UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

GEGENSTÄNDE DER HÖHERN GEODAESIE.

Bei den, zum Theil von mir selbst, zum Theil unter meiner Leitung, ausgeführten über das ganze Königreich Hannover sich erstreckenden trigonometrischen Vermessungen sind, sowohl in Beziehung auf die Art, wie die Messungen angestellt wurden, als noch mehr in Beziehung auf ihre nachherige mathematische Behandlung und ihre Verarbeitung zu Resultaten, Wege eingeschlagen, die von den sonst gewöhnlichen abweichen. Mein früher gehegter Vorsatz, nach völliger Beendigung der Messungen diese nebst allen von mir angewandten Verfahrungsarten in einem besondern Werke darzulegen, hat, aus Ursachen, deren Auseinandersetzung nicht hieher gehört, bisher nicht zur Ausführung kommen können, und ich wähle daher das Auskunftsmittel, das im theoretischen Theile mir eigenthümliche in einer Reihe von Abhandlungen bekannt zu machen, um so lieber, weil ich auf diese Weise die Freiheit behalte, mit Ausführlichkeit manche Untersuchungen zu entwickeln, welche ein selbständiges Interesse darbieten und mit den übrigen in enger Verwandtschaft stehen, auch wenn von denselben bei meinen Messungen keine unmittelbare Anwendung gemacht ist. Dies gilt namentlich von dem grössten Theile des Inhalts der gegenwärtigen ersten Abhandlung.

1.

Von der Aufgabe:

die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird

habe ich im Jahre 1822 eine allgemeine Auflösung gegeben, welche Herr Conferenzrath SCHUMACHER im 3. Heft der Astronomischen Abhandlungen hat abdrucken lassen. Bei der Anwendung dieser Aufgabe auf die höhere Geodäsie, für welche sie eine vorzüglich ergiebige Hülfsquelle wird, macht sich das Bedürfniss fühlbar, Abbildungen, welche unter der angegebenen Bedingung stehen, durch eine besondere Benennung auszuzeichnen, und ich werde daher dieselben *conforme* Abbildungen oder Übertragungen nennen, indem ich diesem sonst vagen Beiworte eine mathematisch scharf bestimmte Bedeutung beilege.

In der angeführten Schrift ist die allgemeine Auflösung, welche eine willkürliche Function einschliesst, auch auf mehrere *bestimmte* Flächen angewandt; das letzte dort behandelte Beispiel betrifft die conforme Übertragung der Oberfläche des Umdrehungsellipsoids auf die Kugelfläche, und es ist [Art. 13] zugleich eine solche Bestimmung der arbiträren Function angegeben, die zu einer sehr brauchbaren Anwendung auf die höhere Geodäsie benutzt werden kann. Diese Benutzung war a. a. O. nur kurz angedeutet, und eine ausführlichere Entwickelung vorbehalten. Ich werde jedoch anstatt *dieser* speciellen Auflösung eine etwas abgeänderte und für die geodätischen Anwendungen noch viel mehr geeignete Methode zur conformen Übertragung der ellipsoidischen Fläche auf die Kugelfläche in der gegenwärtigen Abhandlung entwickeln, und damit zugleich alles zu einer solchen Benutzung erforderliche verbinden.

2.

Die allgemeine Auflösung der Aufgabe, angewandt auf die ellipsoidische und sphärische Fläche, gibt folgende alle conformen Übertragungen der einen auf die andere umfassende Formel (1):

$$T + i \log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} U = f(t + i \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w . (\tfrac{1 - e \cos w}{1 + e \cos w})^{\frac{1}{2}e})$$

Es bezeichnen hier

e die Excentricität der Ellipse, durch deren Umdrehung um ihre kleine Achse die ellipsoidische Fläche erzeugt wird;

t und $90^0 - w$ die Länge und Breite eines unbestimmten Punkts auf dieser Fläche, mithin w den Winkel einer in diesem Punkte gegen die Fläche gezogenen Normale mit der kleinen Achse;

T und $90^0 - U$ die Länge und Breite des entsprechenden Punkts auf der Kugelfläche;

i die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$;

f die Charakteristik für eine willkürlich zu wählende Function.

Die Logarithmen sind immer die hyperbolischen.

Durch m wird das Vergrösserungsverhältniss bezeichnet werden, so verstanden, dass jedes Linearelement auf der ellipsoidischen Fläche sich zu dem entsprechenden Linearelement auf der Kugelfläche verhält wie 1 zu m: dieses Verhältniss ist an jeder Stelle der einen und der andern Fläche ein bestimmtes, für verschiedene Stellen veränderlich.

Die einfachste Auflösung erhält man, indem man die willkürliche Function schlechthin ihrem Argumente gleich, oder

$$f\upsilon = \upsilon$$

setzt, und diese Übergangsart ist in der That auch die geeignetste, wenn die *ganze* Oberfläche des Ellipsoids auf die Kugelfläche übertragen werden soll. Für die Anwendung auf geodätische Rechnungen, wo immer nur ein vergleichungsweise sehr kleiner Theil der Erdfläche in Betracht kommt, ist es aber, wie schon a. a. O. bemerkt ist, viel vortheilhafter, der Function noch einen constanten und zwar imaginären Theil beizufügen, oder

$$f\upsilon = \upsilon - i \log k$$

zu setzen. Es lassen sich dann der Halbmesser der Kugel und die Constante k so bestimmen, dass die das Vergrösserungsverhältniss ausdrückende Grösse m, von deren geringer Ungleichheit innerhalb der Grenzen der dargestellten Fläche die Bequemlichkeit der Anwendung auf geodätische Rechnungen vornehmlich abhängt, für den mittlern Parallelkreis $= 1$, und bis zu einigen Graden Entfernung nach Norden und Süden kaum merklich von 1 verschieden wird; die Abweichung von dem Werthe 1 ist nemlich von der zweiten Ordnung in Beziehung

auf den Abstand vom mittlern Parallelkreise, und enthält ausserdem noch die Abplattung oder das Quadrat von e als Factor.

Allein dieser Vortheil lässt sich noch sehr vergrössern, wenn man anstatt jener Bestimmung der willkürlichen Function eine etwas abgeänderte, für die Rechnung fast eben so bequeme wählt, indem man nemlich unter Zuziehung einer zweiten Constante α,

$$f\upsilon = \alpha\upsilon - i\log k$$

setzt. Man hat dann in seiner Gewalt, durch zweckmässige Bestimmung der beiden Constanten zu bewirken, dass die Abweichung des Vergrösserungsverhältnisses m von dem Werthe 1, in Beziehung auf den Abstand vom mittlern Parallelkreise eine Grösse der dritten Ordnung wird, ungerechnet den auch hier bleibenden Factor ee.

3.

Die Formel 1 gibt, bei dieser Bestimmung der Function f,

$$T = \alpha t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}U = k \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}w^{\alpha}\left(\frac{1+e\cos w}{1-e\cos w}\right)^{\frac{1}{2}e} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

und für m findet man leicht, aus den in der mehrerwähnten Schrift entwickelten Grundsätzen, den Ausdruck

$$m = \frac{\alpha A \sin U\sqrt{(1-ee\cos w^2)}}{a\sin w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wenn durch a die halbe grosse Achse des Ellipsoids und durch A der Halbmesser der Kugel bezeichnet wird.

Die Differentiation der logarithmisch ausgedrückten Gleichung 3 ergibt

$$\frac{\mathrm{d}U}{\sin U} = \frac{\alpha\,\mathrm{d}w}{\sin w} - \frac{\alpha e e \sin w\,\mathrm{d}w}{1-ee\cos w^2}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}w} = \frac{\alpha(1-ee)\sin U}{(1-ee\cos w^2)\sin w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ebenso ergibt die Differentiation der Gleichung 4

$$\mathrm{d}\log m = \operatorname{cotg}U\,\mathrm{d}U - \operatorname{cotg}w\,\mathrm{d}w + \frac{ee\cos w\cdot\sin w\,\mathrm{d}w}{1-ee\cos w^2}$$

$$= \operatorname{cotg}U\,\mathrm{d}U - \frac{(1-ee)\cos w\,\mathrm{d}w}{(1-ee\cos w^2)\sin w}$$

folglich, wenn man mit Hülfe von 5 entweder $\mathrm{d}U$ oder $\mathrm{d}w$ eliminirt,

$$\frac{\mathrm{d}\log m}{\mathrm{d}w} = \frac{(1-ee)(\alpha\cos U - \cos w)}{(1-ee\cos w^2)\sin w} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

$$\frac{\mathrm{d}\log m}{\mathrm{d}U} = \operatorname{cotg}U - \frac{\cos w}{\alpha\sin U} = \frac{\alpha\cos U - \cos w}{\alpha\sin U} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Durch eine nochmalige Differentiation der Gleichung 7 erhält man

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\log m}{\mathrm{d}U^2} = -\frac{1}{\sin U^2} + \frac{\cos U\cos w}{\alpha\sin U^2} + \frac{\sin w}{\alpha\sin U}\cdot\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}U}$$

$$= -\frac{1}{\sin U^2} + \frac{\cos U\cos w}{\alpha\sin U^2} + \frac{(1-ee\cos w^2)\sin w^2}{\alpha\alpha(1-ee)\sin U^2} \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Soll nun für eine bestimmte Breite (Normalbreite) der Werth von m der Einheit gleich werden, für andere Breiten hingegen nur um Grössen der dritten Ordnung von 1 abweichen, die Breitenunterschiede als Grössen erster Ordnung betrachtet, so muss, wenn die Normalbreite auf dem Ellipsoid mit P, die entsprechende auf der Kugel mit Q bezeichnet wird, für $w = 90^0 - P$, $U = 90^0 - Q$ in Gemässheit der Gleichungen 4, 7, 8 sein:

$$A = \frac{a\cos P}{\alpha\cos Q\sqrt{(1-ee\sin P^2)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\alpha\sin Q = \sin P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

$$0 = 1 - \frac{\sin P\sin Q}{\alpha} - \frac{(1-ee\sin P^2)\cos P^2}{\alpha\alpha(1-ee)}$$

oder, wenn man in letzterer Gleichung für $\sin Q$ seinen Werth aus 10 substituirt,

$$\alpha\alpha = 1 + \frac{ee\cos P^4}{1-ee} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Durch diese Gleichung ist demnach α gegeben, sobald für P ein bestimmter Werth gewählt ist; Q kann sodann durch Gleichung 10, und A durch Gleichung 9 bestimmt werden; endlich ergibt sich k durch die Substitution von $w = 90^0 - P$, $U = 90^0 - Q$ in der allgemeinen Gleichung 3, nemlich

$$k = \frac{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}P)^{\alpha}}{\operatorname{tang}(45^0 + \frac{1}{2}Q)}\cdot\left(\frac{1-e\sin P}{1+e\sin P}\right)^{\frac{1}{2}e} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

4.

Die Berechnung der Constanten A, α, k und der Normalbreite auf der Kugel Q aus P und e wird man, da alle diese Grössen wie Grundlagen für die

Anwendung auf eine gewisse Zone zu betrachten sind, gern mit besonderer Sorgfalt und Schärfe auszuführen wünschen, und es verdienen daher einige dazu dienliche Umformungen hier einen Platz: eine Umformung wird ohnehin *nothwendig*, wenn man von einer bestimmten Normalbreite nicht auf dem Ellipsoid sondern auf der Kugel, also von einem gegebenen Werthe von Q ausgehen, und daraus die übrigen Grössen berechnen will.

Führt man drei Hülfswinkel φ, ζ, η ein, so dass

$$\sin\varphi = e \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$
$$\tang\zeta = \tang\varphi \cos P^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$
$$\tang\eta = \sin\zeta \tang P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

so wird

$$\alpha = \frac{1}{\cos\zeta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$
$$\sin Q = \cos\zeta \sin P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$
$$\cos\eta \cos Q = \cos P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$
$$\sin\eta = \tang\zeta \tang Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$
$$\tang\tfrac{1}{2}(P-Q) = \tang\tfrac{1}{2}\zeta . \tang\tfrac{1}{2}\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$
$$\sin(2\zeta-\varphi) = e\cos 2Q \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Die Gleichung 18 folgt leicht aus der Verbindung von 15 und 17; sodann 19 aus der Verbindung von 15, 17, 18; ferner 20 aus 17, 18, 19, endlich 21 aus 14 und 17.

Am schärfsten wird man rechnen, wenn man, in dem Falle wo P gegeben ist, sich der Formeln 14, 15, 20 bedient, um der Reihe nach ζ, η, Q zu bestimmen; für den Fall hingegen, wo Q gegeben ist, vermittelst der Gleichungen 21, 19, 20 die Werthe von ζ, η, P ableitet: zur Controlle mag man dann noch eine oder einige der übrigen Gleichungen benutzen. Führt man noch einen vierten Hülfswinkel θ ein, nach der Formel

$$\sin\theta = e\sin P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

so wird

$$\cos\varphi = \cos\zeta \cos\eta \cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

und die Formeln 9 und 12 erhalten folgende Gestalt:

$$A = \frac{a\cos P}{a\cos\theta\cos Q} = \frac{a\cos\eta}{a\cos\theta} = \frac{a\cos\varphi}{\cos\theta^2} = \frac{a\cos\varphi}{1-e e\sin P^2}$$
$$k = \frac{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}P)^a}{\tang(45^\circ+\frac{1}{2}Q)\tang(45^\circ+\frac{1}{2}\theta)^m}$$

5.

Ich begleite die Vorschriften dieser ganzen Abhandlung mit einer auf das schärfste durchgeführten numerischen Anwendung, welche andern, die zur Verarbeitung ihrer Messungen die hier vorgetragene Methode benutzen wollen, entweder als Rechnungsmuster zur Construction der erforderlichen Hülfstafeln, oder auch schon unmittelbar als Hülfsapparat für einen grossen Theil der gemässigten Zone dienen kann. In den meisten Fällen wird man übrigens sich mit einer *viel* geringern Schärfe begnügen können.

Als Normalbreite wähle ich $52^\circ 40'$, welche ungefähr dem mittlern Parallelkreise des Königreichs Hannover entspricht; da es jedoch in einigen Beziehungen vortheilhafter ist, wenn für die Normalbreite auf der Kugel, als wenn für die auf dem Ellipsoid eine runde Zahl gewählt wird, so setze ich

$$Q = 52^\circ\ 40'\ 0''$$

Die Rechnung führe ich nach den neuesten von Bessel aus den Gradmessungen abgeleiteten Erddimensionen (Astronomische Nachrichten 19. Band S. 116), wonach, die Toise zur Einheit angenommen,

$$\log a = 6{,}5148235337$$
$$\log\cos\varphi = 9{,}9985458202$$

Es folgt hieraus, mit Hülfe der zehnzifrigen Logarithmen,

$$\varphi = 4^\circ\ 41'\ 9''\ 98262$$
$$\log e = \ \ 8{,}9122052079$$
$$\zeta = 1^\circ\ 43'\ 26''\ 80402$$
$$\eta = 2\ \ 15\ \ 42\ \ 34083$$
$$P = 52\ \ 42\ \ \ 2,\ 53251$$
$$\log\alpha = \ \ 0{,}0001966553$$
$$\theta = 3^\circ\ 43'\ 34''\ 24669$$
$$\log\tfrac{1}{k} = \ \ 0{,}0016708804$$
$$\log A = \ 6{,}5152074703$$

Nimmt man das französische gesetzliche Meter als Einheit an, so wird

$$\log A = 6{,}8050274003$$

Wählt man hingegen den zehnmillionsten Theil des Erdquadranten selbst, nach obigen Dimensionen, zur Einheit, so würde sein

$$\log A = 6{,}8049902365$$

6.

Die Berechnung der Breite auf der Kugel aus der Breite auf dem Ellipsoid kann füglich nach der Formel 3 geführt werden, wenn sie nur für wenige Fälle gefordert wird; für ausgedehntere Anwendungen hingegen wird der Gebrauch einer Reihe vortheilhaft sein, zu deren Entwicklung hier die nöthigen Formeln gegeben werden sollen.

Ich bezeichne eine unbestimmte Breite auf dem Ellipsoid, oder einen unbestimmten Werth von $90^0 - w$, durch $P+p$, und die entsprechende Breite auf der Kugel, oder den Werth von $90^0 - U$ durch $Q+q$. Nach dem TAYLORschen Lehrsatze wird

$$q = \frac{dU}{dw}\cdot p - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ddU}{dw^2}\cdot pp + \tfrac{1}{6}\cdot\frac{d^3U}{dw^3}\cdot p^3 - \tfrac{1}{24}\cdot\frac{d^4U}{dw^4}\cdot p^4 + \text{ u. s. w.}$$

wo für die Differentialquotienten diejenigen bestimmten Werthe zu substituiren sind, welche zu $p = 0$, oder zu $w = 90^0 - P$, $U = 90^0 - Q$ gehören. Die successive Entwicklung der unbestimmten Differentialquotienten ergibt

$$\frac{dU}{dw} = \frac{\alpha(1-ee)\sin U}{(1-ee\cos w^2)\sin w}$$

$$\frac{ddU}{dw^2} = \frac{\alpha(1-ee)\sin U}{(1-ee\cos w^2)^2\sin w^2}\{\alpha(1-ee)\cos U - \cos w + ee(\cos w^3 - 2\cos w\sin w^2)\}$$

$$\frac{d^3U}{dw^3} = \frac{\alpha(1-ee)\sin U}{(1-ee\cos w^2)^3\sin w^3}\{\alpha\alpha(1-ee)^2(\cos U^2 - \sin U^2)$$
$$- 3\alpha(1-ee)\cos U(\cos w - ee(\cos w^3 - 2\cos w\sin w^2))$$
$$+ 2\cos w^2 + \sin w^2 - ee(4\cos w^4 - 2\sin w^4)$$
$$+ e^4(2\cos w^6 - \cos w^4\sin w^2 + 6\cos w^2\sin w^4)\}$$

Die beiden folgenden, welche ich gleichfalls entwickelt habe, setze ich um den Raum zu schonen in ihrer unbestimmten Form nicht hieher.

Die Substitution von $w = 90^0 - P$, $U = 90^0 - Q$ ergibt dann, wenn zugleich

anstatt $\alpha\sin Q$ der Werth $\sin P$ (nach Gleichung 10), und

anstatt $\alpha\cos Q$ der Werth $\frac{\cos P}{\cos\zeta\cos\eta} = \frac{\cos\varphi\cos P}{\cos\varphi}$ (nach Gleichung 18, 16, 23)

substituirt, und zur Abkürzung $\cos P = c$, $\sin P = s$ geschrieben wird,

$$\frac{dU}{dw} = \frac{\cos\varphi}{\cos\vartheta}$$

$$\frac{ddU}{dw^2} = -\frac{3ee\cos\varphi}{\cos\vartheta^3}\cdot cs$$

$$\frac{d^3U}{dw^3} = \frac{ee\cos\varphi}{\cos\vartheta^2}(3cc - 3ss + ee(12ccss + 3s^4))$$

$$\frac{d^4U}{dw^4} = \frac{ee\cos\varphi}{\cos\vartheta^2}\cdot cs(16 - ee(49cc - 13ss) - e^4(56ccss + 29s^4))$$

$$\frac{d^5U}{dw^5} = \frac{ee\cos\varphi}{\cos\vartheta^2}(-16cc + 12ss + ee(49c^4 - 378ccss + 9s^4))$$
$$+ e^4(628c^4ss + 174ccs^4 - 54s^6) + e^6(268c^4s^4 + 220ccs^6 + 33s^8))$$

Bei dieser Entwicklung von q in eine Reihe nach p ist stillschweigend vorausgesetzt, dass beide Grössen in Theilen des dem Halbmesser gleichen Bogens ausgedrückt sind: soll dagegen q Secunden und p Grade bedeuten, so muss dem ersten Gliede der Reihe der Factor 3600, dem zweiten der Factor $\frac{3600\pi}{180} = 20\pi$, dem dritten der Factor $3600\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 = \frac{1}{10}\pi\pi$ u. s. f. beigefügt werden. Unter dieser Voraussetzung gibt die Anwendung der Formeln auf unser Beispiel folgende Zahlenwerthe, welche ich in eine solche Form setze, dass weitgestreckte Decimalbrüche vermieden werden:

$$q = 359556''69447\ \cdot\frac{p}{100}$$
$$+ 3041{,}386524\cdot\left(\frac{p}{100}\right)^2$$
$$- 946{,}260563\cdot\left(\frac{p}{100}\right)^3$$
$$- 4135{,}396057\cdot\left(\frac{p}{100}\right)^4$$
$$+ 227{,}04342\ \cdot\left(\frac{p}{100}\right)^5$$

welche Reihe, da p in der Anwendung nur wenige Einheiten betragen soll, immer sehr schnell convergirt. Um für die Richtigkeit dieser Zahlen eine Bestätigung zu erhalten, habe ich die Rechnung für $p = -6$ und für $p = +6$, d. i. für

$$P+p = 46^0\ 42'\ 2''53251 \text{ und für}$$
$$P+p = 58\ \ 42\ \ 2{,}53251$$

sowohl nach der Reihe, als nach der endlichen Formel 3 ausgeführt. Die Reihe gibt

$$Q+q = 46^0\ 40'\ 37''69794$$
$$Q+q = 58\ \ 39\ \ 44,09285$$

die endliche Formel hingegen

$$Q+q = 46^0\ 40'\ 37''69794$$
$$Q+q = 58\ \ 39\ \ 44,09283$$

also so genau übereinstimmend, wie zehnzifrige Logarithmen nur verstatten.

7.

Auf ähnliche Weise lässt sich der Logarithm von m in eine Reihe entwickeln, deren erste Glieder folgende sind:

$$\log m = -\frac{\sin 2\varphi^2}{6\cos\vartheta^4}\cdot csp^3 - \frac{\sin 2\varphi^2}{24\cos\vartheta^2}(cc+11eess)p^4$$
$$+\frac{\sin 2\varphi^2}{120\cos\vartheta^6}\cdot\frac{s}{c}(2cc-3ss-ee(40c^4-20ccss-6s^4)$$
$$-e^4ss(104c^4+22ccss+3s^4))p^5$$

Auch das folgende Glied habe ich (auf einem andern Wege) entwickelt, jedoch nur nach dem Hauptbestandtheile des Coëfficienten, welcher von der Ordnung ee ist, und dafür gefunden:

$$+\frac{\sin 2\varphi^2}{720\cos\vartheta^{10}}\cdot\frac{1}{cc}(2c^4-18ccss-15s^4)p^6$$

Der durch diese Reihe ausgedrückte Logarithm ist der hyperbolische, und p wird, wie oben, in Theilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden: verlangt man den briggischen Logarithmen, indem man p Grade bedeuten lässt, so muss noch der Modulus als Factor hinzukommen und $\frac{\pi p}{180}$ für p geschrieben werden. In dieser Gestalt wird für unser Beispiel

$$\log m = -0,0049612433\left(\tfrac{p}{100}\right)^3$$
$$-0,0017329876\left(\tfrac{p}{100}\right)^4$$
$$-0,002393772\ \left(\tfrac{p}{100}\right)^5$$
$$-0,0124746\ \ \left(\tfrac{p}{100}\right)^6$$

Die Anwendung dieser Reihe auf die oben betrachteten einzelnen Fälle gibt

für $p = -6$, $\log m = +0,000001050448$
für $p = +6$, $\log m = -0,000001096531$

Die endliche Formel 4, welche man auch so schreiben kann

$$m = \frac{\alpha A\cos(Q+q)\sqrt{(1-ee\sin(P+p)^2)}}{\alpha\cos(P+p)}$$
$$= \frac{\cos\eta\cos(Q+q)\sqrt{(1-ee\sin(P+p)^2)}}{\cos\vartheta\cos(P+p)}$$

gibt, mit zehnzifrigen Logarithmen berechnet, bis auf die zehnte Zifer genau dasselbe.

8.

Für die umgekehrte Aufgabe, wo q gegeben und p gesucht wird, ist die Entwicklung in eine Reihe noch wesentlicher, da die endliche Formel 3 in diesem Falle nur auf indirectem Wege zum Ziele führen könnte. Der TAYLORsche Lehrsatz gibt

$$p = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}U}\cdot q - \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}w}{2\,\mathrm{d}U^2}\cdot qq + \frac{\mathrm{d}^3w}{6\,\mathrm{d}U^3}\cdot q^3 - \text{ u. s. f.}$$

wo für die Differentialquotienten diejenigen bestimmten Werthe zu setzen sind, welche zu $q = 0$ oder $U = 90^0 - Q$, $w = 90^0 - P$ gehören. Für die unbestimmten Werthe der drei ersten Differentialquotienten ergeben sich folgende Ausdrücke

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}U} = \frac{(1-ee\cos w^2)\sin w}{\alpha(1-ee)\sin U}$$
$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}w}{\mathrm{d}U^2} = \frac{(1-ee\cos w^2)\sin w}{\alpha\alpha(1-ee)^2\sin U^3}\left(\alpha(1-ee)\cos U - \cos w + ee\cos w(\cos w^2 - 2\sin w^2)\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}^3w}{\mathrm{d}U^3} = \frac{(1-ee\cos w^2)\sin w}{\alpha^2(1-ee)^2\sin U^3}\{\alpha\alpha(-ee)^2(\cos U^2 + 2\sin U^2)$$
$$-3\alpha(1-ee)\cos U\cos w(1-ee(\cos w^2 - 2\sin w^2))$$
$$+\cos w^2 - \sin w^2 - ee(2\cos w^4 - 12\cos w^2\sin w^2 + 2\sin w^4)$$
$$+e^4(\cos w^6 - 11\cos w^4\sin w^2 + 6\cos w^2\sin w^4)\}$$

Die beiden folgenden gleichfalls vollständig entwickelten Coëfficienten setze ich um den Raum zu schonen, nicht hieher, da sie doch nur Zwischengrössen sind, um zu den Endresultaten zu gelangen. Diese finden sich nach der Sub-

stitution von 90^0-P, 90^0-Q anstatt w, U, und nach Anwendung der im 6. Art. angegebenen Umformung von $\alpha\cos U$ und $\alpha\sin U$, indem zugleich zur Abkürzung c, s anstatt $\cos P$, $\sin P$ geschrieben wird, wie folgt:

$$\begin{aligned}
p = {} & \frac{\cos\vartheta}{\cos\varphi}\cdot q \\
& -\frac{3ee}{2\cos\varphi^2}\cdot csqq \\
& +\frac{ee}{2\cos\varphi^2\cos\vartheta}\{-cc+ss+ee(5ccss-s^4)\}q^3 \\
& +\frac{ee}{24\cos\varphi^4\cos\vartheta^2}cs\{16+ee(41cc-77ss)-e^4(101ccss-61s^4)\}q^4 \\
& +\frac{ee}{120\cos\varphi^5\cos\vartheta^3}\{16cc-12ss+ee(41c^4-522ccss+81s^4) \\
& \quad -e^4(538c^4ss-1536ccs^4+126s^6)+e^6(857c^4s^4-1030ccs^6+57s^8)\}q^5 \\
& +\text{u. s. f.}
\end{aligned}$$

Die numerischen Werthe für unser Beispiel finden sich daraus in ähnlicher Form wie oben, d. i. wenn p in Secunden, q in Graden ausgedrückt wird,

$$\begin{aligned}
p = {} & 360443''852122\left(\tfrac{q}{100}\right) \\
& -3052,649780\left(\tfrac{q}{100}\right)^2 \\
& +1002,642506\left(\tfrac{q}{100}\right)^3 \\
& +4119,589282\left(\tfrac{q}{100}\right)^4 \\
& +\ 431,181623\left(\tfrac{q}{100}\right)^5 \text{ u. s. f.}
\end{aligned}$$

9.

Auf ähnliche Weise ist der hyperbolische Logarithm von m in folgende nach Potenzen von q fortschreitende Reihe entwickelt, wobei der Coëfficient von q^6 nur nach seinem Haupttheile auf anderm Wege abgeleitet ist:

$$\begin{aligned}
\log m = {} & -\frac{2ee}{3\cos\varphi\cos\vartheta}\cdot csq^3 \\
& -\frac{ee}{6\cos\varphi^2\cos\vartheta^2}\cdot cc(1-7eess)q^4 \\
& +\frac{ee}{30\cos\varphi^4\cos\vartheta^3}\cdot\frac{s}{c}\{2cc-3ss+ee(20c^4-10ccss+6s^4) \\
& \quad -e^4(59c^4ss-8ccs^4+3s^6)\}q^5 \\
& +\frac{ee}{180\cos\varphi^4\cos\vartheta^4}\cdot\frac{1}{cc}(2c^4-18ccss-15s^4)q^6
\end{aligned}$$

Die Zahlenwerthe in unserm Beispiele (für den briggischen Logarithmen, und q in Graden ausgedrückt) sind

$$\begin{aligned}
\log m = {} & -0,0049796163\ 94\left(\tfrac{q}{100}\right)^3 \\
& -0,0016150307\ 6\ \left(\tfrac{q}{100}\right)^4 \\
& -0,0023973954\ \ \left(\tfrac{q}{100}\right)^5 \\
& -0,0125671\ \ \ \left(\tfrac{q}{100}\right)^6
\end{aligned}$$

10.

Bei einer weitumfassenden Vermessung, wo die Übertragung vom Sphäroid auf die Kugel oder umgekehrt für sehr viele Punkte vorkommt, wird man, anstatt jedesmal auf die Formeln zurückzukommen, lieber ein für allemal eine ausgedehnte Tafel berechnen. Der Gebrauch einer solchen Tafel wird aber bequemer sein, wenn man ihr die Breite auf der Kugel $Q+q$ zum Argument gibt, als wenn man die Breite auf dem Sphäroid dazu wählen wollte, indem der Übergang von ersterer auf die andere viel häufiger erfordert wird, als der umgekehrte. Für jeden Rechnungserfahrnen wird übrigens die Bemerkung überflüssig sein, dass man behuf Construction einer solchen Tafel nur eine mässige Anzahl von Gliedern direct berechnet, aus denen die übrigen mit eben so grosser Schärfe und sehr geringer Mühe durch ein angemessenes Interpolationsverfahren bestimmt werden. Es werden also dafür die im 8. und 9. Artikel mitgetheilten Reihen zur Anwendung kommen, und gerade deswegen ist es vortheilhaft, dass nicht P, sondern Q eine runde Zahl sei.

Ich füge am Schluss dieser Abhandlung eine solche Tafel bei, welcher der Normalwerth $Q = 52^0\,40'$ (wie dem bisher betrachteten Beispiele) zum Grunde liegt, und die durch zwölf Grade, von $46^0\,40'$ bis $58^0\,40'$, für alle Werthe des Arguments $Q+q$ von Minute zu Minute fortschreitet. Sie gibt den zugehörigen Werth von $P+p$ auf fünf Decimalen der Secunde genau; ferner den briggischen Logarithmen von m auf zehn Stellen, nemlich in Einheiten der zehnten Decimale; endlich auch noch, in Secunden ausgedrückt, den Werth von $-\frac{dm}{2m\,dq}$; der Gebrauch dieser letzten Columne wird weiter unten erklärt werden. Ich habe die Tafel deshalb mit so vielen Decimalen gegeben, damit sie auch für die allerschärfste Berechnung einer trigonometrischen Vermessung, nemlich für eine

Durchführung derselben mit zehnzifrigen Logarithmen, vollkommen zureiche. Jeder, der diese Tafel zur Berechnung von Messungen innerhalb dieser Zone benutzen will, wird, wenn eine geringere Schärfe ihm genügt (und dies ist allerdings der gewöhnlichste Fall) nach Gefallen einige der letzten Decimalen weglassen. In welcher Form man übrigens auch die *Resultate* einer Messung darstellen mag, so sollte dies, consequenter Weise, immer in einer Schärfe geschehen, die der Schärfe der Messungen selbst entsprechend ist, so dass man aus den Zahlen der Resultate immer rückwärts die beobachteten Grössen eben so scharf wieder finden kann, wie sie gemessen waren. Wählt man also dazu ausschliesslich die Längen und Breiten, so würde trigonometrischen Messungen selbst von nur mässiger Schärfe, durchaus nicht ihr Recht widerfahren, wenn man die Resultate nur in solcher Schärfe ansetzen wollte, wie Längen und Breiten sich auf astronomischem Wege bestimmen lassen: man würde dadurch nur einen falschen Maassstab für die Güte der Arbeit erhalten, und sich oft gerade der durchgreifendsten Prüfungen dieser Güte entäussern.

11.

Die Benutzung der hier betrachteten conformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche zur Berechnung trigonometrischer Messungen kann auf mehr als Eine Art geschehen: in der gegenwärtigen Abhandlung wird nur von der unmittelbaren Benutzung die Rede sein; andere abgeleitete Arten, sie zu jenem Zwecke zu benutzen, sollen einer zweiten Abhandlung vorbehalten bleiben.

Die unmittelbare Benutzung ist im Wesentlichen schon in der oben angeführten Schrift kurz angedeutet. Ein auf der Oberfläche des Ellipsoids durch kürzeste oder sogenannte geodaetische Linien gebildetes System von Dreiecken wird auf der Oberfläche der Kugel durch ein Dreieckssystem dargestellt, worin die Winkel den entsprechenden auf dem Sphaeroid genau gleich sind, die Seiten hingegen, wenn sie nicht Meridianbögen sind, zwar nicht in aller Strenge Bögen Grösster Kreise werden, aber doch von solchen so wenig abweichen, dass sie in den meisten Fällen als damit ganz zusammenfallend betrachtet werden dürfen, oder dass wenigstens die Abweichung, da, wo die grösste Genauigkeit gefordert wird, mit aller nöthigen Schärfe leicht berechnet werden kann, immer vorausgesetzt, dass

erstens die Dreiecke sich nicht gar zu weit von dem Normal-Parallelkreise entfernen, und

zweitens, dass sie vergleichungsweise, nemlich nach dem Verhältnisse der Seiten zu einem ganzen Erdquadranten, klein sind, wie bei wirklich messbaren Deiecken immer der Fall ist.

Dieses genaue Anschmiegen der auf die Kugelfläche übertragenen Dreiecksseiten an Grösste Kreisbögen findet nun bei der in Obigem betrachteten conformen Darstellung in noch viel höherm Grade Statt, als bei der a. a. O. vorgeschlagenen. Wo diese [nach Art. 13] bei einem Abstande von $2\frac{1}{4}$ Grad von dem Normal-Parallelkreise eine linearische Vergrösserung von $\frac{1}{330000}$ ergab, würde die neue Methode nur eine Änderung von $\frac{1}{38000000}$ geben.

Man kann daher das ganze System, nachdem man zuvörderst eine Dreiecksseite auf die Kugelfläche gehörig übertragen hat, ganz so, als wenn es auf dieser selbst läge, vermittelst der Winkel berechnen, nöthigenfalls mit der eben angedeuteten Modification, sodann für alle Punkte die Werthe der Breiten und Längen bestimmen, und von diesen vermittelst der oben gegebenen Formeln, oder vielmehr was die Breiten betrifft, vermittelst einer solchen Hülfstafel, wie hier beigefügt ist, auf die Breiten und Längen auf der Ellipsoidfläche übergehen.

12.

Es bleibt demnach hier noch übrig, die Bestimmung der Abweichung einer auf die Kugelfläche übertragenen geodaetischen Linie von dem zwischen denselben Endpunkten enthaltenen Grössten Kreisbogen zu entwickeln, wonach sich zugleich in jedem Falle beurtheilen lässt, ob die Berücksichtigung dieser Abweichung nöthig werde. Man kann diese Aufgabe auf mehr als eine Art behandeln: für den gegenwärtigen Zweck, wo die Reduction immer nur eine sehr kleine Grösse betragen kann, scheint folgende Methode die angemessenste zu sein.

Es sei L die in Rede stehende geodaetische Linie auf dem Ellipsoid in unbestimmter Ausdehnung betrachtet, M ihre conforme Darstellung auf der Kugelfläche, F und G die Endpunkte eines bestimmten Stückes von M, endlich N ein durch diese beiden Punkte geführter Grösster Kreis. Jeder Punkt in N werde bestimmt durch seinen Abstand x von einem zunächst willkürlich auf N gewählten Anfangspunkte; jeder Punkt von M durch seinen senkrechten Abstand y von N und durch das dem Fusspunkte dieses Perpendikels zukommende

x. Diese Coordinaten sind als in Theilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden, und müssen demnach noch multiplicirt werden mit A, wenn man sie nach ihrer Lineargrösse, oder mit $206265''$, wenn man sie in Bogentheilen ausgedrückt verlangt.

Ein Element von M wird durch

$$\sqrt{(\cos y^2 \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)}$$

oder durch $\frac{\cos y}{\cos\psi}.\mathrm{d}x$ ausgedrückt, wenn man

$$\frac{\mathrm{d}y}{\cos y\,\mathrm{d}x} = \operatorname{tang}\psi$$

setzt, wo mithin ψ die Neigung des Elements gegen die Parallele mit N bedeutet. Um die Vorstellung zu fixiren, mag man sich die x von der Rechten nach der Linken, die y von unten nach oben wachsend denken, wodurch also der Sinn positiver ψ von selbst bestimmt ist.

Das wie oben mit m bezeichnete Vergrösserungsverhältniss beim Uebertragen der ellipsoidischen Fläche auf die Kugelfläche kann hier wie eine Function von x und y betrachtet werden: die Grösse des Elements von L, dem jenes Element von M entspricht, wird

$$= \frac{A\cos y}{m\cos\psi}.\mathrm{d}x$$

sein, und wenn zur Abkürzung

$$\log\operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}y) = u$$
$$\frac{\cos y}{m} = n$$

gesetzt wird, wo mithin n gleichfalls Function von x und y, oder was auf Eines hinausläuft, von x und u sein wird, so hat man

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

und das Element von L

$$= \frac{An}{\cos\psi}.\mathrm{d}x$$

Die Natur der Linie M wird also durch die Bedingung bestimmt, dass zwischen irgendwelchen bestimmten Grenzen das Integral $\int\frac{n}{\cos\psi}\mathrm{d}x$ oder

$$\int n\sqrt{(1+\tfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2})}\,\mathrm{d}x$$

ein Minimum werden soll, wofür nach den Regeln der Variationsrechnung sich die Gleichung ergibt

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}.\sqrt{(1+\tfrac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2})}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\frac{\frac{n\,\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{(1+\frac{\mathrm{d}u^2}{\mathrm{d}x^2})}}$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}.\frac{\mathrm{d}x}{\cos\psi} = \mathrm{d}.n\sin\psi$$

Unter $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}$ ist der partielle Differentialquotient verstanden. Diese Formel ist strenge und allgemeingültig. Für unsern Zweck aber, wo bloss das zwischen F und G liegende Stück der Curve M in Betracht kommt, in deren sämmtlichen Punkten u und ψ nur sehr kleine Werthe haben können, dürfen wir 1 anstatt $\cos\psi$ und $\operatorname{tang}\psi$ anstatt $\sin\psi$ schreiben, mithin

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}.\mathrm{d}x = \mathrm{d}.n\operatorname{tang}\psi$$

oder

$$n\operatorname{tang}\psi = \int\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}\mathrm{d}x + \mathrm{Const.}$$

setzen, zugleich aber auch in dieser Formel anstatt der Werthe, welche n und $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}u}$ in der Linie M haben, diejenigen anwenden, welche in den correspondirenden Punkten der Linie N (für $u = 0$ oder $y = 0$) Statt finden, und folglich mit den Werthen von $\frac{1}{m}$ und $-\frac{\mathrm{d}m}{m\,m\,\mathrm{d}u} = -\frac{\mathrm{d}m}{m\,m\,\mathrm{d}y}$ übereinstimmen.

Zur bequemern Ausführung der weitern Entwicklungen sollen jetzt die Abscissen von dem Punkte F an gezählt, oder in diesem Punkte $x = 0$, in G hingegen $x = h$ gesetzt werden; ich setze ferner $\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}y} = l$, welches im Allgemeinen zwar Function von x und y ist, hier aber bloss nach seinem in der Linie N oder für $y = 0$ geltenden Werthe, also als Function von x allein betrachtet wird; endlich seien ψ^0, m^0, l^0 die bestimmten Werthe von ψ, m, l in dem Punkte F, und ψ', m', l' die in dem Punkte G. Die obige Formel wird hienach

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{m\operatorname{tang}\psi^0}{m^0} - m\int\frac{l}{m}\mathrm{d}x$$

wo die Integration von $x = 0$ anfängt. Nehmen wir nun an, dass l und m in folgende nach Potenzen von x fortschreitende Reihen

$$l = l^0 + \lambda x + \lambda' x x + \text{ u. s. w.}$$
$$m = m^0(1 + \mu x + \mu' x x + \text{ u. s. w.})$$

entwickelt sind, so ergibt die Rechnung

$$\text{tang}\,\psi = (1 + \mu x + \mu' x x + \text{ u. s. w.})\,\text{tang}\,\psi^0 - l^0 x - \tfrac{1}{2}(\lambda + l^0\mu)xx - (\tfrac{1}{3}\lambda' + \tfrac{1}{6}\lambda\mu - \tfrac{1}{3}l^0\mu\mu + \tfrac{2}{3}l^0\mu')x^3 - \text{ u. s. w.}$$

und hieraus, weil $u = \int \text{tang}\,\psi \,.\, \mathrm{d}x$

$$u = (x + \tfrac{1}{2}\mu x x + \tfrac{1}{3}\mu' x^3 + \text{ u. s. w.})\,\text{tang}\,\psi^0 - \tfrac{1}{2}l^0 x x - \tfrac{1}{6}(\lambda + l^0\mu)x^3 - (\tfrac{1}{12}\lambda' + \tfrac{1}{24}\lambda\mu - \tfrac{1}{24}l^0\mu\mu + \tfrac{1}{6}l^0\mu')x^4 - \text{ u. s. w.}$$

wo keine Constante hinzuzufügen ist, weil für $x = 0$ auch $u = 0$ wird. Da nun auch für $x = h$, $u = 0$ wird, so folgt aus dieser Gleichung

$$\text{tang}\,\psi^0 = \tfrac{1}{2}l^0 h + (\tfrac{1}{6}\lambda - \tfrac{1}{12}l^0\mu)hh + (\tfrac{1}{12}\lambda' - \tfrac{1}{24}\lambda\mu)h^3 + \text{ u. s. w.}$$

Wird in der Gleichung für ψ auch anstatt x der Werth h, und statt $\text{tang}\,\psi^0$ der eben gefundene substituirt, so ergibt sich

$$\text{tang}\,\psi' = -\tfrac{1}{2}l^0 h - (\tfrac{1}{3}\lambda + \tfrac{1}{12}l^0\mu)hh - (\tfrac{1}{4}\lambda' + \tfrac{1}{24}\lambda\mu - \tfrac{1}{12}l^0\mu\mu + \tfrac{1}{6}l^0\mu')h^3 \text{ u. s. w.}$$

Da

$$l' = l^0 + \lambda h + \lambda' hh + \text{ u. s. w.}$$
$$m' = m^0(1 + \mu h + \mu' hh + \text{ u. s. w.})$$

so wird

$$(\tfrac{1}{3}l^0 + \tfrac{1}{6}l')h\sqrt[3]{\frac{m^0}{m'}} = \tfrac{1}{2}l^0 h + (\tfrac{1}{6}\lambda - \tfrac{1}{12}l^0\mu)hh + (\tfrac{1}{8}\lambda' - \tfrac{1}{16}\lambda\mu + \tfrac{1}{144}l^0\mu\mu - \tfrac{1}{72}l^0\mu')h^3 \text{ u. s. w.}$$
$$-(\tfrac{1}{6}l^0 + \tfrac{1}{3}l')h\sqrt[3]{\frac{m'}{m^0}} = -\tfrac{1}{2}l^0 h - (\tfrac{1}{3}\lambda + \tfrac{1}{12}l^0\mu)hh - (\tfrac{1}{4}\lambda' + \tfrac{1}{18}\lambda\mu - \tfrac{5}{144}l^0\mu\mu + \tfrac{1}{12}l^0\mu')h^3 \text{ u. s. w.}$$

also in den beiden ersten Gliedern oder bis auf die Ordnung hh mit obigen Werthen von $\text{tang}\,\psi^0$, $\text{tang}\,\psi'$ übereinstimmend: diese bequemen Ausdrücke können daher als hinreichend scharfe Werthe dieser Tangenten, oder unter Hinzufügung des Factors $206265''$ als die Werthe der Winkel ψ^0, ψ' selbst angenommen werden.

Die Länge der Linie L selbst, zwischen den Punkten auf dem Ellipsoid, denen auf der Kugel die Punkte F, G entsprechen, ist das Integral

$$A\int \frac{\cos y}{m\cos\psi}\,\mathrm{d}x$$

von $x = 0$ bis $x = h$ ausgedehnt; es wird aber immer erlaubt sein, darin sowohl $\cos y$ als $\cos\psi = 1$ zu setzen, und für m denjenigen Werth, welcher in der Linie M oder für $y = 0$ gilt, wodurch also das Integral

$$= A\int \frac{\mathrm{d}x}{m^0(1 + \mu x + \mu' x x + \text{ u. s. w.})}$$
$$= \frac{A}{m^0}(h - \tfrac{1}{2}\mu hh + (\tfrac{1}{3}\mu\mu - \tfrac{1}{3}\mu')h^3 - \text{ u. s. w.})$$

wird. Es ist immer zureichend, den bis auf die Ordnung hh damit übereinstimmenden Werth

$$\frac{Ah}{\sqrt{m^0 m'}}$$

dafür anzunehmen.

13.

Die Bestimmung der Grössen l^0, l' geschieht auf folgende Weise. Es sei χ der Winkel, welchen an irgend einer Stelle des Grössten Kreisbogens N dieser in dem Sinne wachsender x mit dem Meridian in dem Sinne von Norden nach Süden genommen macht, den Winkel von diesem zu jenem in dem Sinne von der Linken nach der Rechten gezählt; es sei ferner S die Breite an jener Stelle, T die Länge von einem beliebigen Meridian an ostwärts gerechnet. Man hat dann daselbst

$$\mathrm{d}S = -\cos\chi\,.\,\mathrm{d}x + \sin\chi\,.\,\mathrm{d}y$$
$$\mathrm{d}T = -\frac{\sin\chi}{\cos S}\mathrm{d}x - \frac{\cos\chi}{\cos S}\mathrm{d}y$$

und folglich den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}y} = \sin\chi\,.\,\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}S} - \frac{\cos\chi}{\cos S}\,.\,\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}T}$$

Da nun bei unserer conformen Übertragung m von der Länge unabhängig oder $\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}T} = 0$ ist, so wird

$$l = \sin\chi\,.\,\frac{\mathrm{d}m}{m\,\mathrm{d}S}$$

Bezeichnet man die Werthe von χ in den Punkten F und G mit V^0 und $180^0 + V'$ (so dass nach gewöhnlichem Sprachgebrauche V^0 das Azimuth des Grössten Kreisbogens FG in F, und V' das Azimuth des Grössten Kreisbogens

GF in G bedeutet); imgleichen die (immer negativen) Werthe von $\frac{206265''\,dm}{2m\,dS}$ in denselben Punkten mit $-k^0$, $-k'$, so wird

$$206265''l^0 = -2k^0 \sin V^0$$
$$206265''l' = +2k' \sin V'$$

Die im vorhergehenden Artikel gegebenen Ausdrücke für ψ^0, ψ', in Secunden verwandelt, werden daher, wenn man die von der Einheit hier nur unmerklich abweichenden Factoren $\sqrt[6]{\frac{m^0}{m'}}$, $\sqrt[6]{\frac{m'}{m^0}}$ weglässt,

$$\psi^0 = -\tfrac{1}{2}h(2k^0 \sin V^0 - k' \sin V')$$
$$\psi' = -\tfrac{1}{2}h(2k' \sin V' - k^0 \sin V^0)$$

Die dieser Abhandlung beigefügte Tafel gibt in der letzten Columne unter der Überschrift k die Werthe von k^0, k' für die entsprechenden Werthe von S, die in der ersten Columne unter der Überschrift $Q+q$ aufzusuchen sind; da k immer positiv ist, und $\sin V^0$, $\sin V'$ immer entgegengesetzte Zeichen haben, so wird ψ^0 negativ, ψ' positiv, wenn G westlich von F liegt und umgekehrt: bei der Berechnung erinnere man sich, dass in diesen Formeln h als in Theilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden wird, also der in irgend einem Längenmaasse gegebene Abstand der Punkte F, G zuvor mit dem in gleichem Maasse ausgedrückten Werthe von A zu dividiren ist.

Da in unserer conformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche ein Meridian auf jener wiederum durch einen Meridian auf dieser dargestellt wird, so ist klar, dass jedes Element von L dieselbe Neigung gegen den Meridian hat wie das entsprechende Element von M, und dass folglich die Azimuthe der geodaetischen Linie in ihren beiden Endpunkten resp. $V^0+\psi^0$ und $V'+\psi'$ sein werden: sind aber umgekehrt diese gegeben, so werden sie auf die Kugelfläche reducirt durch Anbringung von $-\psi^0$, $-\psi'$, und für die Berechnung dieser stets fast ganz verschwindenden Reductionen ist es offenbar ganz gleichgültig, wenn man in den obigen Formeln anstatt V^0, V' die Azimuthe auf dem Ellipsoid anwendet.

14.

Um nach den gegebenen Vorschriften die Reductionen der Richtungen, behuf der Übertragung vom Ellipsoid auf die Kugel oder umgekehrt, berechnen zu

können, ist zwar eine genäherte Kenntniss der Grösse der Linien, der orientirten Azimuthe, und der Breiten der Endpunkte erforderlich, was nur durch eine vorläufige Berechnung der Dreiecke zu erhalten ist: allein dieser Umstand ist durchaus unerheblich, da eine vorläufige schon die Ausführung der Messungen Schritt für Schritt begleitende Berechnung ohnehin in vielen Beziehungen räthlich, und zur Centrirung der excentrisch gemessenen Winkel, so wie zur Bestimmung des sphärischen oder sphäroidischen Excesses der Winkelsumme jedes Dreiecks sogar nothwendig ist: ja für den ersten Zweck wird, bei der Geringfügigkeit jener Reductionen, schon eine ganz rohe Annäherung immer zureichen, während das scharfe Centriren zuweilen, bei etwas beträchtlicher Excentricität der Standpunkte eine viel weiter getriebene Annäherung erfordern kann. Ich habe die Vorschriften deshalb entwickelt, damit man, *wenn* man jene Reductionen berücksichtigen will, alles zu ihrer schärfsten Berechnung nöthige bereit finde, oder wenn man sie *nicht* berücksichtigen will, leicht und bestimmt übersehen könne, wie wenig man dadurch aufopfert. Bei dem ganzen Hannoverschen Dreieckssystem sind die Reductionen durchgehends so äusserst gering, dass ihre Berücksichtigung als gänzlich überflüssig erscheint, und in der ganzen Ausdehnung der Zone von zwölf Breitengraden, für welche ich den Hülfsapparat beifüge, bleiben sie noch unterhalb derjenigen Bogensecundentheile, auf welche man sich bei den meisten Messungen in der Rechnung zu beschränken pflegt. Um dies recht evident hervortreten zu lassen, füge ich hier noch die numerische Rechnung für ein Paar Beispiele bei.

In dem Hannoverschen Dreieckssystem kommen die grössten Reductionen vor bei den Richtungen der Seiten des Dreiecks Brocken-Hohehagen-Inselsberg, welches Dreieck zugleich das grösste und das von dem Normal-Parallelkreise am entferntesten liegende ist; bei allen übrigen Dreiecksseiten überschreiten die Reductionen nirgends zwei Tausendtheile der Secunde, und die meisten erreichen nicht einmal den Werth $0''001$.

Es ist für diese Punkte

	Breite auf dem Ellipsoid			Breite auf der Kugel			k
Brocken	51^0	$48'$	$2''$	51^0	$46'$	$3''$	$0''164$
Hohehagen	51	28	31	51	26	35	0,303
Inselsberg	50	51	9	50	49	16	0,687

Die Logarithmen der Seiten des Dreiecks in Toisen sind

Hohehagen - Inselsberg	4,6393865
Inselsberg - Brocken	4,7353929
Brocken - Hohehagen	4,5502669

Die Azimuthe sind

	Standpunkt Brocken		
Inselsberg	5°	42′	22″
Hohehagen	58	49	8
	Standpunkt Hohehagen		
Brocken	238	9	2
Inselsberg	324	23	1
	Standpunkt Inselsberg		
Hohehagen	144	55	51
Brocken	185	35	21

Man braucht hiebei zwischen Werthen auf dem Sphaeroid und denen auf der Kugel nicht zu unterscheiden, da für die Logarithmen der Abstände erst in der achten oder neunten Decimale, für die Azimuthe erst in den Tausendtheilen der Secunde Ungleichheit eintritt, und für unsern Zweck Logarithmen mit vier Decimalen und Azimuthe in Minuten schon überflüssig genau sind. Die Rechnung nach obigen Formeln gibt hiermit folgende Reductionen, wie sie mit ihren Zeichen zu den Azimuthen auf dem Sphaeroid addirt werden müssen, um die Azimuthe auf der Kugel zu erhalten:

Brocken - Inselsberg	+ 0″00055
Brocken - Hohehagen	+ 0, 00196
Hohehagen - Brocken	— 0, 00238
Hohehagen - Inselsberg	— 0, 00332
Inselsberg - Hohehagen	+ 0, 00428
Inselsberg - Brocken	— 0, 00083

Die Winkel des Dreiecks auf dem Sphaeroid (zwischen den geodätischen Linien) empfangen also zur Reduction auf die Winkel des Kugeldreiecks (zwischen Grössten Kreisbögen) die Änderungen

Brocken	+ 0″00141
Hohehagen	— 0, 00094
Inselsberg	— 0, 00511

Ein zweites Beispiel entlehne ich aus der trigonometrischen Vermessung der Schweiz *), wo das grösste Hauptdreieck zwischen den Punkten Chasseral, Suchet, Berra eben an die Grenze der Ausdehnung unserer Hülfstafel fällt. Wir haben für diese Punkte

	Breite auf dem Ellipsoid			Breite auf der Kugel			k
Chasseral	47°	8′	1″	47°	6′	33″	6″137
Suchet	46	46	23	46	44	57	6, 948
Berra	46	40	36	46	39	11	7, 173

Die Logarithmen der Dreiecksseiten in Metern sind

Suchet - Berra	4,7474503
Berra - Chasseral	4,7133766
Chasseral - Suchet	4,7808768

Die Azimuthe

	Standpunkt Chasseral		
Suchet	48°	36′	41″
Berra	349	21	54
	Standpunkt Suchet		
Chasseral	228	10	40
Berra	280	47	19
	Standpunkt Berra		
Suchet	101	18	40
Chasseral	169	27	22

Hieraus ergeben sich die Reductionen der Sphaeroid-Azimuthe auf die Kugel-Azimuthe

*) Ergebnisse der trigonometrischen Vermessungen in der Schweiz, herausgegeben von J. Eschmann. Zürich 1840. S. 79. 99. 189. 190. 196.

Chasseral-Suchet	$+0''04536$
Chasseral-Berra	$-0,00966$
Suchet-Chasseral	$+0,06221$
Suchet-Berra	$+0,01014$
Berra-Suchet	$-0,04717$
Berra-Chasseral	$-0,06039$

also auch hier ohne Einfluss auf die Rechnung, die in dem angeführten Werke auf Zehntel der Secunde geführt ist.

15.

Die in den Artt. 12 und 13 behandelte Aufgabe ist zwar durch die gegebenen Vorschriften mit einer für die Anwendung überflüssig ausreichenden Genauigkeit aufgelöset; indessen ist es doch der Mühe werth, und zur gleichmässigen Vollendung einer in der Folge mitzutheilenden Untersuchung sogar nothwendig, für einen speciellen Fall die Genauigkeit noch um eine Ordnung weiter zu treiben: dieser specielle Fall steht unter der Bedingung, dass die Linie N in einem zwischen F und G liegenden Punkte H den Normalparallelkreis treffe. Es ist in diesem Falle vortheilhafter, den Anfangspunkt der x, nicht wie oben in F, sondern in H zu setzen, wodurch bewirkt wird, dass bei der Entwicklung von l und m in nach Potenzen von x fortschreitende Reihen in der erstern das erste und zweite Glied, in der andern das zweite und dritte ausfallen, oder dass sie folgende Form haben:

$$l = \lambda x x + \lambda' x^3 + \text{ u. s. w.}$$
$$m = 1 + \mu x^3 + \mu' x^4 + \text{ u. s. w.}$$

Für unsern Zweck wird von den Coëfficienten in diesen Reihen nur der eine λ erforderlich sein, wofür sich aus der im 9. Art. für $\log m$ gegebenen Formel verbunden mit den Entwicklungen des 13. Art. leicht folgender Ausdruck ableiten lässt:

$$\lambda = -\frac{2 e e \cos P^2 \sin P \sin\gamma \cos\gamma^2}{\cos\varphi \cos\vartheta}$$

in welcher e, P, φ, ϑ ihre oben erklärten Bedeutungen behalten, und für χ das in dem Punkte H Statt findende Azimuth des Bogens N zu setzen ist.

Werden obige Reihen bei der Integration der Gleichungen

$$\mathrm{d}.\frac{\tang\psi}{m} = -\frac{l\,\mathrm{d}x}{m}$$
$$\mathrm{d}u = \tang\psi . \mathrm{d}x$$

angewandt, so ergibt sich

$$\tang\psi = \mathfrak{A}(1 + \mu x^3 + \mu' x^4 + \text{ u. s. w.}) - \tfrac{1}{2}\lambda x^3 - \tfrac{1}{4}\lambda' x^4 - \text{ u. s. w.}$$
$$u = \mathfrak{B} + \mathfrak{A}(x + \tfrac{1}{4}\mu x^4 + \tfrac{1}{5}\mu' x^5 + \text{ u. s. w.}) - {}_{4}^{1}{}_{2}\,\lambda x^4 - {}_{2}^{1}{}_{0}\,\lambda' x^5 - \text{ u. s. w.}$$

Die durch die Integration eingeführten Constanten, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, lassen sich durch die Bedingung bestimmen, dass $u = 0$ werden muss für die beiden Werthe von x, welche den Punkten F, G entsprechen. Es seien diese Werthe $x = -\frac{1}{2}(h-\delta)$ und $x = +\frac{1}{2}(h+\delta)$, wo δ den Werth von $2x$ in dem mitten zwischen F und G liegenden Punkte ausdrückt, und allgemein zu reden eine Grösse von derselben Ordnung wie h ist, oder von einer höhern, wenn H dieser Mitte sehr nahe liegt. Man leitet hieraus leicht folgenden auf die Ordnung h^3 (einschl.) genauen Ausdruck für $\mathfrak{A}$ ab

$$\mathfrak{A} = \frac{\lambda((h+\delta)^4 - (h-\delta)^4)}{192\,h} = {}_{2}^{1}{}_{4}\,\lambda\delta(hh + \delta\delta)$$

Substituirt man diesen in der Reihe für $\tang\psi$, und legt dann der Veränderlichen x die bestimmten Werthe $-\frac{1}{2}(h-\delta)$, $+\frac{1}{2}(h+\delta)$ bei, so ergibt sich, gleichfalls auf die dritte Ordnung genau,

$$\tang\psi^0 = {}_{2}^{1}{}_{6}\,\lambda h(hh - 2h\delta + 3\delta\delta)$$
$$\tang\psi' = -{}_{2}^{1}{}_{6}\,\lambda h(hh - 2h\delta + 3\delta\delta)$$

In dem speciellen Fall der in der Folge zu entwickelnden Untersuchung kommt übrigens zu der oben bezeichneten Bedingung noch der Umstand hinzu, dass der Normalparallelkreis mitten inne liegt zwischen den beiden Parallelkreisen, auf welchen sich die Punkte F, G befinden, und in Folge dieses Umstandes werden schon die abgekürzten Ausdrücke

$$\tang\psi^0 = {}_{2}^{1}{}_{4}\,\lambda h^3$$
$$\tang\psi' = -{}_{2}^{1}{}_{4}\,\lambda h^3$$

auf die dritte Ordnung genau sein, wie sich leicht auf folgende Art zeigen lässt. Bezeichnet man die Breite von F mit $Q+q$, die von G mit $Q-q$, so geben die sphaerischen Dreiecke F, H, Pol und G, H, Pol die Gleichungen

$$\sin(Q+q) = \sin Q\cos\tfrac{1}{2}(h-\delta)+\cos Q\sin\tfrac{1}{2}(h-\delta)\cos\chi$$
$$\sin(Q-q) = \sin Q\cos\tfrac{1}{2}(h+\delta)-\cos Q\sin\tfrac{1}{2}(h+\delta)\cos\chi$$

und ihre Summe mit $2\cos Q$ dividirt

$$\operatorname{tang} Q.(\cos q-\cos\tfrac{1}{2}h.\cos\tfrac{1}{2}\delta) = -\cos\tfrac{1}{2}h\sin\tfrac{1}{2}\delta\cos\chi$$

Da nun offenbar $\cos q-\cos\frac{1}{2}h.\cos\frac{1}{2}\delta$ eine Grösse zweiter Ordnung ist, so wird auch $\sin\frac{1}{2}\delta\cos\chi$, und $\delta\cos\chi$ von dieser Ordnung sein, mithin, da λ den Factor $\cos\chi^2$ implicirt, $\lambda hh\delta$ von der vierten, und $\lambda h\delta\delta$ von der fünften Ordnung; hiedurch ist also die Weglassung dieser Glieder gerechtfertigt.

Das Endresultat dieser Entwickelung ist demnach, unter der angegebenen Voraussetzung, in folgenden Formeln enthalten, wo anstatt der Tangenten von ψ^0, ψ' die Bögen selbst geschrieben sind:

$$\psi^0 = -\frac{ee\cos P\sin P\sin\chi\cos\chi^2 h^3}{12\cos\varphi\cos\vartheta}$$
$$\psi' = +\frac{ee\cos P\sin P\sin\chi\cos\chi^2 h^3}{12\cos\varphi\cos\vartheta}$$

16.

Die Berechnung des Dreiecksystems auf der Kugel zerfällt in drei Hauptstücke:

1) die Ausgleichung der Winkel nach allen den Bedingungsgleichungen, welche die Beschaffenheit des Systems darbietet.
2) die Berechnung der sämmtlichen Dreiecksseiten.
3) die Bestimmung der Längen und Breiten der Dreieckspunkte, in Verbindung mit der Orientirung der von jedem derselben ausgehenden Dreiecksseiten.

Die Verwandlung der Längen und Breiten auf der Kugel in die wahren Längen und Breiten auf dem Sphaeroid geschieht dann für die Längen durch die Division mit dem constanten Divisor α, für die Breiten vermittelst der hier beigefügten Hülfstafel, oder einer andern auf ähnliche Weise besonders construirten, wenn man einen andern Normal-Parallelkreis zu wählen Ursache hat.

Mit Übergehung der beiden ersten auf bekannten Gründen beruhenden Geschäfte füge ich hier noch einiges in Beziehung auf das dritte bei, welches sich auf die Auflösung der Aufgabe reducirt*): aus der in Bogentheilen ausgedrückten

*) Da diese Aufgabe hier wie eine für sich bestehende betrachtet wird, so können ohne Nachtheil einige Buchstaben hier in anderer Bedeutung als oben gebraucht werden.

Grösse einer Dreiecksseite r, ihrem Azimuthe T an dem Anfangspunkte, und der Breite dieses Anfangspunkts S, abzuleiten das Azimuth der Seite an dem andern Endpunkte $T'\pm 180$, die Breite desselben S' und den Längenunterschied beider Punkte λ. Da dies nichts weiter ist als die Auflösung eines sphärischen Dreiecks, so verdient diese Aufgabe nur deshalb hier einen Platz, weil die gewöhnlich gebrauchten Formeln hier einiger Umformung bedürfen, wenn man in den Resultaten (nach der Bemerkung im 10. Art.) dieselbe Genauigkeit erreichen will, in welcher r gegeben ist, ohne mehrzifrige Logarithmen zu Hülfe zu nehmen. Um unter den verschiedenen Auflösungsarten nach jedesmaligem Bedürfniss wählen zu können, setze ich zuvörderst diejenigen hieher, die auf den bekannten elementaren Formeln der sphärischen Trigonometrie beruhen.

Erste Methode

$$\operatorname{tang} s = \cos T\operatorname{tang} r$$
$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\operatorname{tang} T\sin s}{\cos(S-s)}$$
$$\operatorname{tang} S' = \cos\lambda\operatorname{tang}(S-s)$$
$$\sin T' = \frac{\sin T\cos S}{\cos S'}$$

Zweite Methode

$$\operatorname{tang} R = \frac{\operatorname{tang} S}{\cos T}$$
$$\operatorname{tang} T' = \frac{\operatorname{tang} T\cos R}{\cos(R-r)}$$
$$\operatorname{tang} S' = \cos T'\operatorname{tang}(R-r)$$
$$\sin\lambda = \frac{\sin r\sin T}{\cos S'} = \frac{\sin r\sin T'}{\cos S}$$

Dritte Methode

$$\sin(45^0+\tfrac{1}{2}S')\sin\tfrac{1}{2}(T'+\lambda) = \sin(45^0+\tfrac{1}{2}(S+r))\sin\tfrac{1}{2}T$$
$$\sin(45^0+\tfrac{1}{2}S')\cos\tfrac{1}{2}(T'+\lambda) = \sin(45^0+\tfrac{1}{2}(S-r))\cos\tfrac{1}{2}T$$
$$\cos(45^0+\tfrac{1}{2}S')\sin\tfrac{1}{2}(T'-\lambda) = \cos(45^0+\tfrac{1}{2}(S+r))\sin\tfrac{1}{2}T$$
$$\cos(45''+\tfrac{1}{2}S')\cos\tfrac{1}{2}(T'-\lambda) = \cos(45^0+\tfrac{1}{2}(S-r))\cos\tfrac{1}{2}T$$

In Beziehung auf die Kürze der Rechnung hat die dritte Methode einigen Vorzug vor den beiden andern, während diese im Allgemeinen die Resultate ein wenig schärfer geben können, namentlich λ immer mit völlig genügender Schärfe; T' wird aber, wenn es einem rechten Winkel nahe kommt, durch die erste Methode vergleichungsweise nur ungenau bestimmt. Verlangt man aber alle drei Resultate mit gleichmässiger und, aus dem Gesichtspunkte des 10. Art. betrach-

tet, zureichender Schärfe, so ist zu einer directen strengen Auflösung folgende Umformung am vortheilhaftesten, wobei die beiden ersten Formeln dieselben bleiben wie in der ersten Methode.

Vierte Methode

$$\begin{aligned}
\operatorname{tang} s &= \cos T \operatorname{tang} r \\
\operatorname{tang} \lambda &= \tfrac{\operatorname{tang} T \sin s}{\cos(S-s)} \\
\operatorname{tang} t &= \sin T \sin r \operatorname{tang}(S-s) \\
\sin \tau &= \sin T \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} r \sin s \\
\sin \sigma &= \operatorname{tang} t \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} \lambda \cos(S-s) \\
S' &= S - s - \sigma \\
T' &= T - t - \tau
\end{aligned}$$

Diese vierte Methode lässt für die Schärfe nichts zu wünschen übrig; aber die unmittelbar in dieser Form geführte Rechnung erfordert ein etwas beschwerliches Interpoliren bei Bestimmung der kleinen Bögen durch die Logarithmen der Tangenten oder Sinus; man kann jedoch diesem Übelstande leicht ausweichen, indem man die trigonometrischen Functionen in Reihen entwickelt, wodurch man in den Stand gesetzt wird, ohne Nachtheil für die Schärfe, die Rechnungen vermittelst der Logarithmen der Zahlen zu führen. Es wird zureichend sein, von dieser Verwandlung nur die Hauptmomente hieher zu setzen.

Es sei

$$\begin{aligned}
r \cos T &= s^0 \\
r \sin T &= v
\end{aligned}$$

Es wird dann, wenn zur Abkürzung die Grösse des Bogens von einer Secunde in Theilen des Halbmessers oder der Bruch $\frac{\pi}{648000}$ durch ρ bezeichnet und r wie eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird, bis auf Grössen fünfter Ordnung (ausschliesslich) genau

$$s = s^0(1 + \tfrac{1}{2}\rho\rho rr - \tfrac{1}{2}\rho\rho s^0 s^0) = s^0(1 + \tfrac{1}{2}\rho\rho vv)$$

Setzt man dann ferner

$$\begin{aligned}
v \operatorname{tang}(S-s) &= t^0 \\
\tfrac{v}{\cos(S-s)} &= \lambda^0
\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}
t &= t^0(1 - \tfrac{1}{6}\rho\rho rr - \tfrac{1}{3}\rho\rho t^0 t^0) \\
\lambda &= \lambda^0(1 - \tfrac{1}{6}\rho\rho s^0 s^0 - \tfrac{1}{3}\rho\rho t^0 t^0) \\
\sigma &= \tfrac{1}{2}\rho v t^0(1 - \tfrac{1}{12}\rho\rho rr - \tfrac{1}{4}\rho\rho s^0 s^0 - \tfrac{1}{4}\rho\rho t^0 t^0) \\
\tau &= \tfrac{1}{2}\rho v s^0(1 + \tfrac{5}{12}\rho\rho rr - \tfrac{1}{4}\rho\rho s^0 s^0)
\end{aligned}$$

für t und λ auf die fünfte, für σ und τ auf die sechste Ordnung (ausschl.) genau. Noch bequemer und eben so genau ist es, hiebei sogleich die Logarithmen zu gebrauchen, wodurch die Formeln, wenn man zur Abkürzung das Product der Grösse $\frac{1}{12}\rho\rho$ in den Modulus der briggischen Logarithmen mit μ bezeichnet, folgende Gestalt erhalten:

$$\begin{aligned}
\log s &= \log s^0 + 4\mu rr - 4\mu s^0 s^0 \\
\log t &= \log t^0 - 2\mu rr - 4\mu t^0 t^0 \\
\log \lambda &= \log \lambda^0 - 2\mu s^0 s^0 - 4\mu t^0 t^0 \\
\log \sigma &= \log \tfrac{1}{2}\rho v t^0 - \mu rr - 3\mu s^0 s^0 - 3\mu t^0 t^0 \\
\log \tau &= \log \tfrac{1}{2}\rho v s^0 + 5\mu rr - 6\mu s^0 s^0
\end{aligned}$$

Diese fünf Formeln in Verbindung mit den vorhergehenden für s^0, t^0, λ^0 bilden eine fünfte Auflösungsart, deren eigenthümliches es ist, dass genäherte Werthe der Grössen s, t, λ, σ, τ durch kleine sehr leicht zu berechnende an den Logarithmen anzubringende Correctionen zu scharfen erhoben werden. Die hiebei vorkommenden Logarithmen sind

$$\begin{aligned}
\log \rho &= 4{,}6855748668 \quad (-10) \\
\log \tfrac{1}{2}\rho &= 4{,}3845448712 \quad (-10) \\
\log \mu &= 7{,}9297527989 \quad (-20)
\end{aligned}$$

oder wenn jene Correctionen sofort als Einheiten der siebenten Decimale erscheinen sollen

$$\log \mu = 4{,}9297527989 \quad (-10)$$

von welchen Logarithmen jedoch hier nur die ersten Ziffern zur Anwendung kommen.

17.

Viel einfacher lassen sich aber die Relationen zwischen den Grössen r, S, S', T, T', λ ausdrücken, wenn man von dem Mittel der beiden Breiten

und der beiden Azimuthe ausgeht. Schreiben wir

$$\tfrac{1}{2}(S+S') = B, \quad \tfrac{1}{2}(T+T') = A, \quad S-S' = b, \quad T-T' = a$$

so haben wir zuvörderst die Formeln

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}r\sin A &= \sin\tfrac{1}{2}\lambda\cos B\\
\sin\tfrac{1}{2}r\cos A &= \cos\tfrac{1}{2}\lambda\sin\tfrac{1}{2}b\\
\cos\tfrac{1}{2}r\sin\tfrac{1}{2}a &= \sin\tfrac{1}{2}\lambda\sin B\\
\cos\tfrac{1}{2}r\cos\tfrac{1}{2}a &= \cos\tfrac{1}{2}\lambda\cos\tfrac{1}{2}b
\end{aligned}$$

wonach man also, wenn A, B, r als gegeben betrachtet werden, a und λ durch die Formeln

$$\begin{aligned}
\sin A\,\mathrm{tang}\,B\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}r &= \sin\tfrac{1}{2}a\\
\frac{\sin A\sin\frac{1}{2}r}{\cos B} &= \sin\tfrac{1}{2}\lambda
\end{aligned}$$

und sodann b aus

$$\frac{\cos A\,\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}r}{\cos\frac{1}{2}a} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}b$$

oder

$$\frac{\cos A\sin\frac{1}{2}r}{\cos\frac{1}{2}\lambda} = \sin\tfrac{1}{2}b$$

bestimmt. Anstatt dieser Formeln wird man aber, wegen der Kleinheit von r, a, λ, b, lieber die folgenden anwenden, welche viel bequemer, und bis auf die fünfte Ordnung (ausschl.) genau sind:

$$\begin{aligned}
a^0 &= r\sin A\,\mathrm{tang}\,B\\
\lambda^0 &= \tfrac{r\sin A}{\cos B}\\
b^0 &= r\cos A\\
\log a &= \log a^0 + \mu rr + \tfrac{1}{2}\mu a^0a^0\\
\log\lambda &= \log\lambda^0 - \tfrac{1}{2}\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\lambda^0\lambda^0\\
\log b &= \log b^0 + \tfrac{1}{2}\mu a^0a^0 + \mu\lambda^0\lambda^0
\end{aligned}$$

wo, wie man sieht, die dritte Correction der Summe der ersten und der doppelten zweiten gleich ist.

Für unsere Aufgabe geben zwar diese Formeln keine directe Auflösung: indessen kann man sie als Controlle oder als concentrirte übersichtliche Inhaltswiederholung der directen Auflösung gebrauchen. Wer aber in numerischen Rechnungen einige Gewandtheit besitzt, wird sie auch leicht zu einer indirecten Auflösung benutzen können, und dieser, zumal wo anderer Zwecke wegen eine grob genäherte schon vorangegangen ist, wegen ihrer Bequemlichkeit und Schärfe vor allen andern Auflösungen den Vorzug geben.

TAFELN.

貴重書

$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k	$Q+q$	$P+q$	$\log m$ +	k
46° 40′	46° 41′ 24″ 74900	10559	7″141	47° 30′	47° 31 31″ 34250	6759	5″313
41	42 24. 88515	10472	7. 101	31	32 31. 46992	6694	5. 279
42	43 25. 02112	10385	7. 062	32	33 31. 59717	6630	5. 245
43	44 25. 15692	10299	7. 024	33	34 31. 72424	6566	5. 211
44	45 25. 29255	10213	6. 985	34	35 31. 85113	6502	5. 178
45	46 25. 42799	10128	6. 946	35	36 31. 97785	6439	5. 144
46	47 25. 56327	10043	6. 907	36	37 32. 10440	6376	5. 111
47	48 25. 69837	9959	6. 869	37	38 32. 23077	6314	5. 078
48	49 25. 83330	9875	6. 830	38	39 32. 35696	6252	5. 045
49	50 25. 96805	9792	6. 792	39	40 32. 48299	6190	5. 012
50	51 26. 10262	9709	6. 754	40	41 32. 60883	6129	4 979
51	52 26. 23702	9626	6. 716	41	42 32. 73451	6068	4. 946
52	53 26. 37125	9544	6. 678	42	43 32. 86001	6008	4. 913
53	54 26. 50530	9462	6. 640	43	44 32. 98533	5948	4. 880
54	55 26. 63918	9381	6. 602	44	45 33. 11048	5888	4. 848
55	56 26. 77288	9301	6. 565	45	46 33. 23546	5829	4. 816
56	57 26. 90641	9221	6. 527	46	47 33. 36026	5770	4. 783
57	58 27. 03977	9141	6. 490	47	48 33. 48488	5712	4. 751
58	59 27. 17295	9062	6. 452	48	49 33. 60934	5654	4. 719
59	47 0 27. 30595	8983	6. 415	49	50 33. 73361	5596	4. 687
47 0	1 27. 43878	8904	6. 378	50	51 33. 85772	5539	4. 655
1	2 27. 57144	8826	6. 341	51	52 33. 98165	5482	4. 624
2	3 27. 70392	8749	6. 304	52	53 34. 10540	5426	4. 592
3	4 27. 83622	8672	6. 267	53	54 34. 22898	5370	4. 560
4	5 27. 96836	8595	6. 230	54	55 34. 35239	5314	4. 529
5	6 28. 10031	8519	6. 194	55	56 34. 47562	5259	4. 498
6	7 28. 23210	8444	6. 157	56	57 34. 59867	5204	4. 466
7	8 28. 36370	8369	6. 121	57	58 34. 72156	5149	4. 435
8	9 28 49514	8294	6. 084	58	59 34. 84426	5095	4. 404
9	10 28. 62640	8219	6. 048	59	48 0 34. 96680	5042	4. 373
10	11 28. 75748	8146	6. 012	48° 0	1 35. 08916	4988	4. 343
11	12 28. 88839	8072	5. 976	1	2 35. 21134	4935	4. 312
12	13 29. 01913	7999	5. 940	2	3 35. 33335	4883	4. 281
13	14 29. 14969	7927	5. 904	3	4 35. 45519	4830	4. 251
14	15 29. 28007	7855	5. 869	4	5 35. 57685	4778	4. 221
15	16 29. 41028	7783	5. 833	5	6 35. 69834	4727	4. 190
16	17 29. 54032	7712	5. 798	6	7 35. 81965	4676	4. 160
17	18 29. 67018	7641	5. 762	7	8 35. 94079	4625	4. 130
18	19 29. 79987	7570	5. 727	8	9 36. 06175	4575	4. 100
19	20 29. 92938	7501	5. 692	9	10 36. 18254	4525	4. 070
20	21 30 05872	7431	5. 657	10	11 36. 30316	4475	4. 041
21	22 30. 18788	7362	5. 622	11	12 36. 42360	4426	4. 011
22	23 30. 31687	7293	5. 587	12	13 36. 54387	4377	3. 982
23	24 30. 44569	7225	5. 553	13	14 36. 66396	4328	3. 952
24	25 30. 57433	7157	5. 518	14	15 36. 78388	4280	3. 923
25	26 30. 70279	7090	5. 483	15	16 36. 90362	4232	3. 894
26	27 30. 83108	7023	5. 449	16	17 37. 02319	4184	3. 865
27	28 30. 95920	6956	5. 415	17	18 37. 14259	4137	3. 836
28	29 31. 08714	6890	5. 381	18	19 37. 26181	4090	3. 807
29	30 31. 21491	6825	5. 346	19	20 37. 38086	4044	3. 778
30	31 31. 34250	6759	5. 313	20	21 37. 49973	3998	3. 749

$Q+q$	$P+q$	$\log m$ +	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k
48° 20′	48° 21′ 37″.49973	3998	3″.749	49° 10′	49° 11′ 43″.22141	2112	2″.454
21	22 37.61843	3952	3.721	11	12 43.33141	2082	2.431
22	23 37.73695	3907	3.692	12	13 43.44123	2052	2.408
23	24 37.85530	3862	3.664	13	14 43.55088	2023	2.385
24	25 37.97348	3817	3.636	14	15 43.66036	1994	2.362
25	26 38.09148	3773	3.608	15	16 43.76967	1965	2.339
26	27 38.20931	3729	3.580	16	17 43.87880	1937	2.317
27	28 38.32696	3685	3.552	17	18 43.98775	1908	2.294
28	29 38.44444	3641	3.524	18	19 44.09653	1880	2.272
29	30 38.56175	3598	3.496	19	20 44.20514	1853	2.250
30	31 38.67888	3556	3.469	20	21 44.31358	1825	2.227
31	32 38.79583	3514	3.441	21	22 44.42184	1798	2.205
32	33 38.91262	3472	3.414	22	23 44.52993	1771	2.183
33	34 39.02923	3430	3.387	23	24 44.63784	1745	2.161
34	35 39.14566	3389	3.360	24	25 44.74558	1718	2.140
35	36 39.26192	3348	3.333	25	26 44.85315	1692	2.118
36	37 39.37801	3307	3.306	26	27 44.96054	1666	2.097
37	38 39.49392	3267	3.279	27	28 45.06777	1641	2.075
38	39 39.60966	3227	3.252	28	29 45.17481	1615	2.054
39	40 39.72522	3187	3.226	29	30 45.28169	1590	2.033
40	41 39.84061	3148	3.199	30	31 45.38838	1566	2.012
41	42 39.95583	3109	3.173	31	32 45.49491	1541	1.991
42	43 40.07087	3070	3.146	32	33 45.60126	1517	1.970
43	44 40.18574	3031	3.120	33	34 45.70744	1493	1.949
44	45 40.30043	2993	3.094	34	35 45.81345	1469	1.928
45	46 40.41495	2956	3.068	35	36 45.91928	1446	1.908
46	47 40.52929	2918	3.042	36	37 46.02494	1422	1.887
47	48 40.64347	2881	3.017	37	38 46.13043	1399	1.867
48	49 40.75746	2844	2.991	38	39 46.23574	1377	1.847
49	50 40.87129	2808	2.965	39	40 46.34088	1354	1.827
50	51 40.98494	2772	2.940	40	41 46.44584	1332	1.807
51	52 41.09841	2736	2.915	41	42 46.55063	1310	1.787
52	53 41.21171	2700	2.889	42	43 46.65525	1288	1.767
53	54 41.32484	2665	2.864	43	44 46.75970	1267	1.747
54	55 41.43780	2630	2.839	44	45 46.86397	1245	1.728
55	56 41.55058	2595	2.814	45	46 46.96807	1224	1.708
56	57 41.66318	2561	2.790	46	47 47.07199	1203	1.689
57	58 41.77561	2527	2.765	47	48 47.17574	1183	1.670
58	59 41.88787	2493	2.740	48	49 47.27932	1163	1.651
59	49 0 41.99996	2460	2.716	49	50 47.38273	1142	1.632
49° 0	1 42.11187	2427	2.692	50	51 47.48596	1123	1.613
1	2 42.22360	2394	2.667	51	52 47.58902	1103	1.594
2	3 42.33517	2362	2.643	52	53 47.69191	1084	1.575
3	4 42.44655	2329	2.619	53	54 47.79462	1064	1.556
4	5 42.55777	2297	2.595	54	55 47.89716	1045	1.538
5	6 42.66881	2266	2.572	55	56 47.99952	1027	1.520
6	7 42.77968	2234	2.548	56	57 48.10172	1008	1.501
7	8 42.89037	2203	2.524	57	58 48.20374	990	1.483
8	9 43.00089	2172	2.501	58	59 48.30559	972	1.465
9	10 43.11124	2142	2.477	59	50 0 48.40726	954	1.447
10	11 43.22141	2112	2.454	50 0	1 48.50876	936	1.429

$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k
50° 0′	50° 1′ 48″.50876	936	1″.429	50° 50′	50° 51′ 53″.36348	305	0″.678
1	2 48.61009	919	1.412	51	52 53.45918	297	0.666
2	3 48.71124	902	1.394	52	53 53.54870	289	0.654
3	4 48.81222	885	1.377	53	54 53.64105	281	0.642
4	5 48.91303	868	1.359	54	55 53.73323	273	0.630
5	6 49.01367	852	1.342	55	56 53.82524	265	0.618
6	7 49.11413	835	1.325	56	57 53.91708	258	0.606
7	8 49.21442	819	1.308	57	58 54.00874	251	0.595
8	9 49.31454	803	1.291	58	59 54.10023	243	0.583
9	10 49.41448	787	1.274	59	51 0 54.19155	236	0.572
10	11 49.51425	772	1.257	51 0	1 54.28270	229	0.561
11	12 49.61385	757	1.241	1	2 54.37367	223	0.550
12	13 49.71327	742	1.224	2	3 54.46447	216	0.539
13	14 49.81253	727	1.208	3	4 54.55511	209	0.528
14	15 49.91161	712	1.191	4	5 54.64556	203	0.517
15	16 50.01051	697	1.175	5	6 54.73585	197	0.506
16	17 50.10925	683	1.159	6	7 54.82597	191	0.496
17	18 50.20781	669	1.143	7	8 54.91591	185	0.485
18	19 50.30619	655	1.127	8	9 55.00568	179	0.475
19	20 50.40441	641	1.112	9	10 55.09528	173	0.465
20	21 50.50245	628	1.096	10	11 55.18471	167	0.454
21	22 50.60032	615	1.080	11	12 55.27397	162	0.444
22	23 50.69802	601	1.065	12	13 55.36305	156	0.435
23	24 50.79554	589	1.050	13	14 55.45196	151	0.425
24	25 50.89290	576	1.034	14	15 55.54070	146	0.415
25	26 50.99007	563	1.019	15	16 55.62927	141	0.405
26	27 51.08708	551	1.004	16	17 55.71767	136	0.396
27	28 51.18391	539	0.990	17	18 55.80590	131	0.387
28	29 51.28058	527	0.975	18	19 55.89395	127	0.377
29	30 51.37706	515	0.960	19	20 55.98183	122	0.368
30	31 51.47338	503	0.946	20	21 56.06955	118	0.359
31	32 51.56952	492	0.931	21	22 56.15709	113	0.350
32	33 51.66549	480	0.917	22	23 56.24445	109	0.342
33	34 51.76129	469	0.903	23	24 56.33165	105	0.333
34	35 51.85693	458	0.889	24	25 56.41867	101	0.324
35	36 51.95237	447	0.875	25	26 56.50553	97	0.316
36	37 52.04765	437	0.861	26	27 56.59221	93	0.308
37	38 52.14276	426	0.847	27	28 56.67872	89	0.299
38	39 52.23770	416	0.833	28	29 56.76506	86	0.291
39	40 52.33246	406	0.820	29	30 56.85123	82	0.283
40	41 52.42705	396	0.806	30	31 56.93722	79	0.275
41	42 52.52147	386	0.793	31	32 57.02305	75	0.267
42	43 52.61572	376	0.780	32	33 57.10870	72	0.260
43	44 52.70979	367	0.767	33	34 57.19418	69	0.252
44	45 52.80369	358	0.754	34	35 57.27950	66	0.245
45	46 52.89742	348	0.741	35	36 57.36464	63	0.237
46	47 52.99098	339	0.728	36	37 57.44960	60	0.230
47	48 53.08436	331	0.715	37	38 57.53440	57	0.223
48	49 53.17757	322	0.703	38	39 57.61903	55	0.216
49	50 53.27062	313	0.690	39	40 57.70348	52	0.209
50	51 53.36348	305	0.678	40	41 57.78777	50	0.202

$Q+q$	$P+p$	$\log m$ +	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$ —	k
51° 40′	51° 41′ 57″78777	50	0″202	52° 30′	52° 32′ 1″78428	0	0″006
41	42 57.87188	47	0.196	31	33 1.81986		0.005
42	43 57.95582	45	0.189	32	34 1.93528		0.004
43	44 58.01959	43	0.183	33	35 2.01053		0.003
44	45 58.12319	40	0.176	34	36 2.08561		0.002
45	46 58.20662	38	0.170	35	37 2.16052		0.001
46	47 58.28988	36	0.164	36	38 2.23526		0.001
47	48 58.37296	34	0.158	37	39 2.30982		0.001
48	49 58.45588	32	0.152	38	40 2.38422		0.000
49	50 58.53862	31	0.146	39	41 2.45845		0.000
50	51 58.62120	29	0.141	40	42 2.53251		0.000
51	52 58.70360	27	0.135	41	43 2.60640		0.000
52	53 58.78583	25	0.130	42	44 2.68013		0.000
53	54 58.86789	24	0.124	43	45 2.75368		0.001
54	55 58.94978	22	0.119	44	46 2.82706		0.001
55	56 59.03150	21	0.114	45	47 2.90027		0.001
56	57 59.11305	20	0.109	46	48 2.97331		0.002
57	58 59.19443	18	0.104	47	49 3.04619		0.003
58	59 59.27563	17	0.099	48	50 3.11889		0.004
59	52 0 59.35667	16	0.095	49	51 3.19143		0.005
52 0	1 59.43754	15	0.090	50	52 3.26379		0.006
1	2 59.51823	14	0.086	51	53 3.33599		0.007
2	3 59.59876	13	0.081	52	54 3.40802	0	0.008
3	4 59.67911	12	0.077	53	55 3.47987	1	0.010
4	5 59.75929	11	0.073	54	56 3.55156	1	0.011
5	6 59.83931	10	0.069	55	57 3.62308	1	0.013
6	7 59.91915	9	0.065	56	58 3.69443	1	0.014
7	8 59.99882	8	0.061	57	59 3.76561	1	0.016
8	10 0.07832	8	0.058	58	53 0 3.83662	1	0.018
9	11 0.15765	7	0.054	59	1 3.90747	2	0.020
10	12 0.23681	6	0.051	53 0	2 3.97814	2	0.023
11	13 0.31580	6	0.047	1	3 4.04864	2	0.025
12	14 0.39462	5	0.044	2	4 4.11898	2	0.027
13	15 0.47327	5	0.041	3	5 4.18915	3	0.030
14	16 0.55175	4	0.038	4	6 4.25914	3	0.033
15	17 0.63006	4	0.035	5	7 4.32897	4	0.036
16	18 0.70820	3	0.032	6	8 4.39863	4	0.038
17	19 0.78617	3	0.030	7	9 4.46813	5	0.041
18	20 0.86397	2	0.027	8	10 4.53745	5	0.044
19	21 0.94159	2	0.025	9	11 4.60660	6	0.048
20	22 1.01905	2	0.023	10	12 4.67559	6	0.051
21	23 1.09634	2	0.020	11	13 4.74440	7	0.054
22	24 1.17346	1	0.018	12	14 4.81305	8	0.058
23	25 1.25040	1	0.016	13	15 4.88153	8	0.062
24	26 1.32718	1	0.014	14	16 4.94984	9	0.065
25	27 1.40379	1	0.013	15	17 5.01798	10	0.069
26	28 1.48023	1	0.011	16	18 5.08595	11	0.073
27	29 1.55649	1	0.010	17	19 5.15376	12	0.078
28	30 1.63259	0	0.008	18	20 5.22139	14	0.082
29	31 1.70852		0.007	19	21 5.28886	14	0.086
30	32 1.78428	0	0.006	20	22 5.35616	15	0.091

$Q+q$	$P+p$	$\log m$ —	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$ —	k
53° 20′	53° 22′ 5″35616	15	0″091	54° 10′	54° 12′ 8″50704	169	0″460
21	23 5.42329	16	0.095	11	13 8.56579	175	0.471
22	24 5.49025	17	0.100	12	14 8.62438	180	0.481
23	25 5.55705	18	0.105	13	15 8.68279	186	0.492
24	26 5.62367	20	0.110	14	16 8.74104	192	0.502
25	27 5.69013	21	0.115	15	17 8.79913	199	0.513
26	28 5.75642	22	0.120	16	18 8.85705	205	0.524
27	29 5.82254	24	0.125	17	19 8.91480	212	0.535
28	30 5.88849	26	0.131	18	20 8.97238	218	0.546
29	31 5.95428	27	0.136	19	21 9.02980	225	0.557
30	32 6.01989	29	0.142	20	22 9.08705	232	0.569
31	33 6.08534	31	0.147	21	23 9.14413	239	0.580
32	34 6.15062	33	0.153	22	24 9.20104	246	0.592
33	35 6.21573	34	0.159	23	25 9.25781	253	0.604
34	36 6.28068	36	0.165	24	26 9.31439	261	0.615
35	37 6.34545	38	0.171	25	27 9.37081	268	0.627
36	38 6.41006	41	0.178	26	28 9.42706	276	0.639
37	39 6.47450	43	0.184	27	29 9.48315	284	0.652
38	40 6.53877	45	0.191	28	30 9.53907	292	0.664
39	41 6.60288	47	0.197	29	31 9.59483	300	0.676
40	42 6.66681	50	0.204	30	32 9.65042	309	0.689
41	43 6.73058	53	0.211	31	33 9.70584	317	0.701
42	44 6.79418	55	0.218	32	34 9.76110	326	0.714
43	45 6.85762	58	0.225	33	35 9.81619	335	0.727
44	46 6.92088	61	0.232	34	36 9.87111	344	0.740
45	47 6.98398	64	0.240	35	37 9.92587	353	0.753
46	48 7.04691	67	0.247	36	38 9.98046	362	0.766
47	49 7.10967	70	0.255	37	39 10.03489	372	0.780
48	50 7.17227	73	0.262	38	40 10.08915	381	0.793
49	51 7.23470	76	0.270	39	41 10.14325	391	0.807
50	52 7.29696	79	0.278	40	42 10.19718	401	0.820
51	53 7.35905	83	0.286	41	43 10.25094	411	0.834
52	54 7.42098	86	0.294	42	44 10.30454	421	0.848
53	55 7.48273	90	0.303	43	45 10.35797	432	0.862
54	56 7.54432	94	0.311	44	46 10.41124	443	0.876
55	57 7.60575	98	0.319	45	47 10.46434	453	0.890
56	58 7.66700	102	0.328	46	48 10.51727	464	0.905
57	59 7.72809	106	0.337	47	49 10.57004	476	0.919
58	54 0 7.78901	110	0.345	48	50 10.62265	487	0.934
59	1 7.84977	114	0.354	49	51 10.67509	498	0.949
54 0	2 7.91036	119	0.363	50	52 10.72736	510	0.964
1	3 7.97078	123	0.373	51	53 10.77947	522	0.978
2	4 8.03103	128	0.382	52	54 10.83142	534	0.994
3	5 8.09111	132	0.391	53	55 10.88320	546	1.009
4	6 8.15103	137	0.401	54	56 10.93481	559	1.024
5	7 8.21079	142	0.411	55	57 10.98626	571	1.039
6	8 8.27037	147	0.420	56	58 11.03754	584	1.055
7	9 8.32979	153	0.430	57	59 11.08866	597	1.071
8	10 8.38904	158	0.440	58	55 0 11.13961	611	1.086
9	11 8.44812	163	0.450	59	1 11.19040	624	1.102
10	12 8.50704	169	0.460	55° 0	2 11.24102	638	1.118

$Q+q$	$P+p$	$\log m$	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$	k
		—				—	
55° 0′	50° 2′ 11″24102	638	1″118	55° 50′	55° 52′ 13″56267	1598	2″068
1	3 11.29148	651	1.134	51	53 13.60493	1624	2.090
2	4 11.34177	665	1.151	52	54 13.64703	1650	2.112
3	5 11.39190	680	1.167	53	55 13.68896	1676	2.134
4	6 11.44186	694	1.184	54	56 13.73074	1702	2.157
5	7 11.49166	709	1.200	55	57 13.77235	1728	2.179
6	8 11.54129	723	1.217	56	58 13.81379	1755	2.202
7	9 11.59076	738	1.234	57	59 13.85508	1782	2.225
8	10 11.64007	754	1.252	58	56 0 13.89620	1810	2.247
9	11 11.68921	769	1.268	59	1 13.93716	1837	2.270
10	12 11.73818	785	1.285	56 0	2 13.97795	1865	2.293
11	13 11.78699	800	1.302	1	3 14.01859	1894	2.317
12	14 11.83564	817	1.320	2	4 14.05906	1922	2.340
13	15 11.88412	833	1.337	3	5 14.09937	1951	2.363
14	16 11.93244	849	1.355	4	6 14.13952	1980	2.387
15	17 11.98059	866	1.372	5	7 14.17950	2009	2.411
16	18 12.02858	883	1.390	6	8 14.21932	2039	2.434
17	19 12.07640	900	1.408	7	9 14.25898	2069	2.458
18	20 12.12406	917	1.426	8	10 14.29848	2099	2.482
19	21 12.17156	935	1.445	9	11 14.33782	2130	2.506
20	22 12.21889	953	1.463	10	12 14.37699	2161	2.531
21	23 12.26605	971	1.481	11	13 14.41600	2192	2.555
22	24 12.31306	989	1.500	12	14 14.45485	2223	2.579
23	25 12.35990	1008	1.519	13	15 14.49354	2255	2.604
24	26 12.40657	1026	1.538	14	16 14.53206	2287	2.629
25	27 12.45308	1045	1.557	15	17 14.57043	2319	2.654
26	28 12.49943	1064	1.576	16	18 14.60863	2352	2.679
27	29 12.54561	1084	1.595	17	19 14.64667	2385	2.704
28	30 12.59163	1104	1.614	18	20 14.68455	2418	2.729
29	31 12.63749	1123	1.633	19	21 14.72226	2452	2.754
30	32 12.68318	1144	1.653	20	22 14.75982	2486	2.780
31	33 12.72870	1164	1.673	21	23 14.79721	2520	2.805
32	34 12.77407	1183	1.692	22	24 14.83444	2555	2.831
33	35 12.81927	1205	1.712	23	25 14.87151	2589	2.857
34	36 12.86430	1226	1.732	24	26 14.90842	2625	2.883
35	37 12.90918	1248	1.752	25	27 14.94517	2660	2.909
36	38 12.95389	1269	1.773	26	28 14.98175	2696	2.935
37	39 12.99843	1291	1.793	27	29 15.01818	2732	2.961
38	40 13.04282	1313	1.813	28	30 15.05444	2768	2.988
39	41 13.08703	1336	1.834	29	31 15.09054	2805	3.014
40	42 13.13109	1358	1.855	30	32 15.12648	2842	3.041
41	43 13.17498	1381	1.875	31	33 15.16226	2880	3.067
42	44 13.21871	1404	1.896	32	34 15.19788	2917	3.094
43	45 13.26228	1428	1.917	33	35 15.23334	2955	3.121
44	46 13.30568	1451	1.939	34	36 15.26863	2994	3.148
45	47 13.34892	1475	1.960	35	37 15.30377	3033	3.176
46	48 13.39199	1499	1.981	36	38 15.33874	3072	3.203
47	49 13.43491	1524	2.003	37	39 15.37356	3111	3.230
48	50 13.47766	1548	2.024	38	40 15.40821	3151	3.258
49	51 13.52024	1573	2.046	39	41 15.44270	3191	3.286
50	52 13.56267	1598	2.068	40	42 15.47703	3231	3.314

$Q+q$	$P+p$	$\log m$	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$	k
		—				—	
56° 40′	56° 42′ 15″47703	3231	3″314	57° 30′	57° 32′ 16″98962	5719	4″859
41	43 15.51120	3272	3.342	31	33 17.01581	5778	4.893
42	44 15.54521	3313	3.370	32	34 17.04185	5839	4.927
43	45 15.57906	3355	3.398	33	35 17.06772	5899	4.962
44	46 15.61275	3396	3.426	34	36 17.09344	5960	4.996
45	47 15.64627	3439	3.455	35	37 17.11900	6021	5.030
46	48 15.67964	3481	3.483	36	38 17.14441	6083	5.065
47	49 15.71285	3524	3.512	37	39 17.16965	6146	5.100
48	50 15.74589	3567	3.541	38	40 17.19474	6208	5.135
49	51 15.77878	3611	3.570	39	41 17.21967	6271	5.170
50	52 15.81150	3654	3.599	40	42 17.24444	6335	5.205
51	53 15.84407	3699	3.628	41	43 17.26905	6399	5.240
52	54 15.87647	3743	3.657	42	44 17.29351	6463	5.275
53	55 15.90872	3788	3.686	43	45 17.31780	6528	5.311
54	56 15.94080	3834	3.716	44	46 17.34194	6593	5.346
55	57 15.97273	3879	3.746	45	47 17.36593	6659	5.382
56	58 16.00449	3925	3.775	46	48 17.38975	6725	5.418
57	59 16.03610	3972	3.805	47	49 17.41342	6792	5.454
58	57 0 16.06754	4019	3.835	48	50 17.43693	6859	5.490
59	1 16.09883	4066	3.865	49	51 17.46028	6926	5.526
57 0	2 16.12995	4113	3.896	50	52 17.48348	6994	5.563
1	3 16.16092	4161	3.926	51	53 17.50652	7063	5.599
2	4 16.19172	4210	3.956	52	54 17.52940	7131	5.636
3	5 16.22237	4258	3.987	53	55 17.55212	7201	5.672
4	6 16.25286	4307	4.018	54	56 17.57468	7270	5.709
5	7 16.28318	4357	4.049	55	57 17.59709	7341	5.746
6	8 16.31335	4406	4.080	56	58 17.61935	7411	5.783
7	9 16.34336	4457	4.111	57	59 17.64144	7482	5.820
8	10 16.37320	4507	4.142	58	58 0 17.66338	7554	5.858
9	11 16.40289	4558	4.173	59	1 17.68516	7626	5.895
10	12 16.43242	4609	4.205	58 0	2 17.70678	7698	5.933
11	13 16.46179	4661	4.236	1	3 17.72825	7774	5.970
12	14 16.49100	4713	4.268	2	4 17.74956	7844	6.008
13	15 16.52005	4766	4.300	3	5 17.77072	7918	6.046
14	16 16.54895	4818	4.332	4	6 17.79171	7993	6.084
15	17 16.57768	4872	4.364	5	7 17.81255	8067	6.122
16	18 16.60625	4925	4.396	6	8 17.83324	8143	6.160
17	19 16.63467	4979	4.428	7	9 17.85376	8218	6.199
18	20 16.66293	5034	4.461	8	10 17.87414	8294	6.237
19	21 16.69102	5089	4.493	9	11 17.89435	8371	6.276
20	22 16.71896	5144	4.526	10	12 17.91441	8448	6.315
21	23 16.74674	5200	4.559	11	13 17.93431	8526	6.354
22	24 16.77436	5256	4.592	12	14 17.95406	8604	6.393
23	25 16.80182	5312	4.625	13	15 17.97365	8682	6.432
24	26 16.82913	5369	4.658	14	16 17.99308	8761	6.471
25	27 16.85627	5426	4.691	15	17 18.01236	8841	6.511
26	28 16.88326	5484	4.724	16	18 18.03148	8921	6.550
27	29 16.91008	5542	4.758	17	19 18.05045	9001	6.590
28	30 16.93675	5600	4.792	18	20 18.06925	9082	6.630
29	31 16.96326	5659	4.825	19	21 18.08791	9164	6.670
30	32 16.98962	5719	4.859	20	22 18.10641	9246	6.710

$Q+q$	$P+p$	$\log m$	k	$Q+q$	$P+p$	$\log m$	k
		—				—	
58° 20′	58° 22′ 18″.10641	9246	6″.710	58° 30′	58° 32′ 18″.28283	10092	7″.117
21	23 18.12475	9328	6.750	31	33 18.29962	10180	7.158
22	24 18.14293	9411	6.790	32	34 18.31625	10268	7.200
23	25 18.16097	9495	6.830	33	35 18.33272	10356	7.241
24	26 18.17884	9578	6.871	34	36 18.34905	10445	7.283
25	27 18.19656	9663	6.912	35	37 18.36521	10535	7.325
26	28 18.21412	9748	6.952	36	38 18.38123	10625	7.367
27	29 18.23153	9833	6.993	37	39 18.39708	10715	7.409
28	30 18.24879	9919	7.034	38	40 18.41279	10806	7.451
29	31 18.26588	10006	7.075	39	41 18.42833	10898	7.484
30	32 18.28283	10092	7.117	40	42 18.44373	10990	7.536

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

GEGENSTÄNDE DER HÖHERN GEODAESIE

ZWEITE ABHANDLUNG

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS

DER KÖNIGL. SOCIETÄT ÜBERGEBEN MDCCCXLVI SEPT. I.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Band III.
Göttingen 1847.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

GEGENSTÄNDE DER HÖHERN GEODAESIE.

Die Aufgabe, aus der Grösse der Seite eines Dreiecks auf der Erdoberfläche, dem Azimuthe an dem einen Endpunkte, und der geographischen Breite dieses Endpunkts abzuleiten das Azimuth an dem andern Endpunkte, dessen Breite und den Längenunterschied beider Punkte, gehört zu den Hauptgeschäften der höhern Geodäsie. Für den Fall der Kugelfläche ist der Zusammenhang zwischen jenen sechs Grössen am Schluss der ersten Abhandlung in der einfachsten und zur schärfsten Rechnung geeigneten Form aufgestellt, welche auch leicht zu einer bequemen Auflösung der Aufgabe selbst benutzt werden kann. Es wird dadurch das Verlangen nach dem Besitz einer analogen unmittelbar für die Ellipsoidfläche gültigen Auflösungsart erweckt, und der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung ist, eine solche zu entwickeln. Vorher soll jedoch erst die Auflösung für den Fall der Kugelfläche in ein noch helleres Licht gestellt werden. Des bequemern Zurückweisens wegen lasse ich die Zahlenbezeichnung der Artikel sich an die erste Abhandlung anschliessen.

18.

Um den Grad der Genauigkeit, welcher durch die Formeln des 17. Art. erreicht wird, besser beurtheilen zu können, werden noch die Glieder der nächstfolgenden Ordnung entwickelt werden müssen; es ist jedoch wohl der Mühe

werth, das Verfahren anzugeben, nach welchem diese Entwicklung beliebig weit getrieben werden kann.

Ich erlaube mir an den dort gebrauchten Bezeichnungen einige Abänderungen, theils des bequemern Drucks wegen, theils um den verschiedenen Bezeichnungen in den einzelnen Theilen der gegenwärtigen Abhandlung etwas mehr Symmetrie geben zu können. Zunächst bedeute hier

r die Entfernung der beiden Punkte von einander, den Halbmesser der Kugel als Einheit angenommen.

$B+\frac{1}{2}b$ und $B-\frac{1}{2}b$ die Breite am ersten und zweiten Endpunkte von r.

$T+\frac{1}{2}t$ und $T-\frac{1}{2}t\pm 180^0$ das Azimuth des zweiten und ersten Endpunkts resp. vom ersten und zweiten aus.

l den Längenunterschied.

Es wird angenommen, dass das Azimuth von Süden nach Westen zu gezählt und l als positiv betrachtet wird, wenn der zweite Punkt westlicher liegt als der erste.

Es soll ferner gesetzt werden

$$\vec{6} = r\cos T$$
$$\tau = r\sin T.\operatorname{tang} B$$
$$\lambda = \frac{r\sin T}{\cos B}$$

welche Grössen dasselbe ausdrücken, was im 17. Art. mit b^0, a^0, λ^0 bezeichnet war, nemlich die bis auf die dritte Ordnung (ausschliesslich) genauen Werthe von b, t, l, und zwischen denen die Gleichung

$$rr = \tau\tau + \vec{6}\vec{6} + \lambda\lambda$$

Statt findet. Die Ordnungen werden hier immer so verstanden, dass r wie eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird.

Zur Abkürzung wird noch geschrieben

$$\frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}r}{r} = m$$
$$\frac{2\sin\frac{1}{2}r}{r} = n$$

Zu der beabsichtigten Entwicklung gelangen wir am leichtesten durch Benutzung der Umwandlung der Formel

$$x = \sin y$$

in die Reihe

$$\log y = \log x + \tfrac{1}{6}xx + \tfrac{1}{15\,0}x^4 + \tfrac{1}{56\,0}x^6 + \tfrac{1}{134\,4}x^8 + \text{u. s. w.}$$

welche man leicht aus der bekannten

$$y = x(1 + \tfrac{1}{6}xx + \tfrac{3}{40}x^4 + \tfrac{5}{112}x^6 + \tfrac{35}{1152}x^8 + \text{u. s. w.})$$

ableitet. Wendet man dieselbe zuvörderst an auf die Gleichung

$$\operatorname{tang} B.\sin T.\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}r = \sin\tfrac{1}{2}t$$

oder

$$\tfrac{1}{2}m\tau = \sin\tfrac{1}{2}t$$

indem man $x = \frac{1}{2}m\tau$, $y = \frac{1}{2}t$ setzt, so wird (I)

$$\log t = \log\tau + \log m + \tfrac{1}{24}mm\tau\tau + \tfrac{1}{24\,0}m^4\tau^4 + \tfrac{1}{34\,56\,0}m^6\tau^6 + \tfrac{3}{29\,03\,04\,0}m^8\tau^8 + \text{u.s.w.}$$

Eben so, aus der Anwendung auf die Gleichung

$$\frac{\sin T\sin\frac{1}{2}r}{\cos B} = \sin\tfrac{1}{2}l$$

oder

$$\tfrac{1}{2}n\lambda = \sin\tfrac{1}{2}l$$

ergibt sich (II)

$$\log l = \log\lambda + \log n + \tfrac{1}{24}nn\lambda\lambda + \tfrac{1}{24\,0}n^4\lambda^4 + \tfrac{1}{34\,56\,0}n^6\lambda^6 + \tfrac{3}{29\,03\,04\,0}n^8\lambda^8 + \text{u.s.w.}$$

Die dritte Anwendung wird gemacht auf die Gleichung

$$\frac{\cos B\operatorname{tang}\frac{1}{2}l}{\operatorname{tang} T} = \sin\tfrac{1}{2}b$$

nachdem derselben vermöge der Substitutionen

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}l = \frac{n\lambda}{2\sqrt{(1-\frac{1}{4}nn\lambda\lambda)}}$$
$$\frac{\cos B}{\operatorname{tang} T} = \frac{\vec{6}}{\lambda}$$

folgende Gestalt gegeben ist

$$\frac{n\vec{6}}{2\sqrt{(1-\frac{1}{4}nn\lambda\lambda)}} = \sin\tfrac{1}{2}b$$

Es ergibt sich dann (III)

$$\begin{aligned}\log b = {} & \log\vartheta + \log n + \tfrac{1}{8}nn\lambda\lambda + \tfrac{1}{64}n^4\lambda^4 + \tfrac{1}{384}n^6\lambda^6 + \tfrac{1}{2048}n^8\lambda^8 + \text{u. s. w.}\\ & + \tfrac{1}{24}\vartheta\vartheta(nn + \tfrac{1}{4}n^4\lambda\lambda + \tfrac{1}{48}n^6\lambda^4 + \tfrac{1}{64}n^8\lambda^6 + \text{u. s. w.})\\ & + \tfrac{1}{240}\vartheta^4(n^4 + \tfrac{1}{2}n^6\lambda\lambda + \tfrac{7}{16}n^8\lambda^4 + \text{u. s. w.})\\ & + \tfrac{1}{3612}\tfrac{1}{880}\vartheta^6(n^6 + \tfrac{3}{4}n^8\lambda\lambda + \text{u. s. w.})\\ & + \tfrac{2}{2903}\tfrac{3}{040}\tfrac{7}{000}\vartheta^8(n^8 + \text{u. s. w.})\\ & + \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

oder, indem man die Glieder gleicher Ordnung zusammenfasst,

$$\begin{aligned}\log b = {} & \log\vartheta + \log n\\ & + \tfrac{1}{24}nn(\vartheta\vartheta + 3\lambda\lambda)\\ & + \tfrac{1}{2880}n^4(11\vartheta^4 + 30\vartheta\vartheta\lambda\lambda + 45\lambda^4)\\ & + \tfrac{1}{3628}\tfrac{1}{800}n^6(191\vartheta^6 + 693\vartheta^4\lambda\lambda + 945\vartheta\vartheta\lambda^4 + 945\lambda^6)\\ & + \tfrac{1}{2903}\tfrac{1}{040}\tfrac{1}{000}n^8(2497\vartheta^8 + 11460\vartheta^6\lambda\lambda + 20790\vartheta^4\lambda^4 + 18900\vartheta\vartheta\lambda^6\\ & \qquad + 14175\lambda^8)\\ & + \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Um die Gleichungen I, II, III in eine ganz entwickelte Gestalt zu bringen, wird man in denselben noch substituiren

$$\begin{aligned}\log m &= \tfrac{1}{12}rr + \tfrac{7}{1440}r^4 + \tfrac{31}{90720}r^6 + \tfrac{127}{483840}r^8 + \text{u. s. w.}\\ mm &= 1 + \tfrac{1}{6}rr + \tfrac{17}{360}r^4 + \tfrac{31}{1890}r^6 + \text{u. s. w.}\\ m^4 &= 1 + \tfrac{1}{3}rr + \tfrac{3}{40}r^4 + \text{u. s. w.}\\ m^6 &= 1 + \tfrac{1}{2}rr + \text{u. s. w.}\\ &\text{u. s. w.}\\ \log n &= -\tfrac{1}{12}rr - \tfrac{1}{2880}r^4 - \tfrac{1}{181440}r^6 - \tfrac{1}{967680}r^8 - \text{u. s. w.}\\ nn &= 1 - \tfrac{1}{12}rr + \tfrac{1}{360}r^4 - \tfrac{1}{20160}r^6 + \text{u. s. w.}\\ n^4 &= 1 - \tfrac{1}{6}rr + \tfrac{1}{80}r^4 - \text{u. s. w.}\\ n^6 &= 1 - \tfrac{1}{4}rr + \text{u. s. w.}\\ &\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Wir erhalten demnach für die Logarithmen von t, l, b, oder vielmehr für die Unterschiede dieser Logarithmen von den genäherten Werthen $\log\tau$, $\log\lambda$, $\log\vartheta$, zusammengesetzte Reihen, welche fortschreiten

für $\log t$ nach den geraden Potenzen von τ und r, und deren Producten,

für $\log l$ eben so nach λ und r,

für $\log b$ nach ϑ, λ und r,

und die beigebrachten Zahlen enthalten diese Entwicklung bis zu den Grössen der achten Ordnung (einschl.), daher t, l, b selbst dadurch bis zu den Grössen der neunten Ordnung einschliesslich, oder der eilften Ordnung ausschliesslich bestimmt werden.

Die Entwicklung von $\log b$ kann auch auf eine andere Art, nemlich nach den Potenzen von ϑ, τ und r geschehen. Setzt man

$$z = \operatorname{tang} y$$

so wird

$$y = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \tfrac{1}{9}z^9 - \text{u. s. w.}$$

und hieraus

$$\log y = \log z - \tfrac{1}{3}zz + \tfrac{1}{30}z^4 - \tfrac{2}{285}\tfrac{1}{5}z^6 + \tfrac{3}{567}\tfrac{5}{10}z^8 - \text{u. s. w.}$$

Wendet man diese Reihe an auf die Gleichung

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b = \frac{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}t}{\operatorname{tang}B\,.\operatorname{tang}T}$$

nachdem man derselben vermöge der Substitutionen

$$\operatorname{tang}B\,.\operatorname{tang}T = \frac{\tau}{6}$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}t = \frac{m\tau}{2\sqrt{(1-\frac{1}{3}mm\tau\tau)}}$$

folgende Gestalt gegeben hat

$$\frac{\frac{1}{6}m}{2\sqrt{(1-\frac{1}{3}mm\tau\tau)}} = \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}\log b = {} & \log\vartheta + \log m + \tfrac{1}{8}mm\tau\tau + \tfrac{1}{64}m^4\tau^4 + \tfrac{1}{384}m^6\tau^6 + \tfrac{1}{2048}m^8\tau^8 + \text{u. s. w.}\\ & - \tfrac{1}{12}\vartheta\vartheta(mm + \tfrac{1}{4}m^4\tau\tau + \tfrac{1}{16}m^6\tau^4 + \tfrac{1}{64}m^8\tau^6 + \text{u. s. w.})\\ & + \tfrac{1}{144}\tfrac{1}{80}\vartheta^4(m^4 + \tfrac{1}{2}m^6\tau\tau + \tfrac{3}{16}m^8\tau^4 + \text{u. s. w.})\\ & - \tfrac{2}{181}\tfrac{3}{44}\tfrac{1}{60}\vartheta^6(m^6 + \tfrac{3}{4}m^8\tau\tau + \text{u. s. w.})\\ & + \tfrac{3}{145}\tfrac{5}{120}\tfrac{3}{200}\vartheta^8(m^8 + \text{u. s. w.})\\ & + \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

oder, indem man die Glieder gleicher Ordnung zusammenfasst,

$$\begin{aligned}\log b = \log\vec{b} &+ \log m\\ &- \tfrac{1}{24}\quad mm(2\vec{b}\vec{b} - 3\tau\tau)\\ &+ \tfrac{1}{2880}\quad m^4(26\vec{b}^4 - 60\vec{b}\vec{b}\tau\tau + 45\tau^4)\\ &- \tfrac{1}{362880}\quad m^6(502\vec{b}^6 - 1638\vec{b}^4\tau\tau + 1890\vec{b}\vec{b}\tau^4 - 945\tau^6)\\ &+ \tfrac{1}{29030400}\, m^8(7102\vec{b}^8 - 30120\vec{b}^6\tau\tau + 49140\vec{b}^4\tau^4 - 37800\vec{b}\vec{b}\tau^6\\ &\qquad\qquad + 14175\tau^8)\\ &- \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Durch Substitution der oben gegebenen Werthe von $\log m$, mm, m^4 u. s. w. erhält man hieraus die gesuchte Reihe, welche sich übrigens auch aus der erstern nach $\vec{b}, \lambda, r$ fortschreitenden unmittelbar ableiten lässt, indem man $rr - \vec{b}\vec{b} - \tau\tau$ für $\lambda\lambda$ substituirt.

19.

Für unsern Zweck reicht es hin, die Formeln nur bis zur vierten Ordnung (einschl.) genau aufzustellen, nemlich

$$\begin{aligned}\log t &= \log\tau + \tfrac{1}{24}(2rr + \tau\tau) + \tfrac{1}{2880}(14r^4 + 20rr\tau\tau + 11\tau^4)\\ \log l &= \log\lambda - \tfrac{1}{24}(rr - \lambda\lambda) - \tfrac{1}{2880}(r^4 + 10rr\lambda\lambda - 11\lambda^4)\\ \log b &= \log\vec{b} - \tfrac{1}{24}(rr - \vec{b}\vec{b} - 3\lambda\lambda) - \tfrac{1}{2880}(r^4 + 10rr\vec{b}\vec{b} + 30rr\lambda\lambda - 11\vec{b}^4\\ &\qquad\qquad - 30\vec{b}\vec{b}\lambda\lambda - 45\lambda^4)\end{aligned}$$

Anstatt der letzten Formel kann man auch eine der folgenden gebrauchen:

$$\begin{aligned}\log b &= \log\vec{b} + \tfrac{1}{24}(2rr - 2\vec{b}\vec{b} + 3\tau\tau) + \tfrac{1}{2880}(14r^4 - 40rr\vec{b}\vec{b} + 60rr\tau\tau + 26\vec{b}^4\\ &\qquad\qquad - 60\vec{b}\vec{b}\tau\tau + 45\tau^4)\\ \log b &= \log\vec{b} + \tfrac{1}{24}(2\lambda\lambda + \tau\tau) - \tfrac{1}{2880}(12\vec{b}\vec{b}\lambda\lambda - 12\vec{b}\vec{b}\tau\tau - 14\lambda^4 - 32\lambda\lambda\tau\tau + \tau^4)\\ \log b &= \log\vec{b} + \tfrac{1}{24}(2\lambda\lambda + \tau\tau) - \tfrac{1}{2880}(12rr\lambda\lambda - 12rr\tau\tau - 26\lambda^4 - 8\lambda\lambda\tau\tau - 11\tau^4)\end{aligned}$$

In allen diesen Formeln sind $r, \vec{b}, \lambda, \tau, b, l, t$ als in Theilen des Halbmessers ausgedrückt und die Logarithmen als hyperbolische zu verstehen. Sollen dagegen jene sieben Grössen in Bogensecunden ausgedrückt und die Logarithmen die briggischen sein, so erleiden die Formeln weiter keine Veränderung, als dass der gemeinschaftliche Zahlencoëfficient der Glieder zweiter Ordnung $\frac{1}{24}$ in $\frac{1}{2}\mu$, und der gemeinschaftliche Zahlencoefficient der Glieder vierter Ordnung $\frac{1}{2880}$ in ν verwandelt werden muss, wo μ, ν die Producte der Grössen $\frac{1}{24}\varrho\varrho$ und $\frac{1}{2880}\varrho^4$

in den Modulus der briggischen Logarithmen bezeichnen, ϱ in der im Art. 16 angegebenen Bedeutung genommen (und damit auch μ). Man hat für diese constanten Factoren

$$\begin{aligned}\log\mu &= 7.9297527989\,(-20)\\ \log\nu &= 4.9206912908\,(-30)\end{aligned}$$

Bis zu den Gliedern zweiter Ordnung stimmen diese Resultate mit den im 17. Art. gegebenen überein. Der Zweck der vorstehenden weitern Entwicklung war nur, klar hervortreten zu lassen, dass selbst zur schärfsten Rechnung die Glieder zweiter Ordnung völlig zureichen: in der That kommt in dem ganzen Hannoverschen Dreieckssysteme kein Fall vor, wo die Glieder vierter Ordnung den Betrag von zwei Einheiten der zehnten Decimale erreichten, und nur ein Paar Fälle, wo sie *Eine* Einheit der zehnten Decimale überschreiten.

20.

Wenn unsere Formeln, welche nicht von der Breite und dem Azimuth an dem einen Orte, sondern von dem Mittelwerthe dieser Grössen an den beiden Örtern ausgehen, zur Auflösung der zu Anfang dieser Abhandlung aufgeführten Aufgabe benutzt werden sollen, so wird dies auf eine indirecte Art, oder richtiger durch stufenweise beliebig weit getriebene Annäherung geschehen müssen. Der Gang der Arbeit besteht darin, dass man von irgend einem genäherten Werthe von T ausgeht (wofür man in Ermangelung aller anderweitigen Kenntniss oder Schätzung zuerst das gegebene Azimuth an dem ersten Orte annehmen kann) und daraus einen viel schärfern ableitet; mit diesem dann dieselbe Rechnung wiederholt, und damit so lange fortfährt, bis man zu stehenden Resultaten gelangt. Man hat dabei zu beachten, dass bei den ersten Rechnungen nur 4 oder 5 Ziffern der Logarithmen berücksichtigt zu werden brauchen, und dabei $\vec{b}$ und τ anstatt der corrigirten b und t angewandt werden dürfen, daher man auch, bei diesen ersten Rechnungen, sich um λ und l noch nicht zu bekümmern braucht. Die Formeln sind so, wenn für den ersten Ort die Breite mit B^0, das Azimuth mit T^0 bezeichnet wird, der Reihe nach folgende:

$$\begin{aligned}\vec{b} &= r\cos T\\ B &= B^0 - \tfrac{1}{2}\vec{b}\\ \tau &= r\sin T\tang B\\ T &= T^0 - \tfrac{1}{2}\tau\end{aligned}$$

Nachdem man dahin gelangt ist, dass bei dem Gebrauch von fünfzifrigen Logarithmen der Werth von T sich nicht mehr ändert, berechnet man λ nach der Formel

$$\lambda = r \sin T \sec B$$

und führt dann eine neue Rechnung mit sieben Decimalen, wobei man die logarithmischen Correctionen vermittelst der Formeln

$$\log b = \log \vec{o} + \mu\lambda\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau$$
$$\log t = \log \tau + \mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau$$

zuzieht und $B = B^0 - \frac{1}{2}b$, $T = T^0 - \frac{1}{2}t$ setzt. Eine nochmalige Wiederholung wird in der Regel dieselben, oder kaum merklich geänderte Resultate wiedergeben, und dann erst wird auch noch die Berechnung von l nach der Formel

$$\log l = \log\lambda - \tfrac{1}{2}\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\lambda\lambda$$

beigefügt. Um die Schnelligkeit der Annäherung (die hauptsächlich von der Kleinheit von r abhängt), an einem Beispiele zu zeigen, setze ich die Hauptmomente der Rechnung für den Übergang von dem Dreieckspunkte Brocken zu dem Punkte Inselsberg hieher. Es ist dies die grösste Dreiecksseite in dem Hannoverschen Dreiecksystem, viel grösser, als sonst bei trigonometrischen Operationen vorzukommen pflegen.

Bei der nach den Grundlagen der ersten Abhandlung bearbeiteten conformen Darstellung auf der Kugelfläche ist die Breite des Brockens $B^0 = 51^0\,46'\,3''6345$; das Azimuth der Seite Brocken-Inselsberg $T^0 = 5^0\,42'\,21''7704$; der Logarithm dieser Seite in Toisen $= 4{,}7353929$ oder in Theilen des Halbmessers $= 8{,}22018543$, oder in Bogensecunden, wie bei unsern Formeln vorausgesetzt ist, $\log r = 3{,}5346106$. Setzt man zuerst $T = 5^0\,42'$, so wird

$$\vec{o} = 3408''$$
$$B = 51^0\,17'\,40''$$
$$\tau = 424''$$

und folglich ein genäherterer Werth

$$T = 5^0\,38'\,50''$$

Die hiemit wiederholte Rechnung ergibt

$$\vec{o} = 3407''9$$
$$B = 51^0\,17'\,39''7$$
$$\tau = 420''55$$
$$T = 5^0\,38'\,51''5$$

Mit diesem Werthe von T wird nun die schärfere Rechnung angefangen und dabei zugleich die logarithmische Correction mit zugezogen. Es findet sich, in Einheiten der siebenten Decimale,

$$\mu rr = 99.76$$
$$\mu\lambda\lambda = 2.47$$
$$\mu\tau\tau = 1.50$$

folglich

$$\mu\lambda\lambda + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau = +3$$
$$\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\tau\tau = +101$$
$$-\tfrac{1}{2}\mu rr + \tfrac{1}{2}\mu\lambda\lambda = -49$$

und

$$\log\vec{o} = 3.5324974$$
$$\log b = 3.5324977$$
$$b = 3407''9852$$
$$B = 51^0\,17'\,39''6419$$
$$\log\tau = 2.6238492$$
$$\log t = 2.6238593$$
$$t = 420''5904$$
$$T = 5^0\,38'\,51''4752$$

Eine nochmalige Wiederholung der Rechnung mit diesem Werthe von T bringt bei b gar keine Änderung hervor, und t verwandelt sich in $420''5898$. Man erhält daher

Breite des Punkts Inselsberg

$$B^0 - \vec{o} = 50^0\,49'\,15''6493$$

Azimuth der Dreiecksseite Inselsberg-Brocken

$$T^0 - \tau + 180^0 = 185^0\,35'\,21''1806$$

Endlich findet sich

$$\log\lambda = 2.7315487$$
$$\log l = 2.7315438$$
$$l = 538''\,9442 = 0^0\,8'\,58''\,9442.$$

Die Bequemlichkeit dieses Verfahrens wird allerdings erst dann in ihrer vollen Grösse fühlbar, wenn man sich die Hülfen des kleinen Mechanismus bei Handhabung derartiger Methoden zu eigen gemacht hat, wozu eine Anweisung hier nicht an ihrem Platze sein würde. Ich begnüge mich hier nur anzudeuten, dass, was in obigem Beispiele wie eine viermalige Rechnung erscheint, nicht in der Form von vier getrennten Rechnungen, sondern wie eine einzige geschrieben werden soll, indem man bei jeder neuen Überarbeitung nur die letzten Zifern ergänzt oder verbessert. Jedenfalls braucht man immer nur die letzte Rechnung aufzubewahren, und gerade darin besteht ein grösser Vortheil, zumal bei Messungen von bedeutendem Umfange, dass man dann den ganzen wesentlichen Kern der Berechnung für alle Dreiecksseiten im möglich kleinsten Raume und in der übersichtlichsten zu beliebiger Prüfung der Richtigkeit geeignetsten Form besitzt.

21.

Ich gehe jetzt zu der Hauptaufgabe selbst über, welche für die Ellipsoidfläche eine ähnliche Methode fordert, wie für die Kugelfläche im Vorhergehenden gegeben ist. Die Auflösung dieser allerdings etwas verwickelten Aufgabe soll hier auf zwei ganz von einander verschiedenen Wegen abgeleitet werden. Da die eine Ableitung, mit welcher der Anfang gemacht werden wird, sich auf diejenige conforme Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche gründet, deren Theorie in der ersten Abhandlung entwickelt ist, so kann die Auffindung dieser Auflösung wie die *erste mittelbare* Benutzung dieser Theorie für die Zwecke der höhern Geodaesie betrachtet werden (Vergl. Art. 11).

Es mögen demnach jetzt durch $B+\frac{1}{2}b$ und $B-\frac{1}{2}b$ die Breiten zweier Punkte auf der Ellipsoidfläche bezeichnet werden; ihr Längenunterschied durch l; das zwischen ihnen enthaltene Stück einer geodaetischen Linie (und zwar hier nach beliebiger Einheit gemessen) durch r; die Azimuthe der Linie am ersten und zweiten Endpunkte durch $T+\frac{1}{2}t$ und $T-\frac{1}{2}t\pm 180^0$ Es handelt sich also darum, b, l und t aus r, B und T zu finden durch Formeln, welche den oben

für die Kugelfläche gegebenen analog sind, und in dieselben übergehen, wenn man die Excentricität $= 0$, oder die beiden Halbachsen der erzeugenden Ellipse unter sich gleich und $= 1$ setzt.

Die Breite des der conformen Übertragung auf die Kugelfläche zum Grunde liegenden Normalparallelkreises bezeichne ich (wie oben Art. 3) mit P für die Ellipsoidfläche, und mit Q für die Kugelfläche; zugleich nehme ich an, dieser Normalparallelkreis sei so gewählt, dass Q dem arithmetischen Mittel der Breiten der beiden betreffenden Punkte auf der Kugelfläche gleich wird: diese Breiten selbst seien $Q+\frac{1}{2}q$ und $Q-\frac{1}{2}q$. Es sollen ferner a, A, α, e, φ, ϑ dieselben Bedeutungen behalten, wie in der ersten Abhandlung, Art. 2. 3. 4 ff.; es bedeuten nemlich

a die halbe grosse Achse des Ellipsoids, oder den Halbmesser des Äquators,
A den Halbmesser der Kugel,
$1:\alpha$ das constante Verhältniss der Längenunterschiede auf dem Ellipsoid zu den entsprechenden auf der Kugel,
$e = \sin\varphi$ die Excentricität der erzeugenden Ellipse,
$\sin\vartheta = e\sin P$.

Den zwischen den beiden Punkten auf der Kugelfläche enthaltenen Grösstekreisbogen bezeichne ich mit s; die Azimuthe dieses Bogens am ersten und zweiten Endpunkte mit $U+\frac{1}{2}u$ und $U-\frac{1}{2}u\pm 180^0$. Erwägt man nun noch, dass der Längenunterschied zwischen beiden Punkten $= \alpha l$ ist, so findet man zunächst die vier strengen Formeln

$$\sin\tfrac{1}{2}s.\cos U = \cos\tfrac{1}{2}\alpha l.\sin\tfrac{1}{2}q$$
$$\sin\tfrac{1}{2}s.\sin U = \sin\tfrac{1}{2}\alpha l.\cos Q$$
$$\cos\tfrac{1}{2}s.\cos\tfrac{1}{2}u = \cos\tfrac{1}{2}\alpha l.\cos\tfrac{1}{2}q$$
$$\cos\tfrac{1}{2}s.\sin\tfrac{1}{2}u = \sin\tfrac{1}{2}\alpha l.\sin Q$$

und hieraus die näherungsweise richtigen

$$q = s.\cos U(1+{}^1{}_{24}qq-{}^1{}_{24}ss+\tfrac{1}{4}\alpha\alpha ll) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
$$\alpha l = s.\tfrac{\sin U}{\cos Q}(1-{}^1{}_{24}ss+{}^1{}_{24}\alpha\alpha ll) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
$$u = s.\sin U.\operatorname{tang} Q(1+{}^1{}_{12}ss+{}^1{}_{24}uu) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Es ist unnöthig zu erinnern, dass in diesen drei Gleichungen l, q, s, u in Theilen des Halbmessers ausgedrückt verstanden werden. Man sieht leicht, dass sie

bis auf die fünfte Ordnung (ausschl.) richtig sind, indem s wie eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird, und dass man, ohne den Grad der Schärfe zu vermindern, in den eingeklammerten Gliedern rechter Hand statt q, al und u auch $s.\cos U$, $s.\frac{\sin U}{\cos Q}$, $s.\sin U.\tang Q$ substituiren darf.

22.

Es müssen nun zuvörderst die Grössen B, b, T, t, r, welche auf der Ellipsoidfläche ihre Bedeutung haben, mit ihren Correlaten auf der Kugelfläche Q, q, U, u, As verglichen werden. Alle dafür hier aufzustellenden Gleichungen werden bis wenigstens auf die dritte Ordnung (einschl.) genau sein, und, dass dieser Bedingung genügt werde, wird sich aus der Entwicklung selbst leicht erkennen lassen.

Wendet man die im 8. Art. gegebene Reihe auf unsere beiden Punkte an, so müssen die dort allgemein mit p und q bezeichneten Grössen nach unserer jetzigen Bezeichnung ausgedrückt werden

für den ersten Punkt durch $B+\frac{1}{2}b-P$ und $\frac{1}{2}q$
für den zweiten Punkt durch $B-\frac{1}{2}b-P$ und $-\frac{1}{2}q$

und wir haben demnach die beiden Gleichungen

$$B+\tfrac{1}{2}b = P+\tfrac{\cos\vartheta}{2\cos\varphi}.q-\tfrac{3ee}{8\cos\varphi^2}.\cos P.\sin P.qq + \tfrac{ee}{16\cos\varphi^3\cos\vartheta}(-\cos P^2+\sin P^2+ee(5\cos P^2.\sin P^2-\sin P^4))q^3$$

$$B-\tfrac{1}{2}b = P-\tfrac{\cos\vartheta}{2\cos\varphi}.q-\tfrac{3ee}{8\cos\varphi^2}.\cos P.\sin P.qq - \tfrac{ee}{16\cos\varphi^3\cos\vartheta}(-\cos P^2+\sin P^2+ee(5\cos P^2.\sin P^2-\sin P^4))q^3$$

Durch Addition und Subtraction ergibt sich also

$$B = P-\tfrac{3ee}{8\cos\varphi^2}.\cos P.\sin P.qq \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$b = \tfrac{\cos\vartheta}{\cos\varphi}.q+\tfrac{ee}{8\cos\varphi^3\cos\vartheta}(-\cos P^2+\sin P^2+ee(5\cos P^2.\sin P^2-\sin P^4))q^3 \quad (5)$$

Man sieht übrigens leicht, dass die Gleichung (4) um Grössen vierter, die Gleichung (5) hingegen nur um Grössen fünfter Ordnung ungenau ist.

Um T und t mit U und u zu vergleichen, werden die am Schluss des 15. Art. entwickelten Formeln benutzt werden müssen, denen eine Voraussetzung

zum Grunde lag, welcher in der gegenwärtigen Untersuchung genügt ist. Man hat dabei nur zu erwägen, dass die dortigen ψ^0 und ψ' nichts anderes sind, als hier $T+\frac{1}{2}t-(U+\frac{1}{2}u)$ und $T-\frac{1}{2}t-(U-\frac{1}{2}u)$; ferner das dortige h dasselbe was hier s; endlich dass das dortige χ von der hier mit U bezeichneten Grösse im Allgemeinen nur um eine Grösse zweiter Ordnung verschieden sein kann, jedenfalls aber der Unterschied wenigstens von der ersten Ordnung ist. Es ergibt sich so, auf die dritte Ordnung einschl. genau

$$T+\tfrac{1}{2}t = U+\tfrac{1}{2}u-\tfrac{ee\cos P.\sin P.\sin U.\cos U^2}{12\cos\varphi\cos\vartheta}.s^3$$

$$T-\tfrac{1}{2}t = U-\tfrac{1}{2}u+\tfrac{ee\cos P.\sin P.\sin U.\cos U^2}{12\cos\varphi\cos\vartheta}.s^3$$

und folglich, eben so genau,

$$T = U \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$t = u-\tfrac{ee\cos P.\sin P.\sin U.\cos U^2}{6\cos\varphi\cos\vartheta}.s^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Die Vergleichung der Länge der geodaetischen Linie auf dem Ellipsoid mit dem Grösstekreisbogen auf der Kugel ist zwar in Art. 15 für den in Rede stehenden Fall nicht besonders entwickelt: es ist jedoch sehr leicht, diess zu ergänzen. Es ist nemlich in den dortigen Bezeichnungen die Länge des geodaetischen Bogens

$$= A\int\tfrac{\cos y}{m\cos\psi}.\mathrm{d}x$$

welche Integration von $x=-\frac{1}{2}(h-\delta)$ bis $x=+\frac{1}{2}(h+\delta)$ auszudehnen ist. Da y und ψ nur Grössen von der dritten Ordnung sind, so sieht man leicht, dass die Weglassung des Factors $\frac{\cos y}{\cos\psi}$ in dem Werthe des Integrals nur einen Fehler der siebenten Ordnung hervorbringen kann. Jene Länge ist also, bis auf die fünfte Ordnung einschl. genau,

$$= A\int\tfrac{\mathrm{d}x}{m} = A\int\mathrm{d}x(1-\mu x^3-\mu' x^4)$$
$$= A(x-\tfrac{1}{4}\mu x^4-\tfrac{1}{5}\mu' x^5)+\text{Const.}$$
$$= A\{h-\tfrac{1}{8}(h^3\delta+h\delta^3)\mu-\tfrac{1}{80}(h^3+10h^2\delta\delta+5h\delta^4)\mu'\}$$

Die Coëfficienten μ, μ' lassen sich angeben, wenn man in der Reihe

$$m = 1-\tfrac{2ee\cos P.\sin P}{3\cos\varphi\cos\vartheta}.q^3-\tfrac{ee\cos P^2}{6\cos\varphi^2\cos\vartheta^2}(1-7ee\sin P^2)q^4$$

(welche von selbst aus der Art. 9 gegebenen folgt) für q die Substitution macht

$$q = -\cos\chi . x - \tfrac{1}{2}\operatorname{tang} Q . \sin\chi^2 xx \quad . \quad .$$

(deren leichte Ableitung hier weggelassen werden kann), und das Resultat mit der Reihe

$$m = 1 + \mu x^3 + \mu' x^4 \quad . \quad .$$

zusammenhält. Für unsern gegenwärtigen Zweck ist jedoch mehr nicht nöthig, als nachzuweisen, dass die gesuchte Länge des geodaetischen Bogens von Ah nicht mehr als um eine Grösse fünfter Ordnung abweicht. Da nun ersichtlich $h^5 + 10h^3\delta\delta + 5h\delta^4$ eine solche Grösse ist, so braucht der entwickelte Werth von μ' nicht hiehergesetzt zu werden. Für μ aber ergibt sich der Werth

$$\mu = \frac{2ee\cos P . \sin P}{3\cos\varphi\cos\vartheta} . \cos\chi^3$$

und da $\delta\cos\chi$ nach Art. 15 eine Grösse zweiter Ordnung ist, so wird offenbar auch $(h^3\delta + h\delta^3)\mu$ eine Grösse fünfter Ordnung.

Wir haben demnach, da h dasselbe bedeutet, was jetzt mit s bezeichnet ist, bis auf die fünfte Ordnung ausschliesslich genau

$$s = \frac{r}{A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Endlich, damit alles für die weitere Entwicklung erforderliche hier beisammen sei, setze ich noch folgende schon in der ersten Abhandlung (Art. 4, 6 und 3) gebrauchte strenge richtige Gleichungen hieher:

$$A = \frac{a\cos\varphi}{\cos\vartheta^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\cos Q = \frac{\cos\vartheta\cos P}{a\cos\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\sin Q = \frac{\sin P}{a}$$

und die aus der Verbindung dieser beiden hervorgehende

$$\operatorname{tang} Q = \frac{\cos\varphi\operatorname{tang} P}{\cos\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

23.

Zur Erreichung unsers Zwecks brauchen nun bloss diese Gleichungen gehörig combinirt zu werden.

Zuvörderst ergibt sich aus der Verbindung der Gleichungen (1), (2), (3), dass $qq + \alpha\alpha ll - uu - ss$ eine Grösse vierter Ordnung ist, daher man anstatt (2) auch schreiben kann

$$l = \frac{s . \sin U}{a . \cos Q}(1 - \tfrac{1}{24} qq + \tfrac{1}{24} uu)$$

oder wenn man nach (8), (9) und (10)

$$s = \frac{r\cos\vartheta^2}{a\cos\varphi}, \qquad \alpha\cos Q = \frac{\cos\vartheta\cos P}{\cos\varphi}$$

schreibt,

$$l = \frac{r\cos\vartheta\sin U}{a\cos P}(1 - \tfrac{1}{24} qq + \tfrac{1}{24} uu)$$

Es wird ferner $\frac{\cos\vartheta}{\cos P} = \frac{\sqrt{(1 - ee\sin P^2)}}{\cos P}$ vermittelst der Gleichung (4) und durch eine leichte Rechnung entwickelt in

$$\frac{\cos\vartheta}{\cos P} = \frac{\sqrt{(1 - ee\sin B^2)}}{\cos B}\left(1 + \frac{3ee\sin P^2}{8(1 - ee\sin P^2)} . qq\right)$$

was bis auf die vierte Ordnung ausschl. genau ist. Wir haben daher, wenn zugleich T für U geschrieben wird, gemäss der Gleichung (6),

$$l = \frac{r\sqrt{(1 - ee\sin B^2)} . \sin T}{a\cos B}\left(1 - \frac{1 - 10ee\sin P^2}{24(1 - ee\sin P^2)} . qq + \tfrac{1}{24} uu\right)$$

Nachdem in dem eingeklammerten Theile noch substituirt ist $\frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1 - ee\sin P^2)}} . b$ für q, sodann t für u und endlich B für P, was alles, nach Gleichung (5), (7), (4), wie man leicht sieht, geschehen kann, ohne den Grad der Genauigkeit zu vermindern, und wenn wir ausserdem, zur Abkürzung,

$$\sqrt{(1 - ee\sin B^2)} = k$$

schreiben, so erhalten wir (I)

$$l = \frac{kr\sin T}{a\cos B}\left(1 - \frac{(1 - 10ee\sin B^2)\cos\varphi^2}{24k^4} . bb + \tfrac{1}{24} tt\right)$$

24.

Auf ähnliche Weise verwandelt sich Gleichung (1) in

$$q = s\cos U(1 - \tfrac{1}{12} qq + \tfrac{1}{12} ss + \tfrac{1}{2} uu)$$

und daher Gleichung (5) in

$$b = \frac{r\cos\vartheta^2\cos U}{a\cos\varphi^2}\{1-[\tfrac{1}{12}+\frac{ee}{8\cos\varphi^2\cos\vartheta^2}(\cos P^2-\sin P^2-ee(5\cos P^2\sin P^2-\sin P^4))]qq + \tfrac{1}{12}ss+\tfrac{1}{8}uu\}$$

Für $\cos\vartheta^2 = (1-ee\sin P^2)^2$ findet man leicht die vermittelst (4) so weit, wie hier nöthig ist, geführte Entwickelung

$$\cos\vartheta^2 = (1-ee\sin B^2)^2(1-\frac{9e^4\cos P^2\sin P^2}{8\cos\varphi^2(1-ee\sin P^2)}\cdot qq)$$

wodurch die vorhergehende Gleichung sich verwandelt in

$$b = \frac{r(1-ee\sin B^2)^2\cos U}{a\cos\varphi^2}\{1-[\tfrac{1}{12}+\frac{ee}{8\cos\varphi^2(1-ee\sin P^2)}(\cos P^2-\sin P^2 + ee(4\cos P^2\sin P^2+\sin P^4))]qq+\tfrac{1}{12}ss+\tfrac{1}{8}uu\}$$

oder in einer etwas veränderten Form

$$b = \frac{rk^3\cos U}{a\cos\varphi^2}\{1-\frac{1}{24\cos\varphi^2(1-ee\sin P^2)}(2+ee-(8ee-14e^4)\sin P^2-9e^4\sin P^4)qq + \tfrac{1}{12}ss+\tfrac{1}{8}uu\}$$

Schreibt man nun noch hierin

$\frac{\cos\varphi\,.\,b}{\sqrt{(1-ee\sin P^2)}}$ anstatt q, wegen (5)

$\frac{rr(1-ee\sin P^2)^2}{aa\cos\varphi^2}$ anstatt ss, wegen (8) und (9)

T und t anstatt U und u, wegen (6) und (7)

und zuletzt

B für P wegen (4),

was alles, ohne Nachtheil für die Genauigkeit geschehen kann, so erhält man (II)

$$b = \frac{rk^3}{a\cos\varphi^2}\cdot\cos T\{1-\frac{1}{24k^4}(2+ee-(8ee-14e^4)\sin B^2-9e^4\sin B^4)\,.\,bb + \frac{k^4}{12aa\cos\varphi^2}\cdot rr+\tfrac{1}{8}tt\}$$

25.

Aus den Gleichungen (1) und (3) erhellet, dass qqu von $s^3\cos U^2\sin U\tang Q$, oder nach (11), von $\frac{s^3\cos\varphi\cos U^2\sin U\,.\,\tang P}{\cos\vartheta}$ nur um eine Grösse fünfter Ordnung verschieden ist: es ist daher verstattet, die Gleichung (7) auch so zu schreiben

$$t = u(1-\frac{ee\cos P^2}{6\cos\varphi^2}\cdot qq)$$

oder wenn man für u den Werth aus (3) substituirt, und nach (8), (9), (11),

$$s = \frac{r\cos\vartheta^2}{a\cos\varphi} = \frac{r\cos\vartheta\tang P}{a\tang Q}$$

setzt

$$t = \frac{r\cos\vartheta\tang P\,.\sin U}{a}(1+\tfrac{1}{24}uu+\tfrac{1}{12}ss-\frac{ee\cos P^2}{6\cos\varphi^2}\cdot qq)$$

Für $\cos\vartheta\,.\tang P = \sqrt{(1-ee\sin P^2)}\,.\tang P$ findet man nach (4) den so weit wie hier nöthig ist entwickelten Werth

$$\sqrt{(1-ee\sin B^2)}\,.\tang B(1+\frac{3ee-6e^4\sin P^2+3e^4\sin P^4}{8\cos\varphi^2(1-ee\sin P^2)}\cdot qq)$$

und folglich

$$t = \frac{rk\tang B\sin U}{a}(1+\frac{5ee+(4ee-14e^4)\sin P^2+5e^4\sin P^4}{24\cos\varphi^2(1-ee\sin P^2)}\cdot qq+\tfrac{1}{12}ss+\tfrac{1}{24}uu)$$

Macht man nun noch hierin dieselben Substitutionen, wie im vorhergehenden Art., so erhält man als Endresultat (III)

$$t = \frac{rk\tang B\,.\sin T}{a}(1+\frac{5ee+(4ee-14e^4)\sin B^2+5e^4\sin B^4}{24k^4}\,.\,bb+\frac{k^4}{12aa\cos\varphi^2}\,.\,rr+\tfrac{1}{24}tt)$$

Die drei Formeln I, II, III enthalten im Wesentlichen die Auflösung unsrer Aufgabe. Dass sie bis zur dritten Ordnung einschliesslich genau sind, steht durch ihre Ableitung unmittelbar fest. Dass aber in der Wirklichkeit ihre Genauigkeit noch eine Ordnung weiter reicht, oder dass der Fehler jeder der Formeln von der fünften Ordnung ist, würde sich leicht durch einige ergänzende Zwischenentwicklungen, oder auch dadurch darthun lassen, dass in den Ausdrücken ihrer Natur nach keine Grössen gerader Ordnung Statt finden können: ich halte mich jedoch dabei nicht auf, da die *zweite* in den folgenden Artikeln (26 — 32) auszuführende Ableitung der Formeln dasselbe Resultat von selbst in sich begreift.

26.

Diese Untersuchung ist wie eine selbständige von allem vorhergehenden unabhängige zu betrachten, und es sollen daher zur Bequemlichkeit und zur Verhütung von Ungewissheiten alle dabei zu verwendenden Bezeichnungen so wie sie auftreten erst erklärt werden. Meistens werden diejenigen Buchstaben, welche schon in der ersten Ableitung gebraucht sind, ihre dortige Bedeutung behalten, doch werden ein Paar derselben (u und s), da sie dort bloss Hülfsgrössen vorstel-

len, die in den Resultaten nicht mehr erscheinen, hier ohne Übelstand zu anderm Zweck benutzt werden dürfen.

Durch die zwei Punkte der Ellipsoidfläche, auf welche die Aufgabe sich bezieht, werde eine geodaetische Linie, zunächst von unbestimmter Ausdehnung, geführt, und auf derselben ein beliebiger Anfangspunkt gewählt. Das Stück jener Linie von dem Anfangspunkte bis zu einem unbekannten Punkte werde durch u bezeichnet; der Winkel, welchen, an letzterm Punkte, die geodaetische Linie mit dem Meridian macht, jene in dem Sinne wachsender u, diesen von Norden nach Süden genommen, durch X; Breite und Länge des unbestimmten Punktes durch Y und Z. Ich nehme an, dass die Längen von Westen nach Osten, die Azimuthe X in dem Sinn von Süden nach Westen zu wachsen. Werden nun noch, wie immer bisher, halbe grosse Achse und Excentricität der erzeugenden Ellipse durch a und e bezeichnet, so hat man, aus bekannten Gründen

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}u} = -\frac{\cos X(1-ee\sin Y^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-ee)a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = -\frac{\sin X(1-ee\sin Y^2)^{\frac{1}{2}}}{a\cos Y} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Es ist ferner, nach einem bekannten Lehrsatze die Grösse

$$\frac{\sin X\cos Y}{\sqrt{(1-ee\sin Y^2)}}$$

für alle Punkte derselben geodaetischen Linie constant, und hieraus, wenn man logarithmisch differentiirt

$$\operatorname{cotang} X\,\mathrm{d}X = (\operatorname{tang} Y - \frac{ee\cos Y\sin Y}{1-ee\sin Y^2})\,\mathrm{d}Y = \frac{(1-ee)\operatorname{tang} Y}{1-ee\sin Y^2}\,\mathrm{d}Y$$

folglich, aus der Verbindung mit (1),

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u} = -\frac{\sin X\operatorname{tang} Y(1-ee\sin Y^2)^{\frac{1}{2}}}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Wir wollen jedoch unsere Aufgabe allgemeiner fassen, und

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}u} = x, \quad \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}u} = y, \quad \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = z$$

setzen, indem wir zunächst nur voraussetzen, dass x, y, z irgendwelche gegebene Functionen der beiden Veränderlichen X und Y sind. Es entstehe ferner durch neue Differentiation

$$\mathrm{d}x = x'\mathrm{d}X + x''\mathrm{d}Y$$
$$\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}X + y''\mathrm{d}Y$$
$$\mathrm{d}z = z'\mathrm{d}X + z''\mathrm{d}Y$$

und dann durch nochmalige Differentiation

$$\mathrm{d}x' = x'''\mathrm{d}X + x''''\mathrm{d}Y, \quad \mathrm{d}x'' = x''''\mathrm{d}X + x^{\mathrm{V}}\mathrm{d}Y$$
$$\mathrm{d}y' = y'''\mathrm{d}X + y''''\mathrm{d}Y, \quad \mathrm{d}y'' = y''''\mathrm{d}X + y^{\mathrm{V}}\mathrm{d}Y$$
$$\mathrm{d}z' = z'''\mathrm{d}X + z''''\mathrm{d}Y, \quad \mathrm{d}z'' = z''''\mathrm{d}X + z^{\mathrm{V}}\mathrm{d}Y$$

Es wird demnach, insofern Z, implicite, nur eine Function von u ist,

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = z$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u^2} = xz' + yz''$$
$$\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}u^3} = xx'z' + xy'z'' + x''yz' + yy''z'' + xxz''' + 2xyz'''' + yyz^{\mathrm{V}}$$

Die successiven Differentialquotienten von X und Y lassen sich auf dieselbe Art entwickeln, oder unmittelbar aus denen von Z ableiten, wenn man nur darin für z ohne und mit Accenten beziehungsweise x und y ebenso accentuirt substituirt.

27.

Es seien nun die *bestimmten* Werthe, welche die vier Grössen u, X, Y, Z in den beiden Punkten annehmen, auf welche unsre Aufgabe sich bezieht, der Reihe nach,

für den ersten Punkt $R-\frac{1}{2}r, \quad T+\frac{1}{2}t, \quad B+\frac{1}{2}b, \quad L+\frac{1}{2}l$
für den zweiten Punkt $R+\frac{1}{2}r, \quad T-\frac{1}{2}t, \quad B-\frac{1}{2}b, \quad L-\frac{1}{2}l$

und eben so, für denjenigen Punkt der geodaetischen Linie, welcher zwischen jenen in der Mitte liegt, beziehungsweise R, T, B, L, wo demnach die Cursivtypen T, B, L von den Antiqua T, B, L wohl unterschieden werden müssen.

Es mögen ferner die in der Gestalt von Functionen von X und Y erscheinenden achtzehn unbestimmten Grössen

$$x, x', x'', x''', x'''', x^{\mathrm{V}}$$
$$y, y', y'', y''', y'''', y^{\mathrm{V}}$$
$$z, z', z'', z''', z'''', z^{\mathrm{V}}$$

durch die Substitution $X = T$, $Y = B$ die bestimmten Werthe

$$\begin{array}{l} f,\ f',\ f'',\ f''',\ f'''',\ f^{\mathrm{V}} \\ g,\ g',\ g'',\ g''',\ g'''',\ g^{\mathrm{V}} \\ h,\ h',\ h'',\ h''',\ h'''',\ h^{\mathrm{V}} \end{array}$$

annehmen; hingegen durch die Substitution $X = \mathrm{T}$, $Y = \mathrm{B}$ folgende

$$\begin{array}{l} \mathrm{f},\ \mathrm{f}',\ \mathrm{f}'',\ \mathrm{f}''',\ \mathrm{f}'''',\ \mathrm{f}^{\mathrm{V}} \\ \mathrm{g},\ \mathrm{g}',\ \mathrm{g}'',\ \mathrm{g}''',\ \mathrm{g}'''',\ \mathrm{g}^{\mathrm{V}} \\ \mathrm{h},\ \mathrm{h}',\ \mathrm{h}'',\ \mathrm{h}''',\ \mathrm{h}'''',\ \mathrm{h}^{\mathrm{V}} \end{array}$$

Durch den Taylorschen Lehrsatz wird der Werth von Z für $u = R - \frac{1}{2}r$ in die Reihe

$$\mathrm{L} - \tfrac{1}{2}r.\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} + \tfrac{1}{8}rr.\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u^2} + \tfrac{1}{48}r^3.\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}u^3} + \text{u. s. w.}$$

entwickelt, und der für $u = R + \frac{1}{2}r$ in

$$\mathrm{L} + \tfrac{1}{2}r.\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} + \tfrac{1}{8}rr.\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u^2} + \tfrac{1}{48}r^3.\frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}u^3} + \text{u. s. w.}$$

wo für die Differentialquotienten diejenigen bestimmten Werthe gesetzt werden müssen, welche dem Werthe $u = R$ entsprechen, also

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} &= \mathrm{h} \\ \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u^2} &= \mathrm{fh}' + \mathrm{gh}'' \\ \frac{\mathrm{d}^3Z}{\mathrm{d}u^3} &= \mathrm{ff}'\mathrm{h}' + \mathrm{fg}'\mathrm{h}'' + \mathrm{f}''\mathrm{gh}' + \mathrm{gg}''\mathrm{h}'' + \mathrm{ffh}''' + 2\,\mathrm{fgh}'''' + \mathrm{ggh}^{\mathrm{V}} \end{aligned}$$

Da nun jene beiden Werthe von Z beziehungsweise $= L + \frac{1}{2}l$ und $L - \frac{1}{2}l$ sind, so erhält man

$$L = \mathrm{L} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{fh}' + \mathrm{gh}'')rr \quad \ldots \quad (4)$$
$$l = -\mathrm{h}r - \tfrac{1}{24}(\mathrm{ff}'\mathrm{h}' + \mathrm{fg}'\mathrm{h}'' + \mathrm{f}''\mathrm{gh}' + \mathrm{gg}''\mathrm{h}'' + \mathrm{ffh}''' + 2\,\mathrm{fgh}'''' + \mathrm{ggh}^{\mathrm{V}})r^3 \quad \ldots \quad (5)$$

wo die erstere Gleichung bis auf Grössen der vierten, die andere bis auf Grössen der fünften Ordnung ausschl. genau ist*).

*) Die Bemessung der Ordnung geschieht so, dass $\frac{r}{a}$ wie eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird. Man erkennt leicht, dass die Coëfficienten von r, rr, r^3 u. s. w. die Divisoren a, aa, a^3 u. s. w. implicíren.

Wenn man erwägt, dass in der obigen Entwicklung in Beziehung auf Z nichts weiter vorausgesetzt ist, als dass es eine von u abhängige veränderliche Grösse ist, deren Differentialquotient $\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}u} = z$ durch irgend eine Function von X und Y ausgedrückt werde, so kann man die gefundenen Resultate auch unmittelbar auf jede andere in gleichem Falle sich befindende veränderliche Grösse, namentlich auf X oder Y selbst, übertragen, wenn man nur anstatt L, L, l und der verschieden accentuirten h beziehungsweise T, T, t und die verschiedenen f, oder B, B, b und die verschiedenen g einschiebt. Zunächst gibt uns demnach die Gleichung (4), von welcher hier sonst kein directer Gebrauch gemacht wird, folgende beiden, gleichfalls bis zur vierten Ordnung ausschl. genau:

$$T = \mathrm{T} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{ff}' + \mathrm{f}''\mathrm{g})rr$$
$$B = \mathrm{B} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{fg}' + \mathrm{gg}'')rr$$

Man schliesst hieraus zuvörderst, dass h und h, als die Werthe von z, je nachdem man T und B, oder T und B für X und Y substituirt, von einander um eine Grösse zweiter Ordnung verschieden sind, und zwar wird dieser Unterschied, bis auf die vierte Ordnung ausschl. genau, bestimmt durch die Formel

$$h = \mathrm{h} + \tfrac{1}{8}(\mathrm{ff}' + \mathrm{f}''\mathrm{g})rr.\left(\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}X}\right) + \tfrac{1}{8}(\mathrm{fg}' + \mathrm{gg}'')rr\left(\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Y}\right)$$

wo für die partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}X}\right)$ und $\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Y}\right)$, oder z', z'' ihre bestimmten Werthe bei $X = \mathrm{T}$, $Y = \mathrm{B}$ anzunehmen sind, nemlich h′ und h″. Es ist also, bis auf die vierte Ordnung genau,

$$\mathrm{h} = h - \tfrac{1}{8}(\mathrm{ff}'\mathrm{h}' + \mathrm{fg}'\mathrm{h}'' + \mathrm{f}''\mathrm{gh}' + \mathrm{gg}''\mathrm{h}'')rr$$

und vermöge der Substitution dieses Werths in der Gleichung (5) wird bis auf die fünfte Ordnung ausschl. genau

$$l = -hr + \tfrac{1}{24}(2\,\mathrm{ff}'\mathrm{h}' + 2\,\mathrm{fg}'\mathrm{h}'' + 2\,\mathrm{f}''\mathrm{gh}' + 2\,\mathrm{gg}''\mathrm{h}'' - \mathrm{ffh}''' - 2\,\mathrm{fgh}'''' - \mathrm{ggh}^{\mathrm{V}})r^3$$

Aus gleichen Gründen wie h von h, werden auch f, f′, f″ u. s. w. g, g′, g″ u. s. w. h′, h″ u. s. w von f, f', f'' u. s. w. g, g', g'' u. s. w. h', h'' u. s. w. beziehungsweise um Grössen zweiter Ordnung verschieden sein, und man kann daher in dem eben gegebenen Ausdruck für l anstatt jener Grössen die letztern ohne Verminderung des Grades der Genauigkeit substituiren. Es ist also gleichfalls bis auf die fünfte Ordnung ausschl. genau

$$l = -hr + \tfrac{1}{24}(2ff'h' + 2f'g'h + 2fg'h'' + 2gg''h - ffh''' - 2fgh'''' - ggh^{\mathrm{v}})r^3 \ldots (6)$$

Der obigen Bemerkung zufolge darf man nun auch in dieser Gleichung l mit t oder mit b vertauschen, wenn man nur

anstatt	$h,\ h',\ h'',\ h''',\ h'''',\ h^{\mathrm{v}}$
im erstern Falle	$f,\ f',\ f'',\ f''',\ f'''',\ f^{\mathrm{v}}$
und im andern	$g,\ g',\ g'',\ g''',\ g'''',\ g^{\mathrm{v}}$

setzt, so dass man hat

$$t = -fr + \tfrac{1}{24}(2ff'f' + 2f'f''g + 2ff''g' + 2f''gg' - fff'''' - 2ff''''g - f^{\mathrm{v}}gg)r^3 \ldots (7)$$
$$b = -gr + \tfrac{1}{24}(2ff'g' + 2f''gg' + 2fg'g'' + 2gg''g'' - ffg'''' - 2fggg'''' - ggg^{\mathrm{v}})r^3 \ldots (8)$$

28.

Die drei Formeln (6), (7), (8) enthalten bereits das Wesentliche zur Auflösung unsrer Aufgabe, so dass zu ihrer Vervollständigung nur noch eine mechanische Rechnung, nemlich die Entwicklung der Werthe der verschiedenen Differentialquotienten und deren Substitution übrig bleibt. Jene Entwicklung gibt, indem wir sofort anstatt der unbestimmten Werthe x, x' u. s. w. y u. s. w. die zu $X = T$, $Y = B$ gehörigen bestimmten f, f' u. s. w., g u. s. w. schreiben, und zur Abkürzung noch setzen

$$\cos B = c$$
$$\sin B = s$$
$$\sqrt{(1 - ee\sin B^2)} = k$$

folgende achtzehn Werthe:

$$f = -\frac{k\sin T}{ac}\cdot s$$
$$f' = -\frac{k\cos T}{ac}\cdot s$$
$$f'' = -\frac{\sin T}{ackc}\cdot(1 - 2eess + ees^4)$$
$$f''' = +\frac{k\sin T}{ac}\cdot s$$
$$f'''' = -\frac{\cos T}{ackc}\cdot(1 - 2eess + ees^4)$$
$$f^{\mathrm{v}} = -\frac{\sin T}{ak^3c^3}\cdot((2 - 3ee)s + (ee + 2e^4)s^3 - (2ee + e^4)s^5 + e^6s^7)$$

$$g = -\frac{k^3\cos T}{a(1-ee)}$$
$$g' = +\frac{k^3\sin T}{a(1-ee)}$$
$$g'' = +\frac{3kee\cos T}{a(1-ee)}\cdot cs$$
$$g''' = +\frac{k^3\cos T}{a(1-ee)}$$
$$g'''' = -\frac{3kee\sin T}{a(1-ee)}\cdot cs$$
$$g^{\mathrm{v}} = +\frac{3ee\cos T}{a(1-ee)k}\cdot(1 - (2 + 2ee)ss + 3ees^4)$$
$$h = -\frac{k\sin T}{ac}$$
$$h' = -\frac{k\cos T}{ac}$$
$$h'' = -\frac{\sin T}{acck}\cdot(1 - ee)s$$
$$h''' = +\frac{k\sin T}{ac}$$
$$h'''' = -\frac{\cos T}{acck}\cdot(1 - ee)s$$
$$h^{\mathrm{v}} = -\frac{(1-ee)\sin T}{ac^3k^3}\cdot(1 + ss - 2ees^4)$$

29.

Wir wollen nun die drei Gleichungen (7), (8), (6) in folgende Form setzen

$$t = -fr(1 + Frr)$$
$$b = -gr(1 + Grr)$$
$$l = -hr(1 + Hrr)$$

wo

$$-fr = \frac{k\sin T\,.\,\mathrm{tang}\,B}{a}\cdot r$$
$$-gr = \frac{k^3\cos T}{a(1-ee)}\cdot r$$
$$-hr = \frac{k\sin T}{ac\cos B}\cdot r$$

beziehungsweise die genäherten und bis auf die dritte Ordnung ausschl. genauen Werthe von t, b, l sind, die zur Abkürzung mit τ, β, λ bezeichnet werden sollen. Jede der Grössen F, G, H ist das Aggregat von sieben Theilen, nemlich

$$F = -\tfrac{1}{12}f'f' - \frac{f'f''g}{12f} - \tfrac{1}{12}f'''g' - \frac{f''gg}{12f} + \tfrac{1}{24}ff'''' + \tfrac{1}{12}f''''g + \frac{f'gg}{24f}$$
$$G = -\frac{ff'g'}{12g} - \tfrac{1}{12}f''g' - \frac{fg'g''}{12g} - \tfrac{1}{12}g''g'' + \frac{ffg'''}{24g} + \tfrac{1}{12}fg''' + \tfrac{1}{24}gg^{v}$$
$$H = -\frac{ff'h'}{12h} - \frac{f''gh'}{12h} - \frac{fg'h''}{12h} - \frac{gg''h''}{12h} + \frac{ffh''''}{24h} + \frac{fgh'''}{12h} + \frac{ggh^{v}}{24h}$$

30.

Die Werthe der sieben Bestandtheile von F ergeben sich der Reihe nach

1) $-\frac{kk\cos T^2}{12aacc}\cdot ss$
2) $-\frac{kk\cos T^2}{12aa(1-ee)cc}\cdot(1-2eess+ees^4)$
3) $+\frac{kk\sin T^2}{12aa(1-ee)cc}\cdot(1-2eess+ees^4)$
4) $+\frac{eekk\cos T^2}{4aa(1-ee)^2}\cdot(1-2eess+ees^4)$
5) $-\frac{kk\sin T^2}{24aacc}\cdot ss$
6) $+\frac{kk\cos T^2}{12aa(1-ee)cc}\cdot(1-2eess+ees^4)$
7) $+\frac{kk\cos T^2}{24aa(1-ee)^2cc}\cdot(2-3ee+(ee+2e^4)ss-(2ee+e^4)s^4)$

Hier destruiren die Bestandtheile 2 und 6 einander; 1, 4 und 7 vereinigen sich zu

$$+\frac{kk\cos T^2}{24aa(1-ee)^2}\cdot(2+3ee+(2ee-12e^4)ss+5e^4s^4)$$

die Bestandtheile 3 und 5 hingegen zu

$$+\frac{kk\sin T^2}{24aa(1-ee)cc}\cdot(2-(1+3ee)ss+2ees^4)$$

oder, da $2-(1+3ee)ss+2ees^4$ identisch ist mit $2cckk+(1-ee)ss$, zu

$$+\frac{k^4\sin T^2}{12aa(1-ee)}+\frac{kk\sin T^2}{24aacc}\cdot ss$$

Indem man nun noch $\frac{k^4\sin T^2}{12aa(1-ee)}$ in

$$\frac{k^4}{12aa(1-ee)}-\frac{k^4\sin T^2}{12aa(1-ee)}$$

verwandelt, und alles vereinigt, erhält man

$$F=\frac{k^4}{12aa(1-ee)}+\frac{kk\sin T^2\tang B^2}{24aa}+\frac{kk\cos T^2}{24aa(1-ee)^2}\cdot(5ee+(4ee-14e^4)ss+5e^4s^4)$$

und hieraus, in Gemässheit von $t=\tau(1+Frr)$,

$$t=\tau\{1+\frac{k^4}{12aa(1-ee)}\cdot rr+\tfrac{1}{24}\tau\tau+\frac{1}{24k^4}(5ee+(4ee-14e^4)ss+5e^4s^4)\vec{6}\vec{6}\}\ldots(9)$$

31.

Für die sieben Bestandtheile von G ergeben sich folgende Werthe:

1) $+\frac{kk\sin T^2}{12aacc}\cdot ss$
2) $+\frac{kk\sin T^2}{12aa(1-ee)cc}\cdot(1-2eess+ees^4)$
3) $-\frac{eekk\sin T^2}{4aa(1-ee)}\cdot ss$
4) $-\frac{3e^4kk\cos T^2}{4aa(1-ee)^2}\cdot ccss$
5) $-\frac{kk\sin T^2}{24aacc}\cdot ss$
6) $+\frac{eekk\sin T^2}{4aa(1-ee)}\cdot ss$
7) $-\frac{eekk\cos T^2}{8aa(1-ee)^2}\cdot(1-(2+2ee)ss+3ees^4)$

Hier destruiren die Theile 3 und 6 einander; die übrigen vereinigen sich indem man einerseits 1, 2 und 5, andererseits 4 und 7 zusammenfasst, in

$$+\frac{kk\sin T^2}{24aa(1-ee)cc}\cdot(2+(1-5ee)ss+2ees^4)$$
$$-\frac{eekk\cos T^2}{8aa(1-ee)^2}\cdot(1-(2-4ee)ss-3ees^4)$$

Das erste Glied verwandelt sich, da $2+(1-5ee)ss+2ees^4$ mit $2cckk+3(1-ee)ss$ identisch ist, in

$$\frac{k^4\sin T^2}{12aa(1-ee)}+\frac{kk\sin T^2}{8aacc}\cdot ss$$

Lösen wir hier $\frac{k^4\sin T^2}{12aa(1-ee)}$ in $\frac{k^4}{12aa(1-ee)}-\frac{kk\cos T^2}{12aa(1-ee)}\cdot(1-eess)$ auf, so gibt die Vereinigung aller Theile

$$G=\frac{k^4}{12aa(1-ee)}+\frac{kk\sin T^2\tang B^2}{8aa}-\frac{kk\cos T^2}{24aa(1-ee)^2}\cdot(2+ee-(8ee-14e^4)ss-9e^4s^4)$$

und hieraus, in Gemässheit von $b=\vec{6}(1+Grr)$,

$$b=\vec{6}\{1+\frac{k^4}{12aa(1-ee)}\cdot rr+\tfrac{1}{8}\tau\tau-\frac{1}{24k^4}\cdot(2+ee-(8ee-14e^4)ss-9e^4s^4)\vec{6}\vec{6}\}\ldots(10)$$

32.

Endlich ergeben sich die Werthe der sieben Bestandtheile von H folgendermaassen:

1) $-\frac{kk\cos T^2}{aacc}\cdot ss$

2) $-\frac{kk\cos T^2}{12aa(1-ee)cc}\cdot(1-2eess+eees^4)$

3) $+\frac{kk\sin T^2}{12aacc}\cdot ss$

4) $+\frac{eekk\cos T^2}{4aa(1-ee)}\cdot ss$

5) $-\frac{kk\sin T^2}{24aacc}\cdot ss$

6) $+\frac{kk\cos T^2}{12aacc}\cdot ss$

7) $+\frac{kk\cos T^2}{24aa(1-ee)cc}\cdot(1+ss-2eess^4)$

Die Glieder 1 und 6 destruiren einander, die übrigen ergeben durch ihre Vereinigung

$$H=\frac{kk\sin T^2}{24aacc}\cdot ss-\frac{kk\cos T^2}{24aa(1-ee)}\cdot(1-10eess)$$

woraus, in Gemässheit von $l=\lambda(1+Hrr)$ hervorgeht

$$l=\lambda\left(1+\tfrac{1}{24}\tau\tau-\frac{1-ee}{24kk}\cdot(1-10eess)\vartheta\vartheta\right)\quad\ldots\ldots\quad(11)$$

Die Formeln 9, 10, 11, welche die Auflösung unsrer Aufgabe in sich fassen, unterscheiden sich von den Formeln III, II, I, (Artt. 25, 24, 23) bloss darin, dass jene innerhalb der Parenthesen da τ und ϑ haben, wo in diesen t und b steht, was, wie man leicht sieht, in den Endresultaten nur Unterschiede fünfter Ordnung hervorbringt: da nun jene, wie aus ihrer Ableitung erhellet, bis zur fünften Ordnung ausschl. genau sind, so ist bewiesen, dass auch die nach der ersten Methode gefundenen Formeln I, II, III (Art. 23—25) dieselbe Genauigkeit besitzen.

33.

Zur numerischen Berechnung wird man die Formeln 9, 10, 11 lieber in folgende logarithmische Form bringen, bei welcher offenbar der Grad der Genauigkeit unverändert bleibt; M bezeichnet darin den Modulus des gewählten Logarithmensystems:

$$\log t=\log\tau+\frac{Mk^4}{12aa(1-ee)}\cdot rr+\tfrac{1}{24}M\tau\tau+\frac{M}{24kk}(5ee+(4ee-14e^4)ss+5e^4s^4)\vartheta\vartheta$$

$$\log b=\log\vartheta+\frac{Mk^4}{12aa(1-ee)}\cdot rr+\tfrac{1}{48}M\tau\tau-\frac{M}{24kk}(2+ee-(8ee-14e^4)ss-9e^4s^4)\vartheta\vartheta$$

$$\log l=\log\lambda+\tfrac{1}{24}M\tau\tau-\frac{(1-ee)M}{24kk}(1-10eess)\vartheta\vartheta$$

Da, wie man leicht sieht, in allen bisher entwickelten Formeln die Grössen $t, \tau, b, \vartheta, l, \lambda$ als in Theilen des Halbmessers ausgedrückt angenommen sind, so wird man, wenn jene in Secunden ausgedrückt und dieselben Bezeichnungen für sie beibehalten werden sollen, den Formeln für τ, ϑ, λ (Art. 29) noch den Factor $\frac{1}{\rho}$ beifügen müssen; in den Gleichungen 9, 10, 11 hingegen, so wie in den daraus abgeleiteten logarithmischen, muss den Gliedern, die $\tau\tau$ oder $\vartheta\vartheta$ enthalten, noch der Factor $\rho\rho$ zugesetzt werden, wo ρ (eben so wie oben Art. 16 und 19) die Grösse des Bogens von einer Secunde in Theilen des Halbmessers bedeutet. Behält man nun auch noch μ in der oben gebrauchten Bedeutung bei, nemlich

$$\mu=\tfrac{1}{12}M\rho\rho$$

und schreibt zur Abkürzung

$$(1)=\frac{k}{a\rho}$$

$$(2)=\frac{k^3}{a(1-ee)\rho}$$

$$(3)=\frac{Mk^4}{12aa(1-ee)}$$

$$(4)=\frac{\mu}{2kk}(5ee+(4ee-14e^4)ss+5e^4s^4)$$

$$(5)=\frac{\mu}{2kk}(2+ee-(8ee-14e^4)ss-9e^4s^4)$$

$$(6)=\frac{(1-ee)\mu}{2kk}(1-10eess)$$

$$(7)=\tfrac{1}{2}\mu$$

so ist unsre Auflösung in folgenden sechs Formeln enthalten:

$$\tau=(1)r\sin T\operatorname{tang}B$$

$$\vartheta=(2)r\cos T$$

$$\lambda=(1)r\sin T\sec B$$

$$\log t=\log\tau+(3)rr+(4)\vartheta\vartheta+(7)\tau\tau$$

$$\log b=\log\vartheta+(3)rr-(5)\vartheta\vartheta+3(7)\tau\tau$$

$$\log l=\log\lambda-(6)\vartheta\vartheta+(7)\tau\tau$$

34.

Von den sieben Coëfficienten (1), (2) u. s. w. ist der letzte constant, nemlich

$$\log\ (7) = 7{,}6287228032\,(-20)$$
und $$\log 3\,(7) = 8{,}1058440580\,(-20)$$

die übrigen werden, sobald bestimmte Werthe für die Dimensionen des Ellipsoids gewählt sind, Functionen der Breite B, und lassen sich also in eine Tafel bringen, deren Argument B ist. Steht eine solche Tafel zu Gebote, so ist die Rechnung nach dieser Methode für das Ellipsoid eben so bequem, wie die Rechnung für die Kugel.

Ich füge am Schlusse dieser Abhandlung eine solche Tafel für die Zone von 51^0 bis 54^0 bei, in welcher die Werthe von B von Minute zu Minute fortschreiten, und bemerke dazu folgendes.

Von den Ellipsoidelementen ist die Tafel nur in so fern abhängig, als darin eine bestimmte Abplattung oder ein bestimmter Werth von e zum Grunde gelegt ist, derjenige nemlich, welchen die letzte von BESSEL ausgeführte Rechnung ergeben hat, und der auch der der ersten Abhandlung beigefügten Tafel zum Grunde liegt (s. Art. 5). Damit der Zahlenwerth von a bloss von der Abplattung abhängig werde, ist als Einheit nicht die Toise oder ein sonstiges willkürliches Maass angenommen, sondern der zehnmillionste Theil des Erdmeridians, wonach also a unmittelbar durch e vermittelst der Gleichung

$$\pi a\left(1-\tfrac{1}{4}ee-\tfrac{1\cdot 3}{4\cdot 16}e^4-\tfrac{1\cdot 3\cdot 15}{4\cdot 16\cdot 36}e^6-\tfrac{1\cdot 3\cdot 15\cdot 35}{4\cdot 16\cdot 36\cdot 64}e^8-\tfrac{1\cdot 3\cdot 15\cdot 35\cdot 63}{4\cdot 16\cdot 36\cdot 64\cdot 100}e^{10}-\text{ u. s. w.}\right) = 20000000$$

deren Gesetz offenbar ist, gefunden werden kann, oder vermittelst der ihr gleichgeltenden

$$a = \tfrac{20000000}{\pi}\left(1+\tfrac{1}{4}ee+\tfrac{7}{64}e^4+\tfrac{15}{256}e^6+\tfrac{579}{16384}e^8+\tfrac{1515}{65536}e^{10}+\text{ u. s. w.}\right)$$

Man findet so, mit jenem Werthe von e,

$$a = 6376851{,}447$$
$$\log a = 6{,}8046062999$$

Es versteht sich, dass bei Anwendung unsrer Tafel auch r erst in derselben Einheit ausgedrückt sein muss; um dies zu erreichen, wird man (gemäss dem von

BESSEL in Toisen angegebenen Werthe von a, Art. 5), wenn r ursprünglich in Toisen ausgedrückt war, zu dem Logarithmen hinzuzusetzen haben

0,2897827662

oder, wenn r ursprünglich in französichen gesetzlichen Metern gegeben war, wird von dem Logarithmen subtrahirt werden müssen

0,0000371638

Die Glieder, welche die Factoren (3), (4) u. s. w. enthalten, können als Correction betrachtet werden, durch welche die genäherten Logarithmen $\log\tau$, $\log\sigma$, $\log\lambda$ in die berichtigten $\log t$, $\log b$, $\log l$ verwandelt werden. Diese Correctionen sind in allen Fällen, für welche unsere Methode angewandt werden soll, nur sehr kleine Decimalbrüche, und da jene Logarithmen in der Regel siebenzifrig gerechnet werden, so ist es bequem, auch jene Correctionen sofort in Einheiten der siebenten Decimale ausgedrückt zu erhalten. Dies geschieht, indem man den Coëfficienten (3), (4) u. s. w. anstatt der im vorhergehenden Art. angegebenen Werthe zehnmillionenmal grössere beilegt, oder ihre Logarithmen um sieben Einheiten vergrössert. Auf diese Weise sind sie in unserer Tafel angesetzt, und so wird denn auch

$$\log\ (7) = 4{,}62872\ (-10)$$
$$\log 3\,(7) = 5{,}10584\ (-10)$$

gesetzt werden. Übrigens sind auch so noch (3), (4), (5), (6), eben so wie (1) und (2) ächte Brüche, oder ihre Logarithmen an sich negativ: in der Tafel stehen sie aber nach üblicher Art, indem sämmtlichen Logarithmen 10 Einheiten geborgt sind.

35.

Von der Benutzung unsrer Formeln zur Auflösung der zu Anfang dieser Abhandlung aufgestellten Aufgabe gilt nun alles, was oben (Art. 20) in Beziehung auf dieselbe Aufgabe für die Kugelfläche gesagt ist, fast unverändert und unter geringen Modificationen. Bezeichnet man die wirklich gegebenen Grössen, nemlich die Breite und das Azimuth an dem ersten Orte mit B^0 und T^0, so wird man zuerst, von einem genäherten Werthe von T ausgehend (wofür man in Er-

mangelung aller andern Kenntniss T^0 annehmen mag), die vier Formeln berechnen

$$\begin{aligned} \vec{6} &= (2)r\cos T \\ B &= B^0 - \tfrac{1}{2}\vec{6} \\ \tau &= (1)r\sin T\,\mathrm{tang}\,B \\ T &= T^0 - \tfrac{1}{2}\tau \end{aligned}$$

und zwar wird man den Werth von (2), der aus der Tafel mit dem Argument B entnommen werden sollte, das erstemal mit dem Argument B^0 entnehmen können, wenn man nicht durch Schätzung einen schon mehr genäherten Werth von B anticipiren zu können glaubt; den Werth von (1) nimmt man aus der Tafel mit dem eben gefundenen Werthe von B.

Dieselbe Rechnung wiederholt man mit dem durch die vierte Gleichung gefundenen Werthe von T, indem man (1) und (2) mit dem schon verbesserten B aus der Tafel entlehnt; und so macht man nöthigenfalls eine abermalige Wiederholung, bis das Resultat zum Stehen kommt, d. i. bis man durch die vierte Formel denselben Werth von T wiedererhält, von dem man zuletzt ausgegangen war. Zu allen diesen Rechnungen wird man nur fünfzifrige Logarithmen verwenden.

Bei den weitern Wiederholungen wird man die Rechnung mit siebenzifrigen Logarithmen führen, die logarithmischen Correctionen von $\log\tau$ und $\log\vec{6}$ mit zuziehen, und $B = B^0 - \frac{1}{2}b$, $T = T^0 - \frac{1}{2}t$ setzen. Erst wenn auch diese Rechnung stehende Resultate gegeben hat, wird man auch λ und l nach den am Schluss des 33. Art. gegebenen Formeln berechnen. Zur Erläuterung dieser Vorschriften mögen hier die Hauptmomente eines Beispiels stehen, welches eben so wie oben Art. 20 bei der sphärischen Rechnung von der Dreiecksseite Brocken-Inselsberg hergenommen ist.

Bei der ellipsoidischen Rechnung ist die Breite des Brockens

$$= 51^0\,48'\;\;1''\,9294 = B^0$$

das Azimuth der Seite Brocken-Inselsberg

$$= \;\;5^0\,42'\,21''\,7699 = T^0$$

Der Logarithm der Dreiecksseite in Toisen ist bis auf die siebente Decimale derselbe wie in der conformen Darstellung auf der Kugelfläche, nemlich $= 4{,}7353929$, folglich in der unsrer Hülfstafel zum Grunde liegenden Einheit $\log r = 5{,}0251757$.

Wenn man, Behuf der ersten Annäherung, $T = 5^0\,42'\,22''$, und aus der Tafel mit Argument $51^0\,48'$ den Logarithmen von $(2) = 8{,}51004$ setzt, so findet sich $\vec{6} = 3412''$, $B = 51^0\,19'\,36''$; und, wenn man hiemit $\log(1) = 8{,}50893$ setzt, $\tau = 425$ und $T = 5^0\,38'\,49''$. Eine neue Rechnung mit diesem Werthe, wobei man (mit dem vorher gefundenen Werthe von B) $\log(2) = 8{,}51007$ setzt, ergibt

$$\vec{6} = 3413'',\quad B = 51^0\,19'\,35'',\quad \tau = 420''\,5,\quad T = 5^0\,38'\,51''\,5$$

Mit dem gefundenen Werthe von B entlehnt man aus der Tafel

$$\begin{aligned} \log(1) &= 8{,}5089337 \\ \log(2) &= 8{,}5100716 \\ \log(3) &= 1{,}94876 \\ \log(4) &= 3{,}32553 \\ \log(5) &= 4{,}92770 \\ \log(6) &= 4{,}61132 \end{aligned}$$

Mit $T = 5^0\,38'\,51''\,5$ findet sich zuvörderst $\log\vec{6} = 3{,}5331341$, oder $\vec{6} = 3412''\,983$, und indem man hier noch einmal $\vec{6}$ anstatt b anwendet, $B = 51^0\,19'\,35''\,4379$. Hiemit ferner $\log\tau = 2{,}6238475$. Hiernächst findet man, in Einheiten der siebenten Decimale

$$\begin{aligned} (3)rr &= 99{,}80 \\ (4)\vec{6}\vec{6} &= 2{,}46 \\ (5)\vec{6}\vec{6} &= 98{,}62 \\ (6)\vec{6}\vec{6} &= 47{,}60 \\ 3(7)\tau\tau &= 2{,}26 \\ (7)\tau\tau &= 0{,}75 \end{aligned}$$

und hiemit die logarithmischen Correctionen

von	$\log\vec{6}$	$+\;3$
	$\log\tau$	$+103$
	$\log\lambda$	$-\;47$

Man hätte diese Rechnung auch schon mit den frühern Werthen von $\log\vec{6}$ und $\log\tau$ machen können, ohne ein anderes Resultat zu erhalten; es würde dann sogleich mit $\log b = 3{,}5331344$ der Werth von $b = 3412''\,985$, und $B = 51^0\,19'\,35''\,4369$

sich ergeben haben. Auf $\log\tau$ hat dies keinen ändernden Einfluss; wir haben mithin $\log t = 2{,}6237578$, $t = 420''\,5889$, $T = 5^0\,38'\,51''\,4755$. Wollte man mit diesem Werthe von T die Rechnung noch einmal durchgehen, so würde B keine Änderung erleiden; für $\log\tau$ würde man finden $2{,}6238470$, also $\log t = 2{,}6238573$, $t = 420''\,5884$, mithin $T = 5^0\,38'\,51''\,4757$. Eine nochmalige Rechnung mit diesem Werthe würde gar keine Änderung hervorbringen, und offenbar hätte man auch bei dem vorhergehenden Resultate schon stehen bleiben können, da bei der Anwendung siebenzifriger Logarithmen die vierte Decimale der Secunde um eine oder einige Einheiten schwankend bleiben kann. Das Endresultat ist also

$$\begin{aligned}\text{Breite von Inselsberg} &= B^0 - b = 50^0\,51'\,8''\,9444\\ \text{Azimuth der Seite Inselsberg-Brocken} &= 180^0 + T^0 - t\\ &= 185^0\,35'\,21''\,1815\end{aligned}$$

Endlich findet sich für den Längenunterschied

$$\begin{aligned}\log\lambda &= 2{,}7313519\\ \log l &= 2{,}7313472\\ l &= 538''\,7002 = 0^0\,8'\,58''\,7002\end{aligned}$$

Es ist übrigens nicht nöthig, hier die am Schluss des Art. 20 gemachten Bemerkungen zu wiederholen, welche auch hier ihre vollkommene Geltung behalten.

TAFEL.

B	log(1)	log(2)	log(3)	log(4)	log(5)	log(6)
51° 0′	8.5089417	8.5100959	1.94879	3.32421	4.92773	4.61145
1	13	47	79	27	73	45
2	09	34	79	34	73	44
3	05	22	79	41	72	43
4	8.5089401	8.5100909	78	48	72	43
5	8.5089397	8.5100897	78	55	72	42
6	93	85	78	61	72	42
7	88	72	78	68	72	41
8	84	60	78	75	72	40
9	80	47	78	82	71	39
10	8.5089376	8.5100835	1.94877	3.32488	4.92771	4.61138
11	72	23	77	3.32495	71	38
12	68	8.5100810	77	3.32502	71	37
13	64	8.5100798	77	09	71	36
14	59	85	77	15	71	36
15	55	73	77	22	70	35
16	51	61	76	29	70	34
17	47	48	76	36	70	34
18	43	36	76	42	70	33
19	39	23	76	49	70	32
20	8.5089335	8.5100711	1.94876	3.32556	4.92770	4.61132
21	31	8.5100699	76	63	69	31
22	26	86	75	69	69	30
23	22	74	75	76	69	29
24	18	61	75	83	69	29
25	14	49	75	90	69	28
26	10	37	75	3.32596	69	27
27	06	24	75	3.32603	68	27
28	8.5089302	12	74	10	68	26
29	8.5089298	8.5100600	74	17	68	25
30	8.5089293	8.5100587	1.94874	3.32623	4.92768	4.61125
31	89	75	74	30	68	24
32	85	62	74	37	68	23
33	81	50	74	44	67	23
34	77	38	73	50	67	22
35	73	25	73	57	67	21
36	69	13	73	64	67	20
37	65	8.5100501	73	70	67	20
38	60	8.5100488	73	77	67	19
39	56	76	73	84	66	18
40	8.5089252	8.5100463	1.94872	3.32691	4.92766	4.61118
41	48	51	72	3.32697	66	17
42	44	39	72	3.32704	66	16
43	40	26	72	11	66	16
44	36	14	72	17	66	15
45	32	8.5100402	72	24	65	14
46	27	8.5100389	71	31	65	14
47	23	77	71	37	65	13
48	19	65	71	44	65	12
49	15	52	71	51	65	11
50	8.5089211	8.5100340	1.94871	3.32757	4.92765	4.61111

B	log (1)	log (2)	log (3)	log (4)	log (5)	log (6)
51° 50′	8.5089211	8.5100340	1.94871	3.32757	4.92765	4.61111
51	07	28	71	64	64	10
52	8.5089203	15	70	71	64	09
53	8.5089199	8.5100303	70	78	64	09
54	95	8.5100291	70	84	64	08
55	90	78	70	91	64	07
56	86	66	70	3.32798	64	07
57	82	54	70	3.32804	63	06
58	78	41	69	11	63	05
59	74	29	69	18	63	05
52 0	8.5089170	8.5100217	1.94869	3.32824	4.92763	4.61104
1	66	8.5100204	69	31	63	03
2	62	8.5100192	69	38	63	02
3	58	80	69	44	62	02
4	53	67	68	51	62	01
5	49	55	68	58	62	00
6	45	43	68	64	62	4.61100
7	41	30	68	71	62	4.61099
8	37	18	68	78	62	98
9	33	8.5100106	68	84	61	98
10	8.5089129	8.5100094	1.94868	3.32891	4.92761	4.61097
11	25	81	67	3.32898	61	96
12	21	69	67	3.32904	61	96
13	17	57	67	11	61	95
14	12	44	67	17	61	94
15	08	32	67	24	60	94
16	04	20	67	31	60	93
17	8.5089100	8.5100007	66	37	60	92
18	8.5089096	8.5099995	66	44	60	91
19	92	83	66	51	60	91
20	8.5089088	8.5099971	1.94866	3.32957	4.92760	4.61090
21	84	58	66	64	59	89
22	80	46	66	71	59	89
23	76	34	65	77	59	88
24	71	21	65	84	59	87
25	67	8.5099909	65	90	59	87
26	63	8.5099897	65	3.32997	59	86
27	59	85	65	3.33004	58	85
28	55	72	65	10	58	85
29	51	60	64	17	58	84
30	8.5089047	8.5099848	1.94864	3.33024	4.92758	4.61083
31	43	36	64	30	58	83
32	39	23	64	37	58	82
33	35	8.5099811	64	43	57	81
34	31	8.5099799	64	50	57	80
35	27	86	63	57	57	80
36	22	74	63	63	57	79
37	18	62	63	70	57	78
38	14	50	63	76	57	78
39	10	37	63	83	56	77
40	8.5089006	8.5099735	1.94863	3.33090	4.92756	4.61076

B	log (1)	log (2)	log (3)	log (4)	log (5)	log (6)
52° 40′	8.5089006	8.5099725	1.94863	3.33090	4.92756	4.61076
41	8.5089002	13	62	3.33096	56	76
42	8.5088998	8.5099701	62	3.33103	56	75
43	94	8.5099688	62	09	56	74
44	90	76	62	16	56	74
45	86	64	62	22	55	73
46	82	52	62	29	55	72
47	78	40	61	36	55	72
48	73	27	61	42	55	71
49	69	15	61	49	55	70
50	8.5088965	8.5099603	1.94861	3.33155	4.92755	4.61070
51	61	8.5099591	61	62	54	69
52	57	78	61	69	54	68
53	53	66	60	75	54	67
54	49	54	60	82	54	67
55	45	42	60	88	54	66
56	41	29	60	3.33195	54	65
57	37	17	60	3.33201	53	65
58	33	8.5099505	60	08	53	64
59	29	8.5099493	59	14	53	63
53 0	8.5088925	8.5099481	1.94859	3.33221	4.92753	4.61063
1	20	68	59	28	53	62
2	16	56	59	34	53	61
3	12	44	59	41	52	61
4	08	32	59	47	52	60
5	04	20	59	54	52	59
6	8.5088900	8.5099407	58	60	52	59
7	8.5088896	8.5099395	58	67	52	58
8	92	83	58	73	52	57
9	88	71	58	80	51	57
10	8.5088884	8.5099359	1.94858	3.33286	4.92751	4.61056
11	80	46	58	93	51	55
12	76	34	57	3.33299	51	54
13	72	22	57	3.33306	51	54
14	68	8.5099310	57	13	51	53
15	64	8.5099298	57	19	51	52
16	60	86	57	26	50	52
17	55	73	57	32	50	51
18	51	61	56	39	50	50
19	47	49	56	45	50	50
20	8.5088843	8.5099337	1.94856	3.33352	4.92750	4.61049
21	39	25	56	58	50	48
22	35	13	56	65	49	48
23	31	8.5099200	56	71	49	47
24	27	8.5099188	55	78	49	46
25	23	76	55	84	49	46
26	19	64	55	91	49	45
27	15	52	55	3.33397	49	44
28	11	40	55	3.33404	48	44
29	07	27	55	10	48	43
30	8.5088803	8.5099115	1.94854	3.33417	4.92748	4.61042

B	log (1)	log (2)	log (3)	log (4)	log (5)	log (6)
53° 30′	8.5088803	8.5099115	1.94854	3.33417	4.92748	4.61042
31	8.5088799	8.5099103	54	23	48	42
32	95	8.5099091	54	30	48	41
33	91	79	54	36	48	40
34	87	67	54	43	47	39
35	83	55	54	49	47	39
36	78	42	53	56	47	38
37	74	30	53	62	47	37
38	70	18	53	69	47	37
39	66	8.5099006	53	75	47	36
40	8.5088762	8.5098994	1.94853	3.33481	4.92746	4.61035
41	58	82	53	88	46	35
42	54	70	53	3.33494	46	34
43	50	58	52	3.33501	46	33
44	46	45	52	07	46	33
45	42	33	52	14	46	32
46	38	21	52	20	45	31
47	34	8.5098909	52	27	45	31
48	30	8.5098897	52	33	45	30
49	26	85	51	40	45	29
50	8.5088722	8.5098873	1.94851	3.33546	4.92745	4.61029
51	18	61	51	53	45	28
52	14	49	51	59	44	27
53	10	36	51	65	44	27
54	06	24	51	72	44	26
55	8.5088702	12	50	78	44	25
56	8.5088698	8.5098800	50	85	44	25
57	94	8.5098788	50	91	44	24
58	90	76	50	3.33598	43	23
59	86	64	50	3.33604	2743	23
54° 0	8.5088682	8.5098752	1.94850	3.33611	4.9 43	4.61022

ANZEIGEN.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 177. Seite 1761 bis 1768. 1827. November 5.

Am 8. October überreichte Hr. Hofr. Gauss der Königl. Societät eine Vorlesung:

Disquisitiones generales circa superficies curvas.

Obgleich die Geometer sich viel mit allgemeinen Untersuchungen über die krummen Flächen beschäftigt haben, und ihre Resultate einen bedeutenden Theil des Gebiets der höhern Geometrie ausmachen, so ist doch dieser Gegenstand noch so weit davon entfernt, erschöpft zu sein, dass man vielmehr behaupten kann, es sei bisher nur erst ein kleiner Theil eines höchst fruchtbaren Feldes angebauet. Der Verf. hat schon vor einigen Jahren durch die Auflösung der Aufgabe, alle Darstellungen einer gegebenen Fläche auf einer andern zu finden, bei welchen die kleinsten Theile ähnlich bleiben, dieser Lehre eine neue Seite abzugewinnen gesucht: der Zweck der gegenwärtigen Abhandlung ist, abermals andere neue Gesichtspunkte zu eröffnen, und einen Theil der neuen Wahrheiten, die dadurch zugänglich werden, zu entwickeln. Wir werden davon hier anzeigen, was ohne zu grosse Weitläuftigkeit verständlich gemacht werden kann, müssen aber dabei im Voraus bemerken, dass sowohl die neuen Begriffsbildungen, als die Theoreme, wenn die grösste Allgemeinheit umfasst werden soll, zum Theil noch einiger Beschränkungen oder nähern Bestimmungen bedürfen, welche hier übergangen werden müssen.

Bei Untersuchungen, wo eine Mannigfaltigkeit von Richtungen gerader Linien im Raume ins Spiel kommt, ist es vortheilhaft, diese Richtungen durch diejenigen Punkte auf der Oberfläche einer festen Kugel zu bezeichnen, welche die Endpunkte der mit jenen parallel gezogenen Radien sind: Mittelpunkt und Halbmesser dieser *Hülfskugel* sind hierbei ganz willkürlich; für letztern mag die Lineareinheit gewählt werden. Dies Verfahren kommt im Grunde mit demjenigen überein, welches in der Astronomie in stetem Gebrauch ist, wo man alle Richtungen auf eine fingirte Himmelskugel von unendlich grossem Halbmesser bezieht. Die sphärische Trigonometrie, und einige andere Lehrsätze, welchen der Verf. noch einen neuen von häufiger Anwendbarkeit beigefügt hat, dienen dann zur Auflösung der Aufgabe, welche die Vergleichung der verschiedenen vorkommenden Richtungen darbieten kann.

Wenn man die Richtung der an jedem Punkt einer krummen Fläche auf diese errichteten Normale durch den nach dem angedeuteten Verfahren entsprechenden Punkt der Kugelfläche bezeichnet, also jedem Punkt der krummen Fläche in dieser Beziehung einen Punkt der Oberfläche der Hülfskugel entsprechen lässt, so wird, allgemein zu reden, jeder Linie auf der krummen Fläche eine Linie auf der Oberfläche der Hülfskugel, und jedem Flächenstück von jener ein Flächenstück von dieser entsprechen. Je geringer die Abweichung jenes Stücks von der Ebene ist, desto kleiner wird der entsprechende Theil der Kugelfläche sein, und es ist mithin ein sehr natürlicher Gedanke zum Maassstabe der Totalkrümmung, welche einem Stück der krummen Fläche beizulegen ist, den Inhalt des entsprechenden Stücks der Kugelfläche zu gebrauchen. Der Verf. nennt daher diesen Inhalt die *ganze Krümmung* des entsprechenden Stücks der krummen Fläche. Ausser der Grösse kommt aber zugleich noch die *Lage* der Theile in Betracht, die, ganz abgesehen von dem Grössenverhältniss, in den beiden Stücken entweder eine ähnliche, oder eine verkehrte sein kann: diese beiden Fälle werden durch das der Totalkrümmung vorzusetzende positive oder negative Zeichen unterschieden werden können. Diese Unterscheidung hat jedoch nur insofern eine bestimmte Bedeutung, als die Figuren auf bestimmten Seiten der beiden Flächen gedacht werden: der Verf. nimmt sie bei der Kugelfläche auf der äussern und bei der krummen Fläche auf derjenigen Seite, wo man sich die Normale errichtet denkt, und es folgt dann, dass das positive Zeichen bei convex-convexen oder concav-concaven Flächen (die nicht wesentlich verschieden sind), und das negative bei concav-convexen Statt hat. Wenn das in Rede stehende Stück der krummen Fläche in dieser Beziehung aus Theilen ungleicher Art besteht, so werden noch nähere Bestimmungen nothwendig, die hier übergangen werden müssen.

Die Vergleichung des Inhalts zweier einander correspondirender Stücke der krummen Fläche und der Oberfläche der Hülfskugel führt nun (auf dieselbe Art wie z. B. aus der Vergleichung von Volumen und Masse der Begriff von Dichtigkeit hervorgeht) zu einem neuen Begriffe. Der Verf. nennt nämlich *Krümmungsmaass* in einem Punkt der krummen Fläche den Werth des Bruches, dessen Nenner der Inhalt eines unendlich kleinen Stücks der krummen Fläche in diesem Punkt, und der Zähler der Inhalt des entsprechenden Stücks der Fläche der Hülfskugel, oder die ganze Krümmung jenes Elements ist. Man sieht, dass, in dem Sinn des Verf., ganze Krümmung und Krümmungsmaass bei krummen Flächen dem analog ist, was bei krummen Linien resp. Amplitudo und schlechthin Krümmung genannt wird; er fand Bedenken, die letztern mehr durch Gewohnheit als wegen Angemessenheit recipirten Ausdrücke auf die krummen Flächen zu übertragen. Übrigens liegt weniger an den Benennungen selbst, als daran, dass ihre Einführung durch prägnante Sätze gerechtfertigt wird.

Die Auflösung der Aufgabe, das Krümmungsmaass in jedem Punkt einer krummen Fläche zu finden, erscheint in verschiedener Gestalt, nach Maassgabe der Art, wie die Natur der krummen Fläche gegeben ist. Die einfachste Art ist, indem die Punkte im Raum allgemein durch drei rechtwinklige Coordinaten x, y, z unterschieden werden, eine Coordinate als Function der beiden andern darzustellen: dabei erhält man den einfachsten Ausdruck für das Krümmungsmaass. Zugleich ergibt sich aber ein merkwürdiger Zusammenhang zwischen diesem Krümmungsmaass und den Krümmungen derjenigen Curven, die durch den Schnitt der krummen Fläche mit Ebenen senkrecht auf dieselbe, hervorgehen. Bekanntlich hat Euler zuerst gezeigt, dass zwei dieser schneidenden Ebenen, die einander gleichfalls unter einem rechten Winkel schneiden, die Eigenschaft haben, dass in der einen der grösste, in der andern der kleinste Krümmungshalbmesser Statt findet, oder richtiger, dass in ihnen die beiden äussersten Krümmungen vorkommen. Hier ergibt sich nun aus dem erwähnten Ausdruck für das Krümmungsmaass, dass dieses einem Bruche gleich wird, dessen Zähler die Einheit, der Nenner das Product der beiden äussersten Krümmungshalbmesser wird. — Weniger einfach wird der Ausdruck für das Krümmungsmaass, wenn

die Natur der krummen Fläche durch eine Gleichung zwischen x, y, z, bestimmt ist, und noch zusammengesetzter wird jener, wenn die Natur der krummen Fläche dadurch gegeben ist, dass x, y, z in der Gestalt von Functionen zweier neuen veränderlichen Grössen p, q dargestellt sind. Im letzten Fall enthält der Ausdruck funfzehn Elemente, nemlich die partiellen Differentialquotienten der ersten und zweiten Ordnung von x, y, z nach p und q: allein er ist weniger wichtig an sich, als weil er den Übergang zu einem andern bahnt, der zu den merkwürdigsten Sätzen in dieser Lehre gerechnet werden muss. Bei jener Art, die Natur der krummen Fläche darzustellen, hat der allgemeine Ausdruck für irgend ein Linienelement auf derselben,

oder für $\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}$, die Form $\sqrt{(E\mathrm{d}p^2+2F\mathrm{d}p.\mathrm{d}q+G\mathrm{d}q^2)}$

wo E, F, G wiederum Functionen von p und q werden; der erwähnte neue Ausdruck für das Krümmungsmaass enthält nun bloss diese Grössen, und ihre partiellen Differentialquotienten der ersten und zweiten Ordnung. Man sieht also, dass zur Bestimmung des Krümmungsmaasses bloss die Kenntniss des allgemeinen Ausdrucks eines Linearelements erforderlich ist, ohne dass es der Ausdrücke für die Coordinaten x, y, z selbst bedarf. Eine unmittelbare Folge davon ist der merkwürdige Lehrsatz: Wenn eine krumme Fläche, oder ein Stück derselben auf eine andere Fläche abgewickelt werden kann, so bleibt nach der Abwickelung das Krümmungsmaass in jedem Punkt ungeändert. Als specieller Fall folgt hieraus ferner: In einer krummen Fläche, die in eine Ebene abgewickelt werden kann, ist das Krümmungsmaass überall $= 0$. Man leitet daraus sofort die characteristische Gleichung der in eine Ebene abwickelungsfähigen Flächen ab, nemlich, in so fern z als Function von x und y betrachtet wird,

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y^2}-\left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y}\right)^2=0$$

eine Gleichung, die zwar längst bekannt, aber nach des Verf. Urtheil bisher nicht mit der erforderlichen Strenge bewiesen war.

Diese Sätze führen dahin, die Theorie der krummen Flächen aus einem neuen Gesichtspunkte zu betrachten, wo sich der Untersuchung ein weites noch ganz unangebautes Feld öffnet. Wenn man die Flächen nicht als Grenzen von Körpern, sondern als Körper, deren eine Dimension verschwindet, und zugleich als biegsam, aber nicht als dehnbar betrachtet, so begreift man, dass zweierlei

wesentlich verschiedene Relationen zu unterscheiden sind, theils nemlich solche, die eine bestimmte Form der Fläche im Raume voraussetzen, theils solche, welche von den verschiedenen Formen, die die Fläche annehmen kann, unabhängig sind. Die letztern sind es, wovon hier die Rede ist: nach dem, was vorhin bemerkt ist, gehört dazu das Krümmungsmaass; man sieht aber leicht, dass eben dahin die Betrachtung der auf der Fläche construirten Figuren, ihrer Winkel, ihres Flächeninhalts und ihrer Totalkrümmung, die Verbindung der Punkte durch kürzeste Linien u. dgl. gehört. Alle solche Untersuchungen müssen davon ausgehen, dass die Natur der krummen Fläche an sich durch den Ausdruck eines unbestimmten Linearelements in der Form $\sqrt{(E\mathrm{d}p^2+2F\mathrm{d}p.\mathrm{d}q+G\mathrm{d}q^2)}$ gegeben ist. Der Verf. hat gegenwärtiger Abhandlung einen Theil seiner seit mehreren Jahren auf diesem Felde angestellten Untersuchungen einverleibt, indem er sich auf solche einschränkte, die von dem ersten Eintritt nicht zu entfernt liegen und zum Theil als allgemeine Hülfsmittel zu vielfachen weitern Untersuchungen dienen können. Bei unsrer Anzeige müssen wir uns noch mehr beschränken, und uns begnügen, nur einiges als Probe anzuführen. Als solche mögen folgende Lehrsätze dienen.

Wenn auf einer krummen Fläche von Einem Anfangspunkte ein System unendlich vieler kürzester Linien von gleicher Länge ausläuft, so schneidet die durch ihre Endpunkte gehende Linie jede derselben unter rechten Winkeln. Wenn an jedem Punkte einer beliebigen Linie auf einer krummen Fläche kürzeste Linien von gleicher Länge senkrecht gegen jene Linie gezogen sind, so sind diese alle auch senkrecht gegen diejenige Linie, welche ihre andern Endpunkte verbindet. Diese beiden Lehrsätze, wovon der zweite als eine Generalisirung des ersten betrachtet werden kann, werden sowohl analytisch, als durch einfache geometrische Betrachtungen bewiesen. *Der Überschuss der Summe der Winkel eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecks über zwei Rechte ist der Totalkrümmung des Dreiecks gleich.* Es wird hiebei angenommen, dass für die Winkel derjenige, dem ein dem Halbmesser gleicher Bogen entspricht, $(57^0\,17'\,45'')$, und für die ganze Krümmung, als Stück der Fläche der Hülfskugel, der Inhalt eines Quadrats, dessen Seite der Halbmesser der Hülfskugel ist, als Einheit zu Grunde liegt. Offenbar kann man dies wichtige Theorem auch so ausdrücken: der Überschuss der Winkel eines aus kürzesten Linien gebildeten Dreiecks über zwei Rechte verhält sich zu acht Rechten, wie das Stück der Oberfläche der Hülfsku-

gel, welches jenem als ganze Krümmung entspricht, zu der ganzen Oberfläche der Hülfskugel. Allgemein wird der Überschuss der Winkel eines Polygons von n Seiten, wenn diese kürzeste Linien sind, über $2n-4$ Rechte, der ganzen Krümmung des Polygons gleich sein.

Die allgemeinen in der Abhandlung entwickelten Untersuchungen werden am Schluss derselben noch auf die Theorie der durch kürzeste Linien gebildeten Dreiecke angewandt, wovon wir hier nur ein paar Haupttheoreme anführen. Sind a, b, c die Seiten eines solchen Dreiecks (die als Grössen der ersten Ordnung betrachtet werden); A, B, C die gegenüberstehenden Winkel; $\alpha, \vec{o}, \gamma$ die Krümmungsmaasse in den Winkelpunkten; σ der Flächeninhalt des Dreiecks, so ist, bis auf Grössen der vierten Ordnung, $\frac{1}{3}(\alpha+\vec{o}+\gamma)\sigma$ der Überschuss der Summe $A+B+C$ über zwei Rechte. Ferner sind, mit derselben Genauigkeit, die Winkel eines ebenen geradlinigen Dreiecks, dessen Seiten a, b, c sind, der Ordnung nach

$$A-\tfrac{1}{12}(2\alpha+\vec{o}+\gamma)\sigma$$
$$B-\tfrac{1}{12}(\alpha+2\vec{o}+\gamma)\sigma$$
$$C-\tfrac{1}{12}(\alpha+\vec{o}+2\gamma)\sigma$$

Man sieht sogleich, dass das letzte Theorem eine Generalisirung des bekannten von LEGENDRE zuerst aufgestellten ist, nach welchem man, bis auf Grössen der vierten Ordnung, die Winkel des geradlinigen Dreiecks erhält, wenn man die Winkel des sphärischen jeden um den dritten Theil des sphärischen Excesses vermindert. Auf einer nichtsphärischen Fläche muss man also den Winkeln ungleiche Reductionen beifügen, und die Ungleichheit ist, allgemein zu reden, eine Grösse der dritten Ordnung; wenn jedoch die ganze Fläche nur wenig von der Kugelgestalt abweicht, so involvirt jene noch ausserdem einen Factor von der Ordnung der Abweichung von der Kugelgestalt. Es ist unstreitig für die höhere Geodaesie wichtig, dass man im Stande ist, die Ungleichheiten jener Reductionen zu berechnen, und dadurch die volle Überzeugung zu erhalten, dass sie für alle messbaren Dreiecke auf der Oberfläche der Erde als ganz unmerklich zu betrachten sind. So finden sich z. B. in dem grössten Dreiecke der von dem Verf. ausgeführten Triangulirung, dessen grösste Seite fast 15 geographische Meilen lang ist, und in welchem der Überschuss der Summe der drei Winkel über zwei Rechte fast 15 Secunden beträgt, die drei Reductionen der Winkel auf die Winkel eines geradlinigen Dreiecks $4''.95113$, $4''.95104$, $4''.95131$. Übrigens hat der Verf. auch die in den obigen Ausdrücken fehlenden Glieder der vierten Ordnung entwickelt, die für die Kugelfläche eine sehr einfache Form erhalten; bei messbaren Dreiecken auf der Oberfläche der Erde sind sie aber ganz unmerklich, und in dem angeführten Beispiel würden sie die erste Reduction nur um zwei Einheiten der fünften Decimale vermindert und die dritte eben so viel vergrössert haben.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 177. Seite 1761 bis 1768. 1843. November 6.

Der königlichen Societät ist am 23. October von dem Hofrath GAUSS eine Vorlesung überreicht, mit der Überschrift:

Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodaesie,

von welcher hier ein kurzer Bericht gegeben werden soll.

Bei dem trigonometrischen Theile der von dem Verf. in den Jahren 1821—1827 ausgeführten Gradmessung, und bei den spätern damit zusammenhängenden und über das ganze Königreich Hannover sich erstreckenden trigonometrischen Vermessungen sind, sowohl in Beziehung auf die Art, wie die Messungen angestellt wurden, als noch mehr in Beziehung auf ihre nachherige mathematische Behandlung und ihre Verarbeitung zu Resultaten, Wege eingeschlagen, die von den sonst betretenen abweichen. Manches von diesen dem Hofr. GAUSS eigenthümlichen Methoden ist zwar bereits zur Öffentlichkeit gebracht, theils von ihm selbst in verschiedenen vorlängst erschienenen Aufsätzen, theils durch andere, welche nach mündlichen oder brieflichen Mittheilungen bei ihren eigenen trigonometrischen Messungen Anwendungen davon gemacht hatten. Allein der erheblichere Theil jener Methoden, diejenigen, welche sich am meisten von den sonst gebräuchlichen unterscheiden, und deren Verständniss eine tiefere mathematische Begründung erfordert, ist bisher noch nicht dargestellt. Des Verf. frühern Vorsatz, nach völliger Beendigung der Messungen diese selbst nebst allen von ihm angewandten Verfahrungsarten in einem besondern Werke darzulegen, haben Umstände, deren Auseinandersetzung nicht hieher gehört, zur Zeit noch procrastinirt, und er hat deshalb das Auskunftsmittel gewählt, das im theoreti-

schen Theile ihm eigenthümliche in einer Reihe von einzelnen Abhandlungen bekannt zu machen. Es wird dadurch noch der Vortheil gewonnen, dass auf diese Art manche ein selbständiges Interesse darbietende Untersuchungen, welche mit den übrigen in enger Verwandtschaft stehen, sie vorbereiten und in ein helleres Licht setzen, auch wenn von denselben bei den in Rede stehenden Messungen selbst keine unmittelbare Anwendung gemacht ist, doch mit grösserer Ausführlichkeit entwickelt werden können, als bei dem frühern Plane mit einer gleichmässigen Behandlung der Gegenstände verträglich sein würde.

In die Klasse solcher Untersuchungen gehört namentlich diejenige, welche den Gegenstand der vorliegenden *ersten* Abhandlung ausmacht. Den Hauptinhalt derselben bildet eine Methode, nach welcher ein System von Dreiecken auf der Oberfläche eines Umdrehungs-Ellipsoids, ohne etwas von der Schärfe aufzuopfern, so berechnet werden kann, als wenn es auf einer Kugelfläche sich befände. Diese Methode findet ihre Grundlage in der Auflösung eines viel umfassendern Problems, welche der Verf. in einer 1822 geschriebenen und von Herrn Conferenzrath Schumacher im dritten Heft der Astronomischen Abhandlungen zum Druck beförderten Denkschrift gegeben hat, unter dem Titel: *Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird.* Der Verf. hat diejenigen Darstellungen einer Fläche auf einer andern, welche der angegebenen Bedingung Genüge leisten, zur Abkürzung des Vortrags und weil sie überhaupt als eine sehr reiche Hülfsquelle für die Rechnungen der höhern Geodaesie eine besondere Benennung wohl verdienen, mit dem Namen *conforme Darstellungen* belegt, welches sonst vage Beiwort also hier immer in einer präcis bestimmten Bedeutung zu verstehen ist. Mercators und die stereographische Projection sind bekannte Beispiele conformer Darstellungen der Kugelfläche auf der Ebene.

Es ist kaum nöthig, zu bemerken, dass die Ähnlichkeit in den kleinsten (unendlich kleinen) Theilen wohl unterschieden werden muss von der Ähnlichkeit in allen endlichen Theilen. Die letztere ist nur in speciellen Fällen zu erreichen möglich, wenn nemlich die erste Fläche entweder auf die zweite selbst oder auf eine ihr ähnliche abgewickelt werden kann; im Allgemeinen aber, wo die Conformität *nur* in der Ähnlichkeit der kleinsten Theile besteht, ist das *Vergrösserungsverhältniss*, d. i. das Verhältniss, in welchem die auf beiden Flächen einander entsprechenden unendlich kleinen Linien zu einander stehen, eine nach Verschiedenheit der Stellen in den Flächen veränderliche Zahl. In Mercators Projection z. B. ist die Vergrösserungszahl desto grösser, je entfernter vom Äquator, in der stereographischen Projection, je entfernter vom Augenpunkte die betreffenden Stellen sind.

Von jeder gegebenen Fläche sind auf einer andern gegebenen Fläche unendlich viele conforme Darstellungen möglich; die allgemeine Auflösung umfasst sie sämmtlich, indem sie eine arbiträre Function enthält, welche nach Gefallen oder den jedesmaligen Zwecken gemäss bestimmt werden kann. Wenn nur ein Theil der einen Fläche übertragen werden soll, ist es in der Regel am vortheilhaftesten, eine solche conforme Darstellung zu wählen, bei welcher innerhalb der darzustellenden Fläche die Ungleichheiten des Vergrösserungsverhältnisses in den möglich engsten Grenzen bleiben.

Die Aufgabe der conformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche ist in der angeführten Schrift unter den Beispielen besonders abgehandelt, und der allgemeinen Auflösung sind zwei specielle beigefügt, wovon die eine vorzugsweise für die Darstellung der ganzen Ellipsoidfläche geeignet, die andere hingegen weit zweckmässiger ist, wenn (wie es immer bei bestimmten Anwendungen auf die Geodaesie der Fall ist) nur ein mässiger Theil der als ellipsoidisch betrachteten Erdfläche auf eine Kugelfläche conform übertragen werden soll. In wie hohem Grade diese zweite Darstellungsart der oben ausgesprochenen Forderung genügt, ist aus einem a. a. O. aufgestellten Beispiele abzunehmen, wo die Veränderlichkeit des Vergrösserungsverhältnisses innerhalb einer Zone von fünf Breitengraden nur $\frac{1}{330000}$ beträgt. Es sind ferner daselbst die Hauptzüge der Methode, wie überhaupt eine conforme Übertragung zur Berechnung eines Dreieckssystems benutzt werden kann, im Allgemeinen angedeutet, die eigentliche Ausführung aber, und die Anwendung auf diese bestimmte Übertragungsart einer späteren Bearbeitung vorbehalten.

Die gegenwärtige Abhandlung ist nun dazu bestimmt, diese Verpflichtung auszulösen, obwohl nicht ganz in derselben Art, wie sie eingegangen war: es wird nemlich darin nicht die eben erwähnte, sondern eine davon verschiedene dritte specielle Auflösung der Aufgabe zum Grunde gelegt, durch welche der beabsichtigte Zweck noch vollkommener erreicht wird. In diesen Blättern müssen wir uns damit begnügen, nur im Allgemeinen einen Begriff davon zu geben.

Ein System von Dreiecken auf dem Sphäroid, dessen Seiten sogenannte geodaetische Linien sind, wird bei einer conformen Übertragung auf die Kugelfläche durch ein analoges Dreieckssystem dargestellt, worin die Winkel, wie schon aus dem Begriffe der Conformität von selbst folgt, den entsprechenden Winkeln des ersten Systems *genau* gleich sind, während die Seiten zwar nicht in mathematischer Schärfe Bögen von grössten Kreisen werden, aber doch davon nur sehr wenig abweichen. Kann man nun bewirken, dass diese Abweichungen in dem ganzen Umfange des Systems nach Maassgabe der in die Berechnung zu legenden Genauigkeit wie ganz verschwindend betrachtet werden dürfen, so ist klar, dass nachdem eine Seite des sphäroidischen Systems auf die Kugelfläche übertragen ist, man ohne weiteres das ganze System wie eines von gewöhnlichen sphärischen Dreiecken berechnen darf, und nur am Schluss von den Längen und Breiten auf der Kugelfläche auf die Längen und Breiten auf dem Sphäroid zurückzugehen braucht, insofern man die Endresultate der Messung in dieser Form verlangt. Dieser Übergang wird entweder vermittelst der Formeln, welche die gewählte Übertragungsart darbietet, geschehen können, oder vermittelst einer im Voraus berechneten Hülfstafel. In den Fällen hingegen, wo jene Abweichung merklich genug wird, um eine Berücksichtigung zu verdienen, wird jeder aus den Messungen hervorgegangene Winkel vor der scharfen Berechnung auf der Kugel erst einer kleinen Reduction bedürfen, und die Arbeit wird dadurch nur unbedeutend vergrössert werden, wenn die Zahlwerthe der Reductionen sich mit Leichtigkeit berechnen lassen.

Die in der vorliegenden Abhandlung entwickelte Übertragungsart ist so beschaffen, dass die Abweichung derjenigen Curve, durch welche ein geodaetischer Bogen auf der Kugelfläche dargestellt wird, von Grösstenkreisbogen zwischen denselben Endpunkten, immer wie ganz verschwindend zu betrachten ist in der Nähe eines bestimmten Parallelkreises (Normal-Parallelkreises), welchen man nach Gefallen wählen kann, und, wenn man die ganze Rechnungsanlage von vorne her für ein bestimmtes Dreieckssystem selbst ausführt, am schicklichsten ungefähr durch die Mitte des ganzen Systems legen mag. Je weiter man sich von diesem Normal-Parallelkreise nach Norden oder Süden entfernt, desto grösser können jene Abweichungen werden, die übrigens daneben zugleich von der Grösse der Dreiecksseiten und von ihrer Lage gegen den Meridian abhängig sind; immer aber bleiben sie, selbst bei sehr beträchtlicher Entfernung von dem Normal-Parallelkreise, noch so geringfügig, dass man ihre Berücksichtigung bei den meisten Messungen kaum der wenn auch leichten Mühe werth halten wird.

In der Abhandlung ist die Theorie aller dieser und anderer damit zusammenhängender Rechnungen vollständig entwickelt, an einer durchgehenden Musterrechnung erläutert, und mit einer Hülfstafel begleitet, die allerdings zunächst für diejenige Zone bestimmt ist, in welcher das Hannoversche Dreieckssystem liegt, aber auch ohne weiteres für Messungen benutzt werden kann, die diese Zone weit überschreiten: sie erstreckt sich nemlich über eine Zone von zwölf Breitengraden, in deren Mitte der gewählte Normal-Parallelkreis von $52^0\,40'$ Breite liegt. Diese Tafel ist mit einer Schärfe berechnet, die ausreicht, selbst wenn ein Dreieckssystem mit zehnzifrigen Logarithmen berechnet werden soll, also mit einer viel grösseren Schärfe, als man in den meisten Fällen beibehalten wird: indessen schien die kleine Raumersparniss, die durch Weglassung von ein paar Decimalen gewonnen sein würde, zu unerheblich, um beim Abdruck etwas davon zu unterdrücken.

Merklich und unmerklich sind bei Rechnungsoperationen relative Begriffe, und es ist also wohl der Mühe werth, sie nach ein paar aus der Abhandlung entlehnten Beispielen auf ein bestimmtes Maass zurückzuführen.

In dem Hannoverschen Dreieckssysteme ist das grösste Dreieck, welches auch zugleich am weitesten von dem Normal-Parallelkreise abliegt, dasjenige, welches zwischen den Punkten Brocken, Hohehagen, Inselsberg gebildet wird. In diesem kommen daher auch die grössten Werthe der Richtungsreductionen vor, und zwar bei der Seite Hohehagen-Inselsberg, wo die Reduction des Azimuths an dem erstern Endpunkte $-0''00332$, am andern $+0''00428$ beträgt. In dem ganzen Systeme kommen nur noch zwei andere Dreiecksseiten vor, wo die Reductionen $0''001$ übersteigen, bei allen übrigen bleiben sie unter dieser Grösse.

Das grösste Hauptdreieck der trigonometrischen Vermessungen der Schweiz ist das zwischen den Punkten Chasseral, Suchet, Berra enthaltene; es berührt eben die südliche Grenze, bis zu welcher die Hülfstafel sich erstreckt, so dass die Richtungsreductionen sich noch vermittelst derselben berechnen lassen. Die grösste Reduction ist die, welche das Azimuth von Chasseral in Suchet trifft, und beträgt $+0''06221$.

Es ist hieraus ersichtlich, dass in der ganzen Zone, worin das Hannoversche Dreieckssystem liegt, die Reduction ganz wegfällt, wenn die Rechnung auf

Hunderttheile der Secunde geführt wird, und dass man sogar in der ganzen Zone von zwölf Graden, welche die Hülfstafel umfasst, die Berücksichtigung der Reductionen unterlassen kann, wenn man in der Rechnung nur Zehntel der Secunde notirt.

Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Nr. 14. Seite 210 bis 217. 1846. September 28.

Am 1sten September wurde von dem geh. Hofrath Gauss der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften eine Vorlesung überreicht mit der Überschrift:

Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodaesie, zweite Abhandlung,

über deren Inhalt und Zusammenhang mit der ersten Abhandlung ein kurzer Bericht hier zu geben ist.

In der ersten Abhandlung war eine neue Methode, die geodaetischen Messungen zu behandeln, vorgetragen, deren Haupteigenthümlichkeit darin besteht, dass die meisten Rechnungen ganz oder fast ganz eben so geführt werden, als befände sich das Dreieckssystem nicht auf einer sphäroidischen, sondern auf einer Kugelfläche, und zwar ohne allen Abbruch für die äusserste Schärfe der Resultate. Eine der Hauptaufgaben im Gebiete der geodaetischen Rechnungen, nemlich aus der Grösse einer als geodaetische Linie auftretenden Dreiecksseite, der Breite des einen Endpunkts, und dem Azimuthe, unter welchem daselbst der andere Endpunkt erscheint, abzuleiten die Breite dieses andern Endpunkts, das dortige Azimuth der Dreiecksseite, und den Längenunterschied der beiden Punkte, reducirt sich bei jener Behandlungsweise auf die blosse Auflösung eines sphärischen Dreiecks. Ein Paar Seiten sind gleichwohl dieser Aufgabe in der erwähnten Abhandlung aus dem Grunde gewidmet, weil die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie, wenn man nicht zu mehrzifrigen Logarithmen greifen will, nicht immer ausreichen würden, den Resultaten eine ganz genügende Schärfe zu geben, und deshalb gewisse Umformungen jener Formeln nothwendig werden. Ausserdem aber verstattet der Umstand, dass die Seiten solcher Dreiecke, deren Winkel wirklich gemessen werden, immer in Vergleich zu den Dimensionen des ganzen Erdkörpers nur kleine Grössen sein können, solche Umwandlungen der Formeln, welche die Geschmeidigkeit und Bequemlichkeit derselben sehr vergrössern; ja, wenn gleich diese Umwandlungen eigentlich nur Näherungsformeln sind, so können sie doch nicht bloss eben so grosse, sondern selbst grössere Schärfe gewähren, als die absolut strengen Formeln, was man nicht paradox finden wird, wenn man erwägt, dass die letztern doch immer vermittelst der trigonometrischen Tafeln zur Ausübung kommen müssen, deren Schärfe keine absolute, sondern durch die Anzahl der Decimalzifern begrenzt ist. Unter den verschiedenen in der ersten Abhandlung mitgetheilten für den angedeuteten Zweck bestimmten Formeln zeichnet sich nun besonders die am Schluss derselben aufgeführte Combination dadurch aus, dass sie den Zusammenhang jener sechs Quantitäten in der zur Rechnung möglich bequemsten Gestalt aufstellt, und eine Schärfe gewährt, die auch bei den grössten wirklich messbaren Dreiecken überflüssig ausreicht. Es musste dadurch das Verlangen nach dem Besitz analoger unmittelbar für die Ellipsoidfläche geltender Formeln erweckt werden, und die Entwicklung derselben bildet den Hauptinhalt der gegenwärtigen *zweiten* Abhandlung.

Während die Auffindung der erwähnten für die Kugelfläche gültigen Formeln auf ganz elementarischen Sätzen beruhete, erfordert hingegen die Ermittlung ihrer Gegenstücke auf der Ellipsoidfläche eine Reihe ziemlich verwickelter Operationen, und es muss daher ohne Zweifel angenehm sein, wenn mehr als Ein Weg zu demselben Ziele zu gelangen nachgewiesen wird. Der Verf., welcher alle diese Untersuchungen schon vor mehr als dreissig Jahren zu seinem Privatgebrauch durchgeführt, und nur bisher zur Veröffentlichung noch keine besondere Veranlassung gefunden hatte, theilt nun in der vorliegenden Abhandlung *zwei* unter sich durchaus verschiedene, aber zuletzt zu ganz gleichen Resultaten führende Ableitungsarten mit, von denen eine in der Theorie der conformen Übertragung der Ellipsoidfläche auf die Kugelfläche wurzelt. In dieser Beziehung schliesst sich die zweite Abhandlung auch an die erste an, obwohl übrigens beide insofern als gänzlich unabhängig von einander zu betrachten sind, als man freie Wahl behält, die geodaetischen Rechnungen entweder bloss nach der in der ersten Abhandlung, oder bloss nach der in der zweiten Abhandlung gelehrten Methode zu führen.

Die Aufgabe, von der geographischen Lage eines Punkts auf der Sphäroidfläche zu der eines andern Punktes überzugehen, der mit jenem durch eine geo-

daetische Linie von bekannter Grösse und Richtung verbunden ist, ist schon seit langer Zeit vielfältig behandelt, und um unter verschiedenen Methoden zu seinem Gebrauch passend zu wählen, muss man allerdings mancherlei Umstände berücksichtigen. Es ist z. B. erheblich dabei, ob man die Aufgabe nur für Einen oder einige wenige concrete Fälle aufzulösen hat, oder für sehr viele. In der letztern Voraussetzung wird es von Wichtigkeit sein, dass die Methode jedesmal die möglich grösste Bequemlichkeit und Übersichtlichkeit der Definitivrechnung gewähre, wenn auch die Anwendbarkeit der Methode vielleicht erst gewisse allgemeine Vorbereitungsarbeiten erfordern sollte. Eben so wichtig ist der Umstand, ob man die Resultate einer ausgedehnten trigonometrischen Vermessung alle in der Form von geographischer Länge und Breite und zwar ausschliesslich *nur* in *dieser* Form verlange, oder ob daneben die Resultate für die Lage sämmtlicher Punkte auch noch in einer andern Form, z. B. der der rechtwinkligen Coordinaten, aufgestellt werden; im letztern Fall wird es weniger nothwendig sein, die geographische Lage mit der alleräussersten Schärfe anzugeben.

Die von Dusejour, Legendre, Delambre u. A. gegebenen Formeln berücksichtigen nur die erste Potenz der Abplattung, was allerdings in practischer Hinsicht von nicht grosser Erheblichkeit sein wird, da einmal die Abplattung des Erdsphäroids nur ein kleiner Bruch ist. Es ist daher auch nicht die Meinung, es als einen in practischer Beziehung wichtigen Vorzug geltend zu machen, dass die neue Methode von der Kleinheit der Abplattung ganz unabhängig ist. Die bessern unter jenen Methoden mögen allerdings eine in den meisten Fällen zureichende Schärfe gewähren, obwohl man einen in mathematischer Beziehung genügenden Nachweis dafür vermisst. Dagegen darf man behaupten, dass die neue Methode, wenn die nöthigen Erfordernisse bereit sind, eine bequemere und nach ihrem wesentlichen Inhalt in einem bedeutend kleinern Raum zu concentrirende Rechnung ergibt. Bessels im Jahre 1825 gegebene Auflösung trägt das Gepräge einer grossen mathematischen Vollendung, und ist auch gar nicht abhängig von der Voraussetzung, dass die Entfernung der beiden Punkte von einander im Vergleich zu den Dimensionen des ganzen Erdsphäroids klein sei. In theoretischer Rücksicht ist dies ohne Zweifel ein Vorzug dieser Methode; bei Beurtheilung des practischen Werthes hat man aber folgende Umstände in Betracht zu ziehen. Die Methode macht gar keinen Unterschied zwischen dem Fall grosser und dem Fall kleinerer Entfernungen, sondern erfordert für alleFälle gleich lange Rechnungen,

verzichtet also auf die Vortheile, die man in dem letztern in der Ausübung ungleich häufiger vorkommenden Falle bei dem Gebrauch anderer Methoden von diesem Umstande ziehen kann. Der nützliche Gebrauch der Besselschen Methode wird sich also auf den Fall beschränken, wo die beiden Punkte nicht unmittelbar durch die Seite eines wirklich gemessenen Dreiecks zusammenhängen, sondern wo der Zusammenhang durch eine grössere Reihe von Dreiecken vermittelt ist. Allein dann muss man mit Recht fragen, wie denn die *Data* zu der Aufgabe erlangt werden sollen, nemlich die wirkliche Länge der die beiden Punkte verbindenden geodaetischen Linie, und der Winkel, welchen sie an dem einen Endpunkte mit dem Meridian macht? Diese Bestimmung durch eine bloss *sphärische* Berechnung der Übergangsdreiecke zu machen (wie Bessel bei der wenig ausgedehnten preussischen Gradmessung gethan hat), würde bei einer viel grössern Entfernung nicht mehr zulässig bleiben: soll aber dieser Übergang sphäroidisch gerechnet werden, so wird dies schon für sich allein eben so viel Arbeit erfordern, als wenn man gleich von jedem folgenden Punkte Breite, Länge und das rückwärts geltende Azimuth bestimmt. Übrigens gelten diese Bemerkungen auch von Ivory's Auflösungsmethode, die mit der von Bessel viele Ähnlichkeit hat, aber das eigentliche practische Bedürfniss wenig berücksichtigt.

Über die in der vorliegenden Abhandlung gegebene Methode möge hier noch Folgendes bemerkt werden.

Die Formeln geben unmittelbar die *Differenzen* zwischen den beiden Breiten und den beiden Azimuthen, so wie den Längenunterschied, und eben hierauf beruht, bei der Kleinheit dieser Differenzen (insofern rücksichtlich der Azimuthe das eine von der Südseite, das andere von der Nordseite des Meridians gezählt wird) die Schärfe der Rechnung, ohne mehrstellige Logarithmen zu erfordern. Die Symmetrie und Einfachheit der Formeln hingegen beruhet darauf, dass sie zunächst nicht von der Breite und dem Azimuthe an dem einen Endpunkte, sondern von dem Mittel der beiden Breiten und dem Mittel der beiden Azimuthe abhängen. Es folgt daraus, dass die Formeln, zur Auflösung der Aufgabe, wie sie oben ausgesprochen ist, nur vermöge eines indirecten Verfahrens oder einer successiven Annäherung benutzt werden können. Geübte und mit den Hülfen des kleinen Mechanismus derartiger Operationen vertraute Rechner werden in diesem Umstande kaum eine Unbequemlichkeit finden, zumal da man annehmen kann, dass fast immer zu der Zeit, wo die scharfe Ausführung der Rech-

nung vorgenommen werden soll, sehr genäherte Werthe der zu bestimmenden Grössen schon vorliegen. Genau genommen haben übrigens auch alle andern Auflösungsarten des Problems, namentlich auch die Besselsche, theilweise diesen Character indirecter Operationen. Der wesentlichste Umstand bleibt aber der, dass von den wiederholten Annäherungen nur die letzte, die den ganzen Kern der Rechnung vollständig enthält, aufbewahrt zu werden braucht, und dass diese eine Kürze und Übersichtlichkeit hat, wie keine andere Methode.

Die Formeln für die Auflösung der Aufgabe auf der Sphäroidfläche unterscheiden sich von denen für die Kugelfläche lediglich dadurch, dass gewisse Zwischengrössen, die bei diesen constant sind, bei jenen von der Breite abhängig werden; diese lassen sich folglich in eine Hülfstafel bringen, deren Argument die Breite bildet. Steht eine solche Hülfstafel zu Gebote, so wird in jedem concreten Falle die Rechnung auf der Sphäroidfläche ganz eben so leicht, wie auf der Kugelfläche. Für die Zone von 51—54 Grad Breite, welche für das Hannoversche Dreieckssystem ausreicht, ist eine solche Hülfstafel am Schlusse der Abhandlung beigefügt, und zwar nach demjenigen Werthe der Abplattung, welchen Bessel aus allen bisherigen Gradmessungen abgeleitet hat, und der auch schon in der ersten Abhandlung zum Grunde gelegt war. Wer dieselbe Methode auf ein ausserhalb dieser Zone liegendes Dreieckssystem anwenden wollte, würde damit anfangen müssen, jene Hülfstafel für seinen Zweck weiter auszudehnen, oder, falls er eine andere Abplattung zum Grunde legen wollte, sich erst eine neue Hülfstafel zu construiren. Wo es die Bearbeitung eines grossen Dreieckssystems gilt, kommt eine solche vorgängige Hülfsarbeit gar nicht in Betracht, und die darauf gewandte Mühe wird durch die Bequemlichkeit der Benutzung reichlich ersetzt. Für den Fall hingegen, wo man nur eine oder ein paar concrete Auflösungen der in Rede stehenden Aufgabe suchen soll, hat die Methode nicht vorzugsweise bestimmt sein sollen.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 6. Seite 49 bis 52. 1808 Januar 9.

Archimedes gründete bekanntlich in seiner Schrift, *Circuli dimensio*, seine Bestimmung der Grenzen für den Umfang des Kreises darauf, dass er denselben zwischen den Umfang eines umgeschriebenen und eines eingeschriebenen 96 Ecks einschloss. Die Berechnung dieser Zahlen, oder vielmehr die Bestimmung einer grössern Zahl, als jener, und einer kleinern, als dieser, verrichtet er durch stufenweises Fortschreiten vom Sechseck zum Zwölfeck, von diesem zum 24 Eck u. s. f. Für beide 96 Ecke geht er daher, nach unserer Art zu reden, von einem genäherten Werthe der Irrationalgrösse $\sqrt{3}$ aus, wovon der eine, nemlich $\frac{265}{153}$, etwas zu klein, der andere, $\frac{1351}{780}$, etwas zu gross ist; jener wird bei den umschriebenen, dieser bei den eingeschriebenen Vielecken gebraucht. Bei genauerer Ansicht findet man, dass diese genäherten Werthe in der Reihe $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{11}{7}$, $\frac{26}{15}$ u. s. f., deren Glieder abwechselnd grösser und kleiner sind als $\sqrt{3}$, und jedes weniger davon verschieden, als irgend ein andrer, durch kleinere Zahlen ausgedrückter, Bruch, — mit vorkommen; der Bruch $\frac{571}{329}$ ist nemlich das achte, und $\frac{1351}{780}$ das eilfte Glied der Reihe. Es scheint demnach, dass Archimed diese genäherten Werthe nicht durch Zufall, sondern methodisch gefunden habe; da er selbst sich aber über die Art, wie er dazu gekommen ist, gar nicht erklärt, und man übrigens nicht findet, dass unsre Methoden dergleichen Aufgaben aufzulösen, den Alten bekannt gewesen wären, so bietet sich hier ein Gegenstand zu Conjecturen dar. Hr. Prof. Mollweide in Halle hat in einer kürzlich an die Königl. Societät, deren Correspondent er ist, eingeschickten kleinen Abhandlung, welche

De methodo ab Archimede adhibita ad rationem, in qua inter se sunt latus trianguli aequilateri et radius circuli circumscripti, numeris veritati proxime exprimendam

überschrieben ist, eine Untersuchung angestellt, und ein Verfahren angegeben, das dem Zustande der Arithmetik der Alten angemessen ist, und also vielleicht das von Archimed gebrauchte selbst sein könnte. Hr. M. leitet nemlich, indem er die Seite des Dreiecks durch AC, und den Halbmesser des umschriebenen

Kreises durch AB, ferner eine Linie $= AC - AB$ durch CF bezeichnet, durch Schlüsse in der bei den alten Geometern üblichen Form folgende Proportionen ab:

$$AC:AB = 5AB+2CF:3AB+CF = 19AB+7CF:11AB+4CF$$
$$= 71AB+26CF:41AB+15CF = 265AB+97CF:153AB+56CF$$
$$= 989AB+362CF:571AB+209CF$$

Aus der vorletzten folgt dann leicht $AC:AB > 265:153$, so wie aus der letzten, wenn man eine Linie $BD = 2AB - AC = AB - CF$ einführt,

$$AC:AB = 1351AB-362BD:780AB-209BD < 1351:780$$

Dass Hr. M., welcher sich mit der bei den alten Geometern üblichen Einkleidung arithmetischer Schlüsse sehr vertraut gemacht hat, ARCHIMED's Ideengang wirklich errathen haben könne, wollen wir gern zugeben; entscheiden wird sich aber hierüber um so weniger etwas lassen, da dergleichen Untersuchungen auf sehr mannigfaltige Art angegriffen werden können, und überdies auch sonst Spuren vorhanden sind, dass der grosse Grieche im Besitz mancher nichts weniger als gemeiner Wahrheiten und Kunstgriffe, selbst aus der höhern Arithmetik, gewesen sein muss.

Eine Frage bleibt übrigens hier noch übrig, warum nemlich ARCHIMED, wenn er seine genäherten Werthe methodisch gefunden hat, bei den grössern bis zum eilften Gliede gegangen ist, da er doch bei den kleinern nur bis zum achten ging; man sollte glauben, er würde bei jenen sich mit dem neunten Gliede $\frac{3}{2}\frac{4}{6}\frac{5}{9}$ begnügt haben, welches immer zur Ausmittelung der untern Grenze $3\frac{1}{7}\frac{0}{1}$ hinreichend gewesen wäre, und könnte vielleicht verleitet werden, hieraus die Folge zu ziehen, dass ARCHIMED doch den Bruch $\frac{1}{7}\frac{3}{8}\frac{5}{0}$ durch eine Art von glücklichem Zufall gefunden habe, und der einfachere $\frac{3}{1}\frac{4}{6}\frac{5}{9}$ ihm entgangen sei. Hr. M. glaubt, ARCHIMED habe jenen Bruch desswegen gewählt, weil er der einfachste von denen sei, deren Zähler zu der Ordnung der Tausender gehören, so wie er den Bruch $\frac{3}{1}\frac{4}{8}\frac{5}{9}$ als den einfachsten aus der Ordnung der Hunderter gewählt habe: allein dieser Grund scheint uns nicht befriedigend. Wir finden es vielmehr wahrscheinlicher, dass er den Bruch $\frac{1}{7}\frac{3}{8}\frac{5}{0}$ desswegen vorzog, weil er fand, dass derselbe zufälliger Weise beim weitern Fortgange der Rechnung eine bequeme Vereinfachung darbietet, so dass sich beim 24 Eck für dasjenige Verhältniss, welches, nach unsrer Art zu reden, $1:\text{cotang}\,7^\circ\,30'$ ist, eine äusserst nahe Grenze sehr

einfach durch 240:1823 vorstellen liess; diesen Vortheil hätte er entbehren müssen, wäre er ursprünglich von dem Bruche $\frac{3}{2}\frac{4}{6}\frac{5}{9}$ ausgegangen.

Am Schlusse der Abhandlung macht Hr. M. noch die Bemerkung, dass auch COLUMELLA *de re rustica* V, 2 von einem der genäherten Werthe von $\sqrt{3}$ (nemlich von $\frac{7}{4}\frac{8}{5}$) Gebrauch gemacht hat, indem er für den Inhalt des gleichseitigen Dreiecks die Summe des dritten und des zehnten Theils des auf seiner Seite beschriebenen Quadrats annimmt.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 121. Seite 1206 bis 1208. 1813 Juli 31.

Géométrie descriptive par GASPARD MONGE, *de l'institut des sciences etc. Nouvelle édition. Avec un supplement par* M. HACHETTE, *instituteur à l'école impériale polytechnique etc.* Paris, bei J. KLOSTERMANN dem jüngern. 162 und 118 Seiten in Quart.

Die Geometrie, deren Gegenstand die Raumverhältnisse sind, zerfällt in zwei grosse Abtheilungen, je nachdem der Raum nur nach zwei Dimensionen betrachtet wird (in der Ebene), oder nach allen drei Dimensionen zugleich. Man begreift leicht, dass der andere Theil seiner Natur nach von einem viel grössern Umfange sein, und eine viel grössere Mannigfaltigkeit von Fragen und Untersuchungen darbieten müsse, als der erste. Wenn daher schon von unserer Elementar-Geometrie die Planimetrie einen grössern Theil ausmacht, als die Stereometrie, so rührt dies nur daher, das letztere verhältnissmässig viel weniger entwickelt und ausgebildet ist. In der That hat man vorzüglich die Untersuchungen der letztern Art in neuern Zeiten lieber mit Hülfe der Analyse behandelt, und sie so gleichsam der Geometrie entzogen, welche sich nur der unmittelbaren Anschauung bedient. Es ist auch nicht zu läugnen, dass die Vorzüge der analytischen Behandlung vor der geometrischen, ihre Kürze, Einfachheit, ihr gleichförmiger Gang, und besonders ihre Allgemeinheit, sich gewöhnlich um so entschiedener zeigen, je schwieriger und verwickelter die Untersuchungen sind. Inzwischen ist es doch immer von hoher Wichtigkeit, dass auch die geometrische Methode fortwährend cultivirt werde. Abgesehen davon, dass sie doch in manchen einzelnen

Fällen unmittelbarer und kürzer zum Ziele führt, als die Analyse, besonders wenn diese nicht mit Gewandtheit gehandhabt wird, dass jene dann eine ihr eigenthümliche Eleganz hat, wird sie auch besonders in formeller Hinsicht und beim frühern jugendlichen Studium unentbehrlich bleiben, um Einseitigkeit zu verhüten, den Sinn für Strenge und Klarheit zu schärfen, und den Einsichten eine Lebendigkeit und Unmittelbarkeit zu geben, welche durch die analytischen Methoden weit weniger befördert, mitunter eher gefährdet werden. Aus diesen Gründen sieht man mit Vergnügen, dass einige Französische Geometer in den letzten Jahrzehnten angefangen haben, den Theil der Geometrie, welcher sich mit den Verhältnissen von Punkten und Linien, die nicht in Einer Ebene liegen, von verschiedenen Ebenen gegen einander, mit Linien von doppelter Krümmung und mit krummen Flächen beschäftigt, mit besonderer Sorgfalt, und, in so fern dabei bloss geometrische Methoden angewandt werden, als eine besondere Disciplin unter dem Namen der *Géométrie descriptive* zu cultiviren. Dem vorliegenden Werke über diese Wissenschaft müssen wir insbesondere das Lob einer grossen Klarheit und Concision im Vortrage, eines wohlgeordneten Überganges vom Leichtern zum Schwerern, und der Reichhaltigkeit an neuen Ansichten und gelungenen Ausführungen beilegen, und daher das Studium desselben als eine kräftige Geistesnahrung empfehlen, wodurch unstreitig zur Belebung und Erhaltung des echten, in der Mathematik der Neuern sonst manchmal vermissten, geometrischen Geistes viel mit beigetragen werden kann. Ausser dieser rein wissenschaftlichen Seite dieser Untersuchungen kommt auch noch der mannigfaltige Nutzen in Betracht, welchen sie in den Künsten haben, die sich auf Raumverhältnisse beziehen, namentlich in der Zeichenkunst, der Feldmesskunst, der Baukunst, der Befestigungskunst. Auch in dieser Hinsicht hat der Verfasser seine Schrift durch mancherlei Anwendungen interessanter zu machen gewusst, wenn er gleich meistens nur mehr auf sie hingedeutet, als sie wirklich ausgeführt hat.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 27. Seite 268 bis 269. 1814 Februar 14.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the Year 1813. IV und 304 Seiten. 26 S. *Meteorological Journal* und 8 S. *Index* in Quart.

Mathematische und astronomische Abhandlungen. — *Über eine merkwürdige Anwendung des* Cotesischen *Lehrsatzes, von* J. F. W. Herschel (Sohn des Astronomen). Es sei n eine beliebige ganze Zahl, $n\omega = 360^0$ und N irgend ein Winkel. Unter diesen Voraussetzungen gibt der Cotesische Lehrsatz das Product aus allen Radiis Vectoribus, denen in einem Kegelschnitt, nach astronomischer Art zu reden, die wahren Anomalien N, $N+\omega$, $N+2\omega$, $N+3\omega$ ..... $N+(n-1)\omega$ entsprechen, durch einen einfachen Ausdruck. Wenn gleich diese und andere ähnliche Entwickelungen, welche den Gegenstand des Aufsatzes ausmachen, an sich keine besondere Schwierigkeiten haben, so liest man diesen doch mit Vergnügen wegen der Art der Behandlung. Was der Verf. über die Bezeichnung $\cos^2 A$ sagt, welches einige neuere mathematische Schriftsteller für das Quadrat von $\cos A$, ganz gegen alle Analogie, gebrauchen, da es dieser zufolge den Cosinus eines Bogens $= \cos A$ bedeuten sollte, hat ganz unsern Beifall.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 71. Seite 708 bis 710. 1814 Mai 2.

Commentationes mathematico-philologicae tres, sistentes explicationem duorum locorum difficilium, alterius Virgilii, *alterius* Platonis, *itemque examinationem duorum mensurarum praeceptorum* Columellae. *Adjecta est epistola ad v. cl.* J. G. Schneider *de excerptis geometricis* Epaphroditi *et* Vitruvii Rufi *scripta ab auctore harum commentationum* Carolo Brandano Mollweide, *astron. in acad. Lipsiensi professore.* Leipzig 1813. 122 Seiten in Octav, nebst einer Kupfertafel.

[Die Anzeige der ersten Abhandlung ist in dem Bande für Astronomie der Werke von Gauss abgedruckt.]

Die zweite Abhandlung, über eine dunkle Stelle in Plato's Menon, war schon im Jahre 1805 der hiesigen Königl. Soc. der Wissenschaften handschrift-

lich vorgelegt, und ein kurzer Auszug daraus schon damals in unsern Blättern mitgetheilt (1805 St. 124). Wir bemerken also hier nur, dass dies diejenige Stelle ist, wo Socrates durch ein Beispiel aus der Geometrie anschaulich machen will, wie man sich zur Auflösung einer Aufgabe vorher durch Annahme gewisser näherer Bestimmungen vorzubereiten hat. Die geometrische Aufgabe, welche Socrates hierzu wählt, ist die Frage über die Möglichkeit, ein gegebenes Dreieck in einen gegebenen Kreis einzutragen, aber die Worte, wodurch er erst gewisse Einschränkungen über die Art des Dreiecks festsetzen will, haben den Auslegern viel zu schaffen gemacht. Herr Mollweide führt mit vielem gelehrten Scharfsinn hier aus, dass die dadurch bezeichnete Eigenschaft keine andere ist, als die Zerlegbarkeit des Dreiecks in zwei andere dem Ganzen ähnliche, welches denn freilich im Grunde nichts anders als eine pretiöse Umschreibung des *rechtwinkligen* Dreiecks ist. Die Art wie Hr. M. beweist, dass jene Eigenschaft nur dem rechtwinkligen Dreiecke zukommen kann, ist viel künstlicher und weitläufiger als hier eben nöthig gewesen wäre, da dies gleich unmittelbar aus der Gleichheit der drei Winkel ABC, ADB, BDC folgt (S. 46).

Die dritte Abhandlung war gleichfalls schon früher unserer Societät handschriftlich vorgelegt, und ein Bericht darüber in unsern gel. Anz. (1807 St. 74) gegeben; sie erscheint hier mit bedeutenden Vermehrungen. Es werden darin zwei von Columella gelehrte Näherungsmethoden erläutert, die Fläche des gleichseitigen Dreiecks und die Fläche eines Kreissegments zu berechnen. Eine kleine Übereilung findet sich S. 71, wo behauptet wird, dass kein anderer Bruch, dessen Zähler und Nenner unter 100 sei, dem wahren Verhältnisse des gleichseitigen Dreiecks zum Quadrate über derselben Seite so nahe kommen könne, als $\frac{4}{9}$; in der That sind die beiden Brüche $\frac{7}{16}$ und $\frac{4}{7}$ genauer.

Der Brief an den verdienten Prof. Schneider in Breslau enthält einige Anmerkungen zu den von Hase in Bredows *Epistolae Parisienses* mitgetheilten Stücken von den freilich sehr unbedeutenden mathematischen Schriften des Vitruvius Rufus und Epaphroditus.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 95. Seite 951 bis 952. 1814. Juni 13.

Lehrbuch der mathematischen Geographie von Friedrich Kries, Professor am Gymnasium zu Gotha. Mit sieben Kupfertafeln. 236 Seiten in Octav. Leipzig, bei G. J. Göschen.

Der Plan des Verfassers bei Abfassung dieses Lehrbuchs für eine Wissenschaft, welche für jeden Gebildeten ein so vielseitiges Interesse hat, ging dahin, zwischen den dürftigen und oberflächlichen Abrissen derselben, die den Lehrbüchern der politischen Erdbeschreibung vorausgeschickt zu werden pflegen, und sich nur auf die Aufzählung von Hauptresultaten beschränken, ohne sie durch mathematische Behandlung zu begründen oder zu erläutern, — und den grössern Werken, welche feinere, weniger allgemein verbreitete Kenntnisse der höhern Mathematik voraussetzen, eine schickliche Mittelstrasse zu treffen. In einem solchen Werke erwartet man nicht neue Aufklärungen, die die Wissenschaft selbst weiter bringen, sondern nur, dass eine zweckmässige Auswahl aus dem Bekannten mit Ordnung, Gründlichkeit und Klarheit dargestelllt werde, und dieses Ziel hat der Verf. in der That erreicht. Er handelt in zehn Abschnitten von der Gestalt des Erdkörpers im Allgemeinen; von der mathematischen Eintheilung der Erdkugel und ihrer Grösse; von der Umdrehung derselben um ihre Axe und den damit zusammenhängenden Erscheinungen; von den Mitteln, die geographische Breite eines Orts zu bestimmen, und eine Mittagslinie zu ziehen; von der Bewegung der Erde um die Sonne; von der Eintheilung der Himmels- und der Erdkugel in Beziehung auf die Bewegung der Erde um die Sonne, und den Erscheinungen, die auf der Erde aus dieser Bewegung entstehen; von der Zeitbestimmung und den Mitteln zur Bestimmung der geographischen Länge; von der sphäroidischen Gestalt der Erde; von der Verfertigung künstlicher Erdkugeln und der Landkarten; vom Gebrauch der künstlichen Erdkugel zur Auflösung mathematisch-geographischer Aufgaben. Wir können nicht anders, als dieser Anordnung und Auswahl im Allgemeinen unsern Beifall geben, wenn gleich unsrer Ansicht nach hie und da noch einige Gegenstände, die nicht berührt sind, hätten aufgenommen, und dagegen andere z. B. die verschiedenen Projectionsarten der Karten allenfalls etwas kürzer hätten abgehandelt werden können. So hätten wir unter andern einige Anleitung gewünscht, die Oberfläche einzelner Länder, wenn

auch nur bei der Kugelgestalt der Erde, und den Abstand einzelner Punkte auf der Erdfläche von einander zu berechnen, so wie überhaupt, dass der Gebrauch der sphärischen Trigonometrie nicht so ganz ausgeschlossen wäre. Auch bei der sphäroidischen Gestalt der Erde hätte wohl *bestimmter* herausgehoben werden können, wie der Begriff der geographischen Breite anders modificirt werden müsse als auf der Kugel, und wie von dieser Breite die relative Lage gegen den Erdäquator, die Erdaxe und den Erdmittelpunkt abhängt. Doch dies sind Kleinigkeiten, die dem allgemeinen Werthe des Buchs keinen Abbruch thun, und auf die der Verfasser, wenn vielleicht eine neue Auflage erforderlich sein sollte, zu welcher ein für den Unterricht sehr empfehlenswerthes Buch wohl gelangen kann, leicht wird Rücksicht nehmen können.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 63. Seite 617 bis 622. 1816 April 20.

Commentatio in primum elementorum Euclidis *librum, qua veritatem geometriae principiis ontologicis niti evincitur, omnesque propositiones, axiomatum geometricorum loco habitae, demonstrantur. Auctore* J. C. Schwab, *Regi Württembergiae a consiliis aulicis secretioribus, academiae scientiarum Petropolitanae, Berolinensis et Harlemensis Sodali.* (65 Seiten in Octav.) Stuttgart 1814. Typis J. F. Steinkopf.

Vollständige Theorie der Parallel-Linien. Nebst einem Anhange, in welchem der erste Grundsatz zur Technik der geraden Linie angegeben wird. Herausgegeben von Matthias Metternich, *Doctor der Philosophie, Professor der Mathematik, Mitglied der gelehrten Gesellschaft nützlicher Wissenschaften zu Erfurt.* 44 Seiten in Octav. Mainz 1815. Auf Kosten des Verfassers in Commission bei Florian Kupferberg.

Es wird wenige Gegenstände im Gebiete der Mathematik geben, über welche so viel geschrieben wäre, wie über die Lücke im Anfange der Geometrie bei Begründung der Theorie der Parallel-Linien. Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgend ein neuer Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne dass wir doch, wenn wir ehrlich und offen reden wollen, sagen könnten, dass wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jahren war. Ein solches aufrichtiges und unumwundenes Geständniss scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener, als das eitele Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen.

Der Verfasser der erstern Schrift hatte bereits vor 15 Jahren in einer kleinen Abhandlung: *Tentamen novae parallelorum theoriae notione situs fundatae* einen ähnlichen Versuch gemacht, indem er Alles auf den Begriff von Identität der Lage zu stützen suchte. Er definirt Parallel-Linien als solche gerade Linien, die einerlei Lage haben, und schliesst daraus, dass solche Linien von jeder dritten geraden Linie nothwendig unter gleichen Winkeln geschnitten werden müssen, weil diese Winkel nichts anders seien, als das Maass der Verschiedenheit der Lage dieser dritten Linie von den Lagen der beiden Parallel-Linien. Diese Beweisart ist in der vorliegenden neuen Schrift wiederholt, ohne dass wir sagen könnten, dass sie durch die eingewebten philosophischen Betrachtungen an Stärke gewonnen hätte. Der Behauptung S. 24: Notionem situs e geometria adeo non excludi posse, ut potius notionibus eius fundamentalibus annumeranda sit, *dudum omnes agnovere geometrae,* muss in dem Sinne, in welchem der Verf. den Begriff Lage in seinem Beweise gebraucht, jeder Geometer widersprechen. Wenn wir von des Verfassers Definition: Situs est modus, quo plura coëxistunt vel iuxta se existunt in spatio, ausgehen, so ist Lage ein blosser Verhältniss-Begriff, und man kann wohl sagen, dass zwei gerade Linien *A, B* eine gewisse Lage gegen einander haben, die mit der gegenseitigen Lage zweier andern *C, D* einerlei ist. Aber der Verf. gebraucht das Wort Lage in seinem Beweise als absoluten Begriff, indem er von Identität der Lage zweier nicht coincidirenden geraden Linien spricht. Diese Bedeutung ist offenbar so lange leer und ohne Haltung, bis wir wissen, was wir uns bei einer solchen Identität denken und woran wir dieselbe erkennen sollen. Soll sie an der Gleichheit der Winkel mit *einer* dritten geraden Linie erkannt werden, so wissen wir ohne vorangegangenen Beweis noch nicht, ob eben dieselbe Gleichheit auch bei den Winkeln mit einer vierten geraden Linie Statt haben werde: soll die Gleichheit der Winkel mit *jeder* andern geraden Linie das Criterium sein, so wissen wir wiederum nicht, ob gleiche Lage ohne Coincidenz möglich ist. Wir stehen mithin *nach* des Verf. Beweise noch gerade auf demselben Punkte, wo wir *vor* demselben standen.

Ein grosser Theil der Schrift dreht sich um die Behauptung gegen Kant,

dass die Gewissheit der Geometrie sich nicht auf Anschauung, sondern auf Definitionen und auf das Principium identitatis und das Principium contradictionis gründe. Dass von diesen logischen Hülfsmitteln zur Einkleidung und Verkettung der Wahrheiten in der Geometrie fort und fort Gebrauch gemacht werde, hat wohl KANT nicht läugnen wollen: aber dass dieselben für sich nichts zu leisten vermögen, und nur taube Blüthen treiben, wenn nicht die befruchtende lebendige Anschauung des Gegenstandes überall waltet, kann wohl niemand verkennen, der mit dem Wesen der Geometrie vertraut ist. Hrn. SCHWAB's Widerspruch scheint übrigens zum Theil nur auf Missverständniss zu beruhen: wenigstens scheint uns, nach dem 16. Paragraph seiner Schrift, welcher von Anfang bis zu Ende gerade das Anschauungsvermögen in Anspruch nimmt, und am Ende beweisen soll, postulata EUCLIDIS in generaliora resolvi posse, non sensu et *intuitione* sed *intellectu* fundata, dass Hr. SCHWAB sich bei diesen Benennungen verschiedener Zweige des Erkenntnissvermögens etwas anderes gedacht haben müsse, als der Königsberger Philosoph.

Obgleich der Verfasser der zweiten Schrift seinen Gegenstand auf eine ganz andere und wirklich mathematische Art behandelt hat, so können wir doch über das Resultat derselben nicht günstiger urtheilen. Wir haben nicht die Absicht, hier den ganzen Gang seines versuchten Beweises darzulegen, sondern begnügen uns, dasjenige hier herauszuheben, worauf im Grunde alles ankommt. Man denke sich zwei im Punkte N unter rechten Winkeln einander schneidende gerade Linien, und fälle von einem Punkte S, der ausserhalb dieser geraden Linien, aber in derselben Ebne liegt, senkrecht auf dieselben ST und SM. Es kommt nun darauf an zu beweisen, dass MST ein rechter Winkel wird. Der Verf. sucht dies apagogisch zu beweisen; zuvörderst nimmt er an, MST sei spitz, fällt von T auf MS das Perpendikel Tp, und beweist, dass p zwischen S und M fallen muss. Hierauf fällt er wieder aus p auf NT das Perpendikel pq, wo q zwischen T und N fallen wird. Dann fällt er abermals aus q auf MS das Perpendikel qp', wo p' zwischen p und M liegen wird. Sodann abermals aus p' auf NT das Perpendikel $p'q'$ u. s. w. Diese Operationen lassen sich ohne Aufhören fortsetzen, und so werden von der Linie MS nach und nach die Stücke Sp, pp' u. s. w. abgeschnitten, die jedes eine angebliche Grösse haben, und deren Zahl unbegrenzt ist. Der Verfasser meint nun, dass dies widersprechend sei, weil auf diese Weise nothwendig MS zuletzt erschöpft werden müsste.

Es ist kaum begreiflich, wie er sich auf eine solche Weise selbst täuschen konnte. Er macht sich sogar selbst den Einwurf, dass die Summe der Stücke Sp, pp' u. s. w., wenn die Stücke immer kleiner und kleiner werden, doch, ungeachtet ihre Anzahl ohne Aufhören zunehme, nicht über eine gewisse Grenze hinauswachsen könnte, und meint diesen Einwurf damit zu heben, dass jene Stücke, auch wenn sie immer kleiner und kleiner werden, doch immer grösser bleiben, als *eine angebliche Grösse*; nemlich jene Stücke sind Katheten von rechtwinkligen Dreiecken, und folglich immer grösser als der Unterschied zwischen Hypotenuse und der andern Kathete. Fast scheint es, dass eine grammatische Zweideutigkeit den Verf. irre geleitet hat, nemlich der zwiefache Sinn des Artikels *eine* angebliche Grösse. Der Schluss des Verf. würde nur dann richtig sein, wenn sich zeigen liesse, dass die Stücke Sp, pp' u. s. w. immer grösser bleiben, als *eine bestimmte* angebliche Grösse, z. B. als der Unterschied zwischen der Hypotenuse pT und der Kathete ST. Aber das lässt sich nicht beweisen, sondern nur, dass jedes Stück immer grösser bleibt, als eine angebliche Grösse, die aber selbst für jedes Stück eine andere ist, nemlich Sp grösser als der Unterschied zwischen pT und ST, ferner pp' grösser als der Unterschied zwischen qp' und qp u. s. w. Hiemit verschwindet nun aber die ganze Kraft des Beweises.

Auf dieselbe Art, wie er seinen Beweis führen zu können geglaubt hat, könnte er auch beweisen, dass in einem ebnen Dreiecke ABC, worin B ein rechter Winkel ist, C nicht spitz sein könne; er brauchte nur aus B ein Perpendikel BD auf die Hypotenuse AC zu fällen, dann wieder das Perpendikel DE auf AB und so ohne Aufhören die Perpendikel EF, FG, GH u. s. w. wechselsweise auf AC und AB. Die Stücke CD, DF, FH u. s. w. sind immer grösser als der angebliche Unterschied zwischen Hypotenuse und einer Kathete *desjenigen* rechtwinkligen Dreiecks, worin jede der Reihe nach die andere Kathete ist, demungeachtet erschöpft ihre Summe offenbar die Hypotenuse AC nie, so gross auch ihre Anzahl genommen wird.

Wir müssten fast bedauern, bei so bekannten und leichten Dingen so lange verweilt zu haben, wenn nicht diese Schrift, deren Verf. es übrigens wirklich um Wahrheit zu thun zu sein scheint, durch die Art wie sie schon vor ihrer Erscheinung in öffentlichen Blättern angekündigt wurde, eine mehr als gewöhnliche Aufmerksamkeit auf sich gezogen hätte. Wir bemerken daher hier nur noch, dass der Verf. nachher auf eine ganz ähnliche, und daher eben so nichtige Art bewei-

sen will, dass der Winkel MST nicht stumpf sein kann: allein hierbei ist doch ein wesentlicher Unterschied, weil in der That die Unmöglichkeit dieses Falles in aller Strenge bewiesen werden kann, welches weiter auszuführen aber hier nicht der Ort ist.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 172. 173. Seite 1725 bis 1728. 1822 October 28.

Theorie der Parallelen, von Carl Reinhard Müller, *Doctor der Philosophie, ausserordentlichem Professor der Mathematik u. s. w.* 40 S. in 4. Marburg 1822.

Rec. hat bereits vor sechs Jahren in diesen Blättern seine Überzeugung ausgesprochen, dass alle bisherigen Versuche, die Theorie der Parallellinien streng zu beweisen, oder die Lücke in der Euklidischen Geometrie auszufüllen, uns diesem Ziele nicht näher gebracht haben, und kann nicht anders, als dies Urtheil auch auf alle späteren ihm bekannt gewordenen Versuche ausdehnen. Inzwischen bleiben doch manche solche Versuche, obgleich der eigentliche Hauptzweck verfehlt ist, wegen des darin bewiesenen Scharfsinns den Freunden der Geometrie lesenswerth, und Rec. glaubt in dieser Rücksicht die vorliegende bei Gelegenheit einer Schulprüfung bekannt gemachte kleine Schrift besonders auszeichnen zu müssen. Den ganzen sinnreichen Ideengang des Verf. hier ausführlich darzulegen, wäre für unsere Blätter zu weitläuftig und auch überflüssig, da die Schrift selbst gelesen zu werden verdient: aber sie hat ihre schwache Stelle, wie alle übrigen Versuche, und diese herauszuheben, ist der Zweck dieser Anzeige. Wir finden diese schwache Stelle S. 15 in dem Beweise des Lehrsatzes des 15. Artikels. Dieser Lehrsatz ist der wahre Nerv der ganzen Theorie, welche fällt, sobald jener nicht streng bewiesen werden kann. Wir führen daher zuvörderst diesen Lehrsatz hier auf; die dazu gehörige Figur wird jeder leicht selbst zeichnen können.

Wenn jeder Winkel an der Grundlinie ON eines gleichschenkligen Dreiecks grösser ist, als der Winkel an der Spitze A, und man setzt in O an die Seite OA einen Winkel von der Grösse des Winkels A, dessen anderer Schenkel OL die AN in dem Punkte L zwischen A und N trifft, schneidet alsdann

von AO ein Stück $OM = NL$ ab und zieht ML; wenn man ferner in M an MA abermals einen Winkel von der Grösse des Winkels A setzt, dessen anderer Schenkel MC die AN in dem Punkte C zwischen A und L trifft, hierauf von AM ein Stück $MB = LC$ abschneidet und BC ziehet, und sodann diese Construction auf ähnliche Art fortsetzt, so dass auf der Linie OA die Punkte O, M, B, E, G, K u. s. w., auf der Linie NA hingegen die Punkte N, L, C, D, F, H u. s. w. liegen, so wird behauptet, dass die Stücke OM, MB, BE, EG, GK u. s. w. oder die ihnen resp. gleichen NL, LC, CD, DF, FH u. s. w. eine abweichende Progression bilden.

Den Beweis dieses Lehrsatzes sucht der Verf. apagogisch so zu führen, dass er die übrigen möglichen Fälle, wenn der Lehrsatz nicht wahr wäre, aufzählt, und die Unstatthaftigkeit eines jeden zu erweisen versucht. Der Verf. behauptet nemlich, dass unter jener Voraussetzung einer von folgenden fünf Fällen Statt finden müsste. Die auf einander folgenden Stücke, von OM an gerechnet, wären

1) alle einander gleich, oder
2) jedes nachfolgende grösser als das vorhergehende, oder
3) einige einander gleich und das darauf folgende grösser oder kleiner, oder
4) einige auf einander folgende nähmen fortschreitend ab, und die darauf folgenden fortschreitend zu oder
5) sie würden abwechselnd grösser und kleiner.

In dieser Aufzählung ist der mögliche Fall übergangen, dass die Stücke anfangs fortschreitend zu und dann fortschreitend abnähmen, und nach Rec. eigener Überzeugung (deren tiefer liegende Gründe hier aber nicht angeführt werden können) wäre dessen Erledigung gerade die Hauptsache und die eigentliche Auflösung des Gordischen Knotens. Inzwischen kann man zugeben, dass diese Auslassung hier in so fern wenig auf sich hat, als die Beweisart des Verf. für die Unstatthaftigkeit des dritten Falles, wenn sie zulässig wäre, auch auf diesen Fall von selbst erstreckt werden könnte. Allein eben diesem angeblichen Beweise der Unstatthaftigkeit des dritten Falls können wir keine Gültigkeit zugestehen. Der Verf. stellt die Sache so vor. Wenn z. B. in dem dritten Falle angenommen wird, die beiden ersten Stücke seien gleich, das dritte aber grösser, so wäre DC also grösser als CL. Da nun aber AML gleichfalls ein gleichschenkliges Dreieck ist, dem dieselbe Grundbedingung zukommt, wie dem ursprünglichen Dreieck AON, so müsste, wenn jener dritte Fall mit seiner angenommenen Unterabthei-

lung der gültige wäre, $DC = CL$ sein, in Widerspruch mit den vorher gefundenen. Wir haben, wie wir glauben, bei diesem Moment des Beweises, das worauf es ankommt, noch etwas klarer und bestimmter nach der Ansicht des Verf. angedeutet, als er es selbst gethan hat, wodurch dann aber auch die Schwäche desselben, wie uns scheint, leichter erkannt wird. Denn offenbar ist hier ganz willkürlich angenommen, dass bei allen gleichschenkligen Dreiecken mit dem Winkel A an der Spitze und grössern Winkel an der Basis, wenn mit ihnen die im Lehrsatz angezeigte Construction vorgenommen wird, die Folge der abgeschnittenen Stücke in Rücksicht auf ihr Gleichbleiben, Grösser oder Kleinerwerden, allemal, unabhängig von der Grösse der Seiten, nothwendig dieselbe sein müsse, eine Annahme, die doch unmöglich als von selbst evident betrachtet werden darf. Da sich nun aber hierauf allein der versuchte Beweis der Unstatthaftigkeit des dritten (wie auch vierten und fünften) Falls stützt, und der ganze Artikel auch keine andere Ressourcen zum Beweise der Unstatthaftigkeit des übergangenen Falls darbietet, so glauben wir hierdurch das oben ausgesprochene Urtheil hinlänglich gerechtfertigt zu haben, wobei wir aber gern der ganzen übrigen sinnreichen Durchführung in den folgenden Artikeln volle Gerechtigkeit widerfahren lassen.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 32. Seite 305 bis 320. 1830 Februar 27.

Opérations géodésiques et astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle moyen, exécutées en Piémont et en Savoie par une commission composée d'officiers de l'état major général et d'astronomes Piémontais et Autrichiens en 1821, 1822, 1823. *Milan, de l'imprimerie impériale et royale: Tome premier* 1825. 238 S. *Tome second* 1827. 412 S. in 4. Nebst einem Heft mit Figuren, Karten und sechs Rundsichten.

Die Idee der grossen Längengradmessung, von welcher die im vorliegenden Werke bekannt gemachten Operationen einen Hauptbestandtheil ausmachen, ist ursprünglich von Laplace ausgegangen. Seit dem Jahre 1802 waren in Oberitalien ausgedehnte Dreiecksmessungen, zunächst für topographisch-militärische

Zwecke, durch französische Ingenieurs ausgeführt. Um das Jahr 1811 war ein Dreiecksnetz von Fiume bis Turin vollendet, welches mithin in der Richtung eines Parallelkreises des 45sten Breitengrades sich über sieben Längengrade erstreckte. Um diese Arbeiten auch in höherer wissenschaftlicher Beziehung für die Kenntniss der Gestalt der Erde nützlich zu machen, beschloss das damalige französische Gouvernement, auf Laplace's Antrag, dieses Dreiecksnetz im Westen bis zum atlantischen Meere erweitern und die zu einer Längengradmessung erforderlichen Operationen damit verbinden zu lassen. Die sofort mit Eifer angefangene, nachher durch die Zeitereignisse eine Zeitlang unterbrochene, bald aber wieder mit gleicher Thätigkeit fortgesetzte Arbeit war im J. 1818 so weit gediehen, dass das Dreiecksnetz über das französische Gebiet vom atlantischen Meere bei Bordeaux bis an die Grenze von Savoyen gemessen war. Es fehlte also, zur Vollendung des geodaetischen Theils, nur noch das in den Staaten des Königs von Sardinien liegende Stück. Das dortige und das Oesterreichische Gouvernement, beide die wissenschaftliche Wichtigkeit dieser grossartigen Unternehmung lebhaft anerkennend, beschlossen, durch eine aus Astronomen und Officieren beider Staaten zusammengesetzte Commission sowohl die noch fehlenden geodaetischen, als die in Italien erforderlichen astronomischen Operationen ausführen zu lassen. Diese Arbeiten machen den Inhalt des vorliegenden, wie es scheint von den Astronomen Carlini und Plana gemeinschaftlich redigirten Werks aus.

Der erste Theil ist ausschliesslich den geodaetischen Operationen gewidmet. Die beiden östlichen Endpunkte des Dreiecksnetzes in Frankreich, der Mont Colombier und der Mont Granier (unweit Chambery) bilden die Seite, von welcher die neue Messung ausgehen und bis zur westlichsten Seite des Netzes in der Lombardei, Massé — Superga (bei Turin) fortgeführt werden musste. Man hätte erwarten sollen, dass in diesem Terrain, wo sich die höchsten Gebirge von Europa befinden, die Bildung grossartiger Dreiecke leicht, und eine sehr kleine Anzahl von Zwischenpunkten — die Entfernung des Mont Granier von Superga beträgt nur 150000 Meter — zur Verbindung hinreichend gewesen wäre. Allein gerade umgekehrt hatte man auf dieser mässigen Strecke mit den grössten Schwierigkeiten zu kämpfen, insofern die Spitzen der höheren Berge gar nicht oder schwer zugänglich sind, die Baumaterialien für die Signale nur mit grösster Anstrengung hinaufgeschafft werden können, und die heftigen Stürme sowohl diese Sig-

nale bedrohen, als die Beobachtungen selbst in hohem Grade erschweren. Man fand sich durch diese Umstände bewogen, eine verhältnissmässig grosse Anzahl ziemlich kleiner Dreiecke zu bilden: es sind sechzehn, und die kleinste Verbindungsseite ist nur 18671 Meter lang. Wir dürfen jedoch nicht unbemerkt lassen, dass die Heliotrope, welche alle Signale ganz entbehrlich, und die Messung der Winkel in den allergrössten Dreiecken eben so leicht und scharf, wie bei den kleinsten, machen, damals in Italien noch nicht bekannt waren.

Zur Messung der Winkel dienten achtzollige Theodolithen von REICHENBACH. Die Piemontesischen und Oesterreichischen Officiere theilten sich nicht in die Arbeit, sondern jene und diese bestimmten sämmtliche Winkel des Systems unabhängig für sich. Man erhielt also von jedem einzelnen Winkel zwei Bestimmungen, aus denen nach Massgabe der Anzahl der Serien, die dazu concurrirt hatten, das Mittel als Definitivwerth angenommen wurde. Meistens beruhen die Resultate der Piemontesischen Officiere auf sechs Serien, jede zu 10 Repetitionen; die der Oesterreichischen grösstentheils auf zwei, einige auf drei oder vier Serien. Alle Messungen sind im grössten Detail abgedruckt, doch ohne Nennung der Beobachter, von denen jede einzeln herrührt.

Bei einer so ausgedehnten Operation hat die Kenntniss der bei den Winkelbestimmungen erreichten Genauigkeit ein grosses Interesse. Die Winkelsummen in den einzelnen Dreiecken bieten ein Mittel dazu dar, welches freilich nach Umständen etwas trüglich sein kann. Darf man die vorliegenden danach beurtheilen, so haben sie allerdings eine bewunderungswürdige Genauigkeit. Der grösste Fehler der Winkelsumme bei den 16 Dreiecken ist nur 1″16; der mittlere Fehler findet sich 0″70, und der mittlere Fehler einzelner Winkel würde folglich nur 0″40 sein. Prüfungsmittel durch Diagonalrichtungen oder Polygonbildungen sind gar nicht vorhanden. Allein die Vergleichung der doppelten Bestimmungen der 48 Winkel unter sich deutet ganz entschieden auf eine bei weitem grössere Ungenauigkeit der Resultate hin; wir finden hier 13 wo der Unterschied über 3″, und darunter 5 wo er über 5″ steigt, ja bei einer, gleich in dem ersten Dreiecke, weicht die auf 80 Repetitionen gegründete Bestimmung der Piemontesischen Officiere von der auf 48 Repetitionen beruhenden der Oesterreichischen um 9″2 ab. Bei so grossen Differenzen kann man sich der Vermuthung nicht erwehren, dass die richtige Würdigung der eigentlichen Genauigkeit der Messungen noch von Nebenumständen abhängt, von welchen das Werk uns keine Kenntniss gibt.

Noch ein paar Bemerkungen glauben wir beifügen zu müssen. Wir finden bei sämmtlichen Messungen, dass man beim Anfange jeder Serie immer den Index auf 0 zurückbrachte, ein Verfahren, welches wir nicht billigen können, weil dadurch, wie sehr man auch die Anzahl der Serien vervielfältigt, immer derselbe vom Theilungsfehler abhängige constante Fehler im Resultate zurückbleiben muss. — Bei den Messungen der Piemontesischen Officiere ist jedesmal der Zustand der Luft angezeigt. Unter 414 Messungsreihen zählen wir 320, wo Windstille, und 94, wo Wind angezeigt ist: ein so günstiges Verhältniss hätte man an so hochliegenden Standpunkten (die Höhe des höchsten über der Meeresfläche beträgt 3534 Meter) kaum erwartet.

Der zweite Band enthält in zehn Abschnitten die Arbeiten der Astronomen. In den beiden ersten Abschnitten finden wir die auf die Längengradmessung Beziehung habenden Bestimmungen von Längenunterschieden durch Pulversignale. Die ersten Versuche dieser Art wurden im September 1821 gemacht; die Pulversignale wurden auf der Rocca Melone gegeben, und auf der 170,000 Meter entfernten Sternwarte von Mailand und auf dem nahen Mont Cenis beobachtet. Für die Zeitbestimmung an letzterm Platze war in dem Garten des Hospizes eine kleine Sternwarte errichtet und ein Mittagsfernrohr von FORTIN darin aufgestellt, welches jedoch nicht von ausgezeichneter Güte gewesen zu sein scheint, wie in Beziehung auf die Zapfen, einen wesentlichen Theil, ausdrücklich bemerkt wird. Die Rocca Melone war hier nicht sichtbar; man musste sich, um die Signale zu sehen, an eine etwas entfernte Stelle begeben, wohin man die Zeit mit einem Chronometer von EARNSHAW übertrug. Auch die Beobachtungen am Mittagsfernrohr wurden meistens an diesem Chronometer notirt, aber nicht vom Beobachter selbst, sondern nach einem von diesem gegebenen Zeichen, durch einen Gehülfen. Alle diese Umstände vereinigen sich freilich, das Zutrauen zu der Genauigkeit des Endresultats zu verringern, wenn gleich die drei partiellen Resultate von den drei Beobachtungstagen sehr gut übereinstimmen. Es kommt dazu, dass man hier die Zeitbestimmung aus Sternen, in Mailand aus Sonnendurchgängen erhielt, und endlich, dass, wie es scheint, die Rechtwinkligkeit der optischen Axe des FORTINschen Mittagsfernrohrs zu dessen Drehungsaxe gar nicht berichtigt wurde, wenigstens wird dieses wichtigen Umstandes bei diesen Beobachtungen gar nicht erwähnt.

Bei den Operationen ähnlicher Art im Jahr 1822 ging man in jeder Bezie-

hung mit mehr Vorsicht zu Werke. Sie dienten, durch Pulversignale auf dem Mont Tabor den Mont Cenis mit dem Mont Colombier, und durch Pulversignale auf dem Berge Pierre sur autre den Mont Colombier mit dem französischen Dreieckspunkte Puy d'Usson zu verbinden; zugleich wurden noch auf dem Mont Colombier selbst Signale gegeben, die zur Verknüpfung dieses Platzes mit der Sternwarte von Genf dienten. Die Zeitbestimmung auf dem Mont Cenis und dem Mont Colombier war auf Beobachtungen an Mittagsfernröhren von LENOIR*) und GRINDEL, die für den französischen Standpunkt auf absolute mit einem Repetitionskreise gemessene Sternhöhen gegründet (vgl. *Conn. des tems* 1829 und unsere Anz. 1828 Jan. 10). Auf dem Mont Cenis war man genöthigt, sich drei Stunden Weges von dem Hospiz jedesmal zu entfernen, um die Signale sehen zu können. Endlich finden wir hier noch die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Turin und Mailand durch Pulversignale auf dem S. Bernardo di Fenera zu drei verschiedenen Zeiten 1823...1824, wobei alle Umstände so günstig waren, wie sie nur bei Operationen dieser Art sein können.

Der dritte Abschnitt enthält die Breitenbestimmungen der Sternwarten auf dem Mont Cenis, dem Mont Colombier und in Turin, die beiden ersteren mit Repetitionskreisen von TROUGHTON und REICHENBACH, die letzte mit dem REICHENBACHschen Meridiankreise. Die letztern Beobachtungen zeigen nicht ganz den Grad von Übereinstimmung, an welchen man sonst bei diesen Instrumenten gewöhnt ist. Die Verf. haben dies selbst bemerklich gemacht, und lassen es auf sich beruhen, ob solche Anomalien Realität haben, oder von irgend einem Fehler in der Behandlung des Instruments abhangen, der sich in Zukunft aufklären lassen werde. Ref. bescheidet sich, dass bei der Mannigfaltigkeit der Aufmerksamkeiten, welche dieses Instrument erfordert, niemand, ohne an Ort und Stelle zu sein, auch nur eine plausible Vermuthung darüber aufstellen könne, findet aber in der Art, wie die Verf. sich über jene Anomalien geäussert haben, eine Aufforderung, aus seiner eigenen Erfahrung ein Beispiel anzuführen, wie geringfügige Umstände zuweilen den Beobachtungen nachtheilig werden können. Während einer Reihe von Jahren war die schöne Harmonie in den Beobachtungen an einem dem Turiner ganz gleichen Meridiankreise nur ein einzigesmal eine Zeit-

*) Nach einigen Umständen zu schliessen, scheint 1821 und 1822 dasselbe Mittagsfernrohr auf dem Mont Cenis gebraucht zu sein, obgleich hier ein anderer Verfertiger genannt ist.

lang gestört, und eine vorher *nie* vorgekommene bedeutende Wandelbarkeit des Collimationsfehlers bemerklich. Die Quelle davon fand sich, nachdem sie vorher vergeblich in mancherlei andern Umständen gesucht war, in einem Knötchen des Fadens, welcher um die den Verschluss der Libelle sichernde Blasenhaut gebunden war, und, ein klein wenig zu dick, die innere Fläche der Hülse berührte: nachdem dieses Knötchen weggeschnitten war, so dass die Glasröhre bloss die nur wenig vortretenden Schraubenspitzen berührte, war die Beständigkeit des Collimationsfehlers, und die frühere schöne Harmonie aller Beobachtungen sogleich wieder hergestellt. Auch bei den in Frage stehenden Turiner Beobachtungen bemerken wir bedeutende Wandelbarkeit in dem Collimationsfehler, wir meinen nicht die grösseren Veränderungen von mehreren Minuten, die ohne Zweifel ihren guten dem Astronomen bekannten, obwohl bei den Beobachtungen nicht angeführten Grund gehabt haben, sondern die kleinern, welche zufällig scheinen. Gegenwärtig, wo man ein so vortreffliches Mittel hat, den Collimationsfehler jeden Augenblick ohne Umlegen zu bestimmen, wird die Auffindung der Ursache von ähnlichen Anomalien um so mehr erleichtert.

Im vierten Abschnitt wird der Anschluss des Mont Cenis an das Dreiecksystem vermittelst einer besondern Triangulirung und einer kleinen auf dem Plateau des Berges gemessenen Grundlinie, wie auch die astronomische Bestimmung des Azimuths der Verbindungslinie Mont Cenis — Bellecombe mitgetheilt. Letztere ist zweimal gemacht; die Resultate der Jahre 1821, 1822, mit Repetitionskreisen von THROUGHTON und REICHENBACH, weichen 8″6 von einander ab, und man nahm, obgleich die spätere Bestimmung bei weitem zuverlässiger scheint, aus beiden das Mittel.

Eben so enthalten die beiden folgenden Abschnitte die astronomischen Bestimmungen der Azimuthe der Richtungslinien Mont Colombier — Mont Granier und Turin neue Sternwarte — Superga. In allen drei Fällen dienten die Meridianzeichen der resp. Mittagsfernröhre zur Grundlage dieser Bestimmungen. Endlich finden sich noch im sechsten Abschnitt die Operationen, durch welche eine früher von ORIANI auf der Mailänder Sternwarte gemachte astronomische Azimuthalbestimmung auf die Orientirung der Seite in dem französischen Dreieckssystem Mailand Domthurm — Busto übertragen wurde.

Im siebenten Abschnitte werden nun aus diesen ausgedehnten Operationen die Resultate für die Längengradmessung abgeleitet. Man bezog die Messungen

auf den Parallelkreis, in welchem der Krümmungshalbmesser des Meridians dem Halbmesser eines Kreises gleich ist, dessen Umfang dem ganzen elliptischen Meridian gleich wird: die Breite dieses Parallelkreises findet sich, für die zum Grunde gelegte Abplattung 0,00324, $45^0\,3'\,29''2$. Die geodaetischen Messungen ergeben den ganzen Bogen dieses Parallelkreises zwischen den Meridianen von Mailand (Sternwarte) und von Usson zu 475121,06 Meter, während die Beobachtungen der Pulversignale für den Längenunterschied $6^0\,1'\,41''7$ gegeben haben. Man kann diese Zahlen als das Hauptresultat der Messungen betrachten. Die Vergleichung eines solchen Längengradbogens mit dem Resultat einer Breitengradmessung kann, theoretisch genommen, die Bestimmung der Erdabplattung geben: die Verf. finden aus einer solchen Vergleichung ihres Resultats mit dem Bogen von Greenwich bis Formentera die Abplattung $\frac{1}{311}$. Wie wenig Zuverlässigkeit aber auf diese Weise erreicht werden kann, zeigt sich am auffallendsten, wenn man anstatt des ganzen Bogens die einzelnen Stücke auf ähnliche Art behandelt. Ref. findet so aus der Vergleichung desselben Meridianbogens mit dem Stück d'Usson — Colombier die Abplattung $\frac{1}{178}$, mit dem zweiten Stück Colombier — Mont Cenis $\frac{1}{256}$, mit dem vierten Turin — Mailand $\frac{1}{1170}$, mit dem dritten Stück Mont Cenis — Turin hingegen eine Allongation $\frac{1}{52}$. In dieser Beziehung ist also hiervon für die schärfere Bestimmung der Erddimensionen wenig zu erwarten: allein desto wichtiger sind die Resultate, indem sie eine neue Bestätigung der Unregelmässigkeit der Erdfigur liefern, die sich gerade in Oberitalien im grössten Massstabe zeigt. Am deutlichsten treten diese Unregelmässigkeiten hervor, wenn man die astronomisch bestimmten Längenunterschiede mit den aus den geodaetischen Messungen, nach einer plausibeln Hypothese über die Erdfigur im Grossen, berechneten vergleicht. Die Verf. haben diese Rechnung mit der Abplattung 0,00324 und dem Aequatorshalbmesser 6376986 Meter geführt: auf diese Weise ergeben sich die westlichen Längenunterschiede mit Mailand in Zeit

	astronomisch	geodaetisch	Unterschied
Turin	5′ 58″ 85	6′ 0″ 93	—2″ 08
Mont Cenis	9 0, 20	8 59, 49	+0, 71
Colombier	13 44, 23	13 43, 84	+0, 39
D'Usson	24 6, 78	24 8, 02	—1, 24

Je weniger sich hier der anomalische Gang verkennen lässt, desto interessanter wird die Frage, ob die astronomisch bestimmten Azimuthe der Dreiecksseiten ähnliche Anomalien zeigen. In der That steht, nach einem von LAPLACE zwar unter speciellen Beschränkungen aufgestellten, aber einer grossen Generalisirung fähigen Theorem, die Convergenz der Meridiane in einem nothwendigen und von der Gestalt der Erde unabhängigen Zusammenhange mit dem Längenunterschiede, so dass die Ungleichförmigkeit der einen sich aus denen der andern, beim Fortschreiten in einer Kette von geodaetischen Linien, *a priori* berechnen lassen. Da, wie wir berichtet haben, die astronomischen Azimuthalbestimmungen an den vier Hauptplätzen, Mailand, Turin, Mont Cenis und Colombier mit vieler Sorgfalt gemacht waren, so haben die Verf. mit diesen Orientirungen an den drei letzten Plätzen diejenigen verglichen, welche die Übertragung der Orientirung in Mailand vermittelst der geodaetischen Messungen ergibt, und dabei dieselben vorhin angezeigten Dimensionen des Erdsphäroids zum Grunde gelegt. Die Differenzen sind

für Turin	— 5″ 5
Mont Cenis	—51, 2
Colombier	—25, 2

Auch hier erkennt man also ungemein grosse Anomalien. Allein wenn man nach dem erwähnten Theorem daraus die Anomalien der Längenunterschiede berechnet (was durch Division mit dem funfzehnfachen Sinus der Breite von Mailand und Veränderung des Zeichens geschieht), so ergeben sich Werthe, die von den unmittelbar gefundenen ganz verschieden sind, nemlich

	berechnete Anomalie	Unterschied von der beobacht. Anomalie
Turin	+0″ 52	+2″ 60
Mont Cenis	+4, 81	+4, 11
Colombier	+2, 34	+1, 95

Die Verf. bemerken über *diese* Untersuchung bloss, dass sie zu gross seien, um der Anhäufung der Fehler bei den Winkelmessungen zur Last gelegt werden zu können, und lassen uns also im Dunkeln darüber, was wir von ihnen denken sollen. Nach unserer Ansicht sind diese drei Zahlen insofern von grösster Wich-

tigkeit, als sie uns einen nicht zurückweisbaren Maassstab für die Genauigkeit der Operationen selbst geben, da sie (Rechnungsfehler bei Seite gesetzt) bis auf unmerkliche Kleinigkeiten nichts anderes sein können, als die Aggregate der Fehler, die bei den astronomischen Längenbestimmungen, den Azimuthalbestimmungen, und den Messungen der Winkel im Dreiecksnetze begangen sind. Man kann freilich diese Einflüsse nicht trennen, allein das Dasein des Gesammtfehlers, unabhängig von den Irregularitäten der Erdfigur, ist eine unleugbare Thatsache, wenn auch die Meinung, die man sonst wohl von der *absoluten*, bei allen drei Geschäften erreichten Genauigkeit gehabt hat, merklich herabgestimmt werden muss. Vermuthlich hat jedes seinen Antheil beigetragen, obwohl wir geneigt sind, die grössere Hälfte den gemessenen Dreieckswinkeln zuzuschreiben. Die meisten Operationen, welche Bestandtheile dieser Vergleichung sind, finden wir zwar in diesem Werke, aber die Winkelmessungen zwischen Mailand und Superga, die in frühern Jahren von französischen Ingenieurs ausgeführt waren, nur in abgekürzter Form, und schon ausgeglichen, so dass man über den Grad ihrer Genauigkeit gar nicht urtheilen kann; inzwischen finden wir in der *Connaissance des tems* 1829 S. 288, dass Fehler in den Winkelsummen bis zu 6″8 dabei vorkommen. Auch das bei Verbindung der Sternwarten von Mailand nach Turin, in Beziehung auf die Übertragung der Orientirung sehr wesentliche Dreieck, Superga, alte und neue Sternwarte von Turin (S. 254) scheint nicht ganz mit der erforderlichen Genauigkeit gemessen zu sein. Es wäre sehr zu wünschen, dass zur Aufklärung dieses so wichtigen Gegenstandes, wenigstens so weit von den beiden Sternwarten die Rede ist, eine neue geodaetische Verbindung derselben von den dortigen Astronomen ausgeführt werden möchte, was unter Anwendung von zwei Heliotropen und Benutzung des von beiden Sternwarten sichtbaren Platzes S. Bernardo di Fenera äusserst leicht sein würde; insofern dort, wie wohl nicht zu zweifeln ist, auch nur einer der übrigen frühern Zwischenpunkte sichtbar ist, würde die ganze Arbeit bloss die Messung von vier Winkeln nöthig machen.

Eine sehr intessante und verdienstliche Arbeit erhalten wir im achten Abschnitt, eine vollständige Wiederholung der von Beccaria 1762...1764 ausgeführten Breitengradmessung. Bekanntlich liess sich das Resultat dieser Messung mit den in andern Ländern gemessenen Graden gar nicht in Übereinstimmung bringen; die Krümmung des Bogens zwischen den Endpunkten Mondovi und Andrate war viel geringer, als sie bei regelmässig vorausgesetzter Erdfigur sein sollte. Die neue Messung hat gezeigt, dass Beccaria bei der astronomischen Bestimmung dieser Krümmung allerdings einen Fehler von 13″41 begangen hat (der bei der Unvollkommenheit seiner Instrumente sehr verzeihlich ist); allein das Zeichen dieses Fehlers ist das entgegengesetzte von dem vermutheten, und die Anomalie wird also noch um so viel vergrössert. Die nach obigen Elementen aus den geodaetischen Messungen berechnete Amplitudo ist nemlich (auf Beccarias Endpunkte reducirt) 1° 8′ 18″91; die aus Beccarias astronomischen Beobachtungen sich ergebende 1° 7′ 44″30, und die neue Bestimmung 1° 7′ 31″07. Die neue Messung ist mit so guten Hülfsmitteln und mit so ausgezeichneter Sorgfalt ausgeführt, dass man gezwungen ist, diesen grossen Unterschied von 47″84 fast ganz als eine Unregelmässigkeit der Erdfigur zu betrachten, die merkwürdigste Thatsache dieser Art, die bisher in den Annalen der höhern Geodaesie vorgekommen ist. Höchst wahrscheinlich ist die Attraction der diese Messung in Norden und Süden begrenzenden Alpenketten eine Hauptursache dieses Phänomens, allein eben so wahrscheinlich hat die ungleiche Dichtigkeit der untern Erdschichten, vielleicht bis zu grosser Tiefe hinab, nicht minder Antheil daran. Wenigstens lassen sich ähnliche bei ganz in der Ebene liegenden Punkten vorgekommene Unterschiede von sehr bedeutender Grösse (z. B. eine Anomalie von 21″9 zwischen Mailand und Parma) nicht wohl anders erklären. Wir setzen hinzu, dass je mehr die sorgfältig ausgeführten Gradmessungen vervielfältigt werden, desto mehr die Überzeugung Platz gewinnt, dass solche Abweichungen nur in Rücksicht auf ihre Grösse, aber nicht an sich als Ausnahmen betrachtet werden dürfen, und dass sich solche nach grösserm oder kleinerm Maassstabe überall zeigen. Die Verf. haben eine interessante vergleichende Übersicht der durch astronomische Beobachtungen bestimmten und der durch geodaetische Messungen berechneten Polhöhen von 34 über halb Europa zerstreuten und durch Dreiecke unter sich verbundenen Punkten gegeben. Freilich hat man dieselbe nur wie einen unvollkommenen Versuch zu betrachten, da sie grossentheils nur auf unbeglaubigten fragmentarischen Notizen von den Resultaten der geodaetischen Messungen beruht: denn leider sind die meisten dieser Messungen in Frankreich, Italien, Oesterreich und Baiern noch immer nicht bekannt gemacht.

Derselbe Abschnitt enthält ausserdem noch die neue Messung einer kleinen Grundlinie bei Turin, wodurch einige Umstände, welche die von Hrn. von

Zach im Jahre 1809 dort ausgeführte Triangulirung betreffen, noch mehr ins Licht gesetzt werden.

Im folgenden Abschnitt findet man verschiedene mit dem Zustande der Atmosphäre im Zusammenhange stehende interessante Beobachtungen und Untersuchungen, nemlich gleichzeitige meteorologische Beobachtungen im Hospiz des Mont Cenis und in Mailand; barometrische Höhenbestimmung des ersteren Punktes und des Mont Colombier; trigonometrische Höhenbestimmung des Montblanc (4802,7 Meter) und des Monte Rosa (4619,6 Meter); endlich Untersuchungen über die terrestrische Refraction. Letztere wird aus den an drei Punkten (Mailand, Turin, Mondovi) beobachteten Elevationen dreier Berge Rocca Melone, Monte Viso und Monte Rosa bestimmt, wobei die absoluten Höhen der drei Standpunkte vorausgesetzt, und die Höhen der beobachteten Punkte eliminirt werden, ein Verfahren, welches wenig Sicherheit geben kann, und wie eine genauere Prüfung zeigt, auch wenig Übereinstimmung gegeben hat. Wir möchten also auf das Endresultat für das Verhältniss der Erdkrümmung zur *ganzen* Refraction (5,28 zu 1) wenig Gewicht legen: die Berechnung von sechs Paaren reciproker Zenithdistanzen zwischen Hauptdreieckspunkten gibt uns dieses Verhältniss im Mittel weit kleiner, nemlich 1 zu 0,1235, sehr nahe übereinstimmend mit den bei der Hannoverschen und Liefländischen Gradmessung gefundenen Resultaten.

Der zehnte Abschnitt beschäftigt sich mit der vielbehandelten Aufgabe, aus der Breite eines Endpunktes einer gegebenen Dreiecksseite und deren Azimuth in jenem Endpunkte, dieselben Dinge für den andern Endpunkt, und den Längenunterschied auf dem elliptischen Sphäroid zu finden. Die Entwickelung enthält nur eine Umformung der Legendreschen Formeln, um anstatt der sogenannten reducirten Breite die wahre einzuführen. Die Formeln sind bis zu den Grössen der dritten Ordnung genau, insofern man die Abplattung und die Dreiecksseite (den Erdradius als Einheit angenommen) wie Grössen der ersten Ordnung betrachtet. Bei der Anwendung auf die gegenwärtigen Messungen hat man die Grössen der dritten Ordnung weggelassen, weil dies für die Ausübung genau genug sei. Dies ist jedoch nur insofern zuzugeben, als man die Resultate bloss zur Vergleichung mit den astronomischen Bestimmungen gebrauchen will, wo es allerdings unnöthig ist, in die Berechnung von jenen eine viel grössere Schärfe zu legen, als diese zulassen. Geht man aber von einem andern Gesichtspunkte aus, nemlich die geodaetischen Resultate so genau zu berechnen, wie es die Messungen selbst verstatten, so dass man rückwärts aus jenen (den geodaetischen Längen und Breiten) die Winkelmessungen wieder wenigstens mit derselben Genauigkeit soll berechnen können, mit der sie angestellt sind, so sind jene abgekürzten Formeln bei weitem nicht zureichend, und bei sehr grossen Dreiecken muss man dann sogar wünschen, auch noch die Glieder der vierten Ordnung berücksichtigen zu können. Bei einer andern Form der Rechnung lässt sich dies durch sehr geschmeidige Methoden erreichen: es kann hier aber nicht der Ort sein, dies weiter zu entwickeln, und wir begnügen uns, dieses Bedürfniss der höheren Geodaesie hier angedeutet zu haben. Das Werk selbst bietet verschiedene Fälle dar, wo die grossen Vortheile einer solchen Behandlungsweise fühlbar werden: so sind z. B. die auf der Turiner Sternwarte bei Gelegenheit der Azimuthalbestimmungen gemachten Einschneidungen der Dreieckspunkte Masse, Monte Soglio und Rocca Melone gar nicht benutzt, die unter jener Voraussetzung eine sehr schätzbare Controlle und Vergrösserung der Genauigkeit mit Leichtigkeit gegeben haben würden.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 66. 67. Seite 659 bis 664. 1830 April 29.

Mémorial du dépôt général de la guerre, imprimé par ordre du ministre. T. I, 1829 (für 1802—1803), 696 S. T. III, 1826 (für 1825), 466 S. T. IV, 1828 (für 1826), 494 S. T. V, 1829 (für 1827—1828), 490 S. in 4. Nebst vielen Karten und Planen. Paris bei Picquet.

Die militärische Zeitschrift unter obigem Titel nahm im Jahre 1802, auf Veranlassung des Generals Andreossy, damaligen Directors des Depot, ihren Anfang. Man wollte nach und nach einen Theil der Schätze dieses grossartigen, während der Revolutionskriege ins unermessliche bereicherten Instituts, für die Kriegswissenschaft und die Hülfskenntnisse, Geschichte, Topographie, Geodaesie, Statistik u. s. w. gemeinnützig machen, und dazu die Musse des damals eingetretenen Friedens benutzen. So erschienen rasch nach einander die ersten Nummern dieser Zeitschrift; als jedoch der Krieg bald wieder ausbrach, gerieth der Fortgang derselben allmählich wieder ins Stocken, und mit der siebenten

Nummer (1810) hörte sie ganz auf. Von dem General Guilleminot, welcher im Jahr 1822 die Direction des Depot übernahm, wurde zuerst die Idee einer regelmässigen Fortsetzung der Zeitschrift gefasst, und von dessen interimistischem Stellvertreter, dem General Delachasse de Verigny zur Reife gebracht. Man beschloss zugleich einige Abänderungen in der Form eintreten, und in dem für die Fortsetzung gewählten Quartformat auch die sieben ältern Stücke, wovon die Exemplare vergriffen waren, von neuem abdrucken zu lassen. Zu diesem neuen Abdruck der früheren Stücke sind die beiden ersten Bände der neuen Ausgabe bestimmt, wovon der erste nebst drei Bänden der Fortsetzung vor uns liegt; der zweite soll nächstens nachgeliefert werden.

Das *Dépôt de la guerre* wurde zuerst 1688 unter Ludwig XIV. Regierung durch den Minister Louvois gestiftet: es war jedoch Anfangs nur ein Archiv, in welchem die gesammte officielle Armee-Correspondenz hinterlegt wurde. Zu seiner gegenwärtigen Einrichtung ist es erst nach und nach durch Erweiterung seines Umfangs und Consolidirung seiner Organisation gelangt, und seinen eigenthümlich grossartigen Character hat es erst erhalten, seitdem es der Mittelpunkt geworden ist, wo sich alle Früchte der Arbeiten eines selbständigen Corps, der Ingenieurs-Geographen, vereinigen. Einen Begriff von dem Umfange der Thätigkeit des Instituts gibt der Umstand, dass die jährlichen Kosten im Jahr 1801 auf 110000 Franken angeschlagen wurden, worin die Gehalte des Personals nicht mit begriffen waren; letztere betrugen 1793 die Summe von 231100 Franken.

An eine Zeitschrift, welche aus einer so überschwenglich reichen Quelle schöpfen kann, darf man grosse Ansprüche machen, und diese werden um so vollkommner befriedigt werden, je mehr die Herausgeber ihr Hauptaugenmerk auf die Bekanntmachung wichtiger, dem Publicum bisher verschlossener Materialien richten, und dasjenige, wodurch die Wissenschaft nicht weiter gebracht wird, ausschliessen werden.

Von diesem Ideal finden wir die ältern Artikel viel weiter entfernt, als die neuere Fortsetzung. In der That sind die Artikel des ersten Bandes, wenn wir einen Aufsatz über die Hydrographie eines Theils von Frankreich und eine Notiz über die Geschichte des *Dépôt de la guerre* ausnehmen, von der Art, dass sie eben so gut hätten geschrieben werden können, wenn auch das *Dépôt* gar nicht vorhanden gewesen wäre, und ohne das Interesse zu leugnen, welches mehrere Aufsätze vor dreissig Jahren haben konnten und zum Theil noch jetzt haben, kann

man doch einen grossen Theil des Inhalts nur für Dissertationen erkennen, in denen elementarische Gegenstände mit mehr Breite als Tiefe abgehandelt werden. Es würde jedoch unpassend sein, diese Arbeiten, die einer längst vergangenen Zeit angehören, jetzt noch einer speciellen Kritik zu unterwerfen.

Weit gehaltvoller erscheint dagegen die neue Fortsetzung, worin der Militär, der Geschichtsforscher, der Geograph reichen Stoff zur Belehrung antreffen. Wir nennen hier nur die Darstellung der Schlacht bei Marengo, die Geschichte des Feldzugs in Deutschland im Jahre 1800 (welche beinahe den ganzen fünften Band ausfüllt), die militärische Beschreibung des Flussgebiets der Donau, alles durch eine grosse Menge von Karten und Planen erläutert; die Verhandlungen einer besonders dazu niedergesetzten Commission über die zweckmässigste Art der Terraindarstellung, worin dieser Gegenstand vielseitig erwogen und durch eine beträchtliche Anzahl von Probezeichnungen nach verschiedenen Methoden versinnlicht wird. Nicht ohne Interesse wird man in der Correspondenz des Grafen de Gisors mit seinem Vater dem Herzog de Belle-Isle die Unterredungen lesen, welche ersterer mit Friedrich dem Zweiten ein Jahr vor dem Ausbruche des siebenjährigen Krieges über militärische Gegenstände hatte; imgleichen eine Reihe von bisher ungedruckten zum Theil eigenhändigen, auch mit einem Facsimile begleiteten Briefen Ludwig XIV., wenn gleich nicht alle Leser sie von dem Standpunkt betrachten können, auf welchen die Herausgeber die französischen Leser stellen wollen, indem sie in der Einleitung dazu bemerken: Montesquieu *regarde comme le devoir de tout écrivain homme de bien de contribuer, autant qu'il est en lui, à donner à ses concitoyens des raisons d'aimer ceux à qui ils doivent obéir. Rien n'entre mieux dans cette noble pensée de* Montesquieu, *que la publication de ces lettres et de celles qui pourront les suivre, et tout le monde reconnoîtra dans les successeurs du grand roi tout ce que son coeur avait de paternel et son âme d'héroïque.* Endlich dürfen wir nicht mit Stillschweigen übergehen die Nachrichten, welche im 3. und 4. Bande über die neue grosse Karte von Frankreich gegeben werden, deren Ausführung durch eine königliche Ordonnanz vom 6. August 1817 befohlen wurde. Man wollte Anfangs die Aufnahme in dem Maassstabe von 1 zu 10000 und den Stich in dem Maassstabe von 1 zu 50000 ausführen, wobei die Anzahl aller Blätter auf 611, jedes 800 Millimeter breit und 500 Millimeter hoch, angeschlagen wurde, und glaubte die ganze Arbeit in 20 Jahren vollenden zu können. Man liess jedoch diesen Plan bald fahren, und beschränkte den Maassstab für die Auf-

nahme auf das Verhältniss 1 zu 40000, und für den Stich auf das Verhältniss 1 zu 80000, wonach die Anzahl der Blätter (von derselben Grösse wie oben) auf 208, die erforderliche Zeit auf 15 Jahr, die Kosten für die Arbeit, den Stich und den Abdruck von 3000 Exemplaren auf 4232000 Franken, endlich der Verkaufspreis jedes Blattes auf 7 Franken 50 Centimen, oder der ganzen Karte auf 1560 Franken veranschlagt werden. Die ganze Arbeit gehört zum Ressort des Depot, allein es ist dabei auf die Mitwirkung des Katasters gerechnet, obwohl aus dem Bericht nicht recht klar ist, in welchem Maasse: wie es scheint wird von dieser (von einem andern Ministerium abhängigen) Behörde das ganze Detail erwartet, so dass den Ingenieurs-Geographen bei der Aufnahme nur die trigonometrischen Arbeiten und die Höhenbestimmungen anheim fallen. Diese Abhängigkeit von einer andern Behörde, mit welcher kein recht harmonisches Zusammenwirken Statt zu finden scheint, (der nicht hinlänglichen Unterstützung von Seiten des Katasters wird das Fehlschlagen des ersten Plans beigemessen), könnte vielleicht dem gehofften raschen Fortgange dieser grossartigen Unternehmung sehr nachtheilig werden. Nach Vollendung der Arbeit soll noch ein grosses Repertorium geliefert werden, worin nicht bloss die numerischen Resultate für die Lage und Höhe der trigonometrischen Punkte, sondern auch alle Messungen, auf welchen jene beruhen, bekannt gemacht werden sollen. Dadurch werden dann freilich alle Wünsche erfüllt werden. Allein so wie theils zu besorgen ist, dass dieser Zeitpunkt noch sehr weit entfernt sein möchte, theils auch in höhern wissenschaftlichen Beziehungen hauptsächlich nur die Dreiecke und Dreieckspunkte erster Ordnung das grösste Interesse darbieten, so können wir den lebhaften Wunsch nicht unterdrücken, dass man mit der vollständigen Bekanntmachung der Dreiecke erster Ordnung (welche bereits jetzt alle gemessen sind) nicht so lange zögern, sondern diese zum Besten der Wissenschaft sogleich liefern möchte. Die Freunde der höhern Geodaesie würden es um so dankbarer erkennen, wenn die künftigen Bände des Memorial diese Wünsche erfüllten, als sie, bei den bisher erschienenen Bänden, die in anderer Beziehung so gehaltreich sind, am wenigsten berücksichtigt worden sind, und in den wenigen theoretischen Dissertationen und Hülfstabellen keine Entschädigung für den Mangel an *Thatsachen* finden, welche doch das Depot in so reichem Maasse zu geben im Stande wäre.

VERSCHIEDENE AUFSÄTZE.

v. Zach. Monatliche Correspondenz für Erd- und Himmelskunde. 1810 August. Band XXII. Seite 112 bis 121.

BESTIMMUNG DER GRÖSSTEN ELLIPSE

WELCHE DIE VIER SEITEN EINES GEGEBENEN VIERECKS BERÜHRT.

Die Lage aller Punkte in der Ebne, in welcher das Viereck liegt, bestimme ich durch Abscissen und Ordinaten, indem ich vorerst die Abscissen-Linie und den Anfangspunkt der Abscissen ganz nach Willkür annehme. Das Viereck bestimme ich nicht durch die Winkelpunkte, sondern durch die Punkte, wo jenes Seiten von den aus dem Anfangspunkte der Abscissen auf diese gefällten Perpendikeln geschnitten werden. Diese Perpendikel seien a, a', a'', a''', und ihre Neigungen gegen die Abscissen-Linie A, A', A'', A''', folglich die Coordinaten der erwähnten vier Durchschnittspunkte

$$\begin{array}{ll} a\cos A, & a\sin A \\ a'\cos A', & a'\sin A' \\ a''\cos A'', & a''\sin A'' \\ a'''\cos A''', & a'''\sin A''' \end{array}$$

Es sei ferner r der Abstand des Mittelpunkts der gesuchten Ellipse von dem Anfangspunkte der Abscissen, und φ die Neigung der von letzterm zu ersterm gezogenen geraden Linie gegen die Abscissen-Linie, oder $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$ die Coordinaten des Mittelpunkts der Ellipse. Man findet hieraus leicht, dass das Perpendikel von diesem Mittelpunkte auf die erste Seite des Vierecks

$$= a - r\cos(A-\varphi)$$

sein werde; auf ähnliche Art werden die Perpendikel auf die drei andern Seiten ausgedrückt.

Bezeichnet man die halbe grosse Axe der Ellipse mit α, die halbe kleine Axe mit δ, die Neigung der letztern gegen die Abscissen-Linie mit ψ, so ist offenbar $A-\psi$ die Neigung des Perpendikels aus dem Mittelpunkte auf die erste Seite des Vierecks gegen die kleine Axe, welches, wenn jene die Ellipse berühren soll, nach bekannten Gründen durch

$$\sqrt{[\alpha\alpha\sin(A-\psi)^2+\delta\delta\cos(A-\psi)^2]}$$

ausgedrückt wird. Man hat also die Gleichung

$$a-r\cos(A-\varphi) = \sqrt{[\alpha\alpha\sin(A-\psi)^2+\delta\delta\cos(A-\psi)^2]}$$

und eben so drei andere ganz ähnliche, wenn man statt a und A die sich auf die andern Seiten beziehenden Zeichen substituirt. Schafft man also die Irrationalität weg, und setzt Kürze halber

$$\begin{aligned} rr-\alpha\alpha-\delta\delta &= t \\ \alpha\alpha-\delta\delta &= u \end{aligned}$$

so sind unsere vier Gleichungen

I. $2aa+t-4ar\cos(A-\varphi)+rr\cos 2(A-\varphi)+u\cos 2(A-\psi) = 0$
II. $2a'a'+t-4a'r\cos(A'-\varphi)+rr\cos 2(A'-\varphi)+u\cos 2(A'-\psi) = 0$
III. $2a''a''+t-4a''r\cos(A''-\varphi)+rr\cos 2(A''-\varphi)+u\cos 2(A''-\psi) = 0$
IV. $2a'''a'''+t-4a'''r\cos(A'''-\varphi)+rr\cos 2(A'''-\varphi)+u\cos 2(A'''-\psi) = 0$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\sin 2(A''-A')$, die zweite mit $\sin 2(A-A'')$, die dritte mit $\sin 2(A'-A)$, und addirt die Producte, so wird (m. s. Art. 78 meiner *Theoria motus corporum coelestium*)

V. $2aa\sin 2(A''-A')+2a'a'\sin 2(A-A'')+2a''a''\sin 2(A'-A)$
$+t[\sin 2(A''-A')+\sin 2(A-A'')+\sin 2(A'-A)]$
$-4ar\cos(A-\varphi)\sin 2(A''-A')$
$-4a'r\cos(A'-\varphi)\sin 2(A-A'')$
$-4a''r\cos(A''-\varphi)\sin 2(A'-A) = 0$

Das Aggregat, worin hier t multiplicirt erscheint, kann auch durch

$$4\sin(A''-A')\sin(A''-A)\sin(A'-A)$$

ausgedrückt werden.

Behandelt man auf eine ähnliche Art die Gleichungen I, II, IV, so bekommt man eine ähnliche Gleichung VI, die sich von V nur durch die Vertauschung der Buchstaben a'', A'' gegen a''', A''' unterscheidet. Eliminirt man aus den beiden Gleichungen V und VI die Grösse t, so sieht man leicht, dass daraus eine Gleichung von der Form

VII. $$B+Cr\cos\varphi+Dr\sin\varphi = 0$$

hervorgehen wird, wo B, C, D bekannte Grössen bedeuten. Man kann ihre Werthe leicht darstellen, wir werden indess bald zeigen, wie man dieser Entwickelung überhoben sein kann. Aus der Gleichung VII ist klar, dass der Mittelpunkt jeder die vier Seiten unsers Vierecks berührenden Ellipse in einer geraden Linie liegt, welche gegen die Abscissen-Linie unter einem Winkel, dessen Tangente $= -\frac{C}{D}$, geneigt ist, und dass der Durchschnitts-Punkt die Abscisse $-\frac{B}{C}$ hat. Die Lage dieser geraden Linie kann man aber viel leichter durch folgende Betrachtungen bestimmen. Eine Diagonale des Vierecks kann als eine verschwindende, die Seiten des Vierecks berührende Ellipse betrachtet werden, deren Mittelpunkt dann offenbar in der Mitte der Diagonale liegt. Hieraus folgt leicht, dass die obige gerade Linie, welche der geometrische Ort der Mittelpunkte aller die vier Seiten des Vierecks berührenden Ellipsen ist; keine andere sein könne, als die, welche die Halbirungspunkte der beiden Diagonalen verbindet, und welche demnach leicht gefunden werden kann. Hierüber füge ich noch zwei Bemerkungen hinzu:

1) Fielen beide Halbirungs-Punkte in Einen zusammen (in welchem Falle das Viereck ein Parallelogramm sein wird), so fällt freilich diese Bestimmung der

geraden Linie weg; allein in diesem Fall ist leicht zu zeigen, dass nothwendig dieser gemeinschaftliche Halbirungspunkt zugleich der Mittelpunkt der Ellipse selbst sein wird.

2) Verlängert man zwei einander gegenüber liegende Seiten des Vierecks bis zu ihrem Durchschnitt und eben so die beiden andern, so darf man auch die zwischen diesen beiden Durchschnitts-Punkten enthaltene gerade Linie, als eine verschwindende die vier Seiten des Vierecks berührende Ellipse ansehen. Der Halbirungspunkt derselben muss also in eben der geraden Linie liegen, welche die Halbirungspunkte der beiden Diagonalen verbindet. Diese allgemeine Eigenschaft eines jeden Vierecks ist meines Wissens bisher noch nicht bemerkt; ich werde davon unten einen einfachen directen Beweis geben.

Um die Rechnungen noch mehr abzukürzen, will ich jetzt annehmen, dass man diese gerade Linie selbst zur Abscissen-Linie gewählt habe, und folglich $\varphi = 0$ sei. Der Anfangspunkt der Abscissen bleibt wie vorher willkürlich. Eben diese Bestimmung $\varphi = 0$ macht nun eine der vier Fundamental-Gleichungen entbehrlich, und wir haben also zur Bestimmung der vier unbekannten Grössen t, u, r, ψ theils die drei Gleichungen

$$\begin{aligned}
&2aa + t - 4ar\cos A + rr\cos 2A + u\cos 2(A-\psi) = 0\\
&2a'a' + t - 4a'r\cos A' + rr\cos 2A' + u\cos 2(A'-\psi) = 0\\
&2a''a'' + t - 4a''r\cos A'' + rr\cos 2A'' + u\cos 2(A''-\psi) = 0
\end{aligned}$$

theils die Bedingung, dass der Inhalt der Ellipse, welchem offenbar das Product $\alpha\delta$ proportional ist, und folglich auch $4\alpha\alpha\delta\delta$ oder $(rr-t)^2 - uu$ ein Maximum sein soll.

Setzt man Kürze halber $rr - t = \theta$ und

$$\begin{aligned}
b &= 2(a - r\cos A)^2\\
b' &= 2(a' - r\cos A')^2\\
b'' &= 2(a'' - r\cos A'')^2
\end{aligned}$$

so werden obige Gleichungen

$$\begin{aligned}
\theta - u\cos 2(A-\psi) &= b\\
\theta - u\cos 2(A'-\psi) &= b'\\
\theta - u\cos 2(A''-\psi) &= b''
\end{aligned}$$

woraus nach den gehörigen Entwickelungen leicht folgt

$$\begin{aligned}
&4\theta\sin(A''-A')\sin(A-A'')\sin(A'-A)\\
&\quad = b\sin 2(A''-A') + b'\sin 2(A-A'') + b''\sin 2(A'-A)\\
&4uu\sin(A''-A')^2\sin(A-A'')^2\sin(A'-A)^2\\
&\quad = \quad bb\sin(A''-A')^2\\
&\qquad + b'b'\sin(A-A'')^2\\
&\qquad + b''b''\sin(A'-A)^2\\
&\qquad + 2b'b''\cos(A''-A')\sin(A-A'')\sin(A'-A)\\
&\qquad + 2bb''\sin(A''-A')\cos(A-A'')\sin(A'-A)\\
&\qquad + 2bb'\sin(A''-A')\sin(A-A'')\cos(A'-A)
\end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned}
&4(\theta\theta - uu)\sin(A''-A')^2\sin(A-A'')^2\sin(A'-A)^2\\
&\quad = -bb\sin(A''-A')^4\\
&\qquad - b'b'\sin(A-A'')^4\\
&\qquad - b''b''\sin(A'-A)^4\\
&\qquad + 2b'b''\sin(A-A'')^2\sin(A'-A)^2\\
&\qquad + 2bb''\sin(A''-A')^2\sin(A'-A)^2\\
&\qquad + 2bb'\sin(A''-A')^2\sin(A-A'')^2
\end{aligned}$$

Ich habe diese Formeln hierher gesetzt, weil sie auch in andern Fällen zuweilen mit Nutzen zu gebrauchen sind. Man sieht leicht, dass das, was auf der rechten Seite steht, das Product aus den vier Factoren sei.

$$\begin{aligned}
&+\sqrt{b}.\sin(A''-A') + \sqrt{b'}.\sin(A-A'') + \sqrt{b''}.\sin(A'-A)\\
&-\sqrt{b}.\sin(A''-A') + \sqrt{b'}.\sin(A-A'') + \sqrt{b''}.\sin(A'-A)\\
&+\sqrt{b}.\sin(A''-A') - \sqrt{b'}.\sin(A-A'') + \sqrt{b''}.\sin(A'-A)\\
&+\sqrt{b}.\sin(A''-A') + \sqrt{b'}.\sin(A-A'') - \sqrt{b''}.\sin(A'-A)
\end{aligned}$$

Substituirt man hier für b, b', b'' ihre Werthe und setzt Kürze halber

$$a\sin(A''-A') + a'\sin(A-A'') + a''\sin(A'-A) = M$$

so wird

$$(\theta\theta - uu)\sin(A''-A')^2\sin(A-A'')^2\sin(A'-A)^2$$

gleich dem Producte aus den vier Factoren

$$M$$
$$M - 2(a - r\cos A)\sin(A'' - A')$$
$$M - 2(a' - r\cos A')\sin(A - A'')$$
$$M - 2(a'' - r\cos A'')\sin(A' - A)$$

Man hat also offenbar eine Gleichung von der Form

$$\gamma + \delta r + \varepsilon rr + \zeta r^3 = \theta\theta - uu = 4\alpha\alpha\sigma\sigma$$

wo γ, δ, ε, ζ gegebene Grössen sind, und dann wird r durch die Bedingung des Maximums offenbar aus folgender quadratischen Gleichung zu bestimmen sein

$$\delta + 2\varepsilon r + 3\zeta rr = 0$$

Noch leichter findet man die Coëfficienten dieser Gleichung durch folgende Betrachtung. Da das vierfache Product aus den Quadranten der halben grossen und der halben kleinen Axe einer jeden Ellipse, welche die vier Seiten des Vierecks berührt und deren Mittelpunkt zur Abscisse r hat, allgemein

$$= \gamma + \delta r + \varepsilon rr + \zeta r^3$$

wird, so muss dieser Ausdruck nothwendig $= 0$ werden, wenn man für r einen Werth substituirt, welcher einer der drei oben betrachteten verschwindenden Ellipsen entspricht. Diese drei Werthe sind die Abstände der beiden Halbirungspunkte der Diagonalen des Vierecks und des Halbirungspunktes der geraden Linie, welche die Durchschnitte der beiden Seiten-Paare des Vierecks verbinden, von dem Anfangspunkte der Abscissen. Ich bezeichne diese drei Punkte durch C, D, E und ihre Abscissen durch c, d, e, so muss offenbar

$$r^3 + \tfrac{\varepsilon}{\zeta}rr + \tfrac{\delta}{\zeta}r + \tfrac{\gamma}{\zeta}$$

mit dem Producte $(r-c)(r-d)(r-e)$ identisch sein; folglich ist die obige quadratische Gleichung

$$3rr - 2r(c+d+e) + cd + ce + de = 0$$

deren Wurzeln

$$\tfrac{c+d+e}{3} + \tfrac{1}{3}\sqrt{(cc+dd+ee-cd-ce-de)}$$

und

$$\tfrac{c+d+e}{3} - \tfrac{1}{3}\sqrt{(cc+dd+ee-cd-ce-de)}$$

sind.

Die Wurzelgrösse $\sqrt{(cc+dd+ee-cd-ce-de)}$ lässt sich auch in die Form setzen

$$\sqrt{[(d-c)^2 + (d-c)(e-d) + (e-d)^2]}$$

sie ist folglich die dritte Seite eines Dreiecks, in welchem zwei Seiten $d-c$ und $e-d$ sind, und der eingeschlossene Winkel $= 120^0$. Beschreibt man also über CD ein gleichseitiges Dreieck, dessen Spitze F, so ist EF jener Wurzelgrösse gleich, wonach sich also die beiden Werthe von r leicht construiren lassen. Man kann leicht zeigen, dass der eine dieser Werthe zwischen c und d, der andere zwischen d und e fallen muss, und dass nur dem erstern der Mittelpunkt der grössten Ellipse wirklich entspricht: für den andern wird nemlich

$$\gamma + \delta r + \varepsilon rr + \zeta r^3$$

nicht ein grösstes, sondern ein kleinstes werden, oder vielmehr den grössten *negativen* Werth erhalten, dem also nur ein imaginärer Werth von $\alpha\sigma$ entsprechen kann. Man sieht leicht, dass dieser sich auf eine Hyperbel beziehen muss.

Sobald übrigens der Mittelpunkt der verlangten Ellipse gefunden ist, hat die Bestimmung der übrigen unbekannten Grössen keine Schwierigkeit. Aus θ und r findet man t; aus t und u dann ferner α und σ, und dann aus einer oder einigen der obigen Gleichungen ψ. Dadurch sind also sowohl die Dimensionen der Ellipse, als ihre Lage vollkommen bestimmt.

Ich muss übrigens noch bemerken, dass das hier aufgelöste Problem mit dem neulich in der *Monatl. Corresp.* aufgegebenen nicht ganz einerlei ist. Es gibt nemlich Fälle, wo die grösste *innerhalb* eines Vierecks zu beschreibende Ellipse eine der vier Seiten des Vierecks nicht berührt. Die nähere Betrachtung dieser Fälle gehört aber hier nicht zu meiner Absicht.

Directer Beweis des obigen Theorems die Vierecke betreffend.

Es seien A, B, C, D die vier Winkelpunkte des Vierecks; E der Durchschnitt von AB und DC; F der Durchschnitt von BC und AD; G, H und I

in der Mitte von AC, BD und EF. Die Coordinaten dieser neuen Punkte, Abscissen-Linie und Anfangspunkt ganz willkürlich gewählt, bezeichne ich mit a, a' b, b' c, c' d, d' u. s. w. Da nun die drei Punkte A, B, E in einer geraden Linie liegen, so findet zwischen ihren Coordinaten folgende Bedingungsgleichung statt:

$$a(e'-b')+b(a'-e')+e(b'-a') = 0$$

und eben so hat man, da ADF, BCF, DCE gerade Linien sind

$$\begin{aligned} a(f'-d')+d(a'-f')+f(d'-a') &= 0 \\ b(c'-f')+c(f'-b')+f(b'-c') &= 0 \\ c(e'-d')+d(c'-e')+e(d'-e') &= 0 \end{aligned}$$

Addirt man diese vier Gleichungen zusammen, so erhält man

$$(a+c)(e'+f'-b'-d')+(b+d)(a'+c'-e'-f')+(e+f)(b'+d'-a'-c') = 0$$

oder da offenbar

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(a+c) &= g, \quad \tfrac{1}{2}(b+d) = h, \quad \tfrac{1}{2}(e+f) = i \\ \tfrac{1}{2}(a'+c') &= g', \quad \tfrac{1}{2}(b'+d') = h', \quad \tfrac{1}{2}(e'+f') = i' \end{aligned}$$

ist,

$$g(i'-h')+h(g'-i')+i(h'-g') = 0$$

welches die Bedingungs-Gleichung ist, dass G, H, I in Einer geraden Linie liegen.

ZUSÄTZE

ZUR GEOMETRIE DER STELLUNG VON CARNOT

ÜBERSETZT VON SCHUMACHER. 1810.

I.

{Folgende analytische Behandlung der merkwürdigen Punkte eines Dreiecks verdanke ich der Güte des Herrn Professor GAUSS. SCHUMACHER.}

Es seien A, A', A'' die drei Winkelpunkte eines Dreiecks und deren Coordinaten respective

$$\begin{aligned} &x, && y \\ &x', && y' \\ &x'', && y'' \end{aligned}$$

Die Coordinaten der Punkte B, B', B'', welche die Seiten $A'A''$, $A''A$, AA' halbiren, werden offenbar sein

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(x'+x''), && \tfrac{1}{2}(y'+y'') \\ &\tfrac{1}{2}(x''+x), && \tfrac{1}{2}(y''+y) \\ &\tfrac{1}{2}(x+x'), && \tfrac{1}{2}(y+y') \end{aligned}$$

Man nehme auf den Linien AB, $A'B'$, $A''B''$ (vorwärts oder rückwärts verlängert, wenn es nöthig ist), von A, A', A'' ab gezählt, Stücke, welche jenen respective proportional sind, und sich dazu wie $n:1$ verhalten. Falls man die Stücke rückwärts nimmt, hat man n als negativ anzusehen. Dieser Stücke Endpunkte heissen C, C', C'', so sind ihre Coordinaten

$$\begin{array}{ll} x+n\tfrac{1}{2}(x'+x''-2x), & y+n\tfrac{1}{2}(y'+y''-2y) \\ x'+n\tfrac{1}{2}(x''+x-2x'), & y'+n\tfrac{1}{2}(y''+y-2y') \\ x''+n\tfrac{1}{2}(x+x'-2x''), & y''+n\tfrac{1}{2}(y+y'-2y'') \end{array}$$

oder wenn man

$$1-n=\alpha$$
$$\tfrac{1}{2}n=\vec{o}$$

setzt

$$\begin{array}{ll} \alpha x+\vec{o}(x'+x''), & \alpha y+\vec{o}(y'+y'') \\ \alpha x'+\vec{o}(x''+x), & \alpha y'+\vec{o}(y''+y) \\ \alpha x''+\vec{o}(x+x'), & \alpha y''+\vec{o}(y+y') \end{array}$$

Von den Punkten C, C', C'' werden Perpendikel auf $A'A''$, $A''A$, AA' gefällt, man sucht die Lage der drei Durchschnittspunkte dieser Perpendikel. Es seien die Coordinaten des Durchschnittspunktes der beiden letzten Perpendikel

$$\xi, \quad \eta$$

welche man mit Hülfe des folgenden Lehrsatzes bestimmen wird.

Wenn

$$\begin{array}{ll} a, & b \\ a', & b' \\ a'', & b'' \\ a''', & b''' \end{array}$$

die Coordinaten von vier Punkten sind, und die graden Linien durch den ersten und zweiten Punkt auf der Linie durch den dritten und vierten senkrecht sind, so hat man

$\frac{b'-b}{a'-a}$ = tang. der Neigung der ersten Linie gegen die Abscissenlinie

$\frac{b'''-b''}{a'''-a''}$ = tang. der Neigung der zweiten Linie gegen die Abscissenlinie

und folglich, da die eine Neigung um 90^0 grösser ist als die andere, das Product der beiden Tangenten $=-1$, also

$$\frac{b'-b}{a'-a}\cdot\frac{b'''-b''}{a'''-a''}=-1$$

In unserm Falle hat man also

$$\frac{\alpha y'+\vec{o}(y''+y)-\eta}{\alpha x'+\vec{o}(x''+x)-\xi}\cdot\frac{y''-y}{x''-x}=-1$$
$$\frac{\alpha y''+\vec{o}(y+y')-\eta}{\alpha x''+\vec{o}(x+x')-\xi}\cdot\frac{y-y'}{x-x'}=-1$$

Hieraus folgt leicht durch Elimination

$$\xi=\frac{(y-y')(y'-y'')(y''-y)(\alpha-\vec{o})}{y(x''-x')+y'(x-x'')+y''(x'-x)}$$
$$+\alpha\cdot\frac{xy(x''-x')+x'y'(x-x'')+x''y''(x'-x)}{y(x''-x')+y'(x-x'')+y''(x'-x)}$$
$$+\vec{o}\cdot\frac{y(x''x''-x'x')+y'(xx-x''x'')+y''(x'x'-xx)}{y(x''-x')+y'(x-x'')+y''(x'-x)}$$

Der Werth von η folgt aus dem Werthe von ξ, wenn man in diesem alle x, x', x'' mit den entsprechenden y, y', y'' vertauscht, wie man auch a priori leicht voraus sehen kann.

Die Coordinaten des Durchschnitts des ersten und letzten Perpendikels folgen, wie man leicht sieht, aus ξ und η, wenn man x mit x', und y mit y' vertauscht, da aber dadurch ξ und η ihre Werthe nicht ändern, indem in beiden offenbar die Coordinaten der Punkte A, A', A'' auf gleiche Art entriren, so ist klar, dass dieser zweite Durchschnittspunkt mir dem ersten zusammenfällt, und eben deshalb fällt der dritte Durchschnittspunkt mit den beiden ersten von selbst gleichfalls zusammen.

Für den Schwerpunkt ist übrigens offenbar

$$n=\tfrac{3}{2} \quad \text{also} \quad \alpha=\vec{o}=\tfrac{1}{2}$$

und daher

$$\xi=\tfrac{1}{3}(x+x'+x'')$$
$$\eta=\tfrac{1}{3}(y+y'+y'')$$

Für den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist

$$n=1 \quad \text{also} \quad \alpha=0, \quad \vec{o}=\tfrac{1}{2}$$

Für den Durchschnittspunkt des Perpendikels aus A u. s. w. selbst ist

$$n=0 \quad \text{oder} \quad \alpha=1, \quad \vec{o}=0$$

Der Nenner in dem Werthe von ξ, η ist der doppelte Inhalt des Dreiecks. Auch folgt leicht aus diesen Formeln, dass für alle verschiedene Werthe

von n die Durchschnittspunkte in *Einer* geraden Linie liegen, und ihre Entfernungen den Unterschieden der Werthe von n proportional sind.

Die Formeln für ξ, η werden höchst einfach, wenn man die Abscissenlinie durch AA' legt, und ihren Anfang in A setzt, also

$$x = y = y' = 0.$$

II.

Dass die Perpendikel in einem Dreiecke, aus den Spitzen auf die gegenüberstehenden Seiten sich in einem Punkte schneiden, kann man sehr einfach so zeigen.

Das gegebene Dreieck sei BDF, und die erwähnten Perpendikel $\overline{BI}$, $\overline{DG}$, $\overline{FH}$.

Man ziehe durch jeden Scheitelpunkt des Dreiecks Parallelen mit der gegenüberstehenden Seite, die sich in den Punkten A, C, E, schneiden, es steht folglich $\overline{FH}$ auch auf $\overline{AE}$, $\overline{GD}$ auf $\overline{CE}$, $\overline{BI}$ auf $\overline{AC}$ senkrecht, und zwar ist

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{BC}\\ \overline{ED} &= \overline{DC}\\ \overline{AF} &= \overline{FE}\end{aligned}$$

Beschreibt man nun um das Dreieck ACE einen Kreis, so liegt sein Mittelpunkt sowohl in $\overline{BI}$, als in $\overline{DG}$, als in $\overline{FH}$, diese drei Linien müssen sich also in einem Punkte schneiden.

Puissant gibt in seinem Recueil des propositions de Géométrie einen zierlichen analytischen Beweis, und fügt einen geometrischen bei, der nicht dasselbe Verdienst hat.

[*Erste handschriftliche Bemerkung.*]

Sind $\alpha, \mathfrak{b}, \gamma$ die complexen Zahlen, die sich in natürlicher Ordnung auf die drei Winkeldunkte eines Dreiecks beziehen; A, B, C die drei Winkel, u die complexe Zahl für den Mittelpunkt des [umschriebenen] Kreises, so hat man

$$\begin{aligned}2u = \alpha + \mathfrak{b} + (\mathfrak{b} - \alpha)\operatorname{cotg} C.i &= \alpha(1 - i\operatorname{cotg} C) + \mathfrak{b}(1 + i\operatorname{cotg} C)\\ &= \mathfrak{b}(1 - i\operatorname{cotg} A) + \gamma(1 + i\operatorname{cotg} A)\\ &= \gamma(1 - i\operatorname{cotg} B) + \alpha(1 + i\operatorname{cotg} B)\end{aligned}$$

Ist t die complexe Zahl für den Schwerpunkt, so ist $3t = \alpha + \mathfrak{b} + \gamma$, also

$$\begin{aligned}3t - 2u &= \alpha + (\mathfrak{b} - \gamma)\operatorname{cotg} A.i\\ &= \mathfrak{b} + (\gamma - \alpha)\operatorname{cotg} B.i\\ &= \gamma + (\alpha - \mathfrak{b})\operatorname{cotg} C.i\end{aligned}$$

Dies $3t - 2u$ ist die complexe Zahl für den Punkt, wo die drei Perpendikel aus den Winkelpunkten auf die gegenüber liegenden Seiten einander schneiden.

Daraus also durch Subtraction

$$\begin{aligned}0 &= \alpha - \mathfrak{b} + \{\alpha\operatorname{cotg} B + \mathfrak{b}\operatorname{cotg} A - \gamma(\operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B)\}.i\\ 0 &= \mathfrak{b} - \gamma + \{\mathfrak{b}\operatorname{cotg} C + \gamma\operatorname{cotg} B - \alpha(\operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C)\}.i\\ 0 &= \gamma - \alpha + \{\gamma\operatorname{cotg} A + \alpha\operatorname{cotg} C - \mathfrak{b}(\operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} A)\}.i\end{aligned}$$

[*Zweite handschriftliche Bemerkung.*]

Sind a, b, c, d vier Punkte im Umfange eines Kreises vom Halbmesser 1, und zugleich die complexen Zahlen, die diesen Punkten entsprechen [wobei die dem Mittelpunkte entsprechende complexe Zahl gleich 0 angenommen wird], p, q, r die Durchschnittspunkte der Geraden $\frac{ab}{cd}, \frac{ac}{bd}, \frac{ad}{bc}$, endlich p^* die Mitte der Kreissehne, an deren Endpunkten Tangenten sich in p schneiden, und ebenso q^*, r^*, so hat man, indem accentuirte Buchstaben sich immer auf die resp. Adjuncten beziehen,

$$\begin{aligned}p &= \frac{abc + abd - acd - bcd}{ab - cd} = a - \frac{b(a-c)(a-d)}{ab - cd}\\ q &= \frac{abc + acd - abd - bcd}{ac - bd} = a - \frac{c(a-b)(a-d)}{ac - bd}\\ r &= \frac{acd + abd - abc - bcd}{ad - bc} = a - \frac{d(a-b)(a-c)}{ad - bc}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p - q &= (a-d)(b-c)\frac{abd + acd - abc - bcd}{(ab-cd)(ac-bd)} = \frac{(a-d)(b-c)(ad-bc)r}{(ab-cd)(ac-bd)}\\ p^* &= \frac{1}{p'} = \frac{ab - cd}{a + b - c - d} = a - \frac{(a-c)(a-d)}{a + b - c - d}\\ p^* - q &= \frac{(a-d)(b-c)(ad-bc)}{(ac-bd)(a+b-c-d)} = p^*\cdot\frac{(a-d)(b-c)(ad-bc)}{(ab-cd)(ac-bd)} = p^*\cdot\frac{p-q}{r}\end{aligned}$$

oder $p^*(q + r - p) = qr$, ebenso $q^*(p + r - q) = pr$, und $r^*(p + q - r) = pq$

$$\left.\begin{aligned}\frac{r-q}{p^*-q} &= \frac{(a-b)(d-c)(ab-cd)^2}{(a-d)(b-c)(ad-bc)^2}\cdot pp'\\ \frac{r-q}{p^*-r} &= \frac{(a-b)(d-c)(ab-cd)^2}{(a-c)(b-d)(ac-bd)^2}\cdot pp'\\ \frac{p^*-r}{p^*-q} &= \frac{(a-c)(b-d)(ac-bd)^2}{(a-d)(b-c)(ad-bc)^2}\end{aligned}\right\}\text{ sind reelle Zahlen}$$

oder p^*, q, r liegen in einer geraden Linie normal gegen $0p^*p$

V.

{In einem gegebenen Kreise ein Vieleck zu beschreiben, dessen Seiten durch eben so viel gegebene Punkte gehen. SCHUMACHER.}

Es sei der Halbmesser des Kreises, r, die Coordinaten der Winkelpunkte des Polygons

$$\begin{aligned} r\cos\varphi, &\quad r\cos\varphi', &\quad r\cos\varphi'' \text{ etc.}\\ r\sin\varphi, &\quad r\sin\varphi', &\quad r\sin\varphi'' \text{ etc.}\end{aligned}$$

endlich die Coordinaten der gegebnen Punkte, durch welche die verlängerten Seiten des Polygons gehn, {welche respective den ersten und zweiten Winkelpunkt, den zweiten und dritten u. s. w. verbinden}

$$\begin{aligned} a\cos A, &\quad a'\cos A', &\quad a''\cos A'' \text{ etc.}\\ a\sin A, &\quad a'\sin A', &\quad a''\sin A'' \text{ etc.}\end{aligned}$$

Dann ist nach dem Grundsatze, dass, wenn drei Punkte, deren Coordinaten $x, y;\ x', y';\ x'', y''$ sind, in einer geraden Linie liegen, die Bedingungsgleichung

$$xy'+x'y''+x''y-x'y-x''y'-xy''=0$$

Statt hat,

$$\left.\begin{aligned} &rr\cos\varphi\sin\varphi'+ra\cos\varphi'\sin A+ar\cos A\sin\varphi\\ &-rr\cos\varphi'\sin\varphi-ar\cos A\sin\varphi'-ra\cos\varphi\sin A\end{aligned}\right\}=0$$

oder

$$r\sin(\varphi'-\varphi)-a\sin(\varphi'-A)+a\sin(\varphi-A)=0$$

oder

$$r\cos\tfrac{1}{2}(\varphi'-\varphi)=a\cos\tfrac{1}{2}(\varphi'+\varphi-2A)$$

Entwickelt man diese beiden Cosinus, dividirt dann mit $\cos\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi'$, und bezeichnet $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi$ mit t, $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi'$ mit t',

$$\text{und}\quad \frac{a\sin A}{r-a\cos A}=\alpha,\quad \frac{r+a\cos A}{r-a\cos A}=6,\quad \text{so wird}$$

I. $$t=\frac{1-\alpha t'}{\alpha-6t'}$$

Ganz auf ähnliche Art wird, wenn man

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi''=t''\qquad \frac{a'\sin A'}{r-a'\cos A'}=\alpha',\qquad \frac{r+a'\cos A'}{r-a'\cos A'}=6'$$

setzt,

II. $$t'=\frac{1-\alpha' t''}{\alpha'-6't''}\text{ u. s. w.}$$

Man sieht hieraus, dass man so viele Gleichungen erhält, als das Polygon Seiten hat, und dass man durch Verbindung derselben zuletzt auf eine quadratische Gleichung für t kommt.

VI.

AUFGABE. Es sind drei Kreise der Lage und Grösse nach gegeben, man soll einen vierten beschreiben, der sie alle berührt.

Auflösung. Man lege durch den Mittelpunkt des einen Kreises die senkrechten Axen, und nenne die Abstände von diesen Linien

des Mittelpunkts des zweiten Kreises	a, b
des dritten Kreises	a', b'
des gesuchten	x, y

Die Entfernung des Mittelpunkts des ersten Kreises, vom Mittelpunkte des gesuchten heisse $=z$, so ist

$z-c$ die Entfernung des Mittelpunkts des zweiten vom Mittelpunkte des gesuchten,

$z-c'$ die Entfernung des Mittelpunkts des dritten vom Mittelpunkte des gesuchten;

wo c den Unterschied der Halbmesser des ersten und zweiten, und a' den Unterschied der Halbmesser des ersten und dritten Kreises bedeutet.

Wir haben folgende Gleichungen:

$$xx+yy = zz$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2 = (z-c)^2$$
$$(x-a')^2+(y-b')^2 = (z-c')^2$$

Setzt man

$$x = z\cos\varphi$$
$$y = z\sin\varphi$$

so erhält man aus den vorigen Gleichungen

$$aa+bb-cc = 2az\cos\varphi+2bz\sin\varphi-2cz$$
$$a'a'+b'b'-c'c' = 2a'z\cos\varphi+2b'z\sin\varphi-2c'z$$

Dividirt man die erste Gleichung mit $a\cos\varphi+b\sin\varphi-c$, die zweite mit $a'\cos\varphi+b'\sin\varphi-c'$, und zieht sie dann von einander ab, so erhält man

$$\frac{a'a'+b'b'-c'c'}{a'\cos\varphi+b'\sin\varphi-c'}-\frac{aa+bb-cc}{a\cos\varphi+b\sin\varphi-c}=0$$

oder wenn wir bezeichnen

$$a'a'+b'b'-c'c' = A'$$
$$aa+bb-cc = A$$
$$(A'a-Aa')\cos\varphi+(A'b-Ab')\sin\varphi = A'c-Ac'$$

Setzen wir nun

$$A'a-Aa' = R\cos M$$
$$A'b-Ab' = R\sin M$$
$$A'c-Ac' = N$$

so verwandelt sich unsere Gleichung in

$$R\cos(\varphi-M) = N$$

worin ausser φ alles gegeben ist. Man erhält daraus zwei Werthe für φ, unter denen man nach der Art, wie der gesuchte Kreis berühren soll, zu wählen hat.

VII.

Entwickelung der Grundformeln der sphärischen Trigonometrie.

Sind a, b, c die Seiten: A, B, C die gegenüberstehenden Winkel eines sphärischen Dreiecks, so ist

$$\cos a = \cos b.\cos c+\sin b.\sin c.\cos A$$

wie LAGRANGE für den Fall, dass sowohl b als c kleiner wie 90^0, elegant bewiesen hat. Indessen lässt sich der Beweis leicht auf alle andere Fälle ausdehnen.

Es können folgende Fälle eintreten:

I. . . . . $b<90^0$, $c<90^0$

Hier gilt der Beweis unmittelbar.

II. . . . . $b>90^0$, $c>90^0$

Man verlängere die Seiten b und c über die Punkte B und C hinaus bis zum Durchschnitte A', und bestimme den Werth von a aus der Betrachtung des Dreiecks $A'BC$.

III. . . . . $b>90^0$, $c<90^0$

Man verlängere die Seiten b und a über die Punkte A und B hinaus bis zum Durchschnitte C', in dem Dreieck $C'AB$ ist sodann aus Fall I

$$\cos(180^0-a) = \cos c.\cos(180^0-b)+\sin c.\sin(180^0-b).\cos(180^0-A)$$

welches mit der Grundformel identisch ist.

Mit diesem Falle ist $b<90^0$ und $c>90^0$ wesentlich einerlei.

IV. . . . . $b = 90^0$, $A = 90^0$

Hier ist C der Pol von AB, also nothwendig auch $a = 90^0$. Folglich ist die Formel

$$\cos a = \cos b.\cos c+\sin b.\sin c.\cos A$$

von selbst evident. Mit diesem Falle ist $c = 90^0$, $A = 90^0$ wesentlich einerlei.

V. . . . . $b = 90^0$, $A \gtrless 90^0$

1) $c = 90^0$. Dann wird A der Pol von c, also $b = 90^0$, und $a = A$. Die Gleichung

$$\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$$

ist von selbst evident.

2) $c < 90^0$. Hier wird c über B hinaus bis zur Länge von 90^0 fortgesetzt. Aus der Betrachtung des Dreiecks folgt dann

$$\cos a = \cos(90^0 - c) . \cos A + \sin(90^0 - c) . \sin A . \cos 90^0$$

oder

$$\cos a = \sin c . \cos A$$

daher die Formel auch in diesem Falle richtig ist.

3) $c > 90^0$. Hier wird von c der Bogen 90^0 in dem Punkte R abgeschnitten, dann folgt aus Betrachtung des Dreiecks BRC

$$\cos a = \cos(c - 90^0) . \cos A + \sin(c - 90^0) . \sin A . \cos 90^0$$

oder

$$\cos a = \sin c . \cos A$$

wie im vorigen Fall.

Die Fälle, wo $b < 90^0$ oder $b > 90^0$, und zugleich $c = 90^0$, sind mit den beiden vorigen wesentlich einerlei.

Zählt man also alle möglichen Fälle auf, so folgt der Beweis, wenn

Beide Seiten kleiner als 90^0	aus I
Beide Seiten grösser als 90^0	aus II
Eine grösser, die andere kleiner als 90^0	aus III
Beide $= 90^0$	aus IV und V. 1.
Eine $= 90^0$, die andere kleiner	aus IV und V. 2.
Eine $= 90^0$, die andere grösser	aus IV und V. 3.

Wir können also allgemein annehmen:

(A) . . . . . $\cos a = \cos b . \cos c + \sin b . \sin c . \cos A$

und ebenso

(2) . . . . . $\cos b = \cos a . \cos c + \sin a . \sin c . \cos B$

dividirt man (A) mit $\sin c$, und multiplicirt (2) mit $\operatorname{cotg} c$, und addirt, so erhält man

$$\frac{\cos a}{\sin c} = \frac{\cos a \cos c^2}{\sin c} + \sin b . \cos A + \sin a . \cos c . \cos B$$

also

(3) . . . . $\cos a . \sin c = \sin b . \cos A + \sin a . \cos c . \cos B$

ebenso

(4) . . . . $\cos c . \sin a = \sin b . \cos C + \sin c . \cos a . \cos B$

Multiplicirt man (4) mit $\cos B$, und addirt (3)

(5) . . $\cos a . \sin c . \sin B^2 = \sin b . \cos A + \sin b . \cos B . \cos C$

ebenso

(6) . . $\cos a . \sin b . \sin C^2 = \sin c . \cos A + \sin c . \cos B . \cos C$

Multiplicirt man (5) mit $\frac{\sin c}{\cos a}$ und zieht davon (6) mit $\frac{\sin b}{\cos a}$ multiplicirt ab, so erhalten wir

(7) . . . . . $\sin c^2 . \sin B^2 - \sin b^2 . \sin C^2 = 0$

oder

(B) . . . . . $\sin c . \sin B = \sin b . \sin C$

und wenn man (A, 5) mit $\sin b$ dividirt, und davon (B) mit $\frac{\cos a \sin B}{\sin b}$ multiplicirt abzieht

(C) . . . . . $\cos A = -\cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a$

endlich wenn man (A, 4) mit $\sin c$ dividirt, und (B) mit $\frac{\operatorname{cotg} C}{\sin c}$ multiplicirt davon abzieht

(D) . . . . . $\operatorname{cotg} c . \sin a - \operatorname{cotg} C . \sin B = \cos a . \cos B$

Aus diesen vier Grundformeln folgen die sogenannten Neperschen Analogien, und die Abkürzungen, welche durch die Bedingung, dass das sphärische Dreieck rechtwinklig sein soll, angebracht werden können, von selbst.

{Man vergleiche mit dieser Entwickelung die von Lagrange im sechsten Heft des *Journal de l'Ecole Polytechnique*.}

[Handschriftliche Bemerkungen über die Zurückführung der Relationen zwischen den Elementen eines sphärischen Dreieckes auf die Relationen zwischen den Elementen ebener Dreiecke:]

Sphärisches Dreieck

Winkel	Seiten
A	a
B	b
C	c

Ebene Dreiecke

A	$\sin\frac{1}{2}a$
$90^0-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c$
$90^0-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}b$
180^0-A	$\cos\frac{1}{2}a$
$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C-90^0$	$\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c$
$90^0+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c$
B	$\sin\frac{1}{2}b$
$90^0-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C$	$\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}a$
$90^0+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c$
180^0-B	$\cos\frac{1}{2}b$
$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C-90^0$	$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}c$
$90^0-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}c$
C	$\sin\frac{1}{2}c$
$90^0-\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}a$
$90^0+\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B-\frac{1}{2}C$	$\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$
180^0-C	$\cos\frac{1}{2}c$
$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C-90^0$	$\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b$
$90^0-\frac{1}{2}A-\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C$	$\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b$

Man kann dieses auch durch folgende sechs Gleichungen ausdrücken:

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}=-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)}{2\sin\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c}$$
$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(-A+B+C)}{2\sin\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B+C)}{2\cos\frac{1}{2}a.\sin\frac{1}{2}b.\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{2\cos\frac{1}{2}a.\cos\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c}$$

oder durch folgende

$$\begin{aligned}\sin A\sin b\sin c&=\sin B\sin a\sin c=\sin C\sin a\sin b\\&=-4\cos\tfrac{1}{2}(+A+B+C).\cos\tfrac{1}{2}a.\cos\tfrac{1}{2}b.\cos\tfrac{1}{2}c\\&=\;\;4\cos\tfrac{1}{2}(-A+B+C).\cos\tfrac{1}{2}a.\sin\tfrac{1}{2}b.\sin\tfrac{1}{2}c\\&=\;\;4\cos\tfrac{1}{2}(+A-B+C).\sin\tfrac{1}{2}a.\cos\tfrac{1}{2}b.\sin\tfrac{1}{2}c\\&=\;\;4\cos\tfrac{1}{2}(+A+B-C).\sin\tfrac{1}{2}a.\sin\tfrac{1}{2}b.\cos\tfrac{1}{2}c\end{aligned}$$

Diese Grösse bedeutet den sechsfachen Inhalt der Pyramide, deren Ecken die drei Winkelpunkte des sphärischen Dreiecks und der Mittelpunkt der Kugel bilden, Halbmesser der Kugel $=1$ gesetzt. Ferner ist diese Grösse

$$=4\operatorname{cotang}r.\sin\tfrac{1}{2}a.\sin\tfrac{1}{2}b.\sin\tfrac{1}{2}c$$

wo r den sphärischen Halbmesser des um das Dreieck beschriebenen Kreises bedeutet. Auch ist dieselbe

$$=4\cos r.\sin\alpha.\sin\tfrac{1}{2}b.\sin\tfrac{1}{2}c$$

wo [2α, 2β, 2γ die Winkel bedeuten, welche zwischen je zwei der nach den Eckpunkten A, B, C gezogenen sphärischen Halbmesser und gegenüber den Seiten a, b, c liegen, oder] α, β, γ die Winkel des ebenen Dreiecks ABC sind, weil $2\sin\frac{1}{2}a$, $2\sin\frac{1}{2}b$, $2\sin\frac{1}{2}c$ dessen Seiten, mithin $4\sin\alpha.\sin\frac{1}{2}b.\sin\frac{1}{2}c$ dessen doppelter Inhalt; während dasselbe zugleich als Grundfläche obiger Pyramide mit Höhe $\cos r$ betrachtet werden kann, woraus die Richtigkeit von selbst erhellt. [Aus der obigen sechsfachen Gleichung leitet Gauss an einer andern Stelle die von ihm so vielfach angewandten Formeln her:]

$$\begin{aligned}\cos\tfrac{1}{2}A.\sin\tfrac{1}{2}(b-c)&=\sin\tfrac{1}{2}(B-C).\sin\tfrac{1}{2}a\\\sin\tfrac{1}{2}A.\sin\tfrac{1}{2}(b+c)&=\cos\tfrac{1}{2}(B-C).\sin\tfrac{1}{2}a\\\cos\tfrac{1}{2}A.\cos\tfrac{1}{2}(b-c)&=\sin\tfrac{1}{2}(B+C).\cos\tfrac{1}{2}a\\\sin\tfrac{1}{2}A.\cos\tfrac{1}{2}(b+c)&=\cos\tfrac{1}{2}(B+C).\cos\tfrac{1}{2}a\end{aligned}$$

Astronomische Nachrichten. Nr. 42. 1823 November.

Auflösung einer geometrischen Aufgabe.

{In des Herrn Professors Möbius Beschreibung der Leipziger Sternwarte kommt S. 61 eine kleine geometrische Aufgabe vor, nemlich:

Beliebige 5 Punkte A, B, C, D, E einer Ebene sind, je zwei, durch gerade Linien verbunden. Man kennt die somit entstehenden 5 Dreiecke EAB, ABC, BCD, CDE, DEA ihrem Inhalte nach, und verlangt daraus den Inhalt des Fünfecks $ABCDE$.

Herr Hofrath Gauss, der einige Wochen diesen Sommer bei mir verlebte, schrieb, wie er das Buch sah, folgende Auflösung hinzu:

Man bezeichne die 5 Punkte mit 1, 2, 3, 4, 5, die

Winkel	213	mit	p
	214	—	q
	215	—	r
Seiten	12	—	t
	13	—	u
	14	—	v
	15	—	w
Dreiecke	123	—	a
	234	—	b
	345	—	c
	451	—	d
	512	—	e
	124	—	x
	134	—	y
	135	—	z
Fünfeck	12345	—	ω

So hat man folgende Relationen

$$\left.\begin{aligned} tu.\sin p &= 2a \\ tv.\sin q &= 2x \\ tw.\sin r &= 2e \\ vw.\sin(r-q) &= 2d \\ uw.\sin(r-p) &= 2z \\ uv.\sin(q-p) &= 2y \end{aligned}\right\}$$ daraus vermittelst des Lemma der *Th. M. C. C.*

$$ad - xz + ey = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\left.\begin{aligned} b+d+x &= \omega \\ a+d+y &= \omega \\ a+c+z &= \omega \end{aligned}\right\}$$ die Werthe von x, y, z hieraus in (I) substituirt geben

$$ad - (\omega - b - d)(\omega - a - c) + e(\omega - a - d) = 0$$

oder entwickelt

$$\omega\omega - (a+b+c+d+e)\omega + (ab+bc+cd+de+ea) = 0$$

Schumacher.}

Handbuch der Schiffahrtskunde von C. Rümker. 1850. Seite 76.

Auflösung einer geometrischen Aufgabe.

An drei Punkten (1), (2), (3), welche in einer geraden Linie (I) und in bekannten Abständen von einander, A von (1) nach (2), B von (2) nach (3), liegen, sind die Winkel $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$ zwischen zwei andern Punkten (4), (5), deren gegenseitiger Abstand $= 2c$ ebenfalls bekannt ist, gemessen; man verlangt die Lage der drei ersteren Punkte gegen die beiden letzteren. Um nichts unbestimmt zu lassen, setze ich voraus, dass die drei Winkel alle von (4) nach (5) in einerlei Sinn wachsend gemessen sind, dass auf der Linie (I) die Abstände in einem bestimmten Sinne positiv gezählt werden (so dass, wenn man aus irgend welchem Grunde nicht den zwischen den beiden andern liegenden Punkt mit (2) bezeichnete, A und B ungleiche Zeichen erhalten würden) und c positiv genommen werden soll.

Ich wähle zur Abscissen-Linie die Gerade (II), welche (4), (5) in ihrer Mitte (6) unter rechten Winkeln schneidet, und zähle die Abscissen von (6) an positiv auf der Seite von (4), (5), wo der Winkel von (4) nach (5) unter 180^0 erscheint, d. i. auf der rechten, wenn man die Winkel von der Linken nach der Rechten wachsen lässt; die Ordinaten mögen in dem Sinne von (6) nach (5) positiv gezählt werden. Auf (II) bezeichne ich die Punkte, deren Abscissen

$$c.\operatorname{cotang}\vartheta = n-a, \quad c.\operatorname{cotang}\vartheta' = n, \quad c.\operatorname{cotang}\vartheta'' = n+b$$

sind, mit (1*), (2*), (3*); sie sind die Mittelpunkte der drei Kreise, welche beziehungsweise durch (1), (2), (3) und zugleich alle durch (4) und (5) gehen. Die Halbmesser dieser Kreise sind

$$\frac{c}{\sin\vartheta} = \sqrt{(cc+(n-a)^2)}, \quad \frac{c}{\sin\vartheta'} = \sqrt{(cc+nn)}, \quad \frac{c}{\sin\vartheta''} = (cc+(n+b)^2)$$

oder wenn man $\frac{c}{\sin\vartheta'} = r$ setzt, so werden die beiden andern $\sqrt{(rr-2an+aa)}$, $\sqrt{(rr+2bn+bb)}$. Endlich sei (7) der Durchschnittspunkt von (I) und (II), T und t die Abstände der Punkte (2) und (2*) von (7), φ der Winkel zwischen gleichnamigen Armen jener Linien, und zwar von (I) nach (II) in dem gewählten Sinn positiv gemessen. Es ist also die Abscisse von (7) $= n-t$, und folglich sind die Coordinaten der drei Beobachtungsplätze

$$\begin{array}{lll} (1) \ldots\ldots & n-t+(T-A).\cos\varphi, & (T-A).\sin\varphi \\ (2) \ldots\ldots & n-t+T.\cos\varphi, & T.\sin\varphi \\ (3) \ldots\ldots & n-t+(T+B).\cos\varphi, & (T+B).\sin\varphi \end{array}$$

Die drei unbekannten Grössen t, T, φ werden aber aus folgenden Gleichungen zu bestimmen sein, wenn zur Abkürzung x für $\cos\varphi$ geschrieben ist:

$$tt+TT-2tTx = rr \quad \ldots\ldots \quad [1]$$
$$(t-a)^2+(T-A)^2-2(t-a)(T-A)x = rr-2an+aa$$
$$(t+b)^2+(T+B)^2-2(t+b)(T+B)x = rr+2bn+bb$$

Anstatt der beiden letzteren gebrauche ich die folgenden, die aus ihrer Subtraction von der ersten hervorgehen

$$2at+2AT-2an-AA = (2At+2aT-2aA)x \quad \ldots \quad [2]$$
$$2bt+2BT-2bn+BB = (2Bt+2bT+2bB)x \quad \ldots \quad [3]$$

aus $-\frac{1}{2}b[2]+\frac{1}{2}a[3]$ und $\frac{1}{2}B[2]-\frac{1}{2}A[3]$ folgt, wenn man zur Abkürzung

$$aB-bA = \lambda, \quad ab(A+B) = f, \quad \tfrac{1}{2}AB(A+B)+\lambda n = g$$
$$AB(a+b) = F, \quad \tfrac{1}{2}aBB+\tfrac{1}{2}bAA = G$$

schreibt,

$$\lambda T+G = \lambda(t+f)x, \quad \lambda t-g = (\lambda T-F)x \text{ oder } \lambda(t-Tx) = g-Fx$$

und folglich

$$\lambda t = \frac{+g-(F+G)x+fxx}{1-xx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [4]$$
$$\lambda T = \frac{-G+(f+g)x-Fxx}{1-xx} \quad \ldots\ldots\ldots \quad [5]$$

Die Gleichung [1] in der Form $(t-Tx)^2+TT(1-xx) = rr$ gibt

$$\lambda\lambda rr-(g-Fx)^2 = \lambda\lambda TT(1-xx) \quad \ldots\ldots \quad [6]$$

Substituirt man darin den Werth von λT aus [5], so erhält man die cubische Gleichung

$$5fFx^3-(ff+2fg+FF+2FG+\lambda\lambda rr)xx$$
$$+(2fG+2gF+2gG)x+\lambda\lambda rr-gg-GG = 0 \quad \ldots \quad [7]$$

Nachdem dadurch x bestimmt ist, findet man die Coordinaten des Punktes (2) aus obigen Ausdrücken, die, wenn man darin für $t-Tx$ und T die vorhin gegebenen Werthe substituirt, folgende Gestalt annehmen

$$n-\frac{g-Fx}{\lambda}, \quad \frac{-G+(f+g)x-Fxx}{\lambda\sqrt{(1-xx)}}$$

und die beiden anderen Punkte (1) und (3), indem man zu diesen Werthen $-Ax$, $-A\sqrt{(1-xx)}$ und $+Bx$, $+B\sqrt{(1-xx)}$ beziehungsweise hinzufügt.

Da jedem Cosinus zwei Werthe des Winkels angehören, oder was dasselbe ist, da die Radical-Grösse $\sqrt{(1-xx)}$ sowol positiv wie negativ genommen werden kann, so gibt jede zulässige Wurzel der Gleichung zwei Auflösungen; nemlich zwei gegen die Linie (II) symmetrische Lagen der Punkte (1), (2), (3), was auch schon für sich klar ist. Für den Fall, dass $+1$ oder -1 eine Wurzel der Gleichung [7] wird, ist übrigens die obige Formel für die Ordinate nicht brauchbar, weil dann Zähler und Nenner null werden, und man muss anstatt

derselben folgende anwenden nach [6]

$$\sqrt{\{rr-(\tfrac{g\mp F}{\lambda})^2\}}$$

Wir haben also auch hier zu einer Wurzel zwei Auflösungen, nemlich durch die symmetrischen Lagen der Punkte (1), (2), (3) von (II) auf entgegengesetzten Seiten gleich weit abstehend; für $x = +1$ ist der Sinn der positiven Richtung in (I) derselbe wie in (II), für $x = -1$ verkehrt. Nur der einzige Fall, wo ohne Rücksicht auf das Zeichen $\lambda r = g - F$ (für $x = +1$) oder $= g + F$ (für $x = -1$) ist, muss ausgenommen werden, indem dann beide symmetrische Lagen von (I) in Eine, nemlich mit der Linie (II) selbst, zusammenfallen.

Auszuschliessen sind offenbar von den Wurzeln der Gleichung [7] nicht bloss die imaginären, sondern auch die ausserhalb der Grenzen -1 und $+1$ liegenden reellen, und die Wurzel $+1$ oder -1 selbst, wenn λr ohne Rücksicht auf das Zeichen beziehungsweise kleiner ist als $g - F$ oder $g + F$. Es lässt sich übrigens beweisen, dass allemal, wenigstens eine der drei Wurzeln in die Kategorie der auszuschliessenden gehört, und also überhaupt niemals mehr als vier verschiedene Auflösungen durch reelle Coordinaten statt haben können. Genau genommen, bildet zwar *ein ganz singulärer* Fall in so fern eine Ausnahme des ersteren Satzes, als dabei keine Wurzel ausgeschlossen wird. Der singuläre Fall ist nemlich der schon oben erwähnte, wo für $x = \pm 1$ die Ordinate $= 0$ wird, und wo (wie sich leicht beweisen lässt) die betreffende Wurzel zweimal gilt, d. i. wo das Glied linkerseits des Gleichheitszeichens in der Gleichung [7] den Factor $(x \mp 1)^2$ enthält; die Gleichung hat dann also nur zwei ungleiche Wurzeln, von denen die zweite allerdings auch eine zulässige sein kann. Der Schlussfolge selbst thut demnach dieser Ausnahmefall keinen Eintrag.

Endlich muss noch bemerkt werden, dass auch unter den Auflösungen in reellen Zahlen physisch unzulässige sein können. Es ist nemlich nicht der ganze Kreis, welcher aus dem Mittelpunkte (1) durch (4) und (5) beschrieben ist, der geometrische Ort des Punktes (1), sondern nur der auf der positiven Seite von (4), (5) liegende Bogen, wenn ϑ unter 180^0, und der auf der negativen Seite liegende, wenn ϑ überstumpf ist; dasselbe gilt von den beiden andern Kreisen. Diese physische Bedingung ist aber in unserer Auflösung noch nicht berücksichtigt. Unter den verschiedenen, in reellen Zahlen gefundenen Auflösungen sind also nur diejenigen zulässig, wo die für die Abscissen der drei Punkte (1), (2), (3)

sich ergebenden Werthe alle dieselben Zeichen haben, wie respective die Sinus von ϑ, ϑ', ϑ''.

Mit Stillschweigen darf ich auch nicht übergehen, dass die gegebene allgemeine Auflösung der Aufgabe in singulären Fällen entweder ihre Anwendbarkeit ganz verliert, oder doch einiger Modificationen bedarf, beschränke mich hier aber nur auf eine Andeutung der erheblichsten Punkte:

I. Ist einer der beobachteten Winkel gleich $= 0$ oder $= 180^0$, so ist vortheilhaft, den betreffenden Beobachtungsplatz, auch wenn er zwischen den beiden andern liegen sollte, als (1) oder (3) anzunehmen. Wählt man das Letztere, so bleiben alle Theile der allgemeinen Auflösung gültig, indem man nur b als unendlich gross betrachtet, und als Zeichen in den Rechnungen beibehält, welches hernach in allen Resultaten aber von selbst wegfällt. An mehr als Einem Punkte darf aber offenbar der Winkel nicht 0 oder 180^0 sein, weil dies nur stattfindet, wenn alle drei in der Linie (4), (5) liegen, wo die Aufgabe unbestimmt wäre.

II. Sind unter den beobachteten Winkeln zwei gleiche, so fallen von den Punkten (1*), (2*), (3*) zwei zusammen, oder eine der Grössen a, b, $a+b$ wird $= 0$, daher auch $fF = 0$; in diesem Falle geht demnach die cubische Gleichung in eine quadratische über. Übrigens sieht man leicht, dass das Verschwinden des ersten Coëfficienten der cubischen Gleichung *nur* in dem Falle der Gleichheit zweier Winkel eintritt.

III. Die gegebene Auflösung ist nicht anzuwenden, wenn die Grössen A, B den a, b proportional sind, also $\lambda = 0$ wird. In diesem Falle ist die cubische Gleichung mit Unrecht herangezogen und enthält eine der Sache fremde Wurzel, die richtige aber zweimal. Es ist nemlich klar, dass dann die beiden Combinationen, wurch welche aus [2] und [3] die Gleichungen [4] und [5] abgeleitet wurden, *nicht verschieden* sind, diese Gleichungen werden daher identisch, und jede für sich gibt $x = \frac{A}{2a} = \frac{B}{2b}$. Offenbar muss dann aber eine der beiden Gleichungen [2], [3] noch ferner gebraucht werden, aus deren Combination mit [1] sich leicht ergibt: $cx = (t-n)\sqrt{(1-xx)}$. Es erhellt daraus, dass die Linie (I) entweder durch den Punkt (4) oder durch (5) geht, und es gibt

in der That für den in Rede stehenden singulären Fall immer vier Auflösungen, indem man entweder durch (4) oder durch (5) eine der beiden geraden Linien legt, deren Winkel mit der Abscissen-Linie die Grösse $\frac{A}{2a} = \frac{B}{2b}$ zum Cosinus hat. Die Realität dieser Auflösungen hängt davon ab, dass diese Grösse nicht grösser als 1 ist, für welchen Werth selbst die vier Auflösungen sich auf zwei reduciren.

ALLGEMEINES

COORDINATEN-VERZEICHNISS

ZUSAMMENGETRAGEN

AUS FOLGENDEN PARTIELLEN VERZEICHNISSEN

Nr. 1) Generalverzeichniss von 1828. [Gradmessung 1821. 1822. 1823 und deren Fortsetzung bis Jever 1824. 1825 ausgeführt von C. F. Gauss.]
2) Eichsfeld 1828. [Messungen des Hauptmann Müller und des Lieutenant Gauss.]
3) Hildesheim 1828. [Messungen des Lieutenant Hartmann.]
4) Hildesheim 1829. [Messungen des Lieutenant Hartmann.]
5) Westphalen 1829. Messungen des Lieutenant Gauss und Lieutenant Hartmann.]
6) Westphalen 1830. [Messungen des Lieutenant Hartmann.]
6*) Hartmanns Messungen von 1831, so weit sie nicht durch 12 ersetzt werden.
7) Lüneburg. [Messungen des Hauptmann Müller im Jahre 1830 und des Lieutenant Gauss in den Jahren 1830 und 1831.]
8) Harz 1833. [Messungen des Lieutenant Hartmann.]
9) Mittelweser 1833. 1834. [Messungen des Hauptmann Müller und des Lieutenant Gauss.]
10) Oberweser (Göttingen) 1836. Messungen des Hauptmann Müller.]
11) Aller 1838. Messungen des Hauptmann Müller.]
12) Ostfriesland 1841. [Messungen des Hauptmann Müller.]
13) Bremen 1839. [Messungen des Hauptmann Müller.]
14) Bremen 1843. 1844. [Messungen des Lieutenant Gauss.]

1844. Dec. 13.

[NACHLASS.]

COORDINATEN-VERZEICHNISS.

+ südlich	+ westlich		Nr.
+ 75241.297	— 36876.103	Inselsberg Haus	1
+ 75233.714	— 36849.867	*Inselsberg hessischer Dreieckspunkt*	1
+ 63882.780	— 55230.212	Seeberg, Passageinstrument	1
+ 56432.370	— 92153.140	Ettersberg	1
+ 34030.275	— 25362.271	Struth	1
+ 33664.655	+ 6065.145	*Meisner*	1
+ 22702.9	+ 46588.2	Burghasungen	10
+ 21058.1	+ 182.1	Hanstein	10 (2)
+ 20806.6	+ 5987.8	Witzenhausen Rathhaus	10
+ 20730.1	— 63790.8	Posse	2
+ 20708.0	— 63788.8	Posse	8
+ 20708.0	+ 5903.4	Witzenhausen Kirchthurm	10
+ 19447.5	+ 24390.4	Landwehrhagen	10
+ 18580.578	—169314.554	Leipzig Sternwarte	
+ 17789.447	+ 17094.498	Steinberg, Signal	10
+ 17782.597	+ 17095.067	*Steinberg Postam.*	10
+ 17414.8	+ 22655.4	Lutternberg Thurm	10
+ 16676.9	— 15519.4	Dünwarte	2
+ 16609.262	+ 22268.678	*Lutternberg*	10
+ 16108.813	+ 23881.506	Lutternberg Nebenplatz	10
+ 15842.6	— 4326.7	Rusteberg	10 (2)
+ 15550.9	+ 12308.9	Hedemünden	10
+ 15180.2	— 59183.8	Gross Furra	8
+ 15062.887	+ 17995.559	*Cattenbühl* 1.	10
+ 15061.0	— 1120.1	Brennerei, Schorstein	10
+ 14871.104	+ 18863.402	*Cattenbühl* 2.	10
+ 14744.0	+ 7691.2	Berlepsch	10
+ 13800.5	+ 5748.8	Hermanrode	10
+ 13324.4	+ 6941.7	Mollenfelde	10
+ 12713.539	+ 5002.747	Gieseberg Signal	10
+ 12712.662	+ 5002.234	*Gieseberg Postam.*	10
+ 12398.0	+ 14962.4	Lippoldshausen	10
+ 12396.1	+ 20306.9	Münden	10
+ 12134.6	+ 8961.05	Atzenhausen	10
+ 12103.347	+ 16773.704	*Wiershausen* 1.	10
+ 12068.459	+ 16758.233	*Wiershausen* 3	10
+ 11821.6	— 15595.1	Günderode	2
+ 11820.9	+ 5521.9	Deiderode	10
+ 11590.2	+ 15845.9	Wiershausen Thurm	10
+ 11413.4	— 10545.5	Bischhagen	2
+ 10799.4	— 20605.6	Mittlerer Baum	2
+ 10678.2	— 9297.0	Vogelsang	2
+ 10622.194	+ 16288.698	Wiershausen Signal	10
+ 10621.837	+ 16288.015	*Wiershausen 2. Theodolithplatz*	10
+ 10104.7	+ 1077.3	Gross Schneen	10 (2)
+ 10009.2	— 12965.2	Weissenborn	2
+ 9737.9	— 43660.25	Bleicherode	8
+ 9709.8	+ 12690.1	Meensen	10
+ 9382.441	+ 13339.153	*Meenserberg*	10
+ 9127.086	— 31527.867	Kälberberg Pfahl	2
+ 9126.7	— 31527.0	*Kälberberg Theodolithplatz*	2
+ 9081.9	— 9731.4	Bischhausen	2
+ 8761.9	— 17298.7	Neuendorf Windmühle	2
+ 8524.6	— 64937.3	Hospital bei Heringen	8
+ 8195.3	— 475.7	Ballenhausen	10
+ 8180.3	— 27784.2	Schloss Bodenstein	2
+ 8135.6	+ 4189.4	Dramfeld	10
+ 7661.8	— 7491.9	*Eschenberg Theodolithplatz*	2
+ 7661.406	— 7492.385	Eschenberg Pfahl	2
+ 7635.8	+ 767.7	Stockhausen	10
+ 7602.2	— 9112.4	Sennikerode Südl. Schorstein	2
+ 7439.1	+ 1937.1	Oberjesa	10 (3)
+ 7247.0	+ 9924.8	Jahnde	10
+ 7242.3	+ 15746.3	Dankelhausen	10
+ 7213.7	— 28707.3	*Bornberg Theodolithplatz*	2

+ südlich	+ westlich		Nr.
+ 7213.2	— 28706.8	Bornberg Pfahl	2
+ 6851.3	— 12087.0	Beinrode	2
+ 6770.2	— 2812.9	Reinhausen	10
+ 6769.4	+ 6054.2	Volkerode	10
+ 6484.7	— 6756.2	*Nordl. Gleiche Theodolithplatz von 1828*	2
+ 6475.621	— 6768.874	Nordl. Gleiche Pfahl	2
+ 6475.564	— 6770.088	*Nordl. Gleiche Theodolithplatz von 1829*	2
+ 6468.0	+ 3812.8	Sieboldshausen	10 (1)
+ 6197.2	— 11333.9	Kerstlingerode	2
+ 6060.027	+ 12447.725	*Hohehagen Platz von 1836*	10
+ 6059.878	+ 12447.746	*Hohehagen Platz von 1821*	1
+ 5904.1	— 25567.9	Tastunger Warte	2
+ 5820.8	+ 1140.3	Niederjesa	10 (?)
+ 5734.2	— 10280.4	*Bei Ritmarshausen*	2
+ 5680.2	— 18048.2	Beseckendorf	2
+ 5246.2	— 22325.7	Teistungenburg	2
+ 5188.0	— 11168.3	Ritmarshausen	2
+ 5162.993	+ 13692.525	*Schottsberg*	10
+ 5091.0	— 25558.5	Wehnde	2
+ 4929.0	+ 5482.0	Lembshausen	10
+ 4909.4	— 29872.7	Brehmer Ohmberg	2
+ 4869.4	— 14817.6	Nesselröder Warte	2
+ 4866.8	+ 18318.0	Bühnen	10
+ 4472.0	— 7627.8	Benniehausen	2
+ 4436.3	— 21020.8	Pferdbergs Warte	2
+ 4363.6	— 20999.9	Theodolithplatz danehen	2
+ 4308.2	— 20665.5	Immingerode	2
+ 4298.6	— 23474.4	Lindenberg	2
+ 4284.7	+ 10584.4	Bördel	10
+ 4230.4	+ 5292.2	Mengershausen	10 (2)
+ 3861.2	— 1806.9	Dimarder Warte	10
+ 3839.7	— 28927.3	Brehme	2
+ 3795.5	+ 51853.6	Gross Wechsungen	8
+ 3755.3	— 22105.6	Gerblingerode	2
+ 3655.3	— 16722.7	Nesselrode	2
+ 3564.3	— 25042.7	Wehnder Warte	2
+ 3385.9	— 34674.3	Bischofsrode	2
+ 3331.220	— 30683.287	Sonnenstein Pfahl	2
+ 3330.905	— 30681.570	*Sonnenstein Pfahl von 1833*	8
+ 3330.629	— 30682.728	*Sonnenstein Theodolithplatz von 1828*	2
+ 3297.2	— 8468.3	Amt Niedeck	2
+ 3246.483	+ 10733.915	*Seseböhl*	10
+ 3177.2	— 20769.5	Tiftlingerode	2
+ 2943.1	+ 15861.4	Varlosen	10
+ 2786.6	+ 3050.0	Rossdorf	10 (1)
+ 2783.8	— 59292.1	Nordhausen	8
+ 2780.7	+ 12736.4	DransfeldKirchthurm vor dem Brande	10
+ 2701.3	— 44976.6	Gratzungen	8
+ 2662.8	— 10874.5	Sattenhausen	2
+ 2627.3	— 25513.8	Ecklingerode	2
+ 2586.105	— 19037.483	Euzenberg Pfahl	2
+ 2585.7	— 19036.8	*Euzenberg Theodolithplatz*	2
+ 2287.0	— 59387.6	Nordhausen Doppelthurm	2
+ 2208.65	— 42014.98	Trebra	8
+ 2150.7	— 13816.3	Himmigerode Giebel	2
+ 1986.5	— 933.4	Geismar	10
+ 1811.6	— 6268.5	Gross Longden	2
+ 1771.9	— 21830.3	Duderstadt Untere Kirche	2
+ 1726.2	— 39601.8	Epschenrode	8
+ 1719.5	— 22257.6	Duderstadt O. Kirche	2
+ 1644.4	— 21749.3	Duderstadt W. Thurm	2
+ 1508.400	— 9266.532	Jacobsberg Pahl	2
+ 1507.5	— 9266.3	*Jacobsberg Theodolithplatz*	2
+ 1397.1	— 16937.0	Werkshausen	2
+ 891.318	— 25971.380	Rothe Warte, Centrum des Thurms	2
+ 890.3	+ 5429.2	Ellershausen	10
+ 884.3	— 25983.8	Rothe Warte N. O. Eckpfeiler	2
+ 883.804	— 25984.408	*Rothe Warte, Theodolithplatz*	2
+ 862.8	— 10867.1	Falkenhagen	2
+ 854.6	+ 16470.8	Lewenhagen	10
+ 780.8	+ 14919.8	Imsen	10
+ 670.2	+ 1977.5	Backhaus Pavillon	1
+ 549.8	— 20958.7	Sülberg Warte	2
+ 461.4	— 47059.9	Pütrlingen	8
+ 371.1	— 16590.7	Desingerode	2
+ 220.895	— 1883.547	*Kleper*	10
+ 167.7	— 25721.8	Herbigshagen Pfahl	2
+ 167.657	— 25721.050	*Herbigshagen Theodolithplatz*	2
+ 2.998	— 6.528	*Sternwarte, Platz auf dem Dache von 1836*	10
0	0.	*Sternwarte Mitte der Achse des Reichenbachschen Meridian-Kreises*	
— 5.507	0	*Sternwarte Theodolith 1823*	1
— 186.9	— 8461.4	Mackenrode	2
— 427.8	+ 5813.5	Hetgershausen	10
— 442.17	+ 902.34	Göttingen Marine	10
— 469.5	+ 553.8	Göttingen Rathhaus	10
— 486.2	+ 645.5	Göttingen Johannis Südlicher Th.	10
— 500.8	+ 644.9	Göttingen Johannis Nordlicher Th.	10 (2)
— 556.5	+ 127.95	Göttingen Albanus	10
— 710.702	+ 500.493	Göttingen Jacobi	10 (2)
— 753.3	+ 3357.9	Gronde	10 (2)
— 766.5	— 38848.7	Stöckei	8
— 823.029	— 26665.059	S. Antonio di Padova	2
— 823.8	— 26664.7	*S. Antonio di Padova Theodolithplatz*	2
— 908.0	+ 14147.9	Güntersen	10

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 1173.3	— 11317.5	Landolfshausen	2
— 1198.9	— 26411.9	Langenhagen Schorstein	2
— 1483.1	— 13249.8	Seulingerwarte	2
— 1503.6	— 15101.7	Seulingen	2
— 1550.8	— 45839.7	Holbach	8
— 1621.8	— 27467.7	*Apfelbaum Theodolithplatz*	2
— 1622.846	— 27469.008	Apfelbaum bei Langenhagen	2
— 2047.2	— 22897.4	Breitenberg	2
— 2160.809	— 26487.921	Buche bei Hilkerode	2
— 2164.4	— 26486.9	*Buche Theodolithplatz*	2
— 2358.5	+ 17611.1	Barterode	10
— 2649.0	+ 4982.8	Ellichausen	10 (2)
— 2885.9	— 23406.8	Hübenthal Tanne	2
— 2923.7	— 32820.3	Ellerburg	2
— 2953.262	+ 2228.054	Kleine Hagen	2
— 3053.0	— 20148.8	Obernfelde	2
— 3283.0	— 68056.6	Jagdschloss	2
— 3314.2	— 4406.2	Roringen	10
— 3497.0	+ 353.8	Weende	10 (2)
— 3667.8	— 24185.5	Clausberg	10 (2)
— 3746.65	+ 3698.7	Holtensen	10
— 3868.9	— 14409.4	Seeburg	2
— 3908.9	— 42364.4	Tettenborn	8 (2)
— 3976.3	— 17301.0	Germershausen	2
— 3991.8	— 74780.3	Schwende	2
— 4031.6	+ 6818.9	Esebeck	10
— 4047.715	+ 11071.465	*Kuhberg Nebenplatz 1.*	10
— 4244.7	+ 35922.1	Trendelburg runder Thurm	9
— 4263.0	— 16091.7	Berenshausen	2
— 4356.782	+ 11845.836	*Kuhberg*	10
— 4807.8	— 11445.6	Ebergötzen	2
— 5019.756	— 0.133	*Meridianzeichen*	1(10)
— 5085.8	— 21007.9	*Hellberg*	2
— 5156.8	+ 36185.5	Trendelburg Laternenthurm	9
— 5267.1	— 18643.7	Rollshagen	2
— 5444.0	+ 13449.9	Adelepsen Schloss	10
— 5452.7	+ 13468.7	Adelepsen Burg	10
— 5556.2	+ 13380.9	Adelepsen Kirchthurm	10
— 5630.5	— 7399.5	Baum am Hünenstollen	2
— 5634.099	— 7431.465	Hünenstollen Pfahl	2
— 5634.100	— 74204	*Hünenstollen Theodolithplatz*	2
— 5898.6	— 22821.3	Rüdershausen	2
— 6669.2	+ 5072.2	Lenglern	10 (2)
— 6106.5	— 24538.0	Ruhmspringe	2
— 6116.3	— 6993.1	Nebenplatz am Hünenstollen	2
— 6284.6	— 46874.3	Walkenried	8
— 6316.5	— 73679.7	Auersberg	8
— 6334.675	— 9698.349	Lauseberg Pfahl	2
— 6335.1	— 9699.0	*Lauseberg Theodolithplatz*	2
— 6418.7	— 15025.4	Wollbrandshausen	2
— 6551.6	— 7374.4	Mäusethurm	2
— 6610.8	— 12471.1	Krebeck	2
— 6753.8	+ 1541.0	Bovenden	10 (2)
— 6982.3	— 62156.9	Poppenberg	8
— 7052.9	— 20631.6	Nebenplatz bei Hellberg	2
— 7101.5	— 37370.8	Osterhagen	8
— 7184.6	+ 18436.6	Offensen	10
— 7349.7	— 8399.8	Holzerode, Struthkrug	2
— 7527.3	— 21764.2	Wollershausen	2
— 7577.8	+ 11101.0	Lödingen	10
— 7579.7	— 8321.9	Holzerode Thurm	2
— 7624.725	+ 2249.419	Baum bei Bovenden	2
— 7625.9	+ 2248.2	*Baum Theodolithplatz*	2
— 7661.845	— 35709.258	Bartholfelde	8
— 7666.8	— 1552.2	Plesse, dünner Thurm	10 (2)
— 7696.8	— 1607.4	Plesse dicker Thurm	10 (2)
— 8033.6	+ 5838.1	Harste	10 (2)
— 8396.7	— 11175.3	Renshausen	2
— 8481.6	— 13192.9	Bodensee	2
— 8619.776	+ 11952.497	*Kuhberg Nebenplatz 2*	10
— 8716.1	— 38640.44	Ahrensberg	8
— 8718.8	— 10248.1	Nebenplatz 2 bei Renshausen	2
— 8854.7	— 10279.4	Nebenplatz 1 bei Renshausen	2
— 8920.1	— 6956.8	Spanbeck	2
— 9133.6	— 18782.4	Gieboldehausen	2
— 9267.916	+ 224.426	*Grebenberg*	10 (2)
— 9472.301	— 139301.772	Petersberg	1
— 9474.2	— 25369.7	Pöhlde	2
— 9485.0	+ 18999.8	Vorliehausen	10
— 9541.1	— 33228.2	Barbis	8
— 9594.5	+ 20334.8	Albershausen	10
— 9629.4	— 31666.9	Barbiswarte	2
— 9678.5	+ 2664.5	Parensen	10
— 9691.6	+ 10691.8	Hettensen	10
— 9887.2	+ 614.0	Angerstein	10 (2)
— 9949.5	— 10974.6	Tüerhausen	2
— 10181.6	+ 6216.6	Glüdebeck	10 (2)
— 10456.3	+ 66018.4	Harzhöhe	8
— 10471.3	— 40403.046	Rabenskopf	8
— 10857.9	+ 780.9	Kloster Stein	10 (2)
— 11130.0	— 15774.7	Bilshäuser Clus	2
— 11214.148	— 30285.81	Scharzfeld Kirchth.	8
— 11226.089	— 37531.015	Scholm, Signal im Baume	8
— 11328.0	+ 19573.2	Schoningen	10
— 11451.4	— 23219.3	Aukrug	2
— 11507.5	+ 9501.8	Elligerode	10
— 11526.0	— 14953.1	Bilshausen	2
— 11532.556	— 36038.443	Hausberg	8
— 11559.2	+ 4026.5	Wollbrechtshausen	10 (2)
— 11672.502	+ 66284.731	*Schalliethe*	8

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 11765.0	+ 440.2	Nörten	10 (2)
— 11977.187	— 41915.437	Stephanscecke	8
— 12107.5	— 13210.7	Nebenplatz 2 bei Bilshausen	2
— 12183.213	+ 7792.143	*Gladeberg Theodolithplatz*	10
— 12183.453	+ 7792.303	Gladeberg Signal	10
— 12233.8	— 13196.8	Nebenplatz 1 bei Bilshausen	2
— 12241.1	— 82626.5	Dampfmaschine Albertine	8
— 12279.2	+ 4922.8	Hevensen	10 (2)
— 12372.2	— 15199.4	Strohkrug	2
— 12493.537	+ 18762.239	*Sommerling*	10
— 12591.1	— 5442.4	Nebenplatz bei Sudershausen	2
— 12650.61	— 36537.55	Kummel, Signal im Baume	8
— 12979.832	— 30778.248	Gretchenradsbleek	8
— 13244.4	— 83102.8	Harzgerode	8
— 13647.0	+ 7916.8	Hardegsen Kirchthurm	10
— 13708.0	+ 8031.1	Hardegsen Magazin	10
— 13808.354	+ 20900.304	*Eichhagen*	10
— 13870.8	+ 18170.0	Bollensen	10
— 13888.6	— 20309.2	Hattorf	2
— 13990.994	— 32337.378	Liethberg	8
— 13963.3	— 12586.3	Lindau	2
— 14085.7	— 27493.7	Herzberg Kirchthurm	2
— 14174.9	— 41419.9	Jagdkopf Signal im Baume	8
— 14206.620	+ 7328.687	*Weper Nebenplatz 1*	10
— 14207.2	— 26902.1	Herzberg Schloss	8 (2)
— 14230.2	+ 2749.4	Behrensen	10
— 14271.2	+ 16565.0	Gierswald	10
— 14397.360	— 42340.224	*Langeecke*	8
— 14470.678	+ 21426.920	Uslar Kirchthurm	10
— 14514.420	+ 19919.692	*Galgenfeld*	10
— 14544.393	+ 21329.706	Uslar Rathhaus	10
— 14684.3	— 31271.2	Eickelnkopf	8
— 14833.9	+ 6614.7	Lutterhausen	10 (2)
— 14939.2	— 4064.9	*Tockenberg*	2
— 15108.4	— 15990.2	Wulften Thurm	2
— 15186.429	— 50337.104	Hohegeiss	8
— 15203.3	+ 18304.4	Dinkelhausen	10
— 15242.6	— 4102.7	Nebenplatz auf Wieterberg	2
— 15348.043	+ 7590.451	*Weper*	10
— 15496.8	+ 5211.5	Thüdinghausen	10
— 15543.9	— 33697.6	Grosse Knollen Signal im Baum	8
— 15548.4	— 33734.0	Grosse Knollen Baumspitze	8
— 15686.5	+ 2375.8	Grossenrode	10
— 15720.0	— 53780.9	Bennekenstein	8
— 15741.3	— 2238.6	Südheim	2
— 15751.5	— 65456.5	Stiege	8
— 15855.3	— 31164.2	Rothe Soole	8
— 15910.2	— 16381.6	Nebenplatz b Wulften	2
— 16187.933	+ 19596.646	Fahle	10
— 16284.1	+ 48876.2	Bruchhausen	9
— 16338.1	+ 22516.0	Forsthaus am Knobben	10
— 16442.670	— 46910.145	*Eversberg*	8
— 16530.3	+ 21220.4	Eschershausen	10
— 16553.8	— 10882.7	Catlenburg	2
— 16714.5	+ 8914.2	Trögen	10
— 16756.059	+ 22338.780	*Knobben Nebenplatz*	10
— 16826.3	— 9622.7	Nebenplatz bei Suterode	2
— 16833.7	— 16382.2	*Wulften Theodolithplatz*	2
— 16834.496	— 16381.887	Wulften Pfahl	2
— 16887.185	+ 22136.990	*Knobben*	10
— 17039.1	— 18756.6	Schwiegershausen	2
— 17500.2	— 740.0	Hillersen	2
— 17584.8	— 11553.2	Berka	2
— 17854.543	— 37470.334	Kobalt-thals-Kopf	8
— 17869.8	+ 26462.7	Schönhagen	10
— 17950.6	+ 8564.0	*Weper Nebenplatz 2*	10
— 18169.1	— 78903.0	Victorshöhe	8
— 18366.7	— 75666.7	Friedrichsbrunnen	8
— 18415.3	— 63048.0	Hasselfelde	8
— 18501.058	+ 19090.605	*Fahlerstollen Postament*	10
— 18502.084	+ 19091.158	Fahlerstollen Brett	10
— 18577.6	— 7565.2	Hammenstedt	2
— 18903.3	+ 4992.5	Moringen	10
— 19091.4	+ 10983.2	Espol	10
— 19102.1	— 53807.7	Tanne	8
— 19107.0	— 10845.4	Nebenplatz 2 bei Elvershausen	2
— 19192.8	— 1527.1	Höckelheim	2
— 19217.9	— 14471.6	Dorste	2
— 19246.1	— 10506.5	Nebenplatz 1 bei Elvershausen	2
— 19268.640	+ 19054.094	Wolfsstrang	10
— 19282.0	+ 5767.3	Ober Moringen	10
— 19421.288	— 189500.165	Wurzelberg	1
— 19653.2	— 4143.2	Nordheim Kirchthurm	10 (3)
— 19704.9	— 3980.6	Nordheim Rathhaus	3
— 19866.0	— 10604.9	Elvershausen	2
— 19930.7	— 22824.1	bei der niedrigen Warte	8
— 20001.826	— 34350.040	Lilienberg	8
— 20014.9	— 39500.2	Glockenhaus	8
— 20019.3	— 39483.2	Thürmchen bei Andreasberg	8
— 20287.2	— 39835.3	Andreasberg Kirche	8
— 20351.449	— 53682.875	Eiserne Pfähle, Pfahl	8
— 20693.3	— 51001.6	Wiedfeld Haus	8
— 20738.34	— 28075.2	Bärengarten	8
— 21016.2	— 53929.1	Wiedfeld Signal	8
— 21016.8	— 55141.4	Hösekenhay Stange 2	8
— 21045.7	— 25360.7	Katzenkopf	8
— 21057.088	— 53876.002	Eiserne Pfähle, Signalstange	8

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 21416.6	— 12958.9	Nebenplatz bei Marke	2
— 21446.2	— 27159.5	Schindelnkopf	8
— 21467.0	— 30088.7	bei dem Haspelkopf	8
— 21487.255	— 29438.938	Haspelkopf	8
— 21534.8	— 20728.9	Warte bei Osterode	2
— 21537.2	— 20720.6	Nebenplatz 1 bei Osterode	2
— 21538.6	— 20743.6	Nebenplatz bei der Warte 1833	8
— 21614.1	— 40090.8	Sandhügel bei Andreasberg	8
— 21738.138	— 56148.803	Hösekenhay Stange 1	8
— 21804.2	— 21514.0	Osterode Schloss	8 (2)
— 21807.0	— 20391.5	Zehentscheuer	8
— 21950.38	— 52542.6	Signal im Baume	8
— 22209.5	— 21367.6	Osterode Marktthurm	8
— 22217.1	— 20924.0	Osterode Vorstadtkirche	8 (2)
— 22267.8	— 48621.7	Signal bei Braunlage	8
— 22551.9	— 21613.1	Osterode Todtenthurm	2
— 22503.363	— 32044.871	Hanskuhnenburg	8
— 22524.3	— 21825.0	Scherenberg	2
— 22550.6	— 19836.4	Nebenplatz 2 bei Osterode von 1828	2
— 22605.8	— 26260.6	Steilewand	8
— 22640.7	— 27593.1	Wienthalskopf	8
— 22691.6	+ 37649.0	Fürstenberg	9
— 22715.6	— 8861.6	Brünsteinbaum	2
— 22785.3	— 31701.2	Grosse Breitenberg	8
— 22901.256	— 19516.96	bei Lasfelde	8
— 22946.5	— 7554.3	Edesheimer Warte	2
— 23019.5	— 32589.4	Bösenberg	8
— 23036.6	— 25706.1	Sösekopf	8
— 23212.68	— 52488.6	Lindlah (d)	8
— 23389.7	— 47.5	Hollenstedt	2
— 23399.9	— 24580.7	Scherenberg Signal	8
— 23509.8	+ 4232.7	Iber	3
— 23645.0	— 53068.2	Lindlah (c)	8
— 23682.4	— 40910.3	Rehberg	8
— 23793.9	— 55008.0	Lindlah (a)	8
— 23912.6	— 54784.2	Lindlah (b)	8
— 24059.9	— 29922.9	Eichelnberg	8
— 24185.2	— 15415.6	Nienstedt	8
— 24364.6	+ 38569.7	Bofzen	9
— 24371.9	— 40343.5	kl. Sonnenberg	8
— 24430.8	— 58729.7	Susenberg	8
— 24483.0	+ 984.7	Stöckheim	2
— 24524.3	+ 27468.0	Moosberg Haus	9
— 24520.3	— 57702.9	Wegweiser auf Katzenberg	8
— 24591.2	— 59083.9	Eiche	8
— 24747.3	— 40318.4	Sonnenberg Signal im Baume	8
— 24787.7	— 52751.8	Entfernter Wegweiser (s. g.)	8
— 24852.5	— 2126.5	Edesheim	2
— 25052.1	— 59107.2	Kleinschmidtskopf	8
— 25124.2	— 55200.3	Bastekopf	8
— 25130.8	— 25330.0	Schönenberg	8
— 25141.1	— 28710.4	Steinberg	8
— 25237.9	— 27192.9	Blockköthenkopf	8
— 25293.9	— 50288.8	Bahrenberg	8
— 25315.1	— 51071.3	Feuersteine bei Elend	8
— 25406.0	— 39407.3	Sonnenberg Pfahl	8
— 25497.0	— 32422.8	Allerberg	8
— 25509.2	— 47772.1	Kleiner Winterberg	8
— 25523.68	— 57785.67	Wegweiser zur Rothenhütte	8
— 25570.5	— 46684.7	Wormberg Pfahl	8
— 25572.7	— 46696.1	Wormberg Stange	8
— 25707.2	— 57185.4	Grosses Horn	8
— 25748.408	— 55691.076	Wegweiser vor dem Steinbach	8
— 25842.5	+ 41741.0	Knillwarte	9
— 26023.7	— 43251.5	Achtermannshöhe	8
— 26033.4	— 23968.7	Schieferecke	8
— 26141.1	— 1069.6	Hohnstedt	2
— 26153.8	+ 3791.5	Strothagen	3
— 26260.757	— 26436.710	Clausberg Signal	8
— 26275.3	+ 8678.3	Grubenhagen Centrum	3
— 26277.0	+ 8675.9	Grubenhagen Theodolith	3
— 26283.4	+ 19034.8	Friedrichshausen	3
— 26533.8	— 25212.9	Heiligenstock	8
— 26619.9	— 12689.5	Lauenberge	3
— 26655.422	— 58816.108	Kleines Horn	8
— 26678.2	— 35849.5	Hochliegende Signalstange	8
— 26723.3	+ 19516.9	Sievershausen	3
— 26745.8	+ 131327.7	Beckum	5
— 26759.6	— 39586.3	Sonnenkopf	8
— 26775.350	— 62257.835	Kalte Thal	8
— 26804.02	— 22196.66	Bornsberg	8
— 26866.9	— 26983.3	Grube Neue Weinschenke	8
— 26872.3	— 35052.9	Vosshay	8
— 26908.304	— 58162.233	Wegweiser vor dem Westerwinkel	8
— 26920.6	+ 7989.1	Rotenkirchen	3
— 26995.932	— 58042.166	Westerwinkel Signal	8
— 27005.5	— 33630.55	Ifenkopf	8
— 27029.5	— 18323.64	Badenhausen	8
— 27067.1	+ 1656.7	Sülbeck grosser Thurm	3
— 27181.8	— 66452.7	Hüttenrode	8
— 27189.9	+ 1725.6	Sülbeck kleiner Thurm	3
— 27291.1	+ 15328.3	Hilwartshausen	3
— 27297.1	— 59313.6	Elbingerode	8
— 27298.1	— 36646.3	Stieglitzecke	8
— 27476.7	+ 38638.9	Höxter Kilian erster Thurm	9
— 27489.2	+ 38641.2	Höxter Kilian zweiter Thurm	9
— 27500.8	— 60001.43	Wegweiser nach Blankenburg	8

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 27568.1	+ 38760.7	Höxter katholische Kirche	9
— 27609.1	— 60224.4	Galgenberg	8
— 27636.3	— 56840.4	Prinzenhay	8
— 27784.3	— 43350.1	Düstern Tannen	8
— 27874.3	+ 43094.4	Obenhausen Capelle	9
— 27943.6	— 33069.9	Sperberdamm	8
— 27978.34	— 58850.1	Ortberg Signal	8
— 28050.1	— 35780.0	auf dem Brande	8
— 28096.9	+ 15931.5	Scharfenberg	3
— 28128.4	— 51956.7	Hohneklippe	8
— 28381.7	+ 9645.1	Dassensen	3
— 28438.2	— 37961.9	auf dem Kurstberge	8
— 28486.5	— 31040.7	Schwarzenberg	8
— 28491.1	+ 4954.3	Odagsen	2
— 28602.6	— 61396.1	Hühnerbleek	8
— 28641.9	— 43718.2	Oderhay	8
— 28670.5	— 28560.6	Windhausen	8
— 28677.3	— 16073.1	bei Gittelde	8
— 28695.9	— 22014.8	Knöppelweg	8
— 28714.4	— 42441.7	Schwarzen Tannen	8
— 28733.5	— 1225.8	Kreieberg	3
— 28782.6	— 39792.5	auf dem kleinen Bruchberge	8
— 28861.224	— 59392.409	Ortberg Signal im Baume	8
— 28862.3	— 31289.8	Nebenplatz bei Schwarzenberg	8
— 28933.4	— 34606.2	unten am Brande	8
— 28943.9	— 59778.56	Unort	8
— 29254.4	— 29987.8	Harterweg	8
— 29361.584	— 38649.052	Wolfswarte Tanne	8
— 29384.1	— 32063.6	Münsterhay	8
— 29335.9	— 45028.0	Hirschhörner	8
— 29336.8	— 42923.6	Alte Stange auf einer Klippe	8
— 29363.4	+ 11147.3	Wellersen	3
— 29385.5	— 26452.1	Signal bei Clausthal	8
— 29411.7	— 31335.5	Polsterberg	8
— 29653.157	+ 38611.900	*Reuschenberge*	9
— 29864.9	+ 2056.6	Salzderhelden	3
— 29911.4	— 16822.4	Gittelde untere Kirche	8
— 29947.3	— 28915.4	Grube Dorothea Zechenhaus	8
— 30010.4	— 43147.3	Tanne auf einer Klippe	8
— 30021.3	— 26733.1	Clausthal, Schützenhaus	8
— 30279.2	— 24914.2	bei Frankenscharner Hütte	8
— 30232.4	— 16451.6	Gittelde obere Kirche	8
— 30310.087	— 46418.626	*Brocken*	1 (8)
— 30394.3	+ 17344.1	Dassel Thurm auf der Stadtmauer	3
— 30424.7	+ 17444.1	Dassel Kirchthurm	3
— 30557.8	— 35413.4	kleiner Okerkopf	8
— 30578.7	+ 13848.1	Ellensen	3
— 30727.2	— 26965.7	Clausthal Marktkirche	8
— 30737.4	+ 16561.1	Bierberg	3
— 30836.54	— 45248.0	Signal zwischen Steinen	8
— 30872.0	— 27169.6	Clausthal Gottesackerkirche	8
— 31079.692	— 26761.621	Clausthal	8
— 31235.6	— 18838.3	Signal nahe bei Grund	8
— 31283.0	— 40839.0	Lerchenköpfe	8
— 31326.2	+ 11840.2	Markoldendorf kleine Spitze	3
— 31362.2	+ 8258.5	Hullersen	3
— 31382.3	+ 14447.8	Ellensen	3
— 31381.3	+ 9567.6	Holtensen	3
— 31606.7	+ 11899.6	Markoldendorf spitzer Thurm	3
— 31948.1	— 16192.9	Amt Staufenburg	8
— 32076.5	— 27141.3	Zellerfeld	8
— 32126.4	— 21899.1	Hasenberg	8
— 32248.3	+ 5276.3	Eimbeck	3
— 32408.8	— 14610.0	Fährenberg Nebenplatz 1	8
— 32503.262	— 14534.999	*Fahrenberg*	8
— 32537.3	+ 19194.3	Mackensen	3
— 32589.8	— 15441.8	Staufenburg spitze Ruine	8
— 32724.6	+ 37313.1	Albaxen	9
— 32748.3	+ 15485.8	Erichsburg	3
— 32766.035	— 15103.932	Staufenburg Baum	8 (2)
— 32778.515	— 25216.839	Grube Johannis Zechenhaus	8
— 32831.3	— 14033.0	Holenberg	8
— 33174.936	— 23876.236	Platz in der Nähe der Prinzenhaube	8
— 33177.01	— 23842.8	in der Prinzenhaube	8
— 33213.4	— 20112.3	Winterberg Spitze der Hütte	8
— 33221.3	— 20120.7	Winterberg Signal	8
— 33262.469	— 23435.154	Wildemann	8
— 33365.9	+ 20396.7	Heukenberg	3
— 33441.2	— 21369.1	Teufelsthalerberg	8
— 33516.8	+ 34313.1	Holzminden	9
— 33618.2	— 18745.7	Heinrichsberg	8
— 33636.2	+ 42917.5	Fürstenau	9
— 33968.9	+ 10021.1	Vardeilsen	3
— 33987.1	+ 12545.6	Amelsen	3
— 34107.5	— 58533.0	Wernigerode Schloss	4 (3)
— 34176.05	+ 35383.0	Stael	9
— 34719.2	— 23217.9	Adlerberg	8
— 34949.4	— 37179.2	Abrensberg	8
— 35177.8	+ 45816.1	Löwendorf	9
— 35209.5	— 29438.9	Kahleberg	8
— 35386.9	+ 15183.5	Lüthorst	3
— 35393.25	— 23500.0	Wöhlerberg	8
— 35442.5	— 20390.3	Gross Wulpke	8
— 35463.6	— 38611.7	Wildenplatz	8
— 35582.3	+ 10650.7	Avendshausen	3
— 35648.9	+ 42020.7	Telegraph 29	9
— 35800.004	— 20831.679	Krohnsfeld	8
— 35935.0	+ 13291.5	Ennigerloh	5

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 36173.4	— 31157.4	Riesenbachskopf	8
— 36182.0	+ 10275.4	Stukenberg	3
— 36450.6	— 14413.4	Kirchberg	4
— 36529.559	+ 42629.094	*Kötersberg*	9
— 36621.665	— 28544.522	Bocksberg	8
— 36669.0	+ 30947.5	Bevern	9
— 36750.1	+ 20434.226	Telegraph 27	9
— 37067.2	+ 24317.6	Deensen	9
— 37682.0	+ 25587.3	Aroldissen	9
— 37795.3	— 24596.4	Schulberg	8
— 37855.6	— 23849.1	Lautenthal	8
— 38316.3	— 21672.75	Schieferklippe	8
— 38472.6	— 11779.0	*Kleie*	4
— 38641.0	+ 13677.8	Telegraph 26	9
— 38821.8	— 13118.3	Engelade	4
— 38836.6	+ 28936.5	Telegraph 28	9
— 38921.443	— 28423.139	Langewèth	8
— 38937.704	+ 37708.540	*Wilmeroiderberg*	9
— 39091.25	+ 17589.50	Wangelstedt	9
— 39123.9	+ 3238.5	Naensen	3
— 39348.37	— 24895.578	Riesberg	8
— 39370.6	— 4329.0	*Bei Clausberg*	4
— 39477.2	— 4516.9	Kloster Clausberg	4
— 39538.3	— 26909.1	Teufelsberg	8
— 39838.511	+ 14738.711	Vorwohle	9
— 39834.5	— 5689.5	*Bei Brunshausen*	4
— 40094.968	— 33653.130	Rammelsberg	8
— 40136.4	— 41619.4	Büntheim Kirche	4
— 40171.0	— 16074.1	Seesen Jacobsschule	4
— 40191.8	— 41618.2	Büntheim Amt	4
— 40437.7	+ 43816.8	Falkenhagen	9
— 40460.151	— 23866.671	*Ecksberg*	8
— 40471.2	— 33166.2	Thurm am Rammelsberge	4 (3)
— 40484.7	— 12638.7	Bilderlah	4
— 40518.2	— 15896.1	Seesen Obere Kirche	4
— 40755.3	— 40484.6	Schlevecke (ungewiss)	4
— 40860.2	+ 24002.5	Amelunxborn	9
— 40952.298	+ 7668.304	*Hils*	1 (9)
— 40961.9	+ 2611.4	Telegraph 25	9
— 41340.6	+ 27206.3	Golmbach	9
— 41354.0	— 4578.1	Dankelsheim	4
— 41482.47	+ 37009.07	Polle	9
— 41560.526	+ 20679.775	*Homburg*	9
— 41700.4	— 32963.2	Goslar Thurm am Clausthor	4 (3)
— 41753.7	— 33728.7	Goslar Zwinger	4 (3)
— 41774.464	— 31709.047	Goslar Frankenberg Centrum	4 (3)
— 41795.8	— 42636.3	Westerode	4
— 41924.75	— 15435.32	Schildberg	8 (4)
— 41999.1	— 6948.9	Alt Gandersheim	4
— 42000.1	— 50062.7	Stapelnburg (ungewiss)	4
— 42017.3	+ 3278.6	*Selter*	4
— 42038.8	— 33357.5	Goslar Marktthurm	4 (3)
— 42271.8	— 7812.4	Gremsheim	4
— 42288.2	— 33753.3	Goslar Stephani	4 (3)
— 42322.1	— 1703.5	Wetteborn	4
— 42333.8	— 33274.9	Goslar Jacobi südl. Thurm	4 (3)
— 42344.8	— 33275.3	Goslar Jacobi nordl. Thurm	4 (3)
— 42433.4	— 25894.0	Wolfshagen	8
— 42445.890	+ 37150.338	*Eckberg*	9
— 42476.2	— 33194.2	Goslar Neuwerk südl. Thurm	4 (3)
— 42487.8	— 33188.0	Goslar Neuwerk nordl. Thurm	4 (3)
— 42538.2	— 33509.2	Goslar Hagelthurm	4 (3)
— 42610.7	— 39611.7	Harlingerode	4
— 42824.6	+ 35484.0	Brevörde	9
— 42874.1	+ 33080.4	Grave	9
— 42879.0	— 34246.0	Goslar Siechhof	4 (3)
— 43001.8	— 21234.5	Gegenthalskopf	8
— 43142.5	— 43342.5	Bettingerode	4
— 43133.392	— 36105.680	Sutmerthurm Centrum	4 (1.3)
— 43140.770	— 36108.955	Sutmerthurm Pfahl daneben	4
— 43218.8	— 14430.0	Bornhausen	4
— 43230.3	+ 2402.7	Esbeck nordlicher Schorstein	4
— 43304.8	— 11546.1	Mechtshausen	4
— 43317.2	+ 19181.0	Wickensen	9
— 43830.4	+ 41410.9	Vahlbruch	9
— 43880.7	— 2308.4	Eierhausen	4
— 44074.1	+ 2715.9	Klein Freden	4
— 44352.6	+ 21060.1	Eschershausen	9
— 44538.8	+ 3446.2	Gross Freden	4
— 44584.7	+ 29846.9	Ruhle	9
— 44627.1	+ 25920.0	Vogler	9
— 44867.0	— 47636.3	Abbenrode (unsicher)	4 (3)
— 44868.1	— 45050.4	Lochtum	4 (3)
— 45036.8	— 4902.4	Gernrode	4
— 45191.1	+ 18967.0	Holtensen	9
— 45416.800	+ 18437.985	*Gretberg*	9
— 45616.2	+ 21332.1	Scharf. Oldendorf	9
— 45642.9	— 34760.2	Grauhof	4 (3)
— 45950.9	— 12735.3	Gross Rüden	4
— 46048.1	— 26833.3	Langelsheim	4 (3)
— 46456.6	+ 36528.0	Ottenstein	9
— 46802.6	— 42699.6	Vienenburg Ruine	4 (3)
— 46803.1	— 42801.1	Vienenburg lutherische Kirche	4 (3)
— 46959.2	+ 40990.4	Neersen Thurm	9
— 46998.9	— 42597.9	Vienenburg katholische Kirche (ungewiss)	3
— 47176.402	+ 19533.384	*Ith, Südlicher Punkt*	9
— 47188.3	— 42913.2	Vienenburg katholische Kirche (ungewiss)	4
— 47203.9	— 30238.6	Jerstedt	4
— 47217.7	+ 32923.1	Hohe	9
— 47224.6	+ 21812.7	Lüerdissen	9
— 47566.0	— 5201.9	*Heber Platz 1.*	4 (3)
— 47659.9	— 5206.0	*Heber Platz 2.*	4 (3)

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 47769.2	+ 42689.4	Neersen Windmühle	9
— 47826.5	— 33624.9	Hahndorf	4
— 48016.7	— 1626.2	Hornsen	4
— 48067.7	— 44430.4	Wiedelah Kirche	4
— 48095.5	— 44646.1	Wiedelah Amt	4
— 48103.8	— 40955.5	Woltingerode	4 (3)
— 48128.6	— 37208.8	Immenrode	4 (3)
— 48362.8	+ 7079.1	Förste	4
— 48370.1	— 4943.7	Lamspringe Kloster-kirche	4
— 48403.7	— 10569.0	Woldenhausen	4
— 48498.8	+ 9624.6	Gerzen	4
— 48547.071	+ 16779.146	Blosse Zelle	9
— 48573.4	— 4766.6	Lamspringe Thurm am Berge	4
— 48642.5	— 4974.3	Lamspringe lutherische Kirche	4 (3)
— 48664.1	+ 25324.7	Kirchbrack	9
— 48753.781	— 42307.428	*Harly's Berg*	4
— 49062.4	— 49733.1	Stöterlingenburg	4
— 49130.9	— 2822.2	Graste	4 (3)
— 49181.8	— 15102.2	Jerse	4
— 49193.1	+ 41425.2	Hohe Linde	9
— 49359.7	+ 7171.1	Rollinghausen	4
— 49479.9	— 13202.2	Wilhelmshütte	4
— 49517.9	+ 29870.0	Hoppenberg	9
— 49541.8	— 28321.2	Bredelem	4 (3)
— 49558.8	— 1071.4	Woltershausen	4
— 49603.4	+ 118017.6	Harsewinkel	5
— 49733.0	— 37495.5	Weddige	4
— 49734.4	+ 8252.1	*Schlehberg*	4
— 49830.3	— 31334.9	Dörnten	4 (3)
— 49957.6	+ 29386.8	Bodenwerder Kirchthurm	9
— 49998.1	+ 1122.6	*Armenseul*	4 (3)
— 50073.5	+ 29388.8	Bodenwerder runder Thurm	9
— 50113.3	— 10449.1	*Knick*	4
— 50159.7	+ 9321.6	*Wahrberg*	4
— 50222.2	— 2097.2	Netze	4 (3)
— 50296.2	+ 29206.3	Bodenwerder viereckiger Thurm	9
— 50389.3	— 44889.4	Wülperode	4
— 50450.6	— 11838.7	Dalum	4
— 50560.3	+ 9038.3	Alfeld Armenkirche	4
— 50696.0	+ 256.5	Armenseul Thurm	4
— 50715.9	+ 29383.0	Kemnade	9
— 50725.6	— 41980.6	Lengde	4
— 50747.86	+ 39169.659	Lüntorf	9
— 50766.9	— 15319.2	Ortshausen	4
— 50781.5	+ 32539.775	Hehlen westlicher Kirchthurm	9
— 50791.7	+ 32515.9	Hehlen östl. Kirchth.	9
— 50855.063	+ 159064.091	Münster	5
— 50911.176	+ 28904.677	Eckberg	9
— 50939.0	— 39645.2	Beuchtum	4
— 50939.2	+ 8057.8	Alfeld	4 (1)
— 51150.0	+ 32145.1	Hehlen östlicher Schlossthurm	9
— 51158.2	+ 32206.4	Hehlen westlicher Schlossthurm	9
— 51173.3	— 13141.8	Königsthurm	4
— 51229.7	+ 5857.6	*Menteberg.*	4
— 51503.2	+ 123649.4	Greffen	5
— 51553.3	— 1177.8	Harbarnsen	4 (3)
— 51769.1	+ 6445.3	Langenhölzen	4
— 51960.2	— 34878.3	Klein Dören	4
— 52060.0	— 31557.2	Heissum (ungehau)	4
— 52187.8	+ 15224.8	Rot	1
— 52288.6	+ 638.1	Adenstedt	4
— 52296.4	+ 9671.7	Limmer	4
— 52304.2	+ 5060.8	Zum Sack Thurm	4
— 52421.9	— 28787.7	Haringen	4 (3)
— 52452.9	+ 34732.065	Hajen	9
— 52457.4	+ 6845.1	*Rehberg*	4
— 52790.1	— 15459.7	Malum	4
— 53002.6	— 37980.0	Wehre	4 (3)
— 53034.4	+ 4705.5	Schulenkirche	4
— 53072.2	— 44028.6	Gödekenrode	4
— 53114.4	— 10275.6	Hary	4
— 53239.3	— 27479.6	Upen	4 (3)
— 53261.3	— 4170.5	Evensen	4(1.3)
— 53277.2	+ 16845.5	Duingen Thurm	9
— 53371.549	+ 30204.3	Heyen	4
— 53383.4	— 12752.5	Bokenem lutherische Kirche	4(1.3)
— 53391.2	+ 16676.2	Duingen Windmühle	9
— 53392.8	— 30827.7	Otfresen	4 (3)
— 53518.6	— 12758.9	Bokenem Rathhaus	4
— 53585.6	— 9671.3	Story	4(1.3)
— 53621.6	— 6861.4	Gross Ilde	4 (3)
— 53633.127	+ 32830.430	Eichberg	9
— 53745.6	— 2148.0	Sehlen	4(1.3)
— 54031.1	+ 611.2	Sellenstedt	4(1.3)
— 54272.0	+ 9662.2	Wettensen	4 (1)
— 54304.7	— 11177.6	Bönnien	4(1.3)
— 54382.754	+ 34051.433	Frenke	9
— 54420.9	+ 22122.6	Wallensen	9
— 54498.3	— 14332.2	Völkersheim spitzer Thurm	4(1.3)
— 54603.6	— 14310.1	Völkersheim kuppelförmiger Thurm	4 (3)
— 54626.4	+ 35758.4	Grohnde	9
— 54658.6	— 24846.9	Alten Walmoden	4 (3)
— 54671.013	— 31192.351	Bärenkopf	4(1.3)
— 54726.2	+ 3431.7	Wernershöhe Platz 2	4 (1)
— 54742.2	— 32947.3	Liebenburg Thurm	4(1.3)
— 54859.8	— 32808.4	Liebenburg Ruine	4(1.3)
— 54957.7	— 8325.2	Bültum	4(1.3)
— 55074.5	+ 3284.5	Vorwerk Wernershöhe	1
— 55093.9	+ 100890.6	Hünenburg	5
— 55121.7	+ 2657.3	Wernershöhe Platz 1	4(1)
— 55127.9	— 40846.8	Schladen Kirche	4
— 55271.3	— 41011.8	Schladen Amt	4
— 55428.4	— 4181.7	Bodenburg Kirche	4(1.3)
— 55430.8	— 4477.6	Bodenburg Schloss	4(1.3)
— 55553.2	+ 29534.0	Esperde	9

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 55694.2	— 4561.0	Bodenburg Kirche zum Schattenberg	4
— 55731.6	+ 96851.0	Bielefeld	5
— 55758.9	+ 41102.1	Hämelscheburg	9
— 55819.2	+ 33319.4	Niederbörrie	9
— 55883.5	— 2989.7	Breinum	4 (3)
— 56063.4	— 45480.9	Horneburg	4 (3)
— 56068.4	— 4030.6	Ostrum	4 (3)
— 56068.8	— 1399.2	Almenstedt	4 (3)
— 56197.3	+ 32850.9	Oberbörrie	9
— 56201.070	— 40982.761	Hoheweg	4
— 56231.4	+ 17636.2	Marienhagen	1
— 56249.8	+ 35130.8	Latferde	9
— 56319.0	— 8539.5	Upstedt	4 (3)
— 56378.1	+ 8627.8	Tafel	4
— 56404.9	— 173.8	Segeste	4 (3)
— 56412.5	— 25279.5	Ringelheim katholische Kirche	4 (3)
— 56515.3	— 37775.5	Gielde	4
— 56538.5	— 25298.6	Ringelheim lutherische Kirche	4 (3)
— 56569.6	— 27942.8	Gitter am Berge	4 (3)
— 56656.2	— 11906.9	Werder	4 (3)
— 56676.2	— 9653.2	Nette	4 (3)
— 56938.3	— 21974.5	Schlde	4 (3)
— 57007.3	— 23372.3	Schleyecke	4
— 57013.7	+ 11128.4	Brüggen	1
— 57032.7	— 33717.7	Klein Mahnert	4
— 57257.0	— 4718.9	Wehrstedt	4 (3)
— 57833.8	— 29489.8	Salzgitter	4
— 57941.7	+ 37790.9	Kirchohsen	9
— 58010.0	+ 14565.5	Külf erster Nebenplatz	1
— 58036.6	+ 46588.0	Aerzen	9
— 58142.4	— 31973.0	Gross Mahnert	4
— 58161.666	+ 40610.158	Bassberg	9
— 58433.9	— 40620.1	Burgdorf	4 (3)
— 58318.6	+ 37637.7	Hagenohsen	9
— 58553.4	— 18376.7	Haus am Heinberg	4
— 58563.5	— 29691.1	Kniestedt	4
— 58496.7	+ 2888.7	Sibbesen	1
— 58773.4	+ 811.1	Petze	4 (3)
— 58576.7	+ 14960.0	Külf Hauptplatz	1
— 58603.0	— 26502.8	Haberlah	4 (3)
— 58771.4	— 5677.7	Söhlberg	4
— 58844.7	+ 10524.8	Reden	1
— 58907.4	— 14418.3	Südlicher Platz bei Woldenberg	4
— 58911.7	— 14419.1	Südlicher Platz bei Woldenberg	3
— 58960.9	— 14464.9	Woldenberg Ruine	1
— 59022.6	— 14440.3	Woldenberg Thurm	4 (1)
— 59176.7	— 45800.8	Achim	4
— 59317.9	+ 178303	Deilmissen	1
— 59418.6	— 34645.4	Ohlendorf	4
— 59543.810	+ 40418.580	Ohr	9
— 59589.702	— 28419.915	*Hamberg*	4
— 59669.5	+ 131127.8	Fächtrup	5
— 59694.730	— 233408.667	Golmberg	1
— 59708.0	+ 38678.4	Tündern	9
— 59753.9	+ 15672.5	Külf zweiter Nebenplatz	1
— 59808.1	+ 24123.8	Salzhemmendorf	9
— 59831.9	+ 12802.1	Banteln	1
— 59847.8	+ 8110.9	Heinen	1
— 59862.6	— 20977.6	Gross Heerte	4 (3)
— 59877.6	+ 43380.1	Gross Berkel	9
— 59890.5	+ 9865.2	Wallenstedt	1
— 60028.3	+ 20412.9	Ahrenfelde	1
— 60261.3	— 20484.1	Klein Heerte	3
— 60506.3	+ 169915.8	Altenbergen	5
— 60557.2	+ 34220.3	Vorenberg	9
— 60573.9	— 42033.0	Kloster Heiningen	4(1.3)
— 60577.6	+ 43380.1	Gross Berkel	9
— 60777.093	— 8729.738	Beinberg	1
— 60872.9	— 41200.0	Pavillon b. Heiningen	4
— 60883.4	— 8347.3	Platz des vormaligen Söderthurms	4
— 60909.3	— 11221.0	Hakenstedt	3
— 60928.3	— 26286.7	Steindlah	4 (3)
— 61048.7	+ 14967.0	Eime	1
— 61053.0	— 37325.2	Klein Flöthe	4 (3)
— 61087.9	— 21897.3	Klein Elbe	4 (3)
— 61082.8	— 14064.5	Sottrum lutherische Kirche	4 (3)
— 61117.7	+ 36057.9	Hastenbeck	9
— 61199.0	— 13766.4	Sottrum katholische Kirche	4 (3)
— 61258.4	+ 6473.3	Eizum	1
— 61380.5	+ 9380.7	Dötzum	1
— 61575.9	+ 34232.2	Ofensburg Pavillon	9
— 61592.1	+ 104841.6	Werther	5
— 61687.3	+ 17974.3	Esbeck	1
— 61731.305	— 38866.591	*Rolandsberg*	4
— 61768.6	— 19693.5	Badekenstedt	4 (3)
— 61785.6	+ 23161.8	Hemmendorf	1
— 61787.1	+ 11347.0	Gronau kleiner Thurm	1
— 61797.8	— 26777.2	Hakelberg	3
— 61855.6	+ 11443.3	Gronau grosser Thurm	1
— 61911.2	— 17242.5	Binder Dehne	3
— 62088.6	— 33994.6	Flach Stöckhein kleiner Thurm	4
— 62111.1	+ 30320.5	Bisperode	9
— 62177.3	— 34259.3	Flach Stöckheim spitzer Thurm	4
— 62218.2	— 36220.6	Gross Flöthe	4 (3)
— 62260.5	— 14582.6	Holle	3
— 62272.8	— 2694.0	Röderhof	3
— 62289.9	+ 12451.0	Leyherkirche	1
— 62382.969	+ 108965.145	*Lange Egge Theodolithplatz*	5
— 62383.022	+ 108964.367	Lange Egge Pfahl	5
— 62446.5	+ 20938.1	Oldendorf	1
— 62529.3	— 6081.0	Mordmühle	3
— 62534.0	— 22261.1	Gross Elbe	4 (3)
— 62541.4	+ 8067.9	Barfelde	1
— 62576.3	— 44676.9	Bornum	4
— 62646.2	— 29059.9	Calbechte	4

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 62658.220	+ 28828.762	*Ith Nordlicher Platz*	9
— 62755.7	+ 19998.3	Bentsdorf	1
— 62840.320	— 47391.248	*Vorberg*	4
— 62893.6	— 17160.7	Binder spitzer Thurm	3 (1)
— 62946.7	— 42560.1	Dorstedt Dorf	4
— 62960.0	+112787.1	Ravensberg	5
— 63012.9	— 1726.42	Binder kleiner Thurm	4 (3)
— 63024.3	— 3564.7	Gross Düngen	3 (1)
— 63034.7	— 24571.0	Gustedt	4 (3)
— 63037.6	— 18221.4	Rehne	4 (3)
— 63026.2	— 6335.4	Klein Düngen	3 (1)
— 63096.3	— 1300.47	Derneburg	4 (1)
— 63127.2	— 18875.4	Rehner Höhe	3
— 63179.059	+ 41387.660	*Klattberg*	9
— 63280.2	+ 16935.5	Sehlde	1
— 63304.0	+133025.7	Glandorf	5
— 63387.8	— 42662.8	Kloster Dorstedt	4
— 63505.0	— 33074.3	Lobmachtersen	4
— 63510.9	+ 1305.0	Dickholzen	3 (1)
— 63515.1	— 6481.9	Heinde	3 (1)
— 63521.0	— 43593.6	Pavillon bei Hedwigsburg	4
— 63645.5	— 20731.2	Oelper	3
— 63696.4	— 1056.8	Söhre	3 (1)
— 63709.7	+ 32908.6	Diedersen	9
— 63753.0	— 8611.7	Listringen	3 (1)
— 63785.3	— 3505.4	Eggerstedt	3
— 63924.3	+ 40307.0	Hameln Bonifacius Laternenthurm	9
— 63926.0	+ 40338.1	Hameln Bonifacius Stumpfertharm	9
— 64001.3	+ 30216.1	Bessingen	9
— 64019.5	+ 36536.8	Afferde	9
— 64039.0	+ 24368.3	Voldagsen	9 (2)
— 64098.0	+ 97372.4	Jöllenbeck	5
— 64111.9	— 15621.6	Ohberg bei Grastorf	3
— 64273.2	— 28493.1	Gebhardshagen	4(1.3)
— 64289.1	+ 40155.0	Hameln Markthurm	9
— 64297.7	— 17106.5	Wartgenstedt	4 (3)
— 64431.5	— 14829.3	Grastorf grosser Thurm	4 (3)
— 64499.3	— 4791.5	Walshausen	3
— 64501.064	+ 36102.471	Deutberg	9
— 64657.2	— 44716.0	Kassenbrück	4
— 64664.6	+ 53918.0	Goldbeck	9
— 64747.8	+ 31668.3	Behrensen	9
— 64830.5	— 3690.4	Itsum	3 (1)
— 64920.0	+ 10223.6	Betheln	1
— 64952.9	+ 36266.7	Rohrsen	9
— 64990.6	— 50246.1	Remlingen	4 (3)
— 65136.0	+ 1879.3	Marienrode	3 (1)
— 65168.2	— 34325.9	Cramme	4 (3)
— 65178.9	— 674.8	Barienrode	3 (1)
— 65185.1	2690.1	Marienburg	3
— 65212.2	— 5728.3	Leckstedt Schorsteinz	3 (1)
— 65218.2	— 5695.1	Leckstedt Schorsteinz	3
— 65317.8	+159791.6	Gräven	5
— 65327.7	+ 16995.5	Mehle	1
— 65377.5	+ 8361.1	Kloster Escherde	1
— 65480.191	+127023.635	Laer	5
— 65697.0	+ 14113.3	Elze	1
— 65920.3	+ 27054.3	Coppenbrügge 1833	9
— 42597.1		Ohrum	4
— 65936.0	+ 27080.0	Coppenbrügge 1827	1
— 66001.353	— 23458.424	*Lichtenberg*	1
— 66018.2	— 32659.0	Bahrum Windfahne	4 (3)
— 66025.568	— 23659.472	Lichtenberg Ruine	1
— 66095.5	— 19335.6	Westerlinde	3
— 66176.4	+ 86918.3	Herford	5
— 66343.1	— 23396.4	Stuksberg	1
— 66358.1	+ 1635.0	Neuhof	3
— 66434.2	+ 34550.7	Hilligsfeld	9
— 66543.5	— 30524.8	Gross Heerte	4(1.3)
— 66568.8	— 16417.3	Luttern	4 (3)
— 66602.2	+119089.8	Dissen	5
— 66604.2	— 301.5	Ochtersum	3 (1)
— 66676.5	— 23571.3	Lichtenberg Kirchth.	1
— 66688.3	— 5867.4	Uppner Berg Oestl. Platz	3
— 66731.8	+ 43750.4	Wehrbergen	9
— 66769.684	+ 22564.898	*Osterwald*	9
— 66926.0	— 20982.7	Osterlinde	3
— 66977.7	— 4822.0	Uppner Berg	1
— 67012.4	+ 47787.8	Hehmeringen	9
— 67136.4	— 41847.1	Bungenstedter Thurm	4
— 67141.5	— 8490.9	Wendhausen	3
— 67485.3	— 34410.9	Leinde	4
— 67550.4	+ 2723.0	Finkenberg	1
— 67586.4	— 27092.2	Salder kleiner spitzer Thürm auf Schieferdach	3
— 67615.8	— 3295.4	Spitzhut	1
— 67641.6	— 27094.2	Salder Kuppelthurm	3
— 67696.536	—115828.881	Magdeburg	1
— 67865.0	+ 15055.6	Sorsum	1
— 67883.7	+ 100.8	Lucienvörde	1
— 67897.1	— 26971.0	Salder Ziegelthürm	3 (1)
— 68007.2	— 25392.6	Bruchmachtersen	3
— 68045.838	+ 28422.105	Ruhbrink	9
— 68105.7	+ 7570.0	Escherderberg	1
— 68153.2	+ 45829.7	Lachem	9
— 68155.3	— 9886.9	Ohbergen Platz 3	1
— 68200.3	+ 19023.7	Wullinghausen	1
— 68322.3	+ 12399.4	Burgstemmen	1
— 68422.8	— 9950.0	Ohbergen Platz 2	1
— 68444.5	— 9734.8	Ohbergen Capelle	1
— 68450.8	+ 33079.173	Hasperde	9
— 68463.0	— 9717.4	Ohbergen Platz 1	1
— 68479.3	+ 44196.1	Fischbeck	9
— 68538.7	— 18531.7	Burgdorf kleiner Thurm	3
— 68572.7	— 35471.8	Adersheim	4 (3)
— 68576.3	+ 31562.9	Hohnsen	9
— 68607.5	— 18815.5	Burgdorf grosser Thurm	3
— 68618.2	+ 38863.4	Holtensen	9
— 68634.7	— 447.3	Hildesheim Godehard 1	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 68644.0	— 494.6	Hildesheim Godehard 2	1
— 68648.5	— 448.2	Hildesheim Godehard 3	1
— 68662.5	+ 33900.6	Quatrebras	9
— 68764.2	— 12674.6	Wöhle	1
— 68818.7	+ 1112.5	Moritzberg	1
— 68825.9	+ 4268.8	Sorsum	1
— 68864.5	— 787.1	Hildesheim Lamberti	1
— 68891.2	+106297.2	Neuenkirchen	5
— 68904.4	+ 11958.0	Poppenburg	1
— 68975.2	+ 15396.4	Vinie	1
— 68978.6	— 31830.4	Watenstedt	4(1.3)
— 68991.6	+ 94604.5	Enger	5
— 69022.0	+ 28142.9	Brüningshausen	9
— 69025.9	— 4386.6	Achtum	1
— 69206.0	+ 10006.5	Malerten	1
— 69369.4	— 9741.9	Otbergen	3
— 69379.1	— 502.6	Hildesheim Andreas	1
— 69320.0	— 17099.6	Nordassel	3
— 69375.1	+ 13581.3	Wülfingen	1
— 69406.494	— 47208.618	*Festberg*	4
— 69462.9	— 66.7	Hildesheim Michael	1
— 69545.7	— 560.2	Hildesheim Jacobi	1
— 69579.1	+ 99906.853	Spenge	5
— 69624.5	+ 48111.4	Fühlen	9
— 69750.5	+ 6568.4	Gross Escherde	1
— 69850.5	— 29933.2	Hallendorf	4(1.3)
— 70004.9	+ 34665.5	Flegessen	9
— 70068.0	+ 11399.9	Nordstemmen	1
— 70143.8	+105592.5	Wallenbrück	5
— 70311.1	+ 7275.9	Klein Escherde	1
— 70311.7	+ 2132.4	Himmelthür grosser Thurm	1
— 70358.3	— 14639.4	Nettlingen	3 (1)
— 70426.7	+ 44936.0	Weibeck	9
— 70458.7	— 21600.1	Lesse	3
— 70471.967	+129345.908	Glane	5
— 70627.8	— 40664.7	Wolfenbüttel Latternenthurm	4(1.3)
— 70637.2	— 40707.5	Wolfenbüttel kleiner Thurm	3
— 70638.570	+ 37482.488	Süntel	9
— 70644.1	+ 31814.77	Hachmühlen	9
— 70665.6	— 8437.1	Dinklar	1
— 70670.5	— 37126.7	Fümmelse	4 (3)
— 70691.8	— 4876.9	Einum	1
— 70713.3	— 40211.8	Wolfenbüttel Schlossthurm	3
— 70727.0	+ 16163.6	Alferde	1
— 70824.1	+ 1792.2	Himmelsthür kleiner Thurm	1
— 70850.1	+ 4930.8	Emmerke	1
— 70875.110	+ 27508.768	*Altenhagen*	9
— 70927.3	— 18659.0	Berne	3 (1)
— 71007.740	—176238.296	Hagelsberg	1
— 71111.7	— 10184.5	Farmsen	1
— 71236.2	— 17510.0	Berelberg	3
— 71266.8	+ 1103.7	Steuerwald kl. Thurm	1
— 71279.6	+ 1032.7	Steuerwald grosser Thurm	1
— 71364.9	+ 45842.4	Krückeberg	9
— 71399.9	+ 47510.5	Oldendorf	9
— 71450.4	+114740.7	Wellingholthausen	5
— 71490.4	+ 19358.6	Eldagsen	1
— 71527.4	+ 62146.3	Möllenbeck südl.	9
— 71533.6	— 28339.2	Engelnstedt	3 (1)
— 71544.7	+ 62143.7	Möllenbeck westl.	9
— 71581.3	— 6608.2	Betmar	1
— 71591.122	+129889.158	Iburg Kirche	5
— 71642.9	+ 3292.1	Osterberg	1
— 71710.706	+130051.530	Iburg Schloss spitzer Thurm	5
— 71717.4	— 12878.5	Dingelbe grosser Thurm	1
— 71727.826	+130090.647	Iburg Schloss stumpfer Thurm	5
— 71770.1	— 3220.0	Bavenstedt	1
— 71779.4	+ 90749.0	Hiddenhausen	5
— 71814.7	+100875.6	Kirchhogel	5
— 71933.0	— 24984.3	Repner	1
— 71937.9	+ 51314.3	Wieden	9
— 72001.5	— 10821.0	Kleiner Thurm auf langem Gebäude	1
— 72027.3	+ 65446.9	Varenholz	9
— 72028.6	+ 54104.1	Hoheinrode	9
— 72040.7	— 39288.3	Gross Stöckheim	3
— 72059.9	— 13064.5	Dingelbe kleiner Thurm	1
— 72143.7	+ 57680.2	Exten	9
— 72190.3	— 31646.3	Blekenstedt	4(1.3)
— 72207.4	+ 14602.0	Adensen	1
— 72218.9	— 15442.4	Bettrum	3 (1)
— 72520.6	— 20148.7	bei der Söhlder Windmühle	3
— 72626.9	— 8966.8	Kemme	1
— 72752.2	— 10839.0	Schellerten	1
— 72840.4	+ 8997.4	Rossing	1
— 73905.5	— 16896.7	Klein Himstedt	3 (1)
— 73024.7	— 32599.2	Beddingen	3 (1)
— 73198.6	— 4226.2	Hönersum	1
— 73276.6	— 19840.1	Sehlde	1
— 73288.8	— 23308.4	Barbke	3 (1)
— 73412.7	— 17524.9	Gross Himstedt	3 (1)
— 73509.5	+ 47103.8	Segelhorst	9
— 73513.5	— 26150.2	Broistedt	3
— 73622.6	+ 58910.7	Rinteln	9
— 73683.667	+129245.777	*Dörenberg Centrum*	6 (5)
— 73683.735	+129245.868	*Dörenberg Platz 1 Junius* 1829	6 (5)
— 73683.920	+129245.965	*Dörenberg Platz 2 August* 1829	6 (5)
— 73706.736	+104419.963	Riemsloh	5
— 73811.4	— 32115.8	Sauingen	4(1.3)
— 73906.356	+129809.92	Dörnberg Nebenplatz	5
— 73999.8	+ 11179.7	Schulenburg	1
— 74050.2	— 1752.6	Asel	1
— 74079.0	— 6110.4	Machtsum	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
—74122.9	— 36281.0	Steterburg	3
—74290.8	+ 2584.3	Klein Giesen	1
—74309.5	+ 1716.4	Hasede	1
—74531.8	+ 32780.3	Münder	9
—74544.2	+ 3330.0	Gross Giesen	1
—74665.8	— 13855.2	Feldbergen	1
—74984.3	— 31993.5	Ufingen	3 (1)
—75025.8	— 24882.1	Lengde	3 (1)
—75041.7	+ 8600.0	Barnte	1
—75092.2	+ 50649.4	Schaumburg südl.	9
—75103.4	+120233.1	Borgloh	5
—75178.3	+ 50685.5	Schaumburg nordl.	9
—75255.0	— 11535.5	Garmsen	1
—75270.2	+ 53063.4	Deckbergen	9
—75312.4	+ 93099.9	Bünde	5
—75340.6	+ 56192.1	Steinbergen	9
—75408.9	+ 89021.5	Kirchlehningen	5
—75416.8	— 15522.4	Platz bei Hoheneggelsen	3
—75417.2	— 4706.6	Borsum	1
—75427.470	+ 50454.707	*Pagenburg*	9
—75428.8	— 22854.8	Woltwiese	1
—75431.0	— 1420.7	Harsum	1
—75445.3	— 50970.1	Lucklum	4 (3)
—75491.9	+ 2273.7	Gross Förste	1
—75613.5	+ 26544.0	Springe	1
—75654.5	— 15818.4	Hoheneggelsen	1
—75928.6	+ 37830.6	Backede	9
—75965.7	— 35812.0	Geitelde	3 (1)
—76057.0	— 8663.2	Adlum	1
—76187.6	+109702.4	Melle lutherische Kirche langer Thurm	5
—76213.1	+109793.9	Melle katholische Kirche dicker Thurm	5
—76333.0	+ 7489.8	Giften	1
—76336.5	+ 10274.3	Jeinsen	1
—76356.0	+ 1082.2	Klein Förste	1
—76400.8	+125081.1	Kloster Oesede	5
—76416.4	+ 16139.4	Gestorf	1
—76487.6	— 18838.8	Steinbrück	1
—76532.6	— 28880.8	Fallstedt	3 (1)
—76591.4	+ 33402.2	Nettelrode	9
—76817.2	— 52489.6	Pavillon bei Lucklum	4 (1.3)
—76942.0	+ 5079.5	Ahrbergen	1
—76979.0	— 6210.1	Rutenberg	1
—77114.3	— 23977.8	Klein Lafferde	3 (1)
—77119.2	+128344.5	Oesede	5
—77199.9	+114167.6	Gesmold	5
—77337.4	+ 61028.8	Luhdener Klippe Baum 1	9
—77402.1	+ 61163.8	Luhdener Klippe Baum 2	9
—77442.6	— 20680.3	Gross Lafferde	1
—77495.9	+ 38437.5	Beber	9
—77498.1	— 38360.4	Rüningen	3
—77621.8	— 12508.5	Oedlum	1
—77629.4	+131491.2	Weisser Thurm	5
—77699.9	— 35174.0	Stidium	3 (1)
—77818.2	— 26843.0	Boenstedt	3 (1)
—78080.8	— 52065.0	Heinkenrode	3
—78337.8	+101244.2	Westkilver	5
—78374.7	+ 6059.1	Sarstedt	1
—78478.377	+ 23444.173	*Deister* 1822	1
—78519.4	+ 35493.5	Einbeckhausen	9
—78594.4	+120057.5	Holte	5
—78688.3	— 36631.0	Broizen	3 (1)
—78737.6	+ 20872.0	Deister Glashütte	1
—78810.5	+ 8400.7	Schliekum	1
—78897.0	+ 18699.9	Bennigsen	1
—78928.0	+ 45201.3	Hattendorf	9
—78939.5	+ 50270.6	Katharinenhagen	9
—79006.5	— 31898.1	Sonnenberg	3 (1)
—79068.1	— 34799.2	Timmerlah	3 (1)
—79075.6	+145546.5	Teklenburg	5
—79354.0	+ 5113.8	Kiphut	1
—79388.5	— 7926.3	Sosmar	1
—79402.1	+188264.2	Ochtrup	5
—79471.5	+ 14310.3	Hupeden	1
—79525.6	— 11756.4	Bierbergen	1
—79600.0	— 26936.1	Liedingen	3 (1)
—79724.4	— 18939.4	Gadenstedt	3 (1)
—79963.2	+ 7359.7	Ruthe	1
—79993.584	+ 29649.753	*Deister* 1833	9
—80024.9	+ 89777.5	Querrheim	5
—80042.7	— 59652.8	Königslutter Schloss	7
—80080.3	— 5921.0	Clauen	1
—80083.2	— 59506.0	Königslutter 1827	3
—80338.3	— 48418.2	Kremling	3
—80357.482	+ 71876.003	*Wittekindstein*	9
—80360.0	+ 71875.0	*Wittekindstein* 1829	5
—80405.7	— 53445.6	Appenrode	4 (3)
—80415.0	— 1392.6	Klein Algermissen	1
—80431.6	— 6510.3	Windmühle bei Clauen Platz 1	1
—80479.4	+ 39776.1	Hülsede	9
—80577.8	— 15195.8	Adenstedt	1
—80637.5	— 1956.1	Algermissen	1
—80664.547	+ 18507.396	Lüdersen	1
—80750.7	— 21069.1	Obergen	1
—80865.6	— 19680.2	Galgenberg	3
—80937.4	— 32015.3	Denstorf	1
—80950.1	— 7668.9	Platz 2 bei Hohenhameln	1
—80986.3	+ 2472.9	Hotteln	1
—81011.2	— 22595.6	Münstedt	3 (1)
—81083.9	+ 6292.4	Heisede	1
—81121.3	+105180.1	Buer	5
—81158.3	— 8221.1	Hohenhameln	1
—81304.9	— 26382.0	Betmar	1
—81514.5	— 39768.2	Braunschweig Aegidius	1
—81586.7	— 29565.3	Vechelde schwarzer Thurm	1
—81595.9	— 39052.6	Braunschweig Michaelis	3
—81636.3	— 29831.0	Vechelde Laternenthurm	1
—81647.4	— 18219.3	Oelsburg	3

+ südlich	+ westlich		Nr.
—81803.1	+ 60752.0	Bückeburg	9
—81812.0	— 39145.0	Braunschweig Martini 1	1
—81824.8	— 39143.0	Braunschweig Martini 2	1
—81825.4	+ 12533.0	Pattensen	1
—81832.8	+100040.9	Rödingshausen	5
—81851.4	— 16840.6	Gross Bülten	3
—81870.8	— 21510.1	Lohberg	3
—81919.0	+ 21111.8	Potholtensen	1
—81938.1	— 18039.3	Gerstenfeld bei Oelsburg	3
—82076.3	— 18849.0	Gross Ilsede	3
—82211.9	— 15671.1	Haskamp	3
—82215.981	— 39117.113	Braunschweig Petrus	1
—82382.0	— 7328.8	Harber	1
—82417.632	— 39390.457	Braunschweig Andreas	1
—82496.9	+ 7053.5	Gleidingen	1
—82535.5	— 11497.1	Stedum	3
—82546.0	— 13556.5	Klein Solschen	3
—82554.6	— 28639.3	Wahle	1
—82595.9	— 14369.2	Gross Solschen	1
—82597.1	— 36956.1	Lehndorf	1
—82615.339	+ 99921.177	*Nonnenstein*	6 (5)
—82621.8	— 4869.0	Gross Lopke	1
—82626.0	+ 1181.3	Bledelem	1
—82730.6	+175586.4	Neuenkirchen	5
—82746.4	— 554.5	Lühnde	1
—82750.3	— 35919.6	Lamme	1
—82786.3	— 26685.2	Sierse	3 (1)
—82793.8	+ 55670.0	Obernkirchen	9
—82944.2	+ 79792.3	Bergkirchen	5
—82985.2	— 32038.9	Wendenstedt	3 (1)
—83017.4	+ 25179.6	Wennigsen	1
—83186.7	— 23525.9	Schmedenstedt	1
—83246.4	— 17457.4	Klein Bülten	3
—83393.4	+ 2002.9	Platz bei Ingeln	1
—83521.1	— 20103.4	Vossberg	3
—83632.7	+ 3991.8	Osselse	1
—83649.6	+ 15744.6	Hiddesdorf	1
—83830.6	— 2231.0	Ummeln	1
—84179.9	— 19476.6	Klein Ilsede	3
—84238.9	+129108.8	Osnabrück Johannis	5
—84552.3	+129709.0	Osnabrück Katharinen	5
—84625.2	+ 1005.7	Wehminger Berg	1
—84729.7	+ 54059.9	Sülbeck	9
—84771.8	+ 96602.2	Wurzelbrink	5
—84861.9	+138359.0	Lotte	5
—85026.4	+129567.5	Osnabrück Dom	5
—85044.4	+ 2367.6	Mullingen	1
—85048.1	— 11736.5	Equord	1
—85067.3	+129758.2	Osnabrück Mariae	5
—85153.3	— 18280.8	Handorf	3
—85193.0	+116045.6	Schledehausen	6
—85201.8	— 287.9	Bolzum	1
—85303.7	— 31488.8	Bortfeld	1
—85421.6	+161316.8	Bevergen	5
—85503.8	— 22421.1	Dungelbeck	1
—85525.1	+ 70103.9	Minden	5
—85564.5	+ 556.7	Wehmingen	1
—85567.9	+ 1777.3	Wirringen	1
—85621.5	+144720.3	Schorstein einer Dampfmaschine	5
—85687.0	+129343.8	Gertrudenberg	5
—85820.6	+ 9721.0	Grasdorf	1
—85962.8	— 15524.2	Rosenthal	1
—86036.960	—264506.541	Colberg	1
—86289.0	— 10338.8	Mehrum	1
—86457.3	— 25306.1	Woltorf	1
—86488.8	+170928.6	Rheina	5
—86564.7	— 7114.4	Haimar	1
—86794.2	— 14401.6	Schwichelde	3 (1)
—86842.6	+ 90366.3	Lübke	5
—87015.4	— 1583.3	Sehnde	1
—87078.8	+183693.5	Ohne	5
—87124.5	+ 93839.7	Blasheim	5
—87322.8	+ 12504.0	Wilkenburg	1
—87342.4	— 4216.2	Rethmar	1
—87354.1	+ 33312.7	Gehrden	1
—87374.0	+ 39912.0	Rodenberg	9
—87519.4	+122985.4	Bellm lutherische Kirche	6
—87558.4	+ 10757.3	Latzen	1
—87636.3	+122963.0	Bellm katholische Kirche	6
—87763.5	+103055.1	Lintorf	5
—87808.9	+ 19509.2	Rönneberg	1
—87920.9	+ 775.4	Wassel	1
—87974.4	— 7335.4	Dolgen	1
—88208.7	— 47086.3	Wendhausen	3
—88319.0	— 11995.3	Buchholz	3
—88324.2	— 19387.3	Peine lutherische Kirche	1
—88335.6	+115538.9	Osheide	6
—88401.2	+117923.9	Wulfter Berg	6
—88438.3	— 19316.8	Peine Rathhaus	3
—88587.5	— 19035.8	Peine katholische Kirche	3
—88684.7	— 14146.7	Dickensberg	3
—88701.6	+ 50109.35	Stadthagen Kirchthurm	9
—88763.229	+193445.746	Gildehaus	5
—88944.9	— 30816.2	Wendeburg	3
—88994.9	+ 50365.2	Stadthagen Stadtmauer niedriger Thurm	9
—89015.8	+ 50408.6	Stadthagen Stadtmauer höherer Thurm	9
—89033.5	+ 17105.6	Wetbergen	1
—89156.2	+ 6431.9	Wulferode	1
—89285.0	+109381.8	Essen	5
—89322.2	+136471.6	Werse	5
—89329.0	+106969.1	Witlage	5
—89371.6	— 22803.5	Essinghausen	3
—89459.7	+140914.9	Westercappeln	5

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 89560.728	+ 1313365.875	*Piesberg Pfahl*	5
— 89560.758	+ 1313366.444	Piesberg Theodolithplatz	5
— 89573.9	+ 189980.8	Bentheim Kirche	5
— 89583.9	— 25303.0	Platz bei Meerdorf	3
— 89734.722	+ 190107.058	Bentheim südlicher Schlossthurm	6 (5)
— 89755.454	+ 190018.902	Bentheim Theodolithplatz 2	6 (5)
— 89755.621	+ 190021.633	Bentheim Theodolithplatz 3	6 (5)
— 89758.066	+ 190025.198	*Bentheim Signal Centrum*	6 (5)
— 89763.306	+ 190019.671	Bentheim Theodolithplatz 1	6 (5)
— 89811.6	+ 189988.9	Bentheim nordlicher Schlossthurm	6 (5)
— 89839.9	— 19418.3	Herzberg	3
— 89907.5	+ 38565.3	Nenndorf	9
— 90033.3	— 6732.5	Leyerberg	3
— 90276.4	+ 1112820.6	Stirperberg	6
— 90570.0	— 16336.4	Vöhrum	3
— 90719.5	— 21797.9	Platz bei der Stedderdorfer Windmühle	3
— 90751.9	+ 54131.5	Meerbeck	9
— 90770.5	— 11833.9	Springberg	3
— 90834.6	+ 94445.1	Alswede	5
— 90854.3	— 24139.6	Duddenstedt	1
— 90917.3	+ 939.4	Ilten	1
— 90952.8	— 18646.9	Zwergberg	3
— 91051.3	— 28114.2	Rieper	3
— 91194.8	— 25638.5	Meerdorf	1
— 91211.7	+ 6027.7	Kronsberg Platz 1	1
— 91354.7	— 20878.4	Stedderdorf	1
— 91375.9	— 28149.6	Rieperberg	3
— 91426.2	+ 3339.5	Höver	1
— 91493.735	+ 205560.580	Oldenzaal	5
— 91497.1	+ 128772.0	Kloster Rulle niedriger Thurm	6
— 91508.2	+ 128779.6	Kloster Rulle	5
— 91610.2	+ 176906.5	Salzbergen	5
— 91690.9	+ 185452.3	Schüttorf	5
— 91789.2	— 33477.2	Gross Schwülper	3
— 92129.800	— 216004.904	Eichberg	1
— 92192.7	+ 117077.0	Ostercappeln	5
— 92367.3	+ 7938.8	Kirchrode	1
— 92401.7	+ 166096.0	Dreierwolde	5
— 92684.430	+ 117034.929	bei der Capelle Theodolithplatz 1829	5 (6)
— 92713.7	+ 117196.2	Capelle bei Ostercappeln	5
— 92792.6	+ 2272.4	Ahlten	1
— 92877.0	+ 44892.1	Lindhorst	9
— 93159.9	+ 1313350.6	Wallenhorst Capelle	6
— 93255.9	+ 14658.0	Waterloosäule	11
— 93393.9	+ 25593.3	Kirchwehren	1
— 93577.384	+ 13880.010	Hannover Aegidius	1(11)
— 93657.5	— 2691.4	Lehrte	1
— 93670.2	+ 1204995.3	Drihauser Berg	6
— 93762.8	+ 1313269.9	Wallenhorst Kirche	6
— 93770.025	+ 14646.897	Hannover Neustädter Thurm	1
— 93783.9	+ 38874.1	Hohenhorst	9
— 93838.358	+ 14154.248	Hannover Marktthurm	1
— 93898.7	+ 121129.9	Vennerberg	6
— 94018.633	+ 14332.268	Hannover Kreuzthurm	1
— 94120.8	— 12790.4	Sievershausen	3
— 94207.7	+ 134923.0	Weisse Windmühle	6
— 94296.4	— 36718.9	Rethen	3
— 94571.2	— 26669.7	Abbensen Thurm am Wohnhause	3
— 94595.3	+ 111022.8	Bohmte	5
— 94597.4	— 16141.5	Abbensen Taubenhaus	3
— 94622.2	— 16075.8	Abbensen Thurm mit Glocke	3
— 94734.9	— 34536.1	Adenbüttel	3
— 94952.9	— 16228.5	Abbensen Dorfthurm	3
— 95053.5	— 40950.4	Meine	3
— 95122.8	— 32089.9	Katzberg	3
— 95163.7	+ 101402.6	Levern	5
— 95325.2	— 10703.8	Arpke	3
— 95422.9	+ 56073.5	Wiedensahl	9
— 95438.3	— 25651.4	Oehlerse	3
— 95460.3	— 5673.3	Immenser Berg	3
— 95548.8	— 21728.5	Edemissen	1
— 95671.7	+ 129586.2	Lange Egge I	6
— 95776.6	+ 151488.3	Recke stumpfer Thurm	5
— 95866.8	+ 130369.2	Lange Egge II	6
— 95922.7	+ 151559.6	Recke spitzer Thurm	5
— 96115.9	— 13753.8	Flietsheide	3
— 96230.6	+ 131346.2	Lange Egge III	6
— 96357.4	— 8425.2	Immensen	3
— 96454.2	— 18257.7	Viesenberg Platz 1	3
— 96486.7	+ 46075.7	Sachsenhagen Schloss	9
— 96572.5	— 12228.2	Einzelne Eiche	3
— 96668.3	— 18005.6	Viesenberg Platz 2	3
— 96669.0	— 17989.2	Viesenberg Platz 3	3
— 96744.0	+ 23593.5	Seelze	1
— 96753.2	+ 46136.9	Sachsenhagen Kirche	9
— 96818.7	+ 120838.5	Venne	6
— 97173.8	+ 128066.4	Engter	5
— 97660.1	— 16530.8	Dolbergen	3
— 97665.0	+ 159219.1	Hopsten	5
— 97870.6	— 2911.6	Steinwedel	1
— 98062.3	+ 124221.4	Kalkrieserberg	6
— 98222.0	— 200023.2	Denenkamp	5
— 98425.7	+ 9814.5	Bothfeld	1
— 98437.8	— 31192.1	Hillerse	3
— 98583.0	— 50666.8	Sülfeld	7
— 98620.8	— 19098.7	Eddesse	3
— 98624.3	+ 46562.2	Bergkirchen Thurm 1838	11
— 98626.2	+ 46562.4	Bergkirchen Thurm 1833	9

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 99062.546	+ 47441.676	*Bergkirchen Signal*	9
— 99127.7	+ 46129.0	?	1
— 99166.3	— 39800.9	Rötgersbüttel	7
— 99203.760	— 52682.662	Fallersleben	7
— 99272.1	+ 93557.7	Windheim	9
— 99336.399	+ 39355.304	Tienberg	9
— 99656.6	+ 106281.3	Schapen katholische Kirche	5
— 99660.1	+ 133576.0	Bramsche	5
— 99998.7	+ 34951.7	Wunstorf Marktthurm	11
— 100048.3	+ 34811.0	Wunstorf Stift 1833	9
— 100048.5	+ 34812.4	Wunstorf Stift 1838	11 (1)
— 100351.4	+ 29672.6	Ricklingen	1
— 100484.0	+ 192185.1	Brandlecht	5
— 100618.4	— 38484.4	Ribbesbüttel	7
— 100725.3	+ 162716.4	Schapen reformirte Kirche	5
— 101006.6	+ 123681.4	Barenau	6
— 101202.8	— 43147.3	Isenbüttel	7
— 101343.6	+ 143187.8	Neuenkirchen im Hülsen	5
— 101351.8	— 33666.8	Leiferde	3
— 101384.6	+ 40669.5	Altenhagen	9
— 101450.4	— 490.5	Moormühle	11
— 101480.6	+ 90408.0	Rahden	5
— 101678.5	— 58253.3	Wolfsburg	7
— 101738.8	+ 27639.0	Horst	11
— 101954.2	+ 2978.1	Kirchhorst	1
— 102104.6	— 4332.3	Burgdorf	1
— 102166.2	+ 207252.6	Otmarsum	5
— 102212.7	+ 19578.6	Engelbostel	11 (1)
— 102255.3	+ 13763.9	Langenhagen	1
— 102492.4	+ 113348.0	Hunteburg stumpfer Thurm	5
— 102582.8	+ 149435.1	Voltlage	5
— 102724.0	+ 113399.3	Hunteburg spitzer Thurm	5
— 102753.219	— 31555.355	WolenbergPostament	7
— 102753.813	— 31556.860	Wolenberg Signal	7
— 103905.0	+ 108592.0	Dielingen	5
— 103064.8	+ 53850.25	Loceum	9 (5)
— 103398.3	— 5274.8	Windmühle bei Sorgensen	11
— 103557.4	+ 130591.7	Malgarten	5
— 103611.0	+ 113331.8	Streithorst	5
— 103663.5	+ 24623.0	Osterwald	11
— 103699.4	+ 8605.2	Iserenhagen	11 (1)
— 103803.9	+ 166240.6	Beesten	5
— 103865.3	+ 74367.9	Warmsen	5
— 104219.7	— 17797.0	Utze	11 (1)
— 104378.5	+ 140567.9	Uffeln	5
— 104479.2	+ 69998.1	Jenhorst Pfahl	5
— 104670.3	+ 195316.0	Nordhorn	5
— 105174.0	+ 3839.7	Windmühle	11
— 105525.0	+ 48535.9	Rehburg	9 (5)
— 105604.9	— 27591.3	Meinersen Th. C.	7 (1)
— 105685.7	+ 106390.9	Lemförde	5
— 105773.5	+ 126636.7	Bernhardshöhe	6
— 106282.5	+ 70773.9	Uchterhöfen Pfahl	5
— 106335.1	+ 175209.6	Bramsche bei Freren	5
— 106517.9	+ 125871.9	Vörden Windmühle	6
— 106620.6	+ 71759.2	Helsinghausen Pfahl	5
— 106629.212	— 234192.162	Mariendorf	1
— 106956.534	— 40946.784	Gifhorn Kirchthurm Centrum	7
— 107044.0	+ 197350.3	Frenswegen	5
— 107079.1	— 41091.9	Gifhorn Schlossthurm	7
— 107147.6	+ 5943.9	Burgwedel	11 (1)
— 107211.3	+ 125571.1	Vörden Thurm	6 (5?)
— 107346.6	+ 168606.0	Messingen	5
— 107384.3	— 24703.2	Paese	7 (3)
— 107575.0	+ 143528.2	Merzen	5
— 108435.9	+ 70005.7	Uchter Lohmühle	5
— 108641.3	+ 64996.5	Nenndorf	5
— 108666.4	+ 32689.2	Neustadt am Rübenberge 1838	11 (1)
— 108667.3	+ 32687.5	Neustadt am Rübenberge 1833	9
— 108981.6	+ 56320.3	Leese	5
— 109129.937	+ 639.143	*Osterberg*	11
— 109281.9	+ 1419.5	Wetmar	11
— 109868.1	+ 1267.6	Freren	5
— 109966.5	+ 135172.2	Alfhausen	5
— 109980.4	+ 70149.0	Richteberg	5
— 110141.0	+ 106188.5	Burlage	5
— 110253.6	— 28958.4	Diekhorst	7
— 110778.3	+ 12605.7	Bissendorf	11 (1?)
— 110788.347	+ 125065.975	*Pavillon bei Neuenkirchen Theodolith*	5
— 110790.531	+ 125062.329	Pavillon Centrum	5
— 110936.1	+ 166534.3	Thuine	5
— 110950.9	+ 127330.1	Neuenkirchen bei Vörden	5
— 111020.199	— 56285.434	Barwede Postament	7
— 111021.385	— 56285.345	Barwede Signal	7
— 111023.7	— 28207.8	Müden	7
— 111397.0	+ 78122.2	Eikloh Pfahl	5
— 111666.5	+ 78793.6	Eikloh Baum-Bräutigam	5
— 111870.8	+ 118455.6	Damme	5
— 111987.0	+ 207468.6	Ulsen	5
— 112069.6	+ 202119.3	Neuenhaus	5
— 112271.8	+ 69441.2	Holloh bei Mensinghausen Pfahl	5
— 112289.2	+ 154098.0	Fürstenau	5
— 112459.9	+ 179737.3	Schepsdorf	5
— 112526.435	+ 15232.945	*Nebenplatz* 1838	11
— 112875.0	+ 79503.0	Hesploh Birke	5
— 112944.089	+ 165495.831	*Windmühlenberg Signal*	5

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 112944.658	+165497.349	*Windmühlenberg Theodolithplatz*	
— 113201.8	+ 14277.4	Mellendorf	5
— 113371.593	+ 72293.738	Rauhbuschberg	11
— 113697.2	+200133.9	Velthausen	5
— 113738.3	+190625.1	Wietmarschen	5
— 113758.1	+ 29750.8	Basse	5
— 113844.2	+178279.1	Lingen Rathhaus	11(12)
— 113896.884	+ 14817.4	*Kakelberg*	5
— 113953.1	+178321.0	Lingen lutherische Kirche	11
— 114112.108	+ 37726.256	*Eckberg*	5
— 114187.5	+ 17719.4	Brelingen	11
— 114422.0	— 23437.1	Langlingen	11(12)
— 114471.910	—234565.453	Berlin Jerusalemskirche	7
— 114573.8	+ 92176.4	Wagenfeld	1
— 114710.274	+148300.732	*Quekenberg Standpunkt*	5
— 114710.411	+148300.682	*Quekenberg Signal Centrum*	6 (5)
— 114734.3	+ 30933.7	Mariensee	6 (5)
— 114774.289	—137851.779	Tangermünde	11 (1)
— 114870.1	+140665.7	Ancum	1
— 114958.2	+ 77001.8	Stellich bei Holthusen	5
— 114972.020	+ 39208.036	*Heimberg*	5
— 114993.0	+ 55863.0	Landesbergen	9
— 115363.335	+117156.496	*Mordkuhlenberg Signal*	5
— 115363.486	+117156.525	*Mordkuhlenberg Standpunkt*	6 (5)
— 115384.4	+ 69641.2	Woltringhausen	6 (5)
— 115709.8	+ 46866.2	Husum	5
— 115788.555	—234068.597	Berlin Sternwarte (alte)	9
— 116012.317	—235099.772	Berlin Marienthurm	1
— 116093.9	+135147.9	Berssenbrück	1
— 116165.4	+148860.4	Steinberg	5
— 116248.1	+ 61415.6	Steierberg	6
— 116374.663	+ 17860.071	*Brelingerberg*	5
— 116299.3	+ 73054.7	Kuppendorfer Windmühle	11 (1)
— 116759.7	+163445.5	Lengerich	5
— 117084.074	— 16442.932	Wienhausen	5
— 117243.1	+ 78712.2	Allerhoop	1
— 117302.184	+ 73520.620	*Knickberg*	5
— 117350.668	—221325.375	Spandau	6(5.9)
— 117860.3	+ 24295.2	Helstorf	1
— 118100.286	+ 94291.582	*Quellenberg Standpunkt*	11
— 118100.868	+ 94291.879	*Quellenberg Stange*	5
— 118225.6	— 29037.0	Hohne	5
— 118338.5	+ 54390.6	Eistorf	7
— 118438.6	+131259.0	Gehrde	5
— 118975.9	— 91853.1	Zichtow Signal	5
— 119128.9	+117004.3	Steinfeld	7
— 119260.438	+ 25180.496	Mandelsloh	5
— 119335.9	— 5685.5	Anderten's Hof	11 (1)
— 119422.5	+149468.3	Bippen	11
— 119462.0	+ 75173.1	Kirchdorf	6
— 119785.5	+ 57340.1	Liebenau	5
— 120088.8	+ 76790.4	Hollenberg	5
— 120451.184	+ 63156.754	Heidenberg	5
— 120809.4	+106406.6	Diepholz Schlossthurm	5
— 120952.7	+106484.9	Diepholz Laternenthurm	5
— 121643.4	+ 54685.5	Bünnen	5
— 121672.3	— 42142.2	Wahrenholz Windmühle	7
— 121842.246	— 9118.245	Celle Schloss, südwestliche Kuppel	11 (1)
— 121853.269	— 9165.563	Celle Schloss, südöstlicher Pavillon	11
— 121866.539	— 9114.015	Celle Schloss, Uhrthurm Spitze	11 (1)
— 121866.604	— 9114.015	Celle Schloss, Uhrthurm Theodolithplatz	11
— 121888.346	— 9101.063	Celle Schloss, nordöstliche Kuppel	11 (1)
— 121931.288	— 9338.799	*Celle Stadtkirche Spitze*	11 (1)
— 121931.352	— 9338.549	*Celle Stadtkirche Theodolithplatz*	11
— 122056.953	+ 46754.342	*Osterberg*	9
— 122078.4	+106494.8	Diepholz Capelle	5
— 122169.3	+ 74720.2	Barenburg	5
— 122213.5	+171338.7	Bawinkel	5
— 122252.7	+ 82040.4	Varrel	5
— 122452.576	— 9363.002	Celle Garnisonkirche, südl. Giebelkreuz	5
— 122556.576	— 9106.274	vor Celle, Nebenplatz bei BierwirthsGart.	11
— 123486.1	— 35602.8	Meilenstein	11
— 123768.4	+ 49854.1	Nienburg Kirche	7
— 123769.8	+ 49930.9	Nienburg Rathhaus	9
— 123872.0	+128960.8	Bergen	9
— 123920.531	+ 24709.702	Stöcken	5
— 124122.1	— 35394.9	bei Gross Oesingen Standpunkt 2	11
— 124338.5	— 35798.1	bei Gross Oesingen Standpunkt 1	5
— 124543.320	— 35373.452	Gross Oesingen	7
— 124752.258	+132781.895	Badbergen	7
— 125440.866	+183267.112	*Kirchhesepe Standpunkt 2*	5
— 125441.463	+183265.532	*Kirchhesepe Standpunkt 1*	6 (5)
— 125441.942	+183265.833	*Kirchhesepe Centrum*	6 (5)
— 125612.2	+151156.2	Kreuzberg	6 (5)
— 125703.0	+ 37431.8	Steimke	6
— 125867.420	— 13888.769	*Garssen*	11
— 125937.4	+102721.1	Jacobi Drebber	1
— 126372.9	+103583.2	Marien Drebber	5
— 127098.552	+195226.376	Twist	5
— 127311.0	+ 53351.1	Loh	5
— 127382.4	+ 65744.4	Börstel	9

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 127527.9	+123102.8	Dinklage	5
— 127862.5	+115390.8	Lohne	5
— 127886.8	+ 48387.5	Holtorf	9
— 128072.979	+ 22156.433	Schwarmstedt	11
— 128078.6	+ 28439.9	Süderbruch	11
— 128135.0	+ 2493.4	Winsen	11 (1)
— 128258.6	— 51494.0	Knesebeck Kirche	7
— 128427.5	— 51666.6	Knesebeck Amthaus	7
— 128980.2	+ 77257.8	Sulingen	5
— 129050.9	+ 49462.6	Drakenburg	5
— 129501.2	+134280.1	Quackenbrück katholische Kirche	9
— 129661.5	+134435.0	Quackenbrück grosser Thurm	5
— 129720.4	— 43737.3	Oerrel	5
— 129770.4	+143796.4	Menslage	7
— 130116.7	+ 23248.9	Bothmer	5
— 130120.7	+166212.7	Haselünne	11
— 130451.3	— 58528.0	Ohrdorf	5
— 130909.840	+ 25089.202	Gilten	7
— 131397.6	+ 76666.8	Sulinger Windmühle	11
— 131597.5	+ 70706.7	Mellinghausen	5
— 132435.3	+179253.3	Meppen Pfarrkirche	5
— 132604.4	+ 97312.2	Barnstorf	5
— 132622.0	+179154.5	Meppen Residenzkirche	5
— 132638.2	+ 51158.4	Balge	5
— 133050.4	+175527.1	Bokeloh	9
— 133168.0	— 43050.1	Nebenplatz bei Hankensbüttel	5
— 133210.7	+ 65071.2	Stadthorst	7
— 133361.111	— 43253.191	*Hankensbüttel Postament*	5
— 133362.067	— 43250.955	Hankensbüttel Signal, von Norden her bestimmt	7
— 133362.197	— 43252.547	Hankensbüttel Signal, von Süden her bestimmt	7
— 133392.348	— 21418.103	*Scharnhorst*	7
— 133417.9	— 45721.2	Isenhagen	1
— 133532.7	— 44087.7	Hankensbüttel Nebenplatz 2	7
— 133809.5	— 53913.8	Wittingen	7
— 134002.5	— 20105.7	Eschede	7
— 134009.5	— 44575.6	HankensbüttelThurm	1
— 134143.5	+135340.7	Essen	7
— 134237.4	— 51296.0	Darrigsdorf	5
— 134561.7	+111861.7	Vechta Franciskanerkirche	7
— 134654.4	+111995.9	Vechta Pfarrkirche	5
— 135103.7	+ 75072.9	Schwaförden	5
— 135521.4	+ 79406.6	Scholen	5
— 135594.2	— 8986.9	Winterfeld	5
— 135791.5	+ 84234.0	Schmalförden	5
— 136070.8	+110090.6	Oyte	5
— 136140.4	— 43894.9	Pfalz bei Wittendorf	5
— 136234.0	+147503.7	Löningen	7
— 136603.0	— 63040.0	Diesdorf	5
— 136653.613	+ 5682.298	Hingstberg	7
— 136749.2	+ 23814.3	Hudemühlen	11
— 137062.062	+ 26133.232	Ahlden	11
— 137124.2	— 92783.1	Zierau	11
— 137743.9	— 91493.6	Jeggeleben	7
— 137821.1	— 37030.6	Sprakensehl	7
— 138455.3	— 97085.1	Kleiner Laternenthurm (Luge?)	7
— 138674.292	+ 63178.094	*Asendorf, Standpunkt*	6 (5)
— 138674.919	+ 63178.041	*Asendorf Centrum*	6(1.5)
— 138745.1	+ 14940.3	Ostenholz	11
— 139008.0	+ 49637.8	Eistrup	9
— 139127.1	+ 94008.9	Heiligenloh	5
— 139169.6	+ 82568.5	Goddern	5
— 139288.4	+ 80585.1	Neuenkirchen	5
— 139538.230	+ 54838.901	Bücken	5 (1)
— 139631.194	+ 35777.254	Kirchwahlingen	11
— 140097.4	+ 37734.2	Rethem	11
— 140099.4	+184210.6	Wesuwe	6 (5)
— 140581.9	+ 85860.3	Hünenburg	5
— 140883.1	+ 80247.9	Spradau	5
— 141030.9	— 94266.0	Ladekathe	7
— 141150.5	+123921.0	Langfarden	5
— 141179.6	+166337.7	Berssen Windmühle	5
— 141372.5	+ 79302.4	Nienstedt	5
— 141579.6	+ 74287.3	Südwalde	5
— 141758.3	+ 11938.4	Hambergbaum	11
— 141799.8	— 97503.5	Callehne	7
— 142250.951	+ 87900.139	*Twistringen Standpunkt*	6 (5)
— 142251.446	+ 87900.521	*Twistringen Centrum*	6(1.5)
— 142357.7	+ 84421.9	Stelle	5
— 142478.4	— 1315.1	Bergen	11 (1)
— 142623.827	+ 18675.853	*Hingstberg 2*	11
— 142706.2	—105830.3	Kleinau	7
— 142917.8	— 48974.7	Lüder	7
— 142938.4	+140203.3	Lastrup	5
— 143156.4	+ 76410.2	Halstedt	5
— 143265.4	— 77260.7	Everdorf	7
— 143795.2	+ 79320.0	Waldheide	7
— 143807.3	— 60641.2	Bonsee	5
— 143891.2	+ 80758.3	Apelstedt	7
— 144424.386	+ 18945.766	Nebenplatz bei Bockhorn	5
— 144611.129	— 21548.543	*Breithorn*	11
— 144632.316	+ 30452.982	Kirchboizen	1
— 144703.8	+ 83724.1	Klüvenhausen	11
— 144857.8	— 92652.4	Klein Garz	5
— 144879.110	+169311.034	Höhe bei Stavern Theodolithplatz	7
— 144883.0	+ 21046.4	Düshorn	5
— 145283.5	— 83212.1	Krichelsdorf	11
— 145332.2	+ 86061.3	Gross Ringmer	7
— 145344.5	— 49740.4	Bodenteich	5
— 145528.8	— 97756.9	Schernikau	7
— 145961.9	— 71875.1	Osterwohle	7
— 146021.040	+ 5142.567	*Falkenberg Postament* 1822. 1824	7

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 146621.055	+ 5142.634	Falkenberg Theodolithplatz von 1838	11
— 146621.421	+ 5141.523	Falkenberg Signal von 1838	11
— 146633.3	+ 84226.3	Hahn	5
— 146706.1	+ 55229.2	Wechold	1
— 146795.5	+110046.3	Visbeck	5
— 147170.3	+ 82144.8	Bassum	5
— 147226.7	—113724.4	Bretsche	7
— 147248.0	+ 78395.6	Osterbinde	5
— 147616.9	+ 88544.9	Klein Ringmer	5
— 147657.9	— 81255.2	Salzwedel Marienthurm	7
— 147723.0	— 81423.4	Salzwedel Altstädter Thurm	7
— 147737.1	+ 79242.9	Karrenbrock	5
— 147893.3	— 81553.7	Salzwedel Rathhaus	7
— 147940.521	+128491.392	Krapendorf	6 (5)
— 148006.374	— 16239.866	*Hauselberg*	1
— 148039.910	— 58241.686	Puglatz Signal	7
— 148054.6	— 81577.2	Salzwedel Mönchsthurm	7
— 148305.1	+ 23350.4	Walsrode	11
— 148350.5	— 81697.2	Salzwedel Neustadt	7
— 148418.6	— 86820.8	Gross Chüden	7
— 148661.0	— 89731.0	Riebau	7
— 148667.0	— 44235.6	Steinberg	7
— 148689.2	+145591.0	Lindern	5
— 148774.5	+163222.4	Sögel Thurm	6 (5)
— 149153.5	+ 85003.5	Gross Henstedt	5
— 149270.4	+ 81854.8	Chausséehaus Schornstein	5
— 149287.153	— 46436.701	*Wieren Signal*	7
— 149298.6	+ 4863.9	Erhöheter Baum im Becklinger Holz	1
— 149868.4	+ 54132.9	Eizendorf	1
— 149888.0	+163268.7	Sögel Windmühle	5
— 149942.1	—109714.1	Leppin	7
— 149994.0	+ 52007.2	Magelsen	1
— 150002.0	+150138.0	Molbergen	5
— 150075.6	+ 82077.5	Hassel	5
— 150118.6	+ 58949.2	Mattfeld	1
— 150244.0	— 94546.5	Mechau	7
— 150365.580	— 36550.624	Holxerberg Signal	7
— 150366.695	— 36550.632	Holxerberg Postament	7
— 150567.1	— 75728.1	Cheine	7
— 150663.6	— 43170.1	Nettelkamp	7
— 150829.3	+ 72072.6	Heiligenfelde	5 (1)
— 151122.8	— 48247.8	Wieren Thurm	7
— 151514.8	— 97572.0	Kaulitz	7
— 151583.4	+177183.0	Lathen Thurm	5
— 151598.0	— 103361.1	Arendsee Ruine	7
— 151608.4	— 103285.1	Arendsee (abg. Th.)	7
— 151806.6	— 103333.7	Arendsee stumpfer Thurm	7
— 151997.4	— 34286.2	Suderburg	7
— 152014.4	+175885.6	Lathen Windmühle	5
— 152019.9	— 68345.2	Bergen	7
— 152120.7	— 64019.0	Schnega kleiner Lattermenthurm	7
— 152137.5	— 63940.7	Schnega Kirchthurm	7
— 152977.4	— 42221.1	Wrestedt	7
— 153023.0	—121879.0	Seehausen	7
— 153045.029	+162445.515	*Windberg* 1830	6 (5)
— 153188.0	— 33859.3	bei Suderburg	7
— 153188.2	+146170.3	Vrees	6
— 153246.5	— 91732.4	Prezier	7
— 153630.2	+ 81986.5	Stuhren	5
— 153786.5	— 90111.8	Hohekirche	7
— 153792.7	+193070.4	Ter Apel	6
— 153809.5	+ 81259.8	Nordwohlde	5
— 153933.0	— 48756.7	Emern	7
— 154619.9	— 3725.3	Wiezendorf	1
— 154643.1	— 38736.7	Holdenstedt	7
— 154729.249	+ 48060.476	Verden Dom	1
— 155251.1	— 93572.8	Schmarsau	7
— 155352.245	+ 48081.208	Verden Johannis	1
— 155779.6	— 84957.3	Rebensdorf	7
— 155861.301	64312.030	Starrel Signal	7
— 155886.5	— 55638.5	Suhlenburg	7
— 155886.832	+ 54287.893	Blender	1
— 156016.2	— 79192.2	Wustrow	7
— 156293.6	— 72744.5	Bühlitz	7
— 156371.9	— 74373.7	Luckau	7
— 156769.3	— 68039.3	Glenze	7
— 157842.5	— 68848.7	Büssauer Berg	7
— 157849.9	+154836.3	Lorup	6
— 157911.4	— 87935.2	bei Lichtenberg	7
— 157950.2	— 41887.1	Königsberg	7
— 157956.9	— 83784.4	Bösel	7
— 158152.2	— 71933.3	Zeetze	7
— 158177.3	— 64888.7	Klamitzberg	7
— 158532.4	— 86746.9	Woltersdorf	7
— 158590.5	+177559.7	Steinbild	6 (5)
— 158592.2	— 97830.9	Lohmitz	7
— 158679.057	— 88083.451	Thürow Postament	7
— 158679.355	— 88086.373	Thürow Signal	7
— 158946.0	+ 54120.0	Intschede	1
— 158996.9	— 40304.0	Veerssen	7
— 159173.4	— 44515.4	Gross Liedern	7
— 159188.5	— 48704.5	Hanstedt	7
— 159365.3	— 77426.7	Satemin	7
— 159397.3	— 70206.6	Büssau	7
— 159757.3	— 75508.7	Meuchefitz	7
— 159975.7	— 41413.6	Uelzen	7
— 160072.9	— 93521.4	Lanze	7
— 160215.7	— 31969.9	Gerdau	7
— 160335.3	— 98094.0	Prezelle	7
— 160568.6	+ 60149.8	Lunsen	1
— 160630.8	— 81488.0	Lüchow Schloss	7
— 160662.6	— 81583.7	Lüchow Kirchthurm	7
— 160720.2	— 84088.0	Colborn	7
— 160772.6	— 81481.2	Lüchow Rathhaus	7
— 160811.9	— 43488.4	Oldenstadt	7
— 161305.0	— 49037.5	Retzlingen	7
— 161691.7	— 75396.6	Küsten	7
— 162065.3	— 10127.5	Munster	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 162237.2	— 80222.3	Plate	7
— 162474.5	— 54415.7	Rosche	7
— 163054.915	+ 20595.877	*Elmhorst*	1
— 163482.0	— 71534.2	Zebelin	7
— 163542.9	— 67123.1	Dommatz Windmühle	7
— 163594.034	+ 44884.912	*Steinberg*	1
— 163595.7	+ 71527.7	Kirchweihe	1
— 163790.2	— 47574.7	Riestedt	7
— 163833.7	—107635.7	Böhmenzien	7
— 164100.1	— 92239.0	Trebell	7
— 164151.3	— 39667.3	Kirchweihe	7
— 164191.3	—111647.9	Gross Wanzer	7
— 164225.4	—109812.2	Aulosen	7
— 164475.3	— 44682.2	Molzen	7
— 165412.1	+ 61262.7	Achim	1
— 165663.3	— 74069.0	Crumasel	7
— 166240.369	+ 36851.244	Kirchwalsede	1
— 167135.5	—106443.9	Capern	7
— 167200.4	— 31497.4	Ebstorf	7
— 167365.3	— 23864.3	Wriedel	7
— 167487.6	—102223.1	Gartow	7
— 167488.1	+177697.1	Heede	6
— 168070.6	+139838.8	Frisoythe	6
— 168158.341	+ 44014.670	*Bottel*	1
— 168285.6	+ 93686.8	Ganderkesee	1
— 168491.9	+ 68805.6	Arbergen	1
— 168498.6	—105154.0	Holtorf	7
— 168674.2	— 75038.6	Bresolenz	7
— 169092.114	— 64845.685	*Spranze Signal*	7
— 169117.0	—108832.7	Schnakenburg	7
— 169149.5	+138712.4	Oldenoythe	6
— 169497.677	— 35760.051	Hohenbunstorf Signal	7
— 169504.1	— 38435.9	Barum	7
— 169626.902	— 40177.793	Tätendorf Signal	7
— 169632.2	— 75984.9	Meetschow	7
— 169672.9	— 62645.2	Gülden	7
— 169998.3	— 94982.9	Gorleben	7
— 170075.2	— 58468.8	bei Hohen Zethen	7
— 170111.8	+ 87995.1	Delmenhorst	1
— 170322.2	— 76994.0	Breese im Bruch	7
— 170809.0	— 62566.0	bei Timmeitz	7
— 170871.1	+ 42239.2	Ahausen	1
— 171065.097	+194444.687	*Onstwedde*	6
— 171114.8	— 40822.7	am Lohnholz	7
— 171376.5	— 39978.2	Mollenberg	7
— 171465.593	— 19895.232	*Wulfsode*	1
— 171624.4	— 39571.1	Chausséehaus	7
— 171657.3	— 99622.5	Hobeck Nebenplatz	7
— 172327.9	— 36817.7	Freitagsberg	7
— 172394.8	+175161.9	Aschendorf Klosterkirche	6 (5)
— 172480.450	+ 75732.652	Bremen Zwinger	1
— 172512.986	—100488.736	*Hobeck Signal*	7
— 172534.738	+ 76039.777	Bremen katholische Kirche	1
— 172542.5	— 93137.5	Kiez	7
— 172680.233	+ 75884.090	Olbers Observationszimmer	1
— 172684.7	— 70301.9	Spitzberg	7
— 172704.0	+175090.0	Aschendorf Pfarrkirche	6 (5)
— 172708.766	+ 76313.195	Bremen Martini	1
— 172752.009	+ 76017.343	Bremen Domkirche Thurm	1
— 172815.860	+ 75931.494	Bremen Domshof	1
— 172855.1	— 42776.2	Bevensen	7
— 172863.7	— 35028.6	Natendorf	7
— 172867.813	+ 76090.644	Bremen, Unsrer lieben Frauen	1
— 172976.849	+ 76016.811	Bremen Gymnasium	1
— 173058.7	+ 75387.8	Bremen Remberti	1
— 173074.743	+ 76350.938	*Bremen Ansgarius Dreieckspunkt*	1
— 173074.764	+ 76350.909	*Bremen Ansgarius Wahres Centrum des Knopfes*	1
— 173252.563	+ 76112.469	Bremen Wall am Heerdenthore	1
— 173340.866	+ 76992.613	Bremen Stephani	1
— 173475.5	+178854.0	Rhede	6 (5)
— 173522.5	— 98147.1	Möthlich	7
— 173834.4	—122394.2	Dergentin	7
— 173993.439	— 85935.124	Gusborn Postament	7
— 173993.513	— 85935.834	Gusborn Signal	7
— 174006.6	—128564.7	Perleberg	7
— 174159.0	— 41722.1	Kl. Medingen	7
— 174234.6	—124648.1	Sückow	7
— 174269.5	— 63120.6	Ribrau	7
— 174343.872	+ 27991.260	Brokel	1
— 174400.4	— 52652.4	Himbergen	7
— 174729.5	+167611.9	Papenburg obere Kirche	6
— 174861.6	—102794.0	Lenzen stumpfer Thurm	7
— 174938.7	—102667.2	Lenzen spitzer Thurm	7
— 175051.9	— 76789.1	Dannenberg Cap. 2	7
— 175410.2	— 77374.9	Dannenberg Amtsthurm	7
— 175436.3	— 77265.1	Dannenberg Kirchth.	7
— 175533.6	+170901.4	Papenburg Pfarrkirche	6
— 175721.5	—112325.8	Lanz	7
— 175788.2	— 77813.5	Dannenberg Cap.	7
— 175915.5	— 87883.2	Langendorf	7
— 176027.296	+ 35985.340	Rotenburg	1
— 176384.4	— 83887.2	Quickborn	7
— 176526.0	— 70563.1	Parpar	7
— 176641.9	—125646.1	Quitzow	7
— 176735.2	— 99305.8	Seedorf	7
— 176769.703	+ 10407.337	Schneverdingen	1
— 176948.6	+ 47782.9	Sottrum	1
— 177194.8	—100120.3	Eldenburg	7
— 177253.420	— 21852.221	*Timpenberg*	1
— 177907.2	—119210.2	Laaslich	7
— 178518.2	— 43974.4	Alt Medingen (spitzes Dach?)	7 (1)
— 178519.1	— 43989.1	Alt Medingen stumpfes Dach	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 178756.4	— 120322.1	Nebelin	7
— 178947.9	+ 171303.2	Völlen	6
— 179141.3	— 24772.1	Bäzendorf	1
— 179671.9	— 36683.8	Bienenbüttel	7
— 179971.2	+ 69027.4	Lilienthal	1
— 180028.8	+ 152321.4	Strucklingen	6
— 180162.361	— 22894.019	*Nindorf*	1
— 180316.0	— 87433.1	Dömitz Kirchthurm	7
— 180373.2	— 87225.7	Dömitz Festungsthurm	7
— 180462.083	+ 115530.100	Oldenburg	1
— 181197.5	— 74000.6	Hitzacker	7
— 181489.1	— 73380.3	Meesenberg	7
— 181531.2	+ 148028.2	Westerrauderveehn	6
— 181819.664	+ 35400.829	*Bullerberg*	1
— 181953.6	+ 175396.6	Stapelmoor	6
— 182381.889	+ 210.397	*Wilsede*	1
— 182572.1	+ 167190.0	Gross Wolde	6
— 182691.539	+ 30807.000	Schessel	1
— 183229.8	— 14628.0	Raven	1
— 183472.0	— 58227.0	Nahrendorf	7
— 183545.1	— 26743.8	Embsen	7
— 183835.9	+ 88347.4	Vegesack	1
— 184279.0	+ 161500.0	Collinghorst	6
— 184718.6	— 77834.7	Tribbekau	7
— 184789.7	— 55422.1	Dahlenburg	7
— 184829.394	+ 147139.369	Bassel	6
— 185194.0	+ 97965.2	Berne	1
— 185285.2	+ 166441.4	Irhove	6
— 185288.0	+ 173018.7	Weener gross. Thurm	6
— 185297.5	+ 173099.4	Weener klein. Thurm	6
— 185484.9	— 47867.5	Sommerbeck	7
— 185490.8	— 101402.9	Gorlosen	7
— 185815.824	+ 56897.921	Wilstedt	1
— 185885.2	— 73562.4	Caarssen	7
— 186092.8	+ 170057.9	Grotegaste	6
— 186376.4	+ 129542.6	Zwischenahn	6
— 186959.0	+ 190275.3	de Beerte	6
— 187533.0	+ 161793.4	Bakemoor	6
— 187641.574	— 65399.907	*Glienitz Signal*	7
— 187657.5	+ 178860.2	Bunde	6
— 187713.3	+ 198633.4	Schemda	6
— 188383.7	+ 168666.3	Gross Driver	6
— 188766.844	+ 68138.613	Worpswede	1
— 188883.5	— 15151.8	Salzhausen	1
— 189022.6	+ 169632.8	Kirchborgum	6
— 189300.6	+ 75524.1	Osterholz	1
— 189340.9	+ 174238.0	Wenigermohr	6
— 189452.7	+ 189864.1	Finserwolde	6
— 189484.5	— 92805.4	Conow	7
— 189680.1	— 47770.6	Thomasburg	7
— 189917.9	— 42015.8	Reinstorf	7
— 190124.4	+ 142734.8	Apen	6
— 190130.0	— 99139.6	Eldena	7
— 190137.3	+ 167107.1	Esklum	6
— 190306.1	+ 160911.7	Amdorp	6
— 190464.3	+ 153594.7	Stickhausen	6
— 190748.6	+ 112008.5	Loyerberg Windmühle	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 190821.497	+ 95395.259	Neuenkirchen	1
— 191086.7	— 56225.6	Barskamp	7
— 191173.034	— 30682.457	Lüneburg Lamberti	1
— 191229.471	— 30851.899	Lüneburg Heiliger Geist	1
— 191379.0	— 49592.7	Bargmoor	7
— 191406.221	— 31356.505	Lüneburg Johannis	1
— 191498.1$_4$	+ 168950.8	Bingum	6
— 191511.038	— 30282.895	Lüneburg Kalkberg Platz von 1823	1
— 191531.9	— 30298.3	Lüneburg Kalkberg Platz von 1830	7
— 191597.289	— 30574.411	*Lüneburg Michaelis*	1 (7)
— 191686.464	— 31027.825	Lüneburg Rathhaus	1
— 191823.370	+ 166412.554	Leer Waage	6
— 191845.443	— 31169.785	Lüneburg Nicolai	1
— 191882.273	— 30367.793	Lüneburg Platz vor dem Thore	1
— 191946.373	+ 166653.435	Leer luther. Kirche	6
— 192026.320	+ 166570.987	Leer kathol. Kirche	6
— 192086.847	+ 166481.076	*Leer reform. Kirche*	6
— 192096.210	+ 166594.099	Leer Gymnasium	6
— 192292.9	— 81854.4	Jabel	7
— 192325.3	— 67853.0	Stapel	7
— 192345.9	+ 163573.9	Loga	6
— 192362.1	+ 179758.7	Landschaftspolder	6
— 192428.324	+ 116347.889	Rastede	1
— 192568.5	+ 172211.0	Holtgast	6
— 192668.865	— 37170.020	Steinhöhe	7
— 192808.2	— 31987.4	Lüne	1
— 192896.0	+ 174460.9	Bohmerwold	6
— 192933.8	— 65345.8	Haar	7
— 192995.9	— 24951.2	Mechtersen	7
— 193260.212	— 49872.299	*Bretze Signal*	7
— 193340.040	+ 45266.609	*Brüttendorf*	1
— 193527.1	— 45281.1	Netze	7
— 193865.912	+ 81845.072	*Garlste*	1
— 194278.3	+ 208753.4	Kolham	6
— 194284.445	+ 134466.866	*Westerstede*	6
— 194428.857	+ 108898.647	Grossen Meer	1
— 194489.330	+ 29167.094	Sittensen	1
— 194984.5	+ 198240.6	Nordbrock	6
— 195288.541	+ 15609.156	Tostedt	1
— 195336.6	+ 175356.5	Mariencoer	6
— 195460.0	+ 167396.7	Nuttermoor	6
— 195718.6	+ 205474.3	Slochtersen	6
— 195776.4	— 65911.8	Neuhaus	7
— 196210.609	+ 44369.050	Zeven Platz vor dem Flecken	1
— 196281.2	— 30242.0	Rother Thurm?	1
— 196393.0	— 31089.4	Vrestorf	7
— 196504.3	— 37868.5	Scharnebeck	7
— 196711.9	— 52497.4	Bleckede	7
— 196816.805	+ 44512.505	Zeven Platz im Garten des Posthauses	1
— 196973.309	+ 44130.578	*Zeven Dreieckspunkt*	1
— 196974.329	+ 44130.289	Zeven Thurmknopf	1
— 197203.85	— 29767.06	Bardewyk Südlicher Thurm	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 197218.0	— 29765.92	Bardewyk Nordlicher Thurm	1
— 197359.5	— 60720.1	Krusendorf	7
— 197989.7	— 76044.5	Lübtheene	7
— 198168.2	+ 194521.8	Nienwolde	6
— 198179.4	+ 166095.6	Thedinga Pavillon	6
— 198500.6	+ 171409.0	KleinMidlum Grosser Thurm	6*
— 198522.0	+ 171416.1	KleinMidlum kleiner spitzer Thurm	6*
— 198743.1	+ 97098.0	Hammelwarden	1
— 198860.746	+ 74451.604	Hambergen	1
— 198913.2	+ 91148.0	Uthlede	1
— 198986.1	+ 165916.3	Veenhusen	6
— 199535.3	— 42014.0	Lüdersburg	7
— 199648.0	+ 71848.0	Jacobsberg	1
— 200747.1	+ 166739.0	Neermoor	6
— 200913.8	— 33325.2	Brietlingen	7
— 201084.6	— 30273.1	St. Dionys	7
— 201285.9	+ 173882.5	Hatzum	6*
— 201464.4	— 39239.1	Echem [abgebr. 1870]	7
— 201508.6	+ 174564.4	Ditzum	6*
— 201746.0	— 52150.2	Radegast	7
— 202233.0	— 43052.7	Hitbergen	7
— 202408.1	+ 196313.8	Opmieden	6
— 202573.2	+ 172447.1	Roriehum	6*
— 202968.9	+ 175265.9	Gandersum	6
— 202983.5	— 48542.0	Garlstorf	7
— 202987.1	+ 113500.1	Jahde	1
— 203533.477	+ 173477.408	Oldersum	12 (6)
— 203554.6	— 59055.7	Blücher	7
— 203906.2	+ 98420.6	Golzwarden	1
— 203943.733	+ 208861.897	Appingdam	12 (6)
— 204177.657	— 17424.519	Winsen	1
— 204193.7	+ 177799.7	Petkum Nadel	6*
— 204209.1	+ 177827.3	Petkum starker Th.	6*
— 204520.1	+ 179389.2	Jarssum	6*
— 204710.173	+ 94432.948	Sandstedt	13 (1)
— 204811.3	+ 61824.0	Platz beiGnarrenburg	13
— 204951.8	+ 181022.5	Gross Borssum	6*
— 205232.4	+ 83146.8	Bramstedt	13 (1)
— 205234.429	— 40976.028	Lauenburg Zenith Sector	1
— 205166.638	— 40813.884	Lauenburg Amtsthurm	1
— 205386.5	+ 181027.5	Klein Borsum kleine Spitze	6*
— 205389.1	+ 181032.2	Klein Borsum grauer dicker Thurm	6*
— 205558.573	+ 48542.994	Selsingen	14(13)
— 205784.4	— 51939.9	Boizenburg	7
— 206040.602	— 41045.727	*Lauenburg Signal* 1823	1 (7)
— 206152.8	+ 164951.4	Hatshusen	6*
— 206502.6	— 63107.4	Banzien	7
— 206518.9	— 82274.3	Warlitz	7
— 206649.8	— 75955.8	Pritzier Schloss	7
— 206866.630	+ 21895.743	*Litberg* 1823. 1824	1
— 206867.045	+ 21896.054	*Litberg* 1844	14
— 206892.831	+ 188583.951	Wibelsum	12

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 207814.1	— 57538.8	Brezien	7
— 207905.712	+ 204521.436	Holwierda	12 (6)
— 207926.4	+ 183424.4	Emden reformirte Kirche	6
— 207983.1	+ 185911.0	Larrelt	6*
— 208039.9	+ 182054.9	Emden Gasthauskirche	6
— 208050.292	+ 182119.813	*Emden Rathhausthurm (Dreiecks-punkt*	6
— 208096.3	+ 169299.6	Simonswolde II.	6
— 208107.6	+ 169267.7	Simonswolde I.	6
— 208112.862	+ 181615.631	Emden neue Kirche	6
— 208287.9	— 52202.1	Gresse sehr zweifehaft	7
— 208342.6	+ 180329.0	Wolthusen	6*
— 208657.600	+ 187011.702	Twixlum	12 (6)
— 208916.5	+ 178921.0	Uphusen	6*
— 209101.471	+ 120055.577	Varel, Lacroix' Haus, 3° Fenster	1
— 209157.9	+ 32511.3	Ahlerstedt	1
— 209430.5	+ 99192.0	Rotenkirchen	1
— 209473.921	+ 120451.600	*Varel Dreieckspunkt*	1
— 209474.103	+ 120151.596	Varel Thurmknopf	1
— 209480.851	+ 120118.579	Varel Nebenthurm	1
— 209812.3	+ 105532.5	Schwey	1
— 209914.681	+ 193447.306	Rysum	12 (6)
— 209920.394	+ 63160.149	*Brillit*	1
— 210325.8	— 16949.2	Kirchwerder	1
— 210398.6	— 21859.7	Drenhausen	1
— 210966.9	— 2138.3	Sinsdorf	1
— 210968.7	+ 10237.7	Elsdorf	1
— 211070.6	+ 172189.2	Riepe	6*
— 211079.8	+ 192770.6	Loquard	12 (6)
— 211132.3	+ 178850.3	Marienwehr	6*
— 211294.613	— 3850.827	Rönneburg Theodolithplatz	1
— 211295.104	— 3852.968	Rönneburg Pfahl	1
— 211592.9	— 21734.5	Altengamme	1
— 211715.0	— 28464.0	Gesthacht	1
— 212134.808	+ 192306.784	Campen spitz. Thurm	12 (6)
— 212147.788	+ 192324.041	Campen stumpfer Th.	12 (6)
— 212153.498	+ 21880.543	Apensen	1
— 212213.1	+ 93052 3	Büttel	13
— 212281.416	+ 2963.815	Varendorf	1
— 212374.0	— 40002.2	Luttau	1
— 212611.3	+ 131050.4	Zetel	1
— 212705.3	— 82917.8	Hagenow	7
— 212737.671	+ 16.168	Meridianpfahl der Altonaer Sternwarte	1
— 213005.8	+ 185169.5	Gross Midlum	6*
— 213171.8	— 36490.5	Gülzow	1
— 213197.7	+ 183662.1	Westerhusen	6*
— 213207.335	+ 180812.493	Suiderhusen	12 (6)
— 213240.5	— 3043.3	Wilsdorf	1
— 213296.0	— 18515.5	Neuengamme	1
— 213307.446	+ 189621.205	Wolzeden	12 (6)
— 213311.982	+ 63346.939	Basdahl Signal von 1844	14(13)
— 213313.852	+ 63343.996	*Basdahl Postament*	14(13)

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 213494.8	+169067.8	Ochtelbuhr	6*
— 213579.6	+182700.5	Hinte	6
— 213693 339	+ 61201.936	Oese	13
— 213721.8	— 74448.8	Körchow	7
— 213737.237	— 18911.784	Kurslak	1
— 214043.583	+214980.396	Uithuizer Medem	12
— 214170.1	— 31847.3	Johannwarden	1
— 214187.1	+ 95782.1	Dedesdorf	1
— 214237.022	+ 31036.188	Kortkamp	14
— 214306.492	+ 29358.444	Harsefeld	14
— 214388.315	+180200.045	Loppersum	12 (6)
— 214396.5	+175488.4	Blaukarken	6*
— 214520.078	+ 28565 173	Paaschberg	14
— 214613.850	+196111.870	Upleward	12 (6)
— 214771.6	+ 89192.6	Stotel	1
— 214805.1	+ 99852.4	Esensham	1
— 214858.2	+188047.8	Canum	6*
— 214983.291	+ 32905.642	Bargstedt	14
— 215021.8	+121663.5	Dangast Conversationshaus	1
— 215161.3	+121605.3	Dangast Badehaus	1
— 215236.334	— 2485.277	Harburg Kirchthurm	1
— 215478.35	+192170.9	Hamswehrum	12 (6)
— 215503.7	+189998.9	Woquard	12
— 215567.2	— 2731.5	Harburg Rathhaus	1
— 215634.7	+174965.3	Bedekaspel	6*
— 215805.0	+105267.3	Seefeld	1
— 215843.146	+ 30596.657	Signal bei Ohrensen	14
— 215943.064	+189164.432	Pewsum	12 (6)
— 215989.0	+184150.7	Cirkwerum	6*
— 215997.6	— 2828.6	Harburg Schloss	1
— 216198.731	+191261.429	Grothusen	12 (6)
— 216388.842	+ 29899.180	Richtplatz	14
— 216533.2	+181603.6	Canhusen	6*
— 216538.7	— 22816.1	Börnsen	1
— 216684.030	+ 16238.653	Buxtehude kleiner Thurm	14
— 216705.6	— 9434.1	Ochsenwerder	1
— 216781.593	— 28139.131	*Hohenhorn*	1
— 216845.040	+ 86020.335	Loxstedt aus den Schnitten von 1825	1
— 216846.436	+ 86021.259	Loxstedt (13 auf 14 reducirt)	14
— 216859.962	+ 86846.490	Windmühle	13
— 216868.501	+ 16083.719	Buxtehude grosser Thurm	14 (1)
— 216940.6	— 44155.1	Potrau?	7
— 217254.243	+ 60404.251	Borchel Windmühle	14
— 217342.336	+ 24861.094	Bliedersdorf	14
— 217388.937	+ 58876.873	Oerel	13
— 217391.8	— 46187.2	Büchen	7
— 217507.288	+ 20578.783	Neukloster	14
— 217677.206	+185248.517	Uttum	12 (6)
— 217963.5	— 4853.9	Wilhelmsburg	1
— 218140.4	+ 195.4	Moorburg	1
— 218196.365	— 17800.045	Bergedorf	1
— 218206.270	+ 52883.253	Bremervörde	13
— 218579.500	+191311.705	Manschlagt (dicker?) Thurm	12 (6)
— 218611.4	+191337.6	Manschlagt (spitzer?) Thurm	6
— 218660.449	+163683.335	Aurich Schlossthurm	12 (6)
— 218682.8	+100057.6	Abbehausen	1
— 218704.1	+139798.1	Neustadt Gödens Laternenthurm	1
— 218740.7	+129682.7	Lutherische Kirche in Neustadt Gödens	1
— 218810.520	+163544.715	*Aurich*	6*
— 218831.616	+ 29712.361	Grefenkreuz	14
— 218936.7	+186650.1	Jennelt	6*
— 219023.6	+ 83046.1	Bexhövede	13 (1)
— 219096.579	— 23511.744	Schragenberg	14
— 219440.5	+ 1900.1	Altenwerder	1
— 219560.3	+131289.3	Schloss Gödens	1
— 219666.783	—188833.500	Visquard	12 (6)
— 219868.1	+ 97707.4	Atens	13 (1)
— 219994.759	+186076.923	Visquard	12 (6)
— 220063.4	+ 1667.9	Altenwerder	1
— 220341.7	+ 88944.9	Wulstorf	13 (1)
— 220411.666	+ 23705.030	Horneburg	14
— 220430.386	+ 59142.456	Stallberg	13
— 220461.0	+181732.2	Wirdum dickerThurm rothe Spitze	6*
— 220466.841	+184003.878	Grimmersum	12 (6)
— 220472.5	+181708.9	Wirdum spitzer Thurm	6*
— 220530.913	+ 14210.933	Estebrügge	14 (1)
— 220667.3	— 9251.8	Moorfleth	1
— 220926.883	+ 42601.869	Mulsum	14(1, 13)
— 220933.0	— 12183.4	Billwerder	1
— 221036.7	— 16043.8	Rizerberg	1
— 221251.0	+174337.6	Engerhave	6*
— 221353.466	+191168.373	*Pilsum*	12 (6)
— 221364.1	+138124.0	Sande	1
— 221695.930	+ 8765 980	Neuenfelde	14
— 222066.510	+ 104931.793	Stolham	13 (1)
— 222072.631	+ 24300.781	Neuenkirchen	14
— 222577.1	+128052.8	Marienhausen	1
— 222791.7	— 12264.6	Steinbeck	1
— 222863.3	+ 74448.2	Alt Lunenberg	13 (1)
— 222951.304	+ 17377.129	Jork	14(1, 13)
— 223006.3	+ 31264.2	Helmste	13
— 223221.516	+ 189023.250	Gretsiel Glockenthurm	12 (6)
— 223231.918	+189034.103	Gretsiel spitzerThurm	12 (6)
— 223492.6	+ 89632.8	Gestendorf	13 (1)
— 223586.087	+ 16792.911	Borstel	14(1, 13)
— 223590.9	+ 85820.5	Windmühle	13
— 223631.7	+ 89237.2	Windmühle	13
— 223785.6	— 22328.1	Ohe	1
— 223809.5	+ 93277.2	Blexum	13 (1)
— 223843.6	+ 85384.9	Schifffdorf	13 (1)
— 224032.8	+ 26448.5	Dollern	13
— 224302.934	+ 21604.243	Mittelnkirchen	14 (1)
— 224339.3	— 2482.3	Hamburg Rose's Thurm	1
— 224452.324	+ 14.054	Altona, Meridiankreis	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 224462.4	+110939.0	Eckwarden	1
— 224495.318	+ 16.354	*Altona Brett*	1
— 224498.476	— 3397.338	Hamburg Catharinenthurm	1
— 224512.1	+122832.8	Niende	1
— 224608.034	+ 670.322	Ottensen	1
— 224643.8	— 17.8	Altona Armenkirche	1
— 224709.6	— 3090.6	Hamburg Nicolaikirche	1
— 224765.173	— 2369.933	*Hamburg Michaelis*	1 (14)
— 224772.190	— 494.487	Altona Stadtkirche	1
— 224790.8	+143262.4	Lerhave	6*
— 224890.9	— 684.7	Altona Rathhaus	1
— 224980.3	— 3382.3	Hamburg kleiner Thurm auf grossem Gebäude	1
— 224984.9	— 3553.3	Hamburg Petri	1
— 224987.4	— 3818.5	Hambnrg Jacobi	1
— 225108.574	+ 6643.094	Nienstedten	14 (1)
— 225158.1	+ 32214.8	Hagen	13
— 225219.492	+177118.852	Marienhave	12 (6)
— 225272.8	+177037.6	Marienhave Laternen oder Kuppelthurm	6*
— 225297.1	+ 37553.8	Schwinge	13
— 225545.8	+ 31878.0	Mürksberg	13
— 225602.7	— 7544.5	Ham	1
— 225624.2	+ 8381.6	Baurs chinesischer Thurm	1
— 225655.3	— 4315.9	Hamburg St. Georg	1
— 225699.5	+149405.4	Ardorf Kirche westlicher Giebel	12
— 225704.0	+ 8594.0	Baurs Warte	1
— 225721.3	+149384.9	Ardorf Glockenthurm	12
— 225854.6	+ 33366.7	Bösenmoor	13
— 225900.7	+ 82313.7	Brameln	1
— 225924.4	+128018.3	Accum	1
— 225971.0	+153895.6	Middels	12
— 226031.893	+ 9413.473	Kösterberg	14
— 226158.332	+ 22812.149	Steinkirchen	14 (1, 13)
— 226323.2	+ 37032.8	Agathenburg	13 (1)
— 226357.3	+151238.9	Hilgensteiner Windmühle	12
— 226384.016	+177606.005	Osteel	12 (6)
— 226566.5	+ 72494.6	Ringstedt	13 (1)
— 226596.380	+ 10387.618	Telegraph 6	14 (13)
— 226684.7	+125272.8	Kniphausen	1
— 226742.888	+ 10302.910	Baursberg Postament	1
— 227363.697	+ 22179.575	Grünendeich	14 (1, 13)
— 227522.1	— 8529.2	Wandsbeck	1
— 227663.375	+ 89453.894	Bremerlehe Dreiecks-punkt von 1825	1(13.14)
— 227663.471	+ 89453.766	Bremerlehe Thurmknopf	1 (13)
— 227890.1	+ 32183.1	Rienstörde	13
— 227893.828	+ 28695.134	Ottenbeck	13
— 228015.7	+ 32798.7	Thun	13
— 228037.4	+ 70676.5	Windmühle bei Haymühlen	13
— 228831.117	+ 16189.770	Wedel	14 (1, 13)
— 228839.250	+ 67813.678	Wüstewohlde	14 (13)
— 228893.4	+ 78683.7	Hartmanns Platz 1 bei Elmloh 1825	1
— 228909.0	+ 29456.7	Camper Kirchhof	13
— 228928.2	+ 78380.6	Hartmanns Platz 2 bei Elmloh 1825	1
— 228940.921	+135590.623	Platz auf dem Felde bei Jever 1825	1
— 229055.6	+104710.2	Burhave	13 (1)
— 229064.0	+ 24462.7	Bachenbruch	13
— 229101.8	+135859.2	Windmühle mit sechs Flügeln	1
— 229344.966	+135141.823	*Jever Dreieckspunkt* 1825	1
— 229345.570	+135138.149	*Jever Dreieckspunkt* 1831	6*
— 229346.226	+135135.171	Jever Centrum 1825	1
— 229346.316	+135135.135	Jever Knopf	1
— 229381.561	+ 35153.354	Lohberg	13
— 229392.658	+ 30815.096	Neuewerk	13
— 229525.455	+135282.234	Jever Stadtkirche	1
— 229559.661	+ 25482.061	Hollern	14(1.13)
— 229672.7	— 3334.5	Eppendorf	1
— 229675.022	+ 45730.111	Oldendorf	14(1.13)
— 230044.065	+143131.280	Witmund	12
— 230098.884	— 20737.025	Basis südl. Endpunkt	1
— 230160.2	— 13754.1	Rahlstedt	1
— 230397.756	+ 32787.350	Schwarzenberg	13
— 230660.608	+ 30777.067	Stade Wilhadi	13 (1)
— 230768.6	+ 37799.7	Mittelsdorf	13
— 230769.6	+ 30892.7	Stade Rathhaus	13
— 230811.570	+ 30884.599	*Stade Centrum des Thurmknopfes*	14(1.13)
— 230811.734	+ 30884.678	Stade Theodolithplatz (1843. 1844)	14 (13)
— 230813.787	+ 30882.249	Stade Platz auf der Brüstung (1843)	14
— 230833.4	+ 32581.1	Telegraph 5	13
— 230903.920	+ 25813.308	Twilenfleth	14(1.13)
— 230997.1	+ 27599.1	Kronhelm westlicher Schorstein	13
— 231094.3	+ 30827.8	Stade kleiner Thurm (Nicolai?)	13(1)
— 231213.792	+ 56230.888	*Dolosenberg*	14
— 231433.6	+125628.5	Sengwarden	1
— 231703.600	+152222.553	Radiborsberg	12
— 231855.7	+ 32000.3	Hohewedel Wache	13
— 232009.8	+ 28504.5	Melau Pappel	13
— 232096.849	+107887.366	Platz d bei Langwarden	1
— 232175.570	+108215.234	Langwarden Knopf	1
— 232175.707	+108215.212	*Langwarden Dreieckspunkt*	1
— 232211.499	+108352.939	Langwarden Thürmchen auf Loh's Hause Centrum	1
— 232283.01	+ 30123.91	Hörne	13
— 232310.0	+ 42233.0	Himmelpforten	13
— 232370.697	+ 16771.527	Holm	13 (1)

+ südlich	+ westlich		Nr.
−232386.0	+164529.0	Westerholt Kirche westlicher Giebel	12
−232389.0	+164501.5	Westerholt Kirche östlicher Giebel	12
−232396.9	+164530.5	Westerholt Glockenthurm	12
−232425.941	− 432.587	Niendorf	1
−232443.6	+ 93122.4	W. M. bei Düngen	13
−232500.879	+152082.613	Norddunum	12
−232546.3	+ 88348.1	Hartmann's Platz bei Langen	1
−232636.2	+145710.0	Blerssum Kirche östl. Giebel Wetterstange	12
−232730.593	+108463.473	Platz a auf d. Deiche bei Langwarden	1
−232748.957	+148006.262	Burhave	12
−232757.493	+107614.700	Platz c auf dem Seedeiche	1
−232761.592	+108032.475	Platz e auf dem Seedeiche	1
−232762.207	+107990.147	Platz b auf dem Seedeiche	1
−232806.443	+ 83230.289	*Haye*	14
−232922.0	+ 31870.7	Schölisch	13
−232965.2	+ 83308.3	Hartmann's Platz 1 bei Weden	1
−233076.0	+ 27372.2	Stader Sand	13
−233112.323	+ 94327.415	Imsum	13 (1)
−233145.0	+ 28659.7	Brunshäuser Zoll	13
−233154.5	+180027.9	Bargerbuhr	12 (6)
−233347.9	+ 35320.9	Klein Villah	13
−233369.169	+ 72936.603	*Bederkesa* 2	14 (13)
−233400.0	+181238.4	Norden Thürmchen	12 (6)
−233419.4	+181420.4	Norden Thürmchen	12 (6)
−233448.8	+ 73276.1	Hartmann's Platz 2 bei Bederkesa	1
−233449.968	+181327.254	Norden Glockenth.	12 (6)
−233461.2	+ 73045.3	Windmühle	13
−233462.4	+ 73040.4	Hartmanns Platz 3 bei Bederkesa	1
−233491.171	+181317.782	Norden Thürmchen auf hoher Kirche	12 (6)
−233551.1	+ 28038.2	Brunshäuser Grell	13
−233572.583	+ 86148.671	Depstedt	13 (1)
−233813.344	+ 72910.119	Bederkesa Glockenthurm	13 (1)
−233817.091	+ 72884.200	Bederkesa Kirchthurm	13 (1)
−233913.8	+ 86384.1	Windmühle	13
−234046.8	+ 73957.2	Hartmann's Platz 1 bei Bederkesa	1
−234054.927	+176016.221	*Hage*	12
−234080.187	+ 73882.941	*Bederkesa* 1	14 (13)
−234139.343	+216659.508	*Borkum Leuchtthurm*	12
−234264.369	+217262.393	Kape	12
−234271.2	+161168.3	Ochtersum Glockenthurm	12
−234288.3	+161116.6	Ochtersum Kirche östlicher Giebel	12
−234294.7	+161152.5	Ochtersum Kirche westlicher Giebel	12
−234367.057	− 23454.204	*Syk*	1
−234495.2	+ 37263.3	Gross Villah	13
−234514.029	+ 49518.027	Telegraph 4	13
−234520.543	+ 49520.888	*Bülteberg*	14 (13)
−234575.767	+168839.877	Arle	12 (6)
−234608.0	+ 30559.4	Götzdorf	13
−234783.8	+ 55979.1	Lamstedt	13 (1)
−234800.952	+158204.294	Barkholtberg	12
−234845.002	+217017.372	Kape	12
−234945.5	+131447.3	Waddewarden	1
−235123.955	− 17692.547	Basis Nordlicher Endpunkt	1
−235148.8	+ 43957.0	Horst	13
−235151.224	+ 46413.555	Hechthausen	13
−235178.744	+146747.585	Buttförde Glockenthurm	12
−235184.0	+146716.7	Buttförde Kirche Giebel Wetterstange Oestlich	12
−235189.4	+146745.0	Buttförde Kirche Westlicher Giebel	12
−235803.482	+150846.216	Stedesdorf	12
−235808.403	+140825.428	Berdum	12
−235852.395	+210459.555	Kape	12
−235908.2	+ 33366.4	Butzflether Moor	13
−235934 639	+210468.292	Kape	12
−235948.512	+ 7503.605	Rellingen	14 (1)
−236082.7	+142664.1	Funnix	12
−236377.9	+138883.5	Meddoog	12 (1)
−236489.4	+ 94849.6	Windmühle	13
−236647.8	+ 58650.6	Windmühle bei Mittelstenahe	13
−236653.779	+ 30626.039	Butzfleth	14(1.13)
−236759.5	+136359.2	Tettens	12
−236767.8	+162544.8	Roggenstede Kirche östlicher Giebel	12
−236775.2	+162568.5	Roggenstede Kirche westlicher Giebel	12
−236780.8	+162533.4	Roggenstede Glockenthurm östlicher Giebel	12
−236782.7	+162539.4	Roggenstede Glockenthurm westlicher Giebel	12
−236848.7	+159870.5	Fulkum Kirche östlicher Giebel	12
−236856.0	+159897.7	Fulkum Kirche westlicher Giebel	12
−236866.2	+159899.0	Fulkum Glockenthurm	12
−236871.6	+ 88580.6	Windmühle bei Suvern	13
−236993.9	+ 94836.0	Wremen	13 (1)
−237223.9	+153899.9	W. M. Hedlefs	12
−237298.1	+ 9661.6	PinnebergLanddrost.	1

+ südlich	+ westlich		Nr.
−237446.049	+ 21231.716	Haselau	14(1.13)
−237639.3	+165905.0	Resterhave	12
−238292.0	+ 75254.5	Flögeln	13 (1)
−238321.766	+154076.826	*Eisens*	12
−238565.0	− 12121.8	Bergstedt	1
−238583.664	+166282.907	Dornum Dorfkirchthurm	12
−238587.5	−154095.3	W. M. Reinders Witwe	12
−238755.8	+154931.0	W. M.	12
−238842.3	+154167.3	Simons Pellmühle	12
−238850.8	+165389.7	W. M.	12
−238863.643	+166209.810	*Dornum*	12
−238880.8	+166355.8	W. M.	12
−238946.7	+165277.5	West Accum Östlicher Kirchengiebel	12
−238951.6	+165305.9	West Accum Westlicher Kirchengiebel	12
−239039.321	+ 92300.142	Mulsum	13 (1)
−239045.137	+ 54835.447	Kikeberg Signal	14
−239045.378	+ 54834.803	*Kikeberg Theodolith*	14 (13)
−239222.8	− 19663.9	Woldehorn	1
−239229.9	+ 19634.5	Uetersen Sägemühle	1
−239400.0	+170012.8	W. M.	12
−239403.8	+133938.6	Hohenkirchen	12 (1)
−239439.888	+147305.874	Werdum	12 (1)
−239576.4	+169377.7	Nesse	12
−239581.220	+ 45317.897	Gross Wöhrden	14 (13)
−239585.808	+ 87017.163	*Holssel*	14 (13)
−239656.475	+ 18902.788	Uetersen Kirchthurm	14(1.13)
−239690.9	+ 82682.9	Neuenwalde Klosteruhr	13
−239696.204	+ 81358.560	Neuenwalde Platz 1	13
−239713.7	+ 82681.1	Neuenwalde Thurm	13
−239717.041	+ 81379.558	Neuenwalde Platz 2	13
−239721.305	+161848.239	Westerbuhr Westlicher Giebel Wetterhahn	12
−239818.8	+ 94336.4	Misselwarden	13
−239989.5	+ 83529.4	W. M.	13
−240123.579	+161774.953	W. M.	12
−240192.7	+ 50118.9	Basbeck	13
−240251.9	+ 69871.0	Steinau	13 (1)
−240296.0	+ 19080.5	Uetersen Klostermühle	1
−240378.3	+ 87704.7	W. M.	13
−240814.7	+ 17757.6	Lang's Mühle	1
−240832.833	+ 33505.591	Assel	14 (13)
−241020.9	+177368.4	W. M. im Lütetsburger Polder	12
−241032.042	+175725.602	Hilgenrieder Siel Haus	12
−241116.590	+175793.929	Hilgenrieder Siel Signal	12
−241159.9	+ 87490.1	Holssel Kirche	13
−241247.312	+ 49946.467	Osten	14 (13)
−241248.8	+ 90755.5	Dorum Kirche	13
−241250.3	+ 90799.6	Dorum Thurm	13 (1)
−241349.999	+156433.149	Bensersiel	12
−241353.634	+156450.057	Ede Ments Ubben Witwe; Östlicher Hausgiebel	12
−241354.573	+156429.686	Ortspfahl	12
−241369.953	+156424.861	Hafenmeister Heise Wilms Abken; Schorstein Westlicher Giebel	12
−241442.3	+163181.1	W. M.	12
−241521.9	+ 69275.1	W. M.	13
−241557.452	+162827.479	Accumer Siel	12
−241686.9	+164133.3	Wilhelminenhof	12
−241738.5	+ 65998.5	Odisheim	13
−241758.680	+170913.034	Nesmersiel Signal	12
−242005.548	+167300.469	Dreihausen Signal	12
−242341.542	+148434.888	Windmühle	12
−242411.745	+153585.338	Herro Eils Heijen Witwe, Hausgiebelknopf	12
−242478.1	+ 93498.4	Padingbüttel	13 (1)
−242678.058	+200512.047	*Grosse Bill Pfahl*	12
−242734.436	+153645.405	Benser Schaudeich	12
−242774.750	+ 36827.105	Drochtersen	14(1.13)
−242855.9	+141530.7	Carolinensiel Glockenthurm	12
−242915.3	+141817.1	W. M. bei Carolinensiel	12
−242943.8	+141957.9	W. M. bei Carolinensiel	12
−243131.890	+194462.450	Juist, Voigts Flaggenstock	12
−243177.2	+194597.1	Juist, Kirche	12
−243448.055	+194665.145	*Juist*	12
−243680.0	+ 22825.2	Seste Kirche	1
−244006.301	+147824.031	Neuharlingersiel Schule	12
−244200.869	+ 80932.188	*Krempel*	14 (13)
−244319.6	+112197.5	Bremer Bake	1
−244679.036	+ 29946.078	Dampfmaschine bei Colmar	14
−244727.4	+ 18596.2	Lieth Signal	1
−244786.4	+ 12589.6	Ellerhoop Signal	1
−244844.3	+ 55819.4	W. M. bei Dobrock	13
−245288.1	+ 89204.3	W. M.	13
−245307.475	+ 58481.723	*Silberberg*	14 (13)
−245325.120	+175796.184	Tonnenbake	12
−245432.318	+ 29726.974	Colmar	14(1.13)
−245465.9	+ 17978.5	Lith Windmühle	1
−245551.6	+ 90762.4	Cappeln	13 (1)
−245582.1	+ 62820.1	Oppeln	13
−245674.259	+184698.529	Nordernei Logirhaus Flaggenstange	12
−245769.196	+184747.501	Nordernei Conversationshaus	12
−245775.9	+ 87628.5	Midlum	13 (1)
−245823.419	+ 24600.808	Neuendorf	14(1.13)
−245870.7	+ 57638.3	Tanne auf der Wingst	13
−245979.2	+184887.3	Nordernei Kirche niedriger östl. Giebel	12

+ südlich	+ westlich		Nr.
−246044.7	+ 67744.3	W. M.	13
−246167.305	+ 180740.759	*Nordernei Postament*	12
−246507.708	+ 177516.504	Wichtier Ee Signal	12
−246534.1	+ 67703.9	Oster Ihlenworth	13 (1)
−246677.342	+ 57188.563	*Fahlberg*	14 (13)
−246689.143	+ 57186.863	Telegraph 3	13
−246892.5	+ 76613.5	Wanna	13 (1)
−247448.3	+ 63634.7	Bülkau	13 (1)
−247472.040	+ 168579.668	Baltrum Schorstein 1	12
−247483.410	+ 168608.003	— — 2	12
−247486.659	+ 168537.575	— — 3	12
−247492.045	+ 168608.928	— — 4 (auf demselb. Hause wo 2)	12
−247511.460	+ 168374.597	Baltrum Signal 2	12
−247515.5	+ 168563.9	Baltrum Schorstein eines Hauses (unsichere Combination)	12
−247563.2	+ 74450.0	W. M.	13
−247604.1	+ 19135.4	Elmshorn Kirche	1
−247703.2	+ 36751.8	Krautsand	13 (1)
−247779.5	+ 52534.4	Oberndorf	13
−247783.213	+ 170529.605	*Baltrum Postament*	12
−247791.340	+ 169902.443	Baltrum Voigt Tiarks Ulrichs Haus; Schorstein Mitte	12
−247811.045	+ 169983.550	Baltrum Kirchengiebel Mitte	12
−247818.608	+ 169986.297	Baltrum Pfarrhaus Mitte der Schorsteine	12
−248357.044	+ 169671.428	Baltrum Signal 1	12
−249186.4	+ 73030.4	Nordleda	13
−249240.91	+ 162260.300	Langeoog Signal 1	12
−29451.1727	+ 162280.007	Langeoog F. J. Pauls Haus, Ostlicher Giebelstock	12
−249538.599	+ 162128.496	Langeoog Westende, Guckaus auf Ulrich Tiarks Hause	12
−249637.562	+ 162168.551	Langeoog Schulhaus S. S. O. Giebel.	12
−249638.027	+ 162168.677	Langeoog Schulhaus Schorstein	12
−249647.083	+ 162174.297	Langeoog Schulhaus N. N. W. Giebel	12
−249744 732	+ 162701.816	*Langeoog Postament*	12
−249754.2	+ 154899.857	Langeoog Ostende, Nebenhaus Schorstein	12
−249759.2	+ 154928.6	Langeoog Ostende, Belvedere Haus S. W. Giebel	12
−249763.4	+ 154924.6	Langeoog Ostende, Belvedere selbst	12
−249769.3	+ 154919.1	Langeoog Ostende, Belvedere Haus N. O. Giebel	12
−250029.0	+ 158955.9	Signal 3 auf Melkhörn	12
−250044.9	+ 58410.6	Cadenberge	13
−250104.6	+ 157206.0	b. Ostende Signal 4	12
−250390.8	+ 161865.6	Langeoog Signal 2	12
−250723.2	+ 69101.5	Neuenkirchen	13 (1)
−250744.7	+ 150281.5	Kape	12
−250784.0	+ 65964.3	Osterbruch	13 (1)
−250916.4	+ 150408.7	Kape	12
−251166.2	+ 35188.6	Glückstadt Castellthurm	1
−251211.1	+ 34297.5	Glückstadt Zuchthausthurm	1
−251300.5	+ 34086.1	Windmühle a	1
−251343.659	+ 34553.986	Glückstadt kleiner Thurm (Dänische Station)	14(1.13)
−251402.091	+ 30138.873	Herzhorn	14 (1)
−251427.1	+ 33340.2	Glückstadt Windmühle b	1
−251446.2	+ 63264.2	Kehdingbruch	13
−251523.118	+ 11053.062	Barmstedt	14 (1)
−251575.260	+ 34135.468	Glückstadt Kirchthurm	14(1.13)
−251598.266	+ 146754.114	Spikeroog Signal Pfahl 2	12
−251716.915	+ 148137.541	Spikeroog Nebenplatz	12
−251799.057	+ 148177.894	Spikeroog Kirchengiebel Mitte	12
−251970.5	+ 149288.5	Spikeroog weisse Düne oder Signal 1	12
+252022.819	+ 147127.531	*Spikeroog Postament*	12
−252146.823	+ 40745.670	Hamelwöhrden	14(1.13)
−252481.9	+ 85236.9	Hartmanns Platz 2 bei Altenwalde	1
−253260.7	+ 27251.3	Dücker Mühle	1
−253330.680	+ 78044.072	Ludingworth	13 (1)
−253341.2	+ 59778.5	Neuhaus	13
−253466.645	+ 46405.255	Oederquast	14 (13)
−253760.458	+ 137890.159	Wangeroog Kirchthurm 1841	12
−253761.219	+ 137885.395	Wangeroog Kirchthurm 1825	1
−253993.570	+ 137447.340	Wangeroog Leuchtthurm	12
−254111.467	+ 21379.258	Horst	14(1.13)
−254116.4	+ 68776.7	Otterndorf Telegr. 2	13 (1)
−255132.382	+ 28321.378	Süderau	14(1.13)
−255140.044	+ 62458.968	Belum	13 (1)
−255213.4	+ 83122.2	Franzburg	13 (1)
−255672.7	+ 84565.7	W. M.	13
−255854.879	+ 43048.694	Freiburg	14(1.13)
−255909.831	+ 33800.275	Borsfleth	14(1.13)
−256053.9	+ 77127.1	Altenbruch Glockenthurm	13
−256057.755	+ 84520.796	*Altenwalde Dreiecks-punkt*	14 (13)
−256062.412	+ 84104.710	Altenwalde Thurm	14 (1)
−256062.6	+ 84523.8	Hartmanns Platz 1 bei Altenwalde	13 (1)

+ südlich	+ westlich		Nr.
−256068.453	+ 77121.280	Altenbruch Spitze 1	13 (1)
−256074.948	+ 77120.520	Altenbruch Spitze 2	13 (1)
−256475.570	+ 48300.484	Krummendeich	14 (13)
−256590.239	+ 53477.274	Balje	14 (13)
−256864.392	+ 29737.939	Krempe Kirchthurm Throdolithplatz	14
−256869.594	+ 29734.704	*Krempe Kirchthurm Knopfmitte*	14
−256894.943	+ 29816.213	Krempe Rathhaus	14(1.13)
−257722.645	+ 21053.196	Hohenfelde	14 (1)
−257779.043	+ 35720.649	Wevelsfleth	14(1.13)
−257996.3	+ 80031.5	Groden	13 (1)
−258999.430	+ 15611.901	Hönerkirchen	14 (1)
−259523.098	+ 26919.270	Neuenbrook	13 (1)
−259779.969	+ 40369.766	Brockdorf	14(1.13)
−259850.1	+ 81879.8	Ritzebüttel Giebelstange 1	13 (1)
−259856.6	+ 81874.9	Ritzebüttel Giebelstange 2	13
−260087.393	+ 33836.146	Neuenkirchen	14 (1)
−261165.6	+ 81311.2	Telegraph 1	13
−261493.6	+ 81196.0	Cuxhaven Leuchtthurm	13 (1)
−261726.308	+ 34724.581	Beyenfleth	14(1.13)
−262754.9	+ 83557.9	Döse	13 (1)
−263106.2	+ 45360.4	St. Margareth	13 (1)
−263709.405	+ 55146.302	Brunsbüttel	13
−263735.4	+ 82527.1	Kugelbake	13
−263938.8	+ 28538.6	Nordo Monument	1
−266194.2	+ 28106.7	Itzehoe Capellenthurm	1
−266552.254	+ 37340.507	Wilster	14(1.13)
−266570.905	+ 95074.316	Neuwerk Leuchtthurm	13 (1)
−266608.3	+ 27915.9	Itzehoe Lorenzthurm	1
−266676.4	+ 20206.5	Breitenberg	1
−266785.7	+ 27515.2	Itzehoe St. Jürgen	1
−269378.932	+ 14704.506	Kellinghusen	14 (1)
−270229.076	+ 61139.508	Marne	13 (1)
−274829.139	+ 44465.425	Burg	14
−285459.2	+ 56996.5	Meldorf Kirche	13
−285462.1	+ 57029.9	Meldorf Thurm	13
−289999.9	+ 70694.3	St. Clemens?	13

Nach Herrn Sehr.

	− 29169.22	− 69845.92	Blankenburg kl. Thurm des Schlosses
	− 48597.65	− 72765.42	Huyseburg südl. Thurm
	− 48601.51	− 72801.72	Huyseburg Dreieckspunkt
	− 58263 74	− 68692.30	Pabstorf
	− 68389.41	− 69421 67	Schöningen Lorenz kl. N. Th.
	− 68922.15	− 57009.42	Schöppenstedt
	− 70834.36	− 40232.84	Wolfenbüttel Bibliothek
	− 73051.43	− 37142.88	Thiede
	− 74558 42	− 44006.13	Salzdahlum
	− 81595.86	− 39052.44	Braunschweig Michael
	− 82012.85	− 39646.19	Braunschweig Burg Thurm Südl. Sp.
	− 82374 46	− 39742.76	Braunschweig Cathar.
	− 82043.61	− 59654.03	Königslutter
	− 90573.98	− 24624.61	Duttenstedt

[COORDINATEN IN DEN PARTIELLEN VERZEICHNISSEN.]

+ südlich	+ westlich		Nr.
+ 21058.0	+ 281.7	Hanstein	(2)
+ 15841.8	− 4334.3	Rusteberg	(2)
+ 10104.9	+ 1077.5	Gross Schneen	(2)
+ 7439.2	+ 1937.1	Oberjesa	(3)
+ 6467.9	+ 3812.6	Sieboldshausen	(1)
+ 5820.7	+ 1140.3	Niederjesa	(1)
+ 4235.9	+ 5291.5	Mengershausen	(2)
+ 2786.2	+ 3649.9	Rossdorf	(1)
− 500.4	+ 644.9	Göttingen Johannis Nordlicher Th.	(1)
− 710.822	+ 500.527	Göttingen Jacobi Th.	(1)
− 755.1	+ 3356.5	Gronde	(2)
− 2649.3	+ 4982.9	Elliehausen	(2)
− 3496.6	+ 355.6	Weende	(2)
− 3668.0	− 2418.3	Nicolausberg	(2)
− 3920.7	− 42384.3	Tettenborn	(2)
− 5019.756	− 0	*Meridianzeichen*	(10)
− 6669.3	+ 5071.8	Lenglern	(2)
− 6753.6	+ 1540.9	Bovenden	(2)
− 7666.3	− 1552.1	Plesse dünner Thurm	(2)
− 7694.6	− 1607.7	Plesse dicker Thurm	(2)
− 8034.0	+ 5837.8	Harste	(2)
− 9267.0	+ 224.2	*Bei Angerstein Theod.*	(2)
− 9886.6	+ 614.0	Angerstein	(2)
− 10182.2	+ 6325.9	Gladebeck	(2)
− 10857.1	+ 780.9	Kloster-Stein	(2)
− 11558.5	+ 4028.7	Wolbrechtshausen	(2)
− 11763.8	+ 440.1	Nörten	(2)
− 12278.5	+ 4922.3	Hevensen	(2)
− 14306.8	− 26903.1	Herzberg Schlosstb.	(2)
− 14833.7	+ 6613.7	Lutterhausen	(2)
− 19653.2	− 4143.6	Nordheim Kirchthurm	(3)
− 21803.6	− 21516.2	Osterode Schlosstb.	(2)
− 22212.1	− 21372.5	Osterode Marienth.	(2)
− 22216.8	− 20925.6	Osterode Vorstadt	(2)
− 30310.087	− 46418.626	*Brocken*	(8)
− 32767.4	− 15105.6	Baum bei Gittelde	(2)
− 34108.1	− 38534.7	Wernigerode Schloss	(3)
− 40469.4	− 33167.5	Thurm am Rammelsberge	(3)
− 40952.298	+ 7668.304	*Hils*	(9)

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 41699.4	— 32964.0	Goslar Thurm am Clausthor	(3)
— 41752.3	— 33730.4	Gosla Zwinger	(3)
— 41773.226	— 32710.553	Goslar Frankenberg Centrum	(3)
— 41904.0	— 15435.7	Schildberg	(4)
— 42037.6	— 33359.0	Goslar Marktthurm	(3)
— 42285.8	— 33752.4	Goslar Stephani	(3)
— 42332.7	— 33276.5	Goslar Jacobi südlicher Thurm	(3)
— 42343.7	— 33276.9	Goslar Jacobi nordlicher Thurm	(3)
— 42474.7	— 33195.3	Goslar Neuwerk südlicher Thurm	(3)
— 42486.3	— 33189.2	Goslar Neuwerk nordlicher Thurm	(3)
— 42537.7	— 33511.4	Goslar Hagelthurm	(3)
— 42878.1	— 34247.7	Goslar Siechhof	(3)
— 43132.6	— 36107.9	Sutmerthurm Centrum	(1)
— 43132.6	— 36107.9	Sutmerthurm Centr.	(3)
— 44865.8	— 47033.0	Abbenrode unsicher	(3)
— 44867.4	— 45052.1	Lochtum	(3)
— 45643.0	— 34761.3	Kloster Grauhof	(3)
— 46047.1	— 26834.7	Langelsheim	(3)
— 46801.7	— 42704.8	Vienenburg Ruine	(3)
— 46802.4	— 42802.3	Vienenburg lutherische Kirche	(3)
— 47204.1	— 30239.0	Jerstedt	(3)
— 47566.6	— 5200.2	Heber Platz 1	(3)
— 47666.9	— 5204.6	Heber Platz 2	(3)
— 47827.3	— 33626.1	Hahndorf	(3)
— 48105.0	— 40959.2	Wöltingerode	(3)
— 48129.0	— 37210.0	Immenrode	(3)
— 48643.1	— 4735.2	Lamspringe lutherische Kirche	(3)
— 49145.9	— 2823.5	Graste	(3)
— 49541.6	— 28322.2	Bredelem	(3)
— 49830.9	— 31335.7	Dörnten	(3)
— 49995.0	+ 1129.2	Platz bei Armenseul	(3)
— 50219.5	— 2096.7	Netze	(3)
— 50933.2	+ 8054.0	Alfeld	(1)
— 51957.7	— 1773.7	Harbarnsen	(3)
— 52421.2	— 28789.2	Haringen	(3)
— 53061.2	— 37993.1	Wehre	(3)
— 53238.0	— 27480.6	Upen	(3)
— 53240.6	— 4227.8	Evensen	(1)
— 53260.0	— 4173.6	Evensen	(3)
— 53362.7	— 12891.3	Bokenem lutherische Kirche	(1)
— 53382.5	— 12751.9	Bokenem lutherische Kirche	(3)
— 53390.6	— 30828.1	Otfresen	(3)
— 53567.2	— 9781.1	Story	(1)
— 53585.0	— 9667.7	Story	(3)
— 53639.6	— 6884.5	Gross Ilde	(3)
— 53732.2	— 2179.3	Sehlen	(1)
— 53746.0	— 2144.8	Sehlen	(3)
— 54018.7	+ 598.5	Sellenstedt	(1)
— 54032.9	+ 617.7	Sellenstedt	(3)
— 54303.9	— 11174.7	Bönnien	(3)
— 54369.7	— 9981.4	Bönnien	(1)
— 54439.9	+ 9812.0	Wettensen	(1)
— 54488.2	— 14463.3	Volkersheim spitzer Thurm	(1)
— 54497.2	— 14333.1	Volkersheim spitzer Thurm	(3)
— 54602.5	— 14310.9	Volkersheim Kuppel Thurm	(3)
— 54640.5	— 31246.0	Bärenkopf Baum	(1)
— 54657.2	— 24846.6	Alten Walmoden	(3)
— 54669.9	— 31193.3	Bärenkopf	(3)
— 54717.4	+ 3431.4	Wernershöhe Platz 2	(1)
— 54740.3	— 32918.7	Liebenburg Kirchth.	(3)
— 54828.3	— 32940.0	Liebenburg Kirchth.	(1)
— 54859.2	— 32902.5	Liebenburg Ruine	(3)
— 54954.3	— 8318.3	Bültum	(3)
— 54955.3	— 8319.8	Bültum	(1)
— 55054.5	— 32948.2	Liebenburg Ruine	(1)
— 55114.3	+ 2655.5	Wernershöhe Platz 1	(1)
— 55424.3	— 42324.8	Bodenburg Kirchth.	(1)
— 55427.3	— 4271.1	Bodenburg Kirchth.	(3)
— 55427.6	— 4539.8	Bodenburg Schloss	(1)
— 55430.7	— 4477.5	Bodenburg Schloss	(3)
— 55882.7	— 2985.1	Breinum	(3)
— 56062.5	— 45482.7	Horneburg?	(3)
— 56067.5	— 2393.8	Almenstedt	(3)
— 56067.5	— 4026.2	Ostrum	(3)
— 56333.4	— 8782.0	Upstedt	(3)
— 56402.7	— 167.8	Segeste	(3)
— 56411.3	— 25280.6	Ringelheim katholische Kirche	(3)
— 56537.1	— 25300.0	Ringelheim lutherische Kirche	(3)
— 56568.6	— 27943.5	Gitter am Berge	(3)
— 56671.9	— 11909.2	Werder	(3)
— 56690.2	— 9674.1	Nette	(3)
— 56927.1	— 21973.9	Schlde	(3)
— 57255.3	— 4713.7	Wehrstedt	(3)
— 58253.2	— 40621.3	Burgdorf	(3)
— 58564.4	+ 818.1	Petze	(3)
— 58603.8	— 26502.7	Haberloh	(3)
— 59032.8	— 14440.7	Woldenberg Thurm	(1)
— 59861.6	— 20977.6	Gross Heerte	(3)
— 60571.3	— 42034.0	Kloster Heiningen	(1)
— 60571.3	— 42034.0	Kloster Heiningen	(3)
— 60758.5	— 32298.7	Beinum	(3)
— 60762.0	— 32299.8	Beinum	(1)
— 60928.1	— 26286.0	Steinlah	(3)
— 61054.9	— 37327.7	Klein Flöthe	(3)
— 61066.8	— 21898.9	Klein Elbe	(3)
— 61082.3	— 14064.5	Sottrum lutherische Kirche	(3)
— 61198.7	— 13766.6	Sottrum katholische Kirche	(3)
— 61767.9	— 19694.3	Badekenstedt	(3)
— 62222.1	— 36223.4	Gross Flöthe	(3)
— 62534.0	— 22261.0	Gross Elbe	(3)

+ südlich	+ westlich		Nr.
— 62528.0	— 16343.6	Binder	(1)
— 63011.8	— 17263.8	Binder kleiner Thurm	(3)
— 63013.2	— 5266.4	Gross Düngen	(1)
— 63015.0	— 24570.0	Gustedt	(3)
— 63019.7	— 18220.8	Rehne	(3)
— 63027.0	— 6356.1	Klein Düngen	(1)
— 63096.6	— 13005.2	Derneburg gut	(1)
— 63499.8	+ 1315.0	Dickholzen	(1)
— 63516.0	— 6583.4	Heinde	(1)
— 63695.0	— 1058.0	Söhre	(1)
— 63751.5	— 8614.6	Listringen	(1)
— 64030.2	+ 24351.6	Voldagsen	(1)
— 64297.6	— 17106.2	Wartgenstedt	(3)
— 64308.8	— 28515.1	Gebhardshagen	(3)
— 64312.7	— 28516.7	Gebhardshagen	(1)
— 64430.5	— 14829.2	Grastorf gross. Thurm	(3)
— 64830.7	— 3690.4	Itsum	(1)
— 64990.4	— 50246.9	Mönch-Vahlberg	(3)
— 65135.0	+ 1877.8	Marienrode	(1)
— 65153.2	— 5760.0	Leckstedt Schorstein	(1)
— 65178.0	— 675.6	Barienrode	(1)
— 65181.9	— 2692.6	Marienburg	(1)
— 65190.1	— 34333.0	Cramme	(3)
— 66025.3	— 32661.5	Bahrum	(3)
— 66528.7	— 30515.8	Gross Heerte	(1)
— 66543.7	— 30524.7	Gross Heerte	(3)
— 66568.8	— 16417.2	Luttern	(3)
— 66603.1	— 303.0	Ochtersum	(1)
— 67897.2	— 26969.6	Salder	(1)
— 68562.7	— 35469.0	Adersheim	(3)
— 68966.8	— 31834.4	Watenstedt	(1)
— 68979.8	— 31830.8	Watenstedt	(3)
— 69838.7	— 39923.5	Hallendorf	(1)
— 69851.0	— 39933.5	Hallendorf	(3)
— 70359.7	— 14634.4	Nettlingen	(1)
— 70629.7	— 40664.2	Wolfenbüttel	(1)
— 70626.8	— 40664.6	Wolfenbüttel Laternenthurm	(3)
— 70666.5	— 37105.8	Fümmelse	(3)
— 70927.3	— 18659.0	Berne	(1)
— 71536.6	— 28341.7	Engelnstedt	(1)
— 72102.7	— 31646.5	Bleckenstedt	(3)
— 72193.3	— 31648.2	Bleckenstedt	(1)
— 72218.9	— 15442.7	Bettrum	(1)
— 72906.3	— 16898.0	Klein Himstedt	(1)
— 73016.5	— 32592.7	Beddingen	(1)
— 73285.4	— 23302.2	Barbeke	(1)
— 73413.1	— 17525.6	Gross Himstedt	(1)
— 73683.671	+ 129245.647	*Dörenberg Centrum*	(5)
— 73683.739	+ 129245.738	*Dörenberg Platz 1 Junius* 1829	(5)
— 73683.924	+ 129245.835	*Dörenberg Platz 2 August.* 1829	(5)
— 73803.0	— 32208.1	Sauingen	(1)
— 73811.9	— 32116.1	Sauingen	(3)
— 74958.7	— 31985.6	Ufingen	(1)
— 75026.2	— 24884.0	Lengde	(1)
— 75445.3	— 30970.0	Lucklum	(3)
— 76053.0	— 35874.5	Geitelde	(1)?
— 76525.1	— 28866.9	Fallstedt	(1)
— 76812.8	— 32482.0	Pavillon bei Lucklum	(1)
— 76817.1	— 32490.0	Pavillon bei Elm	(3)
— 77112.3	— 33967.8	Klein Lafferde	(1)
— 77695.7	— 35171.7	Stiddium	(1)
— 77816.2	— 26837.7	Bodenstedt	(1)
— 78686.0	— 36639.4	Broizen	(1)
— 79005.9	— 31896.2	Sonnenberg	(1)
— 79071.4	— 34802.2	Timmerlah	(1)
— 79599.2	— 26912.0	Liedingen	(1)
— 79724.4	— 28939.4	Gadenstedt	(1)
— 80410.0	— 53423.3	Appenrode	(3)
— 81012.7	— 22595.7	Münstedt	(1)
— 82615.333	+ 99921.162	*Nonnenstein*	(5)
— 82786.0	— 26689.6	Sierse	(1)
— 82985.4	— 32037.8	Weddenstedt	(1)
— 86698.2	— 14338.9	Schwicheld	(1)
— 89734.515	+ 190107.268	Bentheim südlicher Schlossthurm	(5)
— 89755.247	+ 190019.118	*Bentheim Theodol.* 2.	(5)
— 89755.414	+ 190021.843	*Bentheim Theodol.* 3.	(5)
— 89757.859	+ 190025.408	*Bentheim Signal Centrum*	(5)
— 89763.099	+ 190019.881	*Bentheim Theodol.* 1.	(5)
— 89811.4	+ 189989.1	Bentheim nordlicher Schlossthurm	(5)
— 92684.6	+ 117037.0	Theodolithplatz bei der Capelle 1829	(6)
— 93577.384	+ 13880.010	Hannover Aegidius	(11)
— 100049.4	+ 34813.9	Wunstorf	(1)
— 102215.3	+ 19580.1	Engelbostel	(1)
— 103066.4	+ 53849.6	Loccum	(5)
— 103698.860	+ 8604.931	Isernhagen	(1)
— 104220.2	— 17796.2	Utze	(1)
— 105528.0	+ 48539.7	Rehburg	(5)
— 105604.0	— 27592.4	Meinersen	(1)
— 107147.6	+ 5943.9	Burgwedel	(1)
— 107381.6	— 24705.0	Paese	(3)
— 108665.633	+ 32691.117	Neustadt am Rübenberge 1838	(1)
— 109383.6	+ 126847.6	Vörden Thurm	(5)?
— 109660.2	+ 59116.3	Stolzenau	(5)
— 110930.1	+ 12606.1	Bissendorf	(1)?
— 113777.4	+ 29665.5	Basse	(1)?
— 114556.0	+ 17713.2	Brelingen	(1)?
— 114710.292	+ 148300.629	*Quekenburg Standpunkt*	(5)
— 114710.429	+ 148300.579	*Quekenburg Signal Centrum*	(5)
— 114804.6	+ 30929.1	Mariensee	(1)?
— 115363.340	+ 117356.488	*Mordkuhlenberg Sign.*	(5)
— 115363.491	+ 117356.517	*Mordkuhlenberg Standpunkt*	(5)
— 116169.8	+ 17858.3	Brelingerberg	(1)?
— 117302.183	+ 73520.611	*Knickberg*	(5)
— 117302.185	+ 73520.620	*Knickberg*	(9)
— 119261.3	+ 35180.8	Mandelsloh	(1)
— 121842.577	— 9118.469	Celle Schloss, südwestliche Kuppel	(1)

+ südlich	+ westlich		Nr.
—121866.633	— 9113.977	Celle Schloss, Uhrthurm Spitze	(1)
—121888.429	— 9101.020	Celle Schloss, nordöstliche Kuppel	(1)
—121931.269	— 9338.801	Celle Stadtkirche Spitze	(1)
—125440.662	+183267.411	*Kirchhesepe Standpunkt* 2	(5)
—125441.259	+183265.831	*Kirchhesepe Standpunkt* 1	(5)
—125441.738	+183266.131	*Kirchhesepe Centrum*	(5)
—128135.472	+ 2493.312	Winsen	(1)
—138674.136	+ 63178.061	Asendorf, Centrum	(1)
—138674.291	+ 63178.094	*Asendorf, Standpunkt*	(5)
—138674.918	+ 63178.041	*Asendorf, Centrum*	(5)
—139536.775	+ 54838.140	Bücken	(1)
—140098.1	+184209.9	Wesuwe	(5)
—142350.437	+ 87901.043	Twistringen Centrum	(1)
—142350.952	+ 87900.139	*Twistringen Standpunkt*	(5)
—142251.447	+ 87900.521	*Twistringen Centrum*	(5)
—142478.0	— 1313.4	Bergen	(1)
—147939.4	+128491.0	Cloppenburg	(5)
—148776.5	+163222.1	Sögel Thurm	(5)
—150829.566	+ 72072.628	Heiligenfelde	(1)
—153043.9	+162456.4	Windberg Th. pl.	(5)
—153866.9	+177634.4	Steinbild	(5)
—172369.3	+175166.1	Aschendorf Klosterkirche	(5)
—172679.7	+175093.5	Aschendorf Pfarrkirche	(5)
—175839.7	+180774.3	Rhede	(5)
—178512.9	— 43974.2	Alt Medingen (spitzes Dach?)	(1)
—191597.289	— 30574.431	Lüneburg Michaelis	(7)
—203523.9	+173477.5	Olderum	(6)
—203944.1	+200867.7	Appingdam	(6)
—204710.099	+ 94432.229	Sandstedt	(1)
—205232.0	+ 83145.8	Bramstedt	(1)
—206040.464	— 41045.627	Lauenburg Sign.	(7)
—207906.2	+204523.4	Holwierda	(6)
—208657.1	+187002.0	Twixlum	(6)
—209915.8	+193450.4	Rysum	(6)
—211092.4	+192812.4	Loquard	(6)
—212135.7	+192308.7	Campen spitz. Thurm	(6)
—212159.1	+192332.5	Campen stumpfer Th.	(6)
—213208.1	+180812.3	Suiderhusen	(6)
—213316.0	+189633.7	Wollzeden	(6)
—214389.0	+180200.0	Loppersum	(6)
—214618.7	+192619.7	Upleward	(6)
—215300.5	+192201.1	Hamswehrum	(6)
—215948.5	+189168.5	Pewsum	(6)
—216200.5	+191262.7	Groothusen	(6)
—216868.066	+ 16083.566	Buxtehude grosser Thurm	(1)
—217680.1	+185219.1	Uttum	(6)
—218583.1	+191324.9	Manschlagt (dicker?) Thurm	(6)
—218660.7	+163683.7	Aurich Schlossthurm	(6)
—219023.1	+ 83055.8	Bexhövede	(1)
—219666.3	—188832.6	Visquard	(6)
—219867.3	+ 97705.9	Atens	(1)
—219996.8	+186077.8	Eilsum	(6)
—220341.1	+ 88944.3	Wulstorf	(1)
—220468.4	+184004.0	Grimmersum	(6)
—220530.4	+ 14211.8	Estebrügge	(1)
—220921.4	+ 42609.8	Mulsum	(1)
—221353.6	+191167.7	Pilsum	(6)
—222065.850	+104932.032	Stolham	(1)
—222932.2	+ 74270.1	Alt Luneburg	(12)
—223950.8	+ 17379.0	Jork	(1)
—223545.1	+189040.5	Gretsiel spitzer Th.	(6)11
—223564.4	+189042.5	Gretsiel dicker Th.	(6)11
—223492.5	+ 89632.7	Gestendorf	(1)
—223585.7	+ 16792.9	Borstel	(1)
—223808.9	+ 93277.5	Blexen	(1)
—223843.0	+ 85384.3	Schiffdorf	(1)
—224202.6	+ 21604.7	Mittelnkirchen	(1)
—225108.2	+ 6643.6	Nienstedten	(1)
—225218.6	+177119.8	Marienhave	(6)
—226157.1	+ 22211.8	Steinkirchen	(1)
—226323.5	+ 27033.0	Agathenburg	(1)
—226384.6	+177604.9	Osteel	(6)
—226566.6	+ 72494.0	Ringstedt	(1)
—227362.9	+ 22280.4	Grünendeich	(1)
—228832.5	+ 16189.0	Wedel	(1)
—229055.0	+104710.2	Burhave	(1)
—229558.8	+ 25482.2	Hollern	(1)
—229673.9	+ 45730.5	Oldendorf	(1)
—230661.4	+ 30777.7	Stade Wilhadi	(1)
—230810.8	+ 30884.9	Stade Cosmae	(1)
—230903.0	+ 25813.6	Twilenfleth	(1)
—231094.9	+ 30857.7	Stade Rathhaus	(1)
—232371.3	+ 16772.0	Holm Centr.	(1)
—233112.0	+ 94327.0	Jmsum	(1)
—233354.2	+180010.6	Bargerbuhr?	(6)
—233438.0	+180795.1	Norden Sp.	(6)
—233480.1	+181420.0	Norden Sp.	(6)
—233526.5	+181316.0	Norden st. Th.	(6)
—233556.5	+181316.4	Norden feine Sp.	(6)
—233572.7	+ 86148.7	Depstedt	(1)
—233812.0	+ 75909.9	BederkesaGlockenth.	(1)
—233820.0	+ 72881.9	Bederkesa Uhrthurm	(1)
—234492.9	+168882.5	Arle	(6)
—234786.9	+ 55986.6	Lamstedt	(1)
—235947.5	+ 7503.2	Rellingen	(1)
—236415.8	+138890.5	Meddoog	(1)
—236652.7	+ 30626.0	Butzfleth	(1)
—236993.6	+ 94835.3	Wremen	(1)
—237444.3	+ 21231.1	Hasclau	(1)
—238299.4	+ 75255.3	Flögeln	(1)
—239038.7	+ 92300.6	Mulsum	(1)
—239374.2	+133939.0	Hohenkirchen	(1)
—239384.3	+147231.8	Werdum	(1)
—239655.6	+ 18901.1	Uetersen Kirchthurm	(1)
—240245.8	+ 69873.7	Steinau	(1)
—241249.7	+ 90799.8	Dorum	(1)
—242476.6	+ 93498.9	Padingbüttel	(1)

+ südlich	+ westlich		Nr.
—242773.3	+ 36827.3	Drochtersen	(1)
—245431.6	+ 29726.7	Colmar	(1)
—245551.2	+ 90763.0	Cappeln	(1)
—245775.5	+ 87628.9	Midlum	(1)
—245821.6	+ 24600.1	Neuendorf	(1)
—246532.7	+ 67702.1	Oster Ilienworth	(1)
—246892.5	+ 76614.2	Wanna	(1)
—247388.5	+ 63676.7	Bülkau	(1)
—247703.2	+ 36752.9	Krautsand	(1)
—250722.6	+ 69097.6	Neuenkirchen	(1)
—250784.2	+ 65963.9	Osterbruch	(1)
—251343.0	+ 34554.1	Glückstadt kleiner Thurm (Dänische Station)	(1)
—251399.8	+ 30139.2	Herzhörn	(1)
—251523.1	+ 11052.9	Barmstedt	(1)
—251573.4	+ 34126.7	Glückstadt Kirchthurm	(1)
—252146.1	+ 40748.4	Hammelwörden	(1)
—253330.1	+ 78043.0	Lüdingworth	(1)
—254110.4	+ 21378.6	Horst	(1)
—254115.7	+ 68798.6	Otterndorf	(1)
—255331.8	+ 28321.4	Süderau	(1)
—255141.2	+ 62459.0	Belum	(1)
—255213.6	+ 83123.0	Franzenburg	(1)
—255856.6	+ 43050.3	Freiburg	(1)
—255908.9	+ 33800.4	Borsfleth	(1)
—256062.6	+ 84523.8	Hartmanns Platz 1 bei Altenwalde	(1)
—256062.7	+ 84104.8	Altenwalde	(1)
—256069.1	+ 77120.7	Altenbruch Spitze 1.	(1)
—256075.2	+ 77119.1	Altenbruch Spitze 2.	(1)
—256894.2	+ 29816.6	Crempe	(1)
—257722.7	+ 21032.0	Hohenfelde	(1)
—257778.1	+ 35721.5	Wevelsfleth	(1)
—257996.5	+ 80031.2	Groden	(1)
—258998.8	+ 15610.9	Hörnerkirchen	(1)
—259523.9	+ 26920.1	Neuenbrook	(1)
—259779.2	+ 40370.0	Brockdorf	(1)
—259854.2	+ 81878.1	Ritzebüttel Giebelstange 1	(1)
—260286.9	+ 33836.4	Neuenkirchen	(1)
—261494.4	+ 81196.7	Cuxhaven Leuchtthurm	(1)
—261725.0	+ 34726.2	Beienfleth	(1)
—262754.7	+ 83558.8	Döse	(1)
—263108.1	+ 45161.9	St. Margareth	(1)
—266552.1	+ 37341.8	Wilster	(1)
—266569.396	+ 95074.242	Neuwerk Leuchtthurm Cent.	(1)
—269380.6	+ 14702.3	Kellinghusen	(1)
—270223.4	+ 61150.8	Marne	(1)

Zur Erläuterung der Bedeutung der Coordinaten ist folgendes zu bemerken.

Will man sich nur im Allgemeinen einen Begriff davon machen, so kann man dieselben so ansehen, dass die erste Zahl anzeigt, wie viel der betreffende Ort südlich (beim + Zeichen), oder nordlich (beim — Zeichen) von der Göttinger Sternwarte liegt, die zweite Zahl hingegen, wie viel westlich (bei +) oder östlich (bei —).

Es ist aber dabei schon die Krümmung der Erdoberfläche dergestalt berücksichtigt, dass bei Auftragung dieser Coordinaten auf eine ebene Fläche das Bild ein *conformes*, d. i. in den kleinsten Theilen ähnliches wird. Das Nähere darüber enthalten meine geodätischen Abhandlungen zum Theil schon jetzt, und spätere Abhandlungen werden dies noch ausführlicher entwickeln.

Der genaue Anfangspunkt der Coordinaten in der Sternwarte ist übrigens der Mittelpunkt der Achse des Reichenbachschen Meridiankreises.

Als Einheit der Coordinaten ist diejenige Lineargrösse gewählt, die nach der besten im Jahr 1821 vorhandenen Kenntniss als der zehnmillionste Theil des Quadranten des Erdmeridians gelten konnte, nemlich die Länge von 443,307885 pariser Linien, was etwas, obwohl nur sehr wenig, von dem sogenannten legalen französichen Meter verschieden ist. Dies letztere war nemlich bekanntlich festgesetzt zu 443,296 pariser Linien. Obgleich in späterer Zeit (seit 1821) noch neuere Bestimmungen des zehnmillionten Theils des Erdmeridianquadranten gewonnen sind und zwar immer entschieden grösser als das eben angeführte gesetzliche Meter), so habe ich doch vorgezogen, bei der einmal von mir gewählten Einheit zu bleiben, da man jede einzelne Zahl leicht in jede beliebige andere Einheit umsetzen kann, zu welcher das Verhältniss einmal bekannt ist.

BEMERKUNGEN.

Der Einheit der Coordinaten so wie den verschiedenen Reductionen der Messung sollten vermuthlich die von Walbeck gefundenen Endimensionen zu Grunde gelegt werden.

Walbeck et Brummer. De forma et magnitudine telluris. Aboae 1819 pag. 16: 'Gradus medius seu $\frac{1}{90}$ pars Quadrantis Meridiani $= 57009^{t},76$. Ellipticitas $= \frac{1}{302,78}$' [Handschriftliche Bemerkung von Gauss: mittlere Meridiangrad] $=$ '$57009^{t},7584$. Der Meter also $= 443^{l},307885$, Verhältniss $= 37299:37300$ Logarithm $= 0,00001164$.'

Gauss. Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona. Göttingen 1828. Art. 20. — 'Wenn man meine Dreiecke als auf der Oberfläche eines elliptischen Sphaeroids liegend, dessen Dimensionen die von Walbeck aus der Gesammtheit der bisherigen Gradmessungen abgeleiteten sind, und welches nach unsrer besten gegenwärtigen Kenntniss sich am vollkommensten an die wirkliche Gestalt *im Ganzen* anschliesst (Abplattung $\frac{1}{302,76}$, der dreihundertsechzigste Theil des Erdmeridians $= 57009,746$ Toisen) berechnet, und dabei von der Polhöhe von Göttingen $= 51° 31' 37''85$ ausgeht'..

Hienach scheint Gauss mehrfach mit der Abplattung $\frac{1}{302,76}$ statt mit der Walbeckschen $\frac{1}{302,78}$ gerechnet zu haben und in der That liegt auch mehren der noch im handschriftliche Nachlass vorhandenen Hülfstafeln die erstere Zahl zu Grunde.

Gauss an Schumacher. Göttingen 1830 April 18 'Zweite Hülfstafel, Anmerkung: 'Bei früher von mir mitgetheilten Coordinaten ist die Einheit $\frac{1}{10000000}$ des Erdquadranten nach Walbeck's Dimensionen; um jene also in solche zu verwandeln, bei denen die Einheit $\frac{1}{10000000}$ des Erdquadranten nach Schmidt's neuesten zum Grunde liegt, müssen jene erst mit $\frac{57009758}{57008551}$ oder mit $1 + \frac{1}{47245}$ multiplicirt werden.'

Gauss. Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen Göttingen und Altona Art. 19. 'Nach der trigonometrischen Verbindung der Sternwarten von Göttingen und Altona liegt letztere 115163,725 Toisen nordlich, 7,211 Toisen westlich von jener. Diese Zahlen beziehen sich auf die Plätze der Meridiankreise; sie gründen sich auf den Werth der Dreiecksseite Hamburg-Hohenhorn 13841,815 Toisen, und diese auf die von Hrn. Prof. Schumacher in Holstein im Jahre 1820 gemessenen Basis. Da jedoch die Vergleichung der dabei gebrauchten Messstangen mit der Normaltoise noch nicht *definitiv* vollendet ist, so wird obige Entfernung in Zukunft noch in demselben Verhältniss abzuändern sein, wie die Basis selbst, welche Veränderung aber jedenfalls nur sehr gering sein kann.'

Herr Geheimer Etatsrath Andrae in Copenhagen bemerkt über die Revision der Basis in einem Schreiben vom 5 März 1865 abgedruckt im Generalbericht über die mitteleuropäische Gradmessung für das Jahr 1864 Seite 6. 7. 'Die von Schumacher angegebene Länge der *Braacker Basis*: 3014,5799 Toisen, welche bei den früheren Berechnungen sowohl der Dänischen als auch der Hannöverschen unter der Leitung von Gauss ausgeführten Triangulationen angewendet wurde, konnte nur als ein vorläufiges Resultat der Basismessung angesehen werden, da die Reduction auf den Meeresspiegel und mehrere andere Correctionen noch nicht berücksichtigt waren. Da diese Reductionen an Grösse beträchtlich die Unsicherheiten der Messungen selbst, die mit grosser Sorgfalt ausgeführt sind, überstiegen, war eine neue Bestimmung nothwendig und Herr Professor Dr. Peters in Altona hat auch die Güte gehabt, eine ausführliche, mit der grössten Genauigkeit durchgeführte Berechnung sämmtlicher Correctionen vorzunehmen, durch welche die Länge der Basis sich nun stellt wie folgt:

a.	Die Länge von 1505 Messstangen ohne Correction	3010,00000 Toisen
b.	Summe der mit den Glaskeilen gemessenen Intervalle und der in Betracht kommenden ganzen und halben Durchmesser der Ablöthungs-Cylinder .	+ 3,58389 T.
c.	Länge der Ergänzungsstange	+ 1,22106 T.
d.	Correction wegen Neigung der Ablöthungs-Cylinder gegen die Lothlinie .	— 0,00008 T.
e.	Correction wegen Abweichung der Stangen vom Alignement	— 0,00051 T.
f.	Correction wegen fehlerhafter Längen der Messstangen	— 0,10245 T.
g.	Correction wegen Abweichung der Temperatur der Messstangen von 13° R.	— 0,19906 T.
h.	Reduction auf die Oberfläche des Meeres	— 0,02264 T.
	Länge der Braacker-Basis nach der neuen Berechnung	= 3014,48021 Toisen

Es findet sich aber auch in dieser Berechnung ein schwacher Punkt, nemlich die sub *g* angeführte Correction wegen der Temperatur der Messstangen. Eine mit Abbildungen versehene Beschreibung des bei der Basismessung angewandten Apparats hat Schumacher in der Schrift: 'Schreiben an Dr. Olbers in Bremen etc. etc., Altona 1821' veröffentlicht, und man wird daraus ersehen, dass die Temperaturen nicht durch Metallthermometer, sondern durch gewöhnliche, eingelegte Thermometer bestimmt sind. Dies ist nun an und für sich ein misslicher Umstand, aber viel schlimmer stellt sich die Sache, da die Ausdehnbarkeit der Stangen nur aus einigen im Felde vorgenommenen Messungen der Stangenlängen am Abend und am Morgen abgeleitet wird. Es kann aber diesem Uebel abgeholfen werden. Im Jahre 1853 wurde nemlich die Stange No. IV. des Schumacherschen Basisapparats nach Pulkowa gebracht, um direct mit den dort gesammelten Etalons verglichen zu werden. Bei dieser Gelegenheit wurde nun auch die Ausdehnung dieser Stange für 100° erhalten, und wenn man den von Struve (Siehe 'Arc du méridien entre le Danube et la mer glaciale' pag. 52) angegebenen Werth der Ausdehnungscoefficienten berechnet, dann erhält man für die Correction sub *g*: — 0,22812 statt — 0,19906.

Mit dieser Berichtigung, welche auch von Professor Peters adoptirt wird, findet man dann die Länge der *Braacker Basis*:

$$= 3014,451 \text{ Toisen},$$

und dieser Werth muss als der *definitive* betrachtet werden. Ich füge nun hinzu, dass die Angabe dieser Toisen auf der Vergleichung mit der Pulkowaer Fortin beruhe; da diese aber mit der Bessel'schen Toise bis auf eine verschwindende Kleinigkeit übereinstimmt, kann die Länge auch füglich als in Bessel-schen Toisen ausgedrückt angesehen werden.'

Obiges Coordinaten-Verzeichniss ergibt für die Länge der Basis 5875,3614 der dort angewandten Einheiten oder 3014,5757 Toisen bei einem Erdmeridian von $360 \times 57009,746$ Toisen.

Eduard Schmidt. Gauss an Schumacher: Göttingen 1830 April 30. 'Um Ihr Vertrauen zu Schmidt's Rechnung zu vergrössern, bemerke ich, dass er die zwei Hauptelemente der Erddimensionen viermal berechnet hat, — — Das Resultat (IV) ist mir von ihm handschriftlich mitgetheilt und dasselbe was meinen neuen Hülfstafeln zum Grunde liegt, nemlich Abplattung $\frac{1}{297,732}$; $\frac{\text{Erd-Quadrant}}{90} = 57008^{t},551$.'

Bessel. Ueber einen Fehler in der Berechnung der französischen Gradmessung und seinen Einfluss auf die Bestimmung der Figur der Erde.' Astronomische Nachrichten Nr. 438 Band 19. Seite 116. 1841 December 2. 'Mittlere Grad des Meridians $= 57013,109$ Toisen, halbe grosse Axe $a = 3272077,14$ Toisen, halbe kleine Axe $b = 3261139,33$ Toisen, $a:b = 299,1528:298,1528$'

Bei der Anwendung der in obigen Verzeichnissen angegebenen Coordinaten hat man diese also vorläufig, ehe die Basis und die Verbindungsdreiecke bis *Hamburg — Hohenhorn* von Neuem gemessen sind, mit folgendem Correctionsfactor zu multipliciren:

$\frac{3014,48021}{3014,5757}$ = num (log = −0,00001376) für die Basislänge nach Peters und für die von Gauss in der 'Breitenbestimmung' wie oben angegebenen Erddimensionen,

$\frac{3014,451}{3014,5757}$ = num (log = −0,00001797) für die Basislänge nach Peters und Andrae und für die von Gauss in der 'Breitenbestimmung' wie oben angegebenen Erddimensionen,

$\frac{3014,48021}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57009,7584}$ = num (log = −0,00001386) für die Basislänge nach Peters und für Walbeck's Erd dimensionen,

$\frac{3014,451}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57009,7584}$ = num (log = −0,00001806) für die Basislänge nach Peters und Andrae und für Walbeck's Erddimensionen,

$\frac{3014,48021}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57008,551}$ = num (log = −0,00000466) für die Basislänge nach Peters und für Schmidt's IV. Erddimensionen,

$\frac{3014,451}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57008,551}$ = num (log = −0,00000887) für die Basislänge nach Peters und Andrae und für Schmidt's IV. Erddimensionen

$\frac{3014,48021}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57013,109}$ = num (log = −0,00003938) für die Basislänge nach Peters und für Bessel's Erddimensionen,

$\frac{3014,451}{3014,5757} \cdot \frac{57009,746}{57013,109}$ = num (log = −0,00004359) für die Basislänge nach Peters und Andrae und für Bessel's Erddimensionen.

Die von Schmidt und die von Bessel berechneten Erddimensionen setzen die Längenangabe von Schumacher über dessen Braacker Basis voraus, eine neue Berechnung der von ihnen in Betracht gezogenen Gradmessungen würde bei dieser berichtigten Basislänge etwas abweichende Zahlen für die Erddimensionen ergeben, die aber durch die bald zu erwartende Beendigung mehrer neuen Gradmessungen auch in kurzer Zeit durch bessere Bestimmungen ersetzt werden müssen.

Die hier im Abdruck aus den Partial-Verzeichnissen noch besonders aufgenommenen Coordinaten, sind entweder dieselben wie im General-Verzeichniss oder beruhen auf weniger genauen Bestimmungen, können aber zur Erläuterung der nachfolgenden 'Abrisse' dienen. In Gauss Nachlass befinden sich von den Partial-Verzeichnissen nur Nro. 1 bis 11. Eine neue Vergleichung ergab mir die Berichtigungen:

im General-Verzeichniss steht: −26619,9 −12689,5 Lauenberge
im Partial-Verzeichniss (3) steht: −26619,9 +12689,5 Lauenberge

−233491,171 +181317,782 Norden Thürmchen auf hoher Kirche. Nr. 12.
−249451,172 +162280,007 Langeoog F. J. Pauls Haus östlicher Giebelstock. Nr. 12.

Zur leichtern Wiedererkennung der in dem Coordinaten-Verzeichniss angegebenen Punkte kann man die auf diese Vermessung gegründete 'Papen'sche Karte vom Königreich Hannover' mit Vortheil benutzen.

Die Überschriften + südlich und + westlich habe ich, um den Rechner ein Missverstehen der Zeichen sicherer vermeiden zu lassen, hinzugefügt.

Schering.

ABRISSE

DER AUF DEN VERSCHIEDENEN STATIONEN DER GRADMESSUNG 1821. 1822. 1823 UND DEREN FORTSETZUNG BIS JEVER 1824. 1825 FESTGELEGTEN RICHTUNGEN.

STERNWARTE

−5.242	+0.005	Theodolithplatz 1821
−5.507	0	Theodolithplatz 1823

Die Richtungen sind alle auf den Platz von 1823 reducirt.

0°	0′	2″614	Südliches Meridianzeichen
10	12	42.475	Meisner Heliotrop
64	1	18.020	Hohehagen (Platz von 1823)
180	0	0.000	Nordliches Meridianzeichen.

NORDLICHES MERIDIANZEICHEN

−5019.756 −0.133

0°	0′	5″772	*Sternwarte, Meridianspalt*
0	23	54.606	Hanstein
1	38	36.606	Göttingen, Albani
11	9	10.606	Göttingen, Mariae
13	9	0.606	Weende
18	9	22.606	Klein Schneen
18	21	36.606	Siboldshausen
19	9	56.606	Backhaus Pavillon
21	20	26.606	Rosdorf
27	11	1.606	Volkerode
29	45	32.372	Mengershausen
35	13	4.606	Baum bei Mengershausen
38	12	9.606	Gronde
43	23	33.272	Baum
48	6	29.372	Baum an der Mündner Chaussée
48	19	41.527	*Hohehagen Postament* (1821)
51	41	52.606	Hetgershausen, Kanten des Thurms
51	42	54.606	
64	33	26.606	Elliehausen
101	41	24.606	Lenglern
138	22	10.606	Bovenden
145	51	24.606	Hevensen
148	22	51.606	Wolbrechtshausen
150	13	56″606	Parensen
150	22	31.606	Baum auf der Weper
158	10	54.606	Häuschen oberhalb Bovenden
160	13	18.606	Moringen
167	26	38.606	Grossenrode
167	57	11.021	*Hils, Postament*
358	30	30.606	Kanten des Thibautschen
358	32	36.606	Gartenhauses
358	42	5.606	

HOHEHAGEN

+6059.889 +12447.734 Hauptplatz von 1821 (1)
+6059.493 +12448.193 Nebenplatz von 1821 (2)
+6059.878 +12447.746 Platz von 1823 (3)

Die beigefügten Zahlen (1), (2), (3) bezeichnen die Standpunkte, von wo aus die Schnitte gemacht sind, die mit Cursivbuchstaben bezeichneten Richtungen sind am Platz (3) gemachte oder darauf reducirte Schnitte.

3°	47′	52″920	Meensen (3)
55	59	40.490	*Hercules*
64	0	39.064	Burghasungen (1)
41	43	53.800	Landwehrhagen (1)
41	57	7.800	Lutternberg (1)
165	22	49.800	Wolfstrang (1)
185	48	16.262	*Hils*
186	37	13.800	Hube, Durchschnitt (1)
193	32	13.161	Ochsenberg (3)
197	34	49.298	*Beinberg*
211	2	6.155	Echte (?) (2)
212	19	44.155	Nordheim, kleiner Thurm (2)
212	31	26.125	Nordheim, Rathhaus (2)
212	50	7.155	Nordheim, Kirchthurm (2)
225	33	53.612	Plesse dünner Thurm (1 u. 3)
225	37	14.064	Hetgershausen, Kanten des
225	38	26.064	Thurms (1)
225	38	14.161	Hetgershausen, Fahnenstange (3)
226	40	18.392	Windmühle bei Clausthal (1)

228°	20′	0″312	*Meridianzeichen*
229	13	52.161	Hägerhof (3)
231	40	52.064	Weende (1)
233	8	35.064	Gronde (1)
234	6	21.800	Warte hinter Clausberg (1)
236	48	3.612	Clausberg (1. 3)
238	17	27.103	*Brocken*
240	3	5.078	Achtermannshöhe (3)
240	18	53.161	Baum (3)
240	27	32.064	Göttingen Jacobi (1)
240	36	48.064	Göttingen Mariae (1)
240	54	56.064	Roringen (1)
240	55	54.161	Göttingen Johannis, nordl. Th. (3)
240	59	3.064	Göttingen Johannis, südl. Th. (1)
241	14	5.064	Göttingen Rathhausthurm (1)
241	45	43.064	Göttingen Albani (1)
241	57	35.064	Kanten des Thibautschen Gartenhauses (1)
241	59	51.064	
242	0	31.064	
242	13	38.064	Oesterley's Hinterhaus (1)
242	45	48.064	Backhaus Pavillon (1)
243	1	18.161	Kanten von Reitemeyer's Gartenhaus (3)
243	2	37.161	
243	3	11.161	
243	48	5.064	Jägers Gartenhaus (1)
244	1	20.682	*Sternwarte (Platz von 1821)*
244	19	3.161	Schorstein des deutschen Hauses (3)
244	21	25.161	
248	6	54.800	Baum bei Mengershausen (1)
250	47	44.612	Rosdorf (1. 3)
251	0	9.362	Dreckwarte (1. 3)
252	0	51.161	Landwehrschenke, Südöstl. Kante(3)
253	4	16.064	Geismar (1)
261	13	47.800	Dimarder Warte (1)
266	11	15.800	Wehnder Warte (bei Duderstadt) (1)
268	47	18.112	Niederjesa (1. 3)
272	16	46.160	Südliche Gleiche (3)
272	19	24.064	Südliche Gleiche Spitze Ruine (1)
272	30	1.800	Reinhausen, Amtshaus, mittelstes Fenster (1)
273	42	18.800	Siboldshausen (1)
279	22	54.932	Ballenhausen? (1)
284	6	34.064	Dramfelde (1)
290	47	16.235	Dünwarte (1. 3)
293	17	36.800	Chaussée jenseits Heiligenstadt (1)
295	11	38.064	Jühnde (1)
322	50	21.480	Helmshausen (1. 3)
324	30	25.453	*Inselsberg (Enckes Platz 1821)* (1)
324	31	25.536	*Inselsberg (Gerlings Platz 1823)*
337	36	45.155	Boineburg Steinhaufen (1)
337	38	30.470	Boineburg Erhöhung (1)
346	58	52.387	*Meisner, Hessischer Dreieckspunkt*
348	10	48.920	
348	27	46.920	Bäume auf dem Meisner (3)

HILS

— 40952.298 + 7668.304

5°	48′	19″302	*Hohehagen*
27	42	9.969	Wolfsstrang
43	37	6″741	Erichsburg
143	19	39.741	Hohenbüchen
157	11	52.373	*Deister*
157	12	48.510	Baum am Deister
157	14	58.510	Zweiter Baum daselbst
164	43	59.452	*Lüdersssen*
165	24	4.510	Elze
165	46	56.510	Thurm
167	50	32.510	Brüggen
169	59	13.510	Limmer?
172	17	37.155	*Brelingerberg*
172	30	16.581	Hannover Neustädter Thurm
172	50	28.581	Hannover Kreuzthurm
173	0	28.140	*Hannover Marktthurm*
173	16	6.890	*Hannover Aegidii*
219	35	45.128	Beinberg Signal
230	44	21.636	Wohlenberg
231	10	29.578	*Lichtenberg*
231	19	41.608	Lichtenberg Ruine
239	25	15.741	Warte
281	7	52.448	*Brocken*
288	8	30.741	Kleines Haus auf einem Harzberge
288	10	36.741	Grosses Haus ebendaselbst
304	2	36.065	Sebexen
304	15	59.741	Grosses Haus, mittelster Schorstein
304	26	4.741	Neukrug
304	36	8.741	Chausséehaus
305	8	12.521	Calefeld
307	57	48.741	Echte
337	5	31.302	Höckelheim
337	54	44.906	Stöckheim
338	32	50.510	Sudheim
341	40	3.573	Heliotropplatz
344	24	54.741	Plesse, dicker Thurm
344	31	1.741	Plesse, dünner Thurm
344	38	6.144	*Eimbeck*
347	50	52.719	Hügel
347	57	11.630	*Meridianzeichen*
348	51	26.636	Iber
349	54	2.015	*Göttingen Jacobi*
353	7	1.741	Hanstein
358	36	0.573	Heliotropplatz

BROCKEN

— 30310.087 — 46418.626

4°	26′	26″303	Thurm
5	9	45.560	Inselsberg Haus
5	10	37.744	*Inselsberg (Gerlings Platz 1823)*
18	7	5.391	*Struth*
39	21	47.966	*Meisner*
39	31	22.866	Sülberg Warte
42	11	11.866	
42	11	53.866	Hanstein
42	12	24.866	
42	12	42.866	
42	21	36.866	Rusteberg
49	20	31.844	Berensbausen (im Eichsfelde)
57	34	37.320	*Herkules*

58°	17′	25″331	*Hohehagen Platz von 1821*
58	17	25.377	*Hohehagen Platz von 1823*
60	18	51.891	Burghasungen
63	14	33.866	Plesse dünner Thurm
92	27	32.104	Clausthal Windmühle
97	8	17.798	Gandersheim?
97	10	46.798	
101	7	54.056	*Hils*
141	9	27.688	Ringelheim luth. Kirche
141	11	51.021	Sutmerthurm
141	26	5.688	Haringen
141	29	54.688	Ringelheim kathol. Kirche
142	18	33.188	Dörnten
142	45	21.910	Grauhof
145	57	59.688	Otfresen
147	4	8.688	Steinbrück, Amthaus
147	14	52.070	*Lichtenberg*
147	29	47.213	Lichtenberg, Ruine
171	26	3.368	Wolfenbüttel, Schloss
171	45	15.104	Heiningen
171	49	44.632	Braunschweig, Michaelis
171	52	47.868	Wolfenbüttel, Neue Kirche
171	57	46.970	Braunschweig, Martini
172	19	11.857	Braunschweig, Andreae
172	26	0.705	Fenster eines Treibhauses?
172	41	20.632	Braunschweig, Catharinae
176	52	52.688	Spitzer Thurm
235	13	28.738	Huyseburg erster Thurm
235	14	24.688	Huyseburg zweiter Thurm
241	41	37.143	Magdeburg erster Thurm
241	42	36.143	Magdeburg zweiter Thurm
249	38	36.606	Halberstadt
251	50	40.303	Wernigerode Kirchthurm
252	35	44.303	Wernigerode Schloss
270	53	53.021	Quedlinburg
278	52	32.152	Hüttenrode
278	53	48.329	Cattenstedt
282	38	36.420	Petersberg
294	56	53.739	Harzgerode
320	51	29.920	Kyffhäuser
327	42	54.793	Platz bei Ilfeld
341	11	46.323	Posse
356	55	49.580	Tettenborn
356	57	48.907	Platz auf dem Wurmberg 1821
356	57	41.580	Ein anderer Platz daselbst 1823
357	19	20.618	Haus auf dem Wurmberge

INSELSBERG

+ 75233.714 — 36849.867 Hessischer Dreieckspunkt

Die Hessischer Seits ausgeführten Messungen werden hier nur zur Vollständigkeit des Systems beigefügt.

144°	31′	29″825	*Hohehagen (Platz von 1823)*
185	10	59.970	*Brocken*

LICHTENBERG

— 66001.353 — 23458.424

51°	10′	28″468	*Hils*
51	56	19.085	Wohldenberg, viereck. Thurm
52	15	52.859	Wohldenberg, spitzer Thurm
55	57	40.468	Nette
100	5	30.085	Capelle bei Otbergen
100	18	20.085	Warte
104	53	48.579	*Deister*
107	41	15.085	Gross Giesen
110	14	43.085	Forste
113	9	56.085	Harsum
124	0	29.085	Bredelem
124	12	3.524	Adlum
124	14	26.804	Algermissen
124	51	45.085	Windmühle
126	6	13.281	Hannover Neustädter Thurm
126	10	15.282	Lühnde
126	26	51.052	Hannover Aegidii
126	30	18.452	Hannover Marktkirche Thurm
126	33	12.478	Hannover Kreuzkirche Thurm
127	47	55.304	Betrum
127	48	53.524	Garmsen
128	6	50.085	Windmühle
130	26	20.085	Ferne Windmühle
130	45	30.524	Sosmar
131	47	56.524	Gross Lopke
132	3	26.804	Feldbergen
134	50	53.939	Hohenhameln
135	36	8.473	Ilten
141	38	23.085	Hoheneggelsen
144	27	5.965	Burgwedel
146	26	40.085	Neu Steinbrück
147	6	39.478	Melrum
148	26	0.782	Equord
150	27	12.282	Adenstedt
151	17	21.282	Gross Solschen
152	5	9.478	Burgdorf
153	6	8.524	Nahe Windmühle
153	33	23.085	Sehlde
156	13	7.743	Schwichelde
156	13	30.102	Steinbrück
157	20	39.743	Lesse
158	19	24.468	Rosenthal
160	28	4.888	*Falkenberg*
161	32	53.478	Ferner sp. Thurm
161	46	14.996	Gadenstedt
165	49	55.478	Celle Stadtkirche
166	21	9.085	Lafferde
169	44	37.524	Stukenberg
170	47	54.015	Ottbergen
170	55	7.869	*Garssen*
171	34	24.819	Ütze
176	20	12.524	Woltwiese
194	16	17.452	Repner
220	57	21.452	Timmerlah
221	25	9.468	Engelnstedt
223	57	30.468	Bruchmachtersen
224	0	9.478	Braunschweig Petri

224°	8′	33″878	Braunschweig Andreae
224	45	41.478	Braunschweig Martini
224	50	48.478	Braunschweig Catharinae
224	59	57.478	Braunschweig Michaelis
225	46	37.452	Hondelage
226	4	22.468	Broizen
226	20	55.452	Wendhausen
226	26	3.478	Braunschweig Aegidii
226	46	45.452	Hügel bei Broizen
244	4	34.465	Appenrode?
327	14	45.541	*Brocken*

NEBENPLATZ

−66001.465 −23458.558

52°	10′	28″452	Hils
126	30	17.706	Hannover Marktthurm
139	7	51.513	Bierbergen
139	37	0.513	Isernhagen
143	5	44.513	Lehrte
144	27	1.513	Burgwedel
148	26	2.513	Equord
161	46	24.513	Gadenstedt
161	59	25.513	Thurm
192	27	1.513	Wohlenberg
327	14	46.382	Brocken

DEISTER

−78478.377 +23444.173

31°	4′	38″138	Windmühle
143	3	4.138	Altenhagen
145	53	21.138	Steinhude
148	47	18.138	Gross Goltern
149	21	32.138	Colenfelde
152	12	24.728	Wunstorf st. Thurm mit Spitze
152	47	9.164	Bücken
156	29	17.138	Thurm
159	4	34.138	Wennigsen
161	45	56 138	Redderse
162	7	21.138	Leveste
162	54	40.138	Thurm
162	58	6.933	Neustadt am Rübenberge
164	6	20.138	Rücklingen?
165	42	6	Ferner Horizont
167	8	6	Ferner Horizont
171	48	3.138	Kirchwehren
179	31	54.138	Seelze
180	50	55.138	Gehrden
195	1	57.789	*Falkenberg*
202	52	2.008	Ronneberg
202	52	27.872	*Winsen*
204	28	0.138	Hainholz
209	59	39.008	Hannover Neustädter Thurm
210	23	8.586	Hannover Kreuzkirche Thurm
210	28	16.008	Isernhagen
210	59	4.138	Wetbergen
211°	9′	56″138	Hannover Marktkirche, Thurm
211	24	4.164	Burgwedel
212	21	3.583	Hannover Aegidii
214	8	0.008	Potholtensen
217	1	44.728	Celle Stadtkirche
218	13	49.996	*Garssen*
228	8	52.510	Kirchrode
229	36	44.164	Burgdorf
231	2	48.510	Wilkenburg
232	10	34.510	Thurm
236	6	51.510	Hiddesdorf
238	1	47.446	Utze
239	51	14.119	Lehrte
241	4	12.510	Iten
241	39	43.510	Grasdorf
242	0	29.946	Meinersen
249	17	51.164	Edemissen
251	9	54.510	Sehnde
252	41	54.510	Müllingen
252	56	46.510	Pattensen
254	10	56.510	Bolzum
255	9	34.510	Oesselse
256	13	26.510	Gleidingen
259	26	48.510	Bledelem
259	54	57.164	Lühnde
261	21	43.510	Heisede
261	40	27.510	Gross Lopke
263	10	56.508	Hotteln
263	47	8.164	Gross Solschen
263	47	40.008	Hüpeden
264	56	38.008	Bennigsen
265	8	28.164	Algermissen
265	9	45.586	Hohenhameln
266	24	45.241	Braunschweig Andreae
266	28	17.164	Braunschweig Catharinae
266	34	45.164	Braunschweig Petri
266	38	10.164	Thurm
266	47	37.164	Braunschweiger Dom
266	50	53.586	Clauen
266	53	24.164	Adenstedt
266	56	40.164	Braunschweig Martini
267	4	39.164	Obergen
270	20	30.008	Sarstedt
272	41	44.474	Steinbrück
272	53	41.241	Rutenberg
274	5	9.474	Lengede
274	6	55.492	Hoheneggelsen
274	18	34.474	Addlum
274	46	55.510	Ahrbergen
276	12	22.164	Borsum
276	59	8.164	Harsum
277	39	31.164	Giften
278	1	39.164	Förste
279	14	14.759	Jeinsen
279	44	15.510	Thurm
282	2	8.809	Nettlingen
283	46	17.474	
284	48	42.008	Lichtenberg Ruine
284	53	48.908	*Lichtenberg*
285	27	42.492	Weisses Gebäude
285	44	5.138	Ruine

285°	58′	17″008	Gestorf
286	49	20.474	Capelle bei Obergen
290	24	47.227	Hildesheim Jacobi
290	55	50.008	Hildesheim Andreae
290	58	48.008	Hildesheim Michaelis
291	19	8.510	Rössing
292	23	36.510	Emmerke
293	23	30.008	Moritzberg
296	43	12.510	Sorsum
297	20	49.510	Gross Escherde
298	49	6.946	Beinberg
300	41	23.029	Ruine Sutmerthurm
304	36	23.259	Malersen
305	20	42.510	Adersen
309	48	1.510	Poppenburg kathol. Kirche
310	9	56.510	Burgstemmen
310	58	36.510	Kloster Esche
312	42	22.474	Wülfingen
314	11	19.474	Sibbesen
315	43	21.474	Betheln
323	52	7.474	Elze
324	4	0.474	Gronau kleiner Thurm
324	10	21.474	Gronau
329	54	56.164	Baum bei Brunstein
330	17	4.474	Banteln
330	48	25.309	Alfeld
336	43	34.164	Wülfinghausen
337	11	55.404	*Hils*

GARSSEN

−125867.401 −13888.808

21°	54′	30″049	Burgdorf
30	54	40.988	Anderten
38	6	28.638	Baum am Deister
38	9	15.638	Zweiter Baum daselbst
38	13	51.485	*Deister*
41	12	12.030	Hannover Marktthurm
45	25	1.507	*Isernhagen*
46	39	10.813	Burgwedel
49	8	14.843	Celle Stadtkirche
49	50	42.049	Celle Schloss 1. Kuppel
50	2	26.648	*Celle Schloss Uhrthurm*
50	16	16.049	Celle Schloss 2. Kuppel
50	59	12.988	Pyramidenförmiger Baum
97	52	56.468	*Winsen*
137	28	43.699	*Falkenberg Heliotrop*
137	29	2.638	Falkenberg Signal b.
141	19	40.049	Becklingerbaum
217	23	15.049	Eschede
225	0	59.981	*Scharnhorst*
320	9	42.049	Langlingen
325	55	50.049	Meinersen
329	40	2.049	Paese
343	47	10.638	Wienhausen
345	30	7.638	Edemissen
350	43	15.205	Lichtenberg Ruine
350	55	2.399	*Lichtenberg Heliotrop*

FALKENBERG

−146621.040 +5142.567

1°	9′	51″019	Burgwedel
4	36	43.292	Isernhagen
6	26	44.338	Bothfeld?
9	21	21.019	Hannover Aegidii
9	41	18.964	Hannover Marktkirche Th.
9	54	36.019	Hannover Kreuzkirche Th.
10	9	47.019	Hannover Neustädterthurm
11	45	37.439	Bissendorf
12	26	21.238	Windmühle
12	32	7.238	Windmühle
15	2	2.957	*Deister*
26	49	8.665	Pyramidenförmiger Baum
35	52	18.238	Ferne Windmühle
35	58	22.939	Neustadt am Rübenberge
36	13	7.439	Mandelsloh
36	49	43.223	Basse
37	1	47.639	Thurm
38	19	36.397	Ferne Windmühle
40	45	36.344	Ahlden
40	47	40.238	Bergkirchen
42	31	47.149	Grosser Thurm
51	12	15.814	Ostenholz
77	8	49.985	Rethem
81	53	12.854	Bücken
82	12	9.004	Asendorf
85	30	28.004	Kirchboizen
95	17	1.965	Walsrode
136	45	41.498	*Elmhorst*
140	31	48.994	Grosser Baum
140	42	17.994	Kleiner Baum
175	42	51.4	Epailly's Signal
180	42	2.	Signalbaum
185	56	33.7	Becklinger Thurm
187	51	9.388	*Wilsede Heliotrop*
187	52	25.360	Wilsede Signalbaum
225	13	18.833	*Wulfsode*
266	17	35.321	*Hauselberg*
274	18	22.785	*Breitharn*
296	28	32.700	*Scharnhorst*
296	33	18.740	Eschede
302	40	37.629	Bergen
305	44	20.238	Sülze
317	28	43.704	*Garssen*
320	12	18.2	Wohlenberg
323	50	27.540	Wienhausen
329	36	25.155	*Celle Stadtkirche*
330	3	44.019	Celle Schlosskuppel
330	4	40.019	Celle Schlosskuppel
331	35	5.699	Utze
339	42	47.950	Muggenburg
340	28	0.699	*Lichtenberg*
347	59	3.293	Burgdorf
351	50	38.975	Winsen

SCHARNHORST

— 133392.348 — 21418.103

45°	0′	59″865	*Garssen*
114	56	0.025	*Eschede*
116	28	31.840	*Falkenberg*
180	39	58.442	*Breithorn*

BREITHORN

— 144611.129 — 21548.543

0°	39′	57″580	*Scharnhorst*
94	18	23.419	*Falkenberg*
122	36	5.722	*Hauselberg*
150	3	17.767	*Wilsede*

HAUSELBERG

— 148006.363 — 16239.880

43°	18′	42″205	Winsen
66	6	1.673	Hermannsburg
69	40	35.673	Bergen
86	17	34.872	*Falkenberg*
93	30	15.423	Signalbaum im Becklinger Holze
114	55	17.673	Müden
154	25	37.479	*Wilsede*
156	30	7.674	Munster?
188	51	24.137	*Wulfsode*
302	36	5.557	*Breithorn*

WULFSODE

— 171465.593 — 19895.232

8°	51′	22″198	*Hauselberg*
45	13	19.156	*Falkenberg*
118	29	58.770	*Wilsede*
198	40	53.327	*Timpenberg*

WILSEDE

— 182381.889 + 210.397

7°	51′	10″095	*Falkenberg*
8	0	22.2	Erhöheter Baum im Becklinger Holze
19	26	25.9	Soltau
21	36	20.9	Entfernter Thurm?
46	31	37.047	Elmshorst
61	10	21.1	Schneverdingen
66	13	28.845	Kirchwalsede
67	11	28.095	Steinberg
72	0	40.441	Bottel
73	51	50.2	Brokel
79	55	40.827	Rotenburg
89°	5′	4″481	Bullerberg
90	34	52.1	Schessel
103	40	9.859	Brüttendorf
108	22	39.951	Zeven
112	41	25.797	Sittensen
129	39	24.2	Alerstedt
129	58	6.348	Tostedt
138	28	9.948	Litberg
143	57	4.2	Apensen
183	29	1.832	*Hamburg Michaelis*
183	51	8.9	Hamburg kleiner Thurm
183	54	47.9	Hamburg kleiner Thurm
184	27	31.6	Hamburg Nicolai
184	41	26.877	Harburg
184	43	56.9	Hamburg kleiner Thurm
184	49	14.6	Hamburg kleiner Th. auf breitem Gebäude
184	53	49.2	Hamburg Catharinae
185	1	42.2	Windmühle
185	2	55.2	Hamburg Petri
185	24	7.2	Hamburg Jacobi
185	58	17.6	Hamburg St. Georg
204	28	35.103	Syk
206	41	46.2	Bergedorf
219	29	34.558	*Hohehorn*
250	37	50.1	Egesdorf
253	13	8.2	Lüneburg Nicolai
253	20	6.052	*Lüneburg Michaelis*
254	2	44.902	Lüneburg Johannis
254	6	55.2	Lüneburg Lamberti
266	43	44.2	Raven
275	29	13.874	Nindorf
279	31	4.2	Wilsede, Signalbaum
283	5	9.964	*Timpenberg*
298	29	58.591	*Wulfsode*
311	4	10.0	Holxerberg
330	3	16.463	*Breithorn*
333	1	52.2	Munster
334	25	35.817	*Hauselberg*
351	55	51.9	Wiezendorf

TIMPENBERG

— 177253.420 — 21852.221

18°	40′	53″762	*Wulfsode*
43	42	6.195	Signalbaum im Becklinger Holze
96	46	8.585	Amelinghausen
103	5	9.587	*Wilsede*
129	35	56.990	Raven
150	4	2.990	Salzhausen
157	42	15.068	*Hamburg Michaelis*
199	42	16.045	*Nindorf*
329	17	42.806	Ebsdorf?
331	22	43.990	Holxerberg

NINDORF

— 180162.361 — 22894.019

19°	42′	14″949	*Timpenberg*
95	29	14.081	*Wilsede*
100	21	32.755	Raven
138	24	12.755	Salzhausen
139	30	12.611	Ramelsloh
153	20	19.755	Altona Stadtkirche
155	17	27.774	*Hamburg Michaelis*
156	1	57.755	Hamburg Nicolai
156	15	50.755	Hamburg Catharinae
156	39	36.755	Hamburg Petri
156	56	51.755	Hamburg Jacobi
157	12	35.611	Windmühlenflügel
157	47	12.755	Hamburg St. Georg
165	59	58.755	Steinbeck
180	35	38.831	Syk
188	9	7.269	*Hohenhorn*
199	23	15.755	Grauer Thurm unter dem Horizonte
201	56	41.678	Bardowiek
201	57	52.678	
207	58	28.678	Kreuzen
213	53	16.487	*Lüneburg Michaelis*
215	2	51.915	Lauenburg Signal
215	12	53.755	Lüneburg Rathhaus
215	16	24.755	Lüneburg Lamberti
215	18	40.755	Lüneburg Nicolai
215	31	16.755	Lauenburg Amthausth.
215	43	4.755	Lüneburg Heiliger Geist
216	57	59.712	Lüneburg Johannis
226	44	6	Sehr ferner Bergrücken
228	41	44.755	Embsen
274	27	16.611	Medingen Th. 1.
274	28	26.611	Medingen Th. 2.
283	14	0	Hoher kahler ferner Bergrücken
287	49	22.611	Kloster Medingen
298	31	49.683	Bäzendorf

LÜNEBURG

Hauptplatz — 191597.163 — 30574.951

21°	23′	46″9	Bäume bei Telmar
21	26	38.9	
24	58	22.9	Bäzendorf
33	53	22.590	Nindorf
62	18	48.9	Raven
73	19	30.9	Wilsede Baum
73	20	8.188	*Wilsede Heliotrop*
73	34	37.682	Kalkberg
74	17	54.7	Egestorf?
79	58	40.7	Salzhausen?
114	12	44.7	Centrum von 1818
133	43	54.3	Winsen
136	34	27.9	Ottensen
137	47	57.8	Altona Stadtkirche
137	49	9.9	Altona kleiner Thurm
139	37	24.753	*Hamburg Michaelis*
139°	46′	33″9	Hamburg ganz kleiner Thurm
139	54	17.3	Ochsenwerder
140	18	26.3	Hamburg Nicolai
140	26	29.8	Hamburg Catharinen
140	35	51.9	Hamburg ganz kleiner Thurm
140	50	3.8	Hamburg kleiner Thurm auf breitem Gebäude
141	0	57.8	Hamburg Petri
141	17	35.8	Hamburg Jacobi
141	30	51.8	Kleiner Laf.-Th. jenseits Hamburg
142	21	59.3	St. Georg
143	33	43.9	Niendorf
143	57	46.9	Kirchwerder
144	25	14.9	Ferne Spitze
145	53	29.9	Ham
148	27	50.8	Wandsbeck
149	14	55.9	Windmühle
149	35	12.8	Steinbeck
150	5	53.9	Windmühle
152	13	13.9	Korslak
154	20	43.9	Bergedorf
171	48	1.9	Bardowiek 1.
171	48	35.9	Bardowiek 2.
174	28	33.182	*Hohenhorn*
181	10	28.8	Schumacher's Platz
199	44	21.9	Windmühle
215	56	25.663	*Lauenburg Signal*
216	50	5.497	Lauenburg Amthaus
217	19	58.454	Lauenburg Zenith Sector
229	23	26.9	Lüne
247	20	34.9	Lüneburg Nicolai
283	43	44.9	Lüneburg Johannis
323	0	45.9	Lüneburg Heilige Geist
365	46	48.9	Lüneburg Lamberti

Platz 2. — 191597.884 — 30575.509

24°	59′	9″7	Bäzendorf
33	53	23.449	Nindorf
37	52	0.7	Standpunkt 1.
130	4	51.149	Harburg
171	47	37.7	Bardowiek 1.
171	48	9.7	Bardowiek 2.
175	55	30.7	St. Dionys
215	56	25.375	Lauenburg Signal
216	50	5.368	Lauenburg Amthaus
241	53	16.2	Gegenüber dem bezeichneten Centr. der Laterne
247	23	2.7	Lüneburg Nicolai
258	23	49.7	Stern auf einem Gartenhause
258	55	9.7	Rathhaus
314	16	36.8	Alt Medingen breites Dach
314	19	16.8	Alt Medingen spitzes Dach
323	7	20.7	Lüneburg Heiliger Geist
345	52	19.7	Lüneburg Lamberti

Schumachers Platz — 191600.121 — 30575.017

130°	4′	44″016	Harburg
139	54	1.7	Ochsenwerder
143	42	23.7	Platz vor dem Thore

171°	47′	50″7	Bardowiek 1.
171	48	20.7	Bardowiek 2.
175	55	41.7	St. Dionys
174	28	43.7	Hohenhorn
204	24	29.7	Lüttau
215	56	45.168	Lauenburg Signal
216	50	26.326	Lauenburg Amthaus
229	27	28.7	Lüne

LÜNEBURG KALKBERG

— 191511.038 — 30282.895

33°	3′	45″2	Nindorf Stein
62	7	10.2	Raven
73	19	25.2	Wilsede Signalbaum
138	9	2.2	Altona
139	59	27.2	Hamburg Michaelis
216	31	52.2	Lauenburg Signal
217	26	20.2	Lauenburg Amthausthurm
232	43	37.2	Lüne
249	20	27.2	Lüneburg Nicolai
253	30	46.2	Lüneburg Michaelis bez. Centr. der Laterne
253	31	3.40	Lüneburg Michaelis Knopf
253	34	10.15	Lüneburg Michaelis Platz 1
275	34	34.2	Lüneburg Johannis
296	19	42.2	Lüneburg Heiliger Geist
310	13	53.2	Lamberti

LÜNEBURG VOR DEM THORE

— 191882.273 — 30367.793

252°	37′	45″7	Nicolai
286	31	25.7	Rathhaus
295	42	36.7	Johannis
323	42	23.700	Schumachers Platz
323	59	53.600	Platz 1.
324	3	28.663	Knopf
324	2	7.1	Bezeichn. Centrum der Laterne
336	4	19.7	Lamberti

ELMHORST

— 163054.915 + 20595.877

70°	18′	40″3	Visselhövede dicker Thurm
76	33	48.0	Müllers Nebenplatz
77	9	56.3	Visselhövede dünner Thurm
141	43	37.629	Bullerberg
178	18	0.898	Litberg
201	15	19.0	Thurmspitze?
226	31	35.546	Wilsede Heliotrop
226	32	58.011	Wilsede Signalbaum
301	3	58.5	Wegweiser
301	19	3.5	
311	10	2.2	Signalbaum im Becklinger Holze
316	45	40.476	Falkenberg

LITBERG

— 206866.630 + 21895.743

20°	14′	5″596	Schessel
30	25	57.5	Sittensen
59	56	19.825	Brüttendorf
66	0	48.786	Zeven
88	23	3.846	Ausdehnung des Teiches im Trentmoor
91	7	23.596	
102	10	47.1	Alerstedt
141	31	10	Spur eines entfernten Horizonts
159	25	25.071	Stade Cosmae
159	31	52.5	Stade Wilhadi
180	9	51.9	Apensen
194	33	46.4	Wedel
206	19	46.5	Rellingen
209	21	4.3	Estebrügge
210	9	44.196	Buxtehude
215	13	42.3	Bauers Warte
215	46	15.3	Bauers chinesischer Thurm
230	57	6.3	Altona Armenkirche
231	21	6.3	Altona Stadtkirche
231	23	5.3	Altona Rathhaus
233	35	14.346	Hamburg Michaelis
234	22	11.3	Hamburg kleiner Thurm
234	28	11.3	Hamburg hoher Thurm
234	22	48.3	Hamburg kleiner Thurm
234	33	5.3	Hamburg Petri
235	7	14.3	Hamburg Catharinae
250	36	52.3	Elstorf
288	7	32.2	Hollenstedt
318	28	12.193	Wilsede
331	30	1.3	Tostedt
358	18	3.803	Elmhorst

HAMBURG

Centrum — 224765.173 — 2369.933

Standpunkt 1. — 224764.186 — 2370.474

3°	28′	3″6	Wilsede Baum
3	29	4.731	*Wilsede Heliotrop*
16	2	46	Grenzen des Fensters
296	45	36	
314	43	22.9	Kirchwerder
318	45	45.3	Ochsenwerder
318	49	2.9	Lüneburg Nicolai
319	0	36.9	Lüneburg Johannis
319	37	22.732	*Lüneburg Michaelis*
319	52	24.9	Lüneburg Lamberti
359	18	35.740	Harburg

Standpunkt 2. — 224764.090 — 2370.385

3°	27′	57″9	Wilsede Baum
3	29	4.283	*Wilsede Heliotrop*
284	30	4.9	Hamburg Catharinae
287	12	41.899	*Hohenhorn*
291	19	34.5	Bilwerder
293	3	19.9	Bergedorf

300°	46′	5″1	Moorfeeth
318	45	50.0	Ochsenwerder
318	49	11.9	Lüneburg Nicolai
319	0	43.9	Lüneburg Johannis
319	37	22.355	*Lüneburg Michaelis*
319	52	28.9	Lüneburg Lamberti
320	31	55.1	Giebelfenster eines grossen Hauses
323	49	31.1	Winsen
335	17	24.687	Nindorf
337	42	13.470	Timpenberg
339	56	14.7	Wilhelmsburg
345	14	19.2	Thurm in Hamburg
355	8	21.2	Thurm auf Hafenhaus
359	18	33.6	Harburg

Standpunkt 3. — 224764.064 — 2369.712

3°	29′	1″023	Wilsede
21	10	14.4	Moorburg
53	35	18.538	Litberg
62	31	29.212	Apensen
66	20	52	Grenzen des Fensters
253	4	52	
359	18	18.998	Harburg

Standpunkt 4. — 224764.074 — 2369.701

0°	57′	33″0	Sinsdorf
3	29	0.970	Wilsede
21	10	9.0	Moorburg
53	35	18.445	Litberg
62	31	29.112	Apensen
356	39	11.0	Wilstedt
359	18	20.325	Harburg

Standpunkt 5. — 224764.344 — 2369.937

21°	10′	9″9	Moorburg
42	25	28.9	Elsdorf
53	35	17.916	Litberg
94	17	46.9	Altona Rathhaus
94	34	21.9	Bauers chinesischer Thurm
94	53	54.9	Bauers Thurm
96	9	57.9	Entfernter Horizont
98	52	25.9	Bauers Berg, Zelt
100	5	11.9	Stade, Wilhardi
100	18	18.9	Stade, Cosmae
323	49	9.9	Winsen

Standpunkt 6. — 224764.388 — 2369.634

3°	29′	0″554	Wilsede
90	14	16.9	Altona Hauptkirche
92	11	3.9	Niensteden
98	52	25.179	Baursberg Stein

BULLERBERG

— 181819.664 + 35400.829

5°	19′	9″719	Kirchwalsede
5	45	46.1	Rotenburg
8°	25′	2″5	Rotenburg Sprützenstange
11	8	49.5	Rotenburg Stein an der Chaussee diesseits
11	9	46.5	Rotenburg Stein an der Chaussee jenseits
27	49	55.004	Steinberg Signalbaum
31	59	20.811	Ahausen
32	13	58.621	Bottel
139	25	25.213	Brüttendorf
235	45	35.198	Tostedt
259	15	12.587	Schessel
269	5	5.148	Wilsede
281	25	22.963	Schneverdingen
306	24	23.8	Neuenkirchen
315	15	18.8	Brokel
321	43	39.592	Elmhorst
322	13	35.648	Elmhorst Nebenplatz

BRÜTTENDORF

— 193340.040 + 45266.609

56°	53′	54″565	Bremen Ansgarii Mitte
57	6	1.628	Wilstedt
197	21	45.517	Zeven Knopf
239	56	17.690	Litberg
265	54	53.3	Sittensen
283	40	11.399	Wilsede
293	1	4.628	Elsdorf
306	22	9.726	Schessel
319	25	27.704	Bullerberg
357	9	16.378	Bottel
359	16	1.240	Steinberg Signalbaum

BOTTEL

— 168158.341 + 44014.670

10°	47′	41″662	Steinberg
10	48	49.3	Steinberg Signalbaum 1.
11	51	13.3	Steinberg Signalbaum 2.
58	18	11.3	Heiligenfelde
64	48	33.3	Lunsen
90	46	15.3	Arbergen
97	45	13.3	Bremen Zwinger
97	46	56.3	Bremen kathol. Kirche
98	0	46.3	Bremen Martini
98	10	8.5	Bremen Dom
98	21	8.3	Bremen Unsrer lieben Frauen
98	33	49.3	Bremen Gymnasium
98	38	40.931	Bremen Ansgarius
130	30	21.1	Worpswede
143	53	1.7	Wilstedt
156	47	43.1	Sottrum
177	9	11.071	Brüttendorf
212	13	55.566	Bullerberg
213	12	11.0	Ahausen
222	15	49.801	Schessel
225	34	40.026	Rotenburg
250	0	39.148	Wilsede 252°?
252	1	4.466	Wilsede Signalbaum
324	13	37.3	Wedehof

ZEVEN

— 196973 309 + 44130.578

1°	17′	44″058	Steinberg
17	21	57.036	Büttendorf
53	26	12.302	Bremen
67	43	3.9	Platz im Garten des Posthauses
124	13	45.024	Brillit
152	47	55.482	Selsingen
246	0	47.896	Litberg
288	22	41.424	Wilsede
316	59	25.036	Schessel

STEINBERG

— 163594.034 + 44884.912

10°	56′	28″8	Eistrup
11	27	26.2	Balze
12	13	12.2	Döverden
12	59	8.2	Loh
19	34	6.675	Verden Nicolai
19	42	32.2	Verden Dom
21	11	50.425	Verden Johannis
22	28	46.2	Bücken
27	38	29.4	Magelsen
31	29	20.2	Wechold
33	58	14.2	Eizendorf
36	16	58.031	Asendorf
46	21	56.2	Matfeld
50	39	37.2	Blender
63	17	2.2	Intschede
64	51	0.2	Heiligenfelde
78	0	25.2	Thedinghausen
78	47	16.2	Lunsen
82	47	39.2	Heiligenbruch
88	49	41.2	Leeste
90	0	10.2	Kirchweihe
96	20	2.2	Achim
98	26	30.2	Thurm
98	35	50.2	Delmenhorst
105	22	50.2	Ferner Thurm
106	0	42.726	Bremen kathol. Kirche
106	4	12.2	Bremen Zwinger
106	10	26.2	Bremen Martini
106	23	32.2	Bremen Dom
106	33	12.2	Bremen Unsrer lieben Frauen
106	46	2.221	Bremen Ansgarii Heliotrop
106	46	2.526	Bremen Ansgarii Knopf
106	53	10.2	Bremen Stephani
107	14	18.2	Bremen Remberti
111	3	50.2	Thurm
112	57	37.2	Thurm
161	5	15.0	Zweiter Signalbaum, unten
161	13	57.0	Zweiter Signalbaum, oben
181	17	37.150	Zeven
182	51	52.2	Windmühle von Mülmshorn
190	47	40.064	Bottel
237	31	50.2	Brokel
247°	11′	24″612	Wilsede
251	45	57.0	Kirchwalsede
261	18	27.0	Wedehof, linke Ecke des Ziegeldachs
294	24	31.5	Baum oder Thurmspitze
335	19	29.0	Linteloh
347	25	19.0	Lindhop Schorstein
353	18	25.7	Westen

BREMEN

Hauptplatz von 1824. — 173074.579 + 76350.972

20°	32′	35″325	Twistringen
74	33	28.0	Ganderkesee
75	43	29.1	Delmenhorst
99	35	50.9	Thurmspitze
100	40	39.690	Oldenburg
101	26	25.208	Hude
115	18	22.9	Thurmspitze unterm Horizont
115	27	14.9	Thurmspitze
115	38	10.9	Bardewisch
115	49	16.427	Rastede
115	52	57.1	Rablinghausen
116	21	53.6	Windmühle
119	12	11.9	Thurmspitze
119	16	39.5	Berne
131	53	33.1	Vegesack
132	58	45.390	Neuenkirchen
199	41	44.085	Brillit
231	17	46.6	Kirchtimke
233	25	59.010	Zeven Heliotrop von 1824
236	46	32.995	Wilstedt
236	53	48.078	Büttendorf
278	38	42.771	Bottel
286	18	9.8	Bremen Gymnasium
286	46	2.718	Steinberg
301	16	13.8	Arbergen
302	5	4.050	Verden Johannis
302	26	17.8	Intschede
302	57	45.953	Verden Dom
303	4	35.9	Thurm in Verden
307	39	55.9	Lunsen
307	55	6.9	Blender
308	27	18.8	Bremen Unsrer lieben Frauen
323	32	4.9	Ride
330	2	25.9	Katholische Kirche
333	1	12.9	Weihe
349	6	46.9	Heiligenfelde
354	6	27.9	Martini
355	46	7.9	Barrien

Platz vom 19. Juli 1824 — 173074.923 + 76351.200

12°	36′	27″1	Bassum
182	36	38.1	St. Jürgen
184	12	42.852	*Hambergen*
207	37	37.1	Worpswede
224	1	54.1	Thurm
226	43	17.1	Lilienthal
233	25	59.184	*Zeven Thurm*

246°	6′	45″1	Horn
265	49	0.617	*Rotenburg*
286	20	51.1	Bremen Gymnasium
286	45	50.1	Steinberg Signal
307	39	56.1	Lunsen
307	55	21.1	Blender
308	28	44.1	Bremen Unsrer lieben Frauen
327	19	23.836	*Bücken*
330	2	3.1	Bremen katholische Kirche
333	1	16.1	Weihe
349	6	50.1	Heiligenfelde

Platz vom 22. Juli (Lothplatz) — 173074.521 + 76350.975

119°	16′	47″0	Berne
176	50	59.0	Scharmbeck
180	16	48.1	Thurmspitze?
233	15	32.5	Platz am Heerdenthore
236	46	43.0	Wilstedt
286	17	34.0	Bremen Gymnasium
301	16	23.0	Arbergen
301	39	32.0	Domshof
302	5	4.486	Verden Johannis
330	2	8.0	Bremen katholische Kirche
354	5	56.5	Bremen Martini

Platz vom 23. Julius — 173074.943 + 76351.052

20°	32′	34″056	*Twistringen*
132	58	43.715	*Neuenkirchen*
207	37	25.0	Worpswede
226	43	20.0	Lilienthal
265	49	0.287	*Rotenburg*
268	29	47.0	Brokel
270	58	0.0	Bremen Remberti
286	21	10.0	Bremen Gymnasium
307	40	4.0	Lunsen
313	28	34.0	Magelsen
314	3	36.0	Bremen Dom
316	14	54.0	Eizendorf
333	1	14.0	Weihe
339	2	53.837	*Asendorf*
349	6	54.0	Heiligenfelde

Platz vom 1. August — 173075.126 + 76351.010

296°	55′	32″8	Achim
302	5	6.846	Verden Johannis
303	28	41.8	Ferner Thurm
321	18	23.8	Wechold
333	1	25.8	Weihe
355	46	4.8	Barrien

Platz von August 13 u. 17, erste Aufstellung — 173075.149 + 76352.423

9°	4′	23″0	Brinkum
54	59	10.0	Huchting
139	10	33.0	Gröplingen
141	47	31.0	Gramke
143	45	29.0	Lessum
165	11	51.768	*Garlste*
199°	41′	47″289	*Brillit*
232	59	9.0	Borgfeld
236	53	52.084	*Brülltendorf*
262	47	40.9	Oberneuland
262	16	42.9	Sottrum
296	26	47.0	Badner Windmühle
329	22	33.0	Ahrsten

Platz vom 17. August, zweite Aufstellung — 173074.613 + 76351.066

115°	21′	51″6	Windmühle
115	38	14.6	Bardewisch
115	49	16.790	Rastede
119	12	6.6	Thurmähnliches Object
120	1	33.6	Moorlosen
120	7	10.6	Huntebrück
120	16	13.6	Seehausen
122	32	39.6	Trockne Baumkrone
123	16	2.285	*Grossen Meer*
132	58	45.703	*Neuenkirchen*
143	45	20.6	Lessum
160	20	0.6	Ausgewipfelter Baum
165	11	49.662	*Garste*
176	50	24.6	Scharmbeck
182	55	3.6	Osterholz
184	12	41.603	*Hambergen*

BREMEN DOMSHOF

— 172815.860 + 75931.494

53°	21′	34″6	Dom
108	4	31.6	Unsrer lieben Frauen
121	39	32.0	Ansgarius Loth
121	41	12.958	Ansgarius Knopf
152	4	38.6	Gymnasium

BREMEN HEERDENTHORSWALL

— 173252.563 + 76112.469

30°	15′	37″0	Martini
53	15	32.5	Ansgarius Loth
53	17	19.833	Ansgarius Knopf
226	31	16.0	Lilienthal
340	51	54.0	Gymnasium
349	14	23.0	Dom
356	45	12.0	Unsrer lieben Frauen

BRILLIT

— 209920.394 + 63160.149

12°	52′	3″9	Platz unweit des Holzvogt
13	14	41.8	Worpswede
19	4	59.204	Bremen Dom
19	41	56.950	Bremen Ansgarius Centrum
19	41	57.037	Bremen Ansgarius Heliotrop
49	19	51.594	Garlste

97°	1′	38″7	Windmühle
97	8	42.7	Windmühle
97	34	57.281	Esensham
106	51	6.746	Loxstedt
114	55	4.669	Bexhövede
114	45	19.369	Blexen
124	0	37.022	Bremerlehe Heliotrop
304	13	50.734	Zeven Heliotrop
345	21	11.4	Platz unweit der Gnarrenburger Windmühle
345	26	14.9	Wilstedt

GARLSTE

— 193865.912 + 81845.072

9°	27′	5″0	Ausgewipfelte Tanne
24	50	31.2	Ganderkesee
29	19	29.0	Nahe Windmühle
32	57	20.0	Vegesack
41	26	48.2	Mullerberg
61	43	21.0	Berne
77	20	14.686	Neuenkirchen
84	5	59.0	Windmühle
84	32	57.711	Thurm
87	36	50.371	Rastede
89	6	53.0	Hoher Baum 1.
89	7	46.0	Hoher Baum 2.
89	9	27.0	Hoher Baum 3.
91	11	31.4	Grossenmeer
97	17	29.0	Mayenburg
106	4	24.7	Jahde
107	43	54.7	Hammelwörden
112	10	4.070	Varel
118	28	50.356	Uthlede
121	12	14.4	Golzwarden
123	56	53.0	Schwey
126	56	13.0	Windmühle
130	44	42.597	Sandstedt
131	53	54.7	Rotenkirchen
133	7	32.7	Seefeld
139	18	14.7	Esensham
140	41	27.024	Stolham
167	18	37.365	Bremerlehe
169	42	0.836	Loxstedt
173	28	15.0	Bramstedt
177	14	35.0	Bexhövede
229	19	45.086	Brillit
235	57	28.036	Hambergen
279	21	1.0	Warnungstafel
293	6	28.0	Schorstein
345	11	55.589	Bremen Ansgarius Mitte
345	11	58.381	Bremen Ansgarius Heliotrop
345	20	43.0	Bremen Martini
346	41	59.0	Bremen Stephani

BREMERLEHE

— 227663.375 + 89453.894

2°	27′	14″2	Gestendorf
3	22	18.6	Uthlede
25°	9′	18″2	Dedesdorf
25	50	38.2	Windmühle von Strohhausen
28	6	34.2	Rotenkirchen
37	47	14.2	Thurmähnliches Object
38	57	46.9	Esenham
44	46	22.2	Blexen
46	37	42.0	Atens
53	8	5.2	Seefeld
59	21	10.455	Varel
82	31	34.2	Eckwarden
82	59	15.2	Dicker Thurm
95	12	50.2	Burhave
103	31	22.739	Langwarden
126	13	0 2	Bremer Bake
138	11	28.2	Imsum
150	1	26.2	Wremen
174	20	42.2	Dorum
175	48	54.2	Cappel
185	45	24.2	Midlum
213	43	51.3	Wanna
273	42	1.2	Ringstedt
304	0	45.583	Brillit
313	11	25.4	Schiffdorf
323	28	46.211	Bexhövede
342	23	31.255	Loxstedt
344	17	37.2	Bramstedt
347	18	53.042	Garlste
356	1	10.2	Wulstorf
359	16	59.9	Stotel

Andrer Platz — 227663.588 + 89453.739

2°	27′	25″2	Gestendorf
3	22	35.2	Uthlede
12	14	29.2	Sandstedt
13	6	43.2	Kleiner nicht sehr ferner Thurm
28	6	35.2	Rotenkirchen
38	57	52.2	Esenham
43	14	13.2	Blexumer Windmühle
44	46	15.2	Blexum
46	37	47.2	Atens
49	44	24.2	Abbenhausen
53	8	12.2	Seefeld
70	7	9.2	Stolham
81	31	25.2	Eckwarden
82	59	11.2	Dicker Thurm
95	12	43.2	Burhave
126	12	51.2	Bremer Bake
138	11	16.2	Imsum
165	56	59.2	Mulsum
174	20	27.2	Dorum
175	48	44.2	Capeln
185	45	14.2	Midlum
283	52	6.2	Brameln
304	0	47.293	Brillit
313	11	42.2	Schiffdorf
323	28	51.032	Bexhövede
347	18	54.222	Garlste
356	1	16.2	Wulstorf
359	17	7.2	Stotel

VAREL

— 209473.921 + 120150.600

43°	18′	8″956	Westerstede
87	38	21.9	Bockhorn spitzer Thurm
87	39	7.9	Bockhorn? niedriger Laternenthurm
118	26	38.2	Spitzer Thurm
132	9	42.1	Schloss Gödens
133	44	10.1	Laternenthurm in Neustadt-Gödens
133	55	16.1	Thürmchen
134	11	30.1	Neustadt-Gödens
142	48	36.1	Jever Stadtkirche
142	58	5.978	Jever Schlossthurm Dreieckspunkt
142	58	55.010	Jever Schlossthurm Centrum
146	9	32.5	Sande
163	25	41.5	Kniphausen
165	39	54.5	Dangast Badehaus
165	59	34.8	Sengwarden
169	53	21.8	Niende
207	25	24.5	Langwarden Loh
207	43	59.763	Langwarden Dreieckspunkt
211	34	32.9	Eckwarden
218	15	28.1	Burhave
220	23	13.7	Misselwarden
221	59	47.7	Ferner Haubenthurm
222	36	33.9	Wremen
223	17	16.7	Mulsum
239	21	1.978	Bremerlehe
239	56	30.1	Thürmchen 1 auf einem nahen
240	12	56.1	Thürmchen 2 Gebäude
241	55	24.4	Blexen
243	26	29.1	Elmloh
245	9	16.4	Atens
245	22	47.9	Abbehausen
246	57	33.4	Seefeld
250	47	57.7	Wulstorf
255	17	2.7	Esensham
257	48	40.7	Loxstedt
258	8	53.1	Nebenthurm der Vareler Kirche
259	3	12.6	Dedesdorf
260	15	29.9	Stotel
280	29	38.219	Sandstedt
284	22	13.269	Golzwarden
290	0	25.2	Uthlede?
291	12	3.8	Spitzer Thurm
292	10	9.326	Garlste
294	22	13.7	Struckhausen
294	57	41.7	Hammelwarden
306	59	49.819	Neuenkirchen
345	32	36.7	Platz in Lacroix Hause
347	25	20.473	Rastede

Erster Nebenplatz — 209474.119 + 120151.284

141°	19′	41″7	Windmühle mit sechs Flügeln
142	58	2.901	Jever Heliotrop
142	58	51.933	Jever Thurm
146	9	10.7	Sande
148	54	20.7	Marienhausen
154	26	25.7	Accum
154°	52′	21″7	Ferner Thurm
159	26	50.7	Ferner kleiner Thurm
163	25	41.7	Kniphausen
164	46	12.7	Dangast Speisehaus
165	59	35.7	Sengwarden
169	53	10.7	Niende
198	44	4.7	Bremer Bake
207	43	58.3	Langwarden

Zweiter Nebenplatz — 209474.226 + 120151.580

106°	3′	20″2	Zetel
154	26	22.2	Accum
154	42	20.2	Thurm
207	43	59.9	Langwarden Thurm
227	31	49.5	Imsum
230	23	50.3	Stolham
258	38	51.2	Varel Nebenthurm
268	40	30.5	Schwey
270	7	6.5	Rotenkirchen
306	59	51.520	Neuenkirchen
314	17	2.5	Jahde
317	34	48.3	Berne
345	53	25.2	Fenster in Lacroix Hause
347	25	21.487	Rastede

LANGWARDEN

— 232175.707 + 108215.212

14°	39′	59″5	Thurmspitze
19	27	5.5	Eckwarden
24	17	32.2	Object
27	40	42.550	Varel Nebenthurm
27	44	11.842	Varel Dreieckspunkt
38	7	22.8	Dangast grosses Haus
38	10	10.8	Dangast grosses Haus
38	12	15.8	Dangast kleines Haus
61	19	59.5	Schloss Gödens
61	29	35.5	Sande
62	19	55.5	Niende
62	20	13.9	Niende
64	10	31.5	Marienhausen
72	9	22.269	Kniphausen
72	28	55.5	Fedderwarden
83	59	55.728	Jever Dreieckspunkt
83	39	21.5	Windmühle
84	24	31.707	Jever Stadtkirche
86	30	37.5	Witmund
87	33	22.1	Sengwarden
92	56	37.6	Spitzer Laternenth. auf breitem Geb.
126	2	4.814	Wangeroog
155	53	42.8	Punkt a auf dem Deich
161	50	36.214	Bremer Bake
200	54	27.044	Neuwerk
200	59	38.8	Punkt b auf dem Deich
225	54	26.8	Punkt c auf dem Deich
232	31	55.5	Cappeln
266	8	29.5	Imsum
266	22	34.0	Depstedt

281°	45′	59″5	Fedderwarden Lootsenz
283	31	26.549	Bremerlehe und Punkt d
287	4	32.5	Schilfdorf
295	2	37.7	Geestendorf
325	21	3.5	Dedesdorf
328	50	39.5	Abbehausen
333	21	4.0	Sandstedt
334	17	19.5	Esensham
338	21	38.5	Rotenkirchen
342	0	34.191	Stollham
349	47	36.0	Seefeld

Zweite Aufstellung — 232175.267 + 268215.348

24°	17′	42″5	Object
27	44	12.522	*Varel Heliotrop*
49	24	49.5	Zetel
57	57	45.5	Neustadt-Gödens
61	20	17.5	Gödens kleiner Laternenthurm
61	29	48.5	Sande
62	20	10.5	Niende
64	11	6.5	Marienhausen
92	56	55.5	Spitzer Thurm
104	16	29.5	Lohe's Thurm
105	13	51.5	
197	8	53.5	Dreieckspunkt
241	9	32.5	Misselwarden
242	28	41.5	Dörum
246	40	14.5	Mulsum
250	11	42.5	Wremen
266	8	31.5	Imsum
266	22	41.5	Depstedt
295	2	51.5	Gestendorf
299	15	3.5	Blexen
301	33	18.5	Wulstorf
311	40	47.5	Burhave
312	36	27.5	Stotel
319	30	26.5	Atens

JEVER

— 229344.966 + 135141.823

0°	58′	52″8	Etzel
48	0	11.6	Platz auf dem Felde
69	39	14.936	Aurich
71	15	28.4	Windmühle mit 6 Flügeln
95	0	39.957	Witmund
104	49	52.8	Burhave
107	2	25.612	Dornum
115	22	26.112	Esens
129	42	9.8	Werdum
132	27	19.8	Eggling
132	37	46.8	
138	41	44.8	Berdum
141	53	37.8	Jever Stadtkirche
142	34	18.8	
142	7	8.1	Jever Stadtkirche Theodolithplatz
142	14	58.1	Jever Stadtkirche Knopf
142	19	43.1	
152	0	43.8	Meddoog

173°	35′	11″123	Wangeroog
174	31	30.1	Wangeroog Leuchtthurm
257	37	16.8	Sengwarden
258	10	56.4	Andere Aufstellung
258	53	40.5	Centrum
263	59	54.494	Langwarden
322	58	18.310	Varel
332	45	36.8	Neustadt-Gödens
333	20	12.8	Neustadt-Gödens
338	30	31.8	Schloss Gödens
358	53	50.1	Westerstede

Zweite Aufstellung — 229347.545 + 135129.495

170°	36′	23″3	Tettens
173	33	25.878	*Wangeroog*
186	46	27.3	Hohenkirchen
197	54	39.3	Minsen
198	28	44.3	Wiarden
220	41	51.3	Fischhausen
222	30	31.3	Waddewarden
234	39	14.3	Hocksiel
231	31	59.3	Packens
236	51	30.3	Bremer Bake
257	37	17.3	Sengwarden
264	0	4.222	Langwarden
285	6	56.3	Kniphausen
291	28	3.3	Niende
295	42	13.3	Accum
313	43	55.3	Marienhausen
316	22	12.5	Dangas, Badehaus
316	43	56.5	Conversationshaus
316	44	44.5	
318	43	43.3	Sande
322	59	52.764	*Varel*

Jever Stadtkirche — 229525.455 + 135282.234

27°	48′	56″9	Platz auf dem Felde
93	47	20.2	Witmund
104	13	36.2	Burhave
129	31	15.2	Werdum
134	16	27.2	Thurm oder Mühle
138	36	13.2	Berdum
152	18	5.2	Meddoog
154	0	5.2	Carolinenmühle
171	33	39.2	Tettens
175	51	57.2	Wangeroog
187	46	0.2	Hohenkirchen
222	2	56.2	Fischhausen
224	58	3.2	Waddewarden
258	49	41.2	Sengwarden
285	20	43.2	Kniphausen
291	56	20.2	Niende
296	22	16.2	Accum
320	36	32.7	Jever Schlossthurm Knopf
320	37	48.2	Jever Schlossth. Mitte des Cylinders
322	7	5.5	Jever Schlossth. Dreieckspunkt
332	33	38.2	Neustadt Gödens luth. Kirche
333	7	36.2	Neustadt Gödens Thurm
338	9	52.2	Schloss Gödens

Es werden hier noch diejenigen aus den Dänischen Messungen entlehnten Abrisse beigefügt, die zur Verknüpfung der Hannoverschen und Dänischen Dreiecke, imgleichen zur Festlegung der Altonaer Sternwarte gedient haben.

HAMBURG

— 224765.173 — 2369.933 (Centrum)

235°	56′	22″184	Basis nordlicher Endpunkt
245	30	54.784	Syk
247	31	30.894	Bornbeck
253	48	24.904	Basis südlicher Endpunkt
353	43	34.924	Rönneberg

HOHENHORN

— 216781.593 — 28139.131

5°	18′	44″020	Bäzendorf (nicht centrirt)
8	9	2.074	*Nindorf*
39	29	31.934	*Wilsede*
40	22	4.620	Winsen
44	31	54.430	Drenhausen
50	59	10.620	Alten Gamme
60	1	6.520	Kirchwerder
67	56	19.320	Entfernter hochliegender Th. (n. c.)
70	5	26.323	Neuen Gamme
71	44	26.223	Korslak
77	16	11.633	*Rönneberg*
86	33	8.673	Harburg
89	46	3.723	Ochsenwerder
90	6	42.023	Buxtehude
92	47	44.023	Moorburg
92	54	20.423	Wilhelmsburg
95	3	30.223	Entfernter Thurm (n. c.)
97	29	25.823	Hochliegende Mühle (n. c.)
97	47	27.890	Bergedorf grösster Thurm
103	27	48.623	Nienstedten
103	36	44.423	Baur's chinesischer Thurm
103	39	13.323	Baur's Warte
105	19	17.153	Altona Palmaille
105	37	10.123	Altona Armenkirche
106	27	21.623	Altona Rathhaus
107	12	49.223	*Hamburg Michaelis*
109	6	35.223	Spitzer Thurm (n. c.)
110	44	8.023	Kirchsteinbeck
117	52	48.023	Wandsbeck Schlossthurm
118	16	10.523	Rellingen spitzer Thurm
119	27	8.123	Niendorf
150	56	2.463	Basis südlicher Endpunkt
165	4	57.395	*Syk*
174	1	15.823	Bornbeck
293	22	34.820	Gülzow
309	46	2.720	*Lauenburg Signal*
354	28	34.520	*Lüneburg*
355	14	45.520	Bardewyk

LAUENBURG SIGNAL

— 206040.602 — 41045.727

16°	40′	32″488	Lauenburg Amtshaus
35	56	29.438	*Lüneburg Michael*
47	54	31.4	Adendorf
51	55	17.4	Bardewyk südl.
51	58	5.4	Bardewyk nordl.
120	22	33.4	Signal beim Schafstall
129	46	4.164	*Hohenhorn*
131	28	11.4	Johanniswarden Kirchthurm
140	36	27.4	Thurmspitze
143	58	51.4	Mühle
147	25	49.4	Gülzow
187	12	0.4	Niendorfer Mühle
194	12	17.4	Büchen Kirchthurm
204	22	7.4	Thurm
218	3	33.4	Thurm

LAUENBURG AMTSTHURM

— 205266.638 — 40813.884

36°	50′	9″208	Lüneburg
196	40	32.648	Lauenburg Signal
281	14	7.309	Lauenburg Sector

LAUENBURG SECTORPLATZ

— 205234.429 — 40976.028

37°	20′	2″115	Lüneburg
101	14	7.315	Lauenburg Amtsthurm

RÖNNEBERG CENTRUM

— 211294.613 — 3850.827

79°	9′	53″458	Sinsdorf
110	27	50.421	Meridianpfahl
137	30	15.608	Baursberg
139	10	57.188	Baurswarte
139	30	54.788	Baurs chinesischer Thurm
142	46	33.288	Nienstedten
149	24	53.548	Moorburg
157	27	51.458	Wilsdorf
160	53	23.128	Harburg Kirchthurm
161	14	34.378	Ottensen
163	40	19.958	Altona. Schumachers Haus. Brett
163	58	44.788	Altona. Armenkirche
165	19	13.458	Harburg Rathhaus
166	0	57.708	Altona Hauptkirche
166	53	28.538	Altona Rathhaus
167	44	14.458	Harburg Schloss
170	48	40.508	Niendorf
173	43	34.958	*Hamburg Michaelis*
174	0	43.258	Hamburg Rosenthurm

174°	55′	49″738	Hamburg kleineMichaeliskirche
174	56	56.788	Hamburg Waisenhaus
176	45	22.538	Hamburg Nicolai
177	40	4.128	Hamburg Rathhaus
178	1	58.708	Hamburg Catharinen
178	45	16.958	Hamburg Petri
181	51	27.788	Hamburg St. Georg
188	33	10.958	Wilhelmsburg
194	28	33.128	Ham
195	58	25.038	Wandsbeck Schlossthurm
196	4	50.288	Wandsbeck Kirchthurm
196	52	20.788	Bergstedt
201	42	29.208	Hoisbüttel Pavillon
209	57	9.628	Moorfleth
220	21	11.458	*Syk*
220	50	37.788	Billwerder
225	53	55.628	Ochsenwerder
243	40	30.038	Bergedorf, grösster Thurm
254	20	35	Pfahlkanten $d = 2^m\ 293$
260	5	35	Pfahlkanten $d = 2,\ 108$
257	5	28	Pfahlmitte
257	16	12.078	*Hohenhorn*
260	47	15.208	Korslak
262	13	42.128	Neuengamme
269	1	10.128	Geesthacht
269	2	39.708	Altengamme
272	50	54.038	Drenhausen
274	13	48.368	Kirchwerder
278	2	25.358	*Lauenburg Signal*
279	15	45.738	Lauenburg Amtsthurm
297	40	10.538	Winsen
305	26	54.958	Lüneburg Nicolai
305	52	10.118	Lüneburg Johannis
306	23	35.038	*Lüneburg Michaelis*
306	52	0.458	Lüneburg Lamberti

ALTONA
vor dem Fenster in H. Conferenzrath Schumachers Wohnung

$-224495.328 \quad +16.354$

1°	36′	53″450	Moorburg
13	34	19.830	Varendorf
20°	26′	15″391	Altenwerder
60	33	25.716	Apensen
64	36	22.633	Buxtehude
67	15	45.383	Neuenfelde
74	23	7.466	Estebrügge
273	34	23.591	Roosens Thurm in Hamburg
277	53	53.591	Steinbeck
285	19	17.341	Hohenhorn
292	26	29.291	Moorfleth
299	22	37.860	Banksthurm in Altona
299	52	11.591	Ferner Thurm
307	8	44.091	Dede's Balcon Fahnenstange
309	29	44.544	Ochsenwerder
316	0	42.291	Lüneburg
316	31	29.712	Lüneburg Johannis
317	2	38.291	Lüneburg
319	21	30.991	Winsen
323	17	20.541	Wilhelmsburg
341	29	28.091	Harburg Schloss
342	53	46.091	Harburg Rathhaus
343	39	45.759	Ronneburg Pfahl
343	40	18.891	Ronneburg Centrum
344	47	29.610	Wilsdorf
344	52	54.008	Harburg
350	57	2.108	Sindorf
354	57	42.091	Kehler's Thurm
359	59	56.610	Meridianpfahl

MERIDIANPFAHL FÜR DIE ALTONAER STERNWARTE

$-212737.671 \quad +16.168$

191°	13′	14″142	Hamburg Michaelis
221	6	38.242	Harburg Schloss
224	9	33.442	Harburg Rathhaus
225	2	2.982	Harburg Kirchthurm
260	40	5.642	Wilsdorf
290	27	51.922	Rönneberg

ABRISSE DER VOM HAUPTMANN MÜLLER UND LIEUTENANT GAUSS IM JAHRE 1828 IM EICHSFELDE AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

SONNENSTEIN

		Theodol.	$+3330.629 \quad -30682.728$
		Pfahl	$+3331.220 \quad -30683.287$
27°	9′	33″155	Nebenplatz
86	22	45.054	Hohehagen
93	39	28.155	Euzenberg Pfahl
93	39	34.523	Euzenberg Theodolith
114	43	50.347	Lauseberg Pfahl
114	43	56.174	Lauseberg Theodolith
131	1	22.648	Hellberg
144	39	18.722	Wulften Thurm
144	39	20.430	Wulften Pfahl
205	4	9.569	Brocken
316	35	23	Pfahl, Entfernung $= 0^m 813$

LAUSBERG

		Theodol.	$-6335.1 \quad -9699.0$
		Pfahl	$-6334.675 \quad -9698.349$
57°	2′	17″359	Pfahl, Entfernung $0^m 772$
146	47	0.043	Tockenberg
212	28	38.147	Wulften Pfahl
212	28	49.610	Wulften Theodolith
236	51	36.734	Brocken
276	17	59.351	Hellberg
294	43	55.024	Sonnenstein Theodolith
294	43	57.727	Sonnenstein Pfahl
313	41	30.563	Euzenberg Pfahl
313	41	33.427	Euzenberg Theodolith

WULFTEN

		Theodol.	$-16833.7 \quad -16382.2$
		Pfahl	$-16834.496 \quad -16381.887$
0°	2′	13″194	Nebenplatz bei Wulften
32	28	51.964	Lauseberg Pfahl
32	28	46.648	Lauseberg Theodolith
81	15	20.210	Tockenberg
143	21	35.810	Nebenplatz bei Marke
324	39	18.177	Sonnenstein Pfahl
324	39	19.126	Sonnenstein Theodolith
352	12	54.559	Euzenberg Pfahl
352	13	1.107	Euzenberg Theodolith
158	30	29.394	Pfahl, Entfernung $0^m 855$

EUZENBERG

		Theodolith	$+2585.7 \quad -19036.8$
		Pfahl	$+2586.105 \quad -19037.483$
133°	41′	19″724	Lauseberg Pfahl
133	41	32.065	Lauseberg Theodol.
172	12	56.879	Wulften Pfahl
172	12	58.859	Wulften Theodol.
194	24	29.000	Hellberg
219	46	31.858	Brocken
273	39	38.381	Sonnenstein Theodolith
273	39	47.941	Sonnenstein Pfahl
300	38	25.441	Pfahl, Entfernung $0^m 794$

TOCKENBERG

$-14939.2 \quad -4064.9$

38°	11′	2″829	Hohehagen?
155	43	20.280	Hils
250	3	16.408	Brocken
261	15	5.936	Wulften Pfahl
261	15	19.741	Wulften Theodol.
326	47	0.511	Lauseberg Theodolith
326	47	15.996	Lauseberg Pfahl

NEBENPLATZ BEI WULFTEN

$-15910.2 \quad -16381.6$

26°	1′	9″	Wulften Thurm
34	55	9	Lauseberg Signal
85	30	19	Tockenberg Signal
180	2	19	Wulften Signal
180	2	49	Wulften Theodolith

PLATZ BEI HELLBERG

$-7052.9 \quad -20631.6$

9°	23′	36″	Euzenberg
86	14	21	Lauseberg
132	24	26	Hils
156	31	11	Wulften Signal
227	57	46	Brocken
315	56	26	Sonnenstein
349	9	6	Hellberg Signal

ABRISSE DER VOM LIEUTENANT GAUSS UND LIEUTENANT HARTMANN IM JAHRE 1829 IN WESTFALEN AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

ASENDORF

— 138674.292 + 63178.094

25°	49′	27″255	*Knickberg*
33	14	44.755	Nonnenstein
98	13	58.820	*Twistringen*
159	2	42.088	*Bremen Knopf*
216	16	52.932	*Steinberg*
264	5	5.757	*Bücken*

NONNENSTEIN

— 82615.339 + 99921.177

2°	1′	10″100	*Hünenburg*
73	3	40.106	*Dörenberg*
152	14	22.087	*Mordkuhlenberg*
191	23	31.393	Twistringen
213	14	20.018	Asendorf
217	16	22.768	*Knickberg*
274	35	55.464	Wittekindstein

DÖRENBERG

Platz 1. — 73683.735 + 129245.868

52°	33′	53″514	*Münster*
104	46	18.604	Bentheim, südlicher Schlossthurm
124	52	7.354	Bentheim, nordl. Schlossthurm
108	18	8.354	*Tecklenburg*
155	5	1.730	*Queckenberg*
177	33	20.938	*Osnabrück Catharinen*
196	10	16.957	*Mordkuhlenberg*
211	4	55.730	Twistringen
228	54	44.889	*Schledehausen*
306	46	9	Centrum, Abstand 0^m1136

DÖRENBERG

Platz 2. August — 73683.920 + 129245.965

52°	33′	52″186	*Münster*
104	48	41.565	*Bentheim Signal*
111	31	42.072	Nebenplatz
155	5	1.778	*Queckenberg*
196	10	17.645	*Mordkuhlenberg*
211	5	5.395	Twistringen
253	3	35.856	*Nonnenstein*
303	15	6.714	*Hünenberg*
323	17	46	Centrum, Abstand 0^m315
332	10	39	Platz vom Juni Abstand 0^m2083

Füsse des Signals

1.	+ 0.8179	+ 1.3988
2.	— 1.3212	+ 0.3440
3.	— 0.3001	— 1.7650
4.	+ 1.8137	— 0.7309
Centrum	+ 0.2526	— 0.1883

Nebenplatz — 73906.356 + 129869.192

196°	58′	23″860	Mordkuhlenberg
291	32	38.443	Dörnberg

QUECKENBERG

— 114710.274 + 148300.732

59°	6′	20″679	*Bentheim*
107	3	39.817	*Kirchhesepe*
199	0	41.982	*Molbergen*
268	47	55.367	*Mordkuhlenberg*
335	5	28.167	*Dörenberg*
200	1	59.324	Centrum, Distanz 0^m1463

BENTHEIM

Platz 1. — 89763.306 + 190019.671

46°	31′	27″8	Centrnm, Distanz 7^m6164
190	42	50.364	Kirchhesepe
239	7	5.849	Queckenberg
212	17	37.864	Bentheim nordl. Schlossthurm

BENTHEIM

Platz 2. — 89755.454 + 190018.902

112°	31′	40″8	Centrum, Distanz 6^m8165
239	6	35.572	Queckenberg
284	48	53.822	Dörenberg
348	5	25.819	Bentheim, Kirche

BENTHEIM

Platz 3. — 89755.621 + 190021.633

76°	15′	14″3	Bentheim südl. Thurm
124	26	16.8	Centrum, Distanz 4^m3229
190	42	53.150	Kirchhesepe
194	13	11.8	Platz 1.
274	2	6.8	Platz 2.

KIRCHHESEPE

Platz 1. — 125441.463 + 183265.532

10°	41′	25″619	Bentheim nordl. Schlossthurm
10	43	53.119	*Bentheim Signal*
10	51	3.432	Bentheim südl. Schlossthurm
60	55	54.115	*Ulsen*
69	18	0	Platz 2. Abstand 1^m689
147	48	40	Centrum. Abstand 0^m5655
183	20	46.963	*Steinbild*
287	3	44.404	*Queckenberg*

MORDKUHLENBERG

— 115363.309 + 117156.397

16°	10′	41″910	*Dörenberg*
88	47	56.842	*Queckenberg*
144	4	12	Nebenplatz. Abstand 0^m218
160	48	42.155	Krapendorf
227	24	45.823	*Twistringen*
267	27	20.832	*Knickberg*
332	14	41.904	*Nonnenstein*
104	30	0.552	Centrum, Abstand 0^m1021

NEBENPLATZ

— 115363.486 + 117156.525

88°	47′	55″655	Queckenberg
227	24	46.947	Twistringen

TWISTRINGEN

— 142250.951 + 87900.139

11°	24′	3″930	*Nonnenstein*
47	25	48.334	*Mordkuhlenberg*
199	19	46.504	Bremen Stephani
200	32	17.338	*Bremen Ansgarius Knopf*
200	52	5.713	Bremen Martini
201	5	24.213	Bremen Liebfrauen
201	16	59.838	Bremen Dom
278	13	51.157	*Asendorf*
330	2	38.792	*Knickberg*
142	19	56	Centrum, Abstand 0^m625

WINDBERG

— 153042.9 + 162456.4

37°	0′	41″25	Kirchhesepe
91	22	48.125	Cloiter Ter Appel
119	21	56.25	Onstwedde
135	50	53.75	Midwolde?
141	12	46.25	Rhede

KNICKBERG

— 117302.184 + 73520.620

37°	16′	37″688	*Nonnenstein*
87	27	21.350	*Mordkuhlenberg*
150	2	26.706	*Twistringen*
205	49	20.060	*Asendorf*
297	56	54.511	*Stolzenau*
357	27	5.534	Wittekindstein

ABRISSE DER VOM LIEUTENANT HARTMANN IM JAHRE 1830 IN WESTFALEN UND IM JAHRE 1831 IN OSTFRIESLAND AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

WINDBERG

— 153045.029 + 162445.515

37°	1′	46″363	Kirchhesepe
91	23	54.555	Closter Ter Appel
119°	23′	0″944	Onstwedde
141	13	47.819	Rhede
174	5	38.466	Leer
214	9	0.887	Westerstede
278	32	59.881	Krapendorf
339	45	4.037	Queckenberg

KIRCHHESEPE

Hauptplatz 1830. — 125441.533 + 183265.498

10°	43′	53″102	Bentheim 1829
		53.217	Bentheim 1830
160	55	1.485	Terappel
166	14	9.686	Onstwedde
217	1	17.275	Windberg
287	3	46.653	Queckenberg 1829
287	3	47.095	Queckenberg 1830
25	51	22	Platz 1 von 1829
140	43	5	Centrum. Abstand 0^m5288

NB. Es sind hier auch die neu reducirten Richtungen nach Bentheim, Uelsen, Steinbild, Queckenberg eingeschaltet, wie sie sich aus den Messungen des Jahres 1829 ergeben haben.

QUECKENBERG

— 114710.274 + 148300.732

59°	7′	21″639	Bentheim
107	3	41.548	Kirckhesepe
159	44	34.456	Windberg
288	47	55.635	Mordkuhlenberg

KRAPENDORF.

— 147940.545 + 128941.591

0°	35′	16″292	Dörenberg
30	48	12.070	Queckenberg
98	32	56.422	Windberg
172	38	55.852	Westerstede
201	43	32.919	Oldenburg
258	20	6.197	Wildeshausen
277	58	55.934	Twistringen
340	49	2.985	Mordkuhlenberg
276	53	26	Centrum, Abstand $200^{mm}0$ Noch einfach
139	16	52.2	Leer
244	15	40.2	Bremen Ansgar. Thurm
244	33	17.7	Bremen Liebfrauen Thurm

Nebenplatz — 147940.542 + 128491.882

294°	59′	15″355	Langfarden
340	49	1.337	Mordkuhlenberg
272	30		Centrum, Abstand 0^m490 Ohne Repetition
30	48	5.4	Queckenberg

LEER REFORMIRTE KIRCHE

Hauptplatz — 192086.840 + 166481.565

50°	43′	16″784	Leer luther. Kirche
53	4	4.322	Onstwedde
55	54	38.659	Leer kathol. Kirche
134	48	45.508	Emden reform. Kirche
135	35	15.508	Emden Rathhausthurm
135	41	13.633	Emden Nadelspitze
139	50	56.758	Pilsum
186	16	7.292	Aurich
266	4	22.766	Westerstede
354	6	8.850	Windberg
269	12	2.1	Centrum, Abstand 0^m489

Centrum des Thurmes

— 192086.847 + 166481.076

LEER LUTHERISCHE KIRCHE.

Platz 1. — 191948.019 + 166652.853

186°	35′	48″847	Aurich
201	37	39	Leer Gymnasium
226	16	29	Leer kathol. Kirche
231	2	9	Leer reform. Kirche

Platz 2. — 191944.651 + 166652.609

Platz 3. — 191945.714 + 166655.147

ONSTWEDDE

— 171064.885 + 194444.509

198°	25′	29″038	Emden
233	3	46.007	Leer ref. Kirche
233	4	46.507	Leer luth. Kirche
299	23	15.837	Windberg
346	14	55.976	Kirchhesepe
355	27	19.341	Kl. ter Appel
140	0	36	Centrum, Abstand 0^m277

EMDEN RATHHAUSTHURM

— 208050.068 + 182119.457

18°	26′	17″755	Onstwedde
145	46	34.609	Pilsum
193	12	13.826	Hage
239	54	49.147	Aurich
315	35	27.276	Leer
122	11	50	Centrum, Abstand 0^m4202

EMDEN NEUE KIRCHE

Platz 1. — 208112.946 + 181674.276

239°	22′	19″	Aurich
316	38	22	Leer reform. Kirche
316	50	19	Leer Gymnasium
316	53	19	Leer kathol. Kirche
316	58	49	Leer Wage
317	13	19	Leer luther. Kirche
84	56	30	Centrum, Entfernung 1^m360

WESTERSTEDE

— 194284.694 + 134467.455

34°	9′	29″275	Windberg
85	50	40.098	Leer luther. Kirche
86	4	21.973	Leer reform. Kirche
130	8	39.060	Aurich
178	54	3.102	Jever
223	17	55.049	Varel
223	21	10.049	Varel Nebenthurm
306	7	45.969	Oldenburg
352	39	23.890	Krapendorf
293	38	50	Centrum, Abstand 0^m6211

TWISTRINGEN 1830

— 142251.445 + 87901.331

47°	24′	58″835	Mordkuhlenberg
87	34	27.587	Langfarden
97	58	57.587	Krapendorf
269	56	29	Centrum, Entfernung 0^m810

AURICH

Platz 1. — 218808.844 — 163542.859

6°	16′	39″773	Leer reform. Kirche
43	25	40	Aurich Schlossthurm
59	55	27.012	Emden Rathhausthurm
205	52	38.975	Esens
249	38	49.801	Jever Schlossthurm
310	8	56.005	Westerstede
132	4	40	Centrum, Abstand 2^m500

AURICH

Platz 2. — 218812.200 + 163546.772

6°	16′	7″150	Leer
59	22	12.664	Emden neue Kirche
59	48	0.264	Emden Gasthofskirche
59	54	40.264	Emden Rathhausthurm
60	1	55.264	Emden reform. Kirche
95°	13′	34″264	Pilsum
140	42	55.326	Hage
172	7	10.326	Dornum Dorf
172	25	59.284	Dornum
205	53	26.388	Esens
205	55	40.388	(Esens?) goldner Knopf
249	39	18.534	Jever
309	14	6	Centrum, Abstand 2^m655

DORNUM

Platz 1. — 238863.423 + 166209.448

14°	42′	20″1	Dornum Dorfkirche
63	53	0.436	Hage
242	15	12.019	Wangeroog
272	33	29.394	Esens
273	31	22.894	Esens Thurm a. Haus
287	1	59.353	Jever
352	26	0.436	Aurich
352	52	35.436	Aurich Schloss
121	18	40.1	Centrum, Abstand 0^m424

DORNUM

Platz 2. — 238863.454 + 166210.318

63°	52′	48″826	Hage
67	33	13.826	Kl. Laternenthurm
272	10	53	Platz 1. Entfernung 0^m870
352	25	56.326	Aurich

JEVER

Platz 1. — 229345.683 + 135137.833

69°	39′	9″565	Aurich
358	54	25.503	Westerstede
70	19	57.4	Centrum, Entfernung 0^m335
80	45	5.4	Platz 2. Entfernung 3^m455

JEVER

Platz 2. — 229345.127 + 135141.244

69°	28′	42″	Aurich Schlossthurm
69	39	5.402	Aurich
106	31	42	Dornum Kirchthurm
107	2	2.902	Dornum
115	22	12	Esens
141	27	2	Jever Stadtkirche
261	51	16	Centrum, Abstand 3^m1265

JEVER

Platz 3. — 229344.047 + 135144.737

69°	39′	4″393	Aurich
107	2	13.843	Dornum
142	17	53.887	Jever, Stadtkirche

150°	2′	53″9	Grad-Messungs-Centrum, Abstand 0m200
236	35	43.9	Neuer Versicherungs-Punkt Abstand 1m453
256	58	58.4	Centrum des Thurms, Abstand 6m7602
322	58	2.424	Varel
358	53	53.987	Westerstede

ESENS

Platz 1. — 238321.458 + 154076.788

25°	53′	14″335	Aurich
26	2	36.835	Aurich Schlossthurm
295	5	21.8	Jever Stadtkirche
295	21	41.835	Jever Schloss
172	57	1.8	Centrum, Abstand 0m310

ESENS

Platz 2. — 238321.579 + 154077.316

25°	53′	15″150	Aurich
26	2	25.15	Aurich Schloss
78°	59′	50″15	Hage
91	13	55.15	Dornum Dorf
92	33	35.150	Dornum Schlosskirche
249	7	15.15	Centrum, Abstand 0m524

ESENS

Platz 3. — 238322.085 + 154076.203

62°	34′	15″525	Centrum Abstand 0m7002
226	21	15.525	Wangeroog Kirche
226	41	45.525	Wangeroog Leuchtthurm
295	21	45.525	Jever Schlossthurm

VAREL

— 209474.540 + 120153.185

43°	17′	59″438	Westerstede
142	58	41.271	Jever
43	17	59	Centrum, Abstand 0m056

ABRISSE DER VOM HAUPTMANN MÜLLER IM JAHRE 1831, UND VOM LIEUTENANT GAUSS IN DEN JAHREN 1831 UND 1832 IM LÜNEBURGISCHEN AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

LÜNEBURG

— 191597.782 — 30574.270

174°	28′	39″022	Hohenhorn
215	56	36.728	Lauenburg Signal
216	50	17.389	Amtsthurm
265	4	34.857	Bretze
336	23	20.685	Tötendorf
344	1	56	Centrum, Abstand 0m5133

LAUENBURG

— 206040.464 — 41045.627

16°	40′	21″938	Lauenburg Amtsthurm
35	56	29.438	Lüneburg
47	54	35.063	St. Nicolai
129	46	6.234	Hohenhorn
325	22	8.317	Bretze

BRETZE

— 193260.212 — 49872.299

22°	18′	11″087	Tätendorf
85	4	29.900	Lüneburg
142	58	1.351	Lauenburg Amtsthurm
145	22	9.474	Lauenburg Signal
289	53	32.394	Glienitz

TAETENDORF

— 169626.902 — 40177.793

10°	39′	51″042	Holxerberg
156	23	25.068	Lüneburg
202	18	15.323	Bretze
234	27	52.827	Glienitz
271	14	30.886	Hohen Mechthin
320	4	36.788	Pugelatz
342	50	37.618	Wieren

GLIENITZ

— 187641.574 — 65399.907

1°	42′	37″651	Hohen Mechthin
54	27	47.923	Tätendorf
109	53	34.153	Bretze
120	29	51.028	Hamburg
127	4	20.403	Lauenburg
128	1	43.841	Hohenhorn
293	19	21.436	Höbeck

HOHEN MECHTHIN

Hauptplatz — 169092.114 — 64845.685

17°	24′	55″661	Pugelatz
42	52	33.591	Wieren
56	30	7.091	Holxerberg
91	14	30.670	Tätendorf
181	42	44.220	Glienitz
264	31	4.451	Höbeck

HOHEN MECHTHIN

Andere Aufstellung — 169092.446 — 64846.770

181°	42′	32″276	Glienitz
264	31	5.755	Höbeck
73	0	27.276	Centrum, Abstand 1m1345

HÖBECK

— 172512.986 — 100488.736

59°	40′	56″079	Pugelatz
84	31	2.991	Hohen Mechthin
113	19	27.366	Glienitz

PUGELATZ

— 148039.910 — 58241.686

45°	36′	13″142	Hankensbüttel
96	2	28.994	Wieren Signal
106	49	34.994	Wieren Thurm
140	4	42.739	Tätendorf
197	25	2.144	Hohen Mechthin
239	55	5.463	Höbeck

WIEREN

— 149287.144 — 46456.701

11°	22′	52″133	Hankensbüttel
96	12	46.622	Holxerberg
160°	16′	42″878	Lüneburg Johannis
162	50	42.128	Tätendorf
220	55	6.558	Wieren Kirchthurm
222	52	39.610	Hohen Mechthin
276	2	28.308	Pugelatz
252	50	42.128	Centrum, Abstand 0m030

HOLXERBERG

— 150366.695 — 36550.632

190°	39′	57″544	Tätendorf
236	30	14.586	Hohen Mechthin
276	13	15.378	Wieren
0	20	33.003	Centrum, Abstand 1m315

HANKENSBÜTTEL

— 133361.111 — 43253.191

20°	54′	38″765	Wolenberg
46	28	22.999	Nebenplatz
191	22	25.663	Wieren
225	35	55.008	Pugelatz
243	52	44.179	Hankensbüttel Thurm
358	14	13.890	Brocken
113	9	30.661	Centrum, Abstand 2m432

Nebenplatz — 133168.0 — 43050.1

191°	55′	57″000	Wieren
241	6	44.500	Hankensbüttel Thurm
226	28	32.000	Hankensbüttel Postament

WOLENBERG

— 102753.219 — 31555.355

12°	7′	49″641	Lichtenberg Ruine
12	25	25.138	Lichtenberg
21	19	1.891	Woldenberg Ruine
21	22	26.016	Woldenberg Thurm
78	57	49.464	Hannover Markttthurm
130	23	20.663	Celle Schlossthurm 1
130	25	11.038	Celle Uhrthurm
130	26	9.288	Celle Schlossthurm 2
130	48	4.163	Celle Kirchthurm
200	54	38.811	Hankensbüttel
334	51	12.997	Festberg
348	24	10.944	Brocken
248	27	59.647	Centrum, Abstand 1m618.

STEINBERG

— 148667.0 — 44235.6

3°	40′	46″734	Hankensbüttel Signal
102	27	45.807	Holxerberg

ABRISSE DER VOM LIEUTENANT HARTMANN IM JAHRE 1833 IM HARZE AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

1. BROCKEN

— 30310.087 — 46418.626

14°	22′	30″694	Lange Ecke Signal
14	26	19.652	Lange Ecke Spitze der Hütte
25	4	7.472	Sonnenstein
109	25	24.027	Bocksberg
313	10	17.826	Schallliethe
357	58	10.450	Eversberg

2. SONNENSTEIN

Pfahl	+ 3330.905	— 30681.570
Theod.	+ 3330.601	— 30681.085

177°	8′	6″081	Haspelkopf
177	8	2.183	Haspelkopf vom Pfahl aus (reducirt)
205	4	17.555	Brocken Signal
205	4	14.402	Brocken vom Pfahl
213	18	10.055	Langenecke Spitze der Hütte
213	19	56.463	Langenecke Signal
213	19	50.904	Langenecke vom Pfahl
219	22	41.335	Eversberg
219	22	36.760	Eversberg vom Pfahl
247	9	1.066	Schallliethe
248	8	58.566	Schallliethe vom Pfahl
302	6	13	Pfahl, Distanz = 0^{m}572

3. SCHALLLIETHE

Signal	— 11672.502	— 66284.731
Theod.	— 11673.639	— 66284.503

67°	8′	48″706	Sonnenstein
67	8	54.774	Sonnenstein auf das Signal reducirt
96	29	22.854	Langenecke Signal
96	29	32.307	Langenecke vom Signal ab
103	49	42.854	Eversberg Pfahl
103	49	53.710	Eversberg vom Signal ab
133	10	19.729	Brocken
133	10	24.831	Brocken vom Signal ab
348	40	55	Pfahl, Distanz = 1^{m}160

4. EVERSBERG

Signal	— 16442.670	— 46910.145
Theod.	— 16443.513	— 46910.091

39°	22′	27″119	Sonnenstein
39	22	31.771	Sonnenstein vom Signal ab
65	51	51.018	Langenecke Spitze der Hütte
65	52	32.268	Langenecke Signal
65	53	4.892	Langenecke vom Signal ab
106°	6′	11″524	Haspelkopf
106	6	20.542	Haspelkopf vom Signal ab
177	58	13.518	Brocken
177	58	13.154	Brocken vom Signal ab
283	50	1.137	Schallliethe
283	49	52.806	Schallliethe vom Signal ab
356	18	29	Pfahl, Distanz = 0^{m}845

5. LANGENECKE

Pfahl	— 14397.360	— 42340.224
Theod.	— 14398.231	— 42341.713

33°	19′	55″184	Sonnenstein
33	19	47.746	Sonnenstein vom Pfahl ab
194	22	17.684	Brocken Signal
194	22	33.035	Brocken vom Pfahl ab
194	22	20.747	Brocken Mitte
245	53	28.934	Eversberg
245	53	21.016	Eversberg vom Pfahl ab
276	29	41.559	Schallliethe
276	29	32.674	Schallliethe vom Pfahl ab
59	29	52	Signal Distanz 1^{m}725

6. HASPELKOPF

Pfahl	— 21487.255	— 29438.938

126°	28′	9″491	Fahrenberg
176	36	58.946	Bocksberg
286	6	18.355	Eversberg
357	7	59.855	Sonnenstein
199	43	0	Stange 2^{m}42

7. BOCKSBERG

— 36612.665 —28544.522

73°	39′	8″008	Fahrenberg
143	16	32.383	Hannover Marktthurm
289	25	22.591	Brocken Signal
289	25	25.508	Brocken Mitte
354	10	40.175	b. d. Haspelkopf
356	36	38.925	Haspelkopf Stange
356	36	55.175	Haspelkopf Pfahl

8. FAHRENBERG

— 32503.262 — 14534.999

253°	39′	6″657	Bocksberg
305	21	29.569	b. d. Haspelkopf
306	27	45.438	Haspelkopf Stange
306	28	10.063	Haspelkopf Pfahl
321	12	53.319	Fahrenberg Nebenplatz 1

ABRISSE DER VON HERRN HAUPTMANN MÜLLER UND DEM LIEUTENANT GAUSS IM JAHRE 1833 AN DER MITTELWESER AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

KNICKBERG

— 117302.185 + 73520.620

37°	16′	44″275	Nonnenstein
259	53	37.641	Osterberg
357	27	11.242	Wittekindstein

WITTEKINDSTEIN

— 80356.285 + 71875.835

48°	57′	26″714	Hünenburg
94	36	10.892	Nonnenstein
177	26	56.302	Knickberg
211	3	48.925	Osterberg
270	29	32.770	Deister
326	17	7.472	Köterberg
172	1	42.4	Centrum, Abstand 1^{m}209

OSTERBERG

— 122055.962 + 46755.553

31°	4′	4″784	Wittekindstein
53	30	58.811	Nonnenstein
79	55	42.735	Knickberg
337	52	14.709	Deister
230	43	16.	Centrum, Abstand 1^{m}565

DEISTER

— 79993.559 + 29649.764

16°	37′	40″360	Kötersberg
90	29	36.540	Wittekindstein
157°	52′	6″841	Osterberg Heliotrop
157	52	13.634	Osterberg Signal
203	4	11.6	Centrum, Abstand 0^{m}028

KÖTERBERG

— 36529.559 + 42629.694

12°	57′	58″276	Desenberg
59	31	31.844	Hausheide
107	40	21.409	Hünenburg
146	16	58.740	Wittekindstein
196	37	32.259	Deister
212	33	47.492	Osterwald
262	47	23.520	Hils

OSTERWALD

— 66770.032 + 22566.745

33°	33′	43″727	Köterberg
151	49	28.009	Deister
330	0	46.043	Hils
280	40	39.	Centrum, Abstand 1^{m}880

HILS

— 40952.298 + 7668.304

82°	47′	24″755	Köterberg
150	0	53.262	Osterwald
281	7	59.620	Brocken

ABRISSE AUS DEN MESSUNGEN DES MAJOR MÜLLER AN DER OBERWESER VOM JAHR 1836.

[IM AUSZUGE.]

MERIDIANZEICHEN

— 5019.756 0

0°	0′	1″212	Sternwarte
1	38	31.524	Göttingen, Albani
6	37	29.868	Göttingen, Jacobi
6°	56′	20″295	Göttingen, Rathhaus
8	6	14.179	Göttingen, Johannis südl. Thurm
8	7	16.320	Göttingen, Johannis nordl. Thurm
11	9	4.116	Göttingen, Mariae
15	45	13.755	Gieseberg
48	29	38.241	Hohehagen
143	41	13.812	Weper

KLEPER.

+ 220.895 — 1883.547

1°	12′	20″382	Diemarder Warte
5	39	47.632	Hanstein
14	11		Haus Arnstein
16	0	22.362	Hevenhausen
16	11	2.382	Friedland
16	40	34.632	Gross Schneen
19	40	30.319	Stockhausen
25	30	46.132	Klein Schneen
27	53	30.007	Ober Jesa
28	16	29.107	Geismar
28	22	1.819	Nieder Jesa
28	51	53.132	Gieseberg
32	33	13.257	Deiderode
42	21	31.667	Sieboldshausen
47	13	14.494	Steinberg
50	28	41.305	Volkerode
56	55	52.042	Meensen
57	25	27.667	Lembshausen
58	57	31.977	Meenserberg
60	46	7.334	Mengershausen
62	31	22.604	Rossdorf
67	49	55.917	Hohehagen
76	30	54 292	Sesebühl
77	10	1.365	Settmarshausen
78	57	48.208	Varmissen
84	46	11.229	Ellershausen
94	49	2.167	Hetgershausen
96	47	15.742	Sternwarte
100	31	44.542	Grone
103	23	16.979	Göttingen, Mariae
105	37	19.604	Göttingen, Johannis südl. Thurm
104	48	56.104	Göttingen, Rathhaus
105	55	35.229	Göttingen, Johannis nordl. Thurm
108	28	23.376	Kuhberg
111	7	51.855	Göttingen, Albani
111	20	37.542	Göttingen, Jacobi
112	41	1.917	Elliehausen
125	24	9.869	Holtensen
131	45	9.333	Fahlerstollen
132	7	25.166	Lenglern
136	54	56.250	Harste
141	43	5.057	Gladebeck
142	2	39.982	Gladeberg Signal
145	40	42.807	Weper
148	56	18.307	Weende
150	33	19.857	Lutterhausen
151	25	54.463	Hevensen
153	21	28.807	Wolbrechtshausen
153	50	57.119	Bovenden
155	19	26.994	Parensen
158	34	49.307	Moringen, oberes Dorf
160	13	24.869	Moringen
177	35	40.182	Plesse, dünner Thurm
178	0	8.057	Plesse, dicker Thurm
187	49	56.307	Clausberg
215	30	12.932	Roringen
324	13		Ruine auf der südlichen Gleiche
329	26	23″507	Einzelnes hohes Haus
351	6	40.819	Rusteberg
351	55	24.382	Reinhausen, Amthaus

HOHEHAGEN

+ 6060.027 + 12447.725

21°	37′	18″723	Steinberg, Signal
21	37	32.503	Steinberg, Postament
164	51	54.492	Fahlerstollen
240	27	33.131	Göttingen, Jacobi
240	36	44.131	Göttingen, Mariae
240	55	55.131	Göttingen, Johannis nordl. Thurm
241	0	1.131	Göttingen, Johannis südl. Thurm
241	14	9.131	Göttingen, Rathhaus
241	45	34.131	Göttingen, Albani
244	3	50.717	Sternwarte
247	49	54.626	Kleper
311	46	53.942	Gieseberg, Postament
311	47	11.835	Gieseberg, Signal
346	58	53.899	Meisner

GIESEBERG

+ 12712.662 + 5002.334 Postament
+ 12713.539 + 5002.747 Signal

67°	14′	59″701	Steinberg, Signal
67	15	15.495	Steinberg, Postament
131	46	62.538	Hohehagen
195	45	11.874	Meridianzeichen
198	14	52.204	Göttingen, Johannis nordl. Thurm
198	35	54.204	Göttingen, Johannis südl. Thurm
198	32	16.204	Göttingen, Jacobi
200	10	5.204	Göttingen, Albani
201	30	32.637	Sternwarte
208	51	52.263	Kleper
329	59	25.204	Weper

WEPER

— 15348.043 + 7590.451

12°	47′	0″582	Hohehagen
272	0	49.705	Tockenburg
323	41	13.840	Meridianzeichen
328	40	43.585	Kleper
333	13	39.705	Göttingen, Albani
334	9	22.510	Göttingen, Jacobi
334	55	43.705	Göttingen, Johannis nordl. Thurm
334	57	11.705	Göttingen, Johannis südl. Thurm
347	5	1.033	Weper, Nebenplatz 1

STEINBERG

+ 17782.597 + 17095.067 Postament
+ 17783.447 + 17094.498 Signal

176°	51′	7″042	Fahlerstollen
201	37	30.748	Hohehagen
221	54′	6″841	Göttingen Jacobi
221	58	39.841	Göttingen Johannis nordl. Thurm
221	59	58.841	Göttingen Johannis südl. Thurm
222	46	29.841	Göttingen Albani
227	13	14.341	Kleper
247	15	13.857	Gieseberg Postament

FAHLERSTOLLEN

— 18501.058 + 19090.605 Postament
— 18502.084 + 19091.158 Brett

311°	45′	10″978	Kleper
344	51	57.333	Hohehagen
356	51	8.659	Steinberg

STERNWARTE

Platz auf der südlichen Dachbrüstung

+ 2.998 — 6.528

0°	1′	54″826	Südliches Meridianzeichen
5	47	29.576	Stockhausen

6°	7′	29″516	Gross Schneen
11	9	7.176	Niederjesa
14	38	51.326	Oberjesa
20	34	39.751	Dreckwarte
21	30	32.411	Gieseberg Postament
21	30	34.726	Gieseberg Signal
30	34	24.026	Sieboldshausen
41	51	3.146	Volkerode
47	40	34.209	Rossdorf
51	22	34.993	Mengershausen
64	3	48.639	Hohehagen
73	11	48.776	Sesebühl
76	51	6.126	Jägers Haus
117	59	30.376	Elliehausen
126	52	35	Johannis südl. Thurm
127	40	54	Johannis nordl. Thurm
130	8	13	Rathhaus
276	37	20.176	Kleper
334	57	5.516	Geismar
355	49	41.001	Heidelbachs (jetzt Reibsteins) Gartenhaus.

ABRISSE AUS DEN MESSUNGEN DES MAJOR MÜLLER IN DER ALLERGEGEND VOM JAHR 1838.

[IM AUSZUGE.]

FALKENBERG

— 146621.055 + 5142.634 Theodolithplatz 1838
— 146621.421 + 5141.533 Signal

9°	21′	15″182	Hannover Aegidius
9	41	19.303	Hannover Marktthurm
9	54	34.553	Hannover Kreuzthurm
10	9	50.053	Hannover Neustädter Thurm
10	31	42.803	Hannover Waterloosäule
22	44	15.130	Brelingerberg
82	12	10.312	Asendorf
176	42	49.434	Epailly's Signal, Dist. 3^{m}764
251	46	19.062	Signalpfahl, Dist. 1^{m}170
329	36	26.184	Celle Stadtkirche
329	59	9.312	Celle feine Thurmspitze
330	3	45.312	Celle Schlosskuppel 1.
330	4	46.562	Celle Schlosskuppel 2.
353	9	1.592	Osterberg
353	58	51.057	Windmühle unfern des Osterberges

CELLE STADTKIRCHE

— 121931.416 — 9338.299 Theodolithplatz
— 121931.352 — 9338.549 Thurmknopf

37°	55′	58″611	Osterberg
39	54	11.361	Hannover Marktthurm
63°	42′	24″889	Schloss S. O. Pavillon
67	58	42.305	Südwestliche Schlosskuppel
73	53	59.805	Schlossthurm Spitze
73	54	51.619	Schlossthurm Theodolithplatz
78	15	3.618	Brelingerberg
149	36	27.221	Falkenberg
284	18	44.611	Centrum des Thurms, Distanz 0^{m}258

OSTERBERG

— 109129.937 — 639.143

41°	28′	14″360	Hannover Marktthurm
40	24	35.571	Hannover Aegidius
42	10	47.360	Hannover Kreuzthurm
42	18	16.360	Hannover Neustädter Kirchthurm
112	31	58.497	Brelingerberg
217	56	0.291	Celle Stadtkirche
228	31	39.322	Kirchendach

HANNOVER AEGIDIUS

— 93577.384 + 13880.010

130°	43′	57″301	Eckberg
170	3	13.749	Brelingerberg
220	24	35.099	Osterberg

BRELINGER BERG

— 116274.663 + 17860.071

83°	47′	12″456	Eckberg
136	0	8.276	Heliotropplatz von 1822. Entfernung = 1^{m}000
202	44	13.455	Felkenberg
258	15	4.823	Celle
292	31	58.223	Osterberg
350	3	15.658	Hannover Aegidius
350	37	20.757	Hannover Marktthurm
350	59	36.007	Hannover Kreuzthurm
352	4	49.846	Hannover Waterloosäule

ECKBERG

— 114112.108 + 37726.256

263°	47′	15″851	Brelingerberg
308°	34′	1″192	Osterwald
310	39	34.817	Hannover Kreuzthurm
310	41	51.817	Hannover Marktthurm
310	43	58.284	Hannover Aegidiusthurm
311	21	20.817	Hannover Neustädterthurm
312	7	2.692	Hannover Waterloosäule

CELLE SCHLOSSTHURM

— 121866.539 — 9114.015 Spitze
— 121866.604 — 9114.015 Theodolithplatz

78°	18′	9″528	Brelingerberg
149	13	57.528	Nordwestliche Schlosskuppel
253	54	49.028	Stadtkirche Theodolithplatz
253	56	44.245	Stadtkirche Knopf des Thurmes
350	9	49.528	Südöstliche Schlosskuppel

ABRISSE AUS DEN VON MAJOR MÜLLER IM JAHRE 1841 IN OSTFRIESLAND AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

DORNUM

— 238863.867 + 166209.747 Hauptplatz
— 238864.081 + 166209.734 Platz 2

25°	51′	18″418	Platz B Entfernung 479^{m}104
63	52	40.281	*Hage*
110	13	11.120	Nordernei Logierhaus
110	25	43.979	Nordernei Conversationshaus
113	4	29.749	Platz A. Entfernung 330^{m}779
116	40	59.877	*Nordernei*
154	9	25.197	*Baltrum*
164	36	24.356	Baltrum Ostende Schorstein
165	56	39.123	Baltrum Signal 2
197	52	3.849	*Langeoog*
197	52	4.800	Langeoog aus Platz 2
213	0	39.110	Langeoog Signal 3. Melkörn
218	41	36.568	Langeoog Signal 4. Osteende
225	59	41.622	Langeoog, Ostende, Belvedere
226	4	54.955	Langeoog, Ostende, Nebenhaus Sohorstein
235	24	33.138	*Spikeroog*
235	24	34.635	Spikeroog aus Platz 2.
242	15	13.747	Wangeroog
272	33	29.372	*Esens*
272	33	33.006	Esens aus Platz 2.
287	1	59.070	*Jever*
352	52	25.308	*Aurich*
14	30	28.	Mitte der Kuppel. Abstand 0^{m}2037
15°	44′	27″	Centrum. Abstand 0^{m}2326
16	34	25	Knopf. Abstand 0. 2615
183	36	44.349	Platz 2. Abstand 0. 2141

Als Centrum ist die Mitte zwischen dem Knopf und der Mitte der Kuppel angenommen.

ESENS

— 238321.641 + 154076.973 Theodolith Hauptplatz
— 238321.918 + 154076.389 Nebenplatz 1.
— 238321.638 + 154076.937 Nebenplatz 2.

63°	5′	57″896	*Osteel*
78	59	43.073	*Hage*
91	13	47.729	Dornum Dorfkirche
92	33	27.717	*Dornum*
119	54	5.254	*Baltrum*
142	56	40.263	*Langeoog*
147	9	48.626	Langeoog Signal 2.
199	19	54.176	Spikeroog Weisse Düne
203	37	13.053	Spikeroog Kirche, westl. Giebel
203	39	36.918	Spikeroog Kirche, östl. Giebel
206	53	35.490	*Spikeroog*
230	49	28.490	Nebenplatz B. Abstand 337^{m}504
275	5	40.763	Nebenplatz 2. Abstand 0. 0365
295	21	33.361	*Jever*
301	28	3.791	Nebenplatz A. Abstand 314^{m}570
229	30	43	Centrum. Abstand 0. 1928

Nebenplatz 1.

64°	39′	35″675	Hauptplatz. Abstand 0^{m}646
142	56	31.143	Langeoog
165	7	25.209	Langeoog. Ostende Signal
206	53	30.175	Spikeroog
208	52	30.779	Spikeroog Signalpfahl

Nebenplatz 2.

142°	56′	39″848	Langeoog
175	44	22.848	Langeoog Ostende Belvedere Haus südl. Giebel
175	45	34.348	Langeoog Ostende Belvedere
175	52	53.515	Langeoog Ostende Nebenh. Schorst.
295	21	33.485	Jever

SPIKEROOG

— 252022.819 + 147127.532

26°	53′	45″625	*Esens*
55	24	39.465	*Dornum*
81	40	43.331	*Langeoog*
259	20	47.214	*Wangeroog*
332	8	13.990	*Jever*

LANGEOOG

— 249744.732 + 162701.816

0°	52′	49″318	*Accumersiel*
17	52	12.655	*Dornum*
30	43	11.403	*Dreihausen Signal*
40	19	11.222	*Hage*
75	55	57.451	*Baltrum*
78	46	55.947	*Nordernei*
260	48	21.037	*Wangeroog*
261	40	39.437	*Spikeroog*
322	56	47.881	*Esens*

BALTRUM

— 247783.213 + 170529.605

21°	47′	10″150	*Hage*
81	0	28.793	*Nordernei*
236	13	51.166	Baltrum Signal I.
255	55	54.819	*Langeoog*
277	11	14.563	Baltrum Signal II.
299	54	10.148	*Esens*
334	9	35.804	*Dornum*

NORDERNEI

— 246167.305 + 180740.759

22°	47′	50″204	*Pilsum*
77	49	27.078	Juist Hausgiebel
78°	57′	0″828	*Juist*
82	53	56.540	Logirhaus
87	24	8.453	Nordernei Kirche, östl. Giebel
184	56	25.294	*Weisse Düne*
258	46	57.453	*Langeoog*
261	0	26.503	*Baltrum*
286	23	49.172	*Esens*
296	41	10 640	*Dornum*
338	41	34.580	*Hage*

HAGE

— 234055.117 + 176016.098

50°	1′	46″479	*Pilsum*
50	2	40.279	Pilsum Theodolithplatz
116	43	54.103	*Juist*
158	48	20.520	*Nordernei*
201	46	56.692	*Baltrum*
209	35	22.310	Baltrum Signal II.
243	52	42.678	*Dornum*
245	2	53.928	Dornum Dorfkirchthurm
258	59	39.261	*Esens*
321	18	14.636	*Aurich*
34	12	12	Centrum oder grosser Knopf. Abstand 0^{m}2182
43	24	38	Kleiner Knopf. Abstand 0^{m}2183
286	43	5	Centrum der Laterne

JUIST

— 243448.055 + 194665.145

67°	3′	41″515	*Borkum*
82	29	52.304	*Grosse Bill*
258	56	58.802	*Nordernei*
279	9	10.324	*Dornum*
296	44	5.506	*Hage*
351	0	34.287	*Pilsum*

PILSUM

— 221356.366 + 191172.737

72°	55′	33″962	*Uithuiser Medem*
116	38	4.476	*Borkum*
171	0	48.975	*Juist*
194	44	31.355	Nordernei Conversationshaus
230	2	27.355	*Hage*
349	51	13.796	*Wibelsum*
303	0	39	Centrum. Abstand 5^{m}3212

BORKUM

— 234136.959 + 216657.589

45°	37′	58″181	*Hornhuizen*
247	3	7.607	*Juist*

249°	58′	19″274	Norderney Conversationshaus
270	6	54.479	*Haye*
296	38	11.551	*Pilsum*
355	13	53.888	*Uithuizer Medem*
141	9	52.638	Centrum, Abstand 2^m4313

BALTRUM

Nebenplatz 2. — 247511.594 + 168375.439

29°	35′	21″455	Hage
97	11	10.838	Baltrum
123	6	15.678	Nebenplatz 1
123	7	6.988	Signal 1
302	43	49.371	Esens
345°	56′	31″938	Dornum
279	2	37.838	Centrum oder Signal 2. Abstand 0^m8523

BALTRUM

Nebenplatz 1. — 248356.833 + 169671.862

29°	34′	27″897	Baltrum Kirche östl. Giebelstange
29	53	4.647	Baltrum Kirche westl. Giebelstange
56	13	37.772	Baltrum Signalpostament
303	5	27.055	Baltrum Signal 2.
339	57	52.089	Dornum
244	4	3.772	Centrum oder Signal, Abstand 0^m4822

ABRISSE DER VOM HAUPTMANN MÜLLER IM JAHRE 1839, UND VOM LIEUTENANT GAUSS IN DEN JAHREN 1843 UND 1844 IM BREMISCHEN AUSGEFÜHRTEN TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.

[IM AUSZUGE.]

BREMERLEHE

— 227663.471 + 89453.766

103°	31′	21″124	*Langwarden*
191	33	4.726	*Holssel*
230	25	53.127	*Haye*
298	47	40.909	*Basdahl Heliotrop*
298	47	59.416	Basdahl Nebensignal
315	29		Centrum, Abstand 0^m0126

HOLSSEL

— 239585.808 + 87017.163

11°	33′	9″676	*Lehe*
70	44	0.491	*Langwarden*
162	55	34.661	Holssel Kirche, Giebelstange
163	5	41.942	Holssel Kirche, Giebelstange des hohen Chors cf. Bederkesa 1.
163	26	17.577	
174	21	31.285	*Midlum*
232	49	21.255	*Krempel*
292	44	39.796	*Bederkesa* 1.
333	48	51.928	*Haye*

HAYE

— 232806.443 — 83230.289

50°	25′	54″830	*Lehe*
150	48	49.712	*Holssel*
176°	49′	21″689	*Altenwalde*
191	24	12.026	*Krempel*
243	12	5.053	*Silberberg*
262	14	28.882	*Bederkesa*
314	25	46.973	*Basdahl*

BEDERKESA 1

— 234080.187 + 73882.941

82°	14′	30″535	*Haye*
112	44	36.581	*Holssel*
145	8	33.533	*Krempel*
233	54	32.924	*Silberberg*

KREMPEL

— 244200.869 + 80932.188

11°	24′	15″385	*Haye*
27	15	48.171	*Lehe*
52	49	23.108	*Holssel*
162	25	28.709	Windmühle bei Altenwalde
163	9	45.026	*Altenwalde*
165	1	46.976	Altenwalde
267	10	46.622	*Silberberg*
297	44	9.185	*Dolosenberg*
323	42	32.491	Windmühle bei Bederkesa
325	8	36.473	*Bederkesa* I.

SILBERBERG

— 245307.475 + 58481.723

8°	38′	38″694	*Basdahl*
29	32	25.779	*Wüstenwohlde*
50	26	54.420	*Bederkesa* 2.
50	52	39.382	Windmühle bei Bederkesa
53	54	37.945	*Bederkesa* 1.
63	12	8.342	*Haye*
87	10	46.075	*Krempel*
111	40	22.908	Windmühle bei Altenwalde
112	26	2.719	*Altenwalde*
120	9	31.284	Neuwerk
216	48	37.649	*St. Margareth*
247	59	21.158	Krempe
288	39	15.908	Hamburg
297	42	47.267	*Stade*
297	47	10.783	Stade Rathhaus
297	51	53.408	Wilhadi
329	47	29.960	*Kikenberg*
350	55	42.681	*Dolosenberg*

DOLOSENBERG

— 231213.792 + 56230.888

21°	40′	26″755	*Basdahl*
78	24	59.774	*Wüstewohlde*
97	21	11.117	*Bederkesa* 2.
98	51	39.413	Bederkesa Glockenthurm
98	53	29.413	Bederkesa Kirchthurm
117	44	5.307	*Krempel*
130	48	7.596	Windmühle bei Altenwalde
131	17	23.474	*Altenwalde*
131	42	58.846	Altenwalde
170	55	37.372	*Silberberg*
190	6	15.638	*Kikenberg*
270	54	36.816	*Stade*

BEDERKESA 2.

— 233369.169 + 72936.603

130°	19′	10″147	Nahe Bederkesaer Windmühle
152	27	43.147	Windmühle bei Altenwalde
152	57	9.453	*Altenwalde*
153	47	49.814	Altenwalde
230	26	51.049	*Silberberg*
277	21	11.722	*Dolosenberg*
311	29	4.174	*Wüstewohlde*
334	26	24.339	*Basdahl*

ALTENWALDE

— 256057.755 + 84520.796

6°	45′	7″828	Windmühle von Altenwalde
44	46	33.111	*Langwarden*
134°	53′	13″976	Neuwerk dicker Thurm
135	11	25.351	Neuwerk Leuchtthurm
135	55	38.488	*Norderbake*
211	26	51.951	*Cuxhaven Leuchtthurm*
269	20	0.244	Altenwalde
292	26	7.236	*Silberberg*
332	22	59.462	Bederkesa Kirchthurm
332	26	20.712	Bederkesa Glockenthurm
332	57	17.242	*Bederkesa* 2.
343	9	47.686	*Krempel*
356	49	34.088	*Haye*

WÜSTEWOHLDE

— 228839.250 + 67813.678

131°	29′	3″658	*Bederkesa* 2.
209	32	20.088	*Silberberg*
258	24	57.400	*Dolosenberg*
305	27	29.623	*Bremervörde*
343	56	31.156	*Basdahl*
343	57	13.506	Basdahl Nebensignal

BASDAHL

— 213313.852 + 63343.996

118°	47′	36″279	*Lehe*
134	25	38.700	*Haye*
154	26	17.978	*Bederkesa* 2.
163	56	25.045	*Wüstewohlde*
188	38	29.172	*Silberberg*
201	40	21.792	*Dolosenberg*
241	40	21.519	*Stade*

STADE

— 230811.995 + 30884.995

90°	54′	34″174	*Dolosenberg*
117	42	39.319	*Silberberg*
165	20	9.993	*Assel*
280	18	26.903	*Hamburg*
319	25	45.558	*Littberg*
43	0	46.	Centrum, Abstand 0^m581
87	28	13.993	Nebenplatz, Abstand 3. 050
286	46	19.993	Nebenplatz 2. Abstand 2. 430

NEUE WERK

— 229392.658 + 30815.096

177°	11′	39″660	Stade Cosmae
177	12	49.660	Stade Cosmae Centrum der Laterne
181	43	34.160	Stade Wilhadi

ABRISSE AUS DER VEREINIGUNG DER MESSUNGEN VOM JAHRE 1843 UND 1844.

[IM AUSZUGE.]

LITBERG

$-206867.045 \quad +21896.054$

66°	0′	41″986	Zeven
159	25	27.299	Stade
233	35	15.882	Hamburg

HAMBURG

$-224765.616 \quad -2368.668$

53°	35′	11″434	Litberg
100	18	16.153	Stade
135	0	0.840	Crempe
289	18	46.153	Centrum, Abstand 1^m340

STADE

$-230811.734 \quad +30884.678$

61°	40′	19″633	Basdahl Signal
61	40	21.032	Basdahl Postament
90	54	32.920	Dolosenberg
117	42	38.017	Silberberg
182	20	46.381	Crempe Rathhaus
182	31	35.756	Crempe
229	47	35.756	Nebenplatz, Abstand 3^m180
280	18	20.066	Hamburg
339	25	28.111	Litberg
333	44	10.995	Centrum, Abstand 0^m1825
53	44	51.982	Nebenplatz 1.
300	43	25.066	Nebenplatz 2.
12	50	5	Hülfsplatz D Abstand 2^m705
143	44	5	Hülfsplatz E Abstand 3.250
219	13	5	Hülfsplatz C Abstand 3.750
320	48	5	Hülfsplatz E Abstand 3.330

CREMPE

$-256864.392 \quad +29737.939$

2°	31′	13″562	Stade
68	5	49.269	Silberberg
111	19	14.813	Crempe Rathhaus
111	28	7.312	Crempe Rathhaus Theodol. Platz
211	52	24.718	Centrum, Abstand 6^m126
314	59	34.261	Hamburg

SILBERBERG

$-245327.475 \quad +58481.723$

8°	38′	49″830	Basdahl Signal
8	38	33.087	Basdahl Postament
248	5	21.779	Crempe
297	42	43.920	Stade
350	55	36.402	Dolosenberg

BASDAHL

$-213313.852 \quad +63343.996$

57°	33′	18″284	Signal, Abstand 3^m4874
188	38	23.253	Silberberg
201	40	16.909	Dolosenberg
241	40	18.284	Stade

DOLOSENBERG

$-231213.792 \quad +56230.888$

21°	40′	22″764	Basdahl Postament
170	55	33.380	Silberberg
270	54	32.824	Stade

[BERICHT ÜBER DIE RESULTATE DER TRIGONOMETRISCHEN MESSUNGEN.]

— — —

Von den Rechnungen, durch die der Übergang von dem rohen Messungs-Material [in den Journalen, welche 35 Hefte in der Reinschrift füllen] zu den Endresultaten [im Coordinaten-Verzeichniss] gemacht ist, habe ich nur einen dem Umfange nach sehr kleinen Theil unter meine jetzigen Vorlagen aufnehmen können.

In der That, wenn es möglich wäre, alle jene Rechnungen in extenso vollständig wieder aufzustellen, so möchten solche leicht vier oder sechsmal so viele Bände füllen [als jetzt die Journale bilden]. Allein theils der Umstand, dass der grössere Theil der Details jener Rechnungen gar nicht aufbewahrt ist, theils die Form, in der sich die noch immer sehr voluminösen Fascikel der aufbewahrten Papiere befinden, haben zur Folge, dass eine vollständige und geordnete Wiederherstellung *aller* Rechnungen fast dasselbe bedeuten würde, wie eine nochmalige Wiederholung meiner ganzen Arbeit. Ich habe mich demnach auf die geordnete Extrahirung desjenigen Theils der Zwischenrechnungen beschränkt, der als der prägnanteste und nützlichste betrachtet werden muss, nemlich auf die tabellarische Zusammenstellung aller an den verschiedenen Beobachtungsplätzen festgelegten und orientirten Richtungswinkel, wobei eine Parallele mit dem Göttinger Meridian den Nullpunkt oder Ausgangspunkt bildet. Diese tabellarischen Darstellungen sind unter der Benennung von *Abrissen**) in sechs Heften zusammengeordnet, wobei ich von dem Professor Goldschmidt mehrfache Beihülfe erhalten habe, welcher zugleich die Reinschriften grösstentheils selbst gemacht hat. — — —

Zur Entschuldigung der so sehr verspäteten Beendigung dieses Geschäfts muss ich noch bemerken, dass die Verspätung hauptsächlich daher entstanden ist, dass zur Erledigung der sowohl bei den Abschriften als noch mehr bei der Anfertigung der Abrisse aufstossenden zahlreichen Zweifel nicht selten erst langwierige Nachforschungen gemacht werden mussten. — — —

Sowie Zeit, Gesundheit und Kräfte es verstatten, werden meinen beiden ersten auf die geodätischen Probleme bezüglichen Abhandlungen noch ein Paar andere den speciellen Gegenständen noch näher tretend nachfolgen.

Göttingen den 15. März 1848.

C. F. Gauss.

*) Die ganze Anzahl wird etwas über fünftehalb hundert betragen.

[ENTWURF ZUR GRADMESSUNG.]

— — — Über Gradmessungen überhaupt, und in wie fern sie einen der interessantesten Gegenstände des menschlichen Wissens begründen, darf ich in einem Schreiben an Ew. — — nichts sagen. Allein die grossen Vortheile und neuen Aufklärungen noch dunkler Punkte, welche von der Vervielfältigung solcher Operationen zu erwarten sind, beruhen doch mit auf der Bedingung, dass diese so viel als möglich ins Grosse gehen. Isolirte Gradmessungen in Europa, die nur einen kleinen Umfang umfassen, könnten jetzt, nach den grossen Arbeiten in Frankreich und England, nur einen sehr untergeordneten Werth haben: wogegen noch eine oder ein Paar andere ähnliche Messungen in Europa, von einer bedeutenden Ausdehnung, gewiss für die Kenntniss der Gestalt der Erde ungemein wichtig sein würden.

Ein Blick auf die Karte von Europa, und auf den Culturzustand der verschiedenen Nationen, zeigt, dass ausser der grossen Linie von den Balearischen bis zu den Orkneys Inseln, nur noch in zwei Richtungen ähnliche Operationen ausführbar sein werden 1) im Russischen Reiche und 2) durch die Jütische Halbinsel und ganz Deutschland bis zum Mittelländischen Meere. Zur Ausführung einer Messung in ersterm Reiche scheinen, mir zugekommenen Nachrichten zufolge, einige Aussichten zu sein. Allein für die andern ist mehr als Aussicht: der erste Hauptschritt ist bereits wirklich geschehen. Die von dem Könige von Dänemark befohlene Gradmessung, von der Nordspitze Jütlands bis Lauenburg ist bereits seit zwei Jahren im Gange; dass dieselbe ganz so wird ausgeführt werden, wie es der heutige Zustand der Wissenschaften und Künste möglich und nothwendig macht, dafür bürgt die Geschicklichkeit und Einsicht des dänischen Astronomen, die Vortrefflichkeit seiner Instrumente, und die Liberalität, womit der König von Dänemark alles, was zur Vollkommenheit der Messung nothwendig oder wünschenswerth gefunden wird, genehmigt.

Die dänische Gradmessung soll, ausser dem erwähnten Meridianbogen, auch noch die Messung des Bogens eines Parallelkreises von der Westküste Jütlands bis Koppenhagen umfassen. Natürlich kann hier nur von dem erstern Theile des Planes die Rede sein. Jener Bogen umfasst für sich schon $4\frac{1}{2}$ Grad, und die Messung ist daher, schon isolirt betrachtet, von einer respectabeln Ausdehnung. Allein ohne Vergleich wichtiger erscheint dieselbe, wenn sie als der Anfang jener grossen Messung betrachtet wird, die einer Ausdehnung bis zur Insel Elba, also bis auf 16°, fähig ist. Dass, früh oder spät, diese Operation in einer solchen Ausdehnung einmal werde ausgeführt werden, ist wohl mehr als eine chimärische Hoffnung, besonders da in einigen dazwischen liegenden Ländern, namentlich in Thüringen und Bayern, bereits manche Vorarbeiten wirklich geschehen sind. Die Fortsetzung der dänischen Messung durch das Königreich Hannover ist aber die erste und wesentlichste Bedingung zur dereinstigen Realisirung jenes Planes. Durch diese Fortsetzung allein würde der Bogen schon um 2 Grad vergrössert werden. Würde dann auch noch die Gothaische Sternwarte durch ein Dreiecksnetz mit der Göttingischen in Verbindung gebracht, was auch in mancher andern Rücksicht sehr wünschenswerth und leicht ausführbar sein würde, so wäre dadurch schon ein Bogen von 7 Graden realisirt.

Nur kurz brauche ich zu berühren, dass die Messung eines Meridianbogens von Hamburg bis Göttingen auch noch in andern Beziehungen, als der rein wissenschaftlichen, von grosser Wichtigkeit sein würde. Das zu diesem Zweck geführte Dreiecksnetz würde, wenn über kurz oder lang eine den heutigen Forderungen entsprechende Vermessung des ganzen Königreichs Hannover beschlossen werden sollte, die sicherste Grundlage abgeben, um die weitern Triangulationen östlich und westlich an dasselbe anzuschliessen. Und falls zu einer solchen Generalvermessung nahe Aussicht sein sollte, könnte durch die Gradmessung noch der Nebenzweck erreicht werden, dass diese mit zur Vorbereitung tauglicher Personen für jenes Geschäft benutzt werden könnte.

Ich habe noch hinzuzufügen, dass ich über diesen Gegenstand bereits vor einem Jahre Sr. — — — ein ausführliches Memoire vorgelegt habe, und dass dieser, die Wichtigkeit der Fortsetzung der dänischen Messungen nicht verkennend, wenigstens sofort die Möglichkeit derselben sicherte, indem er mir den Befehl ertheilte, Lüneburg an die zum Theil in vergänglichen Signalpunkten bestehenden südlichen Punkte jener Messung anzuschliessen. Dies ist im vorigen Herbst geschehen, und dadurch die künftige Fortsetzung von dem Untergange der precären Punkte unabhängig gemacht.

Wenn Ew. — — diesen Ideen Ihren Beifall schenken, und sie würdig halten, für ihre Realisirung zu wirken, so muss ich schon die Beabsichtigung einer möglichst vollkommenen und neben jeder andern ehrenvoll bestehenden Ausführung voraussetzen, und in dieser Hinsicht würde ich mich der Ausführung, wenn sie mir anvertrauet würde, mit Vergnügen unterziehen, und eine vielleicht länger als Einen Sommer dauernde Unterbrechung meiner rein astronomischen Arbeiten für kein Opfer halten.

Was den zur Verlängerung der dänischen Gradmessung durch das Königreich Hannover erforderlichen Kostenaufwand betrifft, so ist es wegen seiner Abhängigkeit von mancherlei nicht vorherzusehenden Umständen freilich unmöglich, denselben mit einiger Genauigkeit im Voraus anzugeben. So hat die Witterung auf die Zeitdauer, und dadurch auf die Kosten einen wesentlichen Einfluss. Ich wüsste nicht, dass von irgend einer Gradmessung die Kosten öffentlich bekannt gemacht wären, und wenn ich gleich von dem Dänischen Astronomen über die bisherigen Kosten seiner Gradmessung Mittheilung erhalten könnte, so würden sich doch daraus die Kosten ähnlicher Operationen im Königreich Hannover, wegen der grossen Verschiedenheit der Localverhältnisse, nur sehr unsicher schätzen lassen. So werden z. B. im Hannöverschen die Kosten für Fuhren behuf Transports der Personen und Instrumente einen sehr bedeutenden Theil der Gesammtkosten austragen, da jene im Dänischen, wo die Fuhren ex officio in natura geleistet werden, fast ganz aus der Rechnung wegfallen. Doch glaube ich, alles wohl erwogen, dass die Summe von 1500 Pfund Sterling zur Bestreitung aller Kosten hinreichen würde, und versteht sich von selbst, dass darüber demnächst Rechnung abgelegt werden würde.

Der Professor Schumacher hat bei seiner Gradmessung ausser ein Paar Amanuensen, zwei Officiere von Capitains Rang zu Gehülfen, deren Geschäft es ist, die Gegend vorher zu bereisen, schickliche Punkte für Dreiecksstationen auszusuchen, um sie, nach vorläufig daselbst gemachten Messungen, dem Prof. S. zur Auswahl vorzuschlagen, hernach auf den ausgewählten Punkten die Errichtung von Signalen, wo es nöthig ist, und andere nöthige Vorkehrungen zu betreiben, mit einem Wort, alle Vorbereitungen zu machen, dass der Astronom überall ohne vielen Zeitverlust zum Beobachten schreiten kann; endlich da, wo es nöthig ist, bei den Beobachtungen die Nebenoperationen zu übernehmen. Die erforderlichen Eigenschaften für solche Gehülfen sind daher, nicht sowohl besonders tiefe mathematische oder astronomische Einsichten, als vielmehr reger Eifer für die Sache, die grösste Pünktlichkeit und Sinn für die grösste Genauigkeit, eine gewisse praktische Anstelligkeit, einige Kenntnisse vom Bauwesen, einige Bekanntschaft mit dem Geschäftsgange in unserm Lande bei denjenigen Behörden, mit welchen in solchen Angelegenheiten Berührungen vorkommen. Ein grösseres Personal als bei der Dänischen Gradmessung würde auch bei der Hannöverschen nicht nöthig sein, und ich würde mir sogleich, sobald eine Resolution gefällt ist, angelegen sein lassen, taugliche Gehülfen selbst auszusuchen. Natürlich würde es aber von Ew. — — Ermessen abhängen, ob vielleicht rathsam erachtet würde, in *der oben erwähnten* Beziehung noch mehrere Personen als Volontairs den Messungen beiwohnen zu lassen, um sich zu feinern geodätischen Arbeiten vorzubereiten. — —

Göttingen den 30. Mai 1819.

Carl Friedrich Gauss.

[ENTWURF ZUR GRADMESSUNG.]

— — —

Durch ein Schreiben des Professors SCHUMACHER bin ich benachrichtigt, dass der Dänische Gesandte in London Graf BOURKE, bei Gelegenheit von des erstern Aufenthalt daselbst, mit dem Grafen MÜNSTER über den Nutzen der Fortsetzung der Dänischen Gradmessung durch das Königreich Hannover gesprochen, und dass letzterer verlangt habe, dass ich über diesen Gegenstand an ihn schreiben möchte. Wenn ich diese Anzeige wie einen Befehl habe betrachten müssen, so verpflichtet mich das warme Interesse, welches Ew. — — an dieser wissenschaftlichen Angelegenheit genommen, und bereits im vorigen Jahre, durch die die Möglichkeit einer solchen Fortsetzung sichernden Maassregeln bethätigt haben, Ew. — — sofort von diesem Umstande zu benachrichtigen, und bürgt mir für die gütige Aufnahme meiner Bitte, die Sache nach Möglichkeit in London zu unterstützen. Ich darf mich um so weniger scheuen, diese Bitte zu thun, da ich dabei bloss aus reiner Liebe zur Wissenschaft handle, und ohne diese und ohne die lebhafte Überzeugung von der hohen Wichtigkeit einer solchen Operation, nach meiner individuellen Neigung, eine längere Entfernung von den rein astronomischen Arbeiten eher als ein Opfer betrachten würde. Auch der ehrwürdige Sir JOSEPH BANKS hat, wie mir Professor SCHUMACHER schreibt, die Idee der weitern Fortsetzung dieser Gradmessung auf dem Continent, mit grosser Wärme ergriffen, und alle Mitwirkung versprochen.

Der Professor SCHUMACHER wird bei seiner Durchreise durch Hannover Ew. — — selbst gesagt haben, dass der Zweck seiner Reise nach England die Empfangnahme des berühmten grossen Zenithsectors war, welcher bei der englischen Gradmessung gebraucht ist, und ihm für seine astronomischen Beobachtungen geliehen wird. Er wird sogleich nach seiner Zurückkunft, diese Beobachtungen am südlichen Endpunkte seiner Messungen in Lauenburg anfangen. Bei der Aussicht zu einer Fortsetzung der Dänischen Gradmessung durch das Königreich Hannover würde es ohne Zweifel in vielfacher Hinsicht für beide Gradmessungen sehr wünschenswerth sein, wenn ich *diese* Beobachtungen mit ihm gemeinschaftlich machte. *Ohne* diese Vereinigung ist der Fall leicht denkbar, dass in Zukunft diese oder jene Discordanzen oder Zweifel eintreten könnten, die sich dann nur schwer würden aufklären lassen, und denen *durch* dieselbe vorgebeugt werden würde. So sind ja gerade über die astronomischen Beobachtungen, welche am nordlichen Endpunkte der französischen Gradmessung in Dünkirchen angestellt waren, späterhin Bedenklichkeiten entstanden, derentwegen es nöthig gefunden wurde, dass im vorigen Herbst mit dem gedachten Zenithsector neue Beobachtungen durch englische und französische Commissarien gemeinschaftlich, angestellt wurden; und wie ich höre, soll eben dieser Zenithsector, sobald ihn Professor SCHUMACHER wieder abgegeben haben wird, zu einer nochmaligen Wiederholung der Beobachtungen auf den Balearischen Inseln, dahin eingeschifft werden. Nur durch eignes Beobachten an diesem Instrumente, und durch Vergleichung mit den Erfahrungen, die ich an dem REPSOLDschen Meridiankreise gemacht habe, und noch mehr mit denen, welche ich mit dem REICHENBACHschen Kreise in Zukunft machen werde, würde ich im Stande sein, zu beurtheilen, ob eine künftige Zuziehung eben jenes Zenithsectors für die Beobachtungen im Königreich Hannover nöthig oder vorzüglich wünschenswerth sein wird. Und selbst den Fall angenommen, dass die Fortsetzung der Gradmessung nicht zur Ausführung käme, würden die von mir an dem Zenithsector, einem in seiner Art einzigen Instrumente, gemachten Erfahrungen für meine künftigen Beobachtungen an den Meridian-Instrumenten der hiesigen Sternwarte nicht ohne wesentlichen Nutzen sein. Als einen Beweis, wie wichtig die Beobachtungen in Lauenburg geachtet werden, darf ich noch anführen, dass der Doctor OLBERS mir von seiner Absicht geschrieben hat, nach Lauenburg kommen zu wollen, um das Instrument kennen zu lernen und den Beobachtungen beizuwohnen.

Ich gebe Ew. — — unterthänigst anheim, diese Gründe zu prüfen und darüber zu entscheiden und füge nur noch hinzu, dass freilich diese Abwesenheit mich in Beziehung auf die zwei Collegia, welche ich in diesem Sommer zu halten habe, etwas beengen würde, dass ich jedoch bei der kleinen Anzahl der Zuhörer mit diesen ein Arrangement treffen könnte, die ausfallenden Stunden theils vorher theils nachher einzubringen. Und um die Zeit der Abwesenheit nach Möglichkeit zu beschränken, würde ich mit dem Prof. SCHUMACHER (welchen ich jeden Tag hier zurückerwarte) vorläufig mündliche Abrede nehmen, damit er in Lauenburg vorher alle Vorbereitungen treffen und die Beobachtungen unmittelbar nach meiner Ankunft ihren Anfang nehmen können. Da in dieser Jahreszeit das Wetter den Beobachtungen nicht ungünstig zu sein pflegt, so wäre zu erwarten, dass die Zeit meiner Abwesenheit nicht länger zu sein brauchte, als etwa die Badereisen, welche manche meiner Collegen um dieselbe Zeit wohl machen.

Ich benutze diese Gelegenheit, um Ew. — — noch anzuzeigen, dass die von dem Mechanikus RUMPF verfertigte Maschine zur Umlegung des REICHENBACH'schen Mittagsfernrohrs nunmehr in diesen Tagen angeschlagen wird, und dass dann sofort auch an diesem Instrumente die regelmässigen Beobachtungen ihren Anfang nehmen werden.

— — —

Göttingen den 1819.

C. F. GAUSS.

ANZEIGE DES HOFR. GAUSS, BETREFFEND DIE FORTSETZUNG DER DÄNISCHEN GRADMESSUNGEN DURCH DAS KÖNIGREICH HANNOVER.

— — —

Zenithsectoren wurden bisher auch für die ersten Sternwarten als ein wesentliches Bedürfniss angesehen. Allein gegenwärtig machen die neuconstruirten Meridiankreise, namentlich die REICHENBACHschen, jene Instrumente gewissermassen entbehrlich. Wenigstens leistet, nach meinen bisherigen Erfahrungen der hiesige seit Februar d. J. im Gebrauch befindliche Meridiankreis alles was ein Zenithsector leisten könnte, ebenso vollkommen. Es könnte daher überflüssig scheinen, bei der Gradmessung noch an einen Zenithsector zu denken, wenn nicht folgende zwei wichtige Umstände noch zu berücksichtigen wären.

1) Der Meridiankreis erfordert eine sehr solide Aufstellung, die ihm nur auf einer eigentlichen Sternwarte gegeben werden kann, und ist überhaupt als ein fixes, nicht als ein transportables Instrument zu betrachten. Obgleich nun aber die *wichtigsten* Beobachtungen, wozu ein Zenithsector oder der Meridiankreis in Bezug auf die Gradmessung verwandt werden, die auf der hiesigen Sternwarte anzustellenden sein werden, die in sofern als südlicher Endpunkt betrachtet werden muss, und obgleich diesseitige Beobachtungen der Art am nordlichen Ende deswegen überflüssig sind, oder scheinen können, weil dazu schon die Dänischer Seits in Lauenburg gemachten dienen können, so konnte sich doch beim Verfolg der Arbeit die Nothwendigkeit zeigen, und auf alle Fälle wird es wissenschaftlich interessant sein, dass ähnliche Beobachtungen auf einem Zwischenpunkte des Königreichs Hannover, z. B. in Celle oder Hannover, angestellt wurden, was nur mit Hülfe eines transportabeln Zenithsectors geschehen könnte.

2) Da der Gebrauch, der bei einer Gradmessung von den hier in Rede stehenden Beobachtungen gemacht wird, ganz auf der *Vergleichung* der an den verschiedenen Hauptpunkten gemachten Beobachtungen unter *einander* beruht, und also demnächst die Göttinger und vielleicht Celler oder andere diesseitige Beobachtungen mit denen, die Dänischer Seits in Lauenburg, Lysabbel (auf der Insel Alsen) und

Skagen angestellt sind, werden verglichen werden müssen, so könnte es dem Zutrauen, welches die Resultate für sich fordern sollen, nachtheilig werden, wenn jene Beobachtungen nicht bloss mit verschiedenen, sondern sogar mit ganz verschiedenartigen Instrumenten gewonnen wären. Am besten wird es daher sein, wenn die hiesigen Beobachtungen nicht bloss am Meridiankreise, sondern überdiess noch am Zenithsector, und zwar an dem *nämlichen* Zenithsector, womit an allen andern Orten observirt wurde, angestellt werden.

Der Zenithsector, womit die Dänischen Bestimmungen in Lauenburg, Lysabbel und Skagen, auch in Kopenhagen, in den Jahren 1819 und 1820 gemacht sind, ist eben derselbe, womit bei der englischen Gradmessung im Jahre 1802 vom verst. General Mudge beobachtet ist. Mit eben dem Instrumente wurde im Jahre 1818 gemeinschaftlich von englischen und französischen Gelehrten in Dünkirchen als dem nördlichsten Endpunkte der französischen Gradmessung eine Reihe von Beobachtungen gemacht, und nachher dasselbe vom engl. Gouvernement zu der Dänischen Gradmessung auf 2 Jahre geliehen. Alle diese Umstände machen es um so wünschenswerther, dass dieses Instrument auch bei der Hannoverschen Gradmessung gebraucht werde, und es wird dabei besonders wichtig und lehrreich sein, dasselbe mit dem hiesigen Reichenbach'schen Meridiankreise vermittelst gleichzeitiger und in Einem Ort gemachten Beobachtungen zu vergleichen.

Es ist nicht zu zweifeln, dass für die Hannoversche Gradmessung dieses Instrument mit derselben Bereitwilligkeit werde hergeliehen werden, wie für die Dänische, — — — Ich füge noch folgende Umstände bei. Dieser von Ramsden verfertigte Zenithsector gehört dem Board of Ordnance, und steht in letzter Instanz unter dem Herzog von Wellington, mittelbar aber, nach dem vor kurzem erfolgten Tode des General Mudge, unter dem Oberstlieutenant Colby.

Aus vorstehender Darstellung geht hervor, dass die Zeit des Anfangs der grössern zur Gradmessung gehörigen Operationen, die besondere Vorkehrungen erfordern, in diesem Augenblick sich noch nicht bestimmt angeben lässt. Auf alle Fälle aber wird im Laufe des gegenwärtigen Jahres nichts weiter geschehen können, als ein Theil der astronomischen Beobachtungen auf hiesiger Sternwarte (womit ich auch bereits einen Anfang gemacht habe) und höchstens einige Vorarbeiten in hiesiger Umgegend.

Göttingen den 11. August 1820.

C. F. Gauss.

P. M. BETREFFEND DIE GEGENWART DES HOFR. GAUSS, BEI EINEM THEIL DER OPERATIONEN DER DÄNISCHEN GRADMESSUNG.

Über die in dem königl. Dänischen Gebiete angeordnete und dem Dänischen Astronomen Schumacher übertragene Gradmessung, ihren Zweck, die Vortheile, die man für die Wissenschaften davon zu erwarten berechtigt ist, so wie über die dabei angewandten Hülfsmittel habe ich schon früher die Ehre gehabt, Ew. — — einen unterthänigsten Bericht abzustatten. Es gereicht mir um so mehr zum Vergnügen, dass eben jetzt ein anderer Astronom, der Doctor Olbers, der auch im vorigen Jahre von den Operationen in Lauenburg Augenzeuge gewesen, in der Zeitschrift: Allgemeine Geographische Ephemeriden (Bd. 17. Stück 3) mit den meinigen ganz übereinstimmende Ansichten dieser Unternehmung bekannt gemacht hat, da mein eignes Urtheil über die Persönlichkeit des Dänischen Astronomen insofern vielleicht befangen scheinen könnte, weil dieser früher (1809) seine letzte Ausbildung auf hiesiger Universität erhalten hatte.

Im bevorstehenden Sommer wird derselbe zuerst auf der Nordspitze von Jütland die astronomischen Beobachtungen anstellen, und nachher theils in Lauenburg mit neuen Instrumenten die vorigjährigen Messungen wiederholen und die Azimuthalbestimmungen machen, theils bei Hamburg eine Grundlinie, einige Meilen lang, messen. Nur für einen Theil der Operationen in Lauenburg und die Basismessung, nicht aber für die Operationen auf der Nordspitze von Jütland, wird meine Gegenwart gewünscht. Das Dänische Gouvernement, indem es meine Anwesenheit bei diesen delicaten Operationen gewünscht hat, scheint mir von der Ansicht ausgegangen zu sein, dass vereinigte Berathung bei diesem lediglich zum Besten der Wissenschaft unternommenen Geschäft, förderlich sein werde, was durch blossen Briefwechsel der Natur der Sache nach nur unvollkommen oder gar nicht erreicht werden könne. Zweitens, da in Zukunft die ganze Gradmessung in extenso in einem eignen Werke der gelehrten Welt bekannt gemacht werden soll, wird die Anwesenheit eines Zeugen bei einigen der wichtigsten Operationen dazu dienen, die Authenticität zu verstärken. So wurden im Jahre 1798 zu der Basismessung bei Paris alle damals mit Frankreich nicht im Krieg begriffenen Staaten von Frankreich eingeladen, qualificirte Astronomen abzuschicken, was auch von Dänemark, der Schweiz, Holland, Spanien und andern Staaten geschah. Diese beiden Rücksichten beziehen sich zunächst nur auf die Dänischen Gradmessungen für sich allein genommen. In der Voraussetzung, dass früh oder spät eine weitere Fortsetzung durch das Hannöversche angeordnet werden könnte, scheint es aber noch besonders wichtig zu sein, dass durch einen diesseitigen Astronomen das Vertrauen gehörig gewürdigt werden könne, welches diejenigen Operationen besonders verdienen, an welche eine solche Fortsetzung unmittelbar sich anschliessen müsste.

Nach diesen Betrachtungen bin ich sehr gern bereit, der mir schmeichelhaften Aufforderung Folge zu leisten, und werde ich den Dänischen Astronomen ersuchen, mich von der Zeit, wo jene Operationen werden vorgenommen werden, so früh als möglich zu benachrichtigen, damit ich mich bei meinen anderweitigen Geschäften danach einrichten könne. Mit den Vorlesungen wird dies wol keine Schwierigkeiten haben, da doch jene Operationen erst im Spätsommer anfangen werden. Leid wird es mir zwar thun, aller Wahrscheinlichkeit nach die in ihrer Art einzige am 7. Sept. eintreffende grosse ringförmige Sonnenfinsterniss hier nicht mehr beobachten zu können; allein ich werde mich damit beruhigen, dass theils dieselbe hier doch durch den Prof. Harding wird beobachtet werden können, theils, dass dieselbe auch im Holsteinischen gleichfalls ringförmig erscheinen und es leicht thunlich sein wird, dort gute, wenn auch den hiesigen nicht ganz gleich kommende Hülfsmittel zur Beobachtung dieses merkwürdigen Phänomens herbeizuschaffen. — — —

Göttingen den 27. Februar 1820.

C. F. Gauss.

P. M. BETREFFEND DIE HANNÖVERSCHE GRADMESSUNG.

— — — Ich habe bereits in meinem frühern Bericht das für dieses Geschäft unentbehrliche Bedürfniss mehrerer Hauptinstrumente auseinandergesetzt. Solange es sogar noch ungewiss war, woher dieselben zu erhalten stehen würden, konnte natürlich mit den Operationen selbst noch kein Anfang gemacht werden, einige astronomische Vorarbeiten auf hiesiger Sternwarte, womit ich schon im vorigen Sommer angefangen, abgerechnet. Inzwischen habe ich jene Hauptbedürfnisse, namentlich einen grössern möglichst vollkommenen Theodolithen und ein sogenanntes Universalinstrument bei dem ersten jetzt lebenden Künstler, von Reichenbach in München, bestellt, welcher nicht nur diese Bestellung angenommen, sondern auch diese Instrumente resp. Anfang Mai und im Juli d. J. zu liefern versprochen hat.

Ich habe inzwischen auf mehrern Wegen solche Nachrichten einzuziehen gesucht, die in mehrfacher Beziehung für die Hannoversche Gradmessung wichtig sein werden. So wie diese ihre grössere Wichtigkeit dadurch erhält, dass sie einerseits die Fortsetzung der ausgedehnten Dänischen Messung ist, und andrerseits einer noch viel ausgedehntern Fortsetzung nach Süden fähig ist, gereicht es mir zur Freude, jetzt anführen zu können, dass ein bedeutender Theil der letztern Operationen, die früher nur als möglich und wünschenswerth dargestellt werden konnten, bereits wirklich gemacht ist. Das Königl. Preussische Gouvernement nemlich, welches mehrere Hauptprovinzen der preussischen Monarchie vermessen zu lassen beabsichtigt, und dieser Vermessung, nach den gegenwärtig als allein zulässig anerkannten Grundsätzen zuvörderst eine grosse Triangulation zur Grundlage dienen lässt, hat bereits diejenige Triangulation *wirklich* ausführen lassen, wodurch die preussischen Rheinprovinzen mit den ältern verbunden werden, und die sich durch das Nassau'sche, Kurhessen, Thüringen u. s. w. bis Halle erstreckt. Durch den K. Pr. Generallieutenant von Müffling habe ich diese Triangulation vollständig mitgetheilt erhalten, und mich, nach eigner sorgfältiger Prüfung überzeugt, dass sie mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit ausgeführt ist, so dass sie den Triangulationen bei den besten Gradmessungen nicht nur beigestellt werden kann, sondern einige selbst noch übertrifft. Diese Dreiecke gehen nun zum Theil ganz nahe an den südlichen Grenzen des Königr. Hannover vorbei, und wenn daher meine eignen künftigen Messungen gehörig an jene angeschlossen werden, wozu der General-Lieut. von Müffling mir bereits die nöthigsten Renseignements ertheilt hat, so wird die Dänisch-Hannoversche Gradmessung bereits von selbst bis zur Sternwarte Seeberg bei Gotha und bis zum Inselsberge fortgesetzt sein, so wie in S. W. dadurch und durch die Darmstädtischen und Französischen Messungen die Verbindung mit den Sternwarten von Mannheim und Paris erzielt sein wird.

Auch über die während der französischen Occupation in den Jahren 1803—1805 durch den franz. Obersten Epailly im Kurfürstenthum Hannover ausgeführten Messungen, deren vollständige Mittheilung auf diplomatischem Wege zu erhalten, früher vergeblich versucht ist, habe ich auf mehrern Wegen und zum Theil direct von dem Dépot de la guerre, mehrere wichtige wenn gleich unvollständige Nachrichten erhalten, und ich habe noch einige Hoffnung, die *sämmtlichen* Dreiecke mitgetheilt zu bekommen. Sollte in Zukunft einmal eine allgemeine Triangulirung des ganzen Königreichs Hannover beschlossen werden, wozu die Gradmessung von Hamburg bis zur südlichen Grenze des Königreichs die solideste Grundlage liefern wird, so würde unstreitig der Besitz jener Epailly'schen Messungen überaus nützlich werden können: das, was ich davon mitgetheilt erhalten habe, setzt mich zum wenigsten in den Stand, auf eine solche eventuelle Benutzung bei der Anordnung meiner eignen Dreiecke im Voraus Rücksicht zu nehmen, und solche gewissermassen vorzubereiten. — Unter den Actenstücken, die Epailly'sche Messung betreffend, die mir zu Händen gekommen sind, befindet sich übrigens auch ein Rapport des Obersten Epailly selbst, an den General Samson gerichtet, wodurch ich freilich schon im Voraus mit dengrossen durch mancherlei Localumstände besonders im Lüneburgischen entstehenden *Schwierigkeiten* der Triangulationen bekannt geworden bin; Schwierigkeiten, die der Französische Geodät selbst im 'pays conquis' fast unüberwindlich fand, und die ich nur unter kräftiger Unterstützung des Gouvernements und der betreffenden Behörden, zu besiegen hoffen darf.

Auch wegen mannigfaltiger anderer Bedürfnisse für die bevorstehenden Messungen habe ich im Laufe dieses Winters angemessene Vorkehrungen getroffen. Der erwartete grosse Reichenbach'sche Theodolith ist für die definitive allerschärfste Messung der Winkel bestimmt. Allein für die Aufsuchung der Standpunkte, die Recognoscirung der von jenen aus sichtbaren Punkte und die vorläufigen Messungen ist ein anderer Theodolith erforderlich, der leicht zu transportiren, schnell aufzustellen und zu handhaben ist, nicht zu gedenken, dass das Hauptinstrument auch die grösste Schonung erfordert. Zu jenem Zwecke

sind die Theodolithen, wie sie der englische Künstler Troughton verfertigt, am bequemsten und brauchbarsten. Der Prof. Schumacher hat die Gefälligkeit gehabt, mir den seinigen zu diesem Behuf für den Einkaufspreis wieder abzutreten, indem er bis zu der Zeit, wo er selbst wieder in diesem Jahre einen solchen nöthig hat, einen andern aus England zu erhalten hofft. — Manche Winkelmessungen werden sich nicht gut anders, als bei Nacht durch Argandsche Lampen mit parabolischen Reverberes, die auf sehr grosse Weiten sichtbar gemacht werden können, anstellen lassen. Damit es in vorkommenden Fällen daran nicht fehle, habe ich mehrere solche Reverberes bei einem sehr geschickten Künstler, der auch ähnliche Arbeiten für die preussischen Messungen geliefert hat, dem Hof-Mechanikus Körner in Jena, bestellt, der solche auf Ostern zu vollenden versprochen hat. Mehrerer anderer im Voraus besprochener Apparate hier nicht zu gedenken.

Nach allen diesen Vorkehrungen glaube ich nun die Arbeiten im bevorstehenden Frühjahr anfangen zu können. Wenn die Künstler alle ihre Versprechungen gehörig inne halten, wird das Werk dann immer rasch fortschreiten können. Auf alle Fälle aber werden die mannigfaltigen Vorarbeiten: Bereisungen der Gegenden, Aussuchung der Stationen, Erbauungen von Signalthürmen, vorläufige Messungen u. dergl. — (der vorhinerwähnte Theodolith von Troughton ist bereits in meinen Händen) — erst mehrere Monate ausfüllen, und selbst den widrigen Fall angenommen, dass, nachdem die Vorarbeiten so weit vorgeschritten wären, dass die Messungen selbst beginnen könnten, doch der erwartete grössere Reichenbach'sche Theodolith noch nicht abgeliefert wäre, würde die Arbeit nicht still zu stehen brauchen, da ich im Nothfall mit denjenigen Winkelmessungen anfangen könnte, wozu die anderweitigen Hülfsmittel der Sternwarte zureichen. Ja im allerschlimmsten Fall, der hoffentlich nicht eintreten wird, dass die Ablieferung des Theodolithen *noch* länger verzögert würde, würde ich nur in der Ordnung der Arbeiten die Abänderung eintreten lassen, dass ich den Rest des Sommers zu den astronomischen Arbeiten mit dem Zenithsector hier in Göttingen verwende, die sonst, wenn der ganze Sommer dem Triangulationsgeschäft gewidmet werden kann, einer spätern Zeit vorbehalten bleiben.

Göttingen, den 20. März 1821.

C. F. Gauss.

INHALT.

GAUSS WERKE BAND IV.

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND GEOMETRIE.

WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG.

Abhandlungen.

Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Pars prior 1821 Febr. 15 Seite 1
Pars posterior . . . . . 1823 Febr. 2 — 27
Supplementum theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae . . . . . 1826 Sept. 16 — 55

Anzeigen eigner Abhandlungen.

Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Pars prior 1821 Febr. 26 — 95
Pars posterior . . . . . 1823 Febr. 24 — 100
Supplementum theoriae combinationis observationum etc. . . . . 1826 Sept. 25 — 104

Aufsatz.

Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen . . . . . 1816 März . . — 109

Nachlass.

Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Bestimmung der Bilanz für Witwenkassen . . . . . 1845 Jan. 9 — 119
Tafeln zur Bestimmung von Leibrenten . . . . . — 174
Schering: Einrichtung und Gebrauch dieser Tafeln . . . . . — 184

GEOMETRIE.

Abhandlungen.

Allgemeine Auflösung der Aufgabe die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird . . . . . 1822 Dec. . . — 189
Disquisitiones generales circa superficies curvas . . . . . 1827 Oct. 8 — 217
Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodaesie. Erste Abhandlung 1843 Oct. 23 — 259
Zweite Abhandlung . . . . . 1846 Sept. 1 — 301

Anzeigen eigner Abhandlungen.

Disquisitiones generales circa superficies curvas . . . . . 1827 Nov. 5 Seite 341
Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodaesie. Erste Abhandlung 1843 Nov. 6 — 347
Zweite Abhandlung . . . . . 1846 Sept. 28 — 352

Anzeigen nichteigner Schriften.

Mollweide. De methodo ab Archimede adhibita ad rationem, in qua inter se sunt latus trianguli aequilateri et radius circuli circumscripti, numeris veritati proxime exprimendam . . . . . 1808 Januar 9 — 357
Monge. Géométrie descriptive . . . . . 1813 Juli 31 — 359
J. Herschel. Über eine merkwürdige Anwendung des Cotesischen Lehrsatzes 1814 Febr. 14 — 361
Mollweide. Über eine dunkle Stelle in Plato's Menon . . . . . 1814 Mai 2 — 361
Kries. Lehrbuch der mathematischen Geographie . . . . . 1814 Juni 13 — 363
Schwab. Commentatio in primum elementorum Euclidis librum, qua veritatem geometriae principiis ontologicis niti evincitur, omnesque propositiones, axiomatum geometricorum loco habitae, demonstrantur . . . 1816 April 20 — 364
Metternich. Vollständige Theorie der Parallel-Linien . . . . . 1816 April 20 — 364
Müller. Theorie der Parallelen . . . . . 1822 Oct. 28 — 368
Opérations géodésiques et astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle moyen, exécutées en Piemont et Savoie en 1821, 1822, 1823 . . 1830 Febr. 27 — 370
Mémorial du dépôt général de la guerre, imprimé par ordre du ministre. Paris 1826 . . . 1829 . . . . . 1830 April 29 — 381

Verschiedene Aufsätze.

Bestimmung der grössten Ellipse welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt . . . . . 1810 August — 385
Die merkwürdigen Punkte eines Dreieckes . . . . . 1810 — 393
Das Viereck im Kreise . . . . . 1810 — 397
Ein Vieleck im Kreise . . . . . 1810 — 398
Ein Kreis welcher drei gegebene Kreise berührt . . . . . 1810 — 399
Grundformeln der sphaerischen Trigonometrie . . . . . 1810 — 401
Das vollständige Fünfeck und seine Dreiecke . . . . . 1823 Novemb. — 406
Geometrische Aufgabe aus der Schifffahrtskunde . . . . . 1850 — 407

Gradmessung und Landesvermessung.

Allgemeines Coordinaten-Verzeichniss . . . . . 1844 Dec. 13 — 413
Schering. Bemerkungen 1873 . . . . . — 436
Abrisse der auf den verschiedenen Stationen der Gradmessung 1821, 1822, 1823, und deren Fortsetzung bis Jever 1824, 1825 festgelegten Richtungen . . . . . — 449
Abrisse der Messungen im Eichsfelde 1828 . . . . . — 465
Abrisse der Messungen in Westfalen 1829 . . . . . — 466
Abrisse der Messungen in Ostfriesland 1830. 1831 . . . . . — 467
Abrisse der Messungen im Lüneburgschen 1831. 1832 . . . . . — 470
Abrisse der Messungen im Harze 1833 . . . . . — 472
Abrisse der Messungen an der Mittelweser 1833 . . . . . — 473
Abrisse der Messungen an der Oberweser 1836 . . . . . — 473
Abrisse der Messungen in der Allergegend 1838 . . . . . — 475

Abrisse der Messungen in Ostfriesland 1841			Seite 476
Abrisse der Messungen im Bremischen 1839. 1843. 1844			— 478
Abrisse aus der Vereinigung der Messungen vom Jahre 1843. 1844			— 480
Bericht über die Resultate der trigonometrischen Messungen	1848 März	15	— 481
Entwurf zur Gradmessung	1819 Mai	30	— 484
Über die Fortsetzung der Dänischen Gradmessung durch Hannover	1820 Aug.	11	— 485
Über Gauss Gegenwart an einem Theil der Operationen der Dänischen Gradmessung	1820 Febr.	27	— 486
Promemoria betreffend die Hannoversche Gradmessung	1821 März	20	— 487

GÖTTINGEN,
DRUCK DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI.
W. FR. KAESTNER.

54.- 96,24 m aw, 3f

C. F. GAUSS WERKE

A. AUSGABE AUF DRUCKPAPIER.

Band:

I. DISQUISITIONES ARITHMETICAE. Zweiter Abdruck 1870. Preis 12 Mark.
II. HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 1876. Preis 12 Mark*)
*) Die Besitzer des ersten Abdruckes vom Band II. können die beim zweiten Abdrucke hinzugekommenen Zusätze als „Nachtrag zum ersten Abdrucke des zweiten Bandes" zum Preise von 1 Mark beziehen.
III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck. 1876. Preis 12 Mark.
IV. WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck. 1880. Preis 15 Mark.
V. MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweiter Abdruck. 1877. Preis 15 Mark.
VI. ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN. 1874. Preis 20 Mark.

B. AUSGABE AUF SCHREIB-VELIN-PAPIER.

Band I—VI. Preis 122 Mark. (Nur vollständig abzugeben.)

Die Entnahme von einzelnen Bänden bezw. des vollständigen Werkes erfolgt gegen Baarzahlung von der K. Universitäts-Casse in Göttingen, welche nach wie vor den Vertrieb besorgt.

Versendungen nach auswärts erfolgen ohne Nebenkosten, excl. Porto, wenn die Preiszahlung durch Postvorschussentnahme gewünscht wird und zulässig ist; sonst sind wegen der für Werthsendungen erforderlichen festeren Verpackung pro Band 60 Pfennige Emballagekosten mehr zu zahlen.

Göttingen im August 1880.

Der Nachtrag zum ersten Abdrucke des zweiten Bandes enthält:

Circuli quadratura nova . . . . . S. 497
Zur Berechnung der Logarithmen . . . . . „ 501
Quadratorum myrias prima . . . . . „ 504
Indices der Primzahlen im höheren Zahlenreiche . . . . . „ 506
Hülfstafel zur Auflösung der unbestimmten Gleichung $A = fxx + gyy$ vermittelst der Ausschliessungs-Methode . . . . . „ 508
Sectio octava. Quarundam disquisitionum ad circuli sectionem pertinentium uberior consideratio. Art. 367—378 . . . . . „ 510
Zwei Briefe von Gauss an Dirichlet . . . . . „ 514
Bemerkungen von Schering über die vorgenannten Bruchstücke, welche sich in dem handschriftlichen Nachlasse von Gauss befinden . . . . . „ 519

GÖTTINGEN
GEDRUCKT IN DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI
W. FR. KAESTNER.