桑木文庫
洋書
0355



CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

VIERTER BAND

ZWEITER ABDRUCK

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN.

1880.

Band I. DISQUISITIONES ARITHMETICAE. Zweiter Abdruck 1870. Preis 12 Mark.
II. HÖHERE ARITHMETIK. Zweiter Abdruck. 1876. Preis 12 Mark.
Nachtrag zum ersten Abdruck des zweiten Bandes. Preis 1 Mark.
III. ANALYSIS. Zweiter Abdruck. 1876. Preis 12 Mark.
IV. WAHRSCHEINLICHKEITS - RECHNUNG UND GEOMETRIE. Zweiter Abdruck. 1880. Preis 15 Mark.
V. MATHEMATISCHE PHYSIK. Zweiter Abdruck. 1877. Preis 15 Mark.
VI. ASTRONOMISCHE ABHANDLUNGEN. 1874. Preis 20 Mark.

Zu beziehen von der K. Universitäts-Casse in Göttingen nach den auf der Rückseite dieses Umschlages abgedruckten Bestimmungen.

物理
08
G
2.4

九州帝國大學理學部
8316
物理學教室

九州帝國大學工學部
807854
昭和　年　月　日
數學力學物理學教室

桑木文庫
洋書
0355

CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

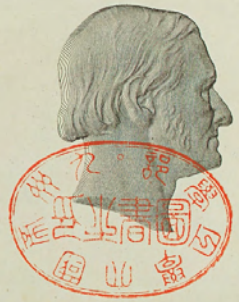
BAND IV.

理学部　洋　遡及
022232002005383
九州大学蔵書

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

VIERTER BAND.



ZWEITER ABDRUCK

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

1880.

19. 4. 25
130623

THEORIA
COMBINATIONIS OBSERVATIONUM
ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE

PARS PRIOR

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM EXHIBITA 1821. FEBR. 15.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. v.
Gottingae MDCCCXXIII.

THEORIA
COMBINATIONIS OBSERVATIONUM
ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE.

PARS PRIOR.

1.

Quantacunque cura instituantur observationes, rerum naturalium magnitudinem spectantes, semper tamen erroribus maioribus minoribusve obnoxiae manent. Errores observationum plerumque non sunt simplices, sed e pluribus fontibus simul originem trahunt: horum fontium duas species probe distinguere oportet. Quaedam errorum caussae ita sunt comparatae, ut ipsarum effectus in qualibet observatione a circumstantiis variabilibus pendeat, inter quas et ipsam observationem nullus nexus essentialis concipitur: errores hinc oriundi irregulares seu fortuiti vocantur, quatenusque illae circumstantiae calculo subiici nequeunt, idem etiam de erroribus ipsis valet. Tales sunt errores ab imperfectione sensuum provenientes, nec non a caussis extraneis irregularibus, e. g. a motu tremulo aeris visum tantillum turbante: plura quoque vitia instrumentorum vel optimorum huc trahenda sunt, e. g. asperitas partis interioris libellularum, defectus firmitatis absolutae etc. Contra aliae errorum caussae in omnibus observationibus ad idem genus relatis natura sua effectum vel absolute constantem exserunt, vel saltem talem, cuius magnitudo secundum legem determinatam unice a circumstantiis, quae tamquam essentialiter cum observatione nexae spectantur, pendet. Huiusmodi errores constantes seu regulares appellantur.

Ceterum perspicuum est, hanc distinctionem quodammodo relativam esse, et a sensu latiore vel arctiore, quo notio observationum ad idem genus pertinentium accipitur, pendere. E. g. vitia irregularia in divisione instrumentorum ad

angulos mensurandos errorem constantem producunt, quoties tantummodo de observatione anguli determinati indefinite repetenda sermo est, siquidem hic semper eaedem divisiones vitiosae adhibentur: contra error ex illo fonte oriundus tamquam fortuitus spectari potest, quoties indefinite de angulis cuiusvis magnitudinis mensurandis agitur, siquidem tabula quantitatem erroris in singulis divisionibus exhibens non adest.

2.

Errorum regularium consideratio proprie ab instituto nostro excluditur. Scilicet observatoris est, omnes caussas, quae errores constantes producere valent, sedulo investigare, et vel amovere, vel saltem earum rationem et magnitudinem summo studio perscrutari, ut effectus in quavis observatione determinata assignari, adeoque haec ab illo liberari possit, quo pacto res eodem redit, ac si error omnino non affuisset. Longe vero diversa est ratio errorum irregularium, qui natura sua calculo subiici nequeunt. Hos itaque in observationibus quidem tolerare, sed eorum effectum in quantitates ex observationibus derivandas per scitam harum combinationem quantum fieri potest extenuare oportet. Cui argumento gravissimo sequentes disquisitiones dicatae sunt.

3.

Errores observationum ad idem genus pertinentium, qui a caussa simplici determinata oriuntur, per rei naturam certis *limitibus* sunt circumscripti, quos sine dubio exacte assignare liceret, si indoles ipsius caussae *penitus* esset perspecta. Pleraeque errorum fortuitorum caussae ita sunt comparatae, ut secundum legem continuitatis omnes errores intra istos limites comprehensi pro possibilibus haberi debeant, perfectaque caussae cognitio etiam doceret, utrum omnes hi errores aequali facilitate gaudeant an inaequali, et quanta probabilitas relativa, in casu posteriore, cuivis errori tribuenda sit. Eadem etiam respectu erroris totalis, e pluribus erroribus simplicibus conflati, valebunt, puta inclusus erit certis limitibus (quorum alter aequalis erit aggregato omnium limitum superiorum partialium, alter aggregato omnium limitum inferiorum); omnes errores intra hos limites possibiles quidem erunt, sed prout quisque infinitis modis diversis ex erroribus partialibus componi potest, qui ipsi magis minusve probabiles sunt, alii maiorem, alii minorem facilitatem tribuere debebimus, eruique poterit lex probabilitatis relativae, si leges errorum simplicium cognitae supponuntur, salvis difficultatibus analyticis in colligendis omnibus combinationibus.

Exstant utique quaedam errorum caussae, quae errores non secundum legem continuitatis progredientes, sed discretos tantum, producere possunt, quales sunt errores divisionis instrumentorum (siquidem illos erroribus fortuitis annumerare placet): divisionum enim multitudo in quovis instrumento determinato est finita. Manifesto autem, hoc non obstante, si modo non omnes errorum caussae errores discretos producant, complexus omnium errorum totalium possibilium constituet seriem secundum legem continuitatis progredientem, sive plures eiusmodi series interruptas, si forte, omnibus erroribus discretis possibilibus secundum magnitudinem ordinatis, una alterave differentia inter binos terminos proximos maior evadat, quam differentia inter limites errorum totalium, quatenus e solis erroribus continuis demanant. Sed in praxi casus posterior vix umquam locum habebit, nisi divisio vitiis crassioribus laboret.

4.

Designando facilitatem relativam erroris totalis x, in determinato observationum genere, per characteristicam φx, hoc, propter errorum continuitatem, ita intelligendum erit, probabilitatem erroris inter limites infinite proximos x et $x+\mathrm{d}x$ esse $=\varphi x.\mathrm{d}x$. Vix, ac ne vix quidem, umquam in praxi possibile erit, hanc functionem a priori assignare: nihilominus plura generalia eam spectantia stabilire possunt, quae deinceps proferemus. Obvium est, functionem φx eatenus ad functiones discontinuas referendam esse, quod pro omnibus valoribus ipsius x extra limites errorum possibilium iacentibus esse debet $=0$; intra hos limites vero ubique valorem positivum nanciscetur (omittendo casum, de quo in fine art. praec. locuti sumus). In plerisque casibus errores positivos et negativos eiusdem magnitudinis aeque faciles supponere licebit, quo pacto erit $\varphi(-x)=\varphi x$. Porro quum errores leviores facilius committantur quam graviores, plerumque valor ipsius φx erit maximus pro $x=0$, continuoque decrescet, dum x augetur.

Generaliter autem valor integralis $\int\varphi x.\mathrm{d}x$, ab $x=a$ usque ad $x=b$ extensi exprimet probabilitatem, quod error aliquis nondum cognitus iaceat inter limites a et b. Valor itaque istius integralis a limite inferiore omnium errorum possibilium usque ad limitem superiorem semper erit $=1$. Et quum φx

pro omnibus valoribus ipsius x extra hos limites iacentibus semper sit $= 0$, manifesto etiam

valor integralis $\int \varphi x . \mathrm{d}x$ *ab* $x = -\infty$ *usque ad* $x = +\infty$ *extensi semper fit* $= 1$.

5.

Consideremus porro integrale $\int x \varphi x . \mathrm{d}x$ inter eosdem limites, cuius valorem statuemus $= k$. Si omnes errorum caussae simplices ita sunt comparatae, ut nulla adsit ratio, cur errorum aequalium sed signis oppositis affectorum alter facilius producatur quam alter, hoc etiam respectu erroris totalis valebit, sive erit $\varphi(-x) = \varphi x$, et proin necessario $k = 0$. Hinc colligimus, quoties k non evanescat, sed e. g. sit quantitas positiva, necessario adesse debere unam alteramve errorum caussam, quae vel errores positivos tantum producere possit, vel certe positivos facilius quam negativos. Haecce quantitas k, quae revera est medium omnium errorum possibilium, seu valor medius ipsius x, commode dici potest erroris pars constans. Ceterum facile probari potest, partem constantem erroris totalis aequalem esse aggregato partium constantium, quas continent errores e singulis caussis simplicibus prodeuntes. Quodsi quantitas k nota supponitur, a quavis observatione resecatur, errorque observationis ita correctae designatur per x', ipsiusque probabilitas per $\varphi' x'$, erit $x' = x - k$, $\varphi' x' = \varphi x$ ac proin $\int x' \varphi' x' . \mathrm{d}x' = \int x \varphi x . \mathrm{d}x - \int k \varphi x . \mathrm{d}x = k - k = 0$, i. e. errores observationum correctarum partem constantem non habebunt, quod et per se clarum est.

6.

Perinde ut integrale $\int x \varphi x . \mathrm{d}x$, seu valor medius ipsius x, erroris constantis vel absentiam vel praesentiam et magnitudinem docet, integrale

$$\int x x \varphi x . \mathrm{d}x$$

ab $x = -\infty$ usque ad $x = +\infty$ extensum (seu valor medius quadrati xx) aptissimum videtur ad incertitudinem observationum in genere definiendam et dimetiendam, ita ut e duobus observationum systematibus, quae quoad errorum facilitatem inter se differunt, eae praecisione praestare censeantur, in quibus integrale $\int x x \varphi x . \mathrm{d}x$ valorem minorem obtinet. Quodsi quis hanc rationem pro arbitrio, nulla cogente necessitate, electam esse obiiciat, lubenter assentiemur.

Quippe quaestio haec per rei naturam aliquid vagi implicat, quod limitibus circumscribi nisi per principium aliquatenus arbitrarium nequit. Determinatio alicuius quantitatis per observationem errori maiori minorive obnoxiam, haud inepte comparatur ludo, in quo solae iacturae, lucra nulla, dum quilibet error metuendus iacturae affinis est. Talis ludi dispendium aestimatur e iactura probabili, puta ex aggregato productorum singularum iacturarum possibilium in probabilitates respectivas. Quantae vero iacturae quemlibet observationis errorem aequiparare conveniat, neutiquam per se clarum est; quin potius haec determinatio aliqua ex parte ab arbitrio nostro pendet. Iacturam ipsi errori aequalem statuere manifesto non licet; si enim errores positivi pro iacturis acciperentur, negativi lucra repraesentare deberent. Magnitudo iacturae potius per talem erroris functionem exprimi debet, quae natura sua semper fit positiva. Qualium functionum quum varietas sit infinita, simplicissima, quae hac proprietate gaudet, prae ceteris eligenda videtur, quae absque lite est quadratum: hoc pacto principium supra prolatum prodit.

Ill. Laplace simili quidem modo rem consideravit, sed errorem ipsum semper positive acceptum tamquam iacturae mensuram adoptavit. At ni fallimur haecce ratio saltem non minus arbitraria est quam nostra: utrum enim error duplex aeque tolerabilis putetur quam simplex bis repetitus, an aegrius, et proin utrum magis conveniat, errori duplici momentum duplex tantum, an maius, tribuere, quaestio est neque per se clara, neque demonstrationibus mathematicis decidenda, sed libero tantum arbitrio remittenda. Praeterea negari non potest, ista ratione continuitatem laedi: et propter hanc ipsam caussam modus ille tractationi analyticae magis refragatur, dum ea, ad quae principium nostrum perducit, mira tum simplicitate tum generalitate commendantur.

7.

Statuendo valorem integralis $\int x x \varphi x . \mathrm{d}x$ ab $x = -\infty$ usque ad $x = +\infty$ extensi $= mm$, quantitatem m vocabimus *errorem medium metuendum*, sive simpliciter *errorem medium* observationum, quarum errores indefiniti x habent probabilitatem relativam φx. Denominationem illam non ad observationes immediatas limitabimus, sed etiam ad determinationes qualescunque ex observationibus derivatas extendemus. Probe autem cavendum est, ne error medius confundatur cum medio arithmetico omnium errorum, de quo in art. 5 locuti sumus.

Ubi plura observationum genera, seu plures determinationes ex observationibus petitae, quibus haud eadem praecisio concedenda est, comparantur, *pondus* earum relativum nobis erit quantitas ipsi mm reciproce proportionalis, dum *praecisio* simpliciter ipsi m reciproce proportionalis habetur. Quo igitur pondus per numerum exprimi possit, pondus certi observationum generis pro unitate acceptum esse debet.

8.

Si observationum errores partem constantem implicant, hanc auferendo error medius minuitur, pondus et praecisio augentur. Retinendo signa art. 5, designandoque per m' errorem medium observationum correctarum, erit

$$m'm' = \int x'x'\varphi x'.\mathrm{d}x' = \int (x-k)^2\varphi x.\mathrm{d}x = \int xx\varphi x.\mathrm{d}x - 2k\int x\varphi x.\mathrm{d}x + kk\int \varphi x.\mathrm{d}x$$
$$= mm - 2kk + kk = mm - kk.$$

Si autem loco partis constantis veri k quantitas alia l ab observationibus ablata esset, quadratum erroris medii novi evaderet $= mm - 2kl + ll = m'm' + (l-k)^2$.

9.

Denotante λ coëfficientem determinatum, atque μ valorem integralis $\int \varphi x.\mathrm{d}x$ ab $x = -\lambda m$ usque ad $x = +\lambda m$, erit μ probabilitas, quod error alicuius observationis sit minor quam λm (sine respectu signi), nec non $1-\mu$ probabilitas erroris maioris quam λm. Si itaque valor $\mu = \frac{1}{2}$ respondet valori $\lambda m = \rho$, error aeque facile infra ρ quam supra ρ cadere potest, quocirca ρ commode dici potest error *probabilis*. Relatio quantitatum λ, μ manifesto pendet ab indole functionis φx, quae plerumque incognita est. Operae itaque pretium erit, istam relationem pro quibusdam casibus specialibus propius considerare.

I. Si limites omnium errorum possibilium sunt $-a$ et $+a$, omnesque errores intra hos limites aeque probabiles, erit φx inter limites $x = -a$ et $x = +a$ constans, et proin $= \frac{1}{2a}$. Hinc $m = a\sqrt{\frac{1}{3}}$, nec non $\mu = \lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, quamdiu λ non maior quam $\sqrt{3}$; denique $\rho = m\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}8660254\,m$, probabilitasque, quod error prodeat errore medio non maior, erit $= \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773503$.

II. Si ut antea $-a$ et $+a$ sunt errorum possibilium limites, errorumque ipsorum probabilitas inde ab errore 0 utrimque in progressione arithmetica decrescere supponitur, erit

$$\varphi x = \frac{a-x}{aa},$$ pro valoribus ipsius x inter 0 et $+a$

$$\varphi x = \frac{a+x}{aa},$$ pro valoribus ipsius x inter 0 et $-a$

Hinc deducitur $m = a\sqrt{\frac{1}{6}}$, $\mu = \lambda\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6}\lambda\lambda$, quamdiu λ est inter 0 et $\sqrt{6}$, denique $\lambda = \sqrt{6} - \sqrt{(6-6\mu)}$, quamdiu μ inter 0 et 1, et proin

$$\rho = m(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 0{,}7174389\,m$$

Probabilitas erroris medium non superantis erit in hoc casu

$$= \sqrt{\tfrac{3}{2}} - \tfrac{1}{6} = 0{,}6498299$$

III. Si functionem φx proportionalem statuimus huic $e^{-\frac{xx}{kk}}$ (quod quidem in rerum natura proxime tantum verum esse potest), esse debebit

$$\varphi x = \frac{e^{-\frac{xx}{kk}}}{k\sqrt{\pi}}$$

denotante π semiperipheriam circuli pro radio 1, unde porro deducimus

$$m = k\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

(V. *Disquis. generales circa seriem infinitam* etc. art. 28). Porro si valor integralis

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int e^{-zz}\mathrm{d}z$$

a $z = 0$ inchoati denotatur per Θz, erit

$$\mu = \Theta(\lambda\sqrt{\tfrac{1}{2}})$$

Tabula sequens exhibet aliquot valores huius quantitatis:

λ	μ
0,6744897	0,5
0,8416213	0,6
1,0000000	0,6826895
1,0364334	0,7
1,2815517	0,8
1,6448537	0,9
2,5758293	0,99
3,2918301	0,999
3,8905940	0,9999
∞	1

10.

Quamquam relatio inter λ et μ ab indole functionis φx pendet, tamen quaedam generalia stabilire licet. Scilicet qualiscunque sit haec functio, si modo ita est comparata, ut ipsius valor, crescente valore absoluto ipsius x, semper decrescat, vel saltem non crescat, certo erit

λ minor vel saltem non maior quam $\mu\sqrt{3}$, quoties μ est minor quam $\frac{2}{3}$;

λ non maior quam $\frac{2}{3\sqrt{(1-\mu)}}$, quoties μ est maior quam $\frac{2}{3}$.

Pro $\mu = \frac{2}{3}$ uterque limes coincidit, puta λ nequit esse maior quam $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ut hoc insigne theorema demonstremus, denotemus per y valorem integralis $\int \varphi z . dz$ a $z = -x$ usque ad $z = +x$ extensi, quo pacto y erit probabilitas, quod error aliquis contentus sit intra limites $-x$ et $+x$. Porro statuamus

$$x = \psi y, \quad d\psi y = \psi' y . dy, \quad d\psi' y = \psi'' y . dy$$

Erit taque $\psi 0 = 0$, nec non

$$\psi' y = \frac{1}{\varphi x + \varphi(-x)}$$

quare per hyp. $\psi' y$ ab $y = 0$ usque ad $y = 1$ semper crescet, saltem nullibi decrescet, sive, quod idem est, valor ipsius $\psi'' y$ semper erit positivus, vel saltem non negativus. Porro habemus $d . y\psi' y = \psi' y . dy + y\psi'' y . dy$, adeoque

$$y\psi' y - \psi y = \int y\psi'' y . dy$$

integratione ab $y = 0$ inchoata. Valor expressionis $y\psi' y - \psi y$ itaque semper erit quantitas positiva, saltem non negativa, adeoque

$$1 - \frac{\psi y}{y\psi' y}$$

quantitas positiva unitate minor. Sit f eius valor pro $y = \mu$, i. e. quum habeatur $\psi\mu = \lambda m$, sit

$$f = 1 - \frac{\lambda m}{\mu\psi' \mu} \quad \text{sive} \quad \psi' \mu = \frac{\lambda m}{(1-f)\mu}$$

His ita praeparatis, consideremus functionem ipsius y hanc

$$\frac{\lambda m}{(1-f)\mu}(y - \mu f)$$

quam statuemus $= Fy$, nec non $dFy = F' y . dy$. Perspicuum est, fieri

$$F\mu = \lambda m = \psi\mu$$
$$F'\mu = \frac{\lambda m}{(1-f)\mu} = \psi' \mu$$

Quare quum $\psi' y$, aucta ipsa y, continuo crescat (saltem non decrescat, quod semper subintelligendum), $F' y$ vero constans sit, differentia $\psi' y - F' y = \frac{d(\psi y - Fy)}{dy}$ erit positiva pro valoribus ipsius y maioribus quam μ, negativa pro minoribus. Hinc facile colligitur, $\psi y - Fy$ semper esse quantitatem positivam, adeoque ψy semper erit absolute maior, saltem non minor, quam Fy, certe quamdiu valor ipsius Fy est positivus, i. e. ab $y = \mu f$ usque ad $y = 1$. Hinc valor integralis $\int (Fy)^2 dy$ ab $y = \mu f$ usque ad $y = 1$ erit minor valore integralis $\int (\psi y)^2 dy$ inter eosdem limites, adeoque a potiori minor valore huius integralis ab $y = 0$ usque ad $y = 1$, qui fit $= mm$. At valor integralis prioris invenitur

$$= \frac{\lambda\lambda m m (1-\mu f)^3}{3\mu\mu(1-f)^2}$$

unde colligimus, $\lambda\lambda$ esse minorem quam $\frac{3\mu\mu(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, ubi f est quantitas inter 0 et 1 iacens. Iam valor fractionis $\frac{3\mu\mu(1-f)^2}{(1-\mu f)^3}$, cuius differentiale, si f tamquam quantitas variabilis consideratur, fit $=$

$$-\frac{3\mu\mu(1-f)}{(1-\mu f)^4} \cdot (2 - 3\mu + \mu f) df$$

continuo decrescit, dum f a valore 0 usque ad valorem 1 transit, quoties μ minor est quam $\frac{2}{3}$, adeoque valor maximus possibilis erit is, qui valori $f = 0$ respondet, puta $= 3\mu\mu$, ita ut in hoc casu λ certo fiat minor vel non maior quam $\mu\sqrt{3}$. Q. E. P. Contra quoties μ maior est quam $\frac{2}{3}$, valor istius fractionis erit maximus pro $2 - 3\mu + \mu f = 0$, i. e. pro $f = 3 - \frac{2}{\mu}$, unde ille fit $= \frac{4}{9(1-\mu)}$, adeoque in hoc casu λ non maior quam $\frac{2}{3\sqrt{(1-\mu)}}$. Q. E. S.

Ita e. g. pro $\mu = \frac{1}{2}$ certo λ nequit esse maior quam $\sqrt{\frac{2}{3}}$, i. e. error probabilis superare nequit limitem $0{,}8660254\,m$, cui in exemplo primo art. 9 aequalis inventus est. Porro facile e theoremate nostro concluditur, μ non esse minorem quam $\lambda\sqrt{\frac{1}{2}}$, quamdiu λ minor sit quam $\sqrt{\frac{2}{3}}$, contra μ non esse minorem quam $1 - \frac{4}{9\lambda\lambda}$, pro valore ipsius λ minor quam $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

11.

Quum plura problemata infra tractanda etiam cum valore integralis $\int x^4 \varphi x . dx$ nexa sint, operae pretium erit, eum pro quibusdam casibus speciali-

bus evolvere. Denotabimus valorem huius integralis ab $x = -\infty$ usque ad $x = +\infty$ extensi per n^4.

I. Pro $\varphi x = \frac{1}{2a}$, quatenus x inter $-a$ et $+a$ continetur, habemus $n^4 = \frac{1}{5}a^4 = \frac{1}{5}m^4$.

II. In casu secundo art. 6, ubi $\varphi x = \frac{a \mp x}{aa}$, pro valoribus ipsius x inter 0 et $\mp a$, fit $n^4 = \frac{1}{15}a^4 = \frac{1}{5}m^4$.

III. In casu tertio, ubi

$$\varphi x = \frac{e^{-\frac{xx}{hh}}}{a\sqrt{\pi}}$$

invenitur per ea, quae in commentatione supra citata exponuntur, $n^4 = \frac{3}{4}h^4 = 3m^4$.

Ceterum demonstrari potest, valorem ipsius $\frac{n^2}{m^4}$ certo non esse minorem quam $\frac{2}{3}$, si modo suppositio art. praec. locum habeat.

12.

Denotantibus x, x', x'' etc. indefinite errores observationum eiusdem generis ab invicem independentes, quorum probabilitates relativas exprimit praefixa characteristica φ; nec non y functionem datam rationalem indeterminatarum x, x', x'' etc.: integrale multiplex (I)

$$\int \varphi x . \varphi x' . \varphi x'' \ldots\ldots \mathrm{d}x . \mathrm{d}x' . \mathrm{d}x'' \ldots$$

extensum per omnes valores indeterminatarum x, x', x'', pro quibus valor ipsius y cadit intra limites datos 0 et η, exprimet probabilitatem valoris ipsius y indefinite intra 0 et η siti. Manifesto hoc integrale erit functio ipsius η, cuius differentiale statuemus $= \psi\eta . \mathrm{d}\eta$, ita ut integrale ipsum fiat aequale integrali $\int \psi\eta . \mathrm{d}\eta$ ab $\eta = 0$ incepto. Hoc pacto simul characteristica $\psi\eta$ probabilitatem relativam cuiusvis valoris ipsius y exprimere censenda est. Quum x considerari possit tamquam functio indeterminatarum y, x', x'' etc., quam statuemus

$$= f(y, x', x'' \ldots .)$$

integrale (I) fiet

$$= \int \varphi . f(y, x', x'' \ldots .) . \frac{\mathrm{d}f(y, x', x'' \ldots .)}{\mathrm{d}y} . \varphi x' . \varphi x'' \ldots . \mathrm{d}y . \mathrm{d}x' . \mathrm{d}x'' \ldots .$$

ubi y extendi debet ab $y = 0$ usque ad $y = \eta$, indeterminatae reliquae vero per omnes valores, quibus respondet valor realis ipsius $f(y, x', x'' \ldots .)$. Hinc

colligitur

$$\psi y = \int \varphi . f(y, x', x'' \ldots .) . \frac{\mathrm{d}f(y, x', x'' \ldots .)}{\mathrm{d}y} . \varphi x' . \varphi x'' \ldots . \mathrm{d}x' . \mathrm{d}x'' \ldots .$$

integratione, in qua y tamquam constans considerari debet, extensa per omnes valores indeterminatarum x', x'' etc., qui ipsi $f(y, x', x'' \ldots .)$ valorem realem conciliant.

13.

Ad hanc integrationem reipsa exsequendam cognitio functionis φ requireretur, quae plerumque incognita est: quin adeo, etiamsi haec functio cognita esset, in plerisque casibus integratio vires analyseos superaret. Quae quum ita sint, probabilitatem quidem singulorum valorum ipsius y assignare non poterimus: at secus res se habebit, si tantummodo desideratur valor medius ipsius y, qui oritur ex integratione $\int y\psi y . \mathrm{d}y$ per omnes valores ipsius y, quos quidem assequi potest, extensa. Et quum manifesto pro omnibus valoribus, quos y assequi nequit, vel per naturam functionis, quam exprimit (e. g. pro negativis, si esset $y = xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}$), vel ideo, quod erroribus ipsis x, x', x'' etc. certi limites sunt positi, statuere oporteat $\psi y = 0$, manifesto res perinde se habebit, si integratio illa extendatur per omnes valores reales ipsius y, puta ab $y = -\infty$ usque ad $y = +\infty$. Iam integrale $\int y\psi y . \mathrm{d}y$ inter limites determinatos, puta ab $y = \eta$ usque ad $y = \eta'$ sumtum aequale est integrali

$$\int y\varphi . f(y, x', x'' \ldots .) . \frac{\mathrm{d}f(y, x', x'' \ldots .)}{\mathrm{d}y} . \varphi x' . \varphi x'' \ldots . \mathrm{d}y . \mathrm{d}x' . \mathrm{d}x'' \ldots .$$

integratione extensa ab $y = \eta$ usque ad $y = \eta'$, atque per omnes valores indeterminatarum x', x'' etc., quibus respondet valor realis ipsius $f(y, x', x'' \ldots .)$, sive quod idem est, valori integralis

$$\int y\varphi x . \varphi x' . \varphi x'' \ldots . \mathrm{d}x . \mathrm{d}x' . \mathrm{d}x'' \ldots .$$

adhibendo in hac integratione pro y eius valorem per x, x', x'' etc. expressum, extendendoque eam per omnes harum indeterminatarum valores, quibus respondet valor ipsius y inter η et η' situs. Hinc colligimus, integrale $\int y\psi y . \mathrm{d}y$ per omnes valores ipsius y, ab $y = -\infty$ usque ad $y = +\infty$ extensum obtineri ex integratione

$$\int y\varphi x . \varphi x' . \varphi x'' \ldots . \mathrm{d}x . \mathrm{d}x' . \mathrm{d}x'' \ldots .$$

per omnes valores reales ipsarum x, x', x'' etc. extensa, puta ab $x = -\infty$ usque ad $x = +\infty$, ab $x' = -\infty$ usque ad $x' = +\infty$ etc.

14.

Reducta itaque functione y ad formam aggregati talium partium

$$Ax^{\alpha}x'^{\beta}x''^{\gamma}\ldots.$$

valor integralis $\int y\psi y.\mathrm{d}y$ per omnes valores ipsius y extensi, seu valor medius ipsius y, aequalis erit aggregato partium

$$A\times\int x^{\alpha}\varphi x.\mathrm{d}x\times\int x'^{\beta}\dot{\varphi}x'.\mathrm{d}x'\times\int x''^{\gamma}\varphi x''.\mathrm{d}x''\ldots.$$

ubi integrationes extendendae sunt ab $x = -\infty$ usque ad $x = +\infty$, ab $x' = -\infty$ usque ad $x' = +\infty$ etc.; sive quod eodem redit, aggregato partium quae oriuntur, dum pro singulis potestatibus x^{α}, x'^{β}, x''^{γ} etc. ipsarum valores medii substituuntur, cuius theorematis gravissimi veritas etiam ex aliis considerationibus facile derivari potuisset.

15.

Applicemus ea, quae in art. praec. exposuimus, ad casum specialem, ubi

$$y = \frac{xx+x'x'+x''x''+\text{ etc.}}{\mathfrak{o}}$$

denotante $\mathfrak{o}$ multitudinem partium in numeratore. Valor medius ipsius y hic illico invenitur $= mm$, accipiendo characterem m in eadem significatione ac supra. Valor verus quidem ipsius y in casu determinato maior minorve evadere potest medio, perinde ac valor verus termini simplicis xx: sed probabilitas quod valor fortuitus ipsius y a medio mm haud sensibiliter aberret, continuo magis ad certitudinem appropinquabit crescente multitudine $\mathfrak{o}$. Quod quo clarius eluceat, quum probabilitatem ipsam exacte determinare non sit in potestate, investigemus errorem medium metuendum, dum supponimus $y = mm$. Manifesto per principia art. 6 hic error erit radix quadrata valoris medii functionis

$$\left(\frac{xx+x'x'+x''x''+\text{ etc.}}{\mathfrak{o}} - mm\right)^2$$

ad quem eruendum sufficit observare, valorem medium termini talis $\frac{x^4}{\mathfrak{o}\mathfrak{o}}$ esse $= \frac{n^4}{\mathfrak{o}\mathfrak{o}}$ (utendo charactere n in significatione art. 11), valorem medium autem termini

talis $\frac{2xx'x'}{\mathfrak{o}\mathfrak{o}}$ fieri $= \frac{2m^4}{\mathfrak{o}\mathfrak{o}}$, unde facillime deducitur valor medius istius functionis

$$= \frac{n^4-m^4}{\mathfrak{o}}$$

Hinc discimus, si copia satis magna errorum fortuitorum ab invicem independentium x, x', x'' etc. in promtu sit, magna certitudine inde peti posse valorem approximatum ipsius m per formulam

$$m = \sqrt{\frac{(xx+x'x'+x''x''+\text{ etc.})}{\mathfrak{o}}}$$

erroremque medium in hac determinatione metuendum, respectu quadrati mm, esse

$$= \sqrt{\frac{n^4-m^4}{\mathfrak{o}}}$$

Ceterum, quum posterior formula implicet quantitatem n, si id tantum agitur, ut idea qualiscunque de gradu praecisionis istius determinationis formari possit, sufficiet, aliquam hypothesin respectu functionis φ amplecti. E.g. in hypothesi tertia art. 9, 11 iste error fit $= mm\sqrt{\frac{2}{\mathfrak{o}}}$. Quod si minus arridet, valor approximatus ipsius n^4 ex ipsis erroribus adiumento formulae

$$\frac{x^4+x'^4+x''^4+\text{ etc.}}{\mathfrak{o}}$$

peti poterit. Generaliter autem affirmare possumus, praecisionem duplicatam in ista determinatione requirere errorum copiam quadruplicatam, sive pondus determinationis ipsi multitudini $\mathfrak{o}$ esse proportionale.

Prorsus simili modo, si observationum errores partem constantem involvunt, huius valor approximatus eo tutius e medio arithmetico multorum errorum colligi poterit, quo maior horum multitudo fuerit. Et quidem error medius in hac determinatione metuendus exprimetur per

$$\sqrt{\frac{mm-kk}{\mathfrak{o}}}$$

si k designat partem constantem ipsam atque m errorem medium observationum parte constante nondum purgatarum, sive simpliciter per $\frac{m}{\sqrt{\mathfrak{o}}}$, si m denotat errorem medium observationum a parte constante liberatarum (v. art. 8).

16.

In artt. 12—15 supposuimus, errores x, x', x'' etc. ad idem observationum genus pertinere, ita ut singulorum probabilitates per eandem functionem expri-

mantur. Sed sponte patet, disquisitionem generalem artt. 12—14 aeque facile ad casum generaliorem extendi, ubi probabilitates errorum x, x', x'' etc. per functiones diversas φx, $\varphi' x'$, $\varphi'' x''$ etc. exprimantur, i. e. ubi errores illi pertineant ad observationes praecisionis seu incertitudinis diversae. Supponamus, x esse errorem observationis talis, cuius error medius metuendus sit $= m$; nec non x', x'' etc. esse errores aliarum observationum, quarum errores medii metuendi resp. sint m', m'' etc. Tunc valor medius aggregati $xx + x'x' + x''x'' +$ etc. erit $mm + m'm' + m''m'' +$ etc. Iam si aliunde constat, quantitates m, m', m'' etc. esse in ratione data, puta numeris 1, μ', μ'' etc. resp. proportionales, valor medius expressionis

$$\frac{xx + x'x' + x''x'' + \text{etc.}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

erit $= mm$. Si vero valorem eiusdem expressionis determinatum, prout fors errores x, x', x'' etc. offert, ipsi mm aequalem ponimus, error medius, cui haec determinatio obnoxia manet, simili ratione ut in art. praec. invenitur

$$= \frac{\sqrt{(n^4 + n'^4 + n''^4 + \text{etc.} - m^4 - m'^4 - m''^4 - \text{etc.})}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

ubi n', n'' etc. respectu observationum, ad quas pertinent errores x', x'' etc., idem denotare supponuntur, atque n respectu observationis primae. Quodsi itaque numeros n, n', n'' etc. ipsis m, m', m'' etc. proportionales supponere licet, error ille metuendus medius fit

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4)} \cdot \sqrt{(1 + \mu'^4 + \mu''^4 + \text{etc.})}}{1 + \mu'\mu' + \mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

At haecce ratio, valorem approximatum ipsius m determinandi non est ea, quae maxime ad rem facit. Quod quo clarius ostendamus, consideremus expressionem generaliorem

$$y = \frac{xx + \alpha'x'x' + \alpha''x''x'' + \text{etc.}}{1 + \alpha'\mu'\mu' + \alpha''\mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

cuius valor medius quoque erit $= mm$, quomodocunque eligantur coëfficientes α', α'' etc. Error autem medius metuendus, dum valorem determinatum ipsius y, prout fors errores x, x', x'' etc. offert, ipsi mm aequalem supponimus, invenitur per principia supra tradita

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4 + \alpha'\alpha'(n'^4 - m'^4) + \alpha''\alpha''(n''^4 - m''^4) + \text{etc.})}}{1 + \alpha'\mu'\mu' + \alpha''\mu''\mu'' + \text{etc.}}$$

Ut hic error medius fiat quam minimus, statuere oportebit

$$\alpha' = \frac{n^4 - m^4}{n'^4 - m'^4} \cdot \mu'\mu'$$
$$\alpha'' = \frac{n^4 - m^4}{n''^4 - m''^4} \cdot \mu''\mu'' \text{ etc.}$$

Manifesto hi valores evolvi nequeunt, nisi insuper ratio quantitatum n, n', n'' etc. ad m, m', m'' etc. aliunde nota fuerit; qua cognitione exacta deficiente, saltem tutissimum videtur*), illas his proportionales supponere (v. art. 11), unde prodeunt valores

$$\alpha' = \frac{1}{\mu'\mu'}, \quad \alpha'' = \frac{1}{\mu''\mu''} \text{ etc.}$$

i. e. coëfficientes α', α'' etc. aequales statui debent ponderibus relativis observationum, ad quas pertinent errores x', x'' etc., assumto pondere observationis, ad quam pertinet error x, pro unitate. Hoc pacto, designante ut supra σ multitudinem errorum propositorum, habebimus valorem medium expressionis

$$\frac{xx + \alpha'x'x' + \alpha''x''x'' + \text{etc.}}{\sigma}$$

$= mm$, atque errorem medium metuendum, dum valorem fortuito determinatum huius expressionis pro valore vero ipsius mm adoptamus

$$\frac{\sqrt{(n^4 + \alpha'\alpha'n'^4 + \alpha''\alpha''n''^4 + \text{etc.} - \sigma m^4)}}{\sigma}$$

et proin, siquidem licet, ipsas n, n', n'' etc. ipsis m, m', m'' proportionales supponere,

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}$$

quae formula identica est cum ea, quam supra pro casu observationum eiusdem generis inveneramus.

17.

Si valor quantitatis, quae ab alia quantitate incognita pendet, per observa-

*) Scilicet cognitionem quantitatum μ', μ'' etc. in eo solo casu in potestate esse concipimus, ubi per rei naturam errores x, x', x'' etc. ipsis 1, μ', μ'' etc. proportionales, aeque probabiles censendi sunt, aut potius ubi

$$\varphi x = \mu'\varphi'(\mu' x) = \mu''\varphi''(\mu'' x) \text{ etc.}$$

tionem praecisione absoluta non gaudentem determinata est, valor incognitae hinc calculatus etiam errori obnoxius erit, sed nihil in hac determinatione arbitrio relinquitur. At si *plures* quantitates ab eadem incognita pendentes per observationes haud absolute exactas innotuerunt, valorem incognitae vel per quamlibet harum observationum eruere possumus, vel per aliquam plurium observationum combinationem, quod infinitis modis diversis fieri potest. Quamquam vero valor incognitae tali modo prodiens errori semper obnoxius manet, tamen in alia combinatione maior, in alia minor error metuendus erit. Similiter res se habebit, si plures quantitates a pluribus incognitis simul pendentes sunt observatae: prout observationum multitudo multitudini incognitarum vel aequalis, vel hac minor vel maior fuerit, problema vel determinatum, vel indeterminatum, vel plus quam determinatum erit (generaliter saltem loquendo), et in casu tertio ad incognitarum determinationem observationes infinitis modis diversis combinari poterunt. E tali combinationum varietate eas eligere, quae maxime ad rem faciant, i. e. quae incognitarum valores erroribus minimis obnoxios suppeditent, problema sane est in applicatione matheseos ad philosophiam naturalem longe gravissimum.

In Theoria motus corporum coelestium ostendimus, quomodo valores incognitarum *maxime probabiles* eruendi sint, si lex probabilitatis errorum observationum cognita sit; et quum haec lex natura sua in omnibus fere casibus hypothetica maneat, theoriam illam ad legem maxime plausibilem applicavimus, ubi probabilitas erroris x quantitati exponentiali e^{-hhxx} proportionalis supponitur, unde methodus a nobis dudum in calculis praesertim astronomicis, et nunc quidem a plerisque calculatoribus sub nomine methodi quadratorum minimorum usitata demanavit.

Postea ill. LAPLACE, rem alio modo aggressus, idem principium omnibus aliis etiamnum praeferendum esse docuit, quaecunque fuerit lex probabilitatis errorum, si modo observationum multitudo sit permagna. At pro multitudine observationum modica, res intacta mansit, ita ut si lex nostra hypothetica respuatur, methodus quadratorum minimorum eo tantum nomine prae aliis commendabilis habenda sit, quod calculorum concinnitati maxime est adaptata.

Geometris itaque gratum fore speramus, si in hac nova argumenti tractatione docuerimus, methodum quadratorum minimorum exhibere combinationem ex omnibus optimam, non quidem proxime, sed absolute, quaecunque fuerit lex probabilitatis errorum, quaecunque observationum multitudo, si modo notionem

erroris medii non ad mentem ill. LAPLACE, sed ita, ut in artt. 5 et 6 a nobis factum est, stabiliamus.

Ceterum expressis verbis hic praemonere convenit, in omnibus disquisitionibus sequentibus tantummodo de erroribus irregularibus atque a parte constante liberis sermonem esse, quum proprie ad perfectam artem observandi pertineat, omnes errorum constantium caussas summo studio amovere. Quaenam vero subsidia calculator tales observationes tractare suscipiens, quas ab erroribus constantibus non liberas esse iusta suspicio adest, ex ipso calculo probabilium petere possit, disquisitioni peculiari alia occasione promulgandae reservamus.

18.

PROBLEMA. *Designante U functionem datam quantitatum incognitarum V, V', V'' etc., quaeritur error medius M in determinatione valoris ipsius U metuendus, si pro V, V', V'' etc. adoptentur non valores veri, sed ii, qui ex observationibus ab invicem independentibus, erroribus mediis m, m', m'' etc. resp. obnoxiis prodeunt.*

Sol. Denotatis erroribus in valoribus observatis ipsarum V, V', V'' etc. per e, e', e'' etc., error inde redundans in valorem ipsius U exprimi poterit per functionem linearem

$$\lambda e + \lambda' e' + \lambda'' e'' + \text{etc.} = E$$

ubi λ, λ', λ'' etc. sunt valores quotientium differentialium $\frac{dU}{dV}$, $\frac{dU}{dV'}$, $\frac{dU}{dV''}$ etc. pro valoribus veris ipsarum V, V', V'' etc., siquidem observationes satis exactae sunt, ut errorum quadrata productaque negligere liceat. Hinc primo sequitur, quoniam observationum errores a partibus constantibus liberi supponuntur, valorem medium ipsius E esse $= 0$. Porro error medius in valore ipsius U metuendus erit radix quadrata e valore medio ipsius EE, sive MM erit valor medius aggregati

$$\lambda\lambda ee + \lambda'\lambda' e'e' + \lambda''\lambda'' e''e'' + \text{etc.} + 2\lambda\lambda' ee' + 2\lambda\lambda'' ee'' + 2\lambda'\lambda'' e'e'' + \text{etc.}$$

At valor medius ipsius $\lambda\lambda ee$ fit $\lambda\lambda mm$, valor medius ipsius $\lambda'\lambda' e'e'$ fit $= \lambda'\lambda' m'm'$ etc.; denique valores medii productorum $2\lambda\lambda' ee'$ etc. omnes fiunt $= 0$. Hinc itaque colligimus

$$M = \sqrt{(\lambda\lambda mm + \lambda'\lambda' m'm' + \lambda''\lambda'' m''m'' + \text{etc.})}$$

Huic solutioni quasdam annotationes adiicere conveniet.

I. Quatenus spectando observationum errores tanquam quantitates primi ordinis, quantitates ordinum altiorum negliguntur, in formula nostra pro $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. etiam valores eos quotientium $\frac{dU}{dV}$ etc. adoptare licebit, qui prodeunt e valoribus observatis quantitatum V, V', V'' etc. Quoties U est functio linearis, manifesto nulla prorsus erit differentia.

II. Si loco errorum mediorum observationum, harum pondera introducere malumus, sint haec, secundum unitatem arbitrariam, resp. p, p', p'' etc., atque P pondus determinationis valoris ipsius U e valoribus observatis quantitatum V, V', V'' etc. prodeuntis. Ita habebimus

$$P = \frac{1}{\frac{\lambda\lambda}{p} + \frac{\lambda'\lambda'}{p'} + \frac{\lambda''\lambda''}{p''} + \text{etc.}}$$

III. Si T est functio alia data quantitatum V, V', V'' etc. atque, pro harum valoribus veris,

$$\frac{dT}{dV} = \varkappa, \quad \frac{dT}{dV'} = \varkappa', \quad \frac{dT}{dV''} = \varkappa'' \text{ etc.}$$

error in determinatione valoris ipsius T, e valoribus observatis ipsarum V, V', V'' etc. petita, erit $= \varkappa e + \varkappa' e' + \varkappa'' e'' +$ etc., $= E'$, atque error medius in ista determinatione metuendus $= \sqrt{(\varkappa\varkappa mm + \varkappa'\varkappa' m'm' + \varkappa''\varkappa'' m''m'' +}$ etc.). Errores E, E' vero manifesto ab invicem iam non erunt independentes, valorque medius producti EE', secus ac valor medius producti ee', non erit $= 0$, sed $= \varkappa\lambda mm + \varkappa'\lambda' m'm' + \varkappa''\lambda'' m''m'' +$ etc.

IV. Problema nostrum etiam ad casum eum extendere licet, ubi valores quantitatum V, V', V'' etc. non immediate per observationes inveniuntur, sed quomodocunque ex observationum combinationibus derivantur, si modo singularum determinationes ab invicem sunt independentes, i. e. observationibus diversis superstructae: quoties autem haec conditio locum non habet, formula pro M erronea evaderet. E. g. si una alterave observatio, quae ad determinationem valoris ipsius V inserviit, etiam ad valorem ipsius V' determinandum adhibita esset, errores e et e' haud amplius ab invicem independentes forent, neque adeo producti ee' valor medius $= 0$. Si vero in tali casu nexus quantitatum V, V' cum observationibus simplicibus, e quibus deductae sunt, rite perpenditur, valor

medius producti ee' adiumento annotationis III. assignari, atque sic formula pro M completa reddi poterit.

19.

Sint V, V', V'' etc. functiones incognitarum x, y, z etc., multitudo illarum $= \pi$, multitudo incognitarum $= \rho$, supponamusque, per observationes vel immediate vel mediate valores functionum inventos esse $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc., ita tamen ut hae determinationes ab invicem fuerint independentes. Si ρ maior est quam π, incognitarum evolutio manifesto fit problema indeterminatum; si ρ ipsi π aequalis est, singulae x, y, z etc. in formam functionum ipsarum V, V', V'' etc. redigi vel redactae concipi possunt, ita ut ex harum valoribus observatis valores istarum inveniri possint, simulque adiumento art. praec. praecisionem relativam singulis his determinationibus tribuendam assignare liceat; denique si ρ minor est quam π, singulae x, y, z etc. infinitis modis diversis in formam functionum ipsarum V, V', V'' etc. redigi, adeoque illarum valores infinitis modis diversis erui poterunt. Quae determinationes exacte quidem quadrare deberent, si observationes praecisione absoluta gauderent; quod quum secus se habeat, alii modi alios valores suppeditabunt, nec minus determinationes e combinationibus diversis petitae inaequali praecisione instructae erunt.

Ceterum si in casu secundo vel tertio functiones V, V', V'' etc. ita comparatae essent, ut $\pi = \rho + 1$ ex ipsis, vel plures, tamquam functiones reliquarum spectare liceret, problema respectu posteriorum functionum etiamnum plus quam determinatum esset, respectu incognitarum x, y, z etc. autem indeterminatum; harum scilicet valores ne tunc quidem determinare liceret, quando valores functionum V, V', V'' etc. absolute exacti dati essent: sed hunc casum a disquisitione nostra excludemus.

Quoties V, V', V'' etc. per se non sunt functiones *lineares* indeterminatarum suarum, hoc efficietur, si loco incognitarum primitivarum introducuntur ipsarum differentiae a valoribus approximatis, quos aliunde cognitos esse supponere licet. Errores medios in determinationibus $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. metuendos resp. denotabimus per m, m', m'' etc., determinationumque pondera per p, p', p'' et., ita ut sit $pmm = p'm'm' = p''m''m''$ etc. Rationem, quam inter se tenent errores medii, cognitam supponemus, ita ut pondera, quorum unum ad lubitum accipi potest, sint nota. Denique statuemus

$$(V-L)\sqrt{p} = v, \quad (V'-L')\sqrt{p'} = v', \quad (V''-L'')\sqrt{p''} = v'' \text{ etc.}$$

Manifesto itaque res perinde se habebit, ac si observationes immediatae, aequali pracisione gaudentes, puta quarum error medius $= m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''}$ etc., sive quibus pondus $= 1$ tribuitur, suppeditavissent

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad v'' = 0 \text{ etc.}$$

20.

PROBLEMA. *Designantibus* v, v', v'' *etc. functiones lineares indeterminatarum* x, y, z *etc. sequentes*

$$\left.\begin{aligned} v &= ax + by + cz + \text{etc.} + l \\ v' &= a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l' \\ v'' &= a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

ex omnibus systematibus coëfficientium $\varkappa, \varkappa', \varkappa''$ *etc., qui indefinite dant*

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \text{etc.} = x - k$$

ita ut k *sit quantitas determinata i. e. ab* x, y, z *etc. independens, eruere id, pro quo* $\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + \text{etc.}$ *nanciscatur valorem minimum.*

Solutio. Statuamus

$$\left.\begin{aligned} av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} &= \xi \\ bv + b'v' + b''v'' + \text{etc.} &= \eta \\ cv + c'v' + c''v'' + \text{etc.} &= \zeta \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

etc.: eruntque etiam ξ, η, ζ etc. functiones lineares ipsarum x, y, z etc., puta

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\Sigma aa + y\Sigma ab + z\Sigma ac + \text{etc.} + \Sigma al \\ \eta &= x\Sigma ab + y\Sigma bb + z\Sigma bc + \text{etc.} + \Sigma bl \\ \zeta &= x\Sigma ac + y\Sigma bc + z\Sigma cc + \text{etc.} + \Sigma cl \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(III)}$$

(ubi Σaa denotat aggregatum $aa + a'a' + a''a'' + \text{etc.}$, ac perinde de reliquis) multitudoque ipsarum ξ, η, ζ etc. multitudini indeterminatarum x, y, z etc. aequalis, puta $= \rho$. Per eliminationem itaque elici poterit aequatio talis*)

*) Ratio, cur ad denotandos coëfficientes e tali eliminatione prodeuntes, hos potissimum characteres elegerimus, infra elucebit.

$$x = A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.}$$

in qua substituendo pro ξ, η, ζ etc. valores earum ex III, aequatio identica prodire debet. Quare statuendo

$$\left.\begin{aligned} a[\alpha\alpha] + b[\alpha\beta] + c[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha \\ a'[\alpha\alpha] + b'[\alpha\beta] + c'[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha' \\ a''[\alpha\alpha] + b''[\alpha\beta] + c''[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \text{(IV)}$$

necessario erit indefinite

$$\alpha v + \alpha' v' + \alpha'' v'' + \text{etc.} = x - A \quad \text{(V)}$$

Haec aequatio docet, inter systemata valorum coëfficientium $\varkappa, \varkappa', \varkappa''$ etc. certo etiam referendos esse hos $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc., nec non, pro systemate quocunque, fieri debere indefinite

$$(\varkappa - \alpha)v + (\varkappa' - \alpha')v' + (\varkappa'' - \alpha'')v'' + \text{etc.} = A - k$$

quae aequatio implicat sequentes

$$\begin{aligned} (\varkappa - \alpha)a + (\varkappa' - \alpha')a' + (\varkappa'' - \alpha'')a'' + \text{etc.} &= 0 \\ (\varkappa - \alpha)b + (\varkappa' - \alpha')b' + (\varkappa'' - \alpha'')b'' + \text{etc.} &= 0 \\ (\varkappa - \alpha)c + (\varkappa' - \alpha')c' + (\varkappa'' - \alpha'')c'' + \text{etc.} &= 0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Multiplicando has aequationes resp. per $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc., et addendo, obtinemus propter (IV)

$$(\varkappa - \alpha)\alpha + (\varkappa' - \alpha')\alpha' + (\varkappa'' - \alpha'')\alpha'' + \text{etc.} = 0$$

sive quod idem est

$$\begin{aligned} &\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + \text{etc.} \\ &= \alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.} + (\varkappa - \alpha)^2 + (\varkappa' - \alpha')^2 + (\varkappa'' - \alpha'')^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

unde patet, aggregatum $\varkappa\varkappa + \varkappa'\varkappa' + \varkappa''\varkappa'' + \text{etc.}$ valorem minimum obtinere, si statuatur $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. Q. E. I.

Ceterum hic valor minimus ipse sequenti modo eruitur. Aequatio (V) docet, esse

$$\begin{aligned}&\alpha a+\alpha' a'+\alpha'' a''+\text{ etc.} = 1\\ &\alpha b+\alpha' b'+\alpha'' b''+\text{ etc.} = 0\\ &\alpha c+\alpha' c'+\alpha'' c''+\text{ etc.} = 0 \text{ etc.}\end{aligned}$$

Multiplicando has aequationes resp. per $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\mathfrak{b}]$, $[\alpha\gamma]$ etc. et addendo, protinus habemus adiumento aequationum (IV)

$$\alpha\alpha+\alpha'\alpha'+\alpha''\alpha''+\text{ etc.} = [\alpha\alpha]$$

21.

Quum observationes suppeditaverint aequationes (proxime veras) $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc., ad valorem incognitae x inde eliciendum combinatio illarum aequationum talis

$$\varkappa v+\varkappa' v'+\varkappa'' v''+\text{ etc.} = 0$$

adhibenda est, quae ipsi x coëfficientem 1 conciliet, incognitasque reliquas y, z etc. eliminet; cui determinationi per art. 18 pondus

$$= \frac{1}{\varkappa\varkappa+\varkappa'\varkappa'+\varkappa''\varkappa''+\text{ etc.}}$$

tribuendum erit. Ex art. praec. itaque sequitur, determinationem maxime idoneam eam fore, ubi statuatur $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. Hoc pacto x obtinet valorem A, manifestoque idem valor etiam (absque cognitione multiplicatorum α, α', α'' etc.) protinus per eliminationem ex aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. elici potest. Pondus huic determinationi tribuendum erit $= \frac{1}{[\alpha\alpha]}$, sive error medius in ipsa metuendus

$$= m\sqrt{p}[\alpha\alpha] = m'\sqrt{p'}[\alpha\alpha] = m''\sqrt{p''}[\alpha\alpha] \text{ etc.}$$

Prorsus simili modo determinatio maxime idonea incognitarum reliquarum y, z etc. eosdem valores ipsis conciliabit, qui per eliminationem ex iisdem aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. prodeunt.

Denotando aggregatum indefinitum $vv+v'v'+v''v''$ etc., sive quod idem est hoc

$$p(V-L)^2+p'(V'-L')^2+p''(V''-L'')^2+\text{ etc.}$$

per Ω, patet, 2ξ, 2η, 2ζ etc. esse quotientes differentiales partiales functionis Ω, puta

$$2\xi = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}x}, \quad 2\eta = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}y}, \quad 2\zeta = \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}z} \text{ etc.}$$

Quapropter valores incognitarum ex observationum combinatione maxime idonea prodeuntes, quos *valores maxime plausibiles* commode vocare possumus, identici erunt cum iis, per quos Ω valorem minimum obtinet. Iam $V-L$ indefinite exprimit differentiam inter valorem computatum et observatum. Valores itaque incognitarum maxime plausibiles iidem erunt, qui summam quadratorum differentiarum inter quantitatum V, V', V'' etc. valores observatos et computatos, per observationum pondera multiplicatorum, minimam efficiunt, quod principium in *Theoria Motus Corporum Coelestium* longe alia via stabiliveramus. Et si insuper praecisio relativa singularum determinationum assignanda est, per eliminationem indefinitam ex aequationibus (III) ipsas x, y, z etc. in tali forma exhibere oportet:

$$\left.\begin{aligned}x &= A+[\alpha\alpha]\xi+[\alpha\mathfrak{b}]\eta+[\alpha\gamma]\zeta+\text{ etc.}\\ y &= B+[\mathfrak{b}\alpha]\xi+[\mathfrak{b}\mathfrak{b}]\eta+[\mathfrak{b}\gamma]\zeta+\text{ etc.}\\ z &= C+[\gamma\alpha]\xi+[\gamma\mathfrak{b}]\eta+[\gamma\gamma]\zeta+\text{ etc.}\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\} \text{ (VII)}$$

quo pacto valores maxime plausibiles incognitarum x, y, z etc. erunt resp. A, B, C etc., atque pondera his determinationibus tribuenda $\frac{1}{[\alpha\alpha]}$, $\frac{1}{[\mathfrak{b}\mathfrak{b}]}$, $\frac{1}{[\gamma\gamma]}$ etc., sive errores medii in ipsis metuendi

$$\begin{aligned}&\text{pro } x \ldots\ldots m\sqrt{p}[\alpha\alpha] = m'\sqrt{p'}[\alpha\alpha] = m''\sqrt{p''}[\alpha\alpha] \text{ etc.}\\ &\text{pro } y \ldots\ldots m\sqrt{p}[\mathfrak{b}\mathfrak{b}] = m'\sqrt{p'}[\mathfrak{b}\mathfrak{b}] = m''\sqrt{p''}[\mathfrak{b}\mathfrak{b}] \text{ etc.}\\ &\text{pro } z \ldots\ldots m\sqrt{p}[\gamma\gamma] = m'\sqrt{p'}[\gamma\gamma] = m''\sqrt{p''}[\gamma\gamma] \text{ etc.}\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

quod convenit cum iis, quae in *Theoria Motus Corporum Coelestium* docuimus.

22.

De casu omnium simplicissimo, simul vero frequentissimo, ubi unica incognita adest, atque $V = x$, $V' = x$, $V' = x$ etc., paucis seorsim agere conveniet. Erit scilicet $a = \sqrt{p}$, $a' = \sqrt{p'}$, $a'' = \sqrt{p''}$ etc., $l = -L\sqrt{p}$, $l' = -L'\sqrt{p'}$, $l'' = -L''\sqrt{p''}$ etc., et proin

$$\xi = (p+p'+p''+\text{ etc.})\,x-(pL+p'L'+p''L''+\text{ etc.})$$

Hinc porro

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{p+p'+p''+\text{ etc.}}$$
$$A = \frac{pL+p'L'+p''L''+\text{ etc.}}{p+p'+p''+\text{ etc.}}$$

Si itaque e pluribus observationibus inaequali praecisione gaudentibus, et quarum pondera resp. sunt p, p', p'' etc., valor eiusdem quantitatis inventus est e prima $= L$, e secunda $= L'$, e tertia $= L''$ etc., huius valor maxime plausibilis erit

$$= \frac{pL+p'L'+p''L''+\text{ etc.}}{p+p'+p''+\text{ etc.}}$$

pondusque huius determinationis $= p+p'+p''$ etc. Si omnes observationes aequali praecisione gaudent, valor maxime plausibilis erit

$$= \frac{L+L'+L''+\text{ etc.}}{\pi}$$

i. e. aequalis medio arithmetico valorum observatorum, huiusque determinationis pondus $= \pi$, accepto pondere observationum pro unitate.

THEORIA

COMBINATIONIS OBSERVATIONUM

ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE

PARS POSTERIOR

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM EXHIBITA 1823. FEBR. 2.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. V.
Gottingae MDCCCXXIII.

THEORIA

COMBINATIONIS OBSERVATIONUM

ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE.

PARS POSTERIOR.

23.

Plures adhuc supersunt disquisitiones, per quas theoria praecedens tum illustrabitur tum ampliabitur.

Ante omnia investigare oportet, num negotium eliminationis, cuius adiumento indeterminatae x, y, z etc. per ξ, η, ζ etc. exprimendae sunt, semper sit possibile. Quum multitudo illarum multitudini harum aequalis sit, e theoria eliminationis in aequationibus linearibus constat, illam eliminationem, si ξ, η, ζ etc. ab invicem independentes sint, certo possibilem fore; sin minus, impossibilem. Supponamus aliquantisper, ξ, η, ζ etc. non esse ab invicem independentes, sed exstare inter ipsas aequationem identicam

$$0 = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

Habebimus itaque

$$\begin{aligned} F\Sigma aa + G\Sigma ab + H\Sigma ac + \text{etc.} &= 0 \\ F\Sigma ab + G\Sigma bb + H\Sigma bc + \text{etc.} &= 0 \\ F\Sigma ac + G\Sigma bc + H\Sigma cc + \text{etc.} &= 0 \end{aligned}$$

etc., nec non

$$F\Sigma al + G\Sigma bl + H\Sigma cl + \text{etc.} = -K$$

Statuendo porro

$$\left.\begin{array}{l} aF+bG+cH+\text{ etc.} = 0 \\ a'F+b'G+c'H+\text{ etc.} = 0' \\ a''F+b''G+c''H+\text{ etc.} = 0'' \end{array}\right\} \text{(I)}$$

etc., eruitur

$$\begin{array}{l} a0+a'0'+a''0''+\text{ etc.} = 0 \\ b0+b'0'+b''0''+\text{ etc.} = 0 \\ c0+c'0'+c''0''+\text{ etc.} = 0 \end{array}$$

etc., nec non

$$l0+l'0'+l''0''+\text{ etc.} = -K$$

Multiplicando itaque aequationes (I) resp. per $0, 0', 0''$ etc., et addendo, obtinemus:

$$0 = 00+0'0'+0''0''+\text{ etc.}$$

quae aequatio manifesto consistere nequit, nisi simul fuerit $0 = 0$, $0' = 0$, $0'' = 0$ etc. Hinc primo colligimus, necessario esse debere $K = 0$. Dein aequationes (I) docent, functiones v, v', v'' etc. ita comparatas esse, ut ipsarum valores non mutentur, si valores quantitatum x, y, z etc. capiant incrementa vel decrementa ipsis F, G, H etc. resp. proportionalia, idemque manifesto de functionibus V, V', V'' etc. valebit. Suppositio itaque consistere nequit, nisi in casu tali, ubi vel e valoribus exactis quantitatum V, V', V'' etc. valores incognitarum x, y, z etc. determinare impossibile fuisset, i. e. ubi problema natura sua fuisset indeterminatum, quem casum a disquisitione nostra exclusimus.

24.

Denotemus per $\mathfrak{0}, \mathfrak{0}', \mathfrak{0}''$ etc. multiplicatores, qui eandem relationem habent ad indeterminatam y, quam habent $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc. ad x, puta sit

$$\begin{array}{l} a[\mathfrak{0}\alpha]+b[\mathfrak{0}\mathfrak{0}]+c[\mathfrak{0}\gamma]+\text{ etc.} = \mathfrak{0} \\ a'[\mathfrak{0}\alpha]+b'[\mathfrak{0}\mathfrak{0}]+c'[\mathfrak{0}\gamma]+\text{ etc.} = \mathfrak{0}' \\ a''[\mathfrak{0}\alpha]+b''[\mathfrak{0}\mathfrak{0}]+c''[\mathfrak{0}\gamma]+\text{ etc.} = \mathfrak{0}'' \end{array}$$

etc., ita ut fiat indefinite

$$\mathfrak{0}v+\mathfrak{0}'v'+\mathfrak{0}''v''+\text{ etc.} = y-B$$

Perinde sint $\gamma, \gamma', \gamma''$ etc. multiplicatores similes respectu indeterminatae z, puta

$$\begin{array}{l} a[\gamma\alpha]+b[\gamma\mathfrak{0}]+c[\gamma\gamma]+\text{ etc.} = \gamma \\ a'[\gamma\alpha]+b'[\gamma\mathfrak{0}]+c'[\gamma\gamma]+\text{ etc.} = \gamma' \\ a''[\gamma\alpha]+b''[\gamma\mathfrak{0}]+c''[\gamma\gamma]+\text{ etc.} = \gamma'' \end{array}$$

etc., ita ut fiat indefinite

$$\gamma v+\gamma'v'+\gamma''v''+\text{ etc.} = z-C$$

et sic porro. Hoc pacto, perinde ut iam in art. 20 inveneramus

$$\Sigma\alpha a = 1, \quad \Sigma\alpha b = 0, \quad \Sigma\alpha c = 0, \text{ etc.}, \quad \text{nec non} \quad \Sigma\alpha l = -A$$

etiam habebimus

$$\begin{array}{l} \Sigma\mathfrak{0}a = 0, \quad \Sigma\mathfrak{0}b = 1, \quad \Sigma\mathfrak{0}c = 0, \text{ etc.}, \quad \text{atque} \quad \Sigma\mathfrak{0}l = -B \\ \Sigma\gamma a = 0, \quad \Sigma\gamma b = 0, \quad \Sigma\gamma c = 1, \text{ etc.}, \quad \text{atque} \quad \Sigma\gamma l = -C \end{array}$$

et sic porro. Nec minus, quemadmodum in art. 20 prodiit $\Sigma\alpha\alpha = [\alpha\alpha]$, etiam erit

$$\Sigma\mathfrak{0}\mathfrak{0} = [\mathfrak{0}\mathfrak{0}], \quad \Sigma\gamma\gamma = [\gamma\gamma] \text{ etc.}$$

Multiplicando porro valores ipsorum $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc. (art. 20. IV) resp. per $\mathfrak{0}, \mathfrak{0}', \mathfrak{0}''$ etc., et addendo, obtinemus

$$\alpha\mathfrak{0}+\alpha'\mathfrak{0}'+\alpha''\mathfrak{0}'' \text{ etc.} = [\alpha\mathfrak{0}], \quad \text{sive} \quad \Sigma\alpha\mathfrak{0} = [\alpha\mathfrak{0}]$$

Multiplicando autem valores ipsorum $\mathfrak{0}, \mathfrak{0}', \mathfrak{0}''$ etc. resp. per $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc., et addendo, perinde prodit

$$\alpha\mathfrak{0}+\alpha'\mathfrak{0}'+\alpha''\mathfrak{0}''+\text{ etc.} = [\mathfrak{0}\alpha], \quad \text{adeoque} \quad [\alpha\mathfrak{0}] = [\mathfrak{0}\alpha]$$

Prorsus simili modo eruitur

$$[\alpha\gamma] = [\gamma\alpha] = \Sigma\alpha\gamma, \quad [\mathfrak{0}\gamma] = [\gamma\mathfrak{0}] = \Sigma\mathfrak{0}\gamma \text{ etc.}$$

25.

Denotemus porro per $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. valores functionum v, v', v'' etc., qui prodeunt, dum pro x, y, z etc. ipsarum valores maxime plausibiles A, B, C etc. substituuntur, puta

$$aA+bB+cC+\text{ etc.}+l=\lambda$$
$$a'A+b'B+c'C+\text{ etc.}+l'=\lambda'$$
$$a''A+b''B+c''C+\text{ etc.}+l''=\lambda''$$

etc.; statuamus praeterea

$$\lambda\lambda+\lambda'\lambda'+\lambda''\lambda''+\text{ etc.}=M$$

ita ut sit M valor functionis Ω valoribus maxime plausibilibus indeterminatarum respondens, adeoque per ea, quae in art. 20 demonstravimus, valor minimus huius functionis. Hinc erit $a\lambda+a'\lambda'+a''\lambda''+$ etc. valor ipsius ξ, valoribus $x=A$, $y=B$, $z=C$ etc. respondens, adeoque $=0$, i. e. habebimus

$$\Sigma a\lambda=0$$

et perinde fiet

$$\Sigma b\lambda=0,\quad \Sigma c\lambda=0 \text{ etc.};\quad \text{nec non } \Sigma\alpha\lambda=0,\quad \Sigma\beta\lambda=0,\quad \Sigma\gamma\lambda=0 \text{ etc.}$$

Denique multiplicando expressiones ipsarum $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. per $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. resp., et addendo, obtinemus $l\lambda+l'\lambda'+l''\lambda''+$ etc. $=\lambda\lambda+\lambda'\lambda'+\lambda''\lambda''+$ etc., sive

$$\Sigma l\lambda=M$$

26.

Substituendo in aequatione $v=ax+by+cz+$ etc. $+l$, pro x, y, z etc. expressiones VII. art. 21, prodibit, adhibitis reductionibus ex praecedentibus obviis,

$$v=\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\zeta+\text{ etc.}+\lambda$$

et perinde erit indefinite

$$v'=\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\zeta+\text{ etc.}+\lambda'$$
$$v''=\alpha''\xi+\beta''\eta+\gamma''\zeta+\text{ etc.}+\lambda''$$

etc. Multiplicando vel has aequationes, vel aequationes I art. 20 resp. per $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc., et addendo, discimus esse indefinite

$$\lambda v+\lambda' v'+\lambda'' v''+\text{ etc.}=M$$

27.

Functio Ω indefinite in pluribus formis exhiberi potest, quas evolvere operae pretium erit. Ac primo quidem quadrando aequationes I art. 20 et addendo, statim fit

$$\Omega=xx\Sigma aa+yy\Sigma bb+zz\Sigma cc+\text{ etc.}+2xy\Sigma ab+2xz\Sigma ac+2yz\Sigma bc+\text{ etc.}$$
$$+2x\Sigma al+2y\Sigma bl+2z\Sigma cl+\text{ etc.}+\Sigma ll$$

quae est forma *prima*.

Multiplicando easdem aequationes resp. per v, v', v'' etc., et addendo, obtinemus:

$$\Omega=\xi x+\eta y+\zeta z+\text{ etc.}+lv+l'v'+l''v''+\text{ etc.}$$

atque hinc, substituendo pro v, v', v'' etc. expressiones in art. praec. traditas,

$$\Omega=\xi x+\eta y+\zeta z+\text{ etc.}-A\xi-B\eta-C\zeta-\text{ etc.}+M$$

sive

$$\Omega=\xi(x-A)+\eta(y-B)+\zeta(z-C)+\text{ etc.}+M$$

quae est forma *secunda*.

Substituendo in forma secunda pro $x-A$, $y-B$, $z-C$ etc. expressiones VII. art. 21, obtinemus formam *tertiam*:

$$\Omega=[\alpha\alpha]\xi\xi+[\beta\beta]\eta\eta+[\gamma\gamma]\zeta\zeta+\text{ etc.}+2[\alpha\beta]\xi\eta+2[\alpha\gamma]\xi\zeta+2[\beta\gamma]\eta\zeta+\text{ etc.}+M$$

His adiungi potest forma *quarta*, ex forma tertia atque formulis art. praec. sponte demanans:

$$\Omega=(v-\lambda)^2+(v'-\lambda')^2+(v''-\lambda'')^2+\text{ etc.}+M,\quad \text{sive}$$
$$\Omega=M+\Sigma(v-\lambda)^2$$

quae forma conditionem minimi directe ob oculos sistit.

28.

Sint e, e', e'' etc. errores in observationibus, quae dederunt $V=L$, $V'=L'$, $V''=L''$ etc., commissi, i. e. sint valores veri functionum V, V', V'' etc. resp. $L-e$, $L'-e'$, $L''-e''$ etc. adeoque valores veri ipsarum v, v', v'' etc. resp. $-e\sqrt{p}$, $-e'\sqrt{p'}$, $-e''\sqrt{p''}$ etc. Hinc valor verus ipsius x erit

$$= A - \alpha e\sqrt{p} - \alpha' e'\sqrt{p'} - \alpha'' e''\sqrt{p''} - \text{etc.}$$

sive error valoris ipsius x, in determinatione maxime idonea commissus, quem per Ex denotare convenit,

$$= \alpha e\sqrt{p} + \alpha' e'\sqrt{p'} + \alpha'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Perinde error valoris ipsius y in determinatione maxime idonea commissus, quem per Ey denotabimus, erit

$$= \mathfrak{G} e\sqrt{p} + \mathfrak{G}' e'\sqrt{p'} + \mathfrak{G}'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Valor medius quadrati $(Ex)^2$ invenitur

$$= mmp(\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.}) = mmp[\alpha\alpha]$$

valor medius quadrati $(Ey)^2$ perinde $= mmp[\mathfrak{G}\mathfrak{G}]$ etc., ut iam supra docuimus. Iam vero etiam valorem medium *producti* $Ex.Ey$ assignare licet, quippe qui invenitur

$$= mmp(\alpha\mathfrak{G} + \alpha'\mathfrak{G}' + \alpha''\mathfrak{G}'' + \text{etc.}) = mmp[\alpha\mathfrak{G}]$$

Concinne haec ita quoque exprimi possunt. Valores medii quadratorum $(Ex)^2$, $(Ey)^2$ etc. resp. aequales sunt productis ex $\frac{1}{2}mmp$ in quotientes differentialium partialium secundi ordinis

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\xi^2}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\eta^2} \text{ etc.}$$

valorque medius producti talis, ut $Ex.Ey$, aequalis est producto ex $\frac{1}{2}mmp$ in quotientem differentialem $\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\xi.\mathrm{d}\eta}$, quatenus quidem Ω tamquam functio indeterminatarum ξ, η, ζ etc. consideratur.

29.

Designet t functionem datam linearem quantitatum x, y, z etc. puta sit

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k$$

Valor ipsius t, e valoribus maxime plausibilibus ipsarum x, y, z etc. prodiens hinc erit $= fA + gB + hC + \text{etc.} + k$, quem per K denotabimus. Qui si tamquam valor verus ipsius t adoptatur, error committitur, qui erit

$$= fEx + gEy + hEz + \text{etc.}$$

atque per Et denotabitur. Manifesto valor medius huius erroris fit $= 0$, sive error a parte constante liber erit. At valor medius quadrati $(Et)^2$, sive valor medius aggregati

$$\begin{aligned} &ff(Ex)^2 + 2fg\,Ex.Ey + 2fh\,Ex.Ez + \text{etc.} \\ &\quad + gg(Ey)^2 \quad + 2gh\,Ey.Ez + \text{etc.} \\ &\quad\quad + hh(Ez)^2 \quad + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

per ea, quae in art. praec. exposuimus, aequalis fit producto ex mmp in aggregatum

$$\begin{aligned} &ff[\alpha\alpha] + 2fg[\alpha\mathfrak{G}] + 2fh[\alpha\gamma] + \text{etc.} \\ &\quad + gg[\mathfrak{G}\mathfrak{G}] + 2gh[\mathfrak{G}\gamma] + \text{etc.} \\ &\quad\quad + hh[\gamma\gamma] + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

sive producto ex mmp in valorem functionis $\Omega - M$, qui prodit per substitutiones

$$\xi = f, \quad \eta = g, \quad \zeta = h \text{ etc.}$$

Denotando igitur hunc valorem determinatum functionis $\Omega - M$ per ω, error medius metuendus, dum determinationi $t = K$ adhaeremus, erit $= m\sqrt{p\omega}$, sive pondus huius determinationis $= \frac{1}{\omega}$.

Quum indefinite habeatur

$$\Omega - M = (x - A)\xi + (y - B)\eta + (z - C)\zeta + \text{etc.}$$

patet, ω quoque aequalem esse valori determinato expressionis

$$(x - A)f + (y - B)g + (z - C)h + \text{etc.}$$

sive valori determinato ipsius $t - K$, qui prodit, si indeterminatis x, y, z etc. tribuuntur valores ii, qui respondent valoribus ipsarum ξ, η, ζ etc. his f, g, h etc.

Denique observamus, si t indefinite in formam functionis ipsarum ξ, η, ζ etc. redigatur, ipsius partem constantem necessario fieri $= K$. Quodsi igitur indefinite fit

$$t = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K, \quad \text{erit} \quad \omega = fF + gG + hH + \text{etc.}$$

30.

Functio Ω valorem suum *absolute minimum* M, ut supra vidimus, nanciscitur, faciendo $x = A$, $y = B$, $z = C$ etc., sive $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. Si vero alicui illarum quantitatum valor *alius* iam tributus est, e. g. $x = A + \Delta$, variantibus reliquis Ω assequi potest valorem relative minimum, qui manifesto obtinetur adiumento aequationum

$$x = A + \Delta, \quad \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}y} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}z} = 0 \text{ etc.}$$

Fieri debet itaque $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc., adeoque, quoniam

$$x = A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.}, \quad \xi = \frac{\Delta}{[\alpha\alpha]}$$

Simul habebitur

$$y = B + \frac{[\alpha\beta]\Delta}{[\alpha\alpha]}, \quad z = C + \frac{[\alpha\gamma]\Delta}{[\alpha\alpha]} \text{ etc.}$$

Valor relative minimus ipsius Ω autem fit $= [\alpha\alpha]\xi\xi + M = M + \frac{\Delta\Delta}{[\alpha\alpha]}$. Vice versa hinc colligimus, si valor ipsius Ω limitem praescriptum $M + \mu\mu$ non superare debet, valorem ipsius x necessario inter limites $A - \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ et $A + \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ contentum esse debere. Notari meretur, $\mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ aequalem fieri errori medio in valore maxime plausibili ipsius x metuendo, si statuatur $\mu = m\sqrt{p}$, i. e. si μ aequalis sit errori medio observationum talium, quibus pondus $= 1$ tribuitur.

Generalius investigemus valorem minimum ipsius Ω, qui pro valore dato ipsius t locum habere potest, denotante t ut in art. praec. functionem linearem $fx + gy + hz + \text{etc.} + k$, et cuius valor maxime plausibilis $= K$: valor praescriptus ipsius t denotetur per $K + \varkappa$. E theoria maximorum et minimorum constat, problematis solutionem petendam esse ex aequationibus

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}x} = 0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}y} = 0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}$$
$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}z} = 0\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}z} \text{ etc.}$$

sive $\xi = 0f$, $\eta = 0g$, $\zeta = 0h$ etc., designante 0 multiplicatorem adhuc indeterminatum. Quare si, ut in art. praec., statuimus, esse *indefinite*

$$t = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

habebimus

$$K + \varkappa = 0(fF + gG + hH + \text{etc.}) + K, \text{ sive}$$
$$0 = \frac{\varkappa}{\omega}$$

accipiendo ω in eadem significatione ut in art. praec. Et quum $\Omega - M$, indefinite, sit functio homogenea secundi ordinis indeterminatarum ξ, η, ζ etc., sponte patet, eius valorem pro $\xi = 0f$, $\eta = 0g$, $\zeta = 0h$ etc. fieri $= 00\omega$, et proin valorem minimum, quem Ω pro $t = K + \varkappa$ obtinere potest, fieri $= M + 00\omega = M + \frac{\varkappa\varkappa}{\omega}$. Vice versa, si Ω debet valorem aliquem praescriptum $M + \mu\mu$ non superare, valor ipsius t necessario inter limites $K - \mu\sqrt{\omega}$ et $K + \mu\sqrt{\omega}$ contentus esse debet, ubi $\mu\sqrt{\omega}$ aequalis fit errori medio in determinatione maxime plausibili ipsius t metuendo, si pro μ accipitur error medius observationum, quibus pondus $= 1$ tribuitur.

31.

Quoties multitudo quantitatum x, y, z etc. paullo maior est, determinatio numerica valorum A, B, C etc. ex aequationibus $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. per eliminationem vulgarem satis molesta evadit. Propterea in Theoria Motus Corporum Coelestium art. 182 algorithmum peculiarem addigitavimus, atque in *Disquisitione de elementis ellipticis Palladis* (Comm. recent. Soc. Gotting. Vol. I) copiose explicavimus, per quem labor ille ad tantam quantam quidem res fert simplicitatem evehitur. Reducenda scilicet est functio Ω sub formam talem:

$$\frac{u^0u^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u'u'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''u''}{\mathfrak{C}''} + \frac{u'''u'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} + M$$

ubi divisores $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}'''$ etc. sunt quantitates determinatae; u^0, u', u'', u''' etc. autem functiones lineares ipsarum x, y, z etc., quarum tamen secunda u' libera est ab x, tertia u'' libera ab x et y, quarta u''' libera ab x, y et z, et sic porro, ita ut ultima $u^{(\pi-1)}$ solam ultimam indeterminatarum x, y, z etc. implicet, denique coëfficientes, per quos x, y, z etc. resp. multiplicatae sunt in u^0, u', u'' etc., resp. aequales sunt ipsis $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc. Quibus ita factis statuendum est $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$, $u''' = 0$ etc., unde valores incognitarum x, y, z etc. inverso ordine commodissime elicientur. Haud opus videtur, algorithmum ipsum, per quem haec transformatio functionis Ω absolvitur, hic denuo repetere.

Sed multo adhuc magis prolixum calculum requirit eliminatio indefinita, cuius adiumento illarum determinationum pondera invenire oportet. Pondus qui-

dem determinationis incognitae ultimae (quae sola ultimam $u^{(\pi-1)}$ ingreditur) per ea, quae in Theoria Motus Corporum Coelestium demonstrata sunt, facile invenitur aequale termino ultimo in serie divisorum $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc.; quapropter plures calculatores, ut eliminationem illam molestam evitarent, deficientibus aliis subsidiis, ita sibi consuluerunt, ut algorithmum, de quo diximus pluries, mutato quantitatum x, y, z etc., ordine, repeterent, singulis deinceps ultimum locum occupantibus. Gratum itaque geometris fore speramus, si modum novum pondera determinationum calculandi, e penitiori argumenti perscrutatione haustum hic exponamus, qui nihil amplius desiderandum relinquere videtur.

32.

Statuamus itaque esse (I)

$$\begin{aligned} u^0 &= \mathfrak{A}^0 x + \mathfrak{B}^0 y + \mathfrak{C}^0 z + \text{etc.} + \mathfrak{L}^0 \\ u' &= \quad\ \mathfrak{B}' y + \mathfrak{C}' z + \text{etc.} + \mathfrak{L}' \\ u'' &= \quad\qquad\ \mathfrak{C}'' z + \text{etc.} + \mathfrak{L}'' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Hinc erit indefinite

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\Omega &= \xi\,\mathrm{d}x + \eta\,\mathrm{d}y + \zeta\,\mathrm{d}z + \text{etc.} \\ &= \tfrac{u^0\,\mathrm{d}u^0}{\mathfrak{A}^0} + \tfrac{u'\,\mathrm{d}u'}{\mathfrak{B}'} + \tfrac{u''\,\mathrm{d}u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} \\ &= u^0\left(\mathrm{d}x + \tfrac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0}\mathrm{d}y + \tfrac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0}\mathrm{d}z + \text{etc.}\right) \\ &\quad + u'\left(\mathrm{d}y + \tfrac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'}\mathrm{d}z + \text{etc.}\right) + u''(\mathrm{d}z + \text{etc.}) + \text{etc.} \end{aligned}$$

unde colligimus (II)

$$\begin{aligned} \xi &= u^0 \\ \eta &= \tfrac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0}u^0 + u' \\ \zeta &= \tfrac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0}u^0 + \tfrac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'}u' + u'' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Supponamus, hinc derivari formulas sequentes (III)

$$\begin{aligned} u^0 &= \xi \\ u' &= A'\xi + \eta \\ u'' &= A''\xi + B''\eta + \zeta \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Iam e differentiali completo aequationis

$$\Omega = \xi(x - A) + \eta(y - B) + \zeta(z - C) + \text{etc.} + M$$

subtracta aequatione

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{d}\Omega = \xi\,\mathrm{d}x + \eta\,\mathrm{d}y + \zeta\,\mathrm{d}z + \text{etc.}$$

sequitur

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{d}\Omega = (x - A)\mathrm{d}\xi + (y - B)\mathrm{d}\eta + (z - C)\mathrm{d}\zeta + \text{etc.}$$

quae expressio identica esse debet cum hac ex III demanante:

$$\tfrac{u^0}{\mathfrak{A}^0}\cdot\mathrm{d}\xi + \tfrac{u'}{\mathfrak{B}'}(A'\mathrm{d}\xi + \mathrm{d}\eta) + \tfrac{u''}{\mathfrak{C}''}(A''\mathrm{d}\xi + B''\mathrm{d}\eta + \mathrm{d}\zeta) + \text{etc.}$$

Hinc colligimus (IV)

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{u^0}{\mathfrak{A}^0} + A'\cdot\tfrac{u'}{\mathfrak{B}'} + A''\cdot\tfrac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + A \\ y &= \quad\ \tfrac{u'}{\mathfrak{B}'} + B''\cdot\tfrac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + B \\ z &= \quad\qquad\ \tfrac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + C \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Substituendo in his expressionibus pro u^0, u', u'' etc. valores earum ex III depromtos eliminatio indefinita absoluta erit. Et quidem ad pondera determinanda habebimus (V)

$$\begin{aligned} [\alpha\alpha] &= \tfrac{1}{\mathfrak{A}^0} + \tfrac{A'A'}{\mathfrak{B}'} + \tfrac{A''A''}{\mathfrak{C}''} + \tfrac{A'''A'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} \\ [\beta\beta] &= \quad\ \tfrac{1}{\mathfrak{B}'} + \tfrac{B''B''}{\mathfrak{C}''} + \tfrac{B'''B'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} \\ [\gamma\gamma] &= \quad\qquad\ \tfrac{1}{\mathfrak{C}''} + \tfrac{C'''C'''}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

quarum formularum simplicitas nihil desiderandum relinquit. Ceterum etiam pro

coëfficientibus reliquis $[\alpha\delta]$, $[\alpha\gamma]$, $[\delta\gamma]$ etc. formulae aeque simplices prodeunt, quas tamen, quum illorum usus sit rarior, hic apponere supersedemus.

33.

Propter rei gravitatem, et ut omnia ad calculum parata sint, etiam formulas explicitas ad determinationem coëfficientium A', A'', A''' etc. B'', B''' etc. etc. hic adscribere visum est. Duplici modo hic calculus adornari potest, quum aequationes identicae prodire debeant, tum si valores ipsarum u^0, u', u'' etc. ex III depromti in II substituuntur, tum ex substitutione valorum ipsarum ξ, η, ζ etc. ex II in III. Prior modus haec formularum systemata subministrat:

$$\frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0}+A'=0$$
$$\frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0}+\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'}.A'+A''=0$$
$$\frac{\mathfrak{D}^0}{\mathfrak{A}^0}+\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'}.A'+\frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''}.A''+A'''=0$$

etc. unde inveniuntur A', A'', A''' etc.

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'}+B''=0$$
$$\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'}+\frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''}.B''+B'''=0$$

etc. unde inveniuntur B'', B''' etc.

$$\frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''}+C'''=0$$

etc. unde inveniuntur C''' etc. Et sic porro.

Alter modus has formulas suggerit:

$$\mathfrak{A}^0A'+\mathfrak{B}^0=0$$

unde habetur A'

$$\mathfrak{A}^0A''+\mathfrak{B}^0B''+\mathfrak{C}^0=0$$
$$\mathfrak{B}'B''+\mathfrak{C}'=0$$

unde inveniuntur B'' et A''.

$$\mathfrak{A}^0A'''+\mathfrak{B}^0B'''+\mathfrak{C}^0C'''+\mathfrak{D}^0=0$$
$$\mathfrak{B}'B'''+\mathfrak{C}'C'''+\mathfrak{D}'=0$$
$$\mathfrak{C}''C'''+\mathfrak{D}''=0$$

unde inveniuntur C''', B''', A'''. Et sic porro.

Uterque modus aeque fere commodus est, si pondera determinationum cunctarum x, y, z etc. desiderantur; quoties vero e quantitatibus $[\alpha\alpha]$, $[\delta\delta]$, $[\gamma\gamma]$ etc. una tantum vel altera requiritur, manifesto systema prius longe praeferendum erit.

Ceterum combinatio aequationum I cum IV ad easdem formulas perducit, insuperque calculum duplicem ad eruendos valores maxime plausibiles A, B, C etc. ipsos suppeditat, puta *primo*

$$A=-\frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0}-A'\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{C}''}-A''\frac{\mathfrak{B}''}{\mathfrak{C}''}-A'''\frac{\mathfrak{B}'''}{\mathfrak{D}'''}-\text{etc.}$$
$$B=\quad -\frac{\mathfrak{B}'}{\mathfrak{C}''}-B''\frac{\mathfrak{B}''}{\mathfrak{C}''}-B'''\frac{\mathfrak{B}'''}{\mathfrak{D}'''}-\text{etc.}$$
$$C=\quad -\frac{\mathfrak{B}''}{\mathfrak{C}''}-C'''\frac{\mathfrak{B}'''}{\mathfrak{D}'''}-\text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Calculus alter identicus est cum vulgari, ubi statuitur $u^0=0$, $u'=0$, $u''=0$ etc.

34.

Quae in art. 32 exposuimus, sunt tantummodo casus speciales theorematis generalioris, quod ita se habet:

Theorema. *Designet t functionem linearem indeterminatarum x, y, z etc. hanc*

$$t=fx+gy+hz+\text{etc.}+k$$

quae transmutata in functionem indeterminatarum u^0, u', u'' etc. fiat

$$t=k^0u^0+k'u'+k''u''+\text{etc.}+K$$

Quibus ita se habentibus erit K valor maxime plausibilis ipsius t, atque pondus huius determinationis

$$=\frac{1}{\mathfrak{A}^0k^0k^0+\mathfrak{B}'k'k'+\mathfrak{C}''k''k''+\text{etc.}}$$

Dem. Pars prior theorematis inde patet, quod valor maxime plausibilis ipsius t valoribus $u^0=0$, $u'=0$, $u''=0$ etc. respondere debet. Ad posterio-

rem demonstrandam observamus, quoniam $\frac{1}{2}\mathrm{d}\Omega = \xi\mathrm{d}x + \eta\mathrm{d}y + \zeta\mathrm{d}z +$ etc., atque $\mathrm{d}t = f\mathrm{d}x + g\mathrm{d}y + h\mathrm{d}z +$ etc., esse, pro $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc., independenter a valoribus differentialium $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ etc.

$$\mathrm{d}\Omega = 2\,\mathrm{d}t$$

Hinc vero sequitur, pro iisdem valoribus $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc., fieri

$$\tfrac{u^0}{\mathfrak{A}^0}\mathrm{d}u^0 + \tfrac{u'}{\mathfrak{B}'}\mathrm{d}u' + \tfrac{u''}{\mathfrak{C}''}\mathrm{d}u'' + \text{etc.} = k^0\mathrm{d}u^0 + k'\mathrm{d}u' + k''\mathrm{d}u'' + \text{etc.}$$

Iam facile perspicitur, si $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ etc. sint ab invicem independentes, etiam $\mathrm{d}u^0$, $\mathrm{d}u'$, $\mathrm{d}u''$ etc. ab invicem independentes esse; unde colligimus, pro $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc. esse

$$u^0 = \mathfrak{A}^0 k^0, \quad u' = \mathfrak{B}' k', \quad u'' = \mathfrak{C}'' k'' \quad \text{etc.}$$

Quamobrem valor ipsius Ω, iisdem valoribus respondens erit

$$= \mathfrak{A}^0 k^0 k^0 + \mathfrak{B}' k' k' + \mathfrak{C}'' k'' k'' + \text{etc.} + M$$

unde per art. 29 theorematis nostri veritas protinus demanat.

Ceterum si transformationem functionis t immediate, i. e. absque cognitione substitutionum IV. art. 32, perficere cupimus, praesto sunt formulae:

$$\begin{aligned} f &= \mathfrak{A}^0 k^0 \\ g &= \mathfrak{B}^0 k^0 + \mathfrak{B}' k' \\ h &= \mathfrak{C}^0 k^0 + \mathfrak{C}' k' + \mathfrak{C}'' k'' \quad \text{etc.,} \end{aligned}$$

unde coëfficientes k^0, k', k'' etc. deinceps determinabuntur, tandemque habebitur

$$K = k - \mathfrak{L}^0 k^0 - \mathfrak{L}' k' - \mathfrak{L}'' k'' - \text{etc.}$$

35.

Tractatione peculiari dignum est problema sequens, tum propter utilitatem practicam, tum propter solutionis concinnitatem.

Invenire mutationes valorum maxime plausibilium incognitarum ab accessione aequationis novae productas, nec non pondera novarum determinationum.

Retinebimus designationes in praecedentibus adhibitas, ita ut aequationes primitivae, ad pondus $= 1$ reductae, sint hae $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc.; aggregatum indefinitum $vv + v'v' + v''v''$ etc. $= \Omega$; porro ut ξ, η, ζ etc. sint quotientes differentiales partiales

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{2\,\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\,\mathrm{d}y}, \quad \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\,\mathrm{d}z} \quad \text{etc.}$$

denique ut ex eliminatione indefinita sequatur

$$\left.\begin{aligned} x &= A + [\alpha\alpha]\xi + [\alpha\beta]\eta + [\alpha\gamma]\zeta + \text{etc.} \\ y &= B + [\alpha\beta]\xi + [\beta\beta]\eta + [\beta\gamma]\zeta + \text{etc.} \\ z &= C + [\alpha\gamma]\xi + [\beta\gamma]\eta + [\gamma\gamma]\zeta + \text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)}$$

Iam supponamus, accedere aequationem novam $v^* = 0$ (proxime veram, et cuius pondus $= 1$), et inquiramus, quantas mutationes hinc nacturi sint tum valores incognitarum maxime plausibiles A, B, C etc., tum coëfficientes $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc.

Statuamus $\Omega + v^*v^* = \Omega^*$, $\frac{\mathrm{d}\Omega^*}{2\,\mathrm{d}x} = \xi^*$, $\frac{\mathrm{d}\Omega^*}{2\,\mathrm{d}y} = \eta^*$, $\frac{\mathrm{d}\Omega^*}{2\,\mathrm{d}z} = \zeta^*$ etc.

supponamusque, hinc per eliminationem sequi

$$x = A^* + [\alpha\alpha^*]\xi^* + [\alpha\beta^*]\eta^* + [\alpha\gamma^*]\zeta^* \text{ etc.}$$

Denique sit

$$v^* = fx + gy + hz + \text{etc.} + k$$

prodeat inde, substitutis pro x, y, z etc. valoribus ex (I),

$$v^* = F\xi + G\eta + H\zeta + \text{etc.} + K$$

statuaturque

$$Ff + Gg + Hh + \text{etc.} = \omega$$

Manifesto K erit valor maxime plausibilis functionis v^*, quatenus ex aequationibus primitivis sequitur, sine respectu valoris 0, quem observatio accessoria praebuit, atque $\frac{1}{\omega}$ pondus istius determinationis.

Iam habemus

$$\xi^* = \xi + fv^*, \quad \eta^* = \eta + gv^*, \quad \zeta^* = \zeta + hv^* \quad \text{etc.}$$

adeoque

$$F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \text{etc.} + K = v^*(1 + Ff + Gg + Hh + \text{etc.})$$

sive

$$v^* = \frac{F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \text{etc.} + K}{1 + \omega}$$

Perinde fit

$$x = A + [\alpha\alpha]\xi^* + [\alpha\mathfrak{b}]\eta^* + [\alpha\gamma]\zeta^* + \text{etc.} - v^*(f[\alpha\alpha] + g[\alpha\mathfrak{b}] + h[\alpha\gamma] + \text{etc.})$$
$$= A + [\alpha\alpha]\xi^* + [\alpha\mathfrak{b}]\eta^* + [\alpha\gamma]\zeta^* + \text{etc.} - Fv^*$$
$$= A + [\alpha\alpha]\xi^* + [\alpha\mathfrak{b}]\eta^* + [\alpha\gamma]\zeta^* + \text{etc.} - \frac{F}{1+\omega}(F\xi^* + G\eta^* + H\zeta^* + \text{etc.} + K)$$

Hinc itaque colligimus

$$A^* = A - \frac{FK}{1+\omega}$$

qui erit valor maxime plausibilis ipsius x ex *omnibus* observationibus;

$$[\alpha\alpha^*] = [\alpha\alpha] - \frac{FF}{1+\omega}$$

adeoque pondus istius determinationis

$$= \frac{1}{[\alpha\alpha] - \frac{FF}{1+\omega}}$$

Prorsus eodem modo invenitur valor maxime plausibilis ipsius y, *omnibus* observationibus superstructus

$$B^* = B - \frac{GK}{1+\omega}$$

atque pondus huius determinationis

$$= \frac{1}{[\mathfrak{b}\mathfrak{b}] - \frac{GG}{1+\omega}}$$

et sic porro. Q. E. I.

Liceat huic solutioni quasdam annotationes adiicere.

I. Substitutis his novis valoribus A^*, B^*, C^* etc., functio v^* obtinet valorem maxime plausibilem

$$K - \frac{K}{1+\omega}(Ff + Gg + Hh + \text{etc.}) = \frac{K}{1+\omega}$$

Et quum indefinite sit

$$v^* = \frac{F}{1+\omega}\cdot\xi^* + \frac{G}{1+\omega}\cdot\eta^* + \frac{H}{1+\omega}\cdot\zeta^* + \text{etc.} + \frac{K}{1+\omega}$$

pondus istius determinationis per principia art. 29 eruitur

$$= \frac{1+\omega}{Ff + Gg + Hh + \text{etc.}} = \frac{1}{\omega} + 1$$

Eadem immediate resultant ex applicatione regulae in fine art. 21 traditae; scilicet complexus aequationum primitivarum praebuerat determinationem $v^* = K$ cum pondere $= \frac{1}{\omega}$, dein observatio nova dedit determinationem aliam, ab illa independentem, $v^* = 0$, cum pondere $= 1$, quibus combinatis prodit determinatio $v^* = \frac{K}{1+\omega}$ cum pondere $= \frac{1}{\omega} + 1$.

II. Hinc porro sequitur, quum pro $x = A^*$, $y = B^*$, $z = C^*$ etc. esse debeat $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$, $\zeta^* = 0$ etc., pro iisdem valoribus fieri

$$\xi = -\frac{fK}{1+\omega}, \quad \eta = -\frac{gK}{1+\omega}, \quad \zeta = -\frac{hK}{1+\omega} \quad \text{etc.}$$

nec non, quoniam indefinite $\Omega = \xi(x - A) + \eta(y - B) + \zeta(z - C) + \text{etc.} + M$,

$$\Omega = \frac{KK}{(1+\omega)^2}(Ff + Gg + Hh + \text{etc.}) + M = M + \frac{\omega KK}{(1+\omega)^2}$$

denique, quoniam indefinite $\Omega^* = \Omega + v^*v^*$,

$$\Omega^* = M + \frac{\omega KK}{(1+\omega)^2} + \frac{KK}{(1+\omega)^2} = M + \frac{KK}{1+\omega}$$

III. Comparando haec cum iis, quae in art. 30 docuimus, animadvertimus, functionem Ω hic valorem minimum obtinere, quem pro valore determinato functionis $v^* = \frac{K}{1+\omega}$ accipere potest.

36.

Problematis alius, praecedenti affinis, puta

Investigare mutationes valorum maxime plausibilium incognitarum, a mutato pondere unius ex observationibus primitivis oriundas, nec non pondera novarum determinationum

solutionem tantummodo hic adscribemus, demonstrationem, quae ad instar art. praec. facile absolvitur, brevitatis caussa supprimentes.

Supponamus, peracto demum calculo animadverti, alicui observationum pondus seu nimis parvum, seu nimis magnum tributum esse, e. g. observationi primae, quae dedit $V = L$, loco ponderis p in calculo adhibiti rectius tribui pondus $= p^*$. Tunc haud opus erit calculum integrum repetere, sed commodius correctiones per formulas sequentes computare licebit.

Valores incognitarum maxime plausibiles correcti erunt hi;

$$x = A - \frac{(p^* - p)a\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$
$$y = B - \frac{(p^* - p)b\lambda'}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$
$$z = C - \frac{(p^* - p)c\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

etc. ponderaque harum determinationum invenientur, dividendo unitatem resp. per

$$[\alpha\alpha] - \frac{(p^* - p)a\alpha}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$
$$[\beta\beta] - \frac{(p^* - p)b\beta}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$
$$[\gamma\gamma] - \frac{(p^* - p)c\gamma}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})} \text{ etc.}$$

Haec solutio simul complectitur casum, ubi peracto calculo percipitur, unam ex observationibus omnino reiici debuisse, quum hoc idem sit ac si facias $p^* = 0$; et perinde valor $p^* = \infty$ refertur ad casum eum, ubi aequatio $V = L$, quae in calculo tamquam approximata tractata erat, revera praecisione absoluta gaudet.

Ceterum quoties vel aequationibus, quibus calculus superstructus erat, *plures* novae accedunt, vel *pluribus* ex illis pondera erronea tributa esse percipitur, computus correctionum nimis complicatus evaderet; quocirca in tali casu calculum ab integro reficere praestabit.

37.

In artt. 15. 16 methodum explicavimus, observationum praecisionem proxime determinandi*). Sed haec methodus supponit, errores, qui revera occurrerint, satis multos exacte cognitos esse, quae conditio, stricte loquendo, rarissime, ne dicam numquam, locum habebit. Quodsi quidem quantitates, quarum valores approximati per observationes innotuerunt, secundum legem cognitam, ab una pluribusve quantitatibus incognitis pendent, harum valores maxime plausibiles per methodum quadratorum minimorum eruere licebit, ac dein valores quantitatum, quae observationum obiecta fuerant, illinc computati perparum a valoribus

*) Disquisitio de eodem argumento, quam in commentatione anteriore (*Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften* Vol. I, p. 185) tradideramus, eidem hypothesi circa indolem functionis probabilitatem errorum exprimentis innixa erat, cui in Theoria motus corporum coelestium methodum quadratorum minimorum superstruxeramus (vid. art. 9, III).

veris discrepare censebuntur, ita ut ipsorum differentias a valoribus observatis eo maiore iure tamquam observationum errores veros adoptare liceat, quo maior fuerit harum multitudo. Hanc praxin sequuti sunt omnes calculatores, qui observationum praecisionem in casibus concretis a posteriori aestimare susceperunt: sed manifesto illa theoretice erronea est, et quamquam in casibus multis ad usus practicos sufficere possit, tamen in aliis enormiter peccare potest. Summopere itaque hoc argumentum dignum est, quod accuratius enodetur.

Retinebimus in hac disquisitione designationes inde ab art. 19 adhibitas. Praxis ea, de qua diximus, quantitates A, B, C etc. tamquam valores veros ipsarum x, y, z considerat, et proin ipsas $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. tamquam valores veros functionum v, v', v'' etc. Si omnes observationes aequali praecisione gaudent, ipsarumque pondus $p = p' = p''$ etc. pro unitate acceptum est, eaedem quantitates, signis mutatis, in illa suppositione observationum errores exhibent, unde praecepta art. 15 praebent observationum errorem medium m

$$= \sqrt{\frac{\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' + \text{etc.}}{\pi}} = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$$

Si observationum praecisio non est eadem, quantitates $-\lambda, -\lambda', -\lambda''$ etc. exhiberent observationum errores per radices quadratas e ponderibus multiplicatos, praeceptaque art. 16 ad eandem formulam $\sqrt{\frac{M}{\pi}}$ perducerent, iam errorem medium talium observationum, quibus pondus $= 1$ tribuitur, denotantem. Sed manifesto calculus exactus requireret, ut loco quantitatum $\lambda, \lambda', \lambda''$ etc. valores functionum v, v', v'' etc. e valoribus veris ipsarum x, y, z etc. prodeuntes adhiberentur, i. e loco ipsius M, valor functionis Ω valoribus veris ipsarum x, y, z etc. respondens. Qui quamquam assignari nequeat, tamen certi sumus, eum esse maiorem quam M (quippe qui est minimus possibilis), excipiendo casum infinite parum probabilem, ubi incognitarum valores maxime plausibiles exacte cum veris quadrant. In genere itaque affirmare possumus, praxin vulgarem errorem medium iusto minorem producere, sive observationibus praecisionem nimis magnam tribuere. Videamus iam, quid doceat theoria rigorosa.

38.

Ante omnia investigare oportet, quonam modo M ab observationum erroribus veris pendeat. Denotemus hos, ut in art. 28, per e, e', e'' etc., statuamusque ad maiorem simplicitatem

$$e\sqrt{p} = \varepsilon, \quad e'\sqrt{p'} = \varepsilon', \quad e''\sqrt{p''} = \varepsilon'' \text{ etc., nec non}$$
$$m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''} \text{ etc.} = \mu$$

Porro sint valores veri ipsarum x, y, z etc., resp. $A - x^0$, $B - y^0$, $C - z^0$ etc., quibus respondeant valores ipsarum ξ, η, ζ etc. hi $-\xi^0$, $-\eta^0$, $-\zeta^0$ etc. Manifesto iisdem respondebunt valores ipsarum v, v', v'' etc. hi $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc., ita ut habeatur

$$\xi^0 = a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \text{etc.}$$
$$\eta^0 = b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \text{etc.}$$
$$\zeta^0 = c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \text{etc.}$$

etc. nec non

$$x^0 = \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \text{etc.}$$
$$y^0 = \beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \beta''\varepsilon'' + \text{etc.}$$
$$z^0 = \gamma\varepsilon + \gamma'\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'' + \text{etc.}$$

Denique statuemus

$$\Omega^0 = \varepsilon\varepsilon + \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon''\varepsilon'' + \text{etc.}$$

ita ut sit Ω^0 aequalis valori functionis Ω, valoribus veris ipsarum x, y, z etc. respondenti. Hinc quum habeatur indefinite

$$\Omega = M + (x - A)\xi + (y - B)\eta + (z - C)\zeta + \text{etc.}$$

erit etiam

$$M = \Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.}$$

Hinc manifestum est, M, evolutione facta esse functionem homogeneam secundi ordinis errorum e, e', e'' etc., quae, pro diversis errorum valoribus maior minorve evadere poterit. Sed quatenus errorum magnitudo nobis incognita manet, functionem hanc indefinite considerare, imprimisque secundum principia calculi probabilitatis eius valorem medium assignare conveniet. Quem inveniemus, si loco quadratorum ee, $e'e'$, $e''e''$ etc. resp. scribimus mm, $m'm'$, $m''m''$ etc., producta vero ee', ee'', $e'e''$ etc. omnino omittimus, vel quod idem est, si loco cuiusvis quadrati $\varepsilon\varepsilon$, $\varepsilon'\varepsilon'$, $\varepsilon''\varepsilon''$ etc. scribimus $\mu\mu$, productis $\varepsilon\varepsilon'$, $\varepsilon\varepsilon''$, $\varepsilon'\varepsilon''$ etc. prorsus neglectis. Hoc modo e termino Ω^0 manifesto provenit $\pi\mu\mu$; terminus $-x^0\xi^0$ producet

$$-(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\mu\mu = -\mu\mu$$

et similiter singulae partes reliquae praebebunt. $-\mu\mu$, ita ut valor medius totalis fiat $= (\pi - \rho)\mu\mu$, denotante π multitudinem observationum, ρ multitudinem incognitarum. Valor verus quidem ipsius M, prout fors errores obtulit, maior minorve medio fieri potest, sed discrepantia eo minoris momenti erit, quo maior fuerit observationum multitudo, ita ut pro valore approximato ipsius μ accipere liceat

$$\sqrt{\frac{M}{\pi - \rho}}$$

Valor itaque ipsius μ, ex praxi erronea, de qua in art. praec. loquuti sumus, prodiens, augeri debet in ratione quantitatis $\sqrt{(\pi - \rho)}$ ad $\sqrt{\pi}$.

39.

Quo clarius eluceat, quanto iure valorem fortuitum ipsius M medio aequiparare liceat, adhuc investigare oportet errorem medium metuendum, dum statuimus $\frac{M}{\pi - \rho} = \mu\mu$. Iste error medius aequalis est radici quadratae e valore medio quantitatis

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.} - (\pi - \rho)\mu\mu}{\pi - \rho}\right)^2$$

quam ita exhibebimus

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.}}{\pi - \rho}\right)^2 - \frac{2\mu\mu}{\pi - \rho}(\Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.} - (\pi - \rho)\mu\mu) - \mu^4$$

et quum manifesto valor medius termini secundi fiat $= 0$, res in eo vertitur, ut indagemus valorem medium functionis

$$\Psi = (\Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.})^2$$

quo invento et per N designato, error medius quaesitus erit

$$= \sqrt{\left(\frac{N}{(\pi - \rho)^2} - \mu^4\right)}$$

Expressio Ψ evoluta manifesto est functio homogenea sive errorum e, e', e'' etc., sive quantitatum $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ etc., eiusque valor medius invenietur, si

1° pro biquadratis e^4, e'^4, e''^4 etc. substituuntur eorum valores medii

2° pro singulis productis e binis quadratis ut $ee'e'$, $ee'e''$, $e'e'e''$ etc. producta ex ipsorum valoribus mediis, puta $mmm'm'$, $mmm''m''$, $m'm'm''m''$ etc.

3° partes vero reliquae, quae implicabunt vel factorem talem e^3e', vel talem $eee'e''$, omnino omittuntur. Valores medios biquadratorum e^4, e'^4, e''^4 etc. ipsis biquadratis m^4, m'^4, m''^4 etc. proportionales supponemus (vid. art. 16), ita ut illi sint ad haec ut ν^4 ad μ^4, adeoque ν^4 denotet valorem medium biquadratorum observationum talium quarum pondus $= 1$. Hinc praecepta praecedentia ita quoque exprimi poterunt: Loco singulorum biquadratorum ε^4, ε'^4, ε''^4 etc. scribendum erit ν^4, loco singulorum productorum e binis quadratis ut $\varepsilon\varepsilon\varepsilon'\varepsilon'$, $\varepsilon\varepsilon\varepsilon''\varepsilon''$, $\varepsilon'\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''$ etc., scribendum erit μ^4, omnesque reliqui termini, qui implicabunt factores tales ut $\varepsilon^3\varepsilon'$, vel $\varepsilon\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''$, vel $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''$ erunt supprimendi.

His probe intellectis facile patebit

I. Valorem medium quadrati $\Omega^0\Omega^0$ esse $\pi\nu^4 + (\pi\pi - \pi)\mu^4$

II. Valor medius producti $\varepsilon\varepsilon x^0\xi^0$ fit $= \alpha\alpha\nu^4 + (\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.})\mu^4$, sive quoniam $\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.} = 1$,

$$= \alpha\alpha(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$$

Et quum perinde valor medius producti $\varepsilon'\varepsilon' x^0\xi^0$ fiat $= \alpha'\alpha'(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$, valor medius producti $\varepsilon''\varepsilon'' x^0\xi^0$ autem $= \alpha''\alpha''(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$ et sic porro, patet, valorem medium producti $(\varepsilon\varepsilon + \varepsilon'\varepsilon' + \varepsilon''\varepsilon'' + \text{etc.})x^0\xi^0$ sive $\Omega^0 x^0\xi^0$ esse

$$= \nu^4 - \mu^4 + \pi\mu^4$$

Eundem valorem medium habebunt producta $\Omega^0 y^0\eta^0$, $\Omega^0 z^0\zeta^0$ etc. Quapropter valor medius producti $\Omega^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$ fit

$$= \rho\nu^4 + \rho(\pi - 1)\mu^4$$

III. Ne evolutiones reliquae nimis prolixae evadant, idonea denotatio introducenda erit. Utemur itaque characteristica Σ sensu aliquantum latiore quam supra passim factum est, ita ut denotet aggregatum termini, cui praefixa est, cum omnibus similibus sed non identicis inde per omnes observationum permutationes oriundis. Hoc pacto e.g. habemus $x^0 = \Sigma\alpha\varepsilon$, $x^0x^0 = \Sigma\alpha\alpha\varepsilon\varepsilon + 2\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$. Colligendo itaque valorem medium producti $x^0x^0\xi^0\xi^0$ per partes, habemus primo valorem medium producti $\alpha\alpha\varepsilon\varepsilon\xi^0\xi^0$

$$= \alpha\alpha\alpha\alpha\nu^4 + \alpha\alpha(\alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' + \text{etc.})\mu^4$$
$$= \alpha\alpha\alpha\alpha(\nu^4 - \mu^4) + \alpha\alpha\mu^4\Sigma\alpha\alpha$$

Perinde valor medius producti $\alpha'\alpha'\varepsilon'\varepsilon'\xi^0\xi^0$ fit $= \alpha'\alpha'\alpha'\alpha'(\nu^4 - \mu^4) + \alpha'\alpha'\mu^4\Sigma\alpha\alpha$ et sic porro, adeoque valor medius producti $\xi^0\xi^0\Sigma\alpha\alpha\varepsilon\varepsilon$

$$= (\nu^4 - \mu^4)\Sigma\alpha\alpha\alpha\alpha + \mu^4\Sigma\alpha\alpha.\Sigma\alpha\alpha$$

Porro valor medius producti $\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'\xi^0\xi^0$ fit $= 2\alpha\alpha'\alpha\alpha'\mu^4$, valor medius producti $\alpha\alpha''\varepsilon\varepsilon''\xi^0\xi^0$ perinde $= 2\alpha\alpha''\alpha\alpha''\mu^4$ etc., unde facile concluditur, valorem medium producti $\xi^0\xi^0\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$ fieri

$$= 2\mu^4\Sigma\alpha\alpha\alpha\alpha' = \mu^4((\Sigma\alpha\alpha)^2 - \Sigma\alpha\alpha\alpha\alpha) = \mu^4(1 - \Sigma\alpha\alpha\alpha\alpha)$$

His collectis habemus valorem medium producti $x^0x^0\xi^0\xi^0$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma\alpha\alpha\alpha\alpha + 2\mu^4 + \mu^4\Sigma\alpha\alpha.\Sigma\alpha\alpha$$

IV. Haud absimili modo invenitur valor medius producti $x^0y^0\xi^0\eta^0$

$$= \nu^4\Sigma ab\alpha\beta + \mu^4\Sigma\alpha\alpha b'\beta' + \mu^4\Sigma ab\alpha'\beta' + \mu^4\Sigma\alpha\beta b'\alpha'$$

Sed habetur

$$\Sigma\alpha\alpha b'\beta' = \Sigma\alpha\alpha.\Sigma b\beta - \Sigma\alpha\alpha b\beta$$
$$\Sigma ab\alpha'\beta' = \Sigma ab.\Sigma\alpha\beta - \Sigma ab\alpha\beta$$
$$\Sigma\alpha\beta b'\alpha' = \Sigma\alpha\beta.\Sigma b\alpha - \Sigma\alpha\beta ba$$

unde valor ille medius fit, propter $\Sigma\alpha\alpha = 1$, $\Sigma b\beta = 1$, $\Sigma\alpha\beta = 0$, $\Sigma b\alpha = 0$,

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma ab\alpha\beta + \mu^4(1 + \Sigma ab.\Sigma\alpha\beta)$$

V. Quum prorsus eodem modo valor medius producti $x^0z^0\xi^0\zeta^0$ fiat

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma ac\alpha\gamma + \mu^4(1 + \Sigma ac.\Sigma\alpha\gamma)$$

et sic porro, additio valorem medium producti $x^0\xi^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$ suppeditat

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(aa(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})) + (\rho + 1)\mu^4$$
$$+ \mu^4(\Sigma aa.\Sigma\alpha\alpha + \Sigma ab.\Sigma\alpha\beta + \Sigma ac.\Sigma\alpha\gamma + \text{etc.})$$
$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(aa(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})) + (\rho + 2)\mu^4$$

VI. Prorsus eodem modo valor medius producti $y^0\eta^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$ eruitur

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(b\mathfrak{b}(a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.})) + (\rho + 2)\mu^4$$

dein valor medius producti $z^0\zeta^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma(c\gamma(a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.})) + (\rho + 2)\mu^4$$

et sic porro. Hinc per additionem prodit valor medius quadrati $(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})^2$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma((a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.})^2) + (\rho\rho + 2\rho)\mu^4$$

VII. Omnibus tandem rite collectis eruitur

$$N = (\pi - 2\rho)\nu^4 + (\pi\pi - \pi - 2\pi\rho + 4\rho + \rho\rho)\mu^4 + (\nu^4 - 3\mu^4)\Sigma((a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.})^2)$$
$$= (\pi - \rho)(\nu^4 - \mu^4) + (\pi - \rho)^2\mu^4 - (\nu^4 - 3\mu^4)[\rho - \Sigma((a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.})^2)]$$

Error itaque medius in determinatione ipsius $\mu\mu$ per formulam

$$\mu\mu = \frac{M}{\pi - \rho}$$

metuendus erit

$$= \sqrt{\{\tfrac{\nu^4 - \mu^4}{\pi - \rho} - \tfrac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi - \rho)^2} \cdot [\rho - \Sigma((a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.})^2)]\}}$$

40.

Quantitas $\Sigma((a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.})^2)$, quae in expressionem modo inventam ingreditur, generaliter quidem ad formam simpliciorem reduci nequit: nihilominus duo limites assignari possunt, inter quos ipsius valor necessario iacere debet. *Primo* scilicet e relationibus supra evolutis facile demonstratur, esse

$$(a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a\alpha' + b\mathfrak{b}' + c\gamma' + \text{etc.})^2 + (a\alpha'' + b\mathfrak{b}'' + c\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.} = a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.}$$

unde concludimus, $a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.}$ esse quantitatem positivam unitate minorem (saltem non maiorem). Idem valet de quantitate $a'\alpha' + b'\mathfrak{b}' + c'\gamma' + \text{etc.}$, quippe cui aggregatum

$$(a'\alpha + b'\mathfrak{b} + c'\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\mathfrak{b}' + c'\gamma' + \text{etc.})^2 + (a'\alpha'' + b'\mathfrak{b}'' + c'\gamma'' \text{ etc.})^2 + \text{etc.}$$

aequale invenitur; ac perinde $a''\alpha'' + b''\mathfrak{b}'' + c''\gamma'' + \text{etc.}$ unitate minor erit, et sic

porro. Hinc $\Sigma((a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.})^2)$ necessario est minor quam π. *Secundo* habetur $\Sigma(a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.}) = \rho$, quoniam fit $\Sigma a\alpha = 1$, $\Sigma b\mathfrak{b} = 1$, $\Sigma c\gamma = 1$ etc.; unde facile deducitur, summam quadratorum $\Sigma((a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.})^2)$ esse maiorem quam $\frac{\rho\rho}{\pi}$, vel saltem non minorem. Hinc terminus

$$\tfrac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi - \rho)^2} \cdot [\rho - \Sigma((a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.})^2)]$$

necessario iacet inter limites $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \rho}$ et $\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \rho} \cdot \frac{\rho}{\pi}$ vel, si latiores praeferimus, inter hos $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \rho}$ et $+\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \rho}$, et proin erroris medii in valore ipsius $\mu\mu = \frac{M}{\pi - \rho}$ metuendi quadratum inter limites $-\frac{2\nu^4 - 4\mu^4}{\pi - \rho}$ et $\frac{2\mu^4}{\pi - \rho}$, ita ut praecisionem quantamvis assequi liceat, si modo observationum multitudo fuerit satis magna.

Valde memorabile est, in hypothesi ea (art. 9, III), cui theoria quadratorum minimorum olim superstructa fuerat, illum terminum omnino excidere, et sicuti, ad eruendum valorem approximatum erroris medii observationum μ, in omnibus casibus aggregatum $\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + \lambda''\lambda'' + \text{etc.} = M$ ita tractare oportet, ac si esset aggregatum $\pi - \rho$ errorum fortuitorum, ita in illa hypothesi etiam praecisionem ipsam huius determinationis aequalem fieri ei, quam determinationi ex $\pi - \rho$ erroribus veris tribuendam esse in art. 15 invenimus.

SUPPLEMENTUM

THEORIAE

COMBINATIONIS OBSERVATIONUM

ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM EXHIBITUM 1826. SEPT. 16.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VI.
Gottingae MDCCCXXVIII.

SUPPLEMENTUM
THEORIAE
COMBINATIONIS OBSERVATIONUM
ERRORIBUS MINIMIS OBNOXIAE.

1.

In tractatione theoriae combinationis observationum Volumini V Commentationum Recentiorum inserta supposuimus, quantitates eas, quarum valores per observationes praecisione absoluta non gaudentes propositi sunt, a certis elementis incognitis ita pendere, ut in forma functionum datarum horum elementorum exhibitae sint, reique cardinem in eo verti, ut haec elementa quam exactissime ex observationibus deriventur.

In plerisque quidem casibus suppositio ista immediate locum habet. In aliis vero casibus problematis conditio paullo aliter se offert, ita ut primo aspectu dubium videatur, quonam pacto ad formam requisitam reduci possit. Haud raro scilicet accidit, ut quantitates eae, ad quas referuntur observationes, nondum exhibitae sint in forma functionum certorum elementorum, neque etiam ad talem formam reducibiles videantur, saltem non commode vel sine ambagibus: dum, ex altera parte, rei indoles quasdam conditiones suppeditat, quibus valores veri quantitatum observatarum exacte et necessario satisfacere debent.

Attamen, re propius considerata, facile perspicitur, hunc casum ab altero revera essentialiter haud differre, sed ad eundem reduci posse. Designando scilicet multitudinem quantitatum observatarum per π, multitudinem aequationum conditionalium autem per σ, eligendoque e prioribus $\pi - \sigma$ ad lubitum, nihil impedit, quominus has ipsas pro elementis accipiamus, reliquasque, quarum mul-

titudo erit σ, adiumento aequationum conditionalium tamquam functiones illarum consideremus, quo pacto res ad suppositionem nostram reducta erit.

Verum enim vero etiamsi haec via in permultis casibus satis commode ad finem propositum perducat, tamen negari non potest, eam minus genuinam, operaeque adeo pretium esse, problema in ista altera forma seorsim tractare, tantoque magis, quod solutionem perelegantem admittit. Quin adeo, quum haec solutio nova ad calculos expeditiores perducat, quam solutio problematis in statu priore, quoties σ est minor quam $\frac{1}{2}\pi$, sive quod idem est, quoties multitudo elementorum in commentatione priore per ρ denotata maior est, quam $\frac{1}{2}\pi$, solutionem novam, quam in commentatione praesenti explicabimus, in tali casu praeferre conveniet priori, siquidem aequationes conditionales e problematis indole absque ambagibus depromere licet.

2.

Designemus per v, v', v'' etc. quantitates, multitudine π, quarum valores per observationem innotescunt, pendeatque quantitas incognita ab illis tali modo, ut per functionem datam illarum, puta u, exhibeatur: sint porro l, l', l'' etc. valores quotientium differentialium

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v'}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v''} \text{ etc.}$$

valoribus veris quantitatum v, v', v'' etc. respondentes. Quemadmodum igitur per substitutionem horum valorum verorum in functione u huius valor verus prodit, ita, si pro v, v', v'' etc. valores erroribus e, e', e'' etc. resp. a veris discrepantes substituuntur, obtinebitur valor erroneus incognitae, cuius error statui potest

$$= le + l'e' + l''e'' + \text{ etc.}$$

siquidem, quod semper supponemus, errores e, e', e'' etc. tam exigui sunt, ut (pro functione u non lineari) quadrata et producta negligere liceat. Et quamquam magnitudo errorum e, e', e'' etc. incerta maneat, tamen incertitudinem tali incognitae determinationi inhaerentem generaliter aestimare licet, et quidem per errorem medium in tali determinatione metuendum, qui per principia commentationis prioris fit

$$= \sqrt{(llmm + l'l'm'm' + l''l''m''m'' + \text{ etc.})}$$

denotantibus m, m', m'' etc. errores medios observationum, aut si singulae observationes aequali incertitudini obnoxiae sunt,

$$= m\sqrt{(ll + l'l' + l''l'' + \text{ etc.})}$$

Manifesto in hoc calculo pro l, l', l'' etc. aequali iure etiam eos valores quotientium differentialium adoptare licebit, qui valoribus observatis quantitatum v, v', v'' etc. respondent.

3.

Quoties quantitates v, v', v'' etc. penitus inter se sunt independentes, incognita unico tantum modo per illas determinari poterit: quamobrem tunc illam incertitudinem nullo modo nec evitare neque diminuere licet, et circa valorem incognitae ex observationibus deducendum nihil arbitrio relinquitur.

At longe secus se habet res, quoties inter quantitates v, v', v'' etc. mutua dependentia intercedit, quam per σ aequationes conditionales

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \text{ etc.}$$

exprimi supponemus, denotantibus X, Y, Z etc. functiones datas indeterminatarum v, v', v'' etc. In hoc casu incognitam nostram infinitis modis diversis per combinationes quantitatum v, v', v'' etc. determinare licet, quum manifesto loco functionis u adoptari possit quaecunque alia U ita comparata, ut $U - u$ indefinite evanescat, statuendo $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc.

In applicatione ad casum determinatum nulla quidem hinc prodiret differentia respectu valoris incognitae, si observationes absoluta praecisione gauderent: sed quatenus hae erroribus obnoxiae manent, manifesto in genere alia combinatio alium valorem incognitae afferet. Puta, loco erroris

$$le + l'e + l''e'' + \text{ etc.}$$

quem functio u commiserat, iam habebimus

$$Le + L'e' + L''e'' + \text{ etc.}$$

si functionem U adoptamus, atque valores quotientium differentialium $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v}, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v'}, \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}v''}$ etc. resp. per L, L', L'' etc. denotamus. Et quamquam errores ipsos assignare nequeamus, tamen errores medios in diversis observationum combinationibus me-

tuendos inter se comparare licebit: optimaque combinatio ea erit, in qua hic error medius quam minimus evadit. Qui quum fiat

$$= \sqrt{(LLmm + L'L'm'm' + L''L''m''m'' + \text{etc.})}$$

in id erit incumbendum, ut aggregatum $LLmm + L'L'm'm' + L''L''m''m'' + \text{etc.}$ nanciscatur valorem minimum.

4.

Quum varietas infinita functionum U, quae secundum conditionem in art. praec. enunciatam ipsius u vice fungi possunt, eatenus tantum hic consideranda veniat, quatenus diversa systemata valorum coëfficientium L, L', L'' etc. inde sequuntur, indagare oportebit ante omnia nexum, qui inter cuncta systemata admissibilia locum habere debet. Designemus valores determinatos quotientium differentialium partialium

$$\begin{array}{lll} \frac{dX}{dv}, & \frac{dX}{dv'}, & \frac{dX}{dv''} \text{ etc.} \\ \frac{dY}{dv}, & \frac{dY}{dv'}, & \frac{dY}{dv''} \text{ etc.} \\ \frac{dZ}{dv}, & \frac{dZ}{dv'}, & \frac{dZ}{dv''} \text{ etc. etc.} \end{array}$$

quos obtinent, si ipsis v, v', v'' etc. valores veri tribuuntur, resp. per

$$\begin{array}{lll} a, & a', & a'' \text{ etc.} \\ b, & b', & b'' \text{ etc.} \\ c, & c', & c'' \text{ etc. etc.} \end{array}$$

patetque, si ipsis v, v', v'' etc. accedere concipiantur talia incrementa dv, dv', dv'' etc., per quae X, Y, Z etc. non mutentur, adeoque singulae maneant $= 0$, i. e. satisfacientia aequationibus

$$\begin{aligned} 0 &= a\,dv + a'\,dv' + a''\,dv'' + \text{etc.} \\ 0 &= b\,dv + b'\,dv' + b''\,dv'' + \text{etc.} \\ 0 &= c\,dv + c'\,dv' + c''\,dv'' + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

etiam $u - U$ non mutari debere, adeoque fieri

$$0 = (l - L)\,dv + (l' - L')\,dv' + (l'' - L'')\,dv'' + \text{etc.}$$

Hinc facile concluditur, coëfficientes L, L', L'' etc. contentos esse debere sub formulis talibus

$$\begin{aligned} L &= l + ax + by + cz + \text{etc.} \\ L' &= l' + a'x + b'y + c'z + \text{etc.} \\ L'' &= l'' + a''x + b''y + c''z + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc., denotantibus x, y, z etc. multiplicatores determinatos. Vice versa patet, si systema multiplicatorum determinatorum x, y, z etc. ad lubitum assumatur, semper assignari posse functionem U talem, cui valores ipsorum L, L', L'' etc. his aequationibus conformes respondeant, et quae pro conditione in art. praec. enunciata ipsius u vice fungi possit: quin adeo hoc infinitis modis diversis effici posse. Modus simplicissimus erit statuere $U = u + xX + yY + zZ + \text{etc.}$; generalius statuere licet $U = u + xX + yY + zZ + \text{etc.} + u'$, denotante u' talem functionem indeterminatarum v, v', v'' etc., quae semper evanescit pro $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc., et cuius valor in casu determinato de quo agitur fit maximus vel minimus. Sed ad institutum nostrum nulla hinc oritur differentia.

5.

Facile iam erit, multiplicatoribus x, y, z etc. valores tales tribuere, ut aggregatum

$$LLmm + L'L'm'm' + L''L''m''m'' + \text{etc.}$$

assequatur valorem minimum. Manifesto ad hunc finem haud opus est cognitione errorum mediorum m, m', m'' etc. absoluta, sed sufficit ratio, quam inter se tenent. Introducemus itaque ipsorum loco pondera observationum p, p', p'' etc., i. e. numeros quadratis $mm, m'm', m''m''$ etc. reciproce proportionales, pondere alicuius observationis ad lubitum pro unitate accepto. Quantitates x, y, z etc. itaque sic determinari debebunt, ut polynomium indefinitum

$$\frac{(ax + by + cz + \text{etc.} + l)^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l')^2}{p'} + \frac{(a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'')^2}{p''} + \text{etc.}$$

nanciscatur valorem minimum, quod fieri supponemus per valores *determinatos* x^0, y^0, z^0 etc.

Introducendo denotationes sequentes

$$\begin{aligned}
&\frac{aa}{p}+\frac{a'a'}{p'}+\frac{a''a''}{p''}+\text{etc.} = [aa]\\
&\frac{ab}{p}+\frac{a'b'}{p'}+\frac{a''b''}{p''}+\text{etc.} = [ab]\\
&\frac{ac}{p}+\frac{a'c'}{p'}+\frac{a''c''}{p''}+\text{etc.} = [ac]\\
&\frac{bb}{p}+\frac{b'b'}{p'}+\frac{b''b''}{p''}+\text{etc.} = [bb]\\
&\frac{bc}{p}+\frac{b'c'}{p'}+\frac{b''c''}{p''}+\text{etc.} = [bc]\\
&\frac{cc}{p}+\frac{c'c'}{p'}+\frac{c''c''}{p''}+\text{etc.} = [cc]\\
&\text{etc. nec non}\\
&\frac{al}{p}+\frac{a'l'}{p'}+\frac{a''l''}{p''}+\text{etc.} = [al]\\
&\frac{bl}{p}+\frac{b'l'}{p'}+\frac{b''l''}{p''}+\text{etc.} = [bl]\\
&\frac{cl}{p}+\frac{c'l'}{p'}+\frac{c''l''}{p''}+\text{etc.} = [cl]\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

manifesto conditio minimi requirit, ut fiat

$$\left.\begin{aligned}
0 &= [aa]x^0+[ab]y^0+[ac]z^0+\text{etc.}+[al]\\
0 &= [ab]x^0+[bb]y^0+[bc]z^0+\text{etc.}+[bl]\\
0 &= [ac]x^0+[bc]y^0+[cc]z^0+\text{etc.}+[cl]\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Postquam quantitates x^0, y^0, z^0 etc. per eliminationem hinc derivatae sunt, statuetur

$$\left.\begin{aligned}
ax^0+by^0+cz^0+\text{etc.}+l &= L\\
a'x^0+b'y^0+c'z^0+\text{etc.}+l' &= L'\\
a''x^0+b''y^0+c''z^0+\text{etc.}+l'' &= L''\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

His ita factis, functio quantitatum v, v', v'' etc. ea ad determinationem incognitae nostrae maxime idonea minimaeque incertitudini obnoxia erit, cuius quotientes differentiales partiales in casu determinato de quo agitur habent valores L, L', L'' etc. resp., pondusque huius determinationis, quod per P denotabimus, erit

$$= \frac{1}{\frac{LL}{p}+\frac{L'L'}{p'}+\frac{L''L''}{p''}+\text{etc.}} \quad (3)$$

sive $\frac{1}{P}$ erit valor polynomii supra allati pro eo systemate valorum quantitatum x, y, z etc., per quod aequationibus (1) satisfit.

6.

In art. praec. eam functionem U dignoscere docuimus, quae determinationi maxime idoneae incognitae nostrae inservit: videamus iam, quemnam *valorem* incognita hoc modo assequatur. Designetur hic valor per K, qui itaque oritur, si in U valores observati quantitatum v, v', v'' etc. substituuntur; per eandem substitutionem obtineat functio u valorem k; denique sit $\varkappa$ valor verus incognitae, qui proin e valoribus veris quantitatum v, v', v'' etc. proditurus esset, si hos vel in U vel in u substituere possemus. Hinc itaque erit

$$\begin{aligned}
k &= \varkappa+le+l'e'+l''e''+\text{etc.}\\
K &= \varkappa+Le+L'e'+L''e''+\text{etc.}
\end{aligned}$$

adeoque

$$K = k(L-l)e+(L'-l')e'+(L''-l'')e''+\text{etc.}$$

Substituendo in hac aequatione pro $L-l$, $L'-l'$, $L''-l''$ etc. valores ex (2), statuendoque

$$\left.\begin{aligned}
ae+a'e'+a''e''+\text{etc.} &= \mathfrak{A}\\
be+b'e'+b''e''+\text{etc.} &= \mathfrak{B}\\
ce+c'e'+c''e''+\text{etc.} &= \mathfrak{C}
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

etc., habebimus

$$K = k+\mathfrak{A}x^0+\mathfrak{B}y^0+\mathfrak{C}z^0+\text{etc.} \quad (5)$$

Valores quantitatum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. per formulas (4) quidem calculare non possumus, quum errores e, e', e'' etc. maneant incogniti; at sponte manifestum est, illos nihil aliud esse, nisi valores functionum X, Y, Z etc., qui prodeunt, si pro v, v', v'' etc. valores observati substituuntur. Hoc modo systema aequationum (1), (3), (5) completam problematis nostri solutionem exhibet, quum ea, quae in fine art. 2. de computo quantitatum l, l', l'' etc., valoribus observatis quantita-

tum v, v', v'' etc. superstruendo monuimus, manifesto aequali iure ad computum quantitatum a, a', a'' etc. b, b', b'' etc. etc. extendere liceat.

7.

Loco formulae (3), pondus determinationis maxime plausibilis exprimentis, plures aliae exhiberi possunt, quas evolvere operae pretium erit.

Primo observamus, si aequationes (2) resp. per $\frac{a}{p}, \frac{a'}{p'}, \frac{a''}{p''}$ etc. multiplicentur et addantur, prodire

$$[aa]x^0+[ab]y^0+[ac]z^0+\text{etc.} = \frac{aL}{p}+\frac{a'L'}{p'}+\frac{a''L''}{p''}+\text{etc.}$$

Pars ad laevam fit $= 0$, partem ad dextram iuxta analogiam per $[aL]$ denotamus: habemus itaque

$$[aL] = 0, \text{ et prorsus simili modo } [bL] = 0, \ [cL] = 0 \text{ etc.}$$

Multiplicando porro aequationes (2) deinceps per $\frac{L}{p}, \frac{L'}{p'}, \frac{L''}{p''}$ etc., et addendo, invenimus

$$\frac{lL}{p}+\frac{l'L'}{p'}+\frac{l''L''}{p''}+\text{etc.} = \frac{LL}{p}+\frac{L'L'}{p'}+\frac{L''L''}{p''}+\text{etc.}$$

unde obtinemus expressionem *secundam* pro pondere,

$$P = \frac{1}{\frac{lL}{p}+\frac{l'L'}{p'}+\frac{l''L''}{p''}+\text{etc.}}$$

Denique multiplicando aequationes (2) deinceps per $\frac{l}{p}, \frac{l'}{p'}, \frac{l''}{p''}$ etc., et addendo, pervenimus ad expressionem *tertiam* ponderis

$$P = \frac{1}{[al]x^0+[bl]y^0+[cl]z^0+\text{etc.}+[ll]}$$

si ad instar reliquarum denotationum statuimus

$$\frac{ll}{p}+\frac{l'l'}{p'}+\frac{l''l''}{p''}+\text{etc.} = [ll]$$

Hinc adiumento aequationum (1) facile fit transitus ad *expressionem quartam*, quam ita exhibemus:

$$\frac{1}{P} = [ll] - [aa]x^0x^0 - [bb]y^0y^0 - [cc]z^0z^0 - \text{etc.}$$
$$- 2[ab]x^0y^0 - 2[ac]x^0z^0 - 2[bc]y^0z^0 - \text{etc.}$$

8.

Solutio generalis, quam hactenus explicavimus, ei potissimum casui adaptata est, ubi *una* incognita a quantitatibus observatis pendens determinanda est. Quoties vero plures incognitae ab iisdem observationibus pendentes valores maxime plausibiles exspectant, vel quoties adhuc incertum est, quasnam potissimum incognitas ex observationibus derivare oporteat, has alia ratione praeparare conveniet, cuius evolutionem iam aggredimur.

Considerabimus quantitates x, y, z etc. tamquam indeterminatas, statuemus

$$\left.\begin{aligned}[aa]x+[ab]y+[ac]z+\text{etc.} &= \xi\\ [ab]x+[bb]y+[bc]z+\text{etc.} &= \eta\\ [ac]x+[bc]y+[cc]z+\text{etc.} &= \zeta\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

etc., supponemusque, per eliminationem hinc sequi

$$\left.\begin{aligned}[\alpha\alpha]\xi+[\alpha\vec{\sigma}]\eta+[\alpha\gamma]\zeta+\text{etc.} &= x\\ [\vec{\sigma}\alpha]\xi+[\vec{\sigma}\vec{\sigma}]\eta+[\vec{\sigma}\gamma]\zeta+\text{etc.} &= y\\ [\gamma\alpha]\xi+[\gamma\vec{\sigma}]\eta+[\gamma\gamma]\zeta+\text{etc.} &= z\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

etc.

Ante omnia hic observare oportet, coëfficientes symmetrice positos necessario aequales fieri, puta

$$[\vec{\sigma}\alpha] = [\alpha\vec{\sigma}]$$
$$[\gamma\alpha] = [\alpha\gamma]$$
$$[\gamma\vec{\sigma}] = [\vec{\sigma}\gamma]$$
etc.

quod quidem e theoria generali eliminationis in aequationibus linearibus sponte sequitur, sed etiam infra, absque illa, directe demonstrabitur.

Habebimus itaque

$$\left.\begin{aligned}x^0 &= -[\alpha\alpha].[al]-[\alpha\vec{\sigma}].[bl]-[\alpha\gamma].[cl]-\text{etc.}\\ y^0 &= -[\alpha\vec{\sigma}].[al]-[\vec{\sigma}\vec{\sigma}].[bl]-[\vec{\sigma}\gamma].[cl]-\text{etc.}\\ z^0 &= -[\alpha\gamma].[al]-[\vec{\sigma}\gamma].[bl]-[\gamma\gamma].[cl]-\text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (8)$$
etc.

unde, si statuimus

$$\left.\begin{array}{l}[\alpha\alpha]\mathfrak{A}+[\alpha\mathfrak{b}]\mathfrak{B}+[\alpha\gamma]\mathfrak{C}+\text{etc.}=A\\ [\alpha\mathfrak{b}]\mathfrak{A}+[\mathfrak{b}\mathfrak{b}]\mathfrak{B}+[\mathfrak{b}\gamma]\mathfrak{C}+\text{etc.}=B\\ [\alpha\gamma]\mathfrak{A}+[\mathfrak{b}\gamma]\mathfrak{B}+[\gamma\gamma]\mathfrak{C}+\text{etc.}=\mathfrak{C}\end{array}\right\}\quad(9)$$

etc., obtinemus

$$L=k-A[al]-B[bl]-C[cl]-\text{etc.}$$

vel si insuper statuimus

$$\left.\begin{array}{l}aA+bB+cC+\text{etc.}=p\varepsilon\\ a'A+b'B+c'C+\text{etc.}=p'\varepsilon'\\ a''A+b''B+c''C+\text{etc.}=p''\varepsilon''\end{array}\right\}\quad(10)$$

etc., erit

$$K=k-l\varepsilon-l'\varepsilon'-l''\varepsilon''-\text{etc.}\quad(11)$$

9.

Comparatio aequationum (7), (9) docet, quantitates auxiliares A, B, C etc. esse valores indeterminatarum x, y, z etc. respondentes valoribus indeterminatarum ξ, η, ζ etc. his $\xi=\mathfrak{A}$, $\eta=\mathfrak{B}$, $\zeta=\mathfrak{C}$ etc., unde patet haberi

$$\left.\begin{array}{l}[aa]A+[ab]B+[ac]C+\text{etc.}=\mathfrak{A}\\ [ab]A+[bb]B+[bc]C+\text{etc.}=\mathfrak{B}\\ [ac]A+[bc]B+[cc]C+\text{etc.}=\mathfrak{C}\end{array}\right\}\quad(12)$$

etc. Multiplicando itaque aequationes (10) resp. per $\frac{a}{p}$, $\frac{a'}{p'}$, $\frac{a''}{p''}$ etc. et addendo, obtinemus

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{A}=a\varepsilon+a'\varepsilon'+a''\varepsilon''+\text{etc.}\\ \text{et prorsus simili modo}\\ \mathfrak{B}=b\varepsilon+b'\varepsilon'+b''\varepsilon''+\text{etc.}\\ \mathfrak{C}=c\varepsilon+c'\varepsilon'+c''\varepsilon''+\text{etc.}\end{array}\right\}\quad(13)$$

etc. Iam quum $\mathfrak{A}$ sit valor functionis X, si pro v, v', v'' etc. valores observati substituuntur, facile perspicietur, si his applicentur correctiones $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. resp., functionem X hinc adepturam esse valorem 0, et perinde functiones

Y, Z etc. hinc ad valorem evanescentem reductum iri. Simili ratione ex aequatione (11) colligitur, K esse valorem functionis u ex eadem substitutione emergentem.

Applicationem correctionum $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. ad observationes, vocabimus *observationum compensationem*, manifestoque deducti sumus ad conclusionem gravissimam, puta, observationes eo quem docuimus modo compensatas omnibus aequationibus conditionalibus exacte satisfacere, atque cuilibet quantitati ab observationibus quomodocunque pendenti eum ipsum valorem conciliare, qui ex observationum non mutatarum combinatione maxime idonea emergeret. Quum itaque impossibile sit, errores ipsos e, e', e'' etc. ex aequationibus conditionalibus eruere, quippe quarum multitudo haud sufficit, saltem *errores maxime plausibiles* nacti sumus, qua denominatione quantitates ε, ε', ε'' etc. designare licebit.

10.

Quum multitudo observationum maior esse supponatur multitudine aequationum conditionalium, praeter systema correctionum maxime plausibilium $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. infinite multa alia inveniri possunt, quae aequationibus conditionalibus satisfaciant, operaeque pretium est indagare, quomodo haec ad illud se habeant. Constituant itaque $-E$, $-E'$, $-E''$ etc. tale systema a maxime plausibili diversum, habebimusque

$$\begin{array}{l}aE+a'E'+a''E''+\text{etc.}=\mathfrak{A}\\ bE+b'E'+b''E''+\text{etc.}=\mathfrak{B}\\ cE+c'E'+c''E''+\text{etc.}=\mathfrak{C}\end{array}$$

etc. Multiplicando has aequationes resp. per A, B, C etc. et addendo, obtinemus adiumento aequationum (10)

$$p\varepsilon E+p'\varepsilon'E'+p''\varepsilon''E''+\text{etc.}=A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}+\text{etc.}$$

Prorsus vero simili modo aequationes (13) suppeditant

$$p\varepsilon\varepsilon+p'\varepsilon'\varepsilon'+p''\varepsilon''\varepsilon''+\text{etc.}=A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}+\text{etc.}\quad(14)$$

E combinatione harum duarum aequationum facile deducitur

$$\begin{array}{l}pEE+p'E'E'+p''E''E''+\text{etc.}\\ =p\varepsilon\varepsilon+p'\varepsilon'\varepsilon'+p''\varepsilon''\varepsilon''+\text{etc.}+p(E-\varepsilon)^2+p'(E'-\varepsilon')^2+p''(E''-\varepsilon'')^2+\text{etc.}\end{array}$$

Aggregatum $pEE+p'E'E'+p''E''E''+$ etc. itaque necessario *maius* erit aggregato $p\varepsilon\varepsilon+p'\varepsilon'\varepsilon'+p''\varepsilon''\varepsilon''+$ etc., quod enuntiari potest tamquam

THEOREMA. *Aggregatum quadratorum correctionum, per quas observationes cum aequationibus conditionalibus conciliare licet, per pondera observationum resp. multiplicatorum, fit minimum, si correctiones maxime plausibiles adoptantur.*

Hoc est ipsum principium quadratorum minimorum, ex quo etiam aequationes (12), (10) facile immediate derivari possunt. Ceterum pro hoc aggregato minimo, quod in sequentibus per S denotabimus, aequatio (14) nobis suppeditat expressionem $A\mathfrak{A}+B\mathfrak{B}+C\mathfrak{C}+$ etc.

11.

Determinatio errorum maxime plausibilium, quum a coëfficientibus l, l', l'' etc. independens sit, manifesto praeparationem commodissimam sistit, ad quemvis usum, in quem observationes vertere placuerit. Praeterea perspicuum est, ad illud negotium haud opus esse eliminatione *indefinita* seu cognitione coëfficientium $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\vec{6}]$ etc., nihilque aliud requiri, nisi ut quantitates auxiliares A, B, C etc., quas in sequentibus *correlata* aequationum conditionalium $X=0$, $Y=0$, $Z=0$ etc. vocabimus, ex aequationibus (12) per eliminationem definitam eliciantur atque in formulis (10) substituantur.

Quamquam vero haec methodus nihil desiderandum linquat, quoties quantitatum ab observationibus pendentium valores maxime plausibiles tantummodo requiruntur, tamen res secus se habere videtur, quoties insuper pondus alicuius determinationis in votis est, quum ad hunc finem, prout hac vel illa quatuor expressionum supra traditarum uti placuerit, cognitio quantitatum L, L', L'' etc., vel saltem cognitio harum x^0, y^0, z^0 etc. necessaria videatur. Hac ratione utile erit, negotium eliminationis accuratius perscrutari, unde via facilior ad pondera quoque invenienda se nobis aperiet.

12.

Nexus quantitatum in hac disquisitione occurrentium haud parum illustratur per introductionem functionis indefinitae secundi ordinis

$$[aa]xx+2[ab]xy+2[ac]xz+\text{ etc.}+[bb]yy+2[bc]yz+\text{ etc.}+[cc]zz+\text{ etc.}$$

quam per T denotabimus. Primo statim obvium est, hanc functionem fieri

$$\frac{(ax+by+cz+\text{ etc.})^2}{p}+\frac{(a'x+b'y+c'z+\text{ etc.})^2}{p'}+\frac{(a''x+b''y+c''z+\text{ etc.})^2}{p''}+\text{ etc.} \qquad (15)$$

Porro patet, esse

$$T=x\xi+y\eta+z\zeta+\text{ etc.} \qquad (16)$$

et si hic denuo x, y, z etc. adiumento aequationum (7) per ξ, η, ζ etc. exprimuntur,

$$T=[\alpha\alpha]\xi\xi+2[\alpha\vec{6}]\xi\eta+2[\alpha\gamma]\xi\zeta+\text{ etc.}+[\vec{6}\vec{6}]\eta\eta+2[\vec{6}\gamma]\eta\zeta+\text{ etc.}+[\gamma\gamma]\zeta\zeta+\text{ etc.}$$

Theoria supra evoluta bina systemata valorum determinatorum quantitatum x, y, z etc., atque ξ, η, ζ etc. continet; priori, in quo $x=x^0$, $y=y^0$, $z=z^0$ etc. $\xi=-[al]$, $\eta=-[bl]$, $\zeta=-[cl]$ etc., respondebit valor ipsius T hic

$$T=[ll]-\tfrac{1}{P}$$

quod vel per expressionem tertiam ponderis P cum aequatione (16) comparatam, vel per quartam sponte elucet; posteriori, in quo $x=A$, $y=B$, $z=C$ etc., atque $\xi=\mathfrak{A}$, $\eta=\mathfrak{B}$, $\zeta=\mathfrak{C}$ etc., respondet valor $T=S$, uti vel e formulis (10) et (15), vel ex his (14) et (16) manifestum est.

13.

Iam negotium principale consistit in transformatione functionis T ei simili, quam in Theoria Motus Corporum Coelestium art. 182 atque fusius in Disquisitione de elementis ellipticis Palladis exposuimus. Scilicet statuemus (17)

$$[bb,1]=[bb]-\frac{[ab]^2}{[aa]}$$
$$[bc,1]=[bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}$$
$$[bd,1]=[bd]-\frac{[ab][ad]}{[aa]}$$
etc.
$$[cc,2]=[cc]-\frac{[ac]^2}{[aa]}-\frac{[bc,1]^2}{[bb,1]}$$
$$[cd,2]=[cd]-\frac{[ac][ad]}{[aa]}-\frac{[bc,1][bd,1]}{[bb,1]}$$
etc.
$$[dd,3]=[dd]-\frac{[ad]^2}{[aa]}-\frac{[bd,1]^2}{[bb,1]}-\frac{[cd,2]^2}{[cc,2]}$$

etc. etc. Dein statuendo*)

$$\begin{aligned}[bb,1]y+[bc,1]z+[bd,1]w+\text{ etc.} &= \eta'\\ [cc,2]z+[cd,2]w+\text{ etc.} &= \zeta''\\ [dd,3]w+\text{ etc.} &= \varphi'''\\ &\text{etc., erit}\end{aligned}$$

$$T=\frac{\xi\xi}{[aa]}+\frac{\eta'\eta'}{[bb,1]}+\frac{\zeta''\zeta''}{[cc,2]}+\frac{[\varphi'''\varphi''']}{[dd,3]}+\text{ etc.}$$

quantitatesque η', ζ'', φ''' etc. a ξ, η, ζ, φ etc. pendebunt per aequationes sequentes:

$$\begin{aligned}\eta' &= \eta-\frac{[ab]}{[aa]}\xi\\ \zeta'' &= \zeta-\frac{[ac]}{[aa]}\xi-\frac{[bc,1]}{[bb,1]}\eta'\\ \varphi''' &= \varphi-\frac{[ad]}{[aa]}\xi-\frac{[bd,1]}{[bb,1]}\eta'-\frac{[cd,2]}{[cc,2]}\zeta''\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Facile iam omnes formulae ad propositum nostrum necessariae hinc desumuntur. Scilicet ad determinationem correlatorum A, B, C etc. statuemus (18)

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}' &= \mathfrak{B}-\frac{[ab]}{[aa]}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{C}'' &= \mathfrak{C}-\frac{[ac]}{[aa]}\mathfrak{A}-\frac{[bc,1]}{[bb,1]}\mathfrak{B}'\\ \mathfrak{D}''' &= \mathfrak{D}-\frac{[ad]}{[aa]}\mathfrak{A}-\frac{[bd,1]}{[bb,1]}\mathfrak{B}'-\frac{[cd,2]}{[cc,2]}\mathfrak{C}''\end{aligned}$$

etc., ac dein A, B, C, D etc. eruentur per formulas sequentes, et quidem ordine inverso, incipiendo ab ultima,

$$\left.\begin{aligned}[aa]A+[ab]B+[ac]C+[ad]D+\text{ etc.} &= \mathfrak{A}\\ [bb,1]B+[bc,1]C+[bd,1]D+\text{ etc.} &= \mathfrak{B}'\\ [cc,2]C+[cd,2]D+\text{ etc.} &= \mathfrak{C}''\\ [dd,3]D+\text{ etc.} &= \mathfrak{D}'''\\ &\text{etc.}\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

*) In praecedentibus sufficere poterant ternae literae pro variis systematibus quantitatum ad tres primas aequationes conditionales referendae: hoc vero loco, ut algorithmi lex clarius eluceat, quartum adiungere visum est; et quum in serie naturali literas a, b, c; A, B, C; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sponte sequantur d, D, $\mathfrak{D}$ in serie x, y, z, deficiente alphabeto, apposuimus w, nec non in hac ξ, η, ζ hanc φ.

Pro aggregato S autem habemus formulam novam (20)

$$S=\frac{\mathfrak{A}\mathfrak{A}}{[aa]}+\frac{\mathfrak{B}'\mathfrak{B}'}{[bb,1]}+\frac{\mathfrak{C}''\mathfrak{C}''}{[cc,2]}+\frac{\mathfrak{D}'''\mathfrak{D}'''}{[dd,3]}\text{ etc.}$$

Denique si pondus P, quod determinationi maxime plausibili quantitatis per functionem u expressae tribuendum est, desideratur, faciemus (21)

$$\begin{aligned}[bl,1] &= [bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}\\ [cl,2] &= [cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}-\frac{[bc,1][bl,1]}{[bb,1]}\\ [dl,3] &= [dl]-\frac{[ad][al]}{[aa]}-\frac{[bd,1][bl,1]}{[bb,1]}-\frac{[cd,2][cl,2]}{[cc,2]}\end{aligned}$$

etc., quo facto erit (22)

$$\frac{1}{P}=[ll]-\frac{[al]^2}{[aa]}-\frac{[bl,1]^2}{[bb,1]}-\frac{[cl,2]^2}{[cc,2]}-\frac{[dl,3]^2}{[dd,3]}-\text{ etc.}$$

Formulae (17) . . . . (22), quarum simplicitas nihil desiderandum relinquere videtur, solutionem problematis nostri ab omni parte completam exhibent.

14.

Postquam problemata primaria absolvimus, adhuc quasdam quaestiones secundarias attingemus, quae huic argumento maiorem lucem affundent.

Primo inquirendum est, num eliminatio, per quam x, y, z etc. ex ξ, η, ζ etc. derivare oportet, umquam impossibilis fieri possit. Manifesto hoc eveniret, si functiones ξ, η, ζ etc. inter se haud independentes essent. Supponamus itaque aliquantisper, unam earum per reliquas iam determinari, ita ut habeatur aequatio identica

$$\alpha\xi+\vartheta\eta+\gamma\zeta+\text{ etc.} = 0$$

denotantibus α, ϑ, γ etc. numeros determinatos. Erit itaque

$$\begin{aligned}\alpha[aa]+\vartheta[ab]+\gamma[ac]+\text{ etc.} &= 0\\ \alpha[ab]+\vartheta[bb]+\gamma[bc]+\text{ etc.} &= 0\\ \alpha[ac]+\vartheta[bc]+\gamma[cc]+\text{ etc.} &= 0\end{aligned}$$

etc., unde, si statuimus

$$\begin{aligned} \alpha a + \vartheta b + \gamma c + \text{etc.} &= p\mathfrak{0} \\ \alpha a' + \vartheta b' + \gamma c' + \text{etc.} &= p'\mathfrak{0}' \\ \alpha a'' + \vartheta b'' + \gamma c'' + \text{etc.} &= p''\mathfrak{0}'' \end{aligned}$$

etc., sponte sequitur

$$\begin{aligned} a\mathfrak{0} + a'\mathfrak{0}' + a''\mathfrak{0}'' + \text{etc.} &= 0 \\ b\mathfrak{0} + b'\mathfrak{0}' + b''\mathfrak{0}'' + \text{etc.} &= 0 \\ c\mathfrak{0} + c'\mathfrak{0}' + c''\mathfrak{0}'' + \text{etc.} &= 0 \end{aligned}$$

etc., nec non

$$p\mathfrak{0}\mathfrak{0} + p'\mathfrak{0}'\mathfrak{0}' + p''\mathfrak{0}''\mathfrak{0}'' + \text{etc.} = 0$$

quae aequatio, quum omnes p, p', p'' etc. natura sua sint quantitates positivae, manifesto consistere nequit, nisi fuerit $\mathfrak{0} = 0$, $\mathfrak{0}' = 0$, $\mathfrak{0}'' = 0$ etc.

Iam consideremus valores differentialium completorum $\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}Y$, $\mathrm{d}Z$ etc., respondentes valoribus iis quantitatum v, v', v'' etc., ad quos referuntur observationes. Haec differentialia, puta

$$\begin{aligned} a\,\mathrm{d}v + a'\mathrm{d}v' + a''\mathrm{d}v'' + \text{etc.} \\ b\,\mathrm{d}v + b'\mathrm{d}v' + b''\mathrm{d}v'' + \text{etc.} \\ c\,\mathrm{d}v + c'\mathrm{d}v' + c''\mathrm{d}v'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc., per conclusionem, ad quam modo delati sumus, inter se ita dependentia erunt, ut per $\alpha, \vartheta, \gamma$ etc. resp. multiplicata aggregatum identice evanescens producant, sive quod idem est, quodvis ex ipsis (cui quidem respondet multiplicator $\alpha, \vartheta, \gamma$ etc. non evanescens) sponte evanescet, simulac omnia reliqua evanescere supponuntur. Quamobrem ex aequationibus conditionalibus $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc., una (ad minimum) pro *superflua* habenda est, quippe cui sponte satisfit, simulac reliquis satisfactum est.

Ceterum si res profundius inspicitur, apparet, hanc conclusionem per se tantum pro ambitu infinite parvo variabilitatis indeterminatarum valere. Scilicet proprie duo casus distinguendi erunt, alter, ubi una aequationum conditionalium $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. absolute et generaliter iamiam in reliquis contenta est, quod facile in quovis casu averti poterit; alter, ubi, quasi fortuito, pro iis valoribus concretis quantitatum v, v', v'' etc., ad quos observationes referuntur, una functionum X, Y, Z etc. e. g. prima X, valorem maximum vel minimum (vel generalius, stationarium) nanciscitur respectu mutationum omnium, quas quantitatibus v, v', v'' etc., salvis aequationibus $Y = 0$, $Z = 0$ etc., applicare possemus. Attamen quum in disquisitione nostra variabilitas quantitatum tantummodo intra limites tam arctos consideretur, ut ad instar infinite parvae tractari possit, hic casus secundus (qui in praxi vix umquam occurret) eundem effectum habebit, quem primus, puta una aequationum conditionalium tamquam superflua reiicienda erit, certique esse possumus, si omnes aequationes conditionales retentae eo sensu, quem hic intelligimus, ab invicem independentes sint, eliminationem necessario fore possibilem. Ceterum disquisitionem uberiorem, qua hoc argumentum, propter theoreticam subtilitatem potius quam practicam utilitatem haud indignum est, ad aliam occasionem nobis reservare debemus.

15.

In commentatione priore art. 37 sqq. methodum docuimus, observationum praecisionem a posteriori quam proxime eruendi. Scilicet si valores approximati π quantitatum per observationes aequali praecisione gaudentes innotuerunt, et cum valoribus iis comparantur, qui e valoribus maxime plausibilibus ρ elementorum, a quibus illae pendent, per calculum prodeunt: differentiarum quadrata addere, aggregatumque per $\pi - \rho$ dividere oportet, quo facto quotiens considerari poterit tamquam valor approximatus quadrati erroris medii tali observationum generi inhaerentis. Quoties observationes inaequali praecisione gaudent, haec praecepta eatenus tantum mutanda sunt, ut quadrata ante additionem per observationum pondera multiplicari debeant, errorque medius hoc modo prodiens ad observationes referatur, quarum pondus pro unitate acceptum est.

Iam in tractatione praesenti illud aggregatum manifesto quadrat cum aggregato S, differentiaque $\pi - \rho$ cum multitudine aequationum conditionalium σ, quamobrem pro errore medio observationum, quarum pondus $= 1$, habebimus expressionem $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$, quae determinatio eo maiore fide digna erit, quo maior fuerit numerus σ.

Sed operae pretium erit, hoc etiam independenter a disquisitione priore stabilire. Ad hunc finem quasdam novas denotationes introducere conveniet. Scilicet respondeant valoribus indeterminatarum ξ, η, ζ etc. his

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c, \text{ etc.}$$

valores ipsarum x, y, z etc. hi

$$x = \alpha, \quad y = \mathfrak{b}, \quad z = \gamma, \text{ etc.}$$

ita ut habeatur

$$\begin{aligned}\alpha &= a[\alpha\alpha] + b[\alpha\mathfrak{b}] + c[\alpha\gamma] + \text{etc.}\\ \mathfrak{b} &= a[\alpha\mathfrak{b}] + b[\mathfrak{b}\mathfrak{b}] + c[\mathfrak{b}\gamma] + \text{etc.}\\ \gamma &= a[\alpha\gamma] + b[\mathfrak{b}\gamma] + c[\gamma\gamma] + \text{etc.}\end{aligned}$$

etc. Perinde valoribus

$$\xi = a', \quad \eta = b', \quad \zeta = c', \text{ etc.}$$

respondere supponemus hos

$$x = \alpha', \quad y = \mathfrak{b}', \quad z = \gamma', \text{ etc.}$$

nec non his

$$\xi = a'', \quad \eta = b'', \quad \zeta = c'', \text{ etc.}$$

sequentes

$$x = \alpha'', \quad y = \mathfrak{b}'', \quad z = \gamma'', \text{ etc.}$$

et sic porro.

His positis combinatio aequationum (4), (9) suppeditat

$$\begin{aligned}A &= \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{ etc.}\\ B &= \mathfrak{b} e + \mathfrak{b}' e' + \mathfrak{b}'' e'' + \text{ etc.}\\ C &= \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{ etc.}\end{aligned}$$

etc. Quare quum habeatur $S = \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C + \text{etc.}$, patet fieri

$$\begin{aligned}S = {} & (ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.})(\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.})\\ & + (be + b'e' + b''e'' + \text{etc.})(\mathfrak{b} e + \mathfrak{b}' e' + \mathfrak{b}'' e'' + \text{etc.})\\ & + (ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.})(\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.}) + \text{etc.}\end{aligned}$$

16.

Institutionem observationum, per quas valores quantitatum v, v', v'' etc. erroribus fortuitis e, e', e'' etc. affectos obtinemus, considerare possumus tamquam

experimentum, quod quidem singulorum errorum commissorum magnitudinem docere non valet, attamen, praeceptis quae supra explicavimus adhibitis, valorem quantitatis S subministrat, qui per formulam modo inventam est functio data illorum errorum. In tali experimento errores fortuiti utique alii maiores alii minores prodire possunt; sed quo plures errores concurrunt, eo maior spes aderit, valorem quantitatis S in experimento singulari a valore suo medio parum deviaturum esse. Rei cardo itaque in eo vertitur, ut valorem medium quantitatis S stabiliamus. Per principia in commentatione priore exposita, quae hic repetere superfluum esset, invenimus hunc valorem medium

$$\begin{aligned}= {} & (a\alpha + b\mathfrak{b} + c\gamma + \text{etc.})mm + (a'\alpha' + b'\mathfrak{b}' + c'\gamma' + \text{etc.})m'm'\\ & + (a''\alpha'' + b''\mathfrak{b}'' + c''\gamma'' + \text{etc.})m''m'' + \text{etc.}\end{aligned}$$

Denotando errorem medium observationum talium, quarum pondus $= 1$, per μ, ita ut sit $\mu\mu = pmm = p'm'm' = p''m''m''$ etc., expressio modo inventa ita exhiberi potest:

$$\begin{aligned}& (\tfrac{a\alpha}{p} + \tfrac{a'\alpha'}{p'} + \tfrac{a''\alpha''}{p''} \text{ etc.})\mu\mu + (\tfrac{b\mathfrak{b}}{p} + \tfrac{b'\mathfrak{b}'}{p'} + \tfrac{b''\mathfrak{b}''}{p''} + \text{etc.})\mu\mu\\ & + (\tfrac{c\mathfrak{I}}{p} + \tfrac{c'\gamma'}{p'} + \tfrac{c''\gamma''}{p''} + \text{etc.})\mu\mu + \text{etc.}\end{aligned}$$

Sed aggregatum $\frac{a\alpha}{p} + \frac{a'\alpha'}{p'} + \frac{a''\alpha''}{p''} + \text{etc.}$ invenitur

$$= [aa].[\alpha\alpha] + [ab].[\alpha\mathfrak{b}] + [ac].[\alpha\gamma] + \text{etc.}$$

adeoque $= 1$, uti e nexu aequationum (6), (7) facile intelligitur. Perinde fit

$$\begin{aligned}\tfrac{b\mathfrak{b}}{p} + \tfrac{b'\mathfrak{b}'}{p'} + \tfrac{b''\mathfrak{b}''}{p''} + \text{etc.} &= 1\\ \tfrac{c\mathfrak{I}}{p} + \tfrac{c'\gamma'}{p'} + \tfrac{c''\gamma''}{p''} + \text{etc.} &= 1\end{aligned}$$

et sic porro.

Hinc tandem valor medius ipsius S fit $= \sigma\mu\mu$, quatenusque igitur valorem fortuitum ipsius S pro medio adoptare licet, erit $\mu = \sqrt{\frac{S}{\sigma}}$.

17.

Quanta fides huic determinationi habenda sit, diiudicare oportet per errorem medium vel in ipsa vel in ipsius quadrato metuendum: posterior erit radix

quadrata valoris medii expressionis

$$(\frac{S}{\sigma}-\mu\mu)^2$$

cuius evolutio absolvetur per ratiocinia similia iis, quae in commentatione priore artt. 39 sqq. exposita sunt. Quibus brevitatis caussa hic suppressis, formulam ipsam tantum hic apponimus. Scilicet error medius in determinatione quadrati $\mu\mu$ metuendus exprimitur per

$$\sqrt{(\tfrac{2\mu^4}{\sigma}+\tfrac{\nu^4-3\mu^4}{\sigma\sigma}.N)}$$

denotante ν^4 valorem medium biquadratorum errorum, quorum pondus $=1$, atque N aggregatum

$$(a\alpha+b\beta+c\gamma+\text{etc.})^2+(a'\alpha'+b'\beta'+c'\gamma'+\text{etc.})^2+(a''\alpha''+b''\beta''+c''\gamma''+\text{etc.})^2 \text{ etc.}$$

Hoc aggregatum in genere ad formam simpliciorem reduci nequit, sed simili modo ut in art. 40 prioris commentationis ostendi potest, eius valorem semper contineri intra limites π et $\frac{\sigma\sigma}{\pi}$. In hypothesi ea, cui theoria quadratorum minimorum ab initio superstructa erat, terminus hoc aggregatum continens, propter $\nu^4=3\mu^4$, omnino excidit, praecisioque, quae errori medio, per formulam $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ determinato, tribuenda est, eadem erit, ac si ex σ erroribus exacte cognitis secundum artt. 15, 16 prioris commentationis erutus fuisset.

18.

Ad compensationem observationum duo, ut supra vidimus, requiruntur: primum, ut aequationum conditionalium correlata, i. e. numeri A, B, C etc. aequationibus (12) satisfacientes eruantur, secundum, ut hi numeri in aequationibus (10) substituantur. Compensatio hoc modo prodiens dici poterit *perfecta* seu *completa*, ut distinguatur a compensatione *imperfecta* seu *manca*: hac scilicet denominatione designabimus, quae resultant ex iisdem quidem aequationibus (10), sed substratis valoribus quantitatum A, B, C etc., qui non satisfaciunt aequationibus (12), i. e. qui vel parti tantum satisfaciunt vel nullis. Quod vero attinet ad tales observationum mutationes, quae sub formulis (10) comprehendi nequeunt, a disquisitione praesenti, nec non a denominatione compensationum exclusae sunto. Quum, quatenus aequationes (10) locum habent, aequationes (13) ipsis (12) omnino sint aequivalentes, illud discrimen ita quoque enunciari potest: Ob-

servationes complete compensatae omnibus aequationibus conditionalibus $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, etc. satisfaciunt, incomplete compensatae vero vel nullis vel saltem non omnibus; compensatio itaque, per quam omnibus aequationibus conditionalibus satisfit, necessario est ipsa completa.

The marine insurance of this shipment has been placed with the

Versicherungsgesellschaft Hamburg in Hamburg

Direktionszweigniederlassung Berlin W 9, Potsdamerstr. 21 a

In case of any claim arising under this insurance the consignees are requested to apply **at once** to the average commissioner of the Company or, if the underwriters are not represented at the port of destination, to te competent authorities in order to have the nature and the extent of the loss or damage ascertained by a party not interested in the affair. The inspection of the goods is to be held, if possible, in the presence of a representative of the shipowners.

Together with the certificate of survey the documents mentioned below must be submitted to the underwriters:

a) policy of insurance,
b) original invoice for the whole consignment,
c) bill of lading,
d) landing account, if any,
e) claim note.

Buchhandlung Gustav Fock G.m.b.H.
Schlossgasse 7-9 Leipzig C1 Markgrafenstr. 4-6

per formulas (111)

$$\begin{aligned} xp &= A^*a+B^*b+C^*c+\text{ etc.}\\ xp' &= A^*a'+B^*b'+C^*c'+\text{ etc.}\\ xp'' &= A^*a''+B^*b''+C^*c''+\text{ etc.} \end{aligned}$$

etc. Iam inquiramus, quomodo hae correctiones cum compensatione completa

quadrata valoris medii expressionis

$$(\tfrac{S}{2} - \mu\mu)^2$$

cuius evolutio absolvetur per ratiocinia similia iis, quae in commentatione priore artt. 39 sc
ipsam tar
$\mu\mu$ metu

denotante
que N ag

$(a\alpha + b\beta$

Hoc aggre
ut in art.
intra limit
initio supe
omnino ex
tribuenda
prioris con

Ad c
mum, ut
quationibu
bus (10) su
completa, u
nomination
sed substra
nibus (12), i. e. qui vel parti tantum satisfaciunt vel nullis. Quod vero attinet ad tales observationum mutationes, quae sub formulis (10) comprehendi nequeunt, a disquisitione praesenti, nec non a denominatione compensationum exclusae sunto. Quum, quatenus aequationes (10) locum habent, aequationes (13) ipsis (12) omnino sint aequivalentes, illud discrimen ita quoque enunciari potest: Ob-

servationes complete compensatae omnibus aequationibus conditionalibus $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, etc. satisfaciunt, incomplete compensatae vero vel nullis vel saltem non omnibus; compensatio itaque, per quam omnibus aequationibus conditionalibus satisfit, necessario est ipsa completa.

19.

Iam quum ex ipsa notione compensationis sponte sequatur, aggregata duarum compensationum iterum constituere compensationem, facile perspicitur, nihil interesse, utrum praecepta, per quae compensatio perfecta eruenda est, immediate ad observationes primitivas applicentur, an ad observationes incomplete iam compensatas.

Revera constituant -0, $-0'$, $-0''$ etc. systema compensationis incompletae, quod prodierit e formulis (I)

$$\begin{aligned} 0p &= A^0a + B^0b + C^0c + \text{etc.} \\ 0'p' &= A^0a' + B^0b' + C^0c' + \text{etc.} \\ 0''p'' &= A^0a'' + B^0b'' + C^0c'' + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Quum observationes his compensationibus mutatae omnibus aequationibus conditionalibus non satisfacere supponantur, sint $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. valores, quos X, Y, Z etc. ex illarum substitutione nanciscuntur. Quaerendi sunt numeri A^*, B^*, C^* etc. aequationibus (II) satisfacientes

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^* &= A^*[aa] + B^*[ab] + C^*[ac] + \text{etc.} \\ \mathfrak{B}^* &= A^*[ab] + B^*[bb] + C^*[bc] + \text{etc.} \\ \mathfrak{C}^* &= A^*[ac] + B^*[bc] + C^*[cc] + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc., quo facto compensatio completa observationum isto modo mutatarum efficitur per mutationes novas $-\varkappa$, $-\varkappa'$, $-\varkappa''$ etc., ubi $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. computandae sunt per formulas (III)

$$\begin{aligned} \varkappa p &= A^*a + B^*b + C^*c + \text{etc.} \\ \varkappa' p' &= A^*a' + B^*b' + C^*c' + \text{etc.} \\ \varkappa'' p'' &= A^*a'' + B^*b'' + C^*c'' + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Iam inquiramus, quomodo hae correctiones cum compensatione completa

observationum primitivarum cohaereant. Primo manifestum est, haberi

$$\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} - a\mathfrak{0} - a'\mathfrak{0}' - a''\mathfrak{0}'' - \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} - b\mathfrak{0} - b'\mathfrak{0}' - b''\mathfrak{0}'' - \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C}^* = \mathfrak{C} - c\mathfrak{0} - c'\mathfrak{0}' - c''\mathfrak{0}'' - \text{etc.}$$

etc. Substituendo in his aequationibus pro $\mathfrak{0}$, $\mathfrak{0}'$, $\mathfrak{0}''$ etc. valores ex (I), nec non pro $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. valores ex II, invenimus

$$\mathfrak{A} = (A^0 + A^*)[aa] + (B^0 + B^*)[ab] + (C^0 + C^*)[ac] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = (A^0 + A^*)[ab] + (B^0 + B^*)[bb] + (C^0 + C^*)[bc] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = (A^0 + A^*)[ac] + (B^0 + B^*)[bc] + (C^0 + C^*)[cc] + \text{etc.}$$

etc., unde patet, correlata aequationum conditionalium aequationibus (12) satisfacientia esse

$$A = A^0 + A^*, \quad B = B^0 + B^*, \quad C = C^0 + C^*, \text{ etc.}$$

Hinc vero aequationes (10), I et III docent, esse

$$\varepsilon = \mathfrak{0} + \varkappa, \quad \varepsilon' = \mathfrak{0}' + \varkappa', \quad \varepsilon'' = \mathfrak{0}'' + \varkappa'', \text{ etc.}$$

i. e. compensatio observationum perfecta eadem prodit, sive immediate computetur, sive mediate proficiscendo a compensatione manca.

20.

Quoties multitudo aequationum conditionalium permagna est, determinatio correlatorum A, B, C etc. per eliminationem directam tam prolixa evadere potest, ut calculatoris patientia ei impar sit: tunc saepenumero commodum esse poterit, compensationem completam per approximationes successivas adiumento theorematis art. praec. eruere. Distribuantur aequationes conditionales in duas pluresve classes, investigeturque primo compensatio, per quam aequationibus primae classis satisfit, neglectis reliquis. Dein tractentur observationes per hanc compensationem mutatae ita, ut solarum aequationum secundae classis ratio habeatur. Generaliter loquendo applicatio secundi compensationum systematis consensum cum aequationibus primae classis turbabit; quare, si duae tantummodo classes factae sunt, ad aequationes primae classis revertemur, tertiumque systema, quod huic satisfaciat, eruemus; dein observationes ter correctas compensationi quartae

subiiciemus, ubi solae aequationes secundae classis respiciuntur. Ita alternis vicibus, modo priorem classem modo posteriorem respicientes, compensationes continuo decrescentes obtinebimus, et si distributio scite adornata fuerat, post paucas iterationes ad numeros stabiles perveniemus. Si plures quam duae classes factae sunt, res simili modo se habebit: classes singulae deinceps in computum venient, post ultimam iterum prima et sic porro. Sed sufficiat hoc loco, hunc modum addigitavisse, cuius efficacia multum utique a scita applicatione pendebit.

21.

Restat, ut suppleamus demonstrationem lemmatis in art. 8 suppositi, ubi tamen perspicuitatis caussa alias denotationes huic negotio magis adaptatas adhibebimus.

Sint itaque x^0, x', x'', x''' etc. indeterminatae, supponamusque, ex aequationibus

$$n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.} = X^0$$
$$n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.} = X'$$
$$n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.} = X''$$
$$n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.} = X'''$$
$$\text{etc.}$$

sequi per eliminationem has

$$N^{00}X^0 + N^{01}X' + N^{02}X'' + N^{03}X''' + \text{etc.} = x^0$$
$$N^{10}X^0 + N^{11}X' + N^{12}X'' + N^{13}X''' + \text{etc.} = x'$$
$$N^{20}X^0 + N^{21}X' + N^{22}X'' + N^{23}X''' + \text{etc.} = x''$$
$$N^{30}X^0 + N^{31}X' + N^{32}X'' + N^{33}X''' + \text{etc.} = x'''$$
$$\text{etc.}$$

Substitutis itaque in aequatione prima et secunda secundi systematis valoribus quantitatum X, X', X'', X''' etc. e primo systemate, obtinemus

$$\begin{aligned} x^0 = \; & N^{00}(n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{01}(n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{02}(n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{03}(n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.}) \text{ etc.} \end{aligned}$$

nec non

$$\begin{aligned} x' = \quad & N^{10}(n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{11}(n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{12}(n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.}) \\ & + N^{13}(n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.}) \end{aligned}$$

Quum utraque aequatio manifesto esse debeat aequatio identica, tum in priore tum in posteriore pro x^0, x', x'', x''' etc. valores quoslibet determinatos substituere licebit. Substituamus in priore

$$x^0 = N^{10}, \quad x' = N^{11}, \quad x'' = N^{12}, \quad x''' = N^{13} \text{ etc.}$$

in posteriore vero

$$x^0 = N^{00}, \quad x' = N^{01}, \quad x'' = N^{02}, \quad x''' = N^{03} \text{ etc.}$$

His ita factis subtractio producit

$$\begin{aligned} N^{10} - N^{01} = \quad & (N^{00}N^{11} - N^{10}N^{01})(n^{01} - n^{10}) \\ & + (N^{00}N^{12} - N^{10}N^{02})(n^{02} - n^{20}) \\ & + (N^{00}N^{13} - N^{10}N^{03})(n^{03} - n^{30}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{01}N^{12} - N^{11}N^{02})(n^{12} - n^{21}) \\ & + (N^{01}N^{13} - N^{11}N^{03})(n^{13} - n^{31}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{02}N^{13} - N^{12}N^{03})(n^{23} - n^{32}) \\ & + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

quae aequatio ita quoque exhiberi potest

$$N^{10} - N^{01} = \Sigma (N^{0\alpha}N^{1\beta} - N^{1\alpha}N^{0\beta})(n^{\alpha\beta} - n^{\beta\alpha})$$

denotantibus $\alpha\beta$ omnes combinationes indicum inaequalium.

Hinc colligitur, si fuerit

$$n^{01} = n^{10}, \quad n^{02} = n^{20}, \quad n^{03} = n^{30}, \quad n^{12} = n^{21}, \quad n^{13} = n^{31}, \quad n^{23} = n^{32}, \text{ etc.}$$

sive generaliter $n^{\alpha\beta} = n^{\beta\alpha}$, fore etiam

$$N^{10} = N^{01}$$

Et quum ordo indeterminatarum in aequationibus propositis sit arbitrarius, manifesto in illa suppositione erit generaliter

$$N^{\alpha\beta} = N^{\beta\alpha}$$

22.

Quum methodus in hac commentatione exposita applicationem imprimis frequentem et commodam inveniat in calculis ad geodaesiam sublimiorem pertinentibus, lectoribus gratam fore speramus illustrationem praeceptorum per nonnulla exempla hinc desumta.

Aequationes conditionales inter angulos systematis triangulorum e triplici potissimum fonte sunt petendae.

I. Aggregatum angulorum horizontalium, qui circa eundem verticem gyrum integrum horizontis complent, aequare debet quatuor rectos.

II. Summa trium angulorum in quovis triangulo quantitati datae aequalis est, quum, quoties triangulum est in superficie curva, excessum illius summae supra duos rectos tam accurate computare liceat, ut pro absolute exacto haberi possit.

III. Fons tertius est ratio laterum in triangulis catenam clausam formantibus. Scilicet si series triangulorum ita nexa est, ut secundum triangulum habeat latus unum a commune cum triangulo primo, aliud b cum tertio; perinde quartum triangulum cum tertio habeat latus commune c, cum quinto latus commune d, et sic porro usque ad ultimum triangulum, cui cum praecedenti latus commune sit k, et cum triangulo primo rursus latus l, valores quotientium $\frac{a}{l}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{d}{c} \cdots \frac{l}{k}$, innotescent resp. e binis angulis triangulorum successivorum, lateribus communibus oppositis, per methodos notas, unde quum productum illarum fractionum fieri debeat $= 1$, prodibit aequatio conditionalis inter sinus illorum angulorum, (parte tertia excessus sphaerici vel sphaeroidici, si triangula sunt in superficie curva, resp. diminutorum).

Ceterum in systematibus triangulorum complicatioribus saepissime accidit, ut aequationes conditionales tum secundi tum tertii generis plures se offerant, quam retinere fas est, quoniam pars earum in reliquis iam contenta est. Contra rarior erit casus, ubi aequationibus conditionalibus secundi generis adiungere oportet aequationes similes ad figuras plurium laterum spectantes, puta tunc tantum, ubi

polygona formantur, in triangula per mensurationes non divisa. Sed de his rebus, ab instituto praesenti nimis alienis, alia occasione fusius agemus. Silentio tamen praeterire non possumus monitum, quod theoria nostra, si applicatio pura atque rigorosa in votis est, supponit, quantitates per v, v', v'' etc. designatas revera vel immediate observatas esse, vel ex observationibus ita derivatas, ut inter se independentes maneant, vel saltem tales censeri possint. In praxi vulgari observantur anguli triangulorum ipsi, qui proin pro v, v', v'' etc. accipi possunt; sed memores esse debemus, si forte systema insuper contineat triangula talia, quorum anguli non sint immediate observati, sed prodeant tamquam summae vel differentiae angulorum revera observatorum, illos non inter observatorum numerum referendos, sed in forma compositionis suae in calculis retinendos esse. Aliter vero res se habebit in modo observandi ei simili, quem sequutus est clar. STRUVE (Astronomische Nachrichten II, p. 431), ubi directiones singulorum laterum ab eodem vertice proficiscentium obtinentur per comparationem cum una eademque directione arbitraria. Tunc scilicet hi ipsi anguli pro v, v', v'' etc. accipiendi sunt, quo pacto omnes anguli triangulorum in forma differentiarum se offerent, aequationesque conditionales primi generis, quibus per rei naturam sponte satisfit, tamquam superfluae cessabunt. Modus observationis, quem ipse sequutus sum in dimensione triangulorum annis praecedentibus perfecta, differt quidem tum a priore tum a posteriore modo, attamen respectu effectus posteriori aequiparari potest, ita ut in singulis stationibus directiones laterum inde proficiscentium ab initio quasi arbitrario numeratas pro quantitatibus v, v', v'' etc. accipere oporteat. Duo iam exempla elaborabimus, alterum ad modum priorem, alterum ad posteriorem pertinens.

23.

Exemplum primum nobis suppeditabit opus clar. DE KRAYENHOF, *Précis historique des opérations trigonométriques faites en Hollande*, et quidem compensationi subiiciemus partem eam systematis triangulorum, quae inter novem puncta Harlingen, Sneek, Oldeholtpade, Ballum, Leeuwarden, Dockum, Drachten, Oosterwolde, Gröningen continentur. Formantur inter haec puncta novem triangula in opere illo per numeros 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132 denotata, quorum anguli (a nobis indicibus praescriptis distincti) secundum tabulam p. 77—81 ita sunt observati:

Triangulum 121.

0. Harlingen	50°	58′	15″238
1. Leeuwarden	82	47	15,351
2. Ballum	46	14	27,202

Triangulum 122.

3. Harlingen	51	5	39,717
4. Sneek	70	48	33,445
5. Leeuwarden	58	5	48,707

Triangulum 123.

6. Sneek	49	30	40,051
7. Drachten	42	52	59,382
8. Leeuwarden	87	36	21,057

Triangulum 124.

9. Sneek	45	36	7,492
10. Oldeholtpade	67	52	0,048
11. Drachten	66	31	56,513

Triangulum 125.

12. Drachten	53	55	24,745
13. Oldeholtpade	47	48	52,580
14. Oosterwolde	78	15	42,347

Triangulum 127.

15. Leeuwarden	59	24	0,645
16. Dockum	76	34	9,021
17. Ballum	44	1	51,040

Triangulum 128.

18. Leeuwarden	72	6	32,043
19. Drachten	46	53	27,163
20. Dockum	61	0	4,494

Triangulum 131.

21. Dockum	57	1	55,292
22. Drachten	83	33	14,515
23. Gröningen	39	24	52,397

Triangulum 132.

24. Oosterwolde	81°	54′	17″447
25. Gröningen	31	52	46,094
26. Drachten	66	12	57,246

Consideratio nexus inter haec triangula monstrat, inter 27 angulos, quorum valores approximati per observationem innotuerunt, 13 aequationes conditionales haberi, puta duas primi generis, novem secundi, duas tertii. Sed haud opus erit, has aequationes omnes in forma sua finita hic adscribere, quum ad calculos tantummodo requirantur quantitates in theoria generali per $\mathfrak{A}, a, a', a''$ etc., $\mathfrak{B}, b, b', b''$ etc. etc. denotatae: quare illarum loco statim adscribimus aequationes supra per (13) denotatas, quae illas quantitates ob oculos ponunt: loco signorum $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ etc. simpliciter hic scribemus (0), (1), (2) etc.

Hoc modo duabus aequationibus conditionalibus primi generis respondent sequentes:

$$(1)+(5)+(8)+(15)+(18) = -2''197$$
$$(7)+(11)+(12)+(19)+(22)+(26) = -0''436$$

Excessus sphaeroidicos novem triangulorum invenimus deinceps: 1″749; 1″147; 1″243; 1″698; 0″873; 1″167; 1″104: 2″161; 1″403. Oritur itaque aequatio conditionalis secundi generis prima haec*): $v^{(0)}+v^{(1)}+v^{(2)}-180°\,0'\,1''749=0$, et perinde reliquae: hinc habemus novem aequationes sequentes:

$$(0)+(1)+(2) = -3''958$$
$$(3)+(4)+(5) = +0,722$$
$$(6)+(7)+(8) = -0,753$$
$$(9)+(10)+(11) = +2,355$$
$$(12)+(13)+(14) = -1,201$$
$$(15)+(16)+(17) = -0,461$$
$$(18)+(19)+(20) = +2,596$$
$$(21)+(22)+(23) = +0,043$$
$$(24)+(25)+(26) = -0,616$$

Aequationes conditionales tertii generis commodius in forma logarithmica exhibentur: ita prior est

*) Indices in hoc exemplo per figuras arabicas exprimere praeferimus.

$$\log\sin(v^{(0)}-0''583)-\log\sin(v^{(2)}-0''583)-\log\sin(v^{(3)}-0''382)$$
$$+\log\sin(v^{(4)}-0''382)-\log\sin(v^{(6)}-0''414)+\log\sin(v^{(7)}-0''414)$$
$$-\log\sin(v^{(16)}-0''389)+\log\sin(v^{(17)}-0''389)-\log\sin(v^{(19)}-0''368)$$
$$+\log\sin(v^{(20)}-0''368)=0$$

Superfluum videtur, alteram in forma finita adscribere. His duabus aequationibus respondent sequentes, ubi singuli coëfficientes referuntur ad figuram septimam logarithorum briggicorum:

$$17,068(0)-20,174\,(2)-16,993\,(3)+7,328\,(4)-17,976\,(6)+22,672(7)$$
$$-5,028(16)+21,780(17)-19,710(19)+11,671(20)=-371$$
$$17,976(6)-0,880\,(8)-20,617\,(9)+8,564(10)-19,082(13)+4,375(14)$$
$$+6,798(18)-11,671(20)+13,657(21)-25,620(23)-2,995(24)$$
$$+33,854(25)=+370$$

Quum nulla ratio indicata sit, cur observationibus pondera inaequalia tribuamus, statuemus $p^{(0)}=p^{(1)}=p^{(2)}$ etc. $=1$. Denotatis itaque correlatis aequationum conditionalium eo ordine, quo aequationes ipsis respondentes exhibuimus, per $A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N$, prodeunt ad illorum determinationem aequationes sequentes:

$$-2''197 = 5A+C+D+E+H+I+5,917N$$
$$-0,436 = 6B+E+F+G+I+K+L+2,962M$$
$$-3,958 = A+3C-3,106M$$
$$+0,722 = A+3D-9,665M$$
$$-0,753 = A+B+3E+4,696M+17,096N$$
$$+2,355 = B+3F-12,053N$$
$$-1,201 = B+3G-14,707N$$
$$-0,461 = A+3H+16,752M$$
$$+2,596 = A+B+3I-8,039M-4,874N$$
$$+0,043 = B+3K-11,963N$$
$$-0,616 = B+3L+30,859N$$
$$-371 = +2,962B-3,106C-9,665D+4,696E+16,752H-8,039I$$
$$+2902,27M-459,33N$$
$$+370 = +5,917A+17,096E-12,053F-14,707G-4,874I$$
$$-11,963K+30,859L-459,33M+3385,96N$$

Hinc eruimus per eliminationem:

$A = -0{,}598$	$H = +0{,}659$
$B = -0{,}255$	$I = +1{,}050$
$C = -1{,}234$	$K = +0{,}577$
$D = +0{,}086$	$L = -1{,}351$
$E = -0{,}447$	$M = -0{,}109792$
$F = +1{,}351$	$N = +0{,}119681$
$G = +0{,}271$	

Denique errores maxime plausibiles prodeunt per formulas

$$(0) = C + 17{,}068\,M$$
$$(1) = A + C$$
$$(2) = C - 20{,}174\,M$$
$$(3) = D - 16{,}993\,M$$

etc., unde obtinemus valores numericos sequentes; in gratiam comparationis apponimus (mutatis signis) correctiones a clar. DE KRAYENHOF observationibus applicatas:

	DE KR.		DE KR.
$(0) = -3''108$	$-2''090$	$(14) = +0''795$	$+2''400$
$(1) = -1{,}832$	$+0{,}116$	$(15) = +0{,}061$	$+1{,}273$
$(2) = +0{,}981$	$-1{,}982$	$(16) = +1{,}211$	$+5{,}945$
$(3) = +1{,}952$	$+1{,}722$	$(17) = -1{,}732$	$-7{,}674$
$(4) = -0{,}719$	$+2{,}848$	$(18) = +1{,}265$	$+1{,}876$
$(5) = -0{,}512$	$-3{,}848$	$(19) = +2{,}959$	$+6{,}251$
$(6) = +3{,}648$	$-0{,}137$	$(20) = -1{,}628$	$-5{,}530$
$(7) = -3{,}221$	$+1{,}000$	$(21) = +2{,}211$	$+3{,}486$
$(8) = -1{,}180$	$-1{,}614$	$(22) = +0{,}322$	$-3{,}454$
$(9) = -1{,}116$	0	$(23) = -2{,}489$	0
$(10) = +2{,}376$	$+5{,}928$	$(24) = -1{,}709$	$+0{,}400$
$(11) = +1{,}096$	$-3{,}570$	$(25) = +2{,}701$	$+2{,}054$
$(12) = +0{,}016$	$+2{,}414$	$(26) = -1{,}606$	$-3{,}077$
$(13) = -2{,}013$	$-6{,}014$		

Aggregatum quadratorum nostrarum compensationum inuenitur $= 97{,}8845$. Hinc error medius, quatenus ex 27 angulis observatis colligi potest,

$$= \sqrt{\tfrac{97{,}8845}{13}} = 2''7440$$

Aggregatum quadratorum mutationum, quas clar. DE KRAYENHOF ipse angulis observatis applicavit, inuenitur $= 341{,}4201$.

24.

Exemplum alterum suppeditabunt triangula inter quinque puncta triangulationis Hannoveranae, Falkenberg, Breithorn, Hauselberg, Wulfsode, Wilsede. Observatae sunt directiones*):

	In statione *Falkenberg*		
0.	Wilsede	187^0 47′	$30''311$
1.	Wulfsode	225 9	39,676
2.	Hauselberg . . .	266 13	56,239
3.	Breithorn	274 14	43,634
	In statione *Breithorn*		
4.	Falkenberg . . .	94 33	40,755
5.	Hauselberg . . .	122 51	23,054
6.	Wilsede	150 18	35,100
	In statione *Hauselberg*		
7.	Falkenberg . . .	86 29	6,872
8.	Wilsede	154 37	9,624
9.	Wulfsode	189 2	56,376
10.	Breithorn	302 47	37,732
	In statione *Wulfsode*		
11.	Hauselberg . . .	9 5	36,593
12.	Falkenberg . . .	45 27	33,556
13.	Wilsede	118 44	13,159

*) Initia, ad quae singulae directiones referuntur, hic tamquam arbitraria considerantur, quamquam revera cum lineis meridianis stationum coincidunt. Observationes in posterum complete publici iuris fient; interim figura inuenitur in *Astronomische Nachrichten* Vol. I. p. 441.

In statione *Wilsede*

14. Falkenberg . . .	7°	51′	1″027
15. Wulfsode 298		29	49,519
16. Breithorn 330		3	7,392
17. Hauselberg . . . 334		25	26,746

Ex his observationibus septem triangula formare licet.

Triangulum I.

Falkenberg	8°	0′	47″395
Breithorn	28	17	42,299
Hauselberg 143		41	29,140

Triangulum II.

Falkenberg	86	27	13,323
Breithorn	55	44	54,345
Wilsede	37	47	53,635

Triangulum III.

Falkenberg	41	4	16,563
Hauselberg 102		33	49,504
Wulfsode	36	21	56,963

Triangulum IV.

Falkenberg	78	26	25,928
Hauselberg	68	8	2,752
Wilsede	35	25	34,281

Triangulum V.

Falkenberg	37	22	9,365
Wulfsode	73	16	39,603
Wilsede	69	21	11,508

Triangulum VI.

Breithorn	27	27	12,046
Hauselberg 148		10	28,108
Wilsede	4	22	19,354

Triangulum VII.

Hauselberg	34°	25′	46″752
Wulfsode 109		38	36,566
Wilsede	35	55	37,227

Aderunt itaque septem aequationes conditionales secundi generis (aequationes primi generis manifesto cessant), quas ut eruamus, computandi sunt ante omnia excessus sphaeroidici septem triangulorum. Ad hunc finem requiritur cognitio magnitudinis absolutae saltem unius lateris: latus inter puncta Wilsede et Wulfsode est 22877,94 metrorum. Hinc prodeunt excessus sphaeroidici triangulorum I... 0″202; II... 2″442; III... 1″257; IV... 1″919; V... 1″957; VI... 0″321; VII... 1″295.

Iam si directiones eo ordine, quo supra allatae indicibusque distinctae sunt, per $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ etc. designantur, trianguli I anguli fiunt

$$v^{(3)} - v^{(2)}, \quad v^{(5)} - v^{(4)}, \quad 360^0 + v^{(7)} - v^{(10)}$$

adeoque aequatio conditionalis prima

$$-v^{(2)} + v^{(3)} - v^{(4)} + v^{(5)} + v^{(7)} - v^{(10)} + 179^0\,59'\,59''798 = 0$$

Perinde triangula reliqua sex alias suppeditant; sed levis attentio docebit, has septem aequationes non esse independentes, sed secundam identicam cum summa primae, quartae et sextae; nec non summam tertiae et quintae identicam cum summa quartae et septimae: quapropter secundam et quintam negligemus. Loco remanentium aequationum conditionalium in forma finita, adscribimus aequationes correspondentes e complexu (13), dum pro characteribus ε, ε′ etc. his (0), (1), (2) etc. utimur:

$$\begin{aligned}
-1''368 &= -(2)+(3)-(4)+(5)+(7)-(10)\\
+1,773 &= -(1)+(2)-(7)+(9)-(11)+(12)\\
+1,042 &= -(0)+(2)-(7)+(8)+(14)-(17)\\
-0,813 &= -(5)+(6)-(8)+(10)-(16)+(17)\\
-0,750 &= -(8)+(9)-(11)+(13)-(15)+(17)
\end{aligned}$$

Aequationes conditionales tertii generis *octo* e triangulorum systemate peti possent, quum tum terna quatuor triangulorum I, II, IV, VI, tum terna ex his

III, IV, V, VII ad hunc finem combinare liceat; attamen levis attentio docet, *duas* sufficere, alteram ex illis, alteram ex his, quum reliquae in his atque prioribus aequationibus conditionalibus iam contentae esse debeant. Aequatio itaque conditionalis sexta nobis erit

$$\begin{array}{l}\log\sin(v^{(3)}-v^{(2)}-0''067)-\log\sin(v^{(5)}-v^{(4)}-0''067)\\ +\log\sin(v^{(14)}-v^{(17)}-0''640)-\log\sin(v^{(2)}-v^{(0)}-0''640)\\ +\log\sin(v^{(6)}-v^{(5)}-0''107)-\log\sin(v^{(17)}-v^{(16)}-0''107)=0\end{array}$$

atque septima

$$\begin{array}{l}\log\sin(v^{(2)}-v^{(1)}-0''419)-\log\sin(v^{(12)}-v^{(11)}-0''419)\\ +\log\sin(v^{(14)}-v^{(17)}-0''640)-\log\sin(v^{(2)}-v^{(0)}-0''640)\\ +\log\sin(v^{(13)}-v^{(11)}-0''432)-\log\sin(v^{(17)}-v^{(15)}-0''432)=0\end{array}$$

quibus respondent aequationes complexus (13)

$$\begin{array}{rl}+25 = & +4{,}31(0)-153{,}88(2)+149{,}57(3)+39{,}11(4)-79{,}64(5)\\ & +40{,}53(6)+31{,}90(14)+275{,}39(16)-307{,}29(17)\\ -3 = & +4{,}31(0)-24{,}16(1)+19{,}85(2)+36{,}11(11)-28{,}59(12)\\ & -7{,}52(13)+31{,}90(14)+29{,}06(15)-60{,}96(17)\end{array}$$

Quodsi iam singulis directionibus eandem certitudinem tribuimus, statuendo $p^{(0)}=p^{(1)}=p^{(2)}$ etc. $=1$, correlataque septem aequationum conditionalium, eo ordine, quem hic sequuti sumus, per A, B, C, D, E, F, G denotamus, horum determinatio petenda erit ex aequationibus sequentibus:

$$\begin{array}{rl}-1{,}368 = & +6A-2B-2C-2D+184{,}72F-19{,}85G\\ +1{,}773 = & -2A+6B+2C+2E-153{,}88F-20{,}69G\\ +1{,}042 = & -2A+2B+6C-2D-2E+181{,}00F+108{,}40G\\ -0{,}813 = & -2A-2C+6D+2E-462{,}51F-60{,}96G\\ -0{,}750 = & +2B-2C+2D+6E-307{,}29F-133{,}65G\\ +25 = & +184{,}72A-153{,}88B+181{,}00C-462{,}51D-307{,}29E\\ & +224868F+16694{,}1G\\ -3 = & -19{,}85A-20{,}69B+108{,}40C-60{,}96D-133{,}65E\\ & +16694{,}1F+8752{,}39G\end{array}$$

Hinc deducimus per eliminationem

$$\begin{array}{l}A=-0{,}225\\ B=+0{,}344\\ C=-0{,}088\\ D=-0{,}171\\ E=-0{,}323\\ F=+0{,}000215915\\ G=-0{,}00547462\end{array}$$

Iam errores maxime plausibiles habentur per formulas:

$$\begin{array}{l}(0)=-C+4{,}31F+4{,}31G\\ (1)=-B-24{,}16G\\ (2)=-A+B+C-153{,}88F+19{,}85G\end{array}$$

etc., unde prodeunt valores numerici

$(0)=+0''065$	$(9)=+0''021$
$(1)=-0{,}212$	$(10)=+0{,}054$
$(2)=+0{,}339$	$(11)=-0{,}219$
$(3)=-0{,}193$	$(12)=+0{,}501$
$(4)=+0{,}233$	$(13)=-0{,}282$
$(5)=-0{,}071$	$(14)=-0{,}256$
$(6)=-0{,}162$	$(15)=+0{,}164$
$(7)=-0{,}481$	$(16)=+0{,}230$
$(8)=+0{,}406$	$(17)=-0{,}139$

Summa quadratorum horum errorum invenitur $=1{,}2288$; hinc error medius unius directionis, quatenus e 18 directionibus observatis erui potest,

$$=\sqrt{\tfrac{1{,}2288}{7}}=0''4190$$

25.

Ut etiam pars altera theoriae nostrae exemplo illustretur, indagamus praecisiones, qua latus Falkenberg-Breithorn e latere Wilsede-Wulfsode adiumento observationum compensatarum determinatur. Functio u, per quam illud in hoc casu exprimitur, est

$$u = 22877^{\mathrm{m}}94 \times \frac{\sin(v^{(15)} - v^{(12)} - 0''652) \cdot \sin(v^{(14)} - v^{(16)} - 0''814)}{\sin(v^{(1)} - v^{(0)} - 0''652) \cdot \sin(v^{(6)} - v^{(4)} - 0''814)}$$

Huius valor e valoribus correctis directionum $v^{(0)}$, $v^{(1)}$ etc. invenitur

$$= 26766^{\mathrm{m}}68$$

Differentiatio autem illius expressionis suppeditat, si differentialia $\mathrm{d}v^{(0)}$, $\mathrm{d}v^{(1)}$ etc. minutis secundis expressa concipiuntur,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u = \; & 0^{\mathrm{m}}16991\,(\mathrm{d}v^{(0)} - \mathrm{d}v^{(1)}) + 0^{\mathrm{m}}08836\,(\mathrm{d}v^{(4)} - \mathrm{d}v^{(6)}) \\ & - 0^{\mathrm{m}}03899\,(\mathrm{d}v^{(12)} - \mathrm{d}v^{(13)}) + 0^{\mathrm{m}}16731\,(\mathrm{d}v^{(14)} - \mathrm{d}v^{(16)}) \end{aligned}$$

Hinc porro invenitur

$$\begin{aligned} [al] &= -\ 0{,}08836 \\ [bl] &= +\ 0{,}13092 \\ [cl] &= -\ 0{,}00260 \\ [dl] &= +\ 0{,}07895 \\ [el] &= +\ 0{,}03899 \\ [fl] &= -40{,}1315 \\ [gl] &= +10{,}9957 \\ [ll] &= +\ 0{,}13238 \end{aligned}$$

Hinc denique per methodos supra traditas invenitur, quatenus metrum pro unitate dimensionum linearium accipimus,

$$\frac{1}{P} = 0{,}08329, \quad \text{sive} \quad P = 12{,}006$$

unde error medius in valore lateris Falkenberg-Breithorn metuendus $= 0{,}2886\,m$ metris, (ubi m error medius in directionibus observatis metuendus, et quidem in minutis secundis expressus), adeoque, si valorem ipsius m supra erutum adoptamus,

$$= 0^{\mathrm{m}}1209$$

Ceterum inspectio systematis triangulorum sponte docet, punctum Hauselberg omnino ex illo elidi potuisse, incolumi manente nexu inter latera Wilsede-Wulfsode atque Falkenberg-Breithorn. Sed a bona methodo abhorreret, *supprimere* idcirco observationes, quae ad punctum Hauselberg referuntur*), quum certe ad praecisionem augendam conferre valeant. Ut clarius appareret, quantum praecisionis augmentum inde redundet, calculum denuo fecimus excludendo omnia, quae ad punctum Hauselberg referuntur, quo pacto e 18 directionibus supra traditis octo excidunt, atque reliquarum errores maxime plausibiles ita inveniuntur:

$(0) = +0''327$	$(12) = +0''206$
$(1) = -0{,}206$	$(13) = -0{,}206$
$(3) = -0{,}121$	$(14) = +0{,}327$
$(4) = +0{,}121$	$(15) = +0{,}206$
$(6) = -0{,}121$	$(16) = +0{,}121$

Valor lateris Falkenberg-Breithorn tunc prodit $= 26766^{\mathrm{m}}63$, parum quidem a valore supra eruto discrepans, sed calculus ponderis producit

$$\frac{1}{P} = 0{,}13082 \quad \text{sive} \quad P = 7{,}644$$

adeoque error medius metuendus $= 0{,}36169\,m$ metris $= 0^{\mathrm{m}}1515$. Patet itaque, per accessionem observationum, quae ad punctum Hauselberg referuntur, pondus determinationis lateris Falkenberg-Breithorn auctum esse in ratione numeri 7,644 ad 12,006, sive unitatis ad 1,571.

*) Maior pars harum observationum iam facta erat, antequam punctum Breithorn repertum, atque in systema receptum esset.

ANZEIGEN.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 33. Seite 321 bis 327. 1821. Februar 26.

Am 15. Februar wurde der Königl. Societät von Hrn Hofr. Gauss eine Vorlesung übergeben, überschrieben

Theoria Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior,

die eine der wichtigsten Anwendungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zum Gegenstande hat. Alle Beobachtungen, die sich auf Grössenbestimmungen aus der Sinnenwelt beziehen, können, mit welcher Genauigkeit und mit wie vortrefflichen Werkzeugen sie auch angestellt werden, nie *absolute* Genauigkeit haben; sie bleiben immer nur Näherungen, grössern oder kleinern Fehlern ausgesetzt. Nicht von solchen Fehlern ist hier die Rede, deren Quellen genau bekannt sind, und deren Grösse bei bestimmten Beobachtungen jedesmal berechnet werden kann; denn da dergleichen Fehler bei den beobachteten Grössen in Abzug gebracht werden können und sollen, so ist es dasselbe, als ob sie gar nicht da wären. Ganz anders verhält es sich dagegen mit den als zufällig zu betrachtenden Fehlern, die aus der beschränkten Schärfe der Sinne, aus mancherlei unvermeidlichen und keiner Regel folgenden Unvollkommenheiten der Instrumente, und aus mancherlei regellos (wenigstens für uns) wirkenden Störungen durch äussere Umstände (z. B. das Wallen der Atmosphäre beim Sehen, Mangel absoluter Festigkeit beim Aufstellen der Instrumente) herrühren. Diese zufälligen Fehler, die

dem Calcül nicht unterworfen werden können, lassen sich nicht *wegschaffen*, und der Beobachter kann sie durch sorgfältige Aufmerksamkeit und durch Vervielfältigung der Beobachtungen nur *vermindern*: allein nachdem der Beobachter das seinige gethan hat, ist es an dem Geometer, die Unsicherheit der Beobachtungen und der durch Rechnung daraus abgeleiteten Grössen nach streng mathematischen Principien zu würdigen, und was das wichtigste ist, da, wo die mit den Beobachtungen zusammenhängenden Grössen aus denselben durch verschiedene Combinationen abgeleitet werden können, diejenige Art vorzuschreiben, wobei so wenig Unsicherheit als möglich zu befürchten bleibt.

Obgleich die zufälligen Fehler als solche keinem Gesetze folgen, sondern ohne Ordnung in einer Beobachtung grösser, in einer andern kleiner ausfallen, so ist doch gewiss, dass bei einer bestimmten Beobachtungsart, auch die Individualität des Beobachters und seiner Werkzeuge als bestimmt betrachtet, die aus jeder einfachen Fehlerquelle fliessenden Fehler nicht bloss in gewissen Grenzen eingeschlossen sind, sondern dass auch alle möglichen Fehler zwischen diesen Grenzen ihre bestimmte relative Wahrscheinlichkeit haben, der zu Folge sie nach Maassgabe ihrer Grösse häufiger oder seltener zu erwarten sind, und derjenige, der eine genaue und vollständige Einsicht in die Beschaffenheit einer solchen Fehlerquelle hätte, würde diese Grenzen und den Zusammenhang zwischen der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Fehler und ihrer Grösse zu bestimmen im Stande sein, auf eine ähnliche Weise, wie sich bei Glücksspielen, so bald man ihre Regeln kennt, die Grenzen der möglichen Gewinne und Verluste, und deren relative Wahrscheinlichkeiten berechnen lassen. Dasselbe gilt auch von dem aus dem Zusammenwirken der einfachen Fehlerquellen entspringenden Totalfehler. Auch sind diese Begriffe nicht auf unmittelbare Beobachtungen beschränkt, sondern auch auf mittelbare aus Beobachtungen abgeleitete Grössenbestimmungen anwendbar. In der Wirklichkeit werden uns freilich fast allemal die Mittel fehlen, das Gesetz der Wahrscheinlichkeiten der Fehler *a priori* anzugeben.

Wie wir die Unzulässigkeit einer bestimmten Art von Beobachtungen im Allgemeinen abschätzen wollen, hängt zum Theil von unserer Willkür ab. Man kann dabei entweder bloss die Grösse der äussersten möglichen Fehler zum Maassstabe wählen, oder zugleich auf die grössere oder geringere Wahrscheinlichkeit der einzelnen möglichen Fehler mit Rücksicht nehmen. Das letztere scheint angemessener zu sein. Allein diese Berücksichtigung kann auf vielfache Weise geschehen. Man kann, wie es die Berechner bisher gemacht haben, den sogenannten wahrscheinlichen (nicht wahrscheinlichsten) Fehler zum Maassstabe wählen, welches derjenige ist, über welchen hinaus alle möglichen Fehler zusammen noch eben so viele Wahrscheinlichkeit haben, wie alle diesseits liegenden zusammen; allein es wird *weit vortheilhafter* sein, zu diesem Zweck statt des wahrscheinlichen Fehlers den *mittlern* zu gebrauchen, vorausgesetzt, dass man diesen an sich noch schwankenden Begriff auf die rechte Art bestimmt. Man lege jedem Fehler ein von seiner Grösse abhängendes Moment bei, multiplicire das Moment jedes möglichen Fehlers in dessen Wahrscheinlichkeit und addire die Producte: der Fehler, dessen Moment diesem Aggregat gleich ist, wird als mittlerer betrachtet werden müssen. Allein welche Function der Grösse des Fehlers wir für dessen Moment wählen wollen, bleibt wieder unsrer *Willkür* überlassen, wenn nur der Werth derselben immer positiv ist, und für grössere Fehler grösser als für kleinere. Der Verf. hat die einfachste Function dieser Art gewählt, nemlich das Quadrat; diese Wahl ist aber noch mit manchen andern höchst wesentlichen Vortheilen verknüpft, die bei keiner andern statt finden. Denn sonst könnte auch jede andere Potenz mit geraden Exponenten gebraucht werden, und je grösser dieser Exponent gewählt würde, desto näher würde man dem Princip kommen, wo bloss die äussersten Fehler zum Maassstabe der Genauigkeit dienen. Gegen die Art, wie ein grosser Geometer den Begriff des mittlern Fehlers genommen hat, indem er die Momente der Fehler diesen gleich setzt, wenn sie positiv sind, und die ihnen entgegengesetzten Grössen dafür gebraucht, wenn sie negativ sind, lässt sich bemerken, dass dabei gegen die mathematische Continuität angestossen wird, dass sie so gut wie jede andere auch willkürlich gewählt ist, dass die Resultate viel weniger einfach und genugthuend ausfallen, und dass es auch an sich schon natürlicher scheint, das Moment der Fehler in einem stärkern Verhältniss, wie diese selbst, wachsen zu lassen, indem man sich gewiss lieber den einfachen Fehler zweimal, als den doppelten einmal gefallen lässt.

Diese Erläuterungen mussten vorangeschickt werden, wenn auch nur etwas von dem Inhalt der Untersuchung hier angeführt werden sollte, wovon die gegenwärtige Abhandlung die erste Abtheilung ausmacht.

Wenn die Grössen, deren Werthe durch Beobachtungen gefunden sind, mit einer gleichen Anzahl unbekannter Grössen auf eine bekannte Art zusammenhangen, so lassen sich, allgemein zu reden, die Werthe der unbekannten Grössen

aus den Beobachtungen durch Rechnung ableiten. Freilich werden jene Werthe auch nur näherungsweise richtig sein, in so fern die Beobachtungen es waren: allein die Wahrscheinlichkeitsrechnung hat nichts dabei zu thun, als die Unsicherheit jener Bestimmungen zu würdigen, indem sie die der Beobachtungen voraussetzt. Ist die Anzahl der unbekannten Grössen grösser als die der Beobachtungen, so lassen sich jene aus diesen noch gar nicht bestimmen. Allein wenn die Anzahl der unbekannten Grössen kleiner ist, als die der Beobachtungen, so ist die Aufgabe mehr als bestimmt: es sind dann unendlich viele Combinationen möglich, um aus den Beobachtungen die unbekannten Grössen abzuleiten, die freilich alle zu einerlei Resultaten führen müssten, wenn die Beobachtungen absolute Genauigkeit hätten, aber unter den obwaltenden Umständen mehr oder weniger von einander abweichende Resultate hervorbringen. Aus dieser ins Unendliche gehenden Mannichfaltigkeit von Combinationen die zweckmässigste auszuwählen, d. i. diejenige, wobei die Unsicherheit der Resultate die möglich kleinste wird, ist unstreitig eine der wichtigsten Aufgaben bei der Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaften.

Der Verfasser gegenwärtiger Abhandlung, welcher im Jahr 1797 diese Aufgabe nach den Grundsätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zuerst untersuchte, fand bald, dass die Ausmittelung der *wahrscheinlichsten* Werthe der unbekannten Grösse unmöglich sei, wenn nicht die Function, die die Wahrscheinlichkeit der Fehler darstellt, bekannt ist. In so fern sie dies aber nicht ist, bleibt nichts übrig, als hypothetisch eine solche Function anzunehmen. Es schien ihm das natürlichste, zuerst den umgekehrten Weg einzuschlagen und die Function zu suchen, die zum Grunde gelegt werden muss, wenn eine allgemein als gut anerkannte Regel für den einfachsten aller Fälle daraus hervorgehen soll, die nemlich, dass das arithmetische Mittel aus mehreren für eine und dieselbe unbekannte Grösse durch Beobachtungen von gleicher Zuverlässigkeit gefundenen Werthen als der wahrscheinlichste betrachtet werden müsse. Es ergab sich daraus, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x, einer Exponentialgrösse von der Form e^{-hhxx} proportional angenommen werden müsse, und dass dann gerade diejenige Methode, auf die er schon einige Jahre zuvor durch andere Betrachtungen gekommen war, allgemein nothwendig werde. Diese Methode, welche er nachher besonders seit 1801 bei allerlei astronomischen Rechnungen fast täglich anzuwenden Gelegenheit hatte, und auf welche auch Legendre inzwischen gekommen war,

ist jetzt unter dem Namen Methode der kleinsten Quadrate im allgemeinen Gebrauch: und ihre Begründung durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung, so wie die Bestimmung der Genauigkeit der Resultate selbst, nebst andern damit zusammenhängenden Untersuchungen sind in der *Theoria Motus Corporum Coelestium* ausführlich entwickelt.

Der Marquis Delaplace, welcher nachher diesen Gegenstand aus einem neuen Gesichtspunkte betrachtete, indem er nicht die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Grössen suchte, sondern die zweckmässigste Combination der Beobachtungen, fand das merkwürdige Resultat, dass, wenn die Anzahl der Beobachtungen als unendlich gross betrachtet wird, die Methode der kleinsten Quadrate allemal und unabhängig von der Function, die die Wahrscheinlichkeit der Fehler ausdrückt, die zweckmässigste Combination sei.

Man sieht hieraus, dass beide Begründungsarten noch etwas zu wünschen übrig lassen. Die erstere ist ganz von der hypothetischen Form für die Wahrscheinlichkeit der Fehler abhängig, und sobald man diese verwirft, sind wirklich die durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundenen Werthe der unbekannten Grössen nicht mehr die wahrscheinlichsten, eben so wenig wie die arithmetischen Mittel in dem vorhin angeführten einfachsten aller Fälle. Die zweite Begründungsart lässt uns ganz im Dunkeln, was bei einer mässigen Anzahl von Beobachtungen zu thun sei. Die Methode der kleinsten Quadrate hat dann nicht mehr den Rang eines von der Wahrscheinlichkeitsrechnung gebotenen Gesetzes, sondern empfiehlt sich nur durch die Einfachheit der damit verknüpften Operationen.

Der Verfasser, welcher in gegewärtiger Abhandlung diese Untersuchung aufs neue vorgenommen hat, indem er von einem ähnlichen Gesichtspunkte ausging, wie Delaplace, aber den Begriff des mittlern zu befürchtenden Fehlers auf eine andere, und wie ihm scheint, schon an und für sich natürliche Art, feststellt, hofft, dass die Freunde der Mathematik mit Vergnügen sehen werden, wie die Methode der kleinsten Qradrate in ihrer neuen hier gegebenen Begründung allgemein als die zweckmässigste Combination der Beobachtungen erscheint, nicht näherungsweise, sondern nach mathematischer Schärfe, die Function für die Wahrscheinlichkeit der Fehler sei, welche sie wolle, und die Anzahl der Beobachtungen möge gross oder klein sein.

Mit dem Hauptgegenstande ist eine Menge anderer merkwürdiger Unter-

suchungen enge verbunden, deren Umfang aber den Verfasser nöthigte, die Entwickelung des grössten Theils derselben einer künftigen zweiten Vorlesung vorzubehalten. Von denjenigen, die schon in der gegenwärtigen ersten Abtheilung vorkommen, sei es uns erlaubt, hier nur ein Resultat anzuführen. Wenn die Function, welche die relative Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Fehlers ausdrückt, unbekannt ist, so bleibt natürlich auch die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen gegebene Grenzen falle, unmöglich: dessenungeachtet muss, wenn nur allemal grössere Fehler geringere (wenigstens nicht grössere) Wahrscheinlichkeit haben als kleinere, die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen die Grenzen $-x$ und $+x$ falle, nothwendig grösser (wenigstens nicht kleiner) sein, als $\frac{x}{m}\sqrt{\frac{1}{4}}$, wenn x kleiner ist als $m\sqrt{\frac{2}{3}}$, und nicht kleiner als $1-\frac{4mm}{9xx}$, wenn x grösser ist als $m\sqrt{\frac{2}{3}}$, wobei m den bei den Beobachtungen zu befürchtenden mittlern Fehler bedeutet. Für $x=m\sqrt{\frac{2}{3}}$ fallen wie man sieht beide Ausdrücke zusammen.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 32. Seite 313 bis 318. 1823. Februar 24.

Eine am 2. Febr. der Königl. Societät von Hrn. Hofr. Gauss überreichte Vorlesung, überschrieben

Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars posterior,

steht im unmittelbaren Zusammenhange mit einer frühern, wovon in diesen Blättern [1821 Februar 26] eine Anzeige gegeben ist. Wir bringen darüber nur kurz in Erinnerung, dass ihr Zweck war, die sogenannte Methode der kleinsten Quadrate auf eine neue Art zu begründen, wobei diese Methode nicht näherungsweise, sondern in mathematischer Schärfe, nicht mit der Beschränkung auf den Fall einer sehr grossen Anzahl von Beobachtungen, und nicht abhängig von einem hypothetischen Gesetze für die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler, sondern in vollkommener Allgemeinheit, als die zweckmässigste Combinationsart der Beobachtungen erscheint. Der gegenwärtige zweite Theil der Untersuchung enthält nun eine weitere Ausführung dieser Lehre in einer Reihe von Lehrsätzen und Problemen, die damit in genauester Verbindung stehen. Es würde der Einrichtung dieser Blätter nicht angemessen sein, diesen Untersuchungen hier Schritt vor Schritt zu folgen, auch unnöthig, da die Abhandlung selbst bereits unter der Presse ist. Wir begnügen uns daher, nur die Gegenstände von einigen dieser Untersuchungen, die sich leichter isolirt herausheben lassen, hier anzuführen.

Die Werthe der unbekannten Grössen, welche der Methode der kleinsten Quadrate gemäss sind, und die man die *sichersten Werthe* nennen kann, werden vermittelst einer bestimmten Elimination gefunden, und die diesen Bestimmungen beizulegenden Gewichte vermittelst einer unbestimmten Elimination, wie dies schon aus der *Theoria Motus Corporum Coelestium* bekannt ist: auf eine neue Art wird hier *a priori* bewiesen, dass unter den obwaltenden Voraussetzungen diese Elimination allemal möglich ist. Zugleich wird eine merkwürdige Symmetrie unter den bei der unbestimmten Elimination hervorgehenden Coëfficienten nachgewiesen.

So leicht und klar sich diese Eliminationsgeschäfte im Allgemeinen übersehen lassen, so ist doch nicht zu läugnen, dass die wirkliche numerische Ausführung, bei einer beträchtlichen Anzahl von unbekannten Grössen, beschwerlich wird. Was die *bestimmte* Elimination, die zur Ausmittelung der sichersten Werthe für die unbekannten Grössen zureicht, betrifft, so hat der Verfasser ein Verfahren, wodurch die wirkliche Rechnung, so viel es nur die Natur der Sache verträgt, abgekürzt wird, bereits in der *Theoria Motus Corporum Coelestium* angedeutet, und in einer im ersten Bande der *Commentt. Rec. Soc. R. Gott.* befindlichen Abhandlung, *Disquisitio de elementis ellipticis Palladis*, ausführlich entwickelt. Dieses Verfahren gewährt zugleich den Vortheil, dass das Gewicht der Bestimmung der einen unbekannten Grösse, welche man bei dem Geschäft als die letzte betrachtet hat, sich von selbst mit ergibt. Da nun die Ordnung unter den unbekannten Grössen gänzlich willkürlich ist, und man also welche man will, als die letzte behandeln kann, so ist dies Verfahren in allen Fällen zureichend, wo nur für Eine der unbekannten Grössen das Gewicht mit verlangt wird, und die beschwerliche unbestimmte Elimination wird dann umgangen.

Die seitdem bei den rechnenden Astronomen so allgemein gewordene Gewohnheit, die Methode der kleinsten Quadrate auf schwierige astronomische Rechnungen anzuwenden, wie auf die vollständige Bestimmung von Cometenbahnen, wobei die Anzahl der unbekannten Grössen bis auf sechs steigt, hat indess das Bedürfniss, das Gewicht der sichersten Werthe *aller* unbekannten Grössen auf

eine bequemere Art als durch die unbestimmte Elimination, zu finden, fühlbar gemacht, und da die Bemühungen einiger Geometer*) keinen Erfolg gehabt hatten, so hat man sich nur so geholfen, dass man den oben erwähnten Algorithmus so viele male mit veränderter Ordnung der unbekannten Grössen durchführte, als unbekannte Grössen waren, indem man jeder einmal den letzten Platz anwies. Es scheint uns jedoch, dass durch dieses kunstlose Verfahren in Vergleichung mit der unbestimmten Elimination in Rücksicht auf Kürze der Rechnung nichts gewonnen wird. Der Verfasser hat daher diesen wichtigen Gegenstand einer besondern Untersuchung unterworfen, und einen neuen Algorithmus zur Bestimmung der Gewichte der Werthe *sämmtlicher* unbekannten Grössen mitgetheilt, der alle Geschmeidigkeit und Kürze zu haben scheint, welcher die Sache ihrer Natur nach fähig ist.

Der sicherste Werth einer Grösse, welche eine gegebene Function der unbekannten Grössen der Aufgabe ist, wird gefunden, indem man für letztere ihre durch die Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen sichersten Werthe substituirt. Allein eine bisher noch nicht behandelte Aufgabe ist es, wie das jener Bestimmung beizulegende Gewicht zu finden sei. Die hier gegebene Auflösung dieser Aufgabe verdient um so mehr von den rechnenden Astronomen beherzigt zu werden, da sich findet, dass mehrere derselben dabei früher auf eine nicht richtige Art zu Werke gegangen sind.

Die Summe der Quadrate der Unterschiede zwischen den unmittelbar beobachteten Grössen, und denjenigen Werthen, welche ihre Ausdrücke, als Functionen der unbekannten Grössen, durch Substitution der sichersten Werthe für letztere erhalten (welche Quadrate, im Fall die Beobachtungen ungleiche Zuverlässigkeit haben, vor der Addition erst noch durch die respectiven Gewichte multiplicirt werden müssen) bildet bekanntlich ein absolutes Minimum. Sobald man daher einer der unbekannten Grössen einen Werth beilegt, der von dem sichersten verschieden ist, wird ein ähnliches Aggregat, wie man auch die übrigen unbekannten Grössen bestimmen mag, allezeit grösser ausfallen, als das erwähnte Minimum. Allein die übrigen unbekannten Grössen werden sich nur auf Eine Art so bestimmen lassen, dass die Vergrösserung des Aggregats so klein wie möglich, oder dass das Aggregat selbst ein relatives Minimum werde. Diese von dem Verfasser hier ausgeführte Untersuchung führt zu einigen interessanten Wahrheiten, die über die ganze Lehre noch ein vielseitigeres Licht verbreiten.

*) z. B. Plana's. Siehe Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften Band 6, S. 258.

Es fügt sich zuweilen, dass man erst, nachdem man schon eine ausgedehnte Rechnung über eine Reihe von Beobachtungen in allen Theilen durchgeführt hat, Kenntniss von einer neuen Beobachtung erhält, die man gern noch mit zugezogen hätte. Es kann in vielen Fällen erwünscht sein, wenn man nicht nöthig hat, deshalb die ganze Eliminationsarbeit von vorne wieder anzufangen, sondern im Stande ist, die durch das Hinzukommen der neuen Beobachtung entstehende Modification in den sichersten Werthen und deren Gewichten zu finden. Der Verfasser hat daher diese Aufgabe hier besonders abgehandelt, eben so wie die verwandte, wo man einer schon angewandten Beobachtung hintennach ein anderes Gewicht, als ihr beigelegt war, zu ertheilen sich veranlasst sieht, und, ohne die Rechnung von vorne zu wiederholen, die Veränderungen der Endresultate zu erhalten wünscht.

Wie der *wahrscheinliche* Fehler einer Beobachtungsgattung (als bisher üblicher Maassstab ihrer Unsicherheit) aus einer hinlänglichen Anzahl wirklicher Beobachtungsfehler näherungsweise zu finden sei, hatte der Verfasser in einer besondern Abhandlung in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften [1816. März u. April] gezeigt: dieses Verfahren, so wie der Gebrauch des wahrscheinlichen Fehlers überhaupt, ist aber von der hypothetischen Form der Grösse der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Fehler abhängig, und musste es sein. Im ersten Theile der gegenwärtigen Abhandlung ist nun zwar gezeigt, wie aus denselben Datis der mittlere Fehler der Beobachtungen (als zweckmässiger Maassstab ihrer Ungenauigkeit) näherungsweise gefunden wird. Allein immer bleibt hiebei die Bedenklichkeit übrig, dass man nach aller Schärfe selten oder fast nie im Besitz der Kenntniss der wahren Grösse von einer Anzahl wirklicher Beobachtungsfehler sein kann. Bei der Ausübung hat man dafür bisher immer die Unterschiede zwischen dem, was die Beobachtungen ergeben haben, und den Resultaten der Rechnung nach den durch die Methode der kleinsten Quadrate gefundenen sichersten Werthen der unbekannten Grössen, wovon die Beobachtungen abhangen, zum Grunde gelegt. Allein da man nicht berechtigt ist, die sichersten Werthe für die wahren Werthe selbst zu halten, so überzeugt man sich leicht, dass man durch dieses Verfahren allemal den wahrscheinlichen und mittlern Fehler *zu klein* finden muss, und daher den Beobachtungen und den daraus gezoge-

nen Resultaten eine grössere Genauigkeit beilegt, als sie wirklich besitzen. Freilich hat in dem Falle, wo die Anzahl der Beobachtungen vielemale grösser ist als die der unbekannten Grössen, diese Unrichtigkeit wenig zu bedeuten; allein theils erfordert die Würde der Wissenschaft, dass man vollständig und bestimmt übersehe, wieviel man hierdurch zu fehlen Gefahr läuft, theils sind auch wirklich öfters nach jenem fehlerhaften Verfahren Rechnungsresultate in wichtigen Fällen aufgestellt, wo jene Voraussetzung nicht Statt fand. Der Verfasser hat daher diesen Gegenstand einer besondern Untersuchung unterworfen, die zu einem sehr merkwürdigen höchst einfachen Resultate geführt hat. Man braucht nemlich den nach dem angezeigten fehlerhaften Verfahren gefundenen mittlern Fehler, um ihn in den richtigen zu verwandeln, nur mit

$$\sqrt{\frac{\pi-\rho}{\pi}}$$

zu multipliciren, wo π die Anzahl der Beobachtungen und ρ die Anzahl der unbekannten Grössen bedeutet.

Die letzte Untersuchung betrifft noch die Ausmittelung des Grades von Genauigkeit, welcher dieser Bestimmung des mittlern Fehlers selbst beigelegt werden muss: die Resultate derselben müssen aber in der Abhandlang selbst nachgelesen werden.

Göttingische gelehrte Anzeigen. Stück 153. Seite 1521 bis 1527. 1826. September 25.

Am 16. September überreichte der Herr Hofr. Gauss der königl. Societät eine Vorlesung:

Supplementum Theoriae Combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae.

Bei allen frühern Arbriten über die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die zweckmässigste Benutzung der Beobachtungen, und namentlich auch in der Behandlung dieses Gegenstandes im fünften Bande der *Commentationes recentiores* liegt in Beziehung auf die Form der Hauptaufgabe eine bestimmte Voraussetzung zum Grunde, die allerdings den meisten in der Ausübung vorkommenden Fällen angemessen ist. Diese Voraussetzung besteht darin, dass die beobachteten Grössen auf eine bekannte Art von gewissen unbekannten Grössen (Elementen) abhängen, d. i. bekannte Functionen dieser Elemente sind. Die Anzahl dieser Elemente muss, damit die Aufgabe überhaupt hierher gehöre, kleiner sein, als die Anzahl der beobachteten Grössen, also diese selbst abhängig von einander.

Inzwischen sind doch auch die Fälle nicht selten, wo die gedachte Voraussetzung nicht unmittelbar Statt findet, d. i. wo die beobachteten Grössen noch nicht in der Form von bekannten Functionen gewisser unbekannter Elemente gegeben sind, und wo man auch nicht sogleich sieht, wie jene sich in eine solche Form bringen lassen; wo hingegen zum Ersatz die gegenseitige Abhängigkeit der beobachteten Grössen (die natürlich auf irgend eine Weise gegeben sein muss) durch gewisse Bedingungsgleichungen gegeben ist, welche die wahren Werthe von jenen, der Natur der Sache nach, nothwendig genau Genüge leisten müssen. Zwar sieht man bei näherer Betrachtung bald ein, dass dieser Fall von dem andern nicht wesentlich, sondern bloss in der Form verschieden ist, und sich wirklich, der Theorie nach leicht, auf denselben zurückführen lässt; allein häufig bleibt dies doch ein unnatürlicher Umweg, der in der Anwendung viel beschwerlichere Rechnungen herbeiführt, als eine eigne der ursprünglichen Gestalt der Aufgabe besonders angemessene Auflösung. Diese ist daher der Gegenstand der gegenwärtigen Abhandlung, und die Auflösung der Aufgabe, welche sie als ein selbstständiges von der frühern Abhandlung unabhängiges Ganze gibt, hat ihrerseits eine solche Geschmeidigkeit, dass es sogar in manchen Fällen vortheilhaft sein kann, sie selbst da anzuwenden, wo die bei der ältern Methode zum Grunde liegende Voraussetzung schon von selbst erfüllt war.

Die Hauptaufgabe stellt sich hier nun unter folgender Gestalt dar. Wenn von den Grössen v, v', v'' u. s. w., zwischen welchen ein durch eine oder mehrere Bedingungsgleichungen gegebener Zusammenhang Statt findet, eine andere auf irgend eine Art abhängig ist, z. B. durch die Function u ausgedrückt werden kann, so wird eben dieselbe auch auf unendlich viele andere Arten aus jener bestimmt, oder durch unendlich viele andere Functionen, statt u, ausgedrückt werden können, die aber natürlich alle einerlei Resultate geben, in so fern die wahren Werthe von v, v', v'' u. s. w., welche allen Bedingungsgleichungen Genüge leisten, substituirt werden. Hat man aber nur genäherte Werthe von v, v', v'' u. s. w., wie sie Beobachtungen von beschränkter Genauigkeit immer nur liefern können, so

können auch die daraus abgeleiteten Grössen auf keine absolute Richtigkeit Anspruch machen: die verschiedenen für u angewandten Functionen werden, allgemein zu reden, ungleiche, aber was die Hauptsache ist, ungleich zuverlässige Resultate geben. Die Aufgabe ist nun, aus der unendlichen Mannigfaltigkeit von Functionen, durch welche die unbekannte Grösse ausgedrückt werden kann, diejenige auszuwählen, bei deren Resultat die möglich kleinste Unzuverlässigkeit zu befürchten bleibt.

Die Abhandlung gibt eigentlich *zwei* Auflösungen dieser Aufgabe. Die erste Auflösung erreicht das Ziel auf dem kürzesten Wege, wenn wirklich nur Eine unbekannte von den Beobachtungen auf eine vorgeschriebene Art abhängige Grösse abzuleiten ist. Allein die nähere Betrachtung dieser Auflösung führt zugleich auf das merkwürdige Theorem, dass man für die unbekannte Grösse genau denselben Werth, welcher aus der zweckmässigsten Combination der Beobachtungen folgt, erhält, wenn man an die Beobachtungen gewisse nach bestimmten Regeln berechnete Veränderungen anbringt, und sie dann in irgend einer beliebigen Function, welche die unbekannte Grösse ausdrückt, substituirt. Diese Veränderungen haben neben der Eigenschaft, dass sie allen Bedingungsgleichungen Genüge leisten, noch die, dass unter allen denkbaren Systemen, welche dasselbe thun, die Summe ihrer Quadrate (in so fern die Beobachtungen als gleich zuverlässig vorausgesetzt wurden) die möglich kleinste ist. Man sieht also, dass hierdurch zugleich eine neue Begründung der Methode der kleinsten Quadrate gewonnen wird, und dass diese von der Function u ganz unabhängige *Ausgleichung* der Beobachtungen eine zweite Auflösungsart abgibt, die vor der ersten einen grossen Vorzug hat, wenn mehr als Eine unbekannte Grösse aus den Beobachtungen auf die zweckmässigste Art abzuleiten ist: in der That werden die Beobachtungen dadurch zu *jeder* von ihnen zu machenden Anwendung fertig vorbereitet. Nur musste bei dieser zweiten Auflösung noch eine besondere Anleitung hinzukommen, den Grad der Genauigkeit, der bei jeder einzelnen Anwendung erreicht wird, zu bestimmen. Für dies alles enthält die Abhandlung vollständige und nach Möglichkeit einfache Vorschriften, die natürlich hier keines Auszuges fähig sind. Eben so wenig können wir hier in Beziehung auf die, nach der Entwicklung der Hauptaufgaben, noch ausgeführten anderweitigen Untersuchungen, welche mit dem Gegenstande in innigem Zusammenhange stehen, uns in das Einzelne einlassen. Nur das Eine merkwürdige Theorem führen wir hier an, dass

die Vorschriften zur vollständigen Ausgleichung der Beobachtungen immer einerlei Resultat geben, sie mögen auf die ursprünglichen Beobachtungen selbst, oder auf die bereits einstweilen *unvollständig* ausgeglichenen Beobachtungen angewandt werden, in so fern dieser Begriff in der in der Abhandlung näher bestimmten Bedeutung genommen wird, unter welcher, als specieller Fall, derjenige begriffen ist, wo mit den Beobachtungen schon eine zwar vorschriftsmässig ausgeführte, aber nur einen Theil der Bedingungsgleichungen berücksichtigende Ausgleichung vorgenommen war.

Den letzten Theil der Abhandlung machen ein paar mit Sorgfalt ausgearbeitete Beispiele der Anwendung der Methode aus, die theils von den geodätischen Messungen des Generals von Krayenhoff, theils von der vom Verfasser selbst im Königreich Hannover ausgeführten Triangulirung entlehnt sind, und die dazu dienen können, sowohl die Anwendung dieser Theorie mehr zu erläutern, als auch manche, dergleichen Messungen betreffende, Umstände überhaupt in ein helleres Licht zu stellen.

Die trigonometrischen Messungen gehören ganz besonders in das Feld, wo die Wahrscheinlichkeitsrechnung Anwendung findet, und namentlich in derjenigen Form Anwendung findet, die in der gegenwärtigen Abhandlung entwickelt ist. Gerade hier ist es Regel, dass mehr beobachtet wird, als unumgänglich nöthig ist, und dass so die Messungen einander vielfältig controlliren. Nur durch die Benutzung der strengen Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann man von diesem Umstande den Vortheil ganz ziehen, der sich davon ziehen lässt, und den Resultaten die grösste Genauigkeit geben, deren sie fähig sind. Ausserdem aber geben jene Grundsätze zugleich das Mittel, die Genauigkeit der Messungen selbst, und die Zulässigkeit der darauf gegründeten Resultate zu bestimmen. Endlich dienen sie dazu, bei der Anordnung des Dreiecks-systems, aus mehreren, unter denen man vielleicht die Wahl hat, das zweckmässigste auszuwählen. Und alles dieses nach festen sichern Regeln, mit Ausschliessung aller Willkürlichkeiten. Allein sowohl die sichere Würdigung, als die vollkommenste Benutzung der Messungen ist nur dann möglich, wenn sie in reiner Autenthicität und Vollständigkeit vorliegen, und es wäre daher sehr zu wünschen, dass alle grösseren auf besondere Genauigkeit Anspruch machenden Messungen dieser Art immer mit aller nöthigen Ausführlichkeit bekannt gemacht werden möchten. Nur zu gewöhnlich ist das Gegentheil, wo nur Endresultate für die einzelnen gemes-

senen Winkel mitgetheilt werden. Wenn solche Endresultate nach richtigen Grundsätzen gebildet werden, indem man durchaus alle einzelnen Beobachtungsreihen, die nicht einen durchaus unstatthaften Fehler gewiss enthalten, dazu concurriren lässt, so ist der Nachtheil freilich lange nicht so gross, als wenn man etwa nur diejenigen Reihen beibehält, die am besten zu den nahe liegenden Prüfungsmitteln passen, welche die Summen der Winkel jedes Dreiecks und die Summen der Horizontalwinkel um jeden Punkt herum darbieten. Wo dies durchaus verwerfliche Verfahren angewandt ist, sei es aus Unbekanntschaft mit den wahren Grundsätzen einer richtigen Theorie, oder aus dem geheimen Wunsche, den Messungen das Ansehen grösserer Genauigkeit zu geben, geht der Maassstab zu einer gerechten Würdigung der Beobachtungen und der aus ihnen abzuleitenden Resultate verloren; die gewöhnliche Prüfung nach den Winkelsummen in den einzelnen Dreiecken, und bei den Punkten, wo die gemessenen Winkel den ganzen Horizont umfassen, scheint dann eine Genauigkeit der Messungen zu beweisen, von der sie vielleicht sehr weit entfernt sind, und wenn andere Prüfungsmittel, durch die Seitenverhältnisse in geschlossenen Polygonen oder durch Diagonalrichtungen, vorhanden sind, werden diese die Gewissheit des Daseins von viel grössern Fehlern verrathen. Umgekehrt aber, wenn die zuletzt erwähnte Voraussetzung Statt findet, und das Ausgleichen der Beobachtungen in Beziehung auf die Prüfungsmittel ohne die sichern Vorschriften der Wahrscheinlichkeitsrechnung versucht ist, wo es immer ein Herumtappen im Dunkeln bleiben muss, und grössere, oft viel grössere, Correctionen herbeiführt, als nöthig sind, kann leicht dadurch ein *zu* ungünstiges Urtheil über die Messungen veranlasst werden. Diese Bemerkungen zeigen die Wichtigkeit sowohl einer hinlänglich ausführlichen Bekanntmachung, als einer auf strenge Principien gegründeten mathematischen Combination der geodätischen Messungen: sie gelten aber offenbar mehr oder weniger bei Beobachtungen jeder Art, astronomischen, physikalischen u. s. w., die sich auf das Quantitative beziehen, insofern die Mannigfaltigkeit der dabei Statt findenden Umstände zu wechselseitigen Controllen Mittel darbietet.

Zeitschrift für Astronomie herausgegeben von B. von Lindenau und J. G. F. Bohnenberger.
Erster Band. Heft für März und April 1816.

Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen.

1.

Bei der Begründung der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate wird angenommen, dass die Wahrscheinlichkeit eines Beobachtungsfehlers Δ durch die Formel

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-hh\Delta\Delta}$$

ausgedrückt wird, wo π den halben Kreisumfang, e die Basis der hyperbolischen Logarithmen, auch h eine Constante bedeutet, die man nach Art. 178 der *Theoria Motus Corporum Coelestium* als das Maass der Genauigkeit der Beobachtungen ansehen kann. Bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Aus mittelung der wahrscheinlichsten Werthe derjenigen Grössen, von welchen die Beobachtungen abhängen, braucht man den Werth der Grösse h gar nicht zu kennen; auch das *Verhältniss* der Genauigkeit der Resultate zu der Genauigkeit der Beobachtungen ist von h unabhängig. Inzwischen ist immer eine Kenntniss dieser Grösse selbst interessant und lehrreich, und ich will daher zeigen, wie man durch die Beobachtungen selbst zu einer solchen Kenntniss gelangen mag.

2.

Ich lasse zuerst einige den Gegenstand erläuternde Bemerkungen vorausgehen. Der Kürze wegen bezeichne ich den Werth des Integrals

$$\int \frac{2e^{-tt}\,dt}{\sqrt{\pi}}$$

von $t = 0$ an gerechnet, durch Θt. Einige einzelne Werthe werden von dem Gange dieser Function eine Vorstellung geben. Man hat

$$\begin{aligned}
0{,}5000000 &= \Theta 0{,}4769363 = \Theta\rho \\
0{,}6000000 &= \Theta 0{,}5951161 = \Theta 1{,}247790\rho \\
0{,}7000000 &= \Theta 0{,}7328691 = \Theta 1{,}536618\rho \\
0{,}8000000 &= \Theta 0{,}9061939 = \Theta 1{,}900032\rho \\
0{,}8427008 &= \Theta 1 \qquad\quad = \Theta 2{,}096716\rho \\
0{,}9000000 &= \Theta 1{,}1630872 = \Theta 2{,}438664\rho \\
0{,}9900000 &= \Theta 1{,}8213864 = \Theta 3{,}818930\rho \\
0{,}9990000 &= \Theta 2{,}3276754 = \Theta 4{,}880475\rho \\
0{,}9999000 &= \Theta 2{,}7510654 = \Theta 5{,}768204\rho \\
1 &= \Theta\infty
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler einer Beobachtung zwischen den Grenzen $-\Delta$ und $+\Delta$ liege, oder, ohne Rücksicht auf das Zeichen, nicht grösser als Δ sei, ist

$$= \int \frac{he^{-hhxx}\,dx}{\sqrt{\pi}}$$

wenn man das Integral von $x = -\Delta$ bis $x = +\Delta$ ausdehnt, oder doppelt so gross, wie dasselbe Integral von $x = 0$ bis $x = \Delta$ genommen, mithin

$$= \Theta h\Delta$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler nicht unter $\frac{\rho}{h}$ sei, ist also $= \frac{1}{2}$, oder der Wahrscheinlichkeit des Gegentheils gleich: wir wollen diese Grösse $\frac{\rho}{h}$ den *wahrscheinlichen Fehler* nennen, und mit r bezeichnen. Hingegen ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler über $2{,}4386641r$ hinausgehe, nur $\frac{1}{10}$; die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler über $3{,}818930r$ steige, nur $\frac{1}{100}$ u. s. w.

3.

Wir wollen nun annehmen, dass bei m wirklich angestellten Beobachtungen die Fehler α, β, γ, δ u. s. w. begangen sind, und untersuchen, was sich daraus in Beziehung auf den Werth von h und r schliessen lasse. Macht man zwei

Voraussetzungen, indem man den wahren Werth von h entweder $= H$ oder $= H'$ setzt, so verhalten sich die Wahrscheinlichkeiten, mit welchen sich in denselben die Fehler α, β, γ, δ u. s. w. erwarten liessen, resp. wie

$$\begin{aligned}
&He^{-HH\alpha\alpha}.He^{-HH\beta\beta}.He^{-HH\gamma\gamma}.\text{ u. s. w.} \\
\text{zu }\ &H'e^{-H'H'\alpha\alpha}.H'e^{-H'H'\beta\beta}.H'e^{-H'H'\gamma\gamma}.\text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$

d. i. wie

$$H^m e^{-HH(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{u. s. w.})} \quad \text{zu} \quad H'^m e^{-H'H'(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{u. s. w.})}$$

In demselben Verhältnisse stehen folglich die Wahrscheinlichkeiten, dass H oder H' der wahre Werth von h war, *nach* dem Erfolge jener Fehler (*T. M. C. C.* Art. 176); oder die Wahrscheinlichkeit jedes Werthes von h ist der Grösse

$$h^m e^{-hh(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{u. s. w.})}$$

proportional. Der *wahrscheinlichste* Werth von h ist folglich derjenige, für welchen diese Grösse ein Maximum wird, welchen man nach bekannten Regeln

$$= \sqrt{\frac{m}{2(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{u. s. w.})}}$$

findet. Der wahrscheinlichste Werth von r wird folglich

$$\begin{aligned}
&= \rho\sqrt{\frac{2(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{u. s. w.})}{m}} \\
&= 0{,}6744897\sqrt{\frac{\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{u. s. w.}}{m}}
\end{aligned}$$

Dies Resultat ist allgemein, m mag gross oder klein sein.

4.

Man begreift leicht, dass man von dieser Bestimmung von h und r desto weniger berechtigt ist, viele Genauigkeit zu erwarten, je kleiner m ist. Entwickeln wir daher den Grad von Genauigkeit, welchen man dieser Bestimmung beizulegen hat, für den Fall, wo m eine grosse Zahl ist. Wir bezeichnen den gefundenen wahrscheinlichen Werth von h

$$\sqrt{\frac{m}{2(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\text{u. s. w.})}}$$

Kürze halber mit H, und bemerken, dass die Wahrscheinlichkeit, H sei der

wahre Werth von h, zu der Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth $= H+\lambda$ sei, sich verhält, wie

$$H^m e^{-\frac{m}{2}} : (H+\lambda)^m e^{-\frac{m(H+\lambda)^2}{2HH}}$$

oder wie

$$1 : e^{-\frac{\lambda\lambda m}{HH}(1-\frac{1}{3}\cdot\frac{\lambda}{H}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\lambda\lambda}{HH}-\frac{1}{5}\cdot\frac{\lambda^3}{H^3}\cdots)}$$

Das zweite Glied wird gegen das erste nur dann noch merklich sein, wenn $\frac{\lambda}{H}$ ein kleiner Bruch ist, daher wir uns erlauben dürfen, anstatt des angegebenen Verhältnisses dieses zu gebrauchen

$$1 : e^{-\frac{\lambda\lambda m}{HH}}$$

Dies heisst nun eigentlich so viel: die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth von h zwischen $H+\lambda$ und $H+\lambda+\mathrm{d}\lambda$ liege, ist sehr nahe

$$= Ke^{-\frac{\lambda\lambda m}{HH}}\mathrm{d}\lambda$$

wo K eine Constante ist, die so bestimmt werden muss, dass das Integral

$$\int Ke^{-\frac{\lambda\lambda m}{HH}}\mathrm{d}\lambda$$

zwischen den zulässigen Grenzen von λ genommen, $= 1$ werde. Statt solcher Grenzen ist es hier, wo wegen der Grösse von m offenbar

$$e^{-\frac{\lambda\lambda m}{HH}}$$

unmerklich wird, sobald $\frac{\lambda}{H}$ aufhört ein kleiner Bruch zu sein, erlaubt, die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ zu nehmen, wodurch

$$K = \frac{1}{H}\sqrt{\frac{m}{\pi}}$$

wird. Mithin ist die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth von h zwischen $H-\lambda$ und $H+\lambda$ liege,

$$= \Theta(\tfrac{\lambda}{H}\sqrt{m})$$

also jene Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$, wenn

$$\tfrac{\lambda}{H}\sqrt{m} = \rho \text{ ist.}$$

Es ist also eins gegen eins zu wetten, dass der wahre Werth von h

zwischen $H(1-\frac{\rho}{\sqrt{m}})$ und $H(1+\frac{\rho}{\sqrt{m}})$

liegt, oder dass der wahre Werth von r

zwischen $\frac{R}{1-\frac{\rho}{\sqrt{m}}}$ und $\frac{R}{1+\frac{\rho}{\sqrt{m}}}$

falle, wenn wir durch R den im vorhergehenden Art. gefundenen wahrscheinlichsten Werth von r bezeichnen. Man kann diese Grenzen die *wahrscheinlichen Grenzen der wahren Werthe von h und r* nennen; offenbar dürfen wir für die wahrscheinlichen Grenzen des wahren Werthes von r hier auch setzen

$$R(1-\tfrac{\rho}{\sqrt{m}}) \text{ und } R(1+\tfrac{\rho}{\sqrt{m}})$$

5.

Wir sind bei der vorhergehenden Untersuchung von dem Gesichtspunkte ausgegangen, dass wir α, β, γ, δ u. s. w. als bestimmte und gegebene Grössen betrachteten, und die Grösse der Wahrscheinlichkeit suchten, dass der wahre Werth von h oder r zwischen gewissen Grenzen liege. Man kann die Sache auch von einer andern Seite betrachten, und unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungsfehler irgend einem bestimmten Wahrscheinlichkeitsgesetze unterworfen sind, die Wahrscheinlichkeit bestimmen, mit welcher erwartet werden kann, dass die Summe der Quadrate von m Beobachtungsfehlern zwischen gewisse Grenzen falle. Diese Aufgabe, unter der Bedingung, dass m eine grosse Zahl sei, ist bereits von Laplace aufgelöst, eben so wie diejenige, wo die Wahrscheinlichkeit gesucht wird, dass die Summe von m Beobachtungsfehlern selbst zwischen gewisse Grenzen falle. Man kann leicht diese Untersuchung noch mehr generalisiren; ich begnüge mich, hier das Resultat anzuzeigen.

Es bezeichne φx die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungsfehlers x, so dass $\int \varphi x.\mathrm{d}x = 1$ wird, wenn man das Integral von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ ausdehnt. Zwischen denselben Grenzen wollen wir allgemein den Werth des Integrals

$$\int \varphi x.x^n \mathrm{d}x$$

durch K^n bezeichnen*). Es sei ferner S^n die Summe

$$\alpha^n+\beta^n+\gamma^n+\delta^n+\text{ u. s. w.}$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. w. unbestimmt m Beobachtungsfehler bedeuten; die Theile jener Summe sollen, auch für ein ungerades n, alle positiv genommen werden.

Sodann ist mK^n der wahrscheinlichste Werth von S^n und die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Werth von S^n zwischen die Grenzen $mK^n-\lambda$ und $mK^n+\lambda$ falle,

$$= \Theta\frac{\lambda}{\sqrt{[2m(K^{2n}-K^nK^n)]}}$$

Folglich sind die wahrscheinlichen Grenzen von S^n

$$mK^n-\rho\sqrt{[2m(K^{2n}-K^nK^n)]} \text{ und } mK^n+\rho\sqrt{[2m(K^{2n}-K^nK^n)]}$$

Dieses Resultat gilt allgemein für jedes Gesetz der Beobachtungsfehler. Wenden wir es auf den Fall an, wo

$$\varphi x = \frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-hhxx}$$

gesetzt wird, so finden wir

$$K^n = \frac{\Pi\frac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}}$$

die Charakteristik Π in der Bedeutung der *Disquisitiones generales circa seriem infinitam* (Comm. nov. soc. Gotting. T. II.) genommen (M. 5. Art. 28. der angef. Abh.) Also

$$K = 1, \quad K' = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \quad K'' = \frac{1}{2hh}, \quad K''' = \frac{1}{h^3\sqrt{\pi}}$$

$$K^{\text{IV}} = \frac{1\cdot 3}{4h^4}, \quad K^{\text{V}} = \frac{1\cdot 2}{h^5\sqrt{\pi}}, \quad K^{\text{VI}} = \frac{1\cdot 3\cdot 5}{8h^6}, \quad K^{\text{VII}} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{h^7\sqrt{\pi}} \text{ u. s. w.}$$

Es ist folglich der wahrscheinlichste Werth von S^n

$$\frac{m\Pi\frac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}}$$

und die wahrscheinlichen Grenzen des wahren Werthes von S^n

*) Oder vielmehr, das Integral $\int\varphi x.x^n\mathrm{d}x$ zwischen den Grenzen $x=0$ bis $x=\infty$ soll durch $\frac{1}{2}K^n$ bezeichnet werden. [Handschriftliche Bemerkung.]

$$\frac{m\Pi\frac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}}\left\{1-\rho\sqrt{\left(\frac{2}{m}.\left(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2}).\sqrt{\pi}}{(\Pi\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)\right)}\right\}$$

und

$$\frac{m\Pi\frac{1}{2}(n-1)}{h^n\sqrt{\pi}}\left\{1+\rho\sqrt{\left(\frac{2}{m}.\left(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2}).\sqrt{\pi}}{(\Pi\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)\right)}\right\}$$

Setzt man also, wie oben,

$$\frac{\rho}{h} = r$$

so dass r den wahrscheinlichen Beobachtungsfehler vorstellt, so ist der wahrscheinlichste Werth von

$$\rho\sqrt[n]{\frac{S^n\sqrt{\pi}}{m\Pi\frac{1}{2}(n-1)}}$$

offenbar $= r$; und die wahrscheinlichen Grenzen des Werthes jener Grösse

$$r\left\{1-\frac{\rho}{n}\sqrt{\left(\frac{2}{m}.\left(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2}).\sqrt{\pi}}{(\Pi\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)\right)}\right\}$$

und

$$r\left\{1+\frac{\rho}{n}\sqrt{\left(\frac{2}{m}.\left(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2}).\sqrt{\pi}}{(\Pi\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)\right)}\right\}$$

Es ist also auch eins gegen eins zu wetten, dass r zwischen den Grenzen

$$\rho\sqrt[n]{\frac{S^n\sqrt{\pi}}{m\Pi\frac{1}{2}(n-1)}}\left\{1-\frac{\rho}{n}\sqrt{\left(\frac{2}{m}.\left(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2}).\sqrt{\pi}}{(\Pi\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)\right)}\right\}$$

und

$$\rho\sqrt[n]{\frac{S^n\sqrt{\pi}}{m\Pi\frac{1}{2}(n-1)}}\left\{1+\frac{\rho}{n}\sqrt{\left(\frac{2}{m}.\left(\frac{\Pi(n-\frac{1}{2}).\sqrt{\pi}}{(\Pi\frac{1}{2}(n-1))^2}-1\right)\right)}\right\}$$

liege. Für $n=2$ sind diese Grenzen

$$\rho\sqrt{\frac{2S''}{m}}\left\{1-\frac{\rho}{\sqrt{m}}\right\} \text{ und } \rho\sqrt{\frac{2S''}{m}}\left\{1+\frac{\rho}{\sqrt{m}}\right\}$$

ganz mit den oben (Art. 4) gefundenen übereinstimmend. Allgemein hat man für ein gerades n die Grenzen

$$\rho\sqrt{2}.\sqrt[n]{\frac{S^n}{m.1.3.5.7....(n-1)}}\left\{1-\frac{\rho}{n}\sqrt{\left(\frac{2}{m}.\left(\frac{(n+1).(n+3)...(2n-1)}{1.3.5...(n-1)}-1\right)\right)}\right\}$$

und

$$\rho\sqrt{2}.\sqrt[n]{\frac{S^n}{m.1.3.5.7....(n-1)}}\left\{1+\frac{\rho}{n}\sqrt{\left(\frac{2}{m}.\left(\frac{(n+1).(n+3)...(2n-1)}{1.3.5...(n-1)}-1\right)\right)}\right\}$$

und für ein ungerades n folgende

$$\rho\sqrt[n]{\frac{S^n\sqrt{\pi}}{m.1.2.3...\frac{1}{2}(n-1)}}\left\{1-\frac{\rho}{n}\sqrt{\left(\frac{1}{m}.\left(\frac{1.3.5.7...(2n-1)\pi}{(2.4.6...(n-1))^2}-2\right)\right)}\right\}$$

und

$$\rho\sqrt[n]{\frac{S^n\sqrt{\pi}}{m.1.2.3...\frac{1}{2}(n-1)}}\left\{1+\frac{\rho}{n}\sqrt{\left(\frac{1}{m}.\left(\frac{1.3.5.7...(2n-1)\pi}{(2.4.6...(n-1))^2}-2\right)\right)}\right\}$$

6.

Ich füge noch die numerischen Werthe für die einfachsten Fälle bei:

Wahrscheinliche Grenzen von r

I. $0{,}8453473 \quad \frac{S'}{m}.\left(1 \mp \frac{0{,}5095841}{\sqrt{m}}\right)$

II. $0{,}6744897\sqrt[2]{\frac{S''}{m}}.\left(1 \mp \frac{0{,}4769363}{\sqrt{m}}\right)$

III. $0{,}5771897\sqrt[3]{\frac{S'''}{m}}.\left(1 \mp \frac{0{,}4971987}{\sqrt{m}}\right)$

IV. $0{,}5125017\sqrt[4]{\frac{S''''}{m}}.\left(1 \mp \frac{0{,}5507186}{\sqrt{m}}\right)$

V. $0{,}4655532\sqrt[5]{\frac{S^{v}}{m}}.\left(1 \mp \frac{0{,}6355080}{\sqrt{m}}\right)$

VI. $0{,}4294972\sqrt[6]{\frac{S^{vi}}{m}}.\left(1 \mp \frac{0{,}7557764}{\sqrt{m}}\right)$

Man sieht also auch hieraus, dass die Bestimmungsart II von allen die vortheilhafteste ist. Hundert Beobachtungsfehler, nach dieser Formel behandelt, geben nemlich ein eben so zuverlässiges Resultat, wie

114 nach I, 109 nach III, 133 nach IV, 178 nach V, 251 nach VI.

Inzwischen hat die Formel I den Vorzug der allerbequemsten Rechnung, und man mag sich daher derselben, da sie doch nicht viel weniger genau ist als II, immerhin bedienen, wenn man nicht die Summe der Quadrate der Fehler sonst schon kennt, oder zu kennen wünscht.

7.

Noch bequemer, obwohl beträchtlich weniger genau, ist folgendes Verfahren: Man ordne die sämmtlichen m Beobachtungsfehler (absolut genommen) nach ihrer Grösse, und nenne den mittelsten, wenn ihre Zahl ungerade ist, oder das arithmetische Mittel der zwei mittelsten bei gerader Anzahl, M. Es lässt sich zeigen, was aber an diesem Orte nicht weiter ausgeführt werden kann, dass bei einer grossen Anzahl von Beobachtungen r der wahrscheinlichste Werth von M ist, und dass die wahrscheinlichen Grenzen von M

$$r\left(1-e^{pp}\sqrt{\tfrac{\pi}{8m}}\right) \quad \text{und} \quad r\left(1+ee^{pp}\sqrt{\tfrac{\pi}{8m}}\right)$$

sind, oder die wahrscheinlichen Grenzen des Werthes von r

$$M\left(1-e^{pp}\sqrt{\tfrac{\pi}{8m}}\right) \quad \text{und} \quad M\left(1+e^{pp}\sqrt{\tfrac{\pi}{8m}}\right), \quad \text{oder in Zahlen} \quad M\left(1 \mp \frac{0{,}7520974}{\sqrt{m}}\right)$$

Dies Verfahren ist also nur wenig genauer, als die Anwendung der Formel VI, und man müsste 249 Beobachtungsfehler zu Rathe ziehen, um eben so weit zu reichen, wie mit 100 Beobachtungsfehlern nach Formel II.

8.

Die Anwendung einiger von diesen Methoden auf die in Bode's astronomischem Jahrbuche für 1818 S. 234 vorkommenden Fehler bei 48 Beobachtungen der geraden Aufsteigungen des Polarsterns von Bessel gab

$$S' = 60''46, \quad S'' = 110''600, \quad S''' = 250''341118$$

Hieraus folgten die wahrscheinlichsten Werthe von r

nach Formel I	$1''065$,	wahrscheinl. Unsicherheit $= \pm 0''078$
II	$1{,}024$	$\pm 0{,}070$
III	$1{,}001$	$\pm 0{,}072$
nach Art. 7	$1{,}045$	$\pm 0{,}113$

eine Übereinstimmung, wie sie kaum zu erwarten war. Bessel giebt selbst $1''067$, und scheint daher der Formel I gemäss gerechnet zu haben.

NACHLASS.

[ANWENDUNG DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG AUF DIE BESTIMMUNG DER BILANZ FÜR WITWENKASSEN.]

[I.]

[*Allgemeine Uebersicht der Methode.*]

[*Auszug aus einem Votum bei der schriftlichen Abstimmung im Universitäts-Senat.*]

Das vorstehende [hier eingeklammerte] Votum des Herrn Prof. D.: [Das Königl. Univ. Curatorium scheint zu befürchten, dass bei der grossen Anzahl der jetzt vorhandenen Witwen die Kasse über lang oder kurz nicht im Stande sein werde, die jetzt auf 250 Thl. angewachsenen Pensionen zu bestreiten. Es verlangt daher einen Bericht darüber, ob gegründete Ursache zu einer solchen Besorgniss vorhanden sei, und durch welche Mittel die etwa drohende Gefahr abgewendet werden könne. . . .] spricht den eigentlichen *Fragepunkt* so treffend aus, dass ich der ersten Hälfte dieses Votum nur wörtlich beitreten kann. Wenn in Zweifel gezogen ist, ob die Kasse im Stande sein werde, der ihr obliegenden Verpflichtung nachhaltig zu genügen, so ist dies doch wahrlich der ungeeignetste Zeitpunkt, *grössere* Anforderungen an die Kasse zu stellen.

Ich kann mich der öffentlichen Meinung über diese Anstalt noch bis 40 Jahr rückwärts erinnern. Damals schon galt sie für ein herrliches Kleinod der Universität, einzig in seiner Art, und zwar gerade wegen ihrer Eigenthümlichkeiten. *Vollkommene* Freiheit, ob man beitreten wolle oder nicht, ja, mit einer vergleichungsweise geringen Aufopferung, wieder einzutreten, wenn man ausgetreten war; ein sehr geringer Beitrag. Und damals betrug die Pension nur 150 oder 160 Thl. Nicht die Grösse der Pension war das Anziehende, sondern die *liberale Art, wie* dem, der Göttingischer Professor werden konnte, eine sichere Unterstützung einer nachbleibenden Witwe, mit der Aussicht, unter der weisen Verwaltung sie nach und nach noch erhöhet zu erhalten, dargeboten wurde. Wer mehr wünschte, betheiligte sich noch nebenbei in einer andern Witwenkasse. Jetzt ist nun die Pension auf 250 Thl. gestiegen, und die liberale Art ist bis heute dieselbe geblieben. Gebe Gott, dass niemals nöthig werde, an dieser Art *irgend etwas* zu ändern! Zwangsprocente auf das Gehalt, um durch Drehung am Stundenzeiger das zu erhalten, was nur der allmählige Fortschritt des Minutenzeigers gewähren kann, würde nicht blos viel zu unwirksam sein um den Zweck zu erreichen, sondern den noblen Charakter der Anstalt ganz zerstören.

Ich bin demnach der Meinung, die sämmtlichen Veränderungsvorschläge des Herrn Universitätsraths O. für den Augenblick ganz auf sich beruhen zu lassen; es ist in dem uns zu lebhaften Danke verpflichtenden P. M. gezeigt, dass eine nahe Gefahr nicht vorhanden ist. Ja selbst wenn in den nächsten Jahren durch noch neu hinzukommende Witwen anstatt des letzten noch immer erfreulichen Überschusses einiges Deficit eintreten sollte, so darf man nicht vergessen, dass ja die gesammelten Überschüsse zum Theil die Bestimmung haben, solche durch vorübergehende Conjuncturen entstandenen Fluctuationen zu decken.

Aber eine *gründliche* Untersuchung halte ich, in Übereinstimmung mit dem Rescript und mit den von Sr. Magnificenz geäusserten Ansichten, allerdings für nothwendig. Selbst bei der heitersten Ansicht, die man von dem Zustande der Gesellschaft haben mag, wird eine solche jedenfalls wenigstens späterhin nothwendig werden müssen, schon aus folgendem Grunde.

Wenn ich, *ehe* eine gründliche auf strengen Calcül gegründete Untersuchung statt gefunden hat, meine *Meinung* aussprechen darf, so glaube ich, dass die jetzige grosse Anzahl der Witwen als anomal betrachtet werden muss. Es ist wahr, dass die Anzahl der theilnehmenden Professoren mit der Anzahl der Witwen in einem gewissen Verhältnisse stehen muss; und dass jetzt die erstere Zahl viel grösser ist als ehedem. Allein der *jetzige* hohe Bestand der Witwen steht damit in gar keinem Zusammenhange. Bleibt die Anzahl der theilnehmenden Professoren fortan immer so gross, so ist dies *ein sehr ernsthaft zu erwägender Punkt*, aber nicht für jetzt, sondern wegen der fernen Zukunft; erst nach 20 oder 30 und mehreren Jahren können die Folgen *davon* sehr sichtbar werden.

Dies vorausgesetzt, ist mit Wahrscheinlichkeit anzunehmen, dass, vielleicht schon nach wenigen Jahren, die Anzahl der Witwen wieder abnehmen, vielleicht bedeutend abnehmen, und also der Bestand der Überschüsse von 8140 Thl. wieder anwachsen, vielleicht bedeutend anwachsen wird. *Ob aber die Anzahl der Witwen z. B. binnen 10 Jahren bis auf oder unter 15 abnehmen wird, ist viel ungewisser.* Gesetzt nun die Überschüsse wären auf 15000 Thl. oder höher angewachsen, die Anzahl der Witwen aber bliebe hartnäckig auf 16 stehen, was soll dann geschehen? Von der einen Seite will man die Überschüsse nicht ins Unendliche anwachsen lassen, von der andern steht das *Statut* einer Vergrösserung der Pension entgegen. Dann *muss* ja eine gründliche Prüfung angestellt werden, ob und *in welchem Maasse* man das *Statut verändern* darf, ohne die Gesellschaft zu gefährden.

Dem Vertrauen womit Sc. Magnificenz und einige der Herren Collegen mich beehren, indem sie wünschen, dass ich eine solche Prüfung auf mich nehme, durch welche nemlich eine auf Mortalitätsgesetze und die Wahrscheinlichkeitsrechnung basirte Bilanz zwischen dem Vermögen der Anstalt und ihren Obliegenheiten gezogen werden soll, will ich mich nicht entziehen, muss jedoch folgendes bevorworten.

Erstlich haben von der Langwierigkeit solcher Rechnungen diejenigen Herren eine sehr falsche Vorstellung, welche glauben, dass sie binnen vier Wochen vollendet werden können. Zu einer bestimmten Frist kann ich mich also um so weniger anheischig machen, je kleiner der Theil meiner Zeit sein wird, den ich darauf werde verwenden können.

Zweitens lassen sich die Rechnungen mit Gründlichkeit gar nicht führen, ohne die nöthigen *Data*, wovon zur Zeit *gar Nichts* vorliegt. Worin die erforderlichen Data bestehen, werde ich weiterhin angeben; ohne sie kann ich mich auf gar nichts einlassen; ob, auf welche Weise und wie bald sie aber zusammen zu bringen sind, muss ich ganz der Kirchen-Deputation überlassen.

Drittens, die eigenthümliche Einrichtung unsrer Witwenkasse enthält mehrere Elemente, die von dem Mortalitätsgesetze unabhängig sind, und sich einem Calcül nicht unterwerfen lassen. Wegen dieses Umstandes wird das Endresultat nothwendig mit einiger Unvollkommenheit behaftet bleiben; ich hoffe jedoch, dass sich Surrogate finden lassen, durch deren Benutzung diese Unvollkommenheit unerheblich sein wird.

Ich will nun suchen, in der Kürze anzudeuten, worauf es bei dieser Arbeit ankommt.

Die Verpflichtungen der W. K. zerfallen in drei Hauptrubriken.

I. Verpflichtungen gegen die jetzt vorhandenen Witwen, eventuell deren Kinder,

II. Verpflichtungen gegen diejenigen Professoren, welche jetzt Theilnehmer der W. K. Gesellschaft sind.

III. Verpflichtungen gegen die künftig beitretenden Professoren.

Ad I. Die Verpflichtung gegen jede einzelne Witwe, ohne minorenne Kinder, hat genau den Werth einer Leibrente für dieselbe und lässt sich daher, wenn man ihr jetziges Alter kennt (und für Mortalitätstabelle und Zinsfuss eine bestimmte Wahl trifft) genau berechnen. Dass in jedem einzelnen Fall ein Entrepreneur, der für diesen Preis die Verpflichtung auf sich nähme, eine Art Glücksspiel spielt, versteht sich von selbst (und werde ich daher im Folgenden, wo immer wieder dieselbe Erinnerung gemacht werden müsste, dies unterlassen, da dies jedem von einiger mathematischer Bildung bekannt ist), aber der Entrepreneur, der mit einer *sehr grossen Zahl* von Personen denselben Contract schlösse, würde, wenn richtig gerechnet ist, mit moralischer Gewissheit nur ein in Proportion zum Ganzen unerhebliches Schwanken zu erwarten haben.

Wo Kinder vorhanden sind, erleidet die Rechnung eine Modification, behält aber dieselbe Gültigkeit wie im vorigen Falle. Natürlich muss aber das Alter der Kinder auch bekannt sein.

Endlich würde streng genommen bei unsrer Witwenkasse, welche sich wiederverheirathende Witwen ausschliesst, noch eine Modification nöthig sein, die scheinbar*) zum Vortheil der Witwenkasse ist, aber sich natürlich nicht im Voraus berechnen lässt, jedenfalls praktisch = 0 zu setzen ist.

Es lässt sich demnach auch der Gesammtbetrag von I. zu Gelde anschlagen, und einen dem Betrage gleichen Theil des Capital-Vermögens der Kasse muss man als dadurch absorbirt betrachten.

Ad II. Auf ähnliche Weise würde sich auch die Verpflichtung gegen jeden einzelnen Professor, der jetzt verheirathetes Mitglied der Gesellschaft ist, nach Gelde anschlagen, wenn es in unserer Gesellschaft ganz ebenso wäre, wie in denjenigen freiwilligen Gesellschaften, wo der jährliche Beitrag oder das Eintrittsgeld nach dem Alter des eintretenden Ehepaars regulirt wird. Das Unterscheidende einer solchen Gesellschaft von der unsrigen besteht aber in folgendem.

A. In jener erlischt der Contract, wenn die Frau vor dem Manne stirbt; soll er bei einer Wiederverheirathung erneuert werden, so ist es ein ganz neuer nach dem Alter der zweiten Frau zu regulirender Contract. Bei uns sind auch unverheirathete Mitglieder, die eine Braut in beliebigem Alter wählen können, ebenso Witwer, die möglicher Weise sich wieder verheirathen können. Dies alles kann aber jetzt einer Vorausberechnung gar nicht unterworfen werden. Ich würde aber glauben, dass wenn man diejenigen Mitglieder, die jetzt verheirathet sind, nach ihrem und nach dem Alter ihrer jetzigen Frauen einem Calcül unterzöge, und dann für die übrigen jetzt nicht verheiratheten den Mittelwerth jener ersteren Resultate zum Grunde legte, es sich so ziemlich compensiren würde. Möglicherweise werden von einigen jetzt verheiratheten Mitgliedern nicht ihre jetzigen Frauen sondern zweite oder dritte dereinst die Witwenpension geniessen, dagegen wird aber ohne Zweifel ein Theil der jetzt nicht verheiratheten in diesem Stande bleiben. Ich sehe wenigstens nicht ab, was man hier mehr thun könne, als die zweierlei Eventualitäten, die einen zum Nachtheil, die andern zum Vortheil der Kasse gereichend, sich gegenseitig aufheben zu lassen.

B. Ausserdem findet aber auch noch der Unterschied statt, dass Kinder, vielleicht jetzt noch gar nicht geboren, demnächst möglicherweise, an den Vortheilen Theil nehmen. Auch das lässt sich daher so nicht veranschlagen; ich glaube jedoch, dass für diese Unvollkommenheit sich ein völlig ausreichendes Surrogat finden lässt, welches ich aber, um nicht gar zu weitläufig zu werden, hier nicht näher entwickeln will.

*) Es gehört nicht hierher, zu rechtfertigen, warum ich diese Einrichtung nur für *scheinbar* vortheilhaft halte, ich bin aber gern bereit, jedem der sich dafür interessirt, die Gründe anzuzeigen.

Es erhellet hieraus, dass auch die Verbindlichkeit II. sich mit ziemlicher Zuverlässigkeit wird zu Gelde anschlagen lassen, und dass um diese Rechnungen für I. und II. zu führen, herbeigeschafft werden müssen die Bestimmungen von Geburtsjahr und Tag, für

die einzelnen jetzt lebenden Witwen,
für deren Kinder unter 20 Jahren, wo solche vorhanden sind, wie bei der Frau Hofr. M., der Frau G. J. R. M. und der Frau Prof. H.
für die jetzt verheiratheten Mitglieder,
für deren Ehefrauen.

Ad III. Am bedenklichsten muss aber das Unterfangen erscheinen, den jetzigen Geldwerth der Verbindlichkeit der Kasse gegen die künftigen Theilnehmer *in saecula saeculorum* in Zahlen auszudrücken, versteht sich, nach den jetzigen Statuten, und nach der jetzigen Grösse der Pensionen und Beiträge. Und doch ist es *nothwendig*, dass man in den Stand gesetzt werde, sich hiervon einen wenigstens angenäherten Begriff zu machen, denn es handelt sich ja gerade davon, *dass die Stabilität* nicht von einer demnächst nach Umständen in ihren Einrichtungen abzuändernden Witwenkasse, sondern *von unsrer Witwenkasse nach ihren jetzigen Einrichtungen begutachtet werden soll*. Man wird hierbei natürlich nicht vergessen, dass die Rechnung von gewissen Elementen abhängig bleibt, die theils schon jetzt nur näherungsweise abzuschätzen sind, theils im Laufe der Zeit sehr bedeutende Abänderungen erleiden können. Von solchen Elementen nenne ich zwei, die Höhe des Zinsfusses und die Anzahl der durchschnittlich jährlich hinzutretenden neuen Mitglieder.

Die Höhe des Zinsfusses steht bei einer Anstalt, die nur zu einem sehr kleinen Theile auf fortgehende Beiträge, der Hauptsache nach auf Capitalrente basirt ist und bleiben soll, offenbar mit der Grösse des erforderlichen Capitals in genauem (verkehrtem) Verhältnisse dergestalt, dass wenn z. B. in einem Zeitpunkte die Schenkung eines Capitals von 70000 Thl. gerade zureichten, eine durchschnittlich immer jährlich gleich viel neue Mitglieder annehmende Gesellschaft zu sustentiren bei einem Zinsfuss von 4 p.c., das Herabsinken des Zinsfusses auf $3\frac{1}{4}$ p.c. die Erhöhung des Capitals auf 80000 Thl. erfordern würde. Ich halte diesen Umstand in Beziehung *auf die Schwierigkeit der Begutachtung*, gerade für den unerheblichsten. Die Begutachtung kann mehr nicht thun, als die Grösse des Einflusses in ein klares Licht zu stellen, woraus sich die Folge von selbst ergibt, dass nothwendig schon dafür gesorgt werden muss, dass das Capital durchschnittlich jährlich eine angemessene Erhöhung erhalte, um dem im Laufe der Zeit allmählig aber unfehlbar eintretenden Sinken des Zinsfusses zu begegnen.

Ebenso einleuchtend ist es, dass die Grösse des erforderlichen Capitals genau der Anzahl der durchschnittlich jährlich beitretenden neuen Mitglieder (*ceteris paribus*) proportional sein wird. Wir können zunächst nur unsre eignen Erfahrungen zum Grunde legen, die seit 100 Jahren vorliegen, und wo natürlich die neuern und neuesten Zeiten unser Urtheil vorzugsweise leiten müssen. Se. Magnificenz bemerkt mit Recht, dass die aus den gesteigerten wissenschaftlichen Bedürfnissen und Anforderungen hervorgegangene Vergrösserung der Zahl der Professoren einen wesentlichen Einfluss auf das Bestehen solcher Professorenwitwenkassen haben muss, die hauptsächlich auf Capital fundirt sind. Es ist also sehr wohl möglich, dass die Göttingischen Ergebnisse z. B. seit den letzten 30 oder 40 Jahren keinen ganz richtigen Maassstab für die Zukunft, zumal für die Zukunft späterer Jahrhunderte bilden können; aber diese Ungewissheit liegt in der Natur der Veränderlichkeit aller menschlichen Dinge, die Folgen davon treten *allmählig* hervor, und man begegnet ihnen nur durch eine niemals einschlummernde Vigilanz. In unsern Falle also macht man seine Rechnung für das zur nachhaltigen Erfüllung der Verbindlichkeit III. erforderliche Capital nach unsern besten jetzigen Kenntnissen, vergisst nicht, dass eben wegen jener Ungewissheit ein etwas grösseres Capital vorhanden sein müsse, *wiederholt* die Rechnung fortwährend in bestimmten nicht gar zu grossen

Fristen z. B. alle 5 oder 10 Jahre, indem man immer die neu hinzugekommenen Erfahrungen mit benutzt, und sieht nur dann den Überschuss als theilweis disponibel an, wenn er sich wirklich *vergrössert* hat.

Aber auch abgesehen von diesen beiden Umständen, oder mit andern Worten, auch wenn man einen bestimmten Zinsfuss und eine bestimmte Zahl alljährlich im Durchschnitt beitretender neuer Mitglieder zum Grunde legt, scheint doch die Schwierigkeit der Abschätzung fast unüberwindlich, da die verschiedensten Verhältnisse vom Alter der Ehegatten eintreten, der Wiederverheirathung verwitwet gewordener nicht einmal zu gedenken. In jener Beziehung scheint also der Begutachter nur ungefähr auf Einer Linie zu stehen mit demjenigen, der den Plan von einer der vielen Witwenkassen hätte im Voraus prüfen sollen, die ohne strenge Berücksichtigung des Lebensalters der eintretenden Ehepaare errichtet, fast alle zu Grunde gegangen sind. (Wenn Herr Universitätsrath K. glaubt, dass es auch bei allen diesen Kassen an *Calcül* nicht gefehlt haben werde, so hat er ohne Zweifel Recht; wenn er aber daraus auf die Bodenlosigkeit der *Wahrscheinlichkeitsrechnung* schliessen will, so hat er Unrecht. Allerdings gibt es viele Wörter, mit denen verschiedene Personen verschiedene Bedeutungen verbinden, imgleichen solche, die wissenschaftlich eine sehr bestimmte Bedeutung haben, unter denen man aber im gemeinen Leben oft sehr disparate Dinge zusammenwirft. So ist es mit dem Ausdruck Wahrscheinlichkeitsrechnung bewandt. Im strengen Sinne verstanden kann von Anwendung derselben in allen den Fällen gar nicht die Rede sein, wo die nöthigen Grundlagen fehlen. Bei allen den gescheiterten Witwenkassen ist bei der Anordnung der Einrichtung von der strengen Wahrscheinlichkeitsrechnung *gar kein* Gebrauch gemacht, sondern nur von vagen Aperçüs. Dies spreche ich hier nur als Thatsache aus, aber nicht als Vorwurf, da in der That eine Basirung auf Wahrscheinlichkeitsrechnung schon darum unmöglich war, weil alle nothwendigen Bedingungen dazu fehlen). Allein in dem vorliegenden Fall ist es zwar unmöglich, ein Endresultat nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung aus den einzelnen Elementen zu ermitteln, eben weil diese Elemente fehlen, wohl aber bietet die hundertjährige Erfahrung bei der Kasse selbst, wenn sie auf die rechte Art ausgebeutet wird, einen reichen Schatz zur Grundlage dar. Diese Erfahrungen werden daher erst gesammelt und geordnet werden müssen. Ich setze die Anlegung eines Buches voraus, in welchem von der ersten Stiftung der Gesellschaft an die sämmtlichen Mitglieder, ohne Ausnahme, nach der chronologischen Ordnung des Eintritts verzeichnet werden, nebst allen den Angaben, die für den in Rede stehenden Zweck relevant sind. Allerdings würden diese Erfahrungen ein noch viel fruchtbareres Material darbieten, wenn von sämmtlichen betheiligten Personen auch Geburtsjahr und Tag aufgezeichnet wäre, nemlich von dem eintretenden Professor, von seiner Frau, wenn er schon verheirathet ist, oder, wenn und so oft er sich nach dem Eintritt verehelicht, endlich von den minorennen Kindern, die beim Absterben des Mitgliedes vorhanden sind. Alle diese Dinge aber fehlen, und würden nur eben in Beziehung auf das Mitglied selbst sich noch jetzt in den meisten Fällen ergänzen lassen, aus welchen einzelnen Bestimmungen sich aber wenig oder gar kein Nutzen ziehen liesse. Gleichwohl bleibt das, was sich noch jetzt ohne Zweifel wird zusammenbringen lassen, höchst schätzbar, ich meine nemlich für jedes einzelne Mitglied

1. *Terminus a quo* und *ad quem* der geleisteten Beiträge.
2. *Terminus a quo* und *ad quem* der genossenen Witwenpension in den Fällen, wo ein solcher eintrat.
3. *Terminus a quo* und *ad quem* der genossenen Waisenpension, wo nach dem Tode des Vaters oder der Mutter noch minorenne Kinder vorhanden waren.

Die *Grösse* der Geldsumme, die von den Mitgliedern beigetragen, von den Witwen und Waisen erhoben sind, braucht aber gar nicht mit extrahirt zu werden.

Dies wäre denn das *dritte Requisit*, dessen Herbeischaffung, vor Anfang aller Berechnungen, unerlässlich ist. Ich bin mit der Einrichtung des Archivs der Witwenkasse ganz unbekannt, weiss also nicht, ob vielleicht nicht besonders angelegte Bücher, aus denen dieses Material mit Sicherheit, Vollständigkeit

und Leichtigkeit entnommen werden könne, schon vorhanden sind. Jedenfalls aber würden doch die ohne Zweifel aufbewahrten 105 Jahresrechnungen dazu dienen können. Erst nach eigner näherer Einsicht in die vorhandenen Papiere würde ich aber mich erklären können, ob und in welchem Maasse ich meine eigne Beihülfe zu dieser Extraction zusagen kann.

Für jeden einzelnen in diesem Buche aufzuführenden Theilnehmer lässt sich aus den rubricirten Daten berechnen, wie viel er der Gesellschaft und wie viel seinen Relicten diese bei den gegenwärtigen Sätzen geleistet haben, und was bei bestimmtem Zinsfusse der Geldwerth davon auf die Zeit seines Eintritts reducirt gewesen sein würde. Natürlich ist dies bei den einzelnen sehr verschieden, bei einigen positiv, bei andern negativ; aber nach den ewigen Gesetzen ist der *Mittelwerth* aus einer grossen Menge ein Element, das als Mittelwerth wieder für die Zukunft zum Grunde gelegt werden kann, wo keine Ursache ist, wesentliche Änderungen der allgemeinen Verhältnisse vorauszusetzen. Diese Tabelle selbst wird hierüber schon eine lehrreiche Indication geben können, wenn man das Ganze gruppirt, und z. B. den Mittelwerth der ersten Hälfte mit dem für die zweite, oder das erste, zweite und dritte Drittel mit einander vergleicht. Es wird sich so herausstellen, wie gross der Geldwerth der Verbindlichkeit der Gesellschaft ist; der ihr durch den Eintritt eines neuen Mitgliedes *durchschnittlich* zuwächst, und wenn man, nach dem was schon oben bemerkt ist, zugleich eine plausible Annahme für die Durchschnittszahl der jährlich zutretenden genommen hat, so lässt sich, für bestimmten Zinsfuss, berechnen, wie gross das Capital sein muss, dessen Zinserträgniss diese auf immer fortlaufende Verbindlichkeit III. decken kann. Alle drei Capitale für I. II. und III. zusammengerechnet und mit dem wirklichen Vermögen der Gesellschaft verglichen, werden dann so genau, wie es nach der Natur des Gegenstandes möglich ist, zeigen, ob bei der jetzigen Einrichtung ihre Stabilität *mehr* als gesichert ist, oder nur eben zureichend, oder aber ob ihre Instabilität daraus hervorgeht, und also mit Entschiedenheit früh oder spät ihr Untergang erwartet werden müsse, und demgemäss würden dann die geeigneten Maassregeln in den verschiedenen Fällen zu erwägen und einzuleiten sein.

Dies sind die Hauptzüge des Planes, nach welchem meiner Meinung nach eine gründliche Prüfung und Aufstellung einer Bilanz ausgeführt werden könnte und müsste. Es ist eine bedeutende Arbeit, der ich mich aber, wenn es gewünscht wird, gern unterziehen werde. Dass diese Skizze nur ungefeilt und flüchtig niedergeschrieben hier vorgelegt ist, wird man mit der Kürze der Zeit entschuldigen. Wird eine solche Arbeit jetzt ausgeführt, so bleibt es jedenfalls, wie schon oben bemerkt ist, dringend wünschenswerth, dass in Zukunft nach gewissen Zeitfristen immer wieder eine neue Bilanz gezogen werde, und dies würde dann viel leichter als das erstemal werden, wenn ein solches Buch wie ich oben erwähnt habe mit allen *Zeitpunktsrubriken* wenigstens von jetzt an angelegt und regelmässig vervollständigt und fortgesetzt würde.

Ich will nun auch noch mein Votum über ein paar andere Punkte, die in den andern Abstimmungen berührt sind, beifügen.

Ich bin nicht dafür, dass die Bestimmung der Statuten, welche die nicht besoldeten Professoren ausschliesst, aufgehoben werde. Die Universität als Corporation müsste in Beziehung auf die Witwenkasse immer dringend wünschen, dass solche Fälle, wo einem bei Schule oder Kirche Angestellten der Professortitel beigelegt wird, sehr selten blieben. Von einem solchen Fall aber abgesehen, wird einer, der gar keine Besoldung und kein Vermögen hat, nicht leicht so unbesonnen sein, eine Verheirathung einzugehen, und also überhaupt die ganze Bestimmung selten, vielleicht nie von Wirkung sein. Möglicherweise könnte aber ein unbesoldeter Professor, der sich selbst dem Tode nahefühlend eine Braut hätte, welche er sonst vor Erlangung einer Besoldung gewiss noch nicht geheirathet hätte, falls ihm der Eintritt in die Witwenkasse offen stände, dadurch versucht werden, durch eine schnelle Copulation der Witwenkasse eine Last aufzubürden.

So lange *bona fide* gehandelt wird, müssen vielmehr die unbesoldeten Professoren jene Clausel als

eine billige zu ihrem Vortheil gereichende Bestimmung betrachten, die ihnen die Alternative erspart, entweder schon während der Zeit, wo sie nichts von der Universität empfangen, zur Witwenkasse beitragen, oder später, wenn sie Besoldung erhalten, noch für die ganze Zeit ihres unbesoldeten Professorstandes doppelt nachzahlen zu müssen.

Meine zweite Bemerkung betrifft den Zinsfuss, in Beziehung auf welchen ich dem, was in dem P. M. des U. R. O. gesagt ist, nicht ganz beitreten kann. Mir erscheint vielmehr die Rechnung, nach welcher der jetzige Zinsfuss zu $4\frac{1}{2}$ proc. ermittelt ist, zum Theil als illusorisch. Ich erkläre mich durch ein Beispiel. Die Oesterreichischen $4\frac{1}{2}$ proc. Papiere stehen nach dem heutigen Courszettel auf $103\frac{1}{2}$. Beim Ankauf von einem Banquier wird man, alles eingerechnet, gewiss *über* 104 wirklich zahlen müssen, ich will aber nur bei 104 stehen bleiben. Man erhält also für sein eingezahltes Geld in der Wirklichkeit nur $4\frac{1}{13}$, oder nicht ganz $4\frac{1}{2}$ proc. Zinsen. Es dauert also wenigstens 12 Jahre, bis man nur sagen kann, dass man wirklich 4 proc. Zinsen genossen hat. Nun werden aber von diesen Papieren alle Jahre *sehr grosse* Summen ausgeloost und zu pari zurückgezahlt. Geschieht die Ausloosung schon nach 2 Jahren, so hat man in der Wirklichkeit nur zusammen $4\frac{1}{2}$ proc. oder für ein Jahr $2\frac{1}{4}$ proc. Zinsen genossen, ungerechnet die Kosten, mit welchen jede Einziehung verbunden ist. Für den Besitzer eines solchen Papiers ist es auch immer ein gefährlicher Umstand, dass er, wenn die ihn treffende Ausloosung nicht zu seiner Kenntniss gelangt, er also das Einziehen zu rechter Zeit versäumt, einen sehr bedeutenden Verlust erleiden kann. Für die Witwenkasse wird wohl der Banquier, von dem die Papiere erkauft sind, immer die nöthige Vigilanz ausüben, weil ihm selbst durch jede vorfallende Versur ein Gewinn zuwächst, aber eigentliche Verantwortlichkeit für jeden durch mögliches Übersehen entstehenden Verlust wird er doch schwerlich auf sich nehmen. In dieser Rücksicht will ich also nicht unterlassen, hiermit die Anzeige zu machen, dass in der heute vor acht Tagen in Wien geschehenen Verloosung von *anderthalb Millionen Gulden* der in Rede stehenden Papiere auch eine der Obligationen der Witwenkasse getroffen ist, nemlich die pag. IX. der Rechnung unter Nr. 52 aufgeführte Litr. P. Nr. 15472. Dass ich im Stande bin, diese Anzeige zu machen, verdanke ich nur dem zufälligen Umstande, dass ich heute, wo eben diese Rechnung in meinen Händen ist, die Notiz von der geschehenen Verloosung in einem Zeitungsblatt fand, und mir daher die Designation der ausgeloosten Nummer notirte, um sie zu Hause mit der Capitalliste der Witwenkasse vergleichen zu können, und mit dieser Anzeige will ich denn diese lange Exposition beschliessen.

9. Januar 1845. GAUSS.

[II.]

Untersuchung des gegenwärtigen Zustandes der Professorenwitwenkasse zu Göttingen.

Vorwort.

In dem von mir in der Witwenkassen-Angelegenheit am 8. Januar d. J. abgegebenen Votum habe ich die Methode nach ihren wesentlichen Elementen angedeutet, welche ich für die allein geeignete halte, um zu einem so gründlichen Urtheile, wie die Natur des Gegenstandes verstattet, zu gelangen. Ich habe die dort bezeichneten allerdings sehr langwierigen Rechnungen jetzt beendigt, und ihre Resultate sind in der zweiten Abtheilung dieser Denkschrift enthalten.

Da ich jedoch eine nähere Bekanntschaft mit den Grundsätzen derartiger Rechnungen bei den meisten Mitgliedern des Collegiums, welchem diese Schrift vorgelegt wird, nicht voraussetzen darf, so habe ich geglaubt, dass es denselben lieb sein würde, den Gegenstand auch noch von andern Seiten und aus mehr populären Gesichtspunkten erwogen zu sehen. Ist es auch nicht möglich, auf diese Art eigentlich *prücise*

Resultate zu gewinnen, sondern nur allgemeine Überschläge und Anhaltspunkte, so ist es doch wichtig, diese mit den Resultaten einer strengern Methode in Einklang zu finden, und jedenfalls wird dadurch alles in ein helleres Licht gesetzt. Zudem sind diese Auseinandersetzungen enge verknüpft mit der prüfenden Revision eines Cardinalpunkts des jetzt bestehenden Regulativs, welche Prüfung ich für unumgänglich nothwendig halte, und in Beziehung auf welche keine Dunkelheiten zurückbleiben dürfen. Ich habe daher diese Entwicklungen in dem ersten Theile dieses Aufsatzes so ausführlich und, wie ich hoffe, so klar dargestellt, dass man denselben leicht wird folgen können.

Erste Abtheilung.

Dass der Zustand der Witwenkasse bei dem Senate zur Sprache gebracht ist, und Verhandlungen darüber Statt gefunden haben, in deren Folge eine gründliche Untersuchung jenes Zustandes von dem Universitäts-Curatorium verfügt ist, war zunächst durch die im Herbst des vorigen Jahrs hervorgetretenen Besorgnisse veranlasst, welche besonders durch das rasche und alle frühern Erfahrungen weit überschreitende Steigen der Witwenzahl (seit dem Tode des Geheimen Justizraths M. auf zwei und zwanzig) erregt, und durch eine augenblickliche Insufficienz des baaren Kassenvorraths zur vollständigen Zahlung der Pensionen am gewohnten Tage noch vergrössert waren.

Dass diese und andere Umstände eine gewisse Beunruhigung hervorbrachten, ist um so weniger zu verwundern, da man sich gewöhnt hatte, den Zustand wie einen höchst blühenden zu betrachten. Bis Ostern 1829 war der Betrag der jährlichen Pension 210 Thl. gewesen, und durch viermalige Erhöhung von je 10 Thl. während des kurzen Zeitraums von 6½ Jahren war sie Michaelis 1835 auf 250 Thl. gestiegen. Man glaubte daher damals den Zeitpunkt, wo die Pensionen auf 300 Thl. angewachsen sein würden, so nahe, dass man sich schon mit Plänen beschäftigte, wie nachher der Überschuss am besten zu verwenden sein würde*). Allein gerade von jener Zeit an begannen die Verhältnisse sich ungünstiger zu gestalten; zu den bis Ende 1835 vorhandenen zwölf Pensionirten kamen binnen 9 Jahren zwölf neue Witwen hinzu, während nur zwei Pensionen erloschen.

Die vorhin erwähnte augenblickliche Unzulänglichkeit des baaren Kassenbestandes ist übrigens ein Umstand von geringer Bedeutung, selbst wenn dadurch eine kurzfristige verzinsliche Anleihe nöthig geworden wäre, was jedoch, der Jahresrechnung 1844—1845 zufolge, damals nicht der Fall gewesen zu sein scheint. Dergleichen Eventualitäten können bei der solidesten Kasse, wie bei dem solidesten in vielfachem Geldverkehr begriffenen Particulier vorkommen, und desto öfter, je mehr dahin gestrebt wird, grössere Geldsummen nicht lange ungenutzt liegen zu lassen.

Auch die 1844 so sehr vergrösserte Anzahl der Witwen war, an sich betrachtet, noch kein Beweis einer nahen Gefahr. Man durfte mit Wahrscheinlichkeit erwarten, dass diese Zahl bald wieder eine Verminderung erleiden würde, wie denn auch wirklich von März bis Juni d. J. drei Witwen mit Tode abgegangen sind. Auch ist nicht unwahrscheinlich, dass in nicht langer Zeit noch einige weitere Abnahme eintreten könne: indessen gewährt eine Rechnung von heute auf morgen nur eine sehr ungenügende Beruhigung, und ein beträchtliches dauerndes Sinken der Witwenzahl hat man allerdings keinen Grund zu erwarten.

Nicht die zeitweilige Grösse der Witwenzahl ist es, was dem Institute Gefahr drohet, sondern etwas ganz anderes, nemlich

*) Zwei wohlmeinende, seitdem bereits verstorbene Mitglieder der Kirchen-Deputation brachten in Anregung, der eine die Abschaffung der jährlichen Beiträge, der andere die Erweiterung der Waisenpensionen, bis zur Stiftung lebenslänglicher Pensionen für die unverheiratheten Professorentöchter.

die unklare Fassung desjenigen Theils des Regulativs, wodurch die Progression der Pensionssätze bestimmt werden soll.

in Verbindung mit

der gegenwärtig so sehr vergrösserten Anzahl der an der Witwenkasse Theil nehmenden Professoren.

Die grosse Wichtigkeit des letztern Umstandes ist schon in meinem oben erwähnten Votum angedeutet. Die Bedeutsamkeit einer grossen Anzahl von Interessenten ist nach der Beschaffenheit einer Witwenkasse eine sehr verschiedene. Für eine Witwenkasse, welche sich durch die Beiträge der Mitglieder (oder durch die Antrittsgelder, oder durch beides verbunden) ganz selbst erhält, wird eine recht grosse Anzahl der Theilnehmer nur vortheilhaft sein, vorausgesetzt, dass die Kasse auf eine richtige Rechnung basirt ist. Eine doppelt starke Gesellschaft *dieser* Art, hat unter übrigens gleichen Umständen eine doppelt so grosse Anzahl von Witwen zu erwarten, wie eine einfache: sie hat aber auch gerade doppelt so viele Einnahme, und kann daher den einzelnen Witwen gerade eben so viel gewähren, aber mit mehr Sicherheit gegen die wechselnden Fluctuationen, welche bei der grössern Gesellschaft im Verhältniss zum Ganzen geringer sind, als bei der kleinern.

Ganz anders aber verhält es sich mit einer Witwenverpflegungsanstalt, die ein reines Beneficium ist, und deren Mittel einmal eine gegebene Grösse haben (durch bestimmten Kapital- oder Grundbesitz). Auch hier wird jede Erweiterung des Umfanges eine in gleichem Verhältnisse vermehrte Anzahl der Witwen zur Folge haben, deren jede einzelne demnach auch nicht mehr so viel aus den gegebenen Mitteln wird erhalten können, wie vorher bei beschränkterem Umfange. Allerdings wird die der vergrösserten Interessentenzahl entsprechende Vergrösserung der Witwenzahl in ihrer *vollen* Stärke erst nach mehrern Decennien eintreten, und dem natürlichen Gange der Dinge gemäss bis dahin sich nach und nach entwickeln. Setzen wir, um die Vorstellung zu fixiren, der Umfang einer solchen Gesellschaft (die ein reines Beneficium ist) habe sich binnen einer gewissen Zeit verdoppelt. Man wird dann bald auf eine vergrösserte Witwenzahl, also, wenn das Vermögen nicht selbst angegriffen werden soll, auf eine Verminderung der jeder einzelnen Witwe zu gewährenden Pension gefasst sein müssen, und diese Herabsetzung wird nach und nach bis auf die Hälfte fortschreiten. Hätte aber eine solche Gesellschaft ein Statut, wonach den Witwen, trotz ihrer steigenden Zahl, fortwährend gleichbleibende Pensionen gezahlt werden *müssen*, so würde sie nothwendig zu Grunde gehen. Zwei Fälle gibt es jedoch, wo dieser Hergang eine Modification erleiden wird oder erleiden kann. *Erstlich* wenn die Mittel der Kasse, vor der Erweiterung des Umfanges der Theilnahme, mehr als hinreichend waren, um die bestehenden Pensionen zu bestreiten, so dass eine fortwährende Vermögensvergrösserung, und etwa auch bis dahin von Zeit zu Zeit eine Erhöhung des Pensionssatzes hatte Statt finden können. Hier wird offenbar der Erfolg des erweiterten Umfanges von dem *Wieviel?* abhängen. Hatte die Kasse vorher einen grossen jährlichen Überschuss, und ist die Vergrösserung der Interessentenzahl nicht sehr bedeutend, so kann jene die Gefahr vielleicht überstehen; die Vermögenszunahme wird nur immer langsamer und langsamer werden, und möglicherweise kann, wenn die Folge jener Ursache sich erst ganz entwickelt hat, die Kraft der Kasse noch hinreichend sein, auch der grössern Witwenzahl die volle Pension zu gewähren. Umgekehrt aber, war anfänglich der jährliche Überschuss nicht gross, die Vermehrung der Interessentenzahl aber sehr erheblich, so wird der jährliche Überschuss bald in ein Deficit übergehen, und der Ruin der Kasse zwar etwas später, als wenn ursprünglich Mittel und Ansprüche im Gleichgewicht waren, aber doch eben so unfehlbar eintreten. *Zweitens* bei einer Kasse von überhaupt geringem Umfange in Beziehung auf die Zahl der Theilnehmer, und wo diese Zahl also auch nach der Vergrösserung noch wie eine kleine zu betrachten ist, wird man keinen so regelmässigen Hergang erwarten dürfen wie bei grössern; die in der Natur der Sache liegenden, aber, bei kleinen Zahlen *verhältnissmässig* viel grössern Schwankungen werden die Regelmässigkeit in der Folge der Erscheinungen

schwächen, ja ganz verdunkeln können, ohne darum der Richtigkeit des Satzes den geringsten Eintrag zu thun, dass nach Mittelzahlen aus hinreichend langen Perioden der doppelten Interessentenzahl auch die doppelte Witwenzahl folgen muss. Aber, aus jener Ursache, kann es geschehen, dass bei einer kleinen Gesellschaft die verhältnissmässig vergrösserte Witwenzahl länger ausbleibt, als bei einer grossen; sie kann aber eben so gut auch viel früher eintreten. Es kann, bei einer kleinen Gesellschaft, sich treffen, dass während einer beträchtlichen Zahl von Jahren nach der Vergrösserung der Interessentenzahl die Witwenzahl nur eine ganz unbedeutende Zunahme zeigt, fast stationär bleibt, ja selbst einmal wieder etwas zurückgeht, was aber im Grunde nichts weniger als wünschenswerth sein würde, falls sich dadurch die Administration in eine trügerische Sicherheit einwiegen liesse, und im Vertrauen auf den augenblicklichen noch im Steigen begriffenen Vermögenszustand noch *Erhöhung* der Pension verfügte, zu einer Zeit, wo eine gründliche weiter als auf den nächsten Tag sehende Erwägung vielleicht schon die Nothwendigkeit einer *Beschränkung* erkannt haben würde. Denn das bedarf keines Beweises, dass nothwendig werdende Beschränkungen desto grösser ausfallen müssen, je länger man sie verschoben hatte.

Von dem, was über reine Beneficienkassen gesagt ist, lässt sich nun leicht die Anwendung auf solche machen, die zwischen jenen und den sich durch die Beiträge ganz selbst erhaltenden stehen. Eine solche gemischte Kasse ist die Professorenwitwenkasse, obwohl sie wegen der Geringfügigkeit der Beiträge jenen viel näher steht als diesen. Auf den Grund jährlicher Beiträge von 10 Thl. würde, wie aus den in der zweiten Abtheilung zu erörternden Rechnungen folgt, den Hinterbliebenen der Interessenten höchstens eine Pension von 44 Thl. oder von 48 Thl. gewährt werden können, je nachdem der Zinsfuss von $3\frac{1}{2}$ oder von 4 Procent vorausgesetzt wird, und hiebei ist noch nichts wegen möglicher Verluste, und wegen Administrations- und anderer Kosten in Abzug gebracht. Was darüber gewährt wird, also nach dem seit 1835 bestehenden Pensionssatze jährlich 202 bis 206 Thl., ist wie der Ausfluss eines reinen Beneficiums zu betrachten, und es gilt davon, rücksichtlich der Wirkungen der steigenden Interessentenzahl, ganz dasselbe, was oben in Betreff solcher Kassen entwickelt ist.

Hiedurch erscheint nun allerdings der Umstand, dass die Anzahl der Theilnehmer an unsrer Witwenkasse jetzt um die Hälfte grösser ist, als sie durchschnittlich vor 20 bis 30 Jahren war, in schwerer Wichtigkeit. Um jedoch diese gehörig würdigen zu können, muss zugleich wohl erwogen werden, dass die in der letzten Zeit so gross gewordene Witwenzahl oder richtiger Pensionenzahl (nach dem *Durchschnitt* der letzten *acht* Jahre = 20) ganz und gar nicht Folge der jetzigen grossen Zahl der Theilnehmer ist, sondern eben so gross sein würde, wenn auch die Zahl der Theilnehmer nicht so sehr vermehrt wäre: es erhellet dies aus dem Umstande, dass die Ehemänner derjenigen Witwen, welche in den letzten acht Jahren den Bestand gebildet haben (resp. Väter der Pension genossen habenden Waisen) fast sämmtlich schon vor dem Steigen der Interessentenzahl, ja meistens schon sehr lange vor diesem Steigen, der Gesellschaft angehört haben. Es muss vielmehr die jedesmalige Witwenzahl, in einer Gesellschaft, deren Umfang im Steigen ist, nicht mit der gleichzeitigen Zahl der Theilnehmer, sondern mit derjenigen zusammengestellt werden, welche mehrere Decennien früher Statt gefunden hat. Hiernach liegt nun aber folgende Schlussfolge sehr nahe: Eben so gut, wie aus dem frühern Zustande der Gesellschaft, deren Interessentenzahl vor 20 bis 30 Jahren zwischen 31 und 38 auf und ab schwankte, jetzt eine durchschnittliche Witwenzahl von 20 hervorgegangen ist, wird ganz füglich, wiederum nach einigen Decennien, aus dem jetzigen Umfange der Gesellschaft — von 51 Interessenten — eine Witwenzahl von 30 erwachsen können, und zwar ohne alle Gewähr, dass diese Zahl ein unübersteigliches Maximum sei. Es wird damit nicht gesagt, dass dies gewiss wirklich geschehen *werde*, sondern nur, dass nach den bisherigen Präcedentien es geschehen könne, ohne dass man es gerade wie etwas Ausserordentliches betrachten dürfte; jedenfalls zeigt schon ein solcher roher Überschlag, dass die Witwenkasse in den möglichen Wechselfällen ein viel höheres Spiel spielt, als bisher geglaubt sein mag.

Gerade hiedurch erhält nun aber die Unklarheit*) des Regulativs bei derjenigen Stipulation, wodurch die Grösse und das Fortschreiten des Pensionssatzes normirt werden soll, einen sehr bedenklichen Charakter. Die eignen Worte des Rescripts des Universitätscuratoriums vom 20. November 1794, durch welche diese Normirung sanctionirt ist, sind folgende:

> — — — — Zweitens genehmigen wir, dass so oft sich der Fundus um 5000 Thl. vermehrt haben wird, und die andern Revenüen des Witwenfonds keine Verminderung gelitten haben, auch die Anzahl der Pensionen nicht über 15 gestiegen ist, eine jede Pension mit 10 Thl. erhöhet werden solle.

Mangelhaft ist diese Bestimmung darin, dass sich nicht auf eine ganz unzweideutige Art erkennen lässt, *was* denn eigentlich an einer Pensionserhöhung von den vorangehenden Bedingungen abhängig sein soll, ob das Bestehen, oder ob bloss der Anfang; mit andern Worten (indem ich bloss die letzte Bedingung in Betracht ziehe)

> ob eine Erhöhung, die dem Statut gemäss zu einer Zeit eingetreten ist, wo die Zahl der Witwen höchstens 15 betragen hatte, wieder aufhören oder wenigstens zweckmässig modificirt werden soll, sobald später die Anzahl der Pensionen jene Normalzahl überschreitet,

oder aber

> ob eine einmal eingetretene Erhöhung unabhängig von der späterhin erfolgenden Überschreitung der Normalzahl dennoch unabänderlich fortdauern solle.

Dass die obige Formülirung der Vorschrift, wenn man ohne alle Rücksicht auf die bei Erwägung des Inhalts sich ergebenden Folgerungen, bloss den Wortlaut in Betracht zieht, natürlicher auf die zweite Auslegung hinführt als auf die erste, will ich um so weniger bestreiten, da bei meiner gegenwärtigen hauptsächlich auf den innern Gehalt der Anordnung selbst gerichteten Untersuchung der sprachliche Standpunkt nur ein ganz untergeordneter ist. Ich kann jedoch nicht umhin, zur Vergleichung auch die Einkleidung hieher zu setzen, in welcher Brandes, in seinem bekannten Werke über die Universität Göttingen, die Verfügung anführt; da Brandes 1794 als Referent im Ministerium für die Universitätssachen fungirte, so ist seine Auffassung jedenfalls zur Sache gehörig, wenn sie auch vom juristischen (meiner Untersuchung gleichfalls fremden) Standpunkt aus, der einmal im officiellen Rescript gebrauchten Wortfassung nicht derogiren kann. Es heisst a. a. O. S. 254:

> Ferner wurde zu der Zeit beliebt, dass jedesmal, wenn der Capital-Fonds der Kasse mit 5000 Thl. angewachsen sei, eine jede Pension mit 10 Thl. vermehrt werden solle, *so lange* die Zahl der Pensionirten nicht über 15 hinausgeht, was noch nie der Fall war.

Hiernach scheint Brandes den Vorbehalt wegen der 15 Pensionen eher in dem Sinn der *ersten* Interpretation verstanden, aber, wegen des zuletzt von ihm angeführten Umstandes für praktisch ganz unerheblich gehalten zu haben, wodurch sich denn vielleicht auch erklären lässt, dass in der Wortfassung des Rescripts nicht für die vollkommenste Schärfe Sorge getragen ist.

Brandes würde jedoch wahrscheinlich ganz anders geurtheilt haben, wenn er vorher das Factische genau geprüft hätte. Brandes kann bei der Angabe 'was noch nie der Fall war' nicht den siebenjährigen Zeitraum von Einführung der Bestimmung bis zur Abfassung seines Buchs verstanden haben, da der Erfahrung aus einem so kurzen Zeitraume gar kein Gewicht beigelegt werden könnte, sondern muss die ganze seit Stiftung der Kasse verflossene Zeit gemeint haben. Dann ist aber seine Behauptung factisch unrichtig. Die Zahl der aus der Kasse bezahlten Pensionen war wirklich schon einmal über 15 gestiegen, nemlich während der ersten sechs Monate des Jahrs 1778, wo 16 Pensionen bestanden; ja derselbe Fall würde

*) Wer an dieser Bezeichnung einer seit einem halben Jahrhundert in Kraft gewesenen Anordnung Anstoss nimmt, wolle sein Urtheil suspendiren, bis er die erste Abtheilung ganz gelesen hat.

auch bereits zwei Jahre früher eingetreten sein, wenn die erst 1794 eingeführte Verlängerung der Dauer der Waisenpensionen bis zu dem Alter von 20 Jahren schon damals gegolten hätte. Dieser Umstand erscheint aber in so schwererer Bedeutung, wenn man (gemäss der schon oben gemachten Bemerkung) erwägt, dass 20—30 Jahre rückwärts von jener Epoche, nemlich von 1747—1757, der Durchschnittswerth der Interessentenzahl nur 21—22 betrug, 1794—1802 hingegen 35—36.

Über 15 ist nun, nachher, die Zahl der Pensionen nicht eher wieder gestiegen, als Ostern 1837, und hat sich seitdem immer darüber gehalten. Die Kasse hat den vollen, alle seit 1794 eingetretenen successiven Erhöhungen mit einschliessenden Pensionsbetrag fortgezahlt, und so wenigstens *implicite* — denn ob darüber vorher Verhandlungen der Kirchendeputation Statt gefunden haben, ist mir nicht bekannt — die zweite Interpretation des zweifelhaften Punkts angenommen.

Wollen wir nun aber, mit Beiseitesetzung sprachlicher und formell juristischer Rücksichten, zwischen den beiden Interpretationen nur nach innern Gründen entscheiden, so drängt sich zuvörderst sogleich die Frage auf: Wenn es wirklich unbedenklich ist, eine erhöhte Pension auch für 16 Percipienten ungeschmälert *fortbestehen* zu lassen, warum soll es denn verboten sein, sie auch bei 16 Percipienten *anfangen* zu lassen? Die Gefahr, wenn eine da ist, ist ja doch in dem einen Fall gerade eben so gross wie in dem andern. Dies Argument wird noch schlagender, wenn man zu grössern Zahlen fortschreitet. Denn eine erhöhete Pension bei 17 (und wie viel mehr bei 18, 19 u. s. f.) Percipienten fortbestehen zu lassen, ist doch ganz offenbar der Kasse gefahrlicher, als die Erhöhung bei 16 anfangen zu lassen, und jenes ist, wenn man die zweite Interpretation annimmt, erlaubt, dieses verboten.

Zu welchen Folgerungen eine streng consequente Durchführung der zweiten Interpretation führt, ist leicht zu übersehen.

In dem gedruckten Regulativ von 1838 wird die in Rede stehende Anordnung im §. 10 mit den Worten eingeleitet: Die Witwenpension *wird* theils nach dem Bestande des Fonds der Kasse, theils nach der Zahl der Witwen *bestimmt*. Zufolge der der ersten Publication des Regulativs (1833) vorgesetzten Einleitung soll dasselbe die Verpflichtungen und die Rechte der Theilnehmer feststellen, und der Beitritt eines neuen Mitgliedes geschieht durch Unterschreiben eines ihm zur Kenntnissnahme von den Pflichten und Rechten vorgelegten Exemplars. Man muss also annehmen, dass das Regulativ dieselben *vollständig* enthält, und dass die Kasse, gegenüber den Mitgliedern oder deren Hinterbliebenen, keine Rechte geltend machen kann, die nicht in diesem Regulativ enthalten sind.

Nun findet sich aber in demselben auch nicht ein einziges Wort als Vorbehalt, den Pensionssatz eventuell wieder zurückgehen lassen zu dürfen, es sei denn, dass man die erste Interpretation von jener Normirung des Pensionssatzes nach der Witwenzahl, annimmt. Im entgegengesetzten Fall muss man, bei strenger Consequenz, einräumen, dass die Kasse verpflichtet sei, sämmtliche, während Stattfindens von Pensionszahlen unter 16, eingetretenen Pensionserhöhungen ungeschmälert fortzuzahlen, die Zahl der Witwen (und Waisen) möge in späterer Zeit (z. B. in Folge der überhaupt erweiterten Theilnehmerzahl) *so hoch anwachsen, wie sie wolle*.

Dies ist aber geradezu ungereimt, insofern man nicht annimmt, dass das Gouvernement die Gewähr zu leisten habe, was zu beurtheilen ausser meiner Competenz liegt.

Bei jedem bestimmten Zinsfusse kann der Kapitalanwachs von 5000 Thl. die Pensionserhöhung um 10 Thl. nur für eine bestimmte Anzahl von Pensionirten decken; bei dem Zinsfuss von 3 p. C.*) für höchstens

*) Bei Einbringung des Vorschlages zu der in Rede stehenden Regulirung, im Julius 1794, wurde mit unzweideutigen Worten, nur auf diese Verzinsung und nicht auf 4 p. C. Rechnung gemacht. Hienach ist also die Stelle in dem Aufsatz des Herrn Universitätsraths O. vom 16. December 1844, S. 5:

'Bei der im J. 1794 getroffenen Bestimmung ..... ist wahrscheinlich eine Berechnung dahin zum

15, bei dem Zinsfuss von 3½ proc. für höchstens 17, bei dem Zinsfuss von 4 proc. für höchstens 20 Pensionirte, und der Zinsertrag jener Kapitalvermehrung wird, wenn diese Zahlen erreicht sind, dadurch gänzlich absorbirt. Steigt also die Anzahl der zu pensionirenden resp. über diese Grenzzahlen, so wird zur Bestreitung aller übrigen Pensionen nichts vorhanden sein, als 1) der Überschuss, den die jährlichen Einnahmen der Kasse, vor den Erhöhungen von Kapitalien und Pensionssätzen gewährt hatten, oder vielmehr gewährt haben würden, wenn die resp. Normalzahl der Pensionen (15; 17; 20) damals Statt gefunden hätte*). 2) Die etwaige seit jener Zeit bewirkte Steigerung der Apothekenpacht. 3) Der vergrösserte Ertrag der Beiträge der Mitglieder, wegen ihrer gewachsenen Anzahl. Diese precären und schwachen Hülfsquellen würden aber bei weiterm Überschreiten jener Normalzahlen bald erschöpft sein, und desto schneller, je höher der Pensionssatz selbst schon angewachsen ist. Diese letztere Bemerkung ist in so fern von grosser Wichtigkeit, weil daraus auf das klarste hervorgeht, dass die aus consequenter Befolgung der zweiten Interpretation entspringende Gefahr desto grösser wird, je mehr Pensionserhöhungen bis zum Überschreiten der Normalzahl schon Statt gefunden haben.

Wenn übrigens oben bemerkt ist, dass in dem gedruckten Regulativ gar kein Vorbehalt zu finden ist, wodurch einem früh oder spät aus dieser Quelle entspringenden Verbluten der Kasse Einhalt gethan werden könnte, so darf ich nicht verschweigen, dass in die Quittungsformulare, auf welche die Witwen ihre Pensionen erheben, die Bevorwortung aufgenommen ist, dass die Pension auf ..... Rthl. für jetzt, und *so lange der Kasse Umstände solches gestatten werden*, festgesetzt sei. Wahrscheinlich werden wenige Mitglieder der Witwenkasse diese Clausel kennen: mir selbst wenigstens ist sie, obgleich ich 38 Jahre Theilnehmer gewesen bin, erst ganz vor kurzem bekannt geworden. Sie ist jedoch nicht bestimmt, wie ich anfangs vermuthete, möglichen aus der Progressionsnormirung zu besorgenden Gefahren vorzubeugen; denn sie steht, und zwar genau mit denselben Worten, auch schon in den gedruckten Quittungsformularen vor 1794. Solche in ganz allgemeinen Ausdrücken abgefasste Vorbehalte mögen in einigen Beziehungen ihr Gutes haben: im gewöhnlichen Laufe der Dinge aber bleiben sie, wenn nicht ausserordentliche Veranlassungen eintreten, so lange ohne Anwendung, bis die höchste Noth zwingt. Es ist kein Entscheidungsmerkmal, kein Maassstab angegeben, woran man erkennen kann, ob der Kasse Umstände Zahlung gestatten oder nicht gestatten. Wartet man so lange, bis man schon wiederholt genöthigt ist, zur Bezahlung der Pensionen die Kapitale mit zu verwenden, so hat man sehr wahrscheinlich schon viel zu lange gewartet, und es wird sich dann bewähren, was [S. 128, Z. 12] bemerkt ist. Jedenfalls ist, rücksichtlich der Behauptung des Rufs der Solidität der Kasse, ein grosser Unterschied zwischen einem Zurückgehen des Pensionssatzes in Folge einer ganz bestimmten feststehenden Regel (wie bei der ersten Interpretation); und einer Reduction der Pensionen, wozu die Kasse sich endlich gezwungen sieht, weil sie eben ihre nach dem

'Grunde gelegt, dass die Zinsen des auf 5000 Thl. erhöheten Fonds zu 4 proc. 200 Thl. betra-
'gen, dass davon ¼ wieder zum Capital zu schlagen, ¾ aber unter die Witwen zu vertheilen
'seien, was dann bei 15 Witwen für jede 10 Thl. betragen würde'

zu berichtigen. Von einer solchen Berechnung, von 4 proc. Zinsen und von der Zurücklegung eines Viertels derselben kommt in den bald näher zu betrachtenden Verhandlungen von 1794 *gar nichts* vor.

*) In der Wirklichkeit hätten die Einnahmen damals (1794) schon für 18 Pensionirungen nicht ganz ausgereicht, obgleich zu jener Zeit noch ein jährlicher Zuschuss von 150 Thl. aus der Kirchenkasse geleistet wurde, der später aufgehört hat. Der obige Überschlag erleidet aber eine Modification, weil, vorzüglich in Folge von Irregularitäten während der westphälischen Regierung, die Progressionsnorm nicht genau befolgt ist. Hätte man sich ganz strenge daran gehalten, so würden die Pensionssätze seit 1815 immer schon bei geringerer Kapitalhöhe, als geschehen ist, haben erhöhet werden müssen, — und das jetzige Kapitalvermögen würde um vielleicht 5000 Thl. ärmer sein.

Statut (in der zweiten Interpretation) eigentlich *unbedingt* übernommenen Verpflichtungen nicht mehr erfüllen kann.

Die vorstehenden Entwickelungen sollten die vitale Wichtigkeit der Progressionsnormirung bei einer Gesellschaft, deren Theilnehmerzahl sich bedeutend vergrössert, und damit die Wahrheit der [S. 127] von mir aufgestellten Behauptung darthun. Um aber diesen Gegenstand von allen Seiten zu beleuchten, wird es nothwendig sein, dem Hergange der Entstehung jenes Statutsartikels Schritt vor Schritt zu folgen. Ich habe zu dem Zweck die betreffenden Acten sorgfältig gelesen, und wiederholt gelesen, und gebe daraus, soweit sie jenen Statutsartikel betreffen, einen Auszug. Ich werde dabei hin und wieder auch einige an sich untergeordnete Nebenumstände hervorzuheben haben, wenn sie etwas beitragen können, den Hergang bei diesen Verhandlungen begreiflicher zu machen. Im voraus will ich bemerken, dass 1794 der jährliche Beitrag 5 Thl. Gold betrug, die Witwenpension 110 Thl. Kassenmünze, und dass die vater- und mutterlosen Waisen die Pension bis zum vollendeten 12ten Jahre zu geniessen hatten.

In einem vom 30. Junius 1794 datirten an die Universität gerichteten Ministerial-Rescript, wurde unter Bezugnahme auf ein schon vor einiger Zeit von dem Könige der Witwenkasse gemachtes Geschenk von 1000 Thl.*), die Anzeige von der Bewilligung eines zweiten Geschenks von 500 Thl. Gold gemacht, mit dem Beifügen, dass, wie bei diesen Geschenken die Absicht dahin gehe, zu einer baldigen Erhöhung der Pensionen hinzuwirken, gewärtigt werde, dass die Theilnehmer auch ihrerseits zur Erreichung dieses Zwecks beizutragen, und zu einer Erhöhung der jährlichen Beiträge von 5 Thl. Gold auf 10 Thl. Kassenmünze bereit sein würden. Nach den Berechnungen in einem anliegenden P. M. sei es nicht zweifelhaft, dass es füglich thunlich sei, schon jetzt eine Erhöhung der Pensionen in dem Maasse eintreten zu lassen, dass die sechs ältesten, anstatt der bisherigen 110 Thl., künftig 150 Thl. und alle übrigen jede 130 Thl. erhielten. Am Schlusse erbot man sich, falls die Kapitalien der Witwenkasse nicht alle vollkommen sicher placirt seien, die sichere Unterbringung zu 3 Procent bei öffentlichen oder städtischen Kassen zu veranlassen. Ein ähnliches Anerbieten war schon einmal, bei den Monitis zu der Jahresrechnung für 1792 gemacht worden.

Die beigefügte Anlage, deren Verfasser nicht genannt ist, im Detail durchzugehen, ist für meinen Zweck nicht nöthig. Aber ein paar Nebenumstände will ich herausheben.

I. Die Kapitalien der Witwenkasse, heisst es, seien zu ungleichem Zinsfuss ausgeliehen, einige**) zu 3 proc., andere höher. Weil aber der Zinsfuss leicht von allen Kapitalien auf 3 proc. heruntergehen könnte, und man bei zu machenden Überschlägen auf möglich sichere Summen rechnen müsse, so wolle man bei den Rechnungen auch nicht mehr als 3 proc. voraussetzen.

Hieraus und aus dem eben angeführten Schlusse des Rescripts erklärt es sich, warum auch in den Verhandlungen bei der Universität für allen künftigen Kapitalzuwachs (ohne weitere Bemerkung) nur auf 3 proc. gerechnet ist; bloss für die schon vorhandenen und schon belegten Kapitale sind die Zinsen zu 3½ proc. ausgeworfen. Vergl. hiemit die Anmerkung zu S. [131].

II. Um einen Überschlag zu machen, auf welche Zahl von Witwen die Rechnung gestellt werden müsse, fährt der Verf. fort:

'Will man nun nach den gemachten Erfahrungen annehmen, dass 3 stehende Ehen eine Witwe zu ernähren haben, so würden die 26 verheiratheten Professoren (unter der Gesammtzahl von 36) etwa 9 Witwen 'zu erhalten haben. Da es aber mehrere Gewisheit gewährt, wenn man den äussersten Fall zur Basis nimmt, 'so setze man lieber, dass gegen 2½ Ehen *eine* Witwe in Anschlag zu bringen, so dass also die bestehenden '26 Professor-Ehen zu erhalten haben würden — 10 Witwen.'

*) Kassenmünze. Es war nach Ausweis der Rechnung für 1793 unter dem 18. April 1793 eingezahlt.

**) zu damaliger Zeit beinahe der dritte Theil des Kapitalvermögens.

Bei den Universitätsseitig gemachten Überschlägen hat man jene 3 oder 2½ Ehen gegen Eine Witwe für zu viel gehalten, und das Verhältniss von 2 Ehen gegen Eine Witwe zum Grunde gelegt.

Ich habe die Stelle des P. M. hier bloss deswegen angeführt, weil dadurch erklärlich wird, dass man sich bei dem Verhältniss von Zwei Ehen gegen Eine Witwe so leicht beruhigt hat, obgleich, sehr wahrscheinlich, auch dieses den Verhältnissen der Professoren-Witwenkasse noch nicht angemessen ist, sondern noch weniger Ehen gegen eine Witwe gerechnet werden sollten. Über die Sache selbst wird das Nähere weiter unten vorkommen; aber der Geschäftsverlauf erinnert (wenn es erlaubt ist, ein Gleichniss aus einer niedern Sphäre hieher zu ziehen) unwillkürlich an Käufer, die bei unvollkommener eigner Waarenkenntniss einen guten Handel gemacht zu haben glauben, wenn sie weit unter dem zuerst geforderten Preise eingekauft haben, obgleich sie, bei Lichte besehen, noch immer zu theuer bezahlten. Ich brauche nicht zu erinnern, dass ich dieses Gleichniss nicht über die Gebühr ausgedehnt wissen will, denn der unbekannte Proponent hat die Verhältnisse 3:1 und 2½:1 ohne Zweifel in gutem Glauben an ihre Zulässigkeit vorgebracht.

Indem der damalige Prorector P., unter dem 6. Julius, das Rescript bei dem Senate in Umlauf setzt, fügt er den beiden darin enthaltenen Deliberationsgegenständen (Erhöhung der Beiträge und Erhöhung der Pensionen) noch einen dritten bei, durch den Vorschlag, die Dauer der Waisenpensionen bis zum vollendeten 20sten Lebensjahre zu erweitern. Er überlässt den Senatsmitgliedern, sich über diese Gegenstände gleich schriftlich, oder in der auf den 12. Julius angesetzten Senatsversammlung zu äussern.

Diese Missive ist von 17 Senatsmitgliedern unterzeichnet; von den dabei gefallenen Äusserungen sind hier nur ein paar zu erwähnen.

Der damalige Curator der Witwenkasse, P., stellt vor allem den Grundsatz auf: die Kasse sei den gegenwärtigen Witwen eben so viel schuldig als den künftigen, sie sei aber auch den künftigen Witwen genau so viel schuldig wie den gegenwärtigen. Diese (an sich in der That sehr vage) Phrase erläutert er dahin, dass jede künftige Witwe, welche weniger erhalte, als eine andere früher erhalten habe, (seiner Meinung nach) wahrhaft ädirt werde, und das erste Princip müsse demnach sein, die Pensionshöhe so zu bestimmen, dass, nach höchster Wahrscheinlichkeit, sie niemals wieder vermindert zu werden brauche. In dieser Beziehung hält aber P. den Calcül in der Beilage des Rescripts nicht für sicher genug; man dürfe nicht 2½ Ehen auf 1 Witwe, sondern nur 2 rechnen, und müsse also das Maximum der Witwen nicht auf 10—12 sondern auf 14—15 setzen, mithin auch geringere Pensionshöhen annehmen.

Kaestner hält die Frage für zu verwickelt und schwierig, als dass sich ohne eine *umständliche* und *genaue* Untersuchung etwas festsetzen lasse; auch er sei der Meinung, dass mehr nicht als *höchstens* 2 Ehen auf 1 Witwe, gerechnet werden dürfen. Da er längst aus der Witwenkasse ausgeschieden sei (er war Theilnehmer gewesen von 1755—1773), so habe er in der Sache keine Stimme (als Senior der philosophischen Facultät war er doch Mitglied der Kirchendeputation), rathe aber, keinen Beschluss zu fassen, ohne vorher einen Sachverständigen, etwa den p. Kritter zu befragen.

G. wünscht auch, dass durch genaue Rechnungen die Kräfte der Kasse ermittelt werden möchten, und weiset auf die *schrecklichen* Folgen übereilter Beschliessung zu grosser Pensionen, an den Beispielen der Hannoverschen, Bremischen u. a. Witwengesellschaften hin.

Die übrigen Vota stimmen theils den vorigen bei, theils entwickeln sie Bedenklichkeiten, wegen Erhöhung der Beiträge oder Verlängerung der Waisenpensionen, was hier nicht extrahirt zu werden braucht.

In der Senatssitzung vom 12. Julius, in welcher, den Prorector mitgezählt, 12 Professoren anwesend waren, erklärten sich *für* die Erhöhung der Beiträge 9 unbedingt, 2 mit dem Zusatz, dass sie die Erhöhung für zu gross hielten; einer (der bei der schriftlichen Votirung sich nachdrücklich dagegen erklärt hatte) wollte den mehrsten Stimmen beitreten. — Der F.'sche Vorschlag, wegen Verlängerung der Waisenpensionen wurde bis zu genauerer Erwägung der Umstände der Kasse noch beanstandet. — Wegen

Erhöhung der Witwenpensionen wurde beschlossen, ein Gutachten von KRITTER einzuholen *). Doch erklärte man sich schon *gegen* die im Rescripte beantragte grössere Pension für die sechs ältesten Witwen, als welche schon durch das V.'sche Legat bevorzugt seien.

Die Consultation des p. KRITTER, welche durch ein im Concept bei den Acten befindliches Schreiben P.'s geschah, war in der That nur eine sehr beschränkte. Nach einer bloss in ganz allgemeinen Umrissen gehaltenen Übersicht der Haupteinrichtungen der Witwenkasse werden KRITTER nur zwei Fragen vorgelegt: I) Nach welchem Grundsatz und Verhältniss in einer derartigen Gesellschaft das Maximum der Witwen bestimmt werden müsse und II) um wieviel dies Maximum der zu verabreichenden Witwenpensionen noch vergrössert werden müsse, wenn im Falle des Nichtvorhandenseins einer Witwe, oder nach dem frühern Ableben derselben die Pensionsberechtigung auf etwa vorhandene Waisen übergehe, und fortdaure, bis das jüngste Kind das Alter von 20 Jahren erreicht habe. Die dermalige Anzahl aller Interessenten der Kasse, und der darunter befindlichen Verehelichten, wird gerade eben so wie in der oben angeführten Anlage des Rescripts, zu 36 und 26 angegeben, und zugleich bemerkt, dass diese Zahlen und ihr Verhältniss veränderlich und schwerlich einer Wahrscheinlichkeitsregel zu unterwerfen seien; zum Schluss folgt das Anerbieten, dass wenn der Befragte noch einige weitere Data aus den bisherigen Erfahrungen über das Verhältniss der Participanten und der Witwen nöthig haben sollte, solche sogleich mitgetheilt werden würden.

KRITTER's Antwort, oder sein 'Gutachten', vom 19. Julius, lege ich in einer vollständigen Abschrift bei **).

*) Es scheint nicht, dass etwas darüber festgesetzt wäre, *in welchem Maasse* KRITTER's Rath in Anspruch genommen werden solle. KAESTNER war in der Versammlung nicht gegenwärtig.

**) Gutachten über einige mir vorgelegte Fragen, die Göttingische Universitäts-Witwenkasse betreffend.

Ad I. Das Collegium der Herrn Professoren in Göttingen hat schon seit der Errichtung der Universität über 50 Jahre lang existirt, so dass man schon vor 10 Jahren die höchste Zahl der Witwen haben konnte, welche nach den Gesetzen der Sterblichkeit auf etwa 22 oder 24 verehelichte Professoren vorhanden sein mussten, nemlich 12 Witwen. Dieses hat sich auch laut der mir mitgetheilten Liste von dem Anwachs der jährlich vermehrten Zahl der Witwen gezeigt und würde sich noch besser gezeigt haben, wenn das Collegium der Herrn Professoren aus 100 Personen hätte bestehen können. Da aber nach der Natur der Sache diese Anzahl nur um den 4^{ten} Theil von 100 stark gewesen, so war es auch natürlich, dass die Zahl der Witwen vom Jahre 1775 bis 1789 mehr als 12 und vom Jahre 1781 bis 1792 weniger als 12 betragen, weil bei kleinen Zahlen die Ordnung der Sterblichkeit nicht so wie bei grossen Zahlen eintreten kann. Indessen muss man dennoch annehmen, dass die höchste Zahl der Witwen in einem Durchschnitt von etwa 10 Jahren beständig etwa halb so gross sein werde, als die Zahl der verehelichten Herrn Professoren.

Ad II. Da es nunmehr gewünscht wird, dass die hinterlassenen Waisen-Familien einer gestorbenen Witwe oder auch eines gestorbenen Witwers bis zum vollendeten 20^{sten} Jahre eine gleiche Pension wie eine Witwe bekommen möchten, so kann ich nur aus der Erfahrung bei der Bremischen Witwenkasse etwas davon bestimmen. Die Bremische Gesellschaft hatte etwa den 6^{ten} Theil der Witwenpensionen mehr zu erwarten, da sie die Waisen-Familien gleich einer Witwe zu pensioniren und bis zum vollendeten 18^{ten} Jahre des jüngsten Kindes damit fortzufahren beschloss. Da aber die Waisen-Familien der Herrn Professoren bis zum vollendeten 20^{sten} Jahre des jüngsten Kindes dieses geniessen sollen, so müssen doch wohl gegen 12 Witwenpensionen über 2 Waisenpensionen gerechnet werden.

Ich halte es also für rathsam, dass man zu 12 als dem Maximo der Witwenzahl noch wenigstens 2 addire, so dass der Divisor, worin die jährlichen Einkünfte von den Fonds der Casse und sonst dividirt werden, auf 14 gesetzt werde. Da nun jetzt nur 10 Witwen vorhanden sind, so darf man die sämtlichen jährlichen Revenüen der Casse nicht unter diese 10 vertheilen, weil sonst die in der Folge hinzukommenden Witwen würden verkürzt werden, sondern man muss in 14 dividiren, so wird innerhalb 10 Jahren der Fonds auf etwa 25 Witwenportionen verstärkt sein, wovon die Zinsen noch auf eine Pension mehr als vorhin zureichen werden, so dass man alsdann, wenn das wahre Maximum der Witwen- und Waisenpensionen eintreten wird, 15

Da dieses Gutachten und die ihm gegebene Auslegung die eigentliche Grundlage von derjenigen Einrichtung bilden, die den Hauptgegenstand der 1. Abtheilung meiner Denkschrift ausmacht, nemlich von der Progressionsnormirung, so werde ich solches, weiter unten, einer ausführlichen und genauen Prüfung unterwerfen, und beschränke mich daher hier, einstweilen, auf folgende Bemerkungen.

Aus den Acten ist nicht zu ersehen, weshalb KRITTER im Anfange seines Gutachtens von 22—24 verehelichten Professoren spricht, da P. in seinem Schreiben ausdrücklich 20, und nur diese Zahl, genannt hatte. Ich vermuthe aber, dass KRITTER jene Zahlen 22—24 wie die für eine *frühere* Zeit gültigen angenommen hat. Meines Wissens sind aber keine vollständige Register über die persönlichen Verhältnisse der Witwenkassen-Mitglieder in der Art geführt, dass für jeden beliebigen Zeitpunkt die Anzahl der *Verehelichten* daraus entnommen werden könnte. Entweder also hat KRITTER jene Zahlen nur aus der Zahl aller Participanten in früherer Zeit nach einer ungefähren Schätzung *geschlossen*, oder sie beruhen auf besondern Mittheilungen, welche dann, der Natur der Sache nach, sich nur auf Zeitpunkte beziehen können, die nicht viele Jahre rückwärts lagen, und im Gedächtnisse noch fortlebten.

KRITTER's Antwort auf die erste Frage besteht dann kurz darin, dass man für die Zeit, wo das Maximum eingetreten sei, Eine Witwe gegen etwa zwei stehende Ehen rechnen könne, also für jene 22—24 Ehen 12 Witwen, was sich wie er angibt nach dem Durchschnitt der letzten 17 Jahre in so fern bestätigt habe, als bald mehr bald weniger als 12 Witwen vorhanden gewesen seien. Dass dann die der dermaligen Zahl von 26 Ehen entsprechende Witwenzahl um Eine grösser sein würde, ist nicht ausdrücklich gesagt, aber implicite darin enthalten. Auf die zweite Frage gibt er an, dass nach den Erfahrungen der Bremischen Witwenkasse, wo die Waisenpensionirung nur bis zum 18^{ten} Jahre daure, man auf eine Vergrösserung der Pensionenzahl um den sechsten Theil rechne; bei der hiesigen also, wo die Dauer 2 Jahre länger sein solle, doch wohl etwas mehr annehmen müsse. — Bei den 24 Ehen kommen wir demnach auf etwas mehr als 14, bei den 26 Ehen, nachdem ihre Wirkung ganz eingetreten, auf 15 nach KRITTER's Worten, oder auf etwas mehr als $15\frac{1}{2}$, d. i. auf nahe 16 nach den von ihm ausgesprochenen Grundsätzen.

Ob, *ganz abgesehen von der nähern Prüfung des Inhalts des Gutachtens*, eine derartige Behandlung des Gegenstandes eine *umständliche* und *genaue* Untersuchung, wie KAESTNER für nothwendig gehalten hatte, genannt werden könne, lasse ich hier auf sich beruhen. P. entwarf nun aber, auf den Grund dieses Gutachtens, ein P. M., worin er zeigt, dass wenn die von dem Curatorium vorgeschlagene Erhöhung der Pensionen, ohne weitere besondere Vergrösserung für die sechs ältesten Witwen, für alle gleichmässig auf 130 Rth. festgesetzt werde, dies ohne alle Gefahr für die Kasse auch dann geschehen könne, wenn die jährlichen Beiträge nicht erhöhet würden; dass aber, im Fall die Erhöhung der Beiträge auf die vom Curatorium angegebene Art, angenommen werde, auch die Verlängerung der Waisenpensionen um so sicherer eingeführt werden könne, weil nach den obwaltenden Umständen ein baldiges Wirksamwerden dieser Abänderung nicht zu erwarten sei. P. schliesst endlich seinen Vortrag, dem ich, *bis hieher*, meinen vollen Beifall zu geben keinen Anstand nehme, mit folgendem kurzen Zusatz, den ich, da hier *zum erstenmale* der Gegenstand meiner eignen Untersuchung, nemlich die Progressionsnormirung, auf den Schauplatz tritt, vollständig und treu mit P.'s eignen Worten hier abschreibe:

'Bei der allgemeinen Erhöhung der Pensionen auf 130 Rth. scheint mir nicht die mindeste Gefahr zu sein:

Pensionen wird bezahlen können; und sollte auch etwas übrig bleiben, so könnte vorzüglich armen Witwen etwas zugelegt werden.

Auf mögliche Unglücksfälle bei den belegten Capitalien, Verlust an Zinsen und andern Ausgaben müsste doch auch wohl etwas gerechnet werden.

Göttingen den 19. Juli 1794. J. A. KRITTER.

Vielmehr scheint mir noch

3) möglich und dienlich, dass es jetzt zur beständigen Norm gemacht werden dürfte, die Witwenpensionen jedesmal um 10 Thl. zu erhöhen, so oft sich der Fundus um 5000 Thl. vermehrt hat und die Zahl der Witwen noch nicht über das maximum von 15 gestiegen ist. Es ist klar, dass man dies thun kann, denn eine Erhöhung von 10 Thl. für 15 Witwen beträgt 150 Thl. und 5000 Thl. zu 3 proc. geben eben so viel Interesse. Dass aber der nächste Erhöhungs-Termin bald eintreten kann, wenn auch unsere Kasse keine ausserordentliche Zuflüsse erhält, dies lässt sich wenigstens sehr wahrscheinlich berechnen. Da wir gegenwärtig nur 10 Witwen zu pensioniren haben, so müssen, wenn der neue Zuschuss zu den Beiträgen bewilligt wird, alle Jahr über 1000 Thl. der Kasse bleiben, folglich 5000 Thl. schon in 5 Jahren zum fundus hinzugekommen sein, wenn sich die Zahl der Witwen indessen nicht vermehrt; setzt man aber auch den höchst unwahrscheinlichen Fall, dass die Zahl jedes Jahr um Eine Witwe vermehrt würde, bis sie das maximum von 15 erreicht hätte, so würde es doch kaum 10 Jahre anstehen können.

Gut möchte es wenigstens sein, wenn in dem Bericht an Kön. Regierung dieser Umstand erwähnt würde.'

Da über den wesentlichen Inhalt dieses Artikels weiter unten bei der Prüfung des KRITTER'schen Gutachtens und der daran geknüpften Folgerungen, und an andern Stellen das Nöthige vorkommen wird, so sollen hier nur ein paar Nebenumstände berührt werden.

I. Auffallend ist, aus der Feder des Curators der Witwenkasse, die *unrichtige* Angabe der Witwen-, oder vielmehr Pensionenzahl. Es waren damals nicht 10 Witwen, und auch nicht 10 Pensionen, sondern 8 Witwen, und, unter Hinzuzählung der Kinder des am 8. Junius 1794 verstorbenen Professors B., zusammen 9 Pensionen. Auch lässt sich diese Unrichtigkeit nicht etwa dadurch erklären, dass der Abgang der zuletzt an fremdem Orte (Halle) verstorbenen Witwe (M.) dem Curator damals noch unbekannt gewesen sei; denn es findet sich, dass der Betrag der Pension für das letzte halbe Jahr (Michaelis 1793 bis Ostern 1794) auf eine von P. mitunterzeichnete und vom 3. Mai 1794 datirte Quittung der Erbin erhoben ist.

II. Die Schlusszeile ('Gut möchte es wenigstens u. s. w.') lässt uns etwas im Dunkeln rücksichtlich der Frage, für was der abgeschriebene Artikel eigentlich genommen werden soll, ob für einen förmlichen zur Beschlussnahme verstellten Antrag, oder nur für eine hingeworfene Idee. Von einer für alle künftigen Zeiten geltenden bestimmten Normirung der veränderlichen Pensionshöhe war weder in dem Rescript, noch in den vorhergehenden Verhandlungen die Rede gewesen. Es war dies also ein *viertes* zu den bereits in Deliberation begriffenen neu hinzukommender Gegenstand, und zwar ein solcher, der den drei andern an Wichtigkeit keineswegs nachstehend die sorgfältigste allseitige Prüfung erforderte. Wer einen auf ein solches Ziel eigens gerichteten Antrag einbringt, ist sich doch der Wichtigkeit der Sache bewusst, welche durch die Bezeichnung einer solchen Lebensfrage mit 'dieser Umstand' schwerlich genug hervortritt. Bei einer Äusserung hingegen, die nur den Charakter eines gelegentlich hingeworfenen Gedankens hat, ist man schon nachsichtiger gegen eine durch Unachtsamkeit entschlüpfte Unrichtigkeit, und gegen eine noch mangelhafte Wortfassung. Durch die Numerirung mit (3) lasse man sich hiebei nicht irre machen. P. *zählt* in seinem Aufsatze nicht die Vorschläge, sondern die aus den vorausgeschickten Rechnungsüberschlägen von ihm abgeleiteten Folgerungen. Sein Nr. 1 enthält *die* Folgerung, dass alle gegen die Verlängerung der Waisenpensionen vorgebrachten oder vorzubringenden Einwürfe sich erledigen, wenn man die proponirte Erhöhung der Beiträge annehme; und sein Nr. 2 die, dass zwar die allgemeine Erhöhung der Pensionen auf 130 Rth. füglich sofort geschehen könne, die exceptionelle Erhöhung auf 150 Rth. für die sechs ältesten Witwen hingegen weder gerecht noch rathsam sei.

Unter solchen Umständen tritt die Wichtigkeit der Function des Vorsitzenden einer berathenden Körperschaft hervor, der die einzelnen Fragepunkte scharf zu sondern, jeden an seinen rechten Platz zu stellen, und in lichtvoller alle Zweideutigkeit ausschliessender Wortfassung zur Berathung und Abstimmung zu bringen hat.

Im vorliegenden Falle war es F., dem als zeitigem Prorector dieses Geschäft oblag. Er setzte unter dem 22. Julius das Rescript, das KRITTER'sche Gutachten und das P.'sche P. M. bei sämmtlichen Professoren in Umlauf, mit einer Aufforderung, welche ich in F.'s eignen Worten vollständig hieher setze:

> Sie möchten sich schriftlich darüber erklären, ob Sie dem ganzen Vorschlage P.'s beitreten, oder über die einzelnen Fragepunkte, nemlich 1) in welchem Maasse die Erhöhung der Pensionen gerecht und rathsam scheine? 2) Ob die Verlängerung der Dauer der Pension nach der Eltern Tode bis zum 20sten Jahre des jüngsten Kindes gewünscht werde? 3) Die von Königlicher Regierung in Vorschlag gebrachte Erhöhung der jährlichen Beiträge auf 10 Thl. C. M. genehmigt werde, ohne Bedingung; oder unter der Bedingung von Nr. 2.

Man sieht, dass der letzte Artikel von P.'s P. M. (oben S. [138]) mit keinem Worte erwähnt ist. Ich selbst habe nun zwar keinen Zweifel, dass F. denselben (vielleicht die schwere Wichtigkeit dieses Umstandes' nicht genug würdigend) als ein schon in seinem Nr. 1 mitenthaltenes Anhängsel betrachtet haben mag; aber eben so wenig zweifle ich, dass diese Nichterwähnung, zumal im Contraste zu der präcis logischen Form, in welcher F. seinen dritten Fragepunkt auftreten lässt, sehr dazu beigetragen hat, jene Hauptfrage für viele, vielleicht für die meisten Votanten in den Hintergrund zu rücken. Ich habe daher geglaubt, diese an sich geringfügigen Nebenumstände hier mitberühren zu müssen, weil dadurch die sonst so auffallende Erscheinung erklärlicher wird, dass von 41 Votanten auch nicht ein einziger sich in eine Discussion über jenen Hauptfragepunkt eingelassen hat (wenn man nicht E.'s Votum S. [139] dafür gelten lassen will); ja dass er von den meisten Votanten gar nicht, und eigentlich nur von zwei Votanten auf ganz unzweideutige Art überhaupt erwähnt ist.

Diese schriftlichen Verhandlungen (vom 22. Julius bis 6. August) sind sehr voluminös, und manche einzelne Abstimmungen sehr ausführlich; allein sie drehen sich fast ausschliesslich um die F.'schen Fragepunkte 2 und 3, welche, besonders der letzte, vielfachen Widerspruch fanden; imgleichen um einige neue im Laufe der Verhandlung eingebrachte Vorschläge, namentlich den einer Aufhebung der bisherigen Freiheit, erst später unter doppelter Nachzahlung der Beiträge in die Witwenkasse eintreten zu können, welcher Vorschlag von einigen Votanten unterstützt, von andern nachdrücklich zurückgewiesen wurde. Ich werde von diesen Abstimmungen nur einige wenige anführen, die mit meinem Gegenstande in näherer Verbindung stehen.

R. erklärt sich überhaupt allen Veränderungen abgeneigt, will aber den Beschlüssen der Mehrheit beitreten. Den P.'schen Art. 3 erwähnt er zwar gar nicht, wohl aber die Principfrage, welche demselben zum Grunde liegt, und in Beziehung auf welche er der von P. bei der frühern Abstimmung aufgestellten Behauptung (oben S. [133] Z. [21]) sehr entschieden entgegentritt.

Er könne, sagt er, sich nicht von der Richtigkeit des Grundsatzes überzeugen, dass bei Erhöhung der jetzigen Witwenpension darauf gesehen werden müsse, dass in der Folge nicht etwa die Nothwendigkeit entstehe, sie zu vermindern, und den künftigen Witwen weniger zu geben, als die jetzigen erhalten. Dieser Grundsatz würde allerdings richtig sein, wenn (wie bei andern Witwenkassen) die Existenz der Kasse bloss auf die Beiträge basirt wäre. Allein, da die Professoren-Witwenkasse ein Beneficium sei, die Beiträge fast für Nichts zu rechnen, und die Theilnahme an dem Beneficium für jeden Professor eine Bedingung seiner Vocation: so gelte, weit natürlicher, der Grundsatz

> Jede Witwe erhält die möglichst hohe Pension, die der Fonds bei ihren Lebzeiten verstattet.

Bei diesem Grundsatze habe niemand Ursache sich zu beklagen, der Fonds steige oder falle. Sage man, es könne sein, dass die künftigen Witwen weniger erhalten, wenn der Fonds sinkt, so antworte er (R.), es könne sein, dass die jetzigen Witwen weniger erhalten, als die künftigen, wenn der Fonds steige, welcher letztere Fall wahrscheinlicher sei als der erstere.

R. stellt demnach, wie man sieht, der P.'schen Behauptung, die künftige Witwe werde ädirt, wenn sie weniger erhalte als eine frühere erhalten hat, implicite die Erwiderung entgegen, dass man dann, genau mit demselben Recht, behaupten könne, die jetzige Witwe werde ädirt, wenn sie weniger erhalte als eine künftige.

Scn. wiederholt den eben angeführten Grundsatz ('Jede Wfiwe erhält die möglichst u. s. w.') mit dem Zusatz: 'H. H. R., deucht mich, hat diesen Satz zur Evidenz gebracht, darauf ich mich beziehe. *Auch liegt derselbe in Nr. 3 des P.'schen Vorschlags zum Grunde*'. Nachdem Scn. auch noch den Umstand hervorgehoben hat, dass die Kasse ein Beneficium, eine pars salarii, und die Theilnahme daran mit einer Art von, wiewohl gelindem und gerechtem, Zwange verbunden sei, fährt er fort:

> Aus diesem Unterschied ergibt sich unter andern, dass der Satz 'wir sind den gegenwärtigen Witwen *so viel* schuldig, wie den künftigen und umgekehrt', wenn das *so viel* das numeräre ausdrücken soll, hier nicht anwendbar sei. Die Kasse hat etwas actienmässiges, das, unter der Gewalt der Conjuncturen stehend, steigt und fällt.
>
> Erhöhung der Witwenpensionen: die Maasse derselben (*so wie auch der Verminderung*) hat Hr. C. R. P. durch eine unwandelbare Regel bestimmt.

Ich habe diese zwei Stellen wörtlich abgeschrieben, weil daraus, und namentlich aus den beiden von mir doppelt unterstrichenen, ganz unwidersprechlich hervorgeht, dass Scn. den P.'schen Art. Nro. 3 in dem Sinn der ersten Interpretation (oben S. [129]) aufgefasst hat. Mehrere andere Nachvotirende, wie B., H., O., R., T., haben, obwohl ohne Specification der Fragepunkte, dem Scn.'schen Votum beigestimmt. Andererseits erkennt man hingegen in dem [auf folgender S.] angeführten E.'schen Votum die zweite Interpretation, welche auch seit 1837 in der Praxis befolgt ist, und ich meine daher, dass die Wortfassung der Progressionsnormirung, die wie die Vergleichung zeigt ohne Veränderung in das Rescript vom 20. November 1794 übergegangen ist, sehr füglich eine *unklare* genannt werden kann.

Ausser Scn. hat nur noch M. unsers Fragepunkts (P.'s 3) ausdrücklich und unzweideutig erwähnt: er sagt aber nichts weiter darüber, als dass das von P. angerathene *Festsetzen* einer Norm für das künftige Steigen der Pension vorzüglich wichtig scheine. Man könnte sagen, dass genau genommen hierin nur eine Billigung des Zwecks aber noch nicht bestimmt die Billigung des von P. proponirten Mittels liege, eben so wenig wie eine Erklärung, in welchem Sinn M. letzteres aufgefasst habe. Ohne indess darauf ein Gewicht zu legen, will ich nicht unbemerkt lassen, dass Meiners in seinem bekannten Werke über die Verfassung und Verwaltung deutscher Universitäten S. 95 die bestehende Progressionsnormirung auch eben so wie Brandes (S. oben S. [129]) mit den Worten anführt: *so lange* die Zahl der Witwen nicht über 15 hinausgehe.

Von P. selbst liegt über unsern Fragepunkt nichts weiter vor, als der oben S. [136] mitgetheilte Art. 3. Darf ich noch einen Augenblick bei der Frage verweilen, in welchem Sinn denn P. selbst ihn verstanden hat, so mache ich darauf aufmerksam, dass die Worte 'Es ist klar dass man diess thun kann' nur auf zwei Arten ausgelegt werden können; nemlich entweder ist P.'s Meinung gewesen, eine solche Erhöhung

> solle nur so lange gültig sein, als die Zahl 15 noch nicht überschritten sei, nach dem Überschreiten aber entweder wieder cessiren oder auf angemessene Weise modificirt werden

oder P. hat die Überschreitung der Zahl 15 für unmöglich, wenigstens für so sehr unwahrscheinlich gehalten, dass die Berücksichtigung eines solchen Falles ganz unnöthig sei.

Eine subtile Wortkritik könnte vielleicht Gründe auffinden, die für die erste Hypothese sprechen würden, wobei ich mich aber um so weniger aufhalten will, da ich selbst diese Hypothese für zulässig nicht halten kann, und zwar hauptsächlich aus dem Grunde, weil sonst P. mit seinen eignen Grundsätzen (oben S. [133]) in Widerspruch stehen würde. Ich glaube vielmehr, dass er, verleitet durch das Kritter'sche Gutachten, oder, wie man auch sagen kann, und wie ich bald umständlich zeigen werde, durch seine unrichtige Auffassung dieses Gutachtens — die Zahl von 15 Pensionen wie eine unübersteigliche oder fast unübersteigliche Schranke betrachtet habe, unter deren Schutz er seinen Plan mit voller Sicherheit machen könne.

Einen Abglanz ähnlichen Vertrauens finde ich in dem Votum E.'s wieder, welches sich dadurch auszeichnet, dass es das einzige ist, welches der fatalistischen Zahl 15 erwähnt, und dessen wesentlicher Inhalt, so weit er hieher gehört, in folgendem besteht.

Die beiden F.'schen Fragepunkte 1 und 2, sagt E., müssten ihre Entscheidung allein durch den wirklichen Fonds und dessen Ertrag verglichen mit *den erprobten* von H. P. sehr einleuchtend vorgelegten Grundsätzen erhalten. Es könne sein, dass die verlängerte Dauer der Waisenpensionen verursache, dass die höchste Zahl der Witwen von 15 überstiegen werden müsse, was doch als mit der Sicherheit der Kasse unverträglich schlechterdings nie geschehen dürfe. Er halte daher für rathsam, die Verlängerung der Waisenpensionen nur mit der ausdrücklichen Beschränkung zu bewilligen, *so lange die Anzahl der Pensionen dadurch nicht über 15 gesteigert werde*. Diese Einschränkung scheine desto nothwendiger, weil die Berechnung der Verhältnisse der Kinder keine *so gewisse* Erfahrung für sich habe, wie die beobachtete Proportion der Witwen. Ich verstehe dies so: E., dessen Auffassung des P.'schen Plans offenbar der Scn.'schen gerade entgegengesetzt ist, halte zwar nach der Kritter-P.'schen Theorie für gewiss, dass die Anzahl der Witwen nie über die berechnete Zahl (also 13) gehen könne; es sei aber nicht eben so gewiss, dass nicht mehr als 2 Waisenpensionen dazu kommen könnten, und für den Fall, dass diess doch geschehe, und die Gesammtzahl der Pensionen dadurch über 15 getrieben werden würde, müsste die Beschränkung der Waisenpensionen vorbehalten werden.

Ähnliche Besorgnisse, dass die Anzahl der Waisenpensionen zu geringe angeschlagen sein möchte, waren auch von einigen andern Votanten geäussert; indessen ist weder denselben in dem Finalbeschlusse Folge gegeben, noch haben sie sich durch die Erfahrung bisher bestätigt. In der That haben von Errichtung der Witwenkasse bis jetzt noch niemals mehr als zwei Waisenpensionen gleichzeitig bestanden, wobei ich jedoch nicht unbemerkt lassen will, dass während eines kurzen Theils des Jahrs 1770 die Anzahl auf 3 gestiegen sein würde, wenn die Erstreckung der Waisenpensionen bis zum vollendeten 20sten Jahre schon damals Statt gefunden hätte.

Ganz anders aber verhält es sich mit der *Witwenzahl*. Die vermeinte Gewissheit, dass diese nicht über 13 steigen könne, ist durch die neuern Erfahrungen zerstört, indem sie schon einmal auf 22 gestiegen ist, und sogar der Durchschnittswerth während der letzten 8 Jahre etwas über 19 betragen hat. Schon lange vor 1794 war die Anzahl der Witwen (nemlich gleichfalls, ohne die Waisenpensionen mitzuzählen), einmal auf 14 gestiegen, und hatte während eines fünfjährigen Zeitraums (1774—1779) den Durchschnittswerth 13 behauptet. Diese Thatsache, die wohl dem Curator aber freilich nicht den votirenden Professoren bekannt sein konnte, hätte, aus dem allein zulässigen oben S. [130] Z. [1] angedeuteten Gesichtspunkte betrachtet, schon damals zum Beweise der Unrichtigkeit der P.-E.'schen Voraussetzung dienen können.

Da nun aber die Annahme der Zahl 13 für die höchste Witwenzahl auf dem Kritter'schen Gutachten beruhet, in welchem die Hälfte der Zahl der stehenden Ehen als maassgebend für das Maximum der Witwenzahl aufgestellt ist, so scheint der Schluss natürlich, dass Fehler in demselben sein möchten, und ich bin demnach an dem Punkt angelangt, wo ich dieses Gutachten selbst der Kritik unterwerfen muss.

Um diese vollkommen verständlich zu machen, bin ich genöthigt, einige Entwicklungen vorauszuschicken, in welchen mir zu folgen mancher vielleicht beschwerlich finden könnte, wenn von vorneherein noch nicht abzusehen ist, auf was sie hinauslaufen werden. Es wird deshalb, deucht mir, angemessen sein, wenn ich die vornehmsten Ausstellungen, welche das KRITTER'sche Gutachten und die daraus gezogenen Folgerungen treffen, gleich hier an die Spitze stelle.

1) Die Anwendbarkeit des Verhältnisses von 1 Witwe gegen 2 stehende Ehen, auf die hiesige Professoren-Witwenkasse, ist nicht sicher; es ist vielmehr, wie schon oben S. [133] Z. [5] bemerkt ist, wahrscheinlich, dass nach den Verhältnissen dieser Kasse etwas mehr an Witwen gerechnet werden müsse.

2) KRITTER's Behauptung [Z. 10 des Abdrucks] ist, auch wenn sie unabhängig von diesem vorausgesetzten Verhältnisse 2 : 1 vorgetragen wird, nemlich man könne annehmen, dass ein Durchschnitt von 10 Jahren immer schon hinreiche, das wahre für die Umstände der Kasse gültige Verhältniss sehr nahe anzugeben, ist durchaus falsch, und die Unrichtigkeit dieses Satzes ist auch ohne Berufung auf Erfahrungen, aus theoretischen Gründen nachzuweisen.

3) Weit wichtiger als diese beiden Ausstellungen ist der Umstand, dass P. das KRITTER'sche Gutachten falsch ausgelegt hat, indem das, was P. unter Maximum der Witwenzahl verstand, und das, was man mit diesem Worte bezeichnet, wenn ein bestimmtes Normalverhältniss zwischen stehenden Ehen und Witwen aufgestellt wird, und was auch in KRITTER's Gutachten eigentlich gemeint ist,

zwei sehr verschiedene Dinge sind.

Hierzu kommt noch der eben so wichtige Umstand

4) dass die numerischen Resultate, die für eine Gesellschaft von einem gewissen sich immer nahe gleich bleibenden Umfange zulässig waren, wesentlich abgeändert werden müssen, wenn dieser Umfang sich bedeutend erweitert, wie diess schon oben ausführlich abgehandelt ist.

Ich fange an mit der (fingirten) Annahme, dass durch das Zusammentreten einer sehr grossen Anzahl von Ehepaaren aus den verschiedensten Altersstufen eine Gesellschaft gebildet worden sei. Alljährlich wird eine Anzahl von Ehen durch den Tod des einen oder des andern Theils getrennt werden: dieser Abgang werde dadurch ersetzt, dass jährlich eine bestimmte Zahl neuer Ehepaare hinzutritt, so viele, dass im Ganzen der Bestand der Gesellschaft ungeändert bleibe. Von den im Laufe eines Jahres durch den Tod des Ehemannes entstehenden Witwen wird, da die Gesellschaft als sehr gross vorausgesetzt wird, ein verhältnissmässiger sehr kleiner Theil schon während desselben Jahres wieder absterben, wodurch mithin die Anzahl der am Ende des Jahres wirklich vorhandenen Witwen etwas modificirt wird. Ungefähr eben so viele neue Witwen werden am Ende des zweiten Jahres hinzugekommen, dagegen aber von den aus dem ersten Jahre herrührenden Witwen ein Theil schon wieder verstorben sein, so dass am Ende des zweiten Jahres die Anzahl der Witwen nicht ganz doppelt so gross sein wird, als am Ende des ersten. Am Ende des dritten Jahres sind wieder ungefähr eben so viele neue Witwen hinzugekommen, dagegen wird der Bestand, welcher zu Anfang des dritten Jahres vorhanden war, einen fast doppelt so grossen Abgang erlitten haben, als die Bilanz des zweiten Jahres ergeben hatte. Man sieht, dass auf diese Weise die Zahl der Witwen zwar fortwährend wächst, aber immer langsamer, bis sie zuletzt so gross geworden ist, dass der einjährige Abgang durch den Tod der Witwen, dem Zugang durch Absterben von Ehemännern aus der Gesellschaft, das Gleichgewicht hält: dann wird also der Beharrungszustand eintreten, indem die Witwenzahl ihr Maximum erreicht hat, und von da an ungeändert bleibt.

Fügen wir den obigen Voraussetzungen noch die bei, dass sowohl die Anzahl der in jedem Jahre

neuhinzukommenden Ehepaare, als das Verhältniss, nach welchem in einer solchen Gruppe die verschiedenen Altersstufen gemischt sind, Jahr für Jahr sich gleich bleibt, imgleichen, dass das Absterben genau mit den Mortalitätstafeln gleichen Schritt hält, so wird jener Beharrungszustand seinen Namen nach aller Strenge verdienen; sowohl die Anzahl der Ehepaare in der Gesellschaft wird ganz ungeändert bleiben, als die Anzahl der Witwen, nachdem diese ihren höchsten Werth einmal erreicht hat. Es ist ferner klar, dass, wenn man sich eine zweite ähnliche Gesellschaft vorstellt, in welcher die neubeitretenden genau in demselben Verhältnisse gemischt sind, wie in der ersten, welche aber doppelt so viele Ehepaare umfasst, die höchste Witwenzahl auch doppelt so gross sein werde; oder, um es allgemein auszudrücken, das Verhältniss der stehenden Ehen zu der Zahl der Witwen, nach eingetretenem Beharrungszustande, wird nicht von dem Umfange der Association (insofern er nur als constant bleibend betrachtet wird), sondern bloss von dem Verhältnisse abhängen, nach welchem die verschiedenen Altersstufen der neu beitretenden gemischt sind, und, wenn letzteres Verhältniss vollkommen bekannt wäre, würde ersteres sich a priori durch Rechnung bestimmen lassen. Eintreten wird übrigens der Beharrungszustand, wo nicht früher, doch jedenfalls dann, wenn die Stammtheilnehmer alle ausgestorben sind, was, wenn die extremsten Fälle berücksichtigt werden sollen, möglicherweise sich bis 80 Jahre nach dem ersten Zusammentreten verzögern könnte. Indessen kann man annehmen, dass schon nach 45—50 Jahren der wirkliche Zustand dem Beharrungszustande sehr nahe gekommen sein wird*). Um die Vorstellungen mehr zu fixiren, will ich beispielshalber bestimmte Zahlen nennen, welche jedoch, da sie nur zur Erläuterung des sonst abstracten Vortrags dienen sollen, auf vollkommen scharfe Angemessenheit keinen Anspruch machen. Die Gesellschaft bestehe aus 2600 Ehepaaren, zu denen jährlich 130 neue hinzutreten, während durchschnittlich eben so viele abgehen, und zwar 70 durch den Tod des Mannes, 60 durch den Tod der Frau. Von den während eines Jahres entstehenden 70 Witwen stirbt eine schon in demselben Jahre, so dass am Schluss des ersten Jahres 69 Witwen vorhanden sind. Von diesen sind am Ende des zweiten Jahres weitere 2 verstorben, dagegen wieder 69 neue Witwen hinzugekommen, folglich zusammen 136 vorhanden. Von diesen sterben während des dritten Jahrs 4, und indem die neu hinzugekommenen wieder 69 betragen, ist die Gesammtzahl am Schluss des dritten Jahres 201. Auf diese Weise immer langsamer fortschreitend mag die Zahl der Witwen nach 10 Jahren 600, nach 20 Jahren 1000, nach 30 Jahren 1200, nach 40 Jahren 1280, nach 45 Jahren 1294, nach 50 Jahren 1298 betragen, zu welchen später noch ein paar hinzukommen, und das wirkliche Maximum 1300 hervorbringen. Hier hätten wir demnach das Verhältniss der stehenden Ehen zu der höchsten Witwenzahl wie zwei zu eins.

In einer wirklichen Gesellschaft, wo die geforderten Bedingungen nicht in ihrer scharfen Strenge, sondern nur durchschnittlich gelten, wird es natürlich nicht so regelmässig hergehen können, wie in der fingirten. In jener werden jährlich nicht genau 130 neue Ehepaare beitreten, sondern in einem Jahre etwas mehr, in einem andern etwas weniger. Eben so werden die verschiedenen Altersstufen der neu beitretenden in einem Jahre etwas anders gemischt sein, als in einem andern, oder als in der idealen Gesellschaft angenommen war, zum Beispiel, das Durchschnittsalter der Männer, oder das der Frauen, oder der durchschnittliche Unterschied beider wird einmal etwas grösser, ein andermal etwas kleiner sein. Endlich wird auch von einer gegebenen Personenmenge das Absterben nicht *genau* nach den Mortalitätstafeln erfolgen, sondern in einem Jahre werden diese etwas zu wenig, in einem andern etwas zu viel angeben. Der Erfolg von allem dem wird sein, dass in der wirklichen Gesellschaft zu einer Zeit die Zahl der Witwen etwas grösser sein wird, als in der idealen, zu einer andern etwas kleiner. Ein eigentlicher Beharrungszustand *im strengsten Sinn* wird in jener niemals eintreten, sondern ein Fluctuiren um einen Mittel-

---

*) KRITTER begnügt sich, in seinem Gutachten, schon mit 40 Jahren.

zustand her. Zu der Zeit also, wo die Witwenzahl in der idealen Gesellschaft das Maximum 1300 ganz oder fast ganz erreicht haben würde, wird in der wirklichen ein Auf- und Abschwanken über und unter diese Zahl hinaus, Statt finden. Es werden zu einer Zeit 1350, auch wohl 1360, da sein können, zu einer andern 1250, auch wohl nur 1240. Allein ganz unmöglich ist es, hier scharfe Grenzen zu setzen, und von irgend einer Zahl, man wähle welche man wolle, mit Bestimmtheit zu behaupten, dass diese zwar noch erreicht, die nächst höhere aber nicht mehr erreicht werden könne. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, in ihrem heutigen Zustande, lehrt solche Schwankungen auf ein bestimmtes Maass zurückführen, welches aber nicht von dem Extrem hergenommen wird, sondern von der Berücksichtigung aller Zwischenstufen und ihrer relativen Wahrscheinlichkeit. Natürlich ist hier durchaus nicht der Ort, diese Theorie weiter zu verfolgen; auch hängt ihre Anwendbarkeit auf concrete Fälle davon ab, dass man entweder eine mathematisch präcise Kenntniss von den bedingenden Elementen habe (wie bei Glücksspielen z. B. gewöhnlich der Fall ist), oder dass ein zureichender Reichthum von Erfahrungen zu Gebote stehe. Beides trifft aber in Beziehung auf solche Gegenstände, wie Witwenkassen sind, nicht zu, so dass a priori für eine solche Bemessung nichts geschehen kann. Aber *das* lehrt doch die Theorie: aus den Schwankungen, die in einem Falle vorgekommen sind, auf diejenigen zu schliessen, die mit gleichem Recht in einem andern qualitativ gleichen aber quantitativ verschiedenen Falle erwartet werden müssen. Nach ihrer absoluten Grösse werden in einer grossen Gesellschaft die Schwankungen grösser sein, als in einer kleinen; nach der relativen aber wird es sich umgekehrt verhalten. Wenn also z. B. eine Gesellschaft von obigem Zuschnitt zu einer Zeit bis 60 Witwen mehr, zu einer andern bis 60 weniger-Witwen gezählt hätte, als die Durchschnittsgrösse 1300, so jedoch, dass die Zahl 1360, oder eine ihr nahe kommende, mit einiger Andauer vorgekommen wäre, und eben so die Zahl 1240 oder eine ihr nahe liegende, so würde man schliessen dürfen, dass in einer andern Gesellschaft, die bei sonst ähnlichen Verhältnissen durchschnittlich nur 26 Ehepaare zählt, die Normalwitwenzahl eben so leicht um 6 vermehrt oder vermindert erscheinen könne. Oder, etwas anders ausgedrückt: Eben so gut, wie in der grossen Gesellschaft zwischen 1360 und 1240, wird die Witwenzahl in der kleinen zwischen 7 und 19 auf und abschwanken können; das *absolute* Schwanken ist, wenn der Umfang der grossen Gesellschaft 100 mal grösser ist wie der Umfang der kleinen, in der grossen zehnmal so gross wie in der kleinen; mit dem *relativen* Schwanken, welches in der grosser Gesellschaft (nach obigen Zahlen) $4\frac{4}{13}$ Procent betragen würde und bei der kleinen $46\frac{2}{7}$ Procent, verhält es sich gerade umgekehrt.

So viel von der Sache. Was den Namen betrifft, so habe ich, eben, für die Zahlen der Beispiele 1300 und 13, anstatt der weitschweifigen Umschreibung 'Durchschnittszahl der Witwen nach eingetretenem Beharrungszustande' die Benennung 'Normalwitwenzahl' gebraucht, welche man leicht als nicht unpassend gelten lassen wird: aber *üblich* ist sie meines Wissens nicht. Es ist vielmehr ganz gewöhnlich, jenen Begriff kurzweg mit *höchster Witwenzahl* zu bezeichnen, wobei von den regellosen Fluctuationen ganz abstrahirt, und nur der Beharrungszustand im Allgemeinen im Gegensatz zu der vorhergegangenen Zeit berücksichtigt wird. Für einen einigermaassen Sachverständigen wird hiebei ein Misverständniss nicht leicht möglich sein; jedenfalls aber ist so viel gewiss, und aus dem Gutachten, wenn man es nur mit einiger Aufmerksamkeit lieset, sogleich zu erkennen, dass KRITTER in demselben die höchste Witwenzahl in *diesem* Sinn und nur in diesem Sinn verstanden hat. P. hingegen dachte sich dabei etwas ganz anderes, nemlich die Zahl, über welche die Anzahl der Witwen nach höchster Wahrscheinlichkeit niemals sollte hinausgehen können. Beide Zahlen vermengen, ist ungefähr dasselbe, als wenn man den Durchschnittspreis eines Handelsartikels mit dem höchsten Preise verwechselte. Es ist hiedurch die oben S. [140] unter 3 gemachte Ausstellung hinreichend bewiesen. Was aber eine Frage nach der höchsten Witwenzahl im P.'schen Sinne des Worts betrifft, so ist sie eine solche, auf welche eine bestimmte Antwort sich gar nicht geben lässt.

Aus den frühern Erfahrungen jedoch [S. 139 unten] hätte man, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass in den ersten Decennien die Gesellschaft einen viel kleinern Umfang hatte als 1794, und dass jene Erfahrungen einer Zeit angehörten, wo der entsprechende Beharrungszustand als noch nicht ganz erreicht angesehen werden muss, schliessen können, dass man fortan eine die Durchschnittszahl 13 weit überschreitende Witwenzahl für sehr wohl möglich halten müsse. (Dass bei allem, was ich hier gesagt habe, die nach KRITTER's Gutachten noch erforderliche Vergrösserung um $\frac{1}{3}$, wegen der Waisenpensionen, noch nicht mit einbegriffen ist, wird man nicht übersehen dürfen).

Die KRITTER'sche S. [140] Nr. 2 gerügte Behauptung ist zwar durch die Erfahrung genugsam widerlegt: es ist jedoch nicht überflüssig, zu der eigentlichen etwas versteckt liegenden Quelle des Irrthums hinaufzusteigen. Bei aller Anwendung des Calcüls sowohl auf Gegenstände der Natur als auf sociale Verhältnisse, pflegen die Erfahrungsdata selten in der reinen Gestalt, wie man sie eigentlich braucht, aufzutreten, sondern fast immer mehr oder weniger behaftet mit Störungen oder Schwankungen, die in ihrem Wechsel keiner Regel gehorchen, und man sucht dann, wie jedermann weiss, den daraus entstehenden Nachtheil wenn auch nicht aufzuheben, doch so viel thunlich zu vermindern, dass man aus vielen einzelnen Resultaten das Mittel nimmt. Man rechnet darauf, dass bei einer solchen Benutzung einer grossen Zahl von Fällen die zufälligen Schwankungen einander grösstentheils compensiren, und legt dann dem Mittelwerthe eine desto grössere Zuverlässigkeit bei, je mehr partielle Resultate zugezogen sind. Dieses ist auch im allgemeinen vollkommen richtig, und durch consequente weitere Entwicklung und umsichtige Ausbeutung dieses Princips sind besonders in den Naturwissenschaften nicht selten die belohnendsten Früchte, selbst glänzende Resultate, gewonnen. Allein die Sicherheit des Grundprincips beruhet auf einer wesentlichen Bedingung, die, häufig genug, auch von Gelehrten vom Fach ausser Acht gelassen wird, und die darin besteht, dass die an den einzelnen Beobachtungen oder Erfahrungen haftenden regellosen Störungen oder Schwankungen von einander ganz unabhängig sein müssen. Das Urtheil, ob eine solche Unabhängigkeit vorhanden sei oder nicht, kann zuweilen sehr schwierig und ohne tiefes Eindringen in das Sachverhältniss unmöglich sein, und wenn darüber Zweifel zurückbleiben, so wird auch das den Endresultaten beizulegende Gewicht ein precäres sein.

Wäre z. B. die Rede von einem meteorologischen Elemente etwa von der Menge des an einem bestimmten Orte jährlich fallenden Regens, so ist diese bekanntlich in verschiedenen Jahren sehr ungleich; der durch die allgemeinen örtlichen Verhältnisse des Platzes bedingte Normalwerth wird aber an einem Durchschnitt von zehn Jahren mit viel grösserer Sicherheit erkannt, als wenn man sich bloss an ein einzelnes Jahr halten wollte. Der Grund ist aber der, weil zwischen den in den einzelnen Jahren vorkommenden Abweichungen von dem Normalwerthe kein besonderer Zusammenhang ist, vielmehr, wie auch die Erfahrung bestätigt, eine grosse Minus-Abweichung eben so leicht in einem Jahre vorkommen kann, welches unmittelbar auf ein Jahr mit grosser Plus-Abweichung folgt, wie in jedem andern.

Allein jene wesentliche Bedingung fehlt bei den gezählten Witwen aus auf einander folgenden Jahren, eben weil der Übergang von einer Zahl zu einer bedeutend verschiedenen nur allmählich geschehen kann. Wenn z. B. in der oben zur Erläuterung angeführten grössern Gesellschaft, wo der *durchschnittliche* jährliche Zugang zu 60 angenommen ist, und eben so gross, nach erreichtem Beharrungszustande, der jährliche Abgang, der Bestand einmal auf 1240 heruntergekommen ist, oder dermalen die negative Abweichung — 60 Statt findet, so ist die grösste an Unmöglichkeit grenzende Unwahrscheinlichkeit da, dass im Jahre darauf eine positive Abweichung vom Normalwerthe Statt haben werde. Bei einer kleinen Gesellschaft wie die unsrige sind sehr oft die gezählten Witwen des folgenden Jahres noch ganz die nämlichen wie im vorangegangenen, und selbst nach 10 Jahren wird in der Regel nur der kleinere Theil erneuert sein. Eine Durchschnittszahl aus 10 auf einander folgenden Jahren ist daher noch kein Mittel aus 10 von einander ganz unab-

hängige Erfahrungen, und kann über die eigentliche Normalzahl noch keinen viel sicherern Aufschluss geben, als die Erfahrung von einem einzelnen Jahre. Um das vergrösserte einem Durchschnittswerthe beizulegende Gewicht schätzen zu können, kommt es wesentlich darauf an, von wie vielen von einander ganz unabhängigen Gruppen die Erfahrungen hergenommen sind. Da nun die durchschnittliche Dauer eines Witwenthums gegen 20 Jahre beträgt, so würde bei empirischer Bestimmung der Normalzahl selbst ein vierzigjähriger Durchschnitt noch gar keine sehr sichere Bürgschaft für Elimination der Schwankungen gewähren. Dass vierzig Jahre nach einander die Witwenzahl beständig unter dem den allgemeinen Verhältnissen der Gesellschaft entsprechenden Normalwerthe bleibe, ist im Grunde eben so wenig für eine ganz ausserordentliche Erscheinung anzusehen, als wenn ein Pharaospieler zweimal nach einander gewinnt, und die Lehre, welche man hieraus ziehen muss, ist, dass von der andern Seite in jener Beziehung auch 40 ununterbrochen magere Jahre eben so leicht möglich sind, wie 40 ununterbrochen fette.

Das Zahlenverhältniss zwischen stehenden Ehen und Witwen, welches für die Professoren-Witwenkasse in KRITTER's Gutachten wie 2 : 1 vorausgesetzt ist, wird für Gesellschaften, welche verschiedenen Lebenskreisen angehören, ein sehr verschiedenes sein können. Vergleichen wir z. B. eine Witwenkassengesellschaft wie die unsrige mit der Gesammtheit aller stehenden Ehen und Witwen in einem ganzen Lande zunächst nur in Beziehung auf den allgemeinen [S. 140 oben] angegebenen Bestimmungsgrund, so sieht man leicht, dass in jener verhältnissmässig mehr Witwen gegen eine bestimmte Zahl von Ehen gerechnet werden müssen als in dieser. Bei der grossen Masse der Landeseinwohner fallen durchschnittlich die Verheirathungen in ein früheres Alter, und der Unterschied des Alters von Mann und Frau ist nach dem Durchschnittswerthe geringer, als bei Universitätsprofessoren*). Dazu kommt, dass in unsere Witwenkasse manche Mitglieder schon verheirathet eintreten, während in die Listen von einem ganzen Staate die sämmtlichen Ehepaare gleich von ihrer Verheirathung an eingerechnet werden. Allein die Wirkung dieser beiden Ursachen ist nur eine geringe im Vergleich zu dem Einfluss eines andern Umstandes, welcher oben S. [140 ff.] bei der abstrncten Behandlung der Sache noch bei Seite gesetzt wurde, nemlich, dass Abgang der Witwen nicht allein durch den Tod, sondern auch durch eine Wiederverheirathung erfolgen kann. In einer Witwenkasse, wo eine sich wieder verheirathende Witwe allen weitern Anspruch auf die Pension verliert, pflegen Wiederverheirathungen der Witwen selten vorzukommen, und namentlich zählt unsre Witwenkasse in dem ganzen Zeitraume ihres Bestehens nur einen einzigen Fall der Art; für ein ganzes Land hingegen nimmt man der Erfahrung zufolge an, dass aus dem ganzen Bestand der Witwen etwa der dreissigste Theil alljährlich durch Wiederverheirathung ausscheidet, und hiedurch wird das Verhältniss der stehenden Ehen zu den Witwen wesentlich abgeändert. Endlich hat auch in einem Lande, dessen Bevölkerung schon seit längerer Zeit im Zunehmen begriffen gewesen ist, diese Zunahme einen wesentlichen Einfluss auf das Verhältniss der *coexistirenden* Ehen und Witwen, indem sich dann mehr stehende Ehen gegen Eine Witwe vorfinden werden, als ohne jenen Umstand da sein würden.

Als Erfahrungssatz wird gewöhnlich aufgestellt, dass für ein ganzes Land vier stehende Ehen gegen eine Witwe zu rechnen seien. Die von QUETELET für Belgien angegebenen Zahlen stimmen mit diesem Verhältniss fast genau überein. Für das ganze Königreich Hannover ergeben die Zählungen von 1833—1842 eine etwas kleinere Zahl, nemlich 3,74 stehende Ehen gegen eine Witwe; unterscheidet man aber die einzelnen Landestheile, so zeigen sich sehr grosse Ungleichheiten, es sind z. B.

*) Aus unsrer Witwenkasse liegen mir die Data für das Alter nur von 62 Ehepaaren vor, wonach der durchschnittliche Unterschied 9 Jahre beträgt. Bei der Gesammtheit der Einwohner eines ganzen Landes wird man schwerlich auch nur einen halbsogrossen durchschnittlichen Unterschied annehmen können.

in der Landdrostei Stade 4,21
in der Landdrostei Aurich 3,28
in der Berghauptmannschaft Clausthal 2,56

stehende Ehen gegen eine Witwe.

In der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts hat man manche Witwenkassen zu Grunde gehen sehen, weil sie auf die (obigen Bemerkungen zufolge ganz falsche) Voraussetzungen gegründet waren*), dass das Verhältniss der stehenden Ehen zu den Witwen, welches sich aus Zählungen für ein ganzes Land ergibt, auch für Witwenkassen als maassgebend betrachtet werden dürfe. KRITTER war einer von denen, welche nicht ermüdeten, solche falsche Grundsätze zu bekämpfen. So oft er aber in seinen Schriften mit positiven eignen Angaben auftritt, heisst es *entweder* nur, dass man *zum allerwenigsten* Eine Witwe auf zwei Ehen rechnen müsse (z. B. KRITTER's Vorstellung des bisherigen Erfolgs u. s. w. S. 22); *oder* er verwahrt sich ausdrücklich (Prüfung eines Aufsatzes in der Berliner Monatsschrift S. 28), dass das Verhältniss 2 : 1 nur alsdann angenommen werden dürfe, wenn der sechste Theil aller Witwen sich wieder verheirathe, und ihre Pensionen damit erlöschen; *oder* er gibt Zahlen an, die eben bedeutend *mehr* Witwen als die halbe Zahl der stehenden Ehen erbringen; z. B.

in der eben angeführten Schrift S. 27 ist eine Rechnung geführt, wonach gegen 3293 Ehepaare 1831 Witwen kommen,

Prüfung einer kleinen Schrift u. s. w. S. 17, wo auf 100 Ehemänner 60 Witwen gerechnet werden.

Eben dieses Verhältniss ist aufgestellt in

Sammlung dreier Aufsätze über die Calenbergische, Preussische und Dänische Witwenversorgungsanstalten S. 30—35.

Sammlung wichtiger Erfahrungen u. s. w. S. 35, wo KRITTER auf 150 Ehemänner 280 Witwen rechnet.

Übrigens hat KRITTER seine Angaben nirgends auf wirkliche directe Erfahrungen gestützt (dergleichen von genügender Art auch schwerlich aus Deutschland damals zu beschaffen waren), sondern auf die Mortalitätstafeln und auf gewisse Voraussetzungen rücksichtlich der durchschnittlichen Altersverhältnisse der in die Gesellschaft eintretenden, Voraussetzungen, die jedenfalls nicht ungünstiger gewählt sind, als sie sich bei unserer Professoren-Witwenkasse wirklich finden.

Wirkliche Erfahrungen aus einem ausgedehnten und mit unsrer Witwenkasse wohl ungefähr auf gleiche Linie zu stellenden Kreise finde ich in PRICE Observations on reversionary payments, S. 79. 269. 276 (nach der dritten Ausgabe dieses Werks von 1773), wo für die Gesammtheit der Pfarrer und Professoren in Schottland nach 17jährigem Durchschnitt die Zahl der stehenden Ehen zu 667, und die der Witwen zu 380 angegeben wird, also sehr nahe in dem Verhältniss von 7 zu 4. Es wird zugleich bemerkt, dass jene Standesklassen dort durchschnittlich mit dem Alter von 27 Jahren in den Genuss des Einkommens von ihren Stellen kamen, also gewiss früher, als durchschnittlich bei den Professoren deutscher Universitäten angenommen werden darf; auch waren bei jenen Witwen die Wiederverheirathungen nicht so selten, wie bei den Witwen Göttingischer Professoren.

Aus den eignen directen Erfahrungen bei unsrer Gesellschaft lässt sich, auch abgesehen von der Kleinheit ihres Umfanges, schon deswegen das für sie gültige Normalverhältniss nicht ableiten, weil die Bewegung der Anzahl der stehenden Ehen in derselben eine unbekannte Grösse ist; diese Anzahl ist nemlich nur für zwei Zeitpunkte, aus der ganzen hundertjährigen Dauer der Anstalt, bekannt, für den gegenwärtigen Augenblick, und nach der P.'schen Angabe (oben S. 132) für den Zeitpunkt der Verhandlungen

*) Manche allerdings auch in Folge von *noch* gröbern Fehlern.

von 1794. Hätte man, in Beziehung auf sämmtliche 204 der Witwenkasse bis jetzt beigetretene Professoren regelmässig aufgezeichnet, ob und während welches Theils ihrer Genossenschaft sie verehelicht gewesen sind, zugleich mit der genauen Altersangabe für sie selbst und ihre Frauen, so würde dieses vermittelst der Mortalitätstafeln zu einer sehr genauen indirecten Bestimmung des fraglichen Verhältnisses benutzt werden können. Von allem dem ist aber, meines Wissens, Nichts geschehen. Je mehr dies jetzt beklagt werden muss, desto zuversichtlicher darf wohl gehofft werden, dass durch zweckmässige wenigstens von jetzt an zu treffende Maassregeln, demjenigen, welcher, wieder nach 100 Jahren, begutachten wird, eine gleiche Klage erspart sein wird.

Soviel über das Kritter'sche Gutachten, oder vielmehr über denjenigen Theil desselben, der mit dem Gegenstande meiner gegenwärtigen Kritik in unmittelbarer Verbindung steht; auf den zweiten Theil des Gutachtens, der die aus den Waisenpensionen entspringende Vergrösserung der Ausgaben betrifft, werde ich in der zweiten Abtheilung dieser Denkschrift zurückkommen. Dass in jenem ersten Theile des Kritter'schen Gutachtens eben nur die Oberfläche des Gegenstandes berührt ist, wird, meine ich, durch die vorstehenden Entwicklungen zur Genüge dargethan sein. Betrachtungen oder Vermuthungen darüber, wie es zugegangen, dass Kritter nur ein so oberflächliches, nicht einmal mit seinen sonstigen öffentlichen Äusserungen übereinstimmendes Gutachten ausgestellt hat, würden mich hier zu weit führen. Indess möchte ich glauben, dass, wenn man, anstatt sich auf die Verlegung von zwei Specialfragen zu beschränken, wovon zudem die eine, in dem Sinn wie der Fragesteller meinte, eine bestimmte Antwort gar nicht zuliess, den p. Kritter, gleichviel in welcher Form, an den weiteren Deliberationen hätte Theil nehmen lassen, oder ihn wenigstens über die Angemessenheit des Plans, den man auf sein Gutachten gründen zu können vermeinte, unter vollständiger Mittheilung aller Sachverhältnisse zu Rathe gezogen hätte,

die Frage über die Normirung aller künftigen Pensionserhöhungen nicht so, wie geschehen, über das Knie gebrochen sein würde*). Das ist aber unterblieben. Kritter erhielt aus der Witwenkasse ein Honorarium von 4 Thl. 24 mgr. für sein Gutachten, so wie P., in dem Ministerialrescript vom 20. November 1794, eine Belobung seiner wohlausgearbeiteten Denkschrift.

In diesem Rescript wurden die gemachten Vorschläge genehmigt, wegen der Erhöhung der Pensionen jedoch bevorwortet, dass, wenn wider Verhoffen *unglückliche Umstände* demnächst eine Verminderung der Pensionen nothwendig machen sollten, die alsdann vorhandenen Witwen sich solches gefallen lassen müssen; auch wurde für die künftig der Progressionsnormirung gemäss vorzunehmenden Pensionserhöhungen die jedesmalige Ratification vorbehalten. Es scheint bemerkenswerth, dass hier nur einer solchen Nothwendigkeit gedacht ist, die aus unglücklichen Umständen, nicht aber derjenigen, die möglicherweise aus einer zu grossen Witwenzahl hervorgehen könnte. Hat man einen solchen Fall für unmöglich gehalten, oder hat man das Regulativ in demselben Sinn wie Sch. aufgefasst, und, dass in einem solchen Fall die Pension wieder herabgehen müsse, als sich von selbst verstehend betrachtet? Übrigens wurde bei Ratification der ersten Erhöhung (1799 Mai 23) derselbe Vorbehalt wiederholt, aber nur im Allgemeinen von Umständen, die die Wiederverminderung nothwendig machen könnten, gesprochen, ohne die Qualification von unglücklichen. In den spätern Ratificationsfällen ist, so viel ich habe finden können, die Reservation nicht wiederholt.

*) Die Zahl der im Laufe meines obigen Berichts angeführten oder angedeuteten Züge von laxer Geschäftsbehandlung hätte leicht noch vergrössert werden können, was ich jedoch für so unnöthig wie unerfreulich gehalten habe.

Es bleibt mir jetzt noch übrig, einige zum Theil schon oben berührte Punkte noch etwas näher zu betrachten.

Man hat oben gesehen, wie über ein Grundprincip P. und R. ganz entgegengesetzte Ansichten gehabt haben S. [133] und [137]. Wenn der letztere S. [138, oben] von einem Steigen oder *Sinken* des *Fonds* spricht, so vermuthe ich, dass er eigentlich nur den *Ertrag* des Fonds gemeint hat. Denn das scheint mir, insofern die Anstalt ein Beneficium ist, die strengePflicht der Verwaltung zu sein, dafür zu sorgen, dass die Substanz, aus welcher das Beneficium fliesst, in ihrer Integrität erhalten werde. Dies kann aber schon wegen der bei Kapitalausleihungen von Zeit zu Zeit bei aller Vorsicht nicht abzuwendenden Verluste mit Sicherheit anders nicht geschehen, als wenn man neben der Erhaltung auch einige allmählige Vermehrung sich zum Ziele setzt, wobei man denn immer lieber etwas zu viel als zu wenig thun möge. Auf diese Weise wird die *Gesammtheit* der Percipienten in der spätern Zeit gegen die Gesammtheit der frühern nicht zu kurz kommen, sondern vielmehr eher besser daran sein, was aber die dermaligen Percipienten jenen um so eher gönnen können, da sie selbst die Früchte einer ähnlichen Enthaltsamkeit *ihrer* Vorgänger geniessen. Ausserdem erfordert die Billigkeit, dass man sich bestrebe, das unvermeidliche und bei einer kleinen Gesellschaft verhältnissmässig sehr grosse Schwanken der Zahl der Percipienten durch zweckmässige Maassregeln so viel thunlich auszugleichen. Dagegen aber scheint mir P.'s Forderung, dass niemals ein künftiger *einzelner* Percipient weniger erhalten solle, als irgend ein früherer erhalten hat, bei einer Gesellschaft, die wie Sch. sehr richtig bemerkt hat, immer etwas Actienmässiges behalten wird, im Rechte nicht begründet; jedenfalls aber, und dies ist der Hauptpunkt auf den es ankommt, lässt sich einer solchen Forderung, wenn sie wie eine unbedingte gelten soll, gar nicht genügen ohne die offenbarste Unbilligkeit gegen die dermaligen Percipienten. Es liegt auf der Hand: je grössere Sicherheit man verlangt, dass jener Fall niemals eintreten müsse, desto weniger darf man den jetzigen Percipienten verabreichen. Man müsste die extremsten Fälle für die mögliche Zahl der Percipienten berücksichtigen, wovon, wie oben gezeigt ist, P.'s Ansätze weit entfernt waren. Noch viel schlagender tritt dies hervor durch die weiter unten S. [150] aufgestellten Überschläge auf den Grund der erweiterten Interessentenzahl, einer Eventualität, die doch auch schon 1794 unter die Zahl der künftighin nicht bloss möglichen, sondern sogar wahrscheinlichen Fälle hätte aufgenommen werden können. Denn damals war die Zahl aller Universitätsprofessoren 45*), funfzig Jahre früher nur 25, und welche Grenzen die fortwährend gesteigerten Zeitbedürfnisse finden werden, ist unmöglich im Voraus festzusetzen.

Der zweite Punkt betrifft die Auslegung der Progressionsnormirung in Sch.'s Sinn. Wenn Sch. sagt [S. 138. Z. 19], P. habe das Maass der Erhöhung und eben so der Verminderung durch eine unwandelbare Regel bestimmt, so setzt dies zwar nothwendig die erste Interpretation S. [129] voraus, aber doch räumt Sch. damit zu viel ein. Eine unwandelbare Regel für die Verminderung fand sich darin nur in so weit, als bestimmt wurde, *wann* Verminderung eintreten müsse (nemlich, nach jener Auslegung, sofort nachdem die Zahl von 15 Pensionen überschritten), aber noch nicht für die *Grösse* der Verminderung. Diese Unvollständigkeit hätte, deucht mir, nach damaliger Lage der Sache, am füglichsten durch eine Bestimmung in folgender Fassung ergänzt werden können:

So oft das Kapitalvermögen um 5000 Rthl. gestiegen ist, tritt eine Erhöhung der Pensionen ein, welche für jede einzelne Pension 10 Rthl. beträgt, wenn und so lange nicht mehr als 15 Pen-

*) Einer davon, K., starb noch vor Beendigung der Verhandlungen 1794 August 21. Jetzt (im Herbst 1845) sind 57. Aber die Anzahl der verheiratheten Mitglieder der Witwenkasse ist in viel stärkerm Verhältniss gestiegen von 26 im Jahr 1794 auf 42 im Jahr 1845.

sionen bestehen, sonst aber die auf die einzelnen Pensionen gleichmässig zu vertheilende Gesammtsumme von 150 Rthl. Dasselbe gilt von jeder folgenden Erhöhung.

Auf diese Weise hätte man gar nicht einmal nöthig gehabt, den *Anfang* einer Erhöhung von der Bedingung einer nicht über 15 hinausgehenden Pensionenzahl abhängig zu machen. Und in dieser Beziehung hätte diese Bestimmungsart sich sogar als vortheilhafter für die Witwen gezeigt, weil bei einer andauernd bestehenden kleinen Überzahl der Verlust, welcher aus der Verpflichtung entsteht, die bisherige Erhöhungssumme mit mehrern theilen zu müssen, bald durch eine neue Erhöhung compensirt oder mehr als compensirt würde, während in einem solchen Fall eine neue Erhöhung nach der P.'schen Normirung und in der zweiten Interpretation gar nicht zulässig ist.

Ich möchte übrigens glauben, dass die obige abgeänderte Fassung, wenn damals jemand daran gedacht hätte, sie in Vorschlag zu bringen, auch P. hätte zufrieden stellen müssen. Denn entweder war seine Voraussetzung, 15 sei die höchste Pensionenzahl, die vorkommen könne, richtig, oder sie war unrichtig: im ersten Fall war die Abänderung ganz wirkungslos, mithin gleichgültig, im zweiten aber nothwendig.

Die Folge einer solchen Normirung wäre gewesen, dass man sich gewöhnt haben würde, die Pension wie aus zwei Theilen zusammengesetzt zu betrachten, einem unveränderlichen Theile und einer Zulage, die von Zeit zu Zeit mit dem Kapitalvermögen wachsen, möglicherweise aber auch dabei wieder etwas zurückgehen könne, letzteres aber dann nach einer wirklich unwandelbaren einfachen Regel, wonach jede Witwe leicht selbst die Controle führen konnte. Auf den Unterschied zwischen einem solchen gesetzlichen Zurückgehen, und dem, nach der Quittungs-Clausel in Folge des Unvermögens der Kasse eintretenden habe ich schon oben S. [131] aufmerksam gemacht.

Drittens scheint es wohl der Mühe werth zu sein, die Ursachen anzugeben, welchen man das rasche und ununterbrochene Steigen der Prosperität der Witwenkasse während eines Zeitraums von mehr als vierzig Jahren zuzuschreiben hat. Ich finde, dass dieses Steigen ganz vorzüglich begünstigt ist durch das Zusammenwirken von zwei Umständen, auf deren einen 1794 gar nicht gerechnet war, auf den andern aber wenigstens nicht gerechnet werden durfte.

Die erste Ursache ist das Steigen des Zinsfusses, welches schon wenige Jahre nach jener Epoche anhob. Man hatte, wie ich nachgewiesen habe, damals mit Sicherheit nur auf 3 Proc. rechnen zu dürfen geglaubt. Aber schon 1799 bemerkte das Curatorium in dem schon oben angeführten Rescript vom 23. Mai, dass Gelegenheit zu sicherer Unterbringung zu 4 Proc. gar nicht selten sei, und bot sogar die eigne Mitwirkung dazu an. Etwas später aber erhob sich der Zinsfuss allgemein auf 5 Proc., und beharrte für den grössten Theil der Kapitalien der Witwenkasse während einer langen Reihe von Jahren auf dieser Höhe.

Die zweite Ursache ist der Umstand, dass die Zahl der Pensionen während jenes langen Zeitraums *unter* dem zu erwartenden Mittelwerthe (15) geblieben ist, ja man muss sagen *beträchtlich* unter dem zu erwartenden Mittelwerthe, wenn man dafür nach dem plausiblern Anschlage S. [145] die Zahl 17 annimmt (nemlich $\frac{2}{3} \times 26$ Witwen mit Zusatz von $\frac{1}{3}$ wegen der Waisen). Dass man diese Erscheinung gar nicht wie etwas sehr ausserordentliches zu betrachten habe, ist schon oben S. [144 Z. 7] erwähnt: allein eben so wenig wäre es etwas ausserordentliches gewesen, wenn gerade das Gegentheil eingetreten, und z. B. schon 20—25 Jahre nach jener Epoche von 1794 die Mittelzahl auf der andern Seite bedeutend und andauernd überschritten wäre. In einem solchen Falle würde an die Stelle des raschen Steigens des Vermögens der Kasse ein sehr langsames getreten sein, ja vielleicht ein Stillstand oder sogar die Nothwendigkeit zu der Quittungsklausel die Zuflucht zu nehmen, falls sich zugleich ein tiefes Herabgehen des Zinsfusses dazu gesellt hätte.

Höhere Witwenzahl ist nun bereits seit einer Anzahl von Jahren eingetreten S. [126 Z. 23] und

S. [128 Z. 29]; der Zinsfuss aber, obwohl von seiner frühern Höhe sehr herabgegangen, noch immer hoch genug, dass die Kasse jener höhern Pensionenzahl noch gewachsen bleibt. Überhaupt ist diese hohe Zahl, selbst wenn sie noch um eine oder ein paar Pensionen mehr gestiegen wäre, an sich, und in so weit man darin nur das Vorkommen eines ungewöhnlich hohen Schwankens über den Mittelwerth 15 oder 17 zu erkennen hat, lange nicht von einer so schweren Bedeutung, wie *der* Umstand, zu welchem ich jetzt übergehe, dass der Mittelwerth der Pensionenzahl, möge man 15 oder 17 wie den plausibelsten betrachten, nur so lange gültig ist, als die Genossenschaft keine grössere Ausdehnung erhält, als sie 1794 hatte, und dass diese Gültigkeit jetzt, wo die Ausdehnung, mit dem Maassstabe der Zahl der verheiratheten Mitglieder gemessen, um mehr als 80 Procent grösser ist, als zur Zeit jener Epoche, ganz aufgehört hat.

Für die Zwischenzeit zwischen 1794 und 1845 lässt sich dieser Maassstab nicht anwenden, weil die Kenntniss der Zahl der verheiratheten Mitglieder fehlt. So viel sich aber aus der Bewegung der Gesammtzahl aller Mitglieder schliessen lässt, ist die Ausdehnung der Genossenschaft im Ganzen und abgesehen von einigem hin und her Schwanken bis etwa 1831 nicht grösser, sondern eher etwas geringer gewesen als 1794, und *sehr bedeutend* ist die Vergrösserung erst seit wenigen Jahren geworden. Mit der hohen Witwenzahl in der letzten Zeit steht daher die erweiterte Ausdehnung der Genossenschaft durchaus nicht in ursachlichem Zusammenhange, wie bereits oben [S. 128] bemerkt ist.

Der vierte hier noch zu betrachtende Punkt und gleichsam der Schlussstein der ersten Abtheilung, ist, einen Überschlag der künftigen Bewegung der Witwenzahl im Allgemeinen zu machen, so weit nemlich ein solcher auf dem bisher eingeschlagenen Wege erreicht werden kann. Die Anzahl aller Professoren ist jetzt 57; davon nehmen an der Witwenkasse Theil 51, und unter diesen sind 42 verehelicht. Macht man, zuerst, den Überschlag nach der Hypothese, die den Verhältnissen der hiesigen Professorenwitwenkasse am meisten angemessen scheint, dass auf 7 stehende Ehen 4 Witwen zu rechnen sind, so gibt die Rechnung 24 Witwen, und die Bedeutung davon ist, dass nachdem die Gesellschaft von jenem Umfange den Beharrungszustand erreicht hat, die durchschnittliche Witwenzahl 24 sein wird. Wegen der Waisenpensionen müsste nach KRITTER's Gutachten noch ein Sechstel zugesetzt werden; ich will jedoch nur ein Achtel in Rechnung bringen, also die durchschnittliche Pensionenzahl im Beharrungszustande = 27 setzen. Allerdings soll man den Beharrungszustand erst nach 45—50 Jahren erwarten; man würde sich aber sehr täuschen, wenn man diese weite Entfernung für einen starken Beruhigungsgrund hielte. Denn schon lange vorher ist man dem Grenzzustande so nahe gekommen, dass der Unterschied nicht viel mehr bedeutet. Man vergleiche die oben S. [141] für allmähliges Steigen der Witwenzahl mitgetheilten Ansätze, die ohne Anspruch auf strenge Genauigkeit zu machen, doch einigermaassen eine Idee von dem Hergange geben können. Wenn man dann dabei überlegt, dass der frühere Umfang der Gesellschaft schon 17 Pensionen als Normalzahl (bei dem Verhältniss 7 : 4) für die Pensionen gegeben hatte, und es also hier sich nur um die allmählige Entwicklung der auf 10 angeschlagenen Vergrösserung handelt, so wird man mich leicht verstehen, wenn ich behaupten muss, dass schon nach etwa 25 Jahren man auf 25 Pensionen als *Mittelzahl* gefasst sein müsse. Hierzu kommt nun noch die Erweiterung des Spielraumes wegen der Schwankungen, denen scharfe Grenzen zu setzen unmöglich ist. Soviel ist aber gewiss, dass ein Schwanken von 7 Pensionen, auf und ab vom Mittelwerthe, wie etwas gar nicht ausserordentliches in den Überschlag mit aufgenommen werden muss, da ein verhältnissmässig wenigstens eben so grosses Schwanken nach frühern Präcedentien factisch ist. Das Resultat dieser Erwägung ist also, dass man erwarten muss, um das Jahr 1870 die Pensionenzahl zwischen 18 und 32 zu finden, ohne dass man im Stande ist, im voraus zu bestimmen, *wo* innerhalb dieses weiten Spielraumes; dass das Erreichen des einen oder des andern Extrems nicht wie etwas sehr ausserordentliches betrachtet werden darf; endlich, dass späterhin diese Zahlen noch ein

wenig vergrössert werden müssen, so dass nach längerer Zeit der Spielraum durch 20—34 bezeichtet werden muss. Das ist alles, was die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehren kann, *so lange man die Gesellschaft gleichsam nur massenweise betrachtet.* Vielleicht meint mancher, das sei wenig! Ich dächte doch nicht. Es ist sehr wichtig, dass man das Maass der Erwartungen, die man zu haben befugt ist, kennt, und sich nicht einer unbegründeten Sicherheit überlässt. Erwägen wir die beiden Extreme. Es ist *möglich*, dass nach 25 Jahren die Pensionenzahl noch nicht die Zahl 18 überschritten hat, und sich auch noch eine geraume Zeit länger auf dieser oder einer sehr wenig grössern Höhe erhält. Die Pensionenzahl kann auch vorher von ihrer jetzigen Höhe (19) erst noch herabsteigen, und so von jetzt bis 1870 durchschnittlich nicht unbeträchtlich unter 18 sein. Auf diese Weise kann die Kasse Kräfte sammeln, mit denen sie, wenn erst nach langer Zeit das Blatt sich wendet, auch den extremen Fällen der andern Seite die Spitze bieten kann. Das schlimmste wäre eigentlich, wenn diese günstigen Voraussetzungen gar sich noch weiter realisirten; ich meine, wenn in dieser Zwischenzeit die Pensionenzahl erst noch einmal unter 16 herabginge, und so die Kasse in Folge der bestehenden Satzung noch mit neuer Pensionserhöhung von 10, 20, vielleicht gar von 30 Rthl. belastet würde. — Würde, umgekehrt, was aber eben so wohl möglich ist, die Pensionenzahl schon nach 25 Jahren auf oder nahe auf die Höhe von 32 gestiegen sein, so bedarf es nur eines rohen Überschlages, um sich zu überzeugen, dass abgesehen von ganz ausserordentlichen Zuflüssen, die Kasse solchen Anforderungen nicht gewachsen sein, sondern, vermuthlich schon früher, zur Erklärung ihres Unvermögens genöthigt sein wird.

Dass die Überschläge sich etwas günstiger gestalten, wenn man anstatt des Verhältnisses 7 : 4 das von 2 : 1 annimmt, versteht sich von selbst. Man würde dann nach 25 Jahren den Spielraum von 16—28 Pensionen und nach noch längerer Zeit den von 18—36 zu erwarten haben.

Endlich muss ich noch bemerken, dass hiebei stillschweigend vorausgesetzt ist, dass der Umfang der Genossenschaft auf seiner gegenwärtigen Höhe fortan bleibt. Nimmt er noch weiter zu, so muss man sich auf verhältnissmässig noch grössere Zahlen gefasst machen; vermindert er sich hingegen wieder, so wird auch von obigen Resultaten einiger Abzug gemacht werden dürfen. Nach der Natur der Sache aber ist es wohl wenig wahrscheinlich, dass eine *bedeutende* Verminderung anders als nach Verlauf längerer Zeit eintreten könne.

Zweite Abtheilung.

Da ich die zu der Aufstellung der Bilanz der Witwenkasse einzuschlagenden Wege bereits in meinem Votum vom 8. Januar d. J. umständlich beschrieben, und bei der Ausführung der Arbeit zu Abänderungen keine Veranlassung gefunden habe, so kann ich mich nur auf jenes beziehen, und will hier nur bemerken, dass das Wesen der Methode in der Ermittelung des gegenwärtigen Geldwerths der Obliegenheiten der Kasse besteht, nach den drei Rubriken

Obliegenheiten gegen die jetzigen 19 Witwen,

Obliegenheiten gegen die Witwen (und Waisen) der jetzigen 61 Theilnehmer,

Obliegenheiten gegen die Witwen und Waisen der künftig beitretenden,

wobei für die zweite und dritte Rubrik der gegenwärtige Geldwerth der Gegenleistungen durch die Beiträge, in Abzug zu bringen ist. Ich schicke hier zuvörderst einige allgemeine Erläuterungen voraus.

Als Epoche, auf welche alle künftigen Leistungen durch Discontirung bezogen werden, ist der 1. October 1845 gewählt, und vorausgesetzt, dass die Witwen und Interessenten ihre bis dahin fällig gewordenen Pensionen und Beiträge schon resp. empfangen und geleistet haben.

Zu der Rechnung habe ich die höchst schätzbaren Mortalitätstafeln angewandt, welche Brune aus den bei der preussischen Witwenkasse an 31500 Ehepaaren gemachten Erfahrungen abgeleitet hat. Nur für das Absterben der Männer im höchsten Lebensalter sind diese Tafeln mangelhaft, da die Registratur der Witwenkasse dazu keine hinreichende Daten enthielt, und ich habe daher vorgezogen, das Absterben der Männer über 80 Jahr nach denselben Verhältnissen zu rechnen, welche die Tafeln für das weibliche Geschlecht angeben. Zur Berechnung der Modificationen, welche der Werth der Witwenpensionen durch Berücksichtigung der minderjährigen Kinder, wo solche vorhanden sind, erleidet, habe ich für letztere die Mortalitätstafeln von Deparcieux angewandt. Übrigens hat die Wahl der Tafeln, sowohl für die Mortalität der Kinder, als für die der Männer im höchsten Lebensalter auf die Rechnungsresultate nur sehr geringen Einfluss.

Alle Resultate sind wesentlich abhängig von dem dabei zum Grunde gelegten Zinsfuss; und ich habe daher, um hier nichts zu wünschen übrig zu lassen, sämmtliche Rechnungen sowohl nach dem Zinsfuss von 4 Procent, als nach dem von 3½ Procent durchgeführt, obgleich dadurch die Arbeit gerade verdoppelt wurde. Die Münzen sind immer als Gold zu verstehen. Die Rechnung ist durchgehends auf Brüche des Thalers genau geführt, diese Brüche aber sind in gegenwärtiger Abschrift weggelassen. Daraus wird hin und wieder ein Unterschied von einer oder ein paar Einheiten in den Summationen erscheinen können, welchen geringfügigen Umstand ich hier bloss deswegen bemerke, damit nicht jemand, der etwa die eine oder die andere der Summationen nachrechnet, solche Unterschiede für Zeichen von ungenauer Rechnung halte, da sie vielmehr gerade umgekehrt die Folge der in der Rechnung beobachteten grössern Schärfe sind.

I. Berechnung des auf den 1. October 1845 reducirten Geldwerths der Witwenpensionen.

Die Zahl aller seit Errichtung der Witwenkasse bis jetzt eingetretenen Pensionirungen ist 68, und ich habe dieselben, um in meiner Arbeit die leichteste Übersichtlichkeit zu gewinnen, mit fortlaufender Numerirung bezeichnet. Die Ansätze in dem folgenden tabellarischen Abrisse drücken die Summen aus, welche den einzelnen Witwen ausgezahlt werden müssten, wenn sie für ihre Ansprüche abgefunden werden sollten, oder umgekehrt, die Summen, welche die Witwen einzahlen müssten, wenn sie eine solche Berechtigung, wie ihnen jetzt zusteht, sich erst erkaufen wollten. Der Rechnung liegt der jetzige Pensionssatz von 250 Rthl. zum Grunde, mit Ausnahme der Nr. 58, wo er 200 Rthl. beträgt. Die Witwen 50. 52. 58. 64. 68 haben Kinder unter 20 Jahren, die bei der Rechnung genau berücksichtigt sind, eben so wie der Umstand, dass die Pensionen immer noch für den vollen Monat, in welchem ein Abgang statt findet, ausgezahlt werden.

Nro.		Jetziger Werth der Pension. 3½ Proc.	4 Proc.	Nro.		Jetziger Werth der Pensionen. 3½ Proc.	4 Proc.
29	L.	957 Thl.	941 Thl.	58	G.	3172 Thl.	3000 „
31	S.	1756 „	1708 „	59	W.	2850 „	2732 „
41	W.	1222 „	1101 „	60	S.	2606 „	2507 „
44	F.	2543 „	2448 „	62	B.	1648 „	1605 „
50	H.	3987 „	3759 „	63	G.	2113 „	2045 „
51	S.	735 „	725 „	64	M.	4170 „	3932 „
52	P.	2352 „	2270 „	65	H.	3026 „	2894 „
53	M.	2789 „	2676 „	66	H.	1916 „	1859 „
55	H.	2813 „	2698 „	68	M.	4175 „	3936 „
57	S.	1798 „	1748 „		Summa	46529 Thl.	44582 Thl.

II. Evaluirung des jetzigen Geldwerths der Verbindlichkeiten der Witwenkasse gegen ihre gegenwärtigen Theilnehmer.

Wie die Witwen, so habe ich auch alle Interessenten der Witwenkasse nach der Reihefolge ihres Beitritts mit fortlaufender Numerirung bezeichnet. Indem ich ganz den a. a. O. vorgezeichneten Weg verfolge, habe ich zuvörderst die 42 verheiratheten Theilnehmer in Betracht zu ziehen, und zunächst (was gleichsam den Kern der Untersuchung bildet) den gegenwärtigen Geldwerth theils von den Beiträgen, zu welchen sie verpflichtet sind, theils der Pensionen welche ihre dermaligen Ehefrauen im Fall des Überlebens zu geniessen haben werden, nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung und den Mortalitätstafeln zu ermitteln. Ich concentrire hier auf Einer Seite die Resultate einer langen Arbeit in einem tabellarischen Abrisse.

Nro.	Jetzige verheirathete Theilnehm.	Zinsfuss 3½ Proc. Jetziger Geldwerth der Pensionen	Zinsfuss 3½ Proc. Jetziger Geldwerth der Beiträge	Zinsfuss 4 Proc. Jetziger Geldwerth der Pensionen	Zinsfuss 4 Proc. Jetziger Geldwerth der Beiträge
		Thl.	Thl.	Thl.	Thl.
109	L.	1752	59	1634	58
135	O.	1509	85	1386	83
138	C.	1846	70	1706	68
139	U.	937	109	854	104
140	H.	1451	106	1310	101
141	L.	1091	93	1004	90
147	R.	1441	105	1301	101
149	G.	1727	101	1545	97
151	O.	1051	130	933	123
153	B.	865	109	790	104
155	K.	925	114	840	109
156	S.	853	114	776	109
160	H.	1376	123	1221	117
161	B.	876	120	795	114
164	W.	1359	122	1209	117
167	S.	995	140	878	132
168	K.	1345	135	1173	128
169	Z.	1118	134	988	127
170	R.	1541	99	1397	96
171	C.	1193	105	1084	101
173	F.	1120	127	998	121
174	H.	1175	120	1053	114
175	R.	1154	142	1007	134
177	W.	1117	131	991	124
180	T.	1064	132	944	125
183	V.	943	148	824	139
184	B.	1023	146	893	137
187	W.	917	134	817	127
188	S.	867	134	774	127
189	H.	1138	129	1011	122
190	H.	936	142	825	134
191	D.	892	123	804	117
192	R.	943	139	848	131
193	G.	1047	148	907	140
195	D.	981	140	866	132
197	R.	916	154	791	145
198	W.	1072	144	936	136
199	F.	1127	127	1005	120
200	L.	861	153	749	144
201	W.	1073	145	935	137
203	B.	932	127	835	121
204	E.	787	146	729	138
	Summa Thaler	47324	5203	42366	4945

Den Totalwerth der Witwenpensionen vergrössere ich um seinen sechsten Theil wegen der Waisenpensionen, nicht sowohl deswegen, weil Kritter in seinem Gutachten dieses Verhältniss angenommen hat, als weil dasselbe sehr nahe aus meiner eignen Discussion der Erfahrungen bei unsrer Witwenkasse hervorgeht [S. 154]. Sodann wird der Totalwerth der Beiträge abgezogen, wodurch sich der reine Werth der Verbindlichkeit der Kasse gegen die 42 verheiratheten Mitglieder ergibt. Für die 9 jetzt unverheiratheten wird endlich schlechthin pro rata zugesetzt. Diese Rechnungen stehen dann folgendermaassen:

	Zinsfuss 3½ Proc.	Zinsfuss 4 Proc.
Witwenpensionen der 42 verheiratheten Mitglieder	47324 Thl.	42366 Thl.
Waisenpensionen	7887 „	7061 „
Pensionen	55211 „	49427 „
Beiträge	5203 „	4945 „

	Zinsfuss 3½ Proc.	Zinsfuss 4 Proc.
Reine Verbindlichkeit der Kasse gegen 42 verheirathete Mitglieder	50008 Thl.	44482 Thl.
Danach verhältnissmässig gegen 9 unverheirathete Mitglieder	10716 „	9532 „
Totalwerth der zweiten Rubrik	60724 „	54014 „

Dass einer solchen Evaluirung nicht ganz dieselbe Zuverlässigkeit beigelegt werden kann, wie der Berechnung der Verbindlichkeiten der ersten Rubrik, habe ich schon in meinem mehrerwähnten Gutachten bevorwortet. Es finden nemlich bei unsrer Witwenkasse mehrere Umstände Statt, deren Wirkung einer Vorausberechnung gar nicht fähig ist, von welcher aber auch, in Ermangelung einer solchen Buchführung für die frühere Zeit, wie S. [145 unten] erwähnt ist, nicht einmal eine Schätzung gemacht werden kann. Als den einflussreichsten dieser Umstände bezeichne ich die Wiederverheirathung von Mitgliedern nach dem Tode ihrer Ehefrauen. Das Ableben der Frauen vor den Männern ist nemlich schon ein Theil der in der Rechnung berücksichtigten Chancen, und so ist jede Wiederverheirathung eine ausserhalb der Rechnung liegende neu hinzukommende Belastung des Kassen-Conto. Von der andern Seite kommt diesem Kassen-Conto wie eine nicht veranschlagte Entlastung zu Gute jeder anderweitige Abgang eines verheiratheten Mitgliedes, z. B. durch eine auswärtige Vocation. Auch der Umstand, dass solche verwitwete Mitglieder, die sich nicht wieder verheirathen, doch nach dem Tode der Frauen wenigstens eine Zeitlang die Beiträge fortzuzahlen pflegen, gehört in dieselbe Kategorie, obwohl er von geringer Erheblichkeit ist. Endlich ist vielleicht die Rechnung für die dermalen unverheiratheten Theilnehmer nach dem Durchschnittsresultate für die Verheiratheten, etwas zu hoch. Der jedesmalige Bestand der unverheiratheten Mitglieder wird gewöhnlich so zusammengesetzt sein, dass mit Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann, ein oder der andere davon werde sich überall nicht verheirathen: dies wird jedoch, wenigstens zum Theil, wieder dadurch aufgewogen, dass, je später Verheirathung erfolgt, desto mehr mit Wahrscheinlichkeit das künftige Überleben der Frau und ein langer Witwenstand präsumirt werden muss.

Bei der Unmöglichkeit, die Wirkung dieser verschiedenen Umstände im Voraus in Zahlen zu veranschlagen, darf man doch für wahrscheinlich halten, dass sie einander grossentheils compensiren.

III. Evaluirung des jetzigen Geldwerths der Verbindlichkeiten der Kasse gegen alle künftig beitretenden Mitglieder.

Für diese dritte Rubrik bieten die bisherigen Erfahrungen der Kasse ein sehr schätzbares Hülfsmittel dar; ja ohne diese Erfahrungen würde eine Veranschlagung ganz unmöglich sein. Mein Verfahren ist folgendes.

Ich habe für jeden der bis Michaelis 1804 beigetretenen Theilnehmer, bis einschliesslich Nr. 168 *), sowohl den Werth der Beiträge, als den Werth der von ihren Hinterbliebenen bezogenen Pensionen auf den Zeitpunkt ihres Beitritts reducirt, und nach zweierlei Zinsfuss discontirt, jedoch mit folgenden, für den Gebrauch, der von diesen Rechnungen gemacht werden sollte, nothwendigen Modificationen:

1) Die jährlichen Beiträge und die Pensionen sind in Rechnung gebracht, nicht wie sie wirklich gezahlt sind, sondern nach ihrer jetzigen Höhe, nemlich 10 Rthl. für jene, 250 Rthl. für diese.

2) Die Waisenpensionen, welche bis 1794 nur bis zum vollendeten 12ten Jahre des jüngsten Kindes verabreicht wurden, sind so gerechnet, als ob sie noch 8 Jahre länger gedauert hätten. Durch Nachfor-

*) Dass ich gerade soweit und nicht weiter gegangen bin, ist mit Vorbedacht geschehen, es würde mich aber zu weit führen, wenn ich die Gründe hier ausführlich entwickeln wollte.

schung im Gerichtsarchiv ist ermittelt, dass die betreffenden jüngsten Kinder das Alter von 20 Jahren alle wirklich erreicht haben. Es kann indess sein, dass auf diese Weise immer noch etwas zu wenig gerechnet ist, da möglicherweise bei dem Tode eines oder des andern verwitweten Professors oder einer Professorwitwe noch Kinder zwischen 12 und 20 Jahren vorhanden gewesen sein können, die mithin nach jetziger Einrichtung pensionsberechtigt und also in meine Rechnung mit aufzunehmen gewesen sein würden: wenigstens haben die Gerichtsakten nicht in allen Fällen das Gegentheil zur Gewissheit gebracht. Indessen würde doch jedenfalls keine erhebliche Vergrösserung der Totalsumme dadurch hervorgebracht werden können.

3) Unter jenen 108 Theilnehmern befinden sich 7, deren Witwen noch jetzt am Leben sind. Für diese habe ich zu den Pensionszahlungen, welche sie bisher genossen haben, auch noch den schon oben nach der Wahrscheinlichkeitsrechnung evaluirten künftigen Betrag beigefügt, nachdem derselbe von der Epoche 1845 October 1 auf das Moment des Beitritts der resp. Ehemänner zurückdiscontirt war. Ohne dieses Verfahren hätte ich nicht bloss diese Interessenten ausschliessen, sondern consequenterweise anstatt der Theilnehmer 1—108 mich auf die 1—62 beschränken müssen, was ich jedoch hier nicht weiter entwickeln kann.

Zur Ersparung des Raumes setze ich die Resultate der 108 Rechnungen nicht einzeln hieher, sondern nur den Totalbetrag von allen. Es findet sich

		nach dem Zinsfuss $3\frac{1}{2}$ Proc.	4 Proc.
Summe der discontirten Beiträge		13909,00 Thl.	13115,94 Thl.
— — —	Witwenpensionen	67915,80 „	59019,67 „
— — —	Waisenpensionen	10945,04 „	9878,34 „
Summe aller discontirten Pensionen . . .		78860,84 „	68898,01 „

Es folgt hieraus zuvörderst, dass der (reducirte) Betrag der Waisenpensionen sehr nahe dem sechsten Theile des (reducirten) Betrages der Witwenpensionen gleich zu setzen ist: in der That ist jener bei dem Zinsfuss $3\frac{1}{2}$ Proc. etwas kleiner, bei dem Zinsfuss 4 Proc. hingegen etwas grösser als dieses $\frac{1}{6}$. Es liesse sich leicht nachweisen, dass diese kleine Verschiedenheit des Resultats nach Maassgabe des Zinsfusses vollkommen in der Natur der Sache begründet ist; da jedoch der Umfang der Erfahrungen zu klein ist, als dass dem Resultate überhaupt eine minutiöse Schärfe beigelegt werden könnte, so habe ich in der obigen Rechnung S. [152] mich schlechthin an das einfache Verhältniss 1 : 6 gehalten.

Man kann ferner sagen, dass die Gesammtrechte aller jener 108 Interessenten, nach jetziger Höhe der Pensionen und Beiträge taxirt und auf die Zeiten ihrer respectiven Eintritte reducirt, den Geldwerth hatten

von 64951,84 Thalern bei dem Zinsfuss von $3\frac{1}{2}$ Proc.
55782,07 Thalern bei dem Zinsfuss von 4 Proc.

oder, so weit eine so ausgedehnte Erfahrung maassgebend sein kann, dass nach dem Durchschnittswerth, der Eintritt in die Kasse für jeden einzelnen den Geldwerth von 601,40 Thalern, oder von 516,50 Thalern hat, jenachdem man $3\frac{1}{2}$ oder 4 Proc. Zinsen rechnet.

Mancher, der mit Gegenständen dieser Art wenig bekannt ist, wird sich vielleicht über die Kleinheit dieses Resultats wundern. Allein das Auffallende verschwindet grösstentheils, wenn man erwägt, dass dabei die Reduction auf den Zeitpunkt des Eintritts jedes einzelnen zum Grunde liegt, und dass jede Geldsumme, durch Discontirung für eine beträchtliche Anzahl von Jahren, enorm vermindert erscheint. Ich will dies durch das Beispiel von Heyne erläutern, welcher 48 Jahr Beitrag geleistet, und dessen Witwe 21 Jahr 11 Monat Pension genossen hat. Nach meinen Rechnungsgrundlagen stellt sich also die Summe der Beiträge zu 480 Rthl. und die Summe der Pensionsbezüge zu 5479 Rthl. 4 Ggr. heraus, mithin der

reine Gewinn der Familie durch die Aufnahme in die Kasse (nicht wie er wirklich gewesen ist, sondern wie er bei jetziger Höhe der Beiträge und Pensionen gewesen sein würde) zu 4999 Rthl. 4 Ggr. Werden aber jene Summen durch Discontirung à 4 Proc. auf den Zeitpunkt des Beitritts, Michaelis 1763, zurückgeführt, so reduciren sich

die Beiträge auf 211 Rthl. 23 Ggr.
die Pensionsbezüge auf 527 „ 10 „

und mithin jener grosse Gewinn, nach seinem Geldwerth für diese Epoche, auf die geringe Summe von 315 Rthl. 11 Ggr. Eine Rechnungsprobe würde haarscharf ergeben, dass dieses kleine Kapital, jährlich durch die Zulegung von 10 Rthl. und durch die Zinsen zu 4 Proc. vermehrt, und so fortwährend sich vergrösserend, am Schluss des Jahres 1812 eine solche Grösse erlangt haben würde, dass von da an durch die fernern Zinsen und theilweise durch Einziehen des Kapitals die Pension genau bis Ende November 1834 gedeckt war.

Aus diesem Grunde, so wie noch aus andern, deren Entwicklung mich hier zu weit führen würde, ist der mittlere Geldwerth der Aufnahme in die Gesellschaft, in dem Sinn wie er hier verstanden wird, gar nicht vergleichbar mit dem durchschnittlichen Geldwerth der Ansprüche aller in einem bestimmten Zeitpunkte coëxistirenden Mitglieder, von denen immer ein grosser Theil schon sehr lange in der Gesellschaft gewesen ist.

Träte nun jedes Jahr *Ein* neues Mitglied ein, dessen Berechtigung durchschnittlich zu obigem Geldwerth angeschlagen werden müsste, so ist klar, dass zur Deckung dieser sich immer neu gebärenden Ansprüche die Zinsen eines eisernen Kapitals erforderlich und zureichend sein würden, dessen Höhe

bei dem Zinsfusse von $3\frac{1}{2}$ Proc. zu 17182,86 Thalern
bei dem Zinsfusse von 4 Proc. zu 12912,50 Thalern

angenommen werden müsste.

Bis hieher ruhet die Rechnung auf einer sichern Grundlage. Es fehlt nun aber zur Vollendung derselben noch ein wesentliches Element, für welches jede im Voraus gewagte Schätzung nach der Natur der Sache nur eine sehr precäre Geltung haben kann, ich meine die Durchschnittszahl der künftig jährlich neu beitretenden Theilnehmer. Befragt man die Erfahrung, so zeigt sich in der neuern Zeit eine sehr starke Vergrösserung dieses Elements. Für die ersten achtzig Jahre des Bestehens der Anstalt kann man die Durchschnittszahl der jährlich beitretenden nahe zu $1\frac{1}{2}$ annehmen; allein seit den letzten 20 Jahren sind überhaupt 64 Beitritte*) erfolgt, wovon 23 auf das Decennium 1825—1835, und 41 auf das Decennium 1835—1845 kommen. Das Mittel aus den letzten 20 Jahren wäre demnach $3\frac{1}{5}$, oder, wenn man G. nicht mitzählen will, $3\frac{3}{10}$. Für die letzten 10 Jahre allein ist das Mittel $4\frac{1}{10}$, und für die letzten 5 Jahre allein, während welcher 27 neue Mitglieder eingetreten sind, sogar $5\frac{2}{5}$. Man erkennt hieraus, ein wie missliches Unternehmen es ist, hienach ein Prognosticon für die Zukunft zu stellen. Aber geringer als $2\frac{1}{2}$ würde ich doch nicht wagen, die künftige jährliche Durchschnittszahl anzunehmen, und dieses Verhältniss würde auch wie ganz harmonisch zu der jetzigen Interessentenzahl 51 betrachtet werden können, insofern die bisherigen Erfahrungen 20 Jahre oder etwas weniges mehr als durchschnittliche Dauer der Theilnahme herausgestellt haben. In dieser Hypothese stellt sich also der gegenwärtige Geldwerth

*) Unter denselben ist G. mitgezählt, dessen Witwe Pension geniesst, der aber selbst eigentlich nicht recipirt gewesen war. Wenn man aber voraussetzen muss, dass in einem ähnlichen künftigen Falle auch wieder abseiten der Verwaltung ein ähnlicher Beschluss gefasst werden wird, so dürfen solche, wenn auch seltene, Fälle nicht unberücksichtigt bleiben, sondern müssen in einer längern Reihe von Erfahrungen als *auch* mögliche Chancen mitgezählt werden.

der Verpflichtungen der Kasse gegen alle künftigen Interessenten, oder der Verpflichtungen der dritten Rubrik dar:

zu 42957 Thalern bei 3½ Proc. Zinsfuss
zu 32281 Thalern bei 4 Proc. Zinsfuss.

Wollte man aber die jährlichen Beitritte durchschnittlich zu 3 veranschlagen, so würde man für diese Rubrik, je nach dem Zinsfuss, 8591 oder 6456 Thaler *mehr* ansetzen müssen.

Fassen wir endlich die Resultate der bisherigen Anschläge zusammen, so ergibt sich aus den drei Rubriken

	3½ Proc.	4 Proc.
Verpflichtungen gegen die jetzigen Witwen	46529 Thl.	44582 Thl.
Verpflichtungen gegen die Hinterbliebenen der jetzigen Interessenten	60724 „	54014 „
Verpflichtungen gegen die künftigen Interessenten	42957 „	32281 „
Totalsumme aller Verpflichtungen	150210 Thl.	130877 Thl.

Von Nebenkosten will ich hier nur folgende Rubriken nach dem Durchschnitt der letzten 15 Jahre in Rechnung bringen (alles auf Gold reducirt):

Bau- und Reparaturkosten, jährlich	43 Rthl.
Processkosten nach Abzug der Erstattungen	39 „
Kosten der Rechnungsführung	124 „
Zusammen	206 Rthl.

Die Bau- und Reparaturkosten sind vielleicht nach diesem Durchschnitt zu niedrig angeschlagen. In dem oben S. [132] angeführten P. M. werden sie für einen Zeitraum von 24 Jahren (1768—1792) zu 1844 Thaler Cassenmünze (1975 Thl. 17 Ggr. Gold) angesetzt, was also einen jährlichen Durchschnittsbetrag von 82 Thalern ergeben würde: ich will jedoch bei obigem Mittel stehen bleiben. Diese 206 Thaler jährlicher Ausgabe repräsentiren ein Kapitalbedürfniss von 5886 oder von 5150 Thalern je nach dem Zinsfuss.

Es darf nicht übersehen werden, dass das bei allen Rechnungen zum Grunde liegende Interusurienprincip nur in soweit gültig ist, als alle Zinsen zu rechter Zeit eingehen und sofort wieder benutzt werden. In der Praxis ist dies aber nicht auszuführon, sondern es ist immer ein gewisser bald kleinerer bald grösserer Theil des Vermögens müssig. Man könnte den mittlern Betrag dieser Geldsumme zur Abkürzung Betriebsfonds nennen, obwohl diese Benennung genau zu reden nur auf denjenigen Theil des baaren Geldwerths passt, der bereit gehalten werden muss, damit die Kasse ihren eignen Zahlungsverpflichtungen pünktlich genügen könne. Es muss aber dazu auch eingerechnet werden das zeitweilig müssig liegende Geld, wenn sich nicht gleich Gelegenheit zu sicherer und vortheilhafter Belegung darbietet, und die ausstehenden Rückstände. Wie viel nun dies zusammen nach wirklichem mittlern Durchschnitte beträgt, lässt sich aus den Jahresrechnungen nur unvollkommen entnehmen, da dieselben nur angeben, *was* im Laufe des Jahres eingenommen und verausgabt ist, nicht aber, an welchem Datum (dass dies *zum Theil* aus den *Belegen*, und auch aus diesen nicht ohne Ungewissheit, ergänzt werden *könnte*, kommt hier nicht in Betracht). Ich habe indessen diesen Betrag aus den Rechnungsabschlüssen der letzten 11 Jahre*) so gut es geschehen kann abzuleiten gesucht, und danach gefunden: 2636 Thaler als mittlern Betrag des nicht zinstragenden Vermögenstheils.

Ich lasse nun die Vereinigung dieser verschiedenen Artikel hier folgen:

*) Früher stellten die Rechnungen den Vermögensstatus gar nicht auf.

	3½ Proc.	4 Proc.
Verpflichtungen gegen Witwen, jetzige und künftige Interessenten	150210 Thl.	130877 Thl.
Fonds zur Bestreitung der Bau-, Process- und Rechnungskosten . .	5886 „	5150 „
Unverzinslicher Fonds	2636 „	2636 „
Totalsumme	158732 Thl.	138663 Thl.

Gegenüber zu stellen ist nun der Kapitalbetrag der Einnahmequellen der Witwenkasse. Da der Betrag der Beiträge der Mitglieder bei obigem ersten Ansatze bereits in Abzug gebracht war, so bleibt hier nur das Geldvermögen und die Apothekenpacht zu veranschlagen.

Das Vermögen ist in dem letzten Rechnungsabschlusse, also für 1845 Juli 1, zu 116369 Thl. 17 Ggr. 4 Pf. ausgeworfen. Um es aber auf den 1. Oct. der oben S. [149] angeführten Rechnungsgrundlage gemäss zu reduciren, muss abgezogen werden der halbjährige auf Michaelis 1845 fällig gewordene Betrag der Witwenpensionen mit 2350 Thl.; hinzugefügt hingegen die Beiträge der Mitglieder für das Jahr 1844—1845, nemlich an vollen Beiträgen 430 Thl. und an Stückzahlungen 18 Thl. 17 Ggr. 4 Pf., ferner die halbjährige Michaelis 1845 fällig gewordene Apothekenpacht mit 500 Thl. Um nichts zu übergehen, müssten auch noch die während der drei Monate 1. Juli bis 1. Oct. eingegangenen Zinsen hinzugerechnet werden, deren Betrag mir unbekannt ist; es wird aber wohl nicht viel gefehlt sein, wenn ich dafür den vierten Theil der Zinseinnahme des letzten Jahres unter Abzug der Einziehungskosten, mit 1153 Thalern in Rechnung bringe. Hienach setze ich mit Weglassung der Bruchtheile das Vermögen der Kasse am 1. Oct. 1845 zu 118171 Thalern an.

Die Apothekenpacht bei ihrer jetzigen Höhe von 1000 Thl. repräsentirt ein Kapitalvermögen von 28571 Thl. oder von 25000 Thl. je nach der Höhe des vorausgesetzten Zinsfusses. Es ist folglich das effective Vermögen der Kasse:

144742 Thl. oder 141171 Thl., jenachdem man 3½ oder 4 Proc. annimmt.

Es ergibt sich hieraus schliesslich die *Bilanz* der Kasse

als ein *Deficit* von 13990 Thl. für Zinsfuss 3½ Proc.
als ein *Überschuss* von 2508 Thl. für Zinsfuss 4 Proc.

Dass der in der zweiten Voraussetzung sich ergebende Überschuss bei weitem kleiner ist, als die bei den einzelnen Bestandtheilen der Rechnung übrig bleibenden Unsicherheiten, braucht wohl kaum bemerkt zu werden: ein einziger Todesfall kann leicht auf einmal die ganze Bilanz um 3000—3500 Rthl. zum Nachtheil der Kasse abändern. Ausserdem darf man aber auch nicht übersehen, dass ich gar nichts für mögliche Verluste, durch Insolvenz der Schuldner, angesetzt habe: ich habe dies unterlassen, weil jede präsumtive Veranschlagung höchst precär bleiben muss. Es würde interessant, aber bei der Form der Rechnungsführung der Jahresrechnungen, zumal in den frühern Zeiten, nicht ohne einen sehr grossen Zeitaufwand ausführbar sein, alle seit der Stiftung eingetretenen Verluste zusammenzustellen: ich selbst habe, um doch einigermassen eine Idee davon zu erhalten, mich mit einer Zusammenstellung der letzten 14 Jahre begnügen müssen, die (falls ich nichts übersehen habe) den Totalverlust 1729 Thl. 14 Ggr. 1 Pf., also den durchschnittlichen jährlichen Verlust = 123 Thl. 13 Ggr. ergeben hat. Kapitalisirt beträgt dies je nach dem Zinsfuss 3530 Thl. oder 3088 Thl., und dürfte man diesen Durchschnitt als maassgebend betrachten, so würde die *Bilanz* sich für *beide* Zinsfüsse wie ein *Deficit* herausstellen, nemlich

von 17520 Thl. bei dem Zinsfuss von 3½ Procent
von 580 Thl. bei dem Zinsfuss von 4 Procent.

Göttingen 1845 November 2. C. F. Gauss.

[III.]

[Commissionsbericht.]

Die für die Witwenkassen-Angelegenheit ernannte Commission beehrt sich, das Resultat ihrer Berathung hiemit vorzulegen.

Es kam zuerst in Frage, welcher Zinsfuss als Grundlage für die zu treffenden Maassregeln anzunehmen sei.

Die Capitale der Witwenkasse sind zwar gegenwärtig dem grössten Theile nach noch zu höherm Zinsfuss als 3½ Procent belegt, jedoch so, dass bei richtiger Würdigung der Verhältnisse der mittlere Zinsfuss jedenfalls wie niedriger als 4 Procent stehend betrachtet werden muss. In Erwägung aber von folgenden Gründen:

1) dass ganz unverkennbar der Zinsfuss in allen Ländern Europas, einzelner Fluctuationen ungeachtet, die Tendenz zu weiterm Herabsinken zeigt *);

2) dass jede vom Zinsfusse wesentlich abhängige Anstalt, wenn sie nicht für eine durchaus unsichere gelten soll, nicht auf dem augenblicklich bestehenden, sondern auf einem etwas niedrigern Zinsfuss basirt werden muss;

3) dass auch die Regulirungen von 1794 uns in so fern mit einem guten Beispiele vorangegangen sind, als man damals wenigstens die Intention hatte, die Casse für den Zinsfuss von 3 Procent sicher zu stellen;

hält die Commission die Zugrundelegung eines höhern Zinsfusses als 3½ Proc. nicht für zulässig, und daher für unumgänglich nothwendig, dass man sich die Deckung des bei diesem Zinsfusse resultirenden Deficits von 17520 Thalern zum Ziele setze.

Wenn man vermeinte, dass die auch bei den bisherigen Einrichtungen zur Zeit noch Statt findenden jährlichen Überschüsse **) schon an sich Schritte zur Deckung des Deficits seien, und dass dieses getilgt sein werde, sobald nur das jetzige Vermögen sich um 17520 Thaler vergrössert haben würde, so würde eine solche Meinung nur auf einer Begriffsverwirrung und auf einer gänzlichen Verkennung der Bedeutung des Deficits beruhen. Im Geiste des Calcüls, durch welchen die Grösse des Deficits eruirt ist, liegt in dem Resultate implicite schon die volle Berücksichtigung der jetzt noch Statt findenden jährlichen Ersparnisse mit, und diese wie Schritte zur Deckung betrachten, würde dasselbe sein, als wenn man sie zweimal in Rechnung brächte ***). Die Genossenschaft möge sich also keine Illusion über die Wahrheit

*) Einer der erleuchtetsten Staatsmänner, namentlich im Fache der Finanzverhältnisse, der Grossherz. Badensche Minister Nebenius sagt in seinem bekannten Werke Über die Herabsetzung der Zinsen der öffentlichen Schulden, S. 129: 'Das allmählige weitere Sinken des Zinsfusses, welches bei längerer Fortdauer des Friedens nicht ausbleiben kann, wird zuletzt überall, hier etwas früher, dort etwas später, die Reduction auf drei Procent herbeiführen, oder sie wenigstens als eine nur von dem Entschlusse der Regierung abhängige Maassregel erscheinen lassen'; und an einer andern Stelle S. 21: 'Einer Periode grösserer Regsamkeit in productiven Unternehmungen, die das Sinken des Zinsfusses eine Zeitlang aufhält, folgt um so gewisser ein rasches Sinken des Zinsfusses nach.'

**) Die Jahresrechnung 1844—1845 ergibt keinen Überschuss; denn

für 1844 Juli 1 war das Geldvermögen ausgeworfen zu 116375 Thl. 14 Ggr. 6 Pf.
für 1845 Juli 1 aber, nur zu . . . . . 116369 „ 17 „ 4 „

Da jedoch im laufenden Jahre drei Witwen weniger sind, so wird in demselben wieder auf Überschuss zu rechnen sein, der auch wahrscheinlich noch eine Zeitlang fortdauern wird.

***) Da ähnliche Ansichten dem Vernehmen nach hie und da geäussert sind, in diesem Bericht aber zur Beseitigung derselben nicht der Ort sein würde, so ist der Anlage noch eine nähere Beleuchtung des

machen: Deckung des Deficits kann und muss ganz allein durch zweckmässige Abänderungen in den bisherigen Einrichtungen bewirkt werden.

Es ist von selbst klar, dass schwache Mittel auch nur schwache Wirkungen hervorbringen können. Zu solchen wäre zu rechnen: die Verwandlung der bisher freiwilligen Theilnahme in eine gezwungene für alle künftig ernannte Professoren, und die Aufhebung der Freiheit, zu jeder Zeit wieder auszutreten. Dass die Wirksamkeit einer solchen Maassregel nur eine sehr geringe sein könne, erhellet aus dem Umstande, dass, nach einem 50jährigen Durchschnitt, die mittlere Anzahl der nicht beitragenden obwohl zur Theilnahme berechtigten Professoren nur = 4,4 gewesen ist, also der Betrag der dadurch der Kasse jährlich entgehenden Einnahme, nach bisheriger Beitragshöhe = 44 Thaler, was mithin nach Verschiedenheit des Zinsfusses einem eisernen Kapital von 1100 oder von 1257 Rthl. gleichkommt. Allein dies wird, wenn auch nicht ganz, doch grossentheils durch die Strafgelder aufgewogen, welche nach der bestehenden sehr zweckmässigen Einrichtung bei verspäteten Beitritten zu erlegen und zum Theil sehr beträchtlich gewesen sind, wie aus folgenden Proben zu ersehen ist: Es haben doppelt nachgetragen

L. für 12 Jahre, R. für 13 Jahre, L. für 19 Jahre, S. für 25 Jahre, C. für 30 Jahre.

Die Commission ist daher der Meinung, dass ein so geringer und zweifelhafter Vortheil, wie aus der Verwandlung des Instituts in eine Zwangsanstalt für die Kasse hervorgehen könnte, gegen die Zerstörung des bisherigen liberalen Charakters dieser Stiftung nicht in Betracht kommen dürfe.

Ein paar andere Mittel von gleichfalls nur schwacher oder unsicherer Wirksamkeit werden am Schluss dieses Berichts erwähnt werden.

Als wirklich kräftige Mittel können demnach nur betrachtet werden:

1) Erhöhung der Beiträge.
2) Herabsetzung der Pensionen.
3) Verbindung beider Mittel.

Die in der Denkschrift aufgestellte Bilanzrechnung gewährt die Möglichkeit, genau anzugeben, in welchem Maasse diese Mittel in Anwendung gebracht werden müssen, wenn der Zweck erreicht werden, d. i. die Bilanz um 17520 Rthl. gebessert erscheinen soll. Details darüber würden hier nicht an ihrem Platze sein; das Endresultat aber ist:

1) Wenn das Deficit bloss durch Erhöhung der Beiträge gedeckt werden soll, so müssen diese allgemein, d. i. für *alle* jetzigen und künftigen Mitglieder, auf 4¼ Louisd'or erhöhet werden.

2) Soll die Herabsetzung der Pensionen allein die Deckung bewirken, so müssen dieselben auf 223 Rthl. reducirt werden (wobei die der Professorin G. auf 200 Rthl. bestehen bliebe).

3) Bei einer Vertheilung der Last auf Beitragende und Pensionirte käme es darauf an, welches Verhältniss der Theilung man wählte: sollen z. B. erstere ⅔, letztere ⅓ übernehmen, so würden die Beiträge 3½ Louisd'or, die Pensionen 241 Rthl. betragen müssen. Sollen die Beiträge nur auf 3 Louisd'or erhöhet werden, so können, wenn das Deficit wirklich gedeckt sein soll, nur 235 Rthl. Pension verabreicht werden.

Bei allen diesen Rechnungen ist vorausgesetzt, dass die gewählten Änderungen von Michaelis 1845 an in Wirksamkeit treten, und dass im zweiten oder dritten Falle die Pensionsherabsetzungen sämmtliche Witwen, die gegenwärtigen wie die künftigen, treffen. Sollten, ohne alle Beitragserhöhung und ohne Herabsetzung der Pension für die gegenwärtigen Witwen, die künftigen Witwen die Last allein tragen, so könnte für diese nur die Pension zu 213¾ Rthl. gewährt werden.

Gegenstandes beigefügt, obwohl dieselbe für alle, welche die Denkschrift schon mit der nöthigen Aufmerksamkeit gelesen und erwogen haben, ganz überflüssig sein wird.

Sollen nun aber die Abänderungen für jetzt auf das äusserste Minimum des Zulässigen gestellt werden, so ist die Commission der Meinung, dass dies auf die möglich schonendste Weise durch folgenden Plan geschehen kann, welchen sie daher, bedingungsweise, zur Annahme empfiehlt.

I. Die jährlichen Beiträge werden auf 3 Louisd'or erhöhet.

II. Die Pensionen bleiben für jetzt auf der Höhe von 250 Rthl. bestehen, so lange die Zahl der Witwen*), ohne die Professorin G. mitzuzählen, nicht über 18 hinausgeht, welches die gegenwärtige Anzahl ist. Im entgegengesetzten Falle wird die Pension so bestimmt, dass zu 200 Rthl., als festem Theile, noch die Dividende hinzukommt, welche auf jede einzelne Witwe fällt, indem man 900 Rthl. (als 18 mal 50 Rthl.) unter die vorhandenen gleichmässig vertheilt. Bei der höchsten Witwenzahl, welche bisher vorgekommen ist, nemlich 21 (ohne die Prof. G.) würde also die Pension noch 242 Rthl. 20 Ggr. 7 Pf. Gold betragen.

Man erachtet leicht, dass bei dieser Einrichtung das Deficit noch nicht völlig gedeckt ist: in der That ergibt die Rechnung, dass, den Anfang der Wirksamkeit vom 1. Oct. 1845 an vorausgesetzt, noch 2963 Rthl. ungedeckt bleiben, bei späterm Anfang des erhöheten Beitrags also nach Verhältniss mehr. Wenn jedoch der zur Zeit noch bestehende höhere Zinsgenuss vorerst noch ohne erhebliche Schmälerung fortdauern wird, und sonst keine bedeutenden Verluste eintreten, so könnte man hoffen, dass jener Deficitsrest nach einer mässigen Anzahl von Jahren von selbst zur Deckung gelangen werde. Die Gesellschaft darf jedoch, wenn sie jenen Plan annimmt, sich nicht verhehlen, dass die Witwenkasse unter so sehr knapper Anmessung der Mittel zu den Obliegenheiten einem Schiffe gleicht, welches schwerbelastet in seichtem Fahrwasser geht, und seine Sicherheit nur in fortwährendem wachsamen Sondiren findet.

Die Commission hält daher für unumgänglich nothwendig, dass mit obiger Regulirung noch verbunden werde

III. eine in angemessenen Zeitintervallen (etwa aller 10 oder 5 Jahr) zu wiederholende sorgfältige neue Bilänzrechnung, und dass je nach deren Ergebnissen eventuell weitere Nachhülfe vorbehalten bleibe. Als eine nothwendige vorbereitende Maassregel dazu würde von jetzt an eine solche pünktliche Buchführung über die für die Witwenkasse relevanten persönlichen Verhältnisse aller Interessenten, wie bereits an mehrern Stellen der Denkschrift angedeutet ist, einzuführen sein.

Die Commission hält es nicht für nöthig, die Vortheile, welche diese Regulirung darbietet, hier weitläuftig zu entwickeln, und macht nur auf Folgendes aufmerksam. Findet sich nach der ersten oder zweiten Revision, dass die Bilanz sich nicht nur gebessert, sondern viel mehr gebessert habe, als man hatte hoffen können, so wird man die Pensionen weiter erhöhen dürfen von 250 Rthl. auf 260 Rthl. für den Fall einer Witwenzahl unter 18, oder für den Fall der höhern Witwenzahl die ganze Zusatzdividende von 900 Rthl. auf 1080 Rthl. (d. i. 18 mal 60 Rthl.). Findet sich hingegen bei der Revision eine Verschlechterung der Bilanz, so wird man sich einige weitere Anstrengung gefallen lassen, aber zugleich um so mehr Glück wünschen müssen, 1845 nicht die Hände in den Schooss gelegt zu haben. In beiden Fällen aber wird man die weitern Maassregeln mit Bewusstsein der Sicherheit oder der Nothwendigkeit treffen können.

Dass mit Annahme dieser Regulirung der Anfang des §. 10 des Regulativs, der in seiner unklaren Fassung als eine Hauptquelle des jetzigen Übels betrachtet werden muss, von selbst wegfällt, braucht nicht erinnert zu werden.

Bei der Anwendung der in diesem Plane enthaltenen Normirung darf abseiten der Witwenkasse kein

*) Es werden hier der Kürze wegen immer nur Witwen genannt, es versteht sich aber von selbst, dass immer eine Waisenpension wie eine Witwenpension gezählt werden muss.

Unterschied zwischen den jetzigen Witwen und den künftig hinzukommenden gemacht werden, denn nur unter Voraussetzung einer ganz gleichen Behandlung ist es möglich geworden, das Deficit auf den mässigen Rest von 2963 Rthl. herabzubringen. Zudem würden die neuen Witwen, wenn den frühern eine exceptionelle Bevorzugung *aus der Kasse* gewährt würde, sich für lädirt halten, da die Möglichkeit, bei so sehr gelinden Modificationen der Pensionen stehen zu bleiben, bloss durch die Erhöhung der Beiträge bewirkt wird, an welcher die Ehemänner der neuen Witwen Theil genommen haben werden, die der frühern aber nicht. Da jedoch, von der andern Seite, als wünschenswerth erscheint, dass jeder wenn auch im Rechte nicht begründeten Unzufriedenheit der gegenwärtigen Witwen vorgebeugt werde, so schlägt die Commission vor

dass von Seiten der Universität an das h. Curatorium die Bitte gerichtet werde, für die Zeit, wo in Folge obiger Regulirung der Pensionsbetrag unter 250 Rthl. herabgehen wird, den gegenwärtigen Witwen, so viele dann noch am Leben sein werden, das an 250 Rthl. fehlende aus der Universitätskasse ergänzen zu lassen.

Eine solche Bitte würde sich mit nahe liegenden Gründen unterstützen lassen. Auch ist leicht zu übersehen, dass eine solche Beihülfe der Universitätskasse keine grosse Last auflegen könne. Unmöglich wäre es sogar nicht, dass der Fall der Beihülfe *niemals* einträte. Aber sollte sie auch, wenn früher eine neue Witwe hinzukommt, ehe eine der bisherigen abgegangen ist, bald schon erforderlich werden, so wird doch voraussichtlich für geraume Zeit der Zuschuss für jede einzelne Witwe nur wenige Thaler betragen können. In späterer Zukunft, z. B. nach 30 Jahren, könnte, wenn wir Beispielshalber einen der extremsten Falle annehmen, dass nemlich bis dahin gar keine Erhöhung der Pension zulässig geworden und die Zahl der Witwen auf 30 gestiegen wäre, die Grösse des Zuschusses für eine Witwe 20 Rthl. betragen: allein dann werden wahrscheinlich von den jetzigen Witwen nur noch wenige am Leben sein.

Die Commission glaubt hier noch ein paar andere Einrichtungen, die als Mittel zur Verbesserung der Bilanz zur Sprache gebracht sind, erwähnen zu müssen, ohne jedoch einen Antrag darauf richten zu wollen.

Es ist zuvörderst in Frage gekommen, ob nicht einige Verbesserung der Bilanz dadurch erreicht werden könne, dass den künftig eintretenden ausserordentlichen Professoren nur der Anspruch auf eine geringere Witwenpension beigelegt würde. Diese würden sonach eine zweite Klasse von Interessenten bilden, aus der sie bei ihrer Beförderung zur ordentlichen Professur von selbst in die erste hinaufrückten: die Beiträge der Mitglieder zweiter Klasse sollten dagegen ihre bisherige Grösse von 2 Louisd'or behalten. Den jetzigen ausserordentlichen Professoren sollte die Wahl gelassen werden, ob sie in der ersten Klasse bleiben oder in die zweite übertreten wollten, so jedoch, dass im letztern Fall ein Rücktritt in die erste Klasse nicht zulässig wäre, so lange sie ausserordentliche Professoren blieben.

Zu richtiger Würdigung dieses Gedankens ist zuvörderst wohl zu bedenken, dass in dem oben S. [160] aufgestellten Hauptplan die Reduction des Deficits von 17520 Rthl. auf 2963 Rthl. wesentlich von der Voraussetzung abhängt, dass die Beiträge *aller* Mitglieder, der jetzigen wie der künftigen von 2 auf 3 Louisd'or erhöhet werden, und dass mithin jener Hauptplan gar nicht bestehen kann, wenn diese Voraussetzung einen wesentlichen Abgang erleidet, ohne dass dafür anderweit ein vollständiger und sicherer Ersatz eintritt. Durch diese Betrachtung wird eine sonst durch ihre Einfachheit sich empfehlende Art, die Pension der zweiten Klasse niedriger zu normiren, von selbst als unzulässig ausgeschlossen, die nemlich, dass man den Witwen zweiter Klasse nur den fixen Theil der Pension, nemlich 200 Rthl. einräumen, oder sie völlig der Professorin G. gleichstellen sollte. Denn in der That ist leicht zu übersehen, dass dadurch sehr wahrscheinlich *die Kasse* gar keinen Ersatz für jene Einbusse an Beiträgen erhalten, und nur die Witwen erster Klasse etwas besser gestellt werden, indem die Zusatzdividende unter eine geringere Zahl von Participanten vertheilt würde.

Eher könnte als zulässig erscheinen die Einrichtung, dass für die Witwen zweiter Klasse, neben gleichmässiger Theilnahme an der Zusatzdividende, der fixe Theil der Pension niedriger als 200 Rthl. z. B. zu 150 Rthl. festgesetzt würde. Erwägt man jedoch,

dass die Einbusse an Beiträgen sogleich anfängt, sobald die zweite Klasse constituirt ist, und dann fortwährend zunimmt, je mehr neue ausserordentliche Professoren ernannt werden;

dass jetzt unter den 51 Mitgliedern der Witwenkasse 26 ausserordentliche Professoren sich befinden, und folglich, wenn auch in Zukunft ein ähnliches Verhältniss bleibt, von der im Hauptplane vorausgesetzten Beitragserhöhung ein nach und nach bis zu $\frac{3}{4}$ anwachsender Theil ausbleibt; indess dagegen

der Ersatz aus eintretenden geringern Pensionirungen aller Wahrscheinlichkeit nach erst nach langer Zeit anfangen, und bei der sehr geringen Mortalität, die demjenigen Alter zukommt, in dem die Mehrzahl der ausserordentlichen Professoren zu stehen pflegt, auch, durchschnittlich, selten sein wird,

so bleibt es sehr problematisch, ob die Bestimmung des festen Theils der Pension zu 150 Rthl. für die zweite Klasse zureichen würde, der Kasse auch nur den vollen Ersatz für den Verlust durch die geringern Beiträge zu gewähren. Noch viel weniger aber dürfte man eine solche Maassregel als entschieden zum *Vortheil* der Kasse gereichend annehmen. (Dazu wäre man nur berechtigt, wenn man entweder die Beiträge in der zweiten Klasse eben so hoch wie in der ersten beibehielte, oder die Pension noch erheblich unter 150 Rthl. herabsetzte; allein das eine wie das andere würde so sehr wie eine Härte erscheinen, dass die Commission sich nicht dafür erklären kann.)

Eine andere Maassregel, durch welche zuweilen der Kasse einiger Vortheil zuwachsen könnte, wäre die Aufhebung der im 10. Artikel des Regulativs enthaltenen Bestimmung, nach welcher die Witwenpension durch eine Wiederverheirathung der Witwe ganz erlischt. Der Zweck dieser Verordnung kann nur gewesen sein, dass man in der Voraussetzung, solche Fälle würden öfters vorkommen, der Kasse einen Gewinn hat zuwenden wollen. Allein dieser Zweck wird so gut wie ganz verfehlt, da der Erfahrung zufolge Wiederverheirathungen der Witwen unter diesen Umständen etwas fast Unerhörtes sind. (Es ist schon in der Denkschrift bemerkt, dass in mehr als 100 Jahren nur Ein solcher Fall vorgekommen ist.) Zweckmässiger ist ohne Zweifel die bei andern Witwenkassen bestehende Einrichtung, dass die Witwenpension während eines zweiten Ehestandes nur ruhet, aber wieder auflebt, wenn die Wiederverheirathete zum zweiten Male Witwe wird. Man vergleiche die Statuten der Hof- und Civil-Diener Witwenkasse §. 25, der Prediger-Witwenkasse §. 24, der Schullehrer-Witwenkasse §. 22. Der Fall, wo der zweite Ehemann wieder ein hiesiger Professor ist, würde wohl ausgenommen werden müssen, da es unzulässig scheint, aus unsrer Witwenkasse Einer Witwe (oder Einer Familie) zwei Pensionen zu gewähren. Dagegen aber dürfte es rathsam sein, von weitern Beschränkungen der Reviviscenz Umgang zu nehmen, und namentlich die volle Professorenwitwenpension auch für den Fall wieder zuzuführen, wo die Witwe durch ihre zweite Verheirathung z. B. mit einem Prediger oder andern Staatsdiener eine Pension aus einer *andern* öffentlichen Kasse erhielte. Man muss nemlich erwägen, dass von einer Abänderung des bisherigen Statuts nur in so weit eine Wirkung erwartet werden kann, als die Abänderung nicht wieder durch Ausnahme-Verfügungen aufgehoben ist. Dass übrigens in dem Falle, wo aus der ersten Ehe Kinder unter 20 Jahren vorhanden sind, die Waisenpension auch während der zweiten Ehe in demselben Maasse wie bisher fortdauern müsste, versteht sich von selbst.

Note zum Commissionsberichte.

Wenn die Ausdrücke Bilanz und Deficit in Beziehung auf das Finanzbudget eines Staats gebraucht werden, so versteht man unter ersterer die Vergleichung der Ausgaben und Einnahmen, wie sie für Ein Jahr, oder für eine kleine Anzahl von Jahren, die eine Finanzperiode bilden, nach präsumtiver Veranschlagung erwartet werden, und unter Deficit den Unterschied, wenn für die Ausgabe eine grössere Summe sich ergibt, als für die Einnahme. In einem solchen Zusammenhange sind Überschüsse und Deficit einander gerade entgegengesetzt, und das eine schliesst das andere von selbst aus.

Von einer solchen Rechnung unterscheidet sich diejenige, welche in der zweiten Abtheilung der Denkschrift für die Witwenkasse geführt ist, in zwei wesentlichen Stücken.

1) Die letztere vergleicht nicht die Ausgaben und Einnahmen für Ein Jahr, oder für einige Jahre, sondern umfasst beide für die ganze unbegrenzte Zukunft, so weit und so genau, als es möglich ist, dieselben im Voraus zu veranschlagen.

2) Sie summirt nicht die Gelder selbst, in der Grösse wie sie werden verausgabt oder vereinnahmt werden (was auch wegen der Unbegrenztheit ohne Sinn sein würde), sondern deren nach bestimmtem Zinsfuss auf den Anfangszeitpunkt discontirte oder reducirte Werthe. In diesem Sinne lässt sich auch eine ohne Begrenzung fortlaufende Reihe von Ausgaben oder Einnahmen doch zu einem bestimmten endlichen Resultate summiren, und diese Möglichkeit leuchtet leicht ein, wenn man bedenkt, dass eine Geldsumme durch Discontirung für einen sehr langen Zeitraum ganz enorm zusammenschmilzt, wie z. B. eine nach 422 Jahren zu leistende Zahlung von 7000 Rthl. nach dem Zinsfusse von $3\frac{1}{3}$ Procent jetzt nur den Werth von *einem Pfennig* hat. Noch leichter kommt man zu demselben Resultate durch die Erwägung, dass der jetzige Geldwerth einer ohne Aufhören jährlich in gleicher Grösse zu leistenden Zahlung nichts anderes ist, als die Kapitalsumme, welche nach dem gewählten Zinsfusse jährlich einen eben so grossen Zins abwirft.

Es ist nun zwar schon von selbst klar, dass wenn nach den factischen Grundlagen einer solchen Rechnung die Ausgaben in späterer Zeit grösser sein werden als jetzt, die ausser den Kapitalzinsen aber noch Statt findenden Einnahmen hingegen in der Rechnung nicht als steigend angenommen werden dürfen, das Resultat der Rechnung ein Deficit sein wird, falls jetzt Einnahme gegen Ausgabe keinen Überschuss gibt. Allein es lässt sich nicht ohne Weiteres umgekehrt behaupten, dass, wenn jetzt Überschüsse von der Einnahme gegen die Ausgabe Statt finden, *kein* Deficit in der Totalrechnung sein werde, denn dazu wird nicht nur das Dasein von Überschüssen sondern eine hinlängliche Grösse derselben erfordert. Hat eine richtige Total-Bilanz-Rechnung als Endresultat ein Deficit ergeben, so steht dadurch fest, dass die jetzigen jährlichen Überschüsse zu klein sind, um die in späterer Zeit bevorstehenden Ausfälle zu decken. Die richtige Rechnung hat die gegenwärtigen zeitweiligen Überschüsse schon als Bestandtheile der Bilanz mit berücksichtigt, und dieselben dürfen der Anstalt nicht *zweimal* in Einnahme gestellt werden.

Eben so falsch, wie die Einbildung, dass jetzige zeitweilige Überschüsse ein jetzt vorhandenes Deficit vermindern werden, ist die Vorstellung, dass dieses Deficit dann getilgt sein werde, sobald das Vermögen eine dem Betrage des Deficits gleichkommende Vergrösserung erhalten habe. Ein solcher Schluss ist nur in dem einzigen Falle zulässig, wenn die Vergrösserung des Vermögens *sogleich* und zwar durch *fremde* in der Bilanz nicht schon enthaltene Zuflüsse bewirkt wird. Gesetzt z. B. das Vermögen der Witwenkasse habe sich nach 20 Jahren (etwa theilweise unter Mitwirkung von neuen Zuflüssen die aber nicht fortdauernder Art wären) um 17520 Rthl. vergrössert, so wird darum alsdann doch das Deficit nicht gehoben sein, sondern es kann dann möglicherweise grösser sein als jetzt. Die Bilanz am 1. Oct. 1865 wird nemlich hervorgehen aus Vergleichung des dann vorhandenen Kassenvermögens mit dem auf *diesen* Zeitpunkt discontirten Betrage aller von da an bevorstehenden Ausgaben, welcher Betrag viel grösser sein wird, als der ähnliche Betrag für den 1. Oct. 1845, und zwar aus dem einfachen Grunde, weil 1865 der Zeitpunkt der viel grössern jährlichen Ausgaben so viel näher gerückt sein wird, ja höchst wahrscheinlich diese alsdann schon in bedeutendem Maasse eingetreten sein werden.

[IV.]

Bilanz zwischen den Verpflichtungen und den Mitteln der Professoren-Witwenkasse zu Göttingen.

In Folge des von der Universitäts-Kirchendeputation vor einigen Monaten mir eröffneten Wunsches habe ich mich der neuen Berechnung der Bilanz der Professoren-Witwenkasse unterzogen und diese Arbeit jetzt vollendet. Ich werde meinen Bericht darüber so anordnen, dass ich zuerst die nöthigen allgemeinen Erläuterungen vorausschicke; hiernächst die Bilanzrechnung selbst in einer concisen leicht übersichtlichen Form aufstelle; sodann die einzelnen Posten der Rechnung näher erörtere, und endlich die Vorschläge für die nächst bevorstehende Periode daran knüpfe.

Die Bilanzaufstellung für ein solches Institut wie unsre Witwenkasse muss sich offenbar auf einen bestimmten *Zeitpunkt* beziehen. Dass ich dafür diesmal den 1. October 1851 gewählt habe, wird keiner weitläuftigen Rechtfertigung bedürfen. Die erste Bilanzrechnung war für den 1. October 1845 gestellt gewesen: aus nahe liegenden Gründen muss die Zwischenzeit zwischen zwei auf einander folgenden Prüfungen eine volle Anzahl von Jahren umfassen, um das Resultat reiner hervortreten zu lassen; endlich, wenn in Folge der neuen Prüfung eine Modification der bisherigen Punktationen als angemessen erscheinen sollte, so wird man bei dem Beschluss offenbar viel lieber sich auf den neuesten Zustand stützen wollen, als auf denjenigen, welcher vor einem Jahre Statt gefunden hat. Die jetzigen Statuten schreiben zwar alle fünf Jahre eine neue Revision vor: allein der Zeitpunkt, wo die Aufforderung an mich gelangte, liess eine andere Wahl nicht mehr zu; auch ist durch diese Erstreckung des fünfjährigen Zeitraumes auf einen sechsjährigen nicht nur nichts verloren, sondern vielmehr eine noch etwas entschiednere Ausprägung der Zustandsänderung gewonnen.

Das Wesen der ganzen Bilanzrechnung der jetzigen wie der von 1845, besteht darin, dass nicht für das nächste Jahr und nicht für einige Jahre, sondern für alle Zukunft, einerseits die Obliegenheiten des Instituts, andererseits seine Hülfsmittel auf den äquivalirenden Capitalwerth zurückgeführt werden. Nur auf diesem Wege ist es möglich, einer Anstalt, die nur zum kleinsten Theile auf Beiträge, und dem grössten Theile nach auf ihren Vermögensbesitz basirt, und in den letzten Decennien an Theilnehmerzahl so sehr vergrössert ist, die Haltbarkeit für alle Zukunft zu sichern.

Obgleich diesmal eben so wie 1845 alle Rechnungen doppelt geführt sind, nemlich nach dem Zinsfuss von $3\frac{1}{2}$ und nach dem von 4 Procent, so habe ich es doch für hinreichend gehalten, hier nur die Resultate nach ersteren aufzuführen. Ein Theil des Vermögens trägt wirklich nur $3\frac{1}{2}$ Procent; von einem andern jetzt höher verzinsbaren Theile ist eine Zinsherabsetzung in nicht zu grosser Ferne nicht unwahrscheinlich: jedenfalls aber ist eine Forderung der Vorsicht, bei derartigen Rechnungen immer einen etwas niedrigern Zinsfuss zum Grunde zu legen, als dermalen gangbar ist.

Als Mortalitätstafeln, so weit die Rechnungen davon abhängig sind, habe ich auch diesmal die von Brune benutzt, die zuverlässigsten, die überhaupt vorhanden sind.

Diejenigen Rechnungselemente, welche nur aus den bei der Witwenkasse selbst gemachten Erfahrungen abgeleitet werden können, und also an Zuverlässigkeit gewinnen, wenn diese Erfahrungen einen grössern Zeitraum umfassen, habe ich für die jetzige Bilanzrechnung sämmtlich neu bestimmt, indem ich die frühern Erfahrungen mit den neu hinzugekommenen verknüpfte. Bei den einzelnen Positionen wird dies näher angegeben werden.

Endlich bemerke ich noch, dass bei allen Geldangaben Goldwährung zu verstehen ist, und dass die Originalrechnungen zwar durchgehends auf Bruchtheile des Thalers genau geführt, diese Bruchtheile aber in gegenwärtigem Auszuge weggelassen sind. Aus diesem Umstande hat man einige scheinbare kleine Discordanzen bei den angesetzten Summationen zu erklären, die hin und wieder eine oder ein Paar Einheiten betragen können.

Bilanzrechnung der Witwenkasse für 1. October 1851.

Schuld.	Thaler	Gut.	Thaler
Capitalwerth des festen Theils der Pensionen		Capitalwerth	
1. für die jetzt vorhandenen Witwen . .	28786	6. des Ertrags der Apotheke	28471
2. für Witwen und Waisen der jetzigen Genossen	58463	7. der Beiträge der jetzigen Genossen . .	8961
3. für Witwen und Waisen der künftig beitretenden Genossen	40712	8. der Beiträge aller künftig eintretenden Genossen	13596
4. Capitalwerth des beweglichen Theils der Pensionen nach jetziger Normirung . . .	25715	9. Geldvermögen der Witwenkasse	122290
5. Capitalwerth der sonstigen Ausgaben . . .	12907	Summa Thaler	173419
Summa Thaler	166581		

Das Resultat der Bilanzrechnung ist also ein *Überschuss* von 6837 Thalern.

Die einzelnen Positionen der vorstehenden Bilanzrechnung begleite ich mit folgenden nähern Erörterungen.

Zu (1). Der Capitalwerth der Witwenpensionen für sämmtliche 15 jetzt vorhandene Witwen nach dem festen Bestandtheile (zu 200 Thaler für jede) ist die Summe der jetzigen Capitalwerthe dieser Pensionen für jede einzelne Witwe nach ihrem Lebensalter berechnet, mit Berücksichtigung eventueller Waisenpensionen, wo minorenne Kinder jetzt vorhanden sind. Ich setze diese Werthe einzeln hieher: die Witwen sind numerirt nach der vollständigen Reihenfolge seit Stiftung der Anstalt.

31	Sch.	1066 Thaler	55	H.	1834 Thaler	65	H.	2003 Thaler
44	F.	1622	58	G.	2730	66	H.	1172
50	H.	2849	59	W.	1862	68	M.	2923
52	P.	1479	62	B.	1003	69	D.	2897
53	M.	1812	63	G.	1309	70	L.	2224

Die Zahlen (2) und (7) sind durch folgendes Verfahren ermittelt, dessen Rechtfertigung in der Denkschrift von 1845 zu finden ist. Unter den 53 Mitgliedern, welche gegenwärtig die Genossenschaft ausmachen, sind zur Zeit 47 verheirathet. Für jedes derselben ist, nach Maassgabe des Alters des Mannes und der Frau, der jetzige Capitalwerth sowohl der von erstern zu leistenden Beiträge (zu 15 Thaler jährlich), als der der letztern im Fall des Überlebens zu Theil werdenden Witwenpension nach ihrem festen Theile (zu 200 Thaler) berechnet. So verstanden, ergibt sich die Summe der Beiträge zu 7947 Thaler, die Summe der Pensionen zu 45264 Thaler. Um die 6 jetzt unverheiratheten Mitglieder mit zu berücksichtigen, werden diese Zahlen mit $\frac{53}{47}$ multiplicirt, woraus die Beiträge = 8961 Thaler, und die Pensionen = 51155 Thaler hervorgehen: erstere Zahl ist obige Position (7). Letztere, der Waisenpension wegen um $\frac{1}{9}$ vergrössert, ergibt 58463 Thaler, die Position (2).

Die Rechtfertigung der Annahme des Bruches $\frac{1}{9}$ für die Waisenpensionen, anstatt des 1845 angewandten Bruches $\frac{1}{4}$, wird bei der Nachweisung der Positionen (3) und (8) gegeben werden.

Ich setze noch die Resultate obiger Rechnung für die einzelnen 47 verheiratheten Mitglieder hieher. Die Numerirung ist die Reihefolge des Eintritts in die Anstalt; die Zahlen der dritten Columne sind die Beiträge, die der vierten die Pensionen.

135	O.	102 Thl.	1179 Thl.	170	R.	124 Thl.	1261 Thl.	199	F.	167 Thl.	917 Thl.
138	C.	82	1402	171	C.	132	955	200	L.	211	748
139	U.	137	730	173	F.	168	931	201	W.	194	749
140	H.	134	1199	174	H.	163	1354	202	M.	201	991
141	L.	113	833	175	R.	195	996	203	B.	167	751
147	R.	133	1188	176	L.	190	1122	204	E.	201	697
149	G.	127	1439	177	W.	176	936	205	H.	195	790
151	O.	173	870	180	T.	177	887	206	H.	188	854
153	B.	154	1271	185	W.	198	919	207	W.	200	783
155	K.	145	727	186	H.	169	1134	208	F.	175	1278
156	v. S.	146	662	187	W.	180	748	209	B.	154	1051
160	H.	161	1173	189	H.	172	953	211	S.	195	1164
161	B.	156	682	192	R.	188	782	212	T.	181	895
164	W.	159	1155	193	G.	206	896	213	W.	200	811
167	S.	190	835	195	D.	191	822	214	B.	188	915
169	Z.	180	943	196	B.	207	968				

Zum Verständniss der Positionen (3) und (8) dient Folgendes. Das älteste der jetzigen Mitglieder hat die Numerirung 135; die ersten 134 sind sämmtlich verstorben oder auf andere Weise ausgeschieden. Für jedes dieser 134 ausgeschiedenen Mitglieder ist berechnet: der Betrag der von demselben geleisteten Beiträge, und, wo Hinterbliebene Pensionen erhalten haben, der Betrag der Witwenpensionen und der Waisenpensionen. Alle diese Zahlungen sind aber nicht nach ihrer wirklichen Grösse in Ansatz gebracht, sondern nach den gegenwärtig bestehenden Sätzen, nemlich 15 Thaler für jährlichen Beitrag, und 200 Thaler als jetziger Betrag der festen Pension: ausserdem aber sind sämmtliche gezahlten oder empfangenen Gelder durch Discontirung auf das Zeitmoment des Eintritts des betreffenden Mitgliedes reducirt. Rücksichtlich der Modificationen, welche an diese Rechnungen noch angebracht werden mussten bei denjenigen aus diesen 134 Mitgliedern, von welchen die Witwen noch am Leben sind, beziehe ich mich auf meine Denkschrift von 1845.

So verstanden, beträgt für alle diese 134 Mitglieder

die Summe aller Beiträge . . . . . 25506 Thaler
die Summe aller Witwenpensionen 66771 „
die Summe aller Waisenpensionen 9604 „

woraus sich die Durchschnittswerthe ergeben: für die Beiträge 190,35 Thaler, für die Witwenpensionen 498,29 Thaler, für die Waisenpensionen 71,67 Thaler. Im Jahr 1845, wo die bis dahin ausgeschiedenen Mitglieder sich in ununterbrochener Folge nur bis zu Nr. 108 erstreckten, hatte ich für diese eine ganz ähnliche Rechnung ausgeführt, welche für die Durchschnittswerthe, wenn sie in dieselbe Form gebracht werden, ergeben hatte: 193,18 Thaler; 503,08 Thaler; 81,07 Thaler. Man erkennt hieraus mit Befriedigung, dass die bisherigen Erfahrungen sich schon sehr wohl zur Feststellung von Durchschnittswerthen eignen, und darin der Abschätzung der künftigen Bedürfnisse eine werthvolle Grundlage geben. Nach dem neuen Resultate ist das Verhältniss der Waisenpension zur Witwenpension durchschnittlich sehr nahe $\frac{1}{7}$, welches zur Feststellung der Position (2) benutzt ist (man vergl. S. [165] am Schluss).

Da nun ferner den allmähligen Leistungen jedes neu eintretenden Mitgliedes einerseits, und den Pensionsbezügen durch seine Relicten andererseits, die Summen 190,35 und 569,96 Thaler, im Zeitpunkte des Eintritts einmal in die Kasse eingezahlt und resp. aus derselben ausgezahlt, nach den Durchschnittswerthen äquivaliren: so brauchte man, wenn jedes Jahr Ein neues Mitglied einträte, nur diese beiden Zahlungen jedes Jahr wiederholt zu denken, und sie nun zu capitalisiren, d. i. ein für allemal der Kasse theils die Capitalsumme 5132 Thaler als Einnahme zuzuweisen, theils die andern 16285 Thaler als Ausgabe anzurechnen, um den Verpflichtungen und Berechtigungen aller künftig beitretenden Mitglieder Rechnung zu tragen. Diese Summen müssen nun aber noch mit derjenigen Ziffer multiplicirt werden, welche die Durchschnittszahl der jährlich neu beitretenden Mitglieder ausdrückt. In der Denkschrift von 1845 habe ich dafür $2\frac{1}{2}$ angenommen, ohne zu verschweigen, dass dieses Element ein sehr ungewisses ist: alles wohl erwogen, habe ich dieselbe Ziffer auch diesmal beibehalten zu müssen geglaubt, und so haben sich die in der Bilanzrechnung angesetzten Positionen (8) und (3) ergeben.

Die Position (4) ist die capitalisirte jährliche Ausgabe von 900 Thalern, wovon der bewegliche Theil der Witwenpension zu bestreiten ist. Diese Summe wird unter alle berechtigten Witwen zu gleichen Theilen vertheilt, wenn deren Anzahl 18 oder mehr beträgt; ist die Anzahl kleiner, so erhält jede 50 Thaler. Es erhellet hieraus, dass im letztern Falle (der auch in diesem Augenblick Statt findet) die Kasse eine Ersparniss macht, welche in der Bilanz nicht mit berechnet ist, und für etwas längere Zeit auch gar nicht im Voraus berechnet werden kann: jedenfalls aber ist dies nur ein vorübergehender Vortheil, welcher in späterer Zeit, wenn die Folgen der jetzigen grossen Ausdehnung der Genossenschaft sich erst entwickelt haben werden, selten oder vielleicht niemals wieder vorkommen wird.

Als Durchschnittswerthe der Nebenausgaben habe ich angenommen

28 Thl.	4 Ggr.	— Pf.	für Processkosten, soweit sie nicht erstattet,
61 „	8 „	9 „	für Baukosten
133 „	9 „	5 „	für Rechnungsführung und Copialien
136 „	6 „	3 „	für Verluste

Zusammen 359 Thl. 4 Ggr. 5 Pf.

Diese Ansätze gründen sich auf die Erfahrungen der letzten 21 oder 20 Jahre. Bei der Rechnung von 1845 hatten nur Erfahrungen von 15 oder 14 Jahren zum Grunde gelegt werden können, welche die Totalsumme 323 Thl. 13 Ggr. ergeben hatten. Die erstere Zahl, capitalisirt, erbringt 10262 Thl. 10 Ggr. Dieser Betrag unter Zufügung von 2644 Thl. 4 Ggr. (als mittlerm Werthe des unproductiven Vermögenstheils nach 17jährigem Durchschnitt) bildet die Position (5). Für die letztere Zahl war übrigens in der Rechnung von 1845 nach 11jährigem Durchschnitt der nahe gleiche Werth 2635 Thl. 18 Ggr. 4 Pf. angenommen worden.

Die Position (6) entsteht aus der Capitalisirung der jährlichen Einnahme aus dem Pachtzins der Universitäts-Apotheke (1000 Thaler).

Die Position (9) bedarf auch noch einiger Erläuterungen. In der Jahresrechnung für 1850—1851 ist das Geldvermögen der Kasse für den 1. Julius 1851 zu 125076 Thl. 1 Ggr. 11 Pf. angesetzt, wovon die verzinslichen Capitale 122372 Thl. 2 Ggr. 7 Pf. ausmachen; das übrige besteht in dem baaren Geldvorrath, den Rückständen, und einem dem Universitätsapotheker bewilligten unverzinslichen Vorschuss. Die Capitale sind etwa zur Hälfte bei Privatschuldnern hypothekarisch, die übrigen in unkündbaren Staatspapieren angelegt, und diese letztern sind in der neuesten Jahresrechnung (eben so wie schon in mehrern vorhergehenden) schlechthin nach dem Nominalwerthe in Ansatz gebracht. Im Jahre 1845 waren hingegen diese Ansätze nach den Ankaufspreisen gemacht, und ich habe in meiner damaligen Rechnung dieselben ungeändert beibehalten, weil damals die Schwankungen in dem Werthe der Staatspapiere viel geringer waren, als seit den letzten 3 bis 4 Jahren. Jetzt, wo ein beträchtlicher Theil der zum Vermögen der Witwenkasse gehörenden Staatspapiere so sehr tief unter dem Nennwerthe steht, halte ich für nothwendig, in der Bilanzrechnung die Papiere nach dem zeitigen wirklichen Werthe, wie sie sich realisiren lassen, zu evaluiren. Ich habe dazu die Börsencourse in Frankfurt und Hannover vom 1. October angewandt, weil doch ein bestimmtes Datum gewählt werden musste. Es sind die folgenden

Oesterreichische	$4\frac{1}{2}$ Metalliques . .	$67\frac{1}{4}$	Hannoversche 5 Proc. . . .	$104\frac{1}{2}$
—	$4\frac{1}{2}$ bei Goll . . .	$69\frac{3}{4}$	— 4 Proc. . . .	102
—	$4\frac{1}{2}$ bei Bethmann	$71\frac{1}{2}$	— $3\frac{1}{2}$ Courant .	$98\frac{1}{4}$
Badensche $3\frac{1}{2}$		$87\frac{3}{4}$	— $3\frac{1}{2}$ Gold . .	$97\frac{3}{4}$

Den Goldcours habe ich angenommen 1 Louisd'or = 9 fl. 38 kr. und = 5⅓ Thaler Courant. Theilweise sind übrigens die Course seitdem noch etwas, obwohl nur wenig, gewichen.

Das Resultat dieser Reductionen ist, dass dieselben verzinslichen Capitale, welche nach dem Nennwerthe zu 123372 Thaler angesetzt sind, nach dem zeitigen Börsencourswerthe nur 119044 Thl. 23 Ggr erbringen, welcher Summe ich noch diejenigen 800 Thaler zusetze, für welche das vormals Müllersche Haus verkauft ist. So stellt sich unter Beifügung der andern Posten (baarer Geldvorrath u. s. w.) das Geldvermögen der Witwenkasse für den 1. Julius 1851 auf

121548 Thaler 22 Ggr.

Um, so weit ich dazu im Stande bin, die Reduction auf den 1. October 1851 abzuschätzen, ziehe ich von dieser Summe ab die auf Michaelis fällig gewordenen Witwenpensionen mit . 1787 Thl. 12 Ggr. und setze hinzu

den Betrag der Beiträge für das Jahr 1850 bis 1851 . . . . . 780 „
den halbjährigen Pachtzins für die Apotheke . . . . . 500 „
und einen vierteljährigen Betrag der Zinseinnahme, unter Zugrundelegung der letztjährigen mit Abzug der Einziehungskosten . . . . . 1248 „ 10 „

woraus dann obige Position (9) hervorgeht.

In Erwägung des bedeutenden Plus, mit welchem die Bilanzrechnung abschliesst, erscheint eine Erhöhung der Pension für die nächst bevorstehende Periode als zulässig, und über die Grösse der Erhöhung habe ich Folgendes zu bemerken.

Wenn die Frage aufgestellt wird, um wie viel unter Beibehaltung aller übrigen Einrichtungen der bewegliche Theil der Witwenpension erhöhet werden muss, damit in der Bilanz Debet und Credit zur vollkommenen Gleichheit gebracht werden, so findet sich durch eine leichte Rechnung diese Erhöhung = 13 Thl. 7 Ggr. Wählt man eine kleinere Erhöhung, so schliesst die veränderte Bilanz noch immer mit einem Plus ab, mit einem Minus hingegen, wenn eine grössere Erhöhung angenommen wird. Würde also der bewegliche Theil der Pension von jetzt an auf 60 Thaler normirt, so dass jede der daran berechtigten Witwen zusammen 260 Thaler erhielte, so lange deren Anzahl nicht 18 überschreitet, im entgegengesetzten Falle hingegen neben dem festen Theil zu 200 Thaler noch den betreffenden Antheil an der Totalsumme 1080 Thaler, so würde die auf gleiche Art wie oben geführte Bilanzrechnung noch mit einem Plus von 1695 Thalern abschliessen. Man hat also zu dieser Maassregel nicht nur vollkommene Berechtigung, sondern auch die Aussicht, dass nach wenigen Jahren eine abermalige Erhöhung wird Statt finden können, insofern keine *grosse* Verluste eintreten, der Genuss höhern Zinsfusses noch fortdauert, und bei der jetzt nicht erreichten Anzahl der Witwen 18 von der in Rechnung gebrachten jährlichen Summe vorerst jährlich etwas erübrigt wird.

Mit einem Minus von 877 Thalern hingegen würde die Bilanz abschliessen, wenn die Erhöhung auf 15 Thaler, und mit einem Minus von 3448 Thalern, wenn dieselbe auf 20 Thaler festgesetzt würde. Ein so geringes Minus, wie das im erstern Falle sich ergebende, würde aus den eben angeführten Gründen schon nach kurzer Zeit sich ausgleichen, und daher die Normirung des beweglichen Theils der Pension auf 65 Thaler (folglich bei mehr als 18 Witwen Vertheilung der Summe von 1170 Thalern) an sich gar kein Bedenken haben: vielleicht aber würde man nicht gern von dem bisher immer beobachteten Gebrauch abweichen wollen, wonach die halbjährige Pensionssumme stets eine ganze Anzahl Pistolen betragen hat (welche kleine Bequemlichkeit allerdings von selbst wegfallen wird, sobald die Anzahl der Witwen über 18 gestiegen ist). Schon jetzt aber den beweglichen Theil auf 70 Thaler zu setzen, würde ich schon des

Princips wegen nicht für gerathen halten, wenn ich auch unter den jetzigen günstigen Umständen gern die Hoffnung theile, dass das Minus von 3448 Thalern schon in den nächsten Jahren sich bedeutend vermindern würde.

Ich glaube im Vorstehenden der Universitäts-Kirchendeputation das hinlängliche Material zusammengebracht zu haben, wonach mit bewusster Sicherheit ein Beschluss gefasst werden kann, bin aber gern zu weitern Erläuterungen bereit, wenn solche für nöthig gehalten werden sollten.

Göttingen den 19. October 1851. C. F. Gauss.

[*Berechnung der Mittelwerthe der Beiträge und Pensionen.*

Die Anzahl der in ununterbrochener Reihenfolge nach der Numerirung ihrer Beitrittszeit bis zum 1. October 1851 verstorbenen oder auf andere Weise aus der Professoren-Witwenkasse ausgeschiedenen Mitglieder beträgt 134. Für jedes dieser 134 ausgeschiedenen Mitglieder ist in folgender Tabelle zusammengestellt: das Jahr an dessen 1. Oct. (und nur ausnahmsweise an dessen 1. April bei Nr. 134) der Beitritt erfolgte, die Anzahl der Jahre und Monate, während welcher die Beiträge oder die Witwen- und Waisenpensionen ein- oder ausgezahlt wurden, ebenso diejenigen welche verginen bis zu dem Zeitpunkte von wo an die Pension gerechnet wird. Aus diesen Daten sind die in den daneben stehenden Spalten enthaltenen Werthe bestimmt, welche im Zeitpunkte des Eintritts für den Zinsfuss von 3½ Proc. und 4 Proc. den jährlich mit 10 Thl. eingezahlten Beiträgen und den mit 250 Thl. ausgezahlten Witwen- und Waisenpensionen gleichkommen. Die Ansätze zu 10 Thl. und 250 Thl. sind von Gauss wohl deshalb gewählt, weil hierfür schon der grösste Theil der Tafel im Jahre 1845 berechnet war. Für die am 1. Oct. 1851 noch lebenden Witwen der Mitglieder Nr. 86. 103. 104. 109. 112. 114. 122 und 134 ist der Capitalwerth derjenigen Pensionsbezüge die nach jenem Zeitpunkte noch erfolgen mussten, mit Zuhülfenahme der Baune'schen Sterblichkeitstafeln bestimmt und unter der Voraussetzung dass die Zahlung am Ende jedes Jahres aber nur bis zum Schluss des Sterbemonats erfolgt. Die aus dieser Zusammenstellung sich unmittelbar ergebenden mittleren Capitalwerthe der Beiträge und Pensionen sind in der Bilanzrechnung von 1851 benutzt und zwar nachdem durch Multiplication mit einem Correctionsfactor der Umstand berücksichtigt ist, dass die Pensionen nicht jährlich sondern halbjährlich gezahlt werden. Für die Waisenpensionen ist hier angenommen, dass sie bis zum Schlusse des Monats galten, in welchem das 20ste Lebensjahr des Kindes vollendet wurde.

Die handschriftliche Tafel enthält keine Überschrift der einzelnen Spalten wie hier der Abdruck.]

Nr. des Mit-gl.	Nr. der Wit-we	Name	Jahr des Ein-tr.	Bei-trag gez. J.	Witwe J. M.	Waise J. M.	Anf. der Pens. nach Eintr. J. M.	Auf die Zeit des Eintritts nach dem Zinsfuss von 3½ Proc. Beiträge	Witw.P	Wais.P	von 4 Proc. discontirte Beiträge	Witw.P	Wais.P
1	16	Gebauer	1742	30	5. 9		30. 9	183.92	391.82		172.92	333.20	
2	1	Treuer	1742	0	18. 7		0. 5	0	3325.27		0	3181.63	
3		Gesner	1742	18				131.90			126.59		
4		Hollmann	1742	39				211.02			195.84		
5		Heumann	1742	18				131.90			126.59		
6		Crusius	1742	4				36.73			36.30		
7		Oporin	1742	10				83.17			81.11		
8	2	Reinharth	1742	0	1. 6		1	0	346.14		0	342.26	
9	5	Köhler	1742	12	23. 8		12. 9	96.63	2565.58		93.85	2292.07	
10	18	Richter	1742	30	7		31	183.92	526.20		172.92	444.85	
11		v. Haller	1742	2				19.00			18.86		
12		v. Segner	1742	12				96.63			93.85		
13	11	Feuerlein	1742	23	6. 8		24	156.20	640.78		148.57	560.68	
14	20	Ayrer	1742	31	24		32	187.36	1335.21		175.88	1086.57	
15	3	Penther	1742	7	52		7. 3	61.14	4631.51		60.02	4091.28	
16		Kahle	1742	5				45.15			44.52		
17	8	Brendel	1742	15	24. 7		15. 9	115.17	2371.13		111.18	2084.67	
18		Wähner	1742	17				126.51			121.66		
19		Ribov	1742	16				120.94			116.52		
20		Böhmer	1742	54				241.13			219.93		
21		Claproth	1742	5				45.15			44.52		
22	4	Kortholt	1742	9		15. 3	9	76.08		2139.12	74.35		1976.36
23	6	Wahl	1743	11	14. 2		12. 3	90.02	1807.62		87.60	1647.63	
24	7	v. Mosheim	1747	7	35.11		8. 9	61.14	3118.70		60.02	2839.65	
25		Pütter	1747	60				249.45			226.23		
26	27	Michaelis	1751	39	16. 2		40. 3	211.02	762.94		195.84	605.26	
27	14	Achenwall	1751	20		18. 5	21. 0	142.12		1627.44	135.90		1410.52
28		Weber, A.	1751	11				90.02			87.60		
29		Förtsch	1751	21				146.98			140.29		
30	9	Mayer, Tob.	1751	10	18. 2		10. 9	83.17	2293.04		81.11	2089.04	
31	10	Roderer	1751	11		13. 0	12	90.02		1704.54	87.60		1559.24
32	19	Vogel	1754	19	33.10		20	137.10	2468.73		131.34	2095.65	
33	24	Walch	1755	29	3. 9		29. 9	180.36	310.41		169.84	265.91	
34		Büsching	1754	6				51.29			52.42		
35	23	Meister	1755	26	24. 4		27	168.90	1599.74		159.83	1332.82	
36	17	Matthiae	1755	17	27. 8		18	126.51	2360.69		121.66	2042.62	
37	21	Murray	1755	20		15.10	20. 9	142.12		1469.05	135.90		1281.09
38		Kuhlenkamp	1755	20				142.12			135.90		
39	15	Hamberger	1755	17	8.10		17. 9	126.51	1016.16		121.66	912.02	
40		Kästner	1755	18				131.90			126.59		
41		Heilmann	1758	5				45.15			44.52		
42		Büttner	1759	10				83.17			81.11		
43	34	Claproth, J.	1759	45	16. 1		45. 9	224.95	629.01		207.20	486.04	
44	30	Gatterer	1759	39	7. 0		40. 0	211.02	386.09		195.84	312.54	
45		Klotz	1762	2				19.00			18.86		

Nr. des Mit-gl.	Nr. der Wit-we	Name	Jahr des Ein-tr.	Bei-trag gez. J.	Witwe J. M.	Waise J. M.	Anf. der Pens. nach Eintr. J. M.	Auf die Zeit des Eintritts nach dem Zinsfuss von 3½ Proc. Beiträge	Witw.P	Wais.P	von 4 Proc. discontirte Beiträge	Witw.P	Wais.P
46	12	Köhler, J. T	1763	5	19. 0		5. 6	45.15	2835.95		44.52	2646.37	
47	39	Heyne	1763	48	21.11		49. 3	230.91	694.88		221.95	522.26	
48		Less	1763	27				172.84			163.30		
49	13	Schröder	1764	7	21. 0		7. 9	61.14	2814.56		60.02	2588.00	
50	26	Murray, J. A.	1764	26	14.11		27. 0	168.90	1132.47		159.83	960.00	
51		Dieze	1764	19				137.10			131.34		
52		Gatzert	1764	1				9.66			9.62		
53	37	Wrisberg	1764	43	25.10		43. 9	220.63	933.65		203.71	715.73	
54		Zachariae	1765	9				76.08			74.35		
55	25	Miller	1766	22	4. 6		23. 0	151.67	463.95		144.51	409.87	
56		Beckmann, J.	1766	44				222.83			205.49		
57	40	Richter	1767	44	18. 7		45. 3	222.83	711.21		205.49	548.26	
58		Feder	1768	28				176.67			166.63		
59		Pepin	1769	5				45.15			44.52		
60		Schlözer	1769	39				211.02			195.84		
61	29	Lichtenberg	1770	28	49. 3		28. 9	176.67	2168.49		166.63	1730.50	
62	22	Erxleben	1770	6	37. 2		7. 3	53.29	4016.23		52.42	3608.27	
63	35	Spangenberg	1771	33	1. 9	11. 6	33. 9	193.90	130.46	688.23	181.48	110.12	563.90
64		Baldinger	1772	9				76.08			74.35		
65	38	Meiners	1772	37	15. 6		38	205.70	798.55		191.43	641.24	
66	32	Eyring	1773	29	23. 0		30	180.36	1391.30		169.84	1145.15	
67	33	Gmelin	1775	29	23. 2		29. 6	180.36	1422.06		169.84	1172.95	
68		Koppe	1776	7				61.14			60.02		
69		Blumenbach	1776	63				253.00			228.87		
70	51	Stromeyer	1776	54	17. 4		54. 0	241.13	500.51		219.93	370.77	
71		Spittler	1779	17				126.51			121.66		
72	41	Waldeck	1782	32	32. 4		33. 3	190.69	1527.32		178.74	1219.01	
73		Reuss	1783	54				241.13			219.93		
74		Böhmer, J. F.	1784	35				200.01			186.65		
75		Meister	1784	44				222.83			205.49		
76		v. Martens	1784	23				156.20			148.57		
77		Planck	1784	49				232.77			213.41		
78		Möckert	1784	7				61.14			60.02		
79	36	Runde	1784	22	14. 8		22. 9	151.67	1293.70		144.51	1119.91	
80	56	Tychsen	1784	50	10. 2		50. 6	234.56	370.95		214.82	283.52	
81		Sextro	1784	2				19.00			18.86		
82		Volborth	1784	7				61.14			60.02		
83		Brandis	1787	2				19.00			18.86		
84		Grellmann	1787	14				109.20			105.63		
85		Buhle	1787	8				68.74			67.33		
86	66	Heeren	1787	54	?		54. 9	241.13	456.65		219.93	337.14	
87		Hugo	1788	56				244.10			222.20		
88	47	Eichhorn	1788	39	7.10		39. 0	211.02	440.96		195.84	358.01	
89		Arnemann	1789	12				96.63			93.85		
90		Seyffer	1789	14				109.20			105.63		

Nr. des Mit-gl.	Nr. der Wit-we	Name	Jahr des Ein-tr.	Bei-trag ges. J.	Witwe J. M.	Waise J. M.	Anf. der Pens. nach Eintr. J. M.	Auf die Zeit des Eintritts nach dem Zinsfuss von 3½ Proc. Beiträge	Witw.P	Wais.P	von 4 Proc. discontirte Beiträge	Witw.P	Wais.P
91	28	Bürger	1789	4		17. 1	4. 9	36.73		2695.53	36.30		2532.99
92		Schrage	1790	1				9.66			9.62		
93	46	Stäudlin	1790	36	4. 0		36. 3	202.90	263.87		189.28	218.97	
94		Marezoll	1790	2				19.00			18.86		
95	45	Osiander	1792	29	5. 2		29. 9	180.36	417.84		169.84	356.78	
96		Berg	1794	6				53.29			52.42		
97		Althof	1794	3				28.02			27.75		
98		v. Ammon	1794	10				83.17			81.11		
99		Leist	1795	12				96.63			93.85		
100	49	Sartorius	1797	31	1.11	2. 7	31. 3	187.36	155.45	193.87	175.88	132.77	163.80
101		Mayer	1799	29				180.36			169.84		
102	48	Bouterweck	1799	29		4. 1	29. 3	180.36		342.13	169.84		293.58
103	44	Fiorillo	1799	22	?		22. 3	151.67	2465.51		144.61	2051.41	
104	31	Schönemann	1799	2	?		3. 0	19.00	5469.38		18.86	4911.00	
105		Martin	1803	1				9.66			9.62		
106	61	Himly	1803	33	8. 0		33. 9	193.90	538.16		181.48	447.97	
107		Thibaut	1804	1				9.66			9.62		
108	60	Schrader	1804	32	13. 5		32. 6	190.69	867.28		178.74	717.98	
109	70	Langenbeck	1804	46	?		46. 9	227.01	559.31		208.85	427.74	
110		Patz	1805	1				9.66			9.62		
111		Herbart	1805	3				28.02			27.75		
112	55	Harding	1805	29	?		29. 3	180.36	1610.43		169.84	1316.31	
113		Benecke	1805	16				120.94			116.53		
114	62	Bunsen	1805	31	?		31. 9	187.36	1183.66		175.88	969.77	
115	57	Stromeyer	1806	29	14. 9		29. 3	180.36	1039.03		169.84	871.57	
116		Artaud	1806	28				176.67			166.63		
117		Gauss	1807	38				208.41			193.68		
118	54	Hempel	1807	26		8. 8	26. 9	168.90		733.41	159.83		630.52
119		Lüder	1809	3				28.02			27.75		
120		Bergmann	1810	34				197.01			184.11		
121	42	Wunderlich	1810	5	25. 2		5. 9	45.15	3394.86		44.52	3129.00	
122	52	Planck	1810	21	?		21. 6	146.98	2113.17		140.29	1793.60	
123		Salfeld	1810	3				28.02			27.75		
124		Hansmann	1811	37				205.70			194.43		
125		Pott	1814	15				115.17			111.18		
126	67	Bauer	1814	29	1. 6		29. 0	180.36	132.10		169.84	114.14	
127		Heise	1814	3				28.02			27.75		
128	43	v. Crell	1814	2	14. 5		2. 0	19.00	2606.64		18.86	2495.03	
129		Schulze	1814	18				131.90			126.59		
130		Dissen	1814	15				115.17			111.18		
131		Eichhorn	1817	11				90.02			87.60		
132		Schweppe	1818	3				28.02			27.75		
133	64	Müller	1819	21	6. 2	3. 3	21. 3	146.98	657.08	294.08	140.29	583.26	255.08
134	63	Göschen	1822	15. 6	?		15. 9	118.06	2153.55		113.85	1859.85	

TAFELN

ZUR BESTIMMUNG DES ZEITWERTHES

VON EINFACHEN LEIBRENTEN

UND

VON VERBINDUNGSRENTEN.

Frauen						Männer					
Anzahl der Lebenden		Leibrentenwerth beim Zinsfuss				Anzahl der Lebenden		Leibrentenwerth beim Zinsfuss			
		von 3½ proc.		von 4 proc.				von 3½ proc.		von 4 proc.	
log.	decr.	log.	num.	log.	num.	log.	decr.	log.	num.	log.	num.
4,00620 92	620 92										
4,00000 00	599 10	1,27722	18,9548	1,24326	17,5088	4,00000 00	270 10	1,29473	19,7118	1,26069	18,2258
3,99400 90	580 69	1,27625	18,8929	1,24210	17,4624	3,99729 90	271 79	1,29068	19,5491	1,25704	18,0733
3,98820 21	561 43	1,27451	18,8152	1,24068	17,4052	3,99458 11	277 93	1,28644	19,3591	1,25319	17,9137
3,98258 78	541 31	1,27246	18,7265	1,23898	17,3372	3,99180 18	279 72	1,28205	19,1448	1,24950	17,7500
3,97717 47	524 98	1,27009	18,6248	1,23697	17,2572	3,98900 46	281 53	1,27745	18,9430	1,24500	17,5792
3,97192 49	512 64	1,26743	18,5109	1,23466	17,1656	3,98618 93	287 88	1,27262	18,7335	1,24059	17,4016
3,96679 85	499 79	1,26450	18,3865	1,23209	17,0644	3,98331 05	289 80	1,26760	18,5183	1,23598	17,2180
3,96180 06	491 21	1,26127	18,2504	1,22923	16,9523	3,98041 25	296 33	1,26233	18,2950	1,23113	17,0268
3,95688 85	487 14	1,25777	18,1037	1,22612	16,8315	3,97744 92	302 96	1,25683	18,0646	1,22606	16,8292
3,95201 71	487 76	1,25403	17,9487	1,22277	16,7019	3,97441 96	309 74	1,25110	17,8271	1,22075	16,6246
3,94713 95	493 30	1,25009	17,7864	1,21922	16,5662	3,97132 22	321 30	1,24512	17,5840	1,21519	16,4131
3,94220 65	498 96	1,24599	17,6192	1,21552	16,4256	3,96810 92	342 54	1,23891	17,3344	1,20942	16,1963
3,93721 69	504 77	1,24173	17,4468	1,21165	16,2800	3,96468 38	369 01	1,23257	17,0832	1,20351	15,9775
3,93216 92	510 70	1,23726	17,2688	1,20761	16,1292	3,96099 37	400 93	1,22614	16,8323	1,19751	15,7582
3,92706 22	511 57	1,23261	17,0848	1,20338	15,9729	3,95698 44	428 88	1,21966	16,5830	1,19147	15,5407
3,92194 65	517 68	1,22769	16,8923	1,19889	15,8085	3,95269 56	457 62	1,21309	16,3338	1,18533	15,3225
3,91676 97	518 60	1,22254	16,6931	1,19418	15,6379	3,94811 94	482 28	1,20641	16,0844	1,17910	15,1043
3,91158 37	524 87	1,21710	16,4854	1,18918	15,4589	3,94329 66	502 71	1,19957	15,8322	1,17272	14,8841
3,90633 50	531 28	1,21138	16,2696	1,18391	15,2725	3,93826 95	523 80	1,19252	15,5782	1,16612	14,6597
3,90102 22	532 35	1,20537	16,0461	1,17837	15,0790	3,93303 15	540 45	1,18523	15,3189	1,15929	14,4307
3,89569 87	538 95	1,19900	15,8125	1,17247	14,8755	3,92762 70	562 86	1,17764	15,0536	1,15217	14,1961
3,89030 92	545 72	1,19230	15,5704	1,16624	14,6637	3,92199 84	586 04	1,16978	14,7837	1,14477	13,9562
3,88485 20	558 40	1,18523	15,3189	1,15965	14,4427	3,91613 80	610 09	1,16163	14,5087	1,13709	13,7116
3,87926 80	565 68	1,17783	15,0603	1,15274	14,2148	3,91003 71	640 46	1,15317	14,2290	1,12910	13,4616
3,87361 12	573 14	1,17002	14,7917	1,14542	13,9771	3,90363 25	666 56	1,14443	13,9455	1,12085	13,2085
3,86787 98	586 78	1,16175	14,5127	1,13764	13,7291	3,89696 69	693 73	1,13535	13,6569	1,11225	12,9494
3,86201 20	600 85	1,15306	14,2253	1,12944	13,4722	3,89002 96	727 74	1,12589	13,3625	1,10326	12,6841
3,85600 35	615 43	1,14390	13,9284	1,12079	13,2067	3,88275 22	763 30	1,11608	13,0641	1,09392	12,4143
3,84984 92	631 73	1,13423	13,6216	1,11163	12,9309	3,87511 92	800 54	1,10588	12,7609	1,08422	12,1400
3,84348 19	648 84	1,12407	13,3067	1,10198	12,6468	3,86711 38	839 82	1,09528	12,4531	1,07411	11,8608
3,83689 35	681 83	1,11338	12,9832	1,09180	12,3537	3,85871 56	886 64	1,08425	12,1408	1,06355	11,5758
3,83007 52	712 30	1,10210	12,6503	1,08103	12,0511	3,84984 92	936 67	1,07280	11,8250	1,05259	11,2874
3,82295 22	757 37	1,09024	12,3094	1,06969	11,7405	3,84048 25	989 38	1,06091	11,5055	1,04119	10,9949
3,81537 85	811 41	1,07789	11,9644	1,05786	11,4250	3,83058 87	1051 87	1,04854	11,1826	1,02932	10,6985
3,80726 44	868 28	1,06508	11,6161	1,04556	11,1061	3,82007 00	1125 16	1,03574	10,8577	1,01700	10,3993
3,79858 16	935 35	1,05177	11,2634	1,03277	10,7837	3,80881 84	1203 60	1,02254	10,5327	1,00427	10,0988
3,78922 81	1006 47	1,03799	10,9142	1,01951	10,4595	3,79678 24	1287 88	1,00893	10,2077	0,99113	9,7978
3,77916 34	1089 54	1,02371	10,5612	1,00574	10,1330	3,78390 36	1378 83	0,99489	9,8830	0,97756	9,4964
3,76826 80	1178 40	1,00897	10,2086	0,99150	9,8062	3,77011 53	1477 41	0,98041	9,5590	0,96355	9,1950
3,75648 40	1273 91	0,99373	9,8567	0,97677	9,4792	3,75534 12	1584 80	0,96547	9,2357	0,94909	8,8938

Frauen						Männer					
Anzahl der Lebenden		Leibrentenwerth beim Zinsfuss				Anzahl der Lebenden		Leibrentenwerth beim Zinsfuss			
		von 3½ proc.		von 4 proc.				von 3½ proc.		von 4 proc.	
log.	decr.	log.	num.	log.	num.	log.	decr.	log.	num.	log.	num.
3,75648 40	1273 91	0,99373	9,8567	0,97677	9,4792	3,75534 12	1584 80	0,96547	9,2357	0,94909	8,8938
3,74374 49	1377 06	0,97797	9,5052	0,96150	9,1516	3,73949 32	1694 15	0,95009	8,9144	0,93417	8,5935
3,72997 43	1489 06	0,96166	9,1550	0,94568	8,8242	3,72255 17	1814 48	0,93416	8,5933	0,91869	8,2925
3,71508 37	1611 32	0,94478	8,8060	0,92928	8,4972	3,70440 69	1947 18	0,91770	8,2737	0,90267	7,9922
3,69897 00	1745 74	0,92730	8,4586	0,91220	8,1712	3,68493 51	2095 16	0,90069	7,9559	0,88611	7,6932
3,68151 26	1894 36	0,90921	8,1137	0,89468	7,8466	3,66398 35	2260 86	0,88317	7,6414	0,86901	7,3962
3,66256 90	2059 94	0,89053	7,7720	0,87647	7,5243	3,64137 49	2447 95	0,86519	7,3315	0,85144	7,1030
3,64196 96	2256 32	0,87116	7,4347	0,85766	7,2055	3,61689 54	2661 12	0,84683	7,0280	0,83349	6,8153
3,61940 64	2479 29	0,85157	7,1051	0,83842	6,8932	3,59028 44	2894 45	0,82824	6,7335	0,81530	6,5358
3,59461 35	2711 66	0,83160	6,7838	0,81889	6,5901	3,56133 99	3139 65	0,80952	6,4494	0,79697	6,2657
3,56749 69	2942 61	0,81130	6,4759	0,79901	6,2952	3,52994 34	3398 30	0,79067	6,1755	0,77850	6,0049
3,53807 08	3185 64	0,79047	6,1726	0,77858	6,0059	3,49596 04	3686 96	0,77172	5,9118	0,75992	5,7534
3,50623 44	3450 22	0,76898	5,8746	0,75749	5,7212	3,45909 08	4012 70	0,75288	5,6608	0,74144	5,5136
3,47173 17	3764 21	0,74686	5,5829	0,73576	5,4420	3,41896 38	4348 31	0,73449	5,4161	0,72339	5,2892
3,43408 96	4121 69	0,72429	5,3014	0,71367	5,1721	3,37548 07	4669 35	0,71663	5,1675	0,70587	5,0804
3,39287 27	4534 75	0,70185	5,0332	0,69148	4,9145	3,32878 72	4957 67	0,69911	5,0016	0,68869	4,8830
3,34752 52	4998 35	0,67969	4,7829	0,66965	4,6736	3,27921 05	5209 54	0,68148	4,8026	0,67140	4,6924
3,29754 17	5501 03	0,65840	4,5541	0,64869	4,4534	3,22711 51	5451 22	0,66316	4,6043	0,65342	4,5021
3,24254 14	5955 64	0,63847	4,3498	0,62908	4,2568	3,17260 29	5699 24	0,64372	4,4027	0,63432	4,3084
3,18298 50	6306 96	0,61949	4,1638	0,61042	4,0777	3,11561 05	5985 00	0,62282	4,1958	0,61376	4,1092
3,11991 54	6530 24	0,60023	3,9832	0,59147	3,9036	3,05576 05	6364 50	0,60036	3,9844	0,59162	3,9050
3,05461 30	6694 67	0,57881	3,7916	0,57038	3,7186	2,99211 15	6886 75	0,57689	3,7747	0,56846	3,7022
2,98766 63	7016 08	0,55367	3,5783	0,54554	3,5119	2,92324 40	7016 68	0,55367	3,5783	0,54554	3,5119
2,91750 55	7677 23	0,52541	3,3528	0,51755	3,2927	2,85308 32	7677 23	0,52541	3,3528	0,51755	3,2927
2,84073 32	8715 01	0,49709	3,1411	0,48948	3,0866	2,77631 09	8715 01	0,49709	3,1411	0,48948	3,0866
2,75358 31	9748 49	0,47327	2,9735	0,46588	2,9233	2,68916 08	9748 49	0,47327	2,9735	0,46588	2,9233
2,65609 82	10464 82	0,45516	2,8520	0,44800	2,8054	2,59167 59	10464 82	0,45516	2,8520	0,44800	2,8054
2,55145 00	10897 00	0,44032	2,7562	0,43339	2,7126	2,48702 77	10897 00	0,44032	2,7562	0,43339	2,7126
2,44247 98	11004 23	0,42591	2,6663	0,41925	2,6257	2,37805 75	11004 23	0,42591	2,6663	0,41925	2,6257
2,33243 85	11233 04	0,40746	2,5554	0,40109	2,5182	2,26801 62	11233 04	0,40746	2,5554	0,40109	2,5182
2,22010 81	11630 44	0,38481	2,4256	0,37875	2,3919	2,15568 58	11630 44	0,38481	2,4256	0,37875	2,3919
2,10380 37	12153 25	0,35819	2,2813	0,35247	2,2515	2,03938 14	12153 25	0,35819	2,2813	0,35247	2,2515
1,98227 12	12493 87	0,32708	2,1236	0,32174	2,0977	1,91784 89	12493 87	0,32708	2,1236	0,32174	2,0977
1,85733 25	13305 66	0,28570	1,9306	0,28075	1,9087	1,79291 02	13305 66	0,28570	1,9306	0,28075	1,9087
1,72427 59	14449 23	0,23416	1,7146	0,22962	1,6968	1,65985 36	14449 23	0,23416	1,7146	0,22962	1,6968
1,57978 36	16481 03	0,16881	1,4751	0,16471	1,4612	1,51536 13	16481 03	0,16881	1,4751	0,16471	1,4612
1,41497 33	18452 44	0,09036	1,2313	0,08672	1,2210	1,35055 10	18452 44	0,09036	1,2313	0,08672	1,2210
1,23044 89	20044 89	0,97728	0,9490	0,97412	0,9421	1,16602 66	20044 89	0,97728	0,9490	0,97412	0,9421
1,00000 00	30103 00	0,82594	0,6698	0,82327	0,6657	0,95557 77	30103 00	0,82594	0,6698	0,82327	0,6657
0,69897 00	39794 00	0,58712	0,3865	0,58503	0,3846	0,65454 77	39794 00	0,58712	0,3865	0,58503	0,3846
0,30103 00			0		0	0,23660 77			0		0

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 3½ Procent

	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9
20	1.20442	1.20460									
21	1.20138	1.20177	1.20191								
22	1.19796	1.19858	1.19893	1.19910							
23	1.19417	1.19504	1.19563	1.19600	1.19605						
24	1.18999	1.19109	1.19193	1.19252	1.19278	1.19280					
25	1.18541	1.18672	1.18780	1.18864	1.18912	1.18934	1.18935				
26	1.18047	1.18201	1.18329	1.18435	1.18507	1.18552	1.18572	1.18569			
27	1.17513	1.17687	1.17837	1.17963	1.18057	1.18127	1.18169	1.18185	1.18171		
28	1.16946	1.17136	1.17305	1.17453	1.17566	1.17666	1.17725	1.17763	1.17768	1.17757	
29	1.16349	1.16550	1.16735	1.16902	1.17037	1.17150	1.17237	1.17299	1.17325	1.17333	1.17347
30	1.15723	1.15932	1.16129	1.16312	1.16466	1.16599	1.16706	1.16789	1.16838	1.16867	1.16870
31	1.15071	1.15290	1.15494	1.15689	1.15859	1.16009	1.16138	1.16239	1.16310	1.16362	1.16386
32	1.14402	1.14630	1.14843	1.15045	1.15218	1.15392	1.15539	1.15661	1.15751	1.15823	1.15870
33	1.13719	1.13958	1.14180	1.14390	1.14581	1.14755	1.14917	1.15057	1.15168	1.15258	1.15325
34	1.13021	1.13277	1.13509	1.13728	1.13927	1.14108	1.14280	1.14434	1.14563	1.14673	1.14758
35	1.12308	1.12577	1.12826	1.13054	1.13261	1.13449	1.13628	1.13792	1.13936	1.14063	1.14168
36	1.11572	1.11860	1.12122	1.12367	1.12583	1.12779	1.12964	1.13134	1.13289	1.13430	1.13551
37	1.10813	1.11116	1.11398	1.11655	1.11886	1.12091	1.12284	1.12461	1.12621	1.12771	1.12905
38	1.10023	1.10344	1.10641	1.10916	1.11159	1.11379	1.11581	1.11764	1.11931	1.12087	1.12230
39	1.09194	1.09539	1.09853	1.10143	1.10405	1.10635	1.10850	1.11043	1.11217	1.11378	1.11527
40	1.08322	1.08688	1.09027	1.09333	1.09610	1.09857	1.10082	1.10289	1.10471	1.10638	1.10794
41	1.07408	1.07799	1.08159	1.08488	1.08779	1.09042	1.09285	1.09501	1.09697	1.09871	1.10033
42	1.06455	1.06867	1.07250	1.07599	1.07913	1.08192	1.08449	1.08681	1.08887	1.09074	1.09243
43	1.05455	1.05894	1.06296	1.06668	1.07002	1.07303	1.07575	1.07820	1.08042	1.08238	1.08420
44	1.04406	1.04876	1.05307	1.05697	1.06052	1.06373	1.06667	1.06925	1.07160	1.07372	1.07562
45	1.03304	1.03803	1.04264	1.04682	1.05054	1.05398	1.05710	1.05989	1.06237	1.06461	1.06666
46	1.02144	1.02676	1.03164	1.03612	1.04011	1.04372	1.04705	1.05001	1.05271	1.05508	1.05723
47	1.00925	1.01493	1.02013	1.02488	1.02916	1.03303	1.03652	1.03969	1.04256	1.04513	1.04747
48	0.99647	1.00250	1.00805	1.01310	1.01765	1.02180	1.02555	1.02888	1.03194	1.03468	1.03716
49	0.98302	0.98945	0.99534	1.00073	1.00557	1.00999	1.01401	1.01759	1.02080	1.02373	1.02637
50	0.96887	0.97572	0.98198	0.98768	0.99288	0.99759	1.00186	1.00571	1.00915	1.01224	1.01506
51	0.95402	0.96129	0.96797	0.97403	0.97955	0.98459	0.98914	0.99324	0.99694	1.00026	1.00322
52	0.93855	0.94614	0.95324	0.95971	0.96558	0.97093	0.97581	0.98018	0.98412	0.98770	0.99088
53	0.92246	0.93035	0.93776	0.94463	0.95091	0.95661	0.96179	0.96647	0.97068	0.97449	0.97792
54	0.90574	0.91397	0.92167	0.92885	0.93552	0.94162	0.94714	0.95211	0.95663	0.96071	0.96435
55	0.88849	0.89702	0.90504	0.91250	0.91947	0.92596	0.93187	0.93718	0.94198	0.94635	0.95016
56	0.87065	0.87951	0.88782	0.89560	0.90284	0.90963	0.91591	0.92161	0.92673	0.93139	0.93559
57	0.85225	0.86139	0.87004	0.87810	0.88565	0.89270	0.89927	0.90535	0.91084	0.91582	0.92028
58	0.83327	0.84273	0.85165	0.86002	0.86785	0.87520	0.88202	0.88839	0.89425	0.89959	0.90437
59	0.81368	0.82347	0.83270	0.84133	0.84947	0.85709	0.86420	0.87082	0.87696	0.88266	0.88779

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 3½ Procent.

	−10	−11	−12	−13	−14	−15	−16	−17	−18	−19	−20	
												20
												21
												22
												23
												24
												25
												26
												27
												28
												29
	1.16850											30
	1.16384	1.16362										31
	1.15889	1.15885	1.15855									32
	1.15367	1.15384	1.15371	1.15338								33
	1.14820	1.14860	1.14868	1.14852	1.14819							34
	1.14247	1.14307	1.14337	1.14341	1.14325	1.14288						35
	1.13650	1.13728	1.13777	1.13803	1.13806	1.13787	1.13744					36
	1.13021	1.13119	1.13185	1.13231	1.13256	1.13256	1.13229	1.13184				37
	1.12359	1.12474	1.12558	1.12621	1.12666	1.12687	1.12679	1.12650	1.12606			38
	1.11665	1.11792	1.11892	1.11974	1.12036	1.12076	1.12089	1.12080	1.12052	1.12003		39
	1.10936	1.11072	1.11185	1.11282	1.11363	1.11428	1.11451	1.11462	1.11453	1.11420	1.11368	40
	1.10180	1.10321	1.10442	1.10551	1.10648	1.10731	1.10770	1.10799	1.10811	1.10797	1.10759	41
	1.09395	1.09540	1.09666	1.09783	1.09891	1.09980	1.10047	1.10091	1.10122	1.10128	1.10109	42
	1.08578	1.08728	1.08859	1.08980	1.09096	1.09196	1.09278	1.09340	1.09386	1.09410	1.09411	43
	1.07733	1.07888	1.08024	1.08149	1.08268	1.08377	1.08470	1.08546	1.08609	1.08648	1.08668	44
	1.06846	1.07012	1.07153	1.07284	1.07406	1.07517	1.07618	1.07705	1.07782	1.07839	1.07874	45
	1.05918	1.06091	1.06244	1.06380	1.06506	1.06621	1.06725	1.06819	1.06906	1.06978	1.07029	46
	1.04946	1.05133	1.05295	1.05440	1.05571	1.05690	1.05797	1.05894	1.05987	1.06070	1.06134	47
	1.03932	1.04129	1.04305	1.04457	1.04598	1.04722	1.04831	1.04931	1.05026	1.05115	1.05191	48
	1.02872	1.03080	1.03266	1.03431	1.03578	1.03712	1.03825	1.03929	1.04026	1.04116	1.04198	49
	1.01756	1.01982	1.02179	1.02353	1.02513	1.02652	1.02776	1.02884	1.02983	1.03075	1.03158	50
	1.00590	1.00831	1.01046	1.01230	1.01398	1.01549	1.01679	1.01796	1.01898	1.01993	1.02077	51
	0.99369	0.99627	0.99857	1.00058	1.00236	1.00394	1.00536	1.00658	1.00769	1.00867	1.00954	52
	0.98095	0.98365	0.98612	0.98827	0.99022	0.99188	0.99338	0.99471	0.99587	0.99693	0.99783	53
	0.96763	0.97053	0.97313	0.97543	0.97751	0.97934	0.98093	0.98233	0.98360	0.98469	0.98569	54
	0.95375	0.95689	0.95969	0.96210	0.96433	0.96629	0.96803	0.96952	0.97086	0.97205	0.97309	55
	0.93932	0.94267	0.94570	0.94831	0.95064	0.95276	0.95461	0.95626	0.95768	0.95892	0.96006	56
	0.92431	0.92792	0.93113	0.93397	0.93647	0.93870	0.94069	0.94245	0.94402	0.94533	0.94653	57
	0.90865	0.91253	0.91598	0.91902	0.92174	0.92415	0.92624	0.92813	0.92981	0.93126	0.93253	58
	0.89237	0.89651	0.90022	0.90349	0.90640	0.90902	0.91129	0.91327	0.91507	0.91663	0.91805	59

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 3½ Procent.

	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	
59	0.81368	0.82347	0.83270	0.84133	0.84947	0.85709	0.86420	0.87082	0.87696	0.88266	0.88779	59
60	0.79344	0.80359	0.81315	0.82207	0.83047	0.83839	0.84576	0.85266	0.85905	0.86501	0.87050	60
61	0.77244	0.78298	0.79285	0.80214	0.81082	0.81900	0.82665	0.83380	0.84048	0.84668	0.85242	61
62	0.75065	0.76160	0.77186	0.78149	0.79049	0.79894	0.80684	0.81428	0.82120	0.82767	0.83364	62
63	0.72805	0.73943	0.75009	0.76009	0.76944	0.77820	0.78637	0.79405	0.80125	0.80796	0.81419	63
64	0.70464	0.71647	0.72755	0.73795	0.74766	0.75676	0.76524	0.77318	0.78062	0.78758	0.79405	64
65	0.68047	0.69273	0.70426	0.71507	0.72518	0.73464	0.74345	0.75168	0.75937	0.76657	0.77331	65
66	0.65576	0.66830	0.68026	0.69152	0.70204	0.71189	0.72106	0.72962	0.73761	0.74505	0.75201	66
67	0.63079	0.64348	0.65571	0.66740	0.67837	0.68863	0.69819	0.70711	0.71542	0.72315	0.73036	67
68	0.60559	0.61848	0.63086	0.64283	0.65423	0.66493	0.67491	0.68420	0.69287	0.70092	0.70841	68
69	0.57992	0.59324	0.60584	0.61795	0.62964	0.64077	0.65118	0.66089	0.66994	0.67834	0.68614	69
70	0.55364	0.56755	0.58059	0.59292	0.60476	0.61617	0.62702	0.63716	0.64662	0.65540	0.66354	70
71	0.52694	0.54148	0.55513	0.56788	0.57994	0.59150	0.60264	0.61321	0.62311	0.63229	0.64081	71
72	0.50042	0.51536	0.52963	0.54299	0.55549	0.56726	0.57856	0.58941	0.59975	0.60935	0.61828	72
73	0.47446	0.48957	0.50424	0.51823	0.53133	0.54354	0.55505	0.56604	0.57666	0.58669	0.59604	73
74	0.44941	0.46422	0.47907	0.49346	0.50718	0.51999	0.53192	0.54312	0.55387	0.56417	0.57394	74
75	0.42548	0.43941	0.45395	0.46852	0.48263	0.49605	0.50857	0.52018	0.53112	0.54154	0.55158	75
76	0.40276	0.41515	0.42880	0.44306	0.45734	0.47115	0.48428	0.49646	0.50780	0.51839	0.52853	76
77	0.38062	0.39167	0.40376	0.41712	0.43109	0.44507	0.45858	0.47137	0.48327	0.49424	0.50453	77
78	0.35757	0.36838	0.37910	0.39089	0.40395	0.41762	0.43130	0.44448	0.45697	0.46849	0.47915	78
79	0.33149	0.34401	0.35444	0.36483	0.37630	0.38959	0.40247	0.41582	0.42870	0.44082	0.45202	79
80	0.30088	0.31710	0.32919	0.33924	0.34931	0.36050	0.37300	0.38607	0.39915	0.41165	0.42345	80
81	0.26718	0.28704	0.30280	0.31447	0.32415	0.33390	0.34480	0.35702	0.36981	0.38251	0.39470	81
82	0.22677	0.24769	0.26718	0.28552	0.29381	0.30318	0.31264	0.32331	0.33527	0.34777	0.36018	82
83	0.18883	0.20607	0.22677	0.24594	0.26095	0.27196	0.28106	0.29033	0.30080	0.31254	0.32479	83
84	0.16007	0.17170	0.18883	0.20933	0.22827	0.24306	0.25382	0.26276	0.27185	0.28212	0.29368	84
85	0.14085	0.14853	0.16007	0.17706	0.19741	0.21618	0.23078	0.24135	0.25008	0.25899	0.26909	85
86	0.12744	0.13329	0.14085	0.15216	0.16912	0.18933	0.20792	0.22228	0.23163	0.24116	0.24984	86
87	0.11331	0.12178	0.12744	0.13482	0.14607	0.16279	0.18280	0.20114	0.21523	0.22531	0.23354	87
88	0.09415	0.10520	0.11331	0.11874	0.12592	0.13701	0.15353	0.17331	0.19134	0.20511	0.21482	88
89	0.07052	0.08353	0.09415	0.10193	0.10704	0.11401	0.12490	0.14121	0.16070	0.17838	0.19173	89
90	0.04346	0.05816	0.07052	0.08064	0.08800	0.09279	0.09951	0.11017	0.12624	0.14540	0.16265	90
91	0.00766	0.02977	0.04346	0.05507	0.06457	0.07146	0.07588	0.08330	0.09372	0.10848	0.12721	91
92	9.95823	9.98702	0.00766	0.02021	0.03095	0.03978	0.04616	0.05016	0.05629	0.06643	0.08182	92
93	9.89254	9.93136	9.95813	9.97712	9.98836	9.99816	0.00631	0.01311	0.01568	0.02150	0.03122	93
94	9.81113	9.85675	9.89254	9.91696	9.93410	9.94394	9.95279	9.96019	9.96542	9.96854	9.97405	94
95	9.69690	9.77061	9.81113	9.84345	9.86510	9.88015	9.88848	9.89630	9.90295	9.90755	9.91019	95
96	9.53030	9.63100	9.69690	9.73209	9.76059	9.77929	9.79228	9.79903	9.80593	9.81183	9.81579	96
97	9.28609	9.44543	9.53030	9.58848	9.61707	9.64143	9.95719	9.66782	9.67304	9.67904	9.68420	97
98		9.18918	9.28609	9.35668	9.40260	9.42231	9.44263	9.45406	9.46218	9.46559	9.47082	98
99												99

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 3½ Procent

	−10	−11	−12	−13	−14	−15	−16	−17	−18	−19	−20	
	0.89237	0.89631	0.90022	0.90349	0.90640	0.90902	0.91129	0.91327	0.91507	0.91663	0.91805	59
	0.87544	0.87987	0.88382	0.88736	0.89049	0.89328	0.89576	0.89791	0.89980	0.90148	0.90300	60
	0.85770	0.86248	0.86673	0.87050	0.87389	0.87689	0.87953	0.88189	0.88394	0.88570	0.88734	61
	0.83917	0.84429	0.84888	0.85293	0.85656	0.85980	0.86265	0.86518	0.86742	0.86935	0.87104	62
	0.81994	0.82531	0.83023	0.83462	0.83852	0.84199	0.84508	0.84781	0.85020	0.85232	0.85417	63
	0.80007	0.80566	0.81082	0.81553	0.81976	0.82349	0.82681	0.82977	0.83236	0.83463	0.83666	64
	0.77955	0.78539	0.79076	0.79572	0.80028	0.80433	0.80791	0.81108	0.81391	0.81636	0.81854	65
	0.75852	0.76458	0.77020	0.77536	0.78016	0.78453	0.78843	0.79185	0.79488	0.79757	0.79993	66
	0.73710	0.74340	0.74924	0.75465	0.75964	0.76424	0.76845	0.77219	0.77547	0.77836	0.78094	67
	0.71539	0.72190	0.72800	0.73362	0.73886	0.74365	0.74809	0.75213	0.75572	0.75886	0.76163	68
	0.69340	0.70015	0.70646	0.71233	0.71777	0.72280	0.72743	0.73169	0.73559	0.73903	0.74204	69
	0.67111	0.67813	0.68469	0.69076	0.69644	0.70168	0.70654	0.71099	0.71511	0.71883	0.72214	70
	0.64873	0.65605	0.66286	0.66918	0.67505	0.68053	0.68559	0.69027	0.69457	0.69850	0.70211	71
	0.62656	0.63422	0.64133	0.64791	0.65400	0.65968	0.66498	0.66985	0.67437	0.67848	0.68229	72
	0.60472	0.61274	0.62017	0.62704	0.63339	0.63928	0.64478	0.64987	0.65457	0.65890	0.66288	73
	0.58303	0.59144	0.59921	0.60639	0.61302	0.61916	0.62486	0.63013	0.63505	0.63956	0.64375	74
	0.56107	0.56987	0.57801	0.58553	0.59246	0.59887	0.60480	0.61026	0.61534	0.62006	0.62442	75
	0.53826	0.54746	0.55598	0.56386	0.57111	0.57781	0.58398	0.58966	0.59492	0.59980	0.60436	76
	0.51435	0.52377	0.53268	0.54092	0.54853	0.55552	0.56197	0.56788	0.57335	0.57841	0.58311	77
	0.48911	0.49861	0.50773	0.51634	0.52431	0.53163	0.53837	0.54454	0.55024	0.55550	0.56036	78
	0.46234	0.47196	0.48115	0.48997	0.49830	0.50597	0.51304	0.51950	0.52545	0.53093	0.53597	79
	0.43430	0.44427	0.45358	0.46247	0.47100	0.47904	0.48645	0.49327	0.49948	0.50520	0.51045	80
	0.40614	0.41663	0.42629	0.43529	0.44388	0.45212	0.45989	0.46703	0.47358	0.47958	0.48506	81
	0.37706	0.38817	0.39938	0.40975	0.41949	0.42878	0.43729	0.44220	0.44853	0.45428		82
	0.34697	0.35858	0.35945	0.36941	0.37853	0.38701	0.39513	0.40288	0.41019	0.41690	0.42300	83
	0.30576	0.31771	0.32911	0.33978	0.34953	0.35844	0.36673	0.37461	0.38219	0.38932	0.39582	84
	0.28047	0.29235	0.30412	0.31534	0.32579	0.33534	0.34404	0.35210	0.35982	0.36720	0.37412	85
	0.25975	0.27094	0.28262	0.29419	0.30516	0.31541	0.32470	0.33317	0.34104	0.34852	0.35569	86
	0.24198	0.25164	0.26259	0.27404	0.28532	0.29607	0.30602	0.31505	0.32326	0.33084	0.33807	87
	0.22273	0.23086	0.24025	0.25093	0.26205	0.27307	0.28349	0.29314	0.30185	0.30974	0.31702	88
	0.20102	0.20853	0.21632	0.22536	0.23570	0.24653	0.25720	0.26727	0.27656	0.28491	0.29241	89
	0.17547	0.18424	0.19258	0.19863	0.20729	0.21728	0.22774	0.23804	0.24771	0.25656	0.26448	90
	0.14387	0.15603	0.16416	0.17060	0.17746	0.18471	0.19530	0.20535	0.21519	0.22437	0.23272	91
	0.10001	0.11594	0.12731	0.13464	0.14043	0.14678	0.15458	0.16375	0.17334	0.18265	0.19125	92
	0.04629	0.06380	0.07887	0.08924	0.09568	0.10077	0.10657	0.11394	0.12266	0.13170	0.14041	93
	9.98353	9.99799	0.01474	0.02671	0.03793	0.04339	0.04775	0.05306	0.06001	0.06823	0.07668	94
	9.91535	9.92444	9.93826	9.95395	9.96656	9.97444	9.97882	9.98251	9.98736	9.99384	0.00149	95
	9.81791	9.82275	9.83143	9.84447	9.85891	9.86994	9.87635	9.87971	9.88281	9.88726	9.89328	96
	9.68740	9.68900	9.69356	9.70172	9.71374	9.72658	9.73571	9.74055	9.74799	9.74563	9.74970	97
	9.47479	9.47708	9.47815	9.48247	9.48963	9.49997	9.51035	9.51696	9.52017	9.52181	9.52405	98
												99

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 4 Procent.

	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	
20	1.17536	1.17543										20
21	1.17265	1.17293	1.17297									21
22	1.16958	1.17009	1.17032	1.17033								22
23	1.16615	1.16691	1.16736	1.16756	1.16755							23
24	1.16233	1.16331	1.16401	1.16446	1.16462	1.16455						24
25	1.15813	1.15931	1.16025	1.16093	1.16131	1.16143	1.16135					25
26	1.15357	1.15497	1.15611	1.15700	1.15763	1.15797	1.15807	1.15794				26
27	1.14860	1.15021	1.15157	1.15265	1.15350	1.15408	1.15439	1.15444	1.15427			27
28	1.14332	1.14509	1.14663	1.14793	1.14897	1.14977	1.15031	1.15057	1.15059	1.15041		28
29	1.13773	1.13962	1.14132	1.14280	1.14405	1.14504	1.14580	1.14630	1.14652	1.14652	1.14628	29
30	1.13186	1.13384	1.13565	1.13728	1.13872	1.13993	1.14086	1.14157	1.14204	1.14224	1.14217	30
31	1.12575	1.12781	1.12969	1.13144	1.13303	1.13442	1.13556	1.13643	1.13713	1.13756	1.13769	31
32	1.11947	1.12162	1.12358	1.12541	1.12711	1.12863	1.12996	1.13105	1.13191	1.13255	1.13290	32
33	1.11305	1.11530	1.11734	1.11926	1.12103	1.12266	1.12414	1.12540	1.12646	1.12724	1.12783	33
34	1.10649	1.10890	1.11103	1.11304	1.11489	1.11658	1.11816	1.11957	1.12081	1.12179	1.12255	34
35	1.09978	1.10231	1.10460	1.10671	1.10863	1.11039	1.11204	1.11355	1.11492	1.11607	1.11703	35
36	1.09286	1.09558	1.09799	1.10025	1.10226	1.10410	1.10581	1.10738	1.10885	1.11013	1.11126	36
37	1.08570	1.08858	1.09117	1.09355	1.09571	1.09763	1.09942	1.10105	1.10257	1.10396	1.10521	37
38	1.07833	1.08129	1.08403	1.08659	1.08887	1.09093	1.09280	1.09450	1.09607	1.09752	1.09886	38
39	1.07038	1.07368	1.07659	1.07929	1.08176	1.08392	1.08593	1.08771	1.08934	1.09085	1.09224	39
40	1.06211	1.06562	1.06877	1.07163	1.07423	1.07657	1.07868	1.08060	1.08231	1.08388	1.08532	40
41	1.05344	1.05717	1.06053	1.06362	1.06648	1.06886	1.07113	1.07315	1.07499	1.07663	1.07813	41
42	1.04438	1.04830	1.05189	1.05519	1.05817	1.06079	1.06320	1.06538	1.06732	1.06908	1.07064	42
43	1.03483	1.03903	1.04281	1.04633	1.04951	1.05236	1.05490	1.05721	1.05931	1.06115	1.06284	43
44	1.02481	1.02932	1.03337	1.03707	1.04047	1.04351	1.04627	1.04872	1.05092	1.05292	1.05470	44
45	1.01426	1.01905	1.02342	1.02737	1.03097	1.03421	1.03714	1.03981	1.04214	1.04426	1.04619	45
46	1.00313	1.00824	1.01288	1.01714	1.02097	1.02441	1.02754	1.03039	1.03292	1.03517	1.03721	46
47	0.99144	0.99688	1.00183	1.00636	1.01049	1.01418	1.01748	1.02052	1.02332	1.02567	1.02783	47
48	0.97911	0.98491	0.99021	0.99504	0.99945	1.00342	1.00697	1.01016	1.01306	1.01567	1.01802	48
49	0.96616	0.97234	0.97797	0.98314	0.98784	0.99207	0.99590	0.99933	1.00238	1.00518	1.00768	49
50	0.95248	0.95909	0.96509	0.97058	0.97561	0.98013	0.98421	0.98791	0.99120	0.99414	0.99682	50
51	0.93810	0.94513	0.95156	0.95741	0.96274	0.96760	0.97196	0.97590	0.97946	0.98262	0.98545	51
52	0.92310	0.93046	0.93730	0.94357	0.94925	0.95441	0.95910	0.96331	0.96710	0.97052	0.97356	52
53	0.90747	0.91513	0.92229	0.92897	0.93505	0.94055	0.94554	0.95007	0.95423	0.95778	0.96106	53
54	0.89121	0.89931	0.90666	0.91365	0.92013	0.92603	0.93136	0.93617	0.94054	0.94445	0.94795	54
55	0.87442	0.88271	0.89049	0.89776	0.90455	0.91083	0.91655	0.92170	0.92635	0.93056	0.93431	55
56	0.85703	0.86566	0.87373	0.88131	0.88838	0.89496	0.90106	0.90660	0.91157	0.91605	0.92009	56
57	0.83909	0.84801	0.85641	0.86427	0.87165	0.87850	0.88488	0.89079	0.89614	0.90093	0.90525	57
58	0.82056	0.82979	0.83847	0.84664	0.85430	0.86146	0.86809	0.87429	0.88000	0.88516	0.88979	58
59	0.80141	0.81097	0.81995	0.82839	0.83637	0.84380	0.85071	0.85717	0.86316	0.86868	0.87367	59

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 4 Procent.

	−10	−11	−12	−13	−14	−15	−16	−17	−18	−19	−20	
20												20
21												21
22												22
23												23
24												24
25												25
26												26
27												27
28												28
29												29
30	1.14188											30
31	1.13758	1.13727										31
32	1.13300	1.13286	1.13254									32
33	1.12815	1.12821	1.12806	1.12771								33
34	1.12308	1.12335	1.12340	1.12321	1.12283							34
35	1.11773	1.11821	1.11847	1.11847	1.11826	1.11784						35
36	1.11216	1.11281	1.11326	1.11347	1.11346	1.11320	1.11273					36
37	1.10627	1.10712	1.10774	1.10814	1.10834	1.10827	1.10797	1.10750				37
38	1.10005	1.10106	1.10187	1.10243	1.10282	1.10296	1.10285	1.10254	1.10206			38
39	1.09352	1.09467	1.09562	1.09636	1.09692	1.09724	1.09735	1.09722	1.09689	1.09635		39
40	1.08664	1.08786	1.08895	1.08985	1.09059	1.09107	1.09136	1.09144	1.09129	1.09091	1.09038	40
41	1.07949	1.08076	1.08193	1.08295	1.08385	1.08450	1.08495	1.08521	1.08527	1.08507	1.08469	41
42	1.07206	1.07338	1.07458	1.07568	1.07670	1.07750	1.07813	1.07854	1.07879	1.07879	1.07858	42
43	1.06431	1.06568	1.06693	1.06807	1.06917	1.07008	1.07085	1.07144	1.07184	1.07202	1.07201	43
44	1.05629	1.05772	1.05901	1.06019	1.06132	1.06230	1.06319	1.06392	1.06449	1.06483	1.06499	44
45	1.04785	1.04940	1.05074	1.05196	1.05313	1.05414	1.05510	1.05594	1.05665	1.05716	1.05747	45
46	1.03901	1.04064	1.04209	1.04336	1.04456	1.04560	1.04659	1.04750	1.04832	1.04897	1.04945	46
47	1.02974	1.03151	1.03303	1.03441	1.03565	1.03672	1.03774	1.03868	1.03956	1.04031	1.04094	47
48	1.02005	1.02191	1.02357	1.02501	1.02636	1.02746	1.02853	1.02949	1.03039	1.03121	1.03194	48
49	1.00990	1.01187	1.01362	1.01520	1.01660	1.01781	1.01891	1.01990	1.02082	1.02166	1.02245	49
50	0.99919	1.00134	1.00320	1.00487	1.00639	1.00766	1.00886	1.00988	1.01082	1.01168	1.01249	50
51	0.98798	0.99028	0.99231	0.99409	0.99569	0.99708	0.99833	0.99945	1.00042	1.00130	1.00212	51
52	0.97623	0.97870	0.98087	0.98281	0.98451	0.98599	0.98735	0.98852	0.98958	0.99048	0.99132	52
53	0.96395	0.96654	0.96888	0.97094	0.97281	0.97438	0.97581	0.97710	0.97820	0.97919	0.98005	53
54	0.95109	0.95389	0.95634	0.95855	0.96055	0.96229	0.96380	0.96516	0.96637	0.96740	0.96834	54
55	0.93767	0.94070	0.94335	0.94567	0.94781	0.94969	0.95135	0.95279	0.95407	0.95520	0.95618	55
56	0.92370	0.92693	0.92982	0.93232	0.93458	0.93660	0.93837	0.93996	0.94132	0.94251	0.94360	56
57	0.90914	0.91261	0.91569	0.91841	0.92087	0.92299	0.92489	0.92659	0.92810	0.92936	0.93051	57
58	0.89394	0.89768	0.90099	0.90391	0.90658	0.90889	0.91088	0.91271	0.91433	0.91572	0.91694	58
59	0.87812	0.88210	0.88569	0.88882	0.89169	0.89420	0.89637	0.89829	0.90003	0.90153	0.90289	59

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 4 Procent.

	+1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8	−9	
59	0.80141	0.81097	0.81995	0.82839	0.83637	0.84380	0.85072	0.85717	0.86316	0.86868	0.87367	59
60	0.78160	0.79153	0.80084	0.80958	0.81780	0.82554	0.83272	0.83947	0.84570	0.85148	0.85683	60
61	0.76103	0.77135	0.78101	0.79008	0.79858	0.80658	0.81406	0.82106	0.82756	0.83358	0.83919	61
62	0.73966	0.75040	0.76044	0.76986	0.77867	0.78695	0.79468	0.80196	0.80879	0.81500	0.82084	62
63	0.71746	0.72864	0.73910	0.74889	0.75804	0.76663	0.77463	0.78215	0.78918	0.79571	0.80181	63
64	0.69445	0.70607	0.71696	0.72716	0.73668	0.74560	0.75391	0.76169	0.76896	0.77576	0.78209	64
65	0.67066	0.68273	0.69406	0.70468	0.71460	0.72388	0.73253	0.74060	0.74814	0.75516	0.76176	65
66	0.64633	0.65868	0.67046	0.68151	0.69186	0.70152	0.71053	0.71893	0.72674	0.73404	0.74087	66
67	0.62173	0.63422	0.64628	0.65778	0.66856	0.67864	0.68804	0.69680	0.70493	0.71251	0.71960	67
68	0.59686	0.60957	0.62178	0.63357	0.64479	0.65531	0.66512	0.67427	0.68276	0.69065	0.69802	68
69	0.57153	0.58468	0.59709	0.60904	0.62054	0.63150	0.64175	0.65131	0.66019	0.66843	0.67612	69
70	0.54557	0.55931	0.57216	0.58433	0.59599	0.60724	0.61793	0.62792	0.63722	0.64584	0.65388	70
71	0.51918	0.53354	0.54700	0.55961	0.57149	0.58290	0.59387	0.60431	0.61404	0.62308	0.63149	71
72	0.49294	0.50771	0.52181	0.53503	0.54736	0.55897	0.57010	0.58083	0.59100	0.60048	0.60929	72
73	0.46723	0.48219	0.49670	0.51057	0.52350	0.53555	0.54690	0.55777	0.56823	0.57814	0.58737	73
74	0.44243	0.45710	0.47180	0.48658	0.49964	0.51229	0.52408	0.53524	0.54575	0.55594	0.56558	74
75	0.41873	0.43254	0.44695	0.46140	0.47537	0.48866	0.50103	0.51252	0.52331	0.53362	0.54352	75
76	0.39635	0.40852	0.42206	0.43621	0.45035	0.46404	0.47704	0.48910	0.50029	0.51078	0.52078	76
77	0.37435	0.38529	0.39727	0.41053	0.42437	0.43824	0.45163	0.46430	0.47605	0.48693	0.49708	77
78	0.35155	0.36224	0.37285	0.38454	0.39749	0.41106	0.42463	0.43770	0.45004	0.46147	0.47200	78
79	0.32572	0.33812	0.34843	0.35872	0.37009	0.38278	0.39606	0.40931	0.42206	0.43408	0.44516	79
80	0.29535	0.31145	0.32342	0.33337	0.34332	0.35443	0.36684	0.37982	0.39277	0.40519	0.41687	80
81	0.26188	0.28165	0.29728	0.30883	0.31841	0.32806	0.33889	0.35100	0.36370	0.37632	0.38839	81
82	0.22166	0.24252	0.26188	0.27713	0.28829	0.29755	0.30696	0.31751	0.32939	0.34181	0.35413	82
83	0.18387	0.20207	0.22166	0.24075	0.25565	0.26653	0.27557	0.28473	0.29511	0.30677	0.31896	83
84	0.15522	0.16682	0.18387	0.20430	0.22315	0.23782	0.24850	0.25732	0.26632	0.27652	0.28801	84
85	0.13611	0.14375	0.15522	0.17216	0.19245	0.21111	0.22560	0.23606	0.24471	0.25353	0.26357	85
86	0.12281	0.12861	0.13611	0.14747	0.16429	0.18441	0.20291	0.21717	0.22742	0.23585	0.24448	86
87	0.10885	0.11721	0.12281	0.13015	0.14136	0.15802	0.17796	0.19620	0.21021	0.22018	0.22855	87
88	0.08980	0.10077	0.10885	0.11419	0.12134	0.13238	0.14887	0.16857	0.18652	0.20019	0.20982	88
89	0.06633	0.07926	0.08980	0.09752	0.10259	0.10952	0.12038	0.13665	0.15628	0.17369	0.18695	89
90	0.03948	0.05406	0.06635	0.07639	0.08371	0.08845	0.09534	0.10578	0.12181	0.14093	0.15809	90
91	0.00389	0.02587	0.03948	0.05102	0.06047	0.06731	0.07169	0.07810	0.08850	0.10423	0.12291	91
92	9.95460	9.98335	0.00389	0.01637	0.02706	0.03585	0.04218	0.04616	0.05228	0.06240	0.07777	92
93	9.88927	9.92795	9.95460	9.97352	9.98470	9.99446	0.00256	0.00835	0.01190	0.01771	0.02752	93
94	9.80813	9.85359	9.88927	9.91362	9.93070	9.94048	9.94930	9.95669	9.96189	9.96500	9.97050	94
95	9.69418	9.76773	9.80813	9.84039	9.86197	9.87698	9.88528	9.89309	9.89972	9.90431	9.90694	95
96	9.52788	9.62838	9.69418	9.72931	9.75776	9.77644	9.78939	9.79613	9.80301	9.80891	9.81287	96
97	9.28400	9.44306	9.52788	9.58599	9.61455	9.63899	9.65485	9.66526	9.67047	9.67647	9.68163	97
98		9.18709	9.28400	9.35458	9.40050	9.42022	9.44053	9.45197	9.46009	9.46349	9.46872	98

Verbindungsrenten.

Alter des Mannes zur Seite. Altersunterschied der Frau oben.

Zinsfuss 4 Procent.

	−10	−11	−12	−13	−14	−15	−16	−17	−18	−19	−20	
	0.87812	0.88210	0.88569	0.88882	0.89169	0.89420	0.89637	0.89829	0.90003	0.90153	0.90289	59
	0.86165	0.86591	0.86974	0.87318	0.87622	0.87890	0.88128	0.88337	0.88519	0.88683	0.88827	60
	0.84434	0.84896	0.85308	0.85676	0.86005	0.86294	0.86550	0.86778	0.86976	0.87148	0.87303	61
	0.82624	0.83121	0.83567	0.83963	0.84314	0.84629	0.84905	0.85149	0.85366	0.85554	0.85716	62
	0.80743	0.81266	0.81744	0.82174	0.82552	0.82890	0.83190	0.83453	0.83687	0.83893	0.84070	63
	0.78798	0.79342	0.79844	0.80307	0.80717	0.81082	0.81405	0.81690	0.81944	0.82165	0.82360	64
	0.76788	0.77358	0.77880	0.78367	0.78809	0.79206	0.79556	0.79862	0.80138	0.80378	0.80588	65
	0.74725	0.75318	0.75865	0.76372	0.76837	0.77265	0.77648	0.77979	0.78275	0.78538	0.78766	66
	0.72620	0.73239	0.73808	0.74339	0.74825	0.75276	0.75689	0.76053	0.76372	0.76656	0.76905	67
	0.70487	0.71127	0.71721	0.72274	0.72784	0.73255	0.73691	0.74086	0.74435	0.74743	0.75012	68
	0.68324	0.68988	0.69603	0.70181	0.70712	0.71206	0.71662	0.72078	0.72458	0.72796	0.73090	69
	0.66131	0.66821	0.67460	0.68059	0.68614	0.69129	0.69606	0.70043	0.70445	0.70812	0.71136	70
	0.63926	0.64646	0.65312	0.65935	0.66510	0.67049	0.67547	0.68006	0.68427	0.68814	0.69167	71
	0.61743	0.62496	0.63193	0.63841	0.64440	0.64997	0.65518	0.65997	0.66440	0.66845	0.67219	72
	0.59591	0.60380	0.61110	0.61788	0.62411	0.62990	0.63530	0.64031	0.64494	0.64920	0.65311	73
	0.57453	0.58281	0.59047	0.59756	0.60407	0.61010	0.61571	0.62089	0.62574	0.63019	0.63430	74
	0.55288	0.56156	0.56959	0.57702	0.58384	0.59013	0.59596	0.60135	0.60636	0.61101	0.61529	75
	0.53039	0.53946	0.54788	0.55567	0.56281	0.56938	0.57547	0.58108	0.58627	0.59107	0.59555	76
	0.50679	0.51609	0.52489	0.53305	0.54054	0.54743	0.55378	0.55963	0.56503	0.57000	0.57462	77
	0.48185	0.49123	0.50045	0.50878	0.51663	0.52386	0.53050	0.53662	0.54225	0.54741	0.55219	78
	0.45536	0.46488	0.47397	0.48271	0.49093	0.49851	0.50548	0.51188	0.51777	0.52315	0.52812	79
	0.42760	0.43748	0.44669	0.45550	0.46393	0.47188	0.47920	0.48591	0.49209	0.49772	0.50291	80
	0.39972	0.41013	0.41969	0.42860	0.43710	0.44525	0.45292	0.45999	0.46647	0.47239	0.47781	81
	0.36589	0.37693	0.38704	0.39632	0.40495	0.41318	0.42107	0.42852	0.43536	0.44161	0.44731	82
	0.33102	0.34256	0.35334	0.36321	0.37224	0.38063	0.38864	0.39634	0.40358	0.41021	0.41626	83
	0.29999	0.31188	0.32320	0.33378	0.34343	0.35225	0.36045	0.36818	0.37579	0.38284	0.38928	84
	0.27488	0.28669	0.29838	0.30952	0.31989	0.32933	0.33796	0.34597	0.35361	0.36093	0.36778	85
	0.25432	0.26544	0.27705	0.28854	0.29946	0.30960	0.31883	0.32724	0.33503	0.34245	0.34955	86
	0.23572	0.24633	0.25721	0.26858	0.27983	0.29047	0.30036	0.30933	0.31747	0.32500	0.33216	87
	0.21766	0.22573	0.23506	0.24566	0.25676	0.26771	0.27806	0.28764	0.29630	0.30414	0.31135	88
	0.19616	0.20360	0.21133	0.22031	0.23062	0.24140	0.25202	0.26203	0.27126	0.27956	0.28702	89
	0.17085	0.17954	0.18651	0.19382	0.20244	0.21239	0.22282	0.23306	0.24267	0.25148	0.25935	90
	0.13950	0.15159	0.15964	0.16605	0.17286	0.18109	0.19064	0.20065	0.21045	0.21958	0.22789	91
	0.09591	0.11179	0.12307	0.13037	0.13611	0.14243	0.15022	0.15934	0.16890	0.17817	0.18674	92
	0.04245	0.05995	0.07493	0.08527	0.09165	0.09672	0.10252	0.10985	0.11855	0.12757	0.13625	93
	0.97997	9.99441	0.01111	0.02506	0.03424	0.03966	0.04402	0.04931	0.05624	0.06444	0.07287	94
	9.91209	9.92118	9.92497	9.95065	9.96322	9.97108	9.97544	9.97911	9.98396	9.99044	9.99807	95
	9.81498	9.81982	9.82848	9.84152	9.85594	9.86695	9.87334	9.87669	9.87978	9.88424	9.89025	96
	9.68483	9.68644	9.69099	9.69915	9.71116	9.72398	9.73311	9.73794	9.74237	9.74302	9.74709	97
	9.47270	9.47499	9.47606	9.48038	9.48754	9.49788	9.50835	9.51487	9.51802	9.51972	9.52196	98

EINRICHTUNG UND GEBRAUCH DER TAFELN.

[Den Zahlenangaben dieser Tafeln liegen die von BRUNE im 16. Bande des CRELLEschen Journals für Mathematik zusammengestellten Erfahrungen über die in der k. Preussischen allgemeinen Witwen-Verpflegungs-Anstalt während der Zeit von 1776 bis 1834 successive aufgenommenen 31500 Ehepaare zu Grunde. Es sind hier angegeben die Logarithmen der Anzahl der Frauen ($\log fm$) und der Männer ($\log FM$), welche unter 10000, die das vollendete 20^{ste} Lebensjahr erreichten, bis zu dem Ende des in der Mitte bemerkten Altersjahres (m oder M) gelangten, jedoch mit der Abweichung von BRUNE, dass das Absterben der Männer über 80 Jahren nach demselben Verhältnisse gerechnet ist, welches jenen Erfahrungen gemäss bei dem weiblichen Geschlechte gilt; weil wie in der Bilanzrechnung von 1845 erwähnt wird, die Registratur der Preussischen Witwenkasse zur directen Bestimmung des Absterbens der Männer im hohen Alter keine hinreichende Daten enthält. Neben den Logarithmen der Lebenden stehen unter der Überschrift decr. die absoluten Werthe der Unterschiede jener Logarithmen ($\log gm = \log\frac{f(m-1)}{fm}$ und $\log GM = \log\frac{F(M-1)}{FM}$) in Einheiten der siebenten Decimale ausgedrückt. Mit Hülfe der so erhaltenen Tafel für die Sterblichkeit hat GAUSS die einfachen und die Verbindungsrenten bei dem Zinsfuss von $3\frac{1}{2}$ Proc. und von 4 Proc. berechnet.

Die sowohl in Logarithmen als in Zahlen (φm, ΦM) dargestellten einfachen Leibrentenwerthe gelten für das Ende des in der Mitte angegebenen Lebensjahres der Frau (m) oder des Mannes (M) als jetzige Zeitmoment und unter der Voraussetzung, dass für den Fall des Erlebens des Endes jedes der nachfolgenden Jahre dann die Münzeinheit gezahlt wird, so dass also

$$\varphi m . fm = \rho f(m+1) + \rho\rho f(m+2) + \rho^2 f(m+3) + \ldots$$
$$\Phi M . FM = \rho F(M+1) + \rho\rho F(M+2) + \rho^2 F(M+3) + \ldots$$

ist, wenn ρ den Discontofactor ($= \frac{999}{1000}$ bei $3\frac{1}{2}$ Proc. und $= \frac{24}{25}$ bei 4 Proc.) bezeichnet.

Die Tafel der Verbindungsrenten enthält die Logarithmen der Werthe $\psi(m, M)$, welche für den Zeitpunkt des zur Seite stehenden Alters (M) des Mannes solchen Renten, die am Schlusse jedes der folgenden Jahre im Falle des gleichzeitigen Lebens des Mannes (vom jetzigen Alter $= M$) und der Frau (vom Altersunterschiede $= m - M$) mit der Münzeinheit gezahlt werden, gleich kommen und also durch die Formel bestimmt sind:

$$\psi(m, M) . fm . Fm = \rho f(m+1) . F(M+1) + \rho\rho f(m+2) . F(M+2) + \rho^3 f(m+3) . F(M+3) + \ldots$$

Werthe von Leibrenten und Lebensversicherungen für Männer.

Die Tafel für die Leibrenten der Männer hat GAUSS zu einer genauen Berechnung des Einflusses benutzt, den diejenige Bestimmung der Statuten, dass ein Wiederaustritt des lebenden Mitgliedes nicht gestattet sein solle, haben würde. Er findet, dass für die 42 verheiratheten Mitglieder der Bilanzrechnung vom 1. Oct. 1845 der Zeitwerth der Beiträge sich dadurch um 898 Thl. bei $3\frac{1}{2}$ Proc. und um 665 Thl. bei 4 Proc. vermehren würde. Ausserdem hat er mit Hülfe dieser Tafel einige Rechnungen über die Werthe von Lebensversicherungen ausgeführt und dabei für ein jetziges Mannesalter von M Jahren $\rho - (1-\rho)\Phi M$ als Zeitwerth der am Ende des Todesjahres auszuzahlenden Münzeinheit genommen.]

Werth der bestehenden Witwenpension Pm.

m jetziges Alter der Witwe.

φm Werth der Pension, wenn jährlich und nur an noch Lebende gezahlt wird.

ρ Discontofactor ($= \frac{999}{1000}$ für 4 Proc., $= \frac{1999}{2000}$ für $3\frac{1}{2}$ Proc.) oder der Zinsfuss so verstanden, dass ρ nach einem Jahre auf 1 anwächst.

fx Lebende des Alters x nach Angabe der Mortalitätstafel.

[Die Bilanz wird für den 1. October eines bestimmten Jahres berechnet und dieser Zeitpunkt hier überall nur kurz der jetzige genannt. Nach dem Regulative vom 11. October 1833 und den später ergangenen Verfügungen die Professoren Witwenkasse betreffend wird die Pension in halbjährigen am 1. April und am 1. October jeden Jahres fälligen Raten ausbezahlt und erlischt bei Witwen mit dem Sterbemonate, welcher zu voll bezahlt wird. Mit Rücksicht hierauf ist für den wahrscheinlichen Jetztwerth Pm einer mit der Münzeinheit jährlich auszuzahlenden Witwenpension:]

$$fm . Pm = \tfrac{1}{24}\rho^{\frac{1}{2}}\{fm + f(m+\tfrac{1}{12}) + f(m+\tfrac{2}{12}) + \ldots + f(m+\tfrac{11}{12})\}$$
$$+ \tfrac{1}{24}\rho\{f(m+\tfrac{13}{12}) + f(m+\tfrac{14}{12}) + \ldots\ldots + f(m+\tfrac{23}{12})\}$$
$$+ \text{u. s. w.}$$

oder
$$fm . Pm = \tfrac{1}{24}\rho^{\frac{1}{2}} f(m+\tfrac{11}{12}) + \tfrac{1}{24}\rho f(m+\tfrac{23}{12}) + \tfrac{1}{24}\rho^{\frac{3}{2}} f(m+\tfrac{35}{12}) + \text{u. s. w.}$$

wofür genommen werden kann

$$= \rho^{\frac{1}{2}} f(m+\tfrac{11}{12}) + \rho^{\frac{1}{2}} f(m+\tfrac{23}{12}) + \text{u. s. w.}$$

Die Tafel gibt

$$fm . \varphi m = \rho f(m+1) + \rho\rho f(m+2) + \ldots$$

also

$$Pm = \rho^{-\frac{1}{2}} . \frac{f(m-\frac{11}{12})}{fm} . \varphi(m-\tfrac{11}{12}) = \rho^{-\frac{1}{2}} . g(m+\tfrac{11}{12})^{\frac{1}{2}} . \varphi(m-\tfrac{1}{12})$$

[wenn man die in obiger Tafel unter decr. in Einheiten der siebenten Decimale enthaltenen Werthe von $\log f(m-1) - \log fm$ mit $\log . gm$ bezeichnet. Eine zur Berechnung von Hülfstafeln etwas bequemere Formel entsteht, wenn man bei jeder ganzen Zahl n und jedem echten Bruche k für $f(n+k)$ die Grösse $(1-k)fn + kf(n+1)$ setzt, nemlich:]

$$Pm = A + B.\varphi m$$

wo $48A = 19\rho^{\frac{1}{2}} + 7\rho, \quad 48B = 5\rho^{-\frac{1}{2}} + 17 + 19\rho^{\frac{1}{2}} + 7\rho$

und nahe genug $A = \frac{1}{48}\rho^{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}, \quad B = \rho^{\frac{1}{16}}$

für $3\frac{1}{2}$ Proc. $\log\frac{1}{\rho} = 0.0149403$ Genau $A = 0.52998474, \quad \log B = 9.9956901$

die Näherungsformel gibt $A = 0.52996694, \quad \log B = 9.9956424$

Gerechnet war nach $\frac{1}{48} + \varphi m = P^0$

man kann also setzen $P = \rho^{\frac{1}{16}} P^0 - \frac{1}{48}(\rho^{\frac{1}{16}} - \rho^{\frac{1}{2}}) = P^0 - \frac{1}{16}(1-\rho)P^0 - \frac{1}{48}\frac{1}{16}(1-\rho)$

also für $3\frac{1}{2}$ Proc. $P = P^0 - \frac{1}{32}\frac{2}{33}P^0 - \frac{1}{1024}\frac{1}{33}$ für 4 Proc. $P = P^0 - \frac{1}{32}P^0 - \frac{1}{1024}$

Beispiel: Nr. 65. H.. 4 Proc. $m = 53.784$

$\log\varphi(m-\frac{1}{24})$ 1.05488	$\log\varphi m$ 1.04530	Verbesserung des frühern Werthes P^0
comp. $\log\rho^{\frac{1}{2}}$ 0.00426	$\log\rho^{\frac{1}{16}}$ . . -0.00497	$P^0 - \frac{1}{32}\frac{1}{33}P^0 - \frac{1}{1024}\frac{1}{33}$
	$B\varphi m$ 11.0492	$\frac{1}{48} + \varphi m = 11.7179$
$\log y(m+\frac{1}{48})^{\frac{3}{2}\frac{3}{2}}$ 0.00440	$\frac{1}{48}\rho^{\frac{1}{2}}$ 0.5260	$-0.1314\,5$
1.06354		$-0.0095\,5$
$P = 11.5755$.	11.5752	11.5769

Stehende Ehe.

Alter des Mannes M, der Frau m zur Zeit von Oct. 1. Sterblichkeitstafel lebende Männer vom Alter x gleich Fx. Werth der Witwenpension $= R - Q$.

[Nach den Statuten nimmt die Pension mit dem Ablaufe des Gnadenquartals ihren Anfang, wird in halbjährigen am 1. April und am 1. October jeden Jahres fälligen Raten ausgezahlt und erlischt mit dem Schlusse des Sterbemonats. Für den Zeitwerth $R - Q$ einer etwa eintretenden Witwenpension welche jährlich die Münzeinheit beträgt ist demnach

$$\begin{aligned}(R-Q).fm.Fm = {} & \tfrac{1}{16}\rho\left\{Fm - F(m+\tfrac{1}{2})\right\}\left\{f(m+\tfrac{1}{32}) + f(m+\tfrac{1}{16}) + f(m+\tfrac{3}{32})\right\} \\ & + \tfrac{1}{16}\rho\left\{Fm - F(m+\tfrac{1}{2})\right\}\left\{f(m+\tfrac{3}{32}) + f(m+\tfrac{1}{8}) + f(m+\tfrac{5}{32})\right\} \\ & + \tfrac{1}{16}\rho^{\frac{3}{2}}\left\{Fm - F(m+\tfrac{1}{2})\right\}\left\{f(m+\tfrac{5}{32}) + f(m+\tfrac{3}{16}) + f(m+\tfrac{7}{32})\right\} \\ & + \tfrac{1}{16}\rho^{\frac{3}{2}}\left\{Fm - F(m+\tfrac{1}{2})\right\}\left\{f(m+\tfrac{7}{32}) + f(m+\tfrac{1}{4}) + f(m+\tfrac{9}{32})\right\} \\ & + \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

oder:]

$$\begin{aligned}R.fm &= \tfrac{1}{2}\rho f(m+\tfrac{1}{32}) + \tfrac{1}{2}\rho^{\frac{3}{2}} f(m+\tfrac{3}{32}) + \tfrac{1}{2}\rho\rho f(m+\tfrac{5}{32}) + \ldots \\ &= \rho^{\frac{1}{2}} f(m+\tfrac{2}{32}) + \rho^{\frac{2}{2}} f(m+\tfrac{4}{32}) + \ldots \\ R &= \tfrac{1}{16}\rho^{\frac{1}{2}} + \rho^{\frac{1}{16}}\varphi m \\ Q.fm.Fm &= \rho^{\frac{1}{2}} f(m+\tfrac{3}{32}).F(M+\tfrac{1}{2}) + \rho^{\frac{1}{2}} f(m+\tfrac{5}{32})F(M+\tfrac{2}{2}) + \ldots\end{aligned}$$

Werthe der noch zu zahlenden Beiträge S.

[Regulativ vom 11. October 1833 und 24. November 1846. Jeder Theilnehmer an der Witwenkasse hat postnumerando jährlich am 17. September den Beitrag an den Rechnungsführer zu entrichten, und werden diese Beiträge von Michaelis zu Michaelis gerechnet. — Wenn ein Mitglied der Witwenkasse in der ersten Hälfte des Beitragsjahres, mithin in den Monaten vom October bis incl. März stirbt, so haben die Erben für das betreffende Jahr den Beitrag nicht mehr einzuzahlen; stirbt dagegen ein Mitglied in der zweiten Hälfte des Jahres, so muss von den Erben am 17. September des Sterbejahres noch der volle Beitrag entrichtet werden. — Die Aufkündigung von Seiten der Theilnehmer muss mittelst schriftlicher Erklärung vor dem 17. September des von Michaelis zu Michaelis laufenden Beitrittsjahres geschehen, der an diesem Tage fällig werdende jährliche Beitrag jedoch noch einmal zu voll bezahlt werden; wer diese Frist nicht einhält, muss für das ganze folgende Beitrittsjahr noch Zahlung leisten, bleibt dann aber bis dahin auch noch Mitglied.

Für den Zeitwerth S der jährlich als Beitrag zu zahlenden Münzeinheit erhält man daher:]

$$S.fm.Fm = \rho.fm.F(M+\tfrac{1}{2}) + \rho\rho.f(m+1).F(M+\tfrac{2}{2}) + \ldots$$

Bezeichnet man also

$$\psi(m, M).fm.Fm = \rho f(m+1)F(m+1) + \rho\rho f(m+2)F(m+2) + \ldots$$

so ist

$$Q = \frac{f(m-\frac{1}{16})}{fm}.\frac{F(M-\frac{1}{2})}{FM}.\rho^{\frac{1}{2}}\psi(m-\tfrac{1}{16},\ M-\tfrac{1}{2})$$

$$S = \frac{f(m-1)}{fm}.\frac{F(M-\frac{1}{2})}{FM}.\psi(m-1,\ M-\tfrac{1}{2})$$

Schreibt man noch

$$\frac{f(m-1)}{fm} = gm$$

$$\frac{F(M-1)}{FM} = GM$$

so wird

$$\begin{aligned}R &= \tfrac{1}{16}\rho^{\frac{1}{2}} + \rho^{\frac{1}{16}}\varphi m \\ Q &= g(m+\tfrac{1}{32})^{\frac{1}{16}}.G(M+\tfrac{1}{16})^{\frac{1}{2}}.\rho^{\frac{1}{2}}.\psi(m-\tfrac{1}{16},\ M-\tfrac{1}{2}) \\ S &= gm.G(M+\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}.\psi(m-1,\ M-\tfrac{1}{2})\end{aligned}$$

Beispiel: Nr. 138 Conradi. $M = 65.02$, $m = 46.08$

	4 Proc.	3½ Proc.
$\log \varphi m$	1.12875	1.15233
$\frac{3}{4}\log \rho$	−497	−436
	13.2979	14.0594
$\frac{3}{4}\rho^{\frac{3}{4}}$	0.0397	399
R =	13.3376	14.0993
für Q, $\log \psi$ . . .	0.80912	0.82183
$\log g G$ . .	+897	+897
$\frac{1}{4}\log \rho$ . . .	−426	−374
Q =	6.5137	6.7150
$R - Q$ =	6.8239	7.3843
für S, $\log \psi$ . . .	0.81325	0.82606
$\log g G$ . .	+1744	+1744
S =	6.7716	6.9743

$\log \rho = -0.0170333393$ für 4 Proc.
$\log \rho = -0.0149403498$ für 3½ Proc.

für Q			für S	
$\psi(46.04; 64.65)$ . .	18.61		$\psi(45.08; 64.52)$ . .	19.44
64	0.82079	0.83374	0.82251	0.83552
65	0.80284	0.81540	0.80470	0.81732
$g(46.56)$ . . .	25		$g(46.08)$ . . .	588
$G(65.33)$ . . .	872		$G(65.27)$ . . .	1156

Bei der Aufstellung dieser Tafeln hat Gauss sich seiner fünfstelligen Tafel zur Berechnung des Logarithmus der Summe von Grössen, die nicht selbst, sondern nur durch ihre Logarithmen gegeben sind, bedient, und deshalb bei jedem Zinsfuss und jedem Altersunterschiede mit der Bestimmung der Rentenwerthe für die höchsten Lebensjahre den Anfang gemacht. Die einzelnen Zahlenangaben können aus diesem Grunde auch abgesehen von der Verbesserung, welche die Sterblichkeitstafel durch erweiterte Erfahrungen der Preussischen Witwenkasse schon seither erlitten hat, um einzelne Einheiten in der fünften Decimale der Logarithmen ungenau sein.

Einige Rechenfehler, auf die ich durch Bildung der Quotienten zwischen den 3½ und 4 procentigen Rentenwerthen und der Differenzen der auf einander folgenden Quotienten aufmerksam geworden bin, habe ich beim Abdruck berichtigt. In Einheiten der fünften Decimale des Logarithmus betragen diese Fehler an den Orten ihres Entstehens: +20 für das 77. Jahr der Frau in deren Leibrentenwerthen bei 4 Proc.; ferner für das 71. und 93. Jahr des Mannes und die resp. Altersunterschiede der Frau von +1 und 0 Jahr bei 3½ Proc.; +10 für das 76. Jahr des Mannes in dessen Leibrentenwerth bei 3½ Proc. und ebenso viel für das 79. Jahr des Mannes und den Altersunterschied der Frau von −9 Jahr bei 4 Proc.; −10 für das 28. 68. 91. 94. und 94. Jahr des Mannes und die resp. Altersunterschiede von −8, −13, −11, −2, und −14 Jahr bei den resp. Procenten 4.4.3½.4 und 3½. Diese und einige andere Rechenfehler von geringerem Betrage haben auf die Bestimmung der Rentenwerthe für die zunächst jüngern Altersjahre einigen Einfluss gehabt, der allmälig und im äussersten Falle erst für das Ende des zweiten Jahrzehnt verschwindet. Die Angaben der einfachen Leibrenten in Zahlen sind aus den Logarithmen abgeleitet und haben nach der angegebenen Berichtigung derselben hier auch eine entsprechende Abänderung erfahren müssen.

Die bei den Anwendungen der Tafeln zu gebrauchenden Formeln und die Rechnungsbeispiele zu denselben sind den zerstreuten Notizen auf einzelnen Handblättchen entlehnt und hier durch einige Einschaltungen erläutert.

Schering.

ALLGEMEINE AUFLÖSUNG DER AUFGABE DIE THEILE EINER GEGEBENEN FLÄCHE AUF EINER ANDERN GEGEBENEN FLÄCHE SO ABZUBILDEN DASS DIE ABBILDUNG DEM ABGEBILDETEN IN DEN KLEINSTEN THEILEN ÄHNLICH WIRD

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS.

ALS BEANTWORTUNG DER VON DER KÖNIGLICHEN SOCIETÄT DER WISSENSCHAFTEN IN COPENHAGEN FÜR MDCCCXXII AUFGEGEBENEN PREISFRAGE.

'Ab his via sternitur ad maiora.'

Astronomische Abhandlungen herausgegeben von H. C. Schumacher.
Drittes Heft. Altona 1825.

Der Verfasser dieser Abhandlung hat die zweimalige Wahl der Aufgabe, die ihren Gegenstand ausmacht, als einen Beweis von der Wichtigkeit betrachten zu müssen geglaubt, welche die königliche Societät derselben beilegt, und ist dadurch aufgemuntert worden, dieser seine schon vor längerer Zeit gefundene Auflösung vorzulegen, wovon ihn sonst die späte von der Preisfrage erhaltene Kenntniss abgehalten haben würde. Er bedauert, dass der letztere Umstand ihn genöthigt hat, sich fast nur auf das Wesentliche und auf die Andeutung einiger näher liegenden Benutzungen für Kartenprojectionen und für die höhere Geodäsie zu beschränken, da er ohne die Nähe des Schlusstermins gern die Entwicklung einiger Nebenumstände noch weiter verfolgt, und die vielseitigen Anwendungen in der höheren Geodäsie ausführlich bearbeitet haben würde, welches er sich nun für eine andere Zeit und für einen andern Ort vorbehalten muss.

Im December 1822.

ALLGEMEINE AUFLÖSUNG DER AUFGABE

DIE THEILE EINER GEGEBENEN FLÄCHE

AUF EINER ANDERN GEGEBENEN FLÄCHE SO ABZUBILDEN

DASS DIE ABBILDUNG DEM ABGEBILDETEN

IN DEN KLEINSTEN THEILEN ÄHNLICH WIRD.

1.

Die Natur einer krummen Fläche wird durch eine Gleichung zwischen den sich auf jeden Punkt derselben beziehenden Coordinaten x, y, z bestimmt. Vermöge dieser Gleichung kann jede dieser drei veränderlichen Grössen wie eine Function der beiden andern betrachtet werden. Noch allgemeiner ist es, noch zwei neue veränderliche Grössen t, u einzuführen, und jede der x, y, z als eine Function von t und u darzustellen, wodurch, wenigstens allgemein zu reden, bestimmte Werthe von t und u allemal einem bestimmten Punkte der Oberfläche angehören, und umgekehrt.

2.

In Beziehung auf eine zweite krumme Fläche sollen X, Y, Z, T, U ähnliche Bedeutungen haben, wie resp. x, y, z, t, u in Beziehung auf die erstere.

3.

Die erste Fläche auf der zweiten *abbilden* heisst, ein Gesetz festsetzen, nach welchem einem jeden Punkte der ersten Fläche ein bestimmter Punkt der zweiten entsprechen soll. Dieses wird dadurch geschehen, dass T und U bestimmten Functionen der zwei veränderlichen Grössen t und u gleich gesetzt werden.

Insofern die Abbildung gewissen Bedingungen Genüge leisten soll, werden diese Functionen nicht mehr willkürlich sein dürfen. Indem dadurch auch X, Y, Z zu Functionen von t und u werden, müssen diese Functionen, neben der Bedingung, welche die Natur der zweiten Fläche vorschreibt, auch noch derjenigen Genüge leisten, welche in der Abbildung erfüllt werden soll.

4.

Die Aufgabe der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften schreibt vor, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich sein soll. Es kommt zuvörderst darauf an, diese Bedingung analytisch auszudrücken.

Aus der Differentiation der Functionen von t, u, durch welche x, y, z, X, Y, Z ausgedrückt werden, mögen folgende Gleichungen hervorgehen:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= a\,\mathrm{d}t + a'\,\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}y &= b\,\mathrm{d}t + b'\,\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}z &= c\,\mathrm{d}t + c'\,\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}X &= A\,\mathrm{d}t + A'\,\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}Y &= B\,\mathrm{d}t + B'\,\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}Z &= C\,\mathrm{d}t + C'\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

Die vorgeschriebene Bedingung erfordert, erstlich, dass alle von Einem Punkte der ersten Fläche ausgehende und in ihr liegende unendlich kleine Linien den ihnen entsprechenden Linien der zweiten Fläche proportional sind, und zweitens, dass jene unter sich dieselben Winkel machen, wie diese.

Ein solches Linear-Element auf der ersten Fläche wird

$$= \sqrt{((aa+bb+cc)\mathrm{d}t^2 + 2(aa'+bb'+cc')\mathrm{d}t.\mathrm{d}u + (a'a'+b'b'+c'c')\mathrm{d}u^2)}$$

und das entsprechende auf der zweiten Fläche

$$= \sqrt{((AA+BB+CC)\mathrm{d}t^2 + 2(AA'+BB'+CC')\mathrm{d}t.\mathrm{d}u + (A'A'+B'B'+C'C')\mathrm{d}u^2)}$$

Sollen beide, unabhängig von $\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}u$, in einem bestimmten Verhältniss zu einander stehen, so müssen offenbar die drei Grössen

$$aa+bb+cc, \quad aa'+bb'+cc', \quad a'a'+b'b'+c'c'$$

respective den drei folgenden proportional sein:

$$AA+BB+CC, \quad AA'+BB'+CC', \quad A'A'+B'B'+C'C'$$

Wenn den Endpunkten eines zweiten Elements auf der ersten Fläche die Werthe

$$t, u \quad \text{und} \quad t+\delta t, u+\delta u$$

entsprechen, so ist der Cosinus des Winkels, welchen dasselbe mit dem ersten Elemente macht,

$$= \frac{(a\,\mathrm{d}t+a'\,\mathrm{d}u)(a\delta t+a'\delta u)+(b\,\mathrm{d}t+b'\,\mathrm{d}u)(b\delta t+b'\delta u)+(c\,\mathrm{d}t+c'\,\mathrm{d}u)(c\delta t+c'\delta u)}{\sqrt{((a\,\mathrm{d}t+a'\,\mathrm{d}u)^2+(b\,\mathrm{d}t+b'\,\mathrm{d}u)^2+(c\,\mathrm{d}t+c'\,\mathrm{d}u)^2)}.\sqrt{((a\delta t+a'\delta u)^2+(b\delta t+b'\delta u)^2+(c\delta t+c'\delta u)^2)}}$$

und für den Cosinus des Winkels zwischen den correspondirenden Elementen auf der zweiten Fläche ergibt sich ein ganz ähnlicher Ausdruck, wenn nur $a, b, c, a', b' c'$ in A, B, C, A', B', C' verwandelt werden. Offenbar werden beide Ausdrücke einander gleich, wenn die obige Proportionalität Statt findet, und die zweite Bedingung wird daher schon mit in der ersten begriffen, welches auch bei einigem Nachdenken von selbst klar ist.

Der analytische Ausdruck der Bedingung unserer Aufgabe ist demnach, dass

$$\frac{AA+BB+CC}{aa+bb+cc} = \frac{AA'+BB'+CC'}{aa'+bb'+cc'} = \frac{A'A'+B'B'+C'C'}{a'a'+b'b'+c'c'}$$

werden muss, welches eine endliche Function von t und u sein wird, die wir $= mm$ setzen wollen. Es drückt dann m das Verhältniss aus, in welchem die Lineargrössen auf der ersten Fläche in ihrer Abbildung auf der zweiten vergrössert oder verkleinert werden (je nachdem m grösser oder kleiner ist als 1). Dieses Verhältniss wird, allgemein zu reden, nach den Stellen verschieden sein: in dem speciellen Falle, wo m constant ist, wird eine vollkommene Ähnlichkeit auch in den endlichen Theilen, und wenn überdiess $m = 1$ ist, wird eine vollkommene Gleichheit Statt finden, und die eine Fläche sich auf die andere abwickeln lassen.

5.

Indem wir Kürze halber

$$(aa+bb+cc)\mathrm{d}t^2 + 2(aa'+bb'+cc')\mathrm{d}t.\mathrm{d}u + (a'a'+b'b'+c'c')\mathrm{d}u^2 = \omega$$

setzen, bemerken wir, dass die Differentialgleichung $\omega = 0$ *zwei* Integrationen zulassen wird. Indem man nemlich das Trinomium ω in zwei, in Beziehung auf

$\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}u$ lineare, Factoren zerlegt, muss entweder der eine oder der andere Factor $= 0$ werden, welches zwei verschiedene Integrationen geben wird. Die eine Integration wird der Gleichung

$$0 = (aa+bb+cc)\mathrm{d}t + \{a\alpha+b\beta+c\gamma+i\sqrt{((aa+bb+cc)(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)-(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2)}\}\mathrm{d}u$$

entsprechen (wo i Kürze halber für $\sqrt{-1}$ geschrieben ist, indem man sich leicht überzeugt, dass der irrationale Theil des Ausdrucks imaginär werden muss); die andere einer ganz ähnlichen Gleichung, wenn nur i mit $-i$ vertauscht wird. Ist also das Integral der erstern Gleichung dieses:

$$p+iq = \text{Const.}$$

wo p und q reelle Functionen von t und u bedeuten, so wird das andere Integral

$$p-iq = \text{Const.}$$

und die Natur der Sache wird es mit sich bringen, dass

$$(\mathrm{d}p+i\mathrm{d}q).(\mathrm{d}p-i\mathrm{d}q) \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}p^2+\mathrm{d}q^2$$

ein Factor von ω, oder

$$\omega = n(\mathrm{d}p^2+\mathrm{d}q^2)$$

werden muss, wo n eine endliche Function von t und u sein wird.

Wir wollen nun das Trinomium, in welches

$$\mathrm{d}X^2+\mathrm{d}Y^2+\mathrm{d}Z^2$$

übergeht, wenn für $\mathrm{d}X$, $\mathrm{d}Y$, $\mathrm{d}Z$ ihre Werthe durch T, U, $\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}U$ substituirt werden, durch Ω bezeichnen, und annehmen, dass auf ähnliche Weise, wie vorher, die beiden Integrale der Gleichung $\Omega = 0$ diese seien:

$$P+iQ = \text{Const.}$$
$$P-iQ = \text{Const.}$$

und

$$\Omega = N(\mathrm{d}P^2+\mathrm{d}Q^2)$$

wo P, Q, N reelle Functionen von T und U bedeuten werden.

Die Integrationen lassen sich (die allgemeinen Schwierigkeiten des Integrirens bei Seite gesetzt) offenbar vor der Auflösung unserer Hauptaufgabe ausführen.

Wenn nun für T, U solche Functionen von t, u substituirt werden, wobei die Bedingung unsrer Hauptaufgabe erfüllt wird, so geht Ω in $mm\omega$ über, und es wird

$$\frac{(\mathrm{d}P+i\mathrm{d}Q).(\mathrm{d}P-i\mathrm{d}Q)}{(\mathrm{d}p+i\mathrm{d}q).(\mathrm{d}p-i\mathrm{d}q)} = \frac{mmn}{N}$$

Man sieht aber leicht, dass der Zähler im ersten Theile dieser Gleichung durch den Nenner nur dann theilbar sein kann, wenn

entweder $\mathrm{d}P+i\mathrm{d}Q$ durch $\mathrm{d}p+i\mathrm{d}q$, und $\mathrm{d}P-i\mathrm{d}Q$ durch $\mathrm{d}p-i\mathrm{d}q$,
oder $\mathrm{d}P+i\mathrm{d}Q$ durch $\mathrm{d}p-i\mathrm{d}q$, und $\mathrm{d}P-i\mathrm{d}Q$ durch $\mathrm{d}p+i\mathrm{d}q$

theilbar ist. Im erstern Falle wird demnach $\mathrm{d}P+i\mathrm{d}Q$ verschwinden, wenn $\mathrm{d}p+i\mathrm{d}q = 0$, oder $P+iQ$ wird constant werden, wenn $p+iq$ constant angenommen wird, d. i. $P+iQ$ wird bloss Function von $p+iq$ sein, und eben so $P-iQ$ Function von $p-iq$. Im andern Falle wird $P+iQ$ Function von $p-iq$, und $P-iQ$ Function von $p+iq$ sein. Es ist leicht einzusehen, dass diese Folgerungen auch umgekehrt gelten, nemlich dass, wenn für $P+iQ$, $P-iQ$ Functionen von $p+iq$, $p-iq$ (entweder respective, oder verkehrt) angenommen werden, die endliche Theilbarkeit des Ω durch ω, und sonach die oben erforderlich gefundene Proportionalität Statt haben wird.

Man überzeugt sich übrigens leicht, dass wenn z. B.

$$P+iQ = f(p+iq)$$
$$P-iQ = f'(p-iq)$$

gesetzt werden, die Beschaffenheit der Function f' schon durch die von f bedingt wird. Wenn nemlich unter den constanten Grössen, welche letztere etwa involviren mag, keine andere als reelle befindlich sind, so wird die andere f' mit der f ganz identisch sein müssen, damit jedesmal reellen Werthen von p, q reelle Werthe von P, Q entsprechen; im entgegengesetzten Falle wird sich f' von f nur dadurch unterscheiden, dass in den imaginären Elementen von f statt i überall das entgegengesetzte $-i$ gesetzt werden muss.

Man hat hiernächst

$$P = \tfrac{1}{2}f(p+iq)+\tfrac{1}{2}f'(p-iq)$$
$$iQ = \tfrac{1}{2}f(p+iq)-\tfrac{1}{2}f'(p-iq)$$

oder, was dasselbe ist, indem die Function f ganz willkürlich angenommen wird (nach Gefallen mit Inbegriff constanter imaginärer Elemente), wird P dem reellen und iQ (bei der zweiten Auflösung $-iQ$) dem imaginären Theile von $f(p+iq)$ gleich gesetzt, und hieraus sodann vermittelst der Elimination T und U in der Gestalt von Functionen von t und u dargestellt werden. Hiedurch ist die vorgegebene Aufgabe ganz allgemein und vollständig aufgelöst.

6.

Wenn $p'+iq'$ eine beliebige bestimmte Function von $p+iq$ vorstellt (indem p', q' reelle Functionen von p, q sind), so sieht man leicht, dass auch

$$p'+iq' = \text{Const.} \quad \text{und} \quad p'-iq' = \text{Const.}$$

die Integrale der Differentialgleichung $\omega = 0$ darstellen: in der That werden jene mit den obigen

$$p+iq = \text{Const.} \quad \text{und} \quad p-iq = \text{Const.}$$

resp. ganz gleichbedeutend sein. Eben so werden die Integrale der Differentialgleichung $\Omega = 0$

$$P'+iQ' = \text{Const.} \quad \text{und} \quad P'-iQ' = \text{Const.}$$

mit den obigen

$$P+iQ = \text{Const.} \quad \text{und} \quad P-iQ = \text{Const.}$$

ganz gleichbedeutend sein, wenn $P'+iQ'$ eine beliebige bestimmte Function von $P+iQ$ vorstellt (indem P', Q' reelle Functionen von P, Q sind). Es erhellet hieraus, dass in der allgemeinen Auflösung unsrer Aufgabe, welche wir im vorhergehenden Artikel gegeben haben, auch p', q' die Stelle von p, q; und P', Q' die Stelle von P, Q resp. vertreten können. Wenn gleich die Allgemeinheit der Auflösung durch eine solche Abänderung nichts gewinnt, so kann doch zuweilen für die Anwendung eine Form zu diesem, die andere zu jenem Zweck bequemer sein.

7.

Wenn die Functionen, welche aus der Differentiation der willkürlichen Functionen f, f' entspringen, durch φ und φ' resp. bezeichnet werden, so dass $\mathrm{d}.f\upsilon = \varphi\upsilon.\mathrm{d}\upsilon$, $\mathrm{d}.f'\upsilon = \varphi'\upsilon.\mathrm{d}\upsilon$, so wird in Folge unsrer allgemeinen Auflösung

$$\frac{\mathrm{d}P+i\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p+i\mathrm{d}q} = \varphi(p+iq), \quad \frac{\mathrm{d}P-i\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p-i\mathrm{d}q} = \varphi'(p-iq)$$

also

$$\frac{mmn}{N} = \varphi(p+iq).\varphi'(p-iq)$$

Das Vergrösserungsverhältniss bestimmt sich daher durch die Formel

$$m = \sqrt{\left\{\frac{\mathrm{d}p^2+\mathrm{d}q^2}{\omega}.\frac{\Omega}{\mathrm{d}P^2+\mathrm{d}Q^2}.\varphi(p+iq).\varphi'(p-iq)\right\}}$$

8.

Wir wollen nun noch unsre allgemeine Auflösung mit einigen Beispielen erläutern, wodurch sowohl die Art der Anwendung, als die Beschaffenheit einiger dabei noch in Betracht kommenden Umstände am besten ins Licht gesetzt werden wird.

Es seien zuvörderst beide Flächen Ebnen, wo wir

$$x = t, \quad y = u, \quad z = 0$$
$$X = T, \quad Y = U, \quad Z = 0$$

werden setzen können. Die Differentialgleichung

$$\omega = \mathrm{d}t^2+\mathrm{d}u^2 = 0$$

gibt hier die beiden Integrale

$$t+iu = \text{Const.}, \quad t-iu = \text{Const.}$$

und eben so sind die beiden Integrale der Gleichung $\Omega = \mathrm{d}T^2+\mathrm{d}U^2 = 0$, folgende:

$$T+iU = \text{Const.}, \quad T-iU = \text{Const.}$$

Die beiden allgemeinen Auflösungen der Aufgabe sind demnach:

I. $T+iU = f(t+iu)$, $T-iU = f'(t-iu)$
II. $T+iU = f(t-iu)$, $T-iU = f'(t+iu)$

Dieses Resultat lässt sich auch so ausdrücken: Indem die Charakteristik f eine beliebige Function bedeutet, hat man den reellen Theil von $f(x+iy)$ für X, und den imaginären Theil, mit Weglassung des Factors i, entweder für Y oder für $-Y$ anzunehmen.

Gebraucht man die Charakteristiken φ, φ' in der Bedeutung des Art. 7 und setzt

$$\varphi(x+iy) = \xi+i\eta, \quad \varphi'(x-iy) = \xi-i\eta$$

wo offenbar ξ und η reelle Functionen von x und y sein werden, so hat man, in der *ersten* Auflösung,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X+i\mathrm{d}Y &= (\xi+i\eta)(\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y) \\ \mathrm{d}X-i\mathrm{d}Y &= (\xi-i\eta)(\mathrm{d}x-i\mathrm{d}y) \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= \xi\mathrm{d}x-\eta\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}Y &= \eta\mathrm{d}x+\xi\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Macht man nun

$$\begin{aligned} \xi &= \sigma\,.\cos\gamma, \quad \eta &= \sigma\,.\sin\gamma \\ \mathrm{d}x &= \mathrm{d}s\,.\cos g, \quad \mathrm{d}y &= \mathrm{d}s\,.\sin g \\ \mathrm{d}X &= \mathrm{d}S.\cos G, \quad \mathrm{d}Y &= \mathrm{d}S.\sin G \end{aligned}$$

so dass $\mathrm{d}s$ ein Linearelement in der ersten Ebne, g dessen Neigung gegen die Abscissenlinie, $\mathrm{d}S$ das correspondirende Linearelement in der zweiten Ebne und G dessen Neigung gegen die Abscissenlinie bedeutet, so geben die obigen Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S.\cos G &= \sigma.\mathrm{d}s.\cos(g+\gamma) \\ \mathrm{d}S.\sin G &= \sigma.\mathrm{d}s.\sin(g+\gamma) \end{aligned}$$

und folglich, wenn man, was erlaubt ist, σ als positiv betrachtet,

$$\mathrm{d}S = \sigma.\mathrm{d}s, \quad G = g+\gamma$$

Man sieht also (in Übereinstimmung mit Art. 7), dass σ das Verhältniss der Vergrösserung des Elements $\mathrm{d}s$ in der Darstellung $\mathrm{d}S$ vorstellt, und, wie gehörig, von g unabhängig ist; und eben so zeigt die Unabhängigkeit des Winkels γ von g, dass alle von einem Punkte ausgehende Linearelemente in der ersten Ebne

durch Elemente in der zweiten Ebne dargestellt werden, die unter sich und, wie wir hinzufügen können, *in demselben Sinn*, dieselben Winkel bilden, wie jene.

Wählt man für f eine linearische Function, so dass $f\upsilon = A+B\upsilon$, wo die constanten Coëfficienten von der Form sind

$$A = a+bi, \quad B = c+ei$$

so wird $\varphi\upsilon = B = c+ei$

also $\sigma = \sqrt{(cc+ee)}, \quad \gamma = \mathrm{Arc.tang}\frac{e}{c}$

Das Vergrösserungsverhältniss ist folglich in allen Punkten constant, und die Darstellung dem Dargestellten durchaus ähnlich.

Für jede andere Function f wird (wie man leicht beweisen kann) das Vergrösserungsverhältniss nicht constant sein, und die Ähnlichkeit also nur in den kleinsten Theilen Statt finden können.

Sind die Plätze, welche einer bestimmten Anzahl von gegebnen Punkten der ersten Ebne in der Darstellung entsprechen sollen, vorgeschrieben, so kann man leicht nach der gemeinen Interpolationsmethode die einfachste algebraische Function f finden, wodurch diese Bedingung erfüllt wird. Bezeichnet man nemlich die Werthe von $x+iy$ für die gegebenen Punkte durch a, b, c u. s. w., und die correspondirenden Werthe von $X+iY$ durch A, B, C u. s. w., so wird man

$$f\upsilon = \tfrac{(\upsilon-b)(\upsilon-c)\ldots}{(a-b)(a-c)\ldots}.A+\tfrac{(\upsilon-a)(\upsilon-c)\ldots}{(b-a)(b-c)\ldots}.B+\tfrac{(\upsilon-a)(\upsilon-b)\ldots}{(c-a)(c-b)\ldots}.C+\text{ etc.}$$

setzen müssen, welches eine algebraische Function von υ ist, deren Ordnung um eine Einheit kleiner ist, als die Anzahl der vorgegebnen Punkte. Für zwei Punkte, wo die Function linearisch wird, findet folglich vollkommene Ähnlichkeit Statt.

Man kann von diesem Verfahren in der Geodäsie eine nützliche Anwendung machen, um eine auf mittelmässige Messungen gegründete Karte, die im kleinen Detail gut, aber im Ganzen etwas verzerrt ist, in eine bessere zu verwandeln, wenn man die richtige Lage einer Anzahl von Punkten kennt. Es versteht sich jedoch, dass man bei einer solchen Umformung nicht viel über die Gegend hinausgehen darf, welche letztere Punkte umfassen.

Wenn man die *zweite* Auflösung auf dieselbe Art durchführt, so findet man, dass der ganze Unterschied nur darin besteht, dass die Ähnlichkeit eine verkehrte ist, indem alle Elemente in der Darstellung zwar eben so grosse Winkel mit einander machen, wie im Dargestellten, aber in verkehrtem Sinn, so dass

dort rechts liegt, was hier links ist. Dieser Unterschied ist aber kein wesentlicher, und verschwindet, wenn man in der einen Ebne diejenige Seite, welche man vorher als obere betrachtete, zur untern macht. Diese letztre Bemerkung lässt sich übrigens allemal in Anwendung bringen, wenn die eine der beiden Flächen eine Ebne ist, daher wir in den folgenden Beispielen dieser Art uns bloss auf die erste Auflösung beschränken können.

9.

Wir wollen nun (als zweites Beispiel) die Darstellung der Fläche eines geraden Kegels in der Ebne betrachten. Als Gleichung der erstern nehmen wir an

$$xx+yy-kkzz=0$$

wo wir ferner

$$x=kt\cos u$$
$$y=kt\sin u$$
$$z=t$$

und wie vorhin $Y=T$, $Y=U$, $Z=0$ setzen.

Die Differentialgleichung

$$\omega=(kk+1)\mathrm{d}t^2+kktt\mathrm{d}u^2=0$$

gibt hier die beiden Integrale

$$\log t\pm i\sqrt{\tfrac{kk}{kk+1}}.u=\text{Const.}$$

Wir haben demnach die Auflösung

$$X+iY=f(\log t+i\sqrt{\tfrac{kk}{kk+1}}.u)$$
$$X-iY=f'(\log t-i\sqrt{\tfrac{kk}{kk+1}}.u)$$

d. i. es wird, indem f eine willkürliche Function bedeutet, für X der reelle Theil von

$$f(\log t+i\sqrt{\tfrac{kk}{kk+1}}.u)$$

und für Y der imaginäre, nach Weglassung des Factors i, angenommen.

Setzt man für f z. B. eine Exponentialgrösse, nemlich

$$fv=he^v$$

wo h constant ist und e die Basis der hyperbolischen Logarithmen bedeutet, so hat man die einfachste Darstellung

$$X=ht\cos\sqrt{\tfrac{kk}{kk+1}}.u, \qquad Y=ht\sin\sqrt{\tfrac{kk}{kk+1}}.u$$

Die Anwendung der Formeln des 7. Art. gibt hier

$$n=(kk+1)tt, \qquad N=1$$

und, da $\varphi v=\varphi' v=he^v$,

$$\varphi(\log t+i\sqrt{\tfrac{kk}{kk+1}}.u).\varphi'(\log t-i\sqrt{\tfrac{kk}{kk+1}}.u)=hhtt$$

folglich

$$m=\tfrac{h}{\sqrt{(kk+1)}}$$

also constant. Macht man also noch

$$h=\sqrt{(kk+1)}$$

so wird die Darstellung eine vollkommne Abwicklung.

10.

Es sei drittens die Kugelfläche, deren Halbmesser $=a$, in der Ebne darzustellen. Wir setzen hier

$$x=a\cos t.\sin u$$
$$y=a\sin t.\sin u$$
$$z=a\cos u$$

wodurch wir erhalten

$$\omega=aa\sin u^2\mathrm{d}t^2+aa\mathrm{d}u^2$$

Die Differentialformel $\omega=0$ gibt folglich

$$\mathrm{d}t\mp i.\tfrac{\mathrm{d}u}{\sin u}=0$$

und deren Integration

$$t\pm i\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}u=\text{Const.}$$

Es wird daher, wenn wir wiederum durch die Charakteristik f eine willkürliche Function andeuten, X dem reellen und iY dem imaginären Theile von

$$f(t+i\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}u)$$

gleich gesetzt werden müssen. Wir wollen ein Paar specielle Fälle dieser allgemeinen Auflösung anführen.

Wählt man für f eine lineäre Function, indem man $f\upsilon = k\upsilon$ setzt, so wird

$$X = kt, \quad Y = k\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}u$$

Auf die Erde angewandt, ist dies, wenn man t die geographische Länge, $90^0 - u$ die Breite bedeuten lässt, offenbar mit MERCATORS Projection einerlei. Für das Vergrösserungsverhältniss geben hier die Formeln des 7. Artikels

$$m = \frac{k}{a\sin u}$$

Nimmt man für f eine imaginäre Exponentialfunction, und zwar zuerst die einfachste $f\upsilon = ke^{i\upsilon}$, so wird

$$f(t+i\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}u) = ke^{\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}u+it} = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u(\cos t+i\sin t)$$

und

$$X = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u.\cos t, \quad Y = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u.\sin t$$

welches, wie man leicht sieht, die stereographische Polarprojection ist.

Setzt man allgemeiner $f\upsilon = ke^{i\lambda\upsilon}$, so wird

$$X = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u^{\lambda}.\cos\lambda t, \quad Y = k\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u^{\lambda}.\sin\lambda t$$

Für das Vergrösserungsverhältniss erhalten wir hier

$$n = aa\sin u^2, \quad N = 1, \quad \varphi\upsilon = i\lambda ke^{i\lambda\upsilon}$$

und hieraus

$$m = \frac{\lambda k\operatorname{tang}\frac{1}{2}u^{\lambda}}{a\sin u}$$

Man sieht, dass hier die Darstellung aller Punkte, für welche u constant ist, in Einen Kreis, und die Darstellung aller Punkte, für welche t constant ist, in Eine gerade Linie fällt, wie auch, dass die allen verschiedenen Werthen von u angehörigen Kreise concentrisch sind. Dies gibt eine sehr zweckmässige Kartenprojection, wenn nur ein Theil der Kugelfläche darzustellen ist, und man thut dann am besten, λ so zu wählen, dass das Vergrösserungsverhältniss für die

äussersten Werthe von u gleich gross wird, wodurch es gegen die Mitte zu seinen kleinsten Werth erhält. Sind diese äussersten Werthe von u diese u^0 und u', so wird man demnach setzen müssen:

$$\lambda = \frac{\log\sin u' - \log\sin u^0}{\log\operatorname{tang}\frac{1}{2}u' - \log\operatorname{tang}\frac{1}{2}u^0}$$

Die Blätter von Herrn Professor HARDING's Sternkarten Nr. 19—26 sind nach dieser Projection gezeichnet.

11.

Man kann die allgemeine Auflösung für das im vorhergehenden Artikel behandelte Beispiel noch in einer andern Form aufstellen, die wir ihrer Eleganz wegen hier noch beifügen zu müssen glauben.

In Folge des im 6. Art. Vorgetragenen wird, da

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u(\cos t+i\sin t)$$

eine Function von

$$t+i\log\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}u$$

ist, und

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u(\cos t+i\sin t) = \frac{\sin u\cos t+i\sin u\sin t}{1+\cos u} = \frac{x+iy}{a+z}$$

die allgemeine Auflösung auch durch

$$X+iY = f\frac{x+iy}{a+z}, \quad X-iY = f'\frac{x-iy}{a+z}$$

dargestellt werden können, d. i. X muss dem reellen und iY dem imaginären Theil von $f\frac{x+iy}{a+z}$ gleich gesetzt werden, indem f eine willkürliche Function bezeichnet. Anstatt $f\frac{x+iy}{a+z}$ kann man, wie man leicht sieht, auch eine willkürliche Function von $\frac{y+iz}{a+x}$, oder von $\frac{z+ix}{a+y}$ nehmen.

12.

Wir wollen viertens die Darstellung der Oberfläche des Revolutions-Ellipsoids in der Ebne betrachten. Es seien a und b die beiden halben Hauptaxen des Ellipsoids, so dass

$$x = a\cos t\sin u$$
$$y = a\sin t\sin u$$
$$z = b\cos u$$

gesetzt werden kann. Hier wird also

$$\omega = aa\sin u^2\,\mathrm{d}t^2 + (aa\cos u^2 + bb\sin u^2)\,\mathrm{d}u^2$$

und die Differentialformel $\omega = 0$ gibt, wenn wir Kürze halber $\sqrt{(1-\frac{bb}{aa})} = \varepsilon$ setzen (insofern die Revolutionshalbaxe $b < a$),

$$0 = \mathrm{d}t \mp i\,\mathrm{d}u \,.\, \sqrt{(\mathrm{cotang}\,u^2 + 1 - \varepsilon\varepsilon)}$$

Setzt man hier

$$\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon)}\,.\,\mathrm{tang}\,u = \mathrm{tang}\,w$$

wo, bei der Anwendung auf das Erdsphäroid, $90^0 - w$ die geographische Breite und t die Länge vorstellen wird, so verwandelt sich diese Gleichung in

$$0 = \mathrm{d}t \mp i\,\mathrm{d}w \,.\, \frac{1-\varepsilon\varepsilon}{(1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2)\sin w}$$

deren Integration

$$\text{Const.} = t \mp i \log . \left\{ \mathrm{cotang}\,\tfrac{1}{2}w \,.\, \left(\frac{1-\varepsilon\cos w}{1+\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \right\}$$

gibt. Man hat daher, indem f eine willkürliche Function bedeutet, für X den reellen und für iY den imaginären Theil von

$$f\left(t + i \log \left\{ \mathrm{cotang}\,\tfrac{1}{2}w \,.\, \left(\frac{1-\varepsilon\cos w}{1+\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \right\}\right)$$

zu nehmen. — Wählt man für f eine lineäre Function, d. i. $f\upsilon = k\upsilon$, so wird

$$X = kt, \quad Y = k \log \mathrm{cotang}\,\tfrac{1}{2}w - \tfrac{1}{2}k\varepsilon \log \frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w}$$

welches eine der Mercatorschen analoge Projection gibt.

Nimmt man hingegen für f eine imaginäre Exponentialfunction $f\upsilon = ke^{i\lambda\upsilon}$, so wird

$$X = k\,.\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}w^{\lambda}\,.\,\left(\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon\lambda}\,.\,\cos\lambda t, \quad Y = k\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}w^{\lambda}\,.\,\left(\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon\lambda}\,.\,\sin\lambda t$$

welches, wenn man $\lambda = 1$ setzt, eine der stereographischen Polarprojection analoge, und allgemein, eine zur Darstellung eines Theils der Erdoberfläche, insofern man auf die Abplattung Rücksicht nehmen soll, sehr zweckmässige Projection gibt.

Was über den andern Fall, wo $b > a$ ist, zu sagen ist, lässt sich zwar leicht aus dem vorhergehenden unmittelbar ableiten, wo, wenn man dieselben

Bezeichnungen beibehält, ε imaginär, aber $\left(\frac{1+\varepsilon\cos w}{1-\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon}$ doch wieder reell wird. Der Vollständigkeit wegen wollen wir jedoch die Formeln für diesen Fall noch besonders beifügen, und gleich Anfangs $\sqrt{(\frac{bb}{aa}-1)} = \eta$ setzen. Man hat dann w durch die Gleichung

$$\sqrt{(1+\eta\eta)}\,.\,\mathrm{tang}\,u = \mathrm{tang}\,w$$

zu bestimmen, und die Differentialgleichung

$$0 = \mathrm{d}t \mp i\,\mathrm{d}w \,.\, \frac{1+\eta\eta}{(1+\eta\eta\cos w^2)\sin w}$$

wird das Integral

$$\text{Const.} = t \mp i(\log \mathrm{cotang}\,\tfrac{1}{2}w + \eta\,\mathrm{Arc\,tang.}\,\eta\cos w)$$

geben, so dass X für den reellen und iY für den imaginären Theil von

$$f(t + i(\log \mathrm{cotang}\,\tfrac{1}{2}w + \eta\,\mathrm{Arc\,tang.}\,\eta\cos w))$$

wird genommen werden müssen. Die Gegenstücke der beiden obigen speciellen Anwendungen ergeben sich hieraus von selbst. Nach der ersten wird

$$X = kt, \quad Y = k\log\mathrm{cotang}\,\tfrac{1}{2}w + \eta k\,\mathrm{Arc\,tang.}\,\eta\cos w$$

nach der andern

$$X = k\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}w^{\lambda}\,.\,e^{-\eta\lambda\,\mathrm{Arc\,tang.}\,\eta\cos w}\,.\,\cos\lambda t$$
$$Y = k\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}w^{\lambda}\,.\,e^{-\eta\lambda\,\mathrm{Arc\,tang.}\,\eta\cos w}\,.\,\sin\lambda t$$

gesetzt werden müssen.

13.

Als letztes Beispiel wollen wir die allgemeine Darstellung der Oberfläche des Umdrehungs-Ellipsoids auf der Kugelfläche betrachten. Für jenes wollen wir die Bezeichnungen des vorhergehenden Artikels beibehalten, den Halbmesser der Kugelfläche $= A$, und

$$X = A\cos T\sin U$$
$$Y = A\sin T\sin U$$
$$Z = A\cos U$$

setzen. Wenn man hier die allgemeine Auflösung des 5. Artikels zur Anwendung bringt, so findet man, dass, indem f eine willkürliche Function bedeutet, T dem reellen und $i \log \operatorname{cotang} \frac{1}{2} U$ dem imaginären Theile von

$$f(t + i \log |\operatorname{cotang} \tfrac{1}{2} w . (\tfrac{1-\varepsilon \cos w}{1+\varepsilon \cos w})^{\frac{1}{2}\varepsilon}|)$$

gleich gesetzt werden muss*).

Die einfachste Auflösung wird sein, $f\upsilon = \upsilon$ zu setzen, wodurch

$$T = t, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} U = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w . (\tfrac{1+\varepsilon \cos w}{1-\varepsilon \cos w})^{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

wird. Dies bietet eine für die höhere Geodäsie überaus brauchbare Transformation dar, von welcher Benutzung wir jedoch hier nur einiges und nur kurz andeuten können. Wenn nemlich auf der Oberfläche des Ellipsoids und der Kugel diejenigen Punkte als einander correspondirend angesehen werden, die einerlei Länge haben, und deren Breiten resp. $90^0 - w$, $90^0 - U$, vermöge der angeführten Gleichung zusammenhangen, so entspricht einem System von, verhältnissmässig, kleinen Dreiecken (und das werden diejenigen immer sein, die zur wirklichen Messung dienen können), die auf der Oberfläche des Sphäroids durch kürzeste Linien gebildet werden, auf der Kugelfläche ein System von Dreiecken, deren Winkel den correspondirenden auf dem Sphäroid *genau* gleich sind, und deren Seiten von grössten Kreisbogen so wenig abweichen, dass sie in den meisten Fällen, wo nicht die alleräusserste Schärfe verlangt wird, als damit zusammenfallend betrachtet werden können, so wie auch da, wo die grösste Genauigkeit gefordert wird, die Abweichung vom grössten Kreise leicht mit aller nöthigen Schärfe durch einfache Formeln sich berechnen lässt. Man kann daher das ganze System, nachdem man zuerst eine Dreiecksseite auf die Kugelfläche gehörig übertragen hat, ganz so, als wenn es auf dieser selbst läge, vermittelst der Winkel berechnen, nöthigenfalls mit der eben angedeuteten Modification, für alle Punkte des Systems die Werthe von T und U bestimmen, und von letztern auf die correspondirenden Werthe von w (am einfachsten vermittelst einer äusserst leicht zu construirenden Hülfstafel) zurückgehen.

*) Wir übergehen hier theils die zweite Auflösung des 5. Artikels, die sich von der obigen nur durch Vertauschung von $-T$ gegen $+T$ unterscheiden und einer verkehrten Darstellung entsprechen würde, theils den Fall eines länglichen Ellipsoids, dessen Behandlung nach dem, was im vorigen Art. vorgekommen, sich aus der des abgeplatteten von selbst ergibt.

Insofern ein Dreiecksnetz sich doch immer nur über einen sehr mässigen Theil der Erdoberfläche erstreckt, lässt sich der erwähnte Zweck noch vollkommner erreichen, wenn man die allgemeine Auflösung noch etwas generalisirt, und nicht $f\upsilon = \upsilon$, sondern $f\upsilon = \upsilon + Const.$ annimmt. Offenbar würde hiedurch gar nichts gewonnen, wenn man dieser Constante einen reellen Werth beilegte, weil dadurch lediglich T und t um diese Constante verschieden, also nur die Anfangspunkte der Längen ungleich werden würden. Allein ganz anders verhält es sich, wenn man der Constante einen imaginären Werth beilegt. Setzt man dieselbe $= -i \log k$, so wird

$$T = t, \quad \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} U = k \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w . (\tfrac{1+\varepsilon \cos w}{1-\varepsilon \cos w})^{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

Um hier über den zweckmässigsten Werth von k entscheiden zu können, müssen wir vor allen Dingen das Vergrösserungsverhältniss bestimmen.

Es wird hier, in den Zeichen des 5. und 7. Artikels

$$n = aa \sin w^2$$
$$N = AA \sin U^2$$
$$\varphi\upsilon = 1$$

Also

$$m = \frac{A \sin U}{a \sin w} = \frac{A \sin U}{a \sin w} . \sqrt{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos w^2)} = \frac{A}{a} . \frac{k (1-\varepsilon\varepsilon \cos w^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\varepsilon}{\cos \frac{1}{2} w^2 (1 - \varepsilon \cos w)^{\varepsilon} + kk \sin \frac{1}{2} w^2 (1 + \varepsilon \cos w)^{\varepsilon}}$$

welches Verhältniss also bloss von der Breite abhängt. Die möglich geringste Abweichung von vollkommner Ähnlichkeit erhält man, wenn man k so bestimmt, dass m für die äussersten Breiten gleich grosse Werthe erhält, wodurch von selbst m bei der mittlern Breite seinem grössten oder kleinsten Werthe sehr nahe sein wird. Bezeichnet man die äussersten Werthe von w durch w^0 und w', so erhält man auf diese Weise

$$k = \sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2} w^{0 2} (1 - \varepsilon \cos w^0)^{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos w^{0 2})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\varepsilon} \cdot \frac{\cos \frac{1}{2} w'^2 (1 - \varepsilon \cos w')^{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos w'^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\varepsilon}} : \frac{\sin \frac{1}{2} w^{0 2} (1 + \varepsilon \cos w')^{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos w'^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\varepsilon} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2} w^{0 2} (1 + \varepsilon \cos w^0)^{\varepsilon}}{(1 - \varepsilon\varepsilon \cos w^{0 2})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\varepsilon}}$$

Um zu erfahren, bei welcher Breite m seinen grössten oder kleinsten Werth erhält, haben wir

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \operatorname{cotang} U \,.\, \mathrm{d}u - \operatorname{cotang} w \,.\, \mathrm{d}w + \frac{\varepsilon\varepsilon \cos w \,.\, \sin w \,.\, \mathrm{d}w}{1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\sin U} = \frac{\mathrm{d}w}{\sin w} - \frac{\varepsilon\varepsilon \sin w \,.\, \mathrm{d}w}{1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2} = \frac{(1-\varepsilon\varepsilon)\,\mathrm{d}w}{(1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2)\sin w}$$

und hieraus

$$\frac{\mathrm{d}m}{m} = \frac{(1-\varepsilon\varepsilon)\,\mathrm{d}w}{\sin w\,(1-\varepsilon\varepsilon\cos w^2)} \,.\, (\cos U - \cos w)$$

Hieraus erhellt, dass m da seinen grössten oder kleinsten Werth erhält, wo $U = w$ wird; bezeichnet man den Werth von w an dieser Stelle durch W, so wird

$$k = \left(\frac{1-\varepsilon\cos W}{1+\varepsilon\cos W}\right)^{\frac{1}{2}\varepsilon} \quad \text{oder} \quad \cos W = \frac{1-k^{\frac{2}{\varepsilon}}}{\varepsilon\left(1+k^{\frac{2}{\varepsilon}}\right)}$$

woraus man W bestimmen kann, wenn k nach der obigen Formel berechnet ist. Für die Ausübung wird inzwischen auf die ganz genaue Gleichheit der Werthe von m an den äussersten Breiten wenig ankommen, und man kann sich begnügen, für $90^0 - W$ ungefähr die mittlere Breite zu wählen, und daraus k abzuleiten. Den allgemeinen Zusammenhang zwischen U und w gibt dann die Formel

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} U = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} w \left\{\frac{(1-\varepsilon\cos W)(1+\varepsilon\cos w)}{(1+\varepsilon\cos W)(1-\varepsilon\cos w)}\right\}^{\frac{1}{2}\varepsilon}$$

Zur wirklichen numerischen Berechnung ist es jedoch vortheilhafter, Reihen anzuwenden, denen man verschiedene Formen geben kann, bei deren Entwicklung wir uns aber hier nicht aufhalten.

Da man übrigens leicht sieht, dass für $w < W$, $U > w$, also $\cos U - \cos w$ und mithin auch $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}w}$ negativ; und für $w > W$, $U < w$, mithin $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}w}$ positiv wird, so ist klar, dass für $w = U = W$ der Werth von m allemal ein Minimum wird, und zwar

$$= \frac{A}{a}\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon\cos W^2)}$$

Wählt man also den Halbmesser der Kugel $A = \frac{a}{\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon\cos W^2)}}$, so ist die Darstellung unendlich kleiner Theile des Ellipsoids bei der Breite $90^0 - W$ dem Urbilde nicht bloss ähnlich, sondern gleich, bei andern Breiten aber grösser.

Man kann den Logarithmen von m mit Vortheil in eine nach den Potenzen von $\cos U - \cos W$ fortlaufende Reihe entwickeln, deren erste für die Ausübung zureichende Glieder diese sind

$$\log \text{hyp.}\, m = \log\left\{\frac{A}{a}\sqrt{(1-\varepsilon\varepsilon\cos W^2)}\right\} + \frac{\varepsilon\varepsilon}{2(1-\varepsilon\varepsilon)} \,.\, (\cos U - \cos W)^2$$
$$- \frac{2+\varepsilon^4\cos W}{3(1-\varepsilon\varepsilon)^2} \,.\, (\cos U - \cos W)^3 \,.\, . \,.\, .$$

Wenn also z. B. die Dänische Monarchie innerhalb der Grenzen der Breite 53^0 und 58^0 auf diese Weise auf die Kugelfläche übertragen und $W = 34^0 30'$ gesetzt wird, so wird bei der Abplattung $\frac{1}{3\,0\,0}$ die Darstellung an den Grenzen, linearisch gerechnet, nur um $\frac{1}{3\,3\,0\,'\,0\,0\,0}$ vergrössert.

Wir müssen uns hier damit begnügen, nur eine kurze Andeutung von *einer* Benutzungsart des Übertragens der Figuren in der höhern Geodäsie gegeben zu haben, und eine angemessenere Ausführung für einen andern Ort versparen.

14.

Es bleibt uns noch übrig, einen in unsrer allgemeinen Auflösung vorkommenden Umstand hier etwas ausführlicher zu betrachten. Wir haben im 5. Artikel gezeigt, dass allemal zwei Auflösungen statt finden, indem entweder $P+iQ$ einer Function von $p+iq$, und $P-iQ$ einer Function von $p-iq$ gleich werden muss; oder $P+iQ$ einer Function von $p-iq$, und $P-iQ$ einer Function von $p+iq$. Wir wollen nun noch zeigen, dass allemal bei der einen Auflösung die Theile in der Darstellung zugleich eine ähnliche Lage haben, wie im Dargestellten; bei der andern Auflösung hingegen verkehrt liegen; zugleich wollen wir das Criterium angeben, nach welchem dieses a priori unterschieden werden kann.

Zuvörderst bemerken wir, dass von vollkommner oder verkehrter Ähnlichkeit nur insofern die Rede sein kann, als an jeder der beiden Flächen zwei Seiten unterschieden werden, wovon die eine als die obere, die andere als die untere betrachtet wird. Da dieses an sich etwas willkürliches ist, so sind beide Auflösungen gar nicht wesentlich verschieden, und eine verkehrte Ähnlichkeit wird zur vollkommnen, sobald man bei der einen Fläche die vorher als obere betrachtete Seite zur untern macht. Bei unsrer Auflösung konnte daher diese Unterscheidung gar nicht vorkommen, da die Flächen bloss durch die Coordinaten ihrer Punkte bestimmt wurden. Will man auf diesen Unterschied eingehen, so muss zuvor die Natur der Fläche auf eine andere Art festgelegt werden, welche ihn mit in sich fasst. Zu diesem Zweck wollen wir annehmen, dass die Natur der ersten Fläche durch die Gleichung $\psi = 0$ bestimmt werde, wo ψ eine gegebne einförmige Function von x, y, z ist. In allen Punkten der Fläche wird also der

Werth von ψ verschwinden, und in allen Punkten des Raumes, welche der Fläche nicht angehören, wird er nicht verschwinden. Bei einem Durchgange durch die Fläche wird also, wenigstens allgemein zu reden, der Werth von ψ aus dem Positiven ins Negative, bei dem entgegengesetzten aus dem Negativen ins Positive übergehen, oder auf der einen Seite der Fläche wird der Werth von ψ positiv, auf der andern negativ sein: die erstere wollen wir als die obere, die andere als die untere betrachten. Ganz eben so soll es bei der zweiten Fläche gehalten werden, indem ihre Natur durch die Gleichung $\Psi = 0$ bestimmt wird, wo Ψ eine gegebne einförmige Function der Coordinaten X, Y, Z ist. Es gebe ferner die Differentiation

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\psi &= e\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z \\ \mathrm{d}\Psi &= E\,\mathrm{d}X + G\,\mathrm{d}Y + H\,\mathrm{d}Z \end{aligned}$$

wo e, g, h Functionen von x, y, z und E, G, H Functionen von X, Y, Z sein werden.

Da die Betrachtungen, durch welche wir zu dem vorgesetzten Ziele gelangen müssen, obwohl an sich nicht schwierig, doch etwas ungewöhnlicher Art sind, so wollen wir uns bemühen, ihnen die grösste Klarheit zu geben. Wir wollen zwischen den beiden einander entsprechenden Darstellungen auf den Flächen, deren Gleichungen $\psi = 0$ und $\Psi = 0$ sind, sechs Zwischen-Darstellungen in der Ebne annehmen, so dass acht verschiedene Darstellungen in Betracht kommen, nemlich

		indem als correspondirend betrachtet werden die Punkte, deren Coordinaten resp. =
1^s	das Urbild in der Fläche, deren Gleichung $\psi = 0$ . .	x, y, z
2^s	Darstellung in der Ebne	$x, y, 0$
3^s	„ „ „ „	$t, u, 0$
4^s	„ „ „ „	$p, q, 0$
5^s	„ „ „ „	$P, Q, 0$
6^s	„ „ „ „	$T, U, 0$
7^s	„ „ „ „	$X, Y, 0$
8^s	Abbildung in der Fläche, deren Gleichung $\Psi = 0$ . .	X, Y, Z

Wir wollen nun diese verschiednen Darstellungen unter einander lediglich in Beziehung auf die gegenseitige *Lage* der unendlich kleinen Linearelemente ver-

gleichen, indem wir das Grössenverhältniss ganz bei Seite setzen; als ähnlichliegend werden also zwei Darstellungen betrachtet, wenn von zwei aus Einem Punkte ausgehenden Linearelementen dem in der einen Darstellung rechts liegenden auch in der andern das rechts liegende entspricht; im entgegengesetzten Falle werden sie verkehrtliegende heissen. Bei der Ebne, von Nro. 2—7 wird immer die Seite, wo die positiven Werthe der dritten Coordinate liegen, als die obere betrachtet; bei der ersten und letzten Fläche hingegen ist die Unterscheidung der obern und untern Seite bloss von dem positiven oder negativen Werthe von ψ und Ψ abhängig, wie schon oben festgesetzt ist.

Hier ist nun zuvörderst klar, dass für jede Stelle der ersten Fläche, wo man bei ungeändertem x und y durch ein positives Increment von z auf deren obere Seite kommt, die Darstellung in 2 mit der in 1 ähnlichliegend sein wird; dies wird also offenbar überall zutreffen, wo h positiv ist; und das Gegentheil wird bei einem negativen h eintreten, wo die Darstellungen verkehrt liegend sein werden.

Auf dieselbe Weise werden die Darstellungen in 7 und 8 ähnlich liegend oder verkehrt liegend sein, jenachdem H positiv oder negativ ist.

Um die Darstellungen in 2 und 3 unter sich zu vergleichen, sei in der erstern $\mathrm{d}s$ die Länge einer unendlich kleinen Linie von dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, zu einem andern, dessen Coordinaten $x+\mathrm{d}x$, $y+\mathrm{d}y$ sind, und l dessen Neigung gegen die Abscissenlinie wachsend in dem Sinn, in welchem man von der Axe der x zu der Axe der y übergeht, also

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s.\cos l, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}s.\sin l$$

In der Darstellung 3 sei $\mathrm{d}\sigma$ die Grösse der Linie, welche der $\mathrm{d}s$ entspricht, und ihre Neigung zur Abscissenlinie, wie vorhin verstanden, λ, so dass

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}\sigma.\cos\lambda, \quad \mathrm{d}u = \mathrm{d}\sigma.\sin\lambda$$

Man hat also, in den Bezeichnungen des 4. Artikels

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s.\cos l &= \mathrm{d}\sigma(a\cos\lambda + a'\sin\lambda) \\ \mathrm{d}s.\sin l &= \mathrm{d}\sigma(b\cos\lambda + b'\sin\lambda) \end{aligned}$$

folglich

$$\mathrm{tang}\, l = \frac{b\cos\lambda + b'\sin\lambda}{a\cos\lambda + a'\sin\lambda}$$

Betrachtet man nun x und y als constant, und l, λ als veränderlich, so gibt die Differentiation

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{ab'-ba'}{(a\cos\lambda+a'\sin\lambda)^2+(b\cos\lambda+b'\sin\lambda)^2} = (ab'-ba')\cdot\frac{\mathrm{d}s^2}{\mathrm{d}s^2}$$

Man sieht also, dass jenachdem $ab'-ba'$ positiv *oder* negativ ist, l und λ immer zugleich wachsen, *oder* sich entgegengesetzt ändern, und also im erstern Fall die Darstellungen 2 und 3 ähnlich liegend, im andern verkehrt liegend sind.

Aus der Verbindung dieses Resultats mit dem vorhingefundenen ergibt sich, dass die Darstellungen in 1 und 3 ähnlich liegend oder verkehrt liegend sind, je nachdem $\frac{ab'-ba'}{h}$ positiv oder negativ ist.

Da auf der Fläche, deren Gleichung $\psi = 0$ ist,

$$e\,\mathrm{d}x+g\,\mathrm{d}y+h\,\mathrm{d}z = 0$$

also auch

$$(ea+gb+hc)\,\mathrm{d}t+(ea'+gb'+hc')\,\mathrm{d}u = 0$$

wird, wie auch immer das Verhältniss von $\mathrm{d}t$ und $\mathrm{d}u$ gewählt wird, so muss offenbar identisch

$$ea+gb+hc = 0, \quad ea'+gb'+hc' = 0$$

werden, woraus folgt, dass e, g, h resp. den Grössen $bc'-cb'$, $ca'-ac'$, $ab'-ba'$ proportional sind, also

$$\frac{bc'-cb'}{e} = \frac{ca'-ac'}{g} = \frac{ab'-ba'}{h}$$

Man kann also, welchen dieser drei Ausdrücke man will, oder wenn man mit der ihrer Natur nach positiven Grösse $ee+gg+hh$ multiplicirt, die sich ergebende symmetrische Grösse

$$ebc'+gca'+hab'-ecb'-gac'-hba'$$

als Criterium der ähnlichen oder verkehrten Lage der Theile in den Darstellungen 1 und 3 anwenden.

Ganz eben so wird ähnliche oder verkehrte Lage der Theile in den Darstellungen 6 und 8 von dem positiven oder negativen Werthe der Grösse

$$\frac{BC'-CB'}{E} = \frac{CA'-AC'}{G} = \frac{AB'-BA'}{H}$$

oder wenn man lieber will, der symmetrischen

$$EBC'+GCA'+HAB'-ECB'-GAC'-HBA'$$

abhangen.

Die Vergleichung der Darstellungen in 3 und 4 beruhet auf ganz ähnlichen Gründen, wie die von 2 und 3, und die ähnliche oder verkehrte Lage der Theile hängt von dem positiven oder negativen Zeichen der Grösse

$$\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)$$

ab; und eben so bestimmt das positive oder negative Zeichen von

$$\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}U}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}U}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)$$

die ähnliche oder verkehrte Lage der Theile in den Darstellungen 5 und 6.

Was endlich die Vergleichung der Darstellungen 4 und 5 unter sich betrifft, so können wir uns auf die Analyse des 8. Artikels beziehen, aus welcher erhellet, dass jene in den kleinsten Theilen ähnlich, oder verkehrt liegend sind, je nachdem man die erste oder zweite Auflösung gewählt, d. i. entweder

$$P+iQ = f(p+iq) \quad \text{und} \quad P-iQ = f'(p-iq)$$

oder

$$P+iQ = f(p-iq) \quad \text{und} \quad P-iQ = f'(p+iq)$$

gesetzt hat.

Aus diesem allen ziehen wir nunmehro den Schluss, dass man, wenn die Darstellung auf der Fläche, deren Gleichung $\Psi = 0$ ist, dem Urbilde auf der Fläche, deren Gleichung $\psi = 0$ ist, in den kleinsten Theilen nicht bloss ähnlich, sondern auch ähnlich liegend sein soll, auf die Anzahl der negativen Grössen, welche unter diesen vier Grössen vorkommen,

$$\frac{ab'-ba'}{h}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}u}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right), \quad \left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}T}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}U}\right)-\left(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}U}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right), \quad \frac{AB'-BA'}{H}$$

Rücksicht nehmen muss; ist gar keine oder eine gerade Anzahl darunter, so wird die erste; ist eine oder drei negative unter ihnen, so wird die zweite Auflösung gewählt werden müssen. Bei entgegengesetzter Wahl findet allemal eine verkehrte Ähnlichkeit Statt.

Übrigens lässt sich noch zeigen, dass, wenn obige vier Grössen resp. mit r, s, S, R bezeichnet werden, allemal

$$\frac{r\sqrt{(ee+gg+hh)}}{s} = \pm n, \quad \frac{R\sqrt{(EE+GG+HH)}}{S} = \pm N$$

wird, n und N in der Bedeutung des 5. Art. genommen; wir übergehen jedoch hier den nicht schwer zu findenden Beweis dieses Theorems, da dieses für unsern Zweck nicht weiter nöthig ist.

[*Randbemerkungen in* GAUSS *Handexemplar:*]

[Art. 10 neben der letzten Gleichung zur Bestimmung von λ] oder $\lambda = \cos u^*$, wenn für $u = u^*$ der Minimalwerth [des Vergrösserungsverhältnisses] Statt finden soll.

[Art. 12 neben der Gleichung, durch welche hier im Abdruck die Grösse w eingeführt wird] Das Zeichen ω ist gegen meine Absicht im Druck gebraucht: es sollte w sein.

[Art. 13 neben den Gleichungen, die sich auf die durch die Function $fv = v - i\log k$ bestimmte Abbildung beziehen, sind die entsprechenden Gleichungen für die Function $fv = av - i\log k$ verzeichnet, welche später in der ersten Abhandlung der Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie aufgenommen wurden.]

DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA SUPERFICIES CURVAS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE OBLATAE D. VIII. OCTOBR. MDCCCXXVII.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. VI.
Gottingae MDCCCXXVIII.

DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA SUPERFICIES CURVAS.

1.

Disquisitiones, in quibus de directionibus variarum rectarum in spatio agitur, plerumque ad maius perspicuitatis et simplicitatis fastigium evehuntur, in auxilium vocando superficiem sphaericam radio $= 1$ circa centrum arbitrarium descriptam, cuius singula puncta repraesentare censebuntur directiones rectarum radiis ad illa terminatis parallelarum. Dum situs omnium punctorum in spatio per tres coordinatas determinatur, puta per distantias a tribus planis fixis inter se normalibus, ante omnia considerandae veniunt directiones axium his planis normalium: puncta superficiei sphaericae, quae has directiones repraesentant, per (1), (2), (3) denotabimus; mutua igitur horum distantia erit quadrans. Ceterum axium directiones versus eas partes acceptas supponemus, versus quas coordinatae respondentes crescunt.

2.

Haud inutile erit, quasdam propositiones, quae in huiusmodi quaestionibus usum frequentem offerunt, hic in conspectum producere.

I. Angulus inter duas rectas se secantes mensuratur per arcum inter puncta, quae in superficie sphaerica illarum directionibus respondent.

II. Situs cuiuslibet plani repraesentari potest per circulum maximum in superficie sphaerica, cuius planum illi est parallelum.

III. Angulus inter duo plana aequalis est angulo sphaerico inter circulos maximos illa repraesentantes, et proin etiam per arcum inter horum circulorum maximorum polos interceptum mensuratur. Et perinde inclinatio rectae ad planum mensuratur per arcum, a puncto, quod respondet directioni rectae: ad circulum maximum, qui plani situm repraesentat, normaliter ductum.

IV. Denotantibus x, y, z; x', y', z' coordinatas duorum punctorum, r eorumdem distantiam, atque L punctum, quod in superficie sphaerica repraesentat directionem rectae a puncto priore ad posterius ductae, erit

$$x' = x + r\cos(1)L, \quad y' = y + r\cos(2)L, \quad z' = z + r\cos(3)L$$

V. Hinc facile sequitur, haberi generaliter

$$\cos(1)L^2 + \cos(2)L^2 + \cos(3)L^2 = 1$$

nec non, denotante L' quodcunque aliud punctum superficiei sphaericae, esse

$$\cos(1)L\,.\cos(1)L' + \cos(2)L\,.\cos(2)L' + \cos(3)L\,.\cos(3)L' = \cos LL'$$

VI. Theorema. *Denotantibus L, L', L'', L''' quatuor puncta in superficie sphaerae, atque A angulum, quem arcus LL', $L''L'''$ in puncto concursus sui formant, erit*

$$\cos LL''.\cos L'L''' - \cos LL'''.\cos L'L'' = \sin LL'.\sin L''L'''.\cos A$$

Dem. Denotet litera A insuper punctum concursus ipsum, statuaturque

$$AL = t, \quad AL' = t', \quad AL'' = t'', \quad AL''' = t'''$$

Habemus itaque:

$$\begin{aligned}
\cos LL'' &= \cos t\cos t'' + \sin t\sin t''\cos A \\
\cos L'L''' &= \cos t'\cos t''' + \sin t'\sin t'''\cos A \\
\cos LL''' &= \cos t\cos t''' + \sin t\sin t'''\cos A \\
\cos L'L'' &= \cos t'\cos t'' + \sin t'\sin t''\cos A
\end{aligned}$$

et proin

$$\begin{aligned}
&\cos LL''.\cos L'L''' - \cos LL'''.\cos L'L'' \\
&\quad = \cos A(\cos t\cos t''\sin t'\sin t''' + \cos t'\cos t'''\sin t\sin t'' \\
&\qquad - \cos t\cos t'''\sin t'\sin t'' - \cos t'\cos t''\sin t\sin t''') \\
&\quad = \cos A(\cos t\sin t' - \sin t\cos t')(\cos t''\sin t''' - \sin t''\cos t''') \\
&\quad = \cos A.\sin(t' - t).\sin(t''' - t'') \\
&\quad = \cos A.\sin LL'.\sin L''L'''
\end{aligned}$$

Ceterum quum inde a puncto A bini rami utriusque circuli maximi proficiscantur, duo quidem ibi anguli formantur, quorum alter alterius complementum ad 180^0: sed analysis nostra monstrat, eos ramos adoptandos esse, quorum directiones cum sensu progressionis a puncto L ad L', et a puncto L'' ad L''' consentiunt: quibus intellectis simul patet, quum circuli maximi duobus punctis concurrant, arbitrarium esse, utrum eligatur. Loco anguli A etiam arcus inter polos circulorum maximorum, quorum partes sunt arcus LL', $L''L'''$, adhiberi potest: manifesto autem polos tales accipere oportet, qui respectu horum arcuum similiter iacent, puta vel uterque polus ad dextram iacens, dum a L versus L' atque ab L'' versus L''' procedimus, vel uterque ad laevam.

VII. Sint L, L', L'' tria puncta in superficie sphaerica, statuamusque brevitatis caussa

$$\begin{aligned}
\cos(1)L &= x, \quad \cos(2)L = y, \quad \cos(3)L = z \\
\cos(1)L' &= x', \quad \cos(2)L' = y', \quad \cos(3)L' = z' \\
\cos(1)L'' &= x'', \quad \cos(2)L'' = y'', \quad \cos(3)L'' = z''
\end{aligned}$$

nec non

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \Delta$$

Designet λ polum circuli maximi, cuius pars est arcus LL', et quidem eum, qui respectu huius arcus similiter iacet, ac punctum (1) respectu arcus (2) (3). Tunc erit, ex theoremate praecedente, $yz' - y'z = \cos(1)\lambda.\sin(2)(3).\sin LL'$, sive, propter $(2)(3) = 90^0$,

$$\begin{aligned}
yz' - y'z &= \cos(1)\lambda.\sin LL', \text{ et perinde} \\
zx' - z'x &= \cos(2)\lambda.\sin LL' \\
xy' - x'y &= \cos(3)\lambda.\sin LL'
\end{aligned}$$

Multiplicando has aequationes resp. per x'', y'', z'' et addendo, obtinemus adiumento theorematis secundi in V prolati

$$\Delta = \cos\lambda L''.\sin LL'$$

Iam tres casus sunt distinguendi. *Primo*, quoties L'' iacet in eodem circulo maximo, cuius pars est arcus LL', erit $\lambda L'' = 90^0$, adeoque $\Delta = 0$. Quoties vero L'' iacet extra circulum illum maximum, aderit casus *secundus*, si est ab eadem parte, a qua est λ, *tertius*, si ab opposita: in his casibus puncta L, L', L''

formabunt triangulum sphaericum, et quidem iacebunt in casu secundo eodem ordine quo puncta (1), (2), (3), in casu tertio vero ordine opposito. Denotando angulos illius trianguli simpliciter per L, L', L'', atque perpendiculum in superficie sphaerica a puncto L'' ad latus LL' ductum per p, erit

$$\sin p = \sin L . \sin LL'' = \sin L' . \sin L'L'', \quad \text{atque} \quad \lambda L'' = 90^0 \mp p$$

valente signo superiori pro casu secundo, inferiori pro tertio. Hinc itaque colligimus

$$\mp\Delta = \sin L . \sin LL' . \sin LL'' = \sin L' . \sin LL' . \sin L'L'' = \sin L'' . \sin LL'' . \sin L'L''$$

Ceterum manifesto casus primus in secundo vel tertio comprehendi censeri potest, nulloque negotio perspicitur, $\mp\Delta$ exhibere sextuplum soliditatis pyramidis inter puncta L, L', L'' atque centrum sphaerae formatae. Denique hinc facillime colligitur, eandem expressionem $\mp\frac{1}{6}\Delta$ generaliter exprimere soliditatem cuiusvis pyramidis inter initium coordinatarum atque puncta quorum coordinatae sunt x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'', contentae.

3.

Superficies curva apud punctum A in ipsa situm curvatura continua gaudere dicitur, si directiones omnium rectarum ab A ad omnia puncta superficiei ab A infinite parum distantia ductarum infinite parum ab uno eodemque plano per A transiente deflectuntur: hoc planum superficiem curvam in puncto A *tangere* dicitur. Quodsi huic conditioni in aliquo puncto satisfieri nequit, continuitas curvaturae hic interrumpitur, uti e. g. evenit in cuspide coni. Disquisitiones praesentes ad tales superficies curvas, vel ad tales superficiei partes, restringentur, in quibus continuitas curvaturae nullibi interrumpitur. Hic tantummodo observamus, methodos, quae positioni plani tangentis determinandae inserviunt, pro punctis singularibus, in quibus continuitas curvaturae interrumpitur, vim suam perdere, et ad indeterminata perducere debere.

4.

Situs plani tangentis commodissime e situ rectae ipsi in puncto A normalis cognoscitur, quae etiam ipsi superficiei curvae normalis dicitur. Directionum huius normalis per punctum L in superficie sphaerae auxiliaris repraesentabimus, atque statuemus

$$\cos(1)L = X, \quad \cos(2)L = Y, \quad \cos(3)L = Z$$

coordinatas puncti A per x, y, z denotamus. Sint porro $x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z$ coordinatae alius puncti in superficie curva A'; $\mathrm{d}s$ ipsius distantia infinite parva ab A; denique λ punctum superficiei sphaericae repraesentans directionem elementi AA'. Erit itaque

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}s . \cos(1)\lambda, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}s . \cos(2)\lambda, \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}s . \cos(3)\lambda$$

et, quum esse debeat $\lambda L = 90^0$,

$$X\cos(1)\lambda + Y\cos(2)\lambda + Z\cos(3)\lambda = 0$$

E combinatione harum aequationum derivamus

$$X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z = 0$$

Duae habentur methodi generales ad exhibendam indolem superficiei curvae. Methodus *prima* utitur aequatione inter coordinatas x, y, z, quam reductam esse supponemus ad formam $W = 0$, ubi W erit functio indeterminatarum x, y, z. Sit differentiale completum functionis W

$$\mathrm{d}W = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

eritque in superficie curva

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$$

et proin

$$P\cos(1)\lambda + Q\cos(2)\lambda + R\cos(3)\lambda = 0$$

Quum haec aequatio, perinde ut ea quam supra stabilivimus, valere debeat pro directionibus omnium elementorum $\mathrm{d}s$ in superficie curva, facile perspiciemus, X, Y, Z proportionales esse debere ipsis P, Q, R et proin, quum fiat

$$XX + YY + ZZ = 1$$

erit vel

$$X = \frac{P}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}}, \quad Y = \frac{Q}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}}, \quad Z = \frac{R}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}}$$

vel

$$X = \frac{-P}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}}, \quad Y = \frac{-Q}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}}, \quad Z = \frac{-R}{\sqrt{(PP+QQ+RR)}}$$

Methodus *secunda* sistit coordinatas in forma functionum duarum variabilium p, q. Supponamus per differentiationem harum functionum prodire

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= a\,\mathrm{d}p + a'\,\mathrm{d}q \\ \mathrm{d}y &= b\,\mathrm{d}p + b'\,\mathrm{d}q \\ \mathrm{d}z &= c\,\mathrm{d}p + c'\,\mathrm{d}q \end{aligned}$$

quibus valoribus in formula supra data substitutis, obtinemus

$$(aX+bY+cZ)\,\mathrm{d}p + (a'X+b'Y+c'Z)\,\mathrm{d}q = 0$$

Quum haec aequatio locum habere debeat independenter a valoribus differentialium $\mathrm{d}p$, $\mathrm{d}q$, manifesto esse debebit

$$aX+bY+cZ = 0, \quad a'X+b'Y+c'Z = 0$$

unde colligimus, X, Y, Z proportionales esse debere quantitatibus

$$bc'-cb', \quad ca'-ac', \quad ab'-ba'$$

Statuendo itaque brevitatis caussa

$$\sqrt{((bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2)} = \Delta$$

erit vel

$$X = \frac{bc'-cb'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ca'-ac'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ab'-ba'}{\Delta}$$

vel

$$X = \frac{cb'-bc'}{\Delta}, \quad Y = \frac{ac'-ca'}{\Delta}, \quad Z = \frac{ba'-ab'}{\Delta}$$

His duabus methodis generalibus accedit *tertia*, ubi una coordinatarum, e. g. z exhibetur in forma functionis reliquarum x, y: haec methodus manifesto nihil aliud est, nisi casus specialis vel methodi primae, vel secundae. Quodsi hic statuitur

$$\mathrm{d}z = t\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y$$

erit vel

$$X = \frac{-t}{\sqrt{(1+tt+uu)}}, \quad Y = \frac{-u}{\sqrt{(1+tt+uu)}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{(1+tt+uu)}}$$

vel

$$X = \frac{t}{\sqrt{(1+tt+uu)}}, \quad Y = \frac{u}{\sqrt{(1+tt+uu)}}, \quad Z = \frac{-1}{\sqrt{(1+tt+uu)}}$$

5.

Duae solutiones in art. praec. inventae manifesto ad puncta superficiei sphaericae opposita, sive ad directiones oppositas referuntur, quod cum rei natura quadrat, quum normalem ad utramvis plagam superficiei curvae ducere liceat. Quodsi duas plagas, superficiei contiguas, inter se distinguere, alteramque exteriorem alteram interiorem vocare placet, etiam utrique normali suam solutionem rite tribuere licebit adiumento theorematis in art. 2 (VII) evoluti, simulatque criterium stabilitum est ad plagam alteram ab altera distinguendam.

In methodo prima tale criterium petendum erit a signo valoris quantitatis W. Scilicet generaliter loquendo superficies curva eas spatii partes, in quibus W valorem positivum obtinet, ab iis dirimet, in quibus valor ipsius W fit negativus. E theoremate illo vero facile colligitur, si W valorem positivum obtineat versus plagam exteriorem: normalisque extrorsum ducta concipiatur, solutionem priorem adoptandam esse. Ceterum in quovis casu facile diiudicabitur, utrum per superficiem integram eadem regula respectu signi ipsius W valeat, an pro diversis partibus diversae: quamdiu coëfficientes P, Q, R valores finitos habent, nec simul omnes tres evanescunt, lex continuitatis vicissitudinem vetabit.

Si methodum secundam sequimur, in superficie curva duo systemata linearum curvarum concipere possumus, alterum, pro quo p est variabilis, q constans; alterum, pro quo q variabilis, p constans: situs mutuus harum linearum respectu plagae exterioris decidere debet, utram solutionem adoptare oporteat. Scilicet quoties tres lineae, puta ramus lineae prioris systematis a puncto A proficiscens crescente p, ramus posterioris systematis a puncto A egrediens crescente q, atque normalis versus plagam exteriorem ducta *similiter* iacent, ut, inde ab origine abscissarum, axes ipsarum x, y, z resp. (e. g. si tum e tribus lineis illis, tum e tribus his, prima sinistrorsum, secunda dextrorsum, tertia sursum directa concipi potest), solutio prima adoptari debet; quoties autem situs mutuus trium linearum oppositus est situi mutuo axium ipsarum x, y, z, solutio secunda valebit.

In methodo tertia dispiciendum est, utrum, dum z incrementum positivum accipit, manentibus x et y invariatis, transitus fiat versus plagam exteriorem an interiorem. In casu priore, pro normali extrorsum directa, solutio prima valet, in posteriore secunda.

6.

Sicuti, per translatam directionem normalis in superficiem curvam ad superficiem sphaerae, cuius puncto determinato prioris superficiei respondet punctum determinatum in posteriore, ita etiam quaevis linea, vel quaevis figura in illa repraesentabitur per lineam vel figuram correspondentem in hac. In comparatione duarum figurarum hoc modo sibi mutuo correspondentium, quarum altera quasi imago alterius erit, duo momenta sunt respicienda, alterum, quatenus sola quantitas consideratur, alterum, quatenus abstrahendo a relationibus quantitativis solum situm contemplamur.

Momentum primum basis erit quarundam notionum, quas in doctrinam de superficiebus curvis recipere utile videtur. Scilicet cuilibet parti superficiei curvae limitibus determinatis cinctae *curvaturam totalem* seu *integram* adscribemus, quae per aream figurae illi in superficie sphaerica respondentem exprimetur. Ab hac curvatura integra probe distinguenda est curvatura quasi specifica, quam nos *mensuram curvaturae* vocabimus: haec posterior ad *punctum* superficiei refertur, et denotabit quotientem qui oritur, dum curvatura integra elementi superficialis puncto adiacentis per aream ipsius elementi dividitur, et proin indicat rationem arearum infinite parvarum in superficie curva et in superficie sphaerica sibi mutuo respondentium. Utilitas harum innovationum per ea, quae in posterum a nobis explicabuntur, abunde, ut speramus, sancietur. Quod vero attinet ad terminologiam, imprimis prospiciendum esse duximus, ut omnis ambiguitas arceatur, quapropter haud congruum putavimus, analogiam terminologiae in doctrina de lineis curvis planis vulgo receptam (etsi non omnibus probatam) stricte sequi, secundum quam mensura curvaturae simpliciter audire debuisset curvatura, curvatura integra autem amplitudo. Sed quidni in verbis faciles esse liceret, dummodo res non sint inanes, neque dictio interpretationi erroneae obnoxia?

Situs figurae in superficie sphaerica vel similis esse potest situi figurae respondentis in superficie curva, vel oppositus (inversus); casus prior locum habet, ubi binae lineae in superficie curva ab eodem puncto directionibus inaequalibus sed non oppositis proficiscentes repraesentantur in superficie sphaerica per lineas similiter iacentes, puta ubi imago lineae ad dextram iacentis ipsa est ad dextram; casus posterior, ubi contrarium valet. Hos duos casus per *signum* mensurae curvaturae vel positivum vel negativum distinguemus. Sed manifesto haec distinctio eatenus tantum locum habere potest, quatenus in utraque superficie plagam determinatam eligimus, in qua figura concipi debet. In sphaera auxiliari semper plagam exteriorem, a centro aversam, adhibebimus: in superficie curva etiam plaga exterior sive quae tamquam exterior consideratur, adoptari potest, vel potius plaga eadem, a qua normalis erecta concipitur; manifesto enim respectu similitudinis figurarum nihil mutatur, si in superficie curva tum figura ad plagam oppositam transfertur, tum normalis, dummodo ipsius imago semper in eadem plaga superficiei sphaericae depingatur.

Signum positivum vel negativum, quod pro situ figurae infinite parvae *mensurae* curvaturae adscribimus, etiam ad curvaturam integram figurae finitae in superficie curva extendimus. Attamen si argumentum omni generalitate amplecti suscipimus, quaedam dilucidationes requiruntur, quas hic breviter tantum attingemus. Quamdiu figura in superficie curva ita comparata est, ut singulis punctis intra ipsam puncta *diversa* in superficie sphaerica respondeant, definitio ulteriore explicatione non indiget. Quoties autem conditio ista locum non habet, necesse erit, quasdam partes figurae in superficie sphaerica bis vel pluries in computum ducere, unde, pro situ simili vel opposito, vel accumulatio vel destructio oriri poterit. Simplicissimum erit in tali casu, figuram in superficie curva in partes tales divisam concipere, quae singulae per se spectatae conditioni illi satisfaciant, singulis tribuere curvaturam suam integram, quantitate per aream figurae in superficie sphaerica respondentis, signo per situm determinatis, ac denique figurae toti adscribere curvaturam integram ortam per additionem curvaturarum integrarum, quae singulis partibus respondent. Generaliter itaque curvatura integra figurae est $= \int k \, d\sigma$, denotante $d\sigma$ elementum areae figurae, k mensuram curvaturae in quovis puncto. Quod vero attinet ad repraesentationem geometricam huius integralis, praecipua huius rei momenta ad sequentia redeunt. Peripheriae figurae in superficie curva (sub restrictione art. 3) semper respondebit in superficie sphaerica linea in se ipsam rediens. Quae si se ipsam nullibi intersecat, totam superficiem sphaericam in duas partes dirimet, quarum altera respondebit figurae in superficie curva, et cuius area, positive vel negative accipienda, prout respectu peripheriae suae similiter iacet ut figura in superficie curva respectu suae, vel inverse, exhibebit posterioris curvaturam integram. Quoties vero linea ista se ipsam semel vel pluries secat, exhibebit figuram complicatam, cui tamen area certa aeque legitime tribui potest, ac figuris absque nodis, haecque area, rite intellecta, semper valorem iustum curvaturae integrae exhibebit. Attamen uberio-

rem huius argumenti de figuris generalissime conceptis expressionem ad aliam occasionem nobis reservare debemus.

7.

Investigemus iam formulam ad exprimendam mensuram curvaturae pro quovis puncto superficiei curvae. Denotante $\mathrm{d}\sigma$ aream elementi huius superficiei, $Z\mathrm{d}\sigma$ erit area proiectionis huius elementi in planum coordinatarum x, y; et perinde, si $\mathrm{d}\Sigma$ est area elementi respondentis in superficie sphaerica, erit $Z\mathrm{d}\Sigma$ area proiectionis ad idem planum: signum positivum vel negativum ipsius Z vero indicabit situm proiectionis similem vel oppositum situi elementi proiecti: manifesto itaque illae proiectiones eandem rationem quoad quantitatem, simulque eandem relationem quoad situm, inter se tenent, ut elementa ipsa. Consideremus iam elementum triangulare in superficie curva, supponamusque coordinatas trium punctorum, quae formant ipsius proiectionem, esse

$$\begin{array}{ll} x & y \\ x+\mathrm{d}x, & y+\mathrm{d}y \\ x+\delta x, & y+\delta y \end{array}$$

Duplex area huius trianguli exprimetur per formulam

$$\mathrm{d}x.\delta y - \mathrm{d}y.\delta x$$

et quidem in forma positiva vel negativa, prout situs lateris a puncto primo ad tertium respectu lateris a puncto primo ad secundum similis vel oppositus est situi axis coordinatarum y respectu axis coordinatarum x.

Perinde si coordinatae trium punctorum, quae formant proiectionem elementi respondentis in superficie sphaerica, a centro sphaerae inchoatae, sunt

$$\begin{array}{ll} X, & Y \\ X+\mathrm{d}X, & Y+\mathrm{d}Y \\ X+\delta X, & Y+\delta Y \end{array}$$

duplex area huius proiectionis exprimetur per

$$\mathrm{d}X.\delta Y - \mathrm{d}Y.\delta X$$

de cuius expressionis signo eadem valent quae supra. Quocirca mensura curva-

turae in hoc loco superficiei curvae erit

$$k = \frac{\mathrm{d}X.\delta Y - \mathrm{d}Y.\delta X}{\mathrm{d}x.\delta y - \mathrm{d}y.\delta x}$$

Quodsi iam supponimus, indolem superficiei curvae datam esse secundum modum tertium in art. 4 consideratum, habebuntur X et Y in forma functionum quantitatum x, y unde erit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= (\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x})\mathrm{d}x + (\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y})\mathrm{d}y \\ \delta X &= (\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x})\delta x + (\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y})\delta y \\ \mathrm{d}Y &= (\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x})\mathrm{d}x + (\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y})\mathrm{d}y \\ \delta Y &= (\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x})\mathrm{d}x + (\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y})\delta y \end{aligned}$$

Substitutis his valoribus, expressio praecedens transit in hanc:

$$k = (\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x})(\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}) - (\tfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y})(\tfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x})$$

Statuendo ut supra

$$\tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = t, \quad \tfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = u$$

atque insuper

$$\tfrac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x^2} = T, \quad \tfrac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x.\mathrm{d}y} = U, \quad \tfrac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y^2} = V$$

sive

$$\mathrm{d}t = T\mathrm{d}x + U\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}u = U\mathrm{d}x + V\mathrm{d}y$$

habemus ex formulis supra datis

$$X = -tZ, \quad Y = -uZ, \quad (1+tt+uu)ZZ = 1$$

atque hinc

$$\begin{aligned} \mathrm{d}X &= -Z\mathrm{d}t - t\mathrm{d}Z \\ \mathrm{d}Y &= -Z\mathrm{d}u - u\mathrm{d}Z \\ (1+tt+uu)\mathrm{d}Z &+ Z(t\mathrm{d}t + u\mathrm{d}u) = 0 \end{aligned}$$

sive

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Z &= -Z^3(t\mathrm{d}t + u\mathrm{d}u) \\ \mathrm{d}X &= -Z^3(1+uu)\mathrm{d}t + Z^3tu\mathrm{d}u \\ \mathrm{d}Y &= +Z^3tu\mathrm{d}t - Z^3(1+tt)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

adeoque

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x} = Z^3(-(1+uu)T+tuU)$$
$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}y} = Z^3(-(1+uu)U+tuV)$$
$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = Z^3(tuT-(1+tt)U)$$
$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y} = Z^3(tuU-(1+tt)V)$$

quibus valoribus in expressione praecedente substitutis, prodit

$$k = Z^6(TV-UU)(1+tt+uu) = Z^4(TV-UU) = \frac{TV-UU}{(1+tt+uu)^2}$$

8.

Per idoneam electionem initii et axium coordinatarum facile effici potest, ut pro puncto determinato A valores quantitatum t, u, U evanescant. Scilicet duae priores conditiones iam adimplentur, si planum tangens in hoc puncto pro plano coordinatarum x, y adoptatur. Quarum initium si insuper in puncto A ipso collocatur, manifesto expressio coordinatarum z adipiscitur formam talem

$$z = \tfrac{1}{2}T^0xx+U^0xy+\tfrac{1}{2}V^0yy+\Omega$$

ubi Ω erit ordinis altioris quam secundi. Mutando dein situm axium ipsarum x, y angulo M tali ut habeatur

$$\operatorname{tang} 2M = \frac{2U^0}{T^0-V^0}$$

facile perspicitur, prodituram esse aequationem huius formae

$$z = \tfrac{1}{2}Txx+\tfrac{1}{2}Vyy+\Omega$$

quo pacto etiam tertiae conditioni satisfactum est. Quibus ita factis, patet

I. Si superficies curva secetur plano ipsi normali et per axem coordinatarum x transeunte, oriri curvam planam, cuius radius curvaturae in puncto A fiat $= \frac{1}{T}$, signo positivo vel negativo indicante concavitatem vel convexitatem versus plagam eam, versus quam coordinatae z sunt positivae.

II. Simili modo $\frac{1}{V}$ erit in puncto A radius curvaturae curvae planae, quae oritur per sectionem superficiei curvae cum plano per axes ipsarum y, z transeunte.

III. Statuendo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, fit

$$z = \tfrac{1}{2}(T\cos\varphi^2+V\sin\varphi^2)rr+\Omega$$

unde colligitur, si sectio fiat per planum superficiei in A normale et cum axe ipsarum x angulum φ efficiens, oriri curvam planam, cuius radius curvaturae in puncto A sit

$$= \frac{1}{T\cos\varphi^2+V\sin\varphi^2}$$

IV. Quoties itaque habetur $T = V$, radii curvaturae in *cunctis* planis normalibus aequales erunt. Si vero T et V sunt inaequales, manifestum est, quum $T\cos\varphi^2+V\sin\varphi^2$ pro quovis valore anguli φ cadat intra T et V, radios curvaturae in sectionibus principalibus, in I et II consideratis, referri ad curvaturas extremas, puta alterum ad curvaturam maximam, alterum ad minimam, si T et V eodem signo affectae sint, contra alterum ad maximam convexitatem, alterum ad maximam concavitatem, si T et V signis oppositis gaudeant. Hae conclusiones omnia fere continent, quae ill. Euler de curvatura superficierum curvarum primus docuit.

V. Mensura curvaturae superficiei curvae in puncto A autem nanciscitur expressionem simplicissimam $k = TV$, unde habemus

Theorema. *Mensura curvaturae in quovis superficiei puncto aequalis est fractioni, cuius numerator unitas, denominator autem productum duorum radiorum curvaturae extremorum in sectionibus per plana normalia.*

Simul patet, mensuram curvaturae fieri positivam pro superficiebus concavo-concavis vel convexo-convexis (quod discrimen non est essentiale), negativam vero pro concavo-convexis. Si superficies constat e partibus utriusque generis, in earum confiniis mensura curvaturae evanescens esse debebit. De indole superficierum curvarum talium, in quibus mensura curvaturae ubique evanescit, infra pluribus agetur.

9.

Formula generalis pro mensura curvaturae in fine art. 7 proposita, omnium simplicissima est, quippe quae quinque tantum elementa implicat; ad magis complicatam, scilicet novem elementa involventem, deferimur, si adhibere volumus

modum primum indolem superficiei curvae exprimendi. Retinendo notationes art. 4 insuper statuemus:

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x^2} = P', \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}W}{\mathrm{d}y^2} = Q', \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z^2} = R'$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}W}{\mathrm{d}y\,.\,\mathrm{d}z} = P'', \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x\,.\,\mathrm{d}z} = Q'', \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x\,.\,\mathrm{d}y} = R''$$

ita ut fiat

$$\mathrm{d}P = P'\mathrm{d}x + R''\mathrm{d}y + Q''\mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}Q = R''\mathrm{d}x + Q'\mathrm{d}y + P''\mathrm{d}z$$
$$\mathrm{d}R = Q''\mathrm{d}x + P''\mathrm{d}y + R'\mathrm{d}z$$

Iam quum habeatur $t = -\frac{P}{R}$, invenimus per differentiationem

$$RR\mathrm{d}t = -R\mathrm{d}P + P\mathrm{d}R = (PQ'' - RP')\mathrm{d}x + (PP'' - RR'')\mathrm{d}y + (PR' - RQ'')\mathrm{d}z$$

sive, eliminata $\mathrm{d}z$ adiumento aequationis $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$,

$$R^3\mathrm{d}t = (-RRP' + 2PRQ'' - PPR')\mathrm{d}x + (PRP'' + QRQ' - PQR' - RRR'')\mathrm{d}y$$

Prorsus simili modo obtinemus

$$R^3\mathrm{d}u = (PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR'')\mathrm{d}x + (-RRQ' + 2QRP'' - QQR')\mathrm{d}y$$

Hinc itaque colligimus

$$R^3T = -RRP' + 2PRQ'' - PPR'$$
$$R^3U = \quad PRP'' + QRQ'' - PQR' - RRR''$$
$$R^3V = -RRQ' + 2QRP'' - QQR'$$

Substituendo hos valores in formula art. 7, obtinemus pro mensura curvaturae k expressionem symmetricam sequentem:

$$(PP + QQ + RR)^2 k$$
$$= PP(Q'R' - P''P'') + QQ(P'R' - Q''Q'') + RR(P'Q' - R''R'')$$
$$+ 2QR(Q''R'' - P'P'') + 2PR(P''R'' - Q'Q'') + 2PQ(P''Q'' - R'R'')$$

10.

Formulam adhuc magis complicatam, puta e quatuordecim elementis conflatam, obtinemus, si methodum generalem secundam, indolem superficierum

curvarum exprimendi, sequimur. Magni tamen momenti est, hanc quoque elaborare. Retinendo signo art. 4, insuper statuemus

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p^2} = \alpha, \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q} = \alpha', \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}x}{\mathrm{d}q^2} = \alpha''$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p^2} = \beta, \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q} = \beta', \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}y}{\mathrm{d}q^2} = \beta''$$
$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p^2} = \gamma, \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}p\,.\,\mathrm{d}q} = \gamma', \quad \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}z}{\mathrm{d}q^2} = \gamma''$$

Praeterea brevitatis caussa faciemus

$$bc' - cb' = A$$
$$ca' - ac' = B$$
$$ab' - ba' = C$$

Primo observamus, haberi $A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}y + C\mathrm{d}z = 0$, sive $\mathrm{d}z = -\frac{A}{C}\mathrm{d}x - \frac{B}{C}\mathrm{d}y$; quatenus itaque z spectatur tamquam functio ipsarum x, y, fit

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = t = -\frac{A}{C}$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = u = -\frac{B}{C}$$

Porro deducimus, ex $\mathrm{d}x = a\mathrm{d}p = a'\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}y = b\mathrm{d}p + b'\mathrm{d}q$,

$$C\mathrm{d}p = \quad b'\mathrm{d}x - a'\mathrm{d}y$$
$$C\mathrm{d}q = -b\mathrm{d}x + a\mathrm{d}y$$

Hinc obtinemus differentialia completa ipsarum t, u

$$C^3\mathrm{d}t = (A\tfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} - C\tfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p})(b'\mathrm{d}x - a'\mathrm{d}y) + (C\tfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}q} - A\tfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q})(b\mathrm{d}x - a\mathrm{d}y)$$
$$C^3\mathrm{d}u = (B\tfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} - C\tfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}p})(b'\mathrm{d}x - a'\mathrm{d}y) + (C\tfrac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q} - B\tfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q})(b\mathrm{d}x - a\mathrm{d}y)$$

Iam si in his formulis substituimus

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p} = c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma$$
$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}q} = c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma'$$
$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}p} = a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha$$
$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}q} = a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha'$$
$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}p} = b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta$$
$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}q} = b'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta'$$

atque perpendimus, valores differentialium dt, du sic prodeuntium, aequales esse debere, independenter a differentialibus dx, dy, quantitatibus $Tdx+Udy$, $Udx+Vdy$ resp. inveniemus, post quasdam transformationes satis obvias:

$$\begin{aligned}
C^3T = {} & \alpha Ab'b' + 6\,B b'b' + \gamma C b'b' \\
& - 2\alpha' Ab'b' - 2\,6' Bb'b' - 2\gamma' Cb'b' \\
& + \alpha'' Abb + 6'' Bbb + \gamma'' Cbb \\
C^3U = {} & - \alpha Aa'b' - 6\,Ba'b' - \gamma Ca'b' \\
& + \alpha' A(ab' + ba') + 6'B(ab' + ba') + \gamma' C(ab' + ba') \\
& - \alpha'' Aab - 6'' Bab - \gamma'' Cab \\
C^3V = {} & \alpha Aa'a' + 6\,Ba'a' + \gamma Ca'a' \\
& - 2\alpha' Aaa' - 2\,6' Baa' - 2\gamma' Caa' \\
& + \alpha'' Aaa + 6'' Baa + \gamma'' Caa
\end{aligned}$$

Si itaque brevitatis caussa statuimus

$$\begin{aligned}
A\alpha + B6 + C\gamma &= D \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\
A\alpha' + B6' + C\gamma' &= D' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \\
A\alpha'' + B6'' + C\gamma'' &= D'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)
\end{aligned}$$

fit

$$\begin{aligned}
C^3T &= Db'b' - 2D'bb' + D''bb \\
C^3U &= -Da'b' + D'(ab' + ba') - D''ab \\
C^3V &= Da'a' - 2D'aa' + D''aa
\end{aligned}$$

Hinc invenimus, evolutione facta,

$$C^6(TV - UU) = (DD'' - D'D')(ab' - ba')^2 = (DD'' - D'D')CC$$

et proin formulam pro mensura curvaturae

$$k = \frac{DD'' - D'D'}{(AA + BB + CC)^2}$$

11.

Formulae modo inventae iam aliam superstruemus, quae inter fertilissima theoremata in doctrina de superficiebus curvis referenda est. Introducamus sequentes notationes:

$$\begin{aligned}
aa + bb + cc &= E \\
aa' + bb' + cc' &= F \\
a'a' + b'b' + c'c' &= G \\
a\alpha + b6 + c\gamma &= m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4) \\
a\alpha' + b6' + c\gamma' &= m' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5) \\
a\alpha'' + b6'' + c\gamma'' &= m'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6) \\
a'\alpha + b'6 + c'\gamma &= n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7) \\
a'\alpha' + b'6' + c'\gamma' &= n' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8) \\
a'\alpha'' + b'6'' + c'\gamma'' &= n'' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9) \\
AA + BB + CC &= EG - FF = \Delta
\end{aligned}$$

Eliminemus ex aequationibus 1, 4, 7, quantitates 6, γ, quod fit multiplicando illas per $bc' - cb'$, $b'C - c'B$, $cB - bC$, et addendo: ita oritur

$$\begin{aligned}
& (A(bc' - cb') + a(b'C - c'B) + a'(cB - bC))\alpha \\
& = D(bc' - cb') + m(b'C - c'B) + n(cB - bC)
\end{aligned}$$

quam aequationem facile transformamus in hanc:

$$AD = \alpha\Delta + a(nF - mG) + a'(mF - nE)$$

Simili modo eliminatio quantitatum α, γ vel α, 6 ex iisdem aequationibus suppeditat

$$\begin{aligned}
BD &= 6\Delta + b(nF - mG) + b'(mF - nE) \\
CD &= \gamma\Delta + c(nF - mG) + c'(mF - nE)
\end{aligned}$$

Multiplicando has tres aequationes per α'', $6''$, γ'' et addendo obtinemus

$$DD' = (\alpha 6'' + 6 6'' + \gamma\gamma'')\Delta + m''(nF - mG) + n''(mF - nE) \quad \ldots (10)$$

Si perinde tractamus aequationes 2, 5, 8, prodit

$$\begin{aligned}
AD' &= \alpha'\Delta + a(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E) \\
BD' &= 6'\Delta + b(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E) \\
CD' &= \gamma'\Delta + c(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E)
\end{aligned}$$

quibus aequationibus per α', $6'$, γ' multiplicatis, additio suppeditat:

$$D'D' = (\alpha'\alpha' + 6'6' + \gamma'\gamma')\Delta + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E)$$

Combinatio huius aequationis cum aequatione (10) producit

$$DD''-D'D' = (\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''-\alpha'\alpha'-\beta'\beta'-\gamma'\gamma')\Delta + E(n'n'-nn'')+F(nm''-2m'n'+mn'')+G(m'm'-mm'')$$

Iam patet esse

$$\frac{dE}{dp}=2m,\quad \frac{dE}{dq}=2m',\quad \frac{dF}{dp}=m'+n,\quad \frac{dF}{dq}=m''+n',\quad \frac{dG}{dp}=2n',\quad \frac{dG}{dq}=2n''$$

sive

$$m=\tfrac{1}{2}\frac{dE}{dp},\qquad m'=\tfrac{1}{2}\frac{dE}{dq},\qquad m''=\frac{dF}{dq}-\tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp}$$
$$n=\frac{dF}{dp}-\tfrac{1}{2}\frac{dE}{dq},\qquad n'=\tfrac{1}{2}\frac{dG}{dp},\qquad n''=\tfrac{1}{2}\frac{dG}{dq}$$

Porro facile confirmatur, haberi

$$\alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''-\alpha'\alpha'-\beta'\beta'-\gamma'\gamma' = \frac{dn}{dq}-\frac{dn'}{dp}=\frac{dm''}{dp}-\frac{dm'}{dq} = -\tfrac{1}{2}\cdot\frac{ddE}{dq^2}+\frac{ddF}{dp\,.\,dq}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{ddG}{dp^2}$$

Quodsi iam has expressiones diversas in formula pro mensura curvaturae in fine art. praec. eruta substituimus, pervenimus ad formulam sequentem, e solis quantitatibus E, F, G atque earum quotientibus differentialibus primi et secundi ordinis concinnatam:

$$\begin{aligned}4(EG-FF)^2k = {} & E\left(\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq}-2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dq}+\left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right)\\ & +F\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dq}-\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dp}-2\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dF}{dq}+4\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dF}{dq}-2\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dp}\right)\\ & +G\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dp}-2\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dF}{dq}+\left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right)\\ & -2(EG-FF)\left(\frac{ddE}{dq^2}-2\frac{ddF}{dp\,.\,dq}+\frac{ddG}{dp^2}\right)\end{aligned}$$

12.

Quum indefinite habeatur

$$dx^2+dy^2+dz^2 = Edp^2+2Fdp\,.\,dq+Gdq^2$$

patet, $\sqrt{(Edp^2+2Fdp\,.\,dq+Gdq^2)}$ esse expressionem generalem elementi linearis in superficie curva. Docet itaque analysis in art. praec. explicata, ad inveniendam mensuram curvaturae haud opus esse formulis finitis, quae coordinatas x, y, z tamquam functiones indeterminatarum p, q exhibeant, sed sufficere expressionem generalem pro magnitudine cuiusvis elementi linearis. Progrediamur ad aliquot applicationes huius gravissimi theorematis.

Supponamus, superficiem nostram curvam explicari posse in aliam superficiem, curvam seu planam, ita ut cuivis puncto prioris superficiei per coordinatas x, y, z determinato respondeat punctum determinatum superficiei posterioris, cuius coordinatae sint x', y', z'. Manifesto itaque x', y', z' quoque considerari possunt tamquam functiones indeterminatarum p, q, unde pro elemento $\sqrt{(dx'^2+dy'^2+dz'^2)}$ prodibit expressio talis

$$\sqrt{(E'dp^2+2F'dp\,.\,dq+G'dq^2)}$$

denotantibus etiam E', F', G' functiones ipsarum p, q. At per ipsam notionem *explicationis* superficiei in superficiem patet, elementa in utraque superficie correspondentia necessario aequalia esse, adeoque identice fieri

$$E=E',\quad F=F',\quad G=G'.$$

Formula itaque art. praec. sponte perducit ad egregium

THEOREMA. *Si superficies curva in quamcunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

Manifesto quoque *quaevis pars finita superficiei curvae post explicationem in aliam superficiem eandem curvaturam integram retinebit.*

Casum specialem, ad quem geometrae hactenus investigationes suas restrinxerunt, sistunt superficies in planum explicabiles. Theoria nostra sponte docet, talium superficierum mensuram curvaturae in quovis puncto fieri $= 0$, quocirca, si earum indoles secundum modum tertium exprimitur, ubique erit

$$\frac{ddz}{dx^2}\cdot\frac{ddz}{dy^2}-\left(\frac{ddz}{dx\,.\,dy}\right)^2 = 0$$

quod criterium, dudum quidem notum, plerumque nostro saltem iudicio haud eo rigore qui desiderari posset demonstratur.

13.

Quae in art. praec. exposuimus, cohaerent cum modo peculiari superficies considerandi, summopere digno, qui a geometris diligenter excolatur. Scilicet quatenus superficies consideratur non tamquam limes solidi, sed tamquam soli-

dum, cuius dimensio una pro evanescente habetur, flexile quidem, sed non extensibile, qualitates superficiei partim a forma dependent, in quam illa reducta concipitur, partim absolutae sunt, atque invariatae manent, in quamcunque formam illa flectatur. Ad has posteriores, quarum investigatio campum geometriae novum fertilemque aperit, referendae sunt mensura curvaturae atque curvatura integra eo sensu, quo hae expressiones a nobis accipiuntur; porro huc pertinet doctrina de lineis brevissimis, pluraque alia, de quibus in posterum agere nobis reservamus. In hoc considerationis modo superficies plana atque superficies in planum explicabilis, e. g. cylindrica, conica etc. tamquam essentialiter identicae spectantur, modusque genuinus indolem superficiei ita consideratae generaliter exprimendi semper innititur formulae $\sqrt{(E\mathrm{d}p^2+2F\mathrm{d}p.\mathrm{d}q+G\mathrm{d}q^2)}$, quae nexum elementi cum duabus indeterminatis p, q sistit. Sed antequam hoc argumentum ulterius prosequamur, principia theoriae linearum brevissimarum in superficie curva data praemittere oportet.

14.

Indoles lineae curvae in spatio generaliter ita datur, ut coordinatae x, y, z singulis illius punctis respondentes exhibeatur in forma functionum unius variabilis, quam per w denotabimus. Longitudo talis lineae a puncto [illegible] arbitrario usque ad punctum, cuius coordinatae sunt x, y, z, exprimitur per integrale

$$\int \mathrm{d}w.\sqrt{\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}w}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}w}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}\right)^2\right)}$$

Si supponimus, situm lineae curvae variationem infinite parvam pati, ita ut coordinatae singulorum punctorum accipiant variationes $\delta x, \delta y, \delta z$, variatio totius longitudinis invenitur

$$= \int \frac{\mathrm{d}x.\mathrm{d}\delta x+\mathrm{d}y.\mathrm{d}\delta y+\mathrm{d}z.\mathrm{d}\delta z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}$$

quam expressionem in hanc formam transmutamus:

$$\frac{\mathrm{d}x.\delta x+\mathrm{d}y.\delta y+\mathrm{d}z.\delta z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}} - \int\left(\delta x.\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}+\delta y.\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}+\delta z.\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}\right)$$

In casu eo, ubi linea est brevissima inter puncta sua extrema, constat, ea, quae hic sub signo integrali sunt, evanescere debere. Quatenus linea esse debet in superficie data, cuius indoles exprimitur per aequationem $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=0$, etiam variationes $\delta x, \delta y, \delta z$ satisfacere debent aequationi $P\delta x+Q\delta y+R\delta z=0$, unde per principia nota facile colligitur, differentialia

$$\mathrm{d}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}},\quad \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}},\quad \mathrm{d}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}}$$

resp. quantitatibus P, Q, R proportionalia esse debere. Iam sit $\mathrm{d}r$ elementum lineae curvae, λ punctum in superficie sphaerica repraesentans directionem huius elementi, L punctum in superficie sphaerica repraesentans directionem normalis in superficiem curvam; denique sint ξ, η, ζ coordinatae puncti λ, atque X, Y, Z coordinatae puncti L respectu centri sphaerae. Ita erit

$$\mathrm{d}x=\xi\mathrm{d}r,\quad \mathrm{d}y=\eta\mathrm{d}r,\quad \mathrm{d}z=\zeta\mathrm{d}r$$

unde colligimus, differentialia illa fieri $\mathrm{d}\xi, \mathrm{d}\eta, \mathrm{d}\zeta$. Et quum quantitates P, Q, R proportionales sint ipsis X, Y, Z, character lineae brevissimae consistit in aequationibus

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{X}=\frac{\mathrm{d}\eta}{Y}=\frac{\mathrm{d}\zeta}{Z}$$

Ceterum facile perspicitur, $\sqrt{(\mathrm{d}\xi^2+\mathrm{d}\eta^2+\mathrm{d}\zeta^2)}$ aequari arculo in superficie sphaerica, qui mensurat angulum inter directiones tangentium in initio et fine elementi $\mathrm{d}r$, adeoque esse $=\frac{\mathrm{d}r}{\rho}$, si ρ denotet radium curvaturae in hoc loco curvae brevissimae; ita fiet

$$\rho\mathrm{d}\xi=X\mathrm{d}r,\quad \rho\mathrm{d}\eta=Y\mathrm{d}r,\quad \rho\mathrm{d}\zeta=Z\mathrm{d}r$$

15.

Supponamus, in superficie curva a puncto dato A proficisci innumeras curvas brevissimas, quas inter se distinguemus per angulum, quem constituit singularum elementum primum cum elemento primo unius ex his lineis pro prima assumtae: sit φ ille angulus, vel generalius functio illius anguli, nec non r longitudo talis lineae brevissimae a puncto A usque ad punctum, cuius coordinatae sunt x, y, z. Quum itaque valoribus determinatis variabilium r, φ respondeant puncta determinata superficiei, coordinatae x, y, z considerari possunt tamquam functiones ipsarum r, φ. Notationes $\lambda, L, \xi, \eta, \zeta, X, Y, Z$ in eadem significa-

tione retinebimus, in qua in art. praec. acceptae fuerunt. modo indefinite ad punctum indefinitum cuiuslibet linearum brevissimarum referantur.

Lineae brevissimae omnes, quae sunt aequalis longitudinis r, terminabuntur ad aliam lineam, cuius longitudinem ab initio arbitrario numeratam denotamus per v. Considerari poterit itaque v tamquam functio indeterminatarum r, φ, et si per λ' designamus punctum in superficie sphaerica respondens directioni elementi dv, nec non per ξ', η', ζ' coordinatas huius puncti respectu centri sphaerae, habebimus:

$$\frac{dx}{d\varphi} = \xi' \cdot \frac{dv}{d\varphi}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \eta' \cdot \frac{dv}{d\varphi}, \quad \frac{dz}{d\varphi} = \zeta' \cdot \frac{dv}{d\varphi}$$

Hinc et ex

$$\frac{dx}{dr} = \xi, \quad \frac{dy}{dr} = \eta, \quad \frac{dz}{dr} = \zeta$$

sequitur

$$\frac{dx}{dr} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{dy}{dr} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{dz}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \cos\lambda\lambda' \cdot \frac{dv}{d\varphi}$$

Membrum primum huius aequationis, quod etiam erit functio ipsarum r, φ, per S denotamus; cuius differentiatio secundum r suppeditat:

$$\frac{dS}{dr} = \frac{ddx}{dr^2} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{ddy}{dr^2} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{ddz}{dr^2} \cdot \frac{dz}{d\varphi} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d\left(\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right)}{d\varphi}$$
$$= \frac{d\xi}{dr} \cdot \frac{dx}{d\varphi} + \frac{d\eta}{dr} \cdot \frac{dy}{d\varphi} + \frac{d\zeta}{dr} \cdot \frac{dz}{d\varphi} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{d(\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta)}{d\varphi}$$

Sed $\xi\xi + \eta\eta + \zeta\zeta = 1$, adeoque ipsius differentiale $= 0$; et per art. praec. habemus, si etiam hic ρ denotat radium curvaturae in linea r,

$$\frac{d\xi}{dr} = \frac{X}{\rho}, \quad \frac{d\eta}{dr} = \frac{Y}{\rho}, \quad \frac{d\zeta}{dr} = \frac{Z}{\rho}$$

Ita obtinemus

$$\frac{dS}{dr} = \frac{1}{\rho} \cdot (X\xi' + Y\eta' + Z\zeta') \cdot \frac{dv}{d\varphi} = \frac{1}{\rho} \cdot \cos L\lambda' \cdot \frac{dv}{d\varphi} = 0$$

quoniam manifesto λ' iacet in circulo maximo, cuius polus L. Hinc itaque concludimus, S independentem esse ab r et proin functionem solius φ. At pro $r = 0$ manifesto fit $v = 0$, et proin etiam $\frac{dv}{d\varphi} = 0$, nec non $S = 0$, independenter a φ. Necessario itaque generaliter esse debebit $S = 0$, adeoque $\cos\lambda\lambda' = 0$, i. e. $\lambda\lambda' = 90^0$. Hinc colligimus

THEOREMA. *Ductis in superficie curva ab eodem puncto initiali innumeris lineis brevissimis aequalis longitudinis, linea earum extremitates iungens ad illas singulas erit normalis.*

Operae pretium esse duximus, hoc theorema e proprietate fundamentali linearum brevissimarum deducere: ceterum eius veritas etiam absque calculo per sequens ratiocinium intelligi potest. Sint AB, AB' duae lineae brevissimae eiusdem longitudinis, angulum infinite parvum ad A includentes, supponamusque, alterutrum angulorum elementi BB' cum lineis $BA, B'A$ differre quantitate finita ab angulo recto, unde per legem continuitatis alter maior alter minor erit angulo recto. Supponamus, angulum ad B esse $= 90^0 - \omega$, capiamusque in linea BA punctum C, ita ut sit $BC = BB' \cdot \operatorname{cosec}\omega$: hinc quum triangulum infinite parvum $BB'C$ tamquam planum tractare liceat, erit $CB' = BC \cdot \cos\omega$, et proin

$$AC + CB' = AC + BC \cdot \cos\omega = AB - BC \cdot (1 - \cos\omega) = AB' - BC(1 - \cos\omega)$$

i. e. transitus a puncto A ad B' per punctum C brevior linea brevissima. Q. E. A.

16.

Theoremati art. pracc. associamus aliud, quod ita enunciamus. *Si in superficie curva concipitur linea qualiscunque, a cuius punctis singulis proficiscantur sub angulis rectis et versus eandem plagam innumerae lineae brevissimae aequalis longitudinis, curva, quae earum extremitates alteras iungit, illas singulas sub angulis rectis secabit.* Ad demonstrationem nihil in analysi praecedente mutandum est, nisi quod φ designare debet longitudinem curvae *datae* inde a puncto arbitrario numeratam, aut si mavis functionem huius longitudinis; ita omnia ratiocinia etiamnum valebunt, ea modificatione, quod veritas aequationis $S = 0$ pro $r = 0$ nunc iam in ipsa hypothesi implicatur. Ceterum hoc alterum theorema generalius est praecedente, quod adeo in illo comprehendi censeri potest, dum pro linea data adoptamus circulum infinite parvum circa centrum A descriptum. Denique monemus, hic quoque considerationes geometricas analyseos vice fungi posse, quibus tamen, quum satis obviae sint, hic non immoramur.

17.

Revertimur ad formulam $\sqrt{(E\mathrm{d}p^2 + 2F\mathrm{d}p.\mathrm{d}q + G\mathrm{d}q^2)}$, quae indefinite

magnitudinem elementi linearis in superficie curva exprimit, atque ante omnia significationem geometricam coëfficientium E, F, G examinamus. Iam in art. 5 monuimus, in superficie curva concipi posse duo systemata linearum, alterum, in quibus singulis sola p sit variabilis, q constans; alterum, in quibus sola q variabilis, p constans. Quodlibet punctum superficiei considerari potest tamquam intersectio lineae primi systematis cum linea secundi: tuncque elementum lineae primae huic puncto adiacens et variationi $\mathrm{d}p$ respondens erit $= \sqrt{E}.\mathrm{d}p$, nec non elementum lineae secundae respondens variationi $\mathrm{d}q$ erit $= \sqrt{G}.\mathrm{d}q$; denique denotando per ω angulum inter haec elementa, facile perspicitur, fieri $\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$. Area autem elementi parallelogrammatici in superficie curva inter duas lineas primi systematis, quibus respondent q, $q+\mathrm{d}q$, atque duas lineas systematis secundi, quibus respondent p, $p+\mathrm{d}p$, erit $\sqrt{(EG-FF)}\mathrm{d}p.\mathrm{d}q$.

Lineae quaecunque in superficie curva ad neutrum illorum systematum pertinens, oritur, dum p et q concipiuntur esse functiones unius variabilis novae, vel altera illarum functio alterius. Sit s longitudo talis curvae ab initio arbitrario numerata et versus directionem utramvis pro positiva habita. Denotemus per θ angulum, quem efficit elementum $\mathrm{d}s = \sqrt{(E\mathrm{d}p^2+2F\mathrm{d}p.\mathrm{d}q+G\mathrm{d}q^2)}$ cum linea primi systematis per initium elementi ducta, et quidem ne ulla ambiguitas remaneat, hunc angulum semper ab eo ramo illius lineae, in quo valores ipsius p crescunt, inchoari, et versus eam plagam positive accipi supponemus, versus quam valores ipsius q crescunt. His ita intellectis facile perspicitur haberi

$$\cos\theta.\mathrm{d}s = \sqrt{E}.\mathrm{d}p+\sqrt{G}.\cos\omega.\mathrm{d}q = \frac{E\mathrm{d}p+F\mathrm{d}q}{\sqrt{E}}$$
$$\sin\theta.\mathrm{d}s = \sqrt{G}.\sin\omega.\mathrm{d}q = \frac{\sqrt{(EG-FF)}.\mathrm{d}q}{\sqrt{E}}$$

18.

Investigabimus nunc, quaenam sit conditio, ut haec linea sit brevissima. Quum ipsius longitudo s expressa sit per integrale

$$s = \int\sqrt{(E\mathrm{d}p^2+2F\mathrm{d}p.\mathrm{d}q+G\mathrm{d}q^2)}$$

conditio minimi requirit, ut variatio huius integralis a mutatione infinite parva tractus lineae oriunda fiat $= 0$. Calculus ad propositum nostrum in hoc casu commodius absolvitur, si p tamquam functionem ipsius q consideramus. Quo

pacto, si variatio per characteristicam δ denotatur, habemus

$$\delta s = \int\frac{(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p^2+\frac{2\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p.\mathrm{d}q+\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q^2)\delta p+(2E\mathrm{d}p+2F\mathrm{d}q)\mathrm{d}\delta p}{2\,\mathrm{d}s}$$
$$= \frac{E\mathrm{d}p+F\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}.\delta p+\int\delta p.\{\frac{\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p^2+\frac{2\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p.\mathrm{d}q+\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q^2}{2\,\mathrm{d}s}-\mathrm{d}.\frac{E\mathrm{d}p+F\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\}$$

constatque, quae hic sunt sub signo integrali, independenter a δp evanescere debere. Fit itaque

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p^2+\frac{2\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p.\mathrm{d}q+\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q^2 = 2\,\mathrm{d}s.\mathrm{d}.\frac{E\mathrm{d}p+F\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}$$
$$= 2\,\mathrm{d}s.\mathrm{d}.\sqrt{E}.\cos\theta = \frac{\mathrm{d}s.\mathrm{d}E.\cos\theta}{\sqrt{E}}-2\,\mathrm{d}s.\mathrm{d}\theta.\sqrt{E}.\sin\theta$$
$$= \frac{(E\mathrm{d}p+F\mathrm{d}q)\mathrm{d}E}{E}-\sqrt{(EG-FF)}.\mathrm{d}q.\mathrm{d}\theta$$
$$= (\frac{E\mathrm{d}p+F\mathrm{d}q}{E}).(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p+\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}q)-2\sqrt{(EG-FF)}.\mathrm{d}q.\mathrm{d}\theta$$

Hinc itaque nanciscimur aequationem conditionalem pro linea brevissima sequentem:

$$\sqrt{(EG-FF)}.\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\frac{F}{E}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p+\tfrac{1}{2}.\frac{F}{E}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}q+\tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p-\tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

quam etiam ita scribere licet

$$\sqrt{(EG-FF)}.\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{2}\frac{F}{E}.\mathrm{d}E+\tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p-\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}p-\tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

Ceterum adiumento aequationis

$$\mathrm{cotg}\,\theta = \frac{E}{\sqrt{(EG-FF)}}.\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}+\frac{F}{\sqrt{(EG-FF)}}$$

ex illa aequatione angulus θ eliminari, atque sic aequatio differentio-differentialis inter p et q evolvi potest, quae tamen magis complicata et ad applicationes minus utilis evaderet, quam praecedens.

19.

Formulae generales, quas pro mensura curvaturae et pro variatione directionis lineae brevissimae in artt. 11. 18 eruimus, multo simpliciores fiunt, si quantitates p, q ita sunt electae, ut lineae primi systematis lineas secundi systematis ubique orthogonaliter secent, i. e. ut generaliter habeatur $\omega = 90^0$, sive $F = 0$. Tunc scilicet fit, pro mensura curvaturae,

$$4EEGGk = E.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}q} + E(\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p})^2 + G.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}p}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p} + G(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q})^2 - 2EG(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q^2} + \frac{\mathrm{d}\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p^2})$$

et pro variatione anguli ϑ

$$\sqrt{EG}.\mathrm{d}\vartheta = \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q}.\mathrm{d}p - \tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

Inter varios casus, in quibus haec conditio orthogonalitatis valet, primarium locum tenet is, ubi lineae omnes alterutrius systematis, e. g. primi, sunt lineae brevissimae. Hic itaque pro valore constante ipsius q, angulus ϑ fit $= 0$, unde aequatio pro variatione anguli ϑ modo tradita docet, fieri debere $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}q} = 0$, sive coëfficientem E a q independentem, i. e. E esse debet vel constans vel functio solius p. Simplicissimum erit, pro p adoptare longitudinem ipsam cuiusque lineae primi systematis, et quidem, quoties omnes lineae primi systematis in uno puncto concurrunt, ab hoc puncto numeratam, vel, si communis intersectio non adest, a qualibet linea secundi systematis. Quibus ita intellectis patet, p et q iam eadem denotare, quae in artt. 15, 16 per r et φ expresseramus, atque fieri $E = 1$. Ita duae formulae praecedentes iam transeunt in has:

$$4GGk = (\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p})^2 - 2G\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p^2}$$

$$\sqrt{G}.\mathrm{d}\vartheta = -\tfrac{1}{2}.\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

vel statuendo $\sqrt{G} = m$,

$$k = -\tfrac{1}{m}.\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p^2}, \qquad \mathrm{d}\vartheta = -\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q$$

Generaliter loquendo m erit functio ipsarum p, q atque $m\mathrm{d}q$ expressio elementi cuiusvis lineae secundi systematis. In casu speciali autem, ubi omnes lineae p ab eodem puncto proficiscuntur, manifesto pro $p = 0$ esse debet $m = 0$; porro si in hoc casu pro q adoptamus angulum ipsum, quem elementum primum cuiusvis lineae primi systematis facit cum elemento alicuius ex ipsis ad arbitrium electae, quum pro valore infinite parvo ipsius p, elementum lineae secundi systematis (quae considerari potest tamquam circulus radio p descriptus), sit $= p\mathrm{d}q$, erit pro valore infinite parvo ipsius p, $m = p$, adeoque, pro $p = 0$ simul $m = 0$ et $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p} = 1$.

20.

Immoremur adhuc eidem suppositioni, puta p designare indefinite longitudinem lineae brevissimae a puncto determinato A ad punctum quodlibet superficiei ductum, atque q angulum, quem primum elementum huius lineae efficit cum elemento primo alicuius lineae brevissimae ex A proficiscentis datae. Sit B punctum determinatum in hac linea pro qua $q = 0$, atque C aliud punctum determinatum superficiei, pro quo valorem ipsius q simpliciter per A designabimus. Supponamus, puncta B, C per lineam brevissimam iuncta, cuius partes, inde a puncto B numeratas, indefinite ut in art. 18 per s denotabimus, nec non perinde ut illic, per ϑ angulum, quem quodvis elementum $\mathrm{d}s$ facit cum elemento $\mathrm{d}p$: denique sint ϑ^0, ϑ' valores anguli ϑ in punctis B, C. Habemus itaque in superficie curva triangulum lineis brevissimis inclusum, eiusque anguli ad B et C, per has ipsas literas simpliciter designandi aequales erunt ille complemento anguli ϑ^0 ad 180^0; hic ipsi angulo ϑ'. Sed quum analysin nostram inspicienti facile pateat, omnes angulos non per gradus sed per numeros expressos concipi, ita ut angulus $57^0\,17'\,45''$, cui respondet arcus radio aequalis, pro unitate habeatur, statuere oportet, denotando per 2π peripheriam circuli

$$\vartheta^0 = \pi - B, \qquad \vartheta' = C$$

Inquiramus nunc in curvaturam integram huius trianguli, quae fit $= \int k\mathrm{d}\sigma$, denotante $\mathrm{d}\sigma$ elementum superficiale trianguli; quare quum hoc elementum exprimatur per $m\mathrm{d}p.\mathrm{d}q$, eruere oportet integrale $\iint km\mathrm{d}p.\mathrm{d}q$ supra totam trianguli superficiem. Incipiamus ab integratione secundum p, quae propter $k = -\frac{1}{m}.\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p^2}$, suppeditat $\mathrm{d}q.(\mathrm{Const.} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p})$ pro curvatura integra areae iacentis inter lineas primi systematis, quibus respondent valores indeterminatae secundae q, $q + \mathrm{d}q$: quum haec curvatura pro $p = 0$ evanescere debeat, quantitas constans per integrationem introducta aequalis esse debet valori ipsius $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}$ pro $p = 0$, i. e. unitati. Habemus itaque $\mathrm{d}q(1 - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p})$, ubi pro $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}$ accipere oportet valorem respondentem fini illius areae in linea CB. In hac linea vero fit per art. praec. $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}p}.\mathrm{d}q = -\mathrm{d}\vartheta$, unde expressio nostra mutatur in $\mathrm{d}q + \mathrm{d}\vartheta$. Accedente iam integratione altera a $q = 0$ usque ad $q = A$ extendenda, obtinemus curvaturam integram trianguli $= A + \vartheta' - \vartheta^0 = A + B + C - \pi$.

Curvatura integra aequalis est areae eius partis superficiei sphaericae, quae respondet triangulo, signo positivo vel negativo affectae, prout superficies curva, in qua triangulum iacet, est concavo-concava vel concavo-convexa: pro unitate areae accipiendum est quadratum, cuius latus est unitas (radius sphaerae), quo pacto superficies tota sphaerae fit $= 4\pi$. Est itaque pars superficiei sphaericae

triangulo respondens ad sphaerae superficiem integram ut $\pm(A+B+C-\pi)$ ad 4π. Hoc theorema, quod ni fallimur ad elegantissima in theoria superficierum curvarum referendum esse videtur, etiam sequenti modo enuntiari potest:

Excessus summae angulorum trianguli a lineis brevissimis in superficie curva concavo-concava formati ultra 180^0, *vel defectus summae angulorum trianguli a lineis brevissimis in superficie curva concavo-convexa formati a* 180^0 *mensuratur per aream partis superficiei sphaericae, quae illi triangulo per directiones normalium respondet, si superficies integra* 720 *gradibus aequiparatur.*

Generalius in quovis polygono n laterum, quae singula formantur per lineas brevissimas, excessus summae angulorum supra $2n-4$ rectos, vel defectus a $2n-4$ rectis (pro indole curvaturae superficiei), aequatur areae polygoni respondentis in superficie sphaerica, dum tota superficies sphaerae 720 gradibus aequiparatur, uti per discerptionem polygoni in triangula e theoremate praecedenti sponte demanat.

21.

Restituamus characteribus p, q, E, F, G, ω significationes generales, quibus supra accepti fuerant, supponamusque, indolem superficiei curvae praeterea alio simili modo per duas alias variabiles p', q' determinari, ubi elementum lineare indefinitum exprimatur per

$$\sqrt{(E'\mathrm{d}p'^2+2F'\mathrm{d}p'.\mathrm{d}q'+G'\mathrm{d}q'^2)}$$

Ita cuivis puncto superficiei per valores determinatos variabilium p, q definito respondebunt valores determinati variabilium p', q', quocirca hae erunt functiones ipsarum p, q, e quarum differentiatione prodire supponemus

$$\mathrm{d}p' = \alpha\mathrm{d}p+\mathfrak{b}\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}q' = \gamma\mathrm{d}p+\delta\mathrm{d}q$$

Iam proponimus nobis investigare significationem geometricam horum coëfficientium $\alpha, \mathfrak{b}, \gamma, \delta$.

Quatuor itaque nunc systemata linearum in superficie curva concipi possunt, pro quibus resp. q, p, q', p' sint constantes. Si per punctum determinatum, cui respondent variabilium valores p, q, p', q', quatuor lineas ad singula illa systemata pertinentes ductas supponimus, harum elementa, variationibus positivis

$\mathrm{d}p, \mathrm{d}q, \mathrm{d}p', \mathrm{d}q'$, respondentes erunt

$$\sqrt{E}.\mathrm{d}p, \quad \sqrt{G}.\mathrm{d}q, \quad \sqrt{E'}.\mathrm{d}q', \quad \sqrt{G'}.\mathrm{d}q'$$

Angulos, quos horum elementorum directiones faciunt cum directione fixa arbitraria, denotabimus per M, N, M', N', numerando eo sensu, quo iacet secunda respectu primae, ita ut $\sin(N-M)$ fiat quantitas positiva: eodem sensu iacere supponemus (quod licet) quartam respectu tertiae, ita ut etiam $\sin(N'-M')$ sit quantitas positiva. His ita intellectis, si consideramus punctum aliud, a priore infinite parum distans, cui respondeant valores variabilium

$$p+\mathrm{d}p, \quad q+\mathrm{d}q, \quad p'+\mathrm{d}p', \quad q'+\mathrm{d}q'$$

levi attentione adhibita cognoscemus, fieri generaliter, i. e. independenter a valoribus variationum $\mathrm{d}p, \mathrm{d}q, \mathrm{d}p', \mathrm{d}q'$,

$$\sqrt{E}.\mathrm{d}p.\sin M+\sqrt{G}.\mathrm{d}q.\sin N = \sqrt{E'}.\mathrm{d}p'.\sin M'+\sqrt{G'}.\mathrm{d}q'.\sin N'$$

quum utraque expressio nihil aliud sit, nisi distantia puncti novi a linea, a qua anguli directionum incipiunt. Sed habemus, per notationem iam supra introductam $N-M=\omega$, et per analogiam statuemus $N'-M'=\omega'$, nec non insuper $N-M'=\psi$. Ita aequatio modo inventa exhiberi potest in forma sequenti

$$\sqrt{E}.\mathrm{d}p.\sin(M'-\omega+\psi)+\sqrt{G}.\mathrm{d}q.\sin(M'+\psi) = \sqrt{E'}.\mathrm{d}p'.\sin M'+\sqrt{G'}.\mathrm{d}q'.\sin(M'+\omega')$$

vel ita

$$\sqrt{E}.\mathrm{d}p.\sin(N'-\omega-\omega'+\psi)+\sqrt{G}.\mathrm{d}q.\sin(N'-\omega'+\psi) = \sqrt{E'}.\mathrm{d}p'.\sin(N'-\omega')+\sqrt{G'}.\mathrm{d}q'.\sin N'$$

Et quum aequatio manifesto independens esse debeat a directione initiali, hanc ad lubitum accipere licet. Statuendo itaque in forma secunda $N'=0$, vel in prima $M'=0$, obtinemus aequationes sequentes:

$$\sqrt{E'}.\sin\omega'.\mathrm{d}p' = \sqrt{E}.\sin(\omega+\omega'-\psi).\mathrm{d}p+\sqrt{G}.\sin(\omega'-\psi).\mathrm{d}q$$
$$\sqrt{G'}.\sin\omega'.\mathrm{d}q' = \sqrt{E}.\sin(\psi-\omega).\mathrm{d}p+\sqrt{G}.\sin\psi.\mathrm{d}q$$

quae aequationes quum identicae esse debeant cum his

$$\mathrm{d}p' = \alpha\mathrm{d}p+\mathfrak{b}\mathrm{d}q$$
$$\mathrm{d}q' = \gamma\mathrm{d}p+\delta\mathrm{d}q$$

suppeditabunt determinationem coëfficientium α, ϑ, γ, δ. Erit scilicet

$$\alpha = \sqrt{\frac{E}{E'}}\cdot\frac{\sin(\omega+\omega'-\psi)}{\sin\omega'}, \qquad \vartheta = \sqrt{\frac{G}{E'}}\cdot\frac{\sin(\omega'-\psi)}{\sin\omega'}$$
$$\gamma = \sqrt{\frac{E}{G'}}\cdot\frac{\sin(\psi-\omega)}{\sin\omega'}, \qquad \delta = \sqrt{\frac{G}{G'}}\cdot\frac{\sin\psi}{\sin\omega'}$$

Adiungi debent aequationes

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \cos\omega' = \frac{F'}{\sqrt{E'G'}}, \quad \sin\omega = \sqrt{\frac{EG-FF}{EG}}, \quad \sin\omega' = \sqrt{\frac{E'G'-F'F'}{E'G'}}$$

unde quatuor aequationes ita quoque exhiberi possunt

$$\alpha\sqrt{(E'G'-F'F')} = \sqrt{EG'}\cdot\sin(\omega+\omega'-\psi)$$
$$\vartheta\sqrt{(E'G'-F'F')} = \sqrt{GG'}\cdot\sin(\omega'-\psi)$$
$$\gamma\sqrt{(E'G'-F'F')} = \sqrt{EE'}\cdot\sin(\psi-\omega)$$
$$\delta\sqrt{(E'G'-F'F')} = \sqrt{GE'}\cdot\sin\psi$$

Quum per substitutiones $\mathrm{d}p' = \alpha\mathrm{d}p+\vartheta\mathrm{d}q$, $\mathrm{d}q' = \gamma\mathrm{d}p+\delta\mathrm{d}q$ trinomium $E'\mathrm{d}p'^2+2F'\mathrm{d}p'.\mathrm{d}q'+G'\mathrm{d}q'^2$ transire debeat in $E\mathrm{d}p^2+2F\mathrm{d}p.\mathrm{d}q+G\mathrm{d}q^2$, facile obtinemus

$$EG-FF = (E'G'-F'F')(\alpha\delta-\vartheta\gamma)^2$$

et quum vice versa trinomium posterius rursus transire debeat in prius per substitutionem

$$(\alpha\delta-\vartheta\gamma)\mathrm{d}p = \delta\mathrm{d}p'-\vartheta\mathrm{d}q', \qquad (\alpha\delta-\vartheta\gamma)\mathrm{d}q = -\gamma\mathrm{d}p'+\alpha\mathrm{d}q'$$

invenimus

$$E\delta\delta-2F\gamma\delta+G\gamma\gamma = \tfrac{EG-FF}{E'G'-F'F'}\cdot E'$$
$$E\vartheta\delta-F(\alpha\delta+\vartheta\gamma)+G\alpha\gamma = -\tfrac{EG-FF}{E'G'-F'F'}\cdot F'$$
$$E\vartheta\vartheta-2F\alpha\vartheta+G\alpha\alpha = \tfrac{EG-FF}{E'G'-F'F'}\cdot G'$$

22.

A disquisitione generali art. praec. descendimus ad applicationem latissime patentem, ubi, dum p et q etiam significatione generalissima accipiuntur, pro p', q', adoptamus quantitates in art. 15 per r, φ denotatas, quibus characteribus

etiam hic utemur, scilicet ut pro quovis puncto superficiei r sit distantia minima a puncto determinato, atque φ angulus in hoc puncto inter elementum primum ipsius r atque directionem fixam. Ita habemus $E' = 1$, $F' = 0$, $\omega' = 90^0$; statuemus insuper $\sqrt{G'} = m$, ita ut elementum lineare quodcunque fiat $= \sqrt{(\mathrm{d}r^2+mm\mathrm{d}\varphi^2)}$. Hinc quatuor aequationes in art. praec. pro α, ϑ, γ, δ, erutae, suppeditant:

$$\sqrt{E}.\cos(\omega-\psi) = \tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\sqrt{G}.\cos\psi = \tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$\sqrt{E}.\sin(\psi-\omega) = m.\tfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$
$$\sqrt{G}.\sin\psi = m.\tfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

Ultima et penultima vero has

$$EG-FF = E(\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q})^2-2F.\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}.\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}+G(\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p})^2 \quad \ldots\ldots (5)$$
$$(E.\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}-F.\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}).\tfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} = (F.\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}-G.\tfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}).\tfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} \quad \ldots\ldots (6)$$

Ex his aequationibus petenda est determinatio quantitatum r, φ, ψ et (si opus videtur) m, per p et q: scilicet integratio aequationis (5) dabit r, qua inventa integratio aequationis (6) dabit φ, atque alterutra aequationum (1), (2) ipsam ψ: denique m habebitur per alterutram aequationum (3), (4).

Integratio generalis aequationum (5), (6) necessario duas functiones arbitrarias introducere debet, quae quid sibi velint facile intelligemus, si perpendimus, illas aequationes ad casum eum quem hic consideramus non limitari, sed perinde valere, si r et φ accipiantur in significatione generaliore art. 16, ita ut sit r longitudo lineae brevissimae ad lineam arbitrariam determinatam normaliter ductae, atque φ functio arbitraria longitudinis eius partis lineae, quae inter lineam brevissimam indefinitam et punctum arbitrarium determinatum intercipitur. Solutio itaque generalis haec omnia indefinite amplecti debet, functionesque arbitrariae tunc demum in definitas abibunt, quando linea illa arbitraria atque functio partium, quam φ exhibere debet, praescriptae sunt. In casu nostro circulus infinite parvus adoptari potest, centrum in eo puncto habens, a quo distantiae r numerantur, et φ denotabit partes huius circuli ipsas per radium divisas,

unde facile colligitur, aequationes (5), (6) pro casu nostro complete sufficere, dummodo ea, quae indefinita relinquunt, ei conditioni accommodentur, ut r et φ pro puncto illo initiali atque punctis ab eo infinite parum distantibus quadrent.

Ceterum quod attinet ad integrationem ipsam aequationum (5), (6), constat, eam reduci posse ad integrationem aequationum differentialium vulgarium, quae tamen plerumque tam intricatae evadunt, ut parum lucri inde redundet. Contra evolutio in series, quae ad usus practicos, quoties de partibus superficiei modicis agitur, abunde sufficiunt, nullis difficultatibus obnoxia est, atque sic formulae allatae fontem uberem aperiunt, ad multa problemata gravissima solvenda. Hoc vero loco exemplum unicum ad methodi indolem monstrandam evolvemus.

23.

Considerabimus casum eum, ubi omnes lineae, pro quibus p constans est, sunt lineae brevissimae orthogonaliter secantes lineam, pro qua $\varphi = 0$, et quam tamquam lineam abscissarum contemplari possumus. Sit A punctum, pro quo $r = 0$, D punctum indefinitum in linea abscissarum, $AD = p$, B punctum indefinitum in linea brevissima ipsi AD in D normali, atque $BD = q$, ita ut p considerari possit tamquam abscissa, q tamquam ordinata puncti B; abscissas positivas assumimus in eo ramo lineae abscissarum, cui respondet $\varphi = 0$, dum r semper tamquam quantitatem positivam spectamus; ordinatas positivas statuimus in plaga ea, ubi φ numeratur inter 0 et 180^0.

Per theorema art. 16 habebimus $\omega = 90^0$, $F = 0$, nec non $G = 1$; statuemus insuper $\sqrt{E} = n$. Erit itaque n functio ipsarum p, q, et quidem talis, quae pro $q = 0$ fieri debet $= 1$. Applicatio formulae in art. 18 allatae ad casum nostrum docet, in *quavis* linea brevissima esse debere $\mathrm{d}\theta = -\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q}\cdot\mathrm{d}p$, denotante θ angulum inter elementum huius lineae atque elementum lineae, pro qua q constans: iam quum linea abscissarum ipsa sit brevissima, atque pro ea ubique $\theta = 0$, patet, pro $q = 0$ ubique fieri debere $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q} = 0$. Hinc igitur colligimus, si n in seriem secundum potestates ipsius q progredientem evolvatur, hanc habere debere formam sequentem

$$n = 1 + fqq + gq^3 + hq^4 + \text{ etc.}$$

ubi f, g, h etc. erunt functiones ipsius p, et quidem statuemus

$$f = f^0 + f'p + f''pp + \text{ etc.}$$
$$g = g^0 + gp + g''pp + \text{ etc.}$$
$$h = h^0 + h'p + h''pp + \text{ etc.}$$

etc. sive

$$n = 1 + f^0qq + f'pqq + f''ppqq + \text{ etc.}$$
$$+ g^0q^3 + g'pq^3 + \text{ etc.}$$
$$+ h^0q^4 + \text{ etc. etc.}$$

24.

Aequationes art. 22 in casu nostro suppeditant

$$n\sin\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}, \quad \cos\psi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}, \quad -n\cos\psi = m\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}, \quad \sin\psi = m\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$
$$nn = nn\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\right)^2, \quad nn\cdot\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}q}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} + \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = 0$$

Adiumento harum aequationum, quarum quinta et sexta iam in reliquis continentur, series evolvi poterunt pro r, φ, ψ, m, vel pro quibuslibet functionibus harum quantitatum, e quibus eas, quae imprimis attentione sunt dignae, hic sistemus.

Quum pro valoribus infinite parvis ipsarum p, q fieri debeat $rr = pp + qq$, series pro rr incipiet a terminis $pp + qq$: terminos altiorum ordinum obtinemus per methodum coëfficientium indeterminatorum*) adiumento aequationis

$$\left(\tfrac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}p}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}q}\right)^2 = 4rr$$

scilicet

[1] $$rr = pp + \tfrac{2}{3}f^0ppqq + \tfrac{1}{2}f'p^3qq + (\tfrac{2}{5}f'' - \tfrac{4}{15}f^0f^0)p^4qq \text{ etc.}$$
$$+ qq + \tfrac{1}{2}g^0ppq^3 + \tfrac{2}{5}g'p^3q^3$$
$$+ (\tfrac{2}{5}h^0 - \tfrac{4}{15}f^0f^0)ppq^4$$

Dein habemus, ducente formula $r\sin\psi = \frac{1}{2n}\cdot\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}p}$,

[2] $$r\sin\psi = p - \tfrac{1}{3}f^0pqq - \tfrac{1}{4}f'ppqq - (\tfrac{1}{5}f'' + \tfrac{4}{15}f^0f^0)p^3qq \text{ etc.}$$
$$- \tfrac{1}{2}g^0pq^3 - \tfrac{2}{5}g'ppq^3$$
$$- (\tfrac{2}{5}h^0 - \tfrac{4}{15}f^0f^0)pq^4$$

*) Calculum, qui per nonnulla artificia paullulum contrahi potest, hic adscribere superfluum duximus.

nec non per formulam $r\cos\psi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{d}rr}{\mathrm{d}q}$

$$[3]\quad r\cos\psi = q + \tfrac{2}{3}f^0ppq + \tfrac{1}{2}f'p^3q + (\tfrac{2}{3}f'' - \tfrac{4}{15}f^0f^0)p^4q \text{ etc.}$$
$$+ \tfrac{2}{3}g^0ppqq + \tfrac{2}{3}g'p^3qq$$
$$+ (\tfrac{1}{6}h^0 - \tfrac{1}{15}f^0f^0)ppq^3$$

Hinc simul innotescit angulus ψ. Perinde ad computum anguli φ concinnius evolvuntur series pro $r\cos\varphi$ atque $r\sin\varphi$, quibus inserviunt aequationes differentiales partiales

$$\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}p} = n\cos\varphi.\sin\psi - r\sin\varphi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}$$
$$\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}q} = \cos\varphi.\cos\psi - r\sin\varphi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$
$$\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}p} = n\sin\varphi.\sin\psi + r\cos\varphi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p}$$
$$\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}q} = \sin\varphi.\cos\psi + r\cos\varphi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q}$$
$$n\cos\psi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} + \sin\psi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = 0$$

quarum combinatio suppeditat

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}p} + r\cos\psi.\frac{\mathrm{d}.r\cos\varphi}{\mathrm{d}q} = r\cos\varphi$$
$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}p} + r\cos\psi.\frac{\mathrm{d}.r\sin\varphi}{\mathrm{d}q} = r\sin\varphi$$

Hinc facile evolvuntur series pro $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, quarum termini primi manifesto esse debent p et q, puta

$$[4]\quad r\cos\varphi = p + \tfrac{2}{3}f^0pqq + \tfrac{1}{15}f'ppqq + (\tfrac{3}{10}f'' - \tfrac{8}{15}f^0f^0)p^3qq \text{ etc.}$$
$$+ \tfrac{1}{2}g^0pq^3 + \tfrac{7}{20}g'ppq^3$$
$$+ (\tfrac{3}{8}h^0 - \tfrac{7}{15}f^0f^0)pq^4$$
$$[5]\quad r\sin\varphi = q - \tfrac{1}{3}f^0ppq - \tfrac{1}{6}f'p^3q - (\tfrac{1}{10}f'' - \tfrac{7}{10}f^0f^0)p^4q \text{ etc.}$$
$$- \tfrac{1}{2}g^0ppqq - \tfrac{3}{20}g'p^3qq$$
$$- (\tfrac{1}{8}h^0 + \tfrac{13}{30}f^0f^0)ppq^3$$

E combinatione aequationum [2], [3], [4], [5] derivari posset series pro $rr\cos(\psi+\varphi)$, atque hinc, dividendo per seriem [1], series pro $\cos(\psi+\varphi)$, a qua ad seriem pro ipso angulo $\psi+\varphi$ descendere liceret. Elegantius tamen eadem obtinetur sequenti modo. Differentiando aequationem primam et secundam ex iis, quae initio huius art. allatae sunt, obtinemus

$$\sin\psi.\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q} + n\cos\psi.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}q} + \sin\psi.\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}p} = 0$$

qua combinata cum hac

$$n\cos\psi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} + \sin\psi.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}p} = 0$$

prodit

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q} + \frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}(\psi+\varphi)}{\mathrm{d}p} + r\cos\psi.\frac{\mathrm{d}(\psi+\varphi)}{\mathrm{d}q} = 0$$

Ex hac aequatione adiumento methodi coëfficientium indeterminatorum facile eliciemus seriem pro $\psi+\varphi$, si perpendimus, ipsius terminum primum esse debere $\frac{1}{2}\pi$, radio pro unitate accepto, atque denotante 2π peripheriam circuli,

$$[6]\quad \psi+\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - f^0pq - \tfrac{2}{3}f'ppq - (\tfrac{1}{2}f'' - \tfrac{1}{6}f^0f^0)p^3q \text{ etc.}$$
$$- g^0pqq - \tfrac{2}{3}g'ppqq$$
$$- (h^0 - \tfrac{1}{2}f^0f^0)pq^3$$

Operae pretium videtur, etiam aream trianguli ABD in seriem evolvere. Huic evolutioni inservit aequatio conditionalis sequens, quae e considerationibus geometricis satis obviis facile derivatur, et in qua S aream quaesitam denotat:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}p} + r\cos\psi.\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}q} = \frac{r\sin\psi}{n}.\int n\,\mathrm{d}q$$

integratione a $q = 0$ incepta. Hinc scilicet obtinemus per methodum coëfficientium indeterminatorum

$$[7]\quad S = \tfrac{1}{2}pq - \tfrac{1}{12}f^0p^3q - \tfrac{1}{20}f'p^4q - (\tfrac{1}{30}f'' - \tfrac{1}{60}f^0f^0)p^5q \text{ etc.}$$
$$- \tfrac{1}{12}f^0pq^3 - \tfrac{3}{40}g^0p^3qq - \tfrac{1}{20}g'p^4qq$$
$$- \tfrac{17}{120}f'ppq^3 - (\tfrac{11}{120}h^0 + \tfrac{2}{15}f'' + \tfrac{1}{60}f^0f^0)p^3q^3$$
$$- \tfrac{1}{10}g^0pq^4 - \tfrac{3}{40}g'ppq^4$$
$$- (\tfrac{1}{10}h^0 - \tfrac{1}{30}f^0f^0)pq^5$$

25.

A formulis art. praec., quae referuntur ad triangulum a lineis brevissimis formatum rectangulum, progredimur ad generalia. Sit C aliud punctum in ea-

dem linea brevissima DB, pro quo, manente p, characteres $q', r', \varphi', \psi', S'$ eadem designent, quae q, r, φ, ψ, S pro puncto B. Ita oritur triangulum inter puncta A, B, C, cuius angulos per A, B, C, latera opposita per a, b, c, aream per σ denotamus; mensuram curvaturae in punctis A, B, C resp. per $\alpha, \mathfrak{G}, \gamma$ exprimemus. Supponendo itaque (quod licet), quantitates $p, q, q-q'$ esse positivas, habemus

$$A = \varphi - \varphi', \quad B = \psi, \quad C = \pi - \psi', \quad a = q - q', \quad b = r', \quad c = r, \quad \sigma = S - S'$$

Ante omnia aream σ per seriem exprimemus. Mutando in [7] singulas quantitates ad B relatas in eas, quae ad C referuntur, prodit formula pro S', unde, usque ad quantitates sexti ordinis obtinemus

$$\begin{aligned}\sigma = \tfrac{1}{2}p(q-q')\{1 &- \tfrac{1}{6}f^0(pp+qq+qq'+q'q') \\ &- \tfrac{1}{6}{}^1 f'p(6pp+7qq+7qq'+7q'q') \\ &- \tfrac{1}{6}{}^1 g^0(q+q')(3pp+4qq+4qq'+4q'q')\}\end{aligned}$$

Haec formula, adiumento seriei [2] puta

$$c \sin B = p(1 - \tfrac{1}{6}f^0 qq - \tfrac{1}{4}f' pqq - \tfrac{1}{4}g^0 q^3 - \text{ etc.})$$

transit in sequentem

$$\begin{aligned}\sigma = \tfrac{1}{2}ac \sin B\{1 &- \tfrac{1}{6}f^0(pp-qq+qq'+q'q') \\ &- \tfrac{1}{6}{}^1 f'p(6pp-8qq+7qq'+7q'q') \\ &- \tfrac{1}{6}{}^1 g^0(3ppq+3ppq'-6q^3+4qqq'+4qq'q'+4q'^3)\}\end{aligned}$$

Mensura curvaturae pro quovis superficiei puncto fit (per art. 19, ubi m, p, q erant quae hic sunt n, q, p)

$$= -\frac{1}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}n}{\mathrm{d}q^2} = -\frac{2f+6gq+12hqq+\text{etc.}}{1+fqq+\text{etc.}} = -2f-6gq-(12h-2ff)qq- \text{ etc.}$$

Hinc fit, quatenus p, q ad punctum B referuntur,

$$\mathfrak{G} = -2f^0 - 2f'p - 6g^0 q - 2f''pp - 6g'pq - (12h^0 - 2f^0 f^0)qq - \text{ etc.}$$

nec non

$$\begin{aligned}\gamma &= -2f^0 - 2f'p - 6g^0 p' - 2f''pp - 6g'pq' - (12h^0 - 2f^0 f^0)q'q' - \text{ etc.} \\ \alpha &= -2f^0\end{aligned}$$

Introducendo has mensuras curvaturae in serie pro σ, obtinemus expressionem sequentem, usque ad quantitates sexti ordinis (excl.) exactam:

$$\begin{aligned}\sigma = \tfrac{1}{2}ac \sin B\{1 &+ {}_{1\frac{1}{2}0}\alpha(4pp-2qq+3qq'+3q'q') \\ &+ {}_{1\frac{1}{2}0}\mathfrak{G}(3pp-6qq+6qq'+3q'q') \\ &+ {}_{1\frac{1}{2}0}\gamma(3pp-2qq+\ qq'+4q'q')\}\end{aligned}$$

Praecisio eadem manebit, si pro p, q, q' substituimus $c \sin B$, $c \cos B$, $c \cos B - a$, quo pacto prodit

[8]
$$\begin{aligned}\sigma = \tfrac{1}{2}ac \sin B\{1 &+ {}_{1\frac{1}{2}0}\alpha(3aa+4cc- \ 9ac\cos B) \\ &+ {}_{1\frac{1}{2}0}\mathfrak{G}(3aa+3cc-12ac\cos B) \\ &+ {}_{1\frac{1}{2}0}\gamma(4aa+3cc- \ 9ac\cos B)\}\end{aligned}$$

Quum ex hac aequatione omnia, quae ad lineam AD normaliter ad BC ductam referuntur, evanuerint, etiam puncta A, B, C cum correlatis inter se permutare licebit, quapropter erit eadem praecisione

[9]
$$\begin{aligned}\sigma = \tfrac{1}{2}bc \sin A\{1 &+ {}_{1\frac{1}{2}0}\alpha(3bb+3cc-12bc\cos A) \\ &+ {}_{1\frac{1}{2}0}\mathfrak{G}(3bb+4cc- \ 9bc\cos A) \\ &+ {}_{1\frac{1}{2}0}\gamma(4bb+3cc- \ 9bc\cos A)\}\end{aligned}$$

[10]
$$\begin{aligned}\sigma = \tfrac{1}{2}ab \sin C\{1 &+ {}_{1\frac{1}{2}0}\alpha(3aa+4bb- \ 9ab\cos C) \\ &+ {}_{1\frac{1}{2}0}\mathfrak{G}(4aa+3bb- \ 9ab\cos C) \\ &+ {}_{1\frac{1}{2}0}\gamma(3aa+3bb-12ab\cos C)\}\end{aligned}$$

26.

Magnam utilitatem affert consideratio trianguli plani rectilinei, cuius latera aequalia sunt ipsis a, b, c; anguli illius trianguli, quos per A^*, B^*, C^* designabimus, different ab angulis trianguli in superficie curva, puta ab A, B, C quantitatibus secundi ordinis, operaeque pretium erit, has differentias accurate evolvere. Calculorum autem prolixiorum quam difficiliorum, primaria momenta apposuisse sufficiet.

Mutando in formulis [1], [4], [5], quantitates, quae referuntur ad B, in eas, quae referuntur ad C, nanciscemur formulas pro $r'r'$, $r'\cos\varphi'$, $r'\sin\varphi'$. Tunc evolutio expressionis $rr + r'r' - (q-q')^2 - 2r\cos\varphi . r'\cos\varphi' - 2r\sin\varphi . r'\sin\varphi'$, quae fit $= bb + cc - aa - 2bc\cos A = 2bc(\cos A^* - \cos A)$, combinata cum evolutione

expressionis $r\sin\varphi.r'\cos\varphi' - r\cos\varphi.r'\sin\varphi'$, quae fit $= bc\sin A$, suppeditat formulam sequentem

$$\cos A^* - \cos A = -(q-q')p\sin A\{\tfrac{1}{2}f'^0 + \tfrac{1}{6}f'p + \tfrac{1}{4}g^0(q+q') + (\tfrac{1}{10}f'' - \tfrac{1}{15}f^0f^0)pp + \tfrac{3}{20}g'p(q+q') + (\tfrac{1}{8}h^0 - \tfrac{3}{70}f^0f^0)(qq+qq'+q'q') + \text{etc.}\}$$

Hinc fit porro, usque ad quantitates quinti ordinis

$$A^* - A = -(q-q')p\{\tfrac{1}{2}f'^0 + \tfrac{1}{6}f'p + \tfrac{1}{4}g^0(q+q') + \tfrac{1}{10}f''pp + \tfrac{3}{20}g'p(q+q') + \tfrac{1}{8}h^0(qq+qq'+q'q') - \tfrac{1}{70}f^0f^0(7pp+7qq+12qq'+7q'q')\}$$

Combinando hanc formulam cum hac

$$2\sigma = ap(1 - \tfrac{1}{6}f^0(pp+qq+qq'+q'q' - \text{etc.}))$$

atque cum valoribus quantitatum α, $\mathfrak{b}$, γ in art. praec. allatis, obtinemus usque ad quantitates quinti ordinis

$$[11]\quad A^* = A - \sigma\{\tfrac{1}{6}\alpha + \tfrac{1}{12}\mathfrak{b} + \tfrac{1}{12}\gamma + \tfrac{3}{112}f''pp + \tfrac{1}{8}g'p(q+q') + \tfrac{1}{8}h^0(3qq - 2qq' + 3q'q') + \tfrac{1}{70}f^0f^0(4pp - 11qq + 14qq' - 11q'q')\}$$

Per operationes prorsus similes evolvimus

$$[12]\quad B^* = B - \sigma\{\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{6}\mathfrak{b} + \tfrac{1}{12}\gamma + \tfrac{1}{70}f''pp + \tfrac{1}{10}g'p(2q+q') + \tfrac{1}{8}h^0(4qq - 4qq' + 3q'q') - \tfrac{1}{70}f^0f^0(2pp + 8qq - 8qq' + 11q'q')\}$$

$$[13]\quad C^* = C - \sigma\{\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{12}\mathfrak{b} + \tfrac{1}{6}\gamma + \tfrac{1}{70}f''pp + \tfrac{1}{10}g'p(q+2q') + \tfrac{1}{8}h^0(3qq - 4qq' + 4q'q') - \tfrac{1}{70}f^0f^0(2pp + 11qq - 8qq' + 8q'q')\}$$

Hinc simul deducimus, quum summa $A^* + B^* + C^*$ duobus rectis aequalis sit, excessum summae $A + B + C$ supra duos angulos rectos, puta

$$[14]\quad A + B + C = \pi + \sigma\{\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\mathfrak{b} + \tfrac{1}{2}\gamma + \tfrac{1}{2}f''pp + \tfrac{1}{2}g'p(q+q') + (2h^0 - \tfrac{1}{2}f^0f^0)(qq - qq' + q'q')\}$$

Haec ultima aequatio etiam formulae [6] superstrui potuisset.

27.

Si superficies curva est sphaera, cuius radius $= R$, erit

$$\alpha = \mathfrak{b} = \gamma = -2f^0 = \tfrac{1}{RR};\quad f'' = 0,\ g' = 0,\ 6h^0 - f^0f^0 = 0 \text{ sive } k^0 = \tfrac{1}{24RR}$$

Hinc formula [14] fit

$$A + B + C = \pi + \tfrac{\sigma}{RR}$$

quae praecisione absoluta gaudet; formulae 11—13 autem suppeditant

$$A^* = A - \tfrac{\sigma}{3RR} - \tfrac{\sigma}{180RR}(2pp - qq + 4qq' - q'q')$$
$$B^* = B - \tfrac{\sigma}{3RR} + \tfrac{\sigma}{180RR}(pp - 2qq + 2qq' + q'q')$$
$$C^* = C - \tfrac{\sigma}{3RR} + \tfrac{\sigma}{180RR}(pp + qq + 2qq' - 2q'q')$$

sive aeque exacte

$$A^* = A - \tfrac{\sigma}{3RR} - \tfrac{\sigma}{180RR}(bb + cc - 2aa)$$
$$B^* = B - \tfrac{\sigma}{3RR} - \tfrac{\sigma}{180RR}(aa + cc - 2bb)$$
$$C^* = C - \tfrac{\sigma}{3RR} - \tfrac{\sigma}{180RR}(aa + bb - 2cc)$$

Neglectis quantitatibus quarti ordinis, prodit hinc theorema notum a clar. LEGENDRE primo propositum.

28.

Formulae nostrae generales, reiectis terminis quarti ordinis, persimplices evadunt, scilicet

$$A^* = A - \tfrac{1}{12}\sigma(2\alpha + \mathfrak{b} + \gamma)$$
$$B^* = B - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + 2\mathfrak{b} + \gamma)$$
$$C^* = C - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + \mathfrak{b} + 2\gamma)$$

Angulis itaque A, B, C in superficie non sphaerica reductiones inaequales applicandae sunt, ut mutatorum sinus lateribus oppositis fiant proportionales. Inaequalitas generaliter loquendo erit tertii ordinis, at si superficies parum a sphaera discrepat, illa ad ordinem altiorem referenda erit: in triangulis vel maximis in superficie telluris, quorum quidem angulos dimetiri licet, differentia semper pro

insensibili haberi potest. Ita e.g. in triangulo maximo inter ea, quae annis praecedentibus dimensi sumus, puta inter puncta Hohehagen, Brocken, Inselsberg, ubi excessus summae angulorum fuit $= 14''85348$, calculus sequentes reductiones angulis applicandas prodidit:

Hohehagen	$-4''95113$
Brocken	$-4,95104$
Inselsberg	$-4,95131$

29.

Coronidis causa adhuc comparationem areae trianguli in superficie curva cum area trianguli rectilinei, cuius latera sunt a, b, c, adiiciemus. Aream posteriorem denotabimus per σ^*, quae fit $= \frac{1}{2}bc\sin A^* = \frac{1}{2}ac\sin B^* = \frac{1}{2}ab\sin C^*$

Habemus, usque ad quantitates ordinis quarti

$$\sin A^* = \sin A - \tfrac{1}{12}\sigma\cos A.(2\alpha + \vec{6} + \gamma)$$

sive aeque exacte

$$\sin A = \sin A^*.(1 + \tfrac{1}{24}bc\cos A.(2\alpha + \vec{6} + \gamma))$$

Substituto hoc valore in formula [9], erit usque ad quantitates sexti ordinis

$$\sigma = \tfrac{1}{2}bc\sin A^*.\{1 + \tfrac{1}{12}\alpha(3bb + 3cc - 2bc\cos A) + \tfrac{1}{12}\vec{6}(3bb + 4cc - 4bc\cos A) + \tfrac{1}{12}\gamma(4bb + 3cc - 4bc\cos A)\}$$

sive aeque exacte

$$\sigma = \sigma^*\{1 + \tfrac{1}{12}\alpha(aa + 2bb + 2cc) + \tfrac{1}{12}\vec{6}(2aa + bb + 2cc) + \tfrac{1}{12}\gamma(2aa + 2bb + cc)\}$$

Pro superficie sphaerica haec formula sequentem induit formam

$$\sigma = \sigma^*(1 + \tfrac{1}{24}\alpha(aa + bb + cc))$$

cuius loco etiam sequentem salva eadem praecisione adoptari posse facile confirmatur

$$\sigma = \sigma^*\sqrt{\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\sin A^*.\sin B^*.\sin C^*}}$$

Si eadem formula triangulis in superficie curva non sphaerica applicatur, error generaliter loquendo erit quinti ordinis, sed insensibilis in omnibus triangulis, qualia in superficie telluris dimetiri licet.

UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

GEGENSTÄNDE DER HÖHERN GEODAESIE

ERSTE ABHANDLUNG

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS

DER KÖNIGL. SOCIETÄT ÜBERGEBEN MDCCCXLIII OCT. XXIII.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Band II.
Göttingen 1844.
