ALLGEMEINE LEHRSÄTZE

IN BEZIEHUNG AUF DIE IM VERKEHRTEN VERHÄLTNISSE

DES QUADRATS DER ENTFERNUNG

WIRKENDEN ANZIEHUNGS- UND ABSTOSSUNGS-KRÄFTE

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839.
Herausg. v. GAUSS u. WEBER. Leipzig 1840.

ALLGEMEINE LEHRSÄTZE

IN BEZIEHUNG AUF DIE IM VERKEHRTEN VERHÄLTNISSE

DES QUADRATS DER ENTFERNUNG WIRKENDEN

ANZIEHUNGS- UND ABSTOSSUNGS-KRÄFTE.

1.

Die Natur bietet uns mancherlei Erscheinungen dar, welche wir durch die Annahme von Kräften erklären, die von den kleinsten Theilen der Substanzen auf einander ausgeübt werden, und den Quadraten der gegenseitigen Entfernungen umgekehrt proportional sind.

Vor allen gehört hieher die allgemeine Gravitation. Vermöge derselben übt jedes ponderable Molecül μ auf ein anderes μ' eine bewegende Kraft aus, welche, wenn man die Entfernung $= r$ setzt, durch $\frac{\mu\mu'}{rr}$ ausgedrückt wird, und eine Annäherung in der Richtung der verbindenden geraden Linie hervorzubringen strebt.

Wenn man zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen zwei magnetische Flüssigkeiten annimmt, wovon die eine als positive Grösse, die andere als negative betrachtet wird, so üben zwei derartige Elemente μ, μ' gleichfalls eine bewegende Kraft auf einander aus, welche durch $\frac{\mu\mu'}{rr}$ gemessen wird, und in der verbindenden geraden Linie wirkt, aber als Abstossung, wenn μ, μ' gleichartig, als Anziehung, wenn sie ungleichartig sind.

Ganz ähnliches gilt von der gegenseitigen Wirkung der Theile der elektrischen Flüssigkeiten auf einander.

Das linearische Element ds eines galvanischen Stroms übt auf ein Element des magnetischen Fluidums μ (wenn wir letzteres zulassen) ebenfalls eine bewegende Kraft aus, die dem Quadrate der Entfernung r umgekehrt proportional ist; aber hier tritt zugleich der ganz abweichende Umstand ein, dass die Richtung der Kraft nicht in der verbindenden geraden Linie, sondern senkrecht gegen die durch μ und die Richtung von ds gelegte Ebene ist, und dass ausserdem die Stärke der Kraft nicht von der Entfernung allein, sondern zugleich von dem Winkel abhängt, welchen r mit der Richtung von ds macht. Nennt man diesen Winkel ϑ, so ist $\frac{\sin\vartheta . \mu ds}{rr}$ das Maass der bewegenden Kraft, welche ds auf μ ausübt, und eben so gross ist die von μ auf das Stromelement ds oder dessen ponderabeln Träger ausgeübte Kraft, deren Richtung der erstern entgegengesetzt parallel ist.

Wenn man mit Ampère annimmt, dass zwei Elemente von galvanischen Strömen ds, ds' in der sie verbindenden geraden Linie anziehend oder abstossend auf einander wirken, so nöthigen uns die Erscheinungen, diese Kraft gleichfalls dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional zu setzen, zugleich aber erfordern jene eine etwas verwickeltere Abhängigkeit von der Richtung der Stromelemente.

Wir werden uns in dieser Abhandlung auf die drei ersten Fälle oder auf solche Kräfte einschränken, die sich in der Richtung der geraden Linie zwischen dem Elemente, welches wirkt, und demjenigen, auf welches gewirkt wird, äussern, und schlechthin dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional sind, obwohl mehrere Lehrsätze mit geringer Veränderung auch bei den andern Fällen ihre Anwendung finden, deren ausführliche Entwickelung einer andern Abhandlung vorbehalten bleiben muss.

2.

Wir bezeichnen mit a, b, c die rechtwinkligen Coordinaten eines materiellen Punktes, von welchem aus eine abstossende oder anziehende Kraft wirkt; die beschleunigende Kraft selbst in einem unbestimmten Punkte O, dessen Coordinaten x, y, z sind, mit

$$\frac{\mu}{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2} = \frac{\mu}{rr}$$

wo also μ für den ersten Fall des vorhergehenden Artikels die im erstern Punkte

befindliche ponderable Materie, im zweiten und dritten das Quantum magnetischen oder elektrischen Fluidums ausdrückt. Wird diese Kraft parallel mit den drei Coordinatenaxen zerlegt, so entstehen daraus die Componenten

$$\frac{\varepsilon\mu(a-x)}{r^3}, \quad \frac{\varepsilon\mu(b-y)}{r^3}, \quad \frac{\varepsilon\mu(c-z)}{r^3}$$

wo $\varepsilon = +1$ oder $= -1$ sein soll, jenachdem die Kraft anziehend oder abstossend wirkt, was sich nach der Beschaffenheit des Wirkenden und des die Wirkung Empfangenden von selbst entscheidet. Diese Componenten stellen sich dar als die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\mathrm{d}\frac{\varepsilon\mu}{r}}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}\frac{\varepsilon\mu}{r}}{\mathrm{d}y}, \quad \frac{\mathrm{d}\frac{\varepsilon\mu}{r}}{\mathrm{d}z}$$

Wirken also auf denselben Punkt O mehrere Agentien μ^0, μ', μ'' u. s. f. aus den Entfernungen r^0, r', r'' u. s. f., und setzt man

$$\frac{\mu^0}{r^0}+\frac{\mu'}{r'}+\frac{\mu''}{r''}+\text{u. s. f.} = \Sigma\frac{\mu}{r} = V$$

so werden die Componenten der ganzen in O wirkenden Kraft durch

$$\frac{\varepsilon\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\varepsilon\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}, \quad \frac{\varepsilon\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}$$

dargestellt.

Wenn die Agentien nicht aus discreten Punkten wirken, sondern eine Linie, eine Fläche oder einen körperlichen Raum stetig erfüllen, so tritt an die Stelle der Summation Σ eine einfache, doppelte oder dreifache Integration. Der letzte Fall ist an sich allein der Fall der Natur: allein da man oft dafür, unter gewissen Einschränkungen, fingirte in Punkte concentrirte, oder auf Linien oder Flächen stetig vertheilte Agentien substituiren kann, so werden wir jene Fälle mit in unsre Untersuchung ziehen, wobei es unanstössig sein wird, von *Massen*, die auf eine Fläche oder Linie vertheilt, oder in einen Punkt concentrirt sind, zu reden, insofern der Ausdruck Masse hier nichts weiter bedeutet, als dasjenige, wovon Anziehungs- oder Abstossungs-Kräfte ausgehend gedacht werden.

3.

Indem wir also, für jeden Punkt im Raume, mit x, y, z dessen rechtwinklige Coordinaten, und mit V das Aggregat aller wirkenden Massentheilchen, je-

des mit seiner Entfernung von jenem Punkte dividirt, bezeichnen, wobei nach den jedesmaligen Bedingungen der Untersuchung negative Massentheilchen entweder ausgeschlossen oder als zulässig betrachtet werden mögen, wird V eine Function von x, y, z, und die Erforschung der Eigenthümlichkeiten dieser Function der Schlüssel zur Theorie der Anziehungs- oder Abstossungskräfte selbst sein. Zur bequemern Handhabung der dazu dienenden Untersuchungen werden wir uns erlauben, dieses V mit einer besondern Benennung zu belegen, und die Grösse das *Potential* der Massen, worauf sie sich bezieht, nennen. Für unsre gegenwärtige Untersuchung reicht diese beschränktere Begriffsbestimmung hin: im weitern Sinn könnte man sowohl für Betrachtung anderer Anziehungsgesetze, als im umgekehrten Verhältniss des Quadrates der Entfernung, als auch für den vierten im Art. 1 erwähnten Fall, unter Potential die Function von x, y, z verstehen, deren partielle Differentialquotienten die Componenten der erzeugten Kraft vorstellen.

Bezeichnen wir die ganze in dem Punkte x, y, z Statt findende Kraft mit p, und die Winkel, welche ihre Richtung mit den drei Coordinatenaxen macht, mit α, β, γ, so sind die drei Componenten

$$p\cos\alpha = \varepsilon\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}, \quad p\cos\beta = \varepsilon\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}, \quad p\cos\gamma = \varepsilon\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}$$

und

$$p = \sqrt{\left(\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\right)^2\right)}$$

4.

Ist $\mathrm{d}s$ das Element einer beliebigen geraden oder krummen Linie, so sind $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}$ die Cosinus der Winkel, welche jenes Element mit den Coordinatenaxen macht; bezeichnet also ϑ den Winkel zwischen der Richtung des Elements und der Richtung, welche die resultirende Kraft daselbst hat, so ist

$$\cos\vartheta = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot\cos\alpha + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\cdot\cos\beta + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\cdot\cos\gamma$$

Die auf die Richtung von $\mathrm{d}s$ projicirte Kraft wird folglich

$$p\cos\vartheta = \varepsilon\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) = \frac{\varepsilon\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}$$

Legen wir durch alle Punkte, in welchen das Potential V einen constanten Werth hat, eine Fläche, so wird solche, allgemein zu reden, die Theile des

Raums, wo V kleiner ist, von denen scheiden, wo V grösser ist als jener Werth. Liegt die Linie s in dieser Fläche, oder tangirt sie wenigstens dieselbe mit dem Element $\mathrm{d}s$, so ist $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = 0$. Falls also nicht an diesem Platze die Bestandtheile der ganzen Kraft einander destruiren, oder $p = 0$ wird, in welchem Falle von einer Richtung der Kraft nicht mehr die Rede sein kann, muss nothwendig $\cos\vartheta = 0$ sein, woraus wir schliessen, dass die Richtung der resultirenden Kraft in jedem Punkte einer solchen Fläche gegen diese selbst normal ist, und zwar nach derjenigen Seite des Raumes zu, wo die grössern Werthe von V angrenzen, wenn $\varepsilon = +1$ ist; nach der entgegengesetzten, wenn $\varepsilon = -1$ ist. Wir nennen eine solche Fläche eine *Gleichgewichtsfläche*. Da durch jeden Punkt eine solche Fläche gelegt werden kann, so wird die Linie s, falls sie nicht ganz in Einer Gleichgewichtsfläche liegt, in jedem ihrer Punkte eine andere treffen. Durchschneidet s alle Gleichgewichtsflächen unter rechten Winkeln, so stellt eine Tangente an jener Linie überall die Richtung der Kraft, und $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s}$ ihre Stärke dar.

Das Integral $\int p\cos\vartheta\,.\,\mathrm{d}s$, durch ein beliebiges Stück der Linie s ausgedehnt, wird offenbar $= \varepsilon(V' - V^0)$, wenn V^0, V' die Werthe des Potentials für den Anfangs- und Endpunkt bedeuten. Ist also s eine geschlossene Linie, so wird jenes Integral, durch die ganze Linie erstreckt, $= 0$ werden.

5.

Es ist von selbst klar, dass das Potential in jedem Punkte des Raumes, der *ausserhalb* aller anziehenden oder abstossenden Theilchen liegt, einen assignabeln Werth erhalten muss; dasselbe gilt aber auch von dessen Differentialquotienten, sowohl erster als höherer Ordnung, da diese in jener Voraussetzung gleichfalls die Form von Summen assignabler Theile oder von Integralen solcher Differentiale annehmen, in denen die Coëfficienten durchaus assignable Werthe haben. So wird

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \Sigma\frac{(a-x)\mu}{r^3}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x^2} = \Sigma\left(\frac{3(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)\mu$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y} = \Sigma\frac{(b-y)\mu}{r^3}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y^2} = \Sigma\left(\frac{3(b-y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)\mu$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z} = \Sigma\frac{(c-z)\mu}{r^3}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z^2} = \Sigma\left(\frac{3(c-z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right)\mu$$

Die bekannte Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z^2}=0$$

gilt also für alle Punkte des Raumes, die ausserhalb der wirkenden Massen liegen.

6.

Unter den verschiedenen Fällen, wo der Werth des Potentials V oder seiner Differentialquotienten für einen nicht ausserhalb der wirkenden Massen liegenden Punkt in Frage kommt, wollen wir zuerst den Fall der Natur betrachten, wo die Massen einen bestimmten körperlichen Raum mit gleichförmiger oder ungleichförmiger, aber überall endlicher Dichtigkeit ausfüllen.

Es sei t der ganze Raum, welcher Masse enthält; $\mathrm{d}t$ ein unendlich kleines Element desselben, welchem die Coordinaten a, b, c und das Massenelement $k\,\mathrm{d}t$ entsprechen; ferner sei V das Potential in dem Punkte O, dessen Coordinaten x, y, z, also die Entfernung von jenem Element

$$\sqrt{((a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2)}=r$$

Es wird folglich

$$V=\int\frac{k\,\mathrm{d}t}{r}$$

durch den ganzen Raum t ausgedehnt, was eine dreifache Integration implicirt. Man sieht leicht, dass eine wahre Integration stattnehmig ist, auch wenn O innerhalb des Raumes sich befindet, obgleich dann $\frac{1}{r}$ für die unendlich nahe bei O liegenden Elemente unendlich gross wird. Denn wenn man anstatt a, b, c Polarcoordinaten einführt, indem man

$$a=x+r\cos u,\quad b=y+r\sin u\cos\lambda,\quad c=z+r\sin u\sin\lambda$$

setzt, so wird $\mathrm{d}t=rr\sin u.\mathrm{d}u.\mathrm{d}\lambda.\mathrm{d}r$, mithin

$$V=\iiint kr\sin u.\mathrm{d}u.\mathrm{d}\lambda.\mathrm{d}r$$

wo die Integration in Beziehung auf r von $r=0$ bis zu dem an der Grenze von t Statt findenden Werthe, von $\lambda=0$ bis $\lambda=2\pi$, und von $u=0$ bis $u=\pi$ ausgedehnt werden muss. Es wird also nothwendig V einen bestimmten endlichen Werth erhalten.

Man sieht ferner leicht ein, dass man auch hier

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=\int k\,\mathrm{d}t.\frac{\mathrm{d}\frac{1}{r}}{\mathrm{d}x}=\int\frac{k(a-x)\,\mathrm{d}t}{r^3}=X$$

setzen darf. Die Befugniss dazu beruhet darauf, dass auch dieser Ausdruck, welcher unter Anwendung von Polarcoordinaten in

$$\iiint k\cos u.\sin u.\mathrm{d}u.\mathrm{d}\lambda.\mathrm{d}r$$

übergeht, einer wahren Integration fähig ist, also X einen bestimmten endlichen Werth erhält, der sich nach der Stetigkeit ändert, weil alle in unendlicher Nähe bei O liegenden Elemente nur einen unendlich kleinen Beitrag dazu geben. Aus ähnlichen Gründen darf man auch

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}=\int\frac{k(b-y)\,\mathrm{d}t}{r^3}=Y$$
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}=\int\frac{k(c-z)\,\mathrm{d}t}{r^3}=Z$$

setzen, und diese Grössen erhalten daher, eben so wie V, innerhalb t bestimmte nach der Stetigkeit sich ändernde Werthe. Dasselbe wird auch noch auf der Grenze von t gelten.

7.

Was nun aber die Differentialquotienten höherer Ordnungen betrifft, so muss für Punkte innerhalb t ein anderes Verfahren eintreten, da es z. B. nicht verstattet ist, $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$ in

$$\int k\,\mathrm{d}t.\frac{\mathrm{d}\frac{a-x}{r^3}}{\mathrm{d}x}$$

d. i. in

$$\int k\left(\frac{3(a-x)^2-rr}{r^5}\right)\mathrm{d}t$$

umzuformen, indem dieser Ausdruck genau betrachtet nur ein Zeichen ohne bestimmte klare Bedeutung sein würde. Denn in der That, da sich innerhalb jedes auch noch so kleinen Theils von t, welcher den Punkt einschliesst, Theile nachweisen lassen, über welche ausgedehnt dieses Integral jeden vorgegebenen Werth, er sei positiv oder negativ, überschreitet, so fehlt hier die wesentliche

Bedingung, unter welcher allein dem ganzen Integrale eine klare Bedeutung beigelegt werden kann, nemlich die Anwendbarkeit der Exhaustionsmethode.

8.

Ehe wir diese Untersuchung in ihrer Allgemeinheit vornehmen, wird es zur Fixirung der Vorstellungen nützlich sein, einen sehr einfachen speciellen Fall zu betrachten.

Es sei t eine Kugel, deren Halbmesser $= R$ ist, und deren Mittelpunkt mit dem Anfangspunkte der Coordinaten zusammenfällt: die Dichtigkeit der die Kugel erfüllenden Masse sei constant $= k$, und den Abstand des Punktes O vom Mittelpunkte bezeichnen wir mit $\rho = \sqrt{(xx+yy+zz)}$. Bekanntlich hat das Potential zwei verschiedene Ausdrücke, je nachdem O innerhalb der Kugel, oder ausserhalb liegt. Im erstern Fall ist nemlich

$$V = 2\pi kRR - \tfrac{2}{3}\pi k\rho\rho = 2\pi kRR - \tfrac{2}{3}\pi k(xx+yy+zz) \quad ,$$

im zweiten hingegen

$$V = \frac{4\pi kR^3}{3\rho}$$

Auf der Oberfläche der Kugel geben beide Ausdrücke einerlei Werth $\frac{2}{3}\pi kRR$, und das Potential ändert sich daher im ganzen Raume nach der Stetigkeit.

Für die Differentialquotienten erhalten wir, im innern Raume

$$\frac{dV}{dx} = X = -\tfrac{4}{3}\pi kx$$
$$\frac{dV}{dy} = Y = -\tfrac{4}{3}\pi ky$$
$$\frac{dV}{dz} = Z = -\tfrac{4}{3}\pi kz$$

im äussern Raume hingegen

$$X = -\frac{4\pi kR^3x}{3\rho^3}$$
$$Y = -\frac{4\pi kR^3y}{3\rho^3}$$
$$Z = -\frac{4\pi kR^3z}{3\rho^3}$$

Auch hier geben auf der Oberfläche die letztern Formeln dieselben Werthe wie die erstern, daher auch X, Y, Z im ganzen Raume nach der Stetigkeit sich ändern.

Anders verhält es sich aber mit den Differentialquotienten dieser Grössen. Im innern Raume haben wir

$$\frac{dX}{dx} = -\tfrac{4}{3}\pi k, \quad \frac{dY}{dy} = -\tfrac{4}{3}\pi k, \quad \frac{dZ}{dz} = -\tfrac{4}{3}\pi k$$

im äussern Raume hingegen

$$\frac{dX}{dx} = \frac{4\pi kR^3(3xx-\rho\rho)}{3\rho^5}$$
$$\frac{dY}{dy} = \frac{4\pi kR^3(3yy-\rho\rho)}{3\rho^5}$$
$$\frac{dZ}{dz} = \frac{4\pi kR^3(3zz-\rho\rho)}{3\rho^5}$$

Auf der Oberfläche fallen diese Werthe nicht mit jenen zusammen, sondern sind beziehungsweise

$$\frac{4\pi kxx}{RR}, \quad \frac{4\pi kyy}{RR}, \quad \frac{4\pi kzz}{RR}$$

grösser. Es ändern sich daher jene Differentialquotienten, nach der Stetigkeit zwar im ganzen innern und im ganzen äussern Raume, aber sprungsweise beim Übergange aus dem einen in den andern, und in der Scheidungsfläche selbst muss man ihnen doppelte Werthe beilegen, je nachdem dx, dy, dz als positiv oder als negativ betrachtet werden.

Ähnliches findet bei den sechs übrigen Differentialquotienten

$$\frac{dX}{dy}, \quad \frac{dX}{dz}, \quad \frac{dY}{dx}, \quad \frac{dY}{dz}, \quad \frac{dZ}{dx}, \quad \frac{dZ}{dy}$$

Statt, die im Innern der Kugel sämmtlich $= 0$ werden, und beim Durchgange durch die Kugelfläche sprungsweise die Änderungen

$$\frac{4\pi kxy}{RR}, \quad \frac{4\pi kxz}{RR} \text{ u. s. f.}$$

erleiden.

Das Aggregat $\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}$ oder $\frac{ddV}{dx^2}+\frac{ddV}{dy^2}+\frac{ddV}{dz^2}$ wird im Innern der Kugel $= -4\pi k$, im äussern Raume $= 0$. Auf der Oberfläche selbst verliert es aber seine einfache Bedeutung: präcis zu reden, kann man nur sagen, dass es ein Aggregat von drei Theilen ist, deren jeder zwei verschiedene Werthe hat, und so gibt es eigentlich acht Combinationen, unter denen eine mit dem auf der innern Seite, eine andere mit dem auf der äussern Seite geltenden Werthe übereinstimmt, während die sechs übrigen ohne alle Bedeutung bleiben. Der Ana-

lyse, durch welche einige Geometer auf der Oberfläche der Kugel den Werth $-2\pi k$, oder den Mittelwerth zwischen den innen und aussen geltenden, herausgebracht haben, kann ich, insofern der Begriff von Differentialquotienten in seiner mathematischen Reinheit aufgefasst wird, eine Zulässigkeit nicht einräumen.

9.

Das im vorhergehenden Beispiel gefundene Resultat ist nur ein einzelner Fall des allgemeinen Theorems, nach welchem, wenn der Punkt O sich im Innern der wirkenden Masse befindet, der Werth von $\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z^2}$ äqual wird dem Producte aus -4π in die in O Statt findende Dichtigkeit. Die befriedigendste Art, diesen wichtigen Lehrsatz zu begründen, scheint folgende zu sein.

Wir nehmen an, dass die Dichtigkeit k sich innerhalb t nirgends sprungsweise ändere, oder dass sie eine mit $f(a, b, c)$ zu bezeichnende Function von a, b, c sei, deren Werth sich innerhalb t überall nach der Stetigkeit ändert, ausserhalb t hingegen $= 0$ wird.

Es sei t' der Raum, in welchen t übergeht, wenn die erste Coordinate jedes Punktes der Grenzfläche um die Grösse e vermindert, oder was dasselbe ist, wenn die Grenzfläche parallel mit der ersten Coordinatenaxe um e rückwärts bewegt wird; es bestehe t aus den Räumen t^0 und θ, t' aus t^0 und θ', so dass t^0 der ganze Raum ist, welcher t und t' gemeinschaftlich bleibt. Wir betrachten die drei Integrale

$$\int\frac{f(a,b,c)(a-x)\,\mathrm{d}\,t}{((a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\int\frac{f(a,b,c)(a-x-e)\,\mathrm{d}\,t}{((a-x-e)^2+(b-y)^2+(c-z)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\int\frac{f(a+e,b,c)(a-x)\,\mathrm{d}\,t}{((a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

wo das Integral (1), über den ganzen Raum t ausgedehnt, der Werth von $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ oder X in dem Punkte O sein wird. Das Integral (2), gleichfalls über ganz t ausgedehnt, wird der Werth von $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}$ in demjenigen Punkte sein, dessen Coordinaten $x+e, y, z$ sind, welchen Werth wir mit $X+\xi$ bezeichnen wollen. Offenbar ist mit diesem Integrale ganz identisch das Integral (3), über den ganzen Raum t' ausgedehnt. Ist also

das Integral (1), ausgedehnt über t^0 l
über θ . . . . . λ
das Integral (3), ausgedehnt über t^0 . . . . . l'
über θ' . . . . . λ'

so wird $X=l+\lambda$, $X+\xi=l'+\lambda'$.

Setzen wir $f(a+e,b,c)-f(a,b,c)=\Delta k$, so ist das Integral

$$\int\frac{\frac{\Delta k}{e}(a-x)\,\mathrm{d}\,t}{((a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

über t^0 ausgedehnt, $=\frac{l'-l}{e}$.

Die bisherigen Resultate gelten allgemein für jede Lage von O: bei der weitern Entwicklung soll der Fall, wo O in der Oberfläche selbst liegt, ausgeschlossen sein, oder angenommen werden, dass O in messbarer Entfernung von der Oberfläche, innerhalb oder ausserhalb t liege.

Lassen wir nun e unendlich klein werden, so sind die Räume θ, θ' zwei unendlich schmale an der Oberfläche von t anliegende Raumschichten; zerlegen wir diese Oberfläche in Elemente $\mathrm{d}s$, und bezeichnen mit α den Winkel, welchen eine in $\mathrm{d}s$ nach aussen errichtete Normale mit der ersten Coordinatenaxe macht, so wird α offenbar spitz sein überall, wo die Oberfläche von t an θ grenzt, stumpf hingégen da, wo sie an θ' grenzt. Die Elemente von θ werden also ausgedrückt werden durch $e\cos\alpha\,\mathrm{d}s$, die Elemente von θ' hingegen durch $-e\cos\alpha\,\mathrm{d}s$, woraus man leicht schliesst, dass $\frac{\lambda-\lambda'}{e}$ übergeht in das Integral

$$\int\frac{f(a,b,c)(a-x)\cos\alpha\,.\,\mathrm{d}s}{((a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder was dasselbe ist, in dieses

$$\int\frac{k(a-x)\cos\alpha\,.\,\mathrm{d}s}{r^3}$$

durch die ganze Oberfläche ausgedehnt, wo unter k die an dem Elemente $\mathrm{d}s$ Statt findende Dichtigkeit zu verstehen ist.

Unter Voraussetzung eines unendlich kleinen Werthes von e wird ferner $\frac{\Delta k}{e}$ übergehen in den Werth des partiellen Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}f(a,b,c)}{\mathrm{d}a}$ oder $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}a}$, und der Werth des Integrals (4) oder $\frac{(l'-l)}{e}$ in das Integral

$$\int \frac{\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}a}.(a-x)\,\mathrm{d}t}{r^3}$$

durch den ganzen Raum t ausgedehnt.

Endlich ist, für ein unendlich kleines e, $\frac{l'-l}{e} - \frac{\lambda-\lambda'}{e}$ oder $\frac{\xi}{e}$, nichts anderes, als der Werth des partiellen Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$ oder $\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x^2}$. Wir haben folglich das einfache Resultat

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}a}.(a-x)\,\mathrm{d}t}{r^3} - \int \frac{k(a-x)\cos\alpha\,.\,\mathrm{d}s}{r^3}$$

wo die erste Integration über den ganzen Raum t, die zweite über die ganze Oberfläche desselben auszudehnen ist.

Dieses Resultat ist gültig, wie nahe auch O der Oberfläche auf der innern oder äussern Seite liegen mag, nur nicht in der Oberfläche selbst, wo vielmehr $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$ zwei verschiedene Werthe haben wird. Das erste Integral ändert sich zwar beim Durchgange durch die Oberfläche nach der Stetigkeit, hingegen ändert sich $-\int \frac{k(a-x)\cos\alpha\,\mathrm{d}s}{r^3}$ nach einem weiter unten zu beweisenden Theorem beim Übergange von einem innern der Oberfläche unendlich nahen Punkte nach einem äussern um die endliche Grösse $4\pi k\cos\alpha$, wo k und α sich auf die Durchgangsstelle beziehen, und eben so gross wird der Unterschied der beiden daselbst Statt findenden Werthe von $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}$ sein.

10.

Auf ähnliche Weise wird, wenn δ und γ in Beziehung auf die zweite und dritte Coordinatenaxe dieselbe Bedeutung haben, wie α in Beziehung auf die erste, und für die Lage von O dieselbe Beschränkung gilt, wie vorhin,

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}b}(b-y)\,\mathrm{d}t}{r^3} - \int \frac{k(b-y)\cos\delta\,.\,\mathrm{d}s}{r^3}$$

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z} = \int \frac{\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}c}(c-z)\,\mathrm{d}t}{r^3} - \int \frac{k(c-z)\cos\gamma\,.\,\mathrm{d}s}{r^3}$$

Erwägen wir nun, dass

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}a}.\frac{a-x}{r} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}b}.\frac{b-y}{r} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}c}.\frac{c-z}{r}$$

nichts anderes ist, als der Werth des Differentialquotienten $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r}$, insofern in dieser Differentiation nur die Länge von r als veränderlich, die Richtung aber als constant betrachtet wird; ferner, dass

$$\frac{a-x}{r}.\cos\alpha + \frac{b-y}{r}.\cos\delta + \frac{c-z}{r}.\cos\gamma = \cos\psi$$

wird, wenn ψ den Winkel bezeichnet, welchen die nach aussen gerichtete Normale in $\mathrm{d}s$ mit der verlängerten geraden Linie r macht, so erhellt, dass, wenn das Integral

$$\int \frac{\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r}}{rr}.\mathrm{d}t$$

über den ganzen Raum t erstreckt mit M, das Integral

$$\int \frac{k\cos\psi}{rr}.\mathrm{d}s$$

durch die ganze Oberfläche von t ausgedehnt mit N bezeichnet wird,

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z^2} = M - N$$

sein wird.

Um die erstere Integration auszuführen, beschreiben wir um den Mittelpunkt O mit dem Halbmesser 1 eine Kugelfläche, und zerlegen dieselbe in Elemente $\mathrm{d}\sigma$. Die von O durch alle Punkte der Peripherie von $\mathrm{d}\sigma$ geführten und unbestimmt verlängerten geraden Linien bilden eine Kegelfläche (im weitern Sinne des Worts), wodurch aus dem ganzen t ein Raum (nach Umständen aus mehrern getrennten Stücken bestehend) ausgeschieden wird, und wovon $rr\mathrm{d}\sigma.\mathrm{d}r$ ein unbestimmtes Element ist. Derjenige Theil von M, welcher sich auf diesen Raum bezieht, wird folglich durch $\mathrm{d}\sigma.\int \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}r}.\mathrm{d}r$ ausgedrückt werden, wenn diese Integration durch alle in t fallenden Theile einer durch O und einen Punkt von $\mathrm{d}\sigma$ gehenden soweit als nöthig verlängerten geraden Linie r erstreckt wird. Nehmen wir nun an, diese gerade Linie schneide die Oberfläche von t der Reihe nach in O', O'', O''', O'''' u. s. f.; bezeichnen mit r', r'', r''', r'''' u. s. f. die Werthe von r in diesen Punkten; mit $\mathrm{d}s'$, $\mathrm{d}s''$, $\mathrm{d}s'''$, $\mathrm{d}s''''$ u. s. f. die entsprechenden durch den Elementarkegel aus der Oberfläche von t ausgeschiedenen Elemente; mit k', k'', k''', k'''' u. s. f. die Werthe von k, und mit ψ', ψ'', ψ''', ψ'''' u. s. f. die Werthe von ψ an diesen Elementen: so übersieht man leicht, dass

I. für den Fall, wo O innerhalb t liegt, die Anzahl jener Punkte ungerade, und die Integration $\int \frac{dk}{dr} . dr$ von $r = 0$ bis $r = r'$, dann von $r = r''$ bis $r = r'''$ u. s. f. auszuführen sein wird, woraus also, wenn die Dichtigkeit in O mit k^0 bezeichnet wird, hervorgeht

$$\int \frac{dk}{dr} . dr = -k^0 + k' - k'' + k''' - k'''' + \text{ u. s. f.}$$

Da die Winkel $\psi', \psi'', \psi''', \psi''''$ u. s. f. offenbar abwechselnd spitz und stumpf sind, so wird

$$\begin{aligned} ds' . \cos\psi' &= +r'r'd\sigma \\ ds'' . \cos\psi'' &= -r''r''d\sigma \\ ds''' . \cos\psi''' &= +r'''r'''d\sigma \\ ds'''' . \cos\psi'''' &= -r''''r''''d\sigma \end{aligned}$$

u. s. f. und folglich

$$\begin{aligned} d\sigma \int \frac{dk}{dr} . dr &= -k^0 d\sigma + \frac{k' \cos\psi'}{r'r'} ds' + \frac{k'' \cos\psi''}{r'r''} ds'' + \frac{k''' \cos\psi'''}{r''r'''} + \text{ u. s. f.} \\ &= -k^0 d\sigma + \Sigma \frac{k \cos\psi}{rr} ds \end{aligned}$$

indem die Summation auf alle ds ausgedehnt wird, welche dem Element $d\sigma$ entsprechen. Durch Integration über sämmtliche $d\sigma$ erhält man also

$$M = -4\pi k^0 + \int \frac{k \cos\psi}{rr} ds$$

wo das Integral über die ganze Oberfläche erstreckt werden muss, oder $M = -4\pi k^0 + N$. Es wird folglich

$$\frac{ddV'}{dx^2} + \frac{ddV}{dy^2} + \frac{ddV}{dz^2} = -4\pi k^0$$

II. Für den Fall, wo O ausserhalb t liegt, hat man nur diejenigen $d\sigma$ in Betracht zu ziehen, für welche die durch O und einen Punkt von $d\sigma$ gelegte gerade Linie den Raum t wirklich trifft; die Anzahl der Punkte O', O'', O''' u. s. f. wird hier immer gerade sein, und die Winkel ψ', ψ'', ψ''' u. s. f. abwechselnd stumpf und spitz, also

$$ds' . \cos\psi' = -r'r'd\sigma, \quad ds'' . \cos\psi'' = +r''r''d\sigma, \quad ds''' \cos\psi''' = -r'''r'''d\sigma \text{ u. s. f.}$$

Da nun hier die Integration $\int \frac{dk}{dr} . dr$ von $r = r'$ bis $r = r''$, dann von $r = r'''$ bis $r = r''''$ u. s. f. ausgeführt werden muss, so ergibt sich

$$d\sigma \int_s \frac{dk}{dr} . dr = \frac{k' \cos\psi'}{r'r'} . ds' + \frac{k'' \cos\psi''}{r'r''} . ds'' + \frac{k''' \cos\psi'''}{r''r'''} . ds''' + \text{ u. s. f.} = \Sigma \frac{k \cos\psi}{rr} ds$$

und nach der zweiten Integration durch alle in Betracht kommenden $d\sigma$

$$M = \int \frac{k \cos\psi}{rr} ds = N$$

folglich, wie ohnehin bekannt ist

$$\frac{ddV}{dx^2} + \frac{ddV}{dy^2} + \frac{ddV}{dz^2} = 0$$

11.

Obgleich in unsrer Beweisführung angenommen ist, dass die Dichtigkeit sich in dem *ganzen* Raum t nach der Stetigkeit ändere, so ist doch zur Gültigkeit unsers Resultats diese Bedingung nicht nothwendig, sondern es wird bloss erfordert, dass in dem Punkte O die Dichtigkeit nach allen Seiten zu nach der Stetigkeit sich ändere, oder dass O innerhalb eines wenn auch noch so kleinen dieser Bedingung Genüge leistenden Raumes liege. Setzen wir nemlich das Potential der in *diesem* Raume enthaltenen Masse $= V'$, das Potential der übrigen ausserhalb desselben befindlichen Massen $= V''$, so wird das ganze Potential $V = V' + V''$, und da nach dem vorhergehenden Artikel

$$\begin{aligned} \frac{ddV'}{dx^2} + \frac{ddV'}{dy^2} + \frac{ddV'}{dz^2} &= -4\pi k^0 \\ \frac{ddV''}{dx^2} + \frac{ddV''}{dy^2} + \frac{ddV''}{dz^2} &= 0 \end{aligned}$$

ist, so wird

$$\frac{ddV}{dx^2} + \frac{ddV}{dy^2} + \frac{ddV}{dz^2} = -4\pi k^0$$

Fehlt hingegen diese Bedingung in dem Punkte O, und liegt also dieser in der Scheidungsfläche zwischen zweien solchen Räumen, in welchen, jeden für sich genommen, die Dichtigkeit nach der Stetigkeit, aber beim Übergange aus dem einen in den andern sprungsweise sich ändert, so haben daselbst, allgemein zu reden, $\frac{ddV}{dx^2}, \frac{ddV}{dy^2}, \frac{ddV}{dz^2}$ jedes zwei verschiedene Werthe, und von dem Aggregate jener Grössen gilt dasselbe, was am Schlusse des 8. Artikels erinnert ist.

12.

Wir ziehen, wie schon oben bemerkt ist, auch den idealen Fall mit in den Kreis unsrer Untersuchungen, wo Anziehungs- oder Abstossungskräfte von den Theilen einer *Fläche* ausgehend angenommen werden, und erlauben uns dabei die Einkleidung, dass eine wirkende Masse in der Fläche vertheilt sei. Unter Dichtigkeit in irgend einem Punkte der Fläche verstehen wir in diesem Falle den Quotienten, wenn die in einem Elemente der Fläche, welchem der Punkt angehört, enthaltene Masse mit diesem Elemente dividirt wird. Diese Dichtigkeit kann gleichförmig (in allen Punkten dieselbe) oder ungleichförmig sein, und im letztern Falle entweder in der ganzen Fläche sich nach der Stetigkeit ändern (d.i. so, dass sie in je zwei einander unendlich nahen Punkten auch nur unendlich wenig verschieden ist) oder es kann die ganze Fläche in zwei oder mehrere Stücke zerfallen, in deren jedem eine stetige Änderung Statt findet, während beim Übergange aus einem in das andere die Änderung sprungsweise geschieht. Übrigens kann auch eine solche Vertheilung gedacht werden, wo unbeschadet der Endlichkeit der ganzen Masse, die Dichtigkeit in einzelnen Punkten oder Linien unendlich gross wird. Der Fläche selbst, insofern sie nicht eine Ebene ist, wird allgemein zu reden eine stetige Krümmung beigelegt werden, ohne darum eine Unterbrechung in einzelnen Punkten (Ecken) oder Linien (Kanten) auszuschliessen.

Dies vorausgesetzt erhält das Potential auch in jedem Punkte der Fläche selbst, wo nur die Dichtigkeit nicht unendlich gross ist, einen bestimmten endlichen Werth, von welchem der Werth in einem zweiten Punkt, der, in der Fläche oder ausserhalb, jenem unendlich nahe liegt, nur unendlich wenig verschieden sein kann *), oder mit andern Worten, in jeder Linie, möge sie in der Fläche selbst liegen, oder dieselbe kreuzen, ändert sich das Potential nach der Stetigkeit.

13.

Bezeichnet man mit k die Dichtigkeit in dem Flächenelement ds; mit

*) Von der Endlichkeit des Integrals, welches das Potential ausdrückt, überzeugt man sich leicht, indem man die Zerlegung der Fläche in Elemente auf ähnliche Weise ausführt, wie im 15. Artikel geschehen wird; und zugleich wird daraus ersichtlich, dass die den beiden in Rede stehenden Punkten unendlich nahen Theile der Fläche zu dem ganzen Integral nur unendlich wenig beitragen, woraus sich das oben gesagte leicht beweisen lässt.

a, b, c die Coordinaten eines demselben angehörenden Punkts; mit r dessen Entfernung von einem Punkte O, dessen Coordinaten x, y, z sind, und mit V das Potential der in der Fläche enthaltenen Masse in dem Punkte O, so ist $V = \int \frac{k\,ds}{r}$, durch die ganze Fläche ausgedehnt, endlich mit X, Y, Z die eben so verstandenen Integrale

$$\int \frac{k(a-x)\,ds}{r^3}, \quad \int \frac{k(b-y)\,ds}{r^3}, \quad \int \frac{k(c-z)\,ds}{r^3}$$

so sind zwar X, Y, Z ganz gleichbedeutend mit $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$, so lange O ausserhalb der Fläche liegt, aber genau zu reden gilt dies nicht mehr, wenn O ein Punkt der Fläche selbst ist, und die Ungleichheit gestaltet sich verschieden je nach der Beschaffenheit des Winkels, welchen die Normale auf die Fläche mit der betreffenden Coordinatenaxe macht. Es ist offenbar hinreichend, hier nur das Verhalten in Beziehung auf die erste Coordinatenaxe anzugeben.

I. Ist jener Winkel $= 0$, so hat in O das Integral X einen bestimmten Werth, $\frac{dV}{dx}$ hingegen hat zwei verschiedene Werthe, je nachdem man dx als positiv oder als negativ betrachtet.

II. Ist der Winkel ein rechter, so lässt der Ausdruck für X eine wahre Integration nicht zu (indem dann eine ähnliche Bemerkung gilt, wie im 7. Artikel), während $\frac{dV}{dx}$ nur Einen bestimmten Werth hat.

III. Ist der Winkel spitz, so verhält es sich mit X eben so wie im zweiten, und mit $\frac{dV}{dx}$ eben so wie im ersten Falle.

Noch besondre Modificationen treten ein, wenn in O eine Unterbrechung der Stetigkeit entweder in Beziehung auf die Dichtigkeit oder die Krümmung Statt findet. Für unsern Hauptzweck ist jedoch nicht nothwendig, solche Ausnahmsfälle, die nur in einzelnen Linien oder Punkten eintreten können, ausführlich abzuhandeln, und wir werden daher bei der nähern Erörterung des Gegenstandes annehmen, dass in dem fraglichen Punkte eine bestimmte endliche Dichtigkeit, und eine bestimmte Berührungsebene Statt findet.

14.

Ehe wir die Untersuchung in ihrer Allgemeinheit vornehmen, wird es nützlich sein, einen einfachen besondern Fall zu betrachten. Es sei die Fläche das Stück A einer Kugelfläche, und die Dichtigkeit darin gleichförmig oder k constant. Es sind also V, X die Werthe der Integrale

$$\int \frac{k\,ds}{r}, \quad \int \frac{k(a-x)\,ds}{r^3}$$

durch A ausgedehnt; bezeichnen wir mit V', X' dieselben Integrale, wenn sie durch den übrigen Theil der Kugelfläche B, und mit V^0, X^0, wenn sie durch die ganze Kugelfläche erstreckt werden, so wird $V = V^0 - V'$, $X = X^0 - X'$. Wir wollen noch den Halbmesser der Kugel mit R bezeichnen, den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt der Kugel legen, und $\sqrt{(xx+yy+zz)}$ oder den Abstand des Punktes O vom Mittelpunkte der Kugel $= \rho$ setzen.

Es ist nun bekannt, dass $V^0 = 4\pi kR$ wird, wenn O innerhalb der Kugel, hingegen $V^0 = \frac{4\pi kRR}{\rho}$, wenn O ausserhalb liegt; in der Kugelfläche selbst fallen beide Werthe zusammen. Der Differentialquotient $\frac{dV^0}{dx}$ wird daher innerhalb der Kugel $= 0$, ausserhalb $= -\frac{4\pi kRRx}{\rho^3}$, auf der Kugelfläche selbst aber werden beide Werthe zugleich gelten, je nach dem Zeichen von dx: gleich sind diese beiden Werthe nur dann, wenn $x = 0$ ist, was dem Falle II des vorhergehenden Artikels entspricht.

Der Ausdruck für X^0, innerhalb und ausserhalb der Kugel mit $\frac{dV^0}{dx}$ gleichbedeutend, wird auf der Oberfläche ein leeres Zeichen, insofern eine wahre Integration unstatthaft ist, den einzigen Fall ausgenommen, wenn für die unendlich nahe liegenden Elemente der Fläche $a-x$ ein unendlich kleines von einer höhern Ordnung wird als r, nemlich wenn $y = 0$, $z = 0$, $x = \pm R$, für welchen Fall die Integration $X^0 = \mp 2\pi k$ gibt, also mit keinem der Werthe von $\frac{dV^0}{dx}$ übereinstimmend, sondern vielmehr mit dem Mittel von beiden: offenbar gehört übrigens dieser Fall zu I im vorhergehenden Artikel.

Erwägt man nun, dass wenn O ein auf der Oberfläche der Kugel innerhalb A liegender Punkt ist, X' und $\frac{dV'}{dx}$ gleichbedeutend sind und bestimmte nach der Stetigkeit sich ändernde Werthe haben, so erhellt, dass das gegenseitige Verhalten zwischen $X^0 - X'$ und $\frac{dV^0}{dx} - \frac{dV'}{dx}$, d. i. zwischen X und $\frac{dV}{dx}$ ganz dasselbe ist, wie zwischen X^0 und $\frac{dV^0}{dx}$, woraus also die im vorhergehenden Artikel aufgestellten Sätze von selbst folgen.

15.

Für die allgemeinere Untersuchung ist es vortheilhaft, den Anfangspunkt der Coordinaten in einen in der Fläche selbst liegenden Punkt P zu setzen, und die erste Coordinatenaxe senkrecht gegen die Berührungsebene in P zu legen.

Bezeichnen wir mit ψ den Winkel zwischen der Normale auf das unbestimmte Flächenelement ds und der ersten Coordinatenaxe, so ist $\cos\psi . ds$ die Projection von ds auf die Ebene der b und c; und setzen wir

$$\sqrt{(bb+cc)} = \rho, \quad b = \rho\cos\theta, \quad c = \rho\sin\theta$$

so wird $\rho d\rho . d\theta$ ein unbestimmtes Element dieser Ebene vorstellen, und das entsprechende Flächenelement $ds = \frac{\rho d\rho . d\theta}{\cos\psi}$ sein; das darin enthaltene Massenelement wird also $= h\rho d\rho . d\theta$ sein, wenn wir zur Abkürzung h für $\frac{k}{\cos\psi}$ schreiben.

Wir wollen nun untersuchen, inwiefern der Werth von X sich sprungsweise ändert, indem der Punkt O in der ersten Coordinatenaxe von der einen Seite der Fläche auf die andere, oder x aus einem negativen Werthe in einen positiven übergeht. Für diese Frage ist es offenbar einerlei, ob wir die ganze Fläche in Betracht ziehen, oder nur einen beliebig kleinen, den Punkt P einschliessenden Theil, da der Beitrag des übrigen Theils der Fläche zu dem Werthe von X sich nach der Stetigkeit ändert. Es ist daher erlaubt, ρ nur von 0 bis zu einem beliebig kleinen Grenzwerthe ρ' auszudehnen, und vorauszusetzen, dass in der so begrenzten Fläche h und $\frac{a}{\rho}$ sich überall nach der Stetigkeit ändern. Setzen wir, für jeden bestimmten Werth von θ, den Werth des Integrals $\int \frac{h(a-x)\rho d\rho}{r^3}$, von $\rho = 0$ bis $\rho = \rho'$ ausgedehnt, $= Q$, so wird $X = \int Q d\theta$, wo die Integration von $\theta = 0$, bis $\theta = 2\pi$ zu erstrecken ist.

Es kommt nun darauf an, die Werthe von X für $x = 0$, für ein unendlich kleines positives x, und für ein unendlich kleines negatives (die beiden andern Coordinaten y, z allemal $= 0$ angenommen) unter einander zu vergleichen; wir bezeichnen diese drei Werthe von X mit X^0, X', X'', und die entsprechenden Werthe von Q mit Q^0, Q', Q''.

Da $r = \sqrt{((a-x)^2 + \rho\rho)}$, so erhält man, indem man θ als constant betrachtet

$$d\frac{h(a-x)}{r} = -\frac{h(a-x)\rho d\rho}{r^3} + \frac{dh}{d\rho}\cdot\frac{a-x}{r}\cdot d\rho + \frac{da}{d\rho}\cdot\frac{h\rho\rho}{r^3}\cdot d\rho$$

und folglich

$$Q = \int \frac{dh}{d\rho}\cdot\frac{a-x}{r}\cdot d\rho + \int \frac{da}{d\rho}\cdot\frac{h\rho\rho}{r^3}\cdot d\rho - \frac{h'(a'-x)}{r'} + \text{Const.}$$

wo die beiden Integrationen von $\rho = 0$ bis $\rho = \rho'$ auszudehnen, und die Werthe

von h, a, r für $\rho = \rho'$ mit h', a', r' bezeichnet sind. Als Constante hat man den Werth von $\frac{h(a-x)}{r}$ für $\rho = 0$ anzunehmen, welcher wenn man die Dichtigkeit in P mit k^0 bezeichnet, $= -k^0$ wird für ein positives x, und $= +k^0$ für ein negatives, indem für $\rho = 0$ offenbar $a = 0$, $\frac{a}{r} = 0$, $h = k^0$, $x = \pm r$ wird. Für den Fall $x = 0$ hingegen hat man als Constante den Grenzwerth von $\frac{ha}{r}$ bei unendlich abnehmendem ρ anzunehmen, welcher $= 0$ ist, weil a ein Unendlichkleines von einer höhern Ordnung wird als r.

Der Werth des Integrals $\int \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\rho} \cdot \frac{a-x}{r} \cdot \mathrm{d}\rho$ bleibt bis auf einen unendlich kleinen Unterschied derselbe, man möge $x = 0$, oder unendlich klein $= \pm\varepsilon$ setzen. Zerlegt man nemlich jenes Integral in

$$\int_0^{\delta} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\rho} \cdot \frac{a-x}{r} \cdot \mathrm{d}\rho + \int_{\delta}^{\rho'} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\rho} \cdot \frac{a-x}{r} \cdot \mathrm{d}\rho$$

so ist klar, dass das Behauptete für den ersten Theil gilt, wenn δ unendlich klein, und für den zweiten, wenn $\frac{h}{\varepsilon}$ unendlich gross ist, also für das Ganze, wenn δ ein Unendlichkleines von einer niedrigern Ordnung als ε.

Ein ähnlicher Schluss gilt auch in Beziehung auf das Integral $\int \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\rho} \cdot \frac{h\rho\rho}{r^3} \cdot \mathrm{d}\rho$, wenn die Punkte der Fläche, welche dem bestimmten Werthe von ϑ entsprechen, eine Curve bilden, die in P eine messbare Krümmung hat, so dass $\frac{a}{\rho\rho}$ in dem hier betrachteten Raume einen endlichen nach der Stetigkeit sich ändernden Werth erhält. Bezeichnet man nemlich diesen Werth mit A, so wird

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\rho} = 2A\rho + \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\rho} \cdot \rho\rho$$

mithin zerlegt sich jenes Integral in folgende zwei

$$\int \frac{2\rho^3 A h \mathrm{d}\rho}{r^3} + \int \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\rho} \cdot \frac{\rho^4}{r^3} h \mathrm{d}\rho$$

bei welchen beiden die Gültigkeit obiger Schlussweise von selbst klar ist.

Endlich sind auch offenbar die Werthe von $\frac{k'(a'-x)}{r'}$ für alle drei Werthe von x bis auf unendlich kleine Unterschiede gleich.

Hieraus folgt also, dass $Q'+k^0$, Q^0, $Q''-k^0$ bis auf unendlich kleine Unterschiede gleich sind, und dasselbe wird demnach auch von

$$\int (Q'+k^0)\mathrm{d}\vartheta, \quad \int Q^0 \mathrm{d}\vartheta, \quad \int (Q''-k^0)\mathrm{d}\vartheta$$

gelten, oder von den Grössen

$$X'+2\pi k^0, \quad X^0, \quad X''-2\pi k^0$$

Man kann diesen wichtigen Satz auch so ausdrücken: der Grenzwerth von X, bei unendlich abnehmendem positiven x ist $X^0 - 2\pi k^0$, bei unendlich abnehmendem negativen x hingegen $X^0 + 2\pi k^0$, oder X ändert sich zweimal sprungsweise um $-2\pi k^0$, indem x aus einem negativen Werthe in einen positiven übergeht, das erstemal, indem x den Werth 0 erreicht, und das zweitemal, indem es ihn überschreitet.

16.

In der Beweisführung des vorhergehenden Artikels ist zwar vorausgesetzt, dass die Schnitte der Fläche mit den durch die erste Coordinatenaxe gelegten Ebenen in P eine messbare Krümmung haben; allein unser Resultat bleibt auch noch gültig, wenn die Krümmung in P unendlich gross ist, einen einzigen Fall ausgenommen. Dass $\frac{a}{\rho}$ für ein unendlich kleines ρ selbst unendlich klein werden müsse, bringt schon die Voraussetzung des Vorhandenseins einer bestimmten Berührungsebene an der Fläche in P mit sich; allein von einerlei Ordnung sind beide Grössen nur dann, wenn ein endlicher Krümmungshalbmesser Statt findet; bei einem unendlich kleinen Krümmungshalbmesser hingegen wird $\frac{a}{\rho}$ von einer niedrigern Ordnung sein, als ρ. Wir werden nun zeigen, dass unsre Resultate auch im letztern Falle ihre Gültigkeit behalten, wenn nur die Ordnungen beider Grössen *vergleichbar* sind.

Nehmen wir also an, $\frac{a}{\rho}$ sei von derselben Ordnung wie ρ^μ, wo μ einen endlichen positiven Exponenten bedeutet, also $\frac{a}{\rho^{1+\mu}}$ eine endliche in dem in Rede stehenden Raume nach der Stetigkeit sich ändernde Grösse, die wir mit B bezeichnen wollen. Es zerfällt also das Integral $\int \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}\rho} \cdot \frac{h\rho\rho}{r^3} \mathrm{d}\rho$ in die beiden folgenden

$$\int \frac{(1+\mu)\rho^{1+\mu} h B \mathrm{d}\rho}{r^3} + \int \frac{\rho^{2+\mu}}{r^3} \cdot \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}\rho} \cdot h \mathrm{d}\rho$$

Auf das zweite Integral lassen sich die Schlüsse des vorhergehenden Artikels unmittelbar anwenden, auf das erste hingegen nach einer leichten Umformung. Setzt man nemlich $\frac{1}{\mu} = m$, $\rho^\mu = \sigma$ oder $\rho = \sigma^m$, so wird jenes Integral

$$= (m+1) \int \frac{B h \sigma^{3m} \mathrm{d}\sigma}{(\sigma^{2m} + (a-x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Auch dieses Integral hat nun offenbar so lange nur einen unendlich kleinen Werth, als die Integration nur von 0 bis zu einem unendlich kleinen Werthe von σ ausgedehnt wird; für jeden endlichen Werth von σ hingegen erhält der Coëfficient

von $d\sigma$ bis auf einen unendlich kleinen Unterschied einerlei Werth, man möge $x = 0$ oder unendlich klein annehmen. Dies gilt also auch von dem ganzen Integral, wenn es von $\sigma = 0$ bis $\sigma = \Sigma\rho'$ ausgedehnt wird.

Nur in einem einzigen Falle verlieren unsre Schlüsse ihre Gültigkeit, wenn nemlich $\frac{a}{\rho}$ mit keiner Potenz von ρ mehr zu einerlei Ordnung gehört, wie z. B. wenn $\frac{a}{\rho}$ von derselben Ordnung wäre, wie $\frac{1}{\log\frac{1}{\rho}}$. In diesem Falle würde Q bei unendlicher Annäherung des Punktes O zur Fläche über alle Grenzen wachsen, und dasselbe würde auch für X gelten, wenn ein solches Verhalten nicht bloss für einen oder einige Werthe von θ, sondern für alle Statt fände. Es ist jedoch unnöthig, dies hier weiter zu entwickeln, da wir diesen singulären Fall von unsrer Untersuchung ohne Nachtheil ganz ausschliessen können.

17.

Wir wollen nun unter denselben Voraussetzungen und Bezeichnungen, wie im 15. Artikel, die Grösse Y betrachten, wovon $\frac{hb\,db\,.\,dc}{r^3}$ ein unbestimmtes Element ist. Da $r = \sqrt{(bb+cc+(a-x)^2)}$, und folglich

$$\mathrm{d}\frac{h}{r} : \mathrm{d}b = -\frac{hb}{r^3} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}b} - \frac{h(a-x)}{r^3}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b}$$

insofern c als constant betrachtet wird, so gibt die erste Integration in diesem Sinne,

$$\int\frac{hb\,\mathrm{d}b}{r^3} = \frac{h'}{r'^3} - \frac{h''}{r''^3} + \int\frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}b}\cdot\mathrm{d}b - \int\frac{h(a-x)}{r^3}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b}\cdot\mathrm{d}b$$

wo die Integrationen sich vom kleinsten zum grössten Werthe von b, für jeden bestimmten Werth von c erstrecken, und mit h', r', h'', r'' die jenen Grenzwerthen entsprechenden Werthe von h und r bezeichnet sind. Schreiben wir zur Abkürzung

$$\frac{h'}{r'^3} - \frac{h''}{r''^3} = T, \quad \frac{\rho}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}b} - \frac{h(a-x)\rho}{r^3}\cdot\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}b} = U$$

so wird

$$Y = \int T\mathrm{d}c + \iint\frac{U}{\rho}\,.\,\mathrm{d}b\,.\,\mathrm{d}c$$

wo die Integration in Beziehung auf c vom kleinsten Werthe, welchen diese Coordinate in der Fläche hat, bis zum grössten ausgedehnt werden muss. In dem doppelten Integrale stellt $\mathrm{d}b\,.\,\mathrm{d}c$ die Projection eines unbestimmten Elements der Fläche auf die Ebene der b, c vor, und es kann mithin auch $\rho\mathrm{d}\rho\,.\,\mathrm{d}\theta$ dafür geschrieben werden; sonach wird

$$Y = \int T\mathrm{d}c + \iint U\mathrm{d}\rho\,.\,\mathrm{d}\theta$$

wo in dem Doppelintegral von $\rho = 0$ bis $\rho = \rho'$ und von $\theta = 0$ bis $\theta = 2\pi$ integrirt werden muss. Durch ähnliche Schlüsse, wie im 15. Artikel, erkennt man nun leicht, dass dieser Ausdruck bis auf unendlich kleine Unterschiede gleiche Werthe erhält, man möge $x = 0$ oder unendlich klein annehmen, oder mit andern Worten, der Werth von Y hat bei positiven und bei negativen unendlich abnehmenden Werthen von x eine und dieselbe Grenze, und diese Grenze ist nichts anderes, als der Werth obiger Formel, wenn man darin $x = 0$ setzt. Wir wollen nach der Analogie diesen Werth mit Y^0 bezeichnen, wobei jedoch bemerkt werden muss, dass man nicht sagen darf, es sei dies *der* Werth von $\int\frac{hb\,\mathrm{d}s}{r^3}$ für $x = 0$ (insofern dieser Ausdruck für $x = 0$ eine wahre Integration nicht zulässt), sondern nur, es sei *ein* Werth jenes Integrals, nemlich derjenige, welcher hervorgeht, wenn man in der oben befolgten Ordnung integrirt.

Übrigens bedarf dieses Resultat (auf ähnliche Weise wie oben Art. 16) einer Einschränkung in dem singulären Falle, wo in dem Punkte P unendlich kleine Krümmungshalbmesser Statt finden, imgleichen, wenn in diesem Punkte $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}b}$ unendlich gross wird: für unsern Zweck ist es jedoch unnöthig, solche Ausnahmsfälle, die nur in einzelnen Punkten oder Linien vorkommen können (also nicht in Theilen der Fläche, sondern nur an der Grenze von Theilen), besonders zu betrachten.

Endlich ist von selbst klar, dass es sich mit der Grösse Z oder dem Integrale $\int\frac{kc\,\mathrm{d}s}{r^3}$ ganz eben so verhält, wie mit Y, nemlich dass dieses Integral, wenn der Punkt O sich in der ersten Coordinatenaxe dem Punkte P unendlich nähert, einerlei Grenzwerth Z^0 hat, die Annäherung mag auf der positiven oder auf der negativen Seite Statt finden, und dass dieser Grenzwerth zugleich der Werth von $\iint\frac{kc\,\mathrm{d}c\,.\,\mathrm{d}b}{r^3}$ für $x = 0$ ist, insofern man zuerst nach c integrirt.

beziehen, indem man die Entfernung derselben von einander unendlich abnehmen lässt, zu welchem Zweck man nur diese beiden Flächen gleich und parallel anzunehmen braucht. Unmittelbar einleuchtend ist zwar diese Beweisart nur in sofern, als die vorgegebene Fläche so beschaffen ist, dass die Normalen in allen ihren Punkten mit Einer geraden Linie spitze Winkel machen. Eine Fläche, wo diese Bedingung fehlt (wie allemal, wenn von einer geschlossenen Fläche die Rede ist), wird zuvor in zwei oder mehrere Theile zu zerlegen sein, die einzeln jener Bedingung Genüge leisten, wodurch es leicht wird, diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen.

20.

Wenden wir das Theorem des vorhergehenden Artikels auf den Fall an, wo das zweite Massensystem mit gleichförmiger Dichtigkeit $k = 1$ auf eine Kugelfläche vertheilt ist, deren Halbmesser $= R$, so ist das daraus entspringende Potential v im Innern der Kugel constant $= 4\pi R$; in jedem Punkte ausserhalb der Kugel, dessen Entfernung vom Mittelpunkte $= r$, wird $v = \frac{4\pi RR}{r}$, oder eben so gross, wie im Mittelpunkte das Potential von einer in jenem Punkte angenommenen Masse $4\pi RR$, auf der Oberfläche der Kugel fallen beide Werthe von v zusammen. Befindet sich also das erste Massensystem ganz im Innern der Kugel, so wird ΣMv äqual dem Producte der Gesammtmasse dieses Systems in $4\pi R$; ist aber jenes Massensystem ganz ausserhalb der Kugel, so wird ΣMv äqual dem Producte des Potentials dieser Masse im Mittelpunkte der Kugel in $4\pi RR$; ist endlich das erste Massensystem auf der Oberfläche der Kugel nach der Stetigkeit vertheilt, so sind für $\int Kv\,dS$ beide Ausdrücke gleichgültig. Es folgt hieraus der

Lehrsatz. Bedeutet V das Potential einer wie immer vertheilten Masse in dem Elemente einer mit dem Halbmesser R beschriebenen Kugelfläche ds, so wird, durch die ganze Kugelfläche integrirt,

$$\int V\,ds = 4\pi(RM^0 + RRV^0)$$

wenn man mit M^0 die ganze im Innern der Kugel befindliche Masse, mit V^0 das Potential der ausserhalb befindlichen Masse im Mittelpunkt der Kugel bezeichnet, und dabei die Massen, die etwa auf der Oberfläche der Kugel stetig vertheilt sein mögen, nach Belieben den äussern oder innern Massen zuordnet.

21.

Lehrsatz. Das Potential V von Massen, die sämmtlich ausserhalb eines zusammenhängenden Raumes liegen, kann nicht in einem Theile dieses Raumes einen constanten Werth und zugleich in einem andern Theile desselben einen verschiedenen Werth haben.

Beweis. Nehmen wir an, es sei in jedem Punkte des Raums A das Potential constant $= a$, und in jedem Punkte eines andern an A grenzenden keine Masse enthaltenden Raumes B (algebraisch) grösser als a. Man construire eine Kugel, wovon ein Theil in B, der übrige Theil aber nebst dem Mittelpunkte in A enthalten ist, welche Construction allemal möglich sein wird. Ist nun R der Halbmesser dieser Kugel, und ds ein unbestimmtes Element ihrer Oberfläche, so ist nach dem Lehrsatze des vorigen Artikels $\int V\,ds = 4\pi RRa$, und $\int(V-a)\,ds = 0$, was unmöglich ist, da für den Theil der Oberfläche, welcher in A liegt, $V - a = 0$, und für den übrigen Theil der Voraussetzung zu Folge nicht $= 0$, sondern positiv ist.

Auf ganz ähnliche Weise erhellt die Unmöglichkeit, dass in allen Punkten eines an A grenzenden Raumes V kleiner sei als a.

Offenbar müsste aber wenigstens einer dieser beiden Fälle Statt finden, wenn unser Theorem falsch wäre.

Dieser Lehrsatz enthält folgende zwei Sätze:

I. Wenn der die Massen enthaltende Raum schalenförmig einen massenleeren Raum umschliesst, und das Potential in einem Theile dieses Raumes einen constanten Werth hat, so gilt dieser für alle Punkte des ganzen eingeschlossenen Raumes.

II. Wenn das Potential der in einen endlichen Raum eingeschlossenen Massen in irgend einem Theile des äussern Raumes einen constanten Werth hat, so gilt dieser für den ganzen unendlichen äussern Raum.

Zugleich erhellt leicht, dass in diesem zweiten Fall der constante Werth des Potentials kein anderer als 0 sein kann. Denn wenn man mit M das Aggregat aller Massen, falls sie sämmtlich einerlei Zeichen haben, oder im entgegengesetzten Fall das Aggregat der positiven oder der negativen Massen allein, je nachdem jene oder diese überwiegen, bezeichnet, so ist das Potential in einem Punkte, dessen Entfernung von dem nächsten Massenelemente $= r$ ist, jedenfalls, abso-

lut genommen, kleiner als $\frac{M}{r}$, welcher Bruch offenbar im äussern Raume kleiner als jede angebliche Grösse werden kann.

22.

LEHRSATZ. Ist ds das Element einer einen zusammenhängenden endlichen Raum begrenzenden Fläche, P die Kraft, welche irgendwie vertheilte Massen in ds in der auf die Fläche normalen Richtung ausüben, wobei eine nach innen oder nach aussen gerichtete Kraft als positiv betrachtet wird, je nachdem anziehende oder abstossende Massen als positiv gelten: so wird das Integral $\int P ds$ über die ganze Fläche ausgedehnt $= 4\pi M + 2\pi M'$, wenn M das Aggregat der im Innern des Raumes befindlichen, M' das der auf der Oberfläche nach der Stetigkeit vertheilten Massen bedeuten.

Beweis. Bezeichnet man mit $U d\mu$ denjenigen Theil von P, welcher von dem Massenelemente $d\mu$ herrührt, mit r die Entfernung des Elements $d\mu$ von ds, und mit u den Winkel, welchen in ds die nach Innen gerichtete Normale mit r macht, so ist $U = \frac{\cos u}{rr}$. Es ist aber in Beziehung auf jedes bestimmte $d\mu$, vermöge eines in der *Theoria Attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum* Art. 6 bewiesenen Lehrsatzes $\int \frac{\cos u}{rr} . ds = 0$, 2π oder 4π, je nachdem $d\mu$ ausserhalb des durch die Fläche begrenzten Raumes, in der Fläche selbst, oder innerhalb jenes Raumes liegt. Da nun $\int P ds$ dem Gesammtbetrage aller $d\mu . \int U ds$ gleichkommt, so ergibt sich hieraus unser Theorem von selbst.

In Beziehung auf den hier benutzten Hülfssatz muss noch bemerkt werden, dass derselbe, in der Gestalt wie er a. a. O. ausgesprochen ist, für einen speciellen Fall einer Modification bedarf. Es bedeutet nemlich r die Entfernung eines *gegebenen Punktes* von dem Elemente ds, und für den Fall, wo dieser Punkt in der Fläche selbst liegt, ist die Formel $\int \frac{\cos u}{rr} . ds = 2\pi$ nur insofern richtig, als die Stetigkeit der Krümmung der Fläche in dem Punkte nicht verletzt wird. Eine solche Verletzung findet aber Statt, wenn der Punkt in einer Kante oder Ecke liegt, und dann muss anstatt 2π der Inhalt derjenigen Figur gesetzt werden, welche durch die sämmtlichen von da ausgehenden die Fläche tangirenden geraden Linien aus einer um den Punkt als Mittelpunkt mit dem Halbmesser 1 beschriebenen Kugelfläche ausgeschieden wird. Da jedoch solche Ausnahmsfälle nur Linien oder Punkte, also nicht *Theile* der Fläche, sondern nur Scheidungs-

grenzen zwischen Theilen betreffen, so hat dies offenbar auf die von dem Hülfssatze hier gemachte Anwendung gar keinen Einfluss.

23.

Wir legen durch jeden Punkt der Fläche eine Normale, und bezeichnen mit p die Entfernung eines unbestimmten Punktes derselben von dem in die Fläche selbst gesetzten Anfangspunkte, auf der innern Seite der Fläche als positiv betrachtet. Das Potential der Massen V kann als Function von p und zweien andern veränderlichen Grössen betrachtet werden, die auf irgendwelche Art die einzelnen Punkte der Fläche von einander unterscheiden, und eben so verhält es sich mit dem partiellen Differentialquotienten $\frac{dV}{dp}$, dessen Werth hier aber nur für die in die Fläche selbst fallenden Punkte, oder für $p = 0$ in Betracht gezogen werden soll. Da dieser mit P völlig gleichbedeutend ist, wenn Massen sich nur in dem innern Raume, oder in dem äussern, oder in beiden befinden, keine Masse aber auf die Fläche selbst vertheilt ist, so hat man in diesem Falle

$$\int \frac{dV}{dp} . ds = 4\pi M$$

In dem Falle hingegen, wo die ganze Masse bloss auf der Fläche selbst vertheilt ist, so dass das Element ds die Masse $k ds$ enthält, bleiben $\frac{dV}{dp}$ und P nicht mehr gleichbedeutend; letztere Grösse stellt hier offenbar in Beziehung auf p dasselbe vor, was X^0 in Beziehung auf x im 15. Artikel; $\frac{dV}{dp}$ hingegen hat zwei verschiedene Werthe, nemlich $P - 2\pi k$ und $P + 2\pi k$, jenachdem dp als positiv oder als negativ betrachtet wird. Da nun $\int k ds$ offenbar der ganzen auf die Fläche vertheilten Masse M' gleich, und gemäss dem Lehrsatze des vorhergehenden Artikels $\int P ds = 2\pi M'$ wird, so hat man

$$\int \frac{dV}{dp} . ds = 0 \quad \text{oder} \quad \int \frac{dV}{dp} . ds = 4\pi M'$$

jenachdem für $\frac{dV}{dp}$ der auf der innern, oder der auf der äussern Seite der Fläche geltende Werth überall verstanden wird, und es verhält sich also mit dem Integrale $\int \frac{dV}{dp} . ds$ im erstern Falle genau eben so, als wenn die Masse M' zum äussern Raume, im zweiten, als ob sie zum innern Raume gehörte.

Es gilt daher, bei irgendwie vertheilten Massen, die Gleichung

$$\int \frac{dV}{dp} . ds = 4\pi M .$$

allgemein, in dem Sinne dass M die im innern Raume enthaltene Masse bedeutet, wohlverstanden, dass, wenn auch auf der Oberfläche selbst stetig vertheilte Massen sich befinden, diese den innern zugerechnet, oder davon ausgeschlossen werden müssen, jenachdem man für $\frac{dV}{dp}$ den auf die Aussenseite oder auf die Innenseite sich beziehenden Werth gewählt hat.

Sind demnach im Innern des Raumes gar keine Massen enthalten, so ist, wenn jedenfalls unter $\frac{dV}{dp}$ der auf die Innenseite sich beziehende Werth verstanden wird,

$$\int \frac{dV}{dp}.ds = 0$$

24.

Unter denselben Voraussetzungen, wie am Schluss des vorhergehenden Artikels, und indem wir den in Rede stehenden Raum mit T, und die in dem Elemente desselben dT durch die ausserhalb des Raumes oder auch nach der Stetigkeit in der Oberfläche vertheilten Massen entspringende ganze Kraft mit q bezeichnen, haben wir folgenden wichtigen

LEHRSATZ. Es ist

$$\int V\frac{dV}{dp}.ds = -\int qq\,dT$$

wenn das erste Integral über die ganze Fläche, das zweite durch den ganzen Raum T ausgedehnt wird.

Beweis. Indem wir rechtwinklige Coordinaten x, y, z einführen, betrachten wir zuvörderst eine der Axe der x parallele den Raum T schneidende gerade Linie, wo also y, z constante Werthe haben. Aus der identischen Gleichung

$$\frac{d}{dx}(V\frac{dV}{dx}) = (\frac{dV}{dx})^2 + V\frac{ddV}{dx^2}$$

folgt, dass das Integral

$$\int((\frac{dV}{dx})^2 + V\frac{ddV}{dx^2})\,dx$$

durch dasjenige Stück jener geraden Linie ausgedehnt, welches innerhalb T fällt, der Differenz der beiden Werthe von $V\frac{dV}{dx}$ am Anfangs- und Endpunkte gleich wird, insofern die gerade Linie die Grenzfläche nur zweimal schneidet, oder allgemein $= \Sigma\varepsilon V\frac{dV}{dx}$, indem für $V\frac{dV}{dx}$ die einzelnen Werthe in den verschiedenen Durchschnittspunkten gesetzt werden, und ε in den ungeraden Durchschnittspunkten (dem ersten, dritten u.s.f.) $= -1$, in den geraden $= +1$. Betrachten wir ferner längs dieser geraden Linie den prismatischen Raum, wovon das Rechteck $dy.dz$ ein Querschnitt, also $dx.dy.dz$ ein Element ist, so wird das Integral

$$\int((\frac{dV}{dx})^2 + V\frac{ddV}{dx^2})\,dT$$

ausgedehnt durch denjenigen Theil von T, welcher in jenen prismatischen Raum fällt, $= \Sigma\varepsilon V\frac{dV}{dx}.dy.dz$. Dieses Prisma scheidet aus der Grenzfläche zwei, oder allgemein eine gerade Anzahl von Stücken aus, und wenn jedes derselben mit ds bezeichnet wird, mit ξ hingegen der Winkel zwischen der Axe der x und der nach innen gerichteten Normale auf ds, so ist $dy.dz = \pm\cos\xi.ds$, das obere Zeichen für die ungeraden, das untere für die geraden Durchschnittspunkte genommen. Es wird folglich das obige Integral

$$= -\Sigma V\frac{dV}{dx}.\cos\xi.ds$$

wo die Summation sich auf sämmtliche betreffende Flächenelemente bezieht. Wird nun der ganze Raum T in lauter solche prismatische Elemente zerlegt, so werden auch die sämmtlichen correspondirenden Theile der Fläche diese ganz erschöpfen, und mithin

$$\int((\frac{dV}{dx})^2 + V\frac{ddV}{dx^2})dT = -\int V\frac{dV}{dx}.\cos\xi.ds$$

sein, indem die erste Integration durch den ganzen Raum T, die zweite über die ganze Fläche erstreckt wird. Offenbar ist nun $\cos\xi$ gleich dem partiellen Differentialquotienten $\frac{dx}{dp}$, indem p die im Art. 23 festgelegte Bedeutung hat, und x als Function von p und zwei andern veränderlichen die einzelnen Punkte der Fläche von einander unterscheidenden Grössen betrachtet werden kann, folglich

$$\int((\frac{dV}{dx})^2 + V\frac{ddV}{dx^2}).dT = -\int V\frac{dV}{dx}.\frac{dx}{dp}.ds$$

Es ist übrigens von selbst klar, dass in dem Falle, wo die Fläche selbst Massen enthält, und also $\frac{dV}{dx}$ zwei verschiedene Werthe hat, hier immer der auf den innern Raum sich beziehende zu verstehen ist.

Durch ganz ähnliche Schlüsse findet man

$$\int\left(\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+V\frac{d\,dV}{dy^2}\right)dT=-\int V\frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{dp}\cdot ds$$
$$\int\left(\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+V\frac{d\,dV}{dx^2}\right)dT=-\int V\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dp}\cdot ds$$

Addirt man nun diese drei Gleichungen zusammen, und erwägt, dass im Raume T

$$\frac{d\,dV}{dx^2}+\frac{d\,dV}{dy^2}+\frac{d\,dV}{dz^2}=0$$
$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2=qq$$

und an der Grenzfläche

$$\frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dp}+\frac{dV}{dy}\cdot\frac{dy}{dp}+\frac{dV}{dz}\cdot\frac{dz}{dp}=\frac{dV}{dp}$$

so erhält man $\int qq\,dT=-\int V\cdot\frac{dV}{dp}\cdot ds$, welches unser Lehrsatz selbst ist, der unter Zuziehung des letzten Satzes des vorhergehenden Artikels noch allgemeiner sich so ausdrücken lässt

$$\int qq\,dT=\int(A-V)\frac{dV}{dp}\cdot ds$$

wenn A eine beliebige constante Grösse bedeutet.

25.

Lehrsatz. Wenn unter denselben Voraussetzungen, wie im vorhergehenden Artikel, das Potential V in allen Punkten der Grenzfläche des Raumes T einerlei Werth hat, so gilt dieser Werth auch für sämmtliche Punkte des Raumes selbst, und es findet in dem ganzen Raume eine vollständige Destruction der Kräfte Statt.

Beweis. Wenn in dem erweiterten Lehrsatze des vorhergehenden Artikels für A der constante Grenzwerth des Potentials angenommen wird, so erhellt, dass $\int qq\,dT=0$ wird, also nothwendig $q=0$ in jedem Punkte des Raumes T, mithin auch $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{dV}{dy}=0$, $\frac{dV}{dz}=0$, und folglich V im ganzen Raume T constant.

26.

Lehrsatz. Wenn von Massen, welche sich bloss innerhalb des endlichen Raumes T, oder auch, ganz oder theilweise nach der Stetigkeit vertheilt auf dessen Oberfläche S befinden, das Potential in allen Punkten von S einen constanten Werth $=A$ hat, so wird das Potential in jedem Punkte O des äussern unendlichen Raumes T'

erstlich, wenn $A=0$ ist, gleichfalls $=0$,

zweitens, wenn A nicht $=0$ ist, kleiner als A und mit demselben Zeichen wie A behaftet sein.

Beweis. I. Zuvörderst soll bewiesen werden, dass das Potential in O keinen ausserhalb der Grenzen 0 und A fallenden Werth haben kann. Nehmen wir an, es finde in O ein solcher Werth B für das Potential Statt, und bezeichnen mit C eine beliebige zugleich zwischen B und 0 und zwischen B und A fallende Grösse. Indem man von O nach allen Richtungen gerade Linien ausgehen lässt, wird es auf jeder derselben einen Punkt O' geben, in welchem das Potential $=C$ wird, und zwar so, dass die ganze Linie OO' dem Raume T' angehört. Dies folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der Änderung des Potentials, welches, wenn die gerade Linie hinlänglich fortgesetzt wird, entweder von B in A übergeht, oder unendlich abnimmt, jenachdem die gerade Linie die Fläche S trifft, oder nicht (vergl. die Bemerkung am Schlusse des 21. Artikels). Der Inbegriff aller Punkte O' bildet dann eine geschlossene Fläche, und da das Potential in derselben constant $=C$ ist, so muss es nach dem Lehrsatze des vorhergehenden Artikels denselben Werth in allen Punkten des von dieser Fläche eingeschlossenen Raumes haben, da es doch in O den von C verschiedenen Werth B hat. Die Voraussetzung führt also nothwendig auf einen Widerspruch.

Für den Fall $A=0$ ist hiedurch unser Lehrsatz vollständig bewiesen; für den zweiten Fall, wo A nicht $=0$ ist, soweit, dass erhellt, das Potential könne in keinem Punkte von T' grösser als A, oder mit entgegengesetztem Zeichen behaftet sein.

II. Um für den zweiten Fall unsern Beweis vollständig zu machen, beschreiben wir um O als Mittelpunkt mit einem Halbmesser R, der kleiner ist als die kleinste Entfernung des Punkts O von S, eine Kugelfläche, zerlegen sie in Elemente ds, und bezeichnen das Potential in jedem Elemente mit V; das Potential in O soll wieder mit B bezeichnet werden. Nach dem Lehrsatze des 20. Artikels wird dann das über die ganze Kugelfläche ausgedehnte Integral

$$\int V\,ds=4\pi RRB, \quad \text{und folglich} \quad \int(V-B)\,ds=0$$

Diese Gleichheit kann aber nur bestehen, wenn V entweder in allen Punkten der Kugelfläche constant $= B$, oder wenn V in verschiedenen Theilen der Kugelfläche in entgegengesetztem Sinne von B verschieden ist. In der ersten Voraussetzung würde nach Art. 25 das Potential im ganzen innern Raume der Kugel und daher nach Art 21 im ganzen unendlichen Raume T' constant, und zwar $= 0$ sein müssen, im Widerspruche mit der Voraussetzung, dass es an der Grenze dieses Raumes, auf der Fläche S, von 0 verschieden ist, und der Unmöglichkeit, dass es sich von da ab sprungsweise ändere. Die zweite Voraussetzung hingegen würde mit dem unter I. bewiesenen im Widerspruch stehen, wenn B entweder $= 0$ oder $= A$ wäre. Es muss daher nothwendig B *zwischen* 0 und A fallen.

27.

Lehrsatz. In dem Lehrsatze des vorhergehenden Artikels kann der erste Fall, oder der Werth 0 des constanten Potentials A, nur dann Statt finden, wenn die Summe aller Massen selbst $= 0$ ist, und der zweite nur dann, wenn diese Summe nicht $= 0$ ist.

Beweis. Es sei ds das Element der Oberfläche irgend einer den Raum T einschliessenden Kugel, R ihr Halbmesser, M die Summe aller Massen und V deren Potential in ds. Da nach dem Lehrsatze des 20. Artikels das Integral $\int V ds = 4\pi RM$ wird, im ersten Falle oder für $A = 0$ aber nach dem vorhergehenden Lehrsatze das Potential V in allen Punkten der Kugelfläche $= 0$ wird, im zweiten hingegen kleiner als A und mit demselben Zeichen behaftet, so wird im ersten Fall $4\pi RM = 0$, also $M = 0$, im zweiten hingegen $4\pi RM$ und also auch M mit demselben Zeichen behaftet sein müssen wie A. Zugleich erhellt, dass in diesem zweiten Falle $4\pi RM$ kleiner sein wird als $\int A ds$ oder $4\pi RRA$, mithin M kleiner als RA, oder A grösser als $\frac{M}{R}$.

Der zweite Theil dieses Lehrsatzes, in Verbindung mit dem Lehrsatze des vorhergehenden Artikels, kann offenbar auch auf folgende Art ausgesprochen werden:

Wenn von Massen, die in einem von einer geschlossenen Fläche begrenzten Raume enthalten, oder auch theilweise in der Fläche selbst stetig vertheilt sind, die algebraische Summe $= 0$ ist, und ihr Potential in allen Punkten der Fläche einen constanten Werth hat, so wird dieser Werth nothwendig selbst $= 0$

sein, zugleich für den ganzen unendlichen äussern Raum gelten, und folglich in diesem ganzen äussern Raume die Wirkung der Kräfte aus jenen Massen sich vollständig destruiren.

28.

Man wird sich leicht überzeugen, dass sämmtliche Schlüsse der beiden vorhergehenden Artikel ihre Gültigkeit behalten, wenn S eine nicht geschlossene Fläche ist, und die Massen bloss in derselben enthalten sind. Hier fällt der Raum T ganz weg; alle Punkte, die nicht in der Fläche selbst liegen, gehören dem unendlichen äussern Raume an, und wenn das Potential in der Fläche überall den constanten von 0 verschiedenen Werth A hat, wird es ausserhalb derselben überall einen kleinern Werth haben, der dasselbe Zeichen hat.

Das auf den ersten Fall, $A = 0$, bezügliche bleibt zwar auch hier wahr, aber inhaltleer, da in diesem Fall das Potential V in allen Punkten des Raumes $= 0$ wird, mithin auch überall $\frac{dV}{dt} = 0$, wenn t irgend eine gerade Linie bedeutet, woraus man leicht nach Art. 18 schliesst, dass die Dichtigkeit in der Fläche überall $= 0$ sein muss, also die Fläche gar keine Masse enthalten kann.

Diese letztere Bemerkung gilt übrigens allgemein, wenn die Massen bloss in der Fläche selbst enthalten sein sollen, auch wenn sie eine geschlossene ist, da offenbar nach dem Lehrsatz des 25. Artikels der Werth des Potentials in diesem Fall auch in dem ganzen innern Raume $= 0$ sein wird.

29.

Ehe wir zu den folgenden Untersuchungen fortschreiten, in denen Massen, nach der Stetigkeit in eine Fläche vertheilt, eine Hauptrolle spielen, muss eine wesentliche bei der Vertheilung Statt findende Verschiedenheit hervorgehoben werden, indem nemlich entweder nur Massen von einerlei Zeichen (die wir der Kürze wegen immer als positiv betrachten werden) zugelassen werden, oder auch Massen von entgegengesetzten Zeichen. Ist eine Masse M auf einer Fläche so vertheilt, dass auf jedes Element der Fläche ds die Masse $m ds$ kommt, wo also nach unserm bisherigen Gebrauche m die Dichtigkeit genannt, und $\int m ds$ über die ganze Fläche ausgedehnt $= M$ wird, so nennen wir dies eine *gleichartige* Vertheilung, wenn m überall positiv, oder wenigstens nirgends negativ ist; wenn hingegen in einigen Stellen m positiv, in andern negativ ist, so soll die Vertheil-

lung eine *ungleichartige* Vertheilung heissen, wobei also M nur die algebraische Summe der Massentheile, oder der absolute Unterschied der positiven und der negativen Massen ist. Ein ganz specieller Fall ungleichartiger Vertheilung ist der, wo $M = 0$ wird, und wo es freilich anstössig scheinen mag, sich des Ausdrucks, die Masse 0 sei über die Fläche vertheilt, noch zu bedienen.

30.

Es ist von selbst klar, dass, wie auch immer eine Masse M über eine Fläche *gleichartig* vertheilt sein möge, das daraus entspringende überall positive Potential V in jedem Punkte der Fläche grösser sein wird, als $\frac{M}{r}$, wenn r die grösste Entfernung zweier Punkte der Fläche von einander bedeutet: diesen Werth selbst könnte das Potential nur in einem Endpunkte der Linie r haben, wenn die ganze Masse in dem andern Endpunkte concentrirt wäre, ein Fall, der hier gar nicht in Frage kommt, indem nur von stetiger Vertheilung die Rede sein soll, wo jedem Elemente der Fläche $\mathrm{d}s$ nur eine unendlich kleine Masse $m\mathrm{d}s$ entspricht. Das Integral $\int Vm\mathrm{d}s$ über die ganze Fläche ausgedehnt, ist also jedenfalls grösser als $\int\frac{M}{r}m\mathrm{d}s$ oder $\frac{MM}{r}$, und so muss es nothwendig eine gleichartige Vertheilungsart geben, für welche jenes Integral einen Minimumwerth hat. Es mag nun hier im Voraus als eines der Ziele der folgenden Untersuchungen bezeichnet werden, zu beweisen, dass bei einer solchen Vertheilung, wo $\int Vm\mathrm{d}s$ seinen Minimumwerth erhält, das Potential V in jedem Punkte der Fläche einerlei Werth haben wird, dass dabei keine Theile der Fläche leer bleiben können, und dass es nur eine einzige solche Vertheilung gibt. Der Kürze wegen wollen wir aber die Untersuchung schon von Anfang an in einer weiter umfassenden Gestalt ausführen.

31.

Es bedeute U eine Grösse, die in jedem Punkte der Fläche einen bestimmten endlichen nach der Stetigkeit sich ändernden Werth hat. Es wird dann das Integral

$$\Omega = \int(V-2U)m\mathrm{d}s$$

über die ganze Fläche ausgedehnt, zwar nach Verschiedenheit der gleichartigen Vertheilung der Masse M, sehr ungleiche Werthe haben können; allein offenbar

muss für Eine solche Vertheilungsart ein Minimumwerth dieses Integrals Statt finden. Es soll nun ein Beweis gegeben werden für den

Lehrsatz, dass bei solcher Vertheilungsart

1. die Differenz $V-U = W$ überall in der Fläche, wo sie wirklich mit Theilen von M belegt ist, einen constanten Werth haben wird;

2. dass, falls Theile der Fläche dabei unbelegt bleiben, W in denselben grösser sein muss, oder wenigstens nicht kleiner sein kann, als jener constante Werth.

I. Zuvörderst soll bewiesen werden, dass wenn anstatt einer Vertheilungsweise eine andere unendlich wenig davon verschiedene angenommen wird, indem $m+\mu$ an die Stelle von m gesetzt wird, die daraus entspringende Variation von Ω durch $2\int W\mu\mathrm{d}s$ ausgedrückt werden wird.

In der That ist, wenn wir die Variationen von Ω und V mit $\delta\Omega$ und δV bezeichnen,

$$\delta\Omega = \int\delta V.m\mathrm{d}s+\int(V-2U)\mu\mathrm{d}s$$

Allein zugleich ist $\int\delta V.m\mathrm{d}s = \int V\mu\mathrm{d}s$, wie leicht aus dem Lehrsatze des 19. Artikels erhellt, indem δV nichts anders ist, als das Potential derjenigen Massenvertheilung, wobei μ die Dichtigkeit in jedem Flächenelemente vorstellt, und also was hier $V, m, \delta V, \mu$ ist, dort für V, K, v, k angenommen werden kann, so wie $\mathrm{d}s$ zugleich für $\mathrm{d}S$ und $\mathrm{d}s$. Es wird folglich

$$\delta\Omega = \int(2V-2U)\mu\mathrm{d}s = 2\int W\mu\mathrm{d}s$$

II. Offenbar sind die Variationen μ allgemein an die Bedingung geknüpft, dass $\int\mu\mathrm{d}s = 0$ werden muss; für die gegenwärtige Untersuchung aber auch noch an die zweite, dass μ in den unbelegten Theilen der Fläche, wenn solche vorhanden sind, nicht negativ sein darf, weil sonst die Vertheilung aufhören würde, eine gleichartige zu sein.

III. Nehmen wir nun an, dass bei einer bestimmten Vertheilung von M ungleiche Werthe der Grösse W in den verschiedenen Theilen der Fläche Statt finden. Es sei A eine Grösse, die zwischen den ungleichen Werthen von W liegt; P das Stück der Fläche, wo die Werthe von W grösser, Q dasjenige, wo sie kleiner sind, als A; es seien ferner p, q gleich grosse Stücke der Fläche, jenes zu P, dieses zu Q gehörig. Dies vorausgesetzt, legen wir der Variation

von m überall in p den constanten negativen Werth $\mu = -\nu$, in q hingegen überall den positiven $\mu = \nu$, und in allen übrigen Theilen der Fläche den Werth 0 bei. Offenbar wird hiedurch der ersten Bedingung in II Genüge geleistet; die zweite hingegen wird noch erfordern, dass p keine unbelegte Theile enthalte, was immer bewirkt werden kann, wenn nur nicht das ganze Stück P unbelegt ist.

Der Erfolg hievon wird aber sein, dass $\delta\Omega$ einen negativen Werth erhält, wie man leicht sieht, wenn man diese Variation in die Form $2\int(W-A)\mu\,ds$ setzt.

Es erhellt hieraus, dass wenn bei einer gegebenen Vertheilung entweder in dem belegten Stücke der Fläche ungleiche Werthe von W vorkommen, oder wenn, bei Statt findender Gleichheit der Werthe in dem belegten Stücke, kleinere in dem nichtbelegten Theile angetroffen werden, durch eine abgeänderte Vertheilung eine Verminderung von Ω erreicht werden kann, und dass folglich bei dem Minimumwerthe nothwendig die in obigem Lehrsatze ausgesprochenen Bedingungen erfüllt sein müssen.

32.

Wenn wir jetzt für unsern speciellen Fall (Art. 30), wo $U = 0$ ist, also W das blosse Potential der auf die Fläche vertheilten Masse, und Ω das Integral $\int Vm\,ds$ bedeutet, mit dem Lehrsatze des vorhergehenden Artikels den im 28. Artikel angeführten verbinden, so folgt von selbst, dass bei dem Minimumwerth von $\int Vm\,ds$ die Fläche gar keine unbelegte Theile haben kann; denn sonst würde, auch wenn die ganze Fläche eine geschlossene ist, der belegte Theil eine ungeschlossene und hinsichtlich derselben der unbelegte Theil als dem äussern Raume angehörig zu betrachten sein, mithin darin nach Art. 28 das Potential einen kleinern Werth haben müssen als in der belegten Fläche, während der Lehrsatz des vorhergehenden Artikels einen kleinern Werth ausschliesst.

Es ist also erwiesen, dass es eine gleichartige Vertheilung einer gegebenen Masse über die ganze Fläche gibt, wobei kein Theil leer bleibt, und woraus ein in allen Punkten der Fläche gleiches Potential hervorgeht. Was zum vollständigen Beweise des im 30. Artikel aufgestellten Lehrsatzes jetzt noch fehlt, nemlich die Nachweisung, dass es nur Eine dies leistende Vertheilungsart geben kann, wird weiter unten als Theil eines allgemeineren Lehrsatzes erscheinen.

Dass, wenn der Minimumwerth für $\int Vm\,ds$ Statt finden soll, kein Theil der Fläche unbelegt bleiben darf, kann offenbar auch so ausgedrückt werden:

Bei jeder Vertheilung, wobei ein endliches Stück der Fläche leer bleibt, erhält das Integral $\int Vm\,ds$ einen Werth, der den Minimumwerth um eine endliche Differenz übertrifft.

33.

Der eigentliche Hauptnerv der im 31. Artikel entwickelten Beweisführung beruht auf der Evidenz, mit welcher die Existenz eines Minimumwerths für Ω unmittelbar erkannt wird, solange man sich auf die gleichartigen Vertheilungen einer gegebenen Masse beschränkt. Fände eine gleiche Evidenz auch ohne diese Beschränkung Statt, so würden die dortigen Schlüsse ohne weiteres zu dem Resultate führen, *dass es allemal, wenn nicht eine gleichartige, doch eine ungleichartige Vertheilung der gegebenen Masse gibt, für welche $W = V - U$ in allen Punkten der Fläche einen constanten Werth erhält*, indem dann die zweite Bedingung (Art. 31, II) wegfällt. Allein da jene Evidenz verloren geht, sobald wir die Beschränkung auf gleichartige Vertheilungen fallen lassen, so sind wir genöthigt, den strengen Beweis jenes wichtigsten Satzes unserer ganzen Untersuchung auf einem etwas künstlichern Wege zu suchen. Der folgende scheint am einfachsten zum Ziele zu führen.

Wir betrachten zunächst drei verschiedene Massenvertheilungen, bei welchen wir anstatt der unbestimmten Zeichen für Dichtigkeit m und Potential V folgende besondere gebrauchen:

I. $m = m^0$, $V = V^0$
II. $m = m'$, $V = V'$
III. $m = \mu$, $V = v$

Die Vertheilung I ist diejenige gleichartige der positiven Masse M, für welche $\int Vm\,ds$ seinen Minimumwerth erhält.

II. ist die gleichartige Vertheilung derselben Masse M, für welche $\int(V - 2\varepsilon U)m\,ds$ seinen Minimumwerth erhält, wo ε einen beliebigen constanten Coëfficienten bedeutet.

III. hängt so von I und II ab, dass $\mu = \frac{m' - m^0}{\varepsilon}$, und ist also eine ungleichartige Vertheilung, in welcher die Gesammtmasse $= 0$ wird.

Es ist nun nach dem im 31. Artikel bewiesenen constant V^0 in der ganzen

Fläche: $V'-\varepsilon U$ in der Fläche, so weit sie bei der zweiten Vertheilung belegt ist, und daher in demselben Stücke der Fläche auch $v-U$, weil $v=\frac{V'-V^0}{\varepsilon}$.

Ob in der zweiten Vertheilung die ganze Fläche belegt ist, oder ob ein grösseres oder kleineres Stück unbelegt bleibt, wird von dem Coëfficienten ε abhangen. Da die zweite Vertheilung in die erste übergeht, wenn $\varepsilon=0$ wird, so wird allgemein zu reden das für einen bestimmten Werth von ε unbelegt gebliebene Stück der Fläche sich verengern, wenn ε abnimmt, und sich schon ganz füllen, ehe ε den Werth 0 erreicht hat. In singulären Fällen aber kann es sich auch so verhalten, dass immer ein Stück unbelegt bleibt, so lange ε von 0 verschieden ist und nicht das entgegengesetzte Zeichen annimmt. Für unsern Zweck ist es zureichend, ε unendlich klein anzunehmen, wo sich leicht nachweisen lässt, dass jedenfalls kein endliches Flächenstück unbelegt bleiben kann. Denn im entgegengesetzten Falle würde nach der Schlussbemerkung des Art. 32 das Integral $\int V'm'\mathrm{d}s$ um einen endlichen Unterschied grösser sein müssen als $\int V^0m^0\mathrm{d}s$: wird dieser Unterschied mit e bezeichnet, so ist der Unterschied der beiden Integrale

$$\int(V'-2\varepsilon U)m'\mathrm{d}s-\int(V^0-2\varepsilon U)m^0\mathrm{d}s=e-2\varepsilon\int U(m'-m^0)\mathrm{d}s$$

welcher für ein unendlich kleines ε einen positiven Werth behält, im Widerspruch mit der Voraussetzung, dass $\int(V-2\varepsilon U)m\mathrm{d}s$ in der zweiten Vertheilung seinen Minimumwerth hat.

Man schliesst hieraus, dass wenn man in der dritten Vertheilung für μ den Grenzwerth von $\frac{m'-m^0}{\varepsilon}$, bei unendlicher Abnahme von ε, annimmt, $v-U$ in der ganzen Fläche einen constanten Werth hat.

Bilden wir nun eine vierte Vertheilung, wobei $m=m^0+\mu$ gesetzt wird, die ganze Masse also $=M$ bleibt, so wird das daraus entspringende Potential $=V^0+v$ sein, mithin in der ganzen Fläche die Grösse U um die constante Differenz V^0+v-U übertreffen, wodurch also der oben ausgesprochene Lehrsatz erwiesen ist.

34.

Es bleibt noch übrig, zu beweisen, dass nur Eine Vertheilungsart einer gegebenen Masse M möglich ist, bei welcher $V-U$ in der ganzen Fläche constant ist. In der That, gäbe es zwei verschiedene dies leistende Vertheilungsarten, so würde, wenn man m und V in der ersten mit m', V', in der zweiten mit m'', V'' bezeichnet, von einer dritten Massenvertheilung, in welcher $m=m'-m''$ angenommen wird, das Potential $=V'-V''$ und folglich constant sein, und die Gesammtmasse $=0$. Das constante Potential müsste daher nach Art. 27 nothwendig $=0$ sein, und folglich nach Art. 28 auch $m'-m''=0$, oder die beiden Vertheilungen identisch.

Endlich muss noch erwähnt werden, dass es immer eine Massenvertheilung gibt, wobei die Differenz $V-U$ einen *gegebenen* constanten Werth erhält. Bedeutet nemlich α einen beliebigen constanten Coëfficienten, so wird, indem wir die Bezeichnungen für die erste und dritte Vertheilung im vorhergehenden Artikel beibehalten, das Potential derjenigen Vertheilung, wobei $m=\alpha m^0+\mu$ angenommen wird, $=\alpha V^0+v$ sein, und dem constanten Unterschiede αV^0+v-U durch gehörige Bestimmung des Coëfficienten α jeder beliebige Werth ertheilt werden können. Die Gesammtmasse dieser Vertheilung ist dann aber nicht mehr willkürlich, sondern $=\alpha M$. Übrigens erhellt auf dieselbe Art wie vorhin, dass auch diese Vertheilungsbedingung nur auf eine einzige Art erfüllt werden kann.

35.

Die wirkliche Bestimmung der Vertheilung der Masse auf einer gegebenen Fläche für jede vorgeschriebene Form von U übersteigt in den meisten Fällen die Kräfte der Analyse in ihrem gegenwärtigen Zustande. Der einfachste Fall, wo sie in unsrer Gewalt ist, ist der einer ganzen Kugelfläche; wir wollen jedoch sofort den allgemeinern behandeln, wo die Fläche von der Kugelfläche sehr wenig abweicht, und Grössen von höherer Ordnung, als die Abweichung selbst, vernachlässigt werden dürfen.

Es sei R der Halbmesser der Kugel, r die Entfernung jedes Punktes im Raume von ihrem Mittelpunkte, u der Winkel zwischen r und einer festen geraden Linie, λ der Winkel zwischen der durch diese gerade Linie und r gelegten Ebene und einer festen Ebene. Der Abstand eines unbestimmten Punktes in der gegebenen geschlossenen Fläche vom Mittelpunkte der Kugel sei $=R(1+\gamma z)$, wo γ ein constanter sehr kleiner Factor ist, dessen höhere Potenzen vernachlässigt werden, z hingegen eben so wie U Functionen von u und λ.

Das Potential V der auf die Kugelfläche vertheilten Masse wird in jedem Punkte des äussern Raumes durch eine nach Potenzen von r fallende Reihe ausgedrückt werden, welcher wir die Form geben

$$A^0\frac{R}{r}+A'(\frac{R}{r})^2+A''(\frac{R}{r})^3+\text{ u. s. f.}$$

in jedem Punkte des innern Raumes hingegen durch die steigende Reihe

$$B^0+B'\frac{r}{R}+B''(\frac{r}{R})^2+B'''(\frac{r}{R})^3+\text{ u. s. f.}$$

Die Coëfficienten A^0, A', A'' u. s. f. sind Functionen von u und λ, welche bekannten partiellen Differentialgleichungen Genüge leisten, *Allg. Th. d. Erdm.* Art. 18, und eben so B^0, B', B'' u. s. f. Auf der vorgegebenen Fläche soll nun das Potential einer gegebenen Function von u und λ gleich werden, nemlich $V = U$, also

$$(\tfrac{r}{R})^{\frac{1}{2}}V=(1+\gamma z)^{\frac{1}{2}}U$$

Nehmen wir also an, dass $(1+\gamma z)^{\frac{1}{2}}U$ in eine Reihe

$$P^0+P'+P''+P'''+\text{ u. s. w.}$$

entwickelt sei, dergestalt, dass die einzelnen Glieder P^0, P', P'', P''' u. s. f. gleichfalls den gedachten Differentialgleichungen Genüge leisten, und erwägen, dass die beiden obigen Reihen für das Potential bis zur Fläche selbst gültig bleiben müssen, so erhellt, dass

$$\begin{aligned}&P^0+P'+P''+P'''+\text{ u. s. f.}\\&=A^0(1+\gamma z)^{-\frac{1}{2}}+A'(1+\gamma z)^{-\frac{3}{2}}+A''(1+\gamma z)^{-\frac{5}{2}}+\text{ u. s. f.}\\&=B^0(1+\gamma z)^{\frac{1}{2}}+B'(1+\gamma z)^{\frac{3}{2}}+B''(1+\gamma z)^{\frac{5}{2}}+\text{ u. s. f.}\end{aligned}$$

sein wird. Wir schliessen hieraus, dass, wenn man Grössen der Ordnung γ vernachlässigt,

$$P^0+P'+P''+\text{ u. s. f.}=A^0+A'+A''+\text{ u. s. f.}$$

und also (da eine Function von u, λ nur auf Eine Art in eine Reihe entwickelt werden kann, deren Glieder den erwähnten Differentialgleichungen Genüge leisten)

$$P^0=A^0,\quad P'=A',\quad P''=A''\text{ u. s. f.}$$

Eben so wird, Grössen der Ordnung γ vernachlässigt,

$$P^0=B^0,\quad P'=B',\quad P''=B''\text{ u. s. f.}$$

Setzt man also (I)

$$\begin{aligned}A^0&=P^0+\gamma a^0, & B^0&=P^0-\gamma b^0\\A'&=P'+\gamma a', & B'&=P'-\gamma b'\\A''&=P''+\gamma a'', & B''&=P''-\gamma b''\\A'''&=P'''+\gamma a''', & B'''&=P'''-\gamma b'''\\&\text{u. s. f.}\end{aligned}$$

wo offenbar auch a^0, a', a'', a''' u. s. f., imgleichen b^0, b', b'', b''' u. s. f. den erwähnten Differentialgleichungen Genüge leisten werden, und substituirt diese Werthe in den obigen Gleichungen, indem man dabei Grössen von der Ordnung $\gamma\gamma$ vernachlässigt, so wird, nachdem mit γ dividirt ist, bis auf Fehler von der Ordnung γ genau

$$\begin{aligned}a^0+a'+a''+a'''+\text{ u. s. f.}&=\tfrac{1}{2}z(P^0+3P'+5P''+7P'''+\text{ u. s. f.})\\b^0+b'+b''+b'''+\text{ u. s. f.}&=\tfrac{1}{2}z(P^0+3P'+5P''+7P'''+\text{ u. s. f.})\end{aligned}$$

Es ist also, bis auf Fehler der Ordnung γ genau,

$$b^0=a^0,\quad b'=a',\quad b''=a''\text{ u. s. f.}$$

und folglich, bis auf Fehler der Ordnung $\gamma\gamma$ genau, (II)

$$B^0=P^0-\gamma a^0,\quad B'=P'-\gamma a',\quad B''=P''-\gamma a''\text{ u. s. f.}$$

Der Differentialquotient $\frac{dV}{dr}$ hat in der Fläche selbst zwei verschiedene Werthe, und der auf ein negatives dr oder auf die innere Seite sich beziehende übertrifft den auf der äussern Seite geltenden um $4\pi m\cos\vartheta$, wenn m die Dichtigkeit an der Durchschnittsstelle und ϑ den Winkel zwischen r und der Normale bezeichnet (Art. 13, wo t, A, k^0 dasselbe bedeuten, was hier r, ϑ, m sind). Man findet diese beiden Werthe, wenn man die beiden im innern und äussern Raume geltenden Ausdrücke für V nach r differentiirt, und dann $r=R(1+\gamma z)$ setzt. Es ist also der erste

$$=\tfrac{1}{R}\{B'+2B''(1+\gamma z)+3B'''(1+\gamma z)^2+\text{ u. s. f.}\}$$

und der zweite

$$-\tfrac{1}{R}\{A^0(1+\gamma z)^{-2}+2A'(1+\gamma z)^{-3}+3A''(1+\gamma z)^{-4}+\text{ u. s. f.}\}$$

Wir haben also, wenn wir die Differenz mit $R(1+\gamma z)^{\frac{1}{2}}$ multipliciren,

$$4\pi m R\cos\vartheta.(1+\gamma z)^{\frac{1}{2}}$$
$$= A^0(1+\gamma z)^{-\frac{1}{2}}+2A'(1+\gamma z)^{-\frac{3}{2}}+3A''(1+\gamma z)^{-\frac{5}{2}}+\text{ u. s. f.}$$
$$+B'(1+\gamma z)^{\frac{1}{2}}\ +2B''(1+\gamma z)^{\frac{3}{2}}\ +3B'''(1+\gamma z)^{\frac{5}{2}}\ +\text{ u. s. f.}$$

Substituiren wir hierin statt A^0, A' u. s. f. die Werthe aus I, und statt B^0, B' u. s. w. die Werthe aus II, und lassen weg, was von der Ordnung $\gamma\gamma$ ist, so erhalten wir

$$4\pi m R\cos\vartheta.(1+\gamma z)^{\frac{1}{2}} = P^0+3P'+5P''+7P'''+\text{ u. s. f.}$$
$$+\gamma(a^0+a'+a''+a'''+\text{ u. s. f.})$$
$$-\tfrac{1}{2}\gamma z(P^0+3P'+5P''+\text{ u. s. f.})$$

folglich, da die beiden letzten Reihen bis auf Grössen der Ordnung $\gamma\gamma$ einander destruiren,

$$m = \tfrac{(1+\gamma z)^{-\frac{1}{2}}}{4\pi R\cos\vartheta}.(P^0+3P'+5P''+7P'''+\text{ u. s. f.})$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Anstatt $(1+\gamma z)^{-\frac{1}{2}}$ kann man auch schreiben $1-\frac{1}{2}\gamma z$, und den Divisor $\cos\vartheta$ weglassen, insofern, wenigstens allgemein zu reden, ϑ von der Ordnung γ, und also $\cos\vartheta$ von 1 nur um eine Grösse der Ordnung $\gamma\gamma$ verschieden ist.

Für den Fall einer Kugel, wo $\gamma = 0$, hat man in aller Schärfe

$$m = \tfrac{1}{4\pi R}(P^0+3P'+5P''+7P'''+\text{ u. s. f.})$$

indem $P^0+P'+P''+P'''+$ u. s. f. die Entwicklung von U selbst vorstellt.

36.

Die Grösse U ist in den bisherigen Untersuchungen unbestimmt gelassen: die Anwendung derselben auf den Fall, wo für U das Potential eines gegebenen Massensystems angenommen wird, bahnt uns nun den Weg zu folgendem wichtigen

Lehrsatz. Anstatt einer beliebigen gegebenen Massenvertheilung D, welche entweder bloss auf den innern von einer geschlossenen Fläche S begrenzten Raum beschränkt ist, oder bloss auf den äussern Raum, lässt sich eine Massenvertheilung E bloss auf der Fläche selbst substituiren, mit dem Erfolge, dass die

Wirkung von E der Wirkung von D gleich wird, in allen Punkten des äussern Raumes für den ersten Fall, oder in allen Punkten des innern Raumes für den zweiten.

Es wird dazu nur erfordert, dass, indem das Potential von D in jedem Punkte von S mit U, das Potential von E hingegen mit V bezeichnet wird, in der ganzen Fläche für den ersten Fall $V-U=0$, für den zweiten aber nur constant werde. Es wird nemlich $-U$ das Potential einer Vertheilung D' sein, die der D entgegengesetzt ist (so dass an die Stelle jedes Massentheils ein entgegengesetztes tritt), also $V-U$ das Potential der zugleich bestehenden Vertheilungen D' und E; die Wirkungen daraus werden sich folglich im ersten Fall im ganzen äussern Raume, im zweiten im ganzen innern destruiren (Artt. 27 und 25), oder die Wirkungen von D und E werden in den betreffenden Räumen gleich sein. Übrigens wird die ganze Masse in E für den ersten Fall der Masse in D gleich sein, im zweiten aber willkürlich bleiben.

Der Lehrsatz, welcher in der *Intensitas vis magneticae* Art. 2 angekündigt, und auch in der *Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus* an verschiedenen Stellen angeführt ist, erscheint jetzt als ein specieller Fall des hier bewiesenen.

37.

Obgleich, wie schon im 35. Artikel bemerkt ist, die wirkliche vollständige Ausmittelung der Vertheilung E in den meisten Fällen unüberwindliche Schwierigkeiten darbietet, so gibt es doch einen, wo sie mit grosser Leichtigkeit geschehen kann, und der hier noch besonders angeführt zu werden verdient. Dies ist nemlich der, wo U constant, also S eine Gleichgewichtsfläche für das gegebene Massensystem D ist. Man sieht leicht, dass hier nur von dem Falle die Rede zu sein braucht, wo D im innern Raume angenommen wird, und nicht die Gesammtmasse $=0$ ist, da sonst gar keine Wirkung da sein würde, die durch eine Massenvertheilung auf S ersetzt zu werden brauchte.

Es sei O ein Punkt der Fläche S, und r eine gerade Linie, welche die Fläche daselbst unter rechten Winkeln schneidet, und in der Richtung von Innen nach Aussen als wachsend betrachtet wird; es sei ferner $-C$ der Werth des Differentialquotienten $\frac{dU}{dr}$ in O, und m die Dichtigkeit, welche bei der Massenvertheilung E in O Statt hat. Der Differentialquotient $\frac{dV}{dr}$ wird in O zwei verschiedene Werthe haben; der auf die äussere Seite sich beziehende wird,

weil in der Fläche und im ganzen äussern Raume $V = U$ ist, dem Differentialquotienten $\frac{dU}{dr}$ gleich, also $= -C$ sein; der auf die innere Seite sich beziehende hingegen $= 0$, weil V in der Fläche und im ganzen innern Raume constant ist. Da nun aber der zweite Werth um $4\pi m$ grösser ist als der erste, so haben wir $4\pi m = C$ oder $m = \frac{C}{4\pi}$. Offenbar ist C nichts anderes, als die aus der Massenvertheilung D entspringende Kraft, und hat mit der Gesammtmasse einerlei Zeichen.

DIOPTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS

DER KÖNIGL. SOCIETÄT ÜBERGEBEN MDCCCXL DECEMBER X.

Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Band I.
Göttingen MDCCCXLIII.

DIOPTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

Die Betrachtung des Weges, welchen durch Linsengläser solche Lichtstrahlen nehmen, die gegen die gemeinschaftliche Axe derselben sehr wenig geneigt sind, und der davon abhangenden Erscheinungen, bietet sehr elegante Resultate dar, welche durch die Arbeiten von Cotes, Euler, Lagrange und Möbius erschöpft scheinen könnten, aber doch noch mehreres zu wünschen übrig lassen. Ein wesentlicher Mangel der von jenen Mathematikern aufgestellten Sätze ist, dass dabei die Dicke der Linsen vernachlässigt wird, wodurch ihnen ein ihren Werth sehr verringernder Charakter von Ungenauigkeit und Naturwidrigkeit aufgeprägt wird. Ohne in Abrede zu stellen, dass für manche andere dioptrische Untersuchungen, namentlich für diejenigen, wobei die sogenannte Abweichung wegen der Kugelgestalt der Linsenflächen in Betracht gezogen wird, die anfängliche Vernachlässigung der Dicke der Linsen sehr nützlich, ja nothwendig wird, um einfachere und geschmeidigere Vorschriften für Überschläge und erste Annäherungen zu gewinnen, wird man sich doch gern einer solchen Aufopferung aller Schärfe da enthoben sehen, wo es ohne allen oder ohne erheblichen Verlust für die Einfachheit der Resultate geschehen kann. Auf einen den mathematischen Sinn unangenehm berührenden Mangel an Präcision stossen wir zum Theil schon bei den ersten Begriffsbestimmungen der Dioptrik. Die Begriffe von Axe und Brennpunkt einer Linse stehen zwar mit Schärfe fest; allein nicht so ist es mit

der Brennweite, welche die meisten Schriftsteller als die Entfernung des Brennpunkts der Linse von ihrem Mittelpunkte erklären, indem sie von vorne hier entweder stillschweigend voraussetzen, oder ausdrücklich bevorworten, dass die Dicke der Linse hiebei wie unendlich klein betrachtet werde, wodurch also für wirkliche Linsen die Brennweite eine Unbestimmtheit von der Ordnung der Dicke der Linsen behält. Wo es einmal genauer genommen wird, rechnet man jene Entfernung bald von der dem Brennpunkte nächsten Oberfläche der Linse, bald von dem sogenannten optischen Mittelpunkte derselben, bald von demjenigen Punkte, welcher zwischen der Vorderfläche und Hinterfläche mitten inne liegt, und von allen diesen Bestimmungen wieder verschieden ist derjenige Werth, welcher bei der Vergleichung der Grösse des Bildes eines unendlich entfernten Gegenstandes mit der scheinbaren Grösse des letztern zum Grunde gelegt werden muss, welche letztere Bestimmung in der That die einzige zweckmässige ist.

Ich habe daher für nicht überflüssig gehalten, diesen an sich ganz elementaren Untersuchungen einige Blätter zu widmen, vornehmlich um zu zeigen, dass bei den oben erwähnten eleganten Sätzen ohne Verlust für ihre Einfachheit die Dicke der Linsen mit berücksichtigt werden kann. Nur die Beschränkung auf solche Strahlen, die gegen die Axe unendlich wenig geneigt sind, soll hier beibehalten, oder die Abweichung wegen der Kugelgestalt bei Seite gesetzt werden.

1.

Die Bestimmung der Lage aller in dieser Untersuchung vorkommenden Punkte geschieht durch rechtwinklige Coordinaten x, y, z, wobei vorausgesetzt wird, dass die Mittelpunkte der verschiedenen Brechungsflächen in der Axe der x liegen, und nur solche Lichtstrahlen betrachtet werden, die mit dieser Axe einen sehr kleinen Winkel machen: die Coordinaten x werden, bei ganz willkürlichem Anfangspunkte, als wachsend angenommen in dem Sinne der Richtung der Lichtstrahlen.

Wir betrachten zuerst die Wirkung Einer Brechung auf den Weg eines Lichtstrahls. Es sei das Brechungsverhältniss beim Übergange aus dem ersten Mittel in das zweite wie $\frac{1}{n}$ zu $\frac{1}{n'}$, oder wie n' zu n. Wir bezeichnen mit M den Mittelpunkt der sphärischen Scheidungsfläche zwischen den beiden Mitteln, mit N den Durchschnittspunkt dieser Fläche mit der ersten Coordinatenaxe; zugleich sollen mit denselben Buchstaben auch die diesen Punkten entsprechenden

Werthe von x bezeichnet werden, was in der Folge auch bei andern Punkten der ersten Coordinatenaxe eben so gehalten werden soll. Es sei ferner $r = M - N$, oder r der Halbmesser der Scheidungsfläche, positiv oder negativ, je nachdem das erste Mittel an der convexen oder an der concaven Seite liegt; P der Punkt, wo der Lichtstrahl die Scheidungsfläche trifft, und ϑ der (spitze) Winkel zwischen MP und der Axe der x.

Die von einem Lichtstrahle vor der Brechung beschriebene gerade Linie wird durch zwei Gleichungen bestimmt, denen wir folgende Formel geben:

$$y = \frac{\varepsilon}{n}(x - N) + b$$
$$z = \frac{\gamma}{n}(x - N) + c$$

und eben so seien die Gleichungen für die von demselben Lichtstrahle nach der Brechung beschriebene gerade Linie

$$y = \frac{\varepsilon'}{n'}(x - N) + b'$$
$$z = \frac{\gamma'}{n'}(x - N) + c'$$

Es kommt also darauf an, die Abhängigkeit der vier Grössen $\varepsilon', \gamma', b', c'$ von $\varepsilon, \gamma, b, c$ zu entwickeln. Für den Punkt P wird

$$x = N + r(1 - \cos\vartheta)$$

also, weil für denselben sowohl die ersten als die zweiten Gleichungen gelten,

$$\frac{\varepsilon}{n} \cdot r(1 - \cos\vartheta) + b = \frac{\varepsilon'}{n'} \cdot r(1 - \cos\vartheta) + b'$$

und folglich, da $\varepsilon, \varepsilon', \vartheta$ als unendlich kleine Grössen erster Ordnung gelten, bis auf Grössen dritter Ordnung genau

$$b' = b \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

und eben so

$$c' = c \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Eine durch M senkrecht gegen die Axe der x gelegte Ebene werde von dem ersten (nöthigenfalls verlängerten) Wege des Lichtstrahls in Q, von dem zweiten in Q' geschnitten. Da PQ' mit PQ und PM in Einer Ebene liegt, so sind M, Q, Q' in Einer geraden Linie. Bezeichnet man mit λ, λ' die Winkel, welche diese gerade Linie mit PQ, PQ' macht, so werden offenbar

$MQ.\sin\lambda$, $MQ'.\sin\lambda'$ den Producten aus dem positiv genommenen Halbmesser der Kugelfläche in die Sinus des Einfallswinkels und des gebrochenen Winkels gleich, also den Zahlen n', n proportional sein, mithin

$$MQ' = \frac{n.MQ.\sin\lambda}{n'\sin\lambda'}$$

Da nun für den Punkt Q

$$y = b + \frac{6r}{n}$$
$$z = c + \frac{\gamma r}{n}$$

für den Punkt Q' hingegen

$$y = b' + \frac{6'r}{n'}$$
$$z = c' + \frac{\gamma' r}{n'}$$

wird, und die beiden letztern Coordinaten sich zu den beiden erstern wie MQ' zu MQ verhalten, so hat man

$$b' + \frac{6'r}{n'} = \frac{n\sin\lambda}{n'\sin\lambda'}.\left(b + \frac{6r}{n}\right)$$
$$c' + \frac{\gamma' r}{n'} = \frac{n\sin\lambda}{n'\sin\lambda'}.\left(c + \frac{\gamma r}{n}\right)$$

oder

$$6' = \frac{nb + 6r}{r}.\frac{\sin\lambda}{\sin\lambda'} - \frac{n'b'}{r}$$
$$\gamma' = \frac{nc + \gamma r}{r}.\frac{\sin\lambda}{\sin\lambda'} - \frac{n'c'}{r}$$

Diese Ausdrücke sind strenge richtig; allein, da λ, λ' vom rechten Winkel um Grössen erster Ordnung, also ihre Sinus von der Einheit um Grössen zweiter Ordnung verschieden sind, so wird, auf Grössen dritter Ordnung genau,

$$\left.\begin{aligned} 6' &= 6 - \frac{n'-n}{r}.b = 6 + \frac{n'-n}{N-M}.b \\ \gamma' &= \gamma - \frac{n'-n}{r}.c = \gamma + \frac{n'-n}{N-M}.c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Diese Gleichungen (1), (2) enthalten die Auflösung unserer Aufgabe.

Es verdient bemerkt zu werden, dass dieselben Formeln auch unmittelbar auf einen zurückgeworfenen Strahl angewandt werden können, wenn man nur $-n$ für n' substituirt, und dass, mit Hülfe eines solchen Verfahrens, auch die sämmtlichen folgenden Untersuchungen sich sehr leicht auf den Fall erweitern lassen, wo anstatt der Refractionen eine oder mehrere Reflexionen eintreten.

2.

Zur Auflösung der allgemeinern Aufgabe, den Weg des Lichtstrahls nach wiederholten $(\mu+1)$ Brechungen zu bestimmen, wollen wir folgende Bezeichnungen gebrauchen.

$N^0, N', N'' \ldots N^{(\mu)}$ die Punkte, wo die Axe der x von den Brechungsflächen getroffen wird.

$M^0, M', M'' \ldots M^{(\mu)}$ die in dieser Axe liegenden Mittelpunkte der Brechungsflächen

$n^0 : n', n'' : n''', n'' \ldots n^{(\mu+1)} : n^{(\mu)}$ die Brechungsverhältnisse beim Durchgange aus dem ersten Mittel (vor N^0) in das zweite (zwischen N^0 und N'), aus dem zweiten in das dritte u. s. f. In der Emanationstheorie sind also die Zahlen n^0, n', n'' u. s. w den Geschwindigkeiten der Fortpflanzung des Lichts in den einzelnen Mitteln direct, in der Undulationstheorie verkehrt proportional, und wenn das letzte Mittel dasselbe ist, wie das erste, wird $n^{(\mu+1)} = n^0$.

Die Gleichungen für den Weg des Lichtstrahls vor der ersten Brechung seien

$$y = \frac{6^0}{n^0}(x - N^0) + b^0$$
$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x - N^0) + c^0$$

die Gleichungen für den Weg nach der ersten Brechung folgende

$$y = \frac{6'}{n'}(x - N^0) + b^0$$
$$z = \frac{\gamma'}{n'}(x - N^0) + c^0$$

oder, anstatt auf N^0, auf N' bezogen

$$y = \frac{6'}{n'}(x - N') + b'$$
$$z = \frac{\gamma'}{n'}(x - N') + c'$$

eben so die Gleichungen für den Weg nach der zweiten Brechung

$$y = \frac{6''}{n''}(x - N') + b'$$
$$z = \frac{\gamma''}{n''}(x - N') + c'$$

oder

$$y = \frac{6''}{n''}(x - N'') + b''$$
$$z = \frac{\gamma''}{n''}(x - N'') + c''$$

u. s. f., also, wenn wir die letzten Glieder in den Reihen der $\mathfrak{G}, \gamma, n, N, b, c$, nemlich $\mathfrak{G}^{(\mu+1)}, \gamma^{(\mu+1)}, n^{(\mu+1)}, N^{(\mu)}, b^{(\mu)}, c^{(\mu)}$, um sie als solche kenntlich zu machen, durch $\mathfrak{G}^*, \gamma^*, n^*, N^*, b^*, c^*$ bezeichnen, die Gleichungen für den letzten Weg des Lichtstrahls

$$y = \frac{\mathfrak{G}^*}{n^*}(x - N^*) + b^*$$
$$z = \frac{\mathfrak{T}^*}{n^*}(x - N^*) + c^*$$

Endlich setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \frac{N' - N^0}{n'} &= t', \quad \frac{N'' - N'}{n''} = t'', \quad \frac{N''' - N''}{n'''} = t''' \text{ u. s. f.} \\ \frac{n' - n^0}{N^0 - M^0} &= u^0, \quad \frac{n'' - n'}{N' - M'} = u', \quad \frac{n''' - n''}{N'' - M''} = u'' \text{ u. s. f.} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und der Analogie nach für die letzten Glieder in diesen Reihen

$$t^{(\mu)} = t^*, \quad u^{(\mu)} = u^*$$

Es wird demnach, in Folge des vorhergehenden Artikels,

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}' &= \mathfrak{G}^0 + u^0 b^0 \\ b' &= b^0 + t' \mathfrak{G}' \\ \mathfrak{G}'' &= \mathfrak{G}' + u' b' \\ b'' &= b' + t'' \mathfrak{G}'' \\ \mathfrak{G}''' &= \mathfrak{G}'' + u'' b'' \\ b''' &= b'' + t''' \mathfrak{G}''' \end{aligned}$$

u. s. f., woraus erhellt, dass $b^*, \mathfrak{G}^*$ linearisch durch b^0 und $\mathfrak{G}^0$ bestimmt werden, und dass, wenn man

$$\left.\begin{aligned} b^* &= g b^0 + h \mathfrak{G}^0 \\ \mathfrak{G}^* &= k b^0 + l \mathfrak{G}^0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

setzt, in der von Euler (*Comment. Nov. Acad. Petropol.* T. IX) eingeführten Bezeichnung sein wird

$$\left.\begin{aligned} g &= (u^0, t', u', t'', u'' \ldots t^*) \\ h &= (t', u', t'', u'' \ldots t^*) \\ k &= (u^0, t', u', t'', u'' \ldots u^*) \\ l &= (t', u', t'', u'' \ldots u^*) \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Bedeutung dieser Bezeichnung besteht bekanntlich darin, dass, wenn aus einer gegebenen Reihe von Grössen a, a', a'', a''' u. s. f. eine andere Reihe, A, A', A'', A''' u. s. f. nach folgendem Algorithmus gebildet wird

$$A = a, \quad A' = a'A + 1, \quad A'' = a''A' + A, \quad A''' = a'''A'' + A' \text{ u. s. f.}$$

man schreibt

$$A = (a), \quad A' = (a, a'), \quad A'' = (a, a', a''), \quad A''' = (a, a', a'', a''') \text{ u. s. f.}$$

Übrigens ist von selbst klar, dass in den Gleichungen für die dritte Coordinate z die Constanten für den letzten Weg aus denen für den ersten ganz eben so abgeleitet werden, wie in den Gleichungen für y, oder dass man haben wird

$$\left.\begin{aligned} c^* &= g c^0 + h \gamma^0 \\ \gamma^* &= k c^0 + l \gamma^0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

In den Gleichungen (3), (5), (4) ist die vollständige Auflösung unsrer Aufgabe enthalten.

3.

Euler hat a. a. O. die vornehmsten den erwähnten Algorithmus betreffenden Relationen entwickelt, von denen hier nur zwei in Erinnerung gebracht werden mögen.

Erstlich ist immer

$$(a, a', a'' \ldots a^{(\lambda)})(a', a'' \ldots a^{(\lambda+1)}) - (a, a', a'' \ldots a^{(\lambda+1)})(a', a'' \ldots a^{(\lambda)}) = \pm 1$$

wo das obere oder das untere Zeichen gilt, je nachdem die Anzahl aller Elemente $a, a', a'' \ldots a^{(\lambda+1)}$ d. i. die Zahl $\lambda + 2$ ungerade oder gerade ist.

Zweitens ist erlaubt, die Ordnung der Elemente umzukehren; es wird nemlich

$$(a, a', a'' \ldots a^{(\lambda)}) = (a^{(\lambda)} \ldots a'', a' a)$$

Aus der Anwendung des ersten dieser Sätze auf die Grössen g, h, k, l folgt

$$gl - hk = 1$$

Die Gleichungen (4) können daher auch so dargestellt werden:

$$\begin{aligned} b^0 &= \quad lb^* - h\mathfrak{G}^* \\ \mathfrak{G}^0 &= -kb^* + g\mathfrak{G}^* \\ c^0 &= \quad lc^* - h\gamma^* \\ \gamma^0 &= -kc^* + g\gamma^* \end{aligned}$$

4.

Es sei P ein gegebener Punkt auf der (nöthigenfalls verlängerten) geraden Linie, welche der erste Weg des Lichtstrahls darstellt, und ξ, η, ζ seine Coordinaten. Es ist also

$$n^0\eta = \mathfrak{G}^0(\xi - N^0) + n^0 b^0$$

oder wenn man für $\mathfrak{G}^0, b^0$ die am Schluss des vorhergehenden Artikels gegebenen Ausdrücke substituirt

$$n^0\eta = (g\mathfrak{G}^* - kb^*)(\xi - N^0) - n^0(h\mathfrak{G}^* - lb^*)$$

folglich

$$b^* = \frac{n^0\eta + (n^0 h - g(\xi - N^0))\mathfrak{G}^*}{n^0 l - k(\xi - N^0)}$$

Substituirt man diesen Werth in der ersten Gleichung für den Weg des Lichtstrahls nach der letzten Brechung, nemlich in

$$y = \frac{\mathfrak{G}^*}{n^*}(x - N^*) + b^*$$

und schreibt um abzukürzen

$$N^* - \frac{n^0 h - g(\xi - N^0)}{n^0 l - k(\xi - N^0)} \cdot n^* = \xi^*$$

$$\frac{n^0\eta}{n^0 l - k(\xi - N^0)} = \eta^*$$

so wird diese Gleichung

$$y = \eta^* + \frac{\mathfrak{G}^*}{n^*}(x - \xi^*)$$

und ganz auf dieselbe Art wird, wenn man noch

$$\frac{n^0\zeta}{n^0 l - k(\xi - N^0)} = \zeta^*$$

schreibt, die zweite Gleichung für den Weg des Lichtstrahls nach der letzten Brechung

$$z = \zeta^* + \frac{\Gamma^*}{n^*}(x - \xi^*)$$

Der Punkt P^*, dessen Coordinaten ξ^*, η^*, ζ^* sind, liegt also auf der (nöthigenfalls rückwärts verlängerten) geraden Linie, welche dieser letzte Weg darstellt, und zugleich ist klar, da seine Coordinaten von $\mathfrak{G}^0, b^0, \gamma^0, c^0$ unabhängig sind, dass er für *alle* einfallenden Strahlen, die durch P gehen, derselbe ist. Man kann den Punkt P wie ein Object und P^* als sein Bild betrachten; jenes kann aber nur dann ein reelles sein, wenn P im ersten Mittel liegt, oder $\xi - N^0$ negativ ist, und eben so ist das Bild nur dann ein reelles, wenn P^* in dem letzten Mittel liegt, oder $\xi^* - N^*$ positiv ist; in den entgegengesetzten Fällen sind Object oder Bild nur virtuell.

Die Punkte P, P^* liegen mit der Axe der x in Einer Ebene, in Entfernungen von derselben, die sich wie die Einheit und die Zahl $\frac{n^0}{n^0 l - k(\xi - N^0)}$ verhalten, wobei das positive oder negative Zeichen dieser Zahl die Lage jener Punkte auf Einer Seite der Axe oder auf entgegengesetzten anzeigt. Ein System von Punkten in derselben gegen die Axe der x senkrechten Ebene kann wie ein zusammengesetztes Object betrachtet werden, dessen zusammengesetztes Bild gleichfalls in Eine gegen die Axe der x senkrechte Ebene fällt und dem Object ähnlich ist, so dass das Linearverhältniss der Theile durch die Zahl

$$\frac{n^0}{n^0 l - k(\xi - N^0)} = g + \frac{k}{n^*}(\xi^* - N^*)$$

ausgedrückt wird, deren Zeichen die aufrechte oder verkehrte Lage unterscheidet.

5.

Das bisher entwickelte enthält die ganze Theorie der Veränderungen, welche der Weg der Lichtstrahlen durch Brechungen erleidet, und lässt sich leicht auch auf den Fall ausdehnen, wo mit Brechungen eine oder mehrere Reflexionen verbunden sind, was jedoch speciell hier nicht ausgeführt werden soll. Es ist aber nicht überflüssig, die Resultate in eine andere Form zu bringen, indem man sie, anstatt auf die erste und letzte Fläche oder auf die Punkte N^0, N^*, auf zwei andere Punkte Q, Q^* bezieht. Es seien

$$y = \frac{\mathfrak{G}^0}{n^0}(x - Q) + B$$

$$z = \frac{\Gamma^0}{n^0}(x - Q) + C$$

die Gleichungen für den ersten, und

$$y = \frac{\delta^*}{n^*}(x - Q^*) + B^*$$
$$z = \frac{\gamma^*}{n^*}(x - Q^*) + C^*$$

die Gleichungen für den letzten Weg des Lichtstrahls, und man setze

$$\frac{N^0 - Q}{n^0} = \vartheta, \qquad \frac{Q^* - N^*}{n^*} = \vartheta^*$$

Wir haben also

$$b^0 = B + \vartheta\delta^0, \qquad c^0 = C + \vartheta\gamma^0$$
$$B^* = b^* + \vartheta^*\delta^*, \qquad C^* = c^* + \vartheta^*\gamma^*$$

Hieraus, verbunden mit den Gleichungen (4), folgt leicht, dass, wenn man

$$G = g + \vartheta^* k$$
$$H = h + \vartheta g + \vartheta\vartheta^* k + \vartheta^* l$$
$$K = k$$
$$L = l + \vartheta k$$

setzt,

$$B^* = GB + H\delta^0, \qquad C^* = GC + H\gamma^0$$
$$\delta^* = KB + L\delta^0, \qquad \gamma^* = KC + L\gamma^0$$

sein wird. Die Coëfficienten G, H, K, L, welche auf diese Weise an die Stelle von g, h, k, l treten, geben auch die Gleichung

$$GL - HK = 1$$

6.

Der Zweck der Einführung anderer Punkte, um die Lage des einfallenden und des ausfahrenden Strahls darauf zu beziehen, geht dahin, eine einfachere Abhängigkeit der letztern von der erstern darzubieten, und dazu sind vorzugsweise zwei Paare von Punkten geeignet, die mit E, E^* und F, F^* bezeichnet werden sollen. Die Werthe der dabei in Betracht kommenden Grössen werden sich bequem in einer tabellarischen Form übersehen lassen.

	I	II
ϑ	$\frac{1-l}{k}$	$-\frac{l}{k}$
ϑ^*	$\frac{1-g}{k}$	$-\frac{g}{k}$
Q	$E = N^0 - \frac{n^0(1-l)}{k}$	$F = N^0 + \frac{n^0 l}{k} = E + \frac{n^0}{k}$
Q^*	$E^* = N^* + \frac{n^*(1-g)}{k}$	$F^* = N^* - \frac{n^* g}{k} = E^* - \frac{n^*}{k}$
G	1	0
H	0	$-\frac{1}{k}$
K	k	k
L	1	0

Das Resultat ist also, dass, wenn die Gleichungen für den einfallenden Strahl in die Form gebracht werden

$$y = \frac{\delta^0}{n^0}(x - E) + B$$
$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x - E) + C$$

oder in folgende (wo wir die constanten Theile zur Unterscheidung von der ersten Form mit Accenten bezeichnen)

$$y = \frac{\delta^0}{n^0}(x - F) + B'$$
$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x - F) + C'$$

die Gleichungen für den ausfahrenden Strahl sein werden

$$y = \frac{\delta^0 + kB}{n^*}.(x - E^*) + B$$
$$z = \frac{\gamma^0 + kC}{n^*}.(x - E^*) + C$$

oder

$$y = \frac{kB'}{n^*}.(x - F^*) - \frac{\delta^0}{k}$$
$$z = \frac{kC'}{n^*}.(x - F^*) - \frac{\gamma^0}{k}$$

7.

Durch Benutzung der Punkte E, E^* lässt sich die Abhängigkeit des letzten Weges des Lichtstrahls von dem ersten einfach so ausdrücken: der letzte Weg hat gegen den Punkt E^* dieselbe Lage, welche der nur einmal gebrochene Lichtstrahl gegen E haben würde, wenn in E sich eine brechende Fläche mit dem Halbmesser $\frac{n^0-n^*}{k}$ befände, durch welche der Lichtstrahl aus dem ersten Mittel unmittelbar in das letzte Mittel überginge. Dies gilt für den Fall, wo das erste und das letzte Mittel ungleich sind. Sind sie hingegen gleich, oder $n^* = n^0$, wie bei Brechung durch ein oder mehrere Linsengläser, so hat der letzte Weg gegen E^* dieselbe Lage, welche er gegen E vermöge der Brechung durch eine in E befindliche unendlich dünne Linse von der Brennweite $-\frac{n^0}{k}$ haben würde. Mit andern Worten: es ist verstattet, anstatt des Überganges aus dem ersten Mittel in das letzte vermöge mehrerer Brechungen, den Übergang entweder durch eine einzige Brechung, oder durch eine einzige Linse von unendlich kleiner Dicke zu substituiren, je nachdem das erste und das letzte Mittel ungleich oder gleich sind, indem man im ersten Fall der brechenden Fläche den Halbmesser $\frac{n^0-n^*}{k}$, im zweiten der Linse die Brennweite $-\frac{n^0}{k}$ gibt, die brechende Fläche oder die Linse in E annimmt, und in beiden Fällen die Lage des ausfahrenden Strahls so viel verschiebt, als die Entfernung des Punktes E^* von E beträgt. Das Zeichen des Halbmessers der brechenden Fläche ist übrigens so zu verstehen, wie oben Art. 1, und das Zeichen der Brennweite so, wie weiter unten Art. 9 bemerkt werden wird.

Wegen dieser Bedeutsamkeit der Punkte E, E^* scheinen diese eine besondere Benennung wohl zu verdienen: ich werde sie die *Hauptpunkte* des Systems von Mitteln, oder der Linse, oder des Systems von Linsen, worauf sie sich beziehen, nennen; E den ersten, E^* den zweiten Hauptpunkt. Unter Ebenen der Hauptpunkte werden die durch dieselben normal gegen die Axe der x gelegten Ebenen verstanden werden.

8.

Rücksichtlich der Punkte F, F^* zeigen die Formeln des 6. Artikels, dass allen einfallenden Lichtstrahlen, die durch den Punkt F gehen, ausfahrende entsprechen, die mit der Axe parallel sind; einfallenden hingegen, die mit der Axe parallel sind, solche ausfahrende, die sich in dem Punkte F^* kreuzen; für

Strahlen, die von der entgegengesetzten Seite herkommen, vertauschen diese Punkte ihre Functionen. Wenn wir also dem für einzelne Linsen bestehenden Sprachgebrauche eine erweiterte Ausdehnung geben, so können F, F^* die Brennpunkte des Systems von Mitteln oder von Linsen, worauf sie sich beziehen, genannt werden, F der erste, F^* der zweite; die durch diese Punkte normal gegen die Axe der x gelegten Ebenen mögen die Brennpunktsebenen heissen. Jene Formeln des 6. Art. zeigen zugleich, dass allen Strahlen, die sich in irgend einem andern Punkte der ersten Brennpunktsebene kreuzen, ausfahrende entsprechen, die gegen die Axe geneigt, aber unter sich parallel sind, und umgekehrt, dass allen unter sich aber nicht mit der Axe parallelen einfallenden Strahlen solche ausfahrende entsprechen, die sich in einem von F^* verschiedenen Punkte der zweiten Brennpunktsebene kreuzen.

9.

Mit Hülfe dieser vier Ebenen gelangen wir zu einer sehr einfachen Construction für die Lage des ausfahrenden Strahls.

Es schneide der einfallende Strahl die erste Brennpunktsebene in dem Punkte (1), die erste Hauptebene in dem Punkte (2); eine Parallele mit (1)(2) durch F gezogen treffe die erste Hauptebene in (3); eine Parallele mit der Axe durch (2) treffe die zweite Hauptebene in (4); endlich eine Parallele mit der Axe durch (3) treffe die zweite Brennpunktsebene in (5). Dann gibt (4)(5) oder (5)(4) die Lage des ausfahrenden Strahls. Es sind nemlich die Werthe der Coordinaten

für	x	y	z
(1)	F	B'	C'
(2)	E	B	C
F	F	0	0
(3)	E	$B-B'$	$C-C'$
(4)	E^*	B	C
(5)	F^*	$B-B'$	$C-C'$

Aus den Formeln des 6. Art. folgt also, dass der ausfahrende Strahl durch (4) und (5) geht; das erstere unmittelbar, das andere, weil

$$B-B' = \frac{\beta^0}{n^0}(E-F) = -\frac{\beta^0}{k}$$
$$C-C' = \frac{\gamma^0}{n^0}(E-F) = -\frac{\gamma^0}{k}$$

In dem gewöhnlichsten Falle, wo $n^* = n^0$, also $F^*-E^* = E-F$, wird die Construction noch einfacher, weil der Punkt (3) überflüssig wird; man braucht nur (1), (2), (4) wie vorhin zu bestimmen, und (4)(5) mit (1)E parallel zu ziehen.

Geht die Richtung des einfallenden Strahls durch E, so geht allemal die Richtung des ausfahrenden durch E^*, und ist, in dem Falle, wo $n^* = n^0$ ist, zugleich jener parallel. Man pflegt (bei einfachen Linsen) einen solchen Strahl einen Hauptstrahl zu nennen.

Die Entfernungen der zweiten Brennpunktsebene von der zweiten Hauptebene, und der ersten Hauptebene von der Ebene des ersten Brennpunkts, oder die Grössen $-\frac{n^*}{k}$, $-\frac{n^0}{k}$ könnte man die *Brennweiten* des Systems der Mittel nennen, wenn es nicht angemessener schiene, den Gebrauch dieser Benennung auf den Fall zu beschränken, wo das letzte Mittel dasselbe ist, wie das erste, also jene Entfernungen unter sich gleich sind. Um dem gewöhnlichen Sprachgebrauche conform zu bleiben, sehen wir die Brennweite als positiv an, wenn dem ersten Hauptpunkte eine grössere Coordinate entspricht, als dem ersten Brennpunkte, so, dass die Brennweite immer durch $-\frac{n^0}{k} = -\frac{n^*}{k}$ ausgedrückt wird.

10.

In den oben Art. 4 für den Platz des Bildes gegebenen Formeln ist es, wie man leicht sieht, verstattet, anstatt N^0, N^* andere Punkte zu setzen, wenn man nur zugleich anstatt g, h, k, l die entsprechenden G, H, K, L substituirt. Indem wir dazu die Hauptpunkte wählen, erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$\xi^* = E^* - \frac{n^*(E-\xi)}{n^0+k(E-\xi)}$$
$$\eta^* = \frac{n^0\eta}{n^0+k(E-\xi)}$$
$$\zeta^* = \frac{n^0\zeta}{n^0+k(E-\xi)}$$

Der ersten Formel kann man auch folgende Gestalt geben

$$\frac{n^*}{\xi^*-E^*} + \frac{n^0}{E-\xi} = -k$$

Wählen wir die Brennpunkte, so erhalten wir

$$\xi^* = F^* + \frac{n^0 n^*}{k\,k(F-\xi)}$$
$$\eta^* = \frac{n^0\eta}{k(F-\xi)}$$
$$\zeta^* = \frac{n^0\zeta}{k(F-\xi)}$$

Wegen des häufigen Gebrauchs mögen die Formeln auch noch in der Gestalt hier stehen, die sie annehmen, wenn das erste und das letzte Mittel gleich sind, und die Brennweite mit φ bezeichnet wird.

$$\frac{1}{\xi^*-E^*} + \frac{1}{E-\xi} = \frac{1}{\varphi}$$
$$(\xi^*-F^*)(F-\xi) = \varphi\varphi$$
$$\eta^* = -\frac{\varphi\eta}{F-\xi} = -\frac{\eta(\xi^*-F^*)}{\varphi}$$
$$\zeta^* = -\frac{\varphi\zeta}{F-\xi} = -\frac{\zeta(\xi^*-F^*)}{\varphi}$$

11.

Die vier Hülfspunkte E, E^*, F, F^* verlieren ihre Anwendbarkeit in dem besondern Falle, wo $k = 0$ ist, also jene Punkte als unendlich entfernt von den brechenden Flächen betrachtet werden müssten. Man kann sich in diesem Falle unmittelbar an die allgemeinen zur Auflösung der Hauptaufgaben oben mitgetheilten Formeln halten, welche hier folgende Gestalt annehmen.

Wenn die Gleichungen für den einfallenden Strahl so ausgedrückt sind

$$y = \frac{\beta^0}{n^0}(x-N^0) + b^0$$
$$z = \frac{\gamma^0}{n^0}(x-N^0) + c^0$$

so sind die für den ausfahrenden

$$y = \frac{l\beta^*}{n^*}.(x-N^*) + gb^0 + h\beta^0$$
$$z = \frac{l\gamma^0}{n^*}.(x-N^*) + gc^0 + h\gamma^0$$

Setzt man zur Abkürzung

$$N^* - \frac{hn^*}{l} = N^{**}$$

oder, was dasselbe ist, weil $gl = 1$,

$$N^* - ghn^* = N^{**}$$

so erscheinen diese Formeln noch einfacher, nemlich

$$y = \frac{l\eta^*}{n^*}.(x - N^{**}) + gb^0$$
$$z = \frac{l\zeta^*}{n^*}.(x - N^{**}) + gc^0$$

Für den Platz des Bildes desjenigen Punktes, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, erhalten wir die Coordinaten

$$\xi^* = N^* - ghn^* - \frac{n^*}{n^0}gg(N^0 - \xi)$$
$$= N^{**} - \frac{n^*}{n^0}gg(N^0 - \xi)$$
$$\eta^* = g\eta$$
$$\zeta^* = g\zeta$$

Es erhellt hieraus, dass der Punkt der Axe der x, welcher in Gemässheit der von uns immer gebrauchten Bezeichnungsart mit N^{**} zu bezeichnen ist, das Bild des Punktes N^0 vorstellt, und dass das Linearverhältniss der Theile eines zusammengesetzten Bildes zum Object constant, nemlich wie g zu 1 oder wie 1 zu l ist.

12.

Der im vorhergehenden Artikel betrachtete Fall kommt vor bei einem Fernrohre, dessen Gläser für ein weitsichtiges Auge und für das deutliche Sehen unendlich entfernter Gegenstände gestellt sind. Aus obigen Formeln erhellt, dass die Richtung des ausfahrenden Strahls bloss von der Richtung des einfallenden abhängt, dass also parallel unter sich einfallenden Strahlen auch parallel ausfahrende entsprechen, und dass die Tangente der Neigung der erstern gegen die Axe sich zu der Tangente der Neigung der letztern verhält, wie 1 zu l. Die Zahl $l = \frac{1}{g}$ ist also das, was man die Vergrösserung des Fernrohrs nennt, und ihr positives oder negatives Zeichen bedeutet die aufrechte oder verkehrte Erscheinung. Lässt man die einfallenden und ausfahrenden Strahlen ihre Funktionen vertauschen, indem man den Gegenständen die Ocularseite zuwendet, so erscheinen sie in demselben Verhältnisse verkleinert, und hierauf gründet sich das eben so bequeme als scharfe Verfahren zur Bestimmung der Vergrösserung eines Fern-

rohrs, welches ich 1823 im 2. Bande der *Astronomischen Nachrichten* mitgetheilt habe.

Eine andere Methode, die Vergrösserung zu bestimmen, beruht auf der Vergleichung eines Gegenstandes mit seinem Bilde nach dem linearen Verhältnisse. Ramsdens Dynameter ist nichts anderes, als eine Vorrichtung, den Durchmesser des in N^{**} fallenden Bildes von der kreisrunden Begrenzung des Objectivs zu messen, wobei man sich natürlich erst vergewissern muss, dass dieses Bild wirklich erscheint und nicht etwa durch eine innere Blendung verdeckt ist. Auch muss das Bild ein reelles sein, wozu erforderlich ist, dass ghn^* negativ wird: bei einem Galileischen Fernrohr, wo dieses Bild nur ein virtuelles ist, würde man ein genaues Resultat nur mit einem mikrometrischen Mikroskope erlangen können, welches auch in *allen* Fällen, wo man eine grössere Schärfe wünscht, den Vorzug verdienen würde. Übrigens erhellt aus dem vorhergehenden Artikel, dass eben so gut ein schickliches vom Objectiv entferntes Object gebraucht werden kann, so lange nur die Entfernung nicht so gross wird, dass das Bild aufhört ein reelles oder mit dem Mikroskope erreichbares zu sein. Endlich mag noch bemerkt werden, dass der Punkt N^{**} derjenige ist, welcher in der Theorie der Fernröhre mit der Benennung *Ort des Auges* belegt wird.

13.

Um die allgemeinen Vorschriften des 2. Artikels auf den Fall einer einfachen Glaslinse anzuwenden, bezeichnen wir das Brechungsverhältniss beim Übergange aus Luft in Glas mit $n:1$; die Halbmesser der ersten und zweiten Fläche mit $(n-1)f$ und $(n-1)f'$; die Dicke der Linse mit ne. Wir haben also anstatt der dortigen Bezeichnungen

n^0	*hier* 1
n'	n
n''	1
t'	e
u^0	$-\frac{1}{f}$
u'	$-\frac{1}{f'}$

und folglich

$$g = 1+u^0t' = \frac{f-e}{f}$$
$$h = t' = e$$
$$k = u^0+u'+t'u^0u' = -\frac{f+f'-e}{ff'}$$
$$l = 1+u't' = \frac{f'-e}{f'}$$

Für die Brennweite φ haben wir also nach Art. 9

$$\varphi = \frac{ff'}{f+f'-e}$$

für die beiden hier mit E, E' zu bezeichnenden Hauptpunkte nach Art. 6

$$E = N^0+\frac{ef}{f+f'-e} = N^0+\frac{e\varphi}{f'}$$
$$E' = N'-\frac{ef'}{f+f'-e} = N'-\frac{e\varphi}{f}$$

und für die beiden Brennpunkte F, F'

$$F = E-\varphi = N^0-\frac{f(f'-e)}{f+f'-e}$$
$$F' = E'+\varphi = N'+\frac{f'(f-e)}{f+f'-e}$$

Für den Durchschnittspunkt der (nöthigenfalls vorwärts oder rückwärts verlängerten) geraden Linie, welche ein Hauptstrahl im Innern der Linse beschreibt, mit der Axe findet man leicht

$$x = N^0+\frac{nef}{f+f'} = N'-\frac{nef'}{f+f'}$$

Diesen Punkt, welcher also von der Neigung des Hauptstrahls unabhängig ist, nennen einige Schriftsteller den optischen Mittelpunkt der Linse, eine Auszeichnung, welche dieser sonst gar keine merkwürdigen Eigenschaften darbietende Punkt kaum verdient haben möchte, und die hie und da zu dem Irrthum verleitet zu haben scheint, als ob die einfachen Relationen zwischen Bild und Object, welche bei einer unendlich dünnen Linse Statt finden, sich auf eine Linse von endlicher Dicke bloss durch Beziehung auf jenen Mittelpunkt übertragen liessen, während diese Übertragung, wie oben gezeigt ist, nur dann gültig ist, wenn das Object auf den ersten, das Bild auf den zweiten Hauptpunkt bezogen wird. Bei einem Systeme von mehrern Linsen, also schon bei einem achromatischen Doppelobjective, kann ohnehin von einem Mittelpunkte in jenem Sinne gar nicht die Rede sein. Will man die Benennung beibehalten, so würde ich für angemessener halten, sie demjenigen Punkte beizulegen, welcher zwischen den beiden

Hauptpunkten (mithin auch zwischen den beiden Brennpunkten) in der Mitte liegt, und der mit jenem Punkte nur dann zusammenfällt, wenn die Linse gleichseitig ist. Dieser Punkt hat die praktisch nützliche Eigenschaft, durch Umwenden der Linse leicht und mit Schärfe bestimmbar zu sein; denn offenbar ist es dieser Punkt, der beim Umwenden wieder den vorigen Platz einnehmen muss, wenn der Platz des Bildes von einem festen Objecte ungeändert bleiben soll.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass die Entfernung der beiden Hauptpunkte von einander

$$E'-E = ne-\frac{e(f+f')}{f+f'-e} = (n-1)e-\frac{ee}{f+f'-e}$$

wird, also, insofern gewöhnlich e gegen $f+f'-e$ sehr klein ist, von $(n-1)e$ oder von der durch $\frac{n-1}{n}$ multiplicirten Dicke der Linse kaum merklich verschieden ist.

14.

An die Stelle der allgemeinen Formeln des 2. Art., durch welche aus dem Wege des einfallenden Lichtstrahls der Weg des ausfahrenden bestimmt wird, lassen sich für den Fall eines Systems von Linsen auf einer gemeinschaftlichen Axe bequemere setzen, indem man, anstatt der Halbmesser der einzelnen brechenden Flächen und ihrer gegenseitigen Abstände, die Brennweiten der einzelnen Linsen und die Entfernungen ihrer zweiten Hauptpunkte von den ersten der folgenden Linsen einführt. Die neuen Formeln werden denen des 2. Art. ganz ähnlich, enthalten aber nur halb so viele Elemente. Da ihre Ableitung aus dem Vorhergehenden sehr leicht ist, so wird es hinreichend sein, sie in gebrauchfertiger Form hieher zu setzen.

Wir bezeichnen die Brennweiten der einzelnen auf einander folgenden Linsen mit φ^0, φ', φ'' u. s. f.; ihre Hauptpunkte hier, abweichend von der bisherigen Bezeichnungsart, die ersten mit E^0, E', E'' u. s. f., die zweiten mit I^0, I', I'' u. s. f. Zur Abkürzung schreiben wir

$$-\frac{1}{\varphi^0} = u^0, \qquad -\frac{1}{\varphi'} = u', \qquad -\frac{1}{\varphi''} = u'' \text{ u. s. f.}$$
$$E'-I^0 = t', \quad E''-I' = t'', \quad E'''-I'' = t''' \text{ u. s. f.}$$

die letzten Glieder in diesen Reihen mögen als solche durch ein Sternchen ausgegezeichnet werden.

Setzt man nun die Gleichungen für den einfallenden Strahl in die Form

$$y = \mathfrak{b}^0(x - E^0) + b^0$$
$$z = \gamma^0(x - E^0) + c^0$$

für den ausfahrenden hingegen in folgende

$$y = \mathfrak{b}^*(x - I^*) + b^*$$
$$z = \gamma^*(x - I^*) + c^*$$

so wird, wenn die vier Grössen g, h, k, l durch Formeln bestimmt werden, die mit den im 2. Art. als (5) bezeichneten ganz identisch sind,

$$b^* = gb^0 + h\mathfrak{b}^0, \qquad c^* = gc^0 + h\gamma^0$$
$$\mathfrak{b}^* = kb^0 + l\mathfrak{b}^0, \qquad \gamma^* = kc^0 + l\gamma^0$$

Für die beiden Hauptpunkte des Linsensystems, als Ganzes betrachtet, wird

$$\text{für den ersten} \quad x = E^0 - \frac{1-l}{k}$$
$$\text{für den zweiten} \quad x = I^* + \frac{1-g}{k}$$

Ferner wird für die beiden Brennpunkte des Linsensystems

$$\text{für den ersten} \quad x = E^0 + \frac{l}{k}$$
$$\text{für den zweiten} \quad x = I^* - \frac{g}{k}$$

$$\text{die Brennweite selbst ist} \quad = -\frac{1}{k}$$

Die Formeln für den Fall, wo das System nur aus zwei Linsen besteht, verdienen noch besonders hergeschrieben zu werden. Man hat nemlich

$$g = \frac{\varphi^0 - t'}{\varphi^0}$$
$$h = t'$$
$$k = -\frac{\varphi^0 + \varphi' - t'}{\varphi^0 \varphi'}$$
$$l = \frac{\varphi' - t'}{\varphi'}$$

Die Werthe von x für die beiden Hauptpunkte sind

$$E^0 + \frac{t'\varphi^0}{\varphi^0 + \varphi' - t'} \quad \text{und} \quad I' - \frac{t'\varphi'}{\varphi^0 + \varphi' - t'}$$

und die Brennweite

$$= \frac{\varphi^0 \varphi'}{\varphi^0 + \varphi' - t'}$$

Man sieht, dass diese Formeln denen ganz analog sind, die im 13. Artikel für die Bestimmung der Hauptpunkte und der Brennweite einer einfachen Linse gegeben sind, indem an die Stelle der dortigen f^0, f', e hier die Grössen φ^0, φ', t' treten.

Die Entfernung der beiden Hauptpunkte von einander wird in dem Fall zweier Linsen

$$= I' - E^0 - \frac{t'(\varphi^0 + \varphi')}{\varphi^0 + \varphi' - t'}$$
$$= I^0 - E^0 + I' - E' - \frac{t't'}{\varphi^0 + \varphi' - t'}$$

Ist t' sehr klein, wie bei achromatischen Doppellinsen von der gewöhnlichen Einrichtung immer der Fall ist, so wird das letzte Glied unbedeutend, und daher die Entfernung der beiden Hauptpunkte von einander für eine solche Doppellinse als Ganzes betrachtet sehr nahe der Summe der beiden Werthe gleich, welche diese Entfernung in den Linsen, einzeln genommen, hat.

Übrigens ist von selbst klar, dass die sämmtlichen in dem gegenwärtigen Artikel aufgeführten Formeln ohne alle Veränderung auf den Fall übertragen werden können, wo anstatt einfacher Linsen partielle Systeme von Linsen zu Einem ganzen Systeme vereinigt werden sollen.

15.

Die optischen Erscheinungen sowohl durch eine einfache Linse, als durch ein System von mehreren auf gemeinschaftlicher Axe, hängen, wie wir gezeigt haben, von drei Elementen ab, welche durch das Brechungsverhältniss (oder durch die Brechungsverhältnisse, wenn sie für die verschiedenen Linsen verschieden sind), und die Lagen und Halbmesser der brechenden Flächen bestimmt sind: da jedoch diese Grössen gewöhnlich unmittelbar nicht bekannt sind, so bleibt noch übrig, einiges über die Methode zu sagen, durch welche umgekehrt aus beobachteten Erscheinungen jene drei Elemente abgeleitet werden können. Wir bezeichnen die verschiedenen hiebei in Frage kommenden Punkte der Axe auf folgende Weise:

ξ ein Object; ξ' dessen Bild; F der erste, F' der zweite Brennpunkt; E der erste, E' der zweite Hauptpunkt; endlich D ein mit der Linse (oder dem Linsensystem) in fester Verbindung stehender Punkt. Mit denselben Buchstaben werden, wie immer, die Coordinaten dieser Punkte in jedem Versuche bezeichnet. Wir setzen ferner die Brennweite $= f$, und die Entfernung des Punktes D von den Brennpunkten, $D-F=p$, $F'-D=q$. Die drei Grössen f, p, q können als die Elemente der Linse betrachtet werden, und zu ihrer Ausmittelung werden also immer drei Versuche erforderlich sein, indem in drei verschiedenen Lagen des Objects und seines Bildes gegen die Linse die Entfernungen derselben von dem Punkte D gemessen werden müssen, welche Aufgabe wir zuvörderst ganz allgemein auflösen wollen.

Die Werthe von $D-\xi$ und $\xi'-D$ seien in einem Versuche a, b; in einem zweiten a', b'; in einem dritten a'', b''. Die allgemeine Gleichung

$$(F-\xi)(\xi'-F') = ff$$

gibt uns demnach

$$\begin{aligned}(a-p)(b-q) &= ff\\ (a'-p)(b'-q) &= ff\\ (a''-p)(b''-q) &= ff\end{aligned}$$

woraus durch Elimination leicht gefunden wird

$$\begin{aligned}p &= a-\frac{(a'-a)(a''-a)(b'-b'')}{R}\\ q &= b-\frac{(b-b')(b-b'')(a''-a')}{R}\\ ff &= \frac{(a'-a)(a''-a)(a''-a')(b-b')(b-b'')(b'-b'')}{RR}\end{aligned}$$

indem zur Abkürzung

$$(a''-a)(b-b')-(a'-a)(b-b'') = R$$

geschrieben wird. Man kann R auch in folgende Form setzen

$$\begin{aligned}R &= (a''-a')(b-b')-(a'-a)(b'-b'')\\ &= (a''-a')(b-b'')-(a''-a)(b'-b'')\end{aligned}$$

so wie p und q in folgende

$$\begin{aligned}p &= a'-\frac{(a'-a)(a''-a')(b-b'')}{R}\\ &= a''-\frac{(a''-a)(a''-a')(b-b')}{R}\\ q &= b'-\frac{(b-b')(b'-b'')(a''-a)}{R}\\ &= b''-\frac{(b-b'')(b'-b'')(a'-a)}{R}\end{aligned}$$

16.

Der allgemeinen im vorhergehenden Artikel gegebenen Auflösung müssen noch einige Bemerkungen beigefügt werden.

I. Es ist vorausgesetzt, dass in den drei Versuchen das Object auf einer und derselben Seite der Linse liegt. Findet man zweckmässig, in einem der Versuche die Linse in verkehrter Lage anzuwenden, so kann man sich denselben so vorstellen, als ob das Bild der Gegenstand und der Gegenstand das Bild wäre, wodurch dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt wird.

II. Für sich allein betrachtet, lässt die Formel für ff noch unbestimmt, ob f positiv oder negativ zu nehmen sei: dies entscheidet sich aber schon durch die aufrechte oder verkehrte Stellung des Bildes, indem $\xi'-F'$ und f im ersten Fall entgegengesetzte, im zweiten gleiche Zeichen haben müssen. Auch darf nicht unbemerkt bleiben, dass bei aller Allgemeingültigkeit der analytischen Auflösung doch die praktische Anwendbarkeit auf den Fall wirklicher Bilder (also für einzelne Linsen auf positive Brennweiten) beschränkt bleibt, wenn nicht besondere Hülfsmittel zur Bestimmung des Platzes virtueller Bilder zugezogen werden.

III. Da die Ausführung der Versuche immer nur einen gewissen beschränkten Grad von Schärfe zulässt, so ist es für die Zuverlässigkeit der Resultate keineswegs gleichgültig, was für Combinationen gewählt werden. Im Allgemeinen kann als Regel gelten, dass durch drei Versuche, von denen zwei unter wenig verschiedenen Umständen gemacht sind, jedenfalls nicht alle drei Elemente mit Schärfe bestimmt werden können.

17.

An einer einfachen Linse sowohl, als an einer solchen, die aus zweien oder mehrern sehr nahe zusammenliegenden zusammengesetzt ist (wie an achromatischen Objectiven von der gewöhnlichen Einrichtung), stehen die beiden Haupt-

punkte in geringer Entfernung von einander. Dürfte man diese Entfernung $E'-E=\lambda$ wie eine bekannte Grösse betrachten, so würden *zwei* Versuche zureichend sein, indem die Gleichung

$$p+q=2f+\lambda$$

die Stelle des dritten Versuches vertritt. Verbindet man mit derselben die beiden andern

$$(a-p)(b-q)=ff$$
$$(a'-p)(b'-q)=ff$$

so erhält man nach der Elimination von p und q zur Bestimmung von f die Gleichung

$$\frac{(a'+b'-a-b)^2}{(a'-a)(b-b')}\cdot ff+2(a+b+a'+b'-2\lambda)f-(a+b'-\lambda)(a'+b-\lambda)=0$$

Diese quadratische Gleichung geht in eine lineare über, wenn $a'+b'-a-b=0$ wird, d. i. wenn die beiden Versuche so angeordnet sind, dass die Entfernung des Bildes vom Objecte in beiden dieselbe bleibt, während die Linse darin zwei verschiedene Stellen einnimmt. Es sei diese Entfernung $=c$, also $a=c-b$, $a'=c-b'$; dadurch wird

$$4(c-\lambda)f=(c-\lambda+b'-b)(c-\lambda-b'+b)$$

oder

$$f=\tfrac{1}{4}(c-\lambda)-\frac{(b'-b)^2}{4(c-\lambda)}$$

Für jeden vorgeschriebenen Werth von c muss nemlich $F-\xi$ der Gleichung

$$F-\xi+\frac{ff}{F-\xi}=F-\xi+\xi'-F'=c-2f-\lambda$$

Genüge leisten, deren zwei Wurzeln

$$F-\xi=\tfrac{1}{2}(c-2f-\lambda)+\tfrac{1}{2}\sqrt{(c-4f-\lambda)(c-\lambda)}$$
$$F-\xi=\tfrac{1}{2}(c-2f-\lambda)-\tfrac{1}{2}\sqrt{(c-4f-\lambda)(c-\lambda)}$$

reell und ungleich sind, wenn c grösser ist als $4f+\lambda$, so dass es dann für ein festes Object ξ immer zwei verschiedene Lagen der Linse gibt, bei welchen das Bild mit dem Punkte $\xi+c$ zusammenfällt. Das Product dieser beiden Werthe von $F-\xi$, d. i. $(a-p)(a'-p)$ wird $=ff$, woraus zugleich erhellt,

dass $a'-p=b-q$ und $b'-q=a-p$ wird, folglich

$$p=\tfrac{1}{2}(2f+c+\lambda-b-b')$$
$$q=\tfrac{1}{2}(2f-c+\lambda+b+b')$$
$$E=D+\tfrac{1}{2}(b+b'-c)-\tfrac{1}{2}\lambda$$
$$E'=D+\tfrac{1}{2}(b+b'-c)+\tfrac{1}{2}\lambda$$

18.

Bei derjenigen Stellung der Linse, wo $F-\xi=f$ wird, ist $\xi'-\xi=4f+\lambda$, oder das Bild in der kleinsten Entfernung vom Gegenstande; es entfernt sich von demselben, sobald man die Linse aus jener Stellung nach der einen oder nach der andern Seite wegrückt, aber offenbar anfangs sehr langsam. Es folgt daraus, dass wenn für c ein die Grösse $4f+\lambda$ nur wenig überschreitender Werth gewählt ist, die Versuche zur Ausmittelung der beiden erforderlichen Stellungen der Linse oder der Werthe von b und b' nur eine vergleichungsweise geringe Schärfe zulassen. Diese Unsicherheit fällt in ihrer ganzen Stärke auf die Bestimmung von E und E', daher zu *diesem* Zweck die Anwendung des Verfahrens unter solchen Umständen nicht wohl zu gebrauchen ist. Anders aber verhält es sich, wenn es nur darauf ankommt, die Brennweite zu bestimmen, wo die Schärfe durch jenen Umstand Nichts verliert, weil in den Ausdruck für f nur das Quadrat von $b'-b$ eintritt. Die Ausübung des Verfahrens ist überdies in diesem Falle um so bequemer, weil ausser der Distanz c nur die Grösse der Verschiebung der Linse $b'-b$ gemessen zu werden braucht, also die absoluten Werthe von b und b' unnöthig sind.

19.

Wenn man λ ganz vernachlässigt, also

$$f=\tfrac{1}{4}c-\frac{(b'-b)^2}{4c}$$

setzt, so kommt das beschriebene Verfahren mit demjenigen überein, welches Bessel im 17. Bande der Astronomischen Nachrichten vorgeschlagen, und auf die Bestimmung der Brennweite des Objectivs des Königsberger Heliometers angewandt hat. Die strenge Formel zeigt, dass bei der Vernachlässigung von λ die Brennweite um

$$\tfrac{1}{2}\lambda+\frac{\lambda(b'-b)^2}{4c(c-\lambda)}$$

zu gross gefunden wird, wo der zweite Theil unter den erwähnten Umständen als unmerklich betrachtet werden kann. Zur Gewinnung eines der Schärfe, welche das Verfahren an sich verstattet, angemessenen Resultats bleibt daher die Berücksichtigung von λ wesentlich nothwendig: nur hat es einige Schwierigkeit, sich eine genaue Kenntniss dieser Grösse zu verschaffen. Für eine einfache Linse wird es hinlänglich sein, aus der gemessenen Dicke derselben und dem nothdürftig bekannten Brechungsverhältnisse für λ den oben Art. 13 gegebenen Näherungswerth zu berechnen. Auch für eine achromatische Doppellinse mag man allenfalls, in sofern man sich eine genaue Kenntniss von der Dicke jedes einzelnen Bestandtheils verschaffen kann, sich des oben Art. 14 angeführten genäherten Werthes bedienen. Um wenigstens ungefähr eine Vorstellung von dem Einflusse, welchen die Vernachlässigung von λ haben kann, zu erhalten, wollen wir, Beispiels halber, ein Objectiv betrachten, wo die Dicke der Kronglaslinse 3 Linien beträgt, und das Brechungsverhältniss für die erstere zu 1,528, für die andere zu 1,618 annehmen. Dadurch wird die Entfernung der beiden Hauptpunkte von einander näherungsweise

für die Kronglaslinse	2,42
für die Flintglaslinse	1,15
und für die zusammengesetzte Linse	3,57 Linien

also die Brennweite um 0,89 Linien zu gross. An einem Objective von 8 Fuss Brennweite, dem die vorausgesetzten Dimensionen zukämen, würde also der Fehler etwa $\frac{1}{1300}$ des Ganzen betragen.

20.

Wenn man die im vorhergehenden Art. angegebene Bestimmungsart von λ nicht anwenden kann, oder sich nicht damit begnügen will, so scheint folgender Weg am zweckmässigsten, um durch unmittelbare Versuche dazu zu gelangen.

Man bestimme den Platz des Bildes eines sehr entfernten Gegenstandes (so gut man kann in der Axe der Linse) relativ gegen den Punkt D. In sofern man die Entfernung des Objects als unendlich gross betrachten kann, fällt dieses Bild

in F', und der gemessene Abstand $F'-D$ gibt also unmittelbar q. Man wiederhole den Versuch, indem man die Linse umkehrt, wo also das Bild in F fallen, und seine Entfernung von D den Werth von p geben wird. Für den dritten Versuch bringe man das Object (auf der Seite von F) der Linse möglichst nahe, bestimme die Entfernung des Bildes von diesem Object $=\xi'-\xi$, und zugleich die Entfernung $D-\xi=a''$, und setze $\xi'-D=\xi'-\xi-a''=b''$. Man hat folglich

$$(p-a'')(q-b'')=ff$$

oder

$$\lambda=p+q-2\sqrt{(p-a'')(q-b'')}$$

Hat man die Messungen in allen drei Versuchen mit grösster Schärfe ausführen können, so sind dadurch allein schon alle drei Elemente p, q, f hinlänglich genau bestimmt, und es bedarf keiner andern weiter. Wünscht man aber f mit einer noch grössern Schärfe zu erhalten, so hat man jene Versuche nur als eine Vorbereitung zu dem Verfahren des 18. Artikels zu betrachten, die den Werth von λ liefert. Um klarer zu übersehen, von welchen Momenten die Schärfe in der so erhaltenen Bestimmung von λ hauptsächlich abhängt, setzen wir obige Formel für λ in folgende Gestalt

$$\lambda=a''+b''+\frac{(p-a''-\sqrt{(p-a'')(q-b'')})^2}{p-a''}$$

und erwägen, dass $p-a''-\sqrt{(p-a'')(q-b'')}$ den Abstand des Objects im dritten Versuche vom ersten Hauptpunkte, $p-a''$ hingegen den Abstand jenes Objects vom ersten Brennpunkte vorstellt. Es erhellt daraus, dass unter den Statt habenden Umständen der letzte Theil der Formel für λ nur sehr klein wird, und sein berechneter Werth von kleinen Ungenauigkeiten in den Werthen von p, q, a'', b'' nur wenig afficirt wird, also die Schärfe der Bestimmung von λ hauptsächlich nur von der Schärfe der Messung von $\xi'-\xi=a''+b''$ abhängt.

21.

In Beziehung auf das im vorhergehenden Artikel angegebene Verfahren verdienen ein Paar Bemerkungen hier noch einen Platz.

I. Zur Ausführung des dritten Versuchs, wo das Bild nur ein virtuelles wird, reichen die sonst anwendbaren Mittel nicht aus: folgende Methode verei-

nigt aber Bequemlichkeit und Schärfe. Auf einer ebenen Fläche wird eine Kreislinie beschrieben, so gross oder wenig grösser als der vorspringende Rand der Fassung des Glases, und der Mittelpunkt dieses Kreises durch zwei zarte Kreuzlinien bezeichnet. Das Glas wird mit der Fassung so auf die Fläche gelegt, dass jene mit der Kreislinie concentrisch ist; dann ein zusammengesetztes an einem festen Stative befindliches und mit einem Fadenkreuze versehenes Mikroskop senkrecht darüber gestellt, und in seiner Hülse so verschoben, bis das Bild der Kreuzlinie genau mit dem Fadenkreuze zusammenfällt; endlich wird das Glas weggenommen, und das Mikroskop durch Verschieben in der Hülse der Ebene genähert, bis das Bild der Kreuzlinie abermals mit dem Fadenkreuze des Mikroskops zusammenfällt. Die leicht auf irgend eine Weise scharf zu messende Grösse der letztern Verschiebung ist die Entfernung des Objects (der Kreuzlinie) von seinem durch die Glaslinie producirten Bilde $= \xi' - \xi$. Den Punkt der Axe der Linse, welcher in der den vorspringenden Rand der Fassung berührenden Ebene liegt, kann man als den festen Punkt D selbst annehmen, in welchem Falle $a'' = 0$, $b'' = \xi' - \xi$ wird, oder, wenn ein anderer Punkt D gewählt war, diesen mit jenem durch leicht sich darbietende Mittel vergleichen, um a'' zu finden.

II. Wenn die Entfernung des für den ersten und zweiten Versuch benutzten Gegenstandes, zwar gross, aber doch nicht gross genug ist, um sein Bild als mit dem Brennpunkte ganz zusammenfallend betrachten zu können, so ist eine Reduction nöthig, welche man erhält, indem man das Quadrat der Brennweite mit der Entfernung des Gegenstandes dividirt, und diese Reduction ist von den Abständen des Bildes von dem Punkte D abzuziehen, um die Grössen q und p genau zu erhalten: offenbar ist dazu nur eine grob genäherte Kenntniss der Brennweite und der Entfernung nöthig, insofern letztere sehr gross ist. Indessen kann man diese Reduction eben so leicht durch directe strenge richtige Formeln bestimmen. Es sei für den ersten Versuch a der Werth von $D - \xi$, b der Werth von $\xi' - D$; für den zweiten Versuch hingegen (wo die Linse in verkehrter Stellung angewandt wird) bezeichne man die Entfernung $D - \xi$ mit b', und $\xi' - D$ mit a'. Auf diese Weise (die mit der Art. 16, I angegebenen auf Eins hinausläuft) erreichen wir den Vortheil, dass die für die drei Versuche Statt findenden Gleichungen

$$(a - p)(b - q) = ff$$
$$(b' - q)(a' - p) = ff$$
$$(a'' - p)(b'' - q) = ff$$

gleichlautend mit denen sind, von welchen wir im 15. Art. ausgingen, und also auch die durch Elimination daraus abgeleiteten Formeln ihre Gültigkeit behalten. Ist man bei der Ausführung des zweiten Versuchs so zu Werke gegangen, dass der Ort des Bildes im Raume derselbe ist wie im ersten Versuche (was leicht geschehen kann, obwohl der Erfolg bei der vorausgesetzten grossen Entfernung des Gegenstandes gar nicht merklich abgeändert wird, wenn man es damit nicht ängstlich genommen hat), so wird $a + b = b' + a'$, welche Grösse wir mit c bezeichnen, und die Formeln des 15. Art. erhalten dadurch noch einige Vereinfachung. Es wird nemlich, aus der zweiten Formel für p und der ersten für q,

$$p = a' - \frac{(a' - a'')(b - b'')}{c - a'' - b''}$$
$$q = b - \frac{(a' - a'')(b - b'')}{c - a'' - b''}$$

III. Wenn man auch das Verfahren des 20. Art. nicht zur vollständigen Bestimmung der Elemente gebrauchen, sondern die schärfste Bestimmung der Brennweite der Methode des 17. Art. vorbehalten will, so bleibt doch jenes zugleich das geeignetste, um die Lage der beiden Hauptpunkte festzusetzen. Es wird nemlich

$$E = D + \tfrac{1}{2}(q - p) - \tfrac{1}{4}\lambda = D + \tfrac{1}{2}(b - a') - \tfrac{1}{4}\lambda$$
$$E' = D + \tfrac{1}{2}(q - p) + \tfrac{1}{4}\lambda = D + \tfrac{1}{2}(b - a') + \tfrac{1}{4}\lambda$$

22.

Für eine einfache Linse und, allgemein zu reden, auch für ein System von Linsen kann man der Brennweite einen bestimmten Werth und den Haupt- und Brennpunkten bestimmte Plätze nur in sofern beilegen, als von Lichtstrahlen von bestimmter Brechbarkeit die Rede ist; für Strahlen von anderer Brechbarkeit erhalten diese Punkte andere Plätze und die Brennweite einen andern Werth, und das nicht homogene Licht von Gegenständen erleidet daher beim Durchgange durch Gläser eine Farbenzerstreuung. Durch eine Zusammensetzung zweier oder

mehrerer Linsen aus verschiedenen Glasarten lässt sich diese Farbenzerstreuung aufheben: zur Vollkommenheit eines achromatischen Objectivs wird aber erforderlich sein, dass Parallelstrahlen sich unabhängig von der Farbe in Einem Punkte vereinigen, und zwar nicht bloss solche, die parallel mit der Axe, sondern auch solche, die geneigt gegen die Axe einfallen, oder mit andern Worten, die verschiedenfarbigen Bilder eines ausgedehnten als unendlich entfernt betrachteten Gegenstandes müssen nicht bloss in Eine Ebene fallen, sondern auch gleiche Grösse haben. Die erste Bedingung beruhet auf der Identität des zweiten Brennpunkts für verschiedenfarbige Strahlen, die zweite auf der Gleichheit der Brennweite, und da diese die Entfernung des zweiten Brennpunkts vom zweiten Hauptpunkte ist, so kann man auch die beiden Bedingungen dadurch ausdrücken, dass beide Punkte zugleich für rothe und violette Strahlen dieselben sein müssen. Ist die erste Bedingung allein erfüllt, so geben die gegen die Axe geneigten Strahlen kein reines Bild; allein eine *sehr* geringe Ungleichheit der Brennweiten für verschiedenfarbige Strahlen wird immer als ganz unschädlich betrachtet werden dürfen.

In der Theorie der achromatischen Objective pflegt man nur die erste Bedingung zu berücksichtigen. Allein bei der gewöhnlichen Construction dieser Objective, wo die beiden Linsen entweder in Berührung oder in einem äusserst geringen Abstande von einander sich befinden, wird die Lage der Hauptpunkte von der ungleichen Brechbarkeit der Lichtstrahlen so wenig afficirt, dass die zweite Bedingung von selbst erfüllt ist, wenn nicht genau, doch so nahe, dass eine merkliche Unvollkommenheit nicht daraus entstehen kann: auch lässt sich, wenn man es der Mühe werth hält, die Dicke der Linsen so berechnen, dass eine genaue Identität des zweiten Hauptpunkts für ungleiche Strahlen Statt findet.

Anders verhält es sich hingegen, wenn die convexe Kronglaslinse von der concaven Flintglaslinse durch einen beträchtlichen Abstand getrennt ist. Es lässt sich leicht zeigen, dass bei solchen Bestimmungen für diesen Abstand und die Brennweiten der einzelnen Linsen, wo der zweite Brennpunkt dieses Linsensystems für verschiedenfarbige Strahlen derselbe bleibt, die Brennweite dieses Systems für die violetten Strahlen nothwendig grösser wird als für die rothen, und dass der Unterschied von derselben Ordnung ist wie derjenige, der (im umgekehrten Sinn) bei einfachen Linsen Statt findet. Dasselbe gilt auch noch, wenn (wie bei den sogenannten dialytischen Fernröhren geschieht) anstatt der zweiten Linse

eine Zusammensetzung aus einer Flintglaslinse, und einer Kronglaslinse, in Berührung oder sehr geringem Abstande von einander, angenommen wird. Immer bleibt es unmöglich, auf diese Weise von einem ausgedehnten Objecte ein vollkommen farbenreines Bild hervorzubringen, indem das violette Bild, wenn es in demselben Abstande von dem Linsensysteme liegen soll wie das rothe, nothwendig grösser wird, als das letztere.

Man darf jedoch hieraus keineswegs folgern, dass *Fernröhre* von dieser letztern Einrichtung in Beziehung auf Achromatismus unvollkommener bleiben müssen, als Fernröhre mit achromatischen nach der gewöhnlichen Art construirten und ein völlig farbenreines Bild hervorbringenden Objectiven. Man kann vielmehr gerade umgekehrt behaupten, dass jene bei einer wohlberechneten Anordnung der Oculare dem Auge das farbenreinere Bild zu geben fähig sind.

In der That kann ein vollkommen farbenreines vom Objectiv erzeugtes Bild (möge es ein wirkliches oder virtuelles sein) wegen der Farbenzerstreuung, welche durch die Ocularglaser hervorgebracht wird, dem *Auge* nicht vollkommen rein *erscheinen*; man verhütet zwar durch besondere Anordnung der Oculare den sogenannten farbigen Rand, kann aber damit die Längenabweichung nicht aufheben, welche noch durch den Umstand vergrössert wird, dass das menschliche Auge selbst nicht achromatisch ist. Man bewirkt nur, dass die letzten Bilder, rothes und violettes, in einerlei scheinbarer Grösse, nicht aber, dass sie in gleichem Abstande oder *zugleich* deutlich erscheinen.

Die ungleiche Grösse der ersten Bilder, des rothen und violetten, welche bei den dialytischen Objectiven unvermeidlich ist, lässt sich aber durch eine angemessene Einrichtung der Oculare sehr wohl compensiren, so dass der farbige Rand in der Erscheinung eben so gut gehoben wird, wie bei Fernröhren von gewöhnlicher Einrichtung, während die zweite eben berührte Unvollkommenheit auch hier bleibt, so lange das erste rothe und violette Bild in gleicher Entfernung von dem Objective liegen.

Es ist also klar, dass um *im Auge* ein vollkommen farbenreines Bild hervorzubringen, das erste Bild eine gewisse von den Verhältnissen der Oculare und dem Nichtachromatismus des menschlichen Auges abhängende Längenabweichung haben *muss*. Theoretisch betrachtet lässt sich nun allerdings auch ein Objectiv von gewöhnlicher Einrichtung so berechnen, dass eine vorgeschriebene Längenabweichung Statt findet; allein abgesehen von der Schwierigkeit, der ganzen

Schärfe, welche zur Darstellung so sehr kleiner Unterschiede erfordert wird, in der technischen Ausführung nachzukommen, würde doch diese Längenabweichung immer nur für ein bestimmtes Ocular passen. Bei der dialytischen Einrichtung hingegen ist durch die Verschiebbarkeit der den zweiten Theil des Objectivs bildenden Doppellinse gegen den ersten das Mittel gegeben, diejenige Längenabweichung zu erhalten, welche für jedes Ocular erforderlich ist, während das Ocular so eingerichtet sein kann, dass der farbige Rand gehörig gehoben wird. Übrigens muss ich mich hier auf diese kurze Andeutung beschränken, und eine ausführlichere Entwickelung dieses interessanten Gegenstandes einer andern Gelegenheit vorbehalten.

ANZEIGEN

EIGNER

ABHANDLUNGEN.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1813 April 5.

Am 18. März wurde der königl. Societät von dem Prof. Gauss eine Vorlesung übergeben, mit der Überschrift:

Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum, methodo nova tractata.

Bekanntlich haben sich seit Newton's Zeiten die ersten Geometer mit dieser berühmten Aufgabe gleichsam wetteifernd beschäftigt. Newton that den ersten Schritt, indem er die Anziehung eines Punktes in der Axe eines Umdrehungs-Sphäroids bestimmen lehrte, so wie ausserdem das einfache Verhältniss zwischen den Anziehungen aller Punkte, die im Innern des Sphäroids in einem und demselben Diameter liegen. Maclaurin glückte es hiernächst, in seiner berühmten Preisschrift über die Ebbe und Fluth die Anziehung aller Punkte auf der Oberfläche des Sphäroids zu bestimmen, auf welche sich auch, vermöge des Newtonschen Lehrsatzes, die Anziehungen im Innern reduciren liessen, so dass also nur noch die Anziehung der äussern Punkte fehlte, deren Bestimmung freilich den schwierigsten Theil der Aufgabe ausmachte. Auch hierin that Maclaurin schon einen Schritt: er bestimmte die Anziehung der Punkte in der Verlängerung des Aequators und der Axe. Maclaurin's Entdeckungen wurden als Meisterstücke der Synthesis allgemein bewundert, und eine Zeitlang als Beweise angesehen, dass es Fälle gebe, wo die synthetische Methode einen entschiedenen Vorzug vor

der analytischen habe. LAGRANGE setzte letztere wieder in ihre Rechte ein, indem er ihr eine Aufgabe unterwürfig machte, welche nur der Synthesis zugänglich geschienen hatte, und mit der ihm eignen Gewandtheit alle Entdeckungen MACLAURIN's auf analytischem Wege zu finden lehrte. Obgleich dadurch in der Sache selbst kein neuer Fortschritt gemacht war, so musste dies doch als eine höchst wichtige Vorbereitung der spätern Arbeiten angesehen werden. LEGENDRE war es, dem es gelang, die Theorie der Anziehung der Umdrehungs-Sphäroide zu vollenden, indem er den schönen Lehrsatz fand, und bewies, dass die Anziehung eines äussern Punktes von einem Sphäroide dieselbe Richtung hat, wie die Anziehung desselben Punktes von einem zweiten Sphäroide, dessen Oberfläche durch diesen Punkt geht, wenn die beiden erzeugenden Ellipsen einerlei Brennpunkt haben, und dass die erstere Anziehung sich zur andern verhält, wie die Masse des erstern Sphäroids zur Masse des andern.

Alles dieses bezieht sich auf die Sphäroide, welche durch Umdrehung einer halben Ellipse um die eine oder die andere Axe erzeugt sind. Allein jetzt blieb noch die weit schwerere Aufgabe zurück, die Anziehung eines Ellipsoids zu bestimmen, bei welchem auch der Aequator elliptisch ist, oder eines Körpers, von welchem jeder Schnitt mit einer Ebene eine Ellipse gibt. Die Bestimmung der Anziehung für Punkte in der Richtung der drei Hauptaxen hatte schon MACLAURIN angedeutet, und D'ALEMBERT und LAGRANGE hatten dafür analytische Beweise gegeben. LEGENDRE hatte ferner aus Induction die allgemeine Gültigkeit seines vorhin angeführten schönen Theorems geahnt, ohne doch einen strengen Beweis finden zu können. LAPLACE war es vorbehalten, diese Lücke auszufüllen, und die Auflösung der Aufgabe in ihrer ganzen Allgemeinheit zu vollenden (1782). Hiermit, könnte man glauben, sei nun die Untersuchung als geschlossen anzusehen. Allein schon der Umstand, dass mehrere Geometer seit der Zeit sich wieder von neuem mit demselben Gegenstande beschäftigt haben, zeigt, dass noch viel zu wünschen übrig blieb. Das Erste und Wesentlichste bei einer Aufgabe ist immer, dass sie überhaupt nur aufgelöst werde. Allein zu einem und demselben Ziele führen oft mehrere Wege. Nicht selten kommt man zum ersten Male auf einem langen dornigen Umwege zum Ziele; der kürzeste, der wahre echte Weg wird erst viel später entdeckt. Die LAPLACE'sche Auflösung ist ein schönes Document der feinsten analytischen Kunst; allein der Weg, auf welchem er dazu gelangt, ist lang und beschwerlich, und gewiss ist die Anzahl der Geometer und

Astronomen, die ihm darauf gefolgt sind, nur klein. Auch der Gebrauch der unendlichen Reihen, deren Convergenz nicht bewiesen ist, thut der Klarheit und Bündigkeit des Beweises einigen Eintrag. LEGENDRE hat zwar 1788 eine andere Auflösung gegeben, von welcher indess fast dasselbe gilt, was wir gegen die von LAPLACE erinnert haben. Ein competenter Richter, LAGRANGE, fällt über die Auflösungen jener beiden grossen Analysten folgendes Urtheil (in den *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin* 1793): '*On ne peut regarder leurs solutions que comme des chefs-d'oeuvre d'analyse, mais on peut désirer encore une solution plus directe et plus simple; et les progrès continuels de l'analyse donnent lieu de l'espérer.*' Seitdem haben noch BIOT und PLANA jene beiden Beweise zu vervollkommnen und zu vereinfachen gesucht. Indessen obgleich diese Arbeiten schätzbar sind, muss man doch noch immer diese Auflösungen zu den verwickeltsten und subtilsten Anwendungen der Analyse rechnen.

Der Verfasser der gegenwärtigen Abhandlung, welcher seit lange schon die Überzeugung hatte, dass die *echte* Auflösungsmethode jener berühmten Aufgabe erst noch gefunden werden müsse, wurde vor einem halben Jahre veranlasst, sich mit derselben näher zu beschäftigen, und indem er einen von den vorigen ganz abweichenden Weg nahm, hatte er das Vergnügen, auf eine so überraschend kurze und einfache Auflösung zu kommen, dass das Wesentliche davon sich auf zwei Seiten bringen liess. Freilich hat er sie hier nicht ganz so kurz vorgetragen. Theils wünschte er sie auch weniger geübten Lesern verständlich zu machen (denen diese für die Gestalt der Erde so interessanten Untersuchungen bisher ganz unzugänglich waren), und dass sich die neue Auflösung dazu vollkommen qualificire, davon hat er bereits mehrere Beweise. Theils schien es der Mühe werth, die Gründe, worauf sie beruht, und die auch bei andern Gelegenheiten oft mit Vortheil anzuwenden sein werden, etwas ausführlicher zu entwickeln, als für den nächsten Zweck erforderlich gewesen wäre.

Wir wollen jetzt hier noch die Hauptmomente der ganzen Auflösung in möglichster Kürze darstellen, doch für Kenner vollkommen hinlänglich. Wir müssen hier Verzicht darauf leisten, auch solchen Lesern ganz verständlich zu werden, die mit Untersuchungen dieser Art noch nicht vertraut sind; diese müssen wir auf die ausführliche Abhandlung selbst verweisen, welche schon gedruckt ist, und in kurzem in dem zweiten Bande der *Commentationes recentiores* der Societät erscheinen wird.

Der Verf. fängt damit an, sechs verschiedene allgemeine Lehrsätze zu begründen, vermittelst deren dreifache, durch einen körperlichen Raum auszudehnende, Integrale auf zweifache, nur über die Oberfläche des Körpers auszudehnende, Integrale reducirt werden. Wir geben hier von diesen Lehrsätzen nur drei, da die andern zur gegenwärtigen Untersuchung nicht nothwendig sind.

Es sei ds ein Element der Oberfläche eines Körpers von beliebiger Gestalt; PQ, PM, PX, PY, PZ, gerade Linien, von einem Punkte P dieses Elements gezogen, senkrecht auf die Oberfläche und nach aussen zu, nach dem angezogenen Punkte M, parallel mit den drei Axen der Coordinaten. Es sei ferner r der Abstand des Punktes M von P; MQ der Winkel zwischen PM und PQ; MX der Winkel zwischen PM und PX; QX der Winkel zwischen PQ und PX. Endlich bezeichne π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser, X die Anziehung, welche der ganze Körper auf den Punkt M parallel mit den Coordinaten x ausübt. Man hat dann

I. $$\int \frac{ds.\cos MQ}{rr} = 0 \text{ oder } = -4\pi$$

je nachdem M ausserhalb oder innerhalb des Körpers fällt,

II. $$\int \frac{ds.\cos QX}{r} = X$$

III. $$\int \frac{ds.\cos MQ.\cos MX}{r} = -X$$

wo die Integrale über die ganze Oberfläche des Körpers auszudehnen sind. Die Beweise dieser Lehrsätze unterdrücken wir hier, und bemerken nur, dass die zwei ersten sich auf Zerlegung des Körpers in Kegelelemente, die ihre Spitze in M haben, gründen, der dritte hingegen auf Zerlegung des Körpers in prismatische Elemente, parallel mit der Axe der Coordinaten x.

Für die Oberfläche eines Ellipsoids, dessen drei halbe Axen A, B, C sind, hat man zwischen den Coordinaten x, y, z die Gleichung

$$\frac{xx}{AA} + \frac{yy}{BB} + \frac{zz}{CC} = 1.$$

Ferner wird $\cos QX = \frac{x}{AA\rho}$, wenn man Kürze halber setzt

$$\sqrt{\left(\frac{xx}{A^4} + \frac{yy}{B^4} + \frac{zz}{C^4}\right)} = \rho.$$

Bedeuten a, b, c die Coordinaten des Punkts M, so hat man

$$r = \sqrt{[(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2]}$$

$$\cos MX = \frac{a-x}{r}$$

$$\cos MQ = \frac{1}{\rho r}\left(\frac{(a-x)x}{AA} + \frac{(b-y)y}{BB} + \frac{(c-z)z}{CC}\right)$$

Es werden jetzt zwei neue veränderliche Grössen p, q eingeführt, von denen x, y, z so abhangen, dass

$$x = A\cos p$$
$$y = B\sin p\cos q$$
$$z = C\sin p\sin q$$

Um also die ganze Oberfläche des Ellipsoids zu umfassen, muss man p von 0 bis 180^0, q von 0 bis 360^0 ausdehnen. Man setze endlich noch $X = ABC\xi$. Aus bekannten Gründen ergibt sich $ds = dp.dq.ABC\rho\sin p$. Obige drei Theoreme erhalten hierdurch folgende Gestalt, wenn man Kürze halber

$$\frac{(a-x)x}{AA} + \frac{(b-y)y}{BB} + \frac{(c-z)z}{CC} = \psi$$

setzt,

[1] $$\iint \frac{dp.dq.\sin p.\psi}{r^3} = 0 \text{ oder } = -\frac{4\pi}{ABC}$$

[2] $$\iint \frac{dp.dq.\cos p.\sin p}{r} = A\xi$$

[3] $$\iint \frac{dp.dq.\sin p.\psi(a-x)}{r^3} = -\xi$$

Man betrachte nun A, B, C als bestimmte besondere Werthe dreier veränderlicher Grössen α, β, γ, die aber so verbunden sind, dass $\alpha\alpha - \beta\beta$, $\alpha\alpha - \gamma\gamma$ constant bleiben. Die Formel [1] führt leicht zu dem Schluss, dass, für ein unendlich wachsendes α, ξ unendlich abnimmt. Differentiirt man [2] in Beziehung auf die veränderlichen Grössen α, β, γ, und bedient sich dabei des Variationszeichens δ, so kommt

$$\alpha\delta\xi + \xi\delta\alpha = -\iint \frac{dp.dq.\cos p.\sin p.\delta r}{rr}$$

$$= \delta\alpha.\iint \frac{dp.dq.\sin p.x\psi}{r^3}$$

oder wenn man hier statt ξ seinen Werth aus [3] setzt,

$$\alpha\delta\xi = \delta\alpha \iint \frac{dp\,.\,dq\,.\,\sin p\,.\,a\psi}{r^3}$$

Dies mit [1] verglichen, gibt

[4] $$\delta\xi = 0$$

wenn der Punkt M ausserhalb des Ellipsoids,

[5] $$\delta\xi = -\frac{4\pi a\delta a}{\alpha\alpha\delta\gamma}$$

wenn M innerhalb liegt.

Aus [4] folgt, dass ξ constant, oder die Anziehung der Masse proportional ist, für alle Sphäroide, deren Hauptschnitte Ellipsen von einerlei Brennpunkten sind, so lange M nicht innerhalb fällt. Die Bestimmung der Anziehung eines Sphäroids auf einen äussern Punkt reducirt sich also auf die Bestimmung der Anziehung eines andern Sphäroids, das aus denselben Brennpunkten beschrieben durch den angezogenen Punkt geht. Um diese zu bestimmen, werde der andere Fall betrachtet, wo der angezogene Punkt innerhalb liegt. Durch die Substitution von

$$\delta\delta = \alpha\alpha - AA + BB$$
$$\gamma\gamma = \alpha\alpha - AA + CC$$

in der Gleichung [5] wird diese, wenn man zugleich $\frac{A}{a} = t$ setzt, und statt des Zeichens δ wieder das gewöhnliche d schreibt

$$\xi = \frac{4\pi a}{A^2}\int \frac{ttdt}{\sqrt{[(1-(1-\frac{BB}{AA})tt)(1-(1-\frac{CC}{AA})tt)]}}$$

wo das Integral so bestimmt werden muss, dass es für $t = 0$ verschwindet, und dann, für das *bestimmte* Sphäroid, bis $t = 1$ auszudehnen ist. Man hat also, in demselben Sinne,

[6] $$X = \frac{4\pi aBC}{AA}\int \frac{ttdt}{\sqrt{[(1-(1-\frac{BB}{AA})tt)(1-(1-\frac{CC}{AA})tt)]}}$$

Diese Formel gibt die Anziehung für alle Punkte, die nicht ausserhalb liegen, und da sie bis zur Oberfläche selbst gültig sein muss, und die Anziehung äusserer Punkte bereits auf die Anziehung der Punkte auf der Oberfläche zurückgeführt war, so ist dadurch die Aufgabe vollständig aufgelöst. (Es braucht kaum erinnert zu werden, dass die Anziehungen parallel mit den beiden andern Hauptaxen sich schlechthin durch Umtauschung von A, a gegen B, b oder gegen C, c ergibt.)

Die Gleichung [6] lehrt ferner, dass für einen innern Punkt die Anziehung aller Sphäroide, die einander ähnlich sind und ähnlich liegen, identisch ist. Denkt man sich also ein solches Sphäroid in Schichten getheilt, die durch ähnliche ellipsoidische Flächen begrenzt sind, so ist klar, dass alle ausserhalb des angezogenen Punkts liegenden Schichten gar nichts zur Anziehung beitragen, und bloss die Anziehung des sphäroidischen Kerns übrig bleibt, dessen Oberfläche durch den angezogenen Punkt geht.

Zum Schluss erwähnt der Verf. noch der neuesten Arbeit über denselben Gegenstand von Hrn. Ivory in den *Philos. Transact.* 1809, welche er, aufmerksam gemacht durch den Hrn. Grafen Laplace, erst kennen lernte, als seine eigene Abhandlung schon ganz vollendet war. Durch eine sehr glückliche Idee hat Hr. Ivory die Anziehung eines äussern Punktes auf die Anziehung eines innern zurückgeführt. Allein die Art, wie er die Anziehung innerer Punkte selbst bestimmt, ist zwar voll Scharfsinn und Kunst, aber zum Theil, eben so wie Laplace's Auflösung für äussere Punkte, auf die Betrachtung unendlicher, nicht überall convergirender, Reihen gegründet, und weit von der Einfachheit entfernt, die gewünscht werden konnte, so dass die Ivory'sche Auflösung des Problems, als ein Ganzes betrachtet, im Grunde nicht viel weniger künstlich und verwickelt ist, als die Auflösungen von Laplace und Legendre. Übrigens beruhet jene und diejenige, von welcher hier Bericht erstattet ist, auf ganz verschiedenen Gründen, und beide haben gar nichts gemein, als den Gebrauch der zwei veränderlichen Grössen, welche oben mit p, q bezeichnet sind.

[*Handschriftliche Bemerkung.*]

Durch eine der hier vorgetragenen ähnliche Methode bestimmt man auch die Function V, d. i. die Summe aller Theilchen eines Körpers, jedes mit seinem Abstande vom angezogenen Punkt dividirt.

Man findet nemlich allgemein

$$V = -\tfrac{1}{2}\int ds.\cos QM$$

also beim Ellipsoid $V = ABC.w$ gesetzt

$$w = \int \frac{dp.dq.\sin p}{2r}\left(\frac{x(x-a)}{AA} + \frac{y(y-b)}{BB} + \frac{z(z-c)}{CC}\right)$$
$$= -\tfrac{1}{2}a\xi - \tfrac{1}{2}b\eta - \tfrac{1}{2}c\zeta + \int \frac{dp.dq.\sin p}{2r}$$

Folglich

$\delta w = 0$ für äussere Punkte

$\delta w = -(1 - \frac{aa}{\alpha\alpha} - \frac{bb}{\beta\beta} - \frac{cc}{\gamma\gamma})\frac{2\alpha\beta\alpha.\pi}{\alpha\beta\gamma}$ für innere Punkte

Für *innere* Punkte wird demnach (I)

$$W = \frac{2\pi}{A}\int \frac{dt}{\sqrt{[(1-(1-\frac{BB}{AA})tt)(1-(1-\frac{CC}{AA})tt)]}}$$
$$-\frac{2\pi aa}{A^3}\int \frac{ttdt}{\sqrt{[(1-(1-\frac{BB}{AA})tt)(1-(1-\frac{CC}{AA})tt)]}}$$
$$-\frac{2\pi bb}{B^3}\int \frac{ttdt}{\sqrt{[(1-(1-\frac{CC}{BB})tt)(1-(1-\frac{AA}{BB})tt)]}}$$
$$-\frac{2\pi cc}{C^3}\int \frac{ttdt}{\sqrt{[(1-(1-\frac{AA}{CC})tt)(1-(1-\frac{BB}{CC})tt)]}}$$

die Integrationen von $t = 0$ bis $t = 1$ ausgedehnt.

Für *äussere* Punkte bestimmt man zuerst A', B', C' vermittelst der Gleichungen

$$\frac{aa}{A'A'} + \frac{bb}{A'A' - AA + BB} + \frac{cc}{A'A' - AA + CC} = 1,$$
$$BB' = A'A' - AA + BB$$
$$CC' = A'A' - AA + CC$$

und substituirt diese Grössen anstatt A, B, C in der Formel I.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1829 October 12.

Am 28. September übergab Hofr. Gauss der Königl. Societät eine Vorlesung:

Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii,

von welcher wir hier Bericht abzustatten haben. Ihr Gegenstand gehört in dasjenige Gebiet der mathematischen Physik, welches Laplace durch seine beiden in den Jahren 1806 und 1807 erschienenen, in dieser Wissenschaft Epoche machenden Abhandlungen, *Théorie de l'action capillaire*, und *Supplément à la théorie de l'action capillaire* auf eine so glänzende Art eröffnet hat. Zur Erklärung der Gesetze, nach welchen wir die Himmelskörper sich bewegen sehen, ist die Annahme einer allgemeinen gegenseitigen Anziehung alles Materiellen, deren Stärke dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, sowohl nothwendig, als zureichend. Die Schwere der Körper auf der Oberfläche der Erde ist gleichfalls nichts weiter, als eine Wirkung dieser allgemeinen Kraft. Allein die mannigfaltigen Erscheinungen, welche Körper in der Berührung darbieten, das Aufsteigen einiger Flüssigkeiten in sehr engen Röhren, das Sinken anderer, die Adhäsion der Flüssigkeiten an einigen festen Körpern, ihre Tropfengestalt oberhalb anderer, die Cohäsion u. s. w. lassen sich aus einer jenes Gesetz befolgenden Anziehung nicht erklären, da eine richtig geführte Rechnung leicht zeigt, dass ein einzelner Körper, dessen Dimensionen gegen die der ganzen Erde verschwinden, gegen einen wo immer befindlichen Punkt vermöge jenes Gesetzes

nur eine gegen die Schwere unmerkliche Anziehung ausüben kann. Man ist daher genöthigt, das Gesetz der allgemeinen Anziehung für sehr kleine Entfernungen zu modificiren, oder, was dasselbe ist, neben jener dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportionalen Anziehung noch eine andere anzunehmen, deren eigentliches Gesetz genau auszudrücken uns zwar die Mittel fehlen, die aber, wie die Erscheinungen lehren, in jeder für uns messbaren Entfernung unmessbar klein, in unmessbar kleinen Entfernungen hingegen nicht bloss merklich, sondern sogar überaus gross sein muss. Man nennt diese Kraft Molecularanziehung, eine Benennung, die freilich eigentlich nichts Bezeichnendes hat, wogegen der von einigen deutschen Physikern gebrauchte Ausdruck Flächenkraft etwas anderes bezeichnet, als was hier bezeichnet werden soll.

Laplace hat zuerst diese Vorstellung von der bei jenen Phänomenen thätigen Kraft in Beziehung auf die Gleichgewichtsfigur der liquiden Flüssigkeiten dem Calcül unterworfen, durch eine schöne Analyse die in jedem Punkte der Oberfläche der Flüssigkeit zum Gleichgewicht nothwendige Gleichung aufgefunden, und nicht bloss die eigentlich sogenannten Capillar-Phänomene, sondern eine Menge anderer damit verwandter Erscheinungen daraus erklärt. Diese Untersuchungen, durchgehends durch eine überraschend genaue Übereinstimmung mit der Erfahrung bestätigt, gehören zu den schönsten Arbeiten jenes grossen Geometers. Zwar hat es nicht an Gegnern dieser Theorie gefehlt: man findet jedoch nicht, dass bisher etwas irgend erhebliches dagegen vorgebracht wäre, und die Schwäche der bekannt gewordenen Einwürfe, welche höchstens einige Nachlässigkeiten in der Darstellung, aber nicht die Sache selbst treffen, ist leicht nachzuweisen, wie z. B. Petit die von Brunacci gemachten Einwendungen siegreich wiederlegt hat.

Um so mehr muss man sich wundern, dass eine wirkliche und wesentliche Mangelhaftigkeit an dieser Theorie bisher ganz übersehen ist. Das Wesen dieser Theorie beruht nämlich, genau betrachtet, auf zwei Hauptsätzen. Der eine besteht in der vorhin erwähnten Gleichung, welche in jedem Punkte der freien Oberfläche der Flüssigkeit beim Gleichgewicht Statt haben muss, und deren Begründung, wie Laplace sie gegeben hat, nichts wesentliches zu wünschen übrig lässt. Diese Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung, die für sich allein die Gestalt der Oberfläche nicht vollständig bestimmen kann, da ihre Integration, wenn sie allgemein möglich wäre, noch zwei arbiträre Functionen einführen würde,

deren Bestimmung anderswoher entlehnt werden muss. Die Stelle dieses Erfordernisses vertritt nun der zweite Hauptsatz, nach welchem im Zustande des Gleichgewichts die freie Oberfläche der Flüssigkeit da, wo sie durch das Gefäss begrenzt wird, mit der Wand des Gefässes einen bestimmten constanten Winkel machen muss, der bloss von dem Verhältniss der Molecularanziehungen abhängt, welche die Theile der Flüssigkeit einerseits von einander und andererseits von den Theilen des Gefässes erleiden. Dieser höchst wichtige Satz, ohne welchen die Theorie nur zur Hälfte vollendet sein würde, gehört gleichfalls Laplace an, und ist in dessen Theorie von Anfang bis zu Ende verwebt: allein umsonst sucht man in beiden angeführten Schriften eine befriedigende bloss auf die Natur der Molecularanziehung gestützte Begründung desselben. Was in der ersten Abhandlung S. 5 oben vorkommt, setzt, was bewiesen werden sollte, schon voraus, und die Rechnungen in derselben Abhandlung S. 44 u. f. führen zu gar keinem Resultate. Was sonst noch hierüber zu sagen ist, muss hier der Kürze wegen übergangen, und demnächst in der vorliegenden Abhandlung selbst nachgesehen werden.

Dieser Umstand ist eine von den Veranlassungen gewesen, die den Hofr. Gauss bewogen haben, diese Untersuchung von neuem aufzunehmen, und zwar auf einem eigenthümlichen Wege, der von dem von Laplace benutzten gänzlich verschieden ist, wenn gleich jener und diese von einerlei Grundvoraussetzung in Beziehung auf die Natur der Molecularanziehung ausgehen, und am Ende zu einerlei Ziele führen. Laplace hat die erwähnte Gleichung für das Gleichgewicht auf eine doppelte Art begründet; in der ersten Abhandlung mit Hülfe des Princips des Gleichgewichts in unendlich engen Canälen; in der zweiten vermittelst des Satzes, dass die Gesammtkraft, welche auf irgend einen Punkt der freien Oberfläche der Flüssigkeit wirkt, beim Gleichgewicht auf die Oberfläche senkrecht ist. Die gegenwärtige neue Bearbeitung der Theorie der Gleichgewichtsgestalt der Flüssigkeiten geht dagegen von dem Princip der virtuellen Bewegungen aus.

Wir würden die dieser Anzeige gesetzten Grenzen weit überschreiten müssen, wenn wir hier dem Gange der Untersuchungen im Einzelnen folgen wollten. Aber verweilen müssen wir bei einem neuen Theorem, welches einen Hauptabschnitt in denselben macht, und in einer einzigen Formel die Auflösung der Aufgabe in grösster Einfachheit und Klarheit darstellt. Es ist folgendes:

Wenn man durch s das Volumen der Flüssigkeit, durch h die Höhe ihres Schwerpunkts über einer beliebigen horizontalen Ebene, durch T den Inhalt

desjenigen Theils der Oberfläche der Flüssigkeit, welche das Gefäss berührt, und durch U den Inhalt des andern (freien) Theiles dieser Oberfläche bezeichnet: so ist im Zustande des Gleichgewichts das Aggregat

$$sh+(\alpha\alpha-2\delta\delta)T+\alpha\alpha U$$

ein Minimum, wo $\alpha\alpha$ und $\delta\delta$ gewisse Constanten bedeuten, welche von dem Verhältniss der Schwere zu der Intensität der Molecularanziehung der Theile der Flüssigkeit gegen einander und der Theile des Gefässes gegen die Flüssigkeit abhangen.

Wir sehen hier also, als die Frucht einer schwierigen und subtilen Untersuchung einen Ausdruck für das Gesetz des Gleichgewichts hervorgehen, der, selbst dem gemeinen Verstande begreiflich, die Vermittlung des Conflicts zwischen den verschiedenen hier ins Spiel tretenden Kräften klar vor Augen legt. Wäre die Schwere die einzige wirkende Kraft, so würde beim Gleichgewicht der Schwerpunkt der ganzen Flüssigkeit so tief wie möglich liegen, also h ein Minimum sein müssen. Setzt man hingegen die Schwere und die Anziehung des Gefässes ganz bei Seite, so dass bloss die gegenseitige Anziehung der Theile der Flüssigkeit selbst in Betracht kommt, so muss diese eine sphärische Gestalt annehmen, also $T+U$ ein Minimum sein. Wäre endlich weder Schwere noch gegenseitige Anziehung der Flüssigkeitstheile vorhanden, so würde die Flüssigkeit sich über die ganze Oberfläche des Gefässes verbreiten, also T ein Maximum, oder $-T$ ein Minimum sein müssen. Man findet es begreiflich, dass beim Zusammenwirken der drei Kräfte ein aus jenen drei Grössen Zusammengesetztes ein Kleinstes werden soll, wiewohl sich von selbst versteht, dass die eigentliche feste Begründung jenes Lehrsatzes nur auf die vollständigen strengen mathematischen Schlussreihen gestützt werden kann, die von der Natur der Molecularanziehung wesentlich abhängig sind.

Mit grosser Leichtigkeit leitet man aus dieser Formel die Erscheinungen des Steigens oder Fallens der Flüssigkeit in Haarröhrchen mit verticalen innern Seitenwänden ab: hier beschränken wir uns auf eine kurze Andeutung und auf den Fall, wo die Weite des Haarröhrchens gegen die Weite des Gefässes an der Oberfläche der Flüssigkeit, in welche jenes eingetaucht ist, als verschwindend betrachtet werden kann, mithin das Fallen oder Steigen der Flüssigkeit im Gefässe, welches mit dem Steigen oder Fallen im Haarröhrchen zusammenhängt,

vernachlässigt werden darf. Da dies obige Aggregat seinen kleinsten Werth für die Gleichgewichtsgestalt der Flüssigkeit hat, unter *allen* anderen Gestalten, welche diese annehmen kann, so ist jener Werth auch der kleinste unter denen, die bei bloss veränderter Höhe der Flüssigkeit im Haarröhrchen ohne Veränderung der Figur der freien Oberfläche in derselben hervorgehen. Bezeichnet man nun mit h^0, T^0, U^0 die Werthe von h, T, U, wenn die Flüssigkeit im Haarröhrchen eben so hoch steht, wie im Gefässe (oder genau, wenn sie im Mittel eben so hoch steht, insofern die freie Oberfläche in jenem keine horizontale Ebene bildet); ferner mit a und b den Flächeninhalt und den Umfang eines innern Querschnitts des Haarröhrchens, so wird man allgemein, der (mittlern) Höhe im Haarröhrchen über dem Niveau im Gefässe $=z$ entsprechend, haben

$$\begin{aligned} sh &= sh^0+\tfrac{1}{2}azz \\ T &= T^0+bz \\ U &= U^0 \end{aligned}$$

also das obige Aggregat

$$=sh^0+(\alpha\alpha-2\delta\delta)T^0+\alpha\alpha U^0+\tfrac{1}{2}azz+(\alpha\alpha-2\delta\delta)bz$$

welches offenbar ein Minimum wird für

$$z=\frac{(2\delta\delta-\alpha\alpha)b}{a}$$

Die Flüssigkeit wird also im Haarröhrchen höher oder tiefer stehen, als im Gefässe, je nachdem $\delta\delta$ grösser oder kleiner ist als $\frac{1}{2}\alpha\alpha$, und der Unterschied des Standes, bei bestimmter Flüssigkeit und Haarröhrchen von bestimmter Materie wird der Peripherie des innern Querschnitts direct und dem Flächeninhalt desselben verkehrt proportional sein.

Von höherer Wichtigkeit, als die Erledigung dieser zwar vorzüglich in die Augen fallenden, aber doch nur ganz speciellen Erscheinung, ist die *allgemeine* Entwickelung der Folgen des obigen Lehrsatzes. Es ist klar, dass dieses Geschäft der Variationsrechnung angehört, aber einem Theil derselben, der bisher noch wenig oder gar nicht bearbeitet ist, wo nemlich von der Variation doppelter Integrale mit veränderlichen Grenzen die Rede ist. In dieser Beziehung werden die hier geöffneten Wege auch ein rein mathematisches Interesse darbieten: in dieser Anzeige können wir nur die Resultate bemerken. Diese bestehen, erstlich,

in einer Gleichung für jeden Punkt der freien Oberfläche der Flüssigkeit, welche gänzlich mit der oben erwähnten Laplaceschen Gleichung übereinstimmt; zweitens, für die Grenzen dieser Fläche, in der Gleichung $\sin\frac{1}{2}i = \frac{6}{\alpha}$, wenn man durch i den Neigungswinkel zwischen den die freie Oberfläche der Flüssigkeit und die Oberfläche des Gefässes berührenden Ebenen, und zwar ausserhalb der Flüssigkeit gemessen, bezeichnet, welches gerade der zweite von Laplace ohne Begründung gebrauchte, Hauptsatz ist.

In einer Anzeige, wie sie diese Blätter verstatten, konnten nur Hauptmomente der vorliegenden Arbeit berührt werden; vieles andere, was diese umfasst, übergehen wir hier ganz oder deuten es nur kurz an. Dahin gehören die Modificationen, welche nothwendig werden, wenn ein Theil der Flüssigkeit als ein Häutchen von unmessbar kleiner Dicke an der Gefässwand anliegt (diese benetzt), welcher Fall eintritt, wenn 6 grösser ist als α, wo die Gleichung $\sin\frac{1}{2}i = \frac{6}{\alpha}$ eine scheinbare Ungereimtheit enthält; die Folgen des Umstandes, dass die Kenntniss des Gesetzes der Molecularanziehung in unmessbar kleinen Distanzen (deren Begriff ganz verschieden ist von verschwindenden oder von unendlich kleinen Distanzen) uns unzugänglich bleibt; die Unterscheidung zwischen dem Zustand des wahren Gleichgewichts und des wegen der Reibung an den Gefässwänden auch ausser demselben möglichen Zustandes der Ruhe; die Betrachtung der Discontinuität der Gestalt der Gefässwände (einwärts oder auswärts gehender Winkel) u. s. f.

Der eigentliche Zweck der vorliegenden Arbeit ging dahin, eine feste allgemeine mathematische Begründung der Hauptprincipien dieser Lehre zu geben: es lag, für jetzt, ausserhalb des Planes, specielle Phänomene zu erklären, worin ohnehin Laplace schon so viel geleistet hat. Der hier gewählte Weg ist nicht der einzige: der Verf. hat während der Ausarbeitung noch einen ganz andern, nicht weniger merkwürdigen Weg zu demselben Ziele, und namentlich zu dem schwer zugänglichen zweiten Hauptlehrsatz gefunden, dessen Darstellung, so wie die weitere Ausdehnung der Principien auf die zusammengesetzten Fälle, wo mehrere Flüssigkeiten in einem Gefässe, eingetauchte ganz oder zum Theil freie feste Körper u. dergl. mit in Betracht kommen, er sich auf eine andere Gelegenheit vorbehält.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1832 December 24.

In der Sitzung der Königlichen Societät am 15. December wurde von dem Hrn. Hofr. Gauss eine Vorlesung gehalten:

Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata,

von deren Gegenstande hier ein Bericht zu geben ist.

Dass von den drei, die Äusserung des Erdmagnetismus an einem gegebenen Orte bestimmenden Elementen, Declination, Inclination und Intensität, das erste am frühesten, viel später das zweite, und das dritte erst in den neuesten Zeiten Gegenstand der Beobachtungen und Forschungen geworden ist, erklärt sich hauptsächlich aus dem Umstande, dass die Declination für Seefahrer und Geodäten das unmittelbarste Interesse darbietet, und die Inclination ihr näher verwandt geschienen haben mag, als die Intensität. Bei dem Naturforscher, als solchem, ist das Interesse für alle drei Elemente ganz gleich: unsere Kenntniss von dem Erdmagnetismus im Ganzen muss so lange unvollkommenes Stückwerk bleiben, als nicht alle Zweige derselben mit gleicher Liebe gepflegt werden.

Die ersten Aufklärungen über die Intensität des Erdmagnetismus verdanken wir Herrn von Humboldt, welcher auf allen seinen Reisen ein Hauptaugenmerk darauf gerichtet, und eine sehr grosse Menge von Beobachtungen geliefert hat, aus denen sich die allmähliche Abnahme dieser Intensität, von dem magnetischen Aequator der Erde nach den magnetischen Polen zu, ergeben hat. Sehr

viele Beobachter sind seitdem in die Fusstapfen jenes grossen Naturforschers getreten, und ein Schatz von Beobachtungen aus fast allen Theilen der Erdoberfläche, wohin in neuester Zeit wissenschaftliche Reisende gekommen sind, liegt vor, worauf der um die Kenntniss des Erdmagnetismus hochverdiente HANSTEEN bereits den Versuch einer allgemeinen isodynamischen Karte hat begründen können.

Die bei allen diesen Beobachtungen angewandte Methode besteht darin, dass man an den Örtern, für welche man die Intensität des Erdmagnetismus unter sich vergleichen will, eine und dieselbe Magnetnadel Schwingungen machen lässt, und deren Dauer mit Schärfe abmisst. Diese Dauer ist zwar, bei sonst gleichen Umständen, von der Grösse des Schwingungsbogens abhängig, jedoch so, dass sie, wie klein auch der Bogen wird, nur einer bestimmten Grenze immer näher kommt, die man schlechthin die Schwingungsdauer nennt, und auf welche die wirklich beobachtete vermittelst der Kenntniss des Schwingungsbogens leicht reducirt werden kann. Die Intensität des Erdmagnetismus ist so dem Quadrate der Schwingungsdauer einer und derselben Nadel verkehrt, oder dem Quadrate der Anzahl der Schwingungen in einer gegebenen Zeit direct proportional, und das Resultat bezieht sich auf die ganze Kraft, oder auf den horizontalen Theil derselben, je nachdem man die Nadel in der Ebene des magnetischen Meridians um eine horizontale, oder in einer horizontalen Ebene um eine verticale Axe hat schwingen lassen.

Offenbar ist die Zulässigkeit dieses Verfahrens gänzlich von der Voraussetzung des unveränderten magnetischen Zustandes der gebrauchten Nadel abhängig. Wenn eine zweckmässig magnetisirte und vorsichtig aufbewahrte Nadel aus gut gehärtetem Stahl zu diesen Versuchen angewandt wird, und diese selbst keinen zu langen Zeitraum umfassen, wird freilich die Gefahr einer bedeutenden Veränderung im Zustande der Nadel selbst nicht sehr gross sein, und man kann sich darüber um so mehr beruhigen, wenn man nach der Zurückkunft an den ersten Ort daselbst dieselbe Schwingungsdauer wiederfindet: allein selbst die Erfahrung lehrt, dass man auf einen solchen Erfolg nicht leicht rechnen darf, und genau genommen, enthält selbst jene Beruhigung einen logischen Zirkel. In der That ist längst bekannt, dass sowohl die Declination, als die Inclination an einem bestimmten Orte keinesweges unveränderlich ist; beide erleiden im Lauf der Zeit sehr grosse fortschreitende, so wie daneben nach den Tages- und Jahreszeiten

für feinere Beobachtungen sehr merkliche periodische Veränderungen; es lässt sich daher nicht zweifeln, dass auch das dritte Element, die Intensität, ähnlichen Änderungen unterworfen sein wird, ja, die periodischen Änderungen in verschiedenen Tageszeiten lassen sich in feinern Beobachtungen bestimmt nachweisen. Wenn man daher auch nach längerer Zeit an demselben Orte dieselbe Schwingungszeit wiederfindet, so hat man doch durchaus keine Bürgschaft, dass dies nicht einer zufälligen Compensation der Veränderungen, welche die Intensität des Erdmagnetismus an diesem Orte und der magnetische Zustand der Nadel selbst inzwischen erlitten haben, zuzuschreiben sei. Wenn man auch zugibt, dass durch diesen Umstand die Sicherheit der comparativen Methode, in sofern nur mässige Zwischenzeiten vorkommen, nur etwas vermindert, nicht ganz aufgehoben wird, so ist doch klar, dass diese Methode alle Brauchbarkeit verliert, wenn die Frage die ist, welche Veränderung die Intensität des Erdmagnetismus an einem bestimmten Orte während eines sehr langen Zeitraums erfahre, und dass diese doch in wissenschaftlicher Beziehung höchst interessante Frage ganz unbeantwortet bleibt, wenn man nicht an die Stelle jener bloss comparativen Methode eine andere setzen kann, welche die Intensität des Erdmagnetismus auf ganz bestimmte, für sich feststehende, jederzeit mit grösster Schärfe wieder nachzuweisende und von der Individualität der angewandten Nadeln ganz unabhängige Einheiten zurückführt.

Es ist nicht schwer, die theoretischen Grundsätze, auf welchen eine solche selbstständige Methode beruhen muss, anzugeben. Die Schwingungsdauer einer bestimmten Nadel hängt von drei Grössen ab, der Intensität des Erdmagnetismus, dem statischen Moment des freien Magnetismus in der Nadel und dem Moment der Trägheit der Nadel: letzteres kann leicht durch schickliche Methoden ausgemittelt werden, und so ergiebt sich aus der beobachteten Schwingungsdauer nicht die Grösse der Intensität des Erdmagnetismus, sondern das Product dieser Grösse in das statische Moment des freien Magnetismus der Nadel. Allein es ist unmöglich diese beiden Factoren von einander zu trennen, wenn nicht Beobachtungen einer ganz andern Art hinzukommen, die eine verschiedene Combination derselben involviren, diesen Zweck erreichen wir, wenn wir eine zweite Nadel zuziehen und dieselbe sowohl der Einwirkung des Erdmagnetismus als der der ersten Nadel unterwerfen, um das Verhältniss dieser Kräfte ausfindig zu machen. Diese beiden Wirkungen hängen zwar mit von dem magnetischen Zustande der

zweiten Nadel ab, allein eine schickliche Einrichtung der Versuche verschafft uns die Möglichkeit, diesen zu eliminiren, indem das *Verhältniss* beider Wirkungen desto mehr davon abhängig wird, je grösser die Entfernung der beiden Nadeln von einander angenommen wird. Offenbar wird aber dabei zugleich die Lage der magnetischen Axen der beiden Nadeln und der ihre Mittelpunkte verbindenden geraden Linien gegen den magnetischen Meridian, und der magnetische Zustand der ersten Nadel zu berücksichtigen sein, und alles dies wird dem Calcul nicht unterworfen werden können, ohne das Gesetz der Kraft zu kennen, welches zwei Elemente freien Magnetismus auf einander ausüben, d. i. womit sie, je nachdem sie gleichnamig oder ungleichnamig sind, einander abstossen oder anziehen. Schon Tobias Mayer hatte die Vermuthung aufgestellt, dass dieses Gesetz dasselbe sei, wie das der allgemeinen Gravitation, d. i. dass jene Kraft im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung stehe; Coulomb und Hansteen haben diese Vermuthung durch Versuche zu bestätigen gesucht: durch die in vorliegender Abhandlung enthaltenen Versuche ist sie ausser allen Zweifel gesetzt. Dieses Gesetz bezieht sich aber nur auf die Elementarwirkung; die Berechnung der Totalwirkung eines magnetischen Körpers auf einen andern wird zu einer rein mathematischen Aufgabe, so bald die Art der Vertheilung des freien Magnetismus in diesen Körpern vollständig bekannt ist, und bleibt daher von deren zufälliger Individualität abhängig; allein je grösser der Abstand wird, desto geringer wird der Einfluss dieser Individualität, und bei sehr grossen Entfernungen kann man (wie eben aus jenem Grundgesetz von selbst folgt) die Gesammtwirkung unter sonst gleichen Umständen dem Cubus der Entfernung umgekehrt proportional setzen. Das Product dieses Cubus in den Bruch, welcher das Verhältniss der Wirkung der ersten Nadel und der Wirkung des Erdmagnetismus, auf die zweite Nadel, ausdrückt, wird sich daher bei immer wachsenden Entfernungen einer bestimmten Grenze nähern; eine zweckmässige Combination von Beobachtungen in verschiedenen schicklich gewählten Entfernungen wird, mathematisch behandelt, die Grenze kennen lehren, aus welcher das *Verhältniss* derjenigen beiden Grössen sich herleiten lässt, deren Product aus den beobachteten Schwingungszeiten abgeleitet war; die Verbindung beider Resultate gibt dann offenbar diese beiden Grössen selbst.

Die Versuche zur Vergleichung der Wirkungen des Erdmagnetismus und der ersten Nadel, auf die an einem Faden aufzuhängende zweite, können auf

zwiefache Art eingerichtet werden, indem letztere entweder im Zustande der Bewegung oder der Ruhe beobachtet werden kann. Das erstere geschieht am vortheilhaftesten, indem man die erste Nadel in den magnetischen Meridian der zweiten legt, wodurch die Dauer einer Schwingung der letztern entweder grösser oder kleiner wird, je nachdem gleichnamige oder ungleichnamige Pole einander zugekehrt sied: die Vergleichung der so veränderten Schwingungsdauer mit der durch den blossen Erdmagnetismus bestimmten, oder besser, die Vergleichung einer verlängerten mit einer verkürzten (bei entgegengesetzten Lagen der ersten Nadel) führt dann leicht zu dem gesuchten Verhältniss. Die zweite Art besteht darin, dass man die erste Nadel so legt, dass ihre Einwirkung auf die zweite mit dem Erdmeridian einen Winkel macht; der Ablenkungswinkel von dem Meridian, im Zustande des Gleichgewichts, führt dann gleichfalls zur Kenntniss des verlangten Verhältnisses, und auch hier ist es vortheilhafter, zwei entgegengesetzte Ablenkungen, bei entgegengesetzten Lagen der ersten Nadel, unter sich zu vergleichen. Die vortheilhafteste Lage dieser Nadel ist in einer durch die Mitte der zweiten senkrecht auf den magnetischen Meridian gezogenen geraden Linie. Übrigens kommt die erstere Art im wesentlichen mit derjenigen überein, welche vor einigen Jahren von Poisson vorgeschlagen ist; allein die bisher bekannt gewordenen Versuche einiger Physiker, sie zur Anwendung zu bringen, sind entweder ganz missglückt, oder können höchstens wie unvollkommene Annäherungen betrachtet werden.

Der Verfasser hat beide Arten vielfältig angewandt, und gefunden, dass aus mehreren Gründen die zweite der ersten bei weitem vorzuziehen ist.

Die eigentliche Schwierigkeit liegt darin, dass in die beobachteten Einwirkungen sich ausser dem Grenzwerthe noch andere Theile einmischen, die von der Individualität der Nadeln abhängen. Jene Wirkung wird durch eine Reihe dargestellt, die nach den negativen Potenzen des Abstandes fortläuft, von der dritten anfangend, wo aber die folgenden Glieder sich desto merklicher machen, je kleiner der Abstand ist. Man soll also aus mehreren Beobachtungen diese folgenden Glieder eliminiren; allein bei einiger Bekanntschaft mit der Eliminationstheorie überzeugt man sich leicht, dass die unvermeidlichen Beobachtungsfehler der Zuverlässigkeit des Resultats desto gefährlicher werden, je mehr Coëfficienten zu eliminiren sind, so dass die Zahl derselben nur sehr mässig zu sein braucht, um, aus jenem Grunde, die Rechnungsresultate gänzlich unbrauchbar

zu machen. Man hat daher keine Genauigkeit in den Resultaten zu erwarten, wenn man nicht so grosse Distanzen anwendet, dass die Reihe sehr schnell convergirt, und ein paar Glieder derselben zureichen. Allein dann sind wieder die Wirkungen selbst sehr klein, also durch die bisherigen Beobachtungsmittel nicht mit Schärfe zu bestimmen, und so erklärt sich leicht das Misslingen der bisher angestellten Versuche.

So leicht sich also auch die Methoden, die Intensität des Erdmagnetismus auf absolute Einheiten zurückzuführen, in der Theorie darstellen, so misslich ist ihre Anwendung, so lange nicht den magnetischen Beobachtungen eine viel grössere Schärfe verschafft wird, als sie bisher besassen. Der Verfasser ist dadurch veranlasst, mehrere auf die Vervollkommnung der Beobachtungsmittel abzweckende, schon vor vielen Jahren gefasste Ideen zur Ausführung zu bringen, in der sichern Erwartung, dass die magnetischen Beobachtungen zu einer beinahe, wo nicht ganz, eben so grossen Schärfe zu bringen sind, wie die feinsten astronomischen. Der Erfolg hat diese Erwartung nicht getäuscht, und zwei in der Sternwarte aufgestellte Apparate, welche zu den zum Theil in vorliegender Abhandlung aufgeführten Versuchen gedient haben, lassen nichts zu wünschen übrig, als ein angemessenes gegen die Einwirkung von nahem Eisen und Luftzug völlig geschütztes Local.

Es ist hier nicht der Ort zu einer vollständigen Beschreibung dieser Apparate und ihrer Leistungen: wir glauben jedoch, den Naturforschern durch Mittheilung der wesentlichsten Momente einen Dienst zu erweisen.

Die von dem Verfasser gewöhnlich gebrauchten Nadeln (wenn man prismatische Stäbe von solcher Stärke noch Nadeln nennen darf) sind fast einen Fuss lang, und haben ein Gewicht von beinahe einem Pfund. Die Aufhängung geschieht an einem 2½ Fuss langen ungedreheten Seidenfaden, der aus 32 einfachen zusammengesetzt, selbst das doppelte Gewicht noch sicher trägt; das obere Ende des Fadens ist drehbar, und die Drehung wird an einem eingetheilten Kreise gemessen. Die Nadel trägt an ihrem südlichen oder nördlichen Ende (je nachdem die Localität das eine oder das andere bequemer macht) einen Planspiegel, dessen Ebene gegen die magnetische Axe der Nadel durch zwei Correctionsschrauben, so genau wie man will, senkrecht gestellt werden kann, obwohl unnöthig ist, hierauf eine sehr ängstliche Sorgfalt zu wenden, da man, was daran fehlt, durch die Beobachtungen selbst auf das schärfste messen, und als Collimationsfehler in Rechnung bringen kann. Die so frei schwebende Nadel befindet sich in einem hölzernen cylindrischen Kasten, welcher ausser der kleinen Öffnung im Deckel, durch welche der Faden geht, noch eine grössere an der Seite hat, welche nur wenig höher und breiter ist, als der erwähnte Spiegel.

Dem Spiegel gegenüber ist ein Theodolith aufgestellt; die verticale Axe desselben und der Aufhängungsfaden sind in demselben magnetischen Meridian, und etwa 16 Pariser Fuss von einander entfernt. Die optische Axe des Fernrohrs am Theodolith ist etwas höher als die Nadel, und in der Verticalebene des magnetischen Meridians so abwärts geneigt, dass sie gegen die Mitte des Spiegels an der Nadel gerichtet ist.

An dem Stativ des Theodolithen ist eine 4 Fuss lange in einzelne Millimeter getheilte horizontale Scale befestigt, die mit dem magnetischen Meridian einen rechten Winkel macht; derjenige Punkt der Skale, welcher mit der optischen Axe des Fernrohrs in Einer Verticalebene liegt, und hier Kürze wegen der Nullpunkt heissen mag, wird durch einen von der Mitte des Objectivs herabhängenden, mit einem Gewicht beschwerten feinen Goldfaden bezeichnet; die Skale ist in einer solchen Höhe, dass das Bild eines Theils derselben im Spiegel durch das Fernrohr erscheint, dessen Ocular zum deutlichen Sehen auf die Entfernung dieses Bildes gestellt ist. Auf der entgegengesetzten Seite von der Nadel ist in derselben Verticalebene und in einer Entfernung vom Fernrohre, welche der jenes Bildes gleich ist, eine Marke befestigt, welche dazu dient, jeden Augenblick die unverrückte Stellung des Theodolithen prüfen zu können.

Es erhellt nun leicht, dass wenn obige Bedingungen genau erfüllt sind, das Bild des Nullpunktes der Skale genau auf der optischen Axe des Fernrohrs erscheinen muss, und dass, in sofern an dem Platze des Theodolithen ein Gegenstand von bekanntem Azimuth sichtbar ist, man mit Hülfe dieses Instruments sogleich die absolute magnetische Declination erhalten kann. Fehlt dagegen an jenen Bedingungen etwas, so wird, allgemein zu reden, nicht das Bild des Nullpunkts, sondern das eines andern Punktes der Skale auf der optischen Axe erscheinen, und wenn die horizontale Entfernung der Skale vom Spiegel genau gemessen ist, wird der Betrag der Skalentheile leicht auf den entsprechenden Winkel reducirt, und jenes erhaltene Resultat corrigirt werden können. Der Betrag des Collimationsfehlers des Spiegels kann mit grösster Schärfe und Leichtigkeit durch Umlegen der Nadel in ihrem Träger (dass die obere Seite zur unteren

wird) ausgemittelt werden. Bei den aufgestellten Apparaten beträgt Ein Skalentheil nahe 22 Secunden, und ein nur etwas geübtes Auge theilt ein solches Intervall noch leicht in 10 Theile.

Mit diesen Vorrichtungen bestimmt man also die Richtung der Nadel und ihre Veränderungen auf das schärfste. Man hat gar nicht nöthig, stets zu warten, bis sie zur Ruhe gekommen ist, da die beiden Elongationen rechts und links sich mit äusserster Schärfe beobachten lassen, und ihre Combination, gehörig behandelt, den entsprechenden Ruhepunkt mit derselben Schärfe gibt. In den Vormittagsstunden, wo die tägliche Variation am schnellsten ist, kann man diese beinahe von Einer Zeitminute zur andern verfolgen.

Nicht minder gross ist der Gewinn dieser Einrichtung für die Beobachtung der Schwingungsdauer. Das Vorübergehen des Verticalfadens im Fernrohr vor einem bestimmten Punkte der Skale (eigentlich ists umgekehrt), lässt sich, selbst wenn die ganze Ausweichung nur wenige Minuten beträgt, mit einer solchen Schärfe beobachten, dass man bei gehöriger Aufmerksamkeit niemals um ein ganzes Zehntheil einer Zeitsecunde ungewiss bleibt. Die beträchtliche Dauer einer Schwingung (bei den am kräftigsten magnetisirten Nadeln etwa 14 Secunden) und die grosse Langsamkeit, mit welcher der Schwingungsbogen abnimmt, gewähren hiebei noch andere höchst schätzbare Vortheile. Man braucht nur ein paar Schwingungen beobachtet zu haben, um die Dauer Einer Schwingung schon so scharf zu kennen, dass man dann die Nadel sich selbst überlassen darf, und doch wenn man nach einer oder selbst mehreren Stunden wieder hinzukommt, über die Anzahl der Schwingungen, welche die Nadel in der Zwischenzeit gemacht hat, durchaus nicht ungewiss ist. Man kann mit so kleinen Schwingungen anfangen (etwa mit so grossen, wie die sind, bei denen man sonst aufzuhören pflegt), dass die (übrigens äusserst leicht zu berechnende) Reduction auf unendlich kleine Schwingungen fast unmerklich wird, und doch sind dann nach 6 und mehreren Stunden die Schwingungen noch immer gross genug, um die Antritte mit aller nöthigen Schärfe beobachten zu können.

Zeigen sich in den Beobachtungen zuweilen noch Anomalien, welche aber stets *so* klein sind, dass sie bei den früheren Einrichtungen gar nicht erkennbar gewesen sein würden, so sind solche einzig dem in dem jetzigen Locale nicht immer *ganz* zu vermeidenden Luftzuge zuzuschreiben. Sie würden fast ganz wegfallen, wenn die Öffnung des Kastens mit einem Planglase verschlossen würde,

welches aber eine sehr grosse Vollkommenheit haben müsste. Dem Verfasser stand bisher ein solches nicht zu Gebote, und jedenfalls würde damit immer ein unangenehmer Lichtverlust verbunden sein.

Zu den bisher bemerkten Vortheilen dieser Einrichtungen kann man noch den hinzufügen, dass der Beobachter stets in einer grossen Entfernung von der Nadel bleibt, während er derselben bei den früheren Verfahrungsarten sehr nahe kommen muss, und so, auch wenn sie ganz in einem Glaskasten eingeschlossen ist, durch seine eigene Wärme, durch die Wärme einer Beleuchtungslampe, oder durch Eisen oder selbst Messing, welches er vielleicht bei sich führt, auf die Nadel störend einzuwirken Gefahr läuft.

Der Vortheil, welchen starke schwere Nadeln, deren sich der Verfasser ausschliesslich bedient, darbieten, ist so einleuchtend, dass man es unbegreiflich finden muss, dass man sich zu den meisten magnetischen Beobachtungen, namentlich für die Schwingungsdauer, bisher immer nur äusserst kleiner Nadeln bedient hat. Es würde vielmehr vortheilhaft sein, die von dem Verfasser bisher angewandten Dimensionen noch weit zu überschreiten, was auch schon eine versuchsweise gebrauchte Nadel von mehr als zwei Pfund Gewicht bestätigt hat. Der Verfasser ist überzeugt, dass bei Anwendung von vier- oder sechspfündigen Nadeln, wobei kleine Luftbewegungen keinen merklichen Einfluss mehr haben werden, die magnetischen Beobachtungen eine Schärfe erhalten können, die der der feinsten astronomischen Beobachtungen durchaus nicht nachsteht. Freilich muss man dann noch viel stärkere Aufhängungsfäden anwenden, deren Torsion eine grössere Reaction ausüben wird; allein dies ist ganz und gar kein Grund dagegen, da, für feine Resultate, die Torsionskraft des Fadens doch nie ignorirt werden darf, sondern vielmehr, was auch gar keine Schwierigkeit hat, jederzeit genau mit in Rechnung gebracht werden muss.

Die beschriebenen Apparate dienen ausser dem Hauptzweck noch zu einem andern, der, obgleich er mit jenem nicht in unmittelbarer Verbindung steht, hier doch mit einigen Worten erwähnt werden mag. Sie sind nemlich die schärfsten und bequemsten Galvanometer, sowohl für die stärksten als für die schwächsten Kräfte eines galvanischen Stroms, und es wird gar keine Schwierigkeit haben, auch diese Messungen auf *absolute* Maasse zurückzuführen. Um die stärksten Kräfte zu messen, braucht man nur den Leitungsdraht in beträchtlicher Entfernung (wenigstens mehrere Fuss) unterhalb oder oberhalb der

Nadel im magnetischen Meridian einfach hinzuführen; für sehr schwache Kräfte verbindet man damit einen Multiplicator, welcher um den die Nadel enthaltenden Kasten gewunden ist. Der Verfasser hat einige Versuche mit einem Multiplicator von 68 Drahtwindungen, die eine Drahtlänge von 300 Fuss geben, gemacht: hier bedarf es keiner grossen Plattenpaare; ein Paar kleine Knöpfe, ja selbst die blossen Enden von Drähten aus verschiedenem Metall in gesäuertes Wasser eingetaucht, bringen einen Strom hervor, der sich in einer Bewegung des Skalenbildes von vielen hundert Skalentheilen sichtbar macht; bei Anwendung von ein Paar Platten von sehr mässiger Grösse fliegt hingegen im Augenblick der Schliessung der Kette das ganze Skalenbild pfeilschnell durch das Gesichtsfeld des Fernrohrs. Man übersieht leicht, wie sich durch diese Mittel die Abmessungen an galvanischen Strömungen mit einer Schärfe und Bequemlichkeit machen lassen, wovon die bisherigen mühsamen Methoden vermittelst beobachteter Schwingungszeiten weit entfernt bleiben; man kann hier, mit buchstäblicher Wahrheit, die allmähliche und bekanntlich anfangs schnelle Abnahme der Stärke eines Stroms von Secunde zu Secunde verfolgen. Will man noch anstatt einer einfachen Nadel eine doppelte (astatische) anwenden, so wird keine electromagnetische Kraft zu klein sein, um nicht noch mit äusserster Schärfe gemessen werden zu können. Es eröffnet sich demnach hier dem Naturforscher ein weites reiches Feld für die interessantesten Untersuchungen.

Was nun den eigentlichen Hauptinhalt der Abhandlung betrifft, nemlich die Entwickelung der mathematischen Theorie; verschiedene dem Verfasser eigenthümliche Verfahrungsarten, z. B. zur Ausmittelung des Moments der Trägheit der schwingenden Nadel, unabhängig von der Voraussetzung einer regelmässigen Gestalt; die zur Constatirung des oben erwähnten Grundgesetzes für die magnetischen Wirkungen angestellten Versuche; endlich die Versuche zur Bestimmung des Werths der Intensität des Erdmagnetismus an hiesigem Orte: so müssen wir deshalb auf die Abhandlung selbst verweisen. Nur die letzten Resultate wollen wir hier noch summarisch anführen.

Schon vor der Einrichtung der beschriebenen Apparate hatte der Verfasser eine grosse Menge von Versuchen an Nadeln von den verschiedensten Dimensionen, bis zu dem Gewichte von einem halben Loth herab, angestellt, deren Resultate zwar sämmtlich den spätern ziemlich nahe kommen, aber, da sie auf viel unvollkommnern Hülfsmitteln beruhen, und weil es überhaupt unmöglich ist,

mit kleinern Nadeln eine grosse Schärfe zu erhalten, nicht mehr verdienen aufbewahrt zu werden. Dagegen mögen sämmtliche mit Hülfe der beschriebenen Apparate bisher erhaltene Resultate für die Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus hier Platz finden.

I	Mai 21	1.7820
II	Mai 24	1.7694
III	Jun. 4	1.7713
IV	Jun. 24—28	1.7625
V	Jul. 23, 24	1.7826
VI	Jul. 25, 26	1.7845
VII	Sept. 9	1.7764
VIII	Sept. 18	1.7821
IX	Sept. 27	1.7965
X	Octob. 15	1.7860

Als Einheiten liegen hiebei das Millimeter, das Milligramm und die Zeitsecunde zum Grunde: *wie* aber das Maass jener Intensität durch diese Einheiten bestimmt ist, kann hier nicht entwickelt werden: übrigens bleiben die Zahlen dieselben, wenn die Raumeinheit und die Gewichtseinheit (eigentlich Masseneinheit) in gleichem Verhältnisse geändert werden. Diese Versuche unterscheiden sich theils durch die dabei beobachtete geringere oder grössere Sorgfalt, theils durch die angewandten Nadeln, theils durch die Plätze, auf welche sie sich beziehen.

Die Versuche VII. VIII. IX sind in jeder Beziehung so sorgfältig ausgeführt, wie es nur der Apparat in seiner jetzigen Gestalt verstattet, namentlich sind auch die dabei vorkommenden Distanzen mit mikroskopischer Schärfe gemessen. Bei den Versuchen IV. V. VI. X sind einige Operationen mit etwas geringerer Sorgfalt ausgeführt, und die drei ersten Versuche stehen in dieser Beziehung noch weiter zurück.

Zu den acht ersten Versuchen haben zwar verschiedene, aber an Grösse und Gewicht nicht sehr ungleiche Nadeln (Gewicht zwischen 400 und 440 Grammen) gedient; die Hauptnadel im Versuch X wiegt 1062 Gramme; der Versuch IX hingegen ist mit einer sehr viel kleineren Nadel (Gewicht 55 Gramme) angestellt, bloss um zu sehen, welche Genauigkeit, bei Beobachtung jeder sonstigen

Vorsichtsmassregel, sich mit einer so kleinen Nadel erreichen lasse: die Zuverlässigkeit des Resultats aus diesem Versuche ist demnach den übrigen weit nachzusetzen.

Die Versuche VII...X sind an Einem und demselben Platze in der Sternwarte angestellt, die frühern hingegen an andern Plätzen, theils in der Sternwarte, theils in den Wohnzimmern des Verfassers. Von allen diesen Versuchen konnte demnach kein eigentlich reines Resultat erhalten werden, da das in Gebäuden, und vorzüglich in der Sternwarte selbst, vorhandene Eisen, durch den Erdmagnetismus selbst magnetisch geworden, auf die Nadel reagirt, und seinen Einfluss mit dem des Erdmagnetismus vermischt. Die Plätze sind übrigens immer so gewählt, dass weder feste noch bewegliche Eisenmassen in der *Nähe* waren: allein einflusslos sind auch die entferntern gewiss nicht geblieben. Indessen darf man doch nach der blossen Ansicht der verschiedenen Resultate vermuthen, dass die aus fremdem Einfluss herrührende Modification des Erdmagnetismus an keinem dieser Plätze den hundertsten Theil des Ganzen übersteigt. Ein eigentlich reines, und der Schärfe, welche die Methode an sich verträgt, angemessenes Resultat, wird man aber nur in einem eigenen Local, wo alles Eisen gänzlich entfernt ist, erhalten können.

Um die Intensität der *ganzen* Kraft des Erdmagnetismus zu erhalten, müssen die gefundenen Zahlen noch mit der Secante der Inclination multiplicirt werden. Der Verfasser beabsichtigt, auch dieses Element in Zukunft nach eigenthümlichen Methoden zu behandeln: einstweilen hat er am 23. Junius mit dem Inclinatorium des physicalischen Cabinets $68^{0}\,22'\,52''$ gefunden, welches Resultat indessen, da die Beobachtung in der Sternwarte, also nicht frei von fremdem Einfluss, angestellt ist, leicht um mehrere Minuten dadurch verändert sein kann.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1840 März 26.

Der Königl. Societät der Wissenschaften ist am 9. März von dem Hofrath Gauss eine Vorlesung überreicht mit der Überschrift:

Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte,

deren Gegenstand hier, so weit die Bestimmung dieser Blätter es verstattet, näher bezeichnet werden soll.

Wenn man zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen zwei magnetische Flüssigkeiten annimmt, deren gleichnamige Theile einander abstossen, die ungleichnamigen einander anziehen, so besteht das Magnetisirtsein eines Körpers in der *Scheidung* der in ihm enthaltenen Flüssigkeiten. Nach dem ersten Eindrucke des sinnlichen Scheines ist man geneigt, diese Scheidung an einem Magnetstabe sich so vorzustellen, dass das eine Ende nur die nördliche Flüssigkeit, das andere die südliche enthalte: allein genauere Überlegung zeigt bald die Unstatthaftigkeit einer solchen Vorstellungsart, und die Nothwendigkeit, die Scheidung nur in den kleinsten für uns unmessbaren Theilen des Trägers der Flüssigkeiten (Stahls oder Eisens) anzunehmen, so dass jeder *messbare* Theil des Trägers nach der Scheidung wie vor derselben immer gleiche Quantität beider Flüssigkeiten enthält. Wenn nun aber in physicalischen Schriften auf dem einen

Blatte die richtige Vorstellungsart gelehrt, und doch auf dem folgenden wieder von dem freien nördlichen Magnetismus, der sich in dem einen Ende des Magnetstabes, und dem südlichen, der sich in dem andern befinden soll, geredet wird, so scheint eine solche schwankende Sprache die Begriffe zu verwirren, und wissenschaftlicher Präcision abzusagen. In diese Unklarheit kann nur Licht gebracht werden durch ein Theorem, welches in der *Intensitas vis magneticae terrestris* Art. 2 angekündigt ist, und darin besteht, dass anstatt irgend welcher Vertheilung der magnetischen Flüssigkeiten innerhalb eines begrenzten körperlichen Raumes substituirt werden kann eine ideale Vertheilung auf der Oberfläche dieses Raumes mit dem Erfolge, dass von dieser idealen Vertheilung in jedem Punkte des äussern Raumes genau dieselbe Wirkung ausgeübt wird, wie von jener wirklichen. Auch in der *Allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus* (im dritten Jahrgange der von dem Verf. gemeinschaftlich mit Hrn. Prof. Weber herausgegebenen *Resultate des magnetischen Vereins*) hat der Verf. sich auf dieses Theorem bezogen, indem er bemerkt hat, dass es zwar unmöglich ist, die wirkliche Vertheilung des Magnetismus im Innern der Erde zu erforschen, dass aber die äquivalirende ideale Vertheilung auf der Erdoberfläche in unserm Bereiche liegt; eine graphische Darstellung dieser idealen Vertheilung, nach der erwähnten Theorie, ist bereits gezeichnet und lithographirt, und wird in dem magnetischen Atlas mit enthalten sein, der in Kurzem mit dem vierten Theile der *Resultate* erscheinen wird.

Was nun die Begründung des in Rede stehenden Theorems betrifft, so erfordert dieselbe eine ziemlich zusammengesetzte mathematische Zurüstung; das Theorem selbst erscheint als ein specieller Fall eines allgemeinern, welches seiner Seits das letzte Glied einer Kette genau zusammenhängender allgemeiner Lehrsätze bildet. Die vollständige Entwickelung dieser Untersuchungen ist der Gegenstand der vorliegenden Abhandlung. Es ist jedoch nicht die Meinung, dass die Zwischensätze bloss wie Mittel zu dem angeführten Zwecke betrachtet werden sollen, sondern sie nehmen als allgemeine Untersuchungen über die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte (wovon die magnetischen nur ein einzelner Fall sind) ein selbstständiges Interesse in Anspruch: allein in das Einzelne hier näher einzugehen, würde eine grössere Ausführlichkeit erfordern, als der Raum dieser Blätter verstattet. Nur ein paar der Lehrsätze, die ohne grosse Vorbereitung verständlich zu machen sind, und mit

Untersuchungen anderer Mathematiker in einiger Berührung stehen, mögen hier als Proben erwähnt werden.

I. Eine Gleichgewichtsfläche in Beziehung auf Massen, die anziehende oder abstossende Kräfte ausüben, heisst bekanntlich jede Fläche, in deren sämmtlichen Punkten die Resultante der Kräfte entweder gegen die Fläche normal ist, oder selbst verschwindet. Eins der Theoreme ist nun folgendes: Wenn eine geschlossene Fläche eine Gleichgewichtsfläche für die Anziehungs- oder Abstossungskräfte von Massen ist, die sich sämmtlich im äusseren Raume befinden, so ist die Resultante der Kräfte so wohl in jedem Punkte jener Fläche, als auch in jedem Punkte des ganzen innern Raumes nothwendig $= 0$.

Poisson bemerkt in seiner berühmten Abhandlung über die Vertheilung der Electricität an der Oberfläche leitender Körper, dass es zur Erhaltung eines beharrlichen electrischen Zustandes eines electrisirten leitenden Körpers nicht zureichend sei, dass die innere Grenzfläche der freien an der Oberfläche des Leiters befindlichen Electricität eine Gleichgewichtsfläche sei, sondern noch ausserdem erforderlich, dass diese Electricität auch in keinem Punkte des innern Raumes Anziehung oder Abstossung ausübe.

Das oben erwähnte Theorem beweist dagegen, dass allerdings die erste Bedingung allein hinreicht, in sofern sie die zweite als eine nothwendige Folge schon in sich begreift.

II. Ein zweites Theorem bezieht sich auf den andern Fall, wo die anziehenden oder abstossenden Massen sich innerhalb des von einer geschlossenen Fläche begrenzten Raumes befinden. Hier wird in jedem Punkte der Fläche, wenn sie eine Gleichgewichtsfläche ist, die resultirende Kraft nach Einerlei Seite gerichtet sein, auch wenn anziehende und abstossende Massen zugleich vorhanden sind; je nachdem nemlich das Aggregat der ersteren, oder das der anderen das grössere ist, wird die Resultante in allen Punkten nach innen oder nach aussen gerichtet sein: ist aber das Aggregat der anziehenden Massen dem der abstossenden gleich, so wird, wenn es überhaupt eine geschlossene und einschliessende Gleichgewichtsfläche gibt, die Resultante der Kräfte in jedem Punkte derselben, und zugleich im ganzen unendlichen äussern Raume, $= 0$ sein.

III. In der Abhandlung ist ein strenger Beweis geführt, nicht bloss dafür, dass auf jeder gegebenen geschlossenen Fläche eine gegebene Gesammtmasse so nach der Stetigkeit vertheilt gedacht werden kann, dass in jedem

Punkte des innern Raumes die Resultante der Anziehungs- oder Abstossungskräfte $= 0$ wird, sondern auch, dass dies allemal *nur auf eine einzige Art* möglich ist. Gerade das Gegentheil dieses Theorems war unlängst von einem geschickten Geometer behauptet, in einer der Pariser Academie der Wissenschaften gemachten Mittheilung (*Comptes rendus* 1839. Nr. 6).

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1841 Januar 18.

Am 10. December v. J. ist der Königl. Societät von dem Hofrath Gauss eine Vorlesung mit der Ueberschrift:

Dioptrische Untersuchungen

überreicht, von welcher hier ein kurzer Bericht abzustatten ist.

Die Betrachtung des Weges, welchen durch eine beliebige Anzahl auf einer gemeinschaftlichen Axe geordneter Linsengläser solche Lichtstrahlen nehmen, die gegen die Axe sehr wenig geneigt sind, und der davon abhängenden Erscheinungen, bietet viele durch Allgemeinheit und Eleganz merkwürdige Resultate dar, mit deren Aufsuchung sich mehrere der ersten Mathematiker beschäftigt haben. Der von Cotes aufgefundene Lehrsatz wurde seiner Zeit mit einer Art von Bewunderung aufgenommen, und man hat sogar auf denselben (obwohl vielleicht nur durch ein Misverständniss der darauf bezüglichen Stelle in Smith's Optik) den bekannten ehrenden Nachruf bezogen, mit welchem Newton den frühen Tod jenes genialen Geometers beklagte. Euler's Arbeiten umfassten alle Theile der Dioptrik. Ganz besonders aber ist hierher zu rechnen die schöne und prägnante Behandlungsart des in Rede stehenden Gegenstandes durch Lagrange in den Schriften der Berliner Academie der Wissenschaften von 1778, wozu später noch schätzbare Zusätze theils von ihm selbst, theils von Piola und Möbius hinzu gekommen sind. Nach solchen Arbeiten könnte die Ernte auf diesem Felde voll-

endet scheinen: gleichwohl bleibt noch Mehreres zu wünschen übrig. Allen jenen Lehrsätzen liegt die Voraussetzung zum Grunde, dass die Dicke der Linsen als unendlich klein betrachtet werde, eine Voraussetzung, an welche man so gewöhnt ist, dass sie meistens, als sich von selbst verstehend, gar nicht einmal erwähnt wird, mit welcher aber bei der Anwendung auf wirkliche Fälle jene Lehrsätze nur Annäherungen, zuweilen nur rohe Annäherungen bleiben. Diese fast allgemeine Vernachlässigung der Dicke der Linsen erstreckt sich zum Theil selbst auf die ersten Begriffsbestimmungen der Dioptrik, bei welchen der mathematische Sinn von einer schwankenden Unbestimmtheit unangenehm berührt wird. Wenn von der Brennweite einer Linse ohne nähere Bestimmung geredet wird, so weiss man noch nicht, ob die Entfernung des Brennpunktes von der nächsten Oberfläche der Linse, oder vom sogenannten optischen Mittelpunkte derselben, oder von dem zwischen beiden Oberflächen in der Mitte liegenden Punkte, oder die von allen diesen Bestimmungen wieder verschiedene Grösse gemeint ist, welche bei der Vergleichung der scheinbaren Grösse eines unendlich entfernten Gegenstandes mit seinem Bilde zum Grunde gelegt werden muss.

Es ist nun zwar nicht zu leugnen, dass in sehr vielen Fällen die Vernachlässigung der Dicke der Linsen zulässig, oder nützlich, oder sogar nothwendig sein kann, wo entweder an grösserer Schärfe nichts gelegen ist, oder, wo eine die Dicke der Linsen mit berücksichtigende Schärfe in unerträgliche Weitläufigkeiten führen würde, oder wo eine scharfe Rechnung durch vorgängige genäherte Überschläge erst vorbereitet werden soll: allein eben so gewiss ist, dass die Würde der Wissenschaft Präcision in ihren Begriffsbestimmungen erfordert, und dass man sich der Aufopferung der Schärfe gern in allen Fällen enthoben sieht, wo es ohne erheblichen oder ohne allen Nachtheil für die Einfachheit und Geschmeidigkeit der Resultate möglich ist.

Indem die vorliegende Abhandlung zum Hauptzwecke haben sollte, zu zeigen, dass den oben angedeuteten Lehrsätzen eine Erweiterung gegeben werden kann, in der sie unter strenger Berücksichtigung der Dicke der Linsen gar nichts von ihrer Einfachheit verlieren, war es nothwendig, auf die ersten Grundlehren der Dioptrik in einer neuen Darstellungsart zurück zu kommen. Dieser, und dem ganzen Inhalte der Abhandlung Schritt vor Schritt zu folgen, kann hier nicht der Ort sein, wäre auch um so überflüssiger, da die Abhandlung selbst bereits gedruckt ist. Wir beschränken uns daher hier auf den Versuch, anschaulich zu

machen, wie der Fall eines Systems von Linsen mit endlicher Dicke auf den Fall eines Systems unendlich dünner Linsen zurück geführt wird.

An dem Wege jedes Lichtstrahls, der durch eine Glaslinse geht, ohne mit ihrer Axe zusammen zu fallen, sind drei Theile zu unterscheiden; der erste, vor dem Eintritte in die Glaslinse; der zweite, innerhalb derselben; der dritte, nach dem Austritte. In jedem Systeme von Lichtstrahlen, die unter sich parallel, oder aus Einem Punkte divergirend, oder nach Einem Punkte zu convergirend, auf eine Glaslinse fallen, ist Einer, von dessen Wege der dritte Theil dem ersten parallel wird: ein solcher Strahl heisst ein Hauptstrahl. Sämmtliche Hauptstrahlen haben die merkwürdige Eigenschaft, dass der zweite Theil ihres Weges, nöthigenfalls vorwärts oder rückwärts geradlinig verlängert, die Axe der Linse in einem und demselben Punkte trifft: diesen Punkt haben einige Schriftsteller über Dioptrik den optischen Mittelpunkt der Linse genannt. Er liegt innerhalb der Linse, wenn sie convex-convex oder concav-concav ist; in der krummen Oberfläche, wenn sie plan-convex oder plan-concav ist; ausserhalb, und zwar immer auf der Seite der stärkern Krümmung, wenn die Linse convex-concav oder concav-convex ist. Diese Eigenschaft macht zwar den erwähnten Punkt allerdings merkwürdig; allein da er sonst gar keine practisch nützliche Brauchbarkeit hat, so ist die Belegung desselben mit einer besondern Benennung eine kaum verdiente Auszeichnung, die vielleicht sogar dadurch nachtheilig geworden ist, dass sie, wie es scheint, hie und da zu dem Irrthume verleitet hat, als ob man die bekannten einfachen Relationen, welche zwischen einem Objecte und seinem Bilde für eine Linse von unendlich kleiner Dicke Statt finden, auf eine Linse von endlicher Dicke ohne weiteres bloss vermittelst der Beziehung auf ihren optischen Mittelpunkt übertragen, oder mit anderen Worten, für eine Linse von endlicher Dicke eine andere von unendlich kleiner Dicke in dem optischen Mittelpunkte der erstern substituiren dürfte.

Eine ganz andere Wichtigkeit haben hingegen diejenigen zwei Punkte, wo der erste und der dritte Theil des Weges eines Hauptstrahls, nöthigenfalls vorwärts und rückwärts verlängert, die Axe der Linse schneiden. Auch sie haben die Eigenschaft, für sämmtliche Hauptstrahlen dieselben zu sein, und verdienen durch besondere Benennungen ausgezeichnet zu werden: der Verfasser nennt sie den *ersten* und den *zweiten Hauptpunkt der Linse*. Sie haben aber zugleich die wichtige und wie es scheint bisher nicht bemerkte Eigenschaft, dass alle ausfah-

renden Strahlen sich relativ gegen den zweiten Hauptpunkt genau so verhalten, wie sie sich gegen den ersten verhalten würden, wenn die einfallenden Strahlen anstatt der wirklichen Linse eine andere von unendlich kleiner Dicke und von derselben Brennweite im ersten Hauptpunkte befindliche träfen. Als Brennweite der wirklichen Linse gilt hier die Entfernung ihres Brennpunktes, d. i. des Vereinigungspunktes der parallel mit der Axe einfallenden Strahlen, von dem zweiten Hauptpunkte, und eben diese Grösse ist es auch, die bei der Vergleichung der scheinbaren Grösse eines unendlich entfernten Gegenstandes mit der Grösse seines Bildes zum Grunde gelegt werden muss. Hiedurch erhält also der Begriff der Brennweite eine scharf bestimmte Haltung, und es mag zugleich bemerkt werden, dass dann die Brennweite *dieselbe* bleibt, die Strahlen mögen von der einen oder von der andern Seite einfallen, nur dass natürlich im zweiten Falle der vorige erste Hauptpunkt an die Stelle des zweiten tritt. Man darf also, so lange man sich auf die gegen die Axe sehr wenig geneigten Strahlen beschränkt (oder von der Abweichung wegen der Kugelgestalt abstrahirt), alle Rechnungen über Linsen von endlicher Dicke ganz eben so führen, als wäre die Dicke unendlich klein und der Zwischenraum zwischen den beiden Hauptpunkten, in deren einem man sich die ideale Linse vorstellt, gleichsam vernichtet. Übrigens ist dieser Zwischenraum nahe dem dritten Theile der Dicke der Linse gleich, wenn sie von gewöhnlichem Glase, und etwas grösser (nahe $\frac{7}{12}$ der Dicke), wenn sie von Flintglas ist.

Die Begriffe von Hauptstrahlen und Hauptpunkten und deren Anwendungen lassen sich auch auf ein System von mehreren Linsen auf gemeinschaftlicher Axe ausdehnen, während von einem optischen Mittelpunkte in der obigen Bedeutung dann gar nicht mehr die Rede sein kann. Für ein achromatisches Objectiv, dessen beide Bestandtheile einander beinahe berühren, als ein Ganzes betrachtet, wird der Abstand der beiden Hauptpunkte von einander sehr nahe der Summe der beiden respectiven Abstände in den einzelnen Linsen gleich.

Über die Methoden, welche in der Abhandlung zur Bestimmung der Brennweiten von Linsengläsern obigen Grundlagen gemäss entwickelt werden, können wir uns hier nicht verbreiten. Am Schlusse der Abhandlung sind noch Bemerkungen beigefügt, wodurch die eigenthümlichen Vorzüge, deren die so genannten dialytischen Fernröhre in Beziehung auf Farbenreinheit fähig sind, in ihr wahres Licht gesetzt werden.

VERSCHIEDENE AUFSÄTZE

ÜBER

MAGNETISMUS.

ERDMAGNETISMUS UND MAGNETOMETER.

Jahrbuch für 1836 herausgegeben von Schumacher. Stuttgart und Tübingen 1836.

Zwei grosse Naturkräfte sind auf der Erde allerorten und in jedem Augenblick gegenwärtig: die Schwere und die erdmagnetische Kraft.

Die Wirkungen der Schwerkraft sehen wir auf jedem unsrer Schritte uns begegnen. Die Wirkungen der erdmagnetischen Kraft fallen nicht von selbst in die Augen, sondern wollen gesucht sein: Jahrtausende vergingen, ohne dass man nur die Existenz dieser Kraft wusste. Von der erstern Kraft werden alle Verhältnisse des physischen Lebens durchdrungen, von der andern unmittelbar wenig oder gar nicht berührt.

Beide Kräfte haben das gemein, dass sie Bewegungen in bestimmten Richtungen hervorzubringen streben, und dass die Grösse dieser Bewegungen bestimmten Gesetzen unterworfen ist: aber welche Verschiedenheit, wenn man die Äusserungen beider Kräfte näher betrachtet!

Zuerst in Beziehung auf die Gegenstände der Kräfte. Der Schwere unterworfen sind alle materiellen Dinge, vielleicht, und auch nur vielleicht, einige wenige Stoffe ausgenommen, die man Imponderabilien nennt, und hypothetisch annimmt, weil wir mit ihrer Annahme eine Unermesslichkeit von Erscheinungen erklären, und ohne sie nicht erklären können: unter Erklären versteht aber der Naturforscher nichts anderes, als das Zurückführen auf möglichst wenige und möglichst einfache Grundgesetze, über die er nicht weiter hinaus kann, sondern

sie schlechthin fordern muss, aus ihnen aber die Erscheinungen erschöpfend vollständig als nothwendig ableitet.

Dagegen äussert die erdmagnetische Kraft uns erkennbare Wirkungen nur auf einige Arten von Körpern, auf diejenigen nemlich, auf welche durch wirkliche Magnete, natürliche oder künstliche, gewirkt werden kann, also wenn wir die erst in der jüngsten Zeit entdeckte Wechselwirkung zwischen Magnetismus und galvanischen Strömen beiseite setzen, auf magnetische oder magnetisirbare Körper. Das weiche Eisen *macht* die erdmagnetische Kraft magnetisch ohne Beharrlichkeit; hingegen einen schon mit beharrlichem Magnetismus versehenen Körper, sei es ein natürlicher Magnet, oder ein künstlicher aus gehärtetem Stahl, *bewegt* die erdmagnetische Kraft nach bestimmten Gesetzen. Von der letztern Wirkung soll hier allein die Rede sein: die der Wirkung unterworfenen Träger eines beharrlichen Magnetismus, am besten von nadelförmiger oder länglich prismatischer Gestalt, sollen, welche Grösse sie auch haben mögen, Magnetnadeln heissen.

Durch die Richtung der Schwerkraft an jedem Orte wird die gerade Linie bestimmt, die wir eine Verticallinie nennen, und der Gegensatz des Oben und Unten. Die Astronomie lehrt uns, die Lage dieser Linie gegen den Erdäquator und gegen eine willkürlich gewählte Meridianebene bestimmen, und liefert dadurch die mathematischen Grundlagen der Geographie. Unsre feinsten Beobachtungen vermögen nicht, in der Richtung der Schwerkraft an einem gegebenen Orte auch nur die geringste Veränderung zu erkennen, obwohl wir aus theoretischen Gründen sehr wohl wissen, dass diese Richtung unaufhörlichen Veränderungen unterworfen sein muss. Denn die Schwerkraft ist nur die Gesammtwirkung aller Theile des Erdkörpers, etwas modificirt durch die Centrifugalkraft vermöge der Rotationsbewegung, und durch die fremden Weltkörper: allein die ganze letztere unmittelbare Wirkung auf die Schwerkraft, und die mittelbare, durch die beständigen Bewegungen vieler Kubikmeilen von Wassermassen vermöge der Ebbe und Fluth, bleibt viel zu klein für das Messungsvermögen unsrer feinsten Instrumente: noch mehr verschwindet also die Wirkung von sonstigen Versetzungen von Massen auf der Erdoberfläche durch andere Natur- oder Menschenkräfte.

Ganz anders verhält es sich in dieser Beziehung mit der Richtung der erdmagnetischen Kraft. Scharf in sich bestimmt ist auch sie an jedem Orte, aber,

genau zu reden, nur in jedem Augenblick. Wir beziehen diese Richtung an jedem Orte auf die Verticallinie (oder, was auf dasselbe hinausläuft, auf die gegen diese normale Horizontalebene) und auf die Meridianebene. Den Winkel, welchen die Richtung der erdmagnetischen Kraft mit der Horizontalebene macht, nennen wir die Neigung (Inclination) der Magnetnadel; der Winkel zwischen derjenigen Verticalebene, in welcher sich jene Richtung befindet, und der Meridianebene ist die Abweichung (Declination) der Nadel. Diese beiden Elemente bestimmen die Richtung der erdmagnetischen Kraft vollständig: sie sind an verschiedenen Orten verschieden, aber sie sind an einem und demselben Orte nicht beständig, sondern immerwährenden Veränderungen unterworfen, auf die wir nachher zurückkommen werden.

Zunächst müssen wir aber die ungleiche Art, *wie* die beiden Kräfte nach ihren Richtungen wirken, näher betrachten. Die Schwerkraft treibt einen Körper, sobald keine Hindernisse im Wege stehen, in ihrer Richtung nach unten, und diese Bewegung wird immer schneller, so lange der Körper frei fallen kann. Die Schwerkraft bringt einen Körper, der sich frei bewegen kann, nur in eine fortschreitende (progressive) Bewegung, nicht in eine drehende (rotatorische).

Mit der erdmagnetischen Kraft verhält es sich gerade umgekehrt: diese kann den Körpern, welche sie in Bewegung setzt, nur eine drehende, nie eine fortschreitende Bewegung ertheilen. Wollen wir also die Wirkung der erdmagnetischen Kraft auf einen Körper rein beobachten, so müssen wir zuvörderst die progressiven Bewegungen, die die Schwere hervorbringen könnte, ausschliessen oder unmöglich machen. Eine Magnetnadel, die auf ihrer untern Seite eine kegelförmige Vertiefung (ein Hütchen) hat, und damit auf einer feinen Spitze hängt, befindet sich in diesem Falle. Trifft dieser Aufhängepunkt (die Spitze des Hütchens) genau mit dem Schwerpunkt der Nadel zusammen, so ist letztere gegen die Schwerkraft ganz indifferent, und zeigt sich nun einer Kraft unterwürfig, die sie in die Richtung des Erdmagnetismus zu bringen strebt. Ist die Nadel schon Anfangs in dieser Lage, so bleibt sie darin: trifft aber der Erdmagnetismus sie Anfangs in einer andern Lage, so setzt letzterer sie in eine Bewegung, vermöge welcher sie sich jener Lage nähert, und (weil die Schnelligkeit der Bewegung so lange zunimmt, als jene Lage noch nicht erreicht ist) sogar über dieselbe hinausgeht, wo dann aber die erdmagnetische Kraft, stets die Nadel der Normalrich-

tung näher zu bringen strebend, die Schnelligkeit der Bewegung fortwährend wieder vermindert, bis diese vernichtet ist, und rückwärts geht. Auf diese Weise macht die Nadel *Schwingungen*, desto grössere, je mehr die ursprüngliche Lage von der Normalrichtung abwich, und die Normalrichtung liegt in oder nahe bei der Mitte der Schwingungen. Das erstere würde genau der Fall sein, wenn nicht äussere Hindernisse, der Widerstand der Luft und die Reibung im Hütchen die Bewegung nach und nach lähmten: diese Hindernisse vermindern nach und nach die Grösse des Schwingungsbogens, bis zuletzt die Nadel in der Richtung der erdmagnetischen Kraft zur Ruhe kommt.

Man pflegt jedoch die Spitze des Hütchens, oder den Aufhängepunkt, um welchen die Nadel sich frei bewegen kann, nicht im Schwerpunkt der Nadel, sondern etwas höher, anzubringen, wodurch sich die Erscheinung etwas anders gestaltet. Es entsteht dann ein Conflict der Schwerkraft mit der erdmagnetischen Kraft, und die Nadel stellt sich nicht mehr genau in die Richtung der letztern Kraft, aber ihr so nahe, wie es dieser Conflict verstattet. Die Schwerkraft strebt nemlich, den Schwerpunkt senkrecht unter den Aufhängungspunkt zu bringen; bei der Stellung der Nadel, genau nach der Richtung der erdmagnetischen Kraft, würde aber der Schwerpunkt einen etwas höhern Platz erhalten (wenn nicht zufällig die gegenseitige Lage beider Punkte in der Nadel schon die zu jener Richtung erforderliche ist): die Natur, stets die distributive Gerechtigkeit auf das strengste verwaltend, ertheilt daher der Nadel, nach Maassgabe der Stärke beider Kräfte, eine vermittelnde Zwischenlage, wobei von der genauen Inclination weniger oder mehr aufgeopfert werden muss, die aber nothwendig mit dem magnetischen Meridian, d. i. derjenigen Verticalebene, in der sich die eigentliche Richtung der erdmagnetischen Kraft befindet, übereinstimmt. Wie allen Geschäften eine verständige Theilung stets zum Vortheil gereicht, so trennt auch der Naturforscher die Ausmittelung der Declination von der Inclination, und hängt, wo es ihm zunächst um erstere zu thun ist, seine Nadel nicht im Schwerpunkt auf, sondern so, dass eben die Declination am besten hervortritt: er hängt sie so auf, dass sie horizontal schwebt. Der Seefahrer erreicht dieses, indem er, wenn er in den Bereich einer beträchtlich geänderten Inclination kommt, seine Nadel auf der einen Seite mit einem leichten, gegen den Magnetismus indifferenten Körperchen, z. B. einem Stückchen Wachs, belastet. Der Naturforscher, der für feinere Zwecke die Nadel gar nicht mit einem Hütchen, sondern an einem feinen Faden aufhängt, legt sie in ein an das untere Ende des Fadens geknüpftes Schiffchen, in welchem er sie, so viel zu obigem Zweck nöthig, verschiebt, oder auch sie mit einem leichten Laufgewicht belastet.

Die Wirkungsart unsrer beiden Naturkräfte stellt sich hienach wesentlich verschieden dar: es wird aber interessant sein, zu zeigen, wie die Schwerkraft unter geeigneten Umständen ganz analoge Wirkungen hervorbringen kann. Die Hydrostatik lehrt, dass ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper so viel an seinem Gewicht verliert, als das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit austrägt. Ein Körper, specifisch schwerer als Wasser, wird im Innern von Wasser auch noch in der Verticallinie nach unten getrieben, aber nur mit einer verhältnissmässig geringern Kraft; ein specifisch leichterer Körper hingegen nach oben, und steht also gleichsam unter dem Einfluss einer negativen Schwere; endlich ein fester Körper, genau von demselben specifischen Gewicht wie Wasser, wird weder nach unten, noch nach oben getrieben, sondern erhält sich in der Höhe, in welcher er in Ruhe sich einmal befindet. Sind diese Körper homogen, so erhalten sie in den beiden ersten Fällen auch nur progressive Bewegungen (insofern wir von dem Widerstande abstrahiren), und in dem letzten Fall verhält sich der Körper inmitten des Wassers völlig indifferent, als ob die Schwere für ihn gar nicht da wäre. Anders verhält es sich aber mit einem Körper, der aus Theilen von ungleichem specifischem Gewicht zusammengesetzt ist. Denken wir uns einen länglichen prismatischen Stab, dessen eine Hälfte von Elfenbein, die andere von Kork ist. Das specifische Gewicht des Elfenbeins übertrifft das des Wassers wenig mehr, als das specifische Gewicht des Korks gegen letzteres zurücksteht. Wir setzen diese kleine Ungleichheit des Unterschiedes hier bei Seite, oder denken uns, anstatt reinen Wassers, mit Salz soweit versetztes, dass das specifische Gewicht der Flüssigkeit genau mitten inne steht zwischen den specifischen Gewichten der beiden festen Theile des Stabs. Dieser Stab, im Innern einer Wassermasse, wird nun, da sein specifisches Gewicht im Ganzen dasselbe ist, wie das des Wassers, weder nach unten, noch nach oben, aber das Elfenbeinende wird nach unten, das Korkende nach oben getrieben: der Stab erhält keine progressive, wohl aber eine drehende Bewegung, wenn er sich nicht schon Anfangs in senkrechter Lage befand. Dasselbe wird auch noch gelten, wenn dieser Stab mit einer Holzart überlegt ist, die das specifische Gewicht des Wassers hat, oder auch, wenn in einem Stab aus solchem Holz an dem einen Ende ein Stück El-

fenbein, an dem andern ein eben so grosses Stück Kork eingelegt ist. Wir haben demnach hier ganz das Gegenstück von der Wirkungsart der erdmagnetischen Kraft, nur dass an die Stelle der dieser eigenthümlichen Richtung jetzt die Verticallinie getreten ist, und werden dadurch auf eine Vorstellungsart geführt, die zur Erklärung der Wirkung der erdmagnetischen Kraft auf die Magnetnadel dient. Wir nehmen nemlich zwei Stoffe an, auf welche diese Kraft unmittelbar auf ähnliche Art wirkt, wie die Schwerkraft auf alle ponderabeln Körper, indem sie dieselben, zwar in Einer bestimmten geraden Linie, aber in entgegengesetzten Richtungen, zu bewegen strebt. Diese beiden Stoffe müssen wir an die Magnetnadel fest gebunden voraussetzen (weil sonst die erdmagnetische Kraft nur die Stoffe *in* der Nadel, nicht diese selbst, bewegen würde); den einen an das eine Ende, den andern an das andere, und die Quantität des einen Stoffs muss in jeder Nadel der Quantität des andern genau gleich sein (weil sonst auch eine progressive Bewegung erfolgen müsste). Man nennt diese Stoffe magnetische *Fluida*, um ihre leichte Beweglichkeit in dem sich nicht zu beharrlicher Magnetisirung eignenden weichen Eisen zu bezeichnen, und unterscheidet sie durch die Zusätze nördliches und südliches Fluidum, indem dasjenige Ende der Nadel, welches das erstere trägt (der Nordpol), sich an den meisten Orten der Erde nach der Nordseite richtet. Das nördliche Fluidum pflegt man auch das positive, das südliche das negative zu nennen. Der Stahl ist dabei nur der Träger dieser Fluida, wie in dem vorhergehenden Gleichniss die Holzumgebung der Träger des Elfenbeins und Korks, und die erdmagnetische Kraft wirkt auf jenen nur mittelbar.

Diese Vorstellungsart bedarf aber noch einer Modification. Unser Elfenbein-Kork-Stab würde offenbar noch dieselbe Erscheinung (wenn auch in geringerer Stärke) darbieten, wenn er, anstatt Ein Stück Elfenbein und Ein eben so grosses Stück Kork zu enthalten, aus mehrern, immerhin auch sehr vielen, Paaren zusammengesetzt wäre, vorausgesetzt, dass diese Paare in gehöriger Ordnung liegen. Bei unserer ersten Voraussetzung würde der Stab seine Eigenschaft verlieren, wenn man ihn in der Mitte zerschnitte; bei der andern hingegen bleibt die Eigenschaft nach jeder Zerschneidung, wo nur kein zusammengehöriges Paar getrennt wird.

Die Erfahrung ergibt, dass, wenn ein Magnetstab in der Mitte, oder an irgend einer andern Stelle durchgebrochen wird, beide Stücke sich sogleich wieder als Magnete zeigen, die von der erdmagnetischen Kraft nur eine drehende, nie

eine progressive Bewegung erhalten. Wir sind daher genöthigt, anzunehmen, dass in der Magnetnadel die magnetischen Fluida zwar getrennt sind, aber nicht so, dass das eine Fluidum sich am einen, das andere am andern Ende befinde, sondern vielmehr so, dass wir die Nadel wie ein Aggregat von unzähligen für uns unmessbar kleinen Stahltheilchen betrachten müssen, deren jedes eben so viel nördliches wie südliches Fluidum in getrenntem Zustande enthält.

Wir haben bisher den Magnet nur in Beziehung auf diejenige Wirkung betrachtet, welche die erdmagnetische Kraft auf ihn ausübt, weil diese zunächst den Gegenstand des gegenwärtigen Aufsatzes ausmacht: viel länger war schon diejenige Wirkung bekannt, welche zwei Magnete auf einander ausüben, und die in einer gegenseitigen Anziehung der ungleichnamigen Pole und einer Abstossung der gleichnamigen besteht. Nach Beschaffenheit der Umstände können dadurch drehende und fortschreitende Bewegungen erregt werden. Es bedarf zur Erklärung dieser Phänomene nichts weiter, als noch anzunehmen, dass die magnetischen Fluida auf einander wirken, die gleichnamigen abstossend, die ungleichnamigen anziehend, und wir wissen jetzt aus scharfen Versuchen, dass die Stärke dieser Abstossung oder Anziehung zwischen zweien Theilchen solcher Flüssigkeiten eben so im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung steht, wie die allgemeine gegenseitige Anziehung aller ponderabeln Körper.

Nur kurz erwähnen wir endlich (da es nicht unmittelbar zu unserm gegenwärtigen Zweck gehört) der Wirkung der Magnete auf nicht magnetisirten Stahl und weiches Eisen, welche Wirkung bekanntlich in einer Anziehung besteht. Sie ist eine Folge des eben angeführten Verhaltens der magnetischen Flüssigkeiten, die in allem Stahl und Eisen als schon vorhanden angesehen werden müssen, und bei der Annäherung eines Magnets eine Scheidung erleiden, so dass jene Körper dadurch selbst magnetisch werden. Nur ist das weiche Eisen für sich nicht fähig, die Trennung der magnetischen Fluida in seinem Innern dauernd zu erhalten. Ein Stück weiches Eisen, mit einem Ende an einem Magnet hängend (oder ihm auch nur nahe gebracht), verhält sich so lange selbst wie ein Magnet, verliert aber nach der Trennung oder Entfernung von jenem diese Eigenschaft nach wenigen Augenblicken fast ganz wieder, während ein Stück gehärteten, aber noch nicht magnetisirten Stahls (in welchem die Trennung der magnetischen Flüssigkeiten schwerer geschieht, aber, einmal erfolgt, viel bleibender ist), theils überhaupt von einem Magnet schwächer angezogen wird, als weiches Eisen, theils

auch nach der Trennung den Grad von Magnetismus, welchen es in jener Verbindung erhalten hat, auf längere Zeit beibehält.

Wir kehren zu der erdmagnetischen Kraft zurück, deren Kenntniss erst vollständig wird, wenn man ausser ihrer Richtung auch ihre Stärke (Intensität) angeben kann. Um diese auszumessen, ist man auf folgende Art zu Werke gegangen.

Wir haben oben gesehen, unter welchen Umständen eine aufgehängte Magnetnadel in Schwingungen versetzt wird: erwägen wir jetzt näher, von welchen Umständen *die Dauer* einer Schwingung abhängt.

Zuerst ist diese Dauer, alles übrige gleich gesetzt, von der Grösse des Schwingungsbogens abhängig; jene ist desto kleiner, je kleiner dieser ist, so jedoch, dass bei immer abnehmenden Bögen die Dauer sich nur immer mehr einem Grenzwerthe nähert, ohne in mathematischer Schärfe solchen erreichen zu können. Das Verhältniss der Schwingungsdauer für jede Grösse des Schwingungsbogens zu dem Grenzwerthe kann man durch bekannte Formeln berechnen. Für eine Nadel z. B., welche einen Schwingungsbogen von 180 Grad in 23.6068 Secunden beschreibt, ist der Grenzwerth der Schwingungsdauer 20 Secunden, und folgende Übersicht gibt eine Vorstellung von der successiven Annäherung zu demselben für immer kleinere Bögen:

Schwingungsbogen.	*Schwingungsdauer.*
180 Grad.	23.6068 Secunden.
120 „	21.4636 „
60 „	20.3482 „
30 „	20.0860 „
20 „	20.0381 „
10 „	20.0095 „
8 „	20.0061 „
6 „	20.0034 „
4 „	20.0015 „
2 „	20.0004 „
1 „	20.0001 „

Man sieht daraus, dass bei Schwingungsbögen von mässiger Grösse der Unterschied einer Schwingungsdauer von dem Grenzwerthe kaum merklich ist.

Dieser Grenzwerth wird immer verstanden, so oft man von Schwingungsdauer schlechthin spricht, und in der herkömmlichen mathematischen Sprache als Schwingungsdauer für einen unendlich kleinen Bogen bezeichnet.

Zweitens hängt die Schwingungsdauer einer Nadel ab von der Stärke ihrer Magnetisirung. Behandelt man eine Anfangs schwach magnetisirt gewesene Nadel mit kräftigern Streichmitteln, so werden ihre Schwingungen schneller. Es gibt jedoch für jede Nadel einen bestimmten höchsten Grad von Magnetismus, den sie annehmen oder festhalten kann, und den man wohl die Sättigung nennt. Allein es ist von Wichtigkeit, hier zu bemerken, dass die Bestimmung dieses Sättigungspunkts der Erfahrung zufolge einer sehr grossen Schärfe nicht fähig zu sein scheint. Wenn man eine und dieselbe Nadel in öftern Wiederholungen auch mit den kräftigsten Mitteln magnetisirt, nachdem man dazwischen ihr den Magnetismus zum Theil wieder entzogen hatte, so geben doch die jedesmaligen Schwingungszeiten keineswegs einen *solchen* Grad von Übereinstimmung, als man für Normalbestimmungen fordern müsste.

Der dritte Umstand, welcher die Schwingungsdauer bestimmt, ist die Grösse der Nadel. Von zwei ungleich grossen Nadeln, die jede in ihrer Art gleich gut magnetisirt sind, wird die grössere langsamer schwingen. Grössere Dicke und Breite, so lange diese Dimensionen gegen die Länge noch sehr klein bleiben, hat dabei einen geringern Einfluss, als vergrösserte Länge. Eine grosse gut magnetisirte Nadel hat zwar einen stärkern Magnetismus, als eine kleinere, ja wenn beide ähnliche Gestalten haben, so wird man sie nur dann gleich gut in ihrer Art magnetisirt nennen können, wenn das Verhältniss des Magnetismus dasselbe ist, wie das der Grösse (dem Raume oder Gewichte nach): dass dann, dessen ungeachtet, die grössere langsamer schwingt, ist eine nothwendige Folge davon, dass der stärkere Magnetismus nicht bloss grössere Masse zu bewegen, sondern durch grössere Räume zu bewegen hat.

Viertens endlich ist die Schwingungsdauer abhängig von der Stärke der erdmagnetischen Kraft selbst. In der That muss eine gegebene Nadel, in bestimmter Stärke magnetisirt, schnellere oder langsamere Schwingungen machen, je nachdem die auf sie wirkende erdmagnetische Kraft stärker oder schwächer ist, und es bietet sich also ein Mittel dar, die Stärke dieser Kraft an verschiedenen Orten zu vergleichen, indem man *eine und dieselbe* Nadel daselbst schwingen lässt. Man weiss, dass eine doppelt schnellere Schwingung einer vierfach grössern Kraft,

eine dreifach schnellere Schwingung einer neunfach grössern Kraft entspricht u. s. w., so dass die Quadratzahl von der Anzahl der Schwingungen in einer beliebig gewählten Zeit, z. B. in einer Minute, als das Maass der Kraft angesehen werden kann. Übrigens ist hier immer die erdmagnetische Kraft zu verstehen, so weit sie in derjenigen Ebene wirkt, in welcher die Schwingung geschieht, mithin die ganze erdmagnetische Kraft, wenn die in ihrem Schwerpunkt aufgehängte Nadel in der Ebene des magnetischen Meridians schwingt, hingegen nur der horizontale Theil der erdmagnetischen Kraft, wenn die Nadel, oberhalb ihres Schwerpunkts aufgehängt, Schwingungen in horizontaler Ebene macht. Schwingungen der letztern Art lassen sich viel bequemer und schärfer beobachten, als die der erstern, und für die Anwendung sind jene eben so brauchbar, da das Verhältniss der ganzen erdmagnetischen Kraft zu ihrem horizontalen Theile auf bekannte Weise von der Inclination abhängt.

Man hat auf diese Weise die Intensitäten der erdmagnetischen Kraft an vielen Örtern der Erde unter einander verglichen, indem man auf Reisen, die zum Theil hauptsächlich zu diesem Zweck unternommen waren, eine oder mehrere Nadeln mit sich führte, und deren Schwingungsdauer beobachtete: als Einheit für die Resultate kann man die Stärke der erdmagnetischen Kraft an einem beliebig gewählten Orte annehmen.

Offenbar ist dies Verfahren ganz von der Voraussetzung abhängig, dass der magnetische Zustand der angewandten Nadeln ganz ungeändert bleibt. Allein es gibt mehrere Ursachen, die diesen Zustand verändern können. Zuvörderst hat die Temperatur einen sehr merklichen Einfluss auf diesen Zustand. Bei grösserer Wärme wird der Magnetismus einer Nadel schwächer, kommt jedoch mit dem frühern Temperaturzustande wieder auf seine vorige Stärke zurück, wenn die Wärme innerhalb mässiger Grenzen geblieben ist. *Diese* Veränderlichkeit kann man daher durch Rechnung berücksichtigen und unschädlich machen; vor zu starker Erhitzung muss man aber die Nadel wohl in Acht nehmen, weil dadurch ihr Magnetismus bleibend geschwächt wird. Ferner darf man die Nadel nicht mit andern Magneten oder auch mit Eisen in Berührung bringen, weil man sonst nach der Abtrennung durchaus nicht darauf rechnen kann, den vorigen magnetischen Zustand der Nadel genau wieder zu finden. Allein auch bei aller solcher Vorsicht hat man doch für völlige Unwandelbarkeit dieses Zustandes keine Bürgschaft. Nadeln aus schwach gehärtetem Stahl verlieren schon in kurzer Zeit einen beträchtlichen Theil ihres Magnetismus; gut gehärtete halten ihn besser an sich; allein auch bei den bestgehärteten wird man immer im Laufe der Zeit einige Veränderung zu befürchten haben. Man könnte glauben, dass diese Veränderung sich an der veränderten Schwingungsdauer der Nadel an einem und demselben Orte erkennen lasse, und in Beziehung auf beträchtliche und schon nach mässigen Zeitintervallen eingetretene Veränderungen ist dies auch ganz richtig: allein dieser Schluss würde ganz illusorisch sein, wenn man ihn auf kleine Veränderungen oder auf sehr lange Zeiträume ausdehnen wollte: denn so wie der Erfahrung zufolge die Richtung der erdmagnetischen Kraft an einem Orte sehr grossen Veränderungen unterworfen ist, wird dies ohne Zweifel auch mit der Intensität dieser Kraft der Fall sein, daher man, wenn man nach einer Reihe von Jahren die Nadel an einem Orte andere Schwingungen machen sieht, als früher, völlig im Dunkeln bleibt, wieviel Antheil daran die Veränderung der Nadel, und wieviel die Veränderung der Stärke des Erdmagnetismus gehabt hat. Das Resultat dieser Betrachtungen ist also, dass die erwähnte comparative Methode sehr nützliche Dienste leistet, wenn man sie nur auf Bestimmungen innerhalb eines mässigen Zeitraumes anwendet, und es an der nöthigen Vorsicht nicht fehlen lässt; dass jedoch die Zuverlässigkeit und Genauigkeit dieses Verfahrens immer nur beschränkt bleibt, und dass die so hoch interessante Frage, welchen Veränderungen die Intensität der erdmagnetischen Kraft an einem Orte im Laufe langer Zeiträume unterworfen sein mag, auf diese Weise gar nicht zu beantworten ist.

Wir machen uns frei von jener Unsicherheit, und gewinnen das Mittel zur Beantwortung dieser Frage, indem wir an die Stelle der comparativen Methode eine andere setzen, die die Intensität des Erdmagnetismus auf ein von der Individualität der gebrauchten Magnetnadeln ganz unabhängiges absolutes Maass zurückführt, d. i. auf ein solches, welches nur auf den für sich feststehenden, jederzeit mit äusserster Schärfe wieder nachzuweisenden Raum-, Zeit- und Gewichtseinheiten beruhet.

Zu einer vollkommenen Einsicht in das Wesen dieser Methode würde eine viel ausführlichere Entwicklung nothwendig sein, als hier Platz finden kann, zumal unter Verzichtleistung auf eine mit Wenigem viel sagende mathematische Einkleidung. Indessen wird die folgende Darstellung wenigstens die Möglichkeit der Zurückführung der Stärke der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maass begreiflich machen. Da es nach der schon oben gemachten Bemerkung nur auf

den horizontalen Theil der erdmagnetischen Kraft ankommt, so werden wir Kürze halber jenen immer stillschweigend verstehen, wenn von der erdmagnetischen Kraft ohne den Zusatz *ganze* Kraft die Rede sein wird.

Die Quadratzahl der Menge der Schwingungen einer Nadel in einer bestimmten nach Gefallen gewählten Zeit ist ein von der besondern Beschaffenheit der Nadel abhängiges Maass der Stärke des Erdmagnetismus. Das Besondere der Nadel kommt hier aber in zweierlei Rücksicht ins Spiel: einmal, insofern der Magnetismus, dessen Träger die Nadel ist, mehr oder weniger stark sein kann, zweitens, insofern die Nadel mehr oder weniger ponderable Masse, und in schwerer oder leichter zu bewegender Gestalt enthält. Die Absonderung des zweiten Theils, des Besondern der Nadel ist nun nicht schwer. Der Einfluss des Erdmagnetismus auf die in der Nadel getrennten magnetischen Flüssigkeiten bewirkt eine Drehungskraft oder ein Drehungsmoment, insofern die Nadel nicht im magnetischen Meridian ist; dies Drehungsmoment ist desto grösser, je mehr die Nadel vom magnetischen Meridian abweicht, und am grössten in der gegen den Meridian rechtwinkligen Stellung. Dies grösste Drehungsmoment wird immer stillschweigend verstanden, wenn vom Drehungsmoment schlechthin die Rede ist; es lässt sich angeben durch ein bestimmtes Gewicht, welches auf einen Hebelarm von bestimmter Länge wirkt, mithin durch eine Zahl, sobald man Gewichte und Längen, nach beliebig gewählten Einheiten, durch Zahlen ausdrückt. Nun hängt aber dieses Drehungsmoment auf eine einfache Art, welche die Dynamik lehrt, mit der Schwingungsdauer vermittelst einer durch Figur und Gewicht der Nadel bestimmten Zwischengrösse zusammen, die man ihr Trägheitsmoment nennt, und nach bekannten Regeln berechnen kann. Ist die Nadel nicht genau ein regelmässiger Körper, oder trägt sie während sie schwingt, noch sonstigen Zubehör, so bedarf es freilich zur Ausmittelung des Trägheitsmoments noch besonderer Vorkehrungen, welche hier anzugeben zu weitläufig sein würde: jedenfalls sind Mittel dazu in unsrer Gewalt. Ist nun dies Trägheitsmoment bekannt, so kann man aus der beobachteten Schwingungsdauer der Nadel auf das Drehungsmoment zurückschliessen, welches der Erdmagnetismus durch seine Einwirkung auf die magnetischen Flüssigkeiten in der Nadel hervorbringt. Übrigens ist es sehr wohl möglich, dies Drehungsmoment auch durch directe Versuche ohne beobachtete Schwingungsdauer zu bestimmen: ein eigenthümlicher dazu dienender, seit kurzem in der Göttinger Sternwarte aufgestellter Apparat zeigt sich aller nur zu

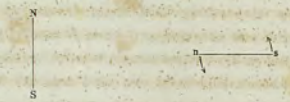
wünschenden Schärfe fähig; allein für den gegenwärtigen Zweck ist es unnöthig, dabei zu verweilen.

Dieses Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus an einer gegebenen Nadel erzeugt, bietet uns nun eine neue Abmessungsart der Stärke der erdmagnetischen Kraft dar, oder genauer zu reden, eine neue Form der vorigen Abmessungsart, vor welcher sie den Vorzug hat, dass der eine Theil der Individualität der Nadel nunmehr abgeschieden ist. Sie bleibt von dieser Individualität nur noch insofern abhängig, als in der Nadel ein stärkerer oder schwächerer Magnetismus entwickelt sein kann, und sobald wir *diesen* auf ein absolutes Maass zurückführen können, wobei das Besondere seines Trägers gar nicht mehr in Frage kommt, wird auch die Stärke des Erdmagnetismus selbst auf ein absolutes Maass zurückgeführt sein, da nur die Zahl, welche das Drehungsmoment ausdrückt, mit der Zahl, welche den Magnetismus der Nadel misst, dividirt zu werden braucht. In der That ist dann der Abmessung des Erdmagnetismus als Einheit eine solche diesem ähnlich gedachte Kraft untergelegt, deren Wirkung auf eine Einheit des Nadel-Magnetismus in einem Drehungsmoment besteht, welches durch den Druck der Gewichtseinheit auf einen Hebelarm von der Länge der Raumeinheit gemessen wird.

Man könnte versucht sein zu glauben, dass die Last, welche eine Magnetnadel zu tragen vermag, als Maassstab für die Stärke des darin entwickelten Magnetismus dienen könne. Allein eine nähere Prüfung ergibt, dass dieses Mittel für unsern Zweck ganz unbrauchbar ist. Die Bestimmung des Tragvermögens ist überhaupt keiner Schärfe fähig, indem wiederholte Versuche sehr verschiedene Resultate dafür geben können: aber, was viel wichtiger ist, dieses Tragvermögen steht mit der Grösse der Entwicklung des Magnetismus in der Nadel, in dem Sinn, wie sie hier zu verstehen ist, nemlich insofern sie das Drehungsmoment bestimmt, in gar keinem nothwendigen Zusammenhange. Bei dem Drehungsmoment kommt der Magnetismus in allen Theilen der Nadel, auf welche der Erdmagnetismus gleichmässig und in parallelen Richtungen wirkt, in Betracht; bei dem Tragvermögen hingegen hauptsächlich der ohnehin durch die Wechselwirkung des Magnetstabs und des angehängten Eisens augenblicklich modificirt werdende Magnetismus in dem der Last zunächst liegenden Ende. Zu dem hier vorliegenden Zweck sind lediglich solche Kraftwirkungen brauchbar, welche der Magnetismus aller Theile der Nadel fast gleichmässig

und in fast parallelen Richtungen ausübt, also Wirkungen in beträchtlicher Entfernung.

Eine an einem bestimmten Platze befindliche Magnetnadel übt ihre magnetische Kraft in jedem Punkte des Raumes aus, in einer Stärke und Richtung, die durch die Entfernung und Lage bestimmt werden. In der Nähe ist diese Kraft stark, aber an verschiedenen Stellen sehr ungleich; in grossen Entfernungen zwar schwach, aber dann innerhalb eines mässigen Raumes an Stärke und Richtung fast gleich. Je grösser die Entfernung, desto mehr nähert sich das Gesetz der Kraft einer einfachen Regel, welche die Theorie vollständig angibt: hier dürfen wir uns auf die Betrachtung eines Falles beschränken, der für unsern Zweck hinreicht. In einer horizontalen Fläche sei N S die festliegende Magnetnadel, deren Kraftäusserung auf eine zweite n s an einem Faden aufgehängte hier in Frage steht: beide in solcher gegenseitigen Lage, die die Figur hinreichend erklärt.



Die Wirkung der erstern Nadel auf die andere wird dann in einem Bestreben, diese zu drehen, bestehen, und zwar in dem Sinn, den die Pfeile bezeichnen, wenn die Buchstaben N n gleichnamige Pole, z. B. die Nordpole bedeuten, mithin S s die Südpole. Das Drehungsmoment wird ganz auf gleiche Weise durch eine Zahl verständlich gemacht, wie oben bei der Einwirkung des Erdmagnetismus auf eine frei schwebende Nadel. Die Grösse dieses Drehungsmoments hängt aber ab von der Entfernung und von der Stärke des Magnetismus in *beiden* Nadeln, so dass es z. B. bei gleicher (hinlänglich gross vorausgesetzter) Entfernung sechsmal stärker ausfällt, wenn die eine Nadel einen doppelt, die andere einen dreifach stärkern Magnetismus trüge. Mit der Entfernung hängt aber die Wirkung so zusammen, dass bei doppelter Entfernung die Wirkung nur den achten, bei dreifacher nur den siebenundzwanzigsten Theil ihres Werths bei einfacher Entfernung behält, wobei jedoch zu bemerken ist, dass dieses Gesetz nur für sehr grosse Entfernungen hinlänglich scharf, und auf kleine nicht auszudehnen ist. Da nun alle Entfernungen, nachdem für sie einmal ein Maass als Einheit gewählt ist, durch Zahlen ausgedrückt werden, so wird jenes Gesetz auch so aus-

gesprochen werden können, dass das Drehungsmoment mit dem Würfel der Entfernung multiplicirt für sehr grosse Entfernungen immer gleiches Resultat gibt, welches Product man füglich das auf die Entfernungseinheit *reducirte* Drehungsmoment nennen mag, ohne zu vergessen, dass nach der eben gemachten Bemerkung das in der Entfernungseinheit wirklich stattfindende Drehungsmoment, falls jene klein ist, von dem reducirten bedeutend verschieden sein kann. Dies hindert aber durchaus nicht, das reducirte Drehungsmoment zu einem Maassstabe für den Magnetismus der Nadeln zu benutzen, und *den Magnetismus derjenigen Nadel als Einheit zu betrachten, welche einer andern einen eben so grossen Magnetismus tragenden in der bezeichneten Lage ein reducirtes Drehungsmoment ertheilt, welches dem Druck der Gewichtseinheit an einem Hebelarm von der Länge der Entfernungseinheit gleichkommt.* Auf diese Weise haben wir also einen völlig klaren präcisen Begriff für die Abmessung der magnetischen Kraft einer Magnetnadel gewonnen. Eine Nadel von der zweifachen Kraft wird dann einer ihr gleichmagnetisirten ein reducirtes Drehungsmoment = 4 ertheilen u. s. w., und allgemein wird man, sobald man die Zahl für das reducirte Drehungsmoment kennt, welches eine Nadel einer ihr gleichen ertheilt, in der Quadratwurzel aus jener Zahl das absolute Maass für die Stärke des Magnetismus jeder der beiden Nadeln haben.

Es bleibt also, um die Stärke des Erdmagnetismus auf absolutes Maass zurückführen zu können, nur noch übrig, ein Verfahren anzugeben, wodurch das Drehungsmoment, welches eine Nadel einer ihr gleichen in beträchtlicher Entfernung und in der in der Figur dargestellten Lage ertheilt, mit Schärfe bestimmt werden kann. Bei einer oberflächlichen Erwägung des im Vorhergehenden absichtlich noch bei Seite gesetzten Umstandes, dass es unmöglich ist, diese so sehr schwache Wirkung der Nadel N S auf die Nadel n s (welche wir einstweilen genau eben so stark magnetisirt wie N S voraussetzen wollen) für sich rein zu beobachten, da sich letztere der überall gegenwärtigen und viel stärker wirkenden erdmagnetischen Kraft nicht entziehen lässt, könnte man diese Aufgabe für sehr schwer halten: allein gerade umgekehrt wird durch diesen Umstand selbst eine leichte Lösung gegeben. Nehmen wir an, dass in unserer Figur die gerade Linie von der Mitte der Nadel N S durch die Nadel n s mit dem magnetischen Meridian (von Norden nach Süden zu) zusammenfalle, so wird in dieser Lage die erdmagnetische Kraft noch gar nicht auf die Nadel n s wirken; so wie aber die

Drehungskraft, welche N S auf n s ausübt, ihr Spiel anfängt, wird n s von ihrer ersten Lage abgelenkt werden, und in Bewegung kommen; allein je mehr sie sich in Folge dieser Bewegung von der ersten Richtung entfernt, desto stärker strebt der Erdmagnetismus, sie dahin zurückzuführen. Die Nadel macht also Schwingungen, deren Mitte aber nicht mehr die Lage im magnetischen Meridian selbst, sondern eine dagegen mehr oder weniger geneigte ist. Diese Mitte ist zugleich die Gleichgewichtslage von der Nadel n s, welche sie annimmt, wenn die Schwingungen zur Ruhe gekommen sind. Offenbar ist ihre Richtung nichts anderes, als das Resultat der Zusammensetzung der beiden Kräfte, welche an dem Platz der Nadel n s der Erdmagnetismus und der Magnetismus der Nadel N S ausüben, und die unsern Voraussetzungen zufolge um einen rechten Winkel verschiedene Richtungen haben. Nach bekannten Lehren der Statik ist also das Verhältniss der Stärke dieser Kräfte, welches zugleich das Verhältniss der durch sie erzeugten Drehungsmomente ist, aus dem Ablenkungswinkel bestimmbar, d. i. aus der Ungleichheit der beiden Ruhelagen von n s, einmal wenn beide Kräfte wirken, zweitens wenn N S ganz entfernt ist. Hier bietet sich nun aber noch eine wichtige Bemerkung dar. Nemlich der Ablenkungswinkel der Nadel n s ist von der Stärke ihrer Magnetisirung ganz unabhängig, da bei verstärkter Magnetisirung offenbar *beide* Drehungsmomente in gleichem Verhältniss wachsen. Wir werden dadurch der sonst allerdings schwer zu erfüllenden Bedingung, dass n s einen eben so starken Magnetismus trage, wie N S, ganz enthoben.

Es reducirt sich also die Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus auf zwei Hauptgeschäfte.

I. Man beobachtet die Schwingungsdauer einer Nadel N S, und berechnet daraus das Drehungsmoment, welches der Erdmagnetismus auf diese Nadel ausübt.

II. Man hängt eine zweite Nadel n s auf, beobachtet ihre Einstellung zuerst unter dem reinen Einfluss des Erdmagnetismus, und nachher, indem N S in beträchtlicher Entfernung, so wie es die Figur zeigt, aufgelegt ist. Aus dem Unterschied beider Stellungen oder der Ablenkung, berechnet man, welch ein Bruchtheil die Kraft der Nadel N S von der erdmagnetischen Kraft in der gewählten Entfernung ist; ein eben so grosser Bruchtheil von dem in I. gefundenen Drehungsmoment lehrt uns das Drehungsmoment kennen, welches in jener Entfernung die Nadel N S einer ihr gleichen ertheilen würde; dies Resultat mit dem

Würfel der Entfernung multiplicirt, gibt das reducirte Drehungsmoment; die Quadratwurzel daraus die Kraft der Nadel N S im absoluten Maasse; endlich die in I. gefundene Zahl mit dieser Quadratwurzel dividirt, gibt die Zahl für das absolute Maass des Erdmagnetismus.

Ohne mathematische Zeichen zu gebrauchen, schien diese Darstellung der Möglichkeit, die Stärke des Erdmagnetismus durch eine Zahl auszudrücken, die von der Individualität der benutzten Magnetnadeln völlig unabhängig ist, am leichtesten verständlich: bei der wirklichen Anwendung erscheint einiges in einer etwas verschiedenen Gestalt, die aber für das Wesen der Methode gleichgültig ist, auch sind dann noch manche Nebenumstände zu berücksichtigen. Nur über ein paar Umstände wollen wir hier noch einiges beifügen.

Man hat gesehen, dass die den Abmessungen untergelegten Einheiten nur in einer Entfernungseinheit und einer Gewichtseinheit bestanden. Man muss aber nicht übersehen, dass eine Gewichtsgrösse, z. B. ein Gramm, hier nicht das Quantum ponderabler Materie bedeutete, welches diesen Namen führt, und welches überall dasselbe ist, sondern den Druck, welches dieses Quantum Materie unter dem Einfluss der Schwerkraft an dem Beobachtungsorte ausübt. Diese Schwerkraft ist aber bekanntlich an verschiedenen Orten nicht ganz gleich, und wenn wir daher den Druck eines Gramms als Gewichtseinheit wählen, so würde nach aller Strenge die Intensität des Erdmagnetismus an verschiedenen Orten nicht mit gleichem Maasse gemessen werden. Bei der grossen Schärfe, deren die Messungen gegenwärtig fähig sind, ist es billig, diesen Unterschied nicht zu vernachlässigen. Am natürlichsten ist es, ihn dadurch zu berücksichtigen, dass man die Schwerkraft selbst auf ein absolutes Maass zurückführt, indem man als ihr Maass die doppelte Fallhöhe in der gewählten Zeiteinheit, z. B. in einer Secunde, annimmt, und den Druck durch das Produkt der Masse in die Zahl, die die Schwerkraft misst, ausdrückt. Man übersieht leicht, dass auf diese Weise andere Zahlen sowohl für die Kraft der angewandten Magnetnadel, als für die erdmagnetische Kraft hervorgehen *), deren Grundlagen anstatt der vorigen zwei Einheiten jetzt drei sein werden, eine Entfernungseinheit, eine Zeiteinheit und eine Masseneinheit.

*) Sie stehen zu den vorigen in demselben Verhältniss, wie die Quadratwurzel aus der Zahl, die die Schwerkraft misst, zu der Zahl Eins.

Eine Hauptschwierigkeit bei Anwendung der Methode liegt noch darin, dass das obenangeführte Gesetz (die verkehrte Proportionalität der Wirkung einer Magnetnadel zu dem Würfel der Entfernung) in zulänglicher Schärfe nur für sehr grosse Entfernungen gültig ist, in welchen die Wirkungen zu klein sind, um unmittelbar mit Schärfe beobachtet werden zu können. In mässigen Entfernungen machen sich die Abweichungen von dem Gesetze schon sehr merklich: allein die Theorie lehrt, dass in diesen Abweichungen selbst wiederum Gesetzmässigkeit Statt findet, und die Mathematik gibt Mittel an die Hand, durch Combination *mehrerer* in mässigen aber ungleichen Entfernungen gemachter Versuche diese Abweichungen zu erkennen, und so gut wie ganz zu eliminiren.

Immer aber dürfen, wenn diese Elimination zulässig sein soll, die Versuche nicht bei zu kleinen Entfernungen angestellt werden: die Wirkungen bleiben daher allemal vergleichungsweise nur kleine, zu deren scharfer Abmessung die früher gebräuchlichen Mittel bei weitem nicht zureichten. Gerade dieses Bedürfniss hat die Darstellung eines neuen Apparats veranlasst, der wohl am schicklichsten mit dem Namen *Magnetometer* bezeichnet werden kann, da er dazu dient, alle Grössenbestimmungen sowohl in Beziehung auf die magnetische Kraft der Nadeln, als in Beziehung auf den Erdmagnetismus, wenigstens den horizontalen Theil desselben, mit einer Genauigkeit auszuführen, die der Schärfe der feinsten astronomischen Beobachtungen gleich kommt. Man bestimmt damit die Richtung des Erdmagnetismus auf eine oder ein paar Bogensecunden genau; man beobachtet Anfang und Ende einer Schwingung auf einige Hunderttheile einer Zeitsecunde sicher, also schärfer, als die Antritte der Sterne an den Fäden eines Passagen-Instruments.

Anstatt eine bereits anderwärts gegebene Beschreibung des ohnehin jetzt schon vielverbreiteten Magnetometers zu wiederholen, beschränken wir uns hier nur darauf, einige der Eigenthümlichkeiten dieses Apparats bemerklich zu machen.

Die Stellung der an einem Faden oder einem feinen Draht aufgehängten Magnetnadel und die Veränderung dieser Stellung werden nicht, wie sonst, an der Magnetnadel selbst beobachtet, sondern an dem Spiegelbilde einer in kleine Theile getheilten Scale. Der Spiegel ist an der Magnetnadel fest, also mit derselben beweglich, die Scale hingegen ist in einer beträchtlichen Entfernung davon (15 Fuss bei den Magnetometern in Göttingen) horizontal befestigt, und hinter der Scale und etwas höher befindet sich das gegen die Mitte des Spiegels gerichtete Fernrohr, durch welches man das 30 Fuss entfernte Spiegelbild der Scale oder eines Stücks derselben sieht. Offenbar ist nun jede Veränderung der Stellung der Magnetnadel mit einer verhältnissmässigen Veränderung des Orts des Spiegelbildes verbunden, und man übersieht leicht, wie sehr die Feinheit der Beobachtung auf diese Weise gewinnt: in der That sind, wenn die Nadel einen Fuss lang ist (und grössere hat man sonst fast niemals angewandt), die Bewegungen ihrer Enden nur ein sechzigstel so gross, wie die Bewegungen des Spiegelbildes. Der Vortheil, welchen ausserdem die grosse Entfernung des Beobachters von der Magnetnadel bei der neuen Methode gewährt, ist von selbst einleuchtend, da bei der ehemaligen Art die unmittelbare Nähe des Beobachters, so wie auch der zu nächtlichen Beobachtungen nothwendigen Beleuchtungslampe mancherlei Störungen der Nadel erregen konnte.

In dem Magnetometer werden als Magnetnadeln grosse schwere Stäbe angewandt, mit so offenbarem Gewinn für die Schärfe der Beobachtungen, dass man sich jetzt nur mit Verwunderung der äusserst kleinen Nadeln erinnert, die man vordem zu den meisten magnetischen Beobachtungen zu gebrauchen pflegte. Bei der ersten Ausführung des Magnetometers wurden Stäbe von einem Pfund Gewicht angewandt; in dem magnetischen Observatorium zu Göttingen ist ein vier Pfund schwerer Stab aufgehängt, und ähnliche Stärke haben die Nadeln der meisten für andere Örter seitdem ausgeführten Apparate; das Magnetometer in der Göttinger Sternwarte hat einen fünfundzwanzig Pfund schweren Magnetstab. Je schwerer ein Magnetstab ist, desto weniger wird er von zufälligen Störungen, kleinen Luftbewegungen u. dergl. afficirt, desto reiner stellen also seine Bewegungen den Stand der auf ihn wirkenden magnetischen Kräfte dar. Allein man darf ja nicht vergessen, dass schwere Stäbe diesen hohen Vorrang vor leichten nur dann behaupten, wenn sie auch kräftig magnetisirt sind, und dass sie ohne diese unerlässliche Bedingung nur einem Kinde in schwerer Männerrüstung gleichen würden.

Bei der Beobachtung von Schwingungszeiten bieten die schweren Stäbe noch einige besondere ungemein schätzbare Vortheile dar, namentlich dass die Dauer einer Schwingung eine beträchtliche Zeit einnimmt, und dass die Grösse des Schwingungsbogens sich sehr langsam vermindert. Die kleinen Nadeln von weniger als einem halben Loth Gewicht, deren man sich ehedem zu solchen Zwecken bediente, haben in unsern Gegenden eine Schwingungsdauer von drei bis

vier Secunden; hatte man eine Beobachtung mit Schwingungsbögen von sechzig Grad angefangen, so waren diese nach einer Viertelstunde schon so klein geworden, dass man aufhören musste, und die Schwingungen selbst musste man einzeln zählen. Die vierpfündigen gut magnetisirten Stäbe machen eine Schwingung in zwanzig, der grosse fünfundzwanzigpfündige Stab eine in zweiundvierzig Secunden; fängt man auch mit Schwingungen an, die nur wenige Grade betragen, so bleiben diese doch nach vielen Stunden noch immer gross genug für die feinsten Beobachtungen. Die Beobachtung von einer oder von einigen wenigen Schwingungen gibt die Dauer immer schon mit so vieler Schärfe, dass man nachher sich entfernen kann, und nur von Zeit zu Zeit wieder einige Aufzeichnungen zu machen braucht, wobei man über die Anzahl der Schwingungen, welche die, wie eine astronomische Uhr die Zeit gleichmässig theilende, Nadel inzwischen vollendet hat, gar nicht ungewiss bleibt. Öfters hat man in der Beobachtung der Schwingungen der fünfundzwanzigpfündigen Nadel der Göttinger Sternwarte eine Unterbrechung von acht und mehrern Stunden eintreten lassen, ohne dass die Ausmittelung der Anzahl der inzwischen vollendeten Schwingungen einer Ungewissheit ausgesetzt geblieben wäre.

Eine Hauptbestimmung des Magnetometers ist die Verfolgung des Ganges der magnetischen Declination. Jedermann weiss, dass diese jetzt in ganz Europa westlich ist, und vor zweihundert Jahren östlich war. Sie ist also von Jahr zu Jahr sich anhäufenden Veränderungen unterworfen: aber sie ist auch während eines Jahres nach den Jahreszeiten ungleich; sie ist nicht einen Tag wie den andern, ja sie wechselt an einem Tage von einer Stunde zur andern. Diese sogenannten stündlichen Änderungen (die aber an feinen Apparaten schon von einer Minute zur andern, ja oft schon in kürzern Zeitfristen merklich werden) verdienen nun eine besondere Aufmerksamkeit, und eignen sich auch ganz vorzüglich zu einem eben so angenehmen als nützlichen Geschäft solcher Besitzer von Magnetometern, denen für absolute Messungen der Declination und Intensität ein angemessenes Local oder die sonstigen Zurüstungen fehlen. Bei diesen stündlichen Veränderungen der Declination hat man die regelmässigen Bewegungen von den unregelmässigen zu unterscheiden. Erstere richten sich nach der Tageszeit, und es leidet keinen Zweifel, dass der Einfluss der Sonne, wahrscheinlich insofern sie die Erde erwärmt, die Ursache davon ist. Im Allgemeinen besteht für Europa ihr Verlauf darin, dass die Nadel des Morgens, etwa um 7 oder 8 Uhr, am

meisten östlich steht, oder die westliche Abweichung am kleinsten ist, dann während der Vormittagsstunden beständig zunimmt, und Nachmittags etwa um 1 oder 2 Uhr ihren grössten Stand erreicht, von welchem sie dann allmählig wieder zurückgeht, und nach Einbruch der Nacht beinahe, oder am andern Morgen ganz, ihren vorigen Stand wieder erreicht. Im hohen Sommer beträgt diese Bewegung in unsern Gegenden etwa einen Viertelsgrad oder etwas darüber; um die Zeit des kürzesten Tages kaum halb so viel. Diese regelmässigen Bewegungen folgen mithin der Stunde jedes Orts, und treten also an dem östlicher liegenden Orte wirklich früher ein, als an dem westlichern. Allein in dieselben mischen sich unregelmässige Bewegungen so sehr oft, dass vielleicht niemals jene ganz rein erscheinen: gar nicht selten sind solche unregelmässige Bewegungen, die während einer Stunde oder in noch kleinern Zeiträumen die gewöhnlichen regelmässigen des ganzen Tages weit überflügeln. Schon vor beinahe hundert Jahren hatte Hiorter in Upsala die Bemerkung gemacht, dass mit Nordlichtern gleichzeitig beträchtliche Bewegungen der Magnetnadel einzutreten pflegen: seitdem ist diese Erfahrung vielfach bestätigt, und man kann nicht zweifeln, dass, wenn auch nicht die Nordlichter die Ursachen der Bewegungen der Magnetnadel selbst sind, doch diejenigen (unbekannten) Ursachen, welche die Nordlichter hervorbringen, zugleich auch auf die Magnetnadel wirken, oder den Erdmagnetismus modificiren. Arago, ein fleissiger Beobachter der Magnetnadel, fand fast immer in Paris starke Bewegungen derselben an solchen Tagen, wo in nördlichen Gegenden Nordlichter bemerkt wurden, woraus man schliessen konnte, dass die dabei thätigen Kräfte ihre Wirkungen in grosse Entfernungen verbreiten. Helleres Licht über diese interessante Erscheinung konnte nur von verabredeten gleichzeitigen Beobachtungen an vielen von einander entfernten Orten erwartet werden, und Hr. von Humboldt hat seinen vielen Verdiensten um die Lehre vom Erdmagnetismus auch das beigefügt, dass er zuerst schon vor mehrern Jahren eine solche Verabredung unter den Besitzern Gambeyscher Nadeln eingeleitet hat, wodurch jene Bemerkung schon öfters auffallend bestätigt ist.

Die Einführung der Magnetometer gab nun Gelegenheit, diese Erscheinungen mit grösster Leichtigkeit und Schärfe zu verfolgen. Schon im Laufe des Jahrs 1834 sind an vielen Orten mit ähnlichen Apparaten eine Menge gleichzeitiger Beobachtungen an verabredeten Tagen gemacht, woraus sich ergeben hat, dass nicht bloss solche grosse Bewegungen, wie die vorhin erwähnten, sondern

selbst ganz kleine mit allen ihren in den kürzesten Zeitfristen wechselnden Nuancen, selbst an weit von einander entlegenen Orten, eine ganz bewundernswürdige Harmonie zeigen. Es sind davon schon mehrere Proben in graphischen Darstellungen bekannt gemacht, von welchen wir hier nur die am 5. und 6. November in Copenhagen und Mailand während 44 Stunden ununterbrochen verfolgten Beobachtungen, und die in zwei Abendstunden des 1. April 1835 in Copenhagen, Altona, Göttingen, Leipzig und Rom angestellten erwähnen wollen. Diesem Vereine zu magnetischen Beobachtungen, an jährlich sechs im Voraus festgesetzten Terminen, schliessen sich schon immer mehr Theilnehmer an; binnen Jahresfrist wird er schon in den entferntesten Theilen des russischen Reichs Mitarbeiter haben. Es steht zu erwarten, dass solche vereinte Bestrebungen uns in Zukunft nähere Aufschlüsse über die räthselhaften Kräfte geben werden, deren Wirkungen sich in gleichem Augenblick über den halben Durchschnitt von Europa verbreiten.

Wir haben hier von dem reichen Stoff, welchen die an dem Magnetometer zu beobachtenden und zu messenden reinmagnetischen Erscheinungen darbieten, nur Einiges ausheben können; jener Apparat ist aber zugleich ein eben so nützliches Werkzeug für die electro-magnetischen Phänomene. Die glänzenden Entdeckungen Oersted's und Faraday's haben der Naturforschung eine neue Welt geöffnet, deren Zaubergärten uns mit Bewunderung erfüllen; unterwürfig machen können wir uns diese reichen Gebiete nur unter Führung der Messkunst.

Das erste Erforderniss ist ein Mittel, die Stärke eines galvanischen Stroms durch seine electro-magnetische Wirkung mit Leichtigkeit und Schärfe zu messen. Man bedient sich dazu einer Vorrichtung, die man einen Multiplicator nennt. Es ist dies ein Metalldraht, der in zahlreichen Umwindungen um einen vierseitigen Rahmen geführt, und in die galvanische Kette so gebracht ist, dass er selbst einen Theil des Leitungsdrahts ausmacht. Die einzelnen Windungen dürfen einander nicht metallisch berühren, was man gewöhnlich dadurch verhütet, dass man zu dem Multiplicatordraht solchen anwendet, der mit Seide übersponnen ist. Die einzelnen Umwindungen können hier als unter sich parallele Vierecke betrachtet werden; beim Gebrauch ist der Multiplicator so gestellt, dass die Ebene dieser Vierecke vertical, und nach der verschiedenen Anwendungsart entweder im magnetischen Meridian, oder rechtwinklig dagegen steht. Im innern offenen Raume des Multiplicators befindet sich eine an einem Faden frei

schwebende Magnetnadel, deren Stellung oder Bewegung bloss vom Erdmagnetismus geregelt wird, so lange den Multiplicatordraht noch kein galvanischer Strom durchläuft. Sobald aber die Kette geschlossen ist, übt der den Multiplicatordraht durchlaufende Strom auf die Nadel eine Kraft aus, deren Richtung immer rechtwinklig gegen die Fläche des Multiplicators ist; der Sinn dieser Richtung ist aber in Beziehung auf die beiden Pole der Nadel entgegengesetzt. In dem erstern der beiden vorhin unterschiedenen Fälle zeigt sich daher die Wirkung der Kraft in einer Ablenkung der Nadel vom magnetischen Meridian, deren Grösse als Maass der Stärke des Stroms betrachtet werden kann, wenigstens davon abhängt. Man hat bisher immer nur äusserst leichte Nadeln angewandt, wobei man zwar grosse Ablenkungen erhielt, die jedoch auf dem angebrachten eingetheilten Kreise sich nur gröblich messen liessen. Eine etwas grössere Genauigkeit kann man durch die zweite von Fechner angewandte Einrichtung erhalten, wo die Richtung der von dem galvanischen Strom ausgeübten Kraft in dem magnetischen Meridian selbst liegt, und folglich ihre Wirkung (je nach der Richtung des Stromes im Draht) entweder den Erdmagnetismus verstärkt, oder verringert, und wodurch also die Schwingungsdauer der Nadel entweder kürzer oder länger wird, als sie unter dem reinen Einfluss des Erdmagnetismus war. Dieses Verfahren hat indess, abgesehen davon, dass die Schärfe noch immer lange nicht so gross ist, als man wünschen muss, das Unangenehme, dass es, da man zur Bestimmung der Schwingungsdauer eine beträchtliche Anzahl von Schwingungen zu beobachten hat, sehr mühsam wird, und, insofern die Stromstärke während der Dauer eines Versuches veränderlich ist, nur eine Art Mittelwerth angibt; zur Messung der Stärke solcher Ströme, die, wie die durch die sogenannte Induction hervorgebrachten (von denen später noch die Rede sein wird), nur wenige Augenblicke dauern, ist diese Methode gar nicht anzuwenden.

Man kann nun aber leicht das Magnetometer zu einem eben so bequemen, als scharfen Galvanometer einrichten, wenn man es mit einem Multiplicator verbindet, dessen Ebene, wie bei der ersten vorhin erwähnten Einrichtung, im magnetischen Meridian ist. Da in dem Magnetometer immer grosse Stäbe angewandt werden, so ist sowohl die innere Weite des Multiplicators, als seine Drahtlänge viel grösser, als bei den sonst gebräuchlichen Multiplicatoren. Der erstere Umstand trägt dazu bei, die Einwirkung des galvanischen Stroms auf die Nadel, der andere hingegen, die Intensität des galvanischen Stroms selbst schwächer zu

machen; aus beiden Ursachen finden daher im Allgemeinen keine so grosse Ablenkungen der Magnetnadel Statt, wie bei den andern Galvanometern. Dagegen aber kann man hier die Grösse der mässigen Ablenkung mit äusserster Schärfe messen. Das Magnetometer der Göttinger Sternwarte hat einen Multiplicator von 270, das des magnetischen Observatorium einen von 200 Umwindungen; die Drahtlänge des erstern ist 2700, die des andern 1100 Fuss; beide hängen durch eine 450 Fuss lange Drahtverbindung unter sich, und durch eine 6000 Fuss lange, noch mit einem Paar ähnlicher, obwohl etwas kleinerer Apparate, in dem eine Viertelstunde davon entfernten physikalischen Kabinet zusammen, so dass ein galvanischer durch diese ganze bisher in ihrer Art einzige Kette getriebener Strom eine Drahtlänge von fast einer halben Meile zu durchlaufen hat. Und doch bewegt ein solcher Strom, nur von einem kleinen Plattenpaar mit blossem Brunnenwasser erregt, in allen vier Apparaten die Magnetnadeln zu Ausschlägen von vielen hundert Scalentheilen; der Strom durchläuft diese Strecke in einer ganz unmessbar kleinen Zeit, so dass durch Beobachtung des Anfangs der Bewegung der Magnetnadeln die Uhren an den vier Plätzen schärfer als durch irgend ein anderes Mittel mit einander verglichen werden können. Durch eine Vorrichtung, die man einen Commutator oder Gyrotrop nennt, kann man die Richtung des Stroms augenblicklich in die entgegengesetzte verwandeln, oder auch den Strom selbst unterbrechen, was dann auf die Bewegung der Nadeln einen entsprechenden Einfluss hat. Man ist durch diese Vorrichtungen über die Bewegungen so sehr Herr, dass man sich ihrer zu telegraphischen Zeichen bedienen kann, die ganz unabhängig von Tageszeit und Witterung in verschlossenem Zimmer gegeben, und eben so empfangen werden. Öftere Versuche, ganze Wörter und kleine Phrasen auf diese Weise zu signalisiren, haben den vollkommensten Erfolg gehabt. Was hier nur ein interessanter physicalischer Versuch ist, liesse sich, wie man mit Zuversicht voraussagen kann, bei einer Ausführung in noch viel grösserem Maassstabe, und unter Anwendung starker galvanischer Säulen oder sonstiger electrometrischer Kräfte, starker Multiplicatoren und starker Leitungsdrähte zu telegraphischen Verbindungen auf zehn, zwanzig und mehrere Meilen in einem Schlage, benutzen. Es ist Hoffnung, dass schon in Kurzem ein ähnlicher Versuch auf mehrere Meilen Entfernung durch einen eifrigen und kenntnissvollen Freund der Naturwissenschaften ausgeführt werden wird. Könnte man, unbeschadet anderer zu nehmender Rücksichten, die einzelnen Schienen der Eisenbahnen sicher

und leicht metallisch verbinden, so würden diese mit Vortheil anstatt der Leitungsdrähte dienen können. Überhaupt scheint einer Erstreckung der electromagnetischen Telegraphie, selbst auf ungeheure Entfernungen, nichts im Wege zu stehen, als der Anwachs der Kosten, da grössere von dem galvanischen Strom ohne Zwischenstation zu durchlaufende Strecken zugleich dickere Leitungsdrähte erfordern.

Wir haben oben FARADAY neben OERSTED genannt; beider Entdeckungen haben in der Naturwissenschaft Epoche gemacht; sie sind auf das engste mit einander verbunden, ja die eine ist, wie an einem andern Orte näher nachgewiesen werden soll, als das vollkommene Seitenstück der andern zu betrachten. OERSTED entdeckte die Einwirkung eines schon bestehenden galvanischen Stromes auf die magnetischen Stoffe; FARADAY fand, dass, indem die magnetischen Stoffe sich neben einem zur Leitung eines galvanischen Stromes fähigen Körper bewegen, in diesem ein solcher Strom hervorgebracht wird, der aber nur so lange dauert, wie eben jene Bewegung der magnetischen Stoffe. Ohne in die genauern Bedingungen hier einzugehen, wollen wir nur bemerken, dass gleiche Bewegungen der beiden entgegengesetzten magnetischen Flüssigkeiten entgegengesetzte galvanische Ströme erzeugen, also ihre Wirkungen sich selbst neutralisiren, wenn jene gleichzeitig sind. Daher bringt die Bewegung eines Trägers der magnetischen Flüssigkeiten, in welchem sie noch nicht geschieden sind, des Eisens oder des nicht magnetisirten Stahls, keinen galvanischen Strom im benachbarten Metall hervor, wohl aber der Act der Scheidung selbst, wenn z. B. weiches Eisen durch plötzliches Anfügen an die Pole eines Hufeisenmagnets, oder durch irgend ein anderes Mittel plötzlich magnetisch gemacht wird; und eben so muss wieder das plötzliche Abreissen, nach welchem die im Eisen getrennt gewesenen magnetischen Flüssigkeiten sich wieder vereinigen, einen galvanischen Strom von der der vorigen entgegengesetzten Richtung hervorbringen. Die auf diese Weise erzeugten galvanischen Ströme sind (wie der Act der Scheidung oder Wiedervereinigung der magnetischen Flüssigkeiten selbst) von äusserst kurzer Dauer, aber, wenn man die übrigen Umstände zweckmässig anordnet, von grosser Intensität, so dass man dadurch Funken und andere mit starken galvanischen Strömen verbundene Erscheinungen hervorgebracht hat, welche das Erstaunen der Liebhaber der Physik erregen. Eine andere Art, den magnetischen Flüssigkeiten ungleiche Bewegungen zu ertheilen (was immer die Bedingung dieser Stromerregungsart bleibt),

besteht aber darin, dass man solche Träger derselben, in welchen sie schon geschieden sind (einen Magnetstab, oder eine Verbindung mehrerer), entweder selbst auf eine zweckmässige Art relativ gegen einen nahen Leiter bewegt, oder auch, was in der Wirkung ganz einerlei ist, jene Träger ruhen lässt, und den Leiter, der den Strom empfangen soll, bewegt.

Wesentlich sind diese beiden Arten von Stromerregung (Induction) gar nicht verschieden; die zweite ist aber allein brauchbar für solche Versuche, bei welchen es um genaue Kenntniss der Grössenverhältnisse zu thun ist. Man kann sich dazu eines sehr einfachen Mittels bedienen.

Eben so wie man zur Verstärkung des von Oersted entdeckten Einflusses des galvanischen Stroms auf die Magnetnadel einen zu zahlreichen Windungen geformten Leitungsdraht (Multiplicator) anwendet, verstärkt man den Strom, welchen die relative Ortsveränderung des den Strom empfangenden Drahts gegen den Magnet erzeugt, dadurch, dass viele Theile des Drahts auf gleiche Weise afficirt werden. Eine dazu dienende Vorrichtung kann man einen Inductions-Multiplicator, oder schlechthin einen Inductor nennen. Ein solcher bei dem Apparat der Göttinger Sternwarte gebrauchter Inductor besteht in einer cylindrischen Rolle, im Lichten beinahe vier Zoll weit, um deren äussere Fläche ein mit Seide übersponnener Kupferdraht 3537 mal (in einer Länge von etwa 3600 Fuss) gewunden ist, dessen Enden mit der Kette in Verbindung gebracht sind. Zwei starke Magnetstäbe, jeder von 25 Pfund, sind zu Einem kräftigen Magnet verbunden. Das blosse Aufschieben der Rolle auf diesen Magnet bis zu dessen Mitte bewirkt in dem Draht und der ganzen damit verbundenen Kette, mithin auch in den verschiedenen Multiplicatoren, welche Theile davon ausmachen, einen kräftigen galvanischen Strom, welcher also entsprechende Bewegungen in denjenigen Magnetnadeln hervorbringt, welche sich in den betreffenden Multiplicatoren befinden, und dessen Stärke durch die Magnetometer scharf gemessen wird. Der Strom dauert immer nur so lange, wie die Bewegung der Inductionsrolle. Das Wiederabziehen, und eben so das Verkehrt-Wiederaufschieben, bewirkt einen dem vorigen entgegengesetzten Strom; vermittelst der in der Kette befindlichen Commutatoren hat man in seiner Gewalt, dem Strom in den Multiplicatoren jedesmal eine beliebige Richtung zu geben. Es ist hiebei ein höchst wichtiger Umstand, dass, obgleich die Stärke des Stroms von der Geschwindigkeit der Bewegung der Rolle abhängt, dennoch (weil die *Dauer* desto kürzer ist, je schneller man mit

der Operation zu Ende kommt) die Gesammtwirkung auf die Bewegung der Magnetnadeln in den Multiplicatoren von der Schnelligkeit der Bewegung fast ganz unabhängig bleibt, insofern diese in einer oder ein paar Secunden vollendet wird. Beim Gebrauch lässt man gewöhnlich auf ein Abziehen der Inductionsrolle ein verkehrtes Wiederaufschieben unmittelbar folgen, was zusammen ein Wechsel heissen kann. Die Wirkung eines solchen Wechsels, auch wenn der Strom durch die ganze jetzt fast 15000 Fuss lange Kette getrieben wird, ist so stark, dass die betreffenden Magnetnadeln Bewegungen dadurch erhalten, die viele hundert Scalentheile betragen. Man kann aber in kurzer Zeit sehr viele solche Wechsel eintreten lassen, die vermöge entsprechenden Spiels des Commutators alle einander verstärken, und die Magnetnadeln der Magnetometer in so grosse Bewegungen wie man will, versetzen. Die Erfahrung zeigt bei solchen Versuchen eine Übereinstimmung in den quantitativen Verhältnissen, die nichts zu wünschen übrig lässt, und die Erforschung der Gesetze dieser so höchst interessanten Naturphänomene eben so sehr befestigt als erleichtert hat.

Diese Gesetze, zu deren Entwicklung hier nicht der Ort ist, bestätigen sich überall so vollkommen, dass man den Erfolg von Versuchen, sobald man die Umstände, von welchen sie abhängen, nach ihren Grössenverhältnissen kennt, so sicher im Voraus bestimmen kann, wie die Erscheinungen am Sternenhimmel. Einen solchen Versuch, der zu den auffallendsten im Gebiet des Electromagnetismus gehört, wollen wir hier noch anführen.

Eben so gut, wie durch die relative Bewegung der Inductionsrolle gegen den Hülfsmagnet, in dem Draht der erstern, wenn er eine wo immer geschlossene Kette bildet, ein galvanischer Strom hervorgerufen wird, ist auch, jenen Inductor ganz bei Seite gesetzt, die Schwingungsbewegung einer Magnetnadel in ihrem Multiplicator, sobald dieser eine geschlossene Kette darstellt, oder einen Theil davon ausmacht, von einem galvanischen Strome in dieser begleitet, nur ist dieser den Umständen nach viel schwächer als jener. Betrachten wir z. B. den fünfundzwanzigpfündigen Magnetstab des Magnetometers der Göttinger Sternwarte als schwingend, so ist der durch *seine* Inductionswirkung erzeugte Strom schwächer, als der am Inductor hervorgebrachte, erstlich weil in jenem Fall nur Ein Magnetstab wirksam ist, im andern zwei von derselben Grösse; zweitens weil der jenen Strom empfangende Multiplicatordraht nur 270 Umwindungen bildet, der Inductordraht aber 3537; drittens weil die Windungen des letztern viel

enger sind, als die des erstern; viertens wegen der äusserst langsamen Schwingungsbewegung der Magnetometernadel, da theils der schmale, den Stab einschliessende Kasten nur Schwingungen von mässiger Grösse verstattet, theils jede Schwingung eine so lange Zeit erfordert. Wie schwach aber auch der erstere Strom, verglichen mit dem andern, ist, so tritt doch seine Existenz sehr bestimmt hervor. Er muss nemlich, gleich jedem andern, wie immer erzeugten, den Multiplicator durchlaufenden Strom, auf die im Multiplicator befindliche Nadel wirken, und diese Rückwirkung zeigt sich, ganz der Theorie gemäss, darin, dass der Schwingungsbogen viel rascher abnimmt, als bloss vermöge des Widerstandes der Luft, oder wenn gar kein Strom da ist, geschehen würde, gleichsam, als schwänge die Nadel in einer vielfach dichtern Flüssigkeit, als die Luft ist. Dies bestätigt die Erfahrung vollkommen. Ja diese allmählige Lähmung der Bewegung (wenn wir uns des Ausdrucks bedienen dürfen) ist am stärksten, wenn die Kette gleich hinter dem Multiplicator abgeschlossen, weniger stark, wenn eine grössere Drahtlänge noch mit in die Kette gebracht ist, am geringsten, wenn die ganze 15000 Fuss betragende Drahtlänge Eine Kette bildet, aber auch dann noch immer sehr beträchtlich; sobald aber die Kette wo immer geöffnet ist, fällt *dieser* Einfluss ganz weg, und die Abnahme der Grösse des Schwingungsbogens reducirt sich sogleich auf den geringen Betrag, der hauptsächlich dem Widerstande der Luft zuzuschreiben ist, und auch dann noch bleibt, wenn man den Multiplicator ganz weggenommen hat. Übrigens ist diese Rückwirkung des galvanischen Stroms auf die Nadel, durch deren Schwingung er selbst erzeugt wird, auch schon bei kleinern Nadeln sehr bestimmt zu bemerken, wenn nur der sie eng umgebende Multiplicator viele Umwindungen, oder auch, wenn nur bei weniger Umwindungen der Draht eine beträchtliche Stärke hat, vorausgesetzt, dass in letzterm Fall die Kette gleich hinter dem Multiplicator abgesperrt ist, ja eigentlich beruhen die ähnlichen Erscheinungen, die, schon vor Entdeckung der Induction, Arago an Magnetnadeln, die über Metallplatten schwingen, bemerkt hat, auf demselben Grunde.

Allein noch viel klarer tritt das Dasein eines auf diese Art erzeugten galvanischen Stromes hervor, wenn, wie bei den Göttinger Einrichtungen, noch andere Magnetometer sich in der verlängerten Kette befinden. Wenn man den grossen Magnetstab des Magnetometers der Sternwarte in etwas beträchtliche Schwingungen versetzt, so nehmen diese, falls die Kette noch nicht geschlossen

ist, nur sehr langsam an Grösse ab, und die Nadeln der Magnetometer im physikalischen Kabinet und im magnetischen Observatorium bleiben in Ruhe, oder in derjenigen regelmässigen Schwingungsbewegung, die sie eben haben; allein von dem Augenblick an, wo die Kette geschlossen wird, fangen nicht bloss die Schwingungsbögen des grossen Stabs sogleich an, viel schneller abzunehmen, sondern wie durch eine magische Sympathie kommen die andern Nadeln mit in Bewegung, falls sie vorher ganz in Ruhe waren, oder, wenn sie sich schon selbst in Bewegung befanden, erhalten ihre Schwingungen einen andern Charakter, so dass zweierlei Schwingungen sich gleichsam vermengen, die ihnen natürlichen, mit der denselben zukommenden Schwingungsperiode, und die inducirten, ihnen gleichsam aufgedrungenen, die eine ganz andere Periode haben. Die Periode dieser inducirten Schwingungen ist an Dauer der Schwingungsperiode des grossen inducirenden Stabs genau gleich (42 Secunden), allein immer fällt ihr Anfang und Ende der Zeit nach nicht mit Anfang und Ende einer Schwingung oder Rückschwingung des grossen Stabes zusammen, sondern vielmehr mit der Mitte einer solchen. Was endlich die Grösse der vermengten Schwingungen betrifft, so ist die der natürlichen Schwingungen abhängig von dem Bewegungszustande der Nadel beim Anfang der Induction, hingegen die Grösse der inducirten Schwingungen von diesem Initialzustande ganz unabhängig, und bloss durch die Grösse der Schwingungen des inducirenden Stabes bestimmt.

Ein fast noch merkwürdigerer Erfolg findet aber Statt, wenn in einem der andern Apparate eine Nadel aufgehängt ist, deren natürliche Schwingungsdauer auch 42 Secunden beträgt, oder, um es allgemein auszudrücken, der Schwingungsdauer der inducirenden Nadel genau gleich ist. In diesem Fall behalten die sympathetisch inducirten Schwingungsbewegungen dieselbe Periode, aber sie werden immer grösser*. Schon sehr oft und mit immer gleichem Erfolg ist dieser interessante Versuch angestellt, und das wunderbar erscheinende Schauspiel beobachtet, dass ein Magnetstab lediglich durch einen andern in so grosser Entfernung schwingenden angeregt, aus seiner Ruhe gerissen und zu immer schnel-

*) Es wird hier stillschweigends der Fall vorausgesetzt, wo die passive Nadel anfangs in Ruhe oder sehr gelinder Bewegung ist; träfe aber der Anfang der Induction die passive Nadel schon schwingend an, so kann, nach Maassgabe der Stellen der Schwingungsperioden beider Nadeln zur Zeit des Anfangs, auch zuerst eine stetige Abnahme des Schwingungsbogens eintreten, und erst wenn dieser dadurch gleichsam absorbirt ist, wird dann die stetige Zunahme erfolgen.

lerer Bewegung angespornt wird. Schon nach wenigen Minuten wurde bei diesen Versuchen die Bewegung so gross, dass die Scale des Magnetometers nicht mehr ausreichte, sie unmittelbar zu messen; aber mittelbarer Weise konnte man sich doch leicht, länger als eine Stunde, von der beständig fortdauernden Beschleunigung überzeugen, und in der That muss die Zunahme der Bewegung so lange fortdauern, bis die andern Ursachen, die zur Schwächung der Bewegung wirken, der Vergrösserungsursache das Gleichgewicht halten, von welchem Zeitpunkt an dann die Bögen allmählig wieder kleiner werden.

Wir finden hier im Kleinen eine Art von Spiegelung der gegenseitigen Einwirkung der Himmelskörper; der erste Versuch erinnert uns an die periodischen, der andere an die Säcularstörungen, welche ein Planet an einem andern ausübt. Aber wie diese Störungen in allen ihren Verwicklungen aus dem allgemeinen Gravitationsgesetze als nothwendige Folgen hervorgehen, so folgen auch die hier erzählten Erscheinungen von selbst aus einem allgemeinen sehr einfachen electromagnetischen Grundgesetze; auch waren sie mit allen begleitenden hier nur in allgemeinen Umrissen angedeuteten Umständen aus diesem Grundgesetze durch die Theorie im Voraus abgeleitet, ehe die Versuche selbst angestellt wurden.

EINLEITUNG

[FÜR DIE ZEITSCHRIFT: RESULTATE AUS DEN BEOBACHTUNGEN DES MAGNETISCHEN VEREINS IM JAHRE 1836. HERAUSGEGEBEN VON C. F. GAUSS UND W. WEBER.]

Unter den mannigfaltigen Äusserungen der erdmagnetischen Kraft, deren Ergründung nur durch zahlreiche an den verschiedensten Punkten der Erdoberfläche fortgesetzt anzustellende genaue Beobachtungen zu erreichen ist, bedürfen die *unregelmässigen Änderungen*, welchen wir jene Kraft unterworfen finden, am meisten eines streng geordneten Zusammenwirkens der Beobachter. Es ist bekannt genug, dass die Bestimmungsstücke der erdmagnetischen Kraft, die Abweichung, die Neigung und ohne Zweifel auch die Stärke (wenn gleich in Beziehung auf die letzte, die erst seit einigen Jahrzehnden in den Kreis der Forschungen aufgenommen ist, noch hinlängliche Erfahrungen fehlen) fortwährend Veränderungen erleiden, seculäre erst nach längerer Zwischenzeit in die Augen fallende, aber im Laufe der Zeit sehr beträchtlich werdende, und periodische nach den Jahres- und Tageszeiten wechselnde. Aber so weit diese Veränderungen mit Regelmässigkeit geschehen, ist ein streng geordnetes Zusammenwirken der Beobachter an verschiedenen Orten, wenn auch für die Beschleunigung der Erweiterung unserer Einsicht höchst wünschenswerth, doch nicht wesentlich nothwendig, und jeder Beobachter kann auch unabhängig von den andern nützliche Beiträge liefern.

Anders verhält es sich hingegen mit den unregelmässigen Veränderungen, welchen man erst in den letzten Jahren eine grössere Aufmerksamkeit zu widmen angefangen hat. Dass während der Sichtbarkeit eines Nordlichts die Magnetnadel unregelmässige und oft sehr grosse Bewegungen zeigt, haben schon vor bei-

nahe hundert Jahren Hiorter und Celsius bemerkt, und nachher vielfache Beobachtungen bestätigt. Es liess sich hieraus schliessen, dass dieselben Kräfte, welche die Erscheinung eines Nordlichts hervorbringen, zugleich auch auf die Magnetnadel wirken, und dass diese Wirkungen sich auf sehr bedeutende Entfernungen erstrecken müssen, da die Nordlichter in einem weiten Umkreise sichtbar zu sein pflegen. Einen noch grössern Begriff von der weiten Ausdehnung der Wirksamkeit jener räthselhaften Kräfte erhalten wir durch die Bemerkung von Hrn. Arago, dass oft an denselben Tagen, wo er in Paris starke Störungen des regelmässigen Ganges der Magnetnadel beobachtet hatte, an entfernten Orten Nordlichter gesehen waren, deren Sichtbarkeit sich über den Horizont von Paris nicht erhoben hatte.

Die Unregelmässigkeiten in den Äusserungen des Erdmagnetismus, deren häufiges Vorkommen besonders auch Hr. von Humboldt bei seinen zahlreichen Beobachtungen der täglichen und stündlichen Bewegungen der Magnetnadel wahrgenommen hatte, erhielten hiedurch ein eigenthümliches Interesse. Wenn gleich jene Bemerkungen durchaus nicht dazu berechtigten, alle unregelmässigen Bewegungen, als gleichzeitig mit Nordlichtern zu betrachten, und die Möglichkeit noch nicht ausschlossen, dass viele, vielleicht die meisten, nur von localen Ursachen herrührten, so liess sich doch kaum verkennen, dass nicht selten grosse und fernhin wirkende Naturkräfte dabei im Spiel sind, deren Kenntniss, wenn auch noch nicht in Beziehung auf ihre Quelle, sondern zunächst nur in Beziehung auf die Verhältnisse ihrer Wirksamkeit und Verbreitung, einen würdigen Gegenstand der Naturforschung darbietet.

Obenhin und auf gut Glück gemachte Wahrnehmungen können uns diesem Ziele nicht näher bringen: um es zu erreichen, müssen viele solche Erscheinungen im genauen Detail an vielen Orten gleichzeitig verfolgt und nach Zeit und Grösse scharf gemessen werden. Dazu sind aber vorgängige bestimmte Verabredungen zwischen solchen Beobachtern, denen angemessene Hülfsmittel zu Gebote stehen, wesentlich nothwendig.

Der berühmte Naturforscher, dem unsere Kenntniss des Erdmagnetismus so viele Bereicherung verdankt, hat auch hier zuerst die Bahn gebrochen. Hr. von Humboldt errichtete in Berlin gegen Ende des Jahrs 1828 für die magnetischen Beobachtungen ein eignes eisenfreies Häuschen, stellte darin einen von Gambey verfertigten Variationscompass auf, und verband sich mit andern Besitzern ähnlicher Apparate an mehrern zum Theil sehr entlegenen Orten zu regelmässigen an verabredeten Tagen auszuführenden Beobachtungen der magnetischen Variation. Es wurden acht Termine im Jahre, jeder zu 44 Stunden, festgesetzt, an denen die magnetische Abweichung von Stunde zu Stunde aufgezeichnet werden sollte: an einigen Orten beobachtete man in noch engern Zeitgrenzen, von halber zu halber Stunde, oder von zwanzig zu zwanzig Minuten. Die nähern Bestimmungen findet man im 19. Bande von Poggendorff's Annalen der Physik S. 361, und ebendaselbst auch die Beobachtungen, welche dieser Verabredung gemäss an den Terminen im Jahr 1829 und 1830 in Berlin, Freiberg, Petersburg, Kasan, und Nicolajef angestellt sind, so wie graphische Darstellungen von dreien derselben.

In dem hiesigen magnetischen Observatorium, welches im Jahr 1833 erbaut wurde und dessen magnetischer Apparat eine von den früher angewandten gänzlich verschiedene Einrichtung hat, wurden diese Terminsbeobachtungen zum erstenmal am 20. und 21. März 1834 vollständig angestellt, wozu correspondirende bloss aus Berlin bekannt geworden sind: aber in Göttingen war von zehn zu zehn Minuten, in Berlin nur von Stunde zu Stunde beobachtet. Gleichwohl zeigten diese Berliner Aufzeichnungen mehrere ziemlich beträchtliche Bewegungen, die man in den Göttinger Beobachtungen wiederfand, während diese letztern in den Zwischenzeiten eine grosse Menge anderer Bewegungen zu erkennen gaben, welche natürlich in Berlin ganz ausfallen mussten. Die Frage, ob ein kleinerer oder grösserer Theil der in Göttingen wahrgenommenen Schwankungen bloss local gewesen sei, blieb daher noch ohne Entscheidung.

Allein schon der nächste Termin, am 4. und 5. Mai, führte eine solche Entscheidung herbei. Die Zwischenzeiten wurden noch enger genommen, nemlich von fünf zu fünf Minuten, wodurch die Resultate noch bedeutend schärfer ausgeprägt erschienen. Correspondirende Beobachtungen mit Gambey'schen Apparaten sind von diesem Termine, eben so wie von allen spätern, überall keine mehr bekannt geworden. Dagegen hatte Hr. Sartorius, der an den Beobachtungen vom Märztermine in Göttingen thätigen Antheil genommen, und sich für eine mehrjährige nach Italien zu unternehmende Reise mit einem dem Göttingischen ganz ähnlichen, nur in kleinern Dimensionen gearbeiteten Apparate versehen hatte, mit diesem den Maitermin in Waltershausen (einem Gute in Baiern, etwa 20 Meilen von Göttingen entfernt) sorgfältig und vollständig in engen Zeitintervallen beob-

achtet. Hier zeigte sich nun eine wirklich überraschend grosse Uebereinstimmung nicht nur in der grössern, sondern auch fast in sämmtlichen kleinern in kurzen Zeitfristen wechselnden Schwankungen, so dass in der That gar nichts übrig blieb, was man localen Ursachen beizumessen befugt gewesen wäre.

Die drei folgenden Termine im Junius, August und September wurden in Göttingen ganz auf dieselbe Weise abgehalten, während die Anzahl der auswärtigen Theilnehmer mit ähnlichen oder gleichen Apparaten sich fortwährend vergrösserte. Hr. Prof. Encke hatte sich, nachdem er die hiesigen Einrichtungen durch eigne Ansicht kennen gelernt hatte, für Berlin provisorisch einen ähnlichen Apparat nach kleinern Dimensionen anfertigen lassen; Hr. Sartorius beobachtete mit dem seinigen in allen Terminen, wo die Umstände es verstatteten (im Junius in Frankfurt, im September in Bramberg im Salzburgschen); in Leipzig, Copenhagen und Braunschweig wurde mit Apparaten, die dem hiesigen ganz gleich sind, beobachtet. Das Resultat der correspondirenden Beobachtungen war dem vom Maitermin angeführten ganz ähnlich. Die zahlreichen in Göttingen beobachteten Schwankungen fanden sich fast alle in den Beobachtungen der andern Plätze wieder, wenn auch in abgeänderten Grössenverhältnissen, doch in unverkennbarer Zusammenstimmung.

Um über dieses merkwürdige Resultat noch ein unabweisbares Zeugniss zu erhalten, wurden bei der damaligen Anwesenheit des Hrn. Prof. Weber in Leipzig einige besondere correspondirende Beobachtungen zwischen Göttingen und Leipzig verabredet, und dazu bestimmte Stunden Vormittags, Mittags und Abends am 1. und 2. October festgesetzt. Diese von vorzüglich eingeübten Beobachtern und mit grösster Sorgfalt ausgeführten Beobachtungen sind in Poggendorff's Annalen der Physik Bd. 33, S. 426 vollständig abgedruckt, und durch graphische Darstellungen versinnlicht.

Es war hiedurch die Nothwendigkeit, den Erscheinungen in viel engern Zeitintervallen, als Hr. von Humboldt gewählt hatte, zu folgen, auf das klarste vor Augen gelegt. Wir haben eine Zeitlang die Termine in Intervallen von drei zu drei Minuten abgewartet, und dasselbe ist auch von einigen andern Theilnehmern geschehen: da jedoch ein Theil der auswärtigen Theilnehmer sich an die Intervalle von fünf zu fünf Minuten hielt, die auch in den meisten gewöhnlichen Fällen zureichen, so haben wir später der Gleichförmigkeit wegen diese zur allgemeinen Regel angenommen. Da nun aber bei so kleinen Zeitintervallen die

Abhaltung der Termine, besonders da, wo nur eine kleine Anzahl von Personen sich in die Arbeit theilen muss, ohne Vergleich mühsamer wird, als beim Aufzeichnen von Stunde zu Stunde, so musste, um das Bestehen des Vereins zu sichern, sowohl die Anzahl als die Dauer der Termine vermindert werden. Die Anzahl ist seit jener Zeit auf sechs im Jahre, die Dauer eines jeden auf 24 Stunden festgesetzt; jedem solchen Haupttermine wurden noch zwei Nebentermine beigefügt. Das Nähere findet man weiter unten.

Nach dieser Einrichtung sind und werden die Beobachtungen ununterbrochen fortgesetzt, in Göttingen und einer fortwährend sich vergrössernden Anzahl anderer Oerter. Apparate, dem Göttingischen gleich oder ähnlich, befinden sich in Altona, Augsburg, Berlin, Bonn, Braunschweig, Breda, Breslau, Cassel, Copenhagen, Dublin, Freiberg, Göttingen, Greenwich, Halle, Kasan, Krakau, Leipzig, Mailand, Marburg, München, Neapel, Petersburg und Upsala. Von acht Oertern aus dieser Anzahl sind bisher noch keine Beobachtungen zu unsrer Kenntniss gekommen, und an einigen der übrigen ist die Theilnahme an den Beobachtungen wegen äusserer Umstände noch keine ununterbrochen regelmässige geworden.

Aus der ersten Zeit dieser Vereinigung sind einige Termine durch Schumacher's astronomische Nachrichten und Poggendorff's Annalen der Physik in graphischen Darstellungen veröffentlicht. Seitdem nun aber die Theilnahme sich bereits so sehr vergrössert hat, schien es an der Zeit, auf eine regelmässige Bekanntmachung Bedacht zu nehmen, um die reiche Summe von fruchtbaren Thatsachen zu einem Gemeingut desjenigen Theils des Publicums zu machen, welches sich für die Naturforschung interessirt. Was wir gegenwärtig geben, kann als der erste Jahrgang, seitdem der Verein zu einem gewissen Umfang gekommen ist, betrachtet werden. Vom Jahr 1837 an werden aber die Resultate jedes Termins regelmässig und so bald sie in hinreichender Vollständigkeit beisammen sind, zur Publication gebracht werden.

Die Beobachtungen und ihre graphischen Darstellungen sollen nicht bloss mit denjenigen Erläuterungen und Bemerkungen, welche in einer unmittelbaren Beziehung auf dieselben stehen, begleitet werden, sondern zugleich mit andern Aufsätzen, in welchen Gegenstände aus dem weiten Gebiete des Erdmagnetismus, die darauf bezüglichen Instrumente, ihre Berichtigung und Behandlung, und die mannigfachen davon zu machenden Anwendungen Platz finden werden.

In Beziehung auf den nächsten Gegenstand der Arbeiten unsers Vereins, die Veränderungen in der magnetischen Declination, sei es erlaubt, noch eine Bemerkung hinzuzufügen. Wenn, wie nicht zu bezweifeln ist, die beiden andern Elemente der erdmagnetischen Kraft, die Inclination und die Intensität, ähnlichen Veränderungen unterworfen sind, so kann man fragen, warum vorzugsweise oder für jetzt ausschliesslich, jenem ersten Elemente so sorgfältige Bemühungen gewidmet werden?

Die Kenntniss der Veränderungen und Störungen der magnetischen Declination hat in der That ein sehr grosses praktisches Interesse. Dem Seefahrer, dem Geodäten und dem Markscheider muss ungemein viel daran gelegen sein, zu wissen, wie häufigen und wie grossen Störungen ein Haupthülfsmittel bei seinen Geschäften unvermeidlich unterworfen ist, wäre es auch nur, um das Maass des Vertrauens zu erhalten, welches er demselben schenken darf. Für die beiden letzten Anwendungen der Boussole, in der praktischen Geometrie auf und unter der Erde, kann sogar in Zukunft der Nutzen dieser Untersuchungen noch viel weiter gehen. Wird einmal festgestellt sein, dass die in der Zeit wechselnden unregelmässigen Störungen nie oder nur höchst selten bloss örtlich sind, sondern immer oder fast immer sich in weiten Strecken ganz gleichzeitig und in fast gleicher Grösse offenbaren, so ist das Mittel gegeben, sie fast vollkommen unschädlich zu machen. Der Geodät und der Markscheider braucht nur alle seine Operationen mit der Boussole genau nach der Uhr zu machen und gleichzeitige Beobachtungen an einem andern nicht gar zu entfernten Orte anstellen zu lassen, durch deren Vergleichung jene Störungen sich eben so werden eliminiren lassen, wie reisende Beobachter ihre barometrischen Höhenbestimmungen durch Vergleichung mit Barometerbeobachtungen an einem festen Orte von der unregelmässigen Veränderlichkeit des Barometerstandes unabhängig machen. Dass hier nicht von solchen Störungen dieRede ist, welche die Boussole in eisenhaltigen Gruben erleidet, versteht sich von selbst.

Gleichwohl hat man den Grund des der Declination vor den andern Elementen des Erdmagnetismus gegebenen Vorzuges nicht so wohl in diesen materiellen Rücksichten zu suchen, als vielmehr in dem gegenwärtigen Zustande der Hülfsmittel. Das Aufsuchen der Gesetze in den Naturerscheinungen hat für den Naturforscher seinen Zweck und seinen Werth schon in sich selbst, und ein eigenthümlicher Zauber umgibt das Erkennen von Maass und Harmonie im anscheinend ganz Regellosen. Bei der Verfolgung des wunderbaren Spiels in den stets wechselnden Veränderungen der Declination lassen die jetzt angewandten Apparate für Sicherheit, Schärfe und Leichtigkeit der Beobachtungen nichts zu wünschen übrig: allein von den bisherigen Beobachtungsmitteln für die beiden andern Elemente kann man nicht dasselbe sagen. Zur Zeit ist es daher noch zu früh, die letzteren in den Kreis ausgedehnter Untersuchungen aufzunehmen. Sobald aber die Beobachtungsmittel soweit vervollkommnet sein werden, dass wir die Veränderungen, und namentlich die schnell wechselnden Veränderungen, in den andern Elementen des Erdmagnetismus mit Sicherheit erkennen, mit Leichtigkeit verfolgen, und mit Schärfe messen können, werden diese Veränderungen dieselben Ansprüche auf die vereinte Thätigkeit der Naturforscher haben, wie die Veränderungen der Declination. Man darf hoffen, dass dieser Zeitpunkt nicht gar entfernt mehr sein wird.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1837 October 30.

Die in der Sitzung der Königl. Societät am 19. September von dem Hofr. Gauss gehaltene Vorlesung hat zum Gegenstande

ein neues Hülfsmittel für die magnetischen Beobachtungen.

Die magnetische Declination, als eines der Elemente der Aeusserungen des Erdmagnetismus, hat nicht allein am frühesten die Beobachter beschäftigt, sondern sie ist, seitdem auch den andern Elementen die Aufmerksamkeit der Naturforscher zugewandt ist, doch in mehreren Beziehungen vor denselben bevorzugt geblieben; von einer der interessantesten Untersuchungen im Gebiete des Erdmagnetismus, über die wunderbaren unregelmässigen, aber über einen ganzen Welttheil gleichzeitig und gleichmässig wirkenden Störungen jener Kraft, wozu in den letzten Jahren ein eigener Verein von Beobachtern zusammen getreten ist, sind die beiden andern Elemente bisher noch ganz ausgeschlossen gewesen. Den Grund dieses der Declination vor den andern Elementen gegebenen Vorzugs hat man weniger in der vielfachen practischen Wichtigkeit der Kenntniss der Declination für Seefahrer, Geodäten und Markscheider zu suchen, als in dem bisherigen Zustande der Beobachtungsmittel, die, während sie für die Declination Nichts zu wünschen übrig lassen, in Beziehung auf die anderen Elemente noch viel weiter zurück sind. Zwar dient das seit einigen Jahren eingeführte Magnetometer, neben seiner Anwendung auf die Bestimmung der Declination, zugleich zur Aus-

mittlung der horizontalen Intensität, und gerade das Problem, diese auf absolutes Maass zurück zu führen, hat zuerst jenes Instrument veranlasst. Allein es löst das Problem noch nicht in *jeder* Beziehung; es kann seiner Natur nach nur einen Mittelwerth der Intensität während eines gewissen Zeitraumes mit Schärfe angeben, und obgleich dieser Zeitraum gewissermassen von unserer Willkühr abhängt, so darf er doch nicht zu klein genommen werden, weil sonst mit ihm auch die Schärfe und Zuverlässigkeit des Resultats verändert werden würde. Auf die Verfolgung der Veränderungen der Intensität während kurzer Zeitfristen ist daher das Magnetometer gar nicht anzuwenden. Der neue Apparat, welchen die Vorlesung zum Gegenstande hat, ist bestimmt, diese Lücke für die Intensität auszufüllen, und den Beobachtungen dieses Elements dieselbe Leichtigkeit und Sicherheit zu geben, die das Magnetometer für die Declination darbietet.

Der beschränkte Raum dieser Blätter verstattet nicht, hier eine Beschreibung dieses Apparats, den der Hofr. Gauss hat ausführen lassen, zu geben: auch ist dies um so weniger nöthig, da die Vorlesung selbst bald im Druck erscheinen wird. Das Instrument ist seit einigen Monaten in der hiesigen Sternwarte aufgehängt, und bereits in zwei magnetischen Terminen sind die Veränderungen der Intensität an demselben jedesmal 24 Stunden hindurch beobachtet. Verbindet man damit die im magnetischen Observatorium gleichzeitig beobachteten Veränderungen der Declination in Einer Zeichnung, so tritt das wunderbare Spiel der magnetischen Störungen auf eine eigenthümliche neue Art sehr anschaulich hervor, und es lässt sich mit Zuversicht erwarten, dass wenn erst auf ähnliche Weise an mehreren weit von einander entlegenen Orten gleichzeitig beobachtet werden wird, wir über die Sitze der Ursachen dieser räthselhaften Erscheinungen bald umfassendere Aufklärungen gewinnen werden. Während die Intensität sich eben so häufigen und eben so beträchtlichen regellosen Störungen unterworfen zeigt, wie die Declination, tritt doch auch bei jener wie bei dieser das Vorhandensein regelmässig wirkender und mit der Tageszeit zusammen hängender Aenderungen hervor, aber, so viel sich aus täglichen Aufzeichnungen zu bestimmten Stunden während eines Monats erkennen lässt, auf etwas andere Weise. Während nemlich die westliche Declination in unseren Gegenden von Vormittags 7 oder 8 Uhr bis eine oder zwei Stunden nach Mittag zunimmt, und dann wieder zurück geht, ist die Intensität in den ersten Vormittagsstunden abnehmend, erreicht aber ihr Minimum schon eine oder zwei Stunden vor dem Mittage, wo die Declination ge-

rade im raschesten Zunehmen begriffen ist. Es bedarf jedoch kaum der Erinnerung, dass diese Regelmässigkeit an einzelnen Tagen durch die unregelmässigen Störungen oft ganz verdunkelt wird, und genauere Bestimmungen erst die Frucht von lange fortgesetzten Beobachtungen sein können.

Die Einrichtung des Apparats verstattet, denselben ausser seiner Hauptbestimmung noch zu vielen ganz verschiedenen Zwecken anzuwenden. Es ist durch ihn die Auflösung eines Problems gegeben, mit dem man sich früher wiederholt, obwohl ohne Erfolg, beschäftigt hat, nemlich die stündlichen und die unregelmässigen Aenderungen der Declination vergrössert darzustellen. So wie der Apparat gegenwärtig angeordnet ist, beträgt die Vergrösserung das Zehnfache, oder eine Veränderung der Declination, die sich am Magnetometer des magnetischen Observatoriums in 50 Scalentheilen zeigt, erscheint hier mit 500 Scalentheilen. Im letzten magnetischen Termine (30. Sept.) hat man dies durch 8 Stunden gleichzeitiger Beobachtungen an beiden Apparaten auf das befriedigendste bewährt gefunden.

Wie das Magnetometer in Verbindung mit einem Multiplicator bekanntlich ein sehr empfindliches Galvanometer abgibt, eben so der neue Apparat: aber die Empfindlichkeit des letztern in dieser Beziehung übertrifft die des Magnetometers gerade in demselben Verhältniss, wie wir in Beziehung auf Declinationsveränderungen angegeben haben. Der neue Apparat dient also zur scharfen Messung selbst der schwächsten galvanischen Ströme, und es pflegt Bewunderung zu erregen, wie diese den in jenem befindlichen 25 pfündigen Magnetstab in so bedeutende Bewegungen versetzen. In Beziehung auf thermogalvanisch erregte Ströme widerlegt sich dadurch auf das evidenteste die irrige Meinung vieler Physiker, als ob jene eine Kette von bedeutender Länge nicht durchdringen könnten. Durch eine noch so lange Kette werden solche Ströme nicht aufgehoben, sondern nur, und zwar genau, in demselben Verhältnisse geschwächt, wie bei andern Erregungsarten. Unter Anwendung eines thermogalvanischen Apparats von eigenthümlicher Construction bringt die blosse Berührung der Verbindungsstellen mit dem Finger einen galvanischen Strom hervor, der, selbst wenn er eine fast zwei Meilen lange Kette meistens sehr dünnen Drahts zu durchlaufen hat, doch noch in sehr bedeutenden Ablenkungen des Magnetstabes sich zu erkennen gibt.

Die electromagnetischen Wirkungen der gewöhnlichen Reibungselectricität, wenn man sie durch den Multiplicator gehen lässt, gehören zu den schwächsten, schwer zu erkennenden und noch schwerer zu messenden. Bekanntlich ist das

Dasein solcher Wirkungen zuerst von COLLADON entdeckt und später von FARADAY bestätigt. Anstatt wie diese Physiker gethan haben, eine starke electrische Batterie durch den Leitungsdraht zu entladen, beobachtete der Hofrath GAUSS die Wirkung der Reibungselectricität bei fortgesetzter Drehung einer im physicalischen Cabinette aufgestellten Electrisirmaschine, deren Conductor und Reibzeug mit den Enden der grossen, nach der Sternwarte gehenden, Kette verbunden waren. In dieser Kette befand sich der Multiplicator, welcher den Magnetstab des neuen Apparats umgibt, und dieser Stab wurde dadurch in einer Ablenkung von 144 Scalentheilen oder 51 Minuten erhalten, positiver oder negativer, je nach der Richtung, in welcher die Electricität den Multiplicator durchlief. Die Drahtlänge der Kette betrug hierbei etwa 13000 Fuss; aber als besonders merkwürdig muss noch der Umstand hervorgehoben werden, dass eine Verlängerung der Kette bis fast zu einer ganzen Meile, durch Hineinbringen anderen Drahts, gar keine Verminderung der electromagnetischen Wirkung hervorbrachte. In dieser Beziehung verhält sich also die strömende Maschinenelectricität anders, als die galvanischen Ströme, die hydrogalvanisch, thermogalvanisch, oder durch Induction erregt werden, und deren durch die magnetische Wirkung gemessene Intensität immer desto schwächer wird, je länger die schliessende Kette ist. Allein weit entfernt, einen wesentlichen inneren Unterschied zwischen jenen und diesen Strömen zu beweisen, dient jene Erscheinung vielmehr zu einer Bestätigung der Gleichheit, und derjenigen Theorie, welcher zufolge ungleiche Intensität zweier Ströme nichts weiter ist, als ungleiche Menge in gegebener Zeit jeden Querschnitt der Leitung durchströmender Electricität. Nur setzen gegebene electromotorische Kräfte der zuletzt genannten Arten desto weniger Electricität in Bewegung, je grösser der Widerstand ist, den die längere Kette entgegensetzt. Aber bei dem oben angeführten Versuche musste *alle* von der Maschine auf den Conductor in Funkenform überspringende Electricität die ganze Kette durchlaufen, um sich mit der entgegengesetzten des Reibzeugs auszugleichen, die Kette mochte kurz oder lang sein (in so fern sie nur hinlänglich isolirt war). Die Menge der in bestimmter Zeit jeden Querschnitt des Leitungsdrahts durchströmenden Electricität hing also gar nicht von der Länge der Kette, sondern nur von dem Spiele der Maschine ab.

Bei den meisten der hier erwähnten Versuche hatte der galvanische oder electrische Strom die grosse zwischen der Sternwarte und dem physicalischen Ca-

binette im J. 1833 gezogene Kette zu durchlaufen, an welcher allein der in der Luft befindliche Draht eine Länge von fast 7000 Fuss hat. Der Hauptzweck dieser Anlage ist zwar, physikalische Untersuchungen über die Gesetze der galvanischen Ströme im grossen Maassstabe anzustellen; aber gleich von Anfang an war die Gelegenheit auch vielfältig zu Versuchen einer electromagnetischen Telegraphie benutzt, die auch mit ganzen Wörtern und kleinen Phrasen auf das befriedigendste gelangen, wie schon in diesen Blättern, bei Gelegenheit der ersten Nachricht von der Einrichtung des hiesigen magnetischen Observatoriums erwähnt ist (Gött. gel. Anz. 1834. Aug. 9). An die Stelle des dabei zuerst angewandten Verfahrens wurde 1835 ein anderes gesetzt, auf welches der Hofr. Gauss durch die Erwägung der Inductionsgesetze geführt war, und welches dem zuerst gebrauchten bei weitem vorzuziehen ist. Gerade bei dieser Art des Telegraphirens hat nun auch der neue in Rede stehende Apparat einen bedeutenden Vorzug vor dem gewöhnlichen Magnetometer, und von diesem Umstande nahm der Hofr. Gauss Veranlassung, dieses Verfahren, welches bisher noch nicht öffentlich erwähnt war, in der Vorlesung nach seinen Hauptzügen zu beschreiben, und was dasselbe leistet, anzugeben, was wir jedoch hier, des beschränkten Raumes wegen, mit Stillschweigen übergehen müssen. Aus demselben Grunde erwähnen wir hier auch nur kurz einer andern neuen Vorrichtung, die zum Zwecke hat, jede unzeitige, bei einem bestimmten Geschäft störende, Schwingungsbewegung einer Magnetnadel in kurzer Zeit von selbst zur Ruhe zu bringen, und die deshalb ein Dämpfer genannt ist. Diese Vorrichtung kann eben so gut bei dem neuen Apparate wie bei dem Magnetometer gebraucht werden, und ist so wohl bei der erwähnten Art des Telegraphirens, wie bei vielen anderen magnetischen Messungsgeschäften von wesentlichem Nutzen.

ÜBER EIN NEUES, ZUNÄCHST ZUR UNMITTELBAREN BEOBACHTUNG DER VERÄNDERUNGEN IN DER INTENSITÄT DES HORIZONTALEN THEILS DES ERDMAGNETISMUS BESTIMMTES INSTRUMENT*).

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1837. I.

Zur vollständigen Bestimmung des Erdmagnetismus an einem gegebenen Orte ist bekanntlich ein System von *drei* Elementen erforderlich, und gewöhnlich wählt man dazu die Abweichung, die Neigung und die Stärke; indessen obgleich diese Wahl die für den Begriff einfachste ist, so ist es doch nicht nur verstattet, sondern es kann auch in manchen Beziehungen empfehlenswerther sein, eine andere Combination zum Grunde zu legen. Namentlich ist es sowohl in praktischer als in theoretischer Hinsicht weit vortheilhafter, den horizontalen Theil der erdmagnetischen Kraft für sich zu betrachten, und in zwei Elementen darzustellen, der Richtung (Declination) und der Stärke. Verbindet man dann damit als drittes Element entweder die Stärke der verticalen Kraft, oder die Neigung der Ganzen, so ergibt sich daraus die Stärke der ganzen Kraft, wenn man sie verlangt, von selbst.

Was nun die beiden Elemente des horizontalen Erdmagnetismus, von welchem allein hier die Rede sein wird, betrifft, so sind für die Declination durch das seit fünf Jahren eingeführte Magnetometer alle vorkommenden Aufgaben voll-

*) Dieser Aufsatz enthält den wesentlichen Inhalt der in der öffentlichen Sitzung der Königlichen Societät der Wissenschaften am 19. September 1837 von mir gehaltenen Vorlesung.

kommen gelöst. Nicht allein zur Bestimmung ihres absoluten Werthes, sondern auch zur Verfolgung ihrer regelmässigen und zufälligen Aenderungen, von Jahr zu Jahr, von Monat zu Monat, von Stunde zu Stunde, ja selbst von einer Minute zur andern, dient dasselbe mit einer Sicherheit, Bequemlichkeit und Schärfe, die nichts zu wünschen übrig lassen.

Dasselbe Instrument dient nun zwar zugleich zur Bestimmung der Stärke des horizontalen Erdmagnetismus in absolutem Maass; ja, gerade diese Aufgabe hat, wie bekannt ist, zur Einrichtung des Magnetometers den ersten Anlass gegeben; gleichwohl löst dasselbe die Aufgabe noch keineswegs vollständig in *allen* Beziehungen.

Um das, was dabei noch zu wünschen bleibt, gehörig ins Licht zu setzen, muss ich zuvörderst in Erinnerung bringen, dass die Anwendung des Magnetometers zur Bestimmung der magnetischen Intensität auf einer Verbindung *mehrerer* Operationen beruht, deren Eine in der Beobachtung der Schwingungsdauer einer Nadel besteht. Diese erfordert aber ihrer Natur nach eine nicht unbeträchtliche Zeit, da die Anzahl der Schwingungen, aus denen man auf die Dauer Einer zurückschliessen muss, nicht zu klein sein darf. Ist nun während der Dauer einer solchen Operation die Intensität des Magnetismus constant, so entspricht allerdings die gefundene Schwingungsdauer *diesem* Werthe der Intensität; hingegen wird jene nur *dem Mittelwerthe* der Intensität während jenes Zeitraumes entsprechen, wenn dieselbe inzwischen veränderlich gewesen ist. Es bleibt uns aber auf diese Weise gänzlich verborgen, ob und was für Veränderungen in der magnetischen Intensität *während* dieser Zeit vorgegangen sind. Man sieht also, dass dieses Instrument nur Durchschnittswerthe während gewisser Zeiträume geben kann, nicht aber den treuen vollständigen Hergang innerhalb derselben; wollte man, um sich diesem mehr zu nähern, die Zeiträume kürzer wählen, oder die Resultate immer nur auf eine kleine Anzahl von Schwingungen gründen, so würden jene dadurch zu sehr an Schärfe und Sicherheit verlieren, und man würde Gefahr laufen, für Anomalien in der Intensität zu halten, was nur Fehler der Beobachtungen wäre.

Je interessanter nun aber gerade die in kurzen Zeitfristen wechselnden Störungen der erdmagnetischen Kraft schon in ihrer einseitigen Erscheinung bei der Declination durch die Erfahrungen der letzten Jahre hervorgetreten sind, desto lebhafter musste man wünschen, ein Mittel zu besitzen, wodurch auch die nicht

zu bezweifelnden Wirkungen solcher Störungen auf die Intensität mit derselben Leichtigkeit, Sicherheit und Schärfe verfolgt und gemessen werden könnten.

Die Untauglichkeit der bisherigen Beobachtungsmittel zu *diesem* Zwecke beruht nach dem, was ich eben entwickelt habe, darauf, dass sie auf Beobachtungen von Schwingungszeiten basirt sind, die ihrer Natur nach jedesmal eine zu lange Zeit erfordern. Die Schwingungsdauer einer Nadel dient hier aber selbst nur dazu, mittelbarerweise das Drehungsmoment zu bestimmen, welches die erdmagnetische Kraft der Nadel ertheilt, wenn sie sich nicht im magnetischen Meridian befindet. Kann man also dieses Drehungsmoment auf directem Wege, ohne Schwingungsbeobachtungen, scharf bestimmen, und seine Veränderungen sicher, scharf und schnell messen, so wird unsere Aufgabe in der Hauptsache gelöst sein. Das von mir dazu angewandte Mittel beruht auf folgender Grundlage.

Die Bedingungen des Gleichgewichts eines an zwei Fäden aufgehängten Körpers von beliebiger Gestalt, dessen Theile einstweilen bloss der Schwerkraft unterworfen und in festem Zusammenhange vorausgesetzt werden, lassen sich kurz so zusammenfassen, dass die Vertikale durch den Schwerpunkt des Körpers und die durch die Fäden dargestellten geraden Linien sich in Einer Ebene befinden, und zugleich entweder unter sich parallel sein, oder sich in Einem Punkt schneiden müssen. Allemal sind also bei der Gleichgewichtsstellung die beiden Fäden und der Schwerpunkt in Einer Vertikalebene. Um die Vorstellungen zu fixiren, mag man annehmen, dass die beiden Fäden gleich lang, ihre obern Anknüpfungspunkte in gleicher Höhe sind und von einander eben so weit abstehen, wie die beiden untern, endlich dass die letztern mit dem Schwerpunkte ein gleichschenkliges Dreieck bilden. Unter diesen Voraussetzungen werden also im Gleichgewichtszustande die beiden Fäden vertikal hängen, und eine dritte Vertikallinie, mitten zwischen diesen Fäden gedacht, wird den Schwerpunkt des Körpers treffen. Bringt man den Körper aus dieser Lage vermittelst einer Drehung um letztere Linie, so werden die beiden Fäden nicht mehr vertikal und auch nicht mehr in Einer Ebene sein, und zugleich wird der Körper etwas gehoben. Es entsteht demnach ein Bestreben, zu der vorigen Lage zurückzukehren, mit einem Drehungsmomente, welches mit hinlänglicher Genauigkeit dem Sinus der Ablenkung von der Ruhestellung proportional gesetzt werden kann, also am grössten ist, wenn die Ablenkung 90 Grad beträgt: dieses grösste Drehungsmoment wird im-

mer stillschweigends verstanden, wenn man von Drehungsmoment schlechthin spricht. Man kann dasselbe auch als das Maass einer Kraft ansehen, mit welcher der Körper vermöge der Aufhängungsart in seiner Gleichgewichtsstellung zurückgehalten wird, und die ich der Kürze wegen die aus der Aufhängungsart entspringende Directionskraft nennen will. Ihre Grösse hängt übrigens ab 1) von der Länge der Aufhängungsfäden, 2) deren Abstande, 3) dem Gewicht des Körpers, und zwar so, dass sie der Länge der Fäden verkehrt, dem Quadrate ihres Abstandes direct, und dem Gewicht des Körpers gleichfalls direct proportional ist. Wenn die obigen Voraussetzungen nicht genau zutreffen, so ist der Ausdruck für die Directionskraft complicirter, so wie auch die Reaction der Fäden gegen eine Torsion noch eine kleine Modification nöthig macht. Es fehlt jedoch nicht an Mitteln, die Grösse der Directionskraft in grösster Schärfe durch Versuche zu bestimmen. Ueberlässt man den Körper, nach einer kleineren oder grösseren Ablenkung von der Gleichgewichtsstellung, sich selbst, so wird er mit der grössten Regelmässigkeit Schwingungen machen, deren Mitte mit dieser Stellung zusammenfällt, und deren Dauer von der Grösse der Directionskraft und dem Trägheitsmoment des Körpers abhängt.

Gehen wir jetzt zu der Voraussetzung über, dass ein horizontaler Magnetstab einen Bestandtheil des aufgehängten Körpers ausmache, so tritt eine zweite Directionskraft mit ins Spiel, und die Erscheinungen hängen von der Zusammensetzung der beiden Directionskräfte, nach den bekannten Regeln der Statik ab. Es sind in dieser Beziehung drei Fälle zu unterscheiden, indem die beiden Stellungen des Körpers, in welchen er vermöge jeder der beiden Kräfte für sich allein im Gleichgewichtszustande sein würde, entweder zusammenfallen, oder entgegengesetzt sein, oder einen Winkel mit einander machen können. Man sieht leicht, dass der Unterschied dieser drei Fälle auf dem Verhältniss der beiden Winkel beruht, welche einerseits die gerade Linie durch die beiden untern Anknüpfungspunkte der Fäden mit dem Magnetstabe, und andererseits die gerade Linie durch die beiden obern Befestigungspunkte mit dem magnetischen Meridian macht. Denkt man sich den Körper in derjenigen Gleichgewichtslage, die durch die Aufhängungsart allein bedingt wird, so wird für den ersten unsrer drei Fälle der Magnetstab im magnetischen Meridian sein müssen, und zwar in seiner natürlichen Lage (Nordpol auf der Nordseite); für den zweiten Fall muss er in verkehrter Lage im Meridian sein, und für den dritten muss er mit dem magnetischen Meridian einen Winkel machen. Der Kürze wegen will ich diese drei möglichen Lagen des Magnetstabs in dem Apparate die natürliche, die verkehrte und die transversale nennen.

Bei der natürlichen Lage wird durch die Einwirkung des Erdmagnetismus auf den Magnetstab die der Aufhängungsart entsprechende Gleichgewichtsstellung des Apparats nicht abgeändert, aber dieser mit einer verstärkten Kraft darin zurückgehalten, welche die Summe der beiden Directionskräfte ist.

Im zweiten Falle, der verkehrten Lage, hört zwar das Gleichgewicht in jener Stellung auch nicht auf, allein es ist nur dann stabil, wenn die magnetische Directionskraft kleiner ist als die Directionskraft vermöge der Aufhängungsweise, und der Apparat wird dann in dieser Stellung nur mit einer Kraft zurückgehalten, die die Differenz jener beiden Directionskräfte ist. Wäre hingegen umgekehrt die magnetische Directionskraft die grössere, so würde jenes Gleichgewicht nur ein instabiles sein, und der Apparat, einmal davon abgelenkt, würde nicht dahin zurückkehren, sondern sich immer weiter davon entfernen, und nur in der entgegengesetzten Stellung zur Ruhe kommen, wo der Stab seine natürliche Lage im Raume hat, aber die Aufhängungsfäden einander kreuzen.

Im dritten Falle endlich, wo die beiden Directionskräfte einen Winkel mit einander machen, wird der Conflict dieser beiden Kräfte durch eine Zwischenstellung vermittelt, wobei weder der Stab im Meridian, noch eine gerade Linie durch die untern Anknüpfungspunkte der Fäden der durch die obern parallel ist, und diese Zwischenlage sowohl, als die Kraft, mit welcher der Apparat in derselben zurückgehalten wird, richten sich nach dem statischen Gesetze der Zusammensetzung zweier Kräfte. Man übersieht nun aber zugleich, dass wenn der Apparat Mittel darbietet, die Winkel zwischen den drei in Rede stehenden Stellungen zu messen, das Verhältniss der beiden componirenden Directionskräfte sich berechnen lässt, und dass man folglich auch die magnetische Directionskraft in absolutem Maasse angeben kann, wenn die Directionskraft vermöge der Aufhängungsweise in absolutem Maasse bekannt ist. Unsere Aufgabe ist dann also gelöst. Am vortheilhaftesten ist es übrigens, das Einliegen des Magnetstabes relativ gegen die andern Theile des Apparats so einzurichten, dass jener in der vermittelten Gleichgewichtsstellung nahe einen rechten Winkel mit dem magnetischen Meridian macht, welchem Fall also die Benennung der transversalen Lage vorzugsweise angemessen ist. Theils ist nemlich dann die Ablenkung der Fäden

von ihrer Lage in Einer Ebene am grössten, und damit die Berechnung des Resultats am schärfsten, theils hat dann auch die kleine Veränderung der magnetischen Declination vermöge der stündlichen oder zufälligen Variationen auf die Stellung keinen merklichen Einfluss. Dagegen aber afficirt eine jede Veränderung in der Stärke des Erdmagnetismus die Stellung unmittelbar, und lässt sich mit derselben Leichtigkeit, Schnelligkeit und Schärfe sogleich erkennen und messen, wie das Spiel der Veränderungen der Declination am gewöhnlichen Magnetometer.

Die praktische Anwendbarkeit dieser Idee hatte ich schon vor mehreren Jahren durch vorläufige Versuche an einer freilich nur ganz rohen Vorrichtung bestätigt gefunden, wovon auch eine Andeutung in meinem Aufsatze über Erdmagnetismus und Magnetometer [S. 327 d. B.] gegeben ist. Seit kurzem habe ich aber einen vollkommneren Apparat ausführen lassen, und in der Sternwarte an dem Platze, wo sich bisher das Magnetometer mit fünfundzwanzigpfündigem Stabe befand, aufgehängt. Nach den bereits gegebenen Entwickelungen wird sich dieser Apparat kurz beschreiben lassen.

Er ist aufgehängt an zwei 17 Fuss langen Stahldrähten, oder genau zu reden, an einem einzigen, dessen Enden unten an den Apparat geknüpft sind, während seine Mitte oben über zwei Cylinder geht, die ihn in schicklicher Entfernung (etwa 1½ Zoll) auseinander halten: diese Einrichtung hat zugleich den Vortheil, dass die beiden Stränge von selbst gleiche Spannung haben. Die Aufhängung befindet sich oberhalb der Decke des Saals, und die Drähte hängen frei durch eine kreisrunde 3½ Zoll weite Oeffnung in der Decke. Die Entfernung der Drähte von einander kann sowohl oben als unten nach Bedürfniss weiter oder enger gestellt werden. Der an den Drähten hängende Apparat selbst besteht aus vier Haupttheilen. Der erste, an welchem die Drähte fest sind, ist eine horizontale in Viertelsgrade auf Silber eingetheilte Kreisscheibe, von vier Zoll Durchmesser. Der zweite Theil besteht aus einer auf dem Limbus des Kreises, concentrisch mit diesem drehbaren Alhidade mit zwei Verniers, die einzelne Minuten geben; einer damit fest verbundenen ziemlich starken gegen die Kreisebene senkrechten Stange, und einem daran befindlichen sehr vollkommnen kreisrunden Spiegel von 1½ Zoll Durchmesser, in welchem man durch ein 16 Fuss entferntes Fernrohr das Bild eines Stücks einer in einzelne Millimeter eingetheilten unterhalb des Fernrohrs befestigten horizontalen Scale sieht. Auf diese Weise ist

also jede Veränderung in der Lage des Kreises zu erkennen und zu messen; kleine Veränderungen unmittelbar mit äusserster Schärfe durch die im Fernrohr sich zeigenden Scalentheile, grössere, indem man damit eine Alhidadenbewegung verbindet und die Verniers abliest. Der dritte Theil ist das unter dem Kreise befindliche Schiffchen, ein doppelter Rahmen, durch welchen der vierte Bestandtheil, ein fünfundzwanzigpfündiger starker Magnetstab gesteckt wird. Dieses Schiffchen ist gleichfalls um das Centrum des Kreises drehbar, und mit zwei auf dem Kreislimbus aufliegenden Verniers versehen, wodurch man die Grösse der Drehung auf die Minute messen kann.

Stellt man nun zuvörderst das Schiffchen so, dass der Apparat einerlei Gleichgewichtslage behauptet, es möge der Magnetstab im Schiffchen liegen, oder ein nicht magnetischer Körper von gleichem Gewicht, so ist dies die erste oder die zweite der vorhin unterschiedenen Hauptlagen, jenachdem der Magnetstab sich dabei in seiner natürlichen, oder in der verkehrten Lage befindet. Die erstere bietet keine besonders wichtige praktische Anwendung dar, und die Brauchbarkeit der zweiten ist an die Bedingung geknüpft, dass die magnetische Directionskraft etwas kleiner sein soll, als die Directionskraft vermöge der Aufhängungsart. Bei dem hiesigen Apparat ist jetzt das Verhältniss dieser Directionskräfte nahe wie 10 zu 11; die resultirende Directionskraft ist also nur der zehnte Theil der magnetischen Directionskraft. Wir haben also hier ein Analogon einer astatischen Magnetnadel, und jede fremde Kraft, die die Richtung einer einfachen Nadel stört, äussert hier eine zehnmal grössere Wirkung, als bei einer Aufhängung an Einem Faden Statt haben würde, und zwar, wie man leicht einsieht, in entgegengesetztem Sinn. Es ist hiedurch also unter anderen die Auflösung einer Aufgabe gegeben, mit welcher man sich früher ohne Erfolg wiederholt beschäftigt hat, nemlich die täglichen und stündlichen Variationen der magnetischen Declination vergrössert darzustellen. Öftere gleichzeitige Beobachtungen dieser Art, an diesem Apparat und am Magnetometer des magnetischen Observatorium haben zwar immer die befriedigendsten Resultate gegeben: inzwischen verliert doch diese Anwendung jetzt von ihrer Wichtigkeit, weil die gewöhnlichen Magnetometer schon die kleinsten Veränderungen mit aller zu wünschenden Schärfe geben, mithin das Bedürfniss einer Vergrösserung jetzt nicht mehr Statt findet.

Diese und andere Anwendungen beim verkehrten Einliegen des Stabes, auf

welche ich nachher noch zurückkommen werde, sind jedoch nur als untergeordnete zu betrachten: bei weitem wichtiger ist der Gebrauch des Apparats bei der dritten oder *transversalen* Lage für die Intensität. Wenn man, von der natürlichen Lage ausgehend, durch eine Drehung des Schiffchens den Magnetstab aus dem magnetischen Meridian bringt, so muss sich der ganze Apparat, um zum Gleichgewicht zu kommen, um einen gewissen dem Verhältniss der beiden Directionskräfte entsprechenden Winkel zurückdrehen; die Differenz dieser beiden Winkel wird die Abweichung des Magnetstabes vom magnetischen Meridian in der Gleichgewichtsstellung sein, und man kann es leicht so einrichten, dass diese Abweichung nahe 90 Grad beträgt, wodurch die vorhin bereits angeführten Vortheile erreicht werden. Ganz vorzüglich eignet sich dann aber der Apparat zur Beobachtung der *Änderungen* der Intensität, die sich unmittelbar durch den veränderten Stand kund geben. Dass dabei in Beziehung auf solche Änderungen, die erst nach längerer Zeit erfolgen, mehrere Umstände nicht unberücksichtigt bleiben dürfen, liegt unvermeidlich in der Natur der Sache selbst: namentlich erfordern jene, dass von Zeit zu Zeit durch (bekannte) geeignete Mittel untersucht werde, ob und in welchem Maasse die Stärke des Magnetismus im Stabe sich verändert habe; auch die Temperaturveränderungen kommen in Betracht, einmal insofern sie diese Stärke, und dann auch, insofern sie die Distanz und Länge der Aufhängungsdrähte, und damit die der Aufhängungsart zukommende Directionskraft afficiren. Aber in Beziehung auf die unregelmässigen in kurzen Zeitfristen wechselnden Veränderungen der Intensität leistet nun der Apparat ganz dasselbe, wie das Magnetometer in Beziehung auf ähnliche Änderungen der Declination; auch ist die Beobachtungsart an beiden Apparaten ganz gleich. Die Veränderungen der Intensität erhält man zunächst in Scalentheilen ausgedrückt, die man jedoch leicht auf Bruchtheile der Intensität selbst zurückführen kann. Unter den gegenwärtigen Verhältnissen des Apparats entspricht einem Scalentheile der 22000^{ste} Theil der ganzen Intensität.

Die freilich nur erst eine kurze Zeit umfassenden und nicht sehr zahlreichen bisherigen Erfahrungen an dem Apparat lassen doch schon einige nicht unwichtige Resultate erkennen.

Erstlich deuten die bisherigen Beobachtungen auf regelmässige von der Tageszeit abhängige Änderungen hin, die sich freilich mit unregelmässigen eben so häufig vermengen mögen, wie bei der Declination, und deren sichere Scheidung

Jahrelang fortgesetzte Beobachtungen erfordern wird. Wenn ich, nach so wenigen Erfahrungen, wie bisher vorliegen, mehr eine Vermuthung als ein Resultat aussprechen darf, so scheint der regelmässige Gang darin zu bestehen, dass die Intensität in den Vormittagsstunden abnimmt, so jedoch, dass sie schon eine oder zwei Stunden vor dem Mittage ihr Minimum erreicht, und von da an wieder zunimmt. Um doch vorläufig für das quantitative Verhältniss einen Anhaltspunkt zu bekommen, habe ich im August 1837 an 30 Tagen die Stellung Morgens um 10 Uhr und Nachmittags um 3 Uhr aufgezeichnet: das Resultat war, dass an 26 Tagen die Intensität Nachmittags grösser war, und nur an 4 Tagen kleiner, als Vormittags; der mittlere Unterschied betrug 39 Scalentheile, oder etwas mehr als den 600^{sten} Theil der ganzen Intensität. An den meisten jener Tage wurde der Stand des Apparats auch Vormittags um 9 Uhr aufgezeichnet; unter 28 Tagen waren 23, wo die Intensität um diese Stunde noch grösser war, als eine Stunde später, und nur an 5 Tagen fand das Umgekehrte Statt: der mittlere Unterschied betrug hier aber nur $11\frac{1}{2}$ Scalentheile, oder etwas mehr als den 2000^{sten} Theil der ganzen Intensität.

Zweitens bestätigen mehrere sehr durchgreifende Beobachtungsreihen, dass unregelmässige, zuweilen sehr beträchtliche und in kurzen Zeitintervallen wechselnde Störungen bei der Intensität nicht weniger häufig vorgehen, wie bei der Declination, woran freilich auch an sich nach der Analogie nicht gezweifelt werden konnte. Dreimal schon sind eine beträchtliche Zeit hindurch an diesem Intensitätsapparat und gleichzeitig am Magnetometer des magnetischen Observatorium ununterbrochen fortgesetzte Aufzeichnungen gemacht; am 15. Julius von Morgens 6 Uhr bis Nachmittags 6 Uhr; dann in dem ordentlichen magnetischen Termin vom 29.—30. Julius, endlich in dem ausserordentlichen Termin vom 31. August bis zum 1. September, beidemal 24 Stunden; die Aufzeichnungen geschahen immer von 5 zu 5 Minuten. Graphische Darstellungen der beiden Termine, wo die Curven für die Änderungen sowohl der Intensität als der Declination gezeichnet sind, setzen dies in ein helles Licht. Die beiderseitigen Bewegungen haben zwar, wie sich von selbst versteht, nicht die geringste Ähnlichkeit mit einander; aber sehr bemerklich ist doch, dass wo die Declination stark gestört wurde, meistens auch in der Intensität starke Störungen eintraten *).

*) Auf ähnliche Art und mit gleichem Erfolge ist später auch in dem Termine vom 13.—14. November an beiden Apparaten beobachtet.

Durch die Darstellung der Änderungen der Declination und der Intensität in zwei besondern Curven erhält man übrigens von dem Hergange der Störungen ein lange nicht so anschauliches Bild, wie durch ihre Vereinigung in eine einzige. Auf was es dabei ankommt, übersieht man am klarsten auf folgende Art. Eine vollständige Vorstellung der erdmagnetischen Kraft (nemlich des horizontalen Theils, wie immer stillschweigend verstanden wird) in jedem Augenblick kann man durch Eine gerade Linie geben, deren Länge der Intensität proportional ist, und die mit einer festen geraden Linie einen der Declination gleichen Winkel macht. Zur Darstellung der Kraft in mehrern auf einander folgenden Zeitpunkten lässt man den Anfangspunkt der verschiedenen geraden Linien unverändert, so dass die Endpunkte allein in Betracht kommen, die dann mit den entsprechenden Zeiten bezeichnet, und durch eine Linie vereinigt werden können. Die geraden Radien selbst werden gar nicht mitgezeichnet, und selbst der gemeinschaftliche Anfangspunkt wird bei einem nur einigermaassen schicklichen Maassstab für die Darstellung immer weit ausserhalb der Zeichnung liegen. Diese Behandlung führt uns zugleich auf einen neuen Gesichtspunkt, aus welchem wir solche Veränderungen der beiden magnetischen Elemente betrachten können. Sie sind in der That nur die beiden horizontalen Componenten derjenigen vergleichungsweise immer sehr kleinen störenden Kraft, welcher in jedem Augenblick die mittlere erdmagnetische Kraft unterworfen ist, indem nemlich jene in zwei Richtungen, die eine *im* magnetischen Meridian, die andere senkrecht gegen denselben zerlegt wird. Die zweite Componente wird unmittelbar durch das Magnetometer, die erste durch den neuen Apparat gegeben, wobei nur beide vor der Zeichnung auf ein gemeinschaftliches Maass zurückgeführt werden müssen.

Nur ein Umstand bei der Anwendung dieser an sich so anschaulichen Darstellungsart muss hier noch berührt werden, nemlich dass es nicht gut angeht, den Verlauf für einen ganzen Tag in Einer Zeichnung ohne Verwirrung darzustellen, wenn häufige schnell wechselnde Störungen vorkommen, da in diesem Fall die Curve eine grosse Menge von Verschlingungen darbietet: es wird dann nothwendig, kürzere Zeitabschnitte jeden für sich besonders zu zeichnen.

Halten wir die Leistungen des neuen Apparats und des Magnetometers zusammen, so ergibt sich, dass beide in Beziehung auf *einige* Zwecke einander wechselseitig ergänzen müssen, in Beziehung auf andere hingegen gleiche Anwendbarkeit haben. Zur Bestimmung der absoluten Declination kann nur das Magnetometer dienen, nicht aber der neue Apparat: die Veränderungen der Declination, und besonders die schnell wechselnden lassen sich mit beiden verfolgen. Zur Bestimmung der absoluten Intensität können beide Apparate dienen, obwohl die Anwendung des Magnetometers etwas weniger complicirt ist, als der alleinige Gebrauch des neuen Apparats sein würde; aber jenes für sich allein kann die Intensität nur in ihrem Mittelwerthe während eines gewissen Zeitraumes geben, und die schnell wechselnden Änderungen in demselben entgehen diesem Instrumente gänzlich, während der neue Apparat diese auf das befriedigendste nachweist. Für alle sonstigen Anwendungen, z. B. um Magnetstäbe rücksichtlich ihrer magnetischen Stärke unter einander zu vergleichen; ferner, in Verbindung mit einem Multiplicator, für galvanometrische und telegraphische Zwecke, sind beide gleich brauchbar; ja in den beiden letztern Beziehungen hat der neue Apparat noch einen bedeutenden Vorzug, da man, wie schon bemerkt ist, in seiner Gewalt hat, ihn so nahe man will astatisch zu machen.

Ein paar Proben von der Empfindlichkeit des Apparats als Galvanometer dürfen hier wohl angeführt werden. Der den Magnetstab umgebende Multiplicator enthält 610 Umwindungen mit Seide übersponnenen Kupferdrahts, und ein galvanischer Strom hat in diesem allein schon eine Drahtlänge von mehr als 6000 Fuss zu durchlaufen. Diese Drahtlänge vergrössert sich auf 13000 Fuss, wenn der Strom zugleich nach dem physikalischen Cabinet geht. Gewöhnlich aber werden noch andere Apparate mit in die Kette gebracht, so dass bei manchen Versuchen die ganze Drahtlänge 40000 Fuss oder fast zwei Meilen beträgt. Dabei muss aber noch bemerkt werden, dass bei weitem der grösste Theil dieses Drahts sehr dünner ist, und dass diese Länge, insofern die Stärke des Stroms dadurch bedingt wird, einem etwa 8 Meilen langen Draht von derjenigen Stärke äquivalirt, welche der Verbindungsdraht zwischen der Sternwarte und dem physikalischen Cabinet hat. Trotz der so langen Kette geben nun selbst die schwächsten galvanischen Kräfte dem schweren Magnetstabe eine nicht bloss merkliche, sondern zu scharfen Messungen hinreichende Ablenkung. Dies gilt z. B. vom Thermogalvanismus, in Beziehung auf welchen manche Physiker die irrige Vorstellung haben, als ob er eine sehr lange Kette nicht durchdringen könne. Bei den hiesigen Vorrichtungen, und unter Anwendung eines thermogalvanischen Apparats von eigenthümlicher Construction, reicht die Berührung der Verbindungsstelle mit dem Finger hin, jene Wirkung hervorzubringen.

Zu einer andern interessanten Bemerkung gibt die Anwendung auf die gewöhnliche Reibungselektricität Veranlassung. Dass diese, durch einen Multiplicator geleitet, die Magnetnadel auf ganz ähnliche Art ablenkt, wie ein hydrogalvanisch erregter Strom, hat bekanntlich COLLADON entdeckt, dessen Anfangs bezweifelte Versuche späterhin durch FARADAY bestätigt sind. Der letztere Physiker hat zuerst ins Licht gesetzt, dass in einer sehr starken elektrischen Batterie nicht mehr Elektricität entwickelt ist, als schon sehr geringe hydrogalvanische Erregungsmittel in wenigen Secunden durch einen Leitungsdraht von mässiger Länge treiben. Mit den hiesigen Apparaten war zwar gleichfalls schon vor mehreren Jahren sowohl die Realität, als die geringe Grösse der elektromagnetischen Wirkung der Maschinenelektricität durch Versuche bestätigt gefunden: es schien jedoch der Mühe werth, diese Versuche mit Hülfe des neuen so viel empfindlichern Apparats zu wiederholen. Anstatt eine Leidner Flasche oder eine Batterie von Flaschen durch die Drahtkette zu entladen (wie COLLADON und FARADAY gethan hatten), wurde nur Conductor und Reibzeug einer im physikalischen Cabinet stehenden Elektrisirmaschine mit den Enden der zur Sternwarte gehenden und mit Inbegriff des Multiplicators 13000 Fuss langen Drahtkette verbunden, und die Elektrisirmaschine anhaltend mit gleichförmiger Geschwindigkeit gedreht; geschah dies mit einer Geschwindigkeit von Einer Umdrehung auf die Secunde, so wurde dadurch der fünfundzwanzigpfündige Magnetstab im neuen Apparat in der Sternwarte in einer Ablenkung von 144 Scalentheilen (etwas über 50 Minuten) erhalten, positiver oder negativer, je nach der Richtung, in welcher die Elektricität den Multiplicator durchströmte, und in den Versuchen zeigte sich alle nur zu wünschende Regelmässigkeit. Aber als besonders merkwürdig erscheint dabei der Umstand, dass die elektromagnetische Wirkung dieselbe blieb, wenn man auch der Kette durch Hineinbringen andrer Apparate eine Länge von einer ganzen Meile gab. Dies könnte ein wesentlicher Unterschied von andern, hydrogalvanisch, thermogalvanisch, oder durch Induction erzeugten Strömen scheinen, deren durch die Grösse der elektromagnetischen Wirkungen sich äussernde Intensität allemal desto kleiner wird, je mehr man die Leitung verlängert. Ich finde aber darin nur eine schlagende Bestätigung der Theorie, welcher zufolge die durch ungleiche elektromagnetische Wirkung sich äussernde ungleiche Intensität zweier galvanischen Ströme nichts weiter ist, als ungleiche Menge in bestimmter Zeit jeden Querschnitt der Leitung durchströmender Elektricität.

Bei den andern Erzeugungsarten entwickelt eine gegebene elektromotorische Kraft desto weniger Elektricität in gegebener Zeit, je grösser der Widerstand ist, welchen die längere Kette dem Strome entgegenstellt: bei unserm Versuch hingegen hängt die Menge der bewegten Elektricität bloss von dem Spiel der Maschine ab, und *alle* in Funkenform auf den Conductor überspringende Elektricität muss die ganze Kette, sie mag kurz oder lang sein, durchlaufen, um sich mit der entgegengesetzten des Reibzeugs auszugleichen.

Um auch noch den Vorzug des neuen Apparats vor dem Magnetometer bei der elektromagnetischen Telegraphie nachweisen zu können, wird die Art, *wie* durch galvanische Ströme telegraphische Zeichen hervorgebracht werden, erst etwas näher betrachtet werden müssen.

Sobald man wusste, dass die Wirkungen einer VOLTAischen Säule sich durch eine sehr lange Kette fortpflanzen, lag der Gedanke sehr nahe, diese Naturkräfte zu telegraphischen Zwecken zu benutzen, und schon vor fast 30 Jahren *), also zu einer Zeit, wo man erst einen kleinen Theil der galvanischen Wirkungen kannte, schlug SÖMMERING die Gasentwicklung dazu vor: bei weitem mehr geeignet für zusammengesetzte Signalisirungen sind aber die erst später bekannt gewordenen magnetischen Wirkungen galvanischer Ströme; indessen ist es auffallend, dass seit OERSTED's Entdeckung eine ziemliche Anzahl Jahre verstrichen ist, ehe jemand an diesen Gebrauch gedacht zu haben scheint. Freilich ist ein gründliches Urtheil über die Anwendbarkeit im Grossen nicht möglich ohne eine genaue quantitative Kenntniss der Schwächung galvanischer Ströme in Folge der Länge und Beschaffenheit der Leitungsdrähte, wovon man vor OHM und FECHNER sehr unvollkommene und unrichtige Vorstellungen hatte. Nachdem im Jahr 1833, hauptsächlich um ähnliche Untersuchungen über das Gesetz der Stärke galvanischer Ströme nach Verschiedenheit der Umstände in grossem Maassstabe anstellen zu können, zwischen der hiesigen Sternwarte und dem physikalischen Cabinet eine Drahtverbindung gemacht war, von welcher grossartigen Anlage das Ver-

*) Nach einer mir von Hrn. von HUMBOLDT mitgetheilten Notiz hatte schon zehn Jahre früher BETANCOURT eine Drahtkette von Aranjuez nach Madrid gezogen, vermittelst welcher die Entladung einer Leidner Flasche zu einer telegraphischen Signalisirung dienen sollte. Obgleich nähere Umstände über den Erfolg nicht bekannt zu sein scheinen, so ist doch an dem Gelingen eines solchen Versuchs, wenn er zweckmässig ausgeführt wird, nicht zu zweifeln. Aber immer müsste wohl eine solche Methode auf die Signalisirung eines Ja oder Nein auf eine oder ein Paar im Voraus verabredete Fragen beschränkt bleiben.

dienst der sehr schwierigen Ausführung allein dem Herrn Professor Weber gehört, wurde diese Kette gleich von Anfang an oft zu telegraphischen Zeichen benutzt, nicht bloss zu einfachen, um täglich die Uhren zu vergleichen, sondern versuchsweise auch zu zusammengesetzten; und die Möglichkeit, Buchstaben, Wörter und ganze Phrasen zu signalisiren, wurde dadurch schon damals zu einer evidenten Thatsache *). Bei diesen Versuchen wurde ein hydrogalvanisch und nur mit schwachen Mitteln, nemlich einem einzigen oder einem doppelten Plattenpaar und ungesäuertem Wasser, erregter Strom angewandt; ich halte mich jedoch nicht dabei auf, das damals gebrauchte Verfahren hier umständlich zu beschreiben, da ich später ein davon ganz verschiedenes an dessen Stelle gesetzt habe. Bei jenem Verfahren blieb die Unbequemlichkeit, dass durch unsere einfache Kette und nach der Einrichtung der Apparate, bei welchen dergleichen Versuche nur eine Nebensache waren, in Einer Minute sich nicht mehr als zwei Buchstaben signalisiren liessen. Auch bei einer abgeänderten bloss für das Telegraphiren berechneten Einrichtung hätte diese Geschwindigkeit (mit welcher übrigens offenbar die Länge der Kette oder die Entfernung der Endpunkte gar nichts zu thun hat) sich nicht viel vergrössern lassen, so lange nur eine einfache Kette angewandt würde, wohl aber in hohem Grade mit einer vielfachen: allein eine solche einzurichten, war hier kein hinlänglicher Beweggrund vorhanden, da theils der Erfolg an sich gar nicht zweifelhaft sein konnte, theils der eigentlich wissenschaftliche Nutzen einer solchen vielfachen Kette mit den bedeutenden Kosten in keinem Verhältniss gestanden haben würde.

Dagegen hat mich die Theorie der Inductionsgesetze auf ein ganz verschiedenes Verfahren geführt, wonach schon seit mehr als zwei Jahren eine einfache Kette mit dem vollkommensten Erfolge zu einem viel schnelleren Telegraphiren dient; und es wird mir um so eher verstattet sein, bei demselben noch etwas zu verweilen, da ich bisher noch nichts Näheres darüber öffentlich bekannt gemacht habe.

Die Vorrichtung, welche ich einen Inductor nenne, habe ich schon vor mehreren Jahren anderwärts beschrieben **). Ich muss jedoch bemerken, dass anstatt des in der ersten Nachricht beschriebenen Inductors von 1050 Umwindungen, und des nachher auf 3537 Umwindungen verstärkten, gegenwärtig einer von 7000 Umwindungen gebraucht wird, worin die Drahtlänge allein mehr als 7000 Fuss beträgt. Durch eine äusserst einfache Manipulation mit diesem Inductor (dadurch nemlich, dass man ihn von einem doppelten Magnetstab, über welchen er zu Anfang geschoben ist, schnell abzieht und sogleich wieder, ohne ihn umzukehren in die vorige Lage zurückbringt) wird bewirkt, dass schnell nach einander zwei starke entgegengesetzte galvanische Ströme durch den Leitungsdraht gehen, deren jeder nur eine äusserst kurze Zeit dauert. Die Wirkung dieser beiden Ströme auf eine wo immer in der Kette befindliche, von einem Multiplicator umgebene Magnetnadel besteht darin, dass dieser für einen Augenblick eine sehr lebhafte Geschwindigkeit ertheilt, aber dann sogleich vollkommen wieder aufgehoben wird. Die Nadel macht also eine sehr lebhafte, aber nur kleine Bewegung, nach Gefallen rechts oder links, und steht dann sogleich wieder ganz still.

*) Die erste öffentliche Erwähnung dieser Versuche findet man in den Gött. gel. Anz. 1834, Aug. 9. Vergl. Schumachers Jahrbuch für 1836, [S. 339 d. B.].

**) Gött. gel. Anz. 1835, März 7. Schumachers Jahrbuch für 1836, [S. 341 d. B.]

Dass sich nun die Abwechslungen solcher zuckenden Bewegungen auf mancherlei Art combiniren und zur Signalisirung von Buchstaben benutzen lassen, ist von selbst klar. Die Zeichen möglichst schnell und präcis zu geben, so wie, von der andern Seite, sie mit Leichtigkeit und Schnelligkeit zu lesen, wird allerdings eine gewisse Einübung erforderlich sein: aber auch schon, ohne sich eine solche besonders angeeignet zu haben, kann man, wie öftere Erfahrungen gezeigt haben, in Einer Minute füglich etwa sieben Buchstaben signalisiren. Wollte man für die Manipulation eigne *mechanische* Vorrichtungen treffen, so würde sich ohne Zweifel die Schnelligkeit und Präcision noch bedeutend erhöhen lassen.

Gerade bei dieser Art des Telegraphirens hat nun der neue Apparat einen bedeutenden Vorzug vor dem Magnetometer, und zwar wegen folgender Umstände. Obgleich die beiden entgegengesetzten Impulse, aus welchen Ein einfaches Zeichen besteht, ihrer *Stärke* nach *genau gleich* sind, und daher der zweite genau eben so viel Geschwindigkeit vernichtet, als der erste hervorgebracht hat, so kann dennoch die Nadel zwischen den Zeichen nicht in absoluter Ruhe sein, weil diese nur da möglich ist, wo jene sich in ihrer natürlichen Gleichgewichtsstellung befindet. Ist sie auch, *vor* einem Zeichen, in dieser Stellung, so wird sie doch eben *durch* das Zeichen etwas, wenn auch nur wenig, daraus verrückt, und die auf die Nadel wirkende Directionskraft strebt dann, sie nach derselben zurückzuführen. Wenn nun gleich so, in Folge Eines Zeichens, nur eine äusserst

schwache Bewegung entstehen kann, so wird doch nach einer grossen Menge von Zeichen durch Anhäufung eine beträchtliche Entfernung von der natürlichen Gleichgewichtsstellung eintreten können, mithin in Folge derselben auch zwischen den Zeichen so viel Bewegung, dass die Zeichen dadurch etwas von ihrer scharfen Ausprägung verlieren. Diese Störung tritt nun, wie man bei einiger Überlegung leicht einsieht, unter sonst gleichen Umständen nachtheiliger hervor, wenn die Nadel, an deren zuckenden Bewegungen die Zeichen beobachtet werden, eine kurze, als wenn sie eine lange Schwingungsdauer hat, daher mehr an dem Magnetometer des magnetischen Observatoriums, als an dem in der Sternwarte aufgehängt gewesenen mit fünfundzwanzigpfündiger Nadel; noch weniger hingegen, als bei letzterem, an dem neuen jetzt dessen Stelle einnehmenden Apparat, wenn dessen Magnetstab in der verkehrten Lage zu einer fast astatischen Nadel eingerichtet ist. In der That wird dann dieselbe, selbst nach einer beträchtlichen Entfernung von ihrer Gleichgewichtsstellung, von der sie dahin zurücktreibenden, vergleichungsweise schwachen, Directionskraft in keine die Zeichen erheblich störende Bewegungen versetzt, während der Strom im Multiplicator eben so stark auf sie wirkt, und also eben so grosse Zuckungen hervorbringt, als gehörte sie zu einem gewöhnlichen Magnetometer.

Gegen die Nachtheile und Unbequemlichkeiten unzeitiger Schwingungsbewegungen, sowohl bei dieser Art des Telegraphirens, als bei manchen andern Anwendungen der magnetischen Apparate, leistet übrigens eine eigne Vorrichtung, die ich vor kurzem habe ausführen lassen, ungemein nützliche Dienste. Ich nenne diese Vorrichtung einen *Dämpfer*, da ihre Wirkung darin besteht, Schwingungsbewegungen, die sonst mit sehr langsamer Abnahme viele Stunden fortdauern würden, in sehr kurzer Zeit ganz zu vernichten. Diese Wirkung leistet der vorerst nur für das Magnetometer des magnetischen Observatoriums angefertigte Dämpfer in ganz eminentem Grade, so dass die grössten Schwingungsbewegungen in wenigen Minuten gänzlich erlöschen. Eine ähnliche Vorrichtung kann aber bei jeder schwingenden Nadel, bei einem Magnetometer oder bei dem neuen hier in Rede stehenden Apparate angebracht werden, und wird bei allen Apparaten, die zum Telegraphiren nach der hier beschriebenen Methode ernstlich angewandt werden sollen, einen wesentlichen Bestandtheil ausmachen müssen. Eine ausführlichere Erklärung dieser Vorrichtung würde aber von dem gegenwärtigen Gegenstande zu weit abführen.

In obigem ist dem neuen Apparate noch keine besondere Benennung beigelegt. Nach seiner wichtigsten Anwendung könnte man ihn einen Intensitätsmesser nennen. In so fern er aber zu eben so mannichfaltigen scharfen magnetischen Messungen dient, wie das Magnetometer, hätte er wohl eben so gut auf *dieselbe* Benennung Anspruch. Der wesentlichste Unterschied ist der, dass der neue Apparat an *zwei* Fäden aufgehängt ist, wodurch eben eine *neue* Directionskraft gewonnen wird, mit welcher die magnetische commensurabel ist. Die übrigen Unterschiede, namentlich die Art, wie der Spiegel angebracht ist, ferner die Mittel zur Messung der Drehung der einzelnen Bestandtheile gegen einander, sind nothwendige sich von selbst ergebende Bedingungen für die zu erreichenden Zwecke. Man könnte daher den neuen Apparat ein *Bifilar-* oder *Bipensil-Magnetometer* nennen, um es von dem ältern Instrumente, dem einfachen oder Unifilar-Magnetometer zu unterscheiden. Ich darf wohl meine Überzeugung aussprechen, dass einer allgemeinern Verbreitung desselben, und besonders einer Anwendung in den Terminsbeobachtungen neben dem einfachen Magnetometer an mehrern weit von einander entlegenen Orten, bedeutende Fortschritte unsrer Kenntniss der wunderbaren Störungen des Erdmagnetismus bald folgen werden.

ANLEITUNG ZUR BESTIMMUNG

DER SCHWINGUNGSDAUER EINER MAGNETNADEL.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1837. IV.

Die Aufgabe, zu deren Auflösung hier eine Anleitung gegeben werden soll, hat ein mehrseitiges Interesse. Eine wenn auch noch nicht sehr genaue Kenntniss der Schwingungsdauer ist schon zur Ausübung der für die Bestimmung des Ruhestandes der Nadel gegebenen Vorschriften nothwendig (*Res.* von 1836, II.): zur Ausmittelung der absoluten Intensität des Erdmagnetismus hingegen ist der auf das schärfste bestimmte Werth der Schwingungsdauer ein wesentliches Element. Aber auch an sich kann die Ausübung der zur Bestimmung der Schwingungsdauer gehörenden Operationen wie eine gute Vorübungsschule für astronomische Beobachtungen betrachtet werden, da jene namentlich mit den Beobachtungen der Sterndurchgänge am Mittagsfernrohr die grösste Ähnlichkeit, aber vor denselben den Vorzug haben, dass sie grösserer Schärfe fähig sind, und, durch ungünstigen Luftzustand ungestört, jede Stunde nach Gefallen vorgenommen werden können. Es scheinen daher auch solche Beobachtungen am Magnetometer besonders dazu geeignet zu sein, über einen bisher noch nicht genügend aufgeklärten Gegenstand Licht zu verbreiten, nemlich über die constanten Differenzen zwischen den Resultaten verschiedener Beobachter am Mittagsfernrohr, welche doch nur daher rühren können, dass die optischen oder die akustischen Eindrücke oder beide, bei verschiedenen Personen und nach Verschiedenheit der Umstände nicht gleichzeitig ins Bewusstsein kommen.

Die Schwingungsdauer einer Nadel ist die Zwischenzeit zwischen zwei auf einander folgenden äussersten Stellungen (Elongationen) derselben. Die Nadel

befindet sich in jeder Elongation streng genommen ohne alles Verweilen; allein, da die Geschwindigkeit der Bewegung bis zum Verschwinden nach der Stetigkeit abnimmt, und eben so von da an wieder zunimmt, so erscheint sie für unsere Sinne um die Zeit der Elongation mit einer grössern oder geringern Dauer als ruhend, welche aber freilich als solche bei kurzen Schwingungszeiten und grossen Bögen kaum erkannt wird. In allen Fällen aber bleibt eine solche unmittelbare Auffassung des Zeitpunkts der Elongation an Schärfe weit zurück gegen eine mittelbare Bestimmung durch correspondirende Beobachtungen, indem man nemlich das Mittel aus den beiden Zeiten nimmt, wo ein und derselbe Theilstrich der Scale beim Hin- und Rückgange auf dem Vertikalfaden des Fernrohrs erscheint.

Im Allgemeinen ist es am vortheilhaftesten, dazu einen Theilstrich in oder nahe bei der Mitte des Schwingungsbogens zu wählen, theils weil da die Bewegung am schnellsten, mithin die Beobachtung der Zeit selbst am schärfsten ist, theils weil beim Beobachten mehrerer auf einander folgender Schwingungen die Zwischenzeiten zwischen den Aufzeichnungen nahe gleich werden. In einzelnen Fällen, namentlich bei sehr langer Schwingungsdauer, kann es übrigens allerdings zuweilen vortheilhaft sein, andere oder selbst mehrere verschiedene Scalenstellen anzuwenden, was jedoch hier bei Seite gesetzt bleiben kann.

Bei kleinen Schwingungen thut man wohl, den der Mitte nächsten Theilungspunkt selbst zu wählen, bei grössern ziehe man den bequemer zu beachtenden nächsten Theilstrich bei den Fünfern oder Zehnern der Scale vor; bei sehr grossen Schwingungen hingegen wird es wegen der grossen Schnelligkeit, mit welcher die Mitte der Scale durch das Gesichtsfeld geht, nothwendig, die gewählte Stelle der Scale, etwa durch einen nicht zu feinen über die Scale gehängten schwarzen Faden, gehörig augenfällig zu machen.

Wenn der Vorübergang am Faden nicht genau mit einem Secundenschlage zusammenfällt, so setzt man den Bruchtheil nach dem geschätzten Verhältniss der beiden Entfernungen an, in welchen die betreffende Scalenstelle vom Faden beim vorhergehenden und folgenden Sekundenschlage erscheint, eben so wie es die meisten Astronomen beim Beobachten am Mittagsfernrohr gewohnt sind. Man theilt also, unmittelbar, nicht die Zeit, sondern den Raum.

Die Bestimmung der Schwingungsdauer aus einer einzigen Schwingung ist natürlich nur einer sehr beschränkten Schärfe fähig; man gründet deshalb jene immer auf eine grössere Anzahl auf einander folgender Schwingungen. Zwar ist

allerdings die Schwingungsdauer von veränderlichen Elementen abhängig, und daher auch, selbst streng genommen, beständigen Veränderungen unterworfen: allein von ganz ungewöhnlichen Fällen abgesehen*), wird diese Veränderlichkeit während einer nicht ganz kleinen Zeit als ganz unmerklich zu betrachten sein, so wie jedenfalls der aus einer beträchtlichen Anzahl von Schwingungen abgeleitete Werth der Dauer Einer Schwingung, dem Mittelwerthe der einzelnen in Betracht kommenden Elemente während dieser Zeit entsprechen wird. Es ist aber offenbar gar nicht nöthig, den Bewegungen der Nadel während eines solchen Zeitraumes ununterbrochen zu folgen, sondern es reicht hin, die Zeiten der ersten und der letzten Elongation zu kennen, so bald man von der Schwingungsdauer einen so weit genäherten Werth besitzt, dass über die *Anzahl* der Schwingungen während des verflossenen Zeitraums kein Zweifel übrig bleiben kann, was dadurch noch erleichtert wird, dass man allemal (nach der Gleichnamigkeit oder Ungleichnamigkeit der ersten und letzten Elongation) im Voraus weiss, ob diese Anzahl gerade oder ungerade ist.

Wenn die Schwingungsdauer nicht gar zu klein ist, so können zwischen den Vorübergängen auch die Elongationen selbst (nemlich die äussersten Scalentheile) mit aufgezeichnet werden, um daraus die zur schärfern Berechnung der Schwingungsdauer nöthigen Amplituden ableiten zu können, deren successive Abnahme überdies an sich zu merkwürdigen Betrachtungen Anlass gibt.

Die Behandlung der Beobachtungen selbst, um Resultate aus ihnen zu gewinnen, wird sich am besten an einem Beispiele zeigen lassen, wozu hier Beobachtungen am Magnetometer der Sternwarte mit fünfundzwanzigpfündigem Stabe, vom 29. November 1835 gewählt werden. Die folgende Tafel I. enthält zuerst die rohen Beobachtungen.

$21^h 55' 26''9$	1755.1	$23^h 38' 49''2$	497.8	$1^h 10' 12''6$	645.9	$2^h 49' 19''7$	1232.1
56 8.4	266.0		1502.2		1341.5		775.9
	1751.8	39 31.5		54.2		50 1.5	
51.2			500.1		647.3		1231.0
	268.5	40 13.6		11 37.0		44.1	
57 33.0			1499.1		1339.4		776.4
	1748.9	56.0		12 18.4		51 25.8	
58 15.5			502.6		648.7		1228.7
	271.6	41 38.1		13 1.3		52 8.5	
57.4			1496.5		1337.0		778.0
	1744.2	42 20.3		43.0		50.0	
			506.0		650.7		1227.0

*) Dass zu einer Zeit, wo die Declination schnell wechselnde starke Änderungen erleidet, *sehr kleine* Schwingungen (die aber schon an sich zur Bestimmung der Schwingungsdauer wenig tauglich sind) eine ganz entstellte Dauer zeigen können, braucht kaum bemerkt zu werden.

Diese Beobachtungen bestehen, wie man sieht, aus vier Sätzen; die erste Columne enthält die Zeiten der Vorübergänge des Scalenpunktes 1000, die zweite die Elongationspunkte, diesmal mit der Elongation anfangend, die dem ersten Vorübergange voranging, und mit derjenigen schliessend, die auf den letzten Vorübergang folgte. Wenn man die Elongationen nicht mit beobachtet, so thut man wohl, bei jedem Vorübergange anzumerken, ob wachsende oder abnehmende Zahlen durchgingen; nach der in Göttingen befolgten Art so:

$21^h 55' 26''9 -$
56 8.4 +
u. s. f.
$23^h 38' 49''2 +$
u. s. w.

Dies ist deswegen nöthig, um unterscheiden zu können, welche der aus den Vorübergängen abgeleiteten Elongationszeiten sich auf Minima oder Maxima beziehen. Bei der Zählung der Elongationszeiten haben wir die Gewohnheit angenommen, die erstern durch gerade, die andern durch ungerade Zahlen zu bezeichnen. Es wird daher der aus den beiden ersten Vorübergängen abgeleiteten Elongationszeit $21^h 55' 47''65$ die Zahl 0 vorgesetzt u. s. f.

Die folgende Tafel II. enthält nun die nächsten aus den unmittelbaren Beobachtungen berechneten Resultate.

0	$21^h 55' 47''65$	$21^h 55' 47''65$	277	$1^h 10' 33''40$	$21^h 55' 49''54$
1	56 29.80	47.62	278	11 15.60	49.56
2	57 12.10	47.74	279	11 57.70	49.48
3	57 54.25	47.71	280	12 39.85	49.45
4	58 36.45	47.73	281	13 22.15	49.57
147	23 39 10.35	21 55 49.89	418	2 49 40.60	21 55 49.36
148	39 52.55	49.91	419	50 22.80	49.38
149	40 34.80	49.98	420	51 4.95	49.35
150	41 17.05	50.05	421	51 47.15	49.37
151	41 59.20	50.02	422	52 29.25	49.29

In der zweiten Columne stehen hier die sich ergebenden Elongationszeiten. Die Bezifferung, in der ersten Columne, hat man, für die fünf ersten von selbst; für die spätern findet sie sich auf folgende Art.

Die Vergleichung der Elongation 0 mit 4 gibt als genäherten Werth der Schwingungsdauer 42″20; dividirt man damit die Zwischenzeit zwischen der Elongation 4 und der nächstfolgenden, 1ʰ40′33″90, und erinnert sich, dass die Ordnungszahl der letztern eine ungerade sein muss, so lässt der Quotient 142.983 keinen Zweifel übrig, dass zwischen jenen beiden Elongationen 143 Schwingungen verflossen sein müssen; denn in der That, wollte man 141 oder 145 annehmen, so würde die Schwingungsdauer 42″7936 oder 41″6131 sich ergeben, viel zu stark von dem genäherten Werthe 42″20 abweichend, um zulässig zu sein. Von 143 Schwingungen ausgehend, findet man die Schwingungsdauer 42″1951, die man bei dem Übergange zu den folgenden Beobachtungssätzen zum Grunde legen könnte, um ihre Bezifferung zu erhalten, obwohl in dem gegenwärtigen Falle, wo keine *sehr* langen Unterbrechungen vorkommen, auch schon der erste genäherte Werth überall ausreicht.

Um die Schwingungsdauer genauer zu erhalten, und selbst ihre Veränderlichkeit im Laufe der ganzen Beobachtungsreihe zu erkennen, kann man nun zuerst den ersten Satz mit dem zweiten auf folgende Art vergleichen. Die Dauer von 147 Schwingungen findet sich aus

0 — 147	1ʰ43′22″70
1 — 148	22.75
2 — 149	22.70
3 — 150	22.80
4 — 151	22.75

im Mittel 1ʰ43′22″74 oder die Dauer Einer = 42″19551. Auf gleiche Weise erhält man die Schwingungsdauer zwischen dem zweiten und dritten Satze = 42″17654, zwischen dem dritten und vierten = 42″17879, und zwischen dem ersten und vierten oder das Mittel aus der ganzen Reihe = 42″18344.

Diese Rechnung kann auch in einer etwas abgeänderten Form geführt werden, die zugleich den Vortheil einer klaren Übersicht des regelmässigen Ganges sämmtlicher einzelnen Beobachtungen gewährt. Man fängt damit an, die einzelnen gefundenen Elongationszeiten mit einem genäherten Werthe der Schwingungsdauer auf einerlei Epoche zu reduciren, indem man von jeder den Betrag aller seit dieser Epoche verflossenen Schwingungszeiten, mit Hülfe dieses genäherten Werthes zurückrechnet. Man subtrahirt also von jeder Zahl der zweiten

Columne das Product dieses angenommenen Werthes in die entsprechende Zahl der ersten Columne. Hätten die Beobachtungen eine absolute Genauigkeit, und wäre die Schwingungsdauer genau constant, und dem angenommenen Werthe genau gleich, so müssten sämmtliche so reducirte Zahlen genau gleich ausfallen. Aus dem Zunehmen der Zahlen von einem Satze zu dem folgenden hingegen erkennt man, dass die zum Grunde gelegte Schwingungsdauer für diesen Zeitraum zu klein war, und umgekehrt, während das unregelmässige Hinundherspringen der zu einem und demselben Satze gehörenden Resultate einen Maassstab für die Genauigkeit der Beobachtungen selbst darbietet.

In unserm Beispiele folgt aus der Vergleichung der ersten Elongationszeit mit der letzten die Schwingungsdauer = 42″18389, anstatt welcher der genäherte Werth 42″18 zur Berechnung der Zahlen der dritten Columne zum Grunde gelegt ist. Man sieht so mit Einem Blick, dass diese Schwingungsdauer für die Zeit vom ersten zum zweiten Satze etwas zu klein, hingegen von dem zweiten zum dritten, und eben so vom dritten zum vierten um ein geringes zu gross ist. Um genaue Resultate zu erhalten, nimmt man aus den zu jedem Satze gehörenden Zahlen der dritten Columne das Mittel; diese Mittel

21ʰ	55′ 47″69
	49.97
	49.52
"	49.35

können als schärfere Werthe der zu den Ordnungszahlen 2, 149, 279, 420 gehörenden reducirten Zeiten angesehen werden. Man hat also vom ersten Satze zum zweiten ein Voreilen der Beobachtungen von 2″28 vor dem vorausgesetzten Gange während 147 Schwingungen, was auf Eine Schwingung 0″01551 beträgt, so dass der corrigirte Werth 42″19551 wird, genau mit dem oben gefundenen übereinstimmend. Denselben Erfolg ergibt die Vergleichung der folgenden Sätze.

Für die Güte der Beobachtungen selbst gibt der blosse Anblick der zu einerlei Satz gehörenden Zahlen Zeugniss; indess mögen hier die Vorschriften Platz finden, wonach man in geeigneten Fällen den Maassstab für die Genauigkeit bestimmter ausmitteln kann. Bezeichnet man den mittlern bei einem Antritt zu befürchtenden Fehler mit ε, die Anzahl der zu einem Satze gehörenden Resultate mit s, und die Summe der Quadrate der Differenzen dieser einzelnen Resultate

von ihrem Mittel mit q, so kann man näherungsweise annehmen

$$\frac{(s-1)^3 \varepsilon\varepsilon}{2s} = q$$

oder wenn mehrere Sätze vorhanden sind,

$$\varepsilon\varepsilon \Sigma \frac{(s-1)^3}{2s} = \Sigma q$$

also

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma q}{\Sigma \frac{(s-1)^3}{2s}}}$$

In unserm Beispiele sind bei dem ersten Satze die Differenzen vom Mittel $0''04$, $0''07$, $0''05$, $0''02$, $0''04$, also $q = 110$, wenn man das Hunderttheil der Secunde als Einheit betrachtet; ferner $s = 5$, also $\frac{(s-1)^3}{2s} = \frac{8}{5}$. Für die drei folgenden Sätze ist, bei gleichem Werthe von s, $q = 190$; 110; 50. Wir haben also

$$\tfrac{8}{5}\varepsilon\varepsilon = 460$$

oder

$$\varepsilon = 8.5, \quad \text{d. i.} \quad \varepsilon = 0''085.$$

Indessen muss bemerkt werden, dass die Gültigkeit dieser Vorschrift von mehrern Bedingungen abhängig ist, die unserm Beispiele nicht hinlänglich eigen sind: erstlich nemlich, dass der vorausgesetzte genäherte Werth der Schwingungsdauer, womit die reducirten Zahlen berechnet sind, ohne merklichen Fehler als der wahre während jedes Satzes betrachtet werden dürfe; zweitens, dass die verschiedenen Sätze, die man vereinigt, unter nahe gleichen Umständen (so weit sie die Genauigkeit des Beobachtens afficiren können) beobachtet seien. Beides trifft in unserm Beispiel nicht zu, und man hat daher obige Rechnung nur wie eine Erläuterung der Formel zu betrachten. Will man genauere Bestimmungen haben, so ist es besser, zunächst zu diesem Zweck besondere Beobachtungen zu machen. Unter dem Vorbehalt, diesen Gegenstand in Zukunft ausführlicher zu behandeln, mag hier nur bemerkt werden, dass die Genauigkeit des Beobachtens — neben der Individualität des Apparats und des Beobachters — auch nach der bessern oder schlechtern Beleuchtung der Scale, der Schnelligkeit der Schwingungsbewegung, und der Beschaffenheit der Uhr ungleich ist. Eine gar zu schnelle Bewegung sowohl, als eine gar zu langsame ist der Genauigkeit des Beobachtens weniger günstig, als eine mittlere Geschwindigkeit, und an einer Secundenuhr beobachtet man nicht so scharf, als an einem Chronometer, welches kleinere Zeittheile schlägt. Unter den günstigsten Umständen übertrifft die Genauigkeit dieser Beobachtungen sehr weit die der besten Beobachtungen an einem Mittagsfernrohr.

Die Schwingungsdauer ist bekanntlich, alles übrige gleich gesetzt, desto kleiner, je kleiner der Schwingungsbogen ist, und zwar so, dass während dieser sich dem Verschwinden unendlich nähert, jener einen Grenzwerth hat. Bezeichnen wir diesen Grenzwerth, oder, nach gewöhnlicher Sprachweise, die Zeit einer unendlich kleinen Schwingung, mit T, die einem Schwingungsbogen G entsprechende Dauer hingegen mit T', so hat man bekanntlich

$$T' = T(1 + \tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{2}G^2 + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{16}\sin\tfrac{1}{2}G^4 + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{16}\cdot\tfrac{3}{16}\sin\tfrac{1}{2}G^6 + \text{ etc.})$$

Bei der Kleinheit der Bögen, auf welche man beim Gebrauch des Magnetometers beschränkt bleibt, kann man die Glieder der vierten und höhern Ordnung unbedenklich bei Seite, und deshalb auch $\frac{g}{sr}$ anstatt $\sin\frac{1}{2}G$ setzen, wo g das dem Bogen G entsprechende Stück der Scale, und r die horizontale Entfernung der Mitte der Scale vom Spiegel bedeutet. Wir haben also $T' = T(1 + \frac{gg}{256rr})$, oder mit derselben Genauigkeit $T = T'(1 - \frac{gg}{256rr})$. Für unser Beispiel ist in Scalentheilen oder Millimetern $r = 4775.9$. Der Schwingungsbogen zwischen den Elongationen 0 und 1 ist $= 1485.8$, und damit die Reduction der Schwingungsdauer auf eine unendlich kleine Schwingung $= -0''01595$. Eben so findet sich die Reduction der zweiten Schwingung $0''01590$, die der dritten $0''01584$, die der vierten $0''01577$, so dass im Mittel aus den vier ersten Schwingungen die auf unendlich kleine reducirte Dauer sich $= 42''18414$ ergibt.

Die Anwendbarkeit dieses Verfahrens setzt aber die ununterbrochene Beobachtung der Elongation voraus. Die Reduction einer Reihe von Schwingungen, wovon nur Anfang und Ende beobachtet ist, auf unendlich kleine Bögen, mag man in dem Falle, wo der Schwingungsbogen in der Zwischenzeit nur eine mässige Abnahme erlitten hat, allenfalls so ausführen, dass man einen mittlern Werth der Grösse des Schwingungsbogens dabei zum Grunde legt. Allein die Reduction einer längern Reihe solcher Schwingungen, während welcher der Bogen sich stark vermindert hat, erfordert nothwendig eine wenigstens näherungsweise richtige

Kenntniss des Gesetzes, nach welchem diese Verminderung geschieht. Ich gehe daher zu der Behandlung der beobachteten Elongationen über, deren nächste Resultate in der folgenden Tafel III. enthalten sind.

0	1009.725	1487.45	3.17244	
1	1009.525	1484.55	3.17160	
2	1009.425	1481.85	3.17081	3.170710
3	1009.475	1478.85	3.16992	
4	1009.075	1474.95	3.16878	
147	1000.575	1003.25	3.00141	
148	1000.375	1000.55	3.00024	
149	1000.225	997.75	2.99902	2.999036
150	1000.200	995.20	2.99791	
151	1000.400	992.20	2.99660	
277	994.050	694.90	2.84192	
278	993.875	693.15	2.84083	
279	993.700	691.40	2.83973	3.839630
280	993.450	689.50	2.83853	
281	993.350	687.30	2.83715	
418	1003.725	455.65	2.65863	
419	1003.575	454.85	2.65787	
420	1003.125	453.45	2.65653	2.656152
421	1002.950	451.50	2.65466	
422	1002.925	449.85	2.65307	

Die erste Columne enthält die Ordnungszahl jeder Elongation; die zweite den entsprechenden Ruhestand der Nadel, nach der Formel $\frac{1}{4}(a+2b+c)$, wenn b die beobachtete Elongation, a und c die vorhergehende und folgende bedeuten (vergl. *Resultate* für 1836, II); in der dritten Columne steht die doppelte Entfernung jeder Elongation von dem entsprechenden Ruhestande, oder der Bogen, welcher ohne die Ursachen, welche ihn zu vermindern streben, von da an beschrieben sein würde, also $\frac{1}{4}(a-2b+c)$ oder $\frac{1}{2}(2b-a-c)$, d. i. das Mittel des vorhergehenden und folgenden Schwingungsbogens; in der vierten Columne befindet sich der Logarithme dieser Zahl; endlich daneben der Mittelwerth aus den Zahlen der vierten Columne, die zu einem Satze gehören.

Alle Erfahrungen stimmen dahin überein, dass man, wenigstens während einer mässig grossen Zeit, die Zahlen der dritten Columne als in geometrischer,

mithin ihre Logarithmen als in arithmetischer Progression abnehmend betrachten, wenigstens dies als die plausibelste Annäherung gelten lassen darf. Die kleinen Unregelmässigkeiten, welche sich bei der Vergleichung auf einander folgender Zahlen eines Satzes finden, hat man nur den unvermeidlichen kleinen Beobachtungsfehlern oder zufälligen kleinen Störungen zuzuschreiben, und man vermindert den nachtheiligen Einfluss davon, so viel thunlich, wenn man die Mittelzahlen in der fünften Columne als den entsprechenden mittlern Ordnungszahlen angehörig betrachtet, und daraus dann den Gang während der ganzen Beobachtungsreihe ableitet.

Wir haben demnach, als Logarithmen der Amplituden für die Elongationen

2	3.170710
149	2.999036
279	2.839630
420	2.656152

Der Logarithme hat also vom ersten zum zweiten Satze während 147 Schwingungen die Abnahme 0.171674 erlitten, was nach gleichförmiger Vertheilung auf Eine Schwingung 0.00116785 beträgt: ich nenne diesen Quotienten das *logarithmische Decrement*. Von dem zweiten zum dritten Satze findet sich dasselbe $= 0.00122620$, vom dritten zum vierten $= 0.00130126$. Man sieht, dass an einer gleichförmigen Abnahme hier wenigstens nicht viel fehlt: ich werde aber unten auf die Veränderlichkeit des logarithmischen Decrements zurückkommen.

Unter der Voraussetzung nun, dass die Amplituden während einer Reihe von Schwingungen in geometrischer Progression abgenommen haben, lassen sich diese auf unendlich kleine leicht reduciren. Ist g die Grösse der ersten Schwingung in Scalentheilen, g^0 die Grösse der letzten, 0 der Exponent der geometrischen Progression, also $g^0 = g0^\mu$, wenn μ die Anzahl der Schwingungen bedeutet, so wird die Reduction der ersten Schwingungszeit auf die unendlich kleine Schwingung

$$= -\frac{Tgg}{256rr},$$

die der zweiten

$$= -\frac{Tgg00}{256rr}$$

u. s. w. also die Summe aller

$$= -\frac{T(gg-g^0g^00)}{256rr(1-00)}$$

Bezeichnen wir die zu der Anfangs- und End-Elongation gehörenden Amplituden, nach derselben Art berechnet wie in Tafel III, mit h und h^0, so ist $h = \frac{1}{2}(\frac{g}{\theta} + g)$, $h^0 = \frac{1}{2}(g^0 + g^0\theta)$, mithin obige Summe

$$= -\frac{T(hh - h^0h^0)}{64rr} \cdot \frac{\theta\theta}{(1+\theta)^2(1-\theta\theta)}$$

Da in allen hier in Rede stehenden Fällen θ ein von der Einheit wenig verschiedener, also das mit λ zu bezeichnende logarithmische Decrement $= \log\frac{1}{\theta}$ ein kleiner Bruch ist, so kann man anstatt des zweiten Factors in jenem Ausdruck, für welchen sich, m den Modulus des Logarithmensystems bedeutend, folgende Reihe ergibt:

$$\frac{\theta\theta}{(1+\theta)^2(1-\theta\theta)} = \frac{m}{8\lambda} - \frac{5}{96}\cdot\frac{\lambda}{m} + \frac{37}{2880}\left(\frac{\lambda}{m}\right)^3 \text{ etc.}$$

mit hinlänglicher Schärfe bloss das erste Glied $\frac{m}{8\lambda}$ setzen. Die Reduction der ganzen Dauer der μ Schwingungen wird also:

$$= -\frac{Tm(hh - h^0h^0)}{512rr\lambda}$$

oder die Reduction des Durchschnittwerths für Eine Schwingung

$$= -\frac{Tm(hh - h^0h^0)}{512rr\lambda\mu}$$

Es ist bei diesen Formeln aus den oben angeführten Gründen gleichgültig, ob man darin für T den berichtigten oder den unberichtigten Werth gebraucht. In unserm Beispiele findet sich der Werth der Reduction

	für die ganze Zeit	für Eine Schwingung	Reducirter Werth
2 149	−1″6111	−0″01096	42″18455
149 279	−0.6624	−0.00510	42.17144
279 420	−0.3285	−0.00233	42.17646

Die Abnahme des Schwingungsbogens ist, auch ausser ihrem Zusammenhange mit der genauern Berechnung der Schwingungsdauer, noch in mehrern andern Beziehungen von Interesse. Man hat dabei zunächst die äussern Umstände zu unterscheiden, unter welchen die Nadel ihre Schwingungen macht.

Wenn der Apparat zweckmässig eingerichtet und in vollkommen gutem Zustande ist*), und in seinen nächsten Umgebungen sich Nichts befindet, was eine beträchtliche Dämpfung der Schwingungsbewegung bewirken muss, so ist die Abnahme der Schwingungsbögen immer sehr langsam, und in so fern regelmässig, als sie wenigstens während einer mässigen Zeit in geometrischer Progression erfolgt, mithin das logarithmische Decrement nahe constant ist. In unserm Beispiele ändert sich dieses logarithmische Decrement während fast sechs Stunden nur von 0.00117 bis 0.00130, oder die Abnahme des Bogens von einer Schwingung zur andern schwankte von $\frac{1}{855}$ bis $\frac{1}{769}$. Allein die Erfahrung zeigt, dass sehr häufig sehr verschiedene Werthe des logarithmischen Decrements vorkommen: es steigt wohl an demselben Apparate bis gegen 0.00300, und sinkt zu andern Zeiten auf 0.00030 und selbst, in seltenen Fällen, noch tiefer herab. Immer aber geschehen, nach unsern Erfahrungen, die Veränderungen nur allmählig. Man wird also diese Abnahme nicht wohl allein dem Widerstande der Luft zuschreiben dürfen: aber die eigentliche Ursache, welche diese Verschiedenheiten bedingt, hat sich bisher unsern vielfach wiederholten Versuchen entzogen, und wir wünschen daher sehr, dass auch Beobachter an andern Orten ihre besondere Aufmerksamkeit auf dieses zur Zeit noch räthselhafte Phänomen richten mögen. Ein Umstand ist bei diesen Versuchen so oft bemerkt, dass wir ihn kaum noch für zufällig halten können, wenn auch ein Causalnexus noch ganz unerklärlich bleibt, nemlich dass die *sehr* kleinen Werthe des logarithmischen Decrements immer nur bei bedecktem, die sehr grossen hingegen gewöhnlich nur bei heiterm Himmel eintreten, wobei zum Überfluss noch bemerkt werden mag, dass der Apparat nicht an einem Seidenfaden, sondern an einem Metalldraht aufgehängt ist, und dass diese Versuche immer nur an windstillen Tagen angestellt, folglich in diesen beiden Beziehungen sowohl hygrometrischer Einfluss als Luftzug ganz ausser Frage sind.

Ist hingegen die Nadel von einem Multiplicator umgeben, der einen Theil einer geschlossenen Kette ausmacht, so tritt eine neue Ursache der Abnahme der Schwingungsbögen hinzu. Die Bewegung der Nadel inducirt nemlich in dieser Kette einen galvanischen Strom, dessen Intensität am stärksten ist, wenn die

*) Ein Mangel in der festen Verbindung der Theile des schwingenden Apparats unter einander hat immer eine schnelle unregelmässige Abnahme der Schwingungsbögen zur Folge.

Schwingungsgeschwindigkeit der Nadel am grössten ist, und der die entgegengesetzte Richtung annimmt, sobald die Nadel umkehrt: die Reaction dieses Stromes auf die Nadel besteht aber immer in einer Verminderung der Schwingungsgeschwindigkeit der letztern, und die Theorie ergibt, dass auch hievon eine Abnahme des Schwingungsbogens, sehr nahe in geometrischer Progression, die Folge sein muss. Da indessen die Intensität des inducirten Stromes auch durch den Widerstand, welchen die *ganze* Kette darbietet, bedingt wird, so ist die Vergrösserung des logarithmischen Decrements, welche der Multiplicator hervorbringt, am stärksten, wenn die Kette gleich hinter diesem abgeschlossen ist; sie fällt desto kleiner aus, je grösser der hinzukommende Theil der Kette ist, und bei offener Kette findet gar kein Einfluss Statt, sondern das logarithmische Decrement ist dasselbe, als wenn der Multiplicator ganz weggenommen ist. Der Apparat, an welchem die obigen Beobachtungen angestellt sind, hat einen Multiplicator von 610 Umwindungen, und wenn derselbe, ohne weitern Zusatz, geschlossen ist, steigt das logarithmische Decrement auf etwa 0.02400 *), so dass der Schwingungsbogen schon in etwa 9 Minuten auf die Hälfte reducirt wird, während bei offener Kette und einem solchen Werthe des logarithmischen Decrements, wie die obigen Beobachtungen ergaben, etwa drei Stunden dazu erforderlich sind. Bei der vierpfündigen Nadel des magnetischen Observatorium bewirkt der Schluss eines aus 536 Windungen bestehenden Multiplicators ein logarithmisches Decrement von nahe gleicher Grösse; da aber jene Nadel eine Schwingungsdauer von 21″6 hat, so kommt der Schwingungsbogen hier schon nach 4½ Minuten auf die Hälfte herab. Bei einer so bedeutenden Dämpfungskraft können, wenn die Nadel einmal beruhigt ist, falls nicht ausserordentliche Störungen von aussen oder ungewöhnlich starke schnelle Declinationsänderungen eintreten, gar keine erhebliche Schwingungen aufkommen, und ein solcher kräftiger Multiplicator gewährt daher, ausser seinen unzähligen andern Anwendungen, auch den wichtigen Nutzen, die Terminsbeobachtungen ungemein zu erleichtern, und alle andern Beruhigungsmittel entbehrlich zu machen.

In noch viel höherm Grade leistet aber diese Wirkung die oben [S. 372 d. B.] unter dem Namen eines Dämpfers erwähnte Vorrichtung. Der für das Magnetometer des magnetischen Observatorium angefertigte Dämpfer besteht in zwei länglich viereckigen kupfernen Rahmen, jeder 13 Pfund wiegend, welche in die hölzernen Rahmen der zwei Multiplicatorhälften wie eine Fütterung eingeschoben werden können. Da diese Vorrichtung in sehr vielen Fällen ungemein nützliche Dienste leistet, und auch schon mehrern von Hrn. MEYERSTEIN an auswärtige Beobachter gelieferten Magnetometern ein ähnlicher Hülfsapparat beigegeben ist, so werden einige denselben betreffende Bemerkungen hier nicht am unrechten Orte sein.

*) Es ist nicht in allen Versuchen ganz gleich, da die Wirkung des Multiplicators sich mit einer, wie oben bemerkt ist, an sich nicht unveränderlichen Grösse verbindet. Auch hängt die Wirkung des Multiplicators selbst von dem mit der Temperatur veränderlichen Leitungsvermögen des Drahts mit ab.

Zuvörderst wird jeder, welcher von einem solchen Apparat Gebrauch machen will, die Stärke seiner Dämpfungskraft in Zahlen kennen zu lernen wünschen. Man setzt zuerst die Nadel in sehr grosse Schwingungsbewegungen *) und zeichnet die Elongationen, so bald sie innerhalb der Scale fallen, und so lange der Schwingungsbogen noch eine beträchtliche Grösse behält, auf. Sind g, g', g'', g''' u. s. w. die so hervorgehenden Amplituden in Scalentheilen, so erhält man in den Differenzen ihrer Logarithmen $\log g - \log g'$, $\log g' - \log g''$, $\log g'' - \log g'''$ u. s. w. eben so viele Bestimmungen des logarithmischen Decrements. Zu einer Zeit, wo eine etwas beträchtliche Declinationsbewegung Statt findet, wird diese unter der Voraussetzung, dass sie während der Beobachtungen gleichförmig geschehe, eliminirt, wenn man sich der Formeln

$$\log(g+g') - \log(g'+g''), \quad \log(g'+g'') - \log(g''+g''') \text{ u. s. w.}$$

bedient, was, wie man leicht sieht, mit dem oben [S. 383 d. B.] angegebenen Verfahren auf Eins hinausläuft.

Einer der am 9. Januar 1838 angestellten Versuche gab z. B.

Elongationen	Amplitudem	Logarithmen	Differenzen
134.0			
	1057.7	3.02436	
1191.7			0.31137
	516.4	2.71299	
675.3			0.30850
	253.8	2.40449	
929.1			0.31141
	123.9	2.09307	
805.2			

*) Welche Mittel man auch dazu anwende, so wird man doch nicht darauf rechnen können, dass in völliger Strenge *reine* Schwingungen um eine verticale Axe erzeugt werden. Schon aus diesem Grunde darf man von den Resultaten nicht die allerschärfste Übereinstimmung erwarten, worauf es jedoch hier auch gar nicht ankommt.

Also im Mittel das logarithmische Decrement $= 0.31043$. Die andern Formeln geben

$$\log\frac{1574.1}{770.2} = 0.31043, \quad \log\frac{770.2}{377.7} = 0.30945$$

also im Mittel 0.30994. Bei diesen Versuchen war der Multiplicator nicht geschlossen, oder es wirkte der Dämpfer allein. Aus andern Versuchen an demselben Tage, bei denen zugleich der Multiplicator geschlossen war, fand sich das logarithmische Decrement $= 0.33570$.

Da Kupfer, wenn es nicht ganz rein ist, einen wenn auch nur sehr schwachen directen magnetischen Einfluss ausüben kann, so ist es nicht rathsam, den Dämpfer bei solchen Beobachtungen anzuwenden, die absolute Declinationsbestimmungen zum Zweck haben, ohne sich vorher überzeugt zu haben, dass ein merklicher Einfluss dieser Art nicht vorhanden ist. Man erfährt dies, durch Beobachtungen des Standes der Nadel, abwechselnd mit und ohne Dämpfer, verbunden mit gleichzeitigen Beobachtungen des Standes einer in angemessener Entfernung befindlichen zweiten Nadel, um von den während der Beobachtungen Statt findenden Declinationsveränderungen Rechnung tragen zu können. In Ermangelung eines zweiten Magnetometers kann man diese Elimination, nur weniger zuverlässig, dadurch beschaffen, dass man die alternirenden Bestimmungen in nahe gleichen Zwischenzeiten macht, und jeden Stand ohne Dämpfer mit dem Mittel des vorhergehenden und folgenden Standes mit Dämpfer, und umgekehrt, vergleicht. Bei der Anfertigung des Dämpfers für das hiesige magnetische Observatorium hat Hr. Meyerstein die Vorsicht angewandt, sich nur ganz neuer Feilen zu bedienen; der fertige Dämpfer ist hernach eine beträchtliche Zeit in verdünnte Salzsäure, dann in Lauge gelegt, und zuletzt mit Wasser abgespült. Versuche der beschriebenen Art haben keinen merklichen Einfluss dieses Dämpfers auf den Stand der Nadel zu erkenen gegeben.

Was bei sich immer gleich bleibenden Schwingungsbögen strenge gültig sein würde, erleidet im Fall der Natur, wo der Schwingungsbogen fortwährend abnimmt, mehrere Modificationen, die hier noch etwas näher betrachtet zu werden verdienen, wäre es auch nur, um bestimmt beurtheilen zu können, unter welchen Umständen sie als unmerklich betrachtet werden dürfen.

Eine in geometrischer Progression erfolgende Abnahme des Schwingungsbogens setzt eine der Bewegung in jedem Augenblick in einfachem Verhältniss

ihrer Geschwindigkeit entgegenwirkende Kraft voraus *). Die allgemeine Gleichung für die Schwingungsbewegung hat daher, wenn wir die Grössen von der dritten Ordnung in Beziehung auf den Schwingungsbogen vernachlässigen, die Form

$$0 = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2} + nn(x-p) + 2\varepsilon\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

wo x den den Stand der Nadel für die Zeit t bezeichnenden, p den dem Ruhestande entsprechenden Scalentheil bedeuten, nn und 2ε hingegen die magnetische Directionskraft und jene retardirende Kraft, beide mit dem Trägheitsmoment der Nadel dividirt. Das vollständige Integral dieser Gleichung ist

$$x = p + Ae^{-\varepsilon t}\sin\sqrt{(nn-\varepsilon\varepsilon)}.(t-B)$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, A und B die beiden durch die Integration eingeführten arbiträren Constanten bedeuten. Ohne die retardirende Kraft würde das Integral

$$x = p + A\sin n(t-B)$$

sein. Die Nadel macht also auch in jenem Fall wie in diesem periodische Oscillationen um den Punkt p, aber ein doppelter Unterschied findet dabei Statt. Theils ist im zweiten Fall die grösste Abweichung von der Mitte oder die halbe Amplitude constant $= A$, während sie im erstern in geometrischer Progression abnimmt, theils schreitet das Argument der periodischen Function im ersten Fall langsamer fort als im andern. Setzt man die Schwingungsdauer im zweiten Fall, wo sie allein von der magnetischen Directionskraft abhängt, $= T$, im ersten $= T'$, so hat man, π in üblicher Bedeutung genommen,

$$nT = \pi, \quad \sqrt{(nn-\varepsilon\varepsilon)}.T' = \pi$$

Wenn man also Kürze halber n' anstatt $\sqrt{(nn-\varepsilon\varepsilon)}$ schreibt, und einen Hülfswinkel φ einführt, wonach

$$\sin\varphi = \frac{\varepsilon}{n}, \quad \cos\varphi = \frac{n'}{n}, \quad \mathrm{tang}\,\varphi = \frac{\varepsilon}{n'}$$

wird, wenn man ferner, wie oben, mit λ das logarithmische Decrement und mit

*) *Strenge* genommen gilt beides nur für unendlich kleine Schwingungen.

m den Modulus des Systems bezeichnet, so erhält man

$$T' = \frac{T}{\cos\varphi}$$

$$\frac{\lambda}{m} = \varepsilon T' = n' \operatorname{tang}\varphi. \quad T' = \pi \operatorname{tang}\varphi$$

folglich

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\lambda}{m\pi} = \frac{\lambda}{1.364376}$$

Für $\lambda = 0.02100$ und $T = 42''18$ findet sich nach diesen Formeln $\varphi = 1^0\,0'\,28''$ und $T' = 42''18653$. Der blosse Schluss des Multiplicators bringt also nur eine geringe Vergrösserung der Schwingungsdauer hervor. Dagegen geben die oben beim Gebrauch des Dämpfers, allein, oder zugleich mit dem Multiplicator, gefundenen Zahlen, wenn man $T = 20''60$ setzt,

$\lambda = 0.30994$	$\varphi = 12^0\,47'\,54''$	$T' = 21''12484$
$\lambda = 0.33570$	$\varphi = 13\;\;49\;\;22$	$T' = 21.21439$

Die Beobachtungen stimmen mit dieser berechneten Vergrösserung der Schwingungsdauer so genau überein, als man nur von der geringen Anzahl von Schwingungen, auf die man sich dabei beschränken muss, erwarten kann.

In dem Fall abnehmender Schwingungsbögen sind die wahren Zeiten der Elongationen den aus correspondirenden Stellungen abgeleiteten nicht genau gleich, und bei so starken logarithmischen Decrementen, wie unter Anwendung eines Dämpfers Statt finden, wird dieser Unterschied ziemlich beträchtlich.

Da in dem oben gegebenen Integral offenbar B die Zeit eines Durchganges durch den Ruhestand p bedeutet, und es gleichgültig ist, von welchem Augenblick an die Zeit gezählt wird, so wollen wir grösserer Einfachheit wegen $B = 0$ setzen. Unsere Formel wird so

$$x = p + Ae^{-\varepsilon t}\sin n't$$

Der nächste Durchgang durch p, welcher auf den bei $t = 0$ folgt, findet Statt bei $n't = 180^0$, oder $t = T'$; die aus diesen correspondirenden Beobachtungen einfach abgeleitete Zeit der Elongation ist also $t = \frac{1}{2}T'$, während der wirkliche Stillstand schon früher eintritt. Man hat nemlich für $\frac{dx}{dt} = 0$,

$$0 = Ae^{-\varepsilon t}(-\varepsilon\sin n't + n'\cos n't)$$

Mithin

$$\operatorname{cotang} n't = \frac{\varepsilon}{n'} = \operatorname{tang}\varphi$$

Daher der erste positive Werth von $n't = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, und $t = \frac{1}{2}T' - \frac{\varphi T'}{\pi}$, oder in so fern φ in Graden ausgedrückt ist,

$$t = \tfrac{1}{2}T' - \tfrac{\varphi}{180^0}.T'$$

Offenbar findet eine gleiche Differenz bei der folgenden Elongation Statt. Aus den oben angegebenen Zahlen findet sie sich $= 0''23$ für den fünfundzwanzigpfündigen Stab unter Anwendung des Multiplicators; $= 1''50$ für das Magnetometer des M. O., wenn der Dämpfer allein, und $= 1''63$, wenn Dämpfer und Multiplicator zugleich gebraucht werden.

Da die wirklichen Stillstände um eine constante, von der Grösse des Schwingungsbogens unabhängige, Zeit früher eintreten, als die aus aufeinanderfolgenden Durchgängen durch den Ruhestand p geschlossenen Augenblicke, so kann man auch ohne Weiteres die letztern beibehalten, da es für den Gebrauch zur Bestimmung der Schwingungsdauer nur auf die *Unterschiede* der Elongationszeiten ankommt. Nur muss man Sorge tragen, den Punkt p selbst oder einen sehr nahe liegenden zum Beobachten zu wählen, und kleine Schwingungsbögen auch noch um so mehr ausschliessen, weil bei solchen in dem Fall starker logarithmischer Decremente schon eine geringe Abweichung vom richtigen p einen merklichen Fehler erzeugen würde. Obgleich es nicht schwer ist, jener Bedingung Genüge zu leisten, so mag doch noch die allgemeine Formel für den Fehler der aus correspondirenden Durchgängen geschlossenen Elongationen hier Platz finden.

Es sei u die halbe Zwischenzeit zwischen zwei correspondirenden Durchgängen eines Punkts x, und $\frac{1}{2}T' - \delta$ das Mittel der Durchgangszeiten oder die daraus geschlossene Elongationszeit. Es sind also die Durchgangszeiten selbst $\frac{1}{2}T' - u - \delta$ und $\frac{1}{2}T' + u - \delta$, und wir haben folglich

$$x = p + Ae^{-\varepsilon(\frac{1}{2}T' - u - \delta)}\sin n'(\tfrac{1}{2}T' - u - \delta)$$
$$x = p + Ae^{-\varepsilon(\frac{1}{2}T' + u - \delta)}\sin n'(\tfrac{1}{2}T' + u - \delta)$$

woraus, wegen $\frac{1}{2}n'T' = \frac{1}{2}\pi$, folgt

$$e^{2\varepsilon u}\cos n'(u+\delta) = \cos n'(u-\delta)$$

und mithin

$$\text{tang}\, n'\vartheta = \frac{e^{\varepsilon u}-1}{(e^{\varepsilon u}+1)\,\text{tang}\, n'u}$$

Für $u = \frac{1}{2}T'$ gibt diese Formel $\vartheta = 0$; dies ist der Fall, wo der Ruhestandspunkt p selbst für die Durchgänge gewählt ist: hingegen entspricht die Annahme eines unendlich kleinen Werths dem wahren Stillstandspunkte, und die Formel gibt hier

$$\text{tang}\, n'\vartheta = \frac{\varepsilon}{n'} = \text{tang}\, \varphi$$

Also $\vartheta = \frac{\varphi}{n'} = \frac{\varphi T'}{\pi}$, übereinstimmend mit dem oben gefundenen.

Endlich bedarf in dem Fall abnehmender Schwingungsbögen auch die Berechnung der auf den Ruhestand der Nadel bezüglichen Beobachtungen einer Modification, die freilich nur dann merklich wird, wenn die Schwingungen eine sehr starke Abnahme erleiden.

Die Stellungen der Nadel x, x', welche zweien um eine Schwingungsdauer verschiedenen Zeiten t, $t+T'$ entsprechen, haben die Werthe

$$x = p + Ae^{-\varepsilon t}\sin n't$$
$$x' = p + Ae^{-\varepsilon t-\varepsilon T'}\sin(n't+n'T')$$

oder weil $n'T' = \pi$

$$x' = p - Ae^{-\varepsilon t-\varepsilon T'}\sin n't$$

oder wenn wir, wie oben, mit ϑ den Bruch bezeichnen, dessen briggischer Logarithme $-\lambda$, also der natürliche $\varepsilon T'$ ist,

$$x' = p - \vartheta Ae^{-\varepsilon t}\sin n't$$

Es erhellt also, dass man, um p zu finden, nicht mehr das arithmetische Mittel zwischen x und x' nehmen darf, sondern die Differenz zwischen x und x' in dem Verhältniss von 1 zu ϑ vertheilen muss, oder dass

$$p = \frac{\vartheta x + x'}{1+\vartheta} = x + \frac{1}{1+\vartheta}\cdot(x'-x) = x' - \frac{\vartheta}{1+\vartheta}\cdot(x'-x)$$

wird. Da übrigens bei diesen Beobachtungen die Differenz $x'-x$ immer sehr klein ist, so wird man zur Bequemlichkeit der Rechnung sich verstatten können, anstatt $\frac{\vartheta}{1+\vartheta}$ einen nahe kommenden durch kleine Zahlen auszudrückenden Bruch

anzuwenden, z. B. kann man für $\lambda = 0.30994$, anstatt des genaueren Werths 0.3288 den genäherten $\frac{1}{3}$ wählen.

Hiebei entsteht nun aber die Frage, für welchen Augenblick dieses Resultat als gültig zu betrachten ist. So wie in dem Falle, wo die Schwingungsbögen nur sehr langsam abnehmen, das einfache Mittel der Scalentheile als dem einfachen Mittel der Zeiten entsprechend angenommen wird, scheint nun zwar, dass bei ungleich vertheiltem Unterschied der Stände die Zwischenzeit in demselben Verhältniss zu theilen, also der Stand $x+\frac{x'-x}{1+\vartheta}$ als für $t+\frac{T'}{1+\vartheta}$ gültig anzusehen sei: allein dies ist theoretisch nicht richtig, und es scheint eine genauere Erörterung, wenn auch in gewöhnlichen Fällen praktisch ganz unerheblich, doch in theoretischer Beziehung hier noch eines Platzes nicht unwürdig zu sein.

Offenbar kommt der Gültigkeitsaugenblick nur in so fern in Frage, als man sich nicht erlauben will, die magnetische Declination in der Zwischenzeit zwischen den beiden Aufzeichnungen als constant zu betrachten: aber als sich gleichförmig während dieser Zwischenzeit ändernd wird man sie immer betrachten können, und müssen, wenn der Rechnung eine bestimmte Unterlage gegeben werden soll. In diesem Falle hat also unsere Fundamentalgleichung die Form

$$0 = \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2} + nn(x-p-\alpha t) + 2\varepsilon\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

deren vollständiges Integral ist

$$x = p - \frac{2\alpha\varepsilon}{nn} + \alpha t + Ae^{-\varepsilon t}\sin n'(t-B)$$

wenn, wie oben, n' für $\sqrt{(nn-\varepsilon\varepsilon)}$ gesetzt wird. Wenn also x' den Stand für die Zeit $t+T'$ ausdrückt, so wird, ϑ in voriger Bedeutung genommen,

$$x' = p - \frac{2\alpha\varepsilon}{nn} + \alpha t + \alpha T' - \vartheta Ae^{-\varepsilon t}\sin n'(t-B)$$

und folglich

$$\frac{\vartheta x + x'}{1+\vartheta} = p - \frac{2\alpha\varepsilon}{nn} + \alpha t + \frac{\alpha T'}{1+\vartheta}$$

welches Resultat demnach der Ruhestand für die Zeit

$$t + \frac{T'}{1+\vartheta} - \frac{2\varepsilon}{nn} = t + \frac{T'}{1+\vartheta} - \frac{\sin 2\varphi\cdot T'}{\pi}$$

ist. Für $\lambda = 0.30994$ ist also die Zeit, wofür das nach obiger Vorschrift berechnete Resultat gilt $= t + 0.5337\,T'$, für $\lambda = 0.33570$ hingegen $= t + 0.5365\,T'$.

Man sieht also, dass selbst bei einer so starken Dämpfung der Augenblick der Gültigkeit von dem einfachen Mittel der Zeiten nur wenig verschieden ist.

Bei allem, was bisher entwickelt ist, liegt die Voraussetzung zum Grunde, dass ε kleiner sei als n; im entgegengesetzten Fall nimmt das Integral der Fundamentalgleichung eine andere Form an. Man erhält nemlich anstatt des Gliedes $Ae^{-\varepsilon t}\sin\sqrt{(nn-\varepsilon\varepsilon)}.(t-B)$, in dem Fall, wo ε grösser ist als n, zwei Glieder von der Form

$$Ae^{-(\varepsilon+\sqrt{(\varepsilon\varepsilon-nn)})t}+Be^{-(\varepsilon-\sqrt{(\varepsilon\varepsilon-nn)})t}$$

und in dem Fall, wo $\varepsilon = n$ ist, von dieser

$$(A+Bt)e^{-\varepsilon t}$$

In beiden Fällen findet also in der Bewegung gar nichts periodisches mehr Statt, sondern der Stand nähert sich asymptotisch dem Ruhestande. Für unsern Dämpfer ist $\frac{\varepsilon}{n} = 0{,}22152$, und es müsste also ein mehr als $4\frac{1}{2}$ mal stärker wirkender Dämpfer angewandt werden, um solchen Erfolg hervorzubringen. Offenbar aber würde es dazu nicht hinreichend sein, die Metallmenge nur in demselben Verhältniss zu vergrössern, in sofern diese Vergrösserung nach aussen angebracht werden müsste, und die äussern Schichten des Metallrahmens vergleichungsweise weniger zur Inductionswirkung beitragen als die innern. Allein es würde nicht einmal anzurathen sein, eine Dämpfung von einer solchen Stärke anzuwenden, dass die Bewegung aufhörte periodisch zu sein, theils weil, sobald ε den Grenzwerth n überschreitet, die Annäherung zu dem Ruhestand wieder langsamer geschieht, theils weil man dann den wesentlichen Vortheil verlöre, aus zwei beliebigen, um T von einander entfernten, Aufzeichnungen den Ruhestand auf eine bequeme Art berechnen zu können.

ÜBER EIN MITTEL

DIE BEOBACHTUNG VON ABLENKUNGEN ZU ERLEICHTERN.

Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins. 1839. II.

1.

Wenn zu der erdmagnetischen Kraft noch eine andere auf die Nadel eines Magnetometers stetig, aber in einer gegen den magnetischen Meridian geneigten Richtung wirkende Kraft hinzutritt, so erhält die Nadel eine veränderte Gleichgewichtsstellung, und die Grösse der Ablenkung kann zur Abmessung der Zusatzkraft dienen. Zur Messbarkeit der Ablenkung ist aber erforderlich, dass nicht nur die neue Gleichgewichtsstellung noch innerhalb der Scale liege, sondern auch, insofern man nicht den völligen Ruhezustand der Nadel abwarten kann oder will, dass die noch Statt findenden Schwingungen die Grenzen der Scale nicht überschreiten. War die Nadel, so lange der Erdmagnetismus allein auf sie wirkte, in Ruhe, und setzt man die Zusatzkraft auf einmal in volle Wirkung, so fängt jene eine Schwingung an, deren Mitte die neue Gleichgewichtsstellung ist, während die vorige Stellung den einen Elongationspunkt bildet, und der zweite eben soweit von der Mitte auf der entgegengesetzten Seite hinausfällt. Liegt nun die neue Gleichgewichtsstellung zwar innerhalb, aber doch nahe an der Grenze der Scale, so würde man bei der langsamen Abnahme des Schwingungsbogens ohne Anwendung künstlicher Hülfsmittel auf diese Art erst lange zu warten haben, bis die Bestimmung jenes Punkts möglich würde. Dadurch würde aber in allen Fällen schon wegen der stündlichen Veränderung der Declination, die Zuverlässigkeit und Brauchbarkeit der Bestimmung sehr vermindert, und fast ganz vereitelt

werden in solchen Fällen, wo die Stärke der Zusatzkraft schon in kurzer Zeit beträchtliche Veränderungen erleidet, wie bei galvanischen Strömen.

2.

Durch folgendes einfache Verfahren wird diesem Übelstande abgeholfen. Man lässt die Zusatzkraft zuerst nur während des dritten Theils der Schwingungsdauer wirken, suspendirt sie dann während einer eben so langen Zwischenzeit, und setzt sie darauf erst in beharrliche Wirksamkeit. Ist also z. B. die Schwingungsdauer der Nadel des Magnetometers 30 Secunden, und soll die durch einen galvanischen Strom erzeugte Ablenkung gemessen werden, so schliesst man die Kette bei einem Secundenschlage, welchen man als 0 zählt; öffnet wieder bei 10″, und schliesst endlich definitiv bei 20″. Soll die Ablenkung durch einen an einen bestimmten Platz zu legenden Magnetstab geschehen, so nähert man sich dem vorher genau und bequem bezeichneten Platze mit dem anfangs vertical gehaltenen Magnetstabe, legt denselben bei 0″ plötzlich nieder, richtet ihn bei 10″ eben so schnell wieder auf und legt ihn zum zweiten Male bei 20″ definitiv hin. Der Erfolg ist, dass die Nadel von ihrer ursprünglichen Ruhestellung sich derjenigen Stellung, welche der Ablenkung entspricht, während der ersten 10 Secunden mit beschleunigter Geschwindigkeit nähert, bei 10″ gerade die Mitte zwischen beiden Stellungen erreicht hat, und dann während der zweiten 10 Secunden die andere Hälfte des Zwischenraumes mit retardirter Bewegung durchläuft, so dass sie bei 20 Secunden die neue Stellung erreicht und alle Bewegung verloren haben wird.

Man sieht leicht, dass auf ganz ähnliche Weise die Nadel von einem ruhigen Ablenkungszustande zu dem entgegengesetzten so hinübergeführt werden kann, dass sie in demselben ohne Bewegung ist: man lässt nemlich die ablenkende Kraft während des dritten Theils der Schwingungsdauer im entgegengesetzten Sinne wirken, dann während eben so langer Zeit wieder im frühern Sinn, und wechselt darauf von neuem. Für galvanische Ströme erhält man den Wechsel fast augenblicklich durch einen zweckmässigen Commutator; für ablenkende Magnetstäbe durch eine rasche halbe Umdrehung (am bequemsten durch eine horizontale), so dass der Nordpol des Stabes an den Platz des Südpols kommt.

Endlich ist klar, dass auf dieselbe Weise nach beobachteter Ablenkung die Nadel wieder ruhig in den reinen magnetischen Meridian gebracht werden kann: man braucht nur die ablenkende Kraft zuerst während eines Drittheils der Schwingungsdauer zu suspendiren, dann eben so lange noch einmal wirken und endlich aufhören zu lassen.

3.

Dem beschriebenen Verfahren liegt die Voraussetzung zum Grunde dass

erstens die Schwingungen der Nadel so erfolgen, dass der Abstand von der Mitte der Schwingung (so lange diese Mitte selbst nicht abgeändert wird) dem Sinus eines sich gleichförmig ändernden und während einer Schwingungsdauer um 180^0 zunehmenden Winkels proportional bleibt, und

zweitens, die Schwingungsdauer durch die Zusatzkraft nicht verändert wird.

Insofern beide Voraussetzungen nicht *in absoluter Schärfe* gültig sind, und ausserdem auch bei der Ausführung weder der Wechsel ganz augenblicklich geschehen, noch die vorgeschriebenen Zwischenzeiten absolut genau eingehalten werden können, wird allerdings nach Vollendung der Operation die Nadel selten in vollkommener Ruhe angetroffen werden: allein für den praktischen Zweck ist es schon hinreichend, wenn die übrig bleibende Bewegung so gering ist, dass man die wahre Gleichgewichtsstellung auf gewöhnliche Weise sogleich zu beobachten anfangen kann.

Unter den Statt findenden Umständen werden jene Voraussetzungen nur sehr wenig von der Wahrheit abweichen können. Die Anwendbarkeit des Magnetometers beruht an sich schon darauf, dass die Zusatzkraft nur eine mässige Ablenkung hervorbringt, wobei (einen sogleich zu erwähnenden Ausnahmefall beiseite gesetzt) das in der ersten Voraussetzung enthaltene Gesetz hinreichend genau gilt. Die Veränderung der Schwingungsdauer durch die ablenkende Kraft ist ganz unmerklich, wenn diese senkrecht gegen den magnetischen Meridian wirkt, wie fast immer der Fall ist: wirkte sie aber auch in einer schiefen Richtung, so würde, insofern sie selbst nur ein kleiner Bruchtheil der erdmagnetischen Kraft ist, die dadurch bewirkte Veränderung der Schwingungsdauer doch für die kurze Zeit der Operation ganz unerheblich bleiben.

Nur Ein Fall ist auszunehmen, nemlich wenn die Nadel ihre Schwingungen unter dem Einflusse eines die Grösse des Schwingungsbogens bedeutend vermindernden Dämpfers macht. In diesem Falle ist das obige Gesetz nicht mehr gültig, und eine genaue Befolgung des oben beschriebenen Verfahrens würde nicht zum Ziele führen: von der andern Seite ist dann aber auch allerdings der

im 1. Art. bemerkte Übelstand viel geringer, da ein kräftiger Dämpfer die Nadel von selbst in mässiger Zeit zur Ruhe bringt. Da indessen für diesen Fall jenes Verfahren nur einer Modification bedarf, um denselben Erfolg zu erreichen, und es allemal erwünscht sein muss, jeden unnöthigen Zeitverlust vermeiden zu können, so ist es, in praktischer wie in theoretischer Beziehung, der Mühe werth, die Frage ganz allgemein zu betrachten.

4.

Wir haben zuvörderst folgende allgemeine Aufgabe aufzulösen.

Ein Magnetstab schwingt unter wiederholter Abänderung der auf ihn wirkenden Kräfte, wobei jedoch die Schwingungsdauer und das logarithmische Decrement*) unverändert, und die Schwingungsbogen klein genug bleiben, um Grössen der dritten Ordnung vernachlässigen zu können. Man soll aus dem anfänglichen Bewegungszustande denjenigen, welcher nach der letzten Abänderung Statt findet, ableiten.

Es sei T die Schwingungsdauer, ε das logarithmische Decrement, e die Basis der hyperbolischen, m der Modulus der briggischen Logarithmen, π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser. Man setze

$$n = \frac{\pi}{T}, \qquad \varepsilon = \frac{\lambda}{mT}.$$

Unter obigen Voraussetzungen wird demnach der Stand x für die Zeit t durch die Formel ausgedrückt

$$x = p + Ae^{-\varepsilon t}\sin(nt - B)$$

welcher man auch die Gestalt geben kann

$$x = p + ae^{-\varepsilon t}\cos nt + be^{-\varepsilon t}\sin nt$$

wo p die Gleichgewichtsstellung ausdrückt, und die Coëfficienten a, b so lange constant bleiben, als p constant ist. Die Geschwindigkeit der Bewegung findet sich hieraus

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-\varepsilon t}(na\sin nt + \varepsilon a\cos nt - nb\cos nt + \varepsilon b\sin nt),$$

oder wenn man einen Hülfswinkel φ einführt, so dass $\frac{\varepsilon}{n} = \operatorname{tang}\varphi$ wird,

*) Resultate, 1837. IV. [S. 383. d. B.]

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{ne^{-\varepsilon t}}{\cos\varphi}(a\sin(nt+\varphi) - b\cos(nt+\varphi))$$

Für $ae^{-\varepsilon t}\cos nt + be^{-\varepsilon t}\sin nt$ schreiben wir u, so dass $x = p + u$ wird.

Es seien nun t', t'', t''' die bestimmten Werthe von t, wo eine Veränderung der wirkenden Kraft vorgenommen wird; ferner seien die bestimmten Werthe von p, a, b in den verschiedenen Zeitabschnitten folgende:

p^0,	a^0,	b^0	vor t'
p',	a',	b'	von t' bis t''
p'',	a'',	b''	von t'' bis t'''
p''',	a''',	b'''	nach t'''

Endlich gehe der allgemeine Ausdruck von u, wenn für a und b die bestimmten Werthe substituirt werden, über in u^0, u', u'', u''', so dass vor dem ersten Wechsel $x = p^0 + u^0$ wird, von da bis zum zweiten $x = p' + u'$ u. s. f.

Da der Augenblick t' zugleich der letzte des ersten Zeitabschnitts und der erste des folgenden ist, so müssen für $t = t'$ sowohl x als $\frac{dx}{dt}$ einerlei Werth erhalten, man möge in den obigen allgemeinen Ausdrücken für p, a, b die Werthe p^0, a^0, b^0, oder p', a', b' substituiren.

Es ist also

$$0 = p' - p^0 + (a' - a^0)e^{-\varepsilon t'}\cos nt' + (b' - b^0)e^{-\varepsilon t'}\sin nt'$$
$$0 = (a' - a^0)\sin(nt' + \varphi) - (b' - b^0)\cos(nt' + \varphi)$$

woraus man leicht ableitet

$$a' - a^0 = -\frac{p' - p^0}{\cos\varphi}\cdot e^{\varepsilon t'}\cos(nt' + \varphi)$$
$$b' - b^0 = -\frac{p' - p^0}{\cos\varphi}\cdot e^{\varepsilon t'}\sin(nt' + \varphi)$$

und hieraus

$$u' = u^0 - \frac{p' - p^0}{\cos\varphi}\cdot e^{-\varepsilon(t - t')}\cos(n(t - t') - \varphi)$$

Auf gleiche Art erhält man

$$u'' = u' - \frac{p'' - p'}{\cos\varphi}\cdot e^{-\varepsilon(t - t'')}\cos(n(t - t'') - \varphi)$$
$$u''' = u'' - \frac{p''' - p''}{\cos\varphi}\cdot e^{-\varepsilon(t - t''')}\cos(n(t - t''') - \varphi)$$

und so ferner, wenn noch mehrere Wechsel der bewegenden Kräfte Statt finden.

Es wird also hiedurch aus dem anfänglichen Bewegungszustande jeder nachfolgende bestimmt.

5.

Für den Fall der gegenwärtigen Untersuchung ist $p'' = p^0$ und $p''' = p'$ zu setzen. Dadurch wird

$$u''' = u^0 - \frac{p' - p^0}{\cos\varphi} \cdot e^{-\varepsilon t} \cdot \{e^{\varepsilon t'} \cos(n(t-t') - \varphi) - e^{\varepsilon t''} \cos(n(t-t'') - \varphi) + e^{\varepsilon t'''} \cos(n(t-t''') - \varphi)\}$$

welche Formel, wenn man

$$e^{-\varepsilon(t''-t')} \cos n(t''-t') - 1 + e^{\varepsilon(t'''-t'')} \cos n(t'''-t'') = f$$
$$e^{-\varepsilon(t''-t')} \sin n(t''-t') - e^{\varepsilon(t'''-t'')} \sin n(t'''-t'') = g$$

setzt, übergeht in

$$u''' = u^0 - \frac{p' - p^0}{\cos\varphi} \cdot e^{-\varepsilon(t-t'')} \cdot \{f \cos(n(t-t'') - \varphi) - g \sin(n(t-t'') - \varphi)\}$$

Hieraus folgt, dass wenn die Zwischenzeiten $t''-t'$, $t'''-t''$ so bestimmt sind, dass $f = 0$ und $g = 0$ wird, allgemein

$$u''' = u^0$$

oder $a''' = a^0$, $b''' = b^0$ wird.

War also vor den Wechseln die Nadel in p^0 in Ruhe, so wird sie, nach denselben, sich in p' in Ruhe befinden: im entgegengesetzten Falle wird die Nadel nach den drei Wechseln in jedem Augenblick genau dieselbe Geschwindigkeit und dieselbe Stellung gegen den Mittelpunkt ihrer Bewegung p' haben, welche sie relativ gegen p^0 in demselben Augenblicke haben würde, wenn sie ihre ursprüngliche Bewegung ungestört fortgesetzt hätte: mit Einem Worte, bloss der Mittelpunkt der Bewegung wird versetzt, die Bewegung selbst aber gar nicht geändert sein.

6.

Es bleibt nun noch übrig, die Zwischenzeit so zu bestimmen, dass den Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ Genüge geschehe. Setzt man

$$t''-t' = qT, \quad t'''-t'' = rT$$

und erinnert sich, dass $e = 10^m$, so werden jene Gleichungen

$$10^{-q\lambda} \cos q\pi + 10^{r\lambda} \cos r\pi = 1$$
$$10^{-q\lambda} \sin q\pi = 10^{r\lambda} \sin r\pi$$

Für den Fall einer unmerklichen Abnahme des Schwingungsbogens muss also $\cos q\pi + \cos r\pi = 1$ und $\sin q\pi = \sin r\pi$ gesetzt werden, mithin

$$q\pi = r\pi = 60^0 \text{ oder } = \tfrac{1}{3}\pi, \quad \text{und} \quad t''-t' = t'''-t'' = \tfrac{1}{3}T$$

wie schon im 2. Artikel bemerkt ist. Für den Fall eines merklichen logarithmischen Decrements hingegen werden jene Gleichungen auf indirectem Wege aufzulösen sein, welcher Rechnung man folgende Form geben kann.

Aus der Verbindung der Gleichungen folgt

$$\operatorname{tang} r\pi = \frac{\sin q\pi}{10^{q\lambda} - \cos q\pi}, \qquad 10^{2r\lambda} = 1 - 2 \cdot 10^{-q\lambda} \cos q\pi + 10^{-2q\lambda}$$

Durch Elimination von r hat man also die Gleichung mit Einer unbekannten Grösse

$$\frac{\pi}{2\lambda} \log(1 - 2 \cdot 10^{-q\lambda} \cos q\pi + 10^{-2q\lambda}) = \text{Arc. tang} \frac{\sin q\pi}{10^{q\lambda} - \cos q\pi}$$

wo der briggische Logarithme verstanden ist. Nachdem derselben Genüge geleistet ist, hat man offenbar zugleich den Werth von r.

7.

Um denjenigen, welche das beschriebene Verfahren unter Anwendung eines Dämpfers ausüben wollen, die im vorhergehenden Artikel erklärte Rechnung zu ersparen, theile ich hier eine im voraus berechnete Tafel mit, aus welcher für jedes logarithmische Decrement das Verhältniss der beiden Zwischenzeiten zur Schwingungsdauer sogleich entnommen werden kann. Man sieht daraus, dass mit zunehmendem logarithmischen Decrement die erste Zwischenzeit immer grösser, die zweite immer kleiner wird. Die Summe beider ist zwar zwei Drittheilen der Schwingungsdauer nur für $\lambda = 0$ genau gleich, entfernt sich aber davon viel langsamer. Dass es bei der wirklichen Anwendung zureicht, etwa nur die ersten Decimalen der Werthe von q und r zu berücksichtigen, bedarf keiner Erinnerung.

Tafel.

λ	q	r	λ	q	r
0	0.33333	0.33333	0.30	0.45921	0.21406
0.01	0.33757	0.32911	0.31	0.46322	0.21048
0.02	0.34181	0.32489	0.32	0.46721	0.20694
0.03	0.34606	0.32068	0.33	0.47118	0.20343
0.04	0.35031	0.31648	0.34	0.47513	0.19996
0.05	0.35456	0.31229	0.35	0.47906	0.19652
0.06	0.35882	0.30812	0.36	0.48297	0.19311
0.07	0.36308	0.30395	0.37	0.48685	0.18975
0.08	0.36734	0.29981	0.38	0.49071	0.18641
0.09	0.37160	0.29568	0.39	0.49454	0.18311
0.10	0.37585	0.29156	0.40	0.49835	0.17985
0.11	0.38011	0.28746	0.41	0.50214	0.17663
0.12	0.38436	0.28338	0.42	0.50590	0.17344
0.13	0.38861	0.27932	0.43	0.50963	0.17029
0.14	0.39285	0.27528	0.44	0.51334	0.16718
0.15	0.39708	0.27126	0.45	0.51702	0.16411
0.16	0.40131	0.26727	0.46	0.52067	0.16107
0.17	0.40552	0.26329	0.47	0.52430	0.15808
0.18	0.40973	0.25934	0.48	0.52790	0.15512
0.19	0.41393	0.25542	0.49	0.53147	0.15220
0.20	0.41812	0.25152	0.50	0.53501	0.14932
0.21	0.42230	0.24764	0.51	0.53852	0.14647
0.22	0.42646	0.24379	0.52	0.54201	0.14367
0.23	0.43061	0.23997	0.53	0.54546	0.14090
0.24	0.43474	0.23618	0.54	0.54889	0.13817
0.25	0.43886	0.23242	0.55	0.55229	0.13548
0.26	0.44297	0.22868	0.56	0.55566	0.13283
0.27	0.44705	0.22498	0.57	0.55900	0.13022
0.28	0.45112	0.22131	0.58	0.56231	0.12765
0.29	0.45517	0.21767	0.59	0.56559	0.12511
0.30	0.45921	0.21406	0.60	0.56884	0.12261

8.

Die unserer Theorie zum Grunde liegende Voraussetzung, dass die drei Wechsel augenblicklich geschehen, findet bei der wirklichen Ausübung des Verfahrens in aller Schärfe niemals Statt, obwohl bei Ablenkungen durch galvanische Ströme die zu jedem Wechsel nöthige Zeit als unmerklich betrachtet werden kann. Bei Ablenkungen durch Magnetstäbe hingegen ist, nach Maassgabe ihrer Grösse und Schwere, diese Zeit schon mehr oder weniger bedeutend, und bei fünfundzwanzigpfündigen werden zu Vollführung eines Wechsels immer mehrere Secunden erforderlich sein, besonders wenn nicht von einem Wechsel zwischen verticaler und horizontaler Lage, sondern zwischen zweien entgegengesetzten Lagen die Rede ist. Für diesen Fall, welcher in der That der bei weiten wichtigste und gewöhnlichste ist, lässt sich aber die Ausführung der Operation leicht so einrichten, dass der Erfolg kaum merklich gestört wird. Man muss nur Sorge tragen, dass der zweite und dritte Wechsel auf gleiche Weise geschehen, wie der erste, also auch eine gleich lange Zeit ausfüllen, und diese Zeit den sonst nöthigen Zwischenzeiten abbrechen. Ist z. B. (wie *Res.* 1837. IV.) [S. 390. d. B.] das logarithmische Decrement 0.33570, die Schwingungsdauer 21″21439, so folgt aus obiger Tafel die erste Zwischenzeit = 10″04, die zweite = 4″27: findet man nun zur Ausführung eines Wechsels drei Secunden nöthig, so *beginnt* man den ersten Wechsel bei 0″; von 3″ bis 10″ bleibt der Stab in der neuen Lage; durch den bei 10″ *anfangenden* neuen Wechsel ist der Stab bei 13″ in die erste Lage zurückgebracht, in welcher er nur 1¼ Secunden liegen bleibt, worauf der dritte Wechsel anfängt, so dass erst mit 17¼ Secunden die ganze Operation vollendet ist. Eine ausgedehntere, hier jedoch des Raumes wegen zu übergehende Untersuchung ergibt nemlich, dass wenn p^0 in p' nicht sprungsweise sondern allmählig übergeht, und eben so beim zweiten Wechsel p' in p^0, und beim dritten wiederum p^0 in p', der Erfolg ganz derselbe bleibt, wie er am Schluss des 5. Artikels angegeben ist, falls nur die drei Übergangszeiten gleich lang sind, die drei Übergänge selbst in ähnlichen Stufenfolgen geschehen, und die berechneten Zwischenzeiten qT, rT auf die Anfangsmomente der Wechsel bezogen, oder was dasselbe ist die beiden ersten Übergangszeiten ihnen eingerechnet werden.