deren Argument die Länge des Mondsknotens ist, gebracht werden. Wenn man eine zahlreiche Menge geocentrischer Örter für einen nicht zu grossen Zeitraum zu berechnen hat, wird man es in Ermangelung einer solchen Tafel am bequemsten finden, für zwei Epochen zu Anfang und Ende desselben die wahren Werthe von A, a u.s.w. sogleich unmittelbar aus den wahren Werthen von ε, i, Ω zu berechnen, und für dazwischen liegende Zeiten sie daraus durch einfache Interpolation abzuleiten. Ein Jahr hindurch kann man ohne Bedenken diese Änderungen als gleichförmig ansehen.

Man könnte auch die von der Nutation abhängigen periodischen Änderungen ganz übergehen, und sich der mittlern Werthe von A, a u.s.w. bedienen: dann müsste man aber auch bei der Erde für ε die mittlere Schiefe der Ecliptik gebrauchen, und von der Länge λ die Nutation weglassen, um den Abstand vom mittlern Äquinoctium zu haben. Der Erfolg davon ist sodann, dass man die geocentrische Rectascension und Declination des Planeten in Beziehung auf den *mittlern* Äquator erhält, woraus man dann seine Lage gegen den *wahren* Äquator eben so ableitet, wie man den mittlern Ort eines Fixsterns durch Anbringung der Nutation auf den scheinbaren reducirt.

Wir haben jetzt nur noch einiges über die Perturbationen hinzuzufügen. Die Störungen der Breite, von denen allein natürlich hier die Rede ist, sind bei allen ältern Planeten so unbeträchtlich, dass man sie mit Recht ganz vernachlässigen kann; blos bei der Ceres und Pallas wird es wegen der starken Neigung der Bahnen dieser Planeten gegen die Jupitersbahn nothwendig, sie mit in Rechnung zu nehmen. Es gibt dazu einen doppelten Weg. Man kann nemlich entweder diejenigen Elemente, welche die Lage der Bahn bestimmen, die Neigung und die Länge des Knotens, als veränderlich ansehen und ihre mittlern Werthe durch periodische Gleichungen verbessern, oder auch gerade zu untersuchen, wie viel der Planet aus der mittlern Ebene seiner Bahn herauszuweichen durch fremde Kräfte genöthigt wird. Im ersten Falle wird man jene Änderungen auch auf die Grössen A, a u. s. w. übertragen, also diesen ausser den von der Nutation abhängenden noch andere periodische Gleichungen beifügen, deren Argumente mit denen für die Gleichungen der Neigung und der Länge des Knotens übereinkommen werden. Dieses Verfahren ist jedoch bisher nicht üblich gewesen. Bei der zweiten Methode hingegen werden die Störungstafeln die Perturbation der heliocentrischen Breite angeben, welche aber eigentlich nichts anders ist, als die heliocentrische Breite des Planeten über der mittlern Ebene seiner Bahn. Es sei dieselbe $=\beta$, gegen den Nordpol zu als positiv, gegen den Südpol zu als negativ angesehen. In dem sphärischen Dreiecke Υpk ist also die Seite pk nicht wie vorhin $=90^0$, sondern $=90^0-\beta$, folglich

$$x = r\cos \Upsilon k = r(\sin\beta\cos a + \cos\beta\sin a\sin(t+A))$$

und eben so

$$y = r(\sin\beta\cos b + \cos\beta\sin b\sin(t+B))$$
$$z = r(\sin\beta\cos c + \cos\beta\sin c\sin(t+C))$$

In so fern hier β höchstens nur einige Minuten betragen kann, wird man $\cos\beta = 1$ und $\sin\beta = \beta$ setzen dürfen. Hieraus erhellt, dass man wegen der Störungen zu den ohne sie gefundenen Werthen von x, y, z nur noch die Grössen $\beta r\cos a$, $\beta r\cos b$, $\beta r\cos c$ hinzuzusetzen habe, wo β in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden muss.

[Handschriftliche Bemerkungen zu S. 100.]

$$\sin a^2 = -\frac{\cos(B-C)}{\sin(A-B)\sin(C-A)}$$

$$\operatorname{tang} a^2 = -\frac{\cos(B-C)}{\cos(A-B)\cos(C-A)}$$

$$\cos a^2 + \cos b^2 + \cos c^2 = 1$$

$$-\frac{\cos a}{\cos b} = \operatorname{tang}(B-C)\cos = \frac{\operatorname{cotang}(C-A)}{\cos c} = \operatorname{tang}\Omega' \text{ in plano ipsius } Z$$

$$\sin\Omega' = \sin b\sin(B-C) = \frac{\cos a}{\sin c}$$

$$\cos\Omega' = -\frac{\cos b}{\sin c}$$

Differentialänderungen:

$$2\,\mathrm{d}a = -\frac{\mathrm{d}A-\mathrm{d}B}{\sin(A-B)\operatorname{cotang} b} - \frac{\mathrm{d}C-\mathrm{d}A}{\sin(C-A)\operatorname{cotang} c}$$

Um umgekehrt aus a, b, c; Ω und i zu finden, dienen die Formeln

$$\cos a = \sin i\sin\Omega$$
$$-\cos b\cos\varepsilon - \cos c\sin\varepsilon = \sin i\cos\Omega$$
$$-\cos b\sin\varepsilon + \cos c\cos\varepsilon = \cos i$$

$$\sin a = k$$
$$\cos b = k\cos\theta$$
$$\cos c = k\sin\theta$$

$$\cos a = \sin i\sin\Omega$$
$$-k\cos(\theta-\varepsilon) = \sin i\cos\Omega$$
$$k\sin(\theta-\varepsilon) = \cos i$$

ÜBER DIE GRENZEN DER GEOCENTRISCHEN ÖRTER DER PLANETEN.

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgegeben vom Freiherrn von Zach. August 1804.

Von der Sonne aus gesehen erscheint die Bewegung jedes Planeten, in so fern man auf die kleinen Störungen durch andere Himmelskörper nicht sieht, stets in einem und demselben grössten Kreise am Fixsternhimmel. Eben so würde sie auch von der Erde aus erscheinen, wenn die Ebene seiner Bahn mit der Ecliptik zusammenfiele. Sind aber diese beiden Ebenen gegen einander geneigt, so liegen alle mögliche geocentrische Örter des Planeten auf der Himmelskugel nicht mehr, wie in jenem Falle, in einer nur nach einer Dimension ausgedehnten Linie, sondern sie erfüllen einen Flächenraum, eine *Zone*, die den ganzen übrigen Himmel, wo der Planet von der Erde aus nie erscheinen kann, in zwei Theile absondert, und füglich der *Zodiacus* des Planeten heissen kann. Auf diese Weise hat also jeder Planet im Grunde seinen eigenthümlichen Zodiacus, dessen Grenzen (*Limiten*) vollkommen scharf bestimmbar sind, in so fern man seine und die Erd-Bahn als Kegelschnitte von unveränderlichen Elementen ansieht. Die genaue Bestimmung dieser Grenzen ist an sich schon ein interessantes analytisches Problem; aber die Anwendung desselben, besonders auf die beiden neuen Planeten, deren Zodiacus eine beträchtliche Ausdehnung haben, ist auch nicht ohne practische Wichtigkeit. Man weiss, dass zur Aufsuchung und Beobachtung dieser merkwürdigen Himmelskörper sehr genaue und detaillirte Sternkarten erfordert werden, und dass selbst die besten, welche wir bisher

besitzen, dazu bei weiten noch nicht hinlänglich sind. Wenn man daher nicht jedes Jahr von den Gegenden, die diese Planeten durchlaufen, Special-Karten entwerfen will, so muss man nothwendig auf einen eigenen, den ganzen Raum, worin sie sich zeigen können, begreifenden Atlas denken. Die genaue Bestimmung der Grenzen dieses Raums wird daher um so wünschenswerther, da man sich bei einem solchen Unternehmen, das an sich schon von bedeutendem Umfange ist, gern alle zu diesem Zwecke unnöthige Mühe ersparen wird. Gewiss wird allen Freunden der Astronomie die Nachricht sehr willkommen sein, dass der geschickte Lilienthaler Astronom Harding, von dem wir bereits verschiedene vortreffliche Specialkarten besitzen, schon angefangen hat, sich dieser grössern Arbeit zu unterziehen, die sich nicht nur durch ein sehr reiches Detail, sondern auch durch die sorgfältigste, durchgehends auf Autopsie gegründete Kritik sehr vortheilhaft auszeichnen wird.

Wir legen durch den Mittelpunkt der Sonne drei auf einander senkrechte, übrigens willkürliche Ebenen, und nennen die senkrechten Abstände des beobachteten Planeten von denselben x, y, z; die Abstände der Erde hingegen x', y', z'. Wir setzen ferner

$$x'-x = \Delta\cos\alpha\cos\delta$$
$$y'-y = \Delta\sin\alpha\cos\delta$$
$$z'-z = \Delta\sin\delta$$

so dass Δ der Abstand des Planeten von der Erde, δ die Neigung der von dem Planeten zur Erde gezogenen geraden Linie gegen eine, parallel mit der Ebene der z, durch die Erde gelegte Ebene; α der Winkel der Projection jener geraden Linie auf diese Ebene gegen eine, parallel mit der Ebene der y, durch die Erde gelegten Ebene sein werden. Auf der Himmelskugel bestimmen also α und δ die Lage des geocentrischen Orts des Planeten gegen die von den Ebenen der z, y, x (oder vielmehr ihnen parallel durch die Erde gelegten) gebildeten grössten Kreise ganz eben so wie Länge und Breite die Lage gegen die Ecliptik und die Coluren der Nachtgleichen und Sonnenwenden.

Vermöge der Beschaffenheit der Bahn des Planeten wird man zwischen x, y, z zwei Gleichungen haben, daher man diese drei veränderlichen Grössen als Functionen *einer* ansehen kann, die wir durch t bezeichnen und übrigens noch unbestimmt lassen wollen. Eben so sollen x', y', z' Functionen der veränderlichen Grösse t' sein. Es sind also α und δ Functionen von beiden t, t', die durch die Differentialgleichungen

$$\mathrm{d}\alpha = p\,\mathrm{d}t + p'\mathrm{d}t', \qquad \mathrm{d}\delta = q\,\mathrm{d}t + q'\mathrm{d}t'$$

bestimmt werden mögen.

Dies vorausgesetzt, ist offenbar, dass, wenn man t, t' sich zugleich so ändern lässt, dass $\mathrm{d}t : \mathrm{d}t' = -p' : p$, dadurch α ungeändert bleibe, δ aber so lange zu oder abnehmen werde, bis es einen grössten oder kleinsten Werth erreicht hat. Dies geschieht offenbar, wenn $pq' - qp' = 0$ wird. Nun ist klar, dass die Combination *aller* Werthe von t und t' alle mögliche geocentrische Örter des Planeten gibt; und dass von allen solchen Combinationen, die einerlei α geben, diejenige Statt finden muss, wo δ ein Grösstes oder Kleinstes wird, wenn der geocentrische Ort in die Grenzen des Zodiacus des Planeten fallen soll. Hieraus folgt also, dass diese Grenzen durch die Bedingungsgleichung $pq' - qp' = 0$ bestimmt werden.

Die Differentiation obiger Gleichungen gibt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x' - \mathrm{d}x &= \cos\alpha\cos\delta\,\mathrm{d}\Delta - \Delta\sin\alpha\cos\delta\,\mathrm{d}\alpha - \Delta\cos\alpha\sin\delta\,\mathrm{d}\delta\\
\mathrm{d}y' - \mathrm{d}y &= \sin\alpha\cos\delta\,\mathrm{d}\Delta + \Delta\cos\alpha\cos\delta\,\mathrm{d}\alpha - \Delta\sin\alpha\sin\delta\,\mathrm{d}\delta\\
\mathrm{d}z' - \mathrm{d}z &= \sin\delta\,\mathrm{d}\Delta + \Delta\cos\delta\,\mathrm{d}\delta
\end{aligned}$$

Hieraus folgt leicht in Verbindung mit jenen Gleichungen

$$-\sin\alpha(\mathrm{d}x' - \mathrm{d}x) + \cos\alpha(\mathrm{d}y' - \mathrm{d}y) = \Delta\cos\delta\,\mathrm{d}\alpha$$
$$-\cos\alpha\sin\delta(\mathrm{d}x' - \mathrm{d}x) - \sin\alpha\sin\delta(\mathrm{d}y' - \mathrm{d}y) + \cos\delta(\mathrm{d}z' - \mathrm{d}z) = \Delta\,\mathrm{d}\delta$$

Es wird also, vermöge der partiellen Differentialien

$$\begin{aligned}
\Delta\cos\delta\,p\,\mathrm{d}t &= \sin\alpha\,\mathrm{d}x - \cos\alpha\,\mathrm{d}y\\
\Delta\cos\delta\,p'\mathrm{d}t' &= -\sin\alpha\,\mathrm{d}x' + \cos\alpha\,\mathrm{d}y'\\
\Delta q\,\mathrm{d}t &= \cos\alpha\sin\delta\,\mathrm{d}x + \sin\alpha\sin\delta\,\mathrm{d}y - \cos\delta\,\mathrm{d}z\\
\Delta q'\mathrm{d}t' &= -\cos\alpha\sin\delta\,\mathrm{d}x' - \sin\alpha\sin\delta\,\mathrm{d}y' + \cos\delta\,\mathrm{d}z'
\end{aligned}$$

Diese Werthe von p, p', q, q' in der Bedingungsgleichung $pq' = p'q$ substituirt, wird nach den gehörigen Reductionen

$$\cos\alpha\cos\delta(\mathrm{d}y'\mathrm{d}z - \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z') + \sin\alpha\cos\delta(\mathrm{d}z'\mathrm{d}x - \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x') + \sin\delta(\mathrm{d}x'\mathrm{d}y - \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y') = 0$$

oder wenn man mit Δ multiplicirt

$$(x'-x)(\mathrm{d}y'\mathrm{d}z - \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z') + (y'-y)(\mathrm{d}z'\mathrm{d}x - \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x') + (z'-z)(\mathrm{d}x'\mathrm{d}y - \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y') = 0$$

welche Gleichung sich noch besser in folgender Form darstellen lässt:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{d}x(y'\mathrm{d}z' - z'\mathrm{d}y') + \mathrm{d}x'(y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}y)\\
+\,&\mathrm{d}y(z'\mathrm{d}x' - x'\mathrm{d}z') + \mathrm{d}y'(z\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}z)\\
+\,&\mathrm{d}z(x'\mathrm{d}y' - y'\mathrm{d}x') + \mathrm{d}z'(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)
\end{aligned}\right\} = 0$$

Diese Gleichung enthält allgemein die Relation zwischen den Örtern der Erde und des Planeten, bei welchen der geocentrische Ort des letztern in die Grenzen fällt, und man darf darin nur für x, y, z ihre Werthe durch t, und für x', y', z' ihre Werthe durch t', nach Beschaffenheit der Bahn, substituiren, um eine endliche Gleichung zwischen t und t' zu erhalten. Es schien der Mühe werth, jene Gleichung durch eine allgemeine Analyse zu entwickeln; übrigens aber ist es nicht schwer zu zeigen, dass sie zugleich die Bedingungsgleichung sei, *dass die Tangenten an den Örtern der Erde und des Planeten in Einer Ebene liegen*, und gerade diese Bedingung aus den Erfordernissen unserer Aufgabe abzuleiten. Kürze halber halten wir uns indessen hiebei nicht länger auf.

Für die Grössen t, t', die wir bisher unbestimmt gelassen haben, nehmen wir am bequemsten die heliocentrischen Winkel-Abstände des Planeten und der Erde in ihren Bahnen von der gemeinschaftlichen Knotenlinie (und zwar vom aufsteigenden Knoten der Planeten-Bahn auf der Erd-Bahn). Bezeichnen wir nun die Entfernungen des Planeten und der Erde von der Sonne durch r, r', so werden sich die Coordinaten auf folgende Art ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned}
x &= r\sin a\sin(t+A)\\
y &= r\sin b\sin(t+B)\\
z &= r\sin c\sin(t+C)\\
x' &= r'\sin a'\sin(t'+A')\\
y' &= r'\sin b'\sin(t'+B')\\
z' &= r'\sin c'\sin(t'+C')
\end{aligned}$$

Hievon, so wie von der Bedeutung der Constanten a, A u. s. w. wird man sich leicht durch Generalisirung der in der *Mon. Corr.* Mai 1804 [S. 98 d. B.] vorgetragenen Untersuchung Rechenschaft geben können. Sind nun ferner k, k'

die halben Parameter der Kegelschnitte, welche der Planet und die Erde beschreiben; e, e' die Excentricitäten; g, g' die Winkel-Abstände der Sonnenfernen von der Knotenlinie, so wird

$$r = \frac{k}{1-e\cos(t-g)}, \qquad r' = \frac{k'}{1-e'\cos(t'-g')}$$

Hieraus findet sich nach gehöriger Rechnung

$$\mathrm{d}x = \frac{k \sin a\, \mathrm{d}t}{(1-e\cos(t-g))^2} \times (\cos(t+A) - e\cos(g+A))$$

Die Werthe von $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ haben eine ähnliche Gestalt, und man braucht, um sie zu erhalten, nur a, A mit b, B oder mit c, C zu vertauschen. Die Werthe von $\mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z'$ erhält man aus denen von $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$, wenn man statt der auf den Planeten sich beziehenden Grössen die analogen für die Erde setzt.

Die Entwickelung von $y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y$ geschieht bequemer aus den Werthen von y, z, ehe man darin den Werth von r substituirt hat: man erhält so

$$y\mathrm{d}z - z\mathrm{d}y = rr \sin b \sin c \sin(B-C)\,\mathrm{d}t = rr\cos a\,\mathrm{d}t$$

(man sehe den angeführten Aufsatz [S. 100 d. B.]), und eben so

$$z\mathrm{d}x - x\mathrm{d}z = rr\cos b\,\mathrm{d}t$$
$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = rr\cos c\,\mathrm{d}t$$

Ganz ähnliche Werthe finden sich für die drei analogen, auf die Erde Bezug habenden Ausdrücke.

Durch Substitution aller dieser Werthe wird die obige Bedingungsgleichung nach den gehörigen Reductionen folgende

$$\begin{aligned}
&k'\cos a' \sin a\,(\cos(t+A) - e\cos(g+A))\\
&+k'\cos b' \sin b\,(\cos(t+B) - e\cos(g+B))\\
&+k'\cos c' \sin c\,(\cos(t+C) - e\cos(g+C))\\
&+k\cos a \sin a'(\cos(t'+A') - e'\cos(g'+A'))\\
&+k\cos b \sin b'(\cos(t'+B') - e'\cos(g'+B'))\\
&+k\cos c \sin c'(\cos(t'+C') - e'\cos(g'+C')) = 0
\end{aligned}$$

Durch zweckmässige Reductionen lassen sich die drei ersten Theile dieser Gleichung, wenn man die Neigung der Planetenbahn gegen die Erdbahn durch i bezeichnet, in $k'\sin i(\cos t - e\cos g)$, die drei letzten in $-k\sin i(\cos t' - e'\cos g')$

verwandeln. Wir können indessen der Mühe, diese an sich zwar nicht schwierigen, aber doch etwas weitläuftigen Reductionen zu entwickeln, hier um so eher überhoben sein, da wir zu demselben Resultate viel bequemer gelangen können, wenn wir die drei bisher unbestimmt gelassenen Fundamental-Ebenen, auf die sich die Coordinaten beziehen, auf eine zweckmässige Art bestimmen. Wir wollen nemlich für die Ebene der z die Ecliptik, und die Ebenen der x, y so annehmen, dass der Pol der erstern in den aufsteigenden Knoten der Planeten-Bahn, der Pol der zweiten hingegen 90^0 weiter vorwärts in der Ecliptik falle. Auf der Seite *dieser* Pole, so wie auf der Nordseite der Ecliptik, sollen die Coordinaten x, y, z positiv gesetzt werden. Es ist leicht zu übersehen, dass unter diesen Voraussetzungen

$$a = 90^0, \quad b = 90^0 + i, \quad c = i, \quad C = 0$$
$$a' = 90^0, \quad b' = 90^0, \quad c' = 0, \quad B' = 0$$

werde, und mithin die obige Gleichung in folgende übergehe:

$$k'\sin i(\cos t - e\cos g) - k\sin i(\cos t' - e'\cos g') = 0$$

oder

$$k'(\cos t - e\cos g) = k(\cos t' - e'\cos g')$$

Aus der Theorie der Kegelschnitte lässt sich leicht zeigen, dass $\frac{k}{\cos t - e\cos g}$ und $\frac{k'}{\cos t' - e'\cos g'}$ den Abstand zwischen der Sonne und den Durchschnittspunkten der Knotenlinie der beiden Bahnen mit den Tangenten an den Örtern des Planeten und der Erde ausdrücken. Die eben gefundene Gleichung zeigt daher an, dass diese beiden Tangenten die Knotenlinie in einem und demselben Punkte schneiden, welches mit der oben berührten Bedingung übereinkommt, nach der sie in einer und derselben Ebene liegen sollen.

In Ansehung der Lage der Planetenbahn gegen die Erdbahn sind drei Fälle zu unterscheiden. Entweder schliesst jene diese ein, oder diese jene, oder beide einander (gleich Kettenringen). Der erste Fall findet Statt, wenn der Planet in der Knotenlinie auf beiden Seiten weiter von der Sonne absteht, als die Erde; der zweite, wenn diese auf beiden Seiten weiter absteht, als der Planet; der dritte, wenn auf einer Seite der Planet, auf der andern die Erde weiter von der Sonne entfernt ist. Von den bisher bekannten Planeten hat keiner eine solche Lage gegen die Erde oder gegen einen andern Planeten, wie der dritte Fall erfordert; Cometen der Art aber gibts in Menge. Die analytische Bedingung für den ersten Fall ist, dass $k-k'$ positiv, und, ohne Rücksicht auf das Zeichen, grösser sei, als $k'e\cos g - ke'\cos g'$; für den zweiten, dass $k'-k$ diese Eigenschaften habe; für den dritten, dass $k-k'$ oder $k'-k$, ohne Rücksicht auf das Zeichen, kleiner als $k'e\cos g - ke'\cos g'$ sei.

In dem ersten dieser drei Fälle erhält man aus obiger Gleichung für jeden beliebigen Werth von t, von 0^0 bis 360^0, zwei Werthe von t'; im zweiten gibt jeder Werth von t' zwei von t. Der eine Werth von t' (im ersten, oder von t im zweiten Falle) wird nemlich allemal zwischen 0 und 180, der andere zwischen 180 und 360^0 liegen, oder vielmehr innerhalb noch engerer Grenzen, deren nähere Bestimmung keine Schwierigkeiten hat. Im ersten Falle also entsprechen jedem heliocentrischen Orte des Planeten zwei heliocentrische Örter der Erde, aber nicht umgekehrt, sondern nur in zwei von einander getrennten Stücken der Erdbahn (wovon das eine unterhalb oder südlich von der Ebene der Planetenbahn, das andere oberhalb oder nördlich von derselben liegt) kann die Erde den Planeten in seinen Grenzen sehen, und zwar in der nördlichen Grenze nur, wenn t' einen von seinen möglichen Werthen zwischen 0 und 180, in der südlichen, wenn es einen zwischen 180 und 360^0 erhält. Eben so entsprechen im zweiten Falle jedem heliocentrischen Orte der Erde zwei des Planeten, aber nicht umgekehrt: sondern nur in zwei von einander getrennten Stücken seiner Bahn, wovon das eine nördlich, das andere südlich von der Ecliptik liegt, kann er der Erde in seinen Grenzen erscheinen, nemlich an der nördlichen für die zwischen 0 und 180, in der südlichen für die zwischen 180 und 360^0 liegenden Werthe.

Hingegen können im dritten Falle weder t noch t' alle, sondern nur zwischen gewissen Grenzen liegende Werthe erhalten; oder sowohl die Erde als der Planet müssen jedes in einem bestimmten Stücke seiner Bahn sein, wenn obige Bedingungsgleichung Statt haben soll.

Hieraus ergibt sich nun, dass die geocentrischen Örter des Planeten, die aus allen möglichen, obiger Gleichung Genüge thuenden Combinationen zwischen den heliocentrischen Örtern des Planeten und der Erde entspringen, im ersten und zweiten Falle zwei von einander getrennte in sich selbst zurücklaufende Linien auf der Himmelskugel bilden, zwischen denen im ersten Falle der die Ebene der Planetenbahn vorstellende grösste Kreis, im zweiten die Ecliptik liegt; im

dritten Falle hingegen bilden jene geocentrischen Örter (wie die nähere Betrachtung des Falles ohne Mühe zeigt) nur *eine* in sich zurückkehrende Linie.

Den vorhergehenden Untersuchungen zu Folge kann nun der Zodiacus des Planeten keine andere Grenzen haben als eben diese Linien. Es scheint daher natürlich, zu schliessen, dass in den beiden ersten Fällen der Zodiacus des Planeten die zwischen jenen beiden Linien liegende Zone, und im dritten einer von von den beiden Räumen sei, in welche jene Linie die ganze Kugelfläche scheidet. Allein dieser Schluss würde für die beiden ersten Fälle nicht immer, und für den dritten nie richtig sein. Man darf nemlich hier (so wie in vielen andern Fällen beim Gebrauch der Analyse, wo man eine ähnliche Vorsicht nicht immer genug beobachtet) nicht vergessen, dass unsere Schlussfolge sich ganz auf die Voraussetzung gründet, dass der Zodiacus des Planeten wirklich beschränkt sei, und dass dieser von der Erde aus nicht in jedem Punkte des Himmels erscheinen könne. Diese Voraussetzung findet aber, wie sich schon aus Gründen der *Geometrie der Lage* darthun lässt, in dem dritten Falle nicht Statt, und die gefundene Linie kann also hier nicht die Grenze des Planeten-Zodiacus sein, da dieser den *ganzen* Himmel einnimmt. Im ersten und zweiten Falle aber wird es zwar allemal wenigstens auf einer Seite der gefundenen Zone Stellen am Himmel geben, wo der Planet nie erscheinen kann, und folglich gewiss die eine Linie eine Grenze sein; allein demungeachtet kann es sich ereignen, dass es *nur* auf einer Seite solche ausgeschlossene Stellen gibt, daher dann die andere Linie keine Grenze abgibt, sondern der dadurch von der Zone abgeschiedene Raum des Himmels eben so gut ganz zum Zodiacus gehört, als die Zone selbst. Indessen ist es hier nicht der Ort, diese Untersuchung vollständig auszuführen, und es zu entwickeln, was denn in solchen Fällen jene Linien, da sie keine Grenzen sind, eigentlich bedeuten. Hier können wir uns um so eher begnügen, die Freunde der Analyse auf diese paradox scheinenden Phänomene aufmerksam gemacht zu haben, da es sich leicht zeigen lässt, dass alle bis jetzt bekannten Planeten, die hier zunächst unser Augenmerk sind, nie weder im Nordpol noch im Südpol der Ecliptik von der Erde aus erscheinen, und folglich die erwähnten Ausnahmen dabei nicht Statt haben können; daher ihr Zodiacus wirkliche *Zonen*, und die beiden gefundenen Linien ihre Grenzen sein müssen.

Wir wollen nun noch theils zur weitern Erläuterung, theils des practischen Gebrauchs wegen unsere Resultate auf die *Pallas* und *Ceres* anwenden, und die

Grenzen ihrer Zodiacus so abstecken, dass man sie danach in die Sternkarten eintragen könne. Wegen der Perturbationen werden zwar diese Grenzen noch einiger Erweiterung, und wegen der Veränderung, die die Elemente in Zukunft noch erleiden werden, einiger Änderungen bedürfen; allein in practischer Rücksicht werden dieselben unerheblich, und, wenn die Beobachtungen nach Jahren sie merklich machen werden, eben darum sogar interessant sein, weil sie dann die nach und nach eintretende Unzulänglichkeit der hier zum Grunde gelegten elliptischen Elemente auf eine in die Augen fallende Art zeigen werden.

Für die *Pallas* setzen wir nach den neuesten Elementen für den Anfang von 1803 (*Mon. Corr.* 1804 März.)

$$\begin{array}{ll} e = 0.2457396 & \varphi = 14^0\ 13'\ 31''966 \\ k = 2.602122 & \\ g = 128^0\ 49'\ 20''7 & \\ \Omega = 172\ \ 28\ \ 13.7 & i = 34\ \ 38\ \ 1.1 \end{array}$$

Für die Erde hingegen

$$\begin{array}{ll} e' = 0.016792 & \varphi = 0^0\ 57'\ 43''802 \\ k' = 0.999718 & \\ g' = 107^0\ \ 5'\ 39'' & \\ \text{Aph.} = 279\ \ 33\ \ 52.7 & \end{array}$$

Nach Substitution dieser Werthe wird unsere obige Gleichung

$$\cos t' = 0.384193 \cos t + 0.0542514$$

Hieraus folgt, dass die beiden äussersten Werthe von $\cos t'$ diese sind $+0.438444$ und -0.329942; es liegen also alle möglichen Werthe von t' einerseits zwischen $63^0\,59'\,43''$ und $109^0\,15'\,55''$; andererseits zwischen $250^0\,44'\,5''$ und $296^0\,0'\,17''$; daher die *Pallas* der Erde nur dann in ihren Grenzen erscheinen kann, wenn die heliocentrische Länge jener zwischen $236^0\,28'$ und $281^0\,44'$ oder zwischen $63^0\,12'$ und $180^0\,29'$ fällt; also etwa vom 18. Mai bis 4. Juli, und vom 26. November bis 9. Januar. In dem ersten Theile ihrer Bahn befindet sich die Erde südlich, im andern nördlich von der Ebene der Pallas-Bahn; daher ihr in jenem die *Pallas* an der nördlichen, in diesem an der südlichen Grenze ihres Zodiacus erscheinen wird. Auch ist es nicht schwer, zu zeigen, dass die *Pallas*

jedes Jahr zu den bestimmten Zeiten einmal die nördliche und einmal die südliche Grenze streifen muss. — Um nun eine hinlängliche Anzahl von Punkten aus beiden Grenzen zu erhalten, wollen wir für t der Reihe nach alle Werthe von 0 bis 360^0 von 10 zu 10 Grad annehmen, und aus der Verbindung jedes derselben mit den beiden zugehörigen, aus obiger Formel zu bestimmenden Werthen von t' die entsprechenden geocentrischen Örter sogleich in Rectascension und Declination ableiten, in welcher Absicht das in dem oben erwähnten Aufsatze erklärte Verfahren und die dabei bereits berechneten Constanten angewandt werden können. Die Resultate dieser Rechnungen stellt folgende Tafel dar:

	Nördliche Grenze		Südliche Grenze	
t	Gerade Aufst.	Abweichung	Gerade Aufst.	Abweichung.
0°	148° 4′	12° 56′ nördl.	196° 54′	7° 12′ südl.
10	159 30	15 56	205 54	4 26
20	171 54	18 55	214 15	2 11
30	185 6	21 38	222 3	0 23
40	198 48	23 52	229 27	1 1 nördl.
50	212 41	25 26	236 32	2 4
60	226 28	26 16	243 26	2 48
70	239 59	26 23	250 16	3 16
80	253 8	25 53	257 6	3 28
90	265 54	24 49	264 1	3 25
100	278 18	23 19	271 4	3 5
110	290 25	21 27	278 18	2 30
120	302 19	19 17	285 44	1 37
130	314 4	16 53	293 23	0 27
140	325 43	14 22	301 16	1 2 südl.
150	337 16	11 47	309 24	2 50
160	348 42	9 14	317 49	4 57
170	359 55	6 49	326 34	7 23
180	10 49	4 40	335 41	10 8
190	21 15	2 49	345 12	13 10
200	31 5	1 21	355 12	16 24
210	40 14	0 14	5 44	19 53
220	48 39	0 31 südl.	16 53	23 6
230	56 23	0 59	28 41	26 16
240	63 28	1 10	41 12	29 5
250	70 2	1 9	54 25	31 21
260	76 12	0 57	68 16	32 52
270	82 5	0 35	82 36	33 29
280	87 51	0 4	97 12	33 5
290	93 38	0 37 nördl.	111 47	31 39
300	99 35	1 30	126 6	29 14
310	105 53	2 36	139 52	26 0
320	112 40	3 59	152 57	22 12
330	120 8	5 40	165 12	18 9
340	128 26	7 44	176 37	14 10
350	137 43	10 10	187 10	10 28
360	148 4	12 56	196 54	7 12

Zu grösserer Bequemlichkeit sind durch schickliche Interpolations-Methoden zwischen diese 72 Punkte folgende 144 eingeschaltet, bei denen die Rectascensionen von 5 zu 5 Grad zunehmen.

Zodiacus der Pallas

Gerade Aufst.	Abweichung der nördlichen Grenze	Abweichung der südlichen Grenze	Gerade Aufst.	Abweichung der nördlichen Grenze	Abweichung der südlichen Grenze
0°	6° 48′ nördl.	17° 56′ südl.	180°	20° 38′ nördl.	12° 58′ südl.
5	5 47	19 32	185	21 37	11 12
10	4 49	21 4	190	22 31	9 29
15	3 54	22 33	195	23 19	7 49
20	3 2	23 59	200	24 2	6 13
25	2 13	25 20	205	24 39	4 42
30	1 29	26 36	210	25 11	3 17
35	0 50	27 46	215	25 37	2 0
40	0 16	28 51	220	25 58	0 49
45	0 14 südl.	29 49	225	26 12	0 13 nördl.
50	0 37	30 41	230	26 22	1 7
55	0 55	31 26	235	26 25	1 52
60	1 6	32 4	240	26 23	2 28
65	1 11	32 36	245	26 16	2 56
70	1 9	33 0	250	26 3	3 15
75	1 0	33 17	255	25 45	3 26
80	0 44	33 27	260	25 23	3 28
85	0 21	33 30	265	24 55	3 23
90	0 10 nördl.	33 25	270	24 22	3 9
95	0 49	33 13	275	23 46	2 48
100	1 34	32 54	280	23 5	2 19
105	2 27	32 27	285	22 20	1 43
110	3 25	31 53	290	21 31	1 0
115	4 29	31 11	295	20 39	0 10
120	5 38	30 23	300	19 43	0 46 südl.
125	6 52	29 27	305	18 45	1 49
130	8 9	28 24	310	17 44	2 58
135	9 27	27 14	315	16 42	4 12
140	10 47	25 57	320	15 37	5 32
145	12 7	24 35	325	14 31	6 56
150	13 27	23 7	330	13 24	8 24
155	14 46	21 33	335	12 17	9 56
160	16 4	19 55	340	11 10	11 30
165	17 19	18 14	345	10 3	13 6
170	18 29	16 30	350	8 57	14 43
175	19 36	14 44	355	7 52	16 20
180	20 38	12 58	360	6 48	17 56

Für die *Ceres* haben wir, nach den letzten Elementen für 1803

$$e = 0.0788941$$
$$k = 2.750681$$
$$g = 245^\circ\ 34'\ 56''$$

für die Erde e' und k' wie oben, $g' = 198^\circ\ 35'\ 31''$.
Hieraus wird die Bedingungsgleichung

$$\cos t' = 0.363444 \cos t - 0.004063$$

Die Werthe von t' liegen also von $68^\circ\ 56'\ 16''$ bis $111^\circ\ 33'\ 43''$ und von $248^\circ\ 26'\ 17''$ bis $291^\circ\ 3'\ 44''$, folglich die heliocentrische Länge der Erde von $149^\circ\ 55'$ bis $192^\circ\ 32'$ und von $329^\circ\ 25'$ bis $12^\circ\ 2'$; daher die Erde etwa nur vom 19. Februar bis 3. April die *Ceres* in ihren nördlichen, und vom 23. August bis 6. October in ihren südlichen Grenzen sehen kann. Vermittelst dieser Formel sind, eben so wie vorhin bei der *Pallas*, 36 Punkte in jeder Grenze des Zodiacus der *Ceres* in Rectascension und Declination berechnet worden, wobei in Beziehung auf den mehr erwähnten Aufsatz für die Constanten a, A u. s. w. folgende Werthe gebraucht sind:

$$a = 79^\circ\ 30'\ 5''$$
$$b = 114\ \ 42\ \ 11$$
$$c = 27\ \ 7\ \ 24$$
$$A = 170\ \ 49\ \ 4$$
$$B = 85\ \ 42\ \ 29$$
$$C = 59\ \ 36\ \ 33$$

so dass, wenn v die wahre Anomalie der *Ceres* bedeutet, die drei Coordinaten durch folgende Formeln dargestellt werden:

$$x = \frac{\alpha \sin(v + 56^\circ\ 24'\ 0'')}{1 - e\cos v}$$

$$y = \frac{\beta \sin(v + 331^\circ\ 17'\ 25'')}{1 - e\cos v}$$

$$z = \frac{\gamma \sin(v + 365^\circ\ 11'\ 29'')}{1 - e\cos v}$$

wo

$$\log \alpha = \log k \sin a = 0.432108$$
$$\log \beta = \log k \sin b = 0.397758$$
$$\log \gamma = \log k \sin c = 0.098319$$

Anstatt dieser 72 Punkte begnügen wir uns hier damit, nur die auf ähnliche Art wie bei der *Pallas* zwischen dieselben eingeschalteten 144 in folgender Tafel beizufügen:

Zodiacus der Ceres

Gerade Aufst.	Abweichung der nördlichen Grenze	Abweichung der südlichen Grenze	Gerade Aufst.	Abweichung der nördlichen Grenze	Abweichung der südlichen Grenze
0°	8° 37′ südl.	17° 29′ südl.	180°	18° 49′ nördl.	8° 17′ nördl.
5	6 15	15 13	185	16 31	5 56
10	3 45	12 51	190	14 5	3 28
15	1 11	10 26	195	11 33	0 55
20	1 27 nördl.	7 56	200	8 57	1 41 südl.
25	4 7	5 18	205	6 16	4 19
30	6 48	2 38	210	3 34	6 56
35	9 26	0 3	215	0 52	9 32
40	12 1	2 30 nördl.	220	1 47 südl.	12 3
45	14 31	4 58	225	4 21	14 29
50	16 54	7 20	230	6 50	16 48
55	19 9	9 35	235	9 12	18 59
60	21 16	11 42	240	11 25	21 1
65	23 12	13 39	245	13 28	22 53
70	24 58	15 27	250	15 21	24 35
75	26 34	17 4	255	17 3	26 6
80	27 59	18 30	260	18 34	27 26
85	29 13	19 45	265	19 53	28 36
90	30 16	20 49	270	21 1	29 35
95	31 8	21 42	275	21 56	30 24
100	31 50	22 24	280	22 40	31 1
105	32 21	22 55	285	23 13	31 29
110	32 42	23 14	290	23 34	31 46
115	32 51	23 22	295	23 43	31 52
120	32 50	23 19	300	23 41	31 48
125	32 40	23 5	305	23 28	31 34
130	32 18	22 40	310	23 4	31 9
135	31 46	22 3	315	22 27	30 34
140	31 3	21 16	320	21 40	29 49
145	30 9	20 17	325	20 40	28 53
150	29 4	19 6	330	19 30	27 46
155	27 49	17 45	335	18 8	26 29
160	26 22	16 12	340	16 35	25 1
165	24 44	14 28	345	14 51	23 23
170	22 56	12 34	350	12 55	21 34
175	20 57	10 30	355	10 51	19 36
180	18 49	8 17	360	8 37	17 29

DER ZODIACUS DER JUNO.

(Ein Nachtrag zu dem Aufsatze im August-Hefte der *M. C.* 1804. [S. 106 d. B.])

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgegeben vom Freiherrn von Zach. März 1805.

Obgleich die Juno nur erst eine kurze Zeit hindurch beobachtet worden ist, so scheinen doch die Elemente ihrer Bahn bereits einen hinlänglichen Grad von Genauigkeit erlangt zu haben, um zum Behuf des von dem verdienstvollen Entdecker dieses Planeten zu hoffenden Atlasses die Grenzen der Zone, worin er uns erscheinen kann, abzustecken. Ich habe daher diese Arbeit, auf Ersuchen meines Freundes Harding, um so lieber übernommen, da gerade die kleine lichtschwache Juno in weniger günstigen Lagen, als sie dieses Jahr hatte, von allen drei neuen Planeten am schwersten zu beobachten, und also detaillirter Sternkarten am meisten bedürftig sein wird.

Meine IV. Elemente der Juno scheinen nach meinen letzten Beobachtungen noch so gut mit dem Laufe derselben übereinzustimmen, dass ich noch keine zuverlässige neue Verbesserung der Bahn zu unternehmen im Stande sein würde; ich habe sie daher bei meinen Rechnungen zum Grunde gelegt, und in den Zeichen des erwähnten Aufsatzes angenommen:

$$e = 0.25684$$
$$k = 2.49630$$
$$g = 62^{0}\ 19'\ 35''$$
$$e' = 0.01679$$
$$k' = 0.999718$$
$$g' = 108^{0}\ 30'\ 1''$$

Hieraus fand ich folgende Bedingungs-Gleichung:

$$\cos t' = 0.400477 \cos t - 0.053103$$

Die Werthe von $\cos t'$ liegen also zwischen $+0.347374$ und -0.453580, folglich die von t' einerseits zwischen $69^\circ\,40'\,23''$ und $116^\circ\,58'\,25''$; und andererseits zwischen $234^\circ\,5'\,47''$ und $281^\circ\,23'\,49''$, also die heliocentrischen Örter der Erde, wo Juno in den Limiten erscheinen kann, von $240^\circ\,45'$ bis $288^\circ\,3'$ und von $54^\circ\,6'$ bis $101^\circ\,24'$ Länge; die erstern fallen etwa vom 22. Mai bis 10. Julius, wo Juno einmal in der nördlichen Limite erscheinen muss, die andern vom 16. November bis 2. Januar, wo sie einmal an die südliche Grenze kommt.

Hienach wurden nun, gerade so wie bei der Ceres und Pallas, 36 Punkte in der nördlichen, und eben so viele in der südlichen Grenze bestimmt, wobei zur unmittelbaren Berechnung der Rectascensionen und Declinationen folgende Formeln und Constanten gebraucht werden:

$$\begin{aligned} a &= 87^\circ\ 59'\ 22'' \\ b &= 100\ \ 32\ \ 38 \\ c &= 10\ \ 44\ \ 17 \\ A &= 261\ \ 18\ \ \ 7 \\ B &= 171\ \ 40\ \ 35 \\ C &= 160\ \ 38\ \ \ 2 \\ v &= \text{wahre Anomalie der Juno} \end{aligned}$$

$$x = \frac{\alpha \sin(v + 323^\circ\,37'\,41'')}{1 - e\cos v}$$

$$y = \frac{\beta \sin(v + 234^\circ\,0'\,9'')}{1 - e\cos v}$$

$$z = \frac{\gamma \sin(v + 222^\circ\,57'\,37'')}{1 - e\cos v}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= k \sin a; \quad \log\alpha = 0.397030 \\ \beta &= k \sin b; \quad \log\beta = 0.389902 \\ \gamma &= k \sin c; \quad \log\gamma = 9.667556 \end{aligned}$$

Zwischen diese 72 Punkte wurden 144 andere eingeschaltet, wo die Rectascensionen von 5 zu 5 Graden zunehmen, und die in folgender Tafel dargestellt werden:

Zodiacus der Juno.

AR.	Declination der nördlichen Grenze	Declination der südlichen Grenze	AR.	Declination der nördlichen Grenze	Declination der südlichen Grenze
0°	4° 23' nördl.	10° 38' südl.	180°	6° 59' nördl.	3° 9' südl.
5	5 13	10 8	185	6 5	3 47
10	6 3	9 36	190	5 11	4 27
15	6 51	9 3	195	4 17	5 8
20	7 39	8 29	200	3 23	5 50
25	8 26	7 54	205	2 30	6 32
30	9 11	7 19	210	1 38	7 15
35	9 54	6 43	215	0 49	7 58
40	10 34	6 7	220	0 11	8 40
45	11 13	5 32	225	0 44 südl.	9 21
50	11 49	4 56	230	1 26	10 0
55	12 23	4 21	235	2 3	10 38
60	12 53	3 47	240	2 38	11 13
65	13 21	3 14	245	3 8	11 45
70	13 45	2 43	250	3 34	12 15
75	14 7	2 13	255	3 55	12 42
80	14 25	1 45	260	4 12	13 5
85	14 40	1 19	265	4 24	13 26
90	14 51	0 56	270	4 32	13 43
95	14 58	0 35	275	4 34	13 56
100	15 1	0 17	280	4 32	14 7
105	15 1	0 2	285	4 25	14 14
110	14 55	0 10 nördl.	290	4 14	14 17
115	14 46	0 19	295	3 58	14 18
120	14 32	0 24	300	3 38	14 16
125	14 14	0 26	305	3 14	14 11
130	13 52	0 24	310	2 45	14 2
135	13 26	0 19	315	2 14	13 52
140	12 56	0 9	320	1 38	13 39
145	12 22	0 4 südl.	325	1 0	13 24
150	11 44	0 20	330	0 19	13 6
155	11 3	0 40	335	0 25 nördl.	12 46
160	10 19	1 4	340	1 9	12 24
165	9 32	1 31	345	1 57	12 0
170	8 43	2 1	350	2 45	11 35
175	7 52	2 34	355	3 34	11 7
180	6 59	3 9	360	4 23	10 38

ALLGEMEINE TAFELN

FÜR

ABERRATION UND NUTATION.

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde,
herausgegeben vom Freiherrn von Zach. April 1808.

Erste Tafel für die Aberration.

Argument, Länge der Sonne $= \odot$

	O^s	VI^s	I^s	VII^s	II^s	VIII^s	
Gr.	log a	$A +$	log a	$A +$	log a	$A +$	
0	1,2690	0° 0′	1.2790	2° 11′	1.2977	2° 6′	30
1	1,2690	0 5	1,2796	2 14	1.2983	2 3	29
2	1.2691	0 11	1,2802	2 16	1.2988	2 0	28
3	1.2692	0 16	1,2808	2 18	1.2993	1 57	27
4	1.2692	0 22	1,2815	2 20	1.2998	1 54	26
5	1.2693	0 27	1,2821	2 21	1.3003	1 51	25
6	1.2695	0 32	1,2827	2 23	1,3008	1 47	24
7	1,2696	0 37	1.2834	2 24	1.3012	1 44	23
8	1,2698	0 43	1.2840	2 25	1.3017	1 40	22
9	1.2700	0 48	1.2847	2 26	1.3021	1 36	21
10	1,2703	0 53	1.2853	2 27	1.3025	1 32	20
11	1.2705	0 58	1.2860	2 28	1.3028	1 28	19
12	1.2708	1 3	1,2866	2 28	1.3032	1 24	18
13	1.2711	1 8	1,2873	2 28	1.3036	1 20	17
14	1.2714	1 12	1,2879	2 28	1.3039	1 16	16
15	1.2718	1 17	1.2886	2 28	1.3042	1 11	15
16	1.2721	1 22	1.2892	2 28	1.3045	1 7	14
17	1,2725	1 26	1.2899	2 27	1.3048	1 3	13
18	1.2729	1 30	1.2905	2 27	1.3050	0 58	12
19	1.2733	1 34	1.2912	2 26	1.3053	0 53	11
20	1.2738	1 39	1.2918	2 25	1.3055	0 49	10
21	1.2742	1 42	1.2924	2 24	1.3057	0 44	9
22	1.2747	1 46	1.2931	2 22	1.3059	0 39	8
23	1.2752	1 50	1.2938	2 21	1.3060	0 34	7
24	1.2757	1 53	1.2944	2 19	1.3061	0 30	6
25	1.2762	1 57	1.2949	2 17	1.3063	0 25	5
26	1.2768	2 0	1.2956	2 15	1.3064	0 20	4
27	1.2773	2 3	1.2961	2 13	1.3064	0 15	3
28	1.2779	2 6	1.2966	2 11	1.3065	0 10	2
29	1.2785	2 9	1.2972	2 8	1.3065	0 5	1
30	1.2790	2 11	1.2977	2 6	1.3065	0 0	0
	log a	$A -$	log a	$A -$	log a	$A -$	Gr.
	V^s	XI^s	IV^s	X^s	III^s	IX^s	

Zweite Tafel für die Aberration.

Argumente, Summe und Unterschied der Sonnenlänge und der Declination des Sterns.

	O^s VI^s	I^s VII^s	II^s VIII^s	
Gr.	− +	− +	− +	
0	4″03	3″49	2″02	30
1	4.03	3.46	1.96	29
2	4.03	3.42	1.89	28
3	4.03	3.38	1.83	27
4	4.02	3.34	1.77	26
5	4.02	3.30	1.70	25
6	4.01	3.26	1.64	24
7	4.00	3.22	1.58	23
8	3.99	3.18	1.51	22
9	3.98	3.13	1.45	21
10	3.97	3.09	1.38	20
11	3.96	3.04	1.31	19
12	3.95	3.00	1.25	18
13	3.93	2.95	1.18	17
14	3.91	2.90	1.11	16
15	3.90	2.85	1.04	15
16	3.88	2.80	0.98	14
17	3.86	2.75	0.91	13
18	3.84	2.70	0.84	12
19	3.81	2.65	0.77	11
20	3.79	2.59	0.70	10
21	3.77	2.54	0.63	9
22	3.74	2.48	0.56	8
23	3.71	2.43	0.49	7
24	3.68	2.37	0.42	6
25	3.66	2.31	0.35	5
26	3.63	2.26	0.28	4
27	3.59	2.20	0.21	3
28	3.56	2.14	0.14	2
29	3.53	2.08	0.07	1
30	3.49	2.02	0.00	0
	+ −	+ −	+ −	Gr.
	V^s XI^s	IV^s X^s	III^s IX^s	

Allgemeine Tafel für die Nutation.

Argument, Länge des aufsteigenden Knotens der Mondsbahn = ☊.

	0^s VI^s			I^s VII^s			II^s $VIII^s$			
Gr.	log *b*	*B* −	*c* − +	log *b*	*B* −	*c* − +	log *b*	*B* −	*c* − +	
0	0.9844	0° 0′	0″00	0.9588	6° 45′	8″27	0.8960	7° 48′	14″33	30
1	0.9844	0 15	0.29	0.9571	6 54	8.52	0.8939	7 40	14.47	29
2	0.9843	0 31	0.58	0.9554	7 3	8.77	0.8917	7 32	14.61	28
3	0.9842	0 46	0.87	0.9536	7 12	9.01	0.8896	7 23	14.74	27
4	0.9840	1 1	1.15	0.9518	7 20	9.25	0.8875	7 14	14.87	26
5	0.9837	1 16	1.44	0.9500	7 28	9.49	0.8854	7 4	14.99	25
6	0.9834	1 32	1.73	0.9481	7 36	9.72	0.8834	6 53	15.11	24
7	0.9830	1 47	2.02	0.9462	7 43	9.96	0.8814	6 42	15.23	23
8	0.9825	2 2	2.30	0.9442	7 49	10.19	0.8795	6 29	15.34	22
9	0.9821	2 17	2.59	0.9422	7 55	10.41	0.8776	6 17	15.45	21
10	0.9815	2 31	2.87	0.9402	8 1	10.63	0.8758	6 3	15.55	20
11	0.9809	2 46	3.16	0.9382	8 6	10.85	0.8740	5 49	15.64	19
12	0.9802	3 1	3.44	0.9361	8 10	11.07	0.8723	5 35	15.73	18
13	0.9795	3 15	3.72	0.9340	8 14	11.28	0.8707	5 20	15.82	17
14	0.9787	3 29	4.00	0.9318	8 17	11.49	0.8691	5 4	15.90	16
15	0.9779	3 43	4.28	0.9297	8 20	11.70	0.8677	4 48	15.98	15
16	0.9770	3 57	4.56	0.9275	8 23	11.90	0.8663	4 31	16.05	14
17	0.9760	4 11	4.84	0.9253	8 24	12.10	0.8649	4 14	16.12	13
18	0.9750	4 24	5.11	0.9231	8 25	12.30	0.8637	3 56	16.18	12
19	0.9739	4 37	5.39	0.9208	8 25	12.49	0.8625	3 38	16.24	11
20	0.9728	4 50	5.66	0.9186	8 25	12.67	0.8615	3 20	16.29	10
21	0.9716	5 3	5.93	0.9163	8 24	12.86	0.8605	3 1	16.34	9
22	0.9704	5 16	6.20	0.9140	8 23	13.04	0.8596	2 41	16.38	8
23	0.9691	5 28	6.46	0.9118	8 21	13.21	0.8588	2 22	16.42	7
24	0.9678	5 40	6.73	0.9095	8 18	13.38	0.8582	2 2	16.45	6
25	0.9664	6 51	6.99	0.9072	8 15	13.55	0.8576	1 42	16.48	5
26	0.9650	6 3	7.25	0.9050	8 11	13.72	0.8571	1 22	16.50	4
27	0.9635	6 14	7.51	0.9027	8 6	13.88	0.8568	1 2	16.52	3
28	0.9620	6 24	7.77	0.9005	8 1	14.03	0.8565	0 41	16.53	2
29	0.9604	6 35	8.02	0.8983	7 55	14.18	0.8563	0 21	16.54	1
30	0.9588	6 45	8.27	0.8960	7 48	14.33	0.8563	0 0	16.54	0
	log *b*	+ *B*	− + *c*	log *b*	+ *B*	− + *c*	log *b*	+ *B*	− + *c*	Gr.
	V^s XI^s			IV^s X^s			III^s IX^s			

Gebrauch der Tafeln.

Die *Aberration in gerader Aufsteigung* findet sich durch die Formel

$$-a \sec\delta \cos(\odot + A - \alpha)$$

wo α die Rectascension des Sterns, δ dessen Declination bedeutet, und a und A mit dem Argument $\odot$ aus der ersten Tafel genommen werden.

Die *Aberration in der Declination* besteht aus drei Theilen; den ersten gibt die Formel

$$-a \sin\delta \sin(\odot + A - \alpha)$$

der zweite und dritte werden mit den Argumenten $\odot + \delta$ und $\odot - \delta$ aus der zweiten Tafel genommen. Südliche Declination wird als negativ angesehen, folglich ihre absolute Grösse durch positive Aberration vermindert.

Die *Nutation in gerader Aufsteigung* wird bestimmt durch die Formel

$$-b \tan\delta \cos(☊ + B - \alpha) + c$$

wo b, B, c mit dem Argument ☊ aus der Tafel genommen werden.

Die *Nutation in Declination ist* $= -b \sin(☊ + B - \alpha)$

Beispiel. Berechnung des scheinbaren Orts von α Cygni für den 17. December 1807. Mittlerer Ort $\alpha = 308^0\ 43'\ 15''75$, $\delta = +44^0\ 35'\ 58''5$

Aberration.

$\odot = 8^z\ 25^0\ 9'$, $A = +24'$, $\odot + A - \alpha = 316^0\ 50'$

log $(-a)$	1.3063 n	log $(-a)$	1.3063 n
log cos$(\odot + A - \alpha)$ . .	9.8629	log sin$(\odot + A - \alpha)$ . .	9.8353 n
Compl. log cos δ . . .	0.1475	log sin δ	9.8464
	1.3167 n		0.9880
Aberr. in AR. . =	$-20''74$	Zahl	$+9''73$
		$\odot + \delta = 10^z\ 9^0\ 45'$ . .	-2.58
		$\odot - \delta = 7\ 10\ 33$ . .	$+3.06$
		Aberr. in Decl. . . =	$+10''21$

Nutation.

$\Omega = 7^z\ 29^0\ 18'$, $B = -7^0\ 55'$, $\Omega + B - \alpha = 282^0\ 42'$

$\log(-b)$	0.8976 n	$\log(-b)$	0.8976 n
$\log\cos(\Omega + B - \alpha)$ . .	9.3421	$\log\sin(\Omega + B - \alpha)$ . .	9.9892 n
$\log \operatorname{tang}\delta$	9.9939		0.8868
	0.2336 n	Nutation in Decl. . .	$= +7''71$
Zahl	$-1''71$		
c	$+14.23$		
Nutation in AR. .	$= +12''52$		

Mittl. AR. . .	$= 308^0\ 43'\ 15''75$	Mittl. Decl. .	$= +44^0\ 35'\ 58''50$
Aberration	-20.74	Aberration	$+10.21$
Nutation	$+12.52$	Nutation	$+7.71$
Sch. AR. . . .	$= 308^0\ 43'\ 7''53$	Sch. Declin. .	$= +44^0\ 36'\ 16''42$

ÜBER EINE AUFGABE DER SPHÄRISCHEN ASTRONOMIE.

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgegeben vom Freiherrn von Zach. October 1808.

Die tägliche Bewegung der Himmelskörper bietet eine grosse Mannigfaltigkeit von Problemen dar, welche die Relationen zwischen Stundenwinkeln, Höhen, Azimuthen, den Örtern der Himmelskörper und der Polhöhe zum Gegenstande haben. Maupertuis und andere Astronomen haben sich mit verschiedenen derselben beschäftigt, die indess von sehr ungleicher und zum Theil von sehr geringer practischer Brauchbarkeit sind. Man hat dergleichen Aufgaben besonders Seefahrern und Reisenden oder auch solchen Beobachtern empfohlen, die nur mit wenigen und minder vollkommnen Werkzeugen versehen sind, um zu den beiden nothwendigsten Beobachtungen, zur Zeit- und Ortsbestimmung, zu dienen. Denn für die Astronomen, denen die vortrefflichsten Uhren, Mittags-Fernröhre, Mauer-Quadranten, Vollkreise und Zenith-Sectoren zu Gebote stehen, braucht nicht gesorgt zu werden: diese können ihre Zeit zu jeder Stunde aufs schärfste und bequemste bestimmen; und über die zweckmässigsten Methoden zur Festsetzung der geographischen Lage ihres Beobachtungsorts ist bei ihnen keine Frage mehr. Diesen Astronomen bleibt natürlich auch die Bestimmung der Sternpositionen und Sonnen-Örter allein vorbehalten, und der Beobachter mit schlechtern Instrumenten wird diese immer von jenen entlehnen, wo er sie braucht, und nicht aus seinen eignen unvollkommnern Beobachtungen ableiten wollen. Daher ist also z. B. die Aufgabe, aus drei beobachteten Sternhöhen zugleich Polhöhe, Declination und Culminationszeit des Sterns zu bestimmen, von gar keinem practischen Werthe, den einzigen nicht wohl gedenkbaren Fall ausgenommen, wo man nur einen noch nicht gut bestimmten Stern zu beobachten Gelegenheit hätte; jenes Verfahren könnte nur dann erträgliche Resultate geben, wenn die Beobachtungen sehr weit von einander abständen, und zugleich sowohl der Gang der Uhr während derselben, als die gemessenen Höhen selbst sehr genau wären, und selbst dann wird man Polhöhe und Zeit immer *viel* schärfer aus zweien dieser Beobachtungen ableiten können, wenn man die Declination des Sterns als gegeben ansieht.

Eine der allernützlichsten Aufgaben für Seefahrer und reisende Beobachter ist die, aus zwei beobachteten Höhen zweier Sterne, deren Rectascensionen und Declinationen als gegeben angesehen werden, und den entsprechenden Zeiten der Uhr, die entweder nach Sternzeit geht oder deren Gang während der Beobachtungen als bekannt angenommen wird, den Stand der Uhr und die Polhöhe zu bestimmen. Hier sind die Sterne und die Höhen ganz willkürlich, und man hat blos die einzige Bedingung zu beobachten, dass die Verticalkreise, in welchen die Höhen gemessen sind, im Zenith weder einen zu spitzen, noch zu nahe an 180° fallenden Winkel machen. Auf diese Weise kann man die beiden Höhen leicht innerhalb des Zeitraums von einigen Minuten messen, unstreitig ein höchst wichtiger Umstand sowohl für den Seefahrer, der seinen Platz auf dem Meere stets schnell verändert, als auch für den reisenden Beobachter zu Lande, dessen Zeit beschränkt ist, oder der vom Wetter nur auf wenige Minuten begünstigt wird, oder der sich auf den Gang seiner Uhr nicht lange verlassen kann. Die sich leicht darbietende directe Auflösung dieser Aufgabe beruht auf der Berechnung von drei sphärischen Dreiecken und ist freilich etwas weitläufig; man kann aber die indirecte Methode sehr bequem und geschmeidig machen. Ich behalte mir vor, auf diesen Gegenstand ein andermal zurückzukommen.

Wenn man sich bei Beobachtung von Sternhöhen eines Reflexionswerkzeuges und des künstlichen Horizonts bedient, so findet man es anfangs etwas schwierig, die beiden Bilder ins Feld zu bringen; man erwirbt sich aber hierin bald eine Fertigkeit, zumal wenn man sich auf die hellern Sterne einschränkt. Eine vorläufige nur ganz rohe Berechnung der Höhe (falls man Polhöhe und Stand der Uhr schon beiläufig kennt) erleichtert die Mühe, und wenn man Gelegenheit hat von einem Stativ zu beobachten, so wird man nicht nur an Bequemlichkeit sehr

gewinnen, sondern auch die Berührungen weit schärfer und besser in der Mitte des Gesichtsfeldes bemerken können, als wenn man aus freier Hand beobachten muss. Inzwischen durch fleissige Übung wird man es auch hierin weit bringen können.

Eine Unbequemlichkeit bei der vorhin beschriebenen Methode besteht darin, dass man des Nachts bei Licht die feinen Abtheilungen des Sextanten nicht so gut ablesen kann, als bei Tage. Wichtiger ist indessen der erst seit einiger Zeit zur Sprache gekommene Umstand, dass wenigstens viele auch von den ersten Meistern verfertigte Spiegel-Sextanten in Ansehung der Theilung nicht ganz den Grad von Vollkommenheit haben, den man ohne weiteres ihnen zuzutrauen bisher bei uns gewohnt war. Ich selbst besitze einen 10zolligen von Troughton Nro. 420, der zwar übrigens vortrefflich ist, aber ganz entschieden die Winkel von 100 bis 120° um 50 bis 60 oder 70″ zu klein gibt. Da übrigens alle Prüfungen und Berichtigungen auf das sorgfältigste damit vorgenommen sind, so kann ich dies blos einem Theilungsfehler zuschreiben. Auf dem Meere sind zwar bei Breiten- und Zeitbestimmungen solche Fehler von gar keiner, und auf dem festen Lande bei Örtern, deren Lage bis dahin noch ganz unbekannt war, von geringer Bedeutung; allein in solchen Fällen, wo man grössere Schärfe zu erreichen wünscht, darf man die Vollkommenheit der Theilung nicht auf Treue und Glauben annehmen, man muss entweder erst die Theilungsfehler mit möglichster Genauigkeit auszumitteln suchen, oder darauf Verzicht thun, durch Methoden, die scharf gemessene Höhen voraussetzen, ganz zuverlässige Bestimmungen zu machen.

Aus diesen Gründen wird vielen Beobachtern eine Methode nicht unwillkommen sein, nach der man auch mit einem noch so schlecht oder allenfalls gar nicht getheilten Instrumente in kurzer Zeit Polhöhe und Stand der Uhr mit grosser Schärfe bestimmen und so auch die etwaigen Theilungsfehler des Instruments selbst bestimmen kann. Die Genauigkeit der Resultate hängt hier also lediglich von der Sorgfalt ab, womit man die Berührung der Bilder beobachtet hat, indem bei dem heutigen Zustande unserer Sternverzeichnisse die anzuwendenden Positionen der Sterne als vollkommen fehlerfrei betrachtet werden dürfen. Diese Methode besteht darin, dass man die Zeiten abwartet, wo drei beliebige Sterne in Verticalkreisen, die am Zenith nicht zu spitze Winkel machen, einerlei, übrigens willkürliche, Höhe erreichen, welche selbst nicht bekannt zu sein braucht. Die bequemste Art hieraus Polhöhe und Stand der Uhr abzuleiten, wird folgende sein. Ich bezeichne mit

α, α', α'' die geraden Aufsteigungen der drei Sterne,

δ, δ', δ'' die Abweichungen derselben, südlich als negativ betrachtet,

θ, θ', θ'' die drei Zeiten an der Uhr, wo diese Sterne die Höhe h erreichen.

k Voreilung der Uhr vor Sternzeit, welche ich für alle drei Beobachtungen als gleich annehme; liefe die Uhr nicht nach Sternzeit, so könnte man unter k ihre Voreilung für irgend ein willkürliches Zeitmoment annehmen, dann würden aber unter θ, θ', θ'' die Zeiten zu verstehen sein, die die Uhr gezeigt haben würde, wenn sie zwischen den Beobachtungen und jenem Zeitmoment genau Sternzeit gehalten hätte. Man könnte also etwa unter k die Voreilung bei der ersten Beobachtung verstehen, und die andern beiden Zeitmomente gehörig vermehren oder vermindern, wenn die Uhr langsamer oder schneller als Sternzeit liefe.

φ die Polhöhe des Ortes.

Offenbar werden also $\theta - k - \alpha$, $\theta' - k - \alpha'$, $\theta'' - k - \alpha''$, in Bogen verwandelt, die drei Stundenwinkel sein, und folglich wird man, wenn man

$$\theta - \alpha = t$$
$$\theta' - \alpha' = t'$$
$$\theta'' - \alpha'' = t''$$

setzt, folgende drei Gleichungen haben:

I. $$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(t - k)$$

II. $$\sin h = \sin\varphi \sin\delta' + \cos\varphi \cos\delta' \cos(t' - k)$$

III. $$\sin h = \sin\varphi \sin\delta'' + \cos\varphi \cos\delta'' \cos(t'' - k)$$

Zieht man I von II ab, so wird nach einer leichten Verwandlung

$$\begin{aligned} &2\sin\varphi \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \\ &\quad = 2\cos\varphi \cos[\tfrac{1}{2}(t + t') - k] \cos\tfrac{1}{2}(t' - t) \sin\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \sin\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \\ &\qquad + 2\cos\varphi \sin[\tfrac{1}{2}(t + t') - k] \sin\tfrac{1}{2}(t' - t) \cos\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \cos\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \operatorname{tang}\varphi = {} & \cos[\tfrac{1}{2}(t + t') - k] \cos\tfrac{1}{2}(t' - t) \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta) \\ & + \sin[\tfrac{1}{2}(t + t') - k] \sin\tfrac{1}{2}(t' - t) \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta) \end{aligned}$$

Man bestimme A' und B' so, dass

$$A' \sin B' = \sin\tfrac{1}{2}(t' - t) \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta' - \delta)$$
$$A' \cos B' = \cos\tfrac{1}{2}(t' - t) \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta' + \delta)$$

wird, so verwandelt sich die vorige Gleichung, wenn man zugleich

$$\tfrac{1}{2}(t + t') - B' = C'$$

setzt, in folgende

IV. $$\operatorname{tang}\varphi = A' \cos(C' - k)$$

Völlig auf gleiche Weise, oder bloss durch Vertauschung der Grössen, die sich auf die zweite Beobachtung beziehen, mit denen, die sich auf die dritte beziehen, übersicht man, dass, wenn A'' und B'' so bestimmt werden, dass

$$A'' \sin B'' = \sin\tfrac{1}{2}(t'' - t) \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\delta'' - \delta)$$
$$A'' \cos B'' = \cos\tfrac{1}{2}(t'' - t) \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\delta'' + \delta)$$

wird, und man zugleich

$$\tfrac{1}{2}(t + t'') - B'' = C''$$

setzt, folgende Gleichung sich ergeben wird

V. $$\operatorname{tang}\varphi = A'' \cos(C'' - k)$$

Aus der Verbindung von IV und V lässt sich nun leicht k und φ ableiten. Man hat nemlich

$$A' \cos(C' - k) = A'' \cos(C'' - k)$$

folglich

$$\begin{aligned} &(A'' - A') \cos[\tfrac{1}{2}(C' + C'') - k] \cos\tfrac{1}{2}(C'' - C') \\ &= (A' + A'') \sin[\tfrac{1}{2}(C' + C'') - k] \sin\tfrac{1}{2}(C'' - C') \end{aligned}$$

Setzt man also

$$\frac{A'}{A''} = \operatorname{tang}\zeta$$

wodurch

$$\frac{A'' - A'}{A'' + A'} = \operatorname{tang}(45^0 - \zeta)$$

wird, und bestimmt ψ durch die Gleichung

$$\operatorname{tang}(45^0 - \zeta) \operatorname{cotang} \tfrac{1}{2}(C'' - C') = \operatorname{tang}\psi$$

so hat man

$$k = \tfrac{1}{2}(C' + C'') - \psi$$

und nachher φ durch eine der beiden Gleichungen IV oder V. Aus der gefundenen Polhöhe und den Stundenwinkeln $t-k$, $t'-k$, $t''-k$ kann man nachher, wenn man will, durch die Formeln I, II, III oder durch andre bekannte Methoden die Höhe h ableiten, die aus allen drei Beobachtungen denselben Werth erhalten muss.

Dieser Auflösung sind noch folgende Bemerkungen beizufügen:

1) Um aus zwei Gleichungen $A \sin B = M$, $A \cos B = N$, die Grössen A und B zu bestimmen, bedient man sich der Formeln

$$\operatorname{tang} B = \frac{M}{N}$$

$$A = \frac{M}{\sin B} \quad \text{oder} \quad A = \frac{N}{\cos B}$$

Den erstern Ausdruck für A zieht man vor, wenn M grösser ist als N, im entgegengesetzten Falle den andern. Bei der Bestimmung des Winkels B durch seine Tangente bleibt die Wahl zwischen dem ersten und dritten Quadranten, wenn die Tangente positiv, oder zwischen dem zweiten und vierten, wenn sie negativ ist, willkürlich; man wählt denjenigen, wo der Sinus das Zeichen von M und der Cosinus das Zeichen von N hat, wodurch A positiv wird.

2) Die ähnliche Zweideutigkeit bei der Bestimmung von ψ durch die Tangente muss so entschieden werden, dass $\operatorname{tang}\varphi$ positiv wird; man nimmt also ψ zwischen -90^0 und $+90^0$, vorausgesetzt nemlich, dass die Beobachtungen in der nördlichen Hemisphäre gemacht sind. In der südlichen wäre es umgekehrt.

Bei allen Methoden, die man dem practischen Astronomen zu seinem Gebrauche vorschlägt, ist es eine unerlässliche Pflicht, dass man den Einfluss der unvermeidlichen Beobachtungsfehler auf die Resultate würdige, damit man sich überzeugen kann, ob sie überhaupt und unter welchen Umständen sie mit Sicherheit anwendbar sind. Der Vernachlässigung dieser Pflicht hat man die vielen unreifen Einfälle zuzuschreiben, über deren Unwerth die practischen Astronomen klagen. Eine leichte, hier aber der Kürze wegen zu unterdrückende Un-

tersuchung zeigt, dass, wenn λ, λ', λ'' die den drei Beobachtungen entsprechenden Azimuthe sind (vom Südpunkte an nach der Richtung der täglichen Bewegung gezählt), ein Fehler von Δ Zeit-Secunden bei der ersten Berührung einen Fehler von

$$\frac{\Delta \sin\lambda \sin\frac{1}{2}(\lambda'' + \lambda')}{2 \sin\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \sin\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda)} \text{ Zeit-Secunden}$$

bei der Zeitbestimmung, und von

$$\frac{15 \Delta \sin\lambda \cos\varphi \cos\frac{1}{2}(\lambda'' + \lambda')}{2 \sin\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \sin\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda)} \text{ Bogen-Secunden}$$

bei der Polhöhe nach sich zieht; um diese Grössen müssen nemlich k vermindert und φ vermehrt werden, wenn man die Berührung zu früh beobachtet hat. Die Ausdrücke für den Einfluss der Fehler bei der zweiten und dritten Beobachtung sind diesen ganz ähnlich und entstehen blos durch Vertauschung von λ mit λ' oder λ''. Da übrigens die Höhe des ersten Sterns in Δ Zeit-Secunden um $15 \Delta \sin\lambda \cos\varphi$ Raum-Secunden abnimmt, so lässt sich der Einfluss der Beobachtungsfehler noch einfacher so ausdrücken: Wenn der erste Stern in dem Moment, wo man seine Höhe mit der, auf welche das Instrument gestellt war, übereinstimmend fand, wirklich noch oder schon um D Raumsecunden höher war, so erhält man k in Raum-Secunden zu gross um

$$\frac{D \sin\frac{1}{2}(\lambda'' + \lambda')}{2 \cos\varphi \sin\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \sin\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda)}$$

und φ zu klein um

$$\frac{D \cos\frac{1}{2}(\lambda'' + \lambda)}{2 \sin\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda) \sin\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda)}$$

Hieraus folgt nun, dass man blos dahin zu sehen hat, dass von den Sinussen von $\frac{1}{2}(\lambda' - \lambda)$, $\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda)$, $\frac{1}{2}(\lambda'' - \lambda')$ keiner zu klein wird, welches man dadurch bewirkt, dass man nur Sterne auswählt, die die Höhe h in ziemlich ungleichen Azimuthen erreichen. Zweitens aber ist klar, dass Sterne, deren Höhe sich langsam ändert, eben so brauchbar sind, als solche, die schnell steigen oder fallen; es kommt bei jenen durchaus nicht darauf an, dass man den Augenblick, wo sie die verlangte Höhe haben, haarscharf trifft, sondern nur, dass sie in dem Augenblick, den man dafür annimmt, wirklich nicht merklich davon abstehen. Man kann demnach auch ohne Bedenken Sterne nahe bei der Culmination oder den Polarstern wählen, und gerade solche sind sehr zweckmässig, weil man da dem eben erwähnten Erforderniss mit Ruhe Genüge thun kann. Einer von den drei Sternen wenigstens wird übrigens immer seine Höhe schneller ändern, wenn die Bedingung der ungleichen Azimuthe erfüllt ist.

Ehe man diese Beobachtung vornimmt, ist es gut sich darauf vorzubereiten. Man wird leicht in jeder Stunde einige kenntliche Sterne auffinden, die bald nach einander gleiche Höhe erreichen. Blos mit einem Globus oder einer stereographischen Projection der Himmelskugel wird man dies leicht bewerkstelligen können. Weiss man die Zeitintervalle, wie die drei Beobachtungen auf einander folgen, auf ein Paar Minuten voraus, so wird die Beobachtung desto besser gelingen. Man müsste schlecht beobachtet haben, wenn man so nicht wenigstens auf ein Paar Secunden den Stand der Uhr erhielte; durch Combination mehrerer Sterne und durch Wiederholung an mehrern Abenden, wo man auch dieselben Höhen von neuem messen kann, wird man es in seiner Gewalt haben vermittelst dieser Methode einen sehr hohen Grad von Genauigkeit zu erreichen. Übrigens lassen sich besonders für den Fall, wo man dieselben Sterne in derselben oder fast derselben Höhe öfters beobachtet hat, mehrere Abkürzungen der Rechnung geben, bei welchen ich mich aber hier nicht aufhalte.

Um diese Methode noch mehr zu erläutern, füge ich die Berechnung für eine wirkliche Anwendung hier in extenso bei. Den 27. August d. J. beobachtete ich auf dem Quecksilber-Horizont mit meinem auf die doppelte Höhe $105^0\ 18'\ 55''$ gestellten Sextanten aus freier Hand die Sterne α Andromeda, α kleiner Bär, α Leyer an der genau nach Sternzeit gehenden Sheltonschen Pendel-Uhr, wie folgt:

α Andromeda	$21^u\ 33^m\ 26^s$
α kleiner Bär	21 47 30
α Leyer	22 5 21

Die scheinbaren Stellungen der Sterne an diesen Tagen sind folgende:

	Gerade Aufsteigung	Nördl. Abweichung
α Andromeda	$23^u\ 58^m\ 33^s33$	$28^0\ 2'\ 14''8$
α kleiner Bär	0 55 4.7	88 17 5.7
α Leyer . .	18 30 28.96	38 37 6.6

Hieraus wird

	in Zeit		in Bogen
$t =$	$21^u\ 34^m\ 52^s67$	. . .	$323^0\ 43'\ 10''05$
$t' =$	20 52 25.30	. . .	313 6 19.50
$t'' =$	3 34 52.04	. . .	53 43 0.60

$$\tfrac{1}{2}(t'-t) = -\ 5^0\ 18'\ 25''27 \qquad \tfrac{1}{2}(t''-t) = -135^0\ 0'\ 4''72$$
$$\tfrac{1}{2}(t'+t) = 318\ 24\ 44.77 \qquad \tfrac{1}{2}(t''+t) = 188\ 43\ 5.32$$

$$\tfrac{1}{2}(\delta'-\delta) = 30\ 7\ 25.45 \qquad \tfrac{1}{2}(\delta''-\delta) = 5\ 17\ 25.90$$
$$\tfrac{1}{2}(\delta'+\delta) = 58\ 9\ 40.25 \qquad \tfrac{1}{2}(\delta''+\delta) = 33\ 19\ 40.70$$

$\log \sin \frac{1}{2}(t'-t)$ . .	8.9661069 n	$\log \sin \frac{1}{2}(t''-t)$ . .	9.8494751 n
$\log \cot \frac{1}{2}(\delta'-\delta)$ . .	0.2363974	$\log \cot \frac{1}{2}(\delta''-\delta)$ . .	1.0333869
$\log \cos \frac{1}{2}(t'-t)$ . .	9.9981343	$\log \cos \frac{1}{2}(t''-t)$ . .	9.8494949 n
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\delta'+\delta)$ . .	0.2069331	$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(\delta''+\delta)$ . .	9,8179461

Wir haben folglich

$\log A' \cos B'$ . . .	0.2050674	$\log A'' \cos B''$ . . .	9.6674410 n
$\log A' \sin B'$ . . .	9.2025043 n	$\log A'' \sin B'$ . . .	0.8828620 n

Woraus wir erhalten

$B' =$	$354^0\ 19'\ 22''04$	$\log A'$ . . .	0.2072029
$B'' =$	266 30 55.07	$\log A''$ . . .	0.8836657
$C' =$	$-35\ 54\ 37.27$	$\log \operatorname{tang} \zeta$ . .	9.3235372
$C'' =$	$-77\ 47\ 49.75$		$\zeta = 11^0\ 53'\ 41''28$

$$\tfrac{1}{2}(C''-C') = -20^0\ 56'\ 36''24 \qquad 45^0-\zeta = 33\ 6\ 18.72$$
$$\tfrac{1}{2}(C''+C') = -56\ 51\ 13.51$$

$\log \operatorname{tang}(45^0-\zeta)$ . .	9.8142617
$\log \cot \frac{1}{2}(C''-C')$ . .	0.4171063 n
$\log \operatorname{tang} \psi$	0.2313680 n

$$\psi = -59^0\ 35'\ 14''71$$
$$k = +\ 2\ 44\ 1.20$$

Die Uhr eilte also der Stern-Zeit vor um $10^m\ 56^s08$, welches auf ein Paar Zehntheile mit dem übereinstimmt, was aus Stern-Durchgängen am Mauer-Quadranten abgeleitet war.

Zur Bestimmung der Polhöhe haben wir

$$C'-k = -38^0\ 38'\ 38''47$$
$$C''-k = -80\ \ 31\ \ 50.95$$

$\log A'$	0.2072029	$\log A''$	0.8836657
$\log\cos(C'-k)$.	9.8926738	$\log\cos(C''-k)$.	9.2162109
$\log \operatorname{tang}\varphi$ . . .	0.0998767		0.0998766

$$\varphi = 51^0\ 31'\ 51''51$$

Berechnet man mit diesen Resultaten die wahre Höhe der Sterne, so findet man aus allen drei Sternen auf ein Hunderttheil einer Secunde übereinstimmend

$$h = 52^0\ 37'\ 21''3$$

Die Refraction, nach Barometer- und Thermometer-Stand verbessert, ist $42''7$, also scheinbare Höhe $52^0\ 38'\ 4''$. Der Collimationsfehler des Sextanten ist $-3'\ 30''$, also der gemessene Winkel $105^0\ 15'\ 25''$, welcher also, weil der wahre $105^0\ 16'\ 8''$ ist, um $43''$ zu klein ist.

Am 25. August war der Sextant auf einen $5''$ grösseren Winkel, nemlich $105^0\ 19'\ 0''$ gestellt, dieselben drei Sterne wurden bei folgenden Uhrzeiten beobachtet:

α Andromeda	$21^u\ 33^m\ 29^s$
α kleiner Bär	21 47 38
α Leyer	22 5 22

Hieraus folgt:

Voreilung der Uhr vor Sternzeit $10^m\ 57^s9$

$$\varphi = 51^0\ 31'\ 56''7$$
$$h = 52\ \ 37\ \ 29.15$$

Doppelte scheinbare Höhe $105^0\ 16'\ 25''5$; nach dem Sextanten $105^0\ 15'\ 30''$, also Fehler des Sextanten $-54''5$.

Im Mittel also: Fehler des Sextanten bei dem Winkel 105^0, $-48''7$; Polhöhe $51^0\ 31'\ 54''1$. Einige Beobachtungen des Herrn Prof. Harding mit denselben Sternen, aber in einer etwas grössern Höhe, so wie eine frühere Beobachtung von mir mit α Andromeda, α Adler und α Leyer, geben für die Polhöhe bis auf ein Paar Secunden dasselbe Resultat.

Um den Einfluss der Beobachtungsfehler desto besser übersehen zu können, habe ich nach den Zahlen des hier entwickelten Beispiels die den drei Sternen entsprechenden Azimuthe berechnet und gefunden:

α Andromeda	$293^0\ 45'\ 15''$
α kleiner Bär	182 9 9
α Leyer	90 17 52

Hieraus finde ich nach obigen Formeln, dass, wenn die drei Berührungen um Δ, Δ', Δ'' Zeit-Secunden zu früh beobachtet sind, die Voreilung der Uhr um

$$+0.391\,\Delta + 0.0066\,\Delta' + 0.603\,\Delta''$$

Zeit-Secunden zu klein, und die Polhöhe um

$$+3.808\,\Delta - 0.2884\,\Delta' - 3.519\,\Delta''$$

Raum-Secunden zu klein gefunden werden.

Irrt man also bei α kleiner Bär um $20''$, und bei jedem der beiden andern Sterne um $1''$, so kann der Fehler der Zeitbestimmung höchstens auf 1^s1, und der Fehler der Polhöhe höchstens auf $13''$ gehen, in so fern die Stellungen der Sterne selbst genau zuverlässig sind. Will man die möglichen Fehler der Endresultate nicht durch die Fehler der Zeiten, sondern durch die Fehler der Höhen bestimmen, so dienen dazu die andern oben gegebenen Formeln. Setzen wir nemlich, dass in den drei Beobachtungsmomenten die Höhen der Sterne um D, D', D'' Raum-Secunden grösser waren, als die Stellung des Sextanten erforderte, so entspringt daraus ein Fehler von

$$+0.0430\,D + 0.0177\,D' - 0.0607\,D''$$

Zeit-Secunden bei der Voreilung der Uhr, und von

$$+0.446\,D - 0,823\,D' + 0.377\,D''$$

Raum-Secunden bei der Polhöhe, um welche beide zu gross ausfallen werden. Die letztern Formeln dienen zugleich, den Einfluss der etwa noch bei den Sternpositionen Statt findenden Unsicherheiten zu schätzen; man braucht nur unter D, D', D'' die Fehler dieser Positionen in der Richtung der drei Vertical-Kreise und in Secunden des grössten Kreises zu verstehen, um sogleich die gefundenen Formeln für den Einfluss derselben gebrauchen zu können. Es sind nemlich D, D', D'' die Unterschiede der Höhen, die der Stellung des Sextanten entsprechen, von den Höhen derjenigen Punkte der Himmelskugel, welche die bei der Rechnung zum Grunde gelegten geraden Aufsteigungen und Abweichungen haben, und es ist begreiflich einerlei, ob sie bei völliger Übereinstimmung der Sterne mit diesen Punkten von den Fehlern der Beobachtungen, oder bei völlig genauen Beobachtungen von kleinen Unterschieden zwischen den Sternen und jenen Punkten herrühren. Schliesslich bemerke ich noch, dass die Summe der Coëfficienten in jeder der beiden Formeln für den Fehler der Polhöhe, so wie auch in der zweiten für den Fehler der Zeitbestimmung immer $= 0$, hingegen in der ersten Formel für den Fehler der Zeitbestimmung $= 1$ wird, wovon man den Grund bei einigem Nachdenken leicht finden wird.

GAUSS AN VON LINDENAU.

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgegeben vom Freiherrn VON ZACH. Januar 1809.

Göttingen, den 30. November 1808.

Für die mir von Ew. Hochwohlgeb. gütigst mitgetheilten Beobachtungen der Ceres und Juno statte ich Ihnen den verbindlichsten Dank ab. Auch für die Marseiller Cometen-Beobachtungen bin ich Ihnen verbunden, obwohl in denselben *sehr* grosse Fehler begangen zu sein scheinen, und sich daher aus denselben nicht leicht etwas schliessen lassen wird. Heute ist meine Absicht, Ihnen noch einige Anmerkungen über das Problem mitzutheilen, worüber Sie meinen Aufsatz in das October-Heft der *Monatl. Corresp.* aufgenommen haben. *Dieses* Problem ist es eigentlich nicht, was ich *reisenden* Beobachtern vorzüglich empfehlen möchte, sondern mehr dasjenige, welches ich im Anfange jenes Aufsatzes erwähnt und in einem vor kurzem hier gedruckten Programm behandelt habe, wovon ich ein Exemplar beizulegen mir das Vergnügen mache. Das in der *Monatl. Corresp.* abgehandelte Problem wird vorzüglich für solche Beobachter brauchbar sein, die ihren Beobachtungs-Ort mit einem nicht ganz vollkommnen Werkzeuge möglichst scharf bestimmen und zugleich die Fehler des letztern ausmitteln wollen. In diesem Falle hat es gar keine Schwierigkeit, leicht für jede Stunde eine Menge brauchbarer Sterne auszumitteln, wenn man sich voraus für die kenntlichsten Sterne eine Tabelle für die Höhen berechnet, die auch sonst nützlich sein und sehr bequem in die Gestalt einer Karte gebracht werden kann. Man hat gar nicht nöthig sich auf Sterne erster Grösse einzuschränken. Sie sehen aus meinem Beispiele; dass Sterne zweiter Grösse sich auch anwenden lassen, und bei einiger Übung kann man, wenn kein Mondschein ist, sogar Sterne dritter und vierter Grösse noch füglich beobachten, obwohl man dann freilich mehr Sorgfalt nöthig hat, *Verwechslungen* zu vermeiden. Was nun meine Auflösung selbst betrifft, so ist es diejenige, auf die ich sofort von selbst verfiel, als ich ein zur wirklichen Ausübung möglichst bequemes Verfahren suchte, und es fiel mir nicht ein anderswo Auflösungen einer Aufgabe zu suchen, mit der meines Wissens sich noch Niemand beschäftigt hatte. Erst als ich meinen Aufsatz schon abgesandt hatte, fiel es mir auf, dass ein anderes dem Zwecke nach zwar sehr verschiedenes Problem, doch in Ansehung der Auflösung im Wesentlichen mit jenem ganz einerlei ist, das nemlich, wo aus drei *heliocentrischen* Örtern eines Sonnenfleckens die Lage des Sonnen-Äquators und zugleich die Declination des Fleckens gesucht wird; letztere entspricht dann in unserer Aufgabe der Höhe h. Mit diesem Problem haben sich bekanntlich eine grosse Menge Geometer beschäftigt, unter denen indessen Niemand eine so zierliche Auflösung gegeben hat, wie CAGNOLI. LA LANDE führt dieselbe in seiner Astronomie an. In Ansehung der Eleganz ziehe ich diese Auflösung der meinigen vor, obwohl ich glaube, dass die Auflösung selbst aus den drei Fundamentalgleichungen zierlicher abgeleitet werden kann, als CAGNOLI sie entwickelt hat. Auch in Ansehung der practischen Bequemlichkeit stehen alle übrigen von LA LANDE angeführten Auflösungen der von CAGNOLI weit nach. Die meinige würde noch etwas bequemer sein, wenn man blos φ und k sucht, hingegen würde die von CAGNOLI etwas kürzer sein, wenn man auch h mit verlangt; im ersten Falle brauche ich 18, CAGNOLI 21, im zweiten ich 24, CAGNOLI wieder nur 21 Logarithmen; doch ist zu bemerken, dass bei CAGNOLI alle 21 zu fast eben so vielen, nemlich zu 19 *verschiedenen* Winkeln gehören, da hingegen bei meiner Auflösung von vielen Winkeln, Sinus und Cosinus oder andere trigonometrische Functionen zugleich aufgesucht werden (so dass, wenn blos φ und k gesucht werden, an 14, und wenn auch h mit verlangt wird, an 18 verschiedenen Stellen der Tafeln aufgeschlagen wird), welches allerdings einen Unterschied macht, zumal wenn man sich der schönen TAYLORschen Tafeln bedient, wo die ganze Arbeit sich fast blos auf das Aufschlagen reducirt. Die Formeln für unsere Aufgabe nach CAGNOLIS Auflösung waren folgende:

Man berechne drei Hülfswinkel A, A', A'' durch die Gleichungen

$$\operatorname{tang} A = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta''-\delta')}{\cos\frac{1}{2}(\delta''+\delta')} \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}(t''-t')$$

$$\operatorname{tang} A' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta'')}{\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta'')} \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}(t-t'')$$

$$\operatorname{tang} A'' = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta'+\delta)} \operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}(t'-t)$$

mache sodann

$$\operatorname{tang} B = \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta'+\delta)} \operatorname{cotang}(A-A')$$

so ist

$$k = \tfrac{1}{2}(t'+t) - B$$

Man setze ferner $A'+A''-A = C$ und mache

$$\operatorname{tang} D = \frac{\cos\frac{1}{2}(t-k+C)}{\cos\frac{1}{2}(t-k-C)} \operatorname{tang}(45^0+\tfrac{1}{2}\delta)$$

$$\operatorname{tang} E = \frac{\sin\frac{1}{2}(t-k-C)}{\sin\frac{1}{2}(t-k+C)} \operatorname{cotg}(45^0+\tfrac{1}{2}\delta)$$

so ist *)

$$\varphi = D+E, \qquad h = D-E$$

Eine Unbequemlichkeit bei dieser Methode ist, dass man nicht bequem im voraus eine bestimmte Regel geben kann (in so fern man blos nach den analytischen Formeln ohne eine Figur rechnet, ohne von den Beobachtungen etwas weiter als die Uhrzeiten zu entlehnen, also ohne im voraus zu wissen, auf welchen Seiten des Meridians die drei Sterne beobachtet sind), in welchem Halbkreise man die Winkel A, A', A'', B, D, E nehmen müsse, welches bekanntlich die Bestimmung durch die Tangenten für sich unentschieden lässt. Indessen lässt sich zeigen, dass man hiebei einstweilen willkürlich verfahren darf, nur wird man dann in einigen Fällen noch folgende Änderungen machen müssen.

1) Muss man statt k, $k+180^0$ oder, welches hier einerlei ist, $k-180^0$ setzen, wenn man für φ und h solche Werthe erhalten hat, dass $\cos\varphi$ und $\sin h$ mit entgegengesetzten Zeichen afficirt sind.

*) [Handschriftliche Bemerkung:]

$$\frac{\cos\varphi}{\cos h}\sin(t-k) = \sin(A'+A''-A)$$

$$\frac{\cos\varphi}{\cos h}\sin(t'-k) = \sin(A''+A-A')$$

$$\frac{\cos\varphi}{\cos h}\sin(t''-k) = \sin(A+A'-A'')$$

2) Statt h und φ, wenn man dafür ausserhalb der Grenzen 0 und 90^0 liegende Werthe finden sollte, setzt man ihren Unterschied von dem zunächst liegenden Vielfachen von 180^0.

3) Die Polhöhe ist als nördlich oder südlich zu betrachten, je nachdem $\sin\varphi$ und $\sin h$ gleiche oder entgegengesetzte Zeichen erhalten haben.

Gäben also z. B. obige Formeln $\varphi = 231^0$, $h = -127^0$, so wäre die wirkliche Polhöhe 51^0 und die wirkliche Höhe 53^0. Der Werth von k hingegen bliebe ungeändert, hingegen hätte man gefunden $\varphi = 231^0$, $h = +127^0$, so musste k um 180^0 vermehrt oder vermindert werden. Begreiflich ist dies blos der analytischen Vollständigkeit wegen bemerkt, denn wenn k einer Änderung von 180^0 bedarf, so ist dies ohnehin klar, da man beim Stande der Uhr um 12 Stunden nicht ungewiss ist.

Der Vergleichung wegen lege ich noch den numerischen Calcul für dasselbe Beispiel nach obigen Formeln bei.

Berechnung des Beispiels nach Cagnolis Methode.

$\frac{1}{2}(\delta''-\delta') = -\ 24^0\ 49'\ 59''55$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(\delta''+\delta') = 63^0\ 27'\ \ 6''15$
$\frac{1}{2}(\delta-\delta'') = -\ \ 5\ 17\ 25.90$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(\delta+\delta'') = 33\ 19\ 40.70$
$\frac{1}{2}(\delta'-\delta) = +\ 30\ \ 7\ 25.45$ $\qquad$ $\frac{1}{2}(\delta'+\delta) = 58\ \ 9\ 40.25$

$\frac{1}{2}(t''-t') = -129\ 41\ 39.45$
$\frac{1}{2}(t-t'') = +135\ \ 0\ \ 4.72$
$\frac{1}{2}(t'-t) = -\ \ 5\ 18\ 25.27$

$\log\sin\frac{1}{2}(\delta''-\delta')$	9.6232267 n	
Compl. $\log\cos\frac{1}{2}(\delta''+\delta')$.	0.3497391	
$\log\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(t''-t)$ . . .	9.9191030	
$\log\operatorname{tang} A$	9.8920688 n	$A = 142^0\ \ 2\ \ 50''70$
$\log\sin\frac{1}{2}(\delta-\delta'')$	8.9647590 n	
Compl. $\log\cos\frac{1}{2}(\delta+\delta'')$.	0.0780332	
$\log\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(t-t')$ . . .	0.0000199 n	
$\log\operatorname{tang} A'$	9.0428121	$A' = 6^0\ 17'\ 51''34$

$\log\sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)$	9.7005892	
Compl. $\log\cos\frac{1}{2}(\delta'+\delta)$.	0.2777516	
(*)	9.9783408	
$\log\operatorname{cotang}\frac{1}{2}(t'-t)$ . . .	1.0320274	
$\log\operatorname{tang} A''$	1.0103682 n	$A'' = 95^0\ 34'\ 36''24$
		$A - A' = 135\ \ 44\ \ 59.36$
		$C = -40\ \ 10\ \ 23.12$
(*)	9.9783408	
$\log\operatorname{cotang}(A-A')$ . . .	0.0113684 n	
$\log\operatorname{tang} B$	9.9897092 n	$B = 315^0\ 40'\ 43''55$
		$\frac{1}{2}(t+t') = 318\ \ 24\ \ 44.78$
		$k = 2\ \ 44\ \ \ 1.23$
		$\frac{1}{2}(t-k+C) = 140\ \ 24\ \ 22.85$
		$\frac{1}{2}(t-k-C) = 180\ \ 34\ \ 45.97$
		$45^0+\frac{1}{2}\delta = 59\ \ \ 1\ \ \ 7.40$
$\log\cos\frac{1}{2}(t-k+C)$ . .	9.8868199 n	
Compl. $\log\cos\frac{1}{2}(t-k-C)$	0.0000222 n	
$\log\operatorname{tang}(45^0+\frac{1}{2}\delta)$ . . .	0.2215478	
$\log\operatorname{tang} D$	0.1083899	$D = 52^0\ \ 4'\ 36''35$
$\log\sin\frac{1}{2}(t-k-C)$ . .	8.0048736 n	
Compl. $\log\sin\frac{1}{2}(t-k+C)$	0.1956297	
$\log\operatorname{cotang}(45^0+\frac{1}{2}\delta)$ . .	9.7784522 n	
$\log\operatorname{tang} E$	7.9789555 n	$E = -\ 0^0\ 32'\ 45''02$
		Also $\varphi = 51\ \ 31\ \ 51.33$
		$h = 52\ \ 37\ \ 21.37$

GAUSS AN VON LINDENAU.

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgegeben vom Freiherrn von Zach. September 1808.

Göttingen am 30. August 1808.

— — — — — — — — — — — — — — — —

Ich nehme mir die Ehre, Ihnen hier für die *Mon. Corresp.* [S. 141 d. B.] einen Aufsatz über eine Aufgabe zu schicken, deren practische Anwendung sehr empfohlen zu werden verdient. Es scheint mir, dass dieses Verfahren, die Pol-Höhe zu bestimmen, in der Ausübung eine sehr grosse Schärfe verträgt, und wenn man nicht mit Vervielfältigungs-Kreisen zu beobachten Gelegenheit hat, die zuverlässigsten Resultate gibt. Wenigstens fallen alle diejenigen Umstände weg, die bei dem gewöhnlichen Verfahren durch Sonnen-Höhen die Resultate zuweilen zweifelhaft machen können, Ablesen, Fehler des Sextanten, Blendgläser, Glasdach, Refraction. Zwar gibt jede Combination von drei Sternen immer nur ein Resultat, aber wenn man bei Meridian-Höhen der Sonne auch die Beobachtungen noch so sehr vervielfältigt, so bleiben doch die von den erwähnten Umständen herrührenden Fehler, den ersten ausgenommen, immer in ihrer ganzen Stärke zurück; auch hindert ja nichts, dieselben Beobachtungen in mehrern Nächten zu wiederholen und selbst in einer Nacht mehrere Combinationen zu machen, wenn man sie so auswählt, dass die drei Beobachtungen in nicht zu grossen Zwischenräumen auf einander folgen. In der gestrigen Nacht habe ich die drei Sterne, die im Reispiel der Abhandlung angeführt sind, noch einmal in

einer etwas verschiedenen Höhe beobachtet und für die Polhöhe $51^0\,31'\,54''4$ *) gefunden. Die drei Resultate sind folgende:

August 25	.	51^0	$31'$	$56''7$
27	.	51	31	51.5
30	.	51	31	54.4
im Mittel	.	51	31	54.2

genau wie Mayer unsere Polhöhe bestimmt hat. Wenn man auch diesen Grad von Übereinstimmung zum Theil hier zufällig halten muss, so glaube ich doch, dass man durch öftere Wiederholung und Vervielfältigung der Beobachtungen mit gut bestimmten Sternen sich der wahren Pol-Höhe immer auf wenige Secunden nähern kann. Alles hängt blos von der Vergrösserung und Deutlichkeit des Fernrohrs und der Achtsamkeit des Beobachters ab. Aus Meridian-Höhen der Sonne, die immer unter sich vortrefflich stimmten, hatte ich zur Zeit der Sonnenwende mehreremal mit einem Sextanten $51^0\,32'\,32''$ gefunden, also über eine halbe Minute fehlerhaft. Ob der Fehler meines Sextanten blos daher rührt, dass der ganze Bogen zu gross ist, habe ich noch nicht hinlänglich geprüft; indess wird das gerade durch die von mir empfohlene Methode sehr leicht künftig geschehen können.

*) Fehler des Sextanten bei $105°\,52' = -49''4$.

SUMMARISCHE ÜBERSICHT DER ZUR BESTIMMUNG DER BAHNEN DER BEIDEN NEUEN HAUPTPLANETEN ANGEWANDTEN METHODEN*).

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgegeben vom Freiherrn von Zach. September 1809.

1.

Die von Kreis- und Parabel-Hypothesen unabhängige Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus einer kurzen Reihe von Beobachtungen beruht auf zwei Forderungen: I. Muss man Mittel haben, die Bahn zu finden, die drei gegebenen vollständigen Beobachtungen Genüge thut. II. Muss man die so gefundene Bahn so verbessern können, dass die Differenzen der Rechnung von dem ganzen Vorrath der Beobachtungen so gering als möglich werden.

*) Als ich vor einiger Zeit die persönliche Bekanntschaft des Hrn Prof. Gauss zu machen das Glück hatte, sah ich unter dessen Papieren den hier folgenden schon vor mehreren Jahren entworfenen und noch nirgends bekannt gemachten Aufsatz, der die frühere Methode des Verfassers zu Bestimmung der Planetenbahnen enthält. Da ich mich bei der flüchtigen Durchsicht dieser summarischen Übersicht bald überzeugte, dass die hier von dem Verfasser entwickelte Methode zu erster genäherter Bestimmung zweier Distanzen des Planeten von der Erde wesentlich von der verschieden sei, die der Verfasser nun in seinem grössern Werk öffentlich dargelegt hat, so bat ich ihn um die Erlaubniss, diesen Aufsatz bekannt machen zu dürfen, in der Voraussetzung, dass es allen Kennern interessant sein muss, die verschiedenen Wege zu kennen, auf denen es dem Verfasser gelungen ist, zu der vollendeten Auflösung zu gelangen, von der wir unsern Lesern im vorigen Hefte eine Übersicht mitgetheilt haben. Ich hatte anfangs die Absicht, den Aufsatz mit einigen Bemerkungen zum Behuf einer Vergleichung der frühern und spätern Methode des Verfassers zu begleiten; allein da diese, hätten sie wirklich erläuternd sein sollen, etwas weitläufig und ohne Hinweisung auf das Werk selbst doch immer undeutlich geblieben wären, so schien es mir zweckmässiger, den ganzen Aufsatz (der denn doch mehr für Kenner bestimmt ist, die das Werk selbst dabei zur Hand haben), so wie er vor sechs Jahren vom Verfasser niedergeschrieben wurde, ohne allen fernern Beisatz, den astronomischen Lesern dieser Zeitschrift mitzutheilen. von Lindenau.

Die bequemste Art der II^ten Forderung Genüge zu leisten, scheint ihre Zurückführung auf die I^ste zu sein. Es seien für die Zeiten t, t', t'' u. s. w. die beobachteten Orte m, m', m'' (deren jeder zweifach sein wird); die nach bekannten Elementen e (sechsfach anzusehn) berechneten Örter p, p', p'' u. s. w., endlich die nach (noch als unbestimmt anzusehenden) Elementen f berechneten Örter q, q', q'' u. s. w. Die Differenzen der Elemente e sind also

$$p-m,\quad p'-m',\quad p''-m'' \quad \text{u. s. w.}$$

Die Differenzen der Elemente f hingegen

$$(p-m)+(q-p),\quad (p'-m')+(q'-p'),\quad (p''-m'')+(q''-p'') \quad \text{u. s. w.}$$

Diese letztern sollen nun so klein als möglich werden und keine Regularität behalten.

Die Differenzen $q-p$, $q'-p'$ u. s. w. sind, in so fern man die Elemente f als beständig ansieht, Functionen der Zeit, und da sie der Natur der Sache nach an sich klein sein werden, so darf man bei der kurzen Dauer der Beobachtungen voraussetzen, dass sie, wenn man sie für zwei äussere und eine mittlere als gegeben annimmt, für die zwischenliegenden Zeiten hinreichend genau durch Interpolation gefunden werden. Man bezeichne sie für jene drei Zeiten durch x, y, z (jeder als zweifach anzusehen), so werden sie nach bekannten Gründen der Interpolationstheorie eine linearische Form haben $\alpha x+\beta y+\gamma z$, wo die Coëfficienten α, β, γ von der Zeit abhängen. Diese Differenzen der Elemente f werden also für die Zeiten t, t', t'' u. s. w. die Gestalt haben:

$$\begin{aligned} &p-m+\alpha x+\beta y+\gamma z \\ &p'-m'+\alpha' x+\beta' y+\gamma' z \\ &p''-m''+\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

wo alles ausser x, y, z bekannt ist. Man wird alsdann leicht beurtheilen können, welches die zweckmässigsten Werthe für x, y, z sind. *Es lässt sich zwar eine ganz methodische Anweisung geben, diese Werthe durch Rechnung zu finden;* allein ein gewisser Tact wird immer eben so sicher leiten.

Da also offenbar, so bald x, y, z bestimmt sind, die II^te Forderung auf die erste zurückgeführt ist, so können wir uns blos auf diese einschränken.

Bestimmung der Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen.

2.

Es würde zwar nicht schwer fallen, die Relation der sechs unbekannten Grössen zu den gegebenen in sechs Gleichungen darzustellen. Allein da dieselben viel zu unbehülflich ausfallen, um im geringsten brauchbar zu sein, so muss man sich begnügen, stufenweise zu derjenigen Bahn zu gelangen, die die drei Beobachtungen genau darstellt. Offenbar müssen alle überhaupt hiezu dienliche Methoden am Ende einerlei Resultat geben; die Güte des Endresultats ist also kein Maassstab für den Werth der Methode, sondern nur für die Schärfe der zum Grunde gelegten Beobachtungen. Der Werth der Methode kann nur nach der Anzahl und Bequemlichkeit der Stufen geschätzt werden, und eine Methode, wodurch man zu einer genauen Darstellung der drei Beobachtungen nicht allezeit nach Gefallen gelangen könnte, würde nicht eine schlechtere, sondern gar keine Methode sein.

Die Untersuchung zerfällt also in zwei Theile, eine *erste Annäherung* und die *Correctionsmethoden*. Jene wird sich auf gewisse aus der Natur des Problems geschöpfte, beinahe wahre Relationen gründen, welche von der Art sind, dass sie desto weniger fehlen, je näher die Beobachtungen einander liegen, und, mathematisch zu reden, für unendlich nahe Beobachtungen streng genau sind. Man weicht daher allerdings dem Einflusse ihrer Abweichung von der Wahrheit desto mehr aus, je nähere Beobachtungen man zum Grunde legt, wodurch die Correctionsmethoden desto mehr erleichtert oder gar entbehrlich gemacht werden. Allein dabei hat man zu erwägen, dass bei nahen Beobachtungen geringe Fehler der Beobachtungen sehr stark, zuweilen enorm auf die Elemente wirken, und daher die nachmalige Verbesserung nach der ganzen Beobachtungsreihe, die oben mit dem Namen der zweiten Forderung bezeichnet ist, desto schwieriger ausfällt. Allgemeine Regeln lassen sich über die zweckmässigste Auswahl der Beobachtungen nicht wohl geben. Es ist dabei die Güte derselben, ihre mehr oder weniger vortheilhafte Lage, die Art der Bahn selbst in Betracht zu ziehen. Bei der Ceres liessen sich mit gutem Erfolg sogleich die äussersten 41 Tage entfernten Beobachtungen zur ersten Annäherung anwenden, und die Correctionsrechnungen waren gar nicht beschwerlich. Auch bei Berechnung der II^ten Pallasbahn wurden die vorhergegangenen Näherungen nicht benutzt, sondern die erste

Annäherungsmethode sogleich von neuem auf die 27tägigen Beobachtungen angewandt. Bei Bahnen, die der Parabel näher kämen, und wo die geocentrische Bewegung sehr schnell ist, würde man wohl lieber mit etwas kürzern Zwischenzeiten den Anfang machen. Eine durch Erfahrung geübte Beurtheilung ist hier die beste Führerin.

Hauptmomente der ersten Annäherung.

Erstes Moment.

Genäherte Bestimmung der Abstände von der Erde in den beiden äussern Beobachtungen.

3.

Um bei der grossen Anzahl der in folgender Untersuchung nöthigen Zeichen die Übersicht zu erleichtern, sollen analoge Dinge bei der Erde P und dem beobachteten Planeten p durchaus mit einerlei Charakteren angedeutet werden, nur bei jener mit grossen, bei diesem mit kleinen. Kommt einerlei Buchstabe sowohl ohne Accent als mit einem und zweien vor, so hat man vorauszusetzen, dass der zweite und dritte eine ähnliche Beziehung auf eine zweite und dritte Beobachtung für die Zeiten τ', τ'' haben, wie der erste auf die Beobachtung von der Zeit τ. Übrigens ist an sich nicht nöthig, dass die Zeit τ' zwischen τ und τ'' falle; inzwischen ist der Gebrauch der folgenden Vorschriften am vortheilhaftesten, wenn τ' ungefähr zwischen τ und τ'' in der Mitte liegt.

S Ort der Sonne (im Raum) als unbeweglich betrachtet. p Ort des Planeten p zur Zeit τ. Hieraus erklären sich p', p'', P, P', P''.

$\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ drei feste willkürliche Ebenen, die einander im Mittelpunkt der Sonne senkrecht schneiden.

x, y, z die senkrechten Abstände des Planeten p von diesen drei Ebenen zur Zeit τ. Hieraus x', y', z'; x'', y'', z''; X, Y, Z; X', Y', Z'; X'', Y'', Z''.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x - X \\ \eta &= y - Y \\ \zeta &= z - Z \end{aligned}\right| \quad \text{Hieraus } \xi', \eta', \zeta';\ \xi'', \eta'', \zeta''$$

Es sind also ξ, η, ζ die senkrechten Abstände des Planeten p von drei beweglichen mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ parallel durch P gelegten Ebenen.

r		des p		S	alle positiv.
R	Abstände	des P	von	S	Hieraus r' u.s.w.
ρ		des p		P	

b		Sp		$\mathfrak{Z}$
B	Winkel der Linie	SP	mit der Ebene	$\mathfrak{Z}$
β		Pp		die $\mathfrak{Z}$ parallel ist

$d = r\cos b$	d. i. projicirte Abstände auf die Ebene $\mathfrak{Z}$
$D = R\cos B$	und die ihr parallele
$\delta = \rho\cos\beta$	

l		$\mathfrak{Y}$
L	Winkel dieser Projection mit der Ebene	$\mathfrak{Y}$
λ		die $\mathfrak{Y}$ parallel.

Die Winkel b und l sind auf eben den Seiten von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Y}$ als positiv anzunehmen, auf welchen man z und y als positiv ansieht. Die Winkel b kann man immer zwischen den Grenzen -90^0, $+90^0$ lassen (dass die d u.s.w. immer positiv bleiben); die Winkel l hingegen kann man von 0 bis 360^0 wachsen lassen, und zwar so, dass man sie da $\left\{ {0 \atop 180^0} \right\}$ setzt, wo die x $\left\{ {\text{positiv} \atop \text{negativ}} \right\}$ sind. Auf die Weise hat man

$x = r\cos b\cos l = d\cos l$	und ähnliche Gleichungen für
$y = r\cos b\sin l = d\sin l$	x' u.s.w. X u.s.w. ξ u.s.w.
$z = r\sin b \quad = d\,\mathrm{tang}\, b$	

Die Bahnen von p und P nehmen wir in Ebenen an, indem wir von den fremden Einwirkungen, wodurch sie afficirt werden, abstrahiren. Wir setzen Länge von p in der Bahn zur Zeit τ, $= v$ (also v', v''; V, V', V''); und machen $\frac{1}{2} r'r'' \sin(v''-v') = f$, $\frac{1}{2} r''r \sin(v-v'') = f'$, $\frac{1}{2} rr' \sin(v'-v) = f''$. Es sind folglich f, $-f'$, f'' die Flächen der Dreiecke $p'Sp''$, pSp'', pSp' positiv (vorausgesetzt, dass p rechtläufig ist und τ' zwischen τ und τ'' liegt; das Arrangement der Zeichen für andere Fälle hat keine Schwierigkeit). Auf ähnliche Art F, F', F''. Durch g, $-g'$, g'', G, $-G'$, G'' bezeichnen wir die Flächen der Ausschnitte aus der ganzen Bahn, die diesen Dreiecken entsprechen, deren Zeichen wir denen von f, $-f'$, f'', F, $-F'$, F'' gleich voraussetzen. Es sind daher g, g', g'' und G, G', G'' den Zeitintervallen $\tau''-\tau'$, $\tau-\tau''$, $\tau'-\tau$ proportional.

Die Bahnen von p und P sind Kegelschnitte, deren halbe grosse Achsen wir mit a, A bezeichnen. Die Excentricität der Bahn von p machen wir $= e = \sin\varphi$ (für eine Ellipse); daher $a\cos\varphi^2 = k$ der halbe Parameter wird. Länge der Sonnenferne von p in der Bahn $= \pi$. Mittlere Länge $= m$ (daher m', m'', M, M', M''). Andere Zeichen sollen im Verfolg der Untersuchung selbst angezeigt werden.

4.

Daraus, dass p, p', p'' mit S in einer Ebene sind, folgt nach einem bekannten Lehrsatz

$$0 = xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z$$

und hieraus, dass von folgenden neun Grössen

$$\begin{array}{ccc} y'z''-y''z' & y''z-yz'' & yz'-y'z \\ z'x''-z''x' & z''x-zx'' & zx'-z'x \\ x'y''-x''y' & x''y-xy'' & xy'-x'y \end{array}$$

die drei obern den drei mittlern und den drei untern resp. proportional sind. Man wird sich leicht überzeugen,

I. Dass eben diesen Grössen auch f, f', f'' proportional sind, da die drei obern, mittlern, untern nur das doppelte Areal der Projection der Dreiecke, deren Inhalt f, f', f'' sind, auf die Fundamental-Ebenen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, vorstellen und sich also zu diesen verhalten wie die doppelten Cosinus der Neigung der Bahn von p gegen jene Ebene zur Einheit (In einer vollständigen Abhandlung würden hier noch Erinnerungen wegen der Zeichen nöthig sein, die man aber auch durch blossen Calcul leicht umgehen kann).

II. Dass, wenn man die drei obern, die drei mittlern oder die untern mit x, x', x'', mit y, y', y'' oder mit z, z', z'' multiplicirt, die Summe der Producte $= 0$ wird. Hieraus lässt sich leicht schliessen

$0 = fx + f'x' + f''x''$	Durch ganz	$0 = FX + F'X' + F''X''$
$0 = fy + f'y' + f''y''$	analoge Schlüsse	$0 = FY + F'Y' + F''Y''$
$0 = fz + f'z' + f''z''$	hat man	$0 = FZ + F'Z' + F''Z''$

Hieraus lassen sich leicht folgende drei Gleichungen ableiten

$$(F+F'')(f\xi+f'\xi'+f''\xi'')$$
$$= (Ff''-F''f)(X-X'')+[F'(f+f'')-(F+F'')f']X'$$
$$(F+F'')(f\eta+f'\eta'+f''\eta'')$$
$$= (Ff''-F''f)(Y-Y'')+[F'(f+f'')-(F+F'')f']Y'$$
$$(F+F'')(f\zeta+f'\zeta'+f''\zeta'')$$
$$= (Ff''-F''f)(Z-Z'')+[F'(f+f'')-(F+F'')f']Z'$$

Aus diesen drei Gleichungen leiten wir vier andere ab, indem wir sie respective

zuerst mit	dann mit	dann mit	endlich mit	multipli-
$\eta\zeta''-\eta''\zeta$	$\eta Z'-Y'\zeta$	$\eta' Z'-Y'\zeta'$	$\eta'' Z'-Y'\zeta''$	ciren und
$\zeta\xi''-\zeta''\xi$	$\zeta X'-Z'\xi$	$\zeta' X'-Z'\xi'$	$\zeta'' X'-Z'\xi''$	d. Producte
$\xi\eta''-\xi''\eta$	$\xi Y'-X'\eta$	$\xi' Y'-X'\eta'$	$\xi'' Y'-X'\eta''$	addiren.

Zur bequemen Übersicht bezeichnen wir die Summen der Producte, die entstehen

					nach d. Multiplication dieser Factoren mit
	*	*	$\delta'\delta D'[\pi'\pi P']$	$\delta''\delta D'[\pi''\pi P']$	$\xi,\ \eta,\ \zeta$
$[\pi\pi'\pi'']$	$\delta\delta'\delta''\times[\pi\pi'\pi'']$	$\delta\delta' D'[\pi\pi' P']$	*	$\delta''\delta' D'[\pi''\pi' P']$	$\xi',\ \eta',\ \zeta'$
	*	$\delta\delta'' D'[\pi\pi'' P']$	$\delta'\delta'' D'[\pi'\pi'' P']$	*	$\xi'',\ \eta'',\ \zeta''$
$[\pi P\pi'']$	$\delta D\delta''[\pi P\pi'']$	$\delta DD'[\pi PP']$	$\delta' DD'[\pi' PP']$	$\delta'' DD'[\pi'' PP']$	$X,\ Y,\ Z$
$[\pi P'\pi'']$	$\delta D'\delta''[\pi P'\pi'']$	*	*	*	$X',\ Y',\ Z'$
	$\delta D''\delta''[\pi P''\pi'']$	$\delta D'' D'[\pi P'' P']$	$\delta' D'' D'[\pi' P'' P']$	$\delta'' D'' D'[\pi'' P'' P']$	$X'',\ Y'',\ Z''$

Es ist klar, dass in die hier mit * ausgefüllten Stellen 0 kommen müsse, und dass alle durch eingeklammerte Zeichen angedeuteten Grössen *gegeben* sind. Nemlich

$$[\pi\pi'\pi''] = \operatorname{tang}\beta\sin(\lambda'-\lambda'')+\operatorname{tang}\beta'\sin(\lambda''-\lambda)+\operatorname{tang}\beta''\sin(\lambda-\lambda')$$
$$[\pi P\pi''] = \operatorname{tang}\beta\sin(L-\lambda'')+\operatorname{tang}B\sin(\lambda''-\lambda)+\operatorname{tang}\beta''\sin(\lambda-L)$$

u. s. w.

Es ist nicht nöthig alle 16 Gleichungen herzusetzen, da sie alle auf analoge Art aus der ersten abgeleitet werden können, indem man nur β mit $\beta', \beta'', B, B', B''$ und λ mit $\lambda', \lambda'', L, L', L''$ vertauscht, wenn an der Stelle von π resp. π', π'', P, P', P'' steht u. s. f. Zugleich sieht man, dass die 16 Grössen sich auf 12 reduciren, da

$$+[\pi P'\pi''] = -[\pi\pi'' P'] = +[\pi''\pi P']$$
$$[\pi\pi' P'] = -[\pi'\pi P']$$
$$[\pi''\pi' P'] = -[\pi'\pi'' P']$$

Ferner erkennt man leicht, dass der Ausdruck $[\pi\pi'\pi'']$, multiplicirt in das Product aus den drei Cosinussen der darin vorkommenden Breiten, der sechsfache Inhalt einer Pyramide ist, deren Spitze in den Mittelpunkt und die drei Winkelpunkte der Basis in die Oberfläche einer mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kugel so fallen, dass sie den drei geocentrischen Örtern von p entsprechen, und zwar wird jenes Zeichen den sechsfachen Werth positiv oder negativ angeben, je nachdem jene drei geocentrischen Örter auf der Sphäre in entgegengesetzter oder gleicher Ordnung (sens) liegen, wie die positiven*) Pole der Ebenen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ resp. Und ganz ähnliche Dinge drücken die übrigen Zeichen aus.

Auf diese Weise entspringen folgende vier Gleichungen:

1) $(F+F'')f'\delta'[\pi\pi'\pi'']$
$= (Ff''-F''f)(D[\pi P\pi'']-D''[\pi P''\pi''])+(F'(f+f'')-(F+F'')f')D'[\pi P'\pi'']$

2) $(F+F'')(f'\delta'[\pi\pi' P']+f''\delta''[\pi\pi'' P']) = (Ff''-F''f)(D[\pi PP']-D''[\pi P''P'])$

3) $(F+F'')(f\delta[\pi'\pi P']+f''\delta''[\pi'\pi'' P']) = (Ff''-F''f)(D[\pi' PP']-D''[\pi' P''P'])$

4) $(F+F'')(f\delta[\pi''\pi P']+f'\delta'[\pi''\pi' P']) = (Ff''-F''f)(D[\pi'' PP']-D''[\pi'' P''P'])$

5.

Wir wollen nun diese vier Gleichungen, die streng richtig sind, näher betrachten, um darauf die erste Annäherung zu gründen. Betrachten wir die Zwischenzeiten als unendlich kleine Grössen der ersten Ordnung, so sind f, f', f'', G, G', G'' und alle eingeklammmerte Grössen von derselben ersten Ordnung mit Ausnahme von $[\pi\pi'\pi'']$, welches von der dritten Ordnung ist. Die Beweise, so wie die sich leicht darbietenden Bemerkungen über specielle Ausnah-

*) Ich erlaube mir diesen leicht verständlichen Ausdruck der Kürze wegen. Der positive Pol von $\mathfrak{X}$ liegt auf der Seite dieser Ebene, wo die x positiv gezählt werden u. s. f.

men, übergehe ich. Müsste man die Neigung der Bahnen von p und P gegen einander als Grössen der ersten Ordnung betrachten, so würden alle eingeklammerten Grössen eine Ordnung höher stehen. Ferner ist

$$Ff''-F''f = \frac{F}{G}\cdot\frac{f''}{g''}\,Gg''-\frac{F''}{G''}\cdot\frac{f}{g}\,G''g$$

oder (weil $Gg'' = G''g$)

$$= \left(\frac{F}{G}\cdot\frac{f''}{g''}-\frac{F''}{G''}\cdot\frac{f}{g}\right)Gg''$$

Nun ist $G-F$ eine Grösse der dritten Ordnung, daher $1-\frac{F}{G}$ eine der zweiten u. s. w. und folglich auch $\frac{F}{G}\cdot\frac{f''}{g''}-\frac{F''}{G''}\cdot\frac{f}{g}$ eine der zweiten und mithin $Ff''-F''f$ von der vierten (es würde sogar von der fünften sein, wenn τ' mitten zwischen τ und τ'' fiele). Was daher oben in der zweiten, dritten und vierten Gleichung rechts steht, ist von der fünften Ordnung, von dem, was links steht, ist sowohl der erste als der zweite Theil von der dritten, man kann also zur ersten Annäherung setzen

aus 2) $\qquad f'\delta'[\pi\pi'P'] = -f''\delta''[\pi\pi''P']$

aus 4) $\qquad f\delta[\pi\pi''P'] = -f'\delta'[\pi'\pi''P']$

Was aus 3) folgt, ist mit diesen Resultaten identisch. Zur fernern Abkürzung können wir hier noch $\frac{f}{g} = \frac{f''}{g''}$ setzen, welche Grössen beide von der Einheit nur um die zweite Ordnung, und eben so viel von einander verschieden sind (fällt τ' mitten zwischen τ und τ'', so ist die Differenz nur von der dritten). Da nun: $g : -g' : g'' = \tau''-\tau' : \tau''-\tau : \tau'-\tau$, so wird

5) $$\delta = \frac{g}{f}\cdot\frac{f'}{g'}\cdot\frac{\tau''-\tau}{\tau''-\tau'}\cdot\frac{[\pi'\pi''P']}{[\pi\pi''P']}\cdot\delta'$$

6) $$\delta'' = \frac{g''}{f''}\cdot\frac{f'}{g'}\cdot\frac{\tau''-\tau}{\tau'-\tau}\cdot\frac{[\pi\pi'P']}{[\pi\pi''P']}\cdot\delta'$$

Diese Formeln geben δ und δ'' aus δ' bis auf die zweite Ordnung richtig inclusive, wenn τ' mitten zwischen τ und τ'' liegt, sonst exclusive. Im letzten Falle kann man $\frac{f'}{g'} = 1$ setzen, da der Unterschied nur von der zweiten Ordnung ist; im ersten hingegen ist es der Mühe nicht unwerth

$$f' = g' + \tfrac{1}{4}(f+f'+f'') \quad \text{oder} \quad \frac{f'}{g'} = 1 + \tfrac{1}{4}\frac{f+f'+f''}{f'}$$

zu setzen, welches bald wird näher bestimmt werden und um 1 Ordnung genauer ist (Man sieht leicht, dass $f+f'+f''$ dem Dreiecke zwischen den drei Örtern

p, p', p'' gleich ist, also nach einer bekannten Annäherung $= \tfrac{2}{3} \times$ Abschnitt der krummen Fläche zwischen der Sehne pp'' und dem Bogen). Übrigens folgt aus obigen Formeln

$$\frac{\delta''}{\delta} = \frac{[\pi\pi'P']}{[\pi'\pi''P']}\cdot\frac{\tau''-\tau'}{\tau'-\tau}$$

welches, wenn man für ℨ die Ekliptik annimmt oder $B, B', B'' = 0$ setzt, sich in

$$\frac{\delta''}{\delta} = \frac{\operatorname{tang}\beta\,\sin(\lambda'-L')-\operatorname{tang}\beta'\,\sin(\lambda-L')}{\operatorname{tang}\beta'\sin(\lambda''-L')-\operatorname{tang}\beta''\sin(\lambda'-L')}\cdot\frac{\tau''-\tau'}{\tau'-\tau}$$

d. i. in die bekannte Olberssche Formel *)verwandelt.

6.

Nachdem wir aus den Formeln 2. 3. 4. geschmeidige Näherungen abgeleitet haben, nehmen wir auf ähnliche Weise die erste vor. Bekanntlich ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{k}\left(1-e\cos(v-\pi)\right)$$
$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{k}\left(1-e\cos(v'-\pi)\right)$$
$$\frac{1}{r''} = \frac{1}{k}\left(1-e\cos(v''-\pi)\right)$$

Hieraus folgt, wenn man mit $\sin(v''-v')$, $\sin(v-v'')$, $\sin(v'-v)$ multiplicirt und addirt:

$$\frac{f+f'+f''}{rr'r''} = \frac{1}{k}\left(\sin(v''-v')+\sin(v-v'')+\sin(v'-v)\right)$$
$$= -\frac{4}{k}\sin\tfrac{1}{2}(v''-v')\sin\tfrac{1}{2}(v-v'')\sin\tfrac{1}{2}(v'-v)$$

oder

$$\frac{f+f'+f''}{f'} = -\frac{2r'}{k}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(v''-v')\sin\frac{1}{2}(v'-v)}{\cos\frac{1}{2}(v''-v)}$$

Nach einem bekannten Lehrsatze aus der theorischen Astronomie ist

$$\frac{\text{Beschriebener Raum}}{\text{Mittlere Bewegung}} = \frac{a^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{k}}{2}$$

Mithin

$$k = \frac{4gg''}{a^3(m'-m)(m''-m')} = \frac{4gg''}{A^3(M'-M)(M''-M')}$$

*) Abhandlung über die leichteste Methode u. s. w. S. 45.

Also

$$\frac{f+f'+f''}{f'} = -\frac{A^3(M'-M)(M''-M)}{2\cos^2\frac{1}{2}(v''-v)}\cdot\frac{1}{r'^3}\cdot\frac{r'r'}{rr''}\cdot\frac{r'r''\sin\frac{1}{2}(v''-v')}{g}\cdot\frac{rr'\sin\frac{1}{2}(v'-v)}{g''}$$

$$\frac{f+f'+f''}{g'} = -\frac{r'r''\sin\frac{1}{2}(v''-v')}{g}\cdot\frac{rr''\sin\frac{1}{2}(v''-v)}{g'}\cdot\frac{rr'\sin\frac{1}{2}(v'-v)}{g''}\cdot\frac{A^3(M'-M)(M''-M)}{2r'^3}\cdot\frac{r'r'}{rr''}$$

Man folgert hieraus leicht, da

$$\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(v''-v)},\qquad \frac{r'r''\sin\frac{1}{2}(v''-v')}{g},\qquad \frac{rr'\sin\frac{1}{2}(v'-v)}{g'}$$

und, wenn entweder τ' in die Mitte von τ und τ'' fällt oder man den Unterschied der Bahn des p vom Kreise als von der ersten Ordnung betrachten kann, auch $\frac{r'r'}{rr''}$ von der Einheit nur um Grössen der zweiten Ordnung abweichen, dass man näherungsweise setzen dürfe

$$\frac{f+f'+f''}{f'} = -\frac{A^2}{2r'^3}(M'-M)(M''-M')$$

Auf gleiche Weise ist näherungsweise

$$\frac{F+F'+F''}{F'} = -\frac{A^2}{2R'^3}(M'-M)(M''-M')$$

Die letztere Grösse kann man, wenn man will, auch genau berechnen, da alles dazu gegeben ist. Beide sind von der zweiten Ordnung und bis auf die vierte excl. bestimmt. — Wir haben also

$$F'(f+f'') - (F+F'')f' = F'(f+f'+f'') - (F+F'+F'')f'$$
$$= F'f'\tfrac{1}{2}A^3(M'-M)(M''-M')\left(\tfrac{1}{R'^3}-\tfrac{1}{r'^3}\right)$$

Grösse der vierten Ordnung bis auf die sechste excl. bestimmt. In der Gleichung 1 oben, ist der Theil linker Hand von der fünften Ordnung; von dem Theile rechter Hand ist das erste Glied von der sechsten oder siebten Ordnung, nemlich $Ff''-F''f$ ist von der vierten oder fünften und $D[\pi P\pi''] - D''[\pi P''\pi'']$ ist von der zweiten*), das zweite von der fünften, wir lassen also jenes weg und bekommen dadurch

7) $$\frac{[\pi\pi'\pi'']}{[\pi P'\pi'']}\cdot\frac{2}{A^3(M'-M)(M''-M')} = \left(\frac{1}{R'^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\frac{R}{\delta'}$$

*) Hier ist nemlich wirkliche Subtraction, da $[\pi P\pi'']$, $[\pi P''\pi'']$ einerlei Zeichen haben; dies ist bei den Coëfficienten von $Ff''-F''f$ in den Gleichungen 2. 3. 4. nicht der Fall, sondern die Theile werden da eigentlich addirt. Eine tiefere Untersuchung wäre hier zu weitläufig.

bis auf Grössen der zweiten excl. richtig, wenn τ' zwischen τ und τ'' in die Mitte fällt; sonst nur um Grössen der ersten unrichtig. Diese Formel, welche folgende Gestalt erhält, wenn wir für $\mathfrak{Z}$ die Ekliptik nehmen, ist der wichtigste Theil der ganzen Methode und ihre erste Grundlage.

$$\left\{1-\left(\frac{R'}{r'}\right)^3\right\}\cdot\frac{R'}{\delta'} = \frac{2}{A^3.(M'-M)(M''-M')}\cdot\frac{\operatorname{tg}\beta'\sin(\lambda''-\lambda)-\operatorname{tg}\beta\sin(\lambda''-\lambda')-\operatorname{tg}\beta''\sin(\lambda'-\lambda)}{\operatorname{tg}\beta\sin(L'-\lambda'')-\operatorname{tg}\beta''\sin(L'-\lambda)}$$

L' ist Länge der Sonne $+180^0$.

Da das, was hier rechts steht, gegeben ist, so sieht man, dass aus der Verbindung dieser Gleichung mit folgender

$$\frac{\;\frac{R'}{\delta'}\;}{\frac{R'}{r'}} = \sqrt{\left(1+\operatorname{tang}\beta'^2+\frac{R'R'}{\delta'\delta'}+2\frac{R'}{\delta'}\cos(\lambda'-L')\right)}$$

sich r' leicht finden lassen wird. Die indirecte Methode ist hier bei weitem die bequemste, man kommt nach wenigen Versuchen, wofür sich leicht zweckmässige Vorschriften geben lassen, sehr schnell zum Ziele. Man wird dabei auch allemal sehen können, ob es mehr als einen Werth für r' gibt, also mehr als eine Bahn, wodurch die Beobachtungen dargestellt werden, welches allerdings zuweilen der Fall sein kann. —

Sonst ist noch zu bemerken, dass eigentlich hiebei die Längen nicht von den beweglichen Äquinoctial-Punkten, sondern von einem festen Punkte an gezählt werden müssen; in der Anwendung ist indess der Unterschied von keiner Bedeutung. Drückt man die Zeit in Tagen aus, so hat man

$$\log(M'-M)(M''-M') = \log(\tau'-\tau)+\log(\tau''-\tau')+6.4711352(-10)$$

(M etc. müssen nemlich nicht in Graden, sondern in Theilen des Halbmessers ausgedrückt werden).

Hat man δ' und r', so lässt sich auch $\frac{f+f'+f''}{f'}$ und sonach auch δ und δ'' bestimmen. Übrigens lassen sich aus der Betrachtung der Formel 7) noch andere interessante Folgerungen ableiten, die hier übergangen werden müssen.

Zweites Moment.

Genäherte Bestimmung der Elemente.

7.

Die mittlere Beobachtung für die Zeit τ' lassen wir nun ganz weg und gebrauchen dafür die Abstände δ, δ'', die im vorigen Moment näherungsweise bestimmt sind. Es ist klar, dass daraus nunmehr die heliocentrischen Längen, Breiten und Abstände abgeleitet werden können; hieraus die Länge des ☊ und Neigung der Bahn und die Längen in der Bahn. Es bleibt also noch das Problem übrig

Aus zwei Längen in der Bahn . . . v, v''
den Abständen von der Sonne . r, r''
den zugehörigen Zeiten . . . τ, τ''

die übrigen Elemente zu bestimmen, nemlich a, e, π und die Epoche. Da die Relationen dieser Grössen zu den gegebenen transcendent sind, so muss man sich hier wieder an indirecte Methoden halten. Wir wollen hier drei betrachten.

Erste Methode.

Wenn man π als gegeben voraussetzt.

Man setze

$$\frac{r''+r}{r''-r}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(v''-v) = \text{tang}\,\zeta$$

so ist

$$e = \frac{\cos\zeta}{\cos\frac{1}{2}(v''-v)\cos[\pi-\frac{1}{2}(v+v'')-\zeta]}$$

Am rathsamsten ist es, sodann k auf doppelte Art zu berechnen

$$k = r[1-e\cos(v-\pi)] = r''[1-e\cos(v''-\pi)]$$

welches auch zur Prüfung der Rechnung dient. Setzt man $e = \sin\varphi$, so ist $a = \frac{k}{\cos\varphi^2}$. Aus den wahren Anomalien kann man sodann entweder nach den gewöhnlichen oder bequemer nach indirecten Methoden die excentrischen und mittlern Anomalien und Längen berechnen; hieraus und aus der durch a gegebenen mittlern Bewegung erhält man eine doppelte Bestimmung der mittlern Länge für eine beliebige Epoche. Stimmen beide überein, so hat man den richtigen Werth von π getroffen; wo nicht, so muss man mit einem etwas geänderten Werthe von π die Rechnung wiederholen und den wahren durch Interpolation finden. Rathsam ist es hiebei, die übrigen Elemente *nicht* durch Interpolation, sondern durch neue Rechnung aus den corrigirten Werthen von π zu suchen, und nicht eher aufzuhören, bis die beiden Werthe für die Epoche vollkommen übereinstimmen.

Zweite Methode.

Wenn man e voraussetzt.

Hier ist die Rechnung ganz dieselbe, nur muss man, da hier π durch die Gleichung

$$\cos[\pi-\tfrac{1}{2}(v+v'')-\zeta] = \frac{\cos\zeta}{e\cos\frac{1}{2}(v''-v)}$$

gesucht werden muss, den wahren Werth schon beiläufig kennen, weil dem Cosinus zwei verschiedene Werthe zugehören.

Übrigens ist I der II vorzuziehen, und überhaupt sind beide Methoden nur dann zweckmässig, wenn der durchlaufene Bogen schon sehr gross ist, und man die Elemente schon beinahe kennt. Bei den ersten Annäherungen aus einer kurzen Reihe von Beobachtungen hält man sich allemal an folgende

Dritte Methode.

Wenn k vorausgesetzt wird.

Man hat hier

$$\frac{\frac{1}{r''}-\frac{1}{r}}{2\sin\frac{1}{2}(v''-v)} = \frac{e}{k}\sin(\tfrac{1}{2}(v+v'')-\pi)$$

$$\frac{\frac{2}{k}-\frac{1}{r''}-\frac{1}{r}}{2\cos\frac{1}{2}(v''-v)} = \frac{e}{k}\cos(\tfrac{1}{2}(v+v'')-\pi)$$

Die Division gibt also $\text{tang}[\frac{1}{2}(v+v'')-\pi]$, hieraus π, und darnach aus einer von beiden Gleichungen e. Das übrige ist ganz wie bei den vorhergehenden Methoden.

Der Vorzug dieser dritten Methode besteht darin, dass man für k sogleich einen sehr genäherten Werth finden kann, wenn der Bogen $v''-v$ nicht zu gross ist. Es ist nemlich der Ausschnitt zwischen den beiden Radiis Vectoribus d. i.

$$g' = \frac{a^{\frac{3}{2}}\sqrt{k}}{2}(m''-m) = \tfrac{1}{2}A^{\frac{3}{2}}(M''-M)\sqrt{k}$$

Nun ist $2g' = \int rr\,dw$ von $w = v$ bis $w = v''$.

Nun ist aber nach der bekannten Cotesischen Näherungs-Integrations-Formel $\int \varphi w . dw$ von $w = v$ bis $w = v''$

$$= (\tfrac{1}{2}\varphi v + \tfrac{1}{2}\varphi v'')(v''-v)$$

und noch genauer

$$=(\tfrac{1}{6}\varphi v+\tfrac{2}{3}\varphi\tfrac{1}{2}(v+v'')+\tfrac{1}{6}\varphi v'')(v''-v)$$

noch genauer

$$=(\tfrac{1}{8}\varphi v+\tfrac{3}{8}\varphi(\tfrac{2}{3}v+\tfrac{1}{3}v'')+\tfrac{3}{8}\varphi(\tfrac{1}{3}v+\tfrac{2}{3}v'')+\tfrac{1}{8}\varphi v'')(v''-v) \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist aber allemal hinreichend bei den ersten beiden stehen zu bleiben.

Nach der ersten hat man also

$$2g'=\tfrac{1}{2}(rr+r''r'')(v''-v) \quad \text{und} \quad \sqrt{k}=\frac{\frac{1}{2}(rr+r''r'')}{A^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{v''-v}{M''-M}$$

A macht man gewöhnlich $=1$; $v''-v$ und $M''-M$ werden in Secunden ausgedrückt, so ist $\log(M''-M)=\log(\tau''-\tau)+3.5500073$. Zur Abkürzung der Rechnung macht man $\frac{r''}{r}=\text{tang}(45^0\pm\psi)$, wodurch $\frac{1}{2}(rr+r''r'')=\frac{1}{\cos 2\psi}$.

Nach der zweiten Integrations-Formel setze man den Radius Vector, der der Länge $\frac{1}{2}(v''+v)$ zugehört, $=r^*$, so ist

$$\frac{1}{r^*}=\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{r}+\tfrac{1}{r''})+[\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{r}+\tfrac{1}{r''})-\tfrac{1}{k}]\frac{2\sin\frac{1}{4}(v''-v)^2}{\cos\frac{1}{2}(v''-v)}$$

Hienach kann man r^* vermittelst des ersten Werthes von k bestimmen. Sodann ist

$$2g'=\tfrac{1}{6}(rr+r''r'')+\tfrac{2}{3}r^*r^*$$

also der neue Werth von k

$$=k\left\{1+\frac{\frac{2}{3}(r^*r^*-\frac{1}{2}(rr+r''r''))}{rr+r''r''}\right\}^2$$

In der Ausübung ist es gewöhnlich genau genug und bequemer, den Logarithmen des neuen Werthes von k dadurch zu suchen, dass man den Logarithmen des ersten um $\frac{4}{3}\log\frac{r^*r^*}{\frac{1}{2}(rr+r''r'')}$ vermehrt. Will man mit diesem neuen Werthe von k den Werth von $\frac{1}{r^*}$ nach obiger Formel nochmals genauer bestimmen und darnach den Werth von k abermals berichtigen, so werden fast immer die zuletzt entspringenden zweifachen Bestimmungen der Epoche so gut übereinstimmen, dass gar keine neue Voraussetzung nöthig sein wird. Bei der ⚳ und ⚴ stimmten sie, da $\tau''-\tau$ doch 41 und 42 Tage war, immer auf ein paar Hunderttheile von Secunden.

Verbesserungs-Methoden.

8.

Berechnet man nach den durch die vorhergehenden Methoden gefundenen genäherten Elementen den Ort für die Zeit τ', und findet man denselben mit der Beobachtung übereinstimmend, so ist die Arbeit vollendet. Gewöhnlich wird die Übereinstimmung sehr gross sein (oft betrug der Unterschied bei meinen Rechnungen nur wenige Secunden), aber doch selten vollkommen, theils weil zum Theil nur genäherte Voraussetzungen zum Grunde liegen, theils *weil selbst die Sonnen-Örter, die man dabei gebraucht, nicht elliptisch sind, sondern die kleinen Störungen mit einschliessen*. Man könnte nun zwar für die oben weggelassenen kleinen Grössen höherer Ordnungen aus den genäherten Elementen die Werthe sehr nahe bestimmen, und so die obigen Formeln und die Werthe von δ, δ'' darnach verbessern; allein ich bin der Meinung, dass diese Rechnung weit beschwerlicher sein würde, als eine von den folgenden Methoden.

Die allerleichteste erste Verbesserungs-Methode, auf die ich erst bei Veranlassung der ⚴ verfiel, und die ich dabei, da die Zwischenzeiten noch kurz waren, mit dem glücklichsten Erfolg angewandt habe, ist folgende.

Gesetzt nach den genäherten Elementen, *die auf obige Weise gefunden waren*, sei der berechnete Ort für die Zeit τ in Länge $=\lambda'+\mathfrak{L}$, in Breite $=\delta'+\mathfrak{B}$, da der beobachtete λ' und δ' ist, so dass durch Conspiration aller kleinen Unrichtigkeiten in den Voraussetzungen die Länge um $\mathfrak{L}$, die Breite um $\mathfrak{B}$ zu gross ausfällt; so berechne man ganz von neuem und *ganz auf dieselbe Art* die Bahn, indem man die Beobachtungen

$$\begin{matrix}\lambda, & \lambda'-\mathfrak{L}, & \lambda'' \\ \delta, & \delta'-\mathfrak{B}, & \delta''\end{matrix}$$

zum Grunde legt. Der Erfolg wird sein, dass der nach den daraus folgenden neuen Elementen berechnete Ort von λ', δ' so wenig verschieden ist (bei meinen Erfahrungen nur in Theilen von Secunden), dass es keiner andern Verbesserung bedarf.

9.

Das so eben angezeigte Verfahren gilt nur für den Fall, da man die Bahnbestimmung auf *dieselben* Beobachtungen gründen will, die man zur ersten Annäherung angewandt hat. Wenn man aber nachher die Verbesserung der Elemente durch lauter oder zum Theil andere Beobachtungen sucht, so habe ich nach mancherlei andern Proben folgende zwei Methoden am brauchbarsten gefunden.

I. Man berechnet aus den zwei äussern geocentrischen Örtern die heliocentrischen nach 3 Hypothesen, indem man zuerst die genäherten Abstände für diese Beobachtungen voraussetzt, und nachher erst den einen, dann den andern ein wenig ändert. Nach den in allen 3 Hypothesen gefundenen Elementen berechnet man den Ort für die mittlere Beobachtung, den man mit dem beobachteten vergleicht. Durch Interpolation findet man sodann die corrigirten Abstände, und wenn man will, auch die corrigirten Elemente, doch ist es besser die Mühe nicht zu scheuen, diese durch besondere Rechnung aus den neuen Abständen zu berechnen, zumal wenn die Änderungen der Elemente noch sehr stark sind.

II^a. Man bedient sich ganz desselben Verfahrens, nur mit dem Unterschiede, dass man statt der genäherten Abstände in den äussern Beobachtungen die genäherte Bestimmung der Neigung und des ☊ gebraucht, und jede von diesen etwas ändert.

II^b. Man berechnet theils mit den genäherten theils mit etwas geänderten Bestimmungen der Neigung und des ☊ aus allen drei geocentrischen Örtern die heliocentrischen; aus den zwei äussern heliocentrischen die Elemente und aus diesen den mittlern heliocentrischen, den man mit dem aus dem beobachteten geocentrisch abgeleiteten vergleicht und dann die verbesserte Neigung und ☊ durch Interpolation sucht u. s. w.

Man könnte auch in II^b aus den *drei heliocentrischen* Örtern nach bekannten Formeln die Ellipse bestimmen, ohne die Zeiten mit anzuwenden; aus den Dimensionen der Ellipse die 2 Zwischenzeiten berechnen und mit den wahren vergleichen und dann eben so wie vorher die corrigirte Neigung und ☊ durch Interpolation suchen. Allein dies Verfahren habe ich nach meiner Erfahrung verwerfen müssen. Man würde auf diesem Wege nur nach wiederholten Operationen mit weit mehr Mühe zu einer genauen Darstellung der Beobachtungen gelangen. Die Ursachen davon hier ausführlich zu untersuchen, würde zu weitläufig sein*). Ich bemerke daher nur, dass man auf diese Art die zweiten Differentiale, von denen man sich gerade durch die im 5. und 6. Artikel ausgeführten Kunstgriffe losgemacht hat, wieder herbeiführt, und dass diese delicaten zweiten Differentiale durch eine nicht grosse Veränderung der Neigung und des ☊ *ganz enorm* entstellt werden können, zumal wenn die Excentricität nicht gross ist. Es kann hier leicht kommen, dass ein paar Minuten Änderung im ☊ oder der Neigung eine Ellipse hervorbringen kann, die mit der vorhergehenden fast gar keine Ähnlichkeit hat, daher denn begreiflich der Interpolation nicht mehr getraut werden kann. Dies ist nicht der Fall bei unsern Methoden, wo immer nur zwei Beobachtungen zum Grunde gelegt werden. *Sapienti sat.* — Nach meinen wiederholten Erfahrungen finde ich die Methode I am allerzweckmässigsten und allgemeinsten.

*) V. Theoria motus corporum coelest. art. 83.

Übrigens gelten alle diese Methoden nur, so lange der Bogen noch mässig gross ist. Hat man schon Beobachtungen von 1 oder mehrern Jahren, so werden wieder andere nöthig sein, über die ich mich hier nicht weitläufig ausbreiten kann. In diesem Falle ist es im Allgemeinen nicht anzurathen, die Elemente auf drei vollständige Beobachtungen zu gründen, sondern es ist weit angemessener vier Längen und zwei Breiten zu gebrauchen. — Umfassen die Beobachtungen schon *mehrere* Jahre, und sind die Elemente schon *bis auf Kleinigkeiten* bestimmt, so halte ich den Gebrauch der Differential-Änderungen, wobei man eine beliebige Zahl von Beobachtungen zum Grunde legen kann, für das beste Mittel.

TAFEL FÜR DIE MITTAGS-VERBESSERUNG.

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgegeben vom Freiherrn von Zach, April 1811.

Göttingen, im März 1811.

Die schönen Tafeln für die Mittags-Verbesserung, welche Herr von Zach im *Januar-Heft der Monatl. Corresp.* mitgetheilt hat, veranlassen mich, Ihnen ähnliche Tafeln, so wie ich sie schon vor einiger Zeit zu meinem eignen Gebrauche berechnet hatte, hier mitzutheilen. Ich selbst hatte die meinigen nur von 5 zu 5 Minuten, und von 0 bis 3 Stunden halbe Zwischenzeit berechnet, da ich sehr selten correspondirende Höhen in grössern Zwischenzeiten nehme; allein ein geschickter Zuhörer von mir, Herr Gerling, der sich mit glücklichem Erfolg mit Astronomie beschäftigt, hat sie mit grosser Sorgfalt zehnmal so weit ausgedehnt. Herr v. Zach scheint seinen Hülfswinkel deswegen eingeführt zu haben, weil die Logarithmen ihrer Tangenten, die man eigentlich nur braucht, oder vielmehr der Logarithmus der Tangente des einen, bei 6 Stunden halber Zwischenzeit sich zu stark ändert. Allein wenn man nur auf die am häufigsten vorkommenden Fälle sehen will, so lassen sich die Tafeln zum Gebrauch noch geschmeidiger einrichten, wenn man die Hülfswinkel weg lässt, und lieber statt Länge der Sonne die Declination und deren Änderung beibehält, da man diese eben so leicht als jene aus den Ephemeriden entlehnt. Ich bediene mich also des folgenden Verfahrens.

Es sei

δ Declination der Sonne im Mittage,

μ doppelte tägliche Änderung derselben, d. i. vom vorhergehenden bis zum folgenden Tage, als positiv oder negativ betrachtet, je nachdem die Sonne von Süden nach Norden, oder von Norden nach Süden geht,

φ Polhöhe,

h halbe Zwischenzeit (nach wahrer Sonnenzeit gemessen).

so ist bekanntlich die Mittags-Verbesserung in wahrer Sonnenzeit

$$-\mu \operatorname{tang} \varphi \frac{h}{15.48^{\text{st.}} \sin 15 h} + \mu \operatorname{tang} \delta \frac{h}{15.48^{\text{st.}} \operatorname{tang} 15 h}$$

Ich setze nun

$$\frac{h}{720^{\text{st.}} \sin 15 h} = A, \qquad \frac{h}{720^{\text{st.}} \operatorname{tang} 15 h} = B$$

und nehme in meinen Tafeln nichts auf als $\log A$ und $\log B$ für das Argument h, wodurch also die Mittags-Verbesserung wird

$$-A\mu \operatorname{tang} \varphi + B\mu \operatorname{tang} \delta$$

Es ist hiebei noch dreierlei zu bemerken:

1) Könnte man sich wundern, dass ich die 48stündige Änderung einführe. Eigentlich muss man die 24stündige Änderung als das Mittel der Änderung vom vorigen und der Änderung bis zum folgenden Mittage nehmen. Man erspart also nach meiner Manier die Division mit 2.

2) Die Mittags-Verbesserung ergibt sich nach wahrer Sonnenzeit. Geht die Uhr nach mittlerer Zeit, so kann man sich ohne Bedenken erlauben, jene ohne weiteres beizubehalten; geht sie aber nach Sternzeit, so muss man die Mittags-Verbesserung erst in Sternzeit verwandeln; man kann sich begnügen, sie mit $\frac{366}{365}$ zu multipliciren, oder auch zu $\log A$ und zu $\log B$ die Constante 0.0012 addiren.

3) Für eine bestimmte Polhöhe könnte man auch in der Tafel gleich $\log A + \log \operatorname{tang} \varphi$ ansetzen und sich so eine Addition ersparen.

Hier noch ein Beispiel:

Am 20. März beobachtete ich einige correspondirende Sonnenhöhen, wo die halbe Zwischenzeit im Mittel $1^{\text{st.}}\ 43'$ war.

Hier ist

$$\mu = +27''39; \quad \delta = -7^\circ\ 26'\ 4''; \quad \varphi = 51^\circ\ 31'\ 54''$$

Also

log const.	0.0012	log const.	0.0012
log A	7.7394 n	log B	7.6940
log μ	3.4376	log μ	3.4376
log tang φ	0.0999	log tang δ	9.1156 n
	1.2781 n		0.2484 n
Zahl	$-18''97$		$-1''77$

Also Mittags-Verbesserung $-20''74$.

Bei Herrn von Zachs Tafeln muss man 11 mal, bei den meinigen nur 7 mal eingehen, oder wenn man log tang φ als gegeben ansieht, bei jenen 10 mal, bei meinen 6 mal.

Tafel für die Mittags-Verbesserung.

Argument: Halbe Zwischenzeit.

Arg.	log A	log B	Arg.	log A	log B	Arg.	log A	log B
			$0^h\ 40^m$	7.7269	7.7203	$1^h\ 20^m$	7.7336	7.7065
$0^h\ 1^m$	7.7247	7.7247	41	7.7270	7.7200	21	7.7338	7.7061
2	7.7247	7.7247	42	7.7271	7.7198	22	7.7340	7.7056
3	7.7247	7.7247	43	7.7272	7.7196	23	7.7342	7.7051
4	7.7247	7.7247	44	7.7274	7.7193	24	7.7345	7.7046
5	7.7247	7.7246	45	7.7275	7.7191	25	7.7347	7.7041
6	7.7247	7.7246	46	7.7276	7.7188	26	7.7349	7.7036
7	7.7248	7.7246	47	7.7277	7.7186	27	7.7352	7.7031
8	7.7248	7.7245	48	7.7279	7.7183	28	7.7354	7.7026
9	7.7248	7.7245	49	7.7280	8.7180	29	7.7357	7.7021
10	7.7248	7.7244	50	7.7281	7.7177	30	7.7359	7.7015
11	7.7249	7.7244	51	7.7283	7.7174	31	7.7362	7.7010
12	7.7249	7.4243	52	7.7284	7.7172	32	7.7364	7.7005
13	7.7249	7.7242	53	7.7286	7.7169	33	7.7367	7.6999
14	7.7250	7.7242	54	7.7287	7.7166	34	7.7369	7.6993
15	7.7250	7.7241	55	7.7289	7.7162	35	7.7372	7.6988
16	7.7251	7.7240	56	7.7290	7.7159	36	7.7374	7.6982
17	7.7251	7.7239	57	7.7292	7.7156	37	7.7377	7.6976
18	7.7251	7.7238	58	7.7293	7.7153	38	7.7380	7.6970
19	7.7252	7.7237	59	7.7295	7.7150	39	7.7383	7.6964
20	7.7253	7.7236				40	7.7386	7.6958
			$1^h\ 0$	7.7297	7.7146			
21	7.7253	7.7235	1	7.7298	7.7143	41	7.7388	7.6952
22	7.7254	7.7234	2	7.7300	7.7139	42	7.7391	7.6946
23	7.7254	7.7232	3	7.7302	7.7136	43	7.7394	7.6940
24	7.7255	7.7231	4	7.7304	7.7132	44	7.7397	7.6934
25	7.7256	7.7230	5	7.7305	7.7128	45	7.7400	7.6927
26	7.7256	7.7228	6	7.7307	7.7125	46	7.7403	7.6921
27	7.7257	7.7227	7	7.7309	7.7121	47	7.7406	7.6914
28	7.7258	7.7225	8	7.7311	7.7117	48	7.7409	7.6908
29	7.7259	7.7224	9	7.7313	7.7113	49	7.7412	7.6901
30	7.7259	7.7222	10	7.7315	7.7109	50	7.7415	7.6894
31	7.7260	7.7220	11	7.7317	7.7105	51	7.7418	7.6888
32	7.7261	7.7219	12	7.7319	7.7101	52	7.7421	7.6881
33	7.7262	7.7217	13	7.7321	7.7097	53	7.7424	7.6874
34	7.7263	7.7215	14	7.7323	7.7092	54	7.7428	7.6867
35	7.7264	7.7213	15	7.7325	7.7088	55	7.7431	7.6859
36	7.7265	7.7211	16	7.7327	7.7083	56	7.7434	7.6852
37	7.7266	7.7209	17	7.7329	7.7079	57	7.7437	7.6845
38	7.7267	7.7207	18	7.7331	7.7075	58	7.7441	7.6838
39	7.7268	7.7205	19	7.7333	7.7070	59	7.7444	7.6830
40	7.7269	7.7203	20	7.7336	7.7065	$2^h\ 0$	7.7447	7.6823

Tafel für die Mittags-Verbesserung.

Argument: Halbe Zwischenzeit.

Arg.	log *A*	log *B*	Arg.	log *A*	log *B*	Arg.	log *A*	log *B*
$2^h\ 0^m$	7.7447	7.6823	$2^h\ 40^m$	7.7606	7.6448	$3^h\ 20^m$	7.7813	7.5894
1	7.7451	7.6815	41	7.7610	7.6437	21	7.7819	7.5877
2	7.7454	7.6807	42	7.7615	7.6425	22	7.7825	7.5860
3	7.7458	7.6800	43	7.7620	7.6414	23	7.7831	7.5843
4	7.7461	7.6792	44	7.7624	7.6402	24	7.7836	7.5825
5	7.7464	7.6784	45	7.7629	7.6390	25	7.7842	7.5808
6	7.7468	7.6776	46	7.7634	7.6378	26	7.7848	7.5790
7	7.7472	7.6768	47	7.7638	7.6366	27	7.7854	7.5772
8	7.7475	7.6759	48	7.7643	7.6354	28	7.7860	7.5754
9	7.7479	7.6751	49	7.7648	7.6342	29	7.7867	7.5736
10	7.7482	7.6743	50	7.7653	7.6329	30	7.7873	7.5717
11	7.7486	7.6734	51	7.7658	7.6317	31	7.7879	7.5699
12	7.7490	7.6726	52	7.7663	7.6304	32	7.7885	7.5680
13	7.7494	7.6717	53	7.7668	7.6291	33	7.7891	7.5661
14	7.7497	7.6708	54	7.7673	7.6278	34	7.7898	7.5641
15	7.7501	7.6700	55	7.7678	7.6265	35	7.7904	7.5622
16	7.7505	7.6691	56	7.7683	7.6252	36	7.7910	7.5602
17	7.7509	7.6682	57	7.7688	7.6239	37	7.7916	7.5582
18	7.7513	7.6673	58	7.7693	7.6225	38	7.7923	7.5562
19	7.7517	7.6663	59	7.7698	7.6212	39	7.7929	7.5542
20	7.7521	7.6654				40	7.7936	7.5522
			$3^h\ 0$	7.7703	7.6198			
21	7.7525	7.6645	1	7.7708	7.6184	41	7.7942	7.5501
22	7.7529	7.6635	2	7.7713	7.6170	42	7.7949	7.5480
23	7.7533	7.6626	3	7.7719	7.6156	43	7.7955	7.5459
24	7.7537	7.6616	4	7.7724	7.6142	44	7.7962	7.5437
25	7.7541	7.6606	5	7.7729	7.6127	45	7.7969	7.5416
26	7.7545	7.6597	6	7.7735	7.6113	46	7.7975	7.5394
27	7.7549	7.6587	7	7.7740	7.6098	47	7.7982	7.5372
28	7.7553	7.6577	8	7.7745	7.6083	48	7.7989	7.5350
29	7.7557	7.6567	9	7.7751	7.6068	49	7.7995	7.5327
30	7.7562	7.6556	10	7.7756	7.6053	50	7.8002	7.5304
31	7.7566	7.6546	11	7.7762	7.6038	51	7.8009	7.5281
32	7.7570	7.6536	12	7.7767	7.6023	52	7.8016	7.5258
33	7.7575	7.6525	13	7.7773	7.6007	53	7.8023	7.5234
34	7.7579	7.6514	14	7.7779	7.5991	54	7.8030	7.5211
35	7.7583	7.6504	15	7.7784	7.5975	55	7.8037	7.5186
36	7.7588	7.6493	16	7.7790	7.5959	56	7.8044	7.5162
37	7.7592	7.6482	17	7.7796	7.5943	57	7.8051	7.5137
38	7.7597	7.6471	18	7.7801	7.5927	58	7.8058	7.5112
39	7.7601	7.6460	19	7.7807	7.5910	59	7.8065	7.5087
40	7.7606	7.6448	20	7.7813	7.5894	$4^h\ 0$	7.8072	7.5062

Tafel für die Mittags-Verbesserung.

Argument: Halbe Zwischenzeit.

Arg.	log *A*	log *B*	Arg.	log *A*	log *B*	Arg.	log *A*	log *B*
$4^h\ 0^m$	7.8072	7.5062	$4^h\ 40^m$	7.8387	7.3727	$5^h\ 20^m$	7.8763	7.1160
1	7.8079	7.5036	41	7.8396	7.3686	21	7.8773	7.1061
2	7.8086	7.5010	42	7.8404	7.3639	22	7.8784	7.0960
3	7.8094	7.4983	43	7.8413	7.3594	23	7.8794	7.0855
4	7.8101	7.4957	44	7.8422	7.3548	24	7.8804	7.0748
5	7.8108	7.4930	45	7.8430	7.3501	25	7.8815	7.0637
6	7.8116	7.4902	46	7.8439	7.3454	26	7.8825	7.0522
7	7.8123	7.4874	47	7.8448	7.3406	27	7.8836	7.0404
8	7.8130	7.4846	48	7.8457	7.3357	28	7.8846	7.0282
9	7.8138	7.4818	49	7.8466	7.3307	29	7.8857	7.0156
10	7.8145	7.4789	50	7.8475	7.3256	30	7.8868	7.0025
11	7.8153	7.4760	51	7.8484	7.3205	31	7.8878	6.9889
12	7.8160	7.4731	52	7.8493	7.3152	32	7.8889	6.9748
13	7.8168	7.4701	53	7.8502	7.3099	33	7.8900	6.9602
14	7.8176	7.4671	54	7.8511	7.3045	34	7.8911	6.9449
15	7.8183	7.4640	55	7.8520	7.2989	35	7.8922	6.9290
16	7.8191	7.4609	56	7.8530	7.2933	36	7.8932	6.9125
17	7.8199	7.4578	57	7.8539	7.2876	37	7.8943	6.8953
18	7.8206	7.4546	58	7.8548	7.2817	38	7.8954	6.8770
19	7.8214	7.4514	59	7.8558	7.2758	39	7.8965	6.8580
20	7.8222	7.4482				40	7.8977	6.8379
			$5^h\ 0$	7.8567	7.2697			
21	7.8230	7.4449	1	7.8576	7.2635	41	7.8988	6.8168
22	7.8238	7.4415	2	7.8586	7.2572	42	7.8999	6.7945
23	7.8246	7.4381	3	7.8595	7.2507	43	7.9010	6.7709
24	7.8254	7.4347	4	7.8605	7.2442	44	7.9021	6.7457
25	7.8262	7.4312	5	7.8614	7.2374	45	7.9033	6.7189
26	7.8270	7.4277	6	7.8624	7.2306	46	7.9044	6.6901
27	7.8278	7.4241	7	7.8634	7.2236	47	7.9055	6.6591
28	7.8286	7.4205	8	7.8643	7.2164	48	7.9067	6.6255
29	7.8294	7.4168	9	7.8653	7.2091	49	7.9078	6.5889
30	7.8303	7.4131	10	7.8663	7.2016	50	7.9090	6.5487
31	7.8311	7.4093	11	7.8673	7.1940	51	7.9102	6.5041
32	7.8319	7.4055	12	7.8683	7.1861	52	7.9113	6.4541
33	7.8328	7.4016	13	7.8693	7.1781	53	7.9125	6.3973
34	7.8336	7.3977	14	7.8703	7.1699	54	7.9137	6.3316
35	7.8344	7.3937	15	7.8713	7.1615	55	7.9148	6.2536
36	7.8353	7.3896	16	7.8723	7.1529	56	7.9160	6.1579
37	7.8361	7.3855	17	7.8733	7.1440	57	7.9172	6.0341
38	7.8370	7.3813	18	7.8743	7.1349	58	7.9184	5.8593
39	7.8378	7.3771	19	7.8753	7.1256	59	7.9196	5.5594
40	7.8387	7.3727	20	7.8763	7.1160	$6^h\ 0$	7.9208	$B = 0$

TAFEL FÜR DIE SONNEN-COORDINATEN.

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, herausgegeben vom Freiherrn von Zach. Januar 1812.

Die von mir zuerst im Jahre 1804 vorgeschlagene und nachher in der *Theoria motus corporum coelestium* vervollkommnete Methode, die geocentrischen Örter der Himmelskörper durch ihre *unmittelbare* Beziehung auf den Äquator, vermittelst dreier rechtwinklichter Coordinaten zu berechnen, erleichtert die Arbeit in allen Fällen, wo *viele* Örter zu berechnen sind, in einem so hohen Grade, dass sie von den sachkundigen Astronomen mit Beifall aufgenommen und bereits vielfach in Gebrauch gekommen ist. Die Fälle, wo *viele* geocentrische Örter zu berechnen vorkommen, sind zwiefach: entweder will man viele während einer mässigen Zwischenzeit gemachte Beobachtungen eines Himmelskörpers mit den Elementen vergleichen, um daraus den mittlern Fehler der letztern mit aller möglichen Schärfe zu bestimmen, oder man will die geocentrische Bewegung eines Himmelskörpers zur Erleichterung der Beobachtungen oder zu andern Zwecken voraus berechnen. In dem letztern Fall bedarf es einer sehr grossen Schärfe nicht, man will nicht — kann vielleicht auch nicht — Secunden verbürgen, sondern begnügt sich mit ganzen Minuten, und hier ist es, wo die Methode durch eine Hülfstafel noch einer sehr bedeutenden Erleichterung fähig ist. Wenn man nemlich, was *hier* erlaubt ist, die Störungen der Länge der Sonne und des Abstandes von der Erde vernachlässigt, und zuerst für Excentricität der Erdbahn, Länge des Perigäum und Schiefe der Ecliptik bestimmte Werthe zum Grunde

legt, so sind die drei Coordinaten der Sonne blos von der mittlern Sonnenlänge abhängig, und lassen sich daher bequem in eine Tafel bringen. Eine solche Tafel habe ich zu meinem eigenen Gebrauche bereits vor mehreren Jahren berechnet, indem ich die Elemente der Sonnenbahn für 1800 zum Grunde legte und der Bequemlichkeit wegen die mittlere Sonnenlänge durch einzelne Decimal-Grade wachsen liess. Es brauchte so nur noch eine Tafel für die Epochen des Arguments zu Anfang jedes Jahres und dessen Änderung für einzelne Tage u. s. w. hinzuzukommen. So war die Tafel auf eine Reihe von Jahren hinreichend genau, so lange nemlich die Argumente der Sonnenbahn von denen von 1800 noch nicht zu sehr verschieden waren. Um die Tafel auch für entlegenere Zeiten brauchen zu können, berechnete ich noch eine Tafel für die Säcular-Änderungen der Coordinaten, welche durch die Säcularänderungen der Elemente der Sonnenbahn hervorgebracht werden. Auf diese Weise konnte meine Tafel mehrere Jahrhunderte hindurch dienen.

So wie sich die einfachsten Methoden nicht immer zuerst darbieten, so war es auch hier gewesen. Hätte ich die Argumente der Tafel nicht um Einen Decimal-Grad, sondern um die mittlere tägliche Bewegung der Sonne wachsen lassen, so würde der Gebrauch der Tafel dadurch noch bedeutend erleichtert worden sein. Die *unmittelbar* in der Tafel gegebenen Coordinaten hätten dann (abgesehen von den Säcular-Veränderungen) in jedem bestimmten Jahre jede für ein bestimmtes Datum und *alle für einerlei Stunde* gegolten, und dadurch würden die vorläufigen Rechnungen zur Bildung der Argumente so gut wie ganz weggefallen sein. Ich veranlasste daher den geschickten Herrn Wachter, die Tafel nach diesem Princip ganz neu zu berechnen, und rieth ausserdem, da das Jahr 1800 sich nun immer mehr von uns entfernt, lieber die Elemente für das Jahr 1820 zum Grunde zu legen, damit man vorerst eine Reihe von Jahren hindurch (etwa von 1810 bis 1830) gar nicht nöthig hätte, die Tafel für die Säcular-Veränderungen mit zu berücksichtigen. Die Argumente der Tafel schreiten also immer mit Incrementen von 59′ 8″33 fort, sind aber so gewählt (der bequemern Berechnung wegen), dass sie nicht von 0 anfangen, sondern so dass die Länge des Perihels selbst ein Glied derselben wird. Diese von Hrn Wachter mit grosser Sorgfalt berechnete Tafel mache ich hier bekannt, und glaube dadurch den rechnenden Astronomen einen Dienst zu erweisen. Es bleibt mir nur übrig, einige Worte über den Gebrauch derselben hinzuzusetzen.

Die I. Tafel gibt die Epoche, d. i. die Stunden u. s. w. nach Pariser Meridian, für welche die Tafel II. bei dem als ihr Argument beigefügten Datum gilt. Man muss also die Epochen der ersten Tafel zu 0^h des Datums hinzusetzen, (blos in den Jahren 1792, 1793, 1796, 1797 verwandelt sich die Addition in Subtraction), um die Zeitpunkte zu haben, wo die Tafel II. unmittelbar gilt. Bei Berechnung von Ephemeriden für Planeten und Cometen, wo es ziemlich gleichgiltig ist, welche Stunden man wählt, kann man es also immer so einrichten, dass man die Tafel II. unmittelbar ohne Interpolation gebrauchen kann. Oder man kann auch, um wenigstens eine *bequeme* Interpolation zu haben, solche Zeiten wählen, die von denen, für welche die Tafel unmittelbar gilt, um ½, ⅓ oder ¼ Tag abliegen.

Will man hingegen die Sonnen-Coordinaten für eine vorgeschriebene Stunde haben, so zieht man zuerst das, was die Epochentafel gibt, ab (welches also in den Jahren 1792, 1793, 1796, 1797 eine Addition wird) und geht mit dem Rest in die Tafel II. ein.

Beispiel: Man verlangt die Sonnen-Coordinaten für 1811 April 11 $7^h 47^m 18^s$ M. Z. in Paris (durch Aberration verbesserte Beobachtungszeit für die erste Beobachtung des Cometen von Herrn von Zach). Man hat also

	April 11.	7^h	47^m	18^s	= April 11.3245
Epoche für 1811 . . .		1 5	7	26	1.2135
	April 10	2	39	52	= April 10.1110

Damit gibt Herrn Wachters Tafel

$$x = +9362.5, \quad y = +3299.4, \quad z = +1432.1$$

Bei der III. Tafel, für die Säcular-Veränderung der Coordinaten, ist zu bemerken, dass ihre Zeichen nicht absolut, sondern algebraisch zu verstehen sind, also für ein Jahr *nach* 1820 ein negatives x durch die Säcular-Veränderung eine absolute Vergrösserung erleidet. Will man darauf in unserm Beispiele Rücksicht nehmen, so muss noch die Säcular-Veränderung mit $-\frac{9}{100}$ multiplicirt hinzugefügt werden, also

$$dx = +0.5, \quad dy = -0.1, \quad dz = -0.1$$

folglich

$$x = +9363.0, \quad y = +3299.3, \quad z = +1432.0$$

Übrigens gibt die Tafel alles für die mittlere Distanz der Erde von der Sonne = 10000, also nach gewöhnlicher Schreibart

$$x = +0.93630, \quad y = +0.32993, \quad z = +0.14320$$

Herr von Lindenau hat berechnet

$$x = +0.936308, \quad y = +0.329822, \quad z = +0.143148$$

Offenbar kann man für mehr als vier Decimalen nicht einstehen, und es wäre überflüssig gewesen, die Tafel II. mit mehrern Decimalen zu geben, da die periodischen Störungen sogar die vierte Decimale um eine oder zwei Einheiten afficiren können. Allein *zu dem Zweck*, wozu die Tafel bestimmt ist, ist diese Genauigkeit auch vollkommen hinreichend, und für die Fälle, wo die Genauigkeit von Secunden verlangt wird, kann und soll sie nicht gelten.

Tafel für die Coordinaten der Sonne.

I. Tafel. Die Epochen.

	Mittlere Pariser Zeit.			Mittlere Pariser Zeit.	
1790	+ 0^d 3^h 1^m 22^s	+ 0^d 1260			
1791	+ 0 8 50 14	+ 0. 3682	1831	+ 1^d 1^h 24^m 37^s	+ 1^d 0588
1792	— 0 9 20 54	— 0. 3895	1832	0 7 13 29	0. 3010
1793	— 0 3 32 3	— 0. 1473	1833	0 13 2 20	0. 5433
1794	+ 0 2 16 49	+ 0. 0950	1834	0 18 51 12	0. 7855
1795	+ 0 8 5 40	— 0. 3373	1835	1 0 40 3	1. 0278
1796	— 0 10 5 28	— 0. 4205	1836	0 6 28 55	0. 2701
1797	— 0 4 16 37	— 0. 1782	1837	12 17 47	0. 5123
1798	+ 0 1 32 15	+ 0. 0640	1838	18 6 38	0. 7546
1799	7 21 7	0. 3063	1839	23 55 30	0. 9969
1800	13 9 58	0. 5486	1840	5 44 21	0. 2391
1801	0 18 58 50	0. 7908	1841	11 33 13	0. 4814
1802	1 0 47 42	1. 0331	1842	17 22 5	0. 7237
1803	1 6 36 33	1. 2754	1843	23 10 56	0. 9659
1804	0 12 25 24	0. 5176	1844	4 59 48	0. 2082
1805	0 18 14 16	0. 7599	1845	10 48 39	0. 4505
1806	1 0 3 8	1. 0022	1846	16 37 31	0. 6927
1807	1 5 51 59	1. 2444	1847	22 26 22	0. 9350
1808	0 11 40 51	0. 4867	1848	4 15 14	0. 1773
1809	0 17 29 42	0. 7290	1849	10 4 6	0. 4195
1810	0 23 18 34	0. 9712	1850	15 52 57	0. 6618
1811	1 5 7 26	1. 2135	1851	21 41 49	0. 9041
1812	0 10 56 17	0. 4557	1852	3 30 40	0. 1463
1813	0 16 45 9	0. 6980	1853	9 19 32	0. 3886
1814	0 22 34 0	0. 9403	1854	15 8 23	0. 6308
1815	1 4 22 52	1. 1825	1855	20 57 15	0. 8731
1816	0 10 11 43	0. 4248	1856	2 46 7	0. 1154
1817	0 16 0 35	0. 6671	1857	8 34 58	0. 3576
1818	0 21 49 27	0. 9093	1858	14 23 50	0. 5999
1819	1 3 38 18	1. 1516	1859	20 12 41	0. 8422
1820	0 9 27 10	0. 3939	1860	2 1 33	0. 0844
1821	0 15 16 1	0. 6361	1864	1 16 59	0. 0535
1822	0 21 4 53	0. 8784	1868	+ 0 0 32 26	+ 0. 0225
1823	1 2 53 44	1. 1207	1872	— 0 0 12 8	— 0. 0084
1824	0 8 42 36	0. 3629	1876	+ 0 0 56 42	+ 0. 0393
1825	0 14 31 28	0. 6052	1880	1 41 15	0. 0703
1826	0 20 20 19	0. 8474	1884	2 25 49	0. 1012
1827	1 2 9 11	1. 0897	1888	3 10 23	0. 1322
1828	0 7 58 2	0. 3320	1892	54 57	0. 1631
1829	0 13 46 54	0. 5742	1896	4 39 30	0. 1941
1830	0 19 35 46	0. 8165	1900	+ 0 18 35 56	+ 0. 7750

II. Tafel.

Die Sonnen-Coordinaten.

Januar.					Februar.					März.				April.			
Gemein Jahr	Schalt-Jahr	x +	y —	z —	Gemein Jahr	Schalt-Jahr	x +	y —	z —		x +	y ∓	z ∓		x +	y +	z +
	0	1614	8897	3862	0	1	6598	6718	2916	1	9392	2922	1268	1	9783	1918	832
0	1	1786	8869	3850	1	2	6727	6611	2869	2	9449	2772	1203	2	9748	2072	899
1	2	1958	8839	3836	2	3	6855	6502	2822	3	9503	2621	1137	3	9711	2226	966
2	3	2129	8805	3822	3	4	6980	6391	2774	4	9553	2469	1072	4	9671	2379	1033
3	4	2300	8769	3806	4	5	7104	6277	2725	5	9602	2316	1005	5	9627	2532	1099
4	5	2469	8731	3789	5	6	7225	6162	2675	6	9647	2163	939	6	9581	2684	1165
5	6	2638	8689	3771	6	7	7344	6045	2624	7	9689	2008	872	7	9533	2835	1230
6	7	2806	8645	3752	7	8	7460	5927	2572	8	9728	1854	805	8	9481	2985	1296
7	8	2974	8598	3732	8	9	7574	5806	2520	9	9765	1699	737	9	9427	3134	1360
8	9	3140	8549	3711	9	10	7686	5683	2467	10	9798	1543	670	10	9369	3283	1425
9	10	3306	8497	3688	10	11	7796	5559	2413	11	9828	1387	602	11	9310	3430	1489
10	11	3470	8442	3664	11	12	7903	5433	2358	12	9856	1230	534	12	9247	3576	1552
11	12	3633	8384	3639	12	13	8008	5306	2303	13	9881	1073	466	13	9182	3722	1615
12	13	3795	8324	3613	13	14	8111	5177	2247	14	9902	916	397	14	9114	3866	1678
13	14	3956	8262	3586	14	15	8210	5046	2190	15	9921	758	329	15	9043	4009	1740
14	15	4116	8196	3558	15	16	8308	4913	2133	16	9936	600	260	16	8969	4151	1802
15	16	4275	8129	3528	16	17	8403	4780	2075	17	9949	442	192	17	8894	4292	1863
16	17	4432	8058	3498	17	18	8495	4644	2016	18	9959	284	123	18	8815	4431	1923
17	18	4587	7986	3466	18	19	8584	4508	1956	19	9965	−126	−55	19	8734	4569	1983
18	19	4742	7910	3433	19	20	8671	4369	1897	20	9969	+ 33	+14	20	8650	4706	2043
19	20	4895	7833	3400	20	21	8756	4230	1836	21	9970	191	83	21	8564	4842	2102
20	21	5046	7752	3365	21	22	8837	4089	1775	22	9968	349	152	22	8475	4976	2160
21	22	5196	7670	3329	22	23	8916	3948	1713	23	9962	507	220	23	8384	5109	2217
22	23	5344	7585	3292	23	24	8993	3804	1651	24	9954	665	289	24	8291	5240	2274
23	24	5490	7498	3254	24	25	9066	3660	1588	25	9943	823	357	25	8195	5369	2331
24	25	5635	7408	3215	25	26	9137	3514	1525	26	9929	980	426	26	8096	5498	2386
25	26	5778	7316	3175	26	27	9205	3368	1462	27	9912	1138	494	27	7996	5624	2441
26	27	5920	7222	3035	27	28	9270	3220	1398	28	9892	1295	562	28	7893	5749	2495
27	28	6059	7125	3093	28	29	9332	3072	1333	29	9869	1451	630	29	7787	5872	2549
28	29	6197	7027	3050	29	30	9392	2922	1268	30	9843	1607	698	30	7680	5994	2601
29	30	6332	6926	3006						31	9814	1763	765	31	7579	6113	2653
30	31	6466	6823	2962						32	9783	1918	832				
31	32	6598	6718	2916													

II. Tafel.

Die Sonnen-Coordinaten.

	Mai.				Juni.				Juli.				August.		
	x	y	z		x	y	z		x	y	z		x	y	z
	+	+	+		±	+	+		−	+	+		−	+	+
1	7570	6113	2653	1	3271	8811	3824	1	1737	9190	3989	1	6443	7188	3120
2	7458	6231	2705	2	3110	8861	3846	2	1903	9162	3977	2	6573	7088	3076
3	7344	6348	2755	3	2949	8909	3867	3	2069	9132	3964	3	6790	6985	3032
4	7228	6462	2805	4	2787	8954	3886	4	2234	9099	3949	4	6825	6880	2986
5	7110	6575	2854	5	2624	8996	3905	5	2399	9063	3934	5	6949	6773	2940
6	6990	6685	2902	6	2460	9036	3922	6	2563	9025	3917	6	7070	6665	2893
7	6867	6794	2949	7	2295	9074	3938	7	2726	8985	3900	7	7189	6554	2845
8	6743	6901	2995	8	2130	9108	3953	8	2889	8942	3881	8	7307	6442	2796
9	6616	7006	3041	9	1965	9141	3967	9	3050	8896	3861	9	7422	6327	2746
10	6488	7108	3085	10	1798	9170	3980	10	3211	8848	3840	10	7535	6211	2696
11	6358	7209	3129	11	1632	9197	3992	11	3371	8797	3818	11	7647	6094	2645
12	6226	7308	3172	12	1464	9222	4003	12	3530	8744	3795	12	7755	5974	2593
13	6093	7404	3214	13	1297	9244	4012	13	3688	8689	3771	13	7862	5853	2540
14	5958	7499	3255	14	1129	9263	4021	14	3845	8631	3746	14	7967	5730	2487
15	5821	7591	3295	15	961	9280	4028	15	4001	8570	3720	15	8069	5605	2433
16	5682	7681	3334	16	792	9294	4034	16	4156	8507	3692	16	8169	5479	2378
17	5541	7769	3372	17	623	9305	4039	17	4309	8442	3664	17	8266	5351	2323
18	5400	7855	3409	18	454	9314	4043	18	4462	8374	3635	18	8361	5222	2267
19	5256	7939	3446	19	285	9320	4045	19	4613	8304	3604	19	8454	5091	2210
20	5111	8020	3481	20	+116	9324	4047	20	4762	8232	3573	20	8544	4959	2153
21	4965	8099	3515	21	− 53	9325	4047	21	4911	8157	3541	21	8632	4826	2095
22	4817	8175	3548	22	222	9323	4047	22	5058	8080	3507	22	8718	4691	2036
23	4668	8250	3581	23	391	9319	4045	23	5204	8001	3473	23	8801	4554	1977
24	4517	8322	3612	24	560	9312	4042	24	5348	7919	3437	24	8881	4417	1917
25	4365	8391	3642	25	729	9302	4038	25	5490	7836	3401	25	8959	4278	1857
26	4212	8459	3671	26	898	9290	4032	26	5632	7750	3364	26	9034	4137	1796
27	4058	8523	3700	27	1066	9275	4026	27	5771	7661	3325	27	9107	3996	1735
28	3903	8586	3727	28	1235	9258	4018	28	5909	7571	3286	28	9177	3854	1673
29	3746	8646	3753	29	1402	9238	4010	29	6045	7479	3246	29	9245	3710	1610
30	3589	8703	3778	30	1570	9215	4000	30	6180	7384	3205	30	9309	3565	1548
31	3430	8758	3802	31	1737	9190	3989	31	6312	7287	3163	31	9371	3420	1484
32	3271	8811	3824					32	6443	7188	3120	32	9431	3273	1421

II. Tafel.

Die Sonnen-Coordinaten.

	September.				October.				November.				December.		
	x	y	z		x	y	z		x	y	z		x	y	z
	−	±	±		−	−	−		−	−	−		∓	−	−
1	9431	3273	1421	1	9889	1370	595	1	7661	5774	2506	1	3422	8477	3679
2	9488	3125	1357	2	9859	1526	662	2	7548	5894	2558	2	3257	8530	3702
3	9541	2977	1292	3	9826	1681	729	3	7432	6013	2610	3	3091	8580	3724
4	9593	2827	1227	4	9790	1835	796	4	7315	6130	2661	4	2925	8628	3745
5	9641	2677	1162	5	9751	1989	863	5	7195	6245	2711	5	2757	8673	3765
6	9687	2526	1097	6	9710	2142	930	6	7072	6358	2760	6	2589	8716	3783
7	9729	2375	1031	7	9665	2295	996	7	6948	6470	2808	7	2419	8755	3800
8	9769	2222	965	8	9618	2447	1062	8	6822	6579	2856	8	2249	8792	3816
9	9807	2069	898	9	9567	2598	1128	9	6693	6686	2902	9	2079	8826	3831
10	9841	1915	831	10	9514	2749	1193	10	6562	6792	2948	10	1907	8858	3845
11	9872	1761	764	11	9458	2898	1258	11	6430	6895	2993	11	1735	8887	3857
12	9901	1606	697	12	9400	3047	1323	12	6295	6996	3037	12	1563	8913	3869
13	9927	1451	630	13	9338	3195	1387	13	6159	7095	3079	13	1390	8936	3879
14	9949	1295	562	14	9274	3342	1451	14	6020	7192	3121	14	1217	8956	3887
15	9969	1140	495	15	9206	3488	1514	15	5880	7286	3163	15	1043	8974	3895
16	9986	983	427	16	9137	3633	1577	16	5738	7379	3203	16	869	8989	3902
17	10000	827	359	17	9064	3777	1639	17	5594	7469	3242	17	694	9001	3907
18	10011	670	291	18	8989	3919	1701	18	5449	7556	3280	18	520	9010	3911
19	10020	513	223	19	8911	4061	1763	19	5302	7642	3317	19	345	9017	3914
20	10025	356	154	20	8830	4201	1823	20	5153	7725	3353	20	−170	9020	3915
21	10027	198	86	21	8746	4340	1884	21	5002	7806	3388	21	+ 5	9021	3916
22	10027	+ 41	+18	22	8660	4478	1944	22	4851	7884	3422	22	180	9019	3915
23	10023	−116	−50	23	8572	4614	2003	23	4697	7960	3455	23	354	9015	3913
24	10017	274	119	24	8481	4749	2061	24	4542	8033	3487	24	529	9007	3910
25	10007	431	187	25	8387	4883	2119	25	4386	8104	3518	25	704	8997	3905
26	9995	588	255	26	8290	5015	2177	26	4228	8173	3547	26	878	8984	3899
27	9979	745	323	27	8192	5145	2233	27	4069	8239	3576	27	1052	8968	3892
28	9961	902	391	28	8090	5274	2289	28	3909	8302	3604	28	1226	8949	3884
29	9940	1058	459	29	7987	5402	2344	29	3748	8363	3630	29	1399	8927	3875
30	9916	1214	527	30	7881	5527	2399	30	3585	8421	3655	30	1572	8903	3864
31	9889	1370	595	31	7772	5651	2453	31	3422	8477	3679	31	1744	8876	3853
				32	7661	5774	2506					32	1916	8846	3840

III. Tafel.

Die Säcular-Änderungen der Sonnen-Coordinaten.

	x	y	z
Januar 0	− 10	− 3	+ 1
20, 19	9	4	+ 1
Februar 9, 8	8	5	0
29, 28	6	4	− 1
März 20	5	2	1
April 9	5	− 1	1
29	6	+ 1	1
Mai 19	8	1	2
Junius 8	9	+ 1	2
28	10	− 1	3
Julius 18	9	2	3
August 7	8	3	3
27	6	3	3
September 16	5	3	− 1
October 6	5	1	0
26	6	0	+ 1
November 15	8	0	2
December 5	9	1	2
25	10	2	2

NEUE AUSSICHT
ZUR ERWEITERUNG DES GEBIETS DER HIMMELSKUNDE.

Neues Göttingisches Taschenbuch zum Nutzen und Vergnügen für das Jahr 1813.
Göttingen, bei Heinrich Dieterich.

So weit die Geschichte reicht, war die Erde stets der unruhige Tummelplatz feindseliger Leidenschaften. Eine Völkerschaft verdrängt die andere, um früh oder spät wieder einer andern Platz zu machen; ein Reich erhebt sich auf den Trümmern des andern: Vergänglichkeit ist das Loos aller menschlichen Schöpfungen, deren Segen oder Fluch die Generationen, welche eben der Strom der Zeit an ihnen vorüber führt, theilen. Demüthigend und niederschlagend ist dieser ewige Wechsel aller Dinge auf der Erde, aber erhebend und erheiternd ist ein Blick auf das Schauspiel des steten Fortschreitens des menschlichen Geistes im Gebiete der Wahrheit, und in keinem Theile desselben mehr, als in der erhabensten der Naturwissenschaften, der Astronomie.

Seit zwei Jahrtausenden sehen wir die schöne Frucht des Beobachtens und des tiefen Nachdenkens, mitten in den Stürmen der Zeiten, von liebenden Händen der Geweihten gepflegt, sich entwickeln und wachsen; ein Jahrhundert übergibt dem andern das kostbare Vermächtniss, es weiter zu mehren. Immer mehr entschleiert die Himmlische von ihren wundervollen Geheimnissen. Gezählt sind die Sterne; gemessen ist die unermesslich scheinende Weite der Sonne und der sie umkreisenden Weltkörper; genau bestimmt sind ihre Bahnen: vollständig erklärt, aus Einer erhaben einfachen Grundkraft, alle ihre verwickelten Bewegungen und alle mannigfaltigen daraus hervorgehenden Erscheinungen. Gemessen, ja gewogen, sind Erde, Sonne, Planeten und Monden; gemessen ist die Schnelligkeit des Lichtstrahls. Verschwunden sind die Wahnbegriffe, die ehedem die Völker ängstigten. Auch dem Irdischen zu dienen, verschmäht die Himmlische nicht. Sie theilt und zählt dem Menschen seine Zeiträume, misst und zeichnet ihm Länder und Welttheile, und leitet seine Schiffe sicher über den Ocean.

Unser Sonnensystem ist der eigentliche Schauplatz unsrer bisherigen Astronomie: noch viele Jahrhunderte hindurch wird es unerschöpften Stoff zu neuen Forschungen geben. Aber noch viel weniger, als die Erde in unserm Sonnensystem, ist dieses im Weltall: ein Tropfen im Ocean. Das Heer von Fixsternen ist für uns bis jetzt nicht viel mehr, als eine Zahl fester Punkte, an die wir unsre Beobachtungen anknüpfen. Nur eine Ahnung haben wir von ihren unermesslichen Fernen: fast ganz verschwindet gegen diese die grösste Grundlinie, mit welcher wir sie zu messen unternehmen, der Durchmesser der jährlichen Erdbahn *). Geben wir indess darum die Hoffnung, von diesen Weiten eine Kenntniss zu erhalten, nicht auf. Auch die Weite der Sonne hat man mit dem kleinen Erddurchmesser nicht unmittelbar gemessen, sondern statt jener unter günstigen Umständen, die nähere Venus gewählt **), und später hat der Scharfsinn die schon länger bekannte Entfernung des Mondes zu einem Maassstabe für die Entfernung der Sonne zu gebrauchen gewusst ***). Vielleicht sind gerade die hellsten Fixsterne uns nicht die allernächsten: was bei jenen bisher noch nicht ganz hat gelingen wollen, glückt vielleicht besser bei einem unscheinbaren Stern von einer viel niedrigern Ordnung.

In der That gibt es für diese Vermuthung wichtige Gründe. Die sogenannten Fixsterne, zu welchen auch unsere Sonne gehört, sind im strengen Sinne des Worts nicht fest; wären sie auch einmal alle zugleich in Ruhe gewesen, so hätten sie es doch wegen ihrer gegenseitigen Einwirkungen nicht bleiben können. Auch in dem zahllosen Fixsternheere ist überall Bewegung, aber wie hier die Räume mit grossen Maassstäben gemessen werden müssen, so auch die Zeiten.

*) Piazzi's, Calandrelli's und Brinkley's Beobachtungen geben zwar eine kleine jährliche Parallaxe bei dem hellen Sterne in der Leier, allein die Beobachtungen sind noch Zweifeln unterworfen, und die Resultate stimmen nicht überein; auch folgt bei demselben Sterne aus Bradley's Beobachtungen gar keine merkliche Parallaxe.

**) Vermittelst der Durchgänge von 1761 und 1769.

***) Mit Hülfe der einen von der Sonnenparallaxe abhangenden kleinen Ungleichheit in der Bewegung des Mondes.

Ein Jahrhundert bringt in ihre gegenseitigen Stellungen keine so grossen Änderungen, als ein Tag in die gegenseitigen Stellungen der Planeten. Aber merklich sind unsern heutigen feinen Beobachtungen diese veränderten Stellungen doch schon seit funfzig oder hundert Jahren bei einer beträchtlichen Anzahl von Sternen. Unter gleichen Umständen werden diese Änderungen bei den *nächsten* Sternen am meisten in die Augen fallen, und sonderbar genug, sind sie bei einigen kleinen Sternen beträchtlicher, als bei den Sternen erster Grösse. *Solche* Sterne, von denen man vielleicht noch mehrere entdecken wird, sollte man vorzüglich in Beziehung auf ihre jährliche Parallaxe, d. i. ihre verschiedene Stellung nach dem verschiedenen Stande der Erde in ihrer Bahn, recht sorgfältig beobachten.

Besonders ist ein Stern in dieser Rücksicht der höchsten Aufmerksamkeit würdig. Es ist derjenige im Sternbilde des Schwans, von der sechsten Grösse, welchen Flamstead mit der Zahl 61 bezeichnet hat. Unter allen Sternen, an welchen man bisher eine Verrückung wahrgenommen hat, zeigt dieser die stärkste, nemlich 8 Min. 52 Sec. in hundert Jahren. Eine so beträchtliche Veränderung der Stellung in Beziehung auf uns, setzt entweder ein sehr schnelles wirkliches Fortrücken im Weltraume voraus, oder eine verhältnissmässig geringere Entfernung. Wir verdanken jene wichtige Bemerkung Herrn Bessel in Königsberg, welchen die Vergleichung von Bradley's Beobachtungen dieses Sterns mit Beobachtungen aus den letzten Jahren des vorigen Jahrhunderts darauf geführt hat.

Allein noch weit interessanter wird die beobachtete schnelle Bewegung dieses Sterns durch einen andern Umstand. Der Stern ist eigentlich ein sogenannter *Doppelstern*, das heisst, durch gute Fernröhre sieht man, dass er aus zweien sehr nahe bei einander erscheinenden Sternen besteht (ihre Entfernung von einander beträgt 20 Secunden, und beide Sterne sind an Helligkeit nicht sehr verschieden). Dergleichen Doppelsterne gibt es am Himmel in grosser Menge, und die Astronomen waren bisher immer der Meinung, dass zwei Sterne uns nur zufällig als Doppelsterne erscheinen, indem sie mit uns beinahe in Einer geraden Linie liegen, wobei also ihre Entfernungen sehr ungleich sein können. Vor wenigen Jahren hat zuerst Hr. Herschel diese Meinung bestritten, und behauptet, die Doppelsterne stehen wirklich im Raume nahe bei einander und machen ein besonderes System aus. Herschels Gründe für diese Meinung sind freilich nicht entscheidend, aber an sich schon ist es in einem äusserst hohen Grade unwahrscheinlich, dass der Zufall so viele Doppelsterne mit so sehr kleinem Zwischenraume gebildet haben sollte; es lässt sich viel eher für eine wirkliche Beziehung zwischen denselben wetten. Unser Stern im Schwan gibt nunmehr einen grossen Ausschlag für HERSCHELS Meinung. Stehen beide Sterne in keiner weitern Verbindung mit einander, und verändern sie ihren Platz im Weltraume oder wir den unsrigen, so lässt sich mit höchster Wahrscheinlichkeit erwarten, dass sie bald aufhören werden, uns als ein Doppelstern zu erscheinen. So zeigen sich öfters am Himmel nahe beim Jupiter kleine Sterne; aber wie der Planet fortrückt, scheint er die Sterne zu verlassen, nur die ihm wirklich nahen Trabanten begleiten ihn beständig treu. Unser Doppelstern ist aber in 50 Jahren dreizehnmal so weit am Firmament fortgerückt, als der Zwischenraum zwischen beiden Sternen beträgt, und der Zwischenraum selbst ist fast unverändert geblieben, nur weniger schief stehen die Sterne jetzt gegen einander (im Jahre 1755 war der eine nordöstlich vom andern, jetzt fast ganz östlich). Es bleibt also kaum ein Zweifel, dass wir in ihnen eine neue Merkwürdigkeit des Weltbaus kennen gelernt haben, ein Sonnensystem, worin nicht Eine, sondern zwei Sonnen herrschen.

Ein blosses reines Herrschen findet in der Körperwelt nicht Statt, das Herrschende empfindet jedesmal mehr oder weniger die Rückwirkung des Beherrschten. Jene beiden Sonnen werden eine die andere wechselseitig beherrschen, die zweite wird nicht um die erste, die erste nicht um die zweite laufen, sondern beide um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt. Ein solcher Wechselumlauf wird desto schneller vollendet werden, je näher beide einander sind, und je kräftiger sie auf einander einwirken. Wie weit sie von einander sind, werden wir beurtheilen können, wenn die Hoffnung gegründet ist, ihre Entfernung von uns noch messbar zu finden. Und die Dauer jenes Umlaufs, der vielleicht nur wenige Jahrhunderte beträgt, wird die Zeit schon lehren. Dann wird man einen grossen Schritt in der Kenntniss des Sternenhimmels weiter gekommen sein, man wird dann im Stande sein, jene Sterne *abzuwägen*, wenn auch nicht sie einzeln, doch ihre Gesammtmasse. Der erste Schritt wird nicht der einzige bleiben. Aber wer zählt die Jahrtausende, die erst verfliessen müssen, bis unsere Kenntnisse vom Sternhimmel nur ein Schatten von denen werden können, die wir längst von *unserm* so grossen und so kleinen Sonnensystem besitzen, und wie viel bleibt nicht noch in diesem immer Neues zu lernen übrig.

REFRACTIONSTAFELN.

Sammlung von Hülfstafeln, herausgegeben von H. C. SCHUMACHER.
Erstes Heft. Copenhagen 1822.

Auf pag. 32 A [186 d. B.] folgt eine zum Gebrauch äusserst bequeme Umformung desjenigen Theils der BESSELschen Tafel, der bei der Ausübung bei weitem am meisten gebraucht wird, nemlich bis zu 79° Zenithdistanz herab, die ich der gütigen Mittheilung des Herrn Hofraths GAUSS verdanke. Sie setzt Logarithmentafeln mit 5 Decimalen voraus, aus denen man den Logarithmen der Tangente der Zenithdistanz nimmt. ʻWenn man die Zenithdistanz mit ζ bezeichnet, so ist der Logarithm der Refraction

$$= a + \log.\, \mathrm{tang}\, \zeta + \lambda b - c - 10t$$

Hier wird a aus der ersten, b aus der zweiten, c und λ aus der dritten Tafel genommen; t bedeutet die RÉAUMURschen Grade des innern Thermometers über dem Gefrierpunkt; b, c und $10t$ werden als Einheiten der 5ten Decimale angegeben. Bei Zenithdistanzen unter 45° ist der Factor λ weggelassen, und mag statt λb blos b genommen werden.'

SCHUMACHER.

Tafel I. Argument: Barometerstand in Pariser Maass.

	a		a		a		a
26^{z} 2^{l}.0	1.73506	26 6^{l}.0	1.74056	26^{z} 10^{l}.0	1.74599	27^{z} 2^{l}.0	1.75135
2.1	1.73520	6.1	1.74070	10.1	1.74613	2.1	1.75148
2.2	1.73534	6.2	1.74083	10.2	1.74626	2.2	1.75161
2.3	1.73547	6.3	1.74097	10.3	1.74640	2.3	1.75175
2.4	1.73561	6.4	1.74110	10.4	1.74653	2.4	1.75188
2.5	1.73575	6.5	1.74124	10.5	1.74666	2.5	1.75201
2.6	1.73589	6.6	1.74138	10.6	1.74679	2.6	1.75214
2.7	1.73603	6.7	1.74151	10.7	1.74693	2.7	1.75228
2.8	1.73616	6.8	1.74165	10.8	1.74706	2.8	1.75241
2.9	1.73630	6.9	1.74178	10.9	1.74720	2.9	1.75254
26 3.0	1.73644	26 7.0	1.74192	26 11.0	1.74733	27 3.0	1.75268
3.1	1.73658	7.1	1.74206	11.1	1.74747	3.1	1.75281
3.2	1.73672	7.2	1.74219	11.2	1.74760	3.2	1.75294
3.3	1.73685	7.3	1.74233	11.3	1.74774	3.3	1.75307
3.4	1.73699	7.4	1.74246	11.4	1.74787	3.4	1.75321
3.5	1.73713	7.5	1.74260	11.5	1.74801	3.5	1.75334
3.6	1.73727	7.6	1.74274	11.6	1.74814	3.6	1.75347
3.7	1.73741	7.7	1.74287	11.7	1.74828	3.7	1.75361
3.8	1.73754	7.8	1.74301	11.8	1.74841	3.8	1.75374
3.9	1.73768	7.9	1.74314	11.9	1.74855	3.9	1.75387
26 4.0	1.73782	26 8.0	1.74328	27 0.0	1.74868	27 4.0	1.75400
4.1	1.73796	8.1	1.74342	0.1	1.74882	4.1	1.75414
4.2	1.73809	8.2	1.74355	0.2	1.74895	4.2	1.75427
4.3	1.73823	8.3	1.74369	0.3	1.74909	4.3	1.75440
4.4	1.73837	8.4	1.74382	0.4	1.74922	4.4	1.75453
4.5	1.73851	8.5	1.74396	0.5	1.74935	4.5	1.75467
4.6	1.73864	8.6	1.74409	0.6	1.74948	4.6	1.75480
4.7	1.73878	8.7	1.74423	0.7	1.74962	4.7	1.75493
4.8	1.73892	8.8	1.74436	0.8	1.74975	4.8	1.75506
4.9	1.73905	8.9	1.74450	0.9	1.74988	4.9	1.75520
26 5.0	1.73919	26 9.0	1.74463	27 1.0	1.75001	27 5.0	1.75533
5.1	1.73933	9.1	1.74477	1.1	1.75014	5.1	1.75546
5.2	1.73946	9.2	1.74490	1.2	1.75028	5.2	1.75559
5.3	1.73960	9.3	1.74504	1.3	1.75041	5.3	1.75572
5.4	1.73974	9.4	1.74517	1.4	1.75055	5.4	1.75585
5.5	1.73988	9.5	1.74531	1.5	1.75068	5.5	1.75598
5.6	1.74001	9.6	1.74545	1.6	1.75082	5.6	1.75611
5.7	1.74015	9.7	1.74558	1.7	1.75095	5.7	1.75625
5.8	1.74029	9.8	1.74572	1.8	1.75108	5.8	1.75638
5.9	1.74042	9.9	1.74585	1.9	1.75122	5.9	1.75651
26 6.0	1.74056	26 10.0	1.74599	27 2.0	1.75135	27 6.0	1.75664

Tafel I. Argument: Barometerstand in Pariser Maass.

	a		a		a		a
27^{z} 6^{l}.0	1.75664	27^{z} 10^{l}.0	1.76188	28^{z} 2^{l}.0	1.76705	28^{z} 6^{l}.0	1.77216
6.1	1.75677	10.1	1.76201	2.1	1.76718	6.1	1.77229
6.2	1.75691	10.2	1.76214	2.2	1.76731	6.2	1.77241
6.3	1.75704	10.3	1.76227	2.3	1.76743	6.3	1.77254
6.4	1.75717	10.4	1.76240	2.4	1.76756	6.4	1.77266
6.5	1.75730	10.5	1.76253	2.5	1.76769	6.5	1.77279
6.6	1.75744	10.6	1.76266	2.6	1.76782	6.6	1.77292
6.7	1.75757	10.7	1.76279	2.7	1.76795	6.7	1.77304
6.8	1.75770	10.8	1.76292	2.8	1.76807	6.8	1.77317
6.9	1.75783	10.9	1.76305	2.9	1.76820	6.9	1.77329
27 7.0	1.75796	27 11.0	1.76317	28 3.0	1.76833	28 7.0	1.77342
7.1	1.75809	11.1	1.76330	3.1	1.76846	7.1	1.77355
7.2	1.75822	11.2	1.76343	3.2	1.76859	7.2	1.77367
7.3	1.75836	11.3	1.76356	3.3	1.76871	7.3	1.77380
7.4	1.75849	11.4	1.76369	3.4	1.76884	7.4	1.77393
7.5	1.75862	11.5	1.76382	3.5	1.76897	7.5	1.77406
7.6	1.75875	11.6	1.76395	3.6	1.76910	7.6	1.77418
7.7	1.75888	11.7	1.76408	3.7	1.76923	7.7	1.77431
7.8	1.75901	11.8	1.76421	3.8	1.76935	7.8	1.77444
7.9	1.75914	11.9	1.76434	3.9	1.76948	7.9	1.77456
27 8.0	1.75927	28 0.0	1.76447	28 4.0	1.76961	28 8.0	1.77469
8.1	1.75940	0.1	1.76460	4.1	1.76974	8.1	1.77482
8.2	1.75953	0.2	1.76473	4.2	1.76986	8.2	1.77494
8.3	1.75966	0.3	1.76486	4.3	1.76999	8.3	1.77507
8.4	1.75979	0.4	1.76499	4.4	1.77012	8.4	1.77519
8.5	1.75992	0.5	1.76512	4.5	1.77025	8.5	1.77532
8.6	1.76005	0.6	1.76525	4.6	1.77037	8.6	1.77545
8.7	1.76018	0.7	1.76537	4.7	1.77050	8.7	1.77557
8.8	1.76031	0.8	1.76550	4.8	1.77063	8.8	1.77570
8.9	1.76044	0.9	1.76563	4.9	1.77075	8.9	1.77582
27 9.0	1.76057	28 1.0	1.76576	28 5.0	1.77088	28 9.0	1.77595
9.1	1.76070	1.1	1.76589	5.1	1.77101	9.1	1.77608
9.2	1.76083	1.2	1.76602	5.2	1.77114	9.2	1.77620
9.3	1.76096	1.3	1.76615	5.3	1.77126	9.3	1.77633
9.4	1.76109	1.4	1.76628	5.4	1.77139	9.4	1.77645
9.5	1.76122	1.5	1.76640	5.5	1.77152	9.5	1.77658
9.6	1.76135	1.6	1.76653	5.6	1.77165	9.6	1.77671
9.7	1.76148	1.7	1.76666	5.7	1.77178	9.7	1.77683
9.8	1.76162	1.8	1.76679	5.8	1.77190	9.8	1.77695
9.9	1.76175	1.9	1.76692	5.9	1.77203	9.9	1.77708
27 10.0	1.76188	28 2.0	1.76705	28 6.0	1.77216	28 10.0	1.77721

Tafel II. Argument: Aeusseres Thermometer nach Réaumur.

	b		b		b		b		b
− 12°0	+ 4152	− 8°0	+ 3264	− 4°0	+ 2395	+ 0°0	+ 1542	+ 4°0	+ 707
11.9	4129	7.9	3242	3.9	2373	0.1	1521	4.1	686
11.8	4106	7.8	3220	3.8	2352	0.2	1500	4.2	665
11.7	4083	7.7	3198	3.7	2330	0.3	1479	4.3	644
11.6	4061	7.6	3176	3.6	2309	0.4	1458	4.4	623
11.5	4039	7.5	3154	3.5	2287	0.5	1437	4.5	603
11.4	4017	7.4	3132	3.4	2265	0.6	1416	4.6	582
11.3	3994	7.3	3110	3.3	2244	0.7	1395	4.7	561
11.2	3972	7.2	3088	3.2	2223	0.8	1374	4.8	541
11.1	3949	7.1	3066	3.1	2201	0.9	1353	4.9	520
− 11.0	+ 3927	− 7.0	+ 3045	− 3.0	+ 2180	+ 1.0	+ 1333	+ 5.0	+ 500
10.9	3905	6.9	3023	2.9	2158	1.1	1312	5.1	479
10.8	3883	6.8	3001	2.8	2137	1.2	1291	5.2	458
10.7	3860	6.7	2979	2.7	2116	1.3	1270	5.3	438
10.6	3838	6.6	2957	2.6	2095	1.4	1249	5.4	417
10.5	3816	6.5	2936	2.5	2074	1.5	1228	5.5	397
10.4	3794	6.4	2914	2.4	2052	1.6	1207	5.6	376
10.3	3772	6.3	2892	2.3	2031	1.7	1186	5.7	356
10.2	3749	6.2	2870	2.2	2009	1.8	1165	5.8	335
10.1	3727	6.1	2848	2.1	1988	1.9	1144	5.9	315
− 10.0	+ 3705	− 6.0	+ 2827	− 2.0	+ 1967	+ 2.0	+ 1123	+ 6.0	+ 295
9.9	3683	5.9	2805	1.9	1945	2.1	1102	6.1	274
9.8	3660	5.8	2783	1.8	1924	2.2	1081	6.2	254
9.7	3638	5.7	2761	1.7	1902	2.3	1060	6.3	233
9.6	3616	5.6	2739	1.6	1881	2.4	1039	6.4	213
9.5	3594	5.5	2718	1.5	1860	2.5	1018	6.5	193
9.4	3572	5.4	2696	1.4	1838	2.6	998	6.6	172
9.3	3550	5.3	2674	1.3	1817	2.7	977	6.7	152
9.2	3528	5.2	2653	1.2	1796	2.8	956	6.8	131
9.1	3506	5.1	2631	1.1	1775	2.9	935	6.9	111
− 9.0	+ 3484	− 5.0	+ 2610	− 1.0	+ 1754	+ 3.0	+ 914	+ 7.0	+ 91
8.9	3462	4.9	2588	0.9	1732	3.1	894	7.1	70
8.8	3440	4.8	2566	0.8	1711	3.2	873	7.2	50
8.7	3418	4.7	2545	0.7	1690	3.3	852	7.3	29
8.6	3396	4.6	2523	0.6	1669	3.4	831	7.4	+ 9
8.5	3374	4.5	2502	0.5	1648	3.5	810	7.5	− 11
8.4	3352	4.4	2480	0.4	1626	3.6	790	7.6	32
8.3	3330	4.3	2459	0.3	1605	3.7	769	7.7	52
8.2	3308	4.2	2437	0.2	1584	3.8	748	7.8	73
8.1	3286	4.1	2416	0.1	1563	3.9	727	7.9	93
− 8.0	+ 3264	− 4.0	+ 2395	− 0.0	+ 1542	+ 4.0	+ 707	+ 8.0	− 113

Tafel II. Argument: Aeusseres Thermometer nach Réaumur.

	b		b		b		b
+ 8°0	− 113	+ 12°0	− 918	+ 16°0	− 1707	+ 20°0	− 2483
8.1	134	12.1	938	16.1	1727	20.1	2502
8.2	154	12.2	958	16.2	1746	20.2	2521
8.3	174	12.3	978	16.3	1766	20.3	2541
8.4	194	12.4	998	16.4	1785	20.4	2560
8.5	214	12.5	1017	16.5	1805	20.5	2579
8.6	235	12.6	1037	16.6	1824	20.6	2598
8.7	255	12.7	1057	16.7	1844	20.7	2617
8.8	275	12.8	1077	16.8	1863	20.8	2636
8.9	295	12.9	1097	16.9	1883	20.9	2655
+ 9.0	− 315	+ 13.0	− 1117	+ 17.0	− 1902	+ 21.0	− 2674
9.1	335	13.1	1137	17.1	1922	21.1	2693
9.2	356	13.2	1156	17.2	1941	21.2	2712
9.3	376	13.3	1176	17.3	1961	21.3	2731
9.4	396	13.4	1196	17.4	1980	21.4	2750
9.5	416	13.5	1216	17.5	2000	21.5	2770
9.6	436	13.6	1236	17.6	2019	21.6	2789
9.7	456	13.7	1255	17.7	2038	21.7	2808
9.8	476	13.8	1275	17.8	2058	21.8	2827
9.9	497	13.9	1295	17.9	2077	21.9	2846
+ 10.0	− 517	+ 14.0	− 1314	+ 18.0	− 2097	+ 22.0	− 2865
10.1	537	14.1	1334	18.1	2116	22.1	2884
10.2	557	14.2	1354	18.2	2136	22.2	2903
10.3	577	14.3	1374	18.3	2155	22.3	2922
10.4	597	14.4	1393	18.4	2175	22.4	2941
10.5	617	14.5	1413	18.5	2194	22.5	2960
10.6	637	14.6	1433	18.6	2213	22.6	2979
10.7	657	14.7	1452	18.7	2233	22.7	2998
10.8	678	14.8	1472	18.8	2252	22.8	3017
10.9	698	14.9	1491	18.9	2271	22.9	3036
+ 11.0	− 718	+ 15.0	− 1511	+ 19.0	− 2290	+ 23.0	− 3055
11.1	738	15.1	1531	19.1	2309	23.1	3074
11.2	758	15.2	1550	19.2	2329	23.2	3093
11.3	778	15.3	1570	19.3	2348	23.3	3112
11.4	798	15.4	1590	19.4	2367	23.4	3131
11.5	818	15.5	1609	19.5	2387	23.5	3151
11.6	838	15.6	1629	19.6	2406	23.6	3170
11.7	858	15.7	1648	19.7	2425	23.7	3189
11.8	878	15.8	1668	19.8	2445	23.8	3208
11.9	898	15.9	1687	19.9	2464	23.9	3227
+ 12.0	− 918	+ 16.0	− 1707	+ 20.0	− 2483	+ 24.0	− 3247

REFRACTIONSTAFELN.

Tafel III. Argument: Scheinbare Zenith-Distanz $= \zeta$.

ζ	c	λ	ζ	c	λ	ζ	c	λ	ζ	c	λ
0°	0		29°	16		50°	75	1.0023	71°	430	1.0124
5	1		30	17		51	80	1.0025	72	480	1.0139
10	2		31	18		52	85	1.0026	73	541	1.0156
11	2		32	20		53	91	1.0027	74	613	1.0175
12	3		33	21		54	98	1.0029	74 20′	640	1.0182
13	3		34	23		55	106	1.0032	74 40	669	1.0189
14	3		35	25		56	115	1.0034	75 0	699	1.0197
15	4		36	27		57	124	1.0037	75 20	731	1.0204
16	5		37	29		58	133	1.0040	75 40	765	1.0212
17	5		38	31		59	144	1.0043	76 0	801	1.0220
18	6		39	33		60	156	1.0046	76 20	840	1.0230
19	6		40	35		61	168	1.0049	76 40	881	1.0241
20	7		41	38		62	183	1.0054	77 0	927	1.0252
21	8		42	41		63	199	1.0058	77 20	975	1.0264
22	8		43	44		64	217	1.0063	77 40	1028	1.0280
23	9		44	48		65	237	1.0068	78 0	1084	1.0299
24	10		45	53	1.0018	66	260	1.0075	78 10	1112	1.0308
25	11		46	57	1.0019	67	285	1.0083	78 20	1142	1.0318
26	12		47	61	1.0019	68	314	1.0092	78 30	1175	1.0328
27	13		48	65	1.0020	69	348	1.0101	78 40	1209	1.0338
28	14		49	70	1.0021	70	385	1.0111	78 50	1244	1.0347
29	16		50	75	1.0023	71	430	1.0124	79 0	1280	1.0357

GAUSS AN SCHUMACHER.

Astronomische Nachrichten herausgegeben von H. C. Schumacher.
Band 20. Nr. 474. S. 299.

Göttingen, 1843 April 1.

Um aus Elementen für eine gegebene Zeit einen Ort zu bestimmen, brauche ich zur Berechnung der Anomalie gern die Burckhardt'sche Tafel, die aber nur bis 163° 45′ geht, und daher für den gegenwärtigen Stand des Cometen nach Herrn Galles Elementen unzureichend wird. Barkers Tafel reicht zwar überall aus, wird aber bei grossen Anomalien wegen des beschwerlichen Interpolirens sehr unbequem. In solchen Fällen pflege ich ein besonderes Verfahren anzuwenden, dessen Mittheilung Ihnen vielleicht angenehm sein wird. Ist M die Zahl mit der (oder für grössere Werthe mit deren Logarithmen) man in die Barker'sche Tafel eingehen müsste, also $M = \frac{\text{Zwischenzeit}}{nq^{\frac{3}{2}}}$ wo $\log n = 0{,}0398723$, so setze ich $\log \frac{MM}{16875} = 3P$, und suche in meiner kleinen Logarithmentafel, A und B in der dortigen Bedeutung genommen, der Gleichung $3A + 2B = 3P$ Genüge zu leisten, was immer, wenn P gross ist, sehr schnell bewirkt wird. Ist dann a die zum Logarithmen A gehörige Zahl, so wird, die Anomalie $= v$ gesetzt,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{(3a)} \quad \text{oder} \quad \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \tfrac{1}{2}(A + \log 3)$$

Auch der Logarithme des Radius Vector wird dann äusserst bequem berechnet, indem man mit $A + \log 3$ wieder in die erste Columne eingeht, oder $A + \log 3 = A^*$ und die dazu gehörige Grösse in der zweiten Columne $= B^*$ folgt, wodurch sogleich der Logarithme des Radius Vectors $= A^* + B^* + \log q$ wird.

Die indirecte Auflösung jener Gleichung geschieht, wenigstens für die ersten Versuche, etwas bequemer und fast à vue in der Form $C = P + \frac{1}{3}B$; man kann zuerst P in der dritten Columne aufsuchen, oder $P = C'$ und die dazu gehörige Grösse in der zweiten Columne $= B'$ setzen, dann $P + \frac{1}{3}B' = C''$ und dazu aus der Tafel die Grösse der zweiten Columne $= B''$, dann (wo nöthig) $P + \frac{1}{3}B'' = C'''$ und dazu gehörig B''' nehmen u. s. w., welche Rechnung sehr schnell zum Stillstand kommt. Will man sich mit der Genauigkeit, welche fünfzifrige Logarithmen geben, nicht begnügen, so kann man die Matthiessen'sche Tafel (welche ich sonst wegen der unzeitigen Oeconomie, womit sie ganz unnöthigerweise gedruckt ist, nicht gern gebrauche) hier mit Vortheil zu Hülfe nehmen, was ich aber lieber erst dann thue, wenn ich durch die kleinere Tafel die beiden Stellen, zwischen welchen der Definitivwerth von A fällt schon bestimmt habe, und dann wende ich lieber die Gleichung in ihrer ursprünglichen Form $3A + 2B = 3P$ an.

Soll z. B. die Anomalie für Februar 48.33333, oder für die Zeit nach der Sonnennähe 20ᵀ87663 bestimmt werden, so ist nach Galle's Elementen [Astr. Nachrichten Band 20. N. 474 Berlin 1843 März 25]

$$\begin{array}{lr} q^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots & 7.0809490 \\ n\sqrt{16875} \;\ldots & 2.1534942 \\ \hline \text{Const. Logarithme} = & 9.2344432 \end{array} \qquad \begin{array}{lr} 20.87663 \ldots\ldots & 1.3196604 \\ & 9.2344432 \\ \hline & 2.0852172 \\ \text{Also } 3P = & 4.1704344 \\ P = & 1.3901448 \end{array}$$

Mit den kleinen Tafeln findet sich daraus

$$B' = 0.01806 \qquad C'' = 1.39616$$
$$B'' = 0.01781 \qquad C''' = 1.39608$$

womit die Rechnung schon steht, und $A = 1.37827$ wird. Matthiessen's Tafel gibt genauer $A = 1.3782739$. Die weitere Rechnung wird dann

$$\begin{array}{rl} A = & 1.3782739 \\ 3 \ldots\ldots & 0.4771213 \\ \hline & 1.8553952 \\ & 0.9276976 = \log \operatorname{tang}\ 83^0\, 15'\, 49''53 \\ \text{und die wahre Anomalie} = & \qquad\qquad 166\ \ 31\ \ 39{,}06 \end{array}$$

Ferner gehört zu

$$\begin{array}{rl} A^{\cdot} = & 1.8553952 \\ B^{\cdot} = & 0.0060170 \\ q \ldots\ldots & 8.0539660 \\ \hline \text{Logarithm des Radius Vector} = & 9.9153782 \end{array}$$

Man sieht übrigens, dass diese Methode nichts weiter ist, als eine indirecte Auflösung der bekannten cubischen Gleichung zwischen der Tangente der halben Anomalie und der Sectorfläche, und zugleich, dass meine, oder für schärfere Rechnung die Matthiessen'sche Logarithmentafel auf ganz ähnliche Weise zu einer sehr bequemen Auffindung aller reellen Wurzeln *jeder algebraischen Gleichung, die nicht mehr als drei effective Glieder hat*, benutzt werden kann, wie ich in Beziehung auf die quadratische Gleichung unlängst bei der letzten Ausgabe der Vega'schen Logarithmentafel schon gezeigt habe.

GAUSS AN SCHUMACHER.

Astronomische Nachrichten herausgegeben von H. C. Schumacher.
Band 27. Nr. 625. S. 1.

Göttingen, 1847 November 23.

Da die in Nr. 615 der A. N. abgedruckten zweiten Elemente der Iris, welche Herr Prof. Goldschmidt gleich nach dem 19. September berechnet hatte, auch noch in den folgenden Monaten eine gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen gezeigt haben (am 17. und 18. November war die Differenz von Herrn Rümcker's Meridianbeobachtung 16″ in ger. Aufst. und 2″ in der Abweichung), so ist man berechtigt, sie als schon sehr genähert zu betrachten, und ich habe deshalb Herrn Prof. Goldschmidt veranlasst, danach den Zodiacus der Iris zu berechnen. Das Resultat dieser Arbeit, welches zur Erleichterung der Nachforschungen auf Identität in frühern Beobachtungen wird dienen können, lasse ich hier nachfolgen.

Indem ich bei dieser Veranlassung den Aufsatz wieder in die Hände nehme, in welchem ich vor 44 Jahren die allgemeine Methode zur Bestimmung der Limiten eines solchen Zodiacus gegeben habe, sehe ich, dass ich darin auch schon die Ausnahmsfälle angedeutet habe, wo das Feld der geocentrischen Erscheinung eines die Sonne nach Kepler'schen Gesetzen umkreisenden Himmelskörpers auf der Himmelskugel entweder gar keine oder nur Eine Limite hat, obgleich die Methode im erstern Falle eine in sich zurücklaufende Linie, im andern zwei solche Linien ergibt. Auch ist die Frage daselbst aufgeworfen, was denn in solchen Ausnahmsfällen diese durch Rechnung gefundenen Linien eigentlich

bedeuten. Ich habe mich damals auf diese Andeutungen beschränkt, weil eine weitere Ausführung dort ein Horsd'oeuvre gewesen wäre, und ich auch gern andern das Vergnügen lassen wollte, sich mit einer meiner Meinung nach nicht uninteressanten mathematischen Aufgabe zu beschäftigen. Da mir jedoch nicht bekannt geworden ist, dass ein anderer in der langen Zwischenzeit die mir inzwischen ganz aus dem Gedächtniss gekommene Frage aufgenommen hätte, so ergreife ich diese Gelegenheit, um wenigstens den Hauptnerv des zur Beantwortung nöthigen hier mitzutheilen.

Ein geocentrischer Ort des in Rede stehenden Planeten (oder Cometen) geht hervor, indem man einen Punkt der Bahn des letztern mit einem Punkt der Erdbahn combinirt; es kann aber auch einerlei geocentrischer Ort aus zwei, drei, oder vier verschiedenen Combinationen hervorgehen. Um die Vorstellungen zu fixiren, lege man durch die Sonne eine Ebene, gegen welche die einen vorgegebenen geocentrischen Ort, auf der Himmelskugel, repräsentirende gerade Linie normal ist, und projicire orthographisch auf diese Ebene sowohl die Erdbahn als die Planetenbahn. Beide Projectionen sind Ellipsen, oder allgemeiner Kegelschnitte, die sich entweder gar nicht, oder zweimal oder viermal schneiden werden; eine Berührung ist dabei wie das Verschmelzen zweier Schnitte zu betrachten. Durch jeden Schnitt wird ein geocentrischer Ort vorgestellt, der entweder mit dem vorgegebenen identisch, oder ihm auf der Himmelskugel entgegengesetzt ist, je nachdem von den beiden Punkten der Planetenbahn und der Erdbahn, deren Projection zusammenfällt, der erstere oder der andere höherliegend ist; als obere Seite der Projectionsebene diejenige betrachtet, auf welcher der vorgegebene geocentrische Ort liegt.

Es ist hieraus klar, dass wenn irgend ein Punkt der Himmelskugel, fragweise als geocentrischer Ort, aufgegeben wird, er dies entweder auf gar keine Weise oder auf Eine Art, oder auf zwei, drei oder vier Arten sein kann. Für einen gegebenen Planeten scheidet sich so die ganze Fläche der Himmelskugel in verschiedene Theile, und die nach der von mir gegebenen Methode bestimmten Linien sind, allgemein zu reden, nichts anders, als Scheidungen zwischen zwei Flächentheilen der Kugel, wo die auf der einen Seite liegenden Punkte auf zwei Arten mehr, geocentrische Örter sein können als die auf der andern. Die in den Scheidungslinien liegenden Punkte machen den Übergang, d. i. sie sind auf Eine Art mehr als die Punkte auf der einen Seite, und auf Eine Art weniger als die

Punkte auf der andern Seite fähig geocentrische Örter zu sein. Übrigens lässt sich auch das Criterium angeben, wonach a priori entschieden wird, auf welcher Seite der Scheidungslinie zwei Auflösungen mehr Statt finden als auf der andern, wobei ich jedoch gegenwärtig mich nicht aufhalten will.

Alle bisher bekannten Planeten haben solche Bahnen, dass die durch die Theorie gefundenen Scheidungslinien immer wahre Limiten sind. Es sind nämlich zwei Scheidungslinien, die die Himmelskugel in drei Flächenräume abtheilen; zwei sind isolirte Flächen, in welche gar keine geocentrische Örter fallen, der dritte zwischen jenen, gürtelartig, enthält alle geocentrischen Örter, und jeder Punkt innerhalb des Gürtels kann auf zwei Arten, jeder Punkt auf der Limite auf Eine Art geocentrischer Ort sein.

Es lassen sich aber fingirte Bahnen denken (Cometenbahnen werden vielleicht mehrere in dem Fall sein, worüber ich jedoch bisher keine Nachforschungen gemacht habe), wo zwei Limiten die Himmelskugel auch in drei Stücke scheiden, und wo der eine Theil gar keine geocentrischen Örter enthält, der andere die geocentrischen zu zwei Arten, der dritte hingegen die Punkte die auf vier verschiedene Arten geocentrische Örter sein können.

Noch weitere Mannigfaltigkeit ergibt sich, wenn Eine Scheidungslinie sich selbst einmal oder zweimal schneidet, eine einfache oder doppelte Schleife bildet. Im ersten Fall wird sie zwei, im zweiten drei Flächenräume von dem gürtelförmigen Theile abtrennen, in denen resp. 4 und 0 oder 4, 0, 4 Auflösungsarten Statt finden.

Noch anders verhält es sich mit einer Bahn, die in die Erdbahn wie ein Kettenring eingreift. In einem solchen Fall ist nur Eine zusammenhängende Limitenlinie, also zwei geschiedene Flächentheile, wo die Punkte des einen Theils auf Eine Art, die des andern Theils auf drei Arten geocentrische Örter sein können.

BEOBACHTUNGEN

UND

RECHNUNGEN.