



METHODUS NOVA
INTEGRALIIUM VALORES
PER APPROXIMATIONEM INVENIENDI.

1.

Inter methodos ad determinationem numericam approximatum integralium propositas insignem tenent locum regulae, quas praeunte summo NEWTON evoluntas dedit CORES. Scilicet si requiritur valor integralis $\int y dx$ ab $x = g$ usque ad $x = h$ sumendus, valores ipsius y pro his valoribus extremis ipsius x et pro quocunque aliis intermediis a primo ad ultimum incrementis aequalibus progredientibus, multiplicandi sunt per certos coefficientes numericos, quo facto productorum aggregatum in $h - g$ ductum integrale quaesitum suppeditabit, eo maiore praecisione, quo plures termini in hac operatione adhibentur. Quum principia huius methodi, quae a geometris rarius quam par est in usum vocari videtur, nusquam quod sciam plenius explicata sint, pauca de his praemittere ab instituto nostro haud alienum erit.

2.

Sit $n + 1$ multitudo terminorum, quos in usum vocare placuit, statuamusque $h - g = \Delta$, ita ut valores ipsius x sint $g, g + \frac{\Delta}{n}, g + \frac{2\Delta}{n}, g + \frac{3\Delta}{n}$ etc. usque ad $g + \Delta$, respondeantque iisdem resp. valores ipsius y hi A, A', A'', A''' etc. usque ad $A^{(n)}$; denique ponatur indefinite $x = g + \Delta t$, ita ut y etiam spectari possit tamquam functio ipsius t . Designemus per Y functionem sequentem

$$\begin{aligned}
& A. \frac{(nt-1)(nt-2)(nt-3) \dots (nt-n)}{(-1)(-2)(-3) \dots (-n)} \\
& + A'. \frac{nt(nt-2)(nt-3) \dots (nt-n)}{1(-1)(-2) \dots (1-n)} \\
& + A''. \frac{nt(nt-1)(nt-3) \dots (nt-n)}{2.1(-1) \dots (2-n)} \\
& + A'''. \frac{nt(nt-1)(nt-2) \dots (nt-n)}{3.2.1 \dots (3-n)} \\
& + \text{etc.} \\
& + A^{(n)}. \frac{nt(nt-1)(nt-2) \dots (nt-n+1)}{n.(n-1)(n-2) \dots 1}
\end{aligned}$$

sive $\Sigma \frac{A^{(\mu)} T^{(\mu)}}{M^{(\mu)}}$, ubi repraesentante μ singulos integros 0, 1, 2, 3...n.

$$T^{(\mu)} = \frac{nt(nt-1)(nt-2)(nt-3) \dots (nt-n)}{nt-\mu}$$

$M^{(\mu)}$ valor ipsius T pro $nt = \mu$.

Manifestum erit, Y exhibere functionem algebraicam integram ipsius t ordinis n , atque eius valores pro singulis $n+1$ valoribus ipsius t , puta $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \dots 1$ aequales esse valoribus ipsius y . Porro patet, si Y' sit functio alia integra pro iisdem valoribus cum y conspirans, $Y' - Y$ pro iisdem evanescere, adeoque per factores $t, t - \frac{1}{n}, t - \frac{2}{n}, t - \frac{3}{n} \dots t - 1$ et proin etiam per eorum productum (quod est ordinis $n+1$) divisibilem esse, unde patet, Y' , nisi prorsus identica sit cum Y , certo ad altiore ordinem ascendere debere, sive Y ex omnibus functionibus integris ordinem n haud egredientibus unicam esse, quae pro illis $n+1$ valoribus cum y conspirat. Quodsi itaque y , in seriem secundum potestates ipsius t progredientem evoluta, ante terminum qui implicat t^{n+1} omnino ab-rumpitur, cum Y identica erit: si vero saltem tam cito convergit, ut terminos sequentes spernere liceat, functio Y inter limites $t=0, t=1$ sive $x=g, x=h$ ipsius y vice fungi poterit.

3.

Iam integrale nostrum $\int y dx$ transit in $\Delta \int y dt$ a $t=0$ usque ad $t=1$ sumendum, cuius loco per ea, quae modo monuimus, adoptabimus $\Delta \int Y dt$. Evolvendo itaque $T^{(\mu)}$ in

$$\alpha t^n + \beta t^{n-1} + \gamma t^{n-2} + \delta t^{n-3} + \text{etc.}$$

erit $\int T^{(\mu)} dt$, a $t=0$ usque ad $t=1$,

$$= \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n-1} + \frac{\delta}{n-2} + \text{etc.}$$

qua quantitate posita $= M^{(\mu)} R^{(\mu)}$, erit integrale quaesitum

$$= \Delta (AR + AR' + AR'' + AR''' + \text{etc.} + A^{(n)} R^{(n)})$$

Exempli causa apponemus computum coefficientis R'' pro $n=5$. Fit hic

$$T'' = 5^2 t^2 - 13.5^2 t + 59.5^2 t^2 - 107.5^2 t + 60.5.t$$

$$M'' = 2 \times 1 \times (-1) \times (-2) \times (-3) = -12$$

$$\text{Hinc } -12 R'' = \frac{3125}{6} - 1625 + \frac{7375}{4} - \frac{2675}{3} + 150 = -\frac{25}{12}, \text{ adeoque } R'' = \frac{25}{144}.$$

Computus aliquanto brevior evadit, statuendo $2t-1 = u$. Tunc fit

$$T^{(\mu)} = \frac{(nu+n)(nu+n-2)(nu+n-4) \dots (nu-n+4)(nu-n+2)(nu-n)}{2^n(nu+n-2\mu)}$$

Ponamus

$$\frac{(nnuu-nn) \cdot (nnuu-(n-2)^2) \cdot (nnuu-(n-4)^2) \cdot (nnuu-(n-6)^2) \dots}{nnuu-(n-2\mu)^2} = U^{(\mu)}$$

ubi numerator desinere debet in $\dots (nnuu-9)(nnuu-1)$, si n est impar, vel in $\dots (nnuu-4)nu$, si n est par, eritque

$$T^{(\mu)} = \frac{(nu-n+2\mu) U^{(\mu)}}{2^n}$$

Iam integrale $\int T^{(\mu)} dt$ a $t=0$ usque ad $t=1$ acceptum aequale est integrali

$$\int \frac{1}{2} T^{(\mu)} du = \int \frac{nu U^{(\mu)} du}{2^{n+1}} + \int \frac{(2\mu-n) U^{(\mu)} du}{2^{n+1}}$$

ab $u=-1$ usque ad $u=+1$.

Statuendo itaque

$$U^{(\mu)} = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-3} + \gamma u^{n-5} + \delta u^{n-7} + \text{etc.}$$

(sponte enim patet, potestates $u^{n-2}, u^{n-4}, u^{n-6}$ etc. abesse), integralis pars $\int \frac{nu U^{(\mu)} du}{2^{n+1}}$ evanescet pro valore impari ipsius n , pars altera $\int \frac{(2\mu-n) U^{(\mu)} du}{2^{n+1}}$ vero pro valore pari, unde integrale $\int T^{(\mu)} dt$ fiet pro n pari

$$= \frac{n}{2^n} \left(\frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n-1} + \frac{\gamma}{n-3} + \frac{\delta}{n-5} + \text{etc.} \right)$$

pro n impari autem

$$= \frac{2\mu-n}{2^n} \left(\frac{\alpha}{n} + \frac{6}{n-2} + \frac{7}{n-4} + \frac{5}{n-6} + \text{etc.} \right)$$

In exemplo nostro habetur

$$U'' = (25uu - 25)(25uu - 9) = 625u^4 - 850uu + 225, \text{ adeoque} \\ -12R'' = -\frac{1}{3} (125 - \frac{8}{3}u + 225) = -\frac{7}{3} \text{ ut supra.}$$

Observare convenit, fieri $U^{(n-p)} = U^{(p)}$, adeoque $\int T^{(n-p)} dt = \pm \int T^{(p)} dt$, signo superiore valente pro n pari, inferiore pro impari. Quare quum facile perspicatur, perinde haberi $M^{(n-p)} = \pm M^{(p)}$, semper erit $R^{(n-p)} = R^{(p)}$, sive e coefficientibus $R, R', R'', \dots, R^{(n)}$ ultimus primo aequalis, penultimus secundo et sic porro.

4.

Valores numericos horum coefficientium a COTESIO usque ad $n = 10$ computatos ex *Harmonia Mensurarum* huc adscribimus.

Pro $n = 1$ sive terminis duobus.

$$R = R' = \frac{1}{2}$$

Pro $n = 2$ sive terminis tribus.

$$R = R'' = \frac{1}{6}, R' = \frac{2}{3}$$

Pro $n = 3$ sive terminis quatuor.

$$R = R''' = \frac{1}{8}, R' = R'' = \frac{3}{8}$$

Pro $n = 4$ sive terminis quinque.

$$R = R'''' = \frac{7}{96}, R' = R''' = \frac{1}{6}, R'' = \frac{1}{5}$$

Pro $n = 5$ sive terminis sex.

$$R = R^{(5)} = \frac{1}{288}, R' = R^{(4)} = \frac{3}{64}, R'' = R''' = \frac{2}{144}$$

Pro $n = 6$ sive terminis septem.

$$R = R^{(6)} = \frac{1}{864}, R' = R^{(5)} = \frac{3}{512}, R'' = R^{(4)} = \frac{1}{128}, R''' = \frac{1}{16}$$

Pro $n = 7$ sive terminis octo.

$$R = R^{(7)} = \frac{1}{1728}, R' = R^{(6)} = \frac{3}{128}, R'' = R^{(5)} = \frac{1}{256}, R''' = R^{(4)} = \frac{1}{64}$$

Pro $n = 8$ sive terminis novem.

$$R = R^{(8)} = \frac{1}{2688}, R' = R^{(7)} = \frac{1}{128}, R'' = R^{(6)} = \frac{1}{256}, R''' = R^{(5)} = \frac{1}{512}$$

$$R^{(4)} = -\frac{1}{256}$$

Pro $n = 9$ sive terminis decem.

$$R = R^{(9)} = \frac{1}{896}, R' = R^{(8)} = \frac{1}{128}, R'' = R^{(7)} = \frac{1}{256}, R''' = R^{(6)} = \frac{1}{512}$$

$$R^{(4)} = R^{(5)} = \frac{1}{4096}$$

Pro $n = 10$ sive terminis undecim.

$$R = R^{(10)} = \frac{1}{1344}, R' = R^{(9)} = \frac{1}{128}, R'' = R^{(8)} = \frac{1}{256}, R''' = R^{(7)} = \frac{1}{512}$$

$$R^{(4)} = R^{(5)} = \frac{1}{1344}, R^{(6)} = R^{(7)} = \frac{1}{1344}, R^{(8)} = \frac{1}{1344}$$

5.

Quum formula $\Delta(A R + A' R' + A'' R'' + \text{etc.} + A^{(n)} R^{(n)})$ integrale $\int y dx$ ab $x = g$ usque ad $x = g + \Delta$, sive integrale $\Delta \int y dt$ a $t = 0$ usque ad $t = 1$ exacte quidem exhibeat, quoties y in seriem evoluta potestatem t^n non transcendit, sed approximate tantum, quoties y ultra progreditur, superest, ut errorem, quem inducunt termini proxime sequentes, assignare doceamus. Designemus generaliter per $k^{(m)}$ differentiam inter valorem verum integralis $\int t^m dt$ a $t = 0$ usque ad $t = 1$, atque valorem ex formula prodeuntem, ita ut sit

$$k = 1 - R - R' - R'' - R''' - \text{etc.} - R^{(n)}$$

$$k' = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} (R' + 2R'' + 3R''' + \text{etc.} + nR^{(n)})$$

$$k'' = \frac{1}{6} - \frac{1}{n(n-1)} (R'' + 4R''' + 9R^{(4)} + \text{etc.} + n(n-1)R^{(n)})$$

$$k''' = \frac{1}{24} - \frac{1}{n(n-1)(n-2)} (R''' + 8R^{(4)} + 27R^{(5)} + \text{etc.} + n^3 R^{(n)})$$

etc. Patet igitur, si y evolvatur in seriem

$$K + K't + K''t^2 + K'''t^3 + \text{etc.}$$

differentiam inter valorem verum integralis $\int y dt$ atque valorem approximatum formulae exprimi per

$$Kk + K'k' + K''k'' + K'''k''' + \text{etc.}$$

Sed manifesto k, k', k'' etc. usque ad $k^{(n)}$ sponte fiunt = 0: correctio itaque formulae approximatae erit

$$K^{(n+1)}k^{(n+1)} + K^{(n+2)}k^{(n+2)} + K^{(n+3)}k^{(n+3)} + \text{etc.}$$

Indolem quantitatum $k^{(n+1)}, k^{(n+2)}$ etc. infra accuratius perscrutabimur; hic sufficiat, valores numericos primae aut secundae, pro singulis valoribus ipsius n , apposuisse, ut gradus praecisionis, quam formula approximata affert, inde aestimari possit.



Pro $n = 1$ habemus $k'' = -\frac{1}{2}$, $k''' = -\frac{1}{4}$, $k^{(4)} = -\frac{1}{8}$
 Pro $n = 2$ invenimus $k'' = 0$, $k''' = -\frac{1}{12}$, $k^{(4)} = -\frac{1}{24}$
 Pro $n = 3$ fit $k'' = -\frac{1}{24}$, $k''' = -\frac{1}{48}$
 Pro $n = 4 \dots k'' = 0$, $k''' = -\frac{1}{288}$, $k^{(4)} = -\frac{1}{144}$
 Pro $n = 5 \dots k'' = -\frac{1}{240}$, $k''' = -\frac{1}{480}$
 Pro $n = 6 \dots k'' = 0$, $k''' = -\frac{1}{384}$, $k^{(4)} = -\frac{1}{768}$
 Pro $n = 7 \dots k'' = -\frac{1}{1680}$, $k''' = -\frac{1}{3360}$
 Pro $n = 8 \dots k'' = 0$, $k''' = -\frac{1}{1792}$, $k^{(4)} = -\frac{1}{3584}$
 Pro $n = 9 \dots k'' = -\frac{1}{6720}$, $k''' = -\frac{1}{13440}$
 Pro $n = 10 \dots k'' = 0$, $k''' = -\frac{1}{15360}$, $k^{(4)} = -\frac{1}{30720}$

Pro valore pari ipsius n ubique hic fieri animadvertimus $k^{(n+1)} = 0$, ac praeterea $k^{(n+2)} = \frac{n+2}{2} k^{(n+1)}$; pro valore impari ipsius n autem ubique prodit $k^{(n+2)} = \frac{n+2}{2} k^{(n+1)}$. Ratio horum eventuum facile e considerationibus sequentibus depromitur.

Designemus generaliter per $l^{(m)}$ differentiam inter valorem verum huius integralis $\int (t - \frac{1}{2})^m dt$ a $t = 0$ usque ad $t = 1$, atque valorem eum, quem formula approximata profert, ita ut habeatur

$$l^{(m)} = \int (t - \frac{1}{2})^m dt - [(-\frac{1}{2})^m R + (\frac{1}{n} - \frac{1}{2})^m R' + (\frac{2}{n} - \frac{1}{2})^m R'' + \dots + (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})^m R^{(n-1)} + (\frac{1}{2})^m R^{(n)}]$$

integrali a $t = 0$ usque ad $t = 1$ accepto. Manifesto pro valore impari ipsius m evanescet tum valor verus integralis tum valor approximatus: erit itaque $l' = 0$, $l'' = 0$, $l''' = 0$ etc. sive generaliter $l^{(m)} = 0$ pro valore impari ipsius m . Pro valore pari autem ipsius m , formulae tribuimus formam hanc

$$l^{(m)} = \frac{1}{2^m(m+1)} - \frac{2}{n^m} ((\frac{1}{2}n)^m R + (\frac{1}{2}n-1)^m R' + (\frac{1}{2}n-2)^m R'' + \dots + 2^m R^{(n-2)} + R^{(n-1)})$$

si simul fuerit n par; vel hanc

$$l^{(m)} = \frac{1}{2^m} (\frac{1}{m+1} - \frac{2}{n^m} (n^m R + (n-2)^m R' + (n-4)^m R'' + \dots + 3^m R^{(n-4)} + R^{(n-1)}))$$

si simul fuerit n impar.

Si igitur per evolutionem ipsius y in seriem secundum potestates ipsius $t - \frac{1}{2}$ progredientem prodit

$$y = L + L'(t - \frac{1}{2}) + L''(t - \frac{1}{2})^2 + L'''(t - \frac{1}{2})^3 + \text{etc.}$$

correctio valori approximato integralis $\int y dt$ a $t = 0$ usque ad $t = 1$ applicanda erit

$$Ll + L'l' + L''l'' + L'''l''' + \text{etc.}$$

aut potius, quum $l^{(m)}$ necessario evanescat pro valore quovis integro ipsius m haud maiori quam n , correctio erit

$$L^{(n+2)} l^{(n+2)} + L^{(n+4)} l^{(n+4)} + L^{(n+6)} l^{(n+6)} + \text{etc.}$$

pro n pari, vel

$$L^{(n+1)} l^{(n+1)} + L^{(n+3)} l^{(n+3)} + L^{(n+5)} l^{(n+5)} + \text{etc.}$$

pro n impari.

Facillime iam correctiones $l^{(m)}$ ad $k^{(m)}$ reducuntur et vice versa. Quum enim habeatur

$$(t - \frac{1}{2})^m = t^m - \frac{1}{2} m t^{m-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} t^{m-2} + \text{etc.}$$

erit

$$l^{(m)} = k^{(m)} - \frac{1}{2} m k^{(m-1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} k^{(m-2)} + \text{etc.}$$

Et perinde fit

$$k^{(m)} = l^{(m)} + \frac{1}{2} m l^{(m-1)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} l^{(m-2)} + \text{etc.}$$

Ex posteriori formula eicientur termini, ubi l afficitur indice impari: utraque autem continuanda est tantummodo usque ad indicem $n+1$ (inclus.). Manifesto itaque habebimus

pro n pari

$$\begin{aligned} k^{(n+1)} &= 0 \\ k^{(n+2)} &= l^{(n+2)} \\ k^{(n+3)} &= \frac{n+3}{2} l^{(n+2)} \end{aligned}$$

pro n impari

$$\begin{aligned} k^{(n+1)} &= l^{(n+1)} \\ k^{(n+2)} &= \frac{n+2}{2} l^{(n+1)} \end{aligned}$$

unde demanant observationes supra indicatae

6.

Generaliter itaque loquendo praestabit, in applicanda methodo Cotesiana ipsi n tribuere valorem parem, seu terminorum multitudinem imparem in usum vocare. Perparum scilicet praecisio augebitur, si loco valoris paris ipsius n ad imparem proxime maiorem ascendamus, quum error maneat eiusdem ordinis, licet coefficiente aliquantulum minori affectus. Contra ascendendo a valore impari ipsius n ad parem proxime sequentem, error duobus ordinibus promovebitur, insuperque coefficientis notabilius imminutus praecisionem augebit. Ita si quinque termini adhibentur, sive pro $n = 4$, error proxime exprimitur per $-\frac{1}{2^4 3^4 5^4} K^6$ vel per $-\frac{1}{2^4 3^4 5^4} L^6$; si statuitur $n = 5$, error erit proxime $-\frac{1}{2^5 3^5 5^5} K^8$ vel $-\frac{1}{2^5 3^5 5^5} L^8$; adeoque ne ad semissem quidem prioris depressus: contra faciendo $n = 6$, error fit proxime $-\frac{1}{2^6 3^6 5^6} K^8$ vel $-\frac{1}{2^6 3^6 5^6} L^8$, praecisioque tanto magis aucta, quo citius series, in quam functio evolvitur, iam per se convergit.

7.

Postquam haecce circa methodum Cotesii praemisimus, ad disquisitionem generalem progredimur, abiiciendo conditionem, ut valores ipsius x progressionem arithmetica procedant. Problema itaque aggredimur, determinare valorem integralis $\int y dx$ inter limites datos ex aliquot valoribus datis ipsius y , vel exacte vel quam proxime. Supponamus, integrale sumendum esse ab $x = g$ usque ad $x = g + \Delta$, introducamusque loco ipsius x aliam variabilem $t = \frac{x-g}{\Delta}$, ita ut integrale $\Delta \int y dt$ a $t = 0$ usque ad $t = 1$ investigare oporteat. Respondeant $n+1$ valores dati ipsius y hi $A, A', A'', \dots, A^{(n)}$ valoribus ipsius t inaequalibus his $a, a', a'', \dots, a^{(n)}$, designemusque per Y functionem algebraicam integram ordinis n hancce:

$$A \frac{(t-a')(t-a'')(t-a''') \dots (t-a^{(n)})}{(a-a')(a-a'')(a-a''') \dots (a-a^{(n)})} \\ + A' \frac{(t-a)(t-a'')(t-a''') \dots (t-a^{(n)})}{(a'-a)(a'-a'')(a'-a''') \dots (a'-a^{(n)})} \\ + A'' \frac{(t-a)(t-a')(t-a''') \dots (t-a^{(n)})}{(a''-a)(a''-a')(a''-a''') \dots (a''-a^{(n)})} \\ + \text{etc.} \\ + A^{(n)} \frac{(t-a)(t-a')(t-a'') \dots (t-a^{(n-1)})}{(a^{(n)}-a)(a^{(n)}-a')(a^{(n)}-a'') \dots (a^{(n)}-a^{(n-1)})}$$

Manifesto valores huius functionis, si t alicui quantitatibus $a, a', a'', \dots, a^{(m)}$ aequalis ponitur, coincidunt cum valoribus respondentibus functionis y , unde per-

inde ut in art. 2. concludimus, Y cum y identicam esse, quoties y quoque sit functio algebraica integram ordinem n non transcendens, aut saltem ipsius y vice fungi posse, si y in seriem secundum potestates ipsius t progredientem conversa tantam convergentiam exhibeat, ut terminos altiorum ordinum negligere liceat.

S.

Iam ad eruendum integrale $\int Y dt$ singulas partes ipsius Y consideremus. Designemus productum,

$$(t-a)(t-a')(t-a'')(t-a''') \dots (t-a^{(n)})$$

per T , fiatque per evolutionem huius producti

$$T = t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha' t^{n-1} + \alpha'' t^{n-2} + \text{etc.} + \alpha^{(n)}$$

Numerator fractionis, per quam, in parte prima ipsius Y , multiplicata est A , fit $= \frac{T}{t-a}$; numeratores in partibus sequentibus perinde sunt $\frac{T}{t-a'}, \frac{T}{t-a''}, \frac{T}{t-a'''} \text{ etc.}$ Denominatores vero nihil aliud sunt, nisi valores determinati horum numeratorum, si resp. statuitur $t = a, t = a', t = a'', t = a''' \text{ etc.}$: denotemus hos denominatores resp. per $M, M', M'', M''' \text{ etc.}$, ita ut sit

$$Y = \frac{AT}{M(t-a)} + \frac{A'T}{M'(t-a')} + \frac{A''T}{M''(t-a'')} + \text{etc.} + \frac{A^{(n)}T}{M^{(n)}(t-a^{(n)})}$$

Quum fiat $T = 0$, pro $t = a$, habemus aequationem identicam

$$a^{n+1} + \alpha a^n + \alpha' a^{n-1} + \alpha'' a^{n-2} + \text{etc.} + \alpha^{(n)} = 0$$

adeoque

$$T = t^{n+1} - a^{n+1} + \alpha(t^n - a^n) + \alpha'(t^{n-1} - a^{n-1}) + \alpha''(t^{n-2} - a^{n-2}) + \text{etc.} \\ + \alpha^{(n-1)}(t - a)$$

Hinc dividendo per $t-a$ fit

$$\frac{T}{t-a} = t^n + \alpha t^{n-1} + \alpha \alpha' t^{n-2} + \alpha^2 t^{n-3} + \text{etc.} + \alpha^n \\ + \alpha t^{n-1} + \alpha \alpha' t^{n-2} + \alpha \alpha \alpha' t^{n-3} + \text{etc.} + \alpha \alpha^{n-1} \\ + \alpha' t^{n-2} + \alpha \alpha' t^{n-3} + \text{etc.} + \alpha' \alpha^{n-2} \\ + \alpha'' t^{n-3} + \text{etc.} + \alpha'' \alpha^{n-3} \\ + \text{etc. etc.} \\ + \alpha^{(n-1)}$$

Valor huius functionis pro $t = a$ colligitur

$$= (n+1)a^n + na^{n-1} + (n-1)a'a^{n-2} + (n-2)a''a^{n-3} + \text{etc.} + a^{(n-1)}$$

Hinc M aequalis valori ipsius $\frac{dT}{dt}$ pro $t = a$, uti etiam aliunde constat. Perinde M' , M'' , etc. erunt valores ipsius $\frac{dT}{dt}$ pro $t = a'$, $t = a''$, $t = a'''$ etc.

Porro invenimus valorem integralis $\int_{t=a}^T \frac{dT}{dt}$, a $t = 0$ usque ad $t = 1$,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n+1} + \frac{a}{n} + \frac{aa}{n-1} + \frac{a^2}{n-2} + \text{etc.} + a^n \\ &\quad + \frac{a'}{n} + \frac{aa'}{n-1} + \frac{a^2a'}{n-2} + \text{etc.} + aa^{n-1} \\ &\quad + \frac{a''}{n-1} + \frac{aa''}{n-2} + \text{etc.} + a'a^{n-2} \\ &\quad + \frac{a'''}{n-2} + \text{etc.} + a''a^{n-3} \\ &\quad + \text{etc. etc.} \\ &\quad + a^{(n-1)} \end{aligned}$$

quos terminos ordine sequenti disponemus:

$$\begin{aligned} &a^n + aa^{n-1} + a'a^{n-2} + a''a^{n-3} + \text{etc.} + a^{(n-1)} \\ &+ \frac{1}{2}(a^{n-1} + aa^{n-2} + a'a^{n-3} + \text{etc.} + a^{(n-2)}) \\ &+ \frac{1}{3}(a^{n-2} + aa^{n-3} + a'a^{n-4} + \text{etc.} + a^{(n-3)}) \\ &+ \frac{1}{4}(a^{n-3} + aa^{n-4} + a'a^{n-5} + \text{etc.} + a^{(n-4)}) \\ &+ \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{n-1}(aa + aa' + a') \\ &+ \frac{1}{n}(a + a') \\ &+ \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Sed manifesto eadem quantitas prodit, si in producto e multiplicatione functionis T in seriem infinitam

$$t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{etc.}$$

orto, reiectis omnibus terminis, qui implicant potestates ipsius t exponentibus negativis (sive brevius, in producti parte ea, quae est functio integra ipsius t) pro t scribitur a . Supponamus itaque, fieri *)

$$T(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{etc.}) = T' + T''$$

*) Vix opus erit monere, characteres T , T' , T'' alio sensu hic accipi, quam in art. 2.

ita ut T' sit functio integra ipsius t in hoc producto contenta, T'' vero pars altera, scilicet series descendens in infinitumque excurrent. Quo facto valor integralis $\int_{t=a}^T \frac{dT}{dt}$ a $t = 0$ usque ad $t = 1$ aequalis erit valori functionis T' pro $t = a$. Quodsi itaque valores determinatos functionis

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)$$

pro $t = a$, $t = a'$, $t = a''$, $t = a'''$ etc. usque ad $t = a^{(n)}$ resp. per R , R' , R'' , R''' , ..., $R^{(n)}$ denotamus, integrale $\int Y dt$ a $t = 0$ usque ad $t = 1$ fiet

$$= RA + R'A + R''A' + \text{etc.} + R^{(n)}A^{(n)}$$

quod per Δ multiplicatum exhibebit valorem vel verum vel approximatum integris $\int y dx$ ab $x = g$ usque ad $x = g + \Delta$.

9.

Hae operationes aliquanto facilius perficiuntur, si loco indeterminatae t introducitur alia $u = 2t - 1$. Scribimus quoque brevitatis caussa $b = 2a - 1$, $b' = 2a' - 1$, $b'' = 2a'' - 1$ etc. Transeat T , substituto pro t valore $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$, in $\frac{U}{2^{n+1}}$, sive sit

$$U = (u - b)(u - b')(u - b'') \dots (u - b^{(n)})$$

Erit itaque $\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2^n} \frac{dU}{du}$, adeoque M , M' , M'' etc. valores determinati ipsius $\frac{1}{2^n} \frac{dU}{du}$, si deinceps statuatur $u = b$, $u = b'$, $u = b''$ etc.

Quum series $t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{etc.}$ nihil aliud sit quam $\log \frac{1}{1-t} = \log \frac{1+u}{1-u}$, per substitutionem $t = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ necessario transibit in $2u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \text{etc.}$ Quodsi itaque statuimus

$$U(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \text{etc.}) = U' + U''$$

ita ut U' sit functio integra ipsius u in hoc producto contenta, U'' vero pars altera, puta series descendens infinita, patet esse

$$T' + T'' = \frac{1}{2^n} (U' + U'')$$

Sed manifesto T' , tamquam functio integra ipsius t , per substitutionem $t = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ necessario functionem integram ipsius u producet: contra T'' , quae non continet nisi potestates negativas ipsius t , per eandem substitutionem tantummodo potesta-

tes negativas ipsius u gignet. Quam ob rem U' nihil aliud erit quam $2^n T''$ per hanc substitutionem transformata, ac perinde U'' producta erit ex $2^n T''$. Nihil itaque intererit, sive in $\frac{T''}{(\frac{dU'}{dt})}$ substituamus $t = a$, sive in $\frac{U'}{(\frac{dU'}{dw})}$ faciamus $u = b$, unde colligimus, R, R', R'', R''' etc. etiam esse valores determinatos functionis $\frac{U'}{(\frac{dU'}{dw})}$ pro $u = b$, $u = b', u = b'', u = b'''$ etc.

10.

Antequam ulterius progrediamur, haecce praecepta per exemplum illustrabimus. Sit $n = 5$, statuamusque $a = 0, a' = \frac{1}{2}, a'' = \frac{2}{3}, a''' = \frac{3}{4}, a^{(4)} = \frac{4}{5}, a^{(5)} = 1$. Hinc fit

$$T' = t^6 - 3t^5 + \frac{15}{2}t^4 - \frac{45}{2}t^3 + \frac{45}{2}t^2 - \frac{15}{2}t + \frac{1}{6}$$

Multiplicando per $t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{etc.}$ obtinemus

$$T'' = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{5}{6}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{24}t - \frac{1}{720}$$

Valores itaque coefficientium $R, R', R'', R''', R^{(4)}, R^{(5)}$ exprimuntur per functionem fractam

$$\frac{t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{5}{6}t^3 - \frac{1}{6}t^2 + \frac{1}{24}t - \frac{1}{720}}{6t^5 - 15t^4 + \frac{45}{2}t^3 - \frac{45}{2}t^2 + \frac{15}{2}t - \frac{1}{6}}$$

in qua pro t deinceps substituendi sunt valores $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1$. Aliquanto brevior est methodus altera, quae suppletur $b = -1, b' = -\frac{2}{3}, b'' = -\frac{3}{4}, b''' = \frac{1}{5}, b^{(4)} = \frac{2}{5}, b^{(5)} = 1$

$$U = u^6 - \frac{5}{2}u^5 + \frac{5}{6}u^4 - \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^2 - \frac{1}{720}u$$

$$U' = u^5 - \frac{5}{2}u^4 + \frac{5}{6}u^3 - \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{24}u - \frac{1}{720}$$

unde R, R', R'' etc. erunt valores functionis fractae

$$\frac{u^5 - \frac{5}{2}u^4 + \frac{5}{6}u^3 - \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{24}u - \frac{1}{720}}{6u^5 - 15u^4 + \frac{45}{2}u^3 - \frac{45}{2}u^2 + \frac{15}{2}u - \frac{1}{6}}$$

pro $u = -1, u = -\frac{2}{3}, u = -\frac{3}{4}$ etc. Utraque methodus eosdem numeros, profert, quos in art. 4. ex Harmonia Mensurarum tradidimus. Ceterum in casu tali, qualem hocce exemplum sistit, ubi a, a', a'' etc. sunt quantitates rationales, valores denominatoris $\frac{dT}{dt}$ commodius in forma primitiva computantur, puta $(a-a')(a-a'')(a-a''') \dots (a-a^{(n)})$ pro $t = a$ ac perinde de reliquis. Idem valet de denominatore $\frac{dU}{dw}$, qui pro $u = b$ fit $(b-b')(b-b'')(b-b''') \dots (b-b^{(n)})$.

11.

Quoties a, a', a'' etc. vel ex parte vel omnes sunt irrationales, utilis erit transformatio functionis fractae, ex qua numeros R, R', R'' etc. derivamus, in functionem integram: principia talis transformationis, quum in libris algebraicis non inveniantur, hoc loco breviter explicabimus. Propositis scilicet tribus functionibus integris Z, ζ, ζ' indeterminatae z , quaeritur functio integra, quae fractae $\frac{Z}{\zeta}$ vice fungi possit, quatenus pro z accipitur radix quaecunque aequationis $\zeta' = 0$. Supponemus autem, ζ pro nullo horum valorum ipsius z evanescere, sive quod eodem redit, ζ atque ζ' nullum divisorem communem indeterminatum implicare. Exponentes potestatum altissimarum ipsius z in ζ atque ζ' per k, k' denotabimus.

Dividatur sucto more ζ per ζ' , donec residui ordo infra k' depressus sit; statuatur residuum $= \frac{\zeta''}{\lambda}$, eiusque ordo $= k''$, ita ut $\frac{1}{\lambda} z^{k''}$ sit residui terminus altissimus; divisionis quotientem ponemus $= \frac{p}{\lambda}$. Perinde ex divisione functionis ζ' per ζ'' prodeat residuum $\frac{\zeta'''}{\lambda'}$ ordinis k''' , quotiens $\frac{p'}{\lambda'}$; dein rursus e divisione functionis ζ'' per ζ''' prodeat residuum $\frac{\zeta^{(4)}}{\lambda''}$ ordinis $k^{(4)}$ atque quotiens $\frac{p''}{\lambda''}$ et sic porro, donec in serie functionum $\zeta'', \zeta''', \zeta^{(4)}$ etc. quae singulae terminum suum altissimum coefficiente 1 affectum habebunt, perveniatur ad $\zeta^{(m)} = 1$. Hoc tandem evenire debere facile perspicitur, quum quaelibet functionum $\zeta, \zeta', \zeta'', \zeta'''$ etc. cum praecedenti divisorem communem indeterminatum habere nequeat, adeoque certo divisio absque residuo fieri nequeat, quamdiu divisor fuerit ordinis maioris quam 0. Habebimus igitur seriem aequationum

$$\begin{aligned}\zeta'' &= \lambda \zeta - p \zeta' \\ \zeta''' &= \lambda' \zeta' - p' \zeta'' \\ \zeta^{(4)} &= \lambda'' \zeta'' - p'' \zeta''' \\ \zeta^{(5)} &= \lambda''' \zeta''' - p''' \zeta^{(4)} \\ &\text{etc. usque ad} \\ \zeta^{(m)} &= \lambda^{(m-2)} \zeta^{(m-2)} - p^{(m-2)} \zeta^{(m-1)}\end{aligned}$$

ubi $\zeta'', \zeta''', \zeta^{(4)}, \dots, \zeta^{(m)}$ sunt functiones integrae ipsius z ordinis $k'', k''', k^{(4)}, \dots, k^{(m)}$; numeri $k'', k''', k^{(4)}, \dots, k^{(m)}$ continuo decrescentes usque ad ultimum $k^{(m)} = 0$; $p, p', p'', p''', \dots$ quoque functiones integrae ipsius z ordinis $k - k', k - k'', k - k''', \dots$ etc. (excepto casu, ubi $k < k'$, in quo manifesto statui debet $p = 0$).

His ita praeparatis formamus secundam seriem functionum integralium ipsius z , puta $\eta, \eta', \eta'', \dots, \eta^{(m)}$. Et quidem statuemus $\eta = 1, \eta' = 0$, reliquis vero

singulas e binis praecedentibus per eandem legem derivamus. per quam functiones $\zeta, \zeta', \zeta'', \zeta'''$ etc. inter se nexae sunt, scilicet per aequationes

$$\begin{aligned}\eta'' &= \lambda \eta' - p \eta' \\ \eta''' &= \lambda' \eta'' - p' \eta'' \\ \eta^{(4)} &= \lambda'' \eta''' - p'' \eta''' \\ \eta^{(5)} &= \lambda''' \eta^{(4)} - p''' \eta^{(4)} \text{ etc. usque ad} \\ \eta^{(m)} &= \lambda^{(m-2)} \eta^{(m-2)} - p^{(m-2)} \eta^{(m-2)}\end{aligned}$$

Manifesto $\eta'' = \lambda$ hic est ordinis 0; $\eta''' = -\lambda p'$ ordinis $k' - k''$, et perinde sequentes $\eta^{(4)}, \eta^{(5)}$ etc. resp. ordinis $k' - k'', k' - k'''$ etc., ita ut ultima $\eta^{(m)}$ ascendat ad ordinem $k' - k^{(m-1)}$.

Porro consideremus tertiam functionum seriem, $\zeta - \zeta \eta, \zeta' - \zeta \eta', \zeta'' - \zeta \eta'', \zeta''' - \zeta \eta'''$ etc., inter cuius terminos quosvis ternos consequentes manifesto similis relatio intercedet, scilicet

$$\begin{aligned}\zeta'' - \zeta \eta'' &= \lambda (\zeta - \zeta \eta) - p' (\zeta' - \zeta \eta') \\ \zeta''' - \zeta \eta''' &= \lambda' (\zeta'' - \zeta \eta'') - p'' (\zeta' - \zeta \eta') \\ \zeta^{(4)} - \zeta \eta^{(4)} &= \lambda'' (\zeta''' - \zeta \eta''') - p''' (\zeta'' - \zeta \eta'')\end{aligned}$$

Iam prima harum functionum fit = 0, secunda = ζ' : hinc facile colligitur, singulas per ζ' divisibiles fore.

Hinc autem nullo negotio sequitur, loco fractionis $\frac{Z}{\zeta}$ adoptari posse functionem integram $Z \eta^{(m)}$, quatenus quidem ipsi z non tribuantur alii valores nisi qui sint radices aequationis $\zeta' = 0$: manifesto enim differentia $\frac{Z(1-\zeta \eta^{(m)})}{\zeta}$ pro tali valore ipsius z necessario evanescit, quum $1 - \zeta \eta^{(m)} = \zeta^{(m)} - \zeta \eta^{(m)}$ per ζ' sit divisibilis.

Loco functionis $Z \eta^{(m)}$ etiam adoptari poterit eius residuum ex divisione per ζ' ortum, cuius ordo erit inferior ordine functionis ζ' .

Ceterum hocce residuum commodius per algorithmum sequentem immediate eruere licet. Formentur aequationes sequentes

$$\begin{aligned}Z &= q' \zeta' + Z' \\ Z' &= q'' \zeta'' + Z'' \\ Z'' &= q''' \zeta''' + Z''' \\ Z''' &= q^{(4)} \zeta^{(4)} + Z^{(4)} \text{ etc. usque ad} \\ Z^{(m-1)} &= q^{(m)} \zeta^{(m)} + Z^{(m)}\end{aligned}$$

scilicet deinceps dividendo Z per ζ' , dein residuum primae divisionis Z' per ζ'' , tum residuum secundae divisionis per ζ''' ac sic porro. Quum residuum semper ad ordinem inferiorem pertineat quam divisor, ordo functionum $Z', Z'', Z''', Z^{(4)}$ etc. erit resp. inferior quam $k', k'', k''', k^{(4)}$ etc.; ultima vero $Z^{(m)}$ necessario fit = 0, quum divisor $\zeta^{(m)}$ sit = 1. Habemus itaque

$$Z = q' \zeta' + q'' \zeta'' + q''' \zeta''' + q^{(4)} \zeta^{(4)} + \text{etc.} + q^{(m)} \zeta^{(m)}$$

Quatenus autem pro z solae radices aequationis $\zeta' = 0$ accipiuntur, fit $\zeta' = 0$, $\zeta'' = \zeta \eta'$, $\zeta''' = \zeta \eta''$, $\zeta^{(4)} = \zeta \eta'''$ etc., unde sub eadem restrictione erit

$$\frac{Z}{\zeta} = q' \eta' + q'' \eta'' + q''' \eta''' + \text{etc.} + q^{(m)} \eta^{(m)}$$

Ordo vero huius expressionis necessario erit infra k' : quum enim ordo quotientium q', q'', q''' etc. esse debeat infra $k' - k'', k' - k''', k' - k^{(4)}$ etc., ordo singularum partium $q' \eta', q'' \eta'', q''' \eta'''$ etc. erit infra $k' - k'', k' - k''', k' - k^{(4)}$ etc.

Denique adhuc observamus, si forte inter valores indeterminatae z , quos in fractione $\frac{Z}{\zeta}$ substituere oporteat, rationales cum irrationalibus mixti reperiantur, magis e re fore, illos ab his separare atque hos solos in aequatione $\zeta' = 0$ comprehendere. Pro rationalibus enim valoribus calculi compendio opus non erit; pro irrationalibus autem calculus tanto simplicior erit, quo minor fuerit gradus functionis integrae, ad quam fractam reducere licet.

12.

Ecce nunc exemplum transformationis in art. praec. explicatae. Proposita sit functio fracta

$$\frac{z^7 - \frac{11}{12}z^6 + \frac{11}{12}z^5 - \frac{11}{12}z^4 + \frac{11}{12}z^3 - \frac{11}{12}z^2 + \frac{11}{12}z - \frac{11}{12}}{z^6 - \frac{11}{12}z^5 + \frac{11}{12}z^4 - \frac{11}{12}z^3 + \frac{11}{12}z^2 - \frac{11}{12}z + \frac{11}{12}}$$

in qua z indefinite repraesentat radices aequationis

$$z^7 - \frac{11}{12}z^6 + \frac{11}{12}z^5 - \frac{11}{12}z^4 + \frac{11}{12}z^3 - \frac{11}{12}z^2 + \frac{11}{12}z - \frac{11}{12} = 0$$

Si hic omnes septem radices complecti vellemus, ad functionem integram sexti ordinis delaberemur. Manifesto autem pro valore rationali $z = 0$ computus fractionis obvius est, datque valorem $\frac{11}{12}$: quapropter seposita hac radice in aequatione sexti gradus subsistemus:



$$z^6 - \frac{2}{3} z^4 + \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{3} = 0$$

quo pacto facile praevideamus orturam esse functionem integram quarti ordinis. Iam ex applicatione praeceptorum praecedentium prodeunt sequentia:

$$\begin{aligned} \zeta &= 7z^6 - \frac{1}{3} z^4 + \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{3} \\ \zeta' &= z^6 - \frac{1}{3} z^4 + \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{3} \\ \zeta'' &= z^4 - \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{3} \\ \zeta''' &= z^2 - \frac{1}{3} \\ \zeta^{(4)} &= 1 \\ \lambda &= \frac{1}{3} & p &= \frac{1}{3} \\ \lambda' &= -\frac{1}{3} z^2 & p' &= -\frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{3} \\ \lambda'' &= -\frac{1}{3} & p'' &= -\frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{3} \\ \eta &= 1 \\ \eta' &= 0 \\ \eta'' &= \frac{1}{3} \\ \eta''' &= \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{3} \\ \eta^{(4)} &= \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{3} \\ Z &= z^6 - \frac{1}{3} z^4 + \frac{1}{3} z^2 - \frac{1}{3} & q' &= 1 \\ Z' &= \frac{1}{3} z^4 - \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{3} & q'' &= \frac{1}{3} \\ Z'' &= -\frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{3} & q''' &= -\frac{1}{3} \\ Z''' &= -\frac{1}{3} & q^{(4)} &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Hinc tandem derivatur functio integra fractioni propositae aequivalens:

$$-\frac{1}{16} z^6 - \frac{1}{32} z^4 + \frac{1}{32} z^2 + \frac{1}{32}$$

13.

Ad determinandum gradum praecisionis, qua formula nostra integralis $RA + R'A + R''A'' + \text{etc.} + R^{(n)}A^{(n)}$ gaudet, statuamus generaliter

$$Ra^m + R'a^m + R''a^m + \text{etc.} + R^{(n)}a^{(n)m} = \frac{1}{m+1} - k^{(m)}$$

ita ut $k^{(m)}$ sit differentia inter integralis $\int t^m dt$ a $t=0$ usque ad $t=1$ sumti valorem verum atque approximatum. Habebimus itaque, singulis fractionibus in series evolutis,

$$\begin{aligned} \frac{R}{t-a} + \frac{R'}{t-a'} + \frac{R''}{t-a''} + \text{etc.} + \frac{R^{(n)}}{t-a^{(n)}} \\ = (1-k)t^{-1} + (1-k')t^{-2} + (1-k'')t^{-3} + (1-k''')t^{-4} + \text{etc.} \\ = t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{etc.} - \theta \end{aligned}$$

si statuimus

$$\theta = kt^{-1} + k't^{-2} + k''t^{-3} + k'''t^{-4} + \text{etc.}$$

sive potius (quum iam sciamus, k, k', k'', k''' etc. usque ad $k^{(n)}$ sponte evanescere debere)

$$\theta = k^{(n+1)}t^{-(n+2)} + k^{(n+2)}t^{-(n+3)} + k^{(n+3)}t^{-(n+4)} + \text{etc.}$$

Multiplicando per T fit

$$T\left(\frac{R}{t-a} + \frac{R'}{t-a'} + \frac{R''}{t-a''} + \text{etc.} + \frac{R^{(n)}}{t-a^{(n)}}\right) = T' + T'' - T\theta$$

Pars prior huius aequationis est functio integra ipsius t ordinis n , eiusque valores determinati pro $t=a, t=a', t=a''$ etc. resp. fiunt MR, MR', MR'' etc.: quapropter, quum eadem valeant de functione T' , uti ex ipso modo numeros R, R', R'' etc. determinandi perspicuum est, necessario illa pars prior aequationis identica esse debet cum T' , adeoque $T'' = T\theta$. Oritur itaque θ ex evolutione fractionis $\frac{T''}{T}$, quo pacto coefficientes $k^{(n+1)}, k^{(n+2)}$ etc. quousque libet determinari poterunt. Quibus inventis correctio valoris nostri approximati integralis $\int y dt$ erit

$$= k^{(n+1)}K^{(n+1)} + k^{(n+2)}K^{(n+2)} + \text{etc.}$$

si series, in quam evolvitur y , est

$$y = K + K't + K''t^2 + K'''t^3 + \text{etc.}$$

14.

Si magis placet, correctionem exprimere per coefficientes seriei secundum potestates ipsius $t - \frac{1}{2}$ progredientis

$$y = L + L'(t - \frac{1}{2}) + L''(t - \frac{1}{2})^2 + L'''(t - \frac{1}{2})^3 + \text{etc.}$$

illa erit



$$= l^{(n+1)} L^{(n+1)} + l^{(n+2)} L^{(n+2)} + l^{(n+3)} L^{(n+3)} + \text{etc.}$$

si generaliter per $l^{(m)}$ exprimimus correctionem valoris approximati integralis $\int (t - \frac{1}{2})^m dt$. Hae correctiones $l^{(m)}$ cum correctionibus $k^{(m)}$ nexae erunt per aequationem

$$l^{(m)} = k^{(m)} - \frac{1}{2} m k^{(m-1)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} k^{(m-2)} - \frac{1}{8} \cdot \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^{(m-3)} + \text{etc.}$$

Quo vero illas independenter eruere possimus, perpendamus, functionem θ per substitutionem $t = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ transire in

$$\begin{aligned} & 2k(u^{-1} - u^{-2} + u^{-3} - u^{-4} + \text{etc.}) \\ & + 4k'(u^{-2} - 2u^{-3} + 3u^{-4} - 4u^{-5} + \text{etc.}) \\ & + 8k''(u^{-3} - 3u^{-4} + 6u^{-5} - 10u^{-6} + \text{etc.}) \\ & + 16k'''(u^{-4} - 4u^{-5} + 10u^{-6} - 20u^{-7} + \text{etc.}) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

sive in

$$\begin{aligned} & 2ku^{-1} + 4(k' - \frac{1}{2})u^{-2} + 8(k'' - \frac{1}{2} \cdot 2k' + \frac{1}{2}k)u^{-3} \\ & + 16(k''' - \frac{1}{2} \cdot 3k'' + \frac{1}{2} \cdot 3k' - \frac{1}{2}k)u^{-4} + \text{etc.} \end{aligned}$$

sive in

$$2lu^{-1} + 4l'u^{-2} + 8l''u^{-3} + 16l'''u^{-4} + \text{etc.}$$

sive denique, quum a priori sciamus, l, l', l'', l''' etc. usque ad $l^{(n)}$ sponte evanescere, in

$$2^{n+2} l^{(n+1)} u^{-(n+2)} + 2^{n+3} l^{(n+2)} u^{-(n+3)} + 2^{n+4} l^{(n+3)} u^{-(n+4)} + \text{etc.}$$

At $\theta = \frac{T''}{T}$; quare quum T, T'' per substitutionem $t = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ transeant in $\frac{U}{2^{n+1}}, \frac{U''}{2^n}$. (art. 9), functio θ per eandem substitutionem transibit in $\frac{2U''}{U}$. Quodsi itaque seriem ex evolutione fractionis $\frac{U''}{U}$ oriundam per Ω designamus, erit

$$\Omega = 2^{n+1} l^{(n+1)} u^{-(n+2)} + 2^{n+2} l^{(n+2)} u^{-(n+3)} + 2^{n+3} l^{(n+3)} u^{-(n+4)} + \text{etc.}$$

quo pacto coefficientes $l^{(n+1)}, l^{(n+2)}$ etc. quousque lubet erui poterunt.

Ita in exemplo art. 10 invenimus

$$\begin{aligned} U'' &= -\frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{2} x u^{-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} x u^{-3} - \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} x u^{-5} - \text{etc.} \\ \Omega &= -\frac{1}{1} \frac{1}{2} \frac{1}{2} x u^{-7} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} x u^{-9} - \frac{1}{3} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} x u^{-11} - \text{etc.} \end{aligned}$$

adeoque correctio valoris approximati integralis

$$= -\frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} L^{(1)} - \frac{1}{1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} L^{(2)} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} L^{(3)} - \text{etc.}$$

15.

Coefficiens $K^{(m)}$ functionis y in seriem evolutae fit, per theorema TAYLORI, aequalis valori ipsius

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \cdot \frac{d^m y}{dx^m} \quad \text{sive} \quad \frac{\Delta^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} \cdot \frac{d^m y}{dx^m}$$

pro $t = 0$ sive $x = g$; perinde coefficientis $L^{(m)}$ est valor eiusdem expressionis pro $t = \frac{1}{2}$ sive $u = 0$ sive $x = g + \frac{1}{2}\Delta$: utrique coefficienti ordinem m tribuimus. Generaliter itaque loquendo integratio nostra usque ad ordinem n inclus. exacta erit, quicumque valores pro $a, a', a'', \dots, a^{(n)}$ accipiantur. Attamen hinc nihil obstat, quominus pro valoribus harum quantitatum scite electis praecisio ad altiore gradum evehatur. Ita iam supra vidimus, in methodo COTESII i. e. pro $a = 0, a = \frac{1}{m}, a' = \frac{2}{m}, a'' = \frac{3}{m}$ etc. praecisionem sponte ad ordinem $n+1$ inclus. extendi, quoties n sit numerus par. Generaliter patet, si valores $a, a', a'', \dots$ etc. ita fuerint electi, ut in functione T'' vel U'' ab initio excidat terminus unus pluresve, praecisionem totidem gradibus ultra ordinem n promotum iri, quot termini exciderint. Hinc facile colligitur, quum multitudo quantitatum quas eligere conceditur sit $n+1$, per idoneam earum determinationem praecisionem semper ad ordinem $2n+1$ inclus. evehi posse, quo pacto adiumento $n+1$ terminorum eundem praecisionis ordinem assequi licebit, ad quem attingendum $2n+1$ vel $2n+2$ terminos in usum vocare oporteret, si COTESII methodum sequeremur.

16.

Totum hoc negotium in eo vertitur, ut pro quovis valore dato ipsius n functionem T eruanus formae $t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha' t^{n-1} + \alpha'' t^{n-2}$ etc. itaque comparatam, ut in producto

$$T(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{2}t^{-3} + \frac{1}{2}t^{-4} + \text{etc.})$$

evoluta potestates $t^{-1}, t^{-2}, t^{-3}, \dots, t^{-(n+1)}$ omnes nanciscantur coefficientem 0; aut si magis placet, functionem U formae $u^{n+1} + 6u^n + 6u^{n-1} + 6u^{n-2} + \text{etc.}$, cuius productum per $u^{-1} + \frac{1}{2}u^{-3} + \frac{1}{2}u^{-5} + \frac{1}{2}u^{-7} + \text{etc.}$ liberum evadat a potesta-

tibus $u^{-1}, u^{-2}, u^{-3}, u^{-4}, \dots, u^{-(n+1)}$. Modus posterior aliquanto simplicior erit: quum enim facile perspiciatur, coefficientes ipsius U , ut conditioni praescriptae satisfiat, alternatim evanescere debere, sive statui $\delta = 0, \delta'' = 0, \delta''' = 0$ etc., laboris dimidia fere pars iam absoluta censenda erit. Evolvamus casus quosdam simplices.

I. Pro $n = 0$, coefficientis unicus ipsius t^{-1} in producto

$$(t + \alpha)(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \text{etc.})$$

evanescere debet. Qui quum fiat $= \frac{1}{2} + \alpha$, habemus $\alpha = -\frac{1}{2}$, sive $T = t - \frac{1}{2}$. Perinde $U = u$.

II. Pro $n = 1$, determinatio ipsius T pendet a duabus aequationibus

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \alpha' \\ 0 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\alpha' \end{aligned}$$

unde deducimus $\alpha = -1, \alpha' = +\frac{1}{2}$, sive $T = tt - t + \frac{1}{2}$. Determinatio functionis U unicam aequationem affert

$$0 = \frac{1}{2} + \delta'$$

unde $\delta' = -\frac{1}{2}$, sive $U = uu - \frac{1}{2}$.

III. Pro $n = 2$, functio T determinatur adiumento trium aequationum

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha' + \alpha'' \\ 0 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}\alpha' + \frac{1}{3}\alpha'' \\ 0 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{4}\alpha' + \frac{1}{4}\alpha'' \end{aligned}$$

unde nanciscimur $\alpha = -\frac{3}{2}, \alpha' = \frac{3}{2}, \alpha'' = -\frac{1}{2}$, adeoque $T = t^3 - \frac{3}{2}tt + \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}$. Ad determinandam U unica aequatio sufficit

$$0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\delta'$$

unde $\delta' = -\frac{3}{2}$, sive $U = u^3 - \frac{3}{2}u$.

Attamen hunc modum, qui calculos continuo molestiores adducit, hic ulterius non persequemur, sed ad fontem genuinum solutionis generalis progrediemur.

17.

Proposita fractione continua

$$\varphi = \frac{v}{w + \frac{v'}{w' + \frac{v''}{w'' + \frac{v'''}{w''' + \text{etc.}}}}}$$

constat, fractiones continuo magis appropinquantes inveniri per algorithmum sequentem. Formentur duae quantitatum series, V, V', V'', V''' etc., W, W', W'', W''' etc. per hasce formulas

$$\begin{aligned} V &= 0 & W &= 1 \\ V' &= v & W' &= wW \\ V'' &= w'V' + v'V & W'' &= w'W' + v'W \\ V''' &= w''V'' + v''V' & W''' &= w''W'' + v''W' \\ V'''' &= w'''V''' + v'''V'' & W'''' &= w'''W''' + v'''W'' \end{aligned}$$

etc. eritque

$$\begin{aligned} \frac{V}{W} &= 0 \\ \frac{V'}{W'} &= \frac{v}{w} \\ \frac{V''}{W''} &= \frac{v}{w + \frac{v'}{w'}} \\ \frac{V'''}{W'''} &= \frac{v}{w + \frac{v'}{w' + \frac{v''}{w''}}} \end{aligned}$$

et sic porro. Praeterea constat, vel facile ex ipsis aequationibus praecedentibus confirmatur, esse

$$\begin{aligned} VW' - V'W &= -v \\ V''W' - V'W'' &= +vv' \\ V'''W'' - V''W''' &= -vv'v'' \\ V''''W''' - V'''W'''' &= +vv'v''v''' \end{aligned}$$

etc. Hinc perspicuum est, seriei

$$\frac{v}{w} - \frac{vv'}{w'w''} + \frac{vv'v''}{w''w'''} - \frac{vv'v''v'''}{w'''w''''} + \text{etc.}$$



terminum primum esse $= \frac{V'}{W'}$

summam duorum terminorum primorum $= \frac{V''}{W''}$

summam trium terminorum primorum $= \frac{V'''}{W'''}$

summam quatuor terminorum primorum $= \frac{V''''}{W''''}$

et sic porro; quocirca series ipsa vel in infinitum vel usque dum abruptatur continuata ipsam fractionem continuam φ exprimet. Simul hinc habetur differentia inter φ atque singulas fractiones appropinquant $\frac{V'}{W'}, \frac{V''}{W''}, \frac{V'''}{W'''}$ etc.

E formula 33 art. 14 *Disquisitionum generalium circa seriem infinitam* mutando t in $\frac{1}{u}$, facile obtinemus transformationem seriei

$$\varphi = u^{-1} + \frac{1}{2}u^{-3} + \frac{1}{8}u^{-5} + \frac{1}{16}u^{-7} + \text{etc.}$$

in fractionem continuam sequentem

$$\begin{array}{r} 1 \\ u - \frac{1}{2} \\ \hline \frac{2.2}{3.5} \\ u - \frac{3.3}{5.7} \\ \hline \frac{4.4}{7.9} \\ u - \frac{7.9}{\text{etc.}} \end{array}$$

ita ut habeatur

$$\begin{aligned} v &= 1, v' = -\frac{1}{2}, v'' = -\frac{1}{8}, v''' = -\frac{1}{16}, v'''' = -\frac{1}{64} \text{ etc.} \\ w &= u, w' = u, w'' = u, w''' = u, w'''' = u \text{ etc.} \end{aligned}$$

Hinc pro V, V', V'', V''' etc. W, W', W'', W''' etc. nanciscimur valores sequentes

$$\begin{array}{ll} V = 0, & W = 1 \\ V' = 1, & W' = u \\ V'' = u, & W'' = uu - \frac{1}{2} \\ V''' = uu - \frac{1}{8}, & W''' = u^3 - \frac{3}{8}u \\ V'''' = u^3 - \frac{1}{2}\frac{1}{4}u, & W'''' = u^4 - \frac{5}{8}uu + \frac{3}{8} \\ V^v = u^4 - \frac{5}{8}uu + \frac{3}{8}\frac{1}{2}, & W^v = u^5 - \frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{8}u \\ V^vi = u^5 - \frac{3}{8}\frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{8}u, & W^vi = u^6 - \frac{1}{2}u^4 + \frac{3}{8}uu - \frac{1}{8}\frac{1}{2} \\ V^vii = u^6 - \frac{3}{8}\frac{1}{2}u^4 + \frac{3}{8}\frac{1}{2}uu - \frac{1}{8}\frac{1}{2}\frac{1}{2}, & W^vii = u^7 - \frac{1}{2}u^5 + \frac{1}{2}\frac{3}{8}u^3 - \frac{3}{8}\frac{1}{2}u \text{ etc.} \end{array}$$

Leviattentione adhibita elucet, singulas V, V', V'', V''' etc. W, W', W'', W''' etc. fieri functiones integras indeterminatae u ; terminum altissimum in $V^{(m)}$ fieri u^{m-1} , potestatesque $u^{m-2}, u^{m-4}, u^{m-6}$ etc. abesse; terminum altissimum vero in $W^{(m)}$ fieri u^m , atque abesse potestates $u^{m-1}, u^{m-3}, u^{m-5}$ etc. Per ea autem, quae supra demonstravimus, erit

$$\varphi = \frac{1}{W} + \frac{1}{3W'} + \frac{2.2}{3.3.5W''} + \frac{2.2.3.3}{3.3.5.5.7W'''} + \frac{2.2.3.3.4.4}{3.3.5.5.7.9W''''} + \text{etc.}$$

ac proin generaliter

$$\varphi = \frac{V^{(m)}}{W^{(m)}} = \frac{2.2.3.3 \dots m.m}{3.3.5.5 \dots (2m-1)(2m+1)} \frac{V^{(m+1)}}{W^{(m+1)}} + \frac{2.2.3.3 \dots (m+1)(m+1)}{3.3.5.5 \dots (2m+1)(2m+3)} \frac{V^{(m+2)}}{W^{(m+2)}} + \text{etc.}$$

Si igitur $\varphi = \frac{V^{(m)}}{W^{(m)}}$ in seriem descendantem convertitur, eius terminus primus erit

$$= \frac{2.2.3.3 \dots m.m u^{-(2m+1)}}{3.3.5.5 \dots (2m-1)(2m+1)}$$

Productum vero $\varphi W^{(m)}$ compositum erit e functione integra $V^{(m)}$ atque serie infinita, cuius terminus primus

$$= \frac{2.2.3.3 \dots m.m u^{-(m+1)}}{3.3.5.5 \dots (2m-1)(2m+1)}$$

Hinc igitur sponte inventa est functio U ordinis $n+1$, quae conditioni in art. praec. stabilitae satisfacit, scilicet ut productum φU liberum evadat a potestatibus $u^{-1}, u^{-2}, u^{-3}, \dots, u^{-(n+1)}$. Scilicet non est alia quam $W^{(n+1)}$, simulque patet, U aequalem fieri ipsi $V^{(n+1)}$, nec non terminum primum ipsius U^n esse

$$= \frac{2.2.3.3 \dots (n+1)(n+1)}{3.3.5.5 \dots (2n+1)(2n+3)} \cdot u^{-(n+2)}$$

Quodsi igitur pro $b, b', b'', \dots, b^{(n)}$ accipiuntur radices aequationis $W^{(n+1)} = 0$, valoresque coefficientium $R, R', R'', \dots, R^{(n)}$ per praecepta supra tradita eruuntur, formula nostra integralis praecisione gaudebit ad ordinem $2n+1$ ascendente, eiusque correctio exprimetur proxime per

$$\frac{1}{2^{2n+2}} \frac{2.2.3.3 \dots (n+1)(n+1)}{3.3.5.5 \dots (2n+1)(2n+3)} L^{(2n+2)} = \frac{1.1.2.2.3.3 \dots (n+1)(n+1)}{2.4.6.10.14 \dots (4n+2)(4n+6)} L^{(2n+2)}$$

18.

Disquisitiones art. praec. functiones idoneas U pro singulis valoribus numeri n invenire quidem docent, sed successive tantum, dum a valoribus minoribus ad maiores transcendendum est. Facile autem animadvertimus, has functiones generaliter exprimi per

$$u^{n+1} = \frac{(n+1)n}{2 \cdot (2n+1)} u^{n-1} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+1)(2n-1)} u^{n-3} - \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n+1)(2n-1)(2n-3)} u^{n-5} + \text{etc.}$$

sive etiam, si characteristicam F ad normam commentationis supra citatae utimur, per

$$u^{n+1} F(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}(n+1), -(n+\frac{1}{2}), u^{-2})$$

Haecce inductio facile in demonstrationem rigorosam convertitur per methodum vulgo notam, aut, si ita videtur, adiumento formulae 19 in comment. cit. Functio U , si magis placet, etiam ordine terminorum inverso, exprimi potest per

$$\pm \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (n+1)}{(n+3)(n+5) \dots (2n+1)} \cdot u F(-\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}(n+3), \frac{3}{2}, uu)$$

pro n pari, valente signo superiori vel inferiori, prout $\frac{1}{2}n$ par est vel impar aut per

$$\pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots n}{(n+2)(n+4) \dots (2n+1)} F(-\frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}n+1, \frac{1}{2}, uu)$$

pro n impari, valente signo superiori vel inferiori, prout $\frac{1}{2}(n+1)$ par est vel impar.

Functio U' expressionem generalem aequae simplicem non admittit: facile tamen ex ipsa genesi quantitatum V, V', V'' etc. colligitur, terminum ultimum ipsius U' pro n pari fieri

$$= \pm \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \dots n \cdot n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \dots (2n-1)(2n+1)}$$

signo superiori vel inferiori valente, prout $\frac{1}{2}n$ par est vel impar.

Functio $U'' = \varphi W^{(n+1)} - V^{(n+1)}$, cuius terminum primum iam in art. praec. assignare docuimus, etiam per algorithmum recurrentem evolvi potest, quum manifesto generaliter habeatur

$$\begin{aligned} \varphi W'' - V'' &= u'(\varphi W' - V') + v'(\varphi W - V) \\ \varphi W''' - V''' &= u''(\varphi W'' - V'') + v''(\varphi W' - V') \\ \varphi W'''' - V'''' &= u'''(\varphi W''' - V''') + v'''(\varphi W'' - V'') \end{aligned}$$

etc. adeoque eo quem tractamus casu

$$\varphi W^{(m+2)} - V^{(m+2)} = u(\varphi W^{(m+1)} - V^{(m+1)}) - \frac{(m+1)^2}{(2m-1)(2m+1)} (\varphi W^{(m)} - V^{(m)})$$

Ita invenimus

$$\begin{aligned} \varphi W - V &= u^{-1} + \frac{1}{2}u^{-3} + \frac{1}{8}u^{-5} + \frac{1}{16}u^{-7} + \text{etc.} \\ \varphi W' - V' &= \frac{1}{2}u^{-2} + \frac{1}{4}u^{-4} + \frac{1}{8}u^{-6} + \frac{1}{16}u^{-8} + \text{etc.} \\ \varphi W'' - V'' &= \frac{1}{8}u^{-3} + \frac{1}{8}u^{-5} + \frac{1}{16}u^{-7} + \frac{1}{128}u^{-9} + \text{etc.} \\ \varphi W''' - V''' &= \frac{1}{16}u^{-4} + \frac{1}{16}u^{-6} + \frac{1}{128}u^{-8} + \frac{1}{1024}u^{-10} + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc. quas series ita quoque exhibere licet

$$\begin{aligned} \varphi W - V &= u^{-1} \left(1 + \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} u^{-2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5} u^{-4} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} u^{-6} + \text{etc.} \right) \\ \varphi W' - V' &= \frac{1}{2} u^{-2} \left(1 + \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} u^{-2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} u^{-4} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} u^{-6} + \text{etc.} \right) \\ \varphi W'' - V'' &= \frac{1}{8} u^{-3} \left(1 + \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 7} u^{-2} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 9} u^{-4} + \frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} u^{-6} + \text{etc.} \right) \\ \varphi W''' - V''' &= \frac{1}{16} u^{-4} \left(1 + \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 9} u^{-2} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 11} u^{-4} + \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13} u^{-6} + \text{etc.} \right) \end{aligned}$$

etc. Hanc inductionem sequentes habebimus generaliter

$$U'' = \varphi W^{(n+1)} - V^{(n+1)} \text{ aequalem producto ex } \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \dots (n+1) \cdot (n+1)}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots (2n+1)(2n+3)} u^{-(n+2)}$$

in seriem infinitam

$$1 + \frac{(n+2)(n+3)}{2(2n+5)} u^{-2} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{2 \cdot 4 \cdot (2n+5)(2n+7)} u^{-4} + \text{etc.}$$

aut si magis placet in $F(\frac{1}{2}n+1, \frac{1}{2}n+\frac{3}{2}, n+\frac{3}{2}, u^{-2})$. Haec quoque inductio facillime ad plenam certitudinem evehitur vel per methodum vulgo notam vel adiumento formulae 19 in commentatione saepius citatae.

19.

Quum sufficiat, functionum T, U alterutram nosse, posterioris determinationem tamquam simplicioris praetulimus. Quae quemadmodum evolutioni seriei $u^{-1} + \frac{1}{2}u^{-3} + \frac{1}{8}u^{-5} + \text{etc.}$ in fractionem continuam innixa est, per ratio-cinia similia ex evolutione seriei $t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-3} + \frac{1}{8}t^{-5} + \frac{1}{16}t^{-7} + \text{etc.}$ in fractionem continuam



Termini huius aequationis ad laevam manifesto constituunt functionem integrum ipsius u : itaque necessario in parte ad dextram coefficientes potestatum ipsius u cum exponentibus negativis sese destruere debent.

Sed $\frac{d}{du} \frac{U''}{U}$ producit seriem infinitam incipientem a termino

$$-\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots (n+1))^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots (2n+1))^2} u^{-(2n+4)}$$

qua igitur per $(uu-1)U$ multiplicata nihil aliud prodire poterit nisi quantitas constans

$$-\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots (n+1))^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots (2n+1))^2}$$

Hinc colligimus*)

$$(uu-1)U \frac{dU}{du} + \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots (n+1))^2}{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots (2n+1))^2}$$

divisibilem esse per U , quamobrem functioni fractae $\frac{U'}{(\frac{dU}{du})}$, quae coefficientes R, R', R'' etc. suggerit, aequivalebit functio integra

$$-\frac{(1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots (2n+1))^2}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots (n+1))^2} U'^2 \cdot (uu-1)$$

Loco huius functionis, quae est ordinis $2n+2$, manifestoque solas potestates pares ipsius u implicat, adoptari poterit residuum ex eius divisione per U ortum, quod erit ordinis n , seu $n-1$, prout n par est seu impar. Si vero in casu priori coefficientem eum, qui respondet radici $u=0$, excludere malumus, loco illius functionis eius residuum ex divisione per $\frac{U}{u}$ ortum adoptabimus, quod tantummodo ad ordinem $n-2$ ascendet.

22.

Ut praesto sint, quae ad applicationem methodi hucusque expositae requiruntur, adiungere visum est, pro valoribus successivis numeri n , valores numericos tum quantitatum a, a', a'' etc., tum coefficientium R, R', R'' etc. ad sedecim figuras computatos, una cum horum logarithmis ad decem figuras.

*) Simul hinc petitur demonstratio, quod U cum $\frac{dU}{du}$ divisorem indeterminatum communem habere nequit, neque adeo aequatio $U=0$ radices aequales.

I. Terminus unus, $n=0$.

$$U=u, U'=1, T=t-\frac{1}{2}, T'=1.$$

$$a=0,5$$

$$R=1$$

Correctio formulae integralis proxime $= \frac{1}{4} L''$.

II. Termini duo, $n=1$.

$$U=uu-\frac{1}{2}, U'=u$$

$$T=tt-t+\frac{1}{2}, T'=t-\frac{1}{2}$$

$$a=0,2113248654 \quad 051871$$

$$a'=0,7886751345 \quad 948129$$

$$R=R'=\frac{1}{2}$$

Correctio proxime $= \frac{1}{16} L'''$.

III. Termini tres, $n=2$.

$$U=u^3-\frac{3}{2}u, U'=uu-\frac{1}{2}$$

$$T=t^3-\frac{3}{2}tt+\frac{3}{2}t-\frac{1}{2}, T'=tt-t+\frac{1}{2}$$

$$a=0,1127016653 \quad 792583$$

$$a'=0,5$$

$$a'=1,8872983346 \quad 207417$$

$$R=R'=\frac{1}{8}$$

$$R''=\frac{1}{8}$$

Correctio proxime $= \frac{1}{256} L^{VI}$.

IV. Termini quatuor, $n=3$.

$$U=u^4-\frac{6}{5}uu+\frac{3}{5}$$

$$U'=u^3-\frac{1}{5}u$$

$$T=t^4-2t^3+\frac{3}{5}tt-\frac{3}{5}t+\frac{1}{5}$$

$$T'=t^3-\frac{3}{5}tt+\frac{1}{5}t-\frac{3}{5}$$

$$a=0,0694318442 \quad 029754$$

$$a'=0,3300094782 \quad 075677$$

$$a''=0,6699905217 \quad 924323$$

$$a'''=0,9305681557 \quad 970246$$

$$R=R''=0,1739274225 \quad 687284 \quad \log. = 9,2403680612$$

$$R'=R''=0,3260725774 \quad 312716 \quad \log. = 9,5133142764$$

Horum coefficientium expressio generalis $= \frac{1}{16} L''''uu+\frac{1}{16}$

Correctio proxime $= \frac{1}{16} L^{VIII}$

V. Termini quinque, $n = 4$.

$$U = u^5 - \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u$$

$$U' = u^4 - \frac{1}{2}uu + \frac{1}{2}u$$

$$T = t^5 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}tt + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t$$

$$T' = t^4 - 2t^3 + \frac{1}{2}tt - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t$$

$$a = 0,0469100770 \quad 306680$$

$$a' = 0,2307653449 \quad 471585$$

$$a'' = 0,5$$

$$a''' = 0,7692346550 \quad 528415$$

$$a'''' = 0,9530899229 \quad 693320$$

$$R = R'''' = 0,1184634425 \quad 280945 \quad \log. = 9,0735843490$$

$$R' = R''' = 0,2393143352 \quad 496832 \quad 9,3789687142$$

$$R'' = R'''' = 0,2844444444 \quad 444444 \quad 9,4539974559$$

Expressio generalis horum coefficientium, excluso R ,

$$- \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u$$

Correctio proxime = $\frac{1}{2}L^x$

VI. Termini sex, $n = 5$.

$$U = u^6 - \frac{1}{2}u^4 + \frac{1}{2}uu - \frac{1}{2}u$$

$$U' = u^5 - \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u$$

$$T = t^6 - 3t^5 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}tt - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t$$

$$T' = t^5 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}tt + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t$$

$$a = 0,0337652428 \quad 984240$$

$$a' = 0,1693953067 \quad 668678$$

$$a'' = 0,3806904069 \quad 584015$$

$$a''' = 0,6193095930 \quad 415985$$

$$a'''' = 0,8306046932 \quad 331322$$

$$a''''' = 0,9662347571 \quad 015760$$

$$R = R''''' = 0,0856622461 \quad 895852 \quad \log. = 8,9327894580$$

$$R' = R'''' = 0,1803807865 \quad 240693 \quad 9,2561902763$$

$$R'' = R''' = 0,2339569672 \quad 863455 \quad 9,3691359831$$

Coëfficientium expressio generalis

$$- \frac{1}{2}u^4 + \frac{1}{2}uu - \frac{1}{2}u$$

Correctio proxime = $\frac{1}{2}L^{10}$

VII. Termini septem, $n = 6$.

$$U = u^7 - \frac{1}{2}u^5 + \frac{1}{2}u^3 - \frac{1}{2}u$$

$$U' = u^6 - \frac{1}{2}u^4 + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u$$

$$T = t^7 - \frac{1}{2}t^6 + \frac{1}{2}t^5 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}t$$

$$T' = t^6 - 3t^5 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{2}t^3 + \frac{1}{2}tt - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t$$

$$a = 0,0254460438 \quad 286202$$

$$a' = 0,1292344072 \quad 003028$$

$$a'' = 0,2970774243 \quad 113015$$

$$a''' = 0,5$$

$$a'''' = 0,7029225756 \quad 886985$$

$$a''''' = 0,8707655927 \quad 996972$$

$$a'''''' = 0,9745539561 \quad 713798$$

$$R = R'''''' = 0,0647424830 \quad 844348 \quad \log. = 8,8111893529$$

$$R' = R''''' = 0,1398526957 \quad 446384 \quad 9,1456708421$$

$$R'' = R'''' = 0,1909150252 \quad 525595 \quad 9,2808401093$$

$$R''' = R''' = 0,2089795918 \quad 367347 \quad 9,3201038766$$

Horum coefficientium, R'' excluso, expressio generalis

$$- \frac{1}{2}u^5 + \frac{1}{2}u^3 - \frac{1}{2}u$$

Correctio proxime = $\frac{1}{2}L^{10}$

23.

Coronidis loco methodi nostrae efficaciam ob oculos ponemus computando
valorem integralis

$$\int \frac{dx}{\log x}$$

ab $x = 100000$ usque ad $x = 200000$.

I. Ex termino uno habemus $\Delta R A = 8390,394608$

$$\Delta R A = 4271,810097$$

II. Ex terminis duobus fit...

$$\Delta R' A = 4134,144502$$

$$\text{Summa} = 8405,954599$$

$$\Delta R A = 2390,572772$$

$$\Delta R' A = 3729,064270$$

III. Ex terminis tribus

$$\Delta R'' A = 2286,599733$$

$$\text{Summa} = 8406,236775$$

25*

$$\begin{array}{l} \text{IV. Ex terminis quatuor} \dots\dots \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta R A = 1501,957053 \\ \Delta R' A' = 2763,769240 \\ \Delta R'' A'' = 2711,454637 \\ \Delta R''' A''' = 1429,062040 \\ \text{Summa} = 8406,242970 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{V. Ex terminis quinque} \dots\dots \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta R A = 1024,879445 \\ \Delta R' A' = 2041,833335 \\ \Delta R'' A'' = 2386,601133 \\ \Delta R''' A''' = 1980,509616 \\ \Delta R'''' A'''' = 972,419588 \\ \text{Summa} = 8406,243117 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{VI. Ex terminis sex} \dots\dots\dots \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta R A = 741,912854 \\ \Delta R' A' = 1545,757256 \\ \Delta R'' A'' = 1976,737668 \\ \Delta R''' A''' = 1950,466223 \\ \Delta R'''' A'''' = 1488,588550 \\ \Delta R''''' A''''' = 702,780570 \\ \text{Summa} = 8406,243121 \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{VII. Ex terminis septem} \dots\dots \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta R A = 561,1213804 \\ \Delta R' A' = 1202,0551998 \\ \Delta R'' A'' = 1621,6290819 \\ \Delta R''' A''' = 1753,4212406 \\ \Delta R'''' A'''' = 1584,9790252 \\ \Delta R''''' A''''' = 1152,0681116 \\ \Delta R'''''' A'''''' = 530,9690816 \\ \text{Summa} = 8406,2431211 \end{array} \right. \end{array}$$

E calculis clar. BESSEL valor eiusdem integralis inventus est = 8406,24312.

ANZEIGEN.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1812 Februar 16.

Die logarithmischen und Kreisfunctionen, als die einfachsten Arten der transcendenten Functionen, sind diejenigen, womit sich die Analysten am meisten beschäftigt haben. Sie verdienen diese Ehre sowohl wegen ihres steten Eingreifens in fast alle mathematische Untersuchungen, theoretische und practische, als wegen des fast unerschöpflichen Reichthums an interessanten Wahrheiten, den ihre Theorie darbietet. Weit weniger sind bisher andere transcendente Functionen bearbeitet, die sich auf jene nicht zurückführen lassen, sondern als eigne höhere Gattungen betrachtet werden müssen, die nur in speciellen Fällen mit jenen zusammenhängen. Und doch sind manche solcher Functionen nicht minder fruchtbar an interessanten Relationen, und daher dem, welcher die Analyse um ihrer selbst willen ehrt, nicht minder wichtig; so wie ihr häufiges Vorkommen bei mancherlei andern Untersuchungen sie dem empfehlen muss, der gern erst nach practischem Nutzen fragt. Professor GAUSS hat sich mit Untersuchungen über dergleichen höhere transcendente Functionen schon seit vielen Jahren beschäftigt, deren weit ausgedehnte Resultate das Gesagte bestätigen. Einen, verhältnissmässig freilich nur sehr kleinen, Theil derselben, der gleichsam als Einleitung zu einer künftig zu liefernden Reihe von Abhandlungen angesehen werden kann, hat er am 30. Januar unter der Aufschrift

Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1 + \frac{a \cdot b}{1 \cdot \gamma} x + \frac{a \cdot a + 1 \cdot b \cdot b + 1}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot \gamma + 1} x^2 + \frac{a \cdot a + 1 \cdot a + 2 \cdot b \cdot b + 1 \cdot b + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma \cdot \gamma + 1 \cdot \gamma + 2} x^3 + \text{etc.}$$

Pars prior.

Vorzüglich merkwürdig ist der Fall, wo man in der zweiten Entwicklung $\delta = 0$ setzt. Es folgt daraus ein Lehrsatz, welchen wir seiner umfassenden Anwendbarkeit wegen hier beifügen. Die Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ oder, was einerlei ist, die Reihe

$$1 + \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1}{\gamma \cdot \gamma + 1}xx + \frac{\alpha \cdot \alpha + 1 \cdot \alpha + 2}{\gamma \cdot \gamma + 1 \cdot \gamma + 2}x^3 + \text{etc.}$$

gibt den continuirlichen Bruch

$$\frac{1}{1 - \frac{ax}{1 - \frac{bx}{1 - \frac{cx}{1 - \text{etc.}}}}}$$

wo die Coëfficienten a, b, c, d etc. nach folgendem Gesetze fortschreiten:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{\gamma} & b &= \frac{\gamma - \alpha}{\gamma(\gamma + 1)} \\ c &= \frac{(\alpha + 1)\gamma}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)} & d &= \frac{2(\gamma + 1 - \alpha)}{(\gamma + 2)(\gamma + 3)} \\ e &= \frac{(\alpha + 2)(\gamma + 1)}{(\gamma + 3)(\gamma + 4)} & f &= \frac{3(\gamma + 2 - \alpha)}{(\gamma + 4)(\gamma + 5)} \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Hiernach lassen sich z. B. die Potenz eines Binomium, die Reihen für $\log(1+x)$, $\log \frac{1+x}{1-x}$, für Exponentialgrößen, für den Bogen durch die Tangente oder durch den Sinus u. a. in unendliche continuirliche Brüche verwandeln. Auch beruhen hierauf die in der *Theoria motus corporum coelestium* gegebenen Verwandlungen in solche Brüche, deren Beweise hier von dem Verfasser nachgeholt werden.

Bei weitem den grössten Theil der Abhandlung nimmt der dritte Abschnitt ein, in welchem von dem Werthe der Reihe gehandelt wird, wenn man das vierte Element $= 1$ setzt. Nachdem zuvorst mit geometrischer Schärfe bewiesen, dass die Reihe für $x = 1$ nur dann zu einer endlichen Summe convergire, wenn $\gamma - \alpha - \delta$ eine positive Grösse ist, führt der Verf. diese Summe, oder $F(\alpha, \delta, \gamma, 1)$ auf den Ausdruck $\frac{\Pi(\gamma-1) \cdot \Pi(\gamma-\alpha-\delta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1) \cdot \Pi(\gamma-\delta-1)}$ zurück, wo die Charakteristik Π eine eigene Art transcendenter Functionen andeutet, deren Erzeugung der Verf. auf ein unendliches Product gründet. Diese in der ganzen Analyse höchst wichtige Function ist im Grunde nichts anders als EULERS inexplicable Function

$$\Pi z = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot z$$

allein diese Erzeugungsart oder Definition ist, nach des Verf. Urtheil, durchaus unstatthaft, da sie nur für ganze positive Werthe von z einen klaren Sinn hat. Die vom Verf. gewählte Begründungsart ist allgemein anwendbar, und gibt selbst bei imaginären Werthen von z einen eben so klaren Sinn, wie bei reellen, und man läuft dabei durchaus keine Gefahr, auf solche Paradoxen und Widersprüche zu gerathen, wie ehemals Hr. KRAMÉ bei seinen numerischen Facultäten, die sich, wie man leicht zeigen kann, auf obige Function zurückführen lassen, aber zur Aufnahme in die Analyse weniger geeignet scheinen, als diese, da jene von drei Grössen abhängig sind, diese nur von Einer abhängt, und doch als eben so allgemein betrachtet werden muss. Der Verf. wünscht dieser transcendenter Function Πz in der Analyse das Bürgerrecht gegeben zu sehen, wozu vielleicht die Wahl eines eigenen Namens für dieselbe am beförderlichsten sein würde: das Recht dazu mag demjenigen vorbehalten bleiben, der die wichtigsten Entdeckungen in der Theorie dieser der Anstrengungen der Geometer sehr würdigen Function machen wird. Hier ist von dem Verf. bereits eine bedeutende Anzahl merkwürdiger, sie betreffender, Theoreme zusammen gestellt, wovon ein Theil als neu zu betrachten ist. Der Raum verstattet uns nicht, in das Detail derselben hier einzugehen: nur das eine heben wir davon aus, dass der Werth des Integrals $\int x^{x-1} (1-x^x)^y dx$ von $x = 0$ bis $x = 1$ leicht auf die Function Π zurückgeführt werden kann, und dass alle die von EULER für dergleichen Integrale zum Theil mühsam gefundenen Relationen sich mit grösster Leichtigkeit aus den allgemeinen Eigenschaften jener Functionen ableiten lassen, so wie umgekehrt allemal Πz , wenn z eine Rationalgrösse ist, sich durch einige solche bestimmte Integrale darstellen lässt.

Nicht weniger merkwürdig ist die aus der Differentiation von Πz entspringende, gleichfalls transcendente, Function, oder vielmehr

$$\frac{d \log \Pi z}{dz} = \frac{d \Pi z}{\Pi z \cdot dz}$$

welche der Verfasser mit Ψz bezeichnet hat, und die gleichfalls eine besondere Benennung verdiente. Von den zahlreichen merkwürdigen Eigenschaften dieser Function, welche in der Abhandlung aufgestellt sind, führen wir hier nur die Eine an, dass allgemein $\Psi z = \Psi 0$, wenn z eine rationale Grösse ist, auf Logarithmen und Kreisfunctionen zurückgeführt werden kann; $\Psi 0$ selbst aber ist die bekannte, von EULER und ANDERN untersuchte, Zahl 0,5772156649... negativ genommen, welche der Verfasser hier, nach einer von ihm selbst geführten Rech-



nung, auf 23 Decimalen mittheilt, wovon die letzten von MASCHERONI'S Bestimmung etwas abweichen. Uebrigens hängen sowohl Πz , als Ψz , mit mehreren merkwürdigen Integralen für bestimmte Werthe der veränderlichen Grösse zusammen.

Diesem dritten Abschnitte ist noch eine unter der Aufsicht des Professors GAUSS von Hrn. NICOLAI mit grösster Sorgfalt berechnete Tafel für $\log \Pi z$ und für Ψz beigelegt, worin das Argument z durch alle einzelnen Hunderttheile von 0 bis 1 fortschreitet; aus der Theorie dieser Functionen ist klar, dass man auf diese Werthe von z alle andere leicht zurück führen kann.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1811 September 26.

Der königl. Societät wurde am 16. September von dem Prof. GAUSS eine Vorlesung eingereicht überschrieben:

Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi.

Unter den verschiedenen Methoden zur genäherten Bestimmung der Integrale, oder wie es in der Sprache der ältern Analysten hiess, zur genäherten Quadratur krummliniger Figuren, ist die NEWTON-COTESISCHE, welche sich auf die Interpolationsmethode gründet, eine der brauchbarsten. NEWTON hatte eine Auflösung der Aufgabe gegeben, durch eine beliebige Anzahl gegebener Punkte eine parabolische Curve zu ziehen, deren immer leicht ausführbare Quadratur dann näherungsweise die Stelle der Quadratur der eigentlich vorgegebenen durch jene Punkte gehenden Curve vertreten kann, und zwar desto genauer, je mehr Punkte man in Anwendung bringt. NEWTON hatte es indessen bei dieser allgemeinen Andeutung bewenden lassen und nur gleichsam beispielsweise für den Fall von vier in gleichen Zwischenräumen liegenden Ordinaten A, B, C, D den genäherten Flächenraum zwischen der ersten und letzten, wenn deren Entfernung $= R$ ist, durch $(\frac{1}{2}A + \frac{3}{8}B + \frac{3}{8}C + \frac{1}{2}D)R$ angeführt. COTES, welcher für sich, und noch ehe NEWTON'S Schrift *Methodus differentialis* erschienen war, schon im Jahre 1707 ähnliche Untersuchungen angestellt hatte, wurde durch die zierliche Form, in welcher NEWTON das Endresultat in obigem Beispiele dargestellt hatte (*pulcherrima et*

utillissima regula nennt es COTES) bewogen, diese Vorschriften weiter und bis auf den Fall von 11 Ordinaten auszudehnen. Immer erscheint so der verlangte Flächenraum in der Gestalt des Products der Basis, oder der Entfernung der äussersten Ordinaten, in die Summe der durch bestimmte Zahlcoefficienten multiplicirten Ordinaten, und zwar haben zwei gleich weit vom Anfang und Ende abliegende Ordinaten allemal gleiche Coefficienten. Diese Quadraturcoefficienten bis zu dem Fall von 11 Ordinaten gibt COTES am Schluss der Abhandlung *de methodo differentiali*, welche einen Theil der *Harmonia mensurarum* ausmacht, ohne sich über das Verfahren, wodurch er sie berechnet hat, weiter zu erklären. Vielleicht hat man es dieser anspruchlosen Kürze, womit bloss das Endresultat dargestellt ist, zuzuschreiben, dass diese schöne und zweckmässige Methode von den Analysten weniger gekannt und benutzt zu sein scheint, als sie es verdient.

Bei dieser Methode liegt durchaus die Voraussetzung gleicher Abstände zwischen den Ordinaten zum Grunde. Allerdings scheint beim ersten Anblick diese Voraussetzung am einfachsten und natürlichsten zu sein, und es war noch nicht in Frage gekommen, ob es nicht demungeachtet noch vortheilhafter sein könne, Ordinaten in ungleichen Abständen zum Grunde zu legen. Um diese Frage zu entscheiden, musste zuerst die Theorie der Quadraturcoefficienten in unbeschränkter Allgemeinheit entwickelt, und der Grad der Genauigkeit des Resultats bestimmt werden. Es zeigte sich, dass die Bedingungen, wovon dieser Grad der Genauigkeit abhängt, von der Art sind, dass man dieselbe durch zweckmässig gewählte Ordinaten in ungleichen Abständen allerdings verdoppeln kann, so dass man mit einer beliebigen Anzahl gehörig gewählter Ordinaten eben so weit reicht, als mit der doppelten Anzahl von Ordinaten in gleichen Abständen. Diese Untersuchungen, nebst der vollständigen Theorie der zweckmässigsten Auswahl der Ordinaten, der dabei anzuwendenden Quadraturcoefficienten und der Bestimmung des Grades der Genauigkeit, welchen dieses Verfahren gewährt, machen den Hauptinhalt der vorliegenden Abhandlung aus.

Aus der kurzen Entwicklung der Theorie der COTESISCHEN Quadraturcoefficienten, welche der Verf. vorausschieken zu müssen glaubte, berühren wir hier nur dasjenige, was den Grad der Genauigkeit betrifft, welchen die dadurch gefundenen genäherten Integrale haben. Vor allen muss hier bemerkt werden, dass die Anwendbarkeit dieser Methode, eben so wie das Interpoliren, auf der Voraussetzung beruhe, dass die Ordinaten innerhalb des zu quadrenden Raumes

sich durch eine convergirende Reihe darstellen lassen. Es sei x die Abscisse, y die Ordinate, und das Integral $\int y dx$ werde von $x = g$ bis $x = h$ verlangt. Man führe statt x eine andere veränderliche Grösse ein, indem man etwa $x = g + (h-g)t$, oder auch $x = \frac{1}{2}(g+h) + \frac{1}{2}(h-g)u$ setzt. Hier muss also y sich durch Reihen wie

$$\alpha + \alpha' t + \alpha'' t^2 + \alpha''' t^3 + \text{etc.}$$

oder

$$\bar{\alpha} + \bar{\alpha}' u + \bar{\alpha}'' u^2 + \bar{\alpha}''' u^3 + \text{etc.}$$

darstellen lassen, die convergiren, jene, wenigstens so lange t , diese so lange u nicht grösser wird als 1. Man mag daher Kürze wegen den Coefficienten α' und $\bar{\alpha}'$ die Ordnung 1, den Coefficienten α'' und $\bar{\alpha}''$ die Ordnung 2 u.s.w. beilegen. Diess vorausgesetzt, wird gezeigt, dass die Fehler, denen man sich bei der Corresischen Methode aussetzt, zwar immer von einer höhern Ordnung werden, je grösser die Anzahl der zum Grunde gelegten Werthe von y ist, jedoch so, dass eine ungerade Anzahl und die zunächst grössere gerade Anzahl immer Fehler von einerlei Ordnung hervorbringen. So ist für drei Ordinaten der Fehler sehr nahe $= \frac{1}{120}(h-g)\alpha'''$, für vier Ordinaten nahe $= \frac{1}{240}(h-g)\alpha'''$; sodann für fünf Ordinaten nahe $= \frac{1}{2400}(h-g)\alpha^{(4)}$ und für sechs Ordinaten nahe $= \frac{1}{32000}(h-g)\alpha^{(4)}$ u.s.f. Man sieht hieraus, dass es im Allgemeinen vorthellhaft sein wird, bei Anwendung der Corresischen Methode eine ungerade Anzahl von Ordinaten zu benutzen.

Der Verf. geht hierauf zu der allgemeinen Untersuchung über, wo die Einschränkung, dass die Ordinaten gleiche Abstände von einander haben, wegfällt. Sind hier A, A', A'' u.s.w. die Werthe von y , die entsprechenden Werthe von t hingegen a, a', a'' u.s.w., oder b, b', b'' u.s.w. die entsprechenden Werthe von u , und ihre Anzahl $n+1$, so wird das genäherte Integral wiederum die Gestalt haben

$$(h-g)(RA + R'A' + R''A'' + \text{etc.})$$

wo R, R', R'' u.s.w. Zahlcoefficienten sind, die unabhängig von der Function y bloss durch a, a', a'' u.s.w., oder durch b, b', b'' u.s.w. bestimmt werden. Die Untersuchungen des Verf. geben für diese Bestimmung folgendes Resultat. Es sei

$$T = (t-a)(t-a')(t-a'') \dots$$

Aus der Multiplication dieser ganzen Function von t , welche auf die Ordnung $n+1$ steigt, in die unendliche Reihe, welche den Logarithmen von $\frac{t}{t-1}$ vorstellt, nemlich

$$t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \text{etc.}$$

erbege sich das Product $T' + T''$, so dass T' die darin enthaltene ganze Function von t bezeichnet, so wie T'' die übrige mit negativen Potenzen von t ins Unendliche fortlaufende Reihe. Diess vorausgesetzt, ergeben sich die Quadraturcoefficienten R, R', R'' u.s.w., wenn man in $\frac{T'dt}{dT}$ für t der Reihe nach die Werthe a, a', a'' u.s.w. substituirt. Auf eine ähnliche und noch etwas bequemere Art leitet man jene Coefficienten aus b, b', b'' u.s.w. ab, indem man die Function

$$(u-b)(u-b')(u-b'') \dots$$

durch U , ihr Product in die unendliche Reihe

$$u^{-1} + \frac{1}{2}u^{-2} + \frac{1}{3}u^{-3} + \text{etc.}$$

durch $U' + U''$ bezeichnet (so dass U' die darin enthaltene ganze Function von u vorstellt), und dann in $\frac{U'du}{dU}$ für u der Reihe nach die Werthe b, b', b'' u.s.w. substituirt. Statt der gebrochenen Functionen $\frac{T'dt}{dT}, \frac{U'du}{dU}$ lassen sich auch ganze Functionen von t und u finden, welche die Stelle von jenen vertreten können, und für deren Bestimmung der Verf. eine allgemeine Methode entwickelt.

Der Grad der Genauigkeit der Integrationsformel hängt nun von der Beschaffenheit der Reihe T'' oder U'' ab. Im Allgemeinen ist der Fehler zwar von der Ordnung $n+1$; allein wenn von den ersten Gliedern jener Reihen einige ausfallen, so wird der Fehler von einer höhern Ordnung, so dass wenn T'' erst mit der Potenz t^{-m} oder U'' mit der Potenz u^{-m} anfängt, der Fehler von der Ordnung $n+m$ wird.

Hieraus ergab sich nun, dass in so fern die Werthe a, a', a'' u.s.w., oder b, b', b'' u.s.w. willkürlich gewählt werden können, diese sich so bestimmen lassen müssen, dass die ersten $n+1$ Glieder von T'' oder U'' wirklich ausfallen, wovon die Folge sein wird, dass der Fehler der Integrationsformel auf die Ordnung $2n+2$ kommt. Die Untersuchung schreitet demnach zu der Bestimmung derjenigen Functionen T und U , für jeden Werth von n , fort, wodurch der angegebenen Bedingung Genüge geleistet wird. Der beschränkte Raum erlaubt

uns nicht, in das Einzelne dieser Untersuchung hier einzugehen: wir bemerken also hier nur, dass diese Functionen ein sehr einfaches Fortschreitungs-gesetz befolgen, und in genauem Zusammenhange stehen mit der Entwicklung der Reihen

$$t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{etc.}$$

$$u^{-1} + \frac{1}{2}u^{-2} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{4}u^{-4} + \text{etc.}$$

in continuirliche Brüche, die der Verf. in einer frühern Abhandlung [*Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{2,6}{1,7}x + \text{etc.}$] gegeben hat. — Offenbar gibt dem-nächst die Auflösung der Gleichung $T=0$ oder $U=0$ die Werthe von a, a', a'' u.s.w. oder b, b', b'' u.s.w., und die Werthe der Quadraturcoefficienten werden nach den allgemeinen Regeln bestimmt, die in diesem Falle noch besondere Vereinfachungen vertragen. Uebrigens werden allerdings in den meisten Fällen sowohl die Werthe von a, a', a'' u.s.w. als die Quadraturcoefficienten Irrationalgrössen. Diess ist indess an sich sehr gleichgültig, sobald nur ihre numerischen Werthe ein für allemal mit einem angemessenen Grad von Genauigkeit berechnet sind. Ist diess der Fall, so wird die Anwendung dieser Methode auf irgend eine Anzahl von Ordina-ten wenig oder gar nicht mehr Mühe machen, als die Anwendung der Co-resischen Methode auf eine eben so grosse Anzahl, da hingegen letztere auf eine doppelt so grosse Anzahl angewandt werden müsste, um ungefähr dieselbe Ge-nauigkeit des Resultats zu geben, wie erstere.

Um für die Anwendung dieser neuen Methode nichts zu wünschen übrig zu lassen, hat der Verf. noch die numerischen Werthe von a, a', a'' u.s.w., so wie von R, R', R'' u.s.w., auf 16 Decimalen berechnet, mitgetheilt, zugleich mit den Briggschen Logarithmen der letztern auf 10 Decimalen, alles bis zu dem Fall von sieben Ordinaten. In diesem letzten Fall wird der Fehler der Integra-tionsformel nahe $= \frac{1}{1766133333} a^{11}$, woraus man abnehmen kann, dass in den meisten in der Ausübung vorkommenden Fällen schon eine geringere Anzahl zu-reichen wird. Um die Anwendung der Vorschriften und ihre verhältnissmässige Schärfe noch mehr zu versinnlichen, ist als Beispiel die Berechnung von $\int_{\log x}^{\frac{dx}{x}}$ von $x = 100000$ bis $x = 200000$ beigefügt, wo schon bei der Anwendung von vier Werthen der Fehler nur $\frac{1}{333333333}$ des Ganzen ist, und bei einer grössern Anzahl sich in den unvermeidlichen Fehlern verliert, die selbst die grössern Lo-garithmentafeln noch übrig lassen.

NACHLASS.

DETERMINATIO SERIEI NOSTRAE

PER AEQUATIONEM DIFFERENTIALEM SECUNDI ORDINIS.

38.

Statuendo brevitatis causa $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = P$, habemus per art. 4

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)$$

atque hinc differentiendo denuo

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, x)$$

Hinc aequatio IX art. 10 suppeditat

$$[80] \quad 0 = \alpha\beta P - (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x) \frac{dP}{dx} - (x - \alpha x) \frac{d^2P}{dx^2}$$

Haecce aequatio differentio-differentialis tamquam definitio exactior functionis nostrae considerari potest; sed quoniam $P = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ non est integrale com-pletum sed particulare tantum (quod constantes non accesserunt), adicere oportet conditionem, ut P incipiat a valore 1 pro $x = 0$ simulque pro eodem valore ipsius x supponatur $\frac{dP}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ atque $\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}$.

Ita pro quovis valore ipsius x , ad quem a valore $x = 0$ per gradus con-tinuos transiisti, ita tamen, ut valorem $x = 1$, pro quo $x - \alpha x = 0$, non atti-geris, P erit quantitas perfecte determinata; sed manifesto hoc modo ad valores reales ipsius x positivos unitate majores pervenire nequis nisi transeundo per va-

lores imaginarios, quod quum infinitis modis diversis absque continuitatis praedicio fieri possit, hinc nondum liquet, annon eidem valori ipsius x plures, quin adeo infinite multi valores discreti ipsius P respondeant, sicuti in pluribus functionibus transcendens magis notis evenire constat. Sed de hoc argumento in posterum fusius loqui nobis reservamus, quum hoc loco casus is potissimum, ubi x accipitur infra vel saltem non ultra unitatem positivam, atque P aequalis summae seriei $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ tractetur.

39.

Scribendo in aequatione 80, $1-y$ pro x , transit ea in hanc

$$0 = \alpha \beta P - (\alpha + \beta + 1 - \gamma - (\alpha + \beta + 1)y) \frac{dP}{dy} - (y - yy) \frac{ddP}{dy^2}$$

quae habet formam similem ut illa. Hinc statim prodit aliud integrale particulare

$$P = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, y) = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1-x)$$

unde per principia nota sequitur integrale completum aequationis 80,

$$[81] \quad P = MF(\alpha, \beta, \gamma, x) + NF(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1-x)$$

denotantibus M, N constantes arbitrias.

Ceterum obiter hic observamus, ad formam aequationis 80 facile reduci posse aequationem generaliore

$$0 = AP + (B + Cy) \frac{dP}{dy} + (D + Ey + Fyy) \frac{ddP}{dy^2}$$

Sunt enim radices aequationis $0 = D + Ey + Fyy$ hac, $y = a, y = b$, sive $D + Ey + Fyy$ indefinite aequalis producto $F(y-a)(y-b)$ patetque statuendo $\frac{y-a}{b-a} = x$ atque determinando α, β, γ ita ut fiat

$$\alpha \beta = \frac{A}{F}, \quad \alpha + \beta + 1 = \frac{C}{F}, \quad \gamma = -\frac{B + aC}{F(b-a)}$$

illam transire in aequationem 80.

40.

Adiumento aequationis differentialis 80 erudire licet complura theoremata maxime memorabilia circa seriem nostram, tum generalia tum magis specialia, neque dubitamus, quin multa plura atque graviora adhuc lateant, ulterioribus curis servata. Quae hactenus nobis revelare contigit, hic in conspectum producemus.

Statuamus $P = (1-x)^{\mu} P'$, eritque

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= -\mu(1-x)^{\mu-1} P' + (1-x)^{\mu} \frac{dP'}{dx} \\ \frac{ddP}{dx^2} &= \mu(\mu-1)(1-x)^{\mu-2} P' - 2\mu(1-x)^{\mu-1} \frac{dP'}{dx} + (1-x)^{\mu} \frac{ddP'}{dx^2} \end{aligned}$$

Quibus valoribus in aequatione 80 substitutis prodit dividendo per $(1-x)^{\mu-1}$

$$0 = P' \{ \alpha \beta (1-x) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x) \mu - x(\mu \mu - \mu) \} - \frac{dP'}{dx} \{ (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x) - 2\mu x \} (1-x) - \frac{ddP'}{dx^2} \{ x - xx \} (1-x)$$

Determinemus μ ita, ut multiplicator ipsius P' per $1-x$ divisibilis evadat, quod fiet vel statuendo $\mu = 0$ vel $\mu = \gamma - \alpha - \beta$. Suppositio prior nihil novi doceret, sed valor posterior substitutus producit

$$0 = P' \{ \alpha \beta - \alpha \gamma - \beta \gamma + \gamma \gamma \} - \frac{dP'}{dx} \{ \gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)x \} - \frac{ddP'}{dx^2} \{ x - xx \}$$

sive

$$0 = P' \{ \gamma - \alpha \} (\gamma - \beta) - \frac{dP'}{dx} \{ \gamma - ((\gamma - \alpha) + (\gamma - \beta) + 1)x \} - \frac{ddP'}{dx^2} (x - xx)$$

quae prorsus eandem formam habet ut aequatio 80. Quare quum pro $x = 0$, manifesto fiat $P' = 1$ atque $\frac{dP'}{dx} = \frac{\alpha \beta}{\gamma} - \mu = \frac{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}{\gamma}$, patet ipsius integrale esse $P' = F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, x)$, ita ut generaliter habeatur

$$[82] \quad F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\alpha+\beta-1} F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

Hinc petenda est transformatio seriei

$$1 + \frac{2 \cdot 5}{9} x + \frac{3 \cdot 5 \cdot 10}{9 \cdot 11} x^2 + \frac{4 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}{9 \cdot 11 \cdot 13} x^3 + \text{etc.} = F(2, 4, \frac{2}{3}, x)$$

in

$$(1-x)^{-\frac{2}{3}} (1 + \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 9} x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 11} x^2 + \text{etc.}) = (1-x)^{-\frac{2}{3}} F(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, x)$$

quam in Ephemeridibus Astronomicis Berolinensibus 1814 p. 257 [Zusatz zu Art. 90 und 100 der Theoria motus] sine demonstratione indicaveramus.

41.

Statuamus porro $P = x^{\mu} P'$, ita ut fiat

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \mu x^{\mu-1} P' + x^{\mu} \frac{dP'}{dx} \\ \frac{ddP}{dx^2} &= (\mu \mu - \mu) x^{\mu-2} P' + 2\mu x^{\mu-1} \frac{dP'}{dx} + x^{\mu} \frac{ddP'}{dx^2} \end{aligned}$$

27

quibus valoribus in 80 substitutis, fit dividendo per $x^{\mu-1}$

$$0 = P' \{ \alpha \bar{\alpha} x - (\gamma - (\alpha + \bar{\alpha} + 1)x) \mu - (1-x)(\mu - \mu) \} \\ - \frac{dP'}{dx} \{ \gamma - (\alpha + \bar{\alpha} + 1)x + 2\mu(1-x) \} x \\ - \frac{d^2P'}{dx^2} (xx - x^2)$$

Multiplicator ipsius P' in hac formula fit divisibilis per x statuendo $\mu = 0$ vel $\mu = 1 - \gamma$; valor posterior producit

$$0 = P'(\alpha \bar{\alpha} + \alpha + \bar{\alpha} + 1 - 2\gamma - \alpha\gamma - \bar{\alpha}\gamma + \gamma\gamma) \\ - \frac{dP'}{dx} (2 - \gamma - (\alpha + \bar{\alpha} + 3 - 2\gamma)x) \\ - \frac{d^2P'}{dx^2} (x - xx)$$

Comparando hanc aequationem cum 80, cuius forma prorsus similis est, patet quae illic fuerant $P, \alpha, \bar{\alpha}, \gamma$ hic esse $P', \alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 2 - \gamma$; quare quum illius integrale completum assignaverimus, manifestum est, P' contentam fore sub formula

$$P' = MF(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \\ + NF(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1 - x)$$

denotantibus M, N quantitates constantes, sive

$$[83] \quad F(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma, x) = Mx^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \\ + Nx^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1 - x)$$

ubi constantes M, N ab elementis $\alpha, \bar{\alpha}, \gamma$ pendent.

42.

Ex aequatione 82 sequitur

$$F(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-2-\bar{\alpha}} F(1-\alpha, 1-\bar{\alpha}, 2-\gamma, x) \\ F(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1-x) = x^{\gamma-1} F(\alpha, \bar{\alpha}, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1-x)$$

unde statuendo

$$\frac{1}{N} = f(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma), \quad -\frac{M}{N} = g(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma)$$

aequatio 83 fit

$$F(\alpha, \bar{\alpha}, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1-x) \\ = f(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma) F(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma, x) \\ + g(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma) (1-x)^{\gamma-2-\bar{\alpha}} x^{1-\gamma} F(1-\alpha, 1-\bar{\alpha}, 2-\gamma, x)$$

Eidem aequationi adiumento formulae 82 hanc quoque formam tribuere licet

$$x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1-x) = \\ f(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma) (1-x)^{\gamma-2-\bar{\alpha}} F(\gamma - \alpha, \gamma - \bar{\alpha}, \gamma, x) + g(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma) x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$$

sive dividendo per $x^{1-\gamma}$, mutandoque resp. $\alpha, \bar{\alpha}, \gamma$ in $\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 2 - \gamma$

$$F(\alpha, \bar{\alpha}, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1-x) \\ = g(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 2 - \gamma) F(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma, x) \\ + f(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 2 - \gamma) (1-x)^{\gamma-2-\bar{\alpha}} x^{1-\gamma} F(1-\alpha, 1-\bar{\alpha}, 2-\gamma, x)$$

Quae quum identica esse debeat cum formula praecedenti, habemus

$$g(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma) = f(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 2 - \gamma)$$

itaque

$$[84] \quad F(\alpha, \bar{\alpha}, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1-x) \\ = f(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma) F(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma, x) \\ + f(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 2 - \gamma) (1-x)^{\gamma-2-\bar{\alpha}} x^{1-\gamma} F(1-\alpha, 1-\bar{\alpha}, 2-\gamma, x)$$

43.

Iam ut indolem functionis $f(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma)$ eruamus, statuamus $x = 0$. Tunc patet, esse $F(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma, x) = 1, x^{1-\gamma} = 0$, quoties quidem $1 - \gamma$ fuerit quantitas positiva. Sed per aequationem 48 habemus

$$F(\alpha, \bar{\alpha}, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1) = \frac{\Pi(\alpha + \bar{\alpha} - \gamma) \Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha - \gamma) \Pi(\bar{\alpha} - \gamma)}$$

Quare sub eadem restrictione demonstratum est, fieri

$$[85] \quad f(\alpha, \bar{\alpha}, \gamma) = \frac{\Pi(\alpha + \bar{\alpha} - \gamma) \Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha - \gamma) \Pi(\bar{\alpha} - \gamma)}$$

Hanc vero formulam generalem esse, ita demonstramus.

Differentiando aequationem 84 provenit

$$\begin{aligned} & -\frac{\alpha\delta}{\alpha+\delta+1-\gamma} F(\alpha+1, \delta+1, \alpha+\delta+2-\gamma, 1-x) \\ & = \frac{\alpha\delta}{\gamma} f(\alpha, \delta, \gamma) F(\alpha+1, \delta+1, \gamma+1, x) \\ & + f(\alpha+1-\gamma, \delta+1-\gamma, 2-\gamma)(1-x)^{\gamma-2-\delta-1} x^{\gamma} \{ (1-\gamma)(1-x) - (\gamma-\alpha-\delta)x \} F(1-\alpha, 1-\delta, 2-\gamma, x) \\ & + \frac{(1-\alpha)(1-\delta)}{2-\gamma} (x-xx) F(2-\alpha, 2-\delta, 3-\gamma, x) \} \end{aligned}$$

Sed per formulam IX art. 10 fit mutando α, δ, γ in $-\alpha, -\delta, 1-\gamma$

$$(1-\gamma)(2-\gamma) F(-\alpha, -\delta, 1-\gamma, x) = (2-\gamma)(1-\gamma+(\alpha+\delta-1)x) F(1-\alpha, 1-\delta, 2-\gamma, x) + (1-\alpha)(1-\delta)(x-xx) F(2-\alpha, 2-\delta, 3-\gamma, x)$$

unde aequatio praecedens transit in hanc

$$\begin{aligned} & F(\alpha+1, \delta+1, \alpha+\delta+2-\gamma, 1-x) \\ & = -\frac{\alpha+\delta+1-\gamma}{\gamma} f(\alpha, \delta, \gamma) F(\alpha+1, \delta+1, \gamma+1, x) \\ & - \frac{(\alpha+\delta+1-\gamma)(1-\gamma)}{\alpha\delta} f(\alpha+1-\gamma, \delta+1-\gamma, 2-\gamma)(1-x)^{\gamma-2-\delta-1} x^{\gamma} F(-\alpha, -\delta, 1-\gamma, x) \end{aligned}$$

Mutando autem in aequatione 84, α, δ, γ in $\alpha+1, \delta+1, \gamma+1$ fit

$$\begin{aligned} & F(\alpha+1, \delta+1, \alpha+\delta+2-\gamma, 1-x) \\ & = f(\alpha+1, \delta+1, \gamma+1) F(\alpha+1, \delta+1, \gamma+1, x) \\ & + f(\alpha+1-\gamma, \delta+1-\gamma, 1-\gamma)(1-x)^{\gamma-2-\delta-1} x^{\gamma} F(-\alpha, -\delta, 1-\gamma, x) \end{aligned}$$

Quare quum facile perspicitur, has duas aequationes identicas esse debere, fit generaliter

$$f(\alpha+1, \delta+1, \gamma+1) = \frac{\alpha+\delta+1-\gamma}{-\gamma} f(\alpha, \delta, \gamma)$$

sive mutando α, δ, γ in $\alpha-1, \delta-1, \gamma-1$

$$\begin{aligned} f(\alpha, \delta, \gamma) & = \frac{\alpha+\delta-\gamma}{1-\gamma} f(\alpha-1, \delta-1, \gamma-1) \\ & = \frac{\alpha+\delta-\gamma, \alpha+\delta-\gamma-1}{1-\gamma, 2-\gamma} f(\alpha-2, \delta-2, \gamma-2) \end{aligned}$$

etc. unde facile concluditur, esse generaliter pro quovis valore integro ipsius k

$$f(\alpha, \delta, \gamma) = \frac{\prod(\alpha+\delta-\gamma)\prod(-\gamma)}{\prod(\alpha+\delta-\gamma-k)\prod(k-\gamma)} f(\alpha-k, \delta-k, \gamma-k)$$

Sed quoties $1-(\gamma-k)$ sive $k+1-\gamma$ est quantitas positiva, demonstravimus esse (formula 85)

$$f(\alpha-k, \delta-k, \gamma-k) = \frac{\prod(\alpha+\delta-\gamma-k)\prod(k-\gamma)}{\prod(\alpha-\gamma)\prod(\delta-\gamma)}$$

Quare quum k , quidquid sit γ , semper accipi possit tantus, ut $k+1-\gamma$ evadat quantitas positiva, erit generaliter

$$f(\alpha, \delta, \gamma) = \frac{\prod(\alpha+\delta-\gamma)\prod(-\gamma)}{\prod(\alpha-\gamma)\prod(\delta-\gamma)}$$

et proin

$$f(\alpha+1-\gamma, \delta+1-\gamma, 2-\gamma) = \frac{\prod(\alpha+\delta-\gamma)\prod(\gamma-2)}{\prod(\alpha-1)\prod(\delta-1)}$$

ita ut formula nostra fiat

$$\begin{aligned} [86] \quad & F(\alpha, \delta, \alpha+\delta+1-\gamma, 1-x) \\ & = \frac{\prod(\alpha+\delta-\gamma)\prod(-\gamma)}{\prod(\alpha-\gamma)\prod(\delta-\gamma)} F(\alpha, \delta, \gamma, x) \\ & + \frac{\prod(\alpha+\delta-\gamma)\prod(\gamma-2)}{\prod(\alpha-1)\prod(\delta-1)} x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-2-\delta} F(1-\alpha, 1-\delta, 2-\gamma, x) \end{aligned}$$

sive mutata γ in $\alpha+\delta+1-\gamma$

$$\begin{aligned} [87] \quad & F(\alpha, \delta, \gamma, 1-x) \\ & = \frac{\prod(\gamma-1)\prod(\gamma-2-\delta-1)}{\prod(\gamma-\alpha-1)\prod(\gamma-\delta-1)} F(\alpha, \delta, \alpha+\delta+1-\gamma, x) \\ & + \frac{\prod(\gamma-1)\prod(\alpha+\delta-\gamma-1)}{\prod(\alpha-1)\prod(\delta-1)} x^{\gamma-2-\delta} (1-x)^{1-\gamma} F(1-\alpha, 1-\delta, \gamma+1-\alpha-\delta, x) \end{aligned}$$

Si magis placet, scribere licet

in formula 86

$$\text{pro } (1-x)^{\gamma-2-\delta} F(1-\alpha, 1-\delta, 2-\gamma, x) \dots F(\alpha+1-\gamma, \delta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$$

in formula 87

$$\text{pro } (1-x)^{1-\gamma} F(1-\alpha, 1-\delta, \gamma+1-\alpha-\delta, x) \dots F(\gamma-\alpha, \gamma-\delta, \gamma+1-\alpha-\delta, x)$$

44.

Quoties itaque elemento quarto in aliqua serie sub forma nostra contenta valor tribuitur inter 0,5 et 1, convergentiae lentiori per formulas praecedentes remedium affertur, quippe quae illam in duas alias series similes dispescunt

eo citius convergentes, quo tardius illa convergebat. Sed excipere oportet casus speciales, ubi haec transformatio non succedit, quoties scilicet in serie transformanda differentia inter elementum tertium summamque duorum elementorum primorum fit numerus integer. Si enim in formula 86 γ est $= 0$ vel aequalis numero negativo integro, manifesto $F(\alpha, \delta, \gamma, x)$ fit series inepta (art. 2) atque factor $\Pi(\gamma-2)$ infinitus; si vero γ est integer positivus unitate major $F(1-\alpha, 1-\delta, 2-\gamma, x)$ atque $F(\alpha+1-\gamma, \delta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$ fiunt series ineptae et $\Pi(-\gamma)$ infinitus; denique si $\gamma = 1$ duae series transformatae $F(\alpha, \delta, \gamma, x)$ atque $F(1-\alpha, 1-\delta, 2-\gamma, x)$ vel $F(\alpha+1-\gamma, \delta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$, quae ideo cum $F(\alpha, \delta, \gamma, x)$ identica evadit, hocce quidem incommodo non laborant, sed nihilominus transformatio nullius est usus, quum utraque series transformatata per coefficientem infinitum $\Pi(-1)$ multiplicata sit. Operae itaque pretium erit ostendere, quomodo in his quoque casibus convergentia lentior in citiorem mutari possit.

45.

Sit k numerus integer positivus (sive etiam $= 0$) designemusque $k+1$ primos terminos seriei $F(\alpha, \delta, \gamma, x)$ per X . Terminus sequens erit

$$= \frac{\alpha, \alpha+1, \alpha+2, \dots, \alpha+k, \delta, \delta+1, \delta+2, \dots, \delta+k}{1, 2, 3, \dots, k+1, \gamma, \gamma+1, \gamma+2, \dots, \gamma+k} x^{k+1}$$

qui etiam ita exhiberi potest

$$\frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\delta-1)} \cdot \frac{\Pi(\alpha+k)\Pi(\delta+k)}{\Pi(k+1)\Pi(\gamma+k)} x^{k+1}$$

similique modo termini sequentes. Hinc colligitur

$$I. \frac{\Pi(\alpha+\delta-\gamma)\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\delta-\gamma)} \cdot F(\alpha, \delta, \gamma, x) \text{ exprimi posse per } \frac{\Pi(\alpha+\delta-\gamma)\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\delta-\gamma)} \cdot X + \frac{\Pi(\alpha+\delta-\gamma)\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\delta-1)\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\delta-\gamma)} \sum \left\{ \frac{\Pi(\alpha+k+\delta)\Pi(\delta+k+\delta)}{\Pi(k+\delta+1)\Pi(\gamma+k+\delta)} x^{k+\delta+1} \right\}$$

si pro t omnes valores $0, 1, 2, 3$ etc. in infinitum substitui concipiuntur.

Simili modo $F(\alpha+1-\gamma, \delta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$ exprimi potest per

$$\frac{\Pi(1-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\delta-\gamma)} \sum \left\{ \frac{\Pi(\alpha-\gamma+\delta)\Pi(\delta-\gamma+\delta)}{\Pi(t)\Pi(1-\gamma+t)} x^t \right\}$$

t perinde ut ante determinato, adeoque quum sit $\Pi(1-\gamma) = (1-\gamma)\Pi(-\gamma)$ atque $\Pi(\gamma-1) = -(1-\gamma)\Pi(\gamma-2)$, patet esse

$$II. \frac{\Pi(\alpha+\delta-\gamma)\Pi(\gamma-2)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\delta-1)} x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \delta+1-\gamma, 2-\gamma, x) \\ = - \frac{\Pi(\alpha+\delta-\gamma)\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\delta-1)\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\delta-\gamma)} \sum \left\{ \frac{\Pi(\alpha-\gamma+\delta)\Pi(\delta-\gamma+\delta)}{\Pi(t)\Pi(1-\gamma+\delta)} x^{1+t-\gamma} \right\}$$

Hinc formula 86 etiam ita exhiberi potest:

$$F(\alpha, \delta, \alpha+\delta+1-\gamma, 1-x) \\ = \frac{\Pi(\alpha+\delta-\gamma)\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\delta-\gamma)} X \\ + \frac{\Pi(\alpha+\delta-\gamma)\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\delta-1)\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\delta-\gamma)} \sum \left\{ \frac{\Pi(\alpha+k+\delta)\Pi(\delta+k+\delta)}{\Pi(k+\delta+1)\Pi(\gamma+k+\delta)} x^{k+\delta+1} \right\} - \frac{\Pi(\alpha-\gamma+\delta)\Pi(\delta-\gamma+\delta)}{\Pi(\alpha-\gamma+1)\Pi(\delta)} x^{1+t-\gamma}$$

Haecce expressio protinus ostendit, singulas differentias, quae sunt sub signo Σ , fieri $= 0$, si supponatur $\gamma = -k$, sed quum hic simul fiat $\Pi(\gamma-1)$ quantitas infinite magna, productum finitum evadere posse patet. Cuius valorem ut per quantitates finitas exprimamus, statuamus primo $\gamma+k = \omega$, unde fit

$$\Pi(\gamma-1) \cdot \gamma \cdot (\gamma+1) \cdot (\gamma+2) \cdot \dots \cdot (\gamma+k-1) \omega = \Pi \omega$$

sive

$$\Pi(\gamma-1) = \frac{\Pi \omega}{\omega(\omega-1)(\omega-2) \cdot \dots \cdot (\omega-k)}$$

Rei summa vertitur itaque in eo, ut videamus, quid fiat

$$\frac{1}{\omega} \left\{ \frac{\Pi(\alpha-\gamma+t+\omega)\Pi(\delta-\gamma+t+\omega)}{\Pi(t-\gamma+1+\omega)\Pi(t+\omega)} x^{1+t-\gamma+\omega} - \frac{\Pi(\alpha-\gamma+\delta)\Pi(\delta-\gamma+\delta)}{\Pi(t-\gamma+1)\Pi(t)} x^{1+t-\gamma} \right\}$$

si ω in infinitum decrescat. Per principia nota autem hinc resultat

$$- \frac{dU}{d\gamma}$$

si brevitas causa statuimus

$$\frac{\Pi(\alpha-\gamma+\delta)\Pi(\delta-\gamma+\delta)}{\Pi(t-\gamma+1)\Pi(t-k-\gamma)} x^{1+t-\gamma} = U$$

solumque γ tanquam variabilem spectamus. Sed hinc fit

$$\frac{dU}{d\gamma} = -\Psi(\alpha-\gamma+t) - \Psi(\delta-\gamma+t) + \Psi(t-\gamma+1) + \Psi(t-k-\gamma) - \log x$$

Hinc colligitur pro $\gamma = -k$

$$\begin{aligned}
[88] \quad & F(\alpha, \bar{\alpha}, \alpha + \bar{\alpha} + 1 + k, 1 - x) \\
&= \frac{\Pi(\alpha + \bar{\alpha} + k) \Pi k}{\Pi(\alpha + k) \Pi(\bar{\alpha} + k)} X \\
&\quad + \frac{\Pi(\alpha + \bar{\alpha} + k) \Pi k}{\Pi(\alpha - 1) \Pi(\bar{\alpha} - 1) \Pi(\alpha + k) \Pi(\bar{\alpha} + k) (-1) (-2) \dots (-k)} \sum (\log x \\
&\quad + \Psi(\alpha + t + k) + \Psi(\bar{\alpha} + t + k) - \Psi(t + k + 1) - \Psi(t)) \frac{\Pi(\alpha + t + k) \Pi(\bar{\alpha} + t + k)}{\Pi(t + k + 1) \Pi t} x^{t+k+1} \\
&= \frac{\Pi(\alpha + \bar{\alpha} + k) \Pi k}{\Pi(\alpha + k) \Pi(\bar{\alpha} + k)} X \pm \frac{\Pi(\alpha + \bar{\alpha} + k) x^{k+1}}{\Pi(\alpha - 1) \Pi(\bar{\alpha} - 1) \Pi(k + 1)} Y.
\end{aligned}$$

ubi

$$\begin{aligned}
Y = & \log x + \Psi(\alpha + k) + \Psi(\bar{\alpha} + k) - \Psi(k + 1) - \Psi(0) \{ F(\alpha + k + 1, \bar{\alpha} + k + 1, k + 2, x) \\
& + A \frac{\alpha + k + 1, \bar{\alpha} + k + 1}{1, k + 2} x \\
& + (A + B) \frac{\alpha + k + 1, \alpha + k + 2, \bar{\alpha} + k + 1, \bar{\alpha} + k + 2}{1, 2, k + 2, k + 3} x^2 \\
& + (A + B + C) \frac{\alpha + k + 1, \alpha + k + 2, \alpha + k + 3, \bar{\alpha} + k + 1, \bar{\alpha} + k + 2, \bar{\alpha} + k + 3}{1, 2, 3, k + 2, k + 3, k + 4} x^3 \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

atque

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{\alpha + k + 1} + \frac{1}{\bar{\alpha} + k + 1} - \frac{1}{k + 2} - 1 \\
B &= \frac{1}{\alpha + k + 2} + \frac{1}{\bar{\alpha} + k + 2} - \frac{1}{k + 3} - \frac{1}{2} \\
C &= \frac{1}{\alpha + k + 3} + \frac{1}{\bar{\alpha} + k + 3} - \frac{1}{k + 4} - \frac{1}{2}, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

signumque superius vel inferius accipiendum est, prout k est numerus par vel impar.

46.

Hoc itaque modo $F(\alpha, \bar{\alpha}, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1 - x)$ transmutatur, si γ est 0 vel integer negativus. Casum $\gamma = +1$ prorsus simili modo tractare possumus, sive brevius statuere possumus in ratiociniis praecedentibus $k = -1$, unde X prorsus evanescit atque obtinemus:

$$\begin{aligned}
[89] \quad & F(\alpha, \bar{\alpha}, \alpha + \bar{\alpha}, 1 - x) \\
&= -\frac{\Pi(\alpha + \bar{\alpha} - 1)}{\Pi(\alpha - 1) \Pi(\bar{\alpha} - 1)} \{ \log x + \Psi(\alpha - 1) + \Psi(\bar{\alpha} - 1) - 2\Psi(0) \} F(\alpha, \bar{\alpha}, 1, x) \\
&\quad - \frac{\Pi(\alpha + \bar{\alpha} - 1)}{\Pi(\alpha - 1) \Pi(\bar{\alpha} - 1)} \{ A \frac{\alpha, \bar{\alpha}}{1} x \\
&\quad + (A + B) \frac{\alpha, \alpha + 1, \bar{\alpha}, \bar{\alpha} + 1}{1, 2, 1, 2} x^2 \\
&\quad + (A + B + C) \frac{\alpha, \alpha + 1, \alpha + 2, \bar{\alpha}, \bar{\alpha} + 1, \bar{\alpha} + 2}{1, 2, 3, 1, 2, 3} x^3 \\
&\quad + \text{etc.} \}
\end{aligned}$$

ubi

$$A = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\bar{\alpha}} - 2, \quad B = \frac{1}{\alpha + 1} + \frac{1}{\bar{\alpha} + 1} - \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{\alpha + 2} + \frac{1}{\bar{\alpha} + 2} - \frac{1}{3}, \text{ etc.}$$

Ita e. g. pro $\alpha = \frac{1}{2}$, $\bar{\alpha} = \frac{1}{2}$ obtinemus (cfr. form. 52, 71)

$$\begin{aligned}
[90] \quad & F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, 1 - x) \\
&= -\frac{1}{\pi} \log x \cdot F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x) \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \{ 2 \cdot \frac{1, 1}{2, 2} x + (2 + \tfrac{1}{2}) \frac{1, 1, 3, 3}{2, 2, 4, 4} x^2 + (2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}) \frac{1, 1, 3, 3, 5, 5}{2, 2, 4, 4, 6, 6} x^3 \\
&\quad + (2 + \frac{4}{3, 4} + \frac{4}{5, 6} + \frac{4}{7, 8}) \frac{1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7}{2, 2, 4, 4, 6, 6, 8, 8} x^4 + \text{etc.} \} \\
&= -\frac{1}{\pi} \{ \log x \cdot F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, x) + \tfrac{1}{2} x + \tfrac{3}{8} x^2 + \tfrac{1}{8} x^3 + \tfrac{1}{8} x^4 + \tfrac{1}{8} x^5 + \tfrac{1}{8} x^6 + \text{etc.} \}
\end{aligned}$$

Denique casum tertium, ubi γ est integer positivus unitate maior, seorsim tractare haud necesse est, quum sit

$F(\alpha, \bar{\alpha}, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1 - x) = x^{\gamma-1} F(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1 - x)$ transformatioque seriei $F(\alpha + 1 - \gamma, \bar{\alpha} + 1 - \gamma, \alpha + \bar{\alpha} + 1 - \gamma, 1 - x)$ pro $\gamma > 1$ ad casum primum sponte reducatur.

47.

Transimus ad alias transformationes, inter quas primum locum obtineat substitutio $x = \frac{y}{y-1}$. Hinc fit $dx = -\frac{dy}{(y-1)^2}$, adeoque

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dx} &= -\frac{dP}{dy} (1-y)^2, \text{ differentiando denuo fit} \\
\frac{d}{dx} \frac{dP}{dx} &= -(1-y)^2 \frac{d}{dy} \frac{dP}{dy} + 2(1-y) \frac{dP}{dy}, \text{ adeoque} \\
\frac{d}{dx} \frac{dP}{dx} &= +(1-y)^4 \frac{d^2 P}{dy^2} - 2(1-y)^3 \frac{dP}{dy}
\end{aligned}$$

28

Quibus valoribus substitutis transit aequatio 80 in hanc

$$0 = \alpha \bar{v} P + (1-y)(\gamma + (\alpha + \bar{v} - 1 - \gamma)y) \frac{dP}{dy} + (1-y)(y-y^2) \frac{d^2P}{dy^2}$$

Ut vero obtineamus aequationem ipsi 80 similem, statuamus $P = (1-y)^n P'$, unde

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= -n(1-y)^{n-1} P' + (1-y)^n \frac{dP'}{dy} \\ \frac{d^2P}{dy^2} &= (n(n-1)(1-y)^{n-2} P' - 2n(1-y)^{n-1} \frac{dP'}{dy} + (1-y)^n \frac{d^2P'}{dy^2}) \end{aligned}$$

Quibus substitutis fit post divisionem per $(1-y)^n$

$$\begin{aligned} 0 &= P' \{ \alpha \bar{v} - n(\gamma + (\alpha + \bar{v} - 1 - \gamma)y + y(\mu - \mu)) \} \\ &+ \frac{dP'}{dy} \{ \gamma + (\alpha + \bar{v} - 1 - \gamma)y - 2ny \} (1-y) \\ &+ \frac{d^2P'}{dy^2} \{ y - yy \} (1-y) \end{aligned}$$

Determinemus μ ita, ut multiplicator ipsius P' per $1-y$ divisibilis evadat, quod fiet statuendo vel $\mu = \alpha$ vel $\mu = \bar{v}$. Valor prior mutat aequationem praecedentem in hanc

$$0 = \alpha(\bar{v} - \gamma) P' + (\gamma - (\gamma + \alpha + 1 - \bar{v})y) \frac{dP'}{dy} + (y - yy) \frac{d^2P'}{dy^2}$$

sive

$$0 = \alpha(\gamma - \bar{v}) P' - (\gamma - (\gamma - \bar{v} + \alpha + 1)y) \frac{dP'}{dy} - (y - yy) \frac{d^2P'}{dy^2}$$

cui ita satisfaciendum est, ut fiat pro $y = 0$, $P' = 1$ atque $\frac{dP'}{dy} = \frac{\alpha(\gamma - \bar{v})}{1}$. Hinc autem deducitur $P' = F(\alpha, \gamma - \bar{v}, \gamma, y)$ adeoque habetur

$$[91] \quad F(\alpha, \bar{v}, \gamma, x) = (1-y)^n F(\alpha, \gamma - \bar{v}, \gamma, y) = (1-x)^{-n} F(\alpha, \gamma - \bar{v}, \gamma, -\frac{x}{1-x})$$

Si pro μ valorem alterum $\bar{v}$ adoptavissimus, prodisset prorsus simili modo

$$[92] \quad F(\alpha, \bar{v}, \gamma, x) = (1-x)^{-n} F(\bar{v}, \gamma - \alpha, \gamma, -\frac{x}{1-x})$$

quae formula quoque e praecedenti per solam permutationem elementorum $\alpha, \bar{v}$ sponte sequitur. Adiumento formulae modo inventae valores serierum nostrarum pro valoribus negativis elementi quarti semper ad valores similium serierum pro valoribus positivis elementi quarti interque 0 et 1 sitis reducitur, quum fiat

$$F(\alpha, \bar{v}, \gamma, -x) = (1+x)^{-n} F(\alpha, \gamma - \bar{v}, \gamma, \frac{x}{1+x})$$

48.

Operae pretium erit ostendere, quomodo adiumento transformationum 82,91 omnes formulae in art. 5 collectae perfacile e solo theoremate binomiali deduci possint. Protinus enim inde sequuntur formulae I—IV. Formulae VI—IX hinc sponte sequuntur, si e^x spectatur tamquam limes potestatis $(1+\frac{x}{i})^i$ vel $(1-\frac{x}{i})^{-i}$, atque $\log x$ tamquam limes ipsius $i(x^{\frac{1}{i}}-1)$, crescente i in infinitum. Porro ex

$$\begin{aligned} \cos n\varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin n\varphi &= (\cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi)^n \\ \cos n\varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin n\varphi &= (\cos \varphi - \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi)^n \end{aligned}$$

sequitur per subtractionem et additionem formula XVIII et XXII atque hinc per formulam 82 statim XIX et XXIII; hinc rursus per formulam 91 deducuntur XVI, XVII, XX et XXI. Statuendo t pro nt atque n infinitum ex XVI et XX sequuntur XI et XII; statuendo vero n infinite parvum ex XVI—XVIII sequuntur XIII—XV.

49.

Ex substitutione $x = \frac{1}{y}$ simili modo evadit

$$0 = \alpha \bar{v} P - (\alpha + \bar{v} - 1 - (\gamma - 2)y) \frac{dP}{dy} + (yy - y^2) \frac{d^2P}{dy^2}$$

Statuendo dein $P = y^n P'$, fit

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad 0 &= P' \{ \alpha \bar{v} - n(\alpha + \bar{v} - 1) + \mu(\gamma - 2)y + (\mu - \mu)(1-y) \} \\ &- \frac{dP'}{dy} \{ \alpha + \bar{v} - 1 - (\gamma - 2)y - 2\mu(1-y) \} y \\ &+ (yy - y^2) \frac{d^2P'}{dy^2} \end{aligned}$$

Ut multiplicator ipsius P' per y divisibilis evadat, statui debet vel $\mu = \alpha$ vel $\mu = \bar{v}$; valor prior producit

$$\text{II.} \quad 0 = P' \{ \alpha(\gamma - \alpha - 1) - \frac{dP'}{dy} \{ \bar{v} - \alpha - 1 - (\gamma - 2\alpha - 2)y \} + (y - yy) \frac{d^2P'}{dy^2} \}$$

cuius integrale particulare fit

$$P' = F(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, \alpha + 1 - \bar{v}, y)$$

Satisfit igitur aequationi I per integrale particulare

$$P = y^2 F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\delta, y)$$

et perinde valor alter $\mu = \delta$ suppeditat alterum integrale particulare

$$P = y^2 F(\delta, \delta+1-\gamma, \delta+1-\alpha, y)$$

unde integrale completum habetur

$$P = Ay^2 F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\delta, y) + By^2 F(\delta, \delta+1-\gamma, \delta+1-\alpha, y)$$

designantibus A, B constantes, quae vero non sunt arbitrariae sed penitus determinatae, quum P non sit integrale completum aequationis 80, sed particulare tantum. At ne determinatio valorum constantium A, B in ambages inutilis nos deducat, eandem aequationem alio modo per ea, quae iam evolvimus, deducemus.

Statuendo in aequatione 91 $-\frac{z}{1-z} = 1-z$, mutandoque in aequat. 86 δ in $\gamma-\delta$, γ in $\alpha+1-\delta$, x in z , colligetur

$$(1-x)^2 F(\alpha, \delta, \gamma, x) = \frac{\prod_{i=1}^{\gamma-1} \prod_{j=1}^{\delta-\alpha-1}}{\prod_{i=1}^{\gamma-\alpha-1} \prod_{j=1}^{\delta-1}} F(\alpha, \gamma-\delta, \alpha+1-\delta, z) \\ + \frac{\prod_{i=1}^{\gamma-1} \prod_{j=1}^{\alpha-\delta-1}}{\prod_{i=1}^{\alpha-1} \prod_{j=1}^{\gamma-\delta-1}} z^{\delta-\alpha} F(\delta, \gamma-\alpha, \delta+1-\alpha, z)$$

Sed per aequat. 91, 92

$$F(\alpha, \gamma-\delta, \alpha+1-\delta, z) = (1-z)^{-\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\delta, -\frac{z}{1-z})$$

$$F(\delta, \gamma-\alpha, \delta+1-\alpha, z) = (1-z)^{-\delta} F(\delta, \delta+1-\gamma, \delta+1-\alpha, -\frac{z}{1-z})$$

His substitutis, nec non $z = \frac{1}{1-x}$, $1-z = -\frac{x}{1-x}$, $-\frac{z}{1-z} = \frac{1}{x}$, habemus

$$[93] \quad F(\alpha, \delta, \gamma, x) = \frac{\prod_{i=1}^{\gamma-1} \prod_{j=1}^{\delta-\alpha-1}}{\prod_{i=1}^{\gamma-\alpha-1} \prod_{j=1}^{\delta-1}} (-x)^{-\alpha} F(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\delta, \frac{1}{x}) \\ + \frac{\prod_{i=1}^{\gamma-1} \prod_{j=1}^{\alpha-\delta-1}}{\prod_{i=1}^{\alpha-1} \prod_{j=1}^{\gamma-\delta-1}} (-x)^{-\delta} F(\delta, \delta+1-\gamma, \delta+1-\alpha, \frac{1}{x})$$

quae convenit cum aequatione supra inventa, si statuatur

$$A = \frac{\prod_{i=1}^{\gamma-1} \prod_{j=1}^{\delta-\alpha-1}}{\prod_{i=1}^{\gamma-\alpha-1} \prod_{j=1}^{\delta-1}} (-1)^{\alpha}$$

$$B = \frac{\prod_{i=1}^{\gamma-1} \prod_{j=1}^{\alpha-\delta-1}}{\prod_{i=1}^{\alpha-1} \prod_{j=1}^{\gamma-\delta-1}} (-1)^{\delta}$$

ubi notandum, esse

$$(-1)^{\alpha} = \cos \alpha k \pi + \sqrt{-1} \cdot \sin \alpha k \pi$$

$$(-1)^{\delta} = \cos \delta k \pi + \sqrt{-1} \cdot \sin \delta k \pi$$

designante k indefinite integrum imparem quemcunque.

50.

Per aequationem 93 valor functionis nostrae pro valoribus elementi quarti unitate maioribus ad casum cum reducitur, ubi elementum quartum unitate minus est. Simul patet, valoribus elementi quarti *negativis*, unitate maioribus, semper unum valorem realem functionis F respondere, positivis vero tunc tantum respondere posse valorem realem functionis, si α et δ sint vel integri vel fractiones rationales, quarum denominatores sint impares; in casibus reliquis $F(\alpha, \delta, \gamma, x)$ pro valore positivo ipsius x unitate maiore tantummodo valores imaginarios admittit.

51.

Relationes inter plures functiones F hactenus evolutae omnes lineares fuerunt: adiciamus aliam diversi generis. Sit

$$P = F(\alpha, \delta, \gamma, x)$$

$$Q = x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \delta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$$

$$R = F(\alpha, \delta, \alpha+\delta+1-\gamma, 1-x)$$

ita ut P, Q, R sint tria integralia particularia aequationis 80, sive sit

$$I. \quad 0 = \alpha \delta P - (\gamma - (\alpha + \delta + 1)x) \frac{dP}{dx} - (x - x^2) \frac{d^2 P}{dx^2}$$

$$II. \quad 0 = \alpha \delta Q - (\gamma - (\alpha + \delta + 1)x) \frac{dQ}{dx} - (x - x^2) \frac{d^2 Q}{dx^2}$$

$$III. \quad 0 = \alpha \delta R - (\gamma - (\alpha + \delta + 1)x) \frac{dR}{dx} - (x - x^2) \frac{d^2 R}{dx^2}$$

Multiplicando aequationem primam per Q , secundam per P , fit subtrahendo

$$0 = (\gamma - (\alpha + \delta + 1)x) \frac{Q dP - P dQ}{dx} + (x - x^2) \frac{Q ddP - P ddQ}{dx^2}$$

Haec vero aequatio per $x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\delta-\gamma}$ multiplicata integrabilis evadit atque suppeditat

$$[94] \quad A = x^\gamma (1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma} \frac{Q dP - P dQ}{dx}$$

Prorsus simili modo habetur

$$[95] \quad B = x^\gamma (1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma} \frac{R dQ - Q dR}{dx}$$

$$[96] \quad C = x^\gamma (1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma} \frac{R dP - P dR}{dx}$$

Constantes A, B, C facile determinantur per methodum sequentem.

Pro $x=0$, fit $P=1$; porro $x^\gamma Q = xF(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$ fit $=0$ pro $x=0$; ipsius differentiale autem per dx divisum, puta $\gamma x^{\gamma-1} Q + x^\gamma \frac{dQ}{dx}$ fit $=1$; hinc colligitur $\frac{x^\gamma dQ}{dx} = 1-\gamma$ pro $x=0$, adeoque

$$A = \gamma - 1$$

Ut vero etiam B et C determinemus, resumamus aequationem

$$R = f(\alpha, \beta, \gamma) P + f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma) Q$$

quae differentiatia dat

$$\frac{dR}{dx} = f(\alpha, \beta, \gamma) \frac{dP}{dx} + f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma) \frac{dQ}{dx}$$

Multiplicando primam per $\frac{dQ}{dx}$, secundam per Q , fit subtrahendo

$$\frac{Q dR - R dQ}{dx} = f(\alpha, \beta, \gamma) \frac{Q dP - P dQ}{dx} \text{ adeoque}$$

$$B = (1-\gamma) f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma) \Pi(1-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma) \Pi(\beta-\gamma)}$$

Similiter multiplicata aequatione priore per $\frac{dP}{dx}$, posteriore per P , subtractio dat

$$\frac{R dP - P dR}{dx} = f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma) \frac{Q dP - P dQ}{dx}$$

adeoque

$$C = (\gamma-1) f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma) \Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1) \Pi(\beta-1)}$$

Si magis placet, hae tres aequationes etiam ita exhiberi possunt, ut functiones derivatae $\frac{dP}{dx}, \frac{dQ}{dx}, \frac{dR}{dx}$ per functiones finitas exprimentur; ita e. g. fit formula 96.

$$[97] \quad \frac{1}{\gamma} F'(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x) F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) \\ + \frac{1}{\alpha+\beta+1-\gamma} F'(\alpha+1, \beta+1, \alpha+\beta+2-\gamma, 1-x) F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma) \Pi(\gamma-1)}{\Pi\alpha \Pi\beta} x^{-\gamma} (1-x)^{\gamma-2-\beta-1}$$

52.

Denotando functionem $F'(-\alpha, -\beta, 1-\gamma, x)$ per S , erit

$$0 = \alpha\beta S - (1-\gamma+(\alpha+\beta-1)x) \frac{dS}{dx} - (x-xx) \frac{d dS}{dx^2}$$

Combinata hac aequatione cum I art. pracc. fit

$$0 = \alpha\beta \left(\frac{S dP + P dS}{dx} \right) - (1-2x) \frac{dP}{dx} \frac{dS}{dx} - (x-xx) \frac{dS d dP + dP d dS}{dx^2}$$

quae est integrabilis atque suppleat

$$\text{Const.} = \alpha\beta PS - (x-xx) \frac{dP}{dx} \frac{dS}{dx}$$

Valor quantitatis constantis sponte demanat $= \alpha\beta$ ex $x=0$. Si formam finitam mavis, habes

$$[98] \quad F(\alpha, \beta, \gamma, x) F'(-\alpha, -\beta, 1-\gamma, x) \\ - \frac{\alpha\beta}{\gamma-1\gamma} (x-xx) F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x) = 1$$

Transformando hic singulas quatuor functiones secundum formulam 82 ac dein scribendo $\gamma-\alpha, \gamma-\beta$ pro α, β , habebis

$$[99] \quad (1-x) F(\alpha, \beta, \gamma, x) F(1-\alpha, 1-\beta, 1-\gamma, x) \\ - \frac{1-\alpha-\gamma-\beta}{\gamma-1\gamma} x F(\alpha, \beta, \gamma+1, x) F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x) = 1$$

Quaedam theorematia specialia.

53.

Relationes omnes quas hactenus erimus eatenus sunt generalissimae, quod elementa α, β, γ nullis circumscribuntur conditionibus. Praeterea autem plures alias invenimus, quae conditiones speciales inter elementa α, β, γ supponunt: multo vero plures sine dubio adhuc latent, easque ipsas quas hic trademus fortasse ex altioribus principiis derivare in posterum licebit.

Statuamus primo in aequ. 80, $x = \frac{4y}{(1+y)^2}$ unde

$$dx = dy \cdot \frac{4(1-y)}{(1+y)^3}$$

adeoque

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \frac{dP}{dy} \cdot \frac{(1+y)^3}{4(1-y)} \\ \frac{ddP}{dx} &= \frac{d}{dy} \left(\frac{dP}{dy} \cdot \frac{(1+y)^3}{4(1-y)} \right) + \frac{dP}{dy} \cdot \frac{(2-y)(1+y)^2}{2(1-y)^2} dy \\ \frac{ddP}{dx^2} &= \frac{ddP}{dy^2} \cdot \frac{(1+y)^6}{16(1-y)^2} + \frac{(2-y)(1+y)^5}{8(1-y)^3} \cdot \frac{dP}{dy} \end{aligned}$$

Hinc fit aequatio illa

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha \bar{b} P \\ &\quad - (\gamma(1+y)^2 - 4(\alpha + \bar{b} + 1)y) \frac{1+y}{4(1-y)} \cdot \frac{dP}{dy} \\ &\quad - \frac{ddP}{dy^2} \cdot \frac{y(1+y)^3}{4} - \frac{y(2-y)(1+y)}{2(1-y)} \cdot \frac{dP}{dy} \end{aligned}$$

sive

$$\begin{aligned} 0 &= 4\alpha \bar{b}(1-y)P \\ &\quad - (\gamma(1+y)^2 - 4(\alpha + \bar{b} + 1)y - 2y(2-y)(1+y)) \frac{dP}{dy} \\ &\quad - (y-y\gamma)(1+y)^2 \frac{ddP}{dy^2} \\ 0 &= 4\alpha \bar{b}(1-y)P \\ &\quad - (1+y)(\gamma - (4\alpha + 4\bar{b} - 2\gamma)y + (\gamma - 2)y\gamma) \frac{dP}{dy} \\ &\quad - (1+y)^2(y-y\gamma) \frac{ddP}{dy^2} \end{aligned}$$

Statuendo $P = (1+y)^{2\alpha} Q$, hinc deducitur

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad 0 &= 2\alpha(2\bar{b} - \gamma + (2\alpha + 1 - \gamma)y)Q \\ &\quad - (\gamma - (4\bar{b} - 2\gamma)y + (\gamma - 4\alpha - 2)y\gamma) \frac{dQ}{dy} \\ &\quad - (y-y\gamma)(1+y) \frac{ddQ}{dy^2} \end{aligned}$$

Iam supponendo esse $\bar{b} = \alpha + \frac{1}{2}$, haec aequatio induit formam sequentem

$$\begin{aligned} 0 &= 2\alpha(2\alpha + 1 - \gamma)Q \\ &\quad - (\gamma - (4\alpha + 2 - \gamma)y) \frac{dQ}{dy} \\ &\quad - (y-y\gamma) \frac{ddQ}{dy^2} \end{aligned}$$

cuius integrale est

$$Q = F(2\alpha, 2\alpha + 1 - \gamma, \gamma, y)$$

ita ut resultet

$$[100] \quad (1+y)^{2\alpha} F(2\alpha, 2\alpha + 1 - \gamma, \gamma, y) = F(\alpha, \alpha + \frac{1}{2}, \gamma, \frac{4y}{(1+y)^2})$$

54.

Si loco relationis $\bar{b} = \alpha + \frac{1}{2}$, hanc adoptamus $\gamma = 2\bar{b}$, aequatio I art. praec. fit

$$\begin{aligned} 0 &= 2\alpha(2\alpha + 1 - 2\bar{b})yQ \\ &\quad - (2\bar{b} - (4\alpha + 2 - 2\bar{b})y) \frac{dQ}{dy} \\ &\quad - y(1-y\gamma) \frac{ddQ}{dy^2} \end{aligned}$$

Iam statuendo $y\gamma = z$, fit

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dy} &= 2y \frac{dQ}{dz} \\ \frac{ddQ}{dy^2} &= 4y\gamma \frac{ddQ}{dz^2} + \frac{2dQ}{dz} \text{ adeoque} \\ 0 &= \alpha(\alpha + \frac{1}{2} - \bar{b})Q \\ &\quad - (\bar{b} + \frac{1}{2} - (2\alpha + \frac{1}{2} - \bar{b})z) \frac{dQ}{dz} \\ &\quad - (z - z\bar{b}) \frac{ddQ}{dz^2} \end{aligned}$$

cuius integrale quum sit

$$Q = F(\alpha, \alpha + \frac{1}{2} - \bar{b}, \bar{b} + \frac{1}{2}, z)$$

habemus

$$[101] \quad (1+y)^{2\alpha} F(\alpha, \alpha + \frac{1}{2} - \bar{b}, \bar{b} + \frac{1}{2}, y\gamma) = F(\alpha, \bar{b}, 2\bar{b}, \frac{4y}{(1+y)^2})$$

55.

Statuamus secundo $x = 4y - 4yy$, unde

$$\begin{aligned} dx &= 4dy(1-2y) \\ \frac{dP}{dx} &= \frac{dP}{dy} \cdot \frac{1}{4(1-2y)} \\ \frac{ddP}{dx^2} &= \frac{ddP}{dy^2} \cdot \frac{1}{16(1-2y)^2} + \frac{dP}{dy} \cdot \frac{1}{8(1-2y)^3} \end{aligned}$$

unde aequatio 80 fit

$$0 = 4\alpha\ell P \\ - (\gamma - (4\alpha + 4\ell + 2)y + (4\alpha + 4\ell + 2)yy) \frac{1}{(1-2y)} \cdot \frac{dP}{dy} \\ - (y - yy) \frac{d^2P}{dy^2}$$

Ut in membro secundo fractionem auferre liceat, statuere oportet $\gamma = \alpha + \ell + \frac{1}{2}$, unde prodibit

$$0 = 4\alpha\ell P \\ - (\alpha + \ell + \frac{1}{2} - (2\alpha + 2\ell + 1)y) \frac{dP}{dy} \\ - (y - yy) \frac{d^2P}{dy^2}$$

cuius integrale est

$$P = F(2\alpha, 2\ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, y)$$

unde habemus

$$[102] \quad F(\alpha, \ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, 4y - 4yy) = F(2\alpha, 2\ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, y)$$

Si in hac aequatione y mutaremus in $1-y$, prodiret inde

$$F(\alpha, \ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, 4y - 4yy) = F(2\alpha, 2\ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, 1-y)$$

unde sequi videtur paradoxon

$$F(2\alpha, 2\ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, y) = F(2\alpha, 2\ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, 1-y)$$

quae aequatio certo est falsa. Quod ut solvamus, meminisse oportet, quod probe distinguendum est inter duas significationes characteristicae F , quatenus scilicet *vel* repraesentat functionem, cuius indoles exprimitur per aequationem differentialem 80, *vel* solam summam seriei infinitae. Posterior, quamdiu elementum quartum inter -1 et $+1$ situm est, semper exhibet quantitatem ex asse determinatam, sed cavendum est, ne hos limites excedas, quum alioquin nulla prorsus significatio supersit. Prior vero significatio repraesentat functionem generalem, quae quidem secundum legem continuitatis semper mutatur, si elementum quartum fluxu continuo mutatur, sive ipsi valores reales sive imaginarios tribuas, si modo semper valores 0 et 1 evites. Hinc patet, in posteriori sensu functionem pro aequalibus elementi quarti valoribus (transitu seu potius reditu per quantitates imaginarias facto) valores inaequales adipisci posse, e quibus is quem *series F*

repraesentat unicus tantum est, adeoque nequam est contradictorium, quod, dum *aliquis* valor functionis $F(\alpha, \ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, 4y - 4yy)$ est aequalis ipsi $F(2\alpha, 2\ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, y)$, *alius* valor fit $= F(2\alpha, 2\ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, 1-y)$ foretque aeque absurdum, hinc aequalitatem horum valorum concludere, ac si ex $\text{Arc. sin } \frac{1}{2} = 30^\circ$, $\text{Arc. sin } \frac{1}{2} = 150^\circ$ concluderes $30^\circ = 150^\circ$. — Si vero characteristicam F accipimus in significatione minus generali, scilicet, ut tantummodo repraesentet summam seriei F , ratiocinia ea, per quae aequationem 102 eruiamus, necessario supponunt, y tantummodo eousque a valore 0 crescere, donec evaserit $x = 1$, i. e. usque ad $y = \frac{1}{2}$. In hoc ipso puncto autem *continuitas* seriei $P = F(\alpha, \ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, 4y - 4yy)$ interrumpetur, quum manifesto $\frac{dP}{dy}$ e valore positivo (finito) subito ad negativum saliat. Itaque in hac significatione aequatio 102 extensionem ultra limites $y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ usque ad $y = \frac{1}{2}$ non patitur. Si mavis, eandem aequationem ita quoque exhibere potes

$$[103] \quad F(\alpha, \ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, x) = F(2\alpha, 2\ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{1-x}}{2})$$

sive ita

$$[104] \quad F(\alpha, \ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, 1-x) = F(2\alpha, 2\ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2})$$

unde tamquam corollarium sequitur (formula 48)

$$[105] \quad F(2\alpha, 2\ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{\Pi(\alpha + \ell - \frac{1}{2})\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha - \frac{1}{2})\Pi(\ell - \frac{1}{2})} \\ = \frac{\Pi(\alpha + \ell - \frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{\Pi(\alpha - \frac{1}{2})\Pi(\ell - \frac{1}{2})}$$

56.

Ex applicatione formulae 87 ad aequationem 104 sequitur

$$[106] \quad F(2\alpha, 2\ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}) = AF(\alpha, \ell, \frac{1}{2}, x) + B\sqrt{x} \cdot F(\alpha + \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x)$$

unde patet, seriem

$$F(2\alpha, 2\ell, \alpha + \ell + \frac{1}{2}, \frac{1-t}{2})$$

exhiberi posse per seriem

$$A + Bt + A \frac{2\ell}{1-\frac{1}{2}} t^2 + B \frac{\alpha + \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} t^3 + A \frac{\alpha + 1, \ell, \ell + \frac{1}{2}}{1-2-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} t^4 + \text{etc.}$$

statuendo brevitatis caussa

$$A = \frac{\Pi(a+\ell-1)\Pi(-1)}{\Pi(a-1)\Pi(\ell-1)}, \quad B = \frac{\Pi(a+\ell-1)\Pi(-1)}{\Pi(a-1)\Pi(\ell-1)}$$

Hinc colligere licet, esse

$$[107] \quad F(2a, 2\ell, a+\ell+\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}) = AF(a, \ell, \frac{1}{2}, x) - B\sqrt{x}.F(a+\frac{1}{2}, \ell+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x)$$

Quodsi cui haec conclusio haud satis legitima videatur, (quam tamen extra omne dubium collocare haud difficile foret) ad eandem aequationem sequenti modo pervenire possemus. Ex aequatione 87 fit

$$F(2a, 2\ell, a+\ell+\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}) = CF(2a, 2\ell, a+\ell+\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}) + D(\frac{1-\sqrt{x}}{2})^{1-2\ell}F(1-2a, 1-2\ell, \frac{3}{2}-a-\ell, \frac{1-\sqrt{x}}{2})$$

statuendo brevitatis caussa

$$C = \frac{\Pi(a+\ell-1)\Pi(-\frac{1}{2}-a-\ell)}{\Pi(a-\ell-1)\Pi(\ell-a-1)}, \quad D = \frac{\Pi(a+\ell-1)\Pi(a+\ell-1)}{\Pi(2a-1)\Pi(2\ell-1)}$$

Ex aequatione 104 autem facile deducitur

$$F(1-2a, 1-2\ell, \frac{3}{2}-a-\ell, \frac{1-\sqrt{x}}{2}) = F(\frac{1}{2}-a, \frac{1}{2}-\ell, \frac{3}{2}-a-\ell, 1-x) = EF(\frac{1}{2}-a, \frac{1}{2}-\ell, \frac{1}{2}, x) + G\sqrt{x}.F(1-a, 1-\ell, \frac{3}{2}, x)$$

statuendo brevitatis caussa

$$E = \frac{\Pi(\frac{1}{2}-a-\ell)\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-a)\Pi(-\ell)}, \quad G = \frac{\Pi(\frac{1}{2}-a-\ell)\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{1}{2})\Pi(-\frac{1}{2}-\ell)}$$

Hinc rursus sequitur per aequationem 82

$$F(1-2a, 1-2\ell, \frac{3}{2}-a-\ell, \frac{1-\sqrt{x}}{2}) = E(1-x)^{a+\ell-1}F(a, \ell, \frac{1}{2}, x) + G\sqrt{x}.(1-x)^{a+\ell-1}F(a+\frac{1}{2}, \ell+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x)$$

His substitutis colligitur statuendo

$$AC + DE2^{2a+2\ell-1} = M, \quad BC + DG2^{2a+2\ell-1} = N$$

$$F(2a, 2\ell, a+\ell+\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}) = MF(a, \ell, \frac{1}{2}, x) + N\sqrt{x}.F(a+\frac{1}{2}, \ell+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x)$$

cuius forma convenit cum aequatione 107. Iam possemus quidem e sola natura functionis Π derivare $M = A$, $N = -B$, quum per aequ. 55, 56 facile demonstretur, esse

$$C = \frac{\cos(a-\ell)\pi}{\cos(a+\ell)\pi}, \quad \frac{DE2^{2a+2\ell-1}}{A} = -\frac{2\sin a\pi \sin \ell\pi}{\cos(a+\ell)\pi}, \quad \frac{DG2^{2a+2\ell-1}}{B} = -\frac{2\cos a\pi \cos \ell\pi}{\cos(a+\ell)\pi}$$

sed hoc labore ne opus quidem est. Patet enim, statuendo $x = 0$, fieri debere

$$M = F(2a, 2\ell, a+\ell+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = A$$

differentiando vero illam aequationem prodit

$$x^{-\frac{1}{2}} \frac{a\ell}{a+\ell+\frac{1}{2}} F(2a+1, 2\ell+1, a+\ell+\frac{3}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}) = 2a\ell M F(a+1, \ell+1, \frac{3}{2}, x) + \frac{1}{2}(a+\frac{1}{2})(\ell+\frac{1}{2})N\sqrt{x}.F(a+\frac{3}{2}, \ell+\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, x) + \frac{1}{2}Nx^{-1}F(a+\frac{1}{2}, \ell+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x)$$

unde statuendo $x = 0$ prodit

$$N = \frac{2a\ell}{a+\ell+\frac{1}{2}} F(2a+1, 2\ell+1, a+\ell+\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{2a\ell}{a+\ell+\frac{1}{2}} \cdot \frac{\Pi(a+\ell+1)\Pi(-1)}{\Pi(a)\Pi(\ell)} = \frac{\Pi(a+\ell-1)\Pi(-1)}{\Pi(a-1)\Pi(\ell-1)} = -B$$

57.

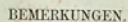
E combinatione aequationum 106, 107 habemus itaque

$$[108] \quad 2AF(a, \ell, \frac{1}{2}, x) = F(2a, 2\ell, a+\ell+\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}) + F(2a, 2\ell, a+\ell+\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2})$$

$$[109] \quad 2B\sqrt{x}.F(a+\frac{1}{2}, \ell+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x) = F(2a, 2\ell, a+\ell+\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}) - F(2a, 2\ell, a+\ell+\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2})$$

Mutando in aequatione 109 a in $a-\frac{1}{2}$, ℓ in $\ell-\frac{1}{2}$, facile videbis, inde prodire

$$[110] \quad \frac{a-\frac{1}{2}\cdot\ell-\frac{1}{2}}{a+\ell-\frac{1}{2}} A\sqrt{x}.F(a, \ell, \frac{3}{2}, x) = F(2a-1, 2\ell-1, a+\ell-\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}) - F(2a-1, 2\ell-1, a+\ell-\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2})$$



In der Handschrift bildet die *Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem etc.* den zweiten Theil einer Abhandlung, die den Titel führt, '*Disquisitiones generales circa functiones a serie infinita $1 + \frac{x}{1-x} + x$ etc. pendentes auctore CAROLO FRIEDERICO GAUSS societati regiae traditae Nov. 1811.*' Der erste Theil ist nach einer weitem Ausführung der Einzelheiten in die 1512 Jan. 30 veröffentlichte bekannte Abhandlung übergegangen. Dabei sind aus 27 Artikel 37 geworden, und die 65 nummerierten Gleichungen bis zu 79 vermehrt. An jene schlossen sich die Nummern der Artikel und Gleichungen des zweiten Theils in der Handschrift an, zur Bequemlichkeit des Lesers hat man sie aber nach den der veröffentlichten Abhandlung sich fortsetzen lassen und auch auf die vorkommenden Citate bezogen.

Das Handexemplar der gedruckten Abhandlung *Disqu. gen. circa seriem etc.* enthält zu Art. 28 die
Aufzeichnung

Die beste Definition von Π ist dass $\Pi_m = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(m+1)x} e^{-e^x} dx$

ferner die Gleichung 58 auch noch in dieser Form

[58] $\log \Pi z = (z + \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} P + \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} Q + \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{4} R + \frac{1}{24} \cdot \frac{4}{5} S + \text{etc.}$

die unmittelbar aus 61, 62 und 57 abgeleitet werden kann.

In einem Notizbuche ist mit Hülfe der Gleichung 58 unter der EULER'schen Form der Werth von $\log \Pi(10+i)$ und daraus der von $\log \Pi i$ zu $9,7173075-17^{\circ}16'57''693i$ und $\Pi i = +0,4080156-0,1549496i$ berechnet (nach dem Jahre 1847).

Der Art. 48 ist hier so wiedergegeben, wie er nach vielfachen Durchstreichungen von Worten und ganzen Sätzen in der Handschrift gelesen werden muss; nach Absicht des Verfassers dürften aber wohl noch die Worte '*et solo theoremate binomiali*' fortzulassen sein.

SCHERINO

A N Z E I G E N.

Göttingische gelehrte Anzeigen, 1813 Juli 1.

Der Königl. Societät ist durch Hrn. Prof. GAUSS eine handschriftliche Abhandlung des Hrn. Prof. PFAFF in Halle vorgelegt, überschrieben:

Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variables, complete integrandi.

Die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen des ersten Grades verdankt bekanntlich LAGRANGE zwei wichtige Erweiterungen, nemlich die allgemeine Integration derselben, wenn sie entweder, bei einer beliebigen Anzahl veränderlicher Grössen, die partiellen Differentialquotienten bloss linearisch enthalten, oder ohne Einschränkung in Rücksicht der Form, wenn der veränderlichen Grössen nur drei sind. Ueber diese beiden Fälle war man eigentlich bisher noch nicht hinausgegangen, und das von LAGRANGE bei den partiellen Differentialgleichungen dreier veränderlicher Grössen angewandte Verfahren würde bei einer grössern Anzahl besondere Schwierigkeiten haben. Wir haben es daher als eine merkwürdige Bereicherung der Integralrechnung anzusehen, dass es dem scharfsinnigen Verfasser der vorliegenden Abhandlung gelungen ist, die allgemeine Integration der partiellen Differentialgleichungen des ersten Grades für *jede* Anzahl von veränderlichen Grössen zu finden. Er hat bei dieser Untersuchung einen ei-

genthümlichen Weg gewählt, und sie an einen andern nicht weniger interessanten Zweig der Integralrechnung angeknüpft, nemlich an die Lehre von den gewöhnlichen Differentialgleichungen (des ersten Grades) zwischen mehr als zwei veränderlichen Grössen, deren wahre Natur bekanntlich erst MOXER uns kennen gelehrt hat, obwohl die Integration derselben von diesem Geometer nur für die einfachsten Fälle vollendet ist. Von dieser Gattung von Differentialgleichungen giebt Hr. PFAFF die allgemeine Integration, und die der partiellen Differentialgleichungen erscheint dann nur als ein besonderer Fall von jener. Bei diesen Untersuchungen wird die allgemeine Integration der Differentialgleichungen von jedem Grade zwischen zwei veränderlichen Grössen vorausgesetzt, welches ganz in der Ordnung ist, eben so wie man in den höhern Theilen der Mathematik die allgemeine Auflösung der algebraischen Gleichungen postulirt.

Wir glauben den Freunden der höhern Mathematik einen angenehmen Dienst zu erweisen, wenn wir sie durch gegenwärtige Anzeige in den Besitz dieser schönen Erweiterung der Integralrechnung setzen. Freilich würde ein Auszug aus der 144 Quartseiten starken Abhandlung, in welchem wir dem Verfasser Schritt für Schritt folgen und nichts Wesentliches übergehen wollten, die Grenzen des uns vergönnten Raumes weit überschreiten. Wir wollen daher versuchen, indem wir uns bloss an die Sache halten, in einer etwas veränderten Darstellung das Wesentliche so herauszuheben, dass Kenner sich dasselbe vollkommen eignen können.

Als die Hauptoperation des ganzen Geschäfts muss angesehen werden die Reduction eines Differentialausdrucks

$$\Omega = p dx + p' dx' + p'' dx'' + \text{etc.} + p^{(n-1)} dx^{(n-1)}$$

wo jeder der Coefficienten p, p', p'' u. s. w. Function der veränderlichen Grössen x, x', x'' u. s. w. ist auf die Form

$$\Omega = \lambda(q dy + q' dy' + q'' dy'' + \text{etc.} + q^{(n-2)} dy^{(n-2)})$$

so dass λ, y, y', y'' u. s. f. Functionen von x, x', x'' u. s. w. seien, hingegen q, q', q'' u. s. f. Functionen von y, y', y'' u. s. w., und dass die Anzahl der letztern veränderlichen Grössen um eine kleiner sei, als die Anzahl der veränderlichen Grössen x, x', x'' u. s. f.

Diese Verwandlung, welche wir Kürze halber mit (I) bezeichnen wollen, beschränkt sich auf den Fall, wo n eine gerade Zahl ist; wir werden weiter un-

ten entwickeln, wie sie ausgeführt werden müsse, und sie, um die Uebersicht nicht zu stören, hier einstweilen voraussetzen.

In dem Fall, wo n eine ungerade Zahl ist, würde die Verwandlung I nur unter speciellen Bedingungen zwischen den Coefficienten p, p', p'' ... möglich sein; allgemein aber lässt sich in diesem Falle Ω auf die Form

$$p' dx + \lambda(q dy + q' dy' + q'' dy'' + \text{etc.} + q^{(n-3)} dy^{(n-3)})$$

bringen. Man sehe nemlich einstweilen x in Ω als constant an, und verwandle unter dieser Voraussetzung nach (I)

$$p' dx + p'' dx'' + p''' dx''' + \text{etc.} + p^{(n-1)} dx^{(n-1)}$$

wo nunmehr die Anzahl der veränderlichen Grössen x', x'', x''' ... gerade sein wird, in

$$\lambda(q dy + q' dy' + q'' dy'' + \text{etc.} + q^{(n-3)} dy^{(n-3)}) = \lambda \Omega'$$

Hier werden also q, q', q'' u. s. w. Functionen von y, y', y'' u. s. w. sein, diese hingegen, eben so wie λ , Functionen von x, x', x'', x''' ..., von welchen Grössen jedoch die erste x als constant behandelt werden muss, um aus der Entwicklung von $\lambda \Omega'$

$$p' dx + p'' dx'' + p''' dx''' + \text{etc.}$$

zu erhalten. Das Glied, welches noch hinzukommt, wenn bei jener Entwicklung auch x als veränderlich betrachtet wird, ist

$$= (q \cdot \frac{dy}{dx} + q' \cdot \frac{dy'}{dx} + q'' \cdot \frac{dy''}{dx} + \text{etc.}) \lambda dx$$

Man hat daher, um die obige Form zu erhalten, nur

$$p' = p - \lambda(q \cdot \frac{dy}{dx} + q' \cdot \frac{dy'}{dx} + q'' \cdot \frac{dy''}{dx} + \text{etc.})$$

zu setzen. Diese Verwandlung von Ω in $p' dx + \lambda \Omega'$, welche auf ungerade Werthe von n beschränkt ist, wollen wir mit II bezeichnen. Offenbar kann dieselbe Reduction abermals auf Ω' angewandt und

$$\Omega' = q' dy + \lambda(r dz + r' dz' + r'' dz'' + \text{etc.} + r^{(n-3)} dz^{(n-3)}) \\ = q' dy + \lambda \Omega''$$

gesetzt werden, und so abermals $\Omega'' = r' dz + \lambda'' \Omega''$ bis man zuletzt auf einen Ausdruck kommt, der bloss Eine veränderliche Grösse enthält. Dadurch ist also Ω auf die Form

$$p' dx + \lambda q' dy + \lambda \lambda' r' dz + \text{etc.}$$

gebracht, oder auf die Form

$$P dx + Q dy + R dz + \text{etc.}$$

wo die Anzahl der veränderlichen Grössen x, y, z u. s. w. $= \frac{1}{2}(n+1)$, und wo die sämtlichen n Grössen y, z u. s. w. P, Q, R u. s. w. Functionen von x, x', x'' u. s. w. sein werden. Diess Reductionsverfahren mag durch III bezeichnet werden.

Wendet man diess Verfahren III in dem Fall, wo ursprünglich eine gerade Anzahl veränderlicher Grössen vorgegeben war, auf den durch die Reduction I erhaltenen Ausdruck

$$q dy + q' dy' + q'' dy'' + \text{etc.}$$

an, so kommt dadurch

$$\Omega = p dx + p' dx' + p'' dx'' + \text{etc.} + p^{(n-1)} dx^{(n-1)} \text{ in die Form} \\ Q dy + R dz + \text{etc.}$$

so dass die Anzahl der veränderlichen Grössen y, z u. s. w. $= \frac{1}{2}n$ wird, und alle n Grössen Q, R u. s. f. y, z u. s. f. Functionen von x, x', x'' u. s. w. werden. Diese Reduction werde mit IV bezeichnet.

Diese allgemeine Transformabilität der Differentialausdrücke nach III und IV ist ein eben so neuer als merkwürdiger Lehrsatz, der sich zwar in der Abhandlung des Hrn PFAFF nicht ausdrücklich ausgesprochen findet, aber sich leicht aus den dortigen Untersuchungen folgern lässt.

Es lassen sich nun daraus die Auflösungen der im Eingange dieser Anzeige erwähnten Aufgaben mit Leichtigkeit ableiten.

1) Um die Differentialgleichung

$$0 = p dx + p' dx' + p'' dx'' + \text{etc.}$$

oder

$$0 = \Omega$$

zu integrieren, wo p, p', p'' u. s. w. gegebne Functionen der n veränderlichen Grössen x, x', x'' u. s. w. sind, wird man, wenn n gerade ist nach IV

$$\Omega = Q dy + R dz + S du + \text{etc.}$$

machen, wo Q, y, R, z, S, u u. s. w. zusammen n gegebne Functionen von x, x', x'' sein werden. Die Differentialgleichung

$$0 = Q dy + R dz + S du + \text{etc.}$$

wird also der vorgegeben gleichgeltend und ihre allgemeinste Integration in folgendem System von $\frac{1}{2}n$ Gleichungen enthalten sein:

$$0 = \varphi(y, z, u \text{ etc.}), \quad \frac{1}{Q} \cdot \frac{d\varphi(y, z, u \dots)}{dy} = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\varphi(y, z, u \dots)}{dz} = \frac{1}{S} \cdot \frac{d\varphi(y, z, u \dots)}{du} = \text{etc.}$$

wo φ eine willkürliche Function vorstellt, und die Differentialquotienten, wie sich von selbst versteht, *partielle* sind. In so fern vermittelt der Gleichung $0 = \varphi(y, z, u \text{ etc.})$ die Grösse y sich durch die übrigen bestimmen lässt, kann man die Auflösung auch durch folgende Gleichungen darstellen:

$$y = \psi(z, u \dots) \\ \frac{d\psi(z, u \dots)}{dz} = -\frac{R}{Q} \\ \frac{d\psi(z, u \dots)}{du} = -\frac{S}{Q} \\ \text{u. s. f.}$$

Genau genommen wäre indessen diese Auflösung weniger allgemein, da die willkürliche Function $\varphi(y, z, u \dots)$ auch solche unter sich begreift, in welchen y nicht mit vorkommt.

2) Zur Integration derselben Differentialgleichung in dem Falle, wo n ungerade ist, wird man Ω nach III in folgende Form setzen

$$\Omega = P dx + Q dy + R dz + \text{etc.}$$

wo P, Q, y, R, z u. s. w. zusammen n gegebne Functionen von x, x', x'' u. s. w. sein werden. Die allgemeinste Integration der Differentialgleichung $\Omega = 0$ beruht dann auf folgendem System von $\frac{1}{2}(n+1)$ Gleichungen:

$$0 = \varphi(x, y, z \dots), \quad \frac{1}{P} \cdot \frac{d\varphi(x, y, z \dots)}{dx} = \frac{1}{Q} \cdot \frac{d\varphi(x, y, z \dots)}{dy} = \frac{1}{R} \cdot \frac{d\varphi(x, y, z \dots)}{dz} = \text{etc.}$$

3) Die allgemeine Integration einer gegebenen partiellen Differentialgleichung des ersten Grades, d. i. einer endlichen Gleichung zwischen den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dx} = p, \quad \frac{dx}{dy} = p', \quad \frac{dx}{dz} = p'', \quad \text{u. s. f.}$$

und x, x', x'', x''' u. s. w. (wo x eine erst zu bestimmende Function der m veränderlichen Grössen x', x'', x''' u. s. w. vorstellt) ist nichts anders, als die allgemeine Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$0 = -dx + p'dx + p''dx + p'''dx + \text{etc.}$$

Da nemlich vermöge jener endlichen Gleichung eine der Grössen p', p'', p''' u. s. w. z. B. p' als Function der übrigen p'', p''' u. s. w. und x, x', x'', x''' u. s. w. dargestellt werden kann, so ist die eben angegebene Differentialgleichung als eine zwischen den $2m$ veränderlichen Grössen x, x', x'', x''' u. s. w. p'', p''' u. s. w. zu betrachten, in welcher die Differentiale dp'', dp''' u. s. w. mit dem Coefficienten 0 behaftet sind. Um also die Integration auszuführen, wird man den Differentialausdruck

$$-dx + p'dx + p''dx + p'''dx + \text{etc.}$$

auf die Form

$$Qdy + Rdz + Sdu + \text{etc.}$$

bringen, wo die $2m$ Grössen Q, y, R, z, S, u u. s. w. bekannte Functionen von x, x', x'', x''' u. s. w. sein werden. Die Integration ist sodann in demselben System von Gleichungen wie oben (1) enthalten, und wenn man sich aus ihnen p'', p''' u. s. w. eliminirt denkt, bleibt Eine endliche Gleichung zwischen x, x', x'', x''' etc. zurück. Die wirkliche Elimination kann freilich nur ausgeführt werden, in so fern für q bestimmte Functionen angenommen werden; allein dieser Umstand beruhet auf der Natur des Problems und nicht auf der Unvollkommenheit der Analyse, welche, so lange sie beim Allgemeinen stehen bleibt, die Auflösung nur in jener Form geben kann.

Uebrigens sieht man von selbst, dass auf ähnliche Art die Integration mehrerer neben einander bestehender partieller Differentialgleichungen in unsrer Gewalt ist.

Es bleibt uns jetzt nichts weiter übrig, als nur noch eine allgemeine Me-

thode für die oben mit (1) bezeichnete Transformation anzugeben. Was für Functionen von x, x', x'' u. s. w. auch immer für y, y', y'' u. s. w. angenommen werden, so ist klar, dass, wenigstens allgemein zu reden, durch Elimination die Grössen x', x'', x''' u. s. w. sich als Functionen von x, y, y', y'' u. s. w. werden darstellen lassen, deren Differentiation $n-1$ Gleichungen hervorbringen wird:

$$dx' = \xi dx + \alpha dy + \beta dy' + \gamma dy'' + \text{etc.}$$

$$dx'' = \xi' dx + \alpha' dy + \beta' dy' + \gamma' dy'' + \text{etc.}$$

$$dx''' = \xi'' dx + \alpha'' dy + \beta'' dy' + \gamma'' dy'' + \text{etc. u. s. w.}$$

Hier sind also die Coefficienten ξ, ξ', ξ'' u. s. w. $\alpha, \alpha', \alpha''$ u. s. w. Functionen von x, y, y', y'' u. s. w., und in dieser Beziehung werden wir ihre partiellen Differentialquotienten nach x durch Einschliessung, in Klammern unterscheiden: offenbar können jene Grössen auch als Functionen von x, x', x'', x''' u. s. w. angesehen werden, in welcher Beziehung wir den partiellen Differentialquotienten nach x ohne Klammer schreiben wollen, so dass $(\frac{d\xi}{dx})$ wohl von $\frac{d\xi'}{dx}$ unterschieden werden muss. Dasselbe gilt von $(\frac{dp}{dx})$ und $\frac{dp'}{dx}$ u. s. w. Damit nun Ω nach Substitution jener Werthe von dx', dx'', dx''' u. s. w. die vorgeschriebene Form erhalte, muss offenbar *erstlich* dx herausfallen, also folgende Bedingungsgleichung [1] Statt finden:

$$0 = p + p'\xi + p''\xi' + p'''\xi'' + \text{etc.}$$

Ferner sollen die Coefficienten von dy, dy', dy'' u. s. w. nemlich

$$p'\alpha + p''\alpha' + p'''\alpha'' + \text{etc.} = A$$

$$p'\beta + p''\beta' + p'''\beta'' + \text{etc.} = B$$

$$p'\gamma + p''\gamma' + p'''\gamma'' + \text{etc.} = C, \quad \text{u. s. w.}$$

die Form $\lambda q, \lambda q', \lambda q''$ u. s. w. erhalten, so dass q, q', q'' u. s. w. bloss Functionen von y, y', y'' u. s. w. werden; damit diess geschehe, müssen wir *zweitens* haben [2]:

$$\frac{1}{A} \cdot \left(\frac{dA}{dx}\right) = \frac{1}{B} \cdot \left(\frac{dB}{dx}\right) = \frac{1}{C} \cdot \left(\frac{dC}{dx}\right) \text{ etc.} = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{d\lambda}{dx}\right)$$

Nun ist aber

$$\left(\frac{dA}{dx}\right) = p' \left(\frac{d\alpha}{dx}\right) + p'' \left(\frac{d\alpha'}{dx}\right) + p''' \left(\frac{d\alpha''}{dx}\right) + \text{etc.}$$

$$+ \alpha' \left(\frac{dp'}{dx}\right) + \alpha'' \left(\frac{dp''}{dx}\right) + \alpha''' \left(\frac{dp'''}{dx}\right) + \text{etc.}$$



Substituirt man hier

$$\left(\frac{d\alpha'}{dx}\right) = \frac{d\xi'}{dy}, \quad \left(\frac{d\alpha''}{dx}\right) = \frac{d\xi''}{dy}, \quad \text{etc.}$$

und subtrahirt

$$0 = \frac{dp}{dy} + \xi' \cdot \frac{dp'}{dy} + \xi'' \cdot \frac{dp''}{dy} + \text{etc.} \\ + p' \cdot \frac{d\xi'}{dy} + p'' \cdot \frac{d\xi''}{dy} + \text{etc.}$$

welche Gleichung entsteht, wenn man [1] nach y differentiirt, so wird

$$\left(\frac{dA}{dx}\right) = \left\{ \begin{array}{l} + \alpha' \cdot \left(\frac{dp'}{dx}\right) + \alpha'' \cdot \left(\frac{dp''}{dx}\right) + \text{etc.} \\ - \frac{dp}{dy} - \xi' \cdot \frac{dp'}{dy} - \xi'' \cdot \frac{dp''}{dy} - \text{etc.} \end{array} \right.$$

Da man nun ferner hat

$$\left(\frac{dp'}{dx}\right) = \frac{dp'}{dy} + \xi' \cdot \frac{dp'}{dy} + \xi'' \cdot \frac{dp''}{dy} + \text{etc.} \\ \left(\frac{dp''}{dx}\right) = \frac{dp''}{dy} + \xi' \cdot \frac{dp''}{dy} + \xi'' \cdot \frac{dp''}{dy} + \text{etc.}, \quad \text{u. s. w.} \\ \frac{dp}{dy} = \alpha' \cdot \frac{dp'}{dy} + \alpha'' \cdot \frac{dp''}{dy} + \alpha''' \cdot \frac{dp'''}{dy} + \text{etc.} \\ \frac{dp'}{dy} = \alpha' \cdot \frac{dp'}{dx} + \alpha'' \cdot \frac{dp''}{dx} + \alpha''' \cdot \frac{dp'''}{dx} + \text{etc.}, \quad \text{u. s. w.}$$

so wird nach diesen Substitutionen

$$\left(\frac{dA}{dx}\right) = K\alpha' + K'\alpha'' + K''\alpha''' + \text{etc.}$$

werden, wo

$$K = (1,0) \quad * \quad + (1,2)\xi'' + (1,3)\xi''' + \text{etc.} \\ K' = (2,0) + (2,1)\xi' \quad * \quad + (2,3)\xi''' + \text{etc.} \\ K'' = (3,0) + (3,1)\xi' + (3,2)\xi'' \quad * \quad + \text{etc.}$$

u. s. w. wenn man Kürze halber allgemein

$$\frac{dp^{(\mu)}}{dx^{(\nu)}} = \frac{dp^{(\nu)}}{dx^{(\mu)}}$$

durch (μ, ν) bezeichnet, so dass allgemein $(\mu, \mu) = 0$, und $(\nu, \mu) = -(\mu, \nu)$ wird. Ferner sieht man leicht, dass auch

$$\left(\frac{dB}{dx}\right) = K'\xi' + K''\xi'' + K'''\xi''' + \text{etc.} \\ \left(\frac{dC}{dx}\right) = K''\xi' + K'''\xi'' + K''''\xi''' + \text{etc.}$$

u. s. w. wird, und dass folglich den Gleichungen [2] werde Genüge geleistet werden, wenn K', K'', K''' u. s. w. resp. den Grössen p', p'', p''' u. s. w. proportional werden. Setzt man übrigens noch

$$k = * \quad + (0,1)\xi' + (0,2)\xi'' + (0,3)\xi''' + \text{etc.}$$

so hat man die identische Gleichung

$$0 = k + K\xi' + K'\xi'' + K''\xi''' + \text{etc.}$$

aus welcher mit [1] verbunden leicht gefolgert wird, dass auch k der Grösse p proportional sein muss; diese letztere Proportionalität kann die Stelle der Gleichung [1] vertreten. Mit Hülfe der $n-1$ Gleichungen

$$\frac{k}{p} = \frac{K}{p'} = \frac{K'}{p''} = \frac{K''}{p'''} = \text{u. s. w.}$$

können nun die bisher unbekannten Functionen ξ', ξ'', ξ''' u. s. w., deren Anzahl gleichfalls $n-1$ ist, bestimmt werden; jedoch zeigt eine nähere Betrachtung, dass diese Bestimmung nur für gerade Werthe von n ausführbar ist; für ungerade n wird allemal, sobald die Grössen ξ', ξ'', ξ''' u. s. w. bis auf eine eliminirt sind, diese von selbst herausfallen und bloss eine *Bedingungsgleichung* zwischen p, p', p'' u. s. w. übrig bleiben. In diesem Umstande liegt der Grund, warum die Verwandlung [I] auf gerade Werthe von n beschränkt werden muss.

Die Bedingungen der Verwandlung I sind also jetzt darauf zurückgeführt, dass die partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{dx'}{dx}\right), \left(\frac{dx''}{dx}\right), \left(\frac{dx'''}{dx}\right)$ u. s. w., in so fern x', x'', x''' u. s. w. als Functionen von x, y, y', y'' u. s. w. betrachtet werden, die jetzt als bekannte Functionen von x, x', x'' u. s. w. dargestellten Werthe ξ', ξ'', ξ''' u. s. w. erhalten. Diess lässt sich auch so ausdrücken: In so fern y, y', y'' u. s. w. als constant und also x', x'', x''' u. s. w. bloss als Functionen der veränderlichen Grösse x betrachtet werden, muss folgenden $n-1$ Differentialgleichungen Genüge geleistet werden

$$dx' = \xi' dx, \quad dx'' = \xi'' dx, \quad dx''' = \xi''' dx, \quad \text{u. s. w.}$$

oder wenn man die ursprünglichen Gleichungen vorzieht, aus deren Combination diese eigentlich entstanden waren, folgenden:

$$\begin{aligned}
& + \frac{(0,1)}{p'} dx' + \frac{(0,2)}{p''} dx'' + \frac{(0,3)}{p'''} dx''' + \text{etc.} \\
= & \frac{(1,0)}{p'} dx + \frac{(1,2)}{p''} dx'' + \frac{(1,3)}{p'''} dx''' + \text{etc.} \\
= & \frac{(2,0)}{p''} dx + \frac{(2,1)}{p'''} dx' + \frac{(2,3)}{p'''} dx''' + \text{etc.} \\
= & \text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

Die Integration dieser Gleichungen gehört aber in das Gebiet der gewöhnlichen Integralrechnung, und wird hier vorausgesetzt; sie wird, allgemein zu reden, $n-1$ von einander unabhängige Constanten enthalten H, H', H'', H''' u. s. w., die als gegebne Functionen von x, x', x'' u. s. w. erscheinen, so dass man $n-1$ endliche Gleichungen erhält

$$H = X, \quad H' = X', \quad H'' = X'', \quad \text{u. s. w.}$$

wenn X, X', X'' u. s. w. diese Functionen vorstellen. Es erhellt also aus dieser Analyse, dass den vorgeschriebenen Bedingungen Genüge geleistet sein wird, wenn man eben diese Functionen für y, y', y'' u. s. w. wählt, oder

$$y = X, \quad y' = X', \quad y'' = X'', \quad \text{u. s. w.}$$

setzt.

Eine Bemerkung wollen wir hier noch beifügen. Wir haben mit Vorbedacht gesetzt, dass die Integration, *allgemein zu reden*, $n-1$ von einander unabhängige Constanten gebe. In speciellen Fällen nemlich, d. i. wenn die Coefficienten p, p', p'' u. s. w. so beschaffen sind, dass obige $n-1$ Differentialgleichungen nicht von einander unabhängig sind, sondern eine schon aus Combination der übrigen abgeleitet werden kann, gilt diess nicht mehr: hier wird auch die Bestimmung von ξ, ξ', ξ'' u. s. w. durch Elimination nicht mehr ausführbar sein. Dieser Fall müsste eigentlich als Ausnahme besonders behandelt werden; wir begnügen uns indessen hier um so mehr mit einer *kurzen Andeutung*, wie man sich dabei verhalten könne, da der Verf. ihm nicht berührt hat. Man braucht nemlich an die Stelle der einen von obigen Differentialgleichungen, die schon in den andern enthalten ist, nur irgend eine andere willkürliche in diesen noch nicht enthaltene linearische Gleichung zwischen dx, dx', dx'' u. s. w. zu setzen, um das vorige anwenden zu können. Am bequemsten wird es immer sein, eines von diesen Differentialien $= 0$ zu setzen, oder eine von den veränderlichen Grössen x, x', x'' u. s. w.

als constant zu behandeln, z. B. x , wenn nicht zufällig $dx = 0$ schon aus den vorhandenen Gleichungen folgt. In diesem Fall wird eine von den Integralgleichungen sein

$$H = x$$

und wenn man $y = x$ setzt, so lässt sich zeigen, dass in dem verwandelten Ausdrucke von Ω allemal von selbst $q = 0$ wird.

BEMERKUNGEN ÜBER LOGARITHMENTAFELN.

Monatliche Correspondenz, herausg. vom Freih. v. ZACH. 1802 Nov.

2.

Zu dem S. 497 des vorigen Heftes gegebenen Verzeichniss aller Druckfehler der Stereotype-Ausgabe der CALLET'schen logarithm. Tafeln hat Dr. GAUSS die Güte gehabt, noch folgende Errata anzuzeigen:

Log. Sin. de Seconde en Seconde $4^{\circ} 15' 5'' \sin 8.8690096$ lies 8.8700096

$4 \ 15 \ 6 \ \sin 8.8690379$ — 8.8700379

Log. Sin. de 10 en 10 Secondes Arc $21^{\circ} 27' 20''$ lies $21^{\circ} 27' 30''$.

Für 33° unten statt 59 Deg. lies 56 Deg. (nur in einigen Abdrücken).

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1811 Mai 25.

Logarithmische Tafeln für die Zahlen, Sinus und Tangenten, neu geordnet von MORITZ VON PRASSE, ordentlichem Professor der Mathematik zu Leipzig. 80 Seiten in Octav. Leipzig. In Commission bei P. J. Besson.

Diese Tafeln enthalten dasselbe, was die beliebten kleinen Tafeln von LANDE haben, nemlich die Logarithmen aller Zahlen bis 10000, und die Logarith-

men der Sinus und Tangenten für alle einzelnen Minuten des Quadranten; alles auf fünf Decimalen. Allein Hr. v. PRASSE hat dieses bei einem nicht viel grössern Format auf den dritten Theil der Seitenzahl reducirt, indem er die bei den grössern Tafeln übliche Einrichtung anwandte, immer je zehn Logarithmen in Eine Zeile, und die ersten Ziffern nur Einmal anzusetzen, wobei aber alle Differenzen haben wegbleiben müssen. Es scheint also hierdurch an Bequemlichkeit wieder verloren zu gehen, was an Kürze gewonnen wird. Da indessen hierüber nur nach wirklichem Gebrauche geurtheilt werden kann, so hat Rec., der sich an die kleinen LALANDE'schen Tafeln gewöhnt hat, diese eine Zeitlang bei Seite gelegt, und sich der vorliegenden zu bedienen versucht. Er hat gefunden, dass jene kleinen Unbequemlichkeiten von dem Vortheile, viel weniger blättern zu müssen, bei den Logarithmen der Zahlen, die hier auf 31, bei LALANDE auf 111 Seiten stehen, merklich überwogen werden, und er bedient sich daher dieser neuen Tafeln gern. Nicht so hat er es bei den trigonometrischen Tafeln gefunden, die hier 40, bei LALANDE 90 Seiten einnehmen, besonders desswegen, weil bei Hrn. v. PRASSE die Bogen von 0 bis 90 Grad fortlaufen, und daher die Sinus und Tangenten von den Cosinus und Cotangenten getrennt sind. Diess ist um so beschwerlicher, da die Fälle so sehr häufig sind, wo man z. B. von einem Bogen den Sinus und Cosinus zugleich nöthig hat, oder wo man, ohne den Bogen selbst zu brauchen, aus dem Sinus oder der Tangente den Cosinus verlangt. Hier würde er also allemal die LALANDE'schen Tafeln vorziehen, und er hätte gewünscht, dass Hr. v. PRASSE lieber jede Seite noch einmal in der Mitte durch eine Horizontallinie getheilt hätte, um jene unangenehme Trennung zu vermeiden, wobei die Zusammendrängung in den kleinen Raum doch hätte Statt finden können.

Ausserdem unterscheiden sich diese Tafeln noch dadurch, dass allemal die letzte Ziffer eines jeden Logarithmen, wenn sie vergrössert worden ist, mit einer andern Schrift gesetzt ist. Hr. v. P. glaubt dadurch grössere Genauigkeit bei den Rechnungen befördern zu können. Allein da man doch meistens in der Ausübung nur mit Logarithmen zu rechnen hat, die interpolirt werden müssen, so kann man nicht ohne Beschwerde auf jenen Umstand Rücksicht nehmen, und so oft man glaubt, dass die nur auf eine halbe Einheit in der fünften Decimale zuverlässigen Logarithmen nicht genug genaue Resultate geben können, so thut man besser, grössere Tafeln mit sechs oder sieben Decimalen anzuwenden. Rec. kann daher diese Einrichtung, die, allgemein zu reden, allerdings die Genauigkeit der

Rechnung zu verdoppeln dienen kann, nicht für sehr nützlich anerkennen, zumal da die Cursivzahlen neben den andern dem Auge unangenehm, und hin und wieder nicht scharf genug sind. Sonst ist der Druck nett; nur werden diejenigen, die dergleichen Tafeln viel brauchen, stärkeres Papier wünschen.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1814 December 19.

Tables logarithmiques pour les nombres, les sinus et les tangentes, disposées dans un nouvel ordre par M. DE PRASSE, professeur des mathématiques à Berlin (zu Leipzig) corrigées et précédées d'une introduction traduite de l'allemand et accompagnée de notes et d'un avertissement par M. HALMA 1814. Paris. 80 Seiten. Preis Ein Frank.

Ein neuer Abdruck der geschmeidigen von PRASSE'schen Tafeln, welche wir in diesen Blättern [1811 Mai 25] angezeigt haben. Unser dortiges Urtheil über die von dem französischen Herausgeber unverändert beibehaltene Anordnung der Tafeln haben wir durch einen drei Jahre länger fortgesetzten Gebrauch derselben in allen Stücken bestätigt gefunden. In Ansehung der Schönheit des Drucks und Papiers scheint uns die Französische Ausgabe der Deutschen eher nachzustehen; doch sind mehrere Druckfehler der letztern hier berichtigt. Wenn man übrigens bei einem Werke dieser Art, das der verstorbene von PRASSE gewiss nicht Gewinnes halber, sondern zum Dienste der Wissenschaft auf seine Kosten unternahm, auch nicht weiter untersuchen will, in wie fern Hr. HALMA zu einem neuen Abdrucke berechtigt war, so kann man doch nicht umhin, sich zu wundern, dass derselbe, aus Besorgniss seinerseits wieder nachgedruckt zu werden, die einzelnen Exemplare mit seinem Namenszuge bezeichnet hat, und die Nachdrucker gerichtlich zu belangen droht.

Monatliche Correspondenz, herausg. vom Freih. v. ZACH. 1812. NOV.

Tafel zur bequemern Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. Von Herrn Prof. GAUSS.

Je weiter sich beständig die Geschäfte der rechnenden Astronomen ausdehnen, desto wichtiger wird ihnen jede, wenn auch an sich nur kleine Erleichterung derselben. Die *Monatliche Correspondenz* hat sich hierin schon vielfältige Verdienste erworben, indem sie mancherlei Tafeln aufgenommen hat, deren kleiner Umfang nicht verstatte, sie besonders herauszugeben. Ich lege daher gern in derselben eine kleine Tafel nieder, die freilich nicht eigentlich astronomisch ist, aber besonders doch den rechnenden Astronomen willkommen sein wird, und die etwa in Zukunft sehr zweckmässig mit einem neuen Abdruck der kleinen LA LANDE'schen Tafeln verbunden werden könnte. Das Geschäft, was sie erleichtern soll, kommt bei astronomischen Rechnungen alle Augenblick vor; es erfordert sonst ein dreimaliges, oder wenn man eine leichte Verwandlung anwendet, doch nothwendig ein zweimaliges Aufschlagen in den Logarithmen-Tafeln, was hier auf ein einziges gebracht wird. Die Idee dazu hat LEONELLI, so viel ich weiss, zuerst angegeben; allein seine Meinung war, eine solche Tafel für Rechnungen mit 14 Decimalen zu construiren, und gerade dies kann ich nicht zweckmässig finden. Sie würde bei einer solchen Ausdehnung einen grossen Folio-Band füllen, ihre Berechnung würde eine ungeheure Arbeit und Zeit erfordern, und sie würde fast nie von Nutzen, und immer nur von wenig Nutzen sein, da so scharfe Rechnungen so selten — in der eigentlichen practischen Astronomie nie — vorkommen, dass die verhältnissmässig doch nur kleine Erleichterung die Construction, ja nicht einmal den Ankauf einer solchen Tafel belohnen würde. Ich habe diese Tafel zu meinem eigenen Gebrauch für Rechnungen mit 5 Decimalen, die in der Ausübung die häufigsten sind, schon vor vielen Jahren construirt, und die, wenn auch *jedesmal* kleine, doch wenn sie viele Tausendmale wiederkehrt, sehr erhebliche Erleichterung, hat mir die darauf gewandte Mühe bereits reichlich ersetzt. Es wäre zu wünschen, dass jemand sich der Arbeit unterzöge, eine ähnliche Tafel in 10 oder 100 mal so grosser Ausdehnung für Rechnungen mit 7 Decimalen zu

construiren, die als ein sehr schätzbares Supplement den gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln beigelegt werden könnte.

Die Einrichtung der aus drei Columnen bestehenden Tafel ist sehr einfach. Die erste Columnne A geht von 0 bis 2 durch alle Tausendtheile, von da bis 3,4 durch alle Hunderttheile, und von 3,4 bis 5,0 durch alle Zehnthelle; mit 5,0 kann die Tafel für 5 Decimalen als geschlossen angesehen werden, da die zweite Columnne für diesen und für grössere Werthe von A verschwindet, und die Zahlen der dritten Columnne denen der ersten gleich werden. Setzt man eine Zahl der ersten Columnne $A = \log m$, so ist in der zweiten Columnne $B = \log(1 + \frac{1}{m})$ und in der dritten Columnne $C = \log(1 + m)$, so dass immer $C = A + B$. Man kann also auch die Zahlen der drei Columnnen als die doppelten Logarithmen der Tangenten, Cosecanten und Secanten der Winkel von 45° bis 90° betrachten. Die Anwendung davon ist nun folgende:

I. Aus den Logarithmen zweier Grössen a, b den Logarithmen der Summe zu finden.

Es sei $\log a$ der grössere Logarithm., man gehe mit $\log a - \log b$ in die Columnne A ein, und nehme daneben entweder aus der zweiten Columnne B , oder aus der dritten Columnne C . Man hat dann

$$\begin{aligned}\log(a+b) &= \log a + B \\ \log(a+b) &= \log b + C\end{aligned}$$

oder

II. Aus den Logarithmen zweier Grössen a, b den Logarithmen der Differenz zu finden.

Erstens, ist die Differenz der Logarithmen $\log a - \log b$ grösser als 0,30103, so suche man dieselbe in C , wodurch man hat

$$\begin{aligned}\log(a-b) &= \log a - B \\ \log(a-b) &= \log b + A\end{aligned}$$

oder

Zweitens, ist $\log a - \log b$ kleiner als 0,30103, so suche man es in B , wodurch wird

$$\begin{aligned}\log(a-b) &= \log a - C \\ \log(a-b) &= \log b - A\end{aligned}$$

oder

Es gibt daher bei jeder Aufgabe zwei Auflösungsarten; man thut aber wohl, sich an eine bestimmte zu gewöhnen, um sich den Gebrauch der Tafel desto leichter mechanisch zu machen. Mir ist dies bei der jedesmal zuerst angesetzten Manier am bequemsten gefallen.

Beispiele:

I. Aus $\log a = 0,36173$ und $\log b = 0,23045$ den Logarithmen der Summe zu finden, sucht man 0,13128 in *A*, wobei man findet

<i>B</i> 0,24033	<i>C</i> 0,37161
$\log a$ 0,36173	$\log b$ 0,23045
$\log(a+b)$. . . 0,60206	0,60206

II. Aus $\log a = 0,89042$, und $\log b = 0,24797$ den Logarithm. der Differenz zu finden. Da $\log a - \log b = 0,64245$ grösser als 0,30103, so sucht man es in der Columnne *C*, woneben man findet

<i>B</i> 0,11227	<i>A</i> 0,53018
$\log a$ 0,89042	$\log b$ 0,24797
$\log(a-b)$. . . 0,77815	0,77815

III. Aus $\log a = 0,25042$, $\log b = 0,19033$ den Logarithmen der Differenz zu finden. Hier gibt $\log a - \log b = 0,06009$ in *B* aufgesucht

<i>C</i> 0,88871	<i>A</i> 0,82862
$\log a$ 0,25042	$\log b$ 0,19033
$\log(a-b)$. . . 9,36171	9,36171

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1817 October 4.

Abgekürzte Logarithmisch-Trigonometrische Tafeln, mit neuen Zusätzen zur Abkürzung und Erleichterung trigonometrischer Rechnungen, herausgegeben von JON. PASQUICH, Director der Königl. Ofner Sternwarte. Leipzig. In der Weidmannschen Buchhandlung 1817. XXXII und 228 Seiten in Octav. (Auch mit Lateinischem Titel.)

Kleinere logarithmische Tafeln, mit fünf Decimalen, sind bei denjenigen, die viel mit Zahlenrechnungen zu verkehren haben, besonders bei den Astronomen, sehr beliebt, weil in der That die Fälle, wo sie ausreichen, häufig, ja die häufigeren, sind, und durch ein bequemes Format und eine mässige Grösse die Arbeit sehr erleichtert wird. Die kleinen netten LALANDE'schen und die PRASSE'schen Tafeln sind in Jedermanns Händen; bei letztern ist das Zusammendrängen in einen kleinen Raum so weit wie möglich getrieben, zum Theil aber allerdings auf Kosten der Bequemlichkeit. Die Herausgabe der vorliegenden auch nur auf fünf Stellen gehenden Tafeln ist, wie in der Vorrede berichtet wird, durch den von GAUSS in der monatlichen Correspondenz 1812 geäusserten Wunsch veranlasst, dass die daselbst zuerst abgedruckte Tafel zur bequemen Berechnung der Logarithmen der Summen und Differenzen einer neuen Ausgabe der LALANDE'schen Tafeln einverleibt werden möchte. Der neue Abdruck dieser Hilfstafel in gegenwärtiger Sammlung wird denjenigen angenehm sein, denen der erste Abdruck nicht zu Gebote stand, oder denen der Gebrauch derselben in der M. C. zu beschwerlich war. Ausserdem zeichnet sich diese Sammlung noch durch eine neue von Hrn. PASQUICH berechnete den trigonometrischen Tafeln beigegefügte Hilfstafel aus, deren wir unten mit mehrern erwähnen werden.

Die Logarithmen der Zahlen gehen, wie bei LALANDE und VON PRASSE bis 10000, und sind, so wie bei jenen, hier in ihrer natürlichen Ordnung gedruckt. Doch vermisst man ungern ein Paar Erleichterungsmittel, welche bei den LALANDE'schen Tafeln Statt finden; es sind nemlich theils die *Differenzen* nicht beigegefügt, theils die untersten Logarithmen jeder Spalte oben in der nächstfolgenden nicht wiederholt. In den PRASSE'schen Tafeln findet man zwar diese Bequemlichkeit auch nicht, allein dort werden sie durch den kleinen Raum der Tafel mehr als ersetzt, da jene auf 24 Seiten eben dasselbe liefern, was bei PASQUICH auf 56 Seiten eines beträchtlich grössern Formats steht. Dies scheinen zwar nur Kleinigkeiten, und sie sind es auch für alle, die nur dann und wann einmal Logarithmen aufzuschlagen haben, aber nicht für solche, die Logarithmen-Tafeln beständig zur Hand haben müssen.

In den trigonometrischen Tafeln enthält immer jede Seite zur linken die Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten, und zwar so, dass je drei Seiten zwei Grade fassen. Diese Einrichtung, welche durch das gewählte Format und die Schrift herbeigeführt wurde, scheint uns etwas unbequem;



wir hätten entweder ein kleineres Format, immer mit einem halben Grad auf der Seite, oder ein etwas weniger längeres mit kleinerer Schrift, so dass ein ganzer Grad auf die Seite gekommen wäre (wie in SNELVINS Tafeln) vorgezogen. Von diesen Logarithmen sind immer nur die vier, drei oder zwei letzten Ziffern, so lange die vorgehenden ungeändert bleiben, abgedruckt, wodurch dem Copisten, dem Setzer und dem Corrector die Arbeit erleichtert wurde, und die Tafeln ein reinlicheres Ansehen erhalten: dem ungeachtet können wir diese Einrichtung bei Tafeln, die zum täglichen Gebrauch bestimmt sind, nicht unbedingt billigen, da das Auge immer die, wenn auch nur kleine, Mühe hat, in der Columnne erst in die Höhe zu gehen, und die übrigen Ziffern zu finden. Die Differenzen der Logarithmen findet man hier sogleich mit 60 dividirt; eine Einrichtung, welche auch in einigen andern Tafeln gewählt ist, in der Absicht, das Interpoliren zu erleichtern. Ob diese Erleichterung wirklich Statt findet, oder nicht, wird von der Gewöhnung des Rechners abhängen. Rec. findet in dieser Beziehung die LALANDE'schen Tafeln, wo die ganzen Differenzen angesetzt sind, wenigstens nicht unbequemer. Bei der Kleinheit der Zahlen, mit denen zu operiren ist, macht ein etwas geübter Rechner die zum Behuf des Interpolirens nöthigen Operationen leicht im Kopfe, und findet fast immer diesen oder jenen Local-Vortheil zu benutzen Gelegenheit. Dabei hat man noch die angenehme Gewissheit, sein Interpolations-Resultat so scharf zu erhalten, als es möglich ist; bei der von Hrn. PASQUICH gewählten Einrichtung hingegen ist, allgemein zu reden, der Fehler des Interpolirens etwas grösser, welches indessen ausführlicher zu entwickeln hier nicht der Ort ist.

Die Seite zur rechten enthält bei den trigonometrischen Tafeln die Quadrate der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten, welche zur Erleichterung des Interpolirens dienen sollen, wenn man aus dem Logarithmen eines Sinus, Cosinus, einer Tangente oder Cotangente den Logarithmen einer der drei andern trigonometrischen Functionen verlangt, ohne den Bogen selbst nöthig zu haben. Diese Operation kömmt allerdings äusserst häufig vor, und das gewöhnliche Verfahren erfordert beim Interpoliren eine Multiplication und eine Division, wo mit Hrn. PASQUICH's Hülftafel eine Multiplication ausreicht. Es ist nemlich, für das Interpoliren hinreichend genau,

$$\begin{aligned}\Delta \log \cos \varphi &= -\tan \varphi^2 \cdot \Delta \log \sin \varphi \\ \Delta \log \tan \varphi &= -\Delta \log \cotang \varphi = (1 + \tan \varphi^2) \cdot \Delta \log \sin \varphi \\ \Delta \log \sin \varphi &= -\cotang \varphi^2 \cdot \Delta \log \cos \varphi \\ \Delta \log \tan \varphi &= -\Delta \log \cotang \varphi = -(1 + \cotang \varphi^2) \cdot \Delta \log \cos \varphi \\ \Delta \log \sin \varphi &= \cos \varphi^2 \cdot \Delta \log \tan \varphi = -\cos \varphi^2 \cdot \Delta \log \cotang \varphi \\ \Delta \log \cos \varphi &= -\sin \varphi^2 \cdot \Delta \log \tan \varphi = \sin \varphi^2 \cdot \Delta \log \cotang \varphi\end{aligned}$$

Inzwischen muss Rec. gestehen, dass er dem ungeachtet das gewöhnliche Verfahren zum Interpoliren nicht bloss eben so bequem, sondern sogar bequemer findet. Theils wird es immer erst einige Mühe kosten, sich die obigen sechs Formeln so mechanisch zu machen, dass man sie ohne alles Besinnen oder ohne ein besonderes Blatt neben sich zu legen, richtig anwendet; theils ist es beschwerlich, den Multiplications-Factor erst auf der andern Seite aufzusuchen, oder vielmehr zusammen zu suchen, da die oben erwähnte Trennung der ersten und letzten Ziffern auch hier beim Abdruck gewählt ist; endlich hat man bei dem gewöhnlichen Verfahren es immer nur mit kleinen Zahlen zu thun, mit denen man leicht im Kopf rechnet, da hingegen die Quadrate in PASQUICH's Tafeln mit fünf Decimalen angesetzt sind, die man freilich nicht alle braucht, aber die gerade deswegen, wie jeder erfahrene Rechner weiss, störend sind. Ausserdem können wir hier nicht unerwähnt lassen, dass das gewöhnliche Verfahren, allgemein zu reden, *schärfer* ist, als diese künstlichere Interpolation (die Gründe dieser Behauptung, von der man vielleicht bei einer weniger genauen Prüfung gerade das Gegentheil glauben könnte, würden für diesen Ort zu weitläufig sein). Wir begnügen uns das Gesagte bloss durch ein Beispiel zu erläutern. Soll zu $\log \cos \varphi = 9,92478$ der $\log \tan \varphi$ gesucht werden, so findet man den Proportionaltheil aus PASQUICH's Tafel durch die Berechnung von $4 \times (1 + 2,4170) = 13,668$ oder am nächsten = 14, also $\log \tan \varphi = 9,80850$, während die gewöhnliche Methode den Proportionaltheil eben so bequem durch die Entwicklung von $\frac{4 \times 28}{9} = 12\frac{8}{9}$, am nächsten = 12, und den gesuchten Logarithmen = 9,80848 gibt. In diesem Beispiele ist auch das Resultat der gewöhnlichen Methode das schärfere; in andern Fällen kann auch das umgekehrte Verhältniss Statt finden, aber im Durchschnitt wird der Vortheil in dieser Beziehung auf Seiten des gewöhnlichen Verfahrens sein. Uebrigens wollen wir nicht in Abrede stellen, dass dieser Theil der Tafel, wenn auch das Interpoliren nicht dadurch gewinnt, doch zuweilen für

andere Zwecke angenehm sein könne; allein die Bequemlichkeit logarithmischer Handtafeln, die man zum täglichen Gebrauch bestimmt, verliert natürlich in demselben Verhältniss, als ihr Umfang vergrössert wird. Wir bemerken noch, dass in dem ersten Grade die trigonometrischen Logarithmen von 10 zu 10 Secunden bis 56 Minuten, und in den vier letzten Minuten von 20 zu 20 Secunden ange-
setzt sind.

Die GAUSSISCHE Tafel für die Logarithmen der Summen und Differenzen ist ganz unverändert abgedruckt. Inconsequent scheint es uns aber zu sein, wenn der Verf. in der Einleitung den Nutzen einer ähnlichen Tafel mit sieben Decimalen in Zweifel zieht. Ist anders eine solche Tafel zweckmässig eingerichtet, so ist ihr Nutzen bei scharfen Rechnungen gerade eben so gross, als der Nutzen der hier wieder abgedruckten Tafeln bei Rechnungen mit fünf Decimalen: bei den kleineren Tafeln, eben so wie bei den grössern, wird der dadurch zu erhaltende Zeitgewinn natürlich nur solchen Personen fühlbar, die *viel* zu rechnen haben. Wir haben jetzt bald die Erscheinung einer solchen grössern Tafel, von einer geschickten Hand berechnet, zu erwarten.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1819 Januar 30.

[E. A. MATTHIESSEN.] *Tafel zur bequemern Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind.* Altona 1818. Bei J. F. Hammerich. Einleitung 33 S. Die Tafeln 212 S. in Quart. (Titel und Einleitung auch in lateinischer Sprache.)

Bei etwas ausgedehnten Rechnungen ist jede Abkürzung schätzbar; auch solche Hilfsmittel, die bei einer einmaligen Anwendung nur einen kleinen Vortheil gewähren, werden durch oft wiederkehrende Benutzung wichtig. Ein solches Erleichterungsmittel ist eine im Jahr 1812 in der monatlichen Correspondenz zuerst gegebene Hilfstafel, um aus den Logarithmen zweier Grössen unmittelbar die Logarithmen ihrer Summe oder Differenz abzuleiten: man erreicht dadurch mit Einem Aufschlagen, wozu man sonst ein dreimaliges oder wenigstens zweimaliges nöthig hätte. Im Besitz einer solchen Tafel wird man mit Vortheil manche

Formeln in ihrer ursprünglichen Gestalt beibehalten können, denen man sonst wohl, durch Einführung von Hülfs winkeln, eine zur Rechnung bequemere Form zu geben sucht. Die erwähnte Tafel war nur für Rechnungen mit fünf Decimalen bestimmt: eben weil solche Rechnungen am häufigsten vorkommen, lag dies Bedürfniss am nächsten. Der bei Bekanntmachung derselben geäusserte Wunsch, dass jemand sich der Mühe unterziehen möchte, eine ähnliche Tafel in grösserm Umfange und mit sieben Decimalen zu berechnen, hat die vorliegenden Tafeln veranlasst, deren Verfasser, Hr. MATTHIESSEN, sich durch diese mühsame Arbeit ein Recht auf den Dank aller derer erworben hat, die viel mit logarithmischen Rechnungen zu thun haben. Die Vorrede gibt Nachricht von der Methode, deren sich der Verfasser zur Berechnung bedient hat, und von seiner lobenswerthen Sorgfalt, die Tafel auch in der letzten Ziffer durchgehends zuverlässig zu machen. Bei Tafeln dieser Art ist auch die äussere Einrichtung keinesweges gleichgültig. Der Verf. hatte anfangs eine Anordnung im Sinn, deren Zweck war, die Tafel in den möglich kleinsten Raum zusammenzudrängen. Allein da die ganze Bestimmung der Tafel nur dahin geht, die Rechnungen zu *erleichtern*, so würde jene ganz verfehlt werden, wenn die Anordnung der Tafel zu künstlich wäre, und eine beschwerliche Aufmerksamkeit erforderte. Der Verf. entschloss sich daher bei reiferer Ueberlegung mit Recht, jene wenn gleich sinnreiche Anordnung bei Seite zu setzen, und statt derselben eine einfachere zu wählen, obgleich der Umfang des Bandes dadurch beträchtlich vergrössert wurde. Vielleicht wird mancher, der die Tafeln gebraucht, mit uns wünschen, dass der Verf. hierin lieber noch etwas weiter gegangen wäre, und die Columnen *B* und *C* jede vollständig hätte abdrucken lassen, deren vier letzte, beiden gemeinschaftliche, Ziffern nur einmal dastehen. Der Ueberblick würde dadurch noch bequemer geworden sein, und das Format wäre auch dadurch nicht vergrössert, wenn etwas kleinere Schrift gewählt wäre, welches ohne Nachtheil, vielleicht selbst mit Vortheil für das gefällige Ansehen, hätte geschehen können. Auch die fast zu strenge Oekonomie mit den Ziffern, wo in der Regel nur die vierte abgedruckt ist, so lange die vorhergehenden ungeändert bleiben, und mit den Proportionaltheilen, die immer nur Einmal angesetzt sind, und also zuweilen ein Zurück- oder Vorausblättern nöthig machen, thut der Bequemlichkeit einigen Eintrag. Endlich hätten wir gewünscht, dass der letzte Theil der Tafel S. 212 in einer zehnmal grössern Ausdehnung gegeben wäre, um die zweiten Differenzen unmerklich zu machen; es wäre dazu

nur Eine Seite mehr erforderlich gewesen. Alle diese Bemerkungen, die zum Theil mit auf individueller Gewöhnung beruhen mögen, sollen das Verdienstliche dieser Arbeit keinesweges schmälern, welches gewiss von allen anerkannt wird, die von derselben Gebrauch zu machen Gelegenheit nehmen werden.

Astronomische Nachrichten, herausg. v. SCHUMACHER. Nr. 24. Beilage 2. 1822 Dec.

GAUSS an SCHUMACHER.

Göttingen 1822. Nov. 25.

— Den von Herrn Professor ENCKE geäusserten Wunsch Logarithmentafeln mit 6 Ziffern betreffend, habe ich schon öfters gehegt, und Sie werden sich gewiss vielfältigen Dank erwerben, wenn Sie solche veranlassten. Alles, was Herr ENCKE über das Aeusserere und Innere sagt, unterschreibe ich als meine eigene Meinung, nur die Proportionaltheile scheinen mir überflüssig, und alles Ueberflüssige schadet dem leichten übersichtlichen Gebrauch. Bei solchen Dingen hängt freilich manches von individueller Gewöhnung ab; indessen wenn einige, die Gebrauch von Tafeln machen, anders gewöhnt sind als ich, so sind doch auch wohl andere eben so gewöhnt; und daher berühre ich noch einen Umstand, nemlich die Abänderung der 4^{ten} Ziffer für die Logarithmentafeln. Sie kennen die Einrichtung, die in dieser Beziehung in CALLET's Tafeln gemacht ist, und einige haben dies als eine Verbesserung betrachtet. Ich gestehe, dass ich der entgegengesetzten Meinung bin, und die *regelmässige* Abtheilung von 5 zu 5 Zeilen durch horizontale Striche, wie sie in SHERWIN's und andern Tafeln ist, für etwas, bei häufigem Gebrauche *viel* wesentlicheres und bequemerer halte, daher ich mich der CALLET'schen Logarithmen auch niemals bedienen mag. Bei meiner vieljährigen Praxis weiss ich auch nicht einen einzigen Fall, wo der Gebrauch der SHERWIN'schen Tafeln mich bei der 4^{ten} Ziffer zu einem Rechnungsfehler verleitet hätte, daher ich auch auf die Sternchen bei VEGA und andern Tafeln gar keinen Werth lege, und des bessern Papiers und der schönern Ziffern wegen, mich lieber an die SHERWIN'schen halte. Wer auf solche Warnungszeichen einen Werth setzt, kann sich leicht in seinem Exemplare an den betreffenden Stellen rothe oder grüne Punkte machen. —

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1828 Januar 19.

Table of logarithms of the natural numbers, from 1 to 108000, by CHARLES BABAGE. Stereotyped. London. Printed for J. Mawman. 1827. 202 S. gr. 8.

Dieser neue Abdruck der Logarithmentafeln zeichnet sich vor andern durch eine gefässentlichere Beachtung kleiner Nebenumstände aus. Wer nur von Zeit zu Zeit einmal veranlasst wird, einige Logarithmen in den Tafeln aufzusuchen, verlangt von ihnen hauptsächlich nur möglich grösste Correctheit. Allein für andere, denen die Tafeln ein tägliches Arbeitsgeräth sind, bleiben auch die geringfügigsten Umstände, die auf die Bequemlichkeit des Gebrauchs Einfluss haben können, nicht mehr gleichgültig. Farbe, Stärke und Schönheit des Papiers; Format; Grösse, Schärfe und gefälliger Schnitt der Typen; Beschaffenheit der Druckerschwärze; Anordnung der Zahlen, um das was man sucht ohne Ermüdung des Auges schnell und sicher zu finden; Vorhandensein von allem, was man braucht, aber auch Abwesenheit von allem, was man nicht brauchen mag, und was sonst die leichte Uebersicht nur stören würde, alle diese Umstände erhalten eine gewisse Wichtigkeit bei einem Geschäfte, welches man täglich hundert mal wiederholt. Freilich hängt dabei manches von der Individualität des Rechnenden und von seiner Gewohnheit ab, so dass nicht wohl Eine Ausgabe allen am besten gefallen kann; dem Kurzsichtigen ist ein grosses Format beschwerlich, und er zieht kleinere Typen vor, während es sich bei dem Weitsichtigen umgekehrt verhält; der weniger geübte Rechner legt einen Werth auf diesen oder jenen Zusatz, welchen der geübtere, der mehrere Theile der Operationen ohne Anstrengung im Kopf macht, lieber wegwünscht, weil alles Ueberflüssige nur störend wirkt. Inzwischen gibt es doch auch allgemeingültige Regeln. Der Herausgeber der vorliegenden Tafeln hat in der Vorrede ein Dutzend solcher Vorschriften zusammengestellt, die er aus der Vergleichung vieler Logarithmentafeln abgeleitet hat, und die meistens sogleich von selbst einleuchten, obwohl einige davon nur unter Einschränkungen anzuerkennen sein möchten.

Was die gegenwärtige Ausgabe der Logarithmentafeln am meisten von andern unterscheidet, ist, dass sie auf farbiges (gelbes) Papier abgedruckt ist: man gewöhnt sich daran bald, und findet es, besonders zum Gebrauche bei Licht, an-

genehmer als weisses. Die Anordnung ist im Wesentlichen die gewöhnliche. Nach einem Wechsel der dritten Ziffer ist für die übrigen Logarithmen in derselben Zeile die vierte Ziffer mit andern Typen, etwa halb so gross wie die übrigen, gesetzt. Für Ref., der überhaupt auf solche Warnungszeichen wenig Werth setzt, haben diese Typen, auch nach einem Gebrauch von ein paar Monaten, noch nicht das fremdartig Störende verloren, und er würde den in VEGA's Tafel gebrauchten Sternchen, oder den Punkten, die in die bessern Exemplare von TAYLOR's Tafeln eingedruckt sind, den Vorzug geben. Sternchen hat der Herausgeber deswegen nicht gebrauchen wollen, weil sonst die Columnen zu breit geworden, und dann für die Verwandlung der Zahlen, als Secunden betrachtet, in Grade, Minuten und Secunden kein Raum geblieben wäre. Referent würde diese Verwandlungscolumne (eben so eingerichtet, wie man sie aus CALLET's Tafeln kennt) gern entbehrt haben; ein geübter Rechner wird nicht, einer so leicht selbst im Kopfe zu machenden Verwandlung wegen, erst die Tafeln aufblättern; zweckmässig ist es aber, dass der Herausgeber diese Columnen wenigstens durch eine starke Linie von der Logarithmentafel geschieden hat. Endlich ist der Fall wo die letzte Ziffer eine Vergrösserung erlitten hat, (weil der weiter fortlaufende Logarithm als achte Ziffer 5 oder eine grössere gehabt haben würde) durch einen unter diese siebente Ziffer gesetzten Punkt ausgezeichnet; diese Einrichtung ist wenigstens besser, als die von PRASSE gewählte, durch Typen von anderer Form; doch behalten auch so einige Ziffern noch etwas unangenehm Fremdartiges, was nach unserer schon bei Anzeige der PRASSE'schen Tafeln in diesen Blättern [1811 Mai 25] erwähnten Ansicht durch den Nutzen nicht aufgewogen wird.

Uebrigens lassen Typen und Papier bei dieser Ausgabe der Logarithmentafeln nichts zu wünschen übrig, und auf die Correctheit ist die ausgezeichnetste Sorgfalt verwandt. Bei einer Ausgabe, wo auf die kleinen die Bequemlichkeit des Gebrauchs angehenden Umstände so viel Sorgfalt verwandt ist, fällt die spärliche Ansetzung der Proportionaltheile auf; häufig muss man, um diejenigen zu finden, die man eben braucht, voraus- oder zurückblättern.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1831 März 31.

Tabulae logarithmicae et trigonometricae notis septem decimalibus expressae. In forma minima. Purgatae ab erroribus praecedentium tabularum cura F. K. HASSLER. New York. G. C. und H. Carvill.

Diese transatlantische Ausgabe der Logarithmentafeln zeichnet sich durch eine ganz vorzügliche Nettigkeit des stereotypisch ausgeführten Drucks aus. Sie enthält, durchgehends auf sieben Decimalstellen, die Logarithmen der Zahlen bis 100000, die Logarithmen der Sinus, Tangenten, Cosinus und Cotangenten im ersten Grade durch alle Secunden, in den beiden folgenden von zehn zu zehn Secunden, und für alle übrigen Grade des Quadranten von dreissig zu dreissig Secunden. Ausserdem die natürlichen Sinus und Tangenten durchgehends von dreissig zu dreissig Secunden. Und diess alles in dem Raum von 312 Seiten in klein Octav oder gross Duodez. Eine solche Zusammendrängung war freilich nur durch sehr kleine Typen zu erreichen, welche, bei aller Schönheit, doch wohl für die meisten nicht kurzsichtigen Augen zum täglichen Gebrauch fast zu klein sein möchten. Auf die Correctheit scheint eine ganz besondere Sorgfalt gewandt zu sein, wenigstens ist uns bei dem eine Zeitlang versuchten häufigen Gebrauch gar kein Druckfehler aufgestossen.

VEGA und HÜLSSE. Sammlung mathematischer Tafeln. 1840.

Auflösung quadratischer Gleichungen in der Form, dass nicht die Coefficienten der Gleichung selbst, sondern deren Logarithmen gegeben sind, und dass man auch nicht ihre Wurzeln selbst (oder eine derselben), sondern vielmehr deren Logarithmen zu anderweiter Benutzung nötig hat.

Die Ausführung dieses Geschäfts, bloss mit Hülfe der gewöhnlichen Logarithmentafeln, erfordert nothwendig ein vierfaches Aufschlagen in denselben; man reicht mit einem zweifachen Aufschlagen aus, wenn man entweder die trigonometrischen Logarithmentafeln oder die Tafeln für Logarithmen von Summen und

Differenzen benutzt; man reicht mit einem einfachen Aufschlagen aus, wenn letztere Tafel, wie hier, durch die Zusatzcolumnen D , E und F erweitert ist.

Die vierte Columnne, D , enthält $B+C$, die fünfte, E , enthält $A+C$, die sechste, F , enthält $B-A$. Nehmen wir an, dass die Zahlen selbst, denen die Logarithmen A , B , C zugehören, beziehungsweise a , b , c sind, so enthielte also die vierte Columnne die Logarithmen von bc , die fünfte die von ac , die sechste die von $\frac{b}{a}$.

Es mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Logarithmen in der sechsten Columnne F , welche bis zu $A = 0,208$ positiv sind, von $A = 0,209$ an negativ werden (S. 640); es ist ziemlich gleichgültig, ob sie in dieser negativen Form oder, wie hier, durch ihre Complementary angesetzt werden; also könnte z. B. für $A = 0,367$ unter F stehen $-0,21180$ oder, wie hier, $9,78820$.

Für die Anwendung dieser Zusatzcolumnen auf die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$pxx + qx + r = 0$$

selbst müssen vier verschiedene Fälle unterschieden werden, nemlich

- I. p und r haben gleiche Zeichen und $\frac{qr}{p^2}$ ist nicht kleiner als 4;
- II. p und r haben gleiche Zeichen und $\frac{qr}{p^2}$ ist kleiner als 4;
- III. p und r haben entgegengesetzte Zeichen und $-\frac{pr}{qq}$ ist grösser als 2;
- IV. p und r haben entgegengesetzte Zeichen und $-\frac{pr}{qq}$ ist kleiner als 2.

Der Fall, wo $-\frac{pr}{qq} = 2$ ist, kann sowohl zu III. als zu IV. gezählt werden.

Im Falle II. sind die Wurzeln imaginär, in den übrigen erhält man jede der beiden Wurzeln auf eine doppelte Art. Durch folgendes Schema ist alles leicht zu übersehen, wobei

$$\frac{q}{p} = h, \quad \frac{r}{q} = g$$

gesetzt ist, theils zur Abkürzung, theils weil die Rechnung wirklich in dieser Form am bequemsten geführt wird.

	Erste Wurzel.	Zweite Wurzel.
I.	$+\frac{h}{g} = bc = d$	$-\frac{h}{g} = -gc$
II.	$+\frac{h}{g} < 4$	Imaginär.
III.	$-\frac{g}{h} = ac = e$	$+\frac{g}{h} = -hc$
IV.	$-\frac{g}{h} = \frac{b}{a} = f$	$+\frac{g}{h} = -\frac{b}{a}$

Die Beweise der Vorschriften wird sich jeder leicht selbst entwickeln können. Ein Beispiel des Gebrauchs mag zum Ueberflusse noch hergesetzt werden.

$$\begin{aligned} \text{Es sei gegeben} \quad & \log p = 0,69897 \\ & \log q = 0,84510 \\ & \log r = 0,77815 \text{ n} \\ \text{Also} \quad & \log h = 0,14613 \\ & \log g = 9,93305 \text{ n} \\ & \log\left(-\frac{g}{h}\right) = 9,78692 \end{aligned}$$

Man sieht sogleich, dass hier der Fall IV. statt findet und also $9,78692$ in der sechsten Columnne unter $B-A$ oder F zu suchen sein wird. Was von der Tafel (S. 643) hier nöthig wäre ist nur Folgendes:

A	B	$B-A$ oder F
0,367	0,15520	9,78820
0,368	0,15489	9,78689

Zu $F = 9,78692$ gehört also

$$\begin{aligned} A = 0,36798 = \log a, \text{ woraus } \log \frac{h}{a} = 9,77815, \quad \log ga = 0,30103 \text{ n oder} \\ B = 0,15490 = \log b, \text{ woraus } \log\left(-\frac{g}{b}\right) = 9,77815, \quad \log(-hb) = 0,30103 \text{ n.} \end{aligned}$$

Astronomische Nachrichten, Nr. 756. 1851. Mai 2.

*Einige Bemerkungen zu VEGA's Thesaurus Logarithmorum, von Herrn
Geheimen Hofrath GAUSS.*

Der Thesaurus Logarithmorum von VEGA ist bekanntlich seinem grössten Theile nach ein neuer Abdruck der grössern VLACQ'schen Logarithmentafeln. In der Vorrede führt VEGA eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Fehlern im Original an, die er verbessert hat, mit dem Zusatz, dass er ausser diesen noch eine sehr grosse Menge von Unrichtigkeiten an der letzten Ziffer der Logarithmen berichtet habe, zu dem Betrage von einer, zwei, drei, vier Einheiten. Mit gleicher Sorgfalt seien auch die neu hinzugekommenen Tafeln (namentlich also die in

den beiden ersten Graden für alle einzelnen Secunden angegebenen Logarithmen der trigonometrischen Grössen) berechnet, geprüft und berichtet. VEGA scheint nun mit der Hoffnung sich geschmeichelt zu haben, dass auf diese Weise seine Tafeln fast fehlerfrei geworden seien, und verspricht, um zu vollkommen fehlerfreien Tafeln zu gelangen, für die erste Anzeige jedes etwa noch stehen gebliebenen Fehlers, der zu falscher Rechnung Anlass geben könne (*pro sphalmatibus calculum turbantibus*) eine Prämie von einem Ducaten zu bezahlen. Ob diese vom 1^{sten} October 1794 datirte Ausgelobung jemals Folge gehabt hat, ist mir nicht bekannt.

Es ist mir zweifelhaft, ob VEGA sich ganz klar gemacht habe, was für Fehler als möglicher Weise zu falschen Rechnungen Anlass gebend betrachtet werden sollten. Für alle Tafeln, welche bestimmt sind, theoretisch feststehende irrationale Grössen darzustellen, gilt bekanntlich der Grundsatz, dass die Tabulargrösse dem wahren Werthe allemal so nahe kommen soll, als bei der gewählten Anzahl von Decimalstellen möglich ist, und es darf folglich die Abweichung niemals mehr als eine halbe Einheit der letzten Decimale betragen. Jeder Verstoß gegen diese strenge Norm ist ein Fehler, der möglicherweise einen sich auf die strenge Uebereinstimmung verlassenden Rechner zu einem unrichtigen Resultate verleiten kann. Lässt man diese strenge Auslegung fahren, und mischt in sein Urtheil eine Rücksicht auf *Erheblichkeit* der Unrichtigkeit ein, so verirrt sich die Entscheidung in das Gebiet der Willkühr. Der schon vorhin erwähnte Umstand, dass VEGA selbst von Correctionen an den VLACQ'schen Tafeln spricht, die nur eine Einheit in der letzten Stelle betragen, und dass er vollkommene Fehlerfreiheit wie sein Ziel bezeichnet, scheint allerdings darauf hinzudeuten, dass er die strenge Auslegung im Sinne gehabt. Auch habe ich den ersten Theil des Thesaurus, der die Logarithmen der laufenden ganzen Zahlen enthält, bei sehr vielen gelegentlich gemachten Vergleichen mit mehrstelligen Bestimmungen immer sehr correct gefunden.

Es sind seit jener Zeit bei mehreren andern logarithmischen Tafeln, in der Absicht ihre Correctheit zu vervollständigen, ähnliche Ausbietungen von Preisen für die erste Anzeige von Fehlern in den Zahlen gemacht: ich weiss jedoch nicht, ob dieselben einen Erfolg gemacht haben, mit Ausnahme des bei Tauchnitz in Leipzig 1847 von KÖHLER herausgegebenen logarithmisch-trigonometrischen Handbuchs. Der Verleger dieser Tafeln versprach bei dem ersten Erscheinen, für die erste

binnen einer gesetzten Frist eingesandte Anzeige eines jeden Fehlers, welcher falsche Resultate veranlassen könne, einen Louisd'or zu bezahlen, und nach einem gedruckten Bericht vom 1. Juli 1848 ist diese Prämie für vier zur Anzeige gebrachte Fehler wirklich ausgezahlt. Was nun dabei eine ehrende Erwähnung verdient, ist der Umstand, dass dem einen dieser Fehler jene Qualification nur unter Anerkennung obiger strengen Auslegung zugesprochen werden konnte. Es war nemlich der Logarithm von 103000, welcher, auf 12 Stellen genau,

$$= 5,012837224705$$

ist, in den ersten Abdrücken mit acht Ziffern

$$= 5,01283723$$

angesetzt, während die principmässig abgekürzte Zahl 5,01283722 ist. Es ist zu wünschen, dass in künftig vorkommenden ähnlichen Fällen, diese Entscheidung als Präcedenz respectirt werde.

Bekanntlich VEGA zu derselben strengen Auslegung, so hätte es ihm leicht gehen mögen, wie dem König Shiram, dessen Kornkammern nicht ausreichten, dem Erfinder des Schachspiels die ihm zugesagte Belohnung zu gewähren.

Dass die von VEGA ausgetobene Belohnung, unter jener Voraussetzung, ihm theuer zu stehen kommen konnte, lässt sich schon, ohne alles Nachrechnen, aus einem Umstande erkennen, der leicht zu bestätigen, jedoch meines Wissens anderweit noch nirgends zur Sprache gebracht ist. Dieser Umstand besteht darin, dass in der Tafel für die Logarithmen der trigonometrischen Grössen die Zahlen der Sinuscolumnne fast ohne Ausnahme*) der Summe der Zahlen der Cosinuscolumnne und der Tangentencolumnne genau gleich sind. Da alle diese Zahlen nur abgekürzte Werthe der irrationalen genauen Grössen sind, so ist klar, dass bei streng richtiger Abkürzung jene Gleichheit nicht Statt finden wird, in allen den Fällen, wo die Abweichungen von den genauen Werthen in der zweiten und dritten Columnne gleiche Zeichen haben, und ihre Summe mehr als eine halbe Einheit der letzten Decimale beträgt. Man übersieht leicht, dass bei einer grossen

*) Ich habe grosse Strecken der Tafel in dieser Beziehung prüfen lassen: allein unter Tausenden von Fällen ist nur eine einzige Ausnahme gefunden, nemlich bei dem Bogen $27^{\circ}31'0''$. Ich kann jedoch diese Ausnahme, sowie etwaige andere, wenn dergl. noch hier und da vorkommen sollten, nur einem Versehen, und nicht einem Vorsatze zuschreiben.

Menge von Fällen dieser Ausnahmefall durchschnittlich einmal unter vieren vorkommen wird, was sich bei wirklicher Abzählung in solchen siebenziffrigen Tafeln, wo auf die Richtigkeit der letzten Ziffer mit Sorgfalt gehalten ist, bestätigt findet. (Es hat z. B. eine solche Abzählung in den erwähnten KÜHLER'schen Tafeln an den 900 einzelnen Minuten von $30^{\circ}0'$ bis $44^{\circ}59'$ genau 225 solcher Fälle ergeben, welche vollkommene Uebereinstimmung allerdings für zufällig zu halten ist). VEGA's Thesaurus enthält die Logarithmen der Sinus, Cosinus und Tangenten von 22680 Bogen. Unter der Voraussetzung also, dass alle Zahlen in zweien dieser Columnen scharf nach dem Princip abgekürzt seien, wird man, mit einer geringen Unsicherheit im Mehr oder Weniger, in der dritten Columnne 5670 Logarithmen erwarten dürfen, die um eine Einheit unrichtig angesetzt sind. Für den Preis von so vielen Ducaten würden wohl befähigte Personen zur vollständigen Neurechnung bereit gewesen sein.

Welche zwei Columnen die ursprünglichen sind, wird man aus der Vergleichung mit anderweitigen auf mehr als zehn Stellen zuverlässigen Bestimmungen erkennen können, schon an wenigen Bögen und mit Gewissheit, wenn die Voraussetzung der strengen Richtigkeit der ursprünglichen Columnen zutrifft, im entgegengesetzten Fall aber an einer etwas beträchtlichen Menge wenigstens mit überwiegender Wahrscheinlichkeit.

Einiges hiezu dienliche findet man schon fertig vor am Schluss der Decimalktafeln, welche HOBERT und IDELER 1799 geliefert haben, und die zwar nur mit sieben Ziffern abgedruckt sind, aber in der Handschrift auf doppelt so viele vollendet waren. Es werden daselbst 138 fehlerhafte Logarithmen des VEGA'schen Thesaurus angezeigt, von denen 127, um genau gesetzmässig zu werden, einer Correction von einer Einheit in der zehnten Stelle bedürfen, 10 einer Correction von zwei Einheiten, und eine drei Einheiten. Von den 127 fallen 49 auf Sinus, 35 auf Cosinus und 43 auf Tangenten; die übrigen 11 Correctionen, von 2 oder 3 Einheiten, beziehen sich bloß auf Tangenten. Die betreffenden Bögen sind die mit 27 Minuten messbaren, und die nicht mit angeführten sind diejenigen, wo die Logarithmen keiner Correctionen bedurften. Es hätten übrigens diese Vergleichungen auch ohne die HOBERT-IDELER'schen handschriftlichen Tafeln gemacht werden können, da die allgemein verbreiteten CALLER'schen Tafeln die Logarithmen der Sinus und Cosinus auf 14 Ziffern für alle Tausendtheile des Quadranten enthalten. Wenn man aus diesen auch noch das Nöthige für alle Bögen unter

zwei Grad entlehnt, die durch $5'24''$ aber nicht durch $27'$ messbar sind, so gewinnt man die Vergleichung VEGA'scher Logarithmen von 118 Bögen mit schärfern Bestimmungen, wovon die Resultate in folgendem Abriss (I) zusammengestellt sind:

	Sin.	Cos.	Tang.
0	65	75	54
1	53	43	53
2			10
3			1

Die Bedeutung dieser Zahlen, z. B. der in der letzten Columnne ist, dass unter 118 Tangenten-Logarithmen 54 richtig angesetzt sind, 53 einer Correction von einer Einheit in der zehnten Stelle bedürfen, 10 einer Correction von zwei Einheiten, und einer der Correction von drei Einheiten. Es folgt hieraus schon entschieden, dass keine Columnne der VEGA'schen Tafel durchaus richtig angesetzt ist, und mit überwiegender Wahrscheinlichkeit, dass die Tangenten-Logarithmen die abgeleiteten sind, durch die einfache Subtraction der Zahlen der Cosinuscolumnne von denen der Sinuscolumnne.

Die Verfasser der erwähnten Decimalktafeln hätten übrigens doppelt so viele Vergleichungen aus ihrer Handschrift geben können. Man kann sich aber eine noch viel grössere Ausbeute verschaffen, wenn man die höchst schätzbare Tafel von BRUGG's (in der nach dessen Tode von GELLBRAND 1633 herausgegebenen Trigonometria Britannica) benutzt, welche die Logarithmen der Sinus und Cosinus für alle Hundertheile der gewöhnlichen Grade auf 14 Ziffern liefert, und aus welcher CALLER die oben erwähnten Zahlen entlehnt hat. Sie enthält das Material, um VEGA's Tafeln bei 1060 Bögen, also zusammen 3180 Logarithmen, prüfen zu können. Ich selbst habe mich jedoch darauf beschränkt, diese Prüfung an 81 Bögen oder an 243 Logarithmen, von $14^{\circ}0'$ bis $18^{\circ}0'$ vorzunehmen, wovon das Resultat hier folgt (II):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	29	56	36
1	52	25	42
2			3

Wirft man die Gruppen (I) und (II) zusammen, so jedoch, dass man die beiden gemeinschaftlichen Bögen nur einmal in Rechnung bringt, so erhält man für 190 Bögen folgende Ausbeute (III):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	89	126	87
1	101	64	90
2			12
3			1

Will man diese Zahlen zu einer Abschätzung des Verhältnisses zwischen den richtigen und unrichtigen Logarithmen anwenden, so muss man erst noch einen kleinen Abzug machen. Es ist in (I) der Logarithm des Sinus von 45° zweimal gezählt, nemlich zugleich auch als $\log \cos 45^\circ$; es ist ferner in der Tangentencolumne auch der Logarithm der Tangente von 45° mitgezählt, der doch rational ist. Dasselbe gilt von (III) und man muss daher, zu obigem Zweck, das Resultat davon so aussprechen, dass unter 568 geprüften irrationalen Logarithmen 301 sich als richtig, und 267 als unrichtig ausgewiesen haben. Dürfte man dies Verhältniss als durchschnittlich zutreffend betrachten, so würden unter den 68038 irrationalen Logarithmen des VEGA'schen Thesaurus (indem man, wie billig, die Cotangenten nicht mitzählt) nach der Wahrscheinlichkeit etwa 31983 fehlerhafte anzunehmen sein.

Wahrscheinlich ist aber diese Zahl noch bedeutend zu klein. Ich finde in meinen Papieren die vor längerer Zeit und zu andern Zwecken auf 14 Ziffern gemachte Berechnung der trigonometrischen Logarithmen für ein paar Gruppen von Bögen, die nicht sprungsweise, sondern in denselben Intervallen wie die VEGA'schen Tafeln, fortschreiten, woraus wenigstens hervorgeht, dass obiges Resultat (III) noch keinen richtigen Maassstab für die Ungenauigkeit dieser Tafeln abgibt. Während bei jenen 190 Bögen kein einziger Fall vorkommt, wo der Logarithm eines Sinus oder eines Cosinus um mehr als eine Einheit verbessert werden müsste, sind solche Fälle gar nicht selten bei denjenigen Bögen, die *nicht* in der Trigonometria Britannica vorkommen, und wo also das zur Vergleichung nöthige erst durch besondere Rechnung herbeigeschafft werden muss. Ich füge daher die Resultate jener Rechnungen hier bei, da sie dazu dienen können, unserer Vorstellung von dem Grade der Ungenauigkeit der Zahlen in VEGA's Thesaurus eine festere Haltung zu geben.

Die Vergleichung der Zahlen im Thesaurus bei den 21 Bögen von $15^\circ 38' 20''$ bis $15^\circ 41' 40''$ mit den schärfer berechneten hat ergeben (IV):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	4	12	1
1	9	8	8
2	6	1	6
3	2		4
4			2

Die Fälle, wo die grössten Abweichungen vorkommen, sind:

$15^\circ 40' 20''$, wo die Correctionen	+3, -1, +4
$15^\circ 41' 30''$, wo folgende	+3, 0, +4

an die Logarithmen des Sinus, des Cosinus und der Tangente angebracht werden müssen.

Ebenso hat die Vergleichung der VEGA'schen Zahlen bei den 93 Bögen, von $1^\circ 19' 52''$ bis $1^\circ 21' 24''$ mit schärferer Rechnung folgende ergeben (V):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	38	30	17
1	39	56	41
2	15	7	22
3	1		11
4			2

Die grössten Abweichungen finden Statt bei den Bögen $1^\circ 20' 10''$ und $1^\circ 20' 15''$; und die nöthigen Correctionen betragen bei erstem -2, +1, -4, bei dem andern -2, +2, -4.

Die Gruppen IV und V haben nicht gleichen Ursprung, da die Zahlen des Thesaurus zu der Gruppe IV aus VLACQ's Trigonometria Artificialis genommen sind, die andern hingegen zu den neu hinzugekommenen gehören, welche unter VEGA's Leitung und Aufsicht von dem Lieutenant DORFMAN berechnet sind. Nach obigen Abrissen erscheinen die letztern wie etwas weniger ungenau als die erstern, wiewohl die Gruppe IV zu wenig zahlreich ist, um ein sicheres Urtheil zu begründen. Jedenfalls folgt aus dem Zusammenwerfen beider Gruppen eine Schätzung

für die Totalungenaugigkeit der Tafeln, die eher etwas zu günstig sein wird, als umgekehrt. Aus dieser Vereinigung folgt, für 114 Bögen (VI):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	42	42	18
1	48	64	49
2	21	8	28
3	3		15
4			4

Es sind also hier unter 342 Logarithmen nur 102, die keiner Verbesserung bedürfen, gegen 240 ungenaue. Nach diesem Verhältniss würde man unter den 68038 irrationalen Logarithmen 47746 ungenaue erwarten können.

Die Summe der Quadrate der Abweichungen findet sich für die Sinus 159, für die Cosinus 96, für die Tangenten 360. Als mittlern Fehler mag man also annehmen für die Sinus 1,18, für die Cosinus 0,92, für die Tangenten 1,78. Man kann hienach nicht zweifeln, dass die Tangenten-Logarithmen die abgeleiteten sind.

Dass die Zahlen der Cosinuscolumnne weniger ungenau sind, als die der Sinuscolumnne, rührt wohl ohne Zweifel wenigstens theilweise, daher, dass bei den erstern die zur Ausfüllung erforderlichen Interpolationsmethoden einfacher ausfallen, möglicherweise können indess noch andere Ursachen mitgewirkt haben, worüber sich nur unsichere Vermuthungen aufstellen lassen würden.

NACHLASS.

THEORIA INTERPOLATIONIS

METHODO NOVA TRACTATA.

1.

PROBLEMA. *Invenire summam seriei*

$$\frac{a^n}{(a-b)(a-c)(a-d)\dots} + \frac{b^n}{(b-a)(b-c)(b-d)\dots} + \frac{c^n}{(c-a)(c-b)(c-d)\dots} + \frac{d^n}{(d-a)(d-b)(d-c)\dots} + \frac{e^n}{(e-a)(e-b)(e-c)\dots} + \text{etc.}$$

ubi a, b, c, d, e sunt m quantitates diversae, atque n numerus integer quicunque positivus, negativus sive etiam 0.

Solutio. Faciendo brevitatis caussa

$$\begin{aligned} \frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)\dots} &= \alpha \\ \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)\dots} &= \beta \\ \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)\dots} &= \gamma \\ \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)\dots} &= \delta, \text{ etc.} \end{aligned}$$

ita ut summa quaesita, quam per S^n denotabimus fiat $= \alpha a^n + \beta b^n + \gamma c^n + \delta d^n + \text{etc.}$: manifestum est, si x exprimat quantitatem indeterminatam, ex evolutione aggregati

$$P = \frac{a}{1-ax} + \frac{b}{1-bx} + \frac{\gamma}{1-cx} + \frac{\delta}{1-dx} + \text{etc.}$$

in seriem secundum potestates ipsius x ascendentem, prodire

$$S^0 + S^1x + S^2x^2 + S^3x^3 + \text{etc. in infin.}$$

Statuatur $(1-ax)(1-bx)(1-cx)(1-dx)\dots = Q$, eritque Q functio integra indeterminatae x , ad ordinem m^{um} ascendens; PQ autem fiet functio integra ordinis $m-1^{\text{u}}$ puta =

$$\begin{aligned} & \alpha(1-bx)(1-cx)(1-dx)\dots \\ & + \beta(1-ax)(1-cx)(1-dx)\dots \\ & + \gamma(1-ax)(1-bx)(1-dx)\dots \\ & + \delta(1-ax)(1-bx)(1-cx)\dots \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Qua propius considerata, patebit, per substitutionem $x = \frac{1}{a}$ omnes partes praeter primam evanescere, hanc vero abire in

$$\alpha(1-\frac{b}{a})(1-\frac{c}{a})(1-\frac{d}{a})\dots = \frac{1}{a^{m-1}}$$

Simili modo per substitutionem $x = \frac{1}{b}$ evanescunt omnes partes praeter secundam, quae fit $= \frac{1}{b^{m-1}}$. Perinde per substitutiones $x = \frac{1}{c}$, $x = \frac{1}{d}$ etc. transit PQ in $\frac{1}{c^{m-1}}$, $\frac{1}{d^{m-1}}$ etc. Hinc vero sequitur, $PQ - x^{m-1}$ per omnes has substitutiones valorem 0 obtinere, quod fieri nequit, nisi fuerit identice $= 0$, sive $PQ = x^{m-1}$; alioquin enim aequatio $PQ - x^{m-1} = 0$, quae non maioris quam $m-1^{\text{u}}$ ordinis est, m radices diversas $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \dots$ haberet.

Iam sit

$$Q = 1 - Ax + Bxx - Cx^3 + Dx^4 - \text{etc.}$$

nempe A summa quantitatum $a, b, c, d, \dots$; B summa productorum e binis; C summa productorum e ternis etc., patetque, quum ex evolutione fractionis $\frac{x^{m-1}}{Q} = P$ prodire debeat

$$S^0 + S^1x + S^2x^2 + S^3x^3 + \text{etc.}$$

primo: esse debere $S^0 = 0$, $S^1 = 0$, $S^2 = 0$ etc. usque ad $S^{m-2} = 0^*$, tunc

* Haecce solutionis pars iam ab ill. EULERO tradita est, per methodum a nostra aliquantum discrepantem. *Inst. Calc. Integr.* T. II pag. 432.

vero fieri $S^{m-1} = 1$, $S^m = A$, tandemque terminos ultiores tamquam membra seriei recurrentis per legem sequentem determinari:

$$\begin{aligned} S^m &= A \\ S^{m+1} &= AS^m - BS^{m-1} = AA - B \\ S^{m+2} &= AS^{m+1} - BS^m + CS^{m-1} = A^2 - 2BA + C \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Facile quidem hinc colligitur S^{m+1} esse $= aa + bb + cc + \dots + B$ sive summam quadratorum cum summa omnium productorum e binis diversis quantitatum $a, b, c, d, \dots$; sed quo clarius perspiciatur, quonam modo termini sequentes ex elementis $a, b, c, d, \dots$ formentur, observamus $\frac{1}{Q}$ esse productum e seriebus

$$\begin{aligned} & 1 + ax + aaxx + a^3x^3 + \text{etc.} \\ & 1 + bx + bbbx + b^3x^3 + \text{etc.} \\ & 1 + cx + cccx + c^3x^3 + \text{etc.} \\ & 1 + dx + dddx + d^3x^3 + \text{etc.} \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

Hoc vero productum est $= \Sigma a^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} \dots \times x^{\lambda+\mu+\nu+\dots}$, ubi exponentibus $\lambda, \mu, \nu, \dots$ omnes valores integri a 0 usque in infin. tribuendi omnibusque quibus fieri potest modis combinandi sunt. Quocirca ut in serie, in quam $\frac{1}{Q}$ evolvitur, eius termini, qui continent x^{n+1-m} , coefficientem obtineamus, numerum $n+1-m$ omnibus quibus fieri potest modis in n partes integras $\lambda+\mu+\nu+\dots$ (inter quas etiam pars 0 admittitur) discernere oportet, omnibus quoque permutationibus harum partium permixtis; atque tunc singula producta $a^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} \dots$ in summam colligere, quae erit coefficientis quaesitus, simulque $= S^n$. Levi attentione adhibita patebit, huic regulae prorsus aequivalere sequentem: Ex m quantitibus $a, b, c, d, \dots$ omnes combinationes $n+1-m$ elementorum colligendae, admissis repetitionibus, et singulae tamquam producta considerandae, quorum aggregatum erit $= S^n$. Quare erit ut supra S^{m+1} summa omnium productorum e binis quantitibus $a, b, c, d, \dots$ tum diversis tum identicis; S^{m+2} summa omnium productorum e ternis diversis seu identicis etc.

Nihil iam superest, nisi ut summam progressionis nostrae pro valoribus negativis ipsius n definire doceamus. Ad quem finem partem primam summae S^{-n} , puta $\frac{a^{-n}}{(a-b)(a-c)(a-d)\dots}$ sub hanc formam ponemus

$$\pm \frac{1}{abcd\dots} \times \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^{m+n-2}}{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{d}\right)\dots}$$

ubi signum superius vel inferius adoptandum est, prout m impar est vel par, similisque transformatio etiam ad partes reliquas applicari poterit. Quamobrem si per characterem T designetur expressio, quae perinde ex $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d} \dots$ oritur, ut S ex $a, b, c, d, \dots$, manifesto fiet $S^{-n} = \pm \frac{1}{abcd\dots}$. Hoc itaque modo hic casus ad praecedentem reductus est, fitque

$$S^{-1} = \pm \frac{1}{abcd\dots}, \quad S^{-2} = \pm \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \dots}{abcd\dots}.$$

S^{-3} aequalis producto ex $\pm \frac{1}{abcd\dots}$ in summam omnium productorum e binis quantitatum $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d} \dots$ diversis aut identicis etc.

2.

Applicabimus disquisitionem praecedentem ad eum casum, ubi quantitativus a, b, c, d valores imaginarii tribuuntur: hac ratione ad quasdam insignes relationes per facile pervenimus, quae alia methodo tractatae maiores difficultates obliicerent. Sit E basis logarithmorum naturalium, i quantitas imaginaria $\sqrt{-1}$; consideremus loco quantitatum realium $a, b, c, \dots$ imaginarias $E^{ia}, E^{ib}, E^{ic}, E^{id} \dots$ et $E^{-ia}, E^{-ib}, E^{-ic}, E^{-id} \dots$, statuamusque

$$\begin{aligned} & \frac{E^{isa}}{(E^{ia}-E^{ib})(E^{ib}-E^{ic})(E^{ic}-E^{id})\dots} \\ & + \frac{E^{isb}}{(E^{ib}-E^{ic})(E^{ic}-E^{id})(E^{id}-E^{ie})\dots} \\ & + \frac{E^{isc}}{(E^{ic}-E^{id})(E^{id}-E^{ie})(E^{ie}-E^{if})\dots} \\ & + \frac{E^{isd}}{(E^{id}-E^{ie})(E^{ie}-E^{if})(E^{if}-E^{ig})\dots} + \text{etc.} = S^n, \text{ atque} \\ & \frac{E^{-isa}}{(E^{-ia}-E^{-ib})(E^{-ib}-E^{-ic})(E^{-ic}-E^{-id})\dots} \\ & + \frac{E^{-isb}}{(E^{-ib}-E^{-ic})(E^{-ic}-E^{-id})(E^{-id}-E^{-ie})\dots} \\ & + \frac{E^{-isc}}{(E^{-ic}-E^{-id})(E^{-id}-E^{-ie})(E^{-ie}-E^{-if})\dots} \\ & + \frac{E^{-isd}}{(E^{-id}-E^{-ie})(E^{-ie}-E^{-if})(E^{-if}-E^{-ig})\dots} + \text{etc.} = T^n \end{aligned}$$

Designando itaque multitudinem quantitatum $a, b, c, d \dots$ per m , erunt $S^0, S^1, S^2 \dots S^{m-2}$, nec non $T^0, T^1, T^2 \dots T^{m-2}$ omnes $= 0$; porro $S^{m-1} = T^{m-1} = 1$; S^m summa quantitatum $E^{ia}, E^{ib}, E^{ic}, E^{id} \dots$; S^{m+1} summa productorum omnium e binis diversis seu identicis; S^{m+2} summa productorum e ternis etc.; et perinde valores summarum T^m, T^{m+1}, T^{m+2} etc. e quantitativibus $E^{-ia}, E^{-ib}, E^{-ic}, E^{-id} \dots$ formandi erunt.

Iam quum constet, esse $E^{ix} + E^{-ix} = 2 \cos x$, $E^{ix} - E^{-ix} = 2i \sin x$, facile perspicietur, valorem expressionis $\frac{1}{2}(S^n + T^n)$, qui pro $n = 0, 1, 2 \dots m-2$ fit $= 0$, pro $n = m-1$ autem $= 1$, pro $n = m$ fieri

$$= \cos a + \cos b + \cos c + \cos d \dots$$

similiterque fieri $\frac{1}{2}(S^{m+1} + T^{m+1})$ summam cosinum omnium angulorum, qui oriuntur addendo binos ex his $a, b, c, d \dots$ diversos seu identicos; $\frac{1}{2}(S^{m+2} + T^{m+2})$ summam cosinum omnium angulorum, qui oriuntur addendo ex iisdem ternos etc. Perinde erit $\frac{S^n - T^n}{2i} = 0$ pro $n = 0, 1, 2 \dots m-1$; porro $= \sin a + \sin b + \sin c + \sin d \dots$ pro $n = m$; et similiter $\frac{S^{m+1} - T^{m+1}}{2i}$ erit summa sinuum omnium angulorum, qui oriuntur addendo ex his $a, b, c, d \dots$ binos diversos seu identicos; $\frac{S^{m+2} - T^{m+2}}{2i}$ summa sinuum omnium angulorum, qui oriuntur ex iisdem, ternos combinando etc.

Summarum S^n, T^n partes nunc propius considerabimus. Est

$$E^{ia} - E^{ib} = E^{i(a+b)}(E^{i(a-b)} - E^{i(b-a)}) = 2i E^{i(a+b)} \sin \frac{1}{2}(a-b)$$

perinde

$$E^{ia} - E^{ic} = 2i E^{i(a+c)} \sin \frac{1}{2}(a-c) \text{ etc.}$$

Quamobrem in S^n partis primae denominator fit

$$= (2i)^{m-1} E^{i(b+c+d+\dots+(m-1)a)} \sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots$$

statuendoque $a+b+c+d+\dots = s$, haec pars ipsa

$$= \frac{E^{i((n+1-1)m-1)s}}{(2i)^{m-1} \sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots}$$

Simili modo habetur

$$E^{-ia} - E^{-ib} = -2i E^{-i(a+b)} \sin \frac{1}{2}(a-b)$$

unde tandem pars prima summae T^n provenit

$$= \frac{+E^{-i(n+1-\frac{1}{2}m)a-\frac{1}{2}s}}{(2i)^{m-1} \sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots}$$

ubi signum superius vel inferius valet, prout m impar est vel par. Quam cum parte prima summae S^n addendo, sive ab eadem subtrahendo, concludimus fieri primo pro valore impari ipsius m partem primam summae $\frac{1}{2}(S^n + T^n)$

$$= \frac{\cos((n+1-\frac{1}{2}m)a-\frac{1}{2}s)}{(2i)^{m-1} \sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots}$$

partem primam summae $\frac{S^n - T^n}{2i}$

$$= \frac{\sin((n+1-\frac{1}{2}m)a-\frac{1}{2}s)}{(2i)^{m-1} \sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots}$$

secundo pro valore pari ipsius m partem primam summae $\frac{1}{2}(S^n + T^n)$

$$= \frac{\sin((n+1-\frac{1}{2}m)a-\frac{1}{2}s)}{2^{m-1}i^{m-1} \sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots}$$

partem primam summae $\frac{S^n - T^n}{2i}$

$$= \frac{-\cos((n+1-\frac{1}{2}m)a-\frac{1}{2}s)}{2^{m-1}i^{m-1} \sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots}$$

Manifesto partes sequentes expressionum $\frac{1}{2}(S^n + T^n)$, $\frac{S^n - T^n}{2i}$ primae prorsus analogae erunt, atque inde per solam commutationem characteris a cum $b, c, d \dots$ orientur. Iam designando per k angulum arbitrium ponendoque $n+1-\frac{1}{2}m = \lambda$, adiumento formularum

$$\begin{aligned} \cos(\lambda a + k) &= \cos(k + \frac{1}{2}s) \cos(\lambda a - \frac{1}{2}s) - \sin(k + \frac{1}{2}s) \sin(\lambda a - \frac{1}{2}s) \\ \sin(\lambda a + k) &= \cos(k + \frac{1}{2}s) \sin(\lambda a - \frac{1}{2}s) + \sin(k + \frac{1}{2}s) \cos(\lambda a - \frac{1}{2}s) \end{aligned}$$

haud difficile pervenimus ad summationem serierum sequentium

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(\lambda a + k)}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots} \\ & + \frac{\cos(\lambda b + k)}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c) \sin \frac{1}{2}(b-d) \dots} \\ & + \frac{\cos(\lambda c + k)}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b) \sin \frac{1}{2}(c-d) \dots} \\ & + \frac{\cos(\lambda d + k)}{\sin \frac{1}{2}(d-a) \sin \frac{1}{2}(d-b) \sin \frac{1}{2}(d-c) \dots} + \text{etc.} = U^\lambda \end{aligned}$$

atque

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(\lambda a + k)}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots} \\ & + \frac{\sin(\lambda b + k)}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c) \sin \frac{1}{2}(b-d) \dots} \\ & + \frac{\sin(\lambda c + k)}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b) \sin \frac{1}{2}(c-d) \dots} \\ & + \frac{\sin(\lambda d + k)}{\sin \frac{1}{2}(d-a) \sin \frac{1}{2}(d-b) \sin \frac{1}{2}(d-c) \dots} + \text{etc.} = V^\lambda. \end{aligned}$$

Casus primus, si m est impar.

In hoc casu λ debet esse non numerus integer sed fractione $\frac{1}{2}$ affectus sive numeri imparis semissis. Ad valores negativos ipsius λ non opus est respicere, quum habeatur $\cos(-\lambda a + k) = \cos(\lambda a - k)$ atque $\sin(-\lambda a + k) = -\sin(\lambda a - k)$, adeoque summatio pro valore negativo e summatione pro opposito positivo per solam mutationem ipsius k in $-k$ sponte demanat: haec observatio manifesto etiam in casu sequenti valebit. Iam patet facile, pro $n = 0, 1, \dots, m-2$, sive pro $\lambda = -\frac{1}{2}m+1, -\frac{1}{2}m+2, \dots, \frac{1}{2}m-1$, sive ut valores negativos omittamus, pro $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \frac{1}{2}m-1$ fieri tum $U^\lambda = 0$, tum $V^\lambda = 0$; porro

$$\begin{aligned} U^{im} &= (2i)^{m-1} \cos(\frac{1}{2}s + k), & V^{im} &= (2i)^{m-1} \sin(\frac{1}{2}s + k) \\ U^{im+1} &= (2i)^{m-1} \{ \cos(\frac{1}{2}s + k + a) + \cos(\frac{1}{2}s + k + b) + \cos(\frac{1}{2}s + k + c) \\ & \quad + \cos(\frac{1}{2}s + k + d) + \text{etc.} \} \\ V^{im+1} &= (2i)^{m-1} \{ \sin(\frac{1}{2}s + k + a) + \sin(\frac{1}{2}s + k + b) + \sin(\frac{1}{2}s + k + c) \\ & \quad + \sin(\frac{1}{2}s + k + d) + \text{etc.} \} \end{aligned}$$

U^{im+2} vel V^{im+2} aequalem producto ex $(2i)^{m-1}$ in summam cosinuum vel sinuum omnium angulorum, qui oriuntur addendo $\frac{1}{2}s + k$ cum binis angulorum $a, b, c, d, \dots$ diversis seu identicis; U^{im+3} vel V^{im+3} aequalem producto ex $(2i)^{m-1}$ in summam cosinuum vel sinuum omnium angulorum, qui oriuntur addendo $\frac{1}{2}s + k$ cum ternis ex iisdem etc. Ceterum vix opus erit admonere, potestatem quantitatis imaginariae i cum exponente pariter pari fieri $= +1$, cum impariter pari $= -1$.

Casus secundus, si m est par.

In hoc casu λ debet esse numerus integer, fitque pro $\lambda = 0, 1, 2, \dots, \frac{1}{2}m-1$ tum $U^\lambda = 0$, tum $V^\lambda = 0$. Porro erit

$$\begin{aligned}
 U^{2m} &= 2^{m-1} i^{m-2} \sin(\tfrac{1}{2}s+k), \\
 V^{2m} &= -2^{m-1} i^{m-2} \cos(\tfrac{1}{2}s+k); \\
 U^{2m+1} &= 2^{m-1} i^{m-2} \{ \sin(\tfrac{1}{2}s+k+a) + \sin(\tfrac{1}{2}s+k+b) + \sin(\tfrac{1}{2}s+k+c) \\
 &\quad + \sin(\tfrac{1}{2}s+k+d) + \text{etc.} \} \\
 V^{2m+1} &= -2^{m-1} i^{m-2} \{ \cos(\tfrac{1}{2}s+k+a) + \cos(\tfrac{1}{2}s+k+b) + \cos(\tfrac{1}{2}s+k+c) \\
 &\quad + \cos(\tfrac{1}{2}s+k+d) + \text{etc.} \}
 \end{aligned}$$

U^{2m+2} , U^{2m+3} etc. aequalis producto ex $2^{m-1} i^{m-2}$ in summam sinuum omnium angulorum, qui oriuntur addendo $\tfrac{1}{2}s+k$ cum binis, ternis etc. angulorum $a, b, c, \dots$ diversis seu identicis; V^{2m+2} , U^{2m+3} etc. aequalis producto ex $-2^{m-1} i^{m-2}$ in summam cosinuum omnium angulorum, qui oriuntur addendo $\tfrac{1}{2}s+k$ cum binis, ternis etc. eorundem angulorum.

3.

Sit X functio indeterminatae x huius formae

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \text{etc.}$$

quae non excurrat in infinitum, sed abrumpatur, neque ultra terminum, qui continet x^{m-1} egrediatur, ita ut multitudo coefficientium non sit maior quam m . Tunc si pro m valoribus diversis ipsius x , puta $a, b, c, d, \dots$ valores correspondentes ipsius X sunt cogniti, puta $A, B, C, D, \dots$ ex his valor ipsius X valori alicui alii ipsius x respondens sequenti modo concinne eruatur. Sit t valor novus ipsius x , atque T valor respondens ipsius X , ita ut sequentes $m+1$ aequationes locum habeant

$$\begin{aligned}
 A &= \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta a^3 + \dots \\
 B &= \alpha + \beta b + \gamma b^2 + \delta b^3 + \dots \\
 C &= \alpha + \beta c + \gamma c^2 + \delta c^3 + \dots \\
 D &= \alpha + \beta d + \gamma d^2 + \delta d^3 + \dots \\
 &\text{etc.} \\
 T &= \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3 + \dots
 \end{aligned}$$

Multiplicentur hae aequationes resp. per

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)\dots(a-t)} \\
 &\frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)\dots(b-t)} \\
 &\frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)\dots(c-t)} \\
 &\frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)\dots(d-t)} \\
 &\text{etc.} \\
 &\frac{1}{(t-a)(t-b)(t-c)\dots}
 \end{aligned}$$

prodeatque inde per productorum additionem

$$\begin{aligned}
 &\frac{A}{(a-b)(a-c)(a-d)\dots(a-t)} \\
 &+ \frac{B}{(b-a)(b-c)(b-d)\dots(b-t)} \\
 &+ \frac{C}{(c-a)(c-b)(c-d)\dots(c-t)} \\
 &+ \frac{D}{(d-a)(d-b)(d-c)\dots(d-t)} \\
 &+ \text{etc.} \\
 &+ \frac{T}{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)\dots} = W
 \end{aligned}$$

Tunc ex art. 1, ubi m idem denotabat, quod hic nobis est $m+1$, facile concludetur, fieri $W=0$; quamobrem multiplicando per $(t-a)(t-b)(t-c)\dots$ prodit

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{(t-b)(t-c)(t-d)\dots}{(a-b)(a-c)(a-d)\dots} A \\
 &+ \frac{(t-a)(t-c)(t-d)\dots}{(b-a)(b-c)(b-d)\dots} B \\
 &+ \frac{(t-a)(t-b)(t-d)\dots}{(c-a)(c-b)(c-d)\dots} C \\
 &+ \frac{(t-a)(t-b)(t-c)\dots}{(d-a)(d-b)(d-c)\dots} D \\
 &+ \text{etc.}
 \end{aligned}$$

4.

Formula in art. praec. inventa, ita comparata est, ut sponte sine omni calculo pateat, si pro t quantitatum $a, b, c, d, \dots$ aliqua in illa substituantur, valorem respondentem $A, B, C, D, \dots$ inde prodire. Neque hoc solo respectu sese commendat: certo enim ad usum practicum longe commodissima est, saltem quoties uni-

cus tantum valor ipsius X e valoribus datis computandus est. Quando plures sunt eruendi, transformatio sequens formulae nostrae nonnunquam praeferri poterit

$$T = A + (t-a) \left(\frac{A}{a-b} + \frac{B}{b-a} \right) \\ + (t-a)(t-b) \left(\frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B}{(b-a)(b-c)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)} \right) \\ + (t-a)(t-b)(t-c) \left(\frac{A}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{B}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{D}{(d-a)(d-b)(d-c)} \right) \\ + \text{etc.}$$

(quae ex formula art. 3 facillime derivatur, si in hac multitudo quantitatum $a, b, c, d, \dots$ ab una a ad duas a, b , inde ad tres a, b, c etc. successive increscere concipitur et quisque valor ipsius T hoc modo oriens a sequenti subtrahitur). Ponantur coefficientes

$$\frac{A}{a-b} + \frac{B}{b-a}, \quad \frac{A}{(a-b)(a-c)} + \frac{B}{(b-a)(b-c)} + \frac{C}{(c-a)(c-b)} \text{ etc.} = A', A'' \text{ etc.}$$

porro designetur per B', B'' etc. id, quod fit ex A', A'' etc. si pro $a, b, c, \dots$ resp. scribitur $b, c, d, \dots$ atque pro $A, B, C, \dots$ resp. $B, C, D, \dots$; similiter designetur per C', C'' etc. id quod fit ex A', A'' etc., si pro $a, b, c, \dots$ resp. substituitur $c, d, e, \dots$ et pro $A, B, C, \dots$ resp. $C, D, E, \dots$ et sic porro. Tunc habebimus

$$A' = \frac{A-B}{a-b}, \quad B' = \frac{B-C}{b-c}, \quad C' = \frac{C-D}{c-d}, \dots \\ A'' = \frac{A'-B'}{a-c}, \quad B'' = \frac{B'-C'}{b-d}, \quad C'' = \frac{C'-D'}{c-e}, \dots \\ A''' = \frac{A''-B''}{a-d}, \quad B''' = \frac{B''-C''}{b-e}, \quad C''' = \frac{C''-D''}{c-f}, \dots \\ \text{etc.}$$

atque

$$T = A + A'(t-a) + A''(t-a)(t-b) + A'''(t-a)(t-b)(t-c) + \dots$$

Multitudo quantitatum A', B', C' etc. hic computandarum erit $m-1$, multitudo quantitatum A'', B'', C'' etc. erit $m-2$ et sic porro.

5.

Sequens quoque mutatio formulae art. 3 non sine fructu in usum vocari poterit. Sit $\mathfrak{X}$ functio integra arbitraria indeterminatae x , neque tamen alterioris

quam $m-1^{\text{ta}}$ ordinis; atque $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \dots, \mathfrak{X}$ eius valores pro $x = a, b, c, d, \dots, t$ resp. Tunc per art. 1 erit

$$0 = \frac{\mathfrak{A}}{(a-b)(a-c)(a-d)\dots(a-t)} \\ + \frac{\mathfrak{B}}{(b-a)(b-c)(b-d)\dots(b-t)} \\ + \frac{\mathfrak{C}}{(c-a)(c-b)(c-d)\dots(c-t)} \\ + \frac{\mathfrak{D}}{(d-a)(d-b)(d-c)\dots(d-t)} \\ + \text{etc.} \\ + \frac{\mathfrak{X}}{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)\dots}$$

Hinc facile deducitur

$$T = \mathfrak{X} \\ + \frac{(t-b)(t-c)(t-d)\dots}{(a-b)(a-c)(a-d)\dots} (A - \mathfrak{A}) \\ + \frac{(t-a)(t-c)(t-d)\dots}{(b-a)(b-c)(b-d)\dots} (B - \mathfrak{B}) \\ + \frac{(t-a)(t-b)(t-d)\dots}{(c-a)(c-b)(c-d)\dots} (C - \mathfrak{C}) \\ + \frac{(t-a)(t-b)(t-c)\dots}{(d-a)(d-b)(d-c)\dots} (D - \mathfrak{D}) \\ + \text{etc.}$$

Quodsi functio $\mathfrak{X}$ ita eligitur, ut valores functionis X hi $A, B, C, D, \dots$ prope per illam repraesententur, hoc lucratur, ut coefficientes $\frac{(t-b)(t-c)(t-d)\dots}{(a-b)(a-c)(a-d)\dots}$ etc. per quantitates parvas multiplicandi sint. Potest etiam pro $\mathfrak{X}$ quantitas constans assumi, e. g. una ex his $A, B, C, D, \dots$; in quo casu pars una e valore ipsius T excidet. Aut ita determinari potest $\mathfrak{X}$, ut duae pluresve harum quantitatum per $\mathfrak{X}$ repraesententur, in quo casu totidem partes ex T excident.

6.

Quae praecedunt, suppositioni inniuntur, functionem X ultra potestatem x^{m-1} non egredi, sive differentiam m^{tam} una cum superioribus evanescere, in quo casu methodus interpolationis rigore vera est. Si vero illa suppositio locum non habet, interpolatio eo tantummodo tendit, ut loco functionis X functio simplicissima eruatur, per quam valoribus propositis $A, B, C, D, \dots$ satisfiat. Iam ut errorem, qui a neglectis differentiis superioribus nascitur, diiudicare possimus,

sint termini in X post potestatem x^{m-1} hi $\mu x^m + \nu x^{m+1} + \text{etc.}$ Erit itaque in art. 3 non $W = 0$, sed ut ex art. 1 sequitur, $W = \mu + \nu(a+b+c+d+\dots+t) + \text{etc.}$ Hinc valori ipsius T illic tradito adhuc adiaci debet

$$(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)\dots \times \{\mu + \nu(a+b+c+d+\dots+t) + \text{etc.}\}$$

7.

Casus in praxi maxime frequens est, ubi $a, b, c, d, \dots$ progressionem arithmeticam constituunt. Ponendo intervallum $= 1$, ita ut sit $b = a+1$, $c = a+2$ etc., formula art. 4 fit

$$\begin{aligned} T &= A \\ &+ (t-1)(B-A) \\ &+ (t-1)(t-2)\left(\frac{C-2B+A}{2}\right) \\ &+ (t-1)(t-2)(t-3)\left(\frac{D-3C+3B-A}{6}\right) \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

sive

$$T = A + A'(t-1) + A''(t-1)(t-2) + A'''(t-1)(t-2)(t-3) + \dots$$

ubi A', A'', A''' etc. computantur per algorithmum sequentem

$$\begin{aligned} A' &= B-A, & B' &= C-B, & C' &= D-C \text{ etc.} \\ 2A'' &= B'-A', & 2B'' &= C'-B', & 2C'' &= D'-C' \text{ etc.} \\ 3A''' &= B''-A'', & 3B''' &= C''-B'', & 3C''' &= D''-C'' \text{ etc.} \end{aligned}$$

etc., quae formula cum vulgata interpolationis formula per differentias omnino convenit.

8.

Si pro satis multis valoribus ipsius x in serie arithmetica progredientibus $a, a+1, a+2, \dots$ valores respondentes functionis X cogniti sunt, ut seriem m valorum successivorum ipsius x ad libitum eligere liceat ad computum ipsius T : quaestio oritur, quosnam valores ad hunc finem praeferre maxime praestet, siquidem plures quam m adhibere sive ultra differentiam $m-1^{\text{tam}}$ egredi nolumus?

Manifesto hoc ita est decidendum, ut error a differentia m^{ti} ordinis oriundus fiat quam minimus; hic vero error fit

$$= (t-a)(t-a-1)(t-a-2)\dots(t-a-m+1)\frac{\Delta}{1.2.3\dots m}$$

si adhibentur termini ad $x = a, a+1, a+2, \dots, a+m-1$ pertinentes, vel

$$= (t-a-1)(t-a-2)(t-a-3)\dots(t-a-m)\frac{\Delta}{1.2.3\dots m}$$

si adhibentur termini ad $x = a+1, a+2, a+3, \dots, a+m$ pertinentes, vel

$$= (t-a+1)(t-a)(t-a-1)\dots(t-a-m+2)\frac{\Delta}{1.2.3\dots m}$$

si adhibentur termini ad $x = a-1, a, a+1, \dots, a+m-2$ pertinentes, designando per Δ differentiam ordinis m^{ti} , quae siquidem ad differentias superiorum ordinum non respicitur, hic tamquam constans considerari potest. Quodsi igitur m termini ad $x = a, a+1, a+2, \dots, a+m-1$ pertinentes maxime idonei sunt, ex illis tribus expressionibus prima debet esse minima adeoque sine respectu signi $t-a <$ vel saltem non $> t-a-m$, nec non $t-a+1 >$ vel saltem non $< t-a-m+1$. Ex conditione priore facile deducitur, $t-a-m$ esse debere quantitatem negativam inter $-\frac{1}{2}m$ et $-\infty$ sitam, unde $t-a$ iacebit inter $+\frac{1}{2}m$ et $-\infty$; ex conditione posteriore autem erit $t-a+1$ quantitas positiva atque inter $\frac{1}{2}m$ et $+\infty$ sita; quare $t-a$ iacebit inter $\frac{1}{2}m-1$ et $\frac{1}{2}m$. Hinc sequitur, si m fuerit numerus par, valores ad interpolationem adhibendos ita eligendos esse, ut prior semissis ab una parte, posterior ab altera termini quaesiti iaceant; si autem m fuerit impar, termini ii sunt eligendi, quorum medius quaesito iaceat quam proximus. Quoties in hoc casu t est exacte medius inter duos valores consecutivos ipsius x , respectu erroris a neglecta differentia m^{ti} ordinis generaliter loquendo nihil intererit, sive terminus quaesito praecedens sive sequens pro medio adhibendorum adoptetur.

9.

Exempla. I. Invenire oporteat $\log. \sin 24^{\circ}30'$, si logarithmi sinuum per singulos gradus habentur, ita ut differentiae quartae et superiores negligantur. In hoc itaque casu secundum praecepta art. praec. adhibebimus logarithmos sinuum arcuum $23^{\circ}, 24^{\circ}, 25^{\circ}, 26^{\circ}$, quibus per A, B, C, D designatis provenit per formulam art. 3 logarithmus quaesitus

$$= -\frac{1}{16}A + \frac{3}{16}B + \frac{1}{16}C - \frac{1}{16}D$$

cuius valor numericus ex

$$\begin{aligned} A &= 9,5918780 \\ B &= 9,6093133 \\ C &= 9,6259483 \\ D &= 9,6418420 \end{aligned}$$

eruitur 9,6177271.5; tabulae dant 9,6177270.

Quodsi hic loco $\log. \sin 23^\circ$, logarithmum $\sin 27^\circ = E = 9,6570468$ adhibuissimus, formula

$$+ \frac{1}{16}B + \frac{1}{16}C - \frac{1}{16}D + \frac{1}{16}E$$

dedisset 9,6177267.375.

Formula art. praec. pro hoc casu dat errorem ex neglecta differentia quarta Δ oriundum $= \frac{1}{16}\Delta$, si A, B, C, D , contra $= -\frac{1}{16}\Delta$, si B, C, D, E adhibentur; qui error valori calculato adiciendus est. In exemplo nostro habetur $\Delta = -0,0000066$; correctio hinc calculata utrumque computum cum tabulis conciliat.

II. Sit tempus novilunii 16 Junii 1806 e longitudinibus solis et lunae pro singulis diebus computandum, ita ut differentiarum usque ad quartam incl. ratio habeatur. Habentur in ephemeridibus Parisiensibus pro meridie vero loci sequentes

	longit. solis	longit. lunae
1806 Junii 14	82° 39' 12"	53° 19' 15"
15	83 36 30	67 29 43
16	84 33 48	81 59 52
17	85 31 7	96 44 9
18	86 28 24	111 35 30

Sunt hic valores dati ipsius x differentiae inter longitudinem solis et lunae, valores respondentes ipsius X tempora, quae inde a meridie 16 Junii numerabuntur; quaeriturque valor ipsius X valori $x = 0$ respondens. Fit igitur

$$\begin{aligned} a &= -29^\circ 19' 57'' &= -105596'' & A &= -2 \\ b &= -16 \ 6 \ 47 &= -58007 & B &= -1 \\ c &= -2 \ 33 \ 56 &= -9236 & C &= 0 \\ d &= +11 \ 13 \ 2 &= +40382 & D &= +1 \\ e &= +25 \ 7 \ 6 &= +90426 & E &= +2 \\ t &= 0 \end{aligned}$$

Hinc computatur

$$\begin{aligned} \frac{(t-b)(t-c)(t-d)(t-e)}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} &= +0,0149084 \\ \frac{(t-a)(t-c)(t-d)(t-e)}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-e)} &= -0,1050660 \\ \frac{(t-a)(t-b)(t-d)(t-e)}{(c-a)(c-b)(c-d)(c-e)} &= +0,9624567 \\ \frac{(t-a)(t-b)(t-c)(t-e)}{(d-a)(d-b)(d-c)(d-e)} &= +0,1434435 \\ \frac{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}{(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)} &= -0,0157429 \end{aligned}$$

His coefficientibus *) per $-2, -1, 0, 1, 2$ resp. multiplicatis, productorum summa fit $= +0,1872069$; quare novilunium erit 16 Junii, $4^h 29' 34'' 7$ temp. ver. Paris. sive $4^h 29' 41'' 4$ temp. med.; Connaissance des tems habet $4^h 27' 42''$.

10.

Sit X functio arcus indeterminati x huius formae

$$\begin{aligned} &a + a' \cos x + a'' \cos 2x + a''' \cos 3x + \text{etc.} \\ &+ b' \sin x + b'' \sin 2x + b''' \sin 3x + \text{etc.} \end{aligned}$$

quae non excurrit in infinitum, sed cum $\cos mx$ et $\sin mx$ abrumpatur, ita ut multitudo coefficientium (incognitorum) sit $2m+1$. Pro totidem valoribus diversis ipsius x , puta a, b, c, d etc. dati sint valores respondentes functionis X , puta $A, B, C, D, \dots$ (Ceterum valores ipsius x , quorum differentia est periphæria integra sive eius multiplum, manifesto hic pro diversis haberi nequeunt). Ex his datis quaeritur formula pro valore T , quem functio X pro quocunque alio valore ipsius x , puta t nanciscitur. Habentur itaque $2m+2$ aequationes

*) Confirmationi calculi inservit observatio ex art. 5 sine negotio derivanda, summam harum coefficientium esse debere $= 1$.

$$\begin{aligned}
A &= \alpha + \alpha' \cos a + \alpha'' \cos 2a + \alpha''' \cos 3a + \text{etc.} \\
&\quad + \bar{\alpha}' \sin a + \bar{\alpha}'' \sin 2a + \bar{\alpha}''' \sin 3a + \text{etc.} \\
B &= \alpha + \alpha' \cos b + \alpha'' \cos 2b + \alpha''' \cos 3b + \text{etc.} \\
&\quad + \bar{\alpha}' \sin b + \bar{\alpha}'' \sin 2b + \bar{\alpha}''' \sin 3b + \text{etc.} \\
C &= \alpha + \alpha' \cos c + \alpha'' \cos 2c + \alpha''' \cos 3c + \text{etc.} \\
&\quad + \bar{\alpha}' \sin c + \bar{\alpha}'' \sin 2c + \bar{\alpha}''' \sin 3c + \text{etc.} \\
D &= \alpha + \alpha' \cos d + \alpha'' \cos 2d + \alpha''' \cos 3d + \text{etc.} \\
&\quad + \bar{\alpha}' \sin d + \bar{\alpha}'' \sin 2d + \bar{\alpha}''' \sin 3d + \text{etc.} \\
&\quad \text{etc.} \\
T &= \alpha + \alpha' \cos t + \alpha'' \cos 2t + \alpha''' \cos 3t + \text{etc.} \\
&\quad + \bar{\alpha}' \sin t + \bar{\alpha}'' \sin 2t + \bar{\alpha}''' \sin 3t + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Multiplicando has aequationes resp. per

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots \sin \frac{1}{2}(a-t)} \\
&\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c) \sin \frac{1}{2}(b-d) \dots \sin \frac{1}{2}(b-t)} \\
&\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b) \sin \frac{1}{2}(c-d) \dots \sin \frac{1}{2}(c-t)} \\
&\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(d-a) \sin \frac{1}{2}(d-b) \sin \frac{1}{2}(d-c) \dots \sin \frac{1}{2}(d-t)} \\
&\text{etc.} \\
&\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots}
\end{aligned}$$

addendoque producta prodeat

$$\begin{aligned}
&\frac{A}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots \sin \frac{1}{2}(a-t)} \\
&+ \frac{B}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c) \sin \frac{1}{2}(b-d) \dots \sin \frac{1}{2}(b-t)} \\
&+ \frac{C}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b) \sin \frac{1}{2}(c-d) \dots \sin \frac{1}{2}(c-t)} \\
&+ \frac{D}{\sin \frac{1}{2}(d-a) \sin \frac{1}{2}(d-b) \sin \frac{1}{2}(d-c) \dots \sin \frac{1}{2}(d-t)} \\
&+ \text{etc.} \\
&+ \frac{T}{\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots} = W
\end{aligned}$$

Tunc ex art. 2, ubi m idem erat, quod hic est $2m+2$, adeoque casus secundus locum habet, fit $W=0$; quomobrem multiplicando per

$$\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots$$

prodit

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots} A \\
&+ \frac{\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c) \sin \frac{1}{2}(b-d) \dots} B \\
&+ \frac{\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b) \sin \frac{1}{2}(c-d) \dots} C \\
&+ \frac{\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \dots}{\sin \frac{1}{2}(d-a) \sin \frac{1}{2}(d-b) \sin \frac{1}{2}(d-c) \dots} D \\
&+ \text{etc.}
\end{aligned}$$

Quum haec formula indefinite pro valore quocunque ipsius t locum habeat, manifestum est, si producta sinuum in numeratoribus in cosinus sinusque arcuum multiplicium evolvantur, id quod provenit cum

$$\begin{aligned}
&\alpha + \alpha' \cos t + \alpha'' \cos 2t + \alpha''' \cos 3t + \text{etc.} \\
&+ \bar{\alpha}' \sin t + \bar{\alpha}'' \sin 2t + \bar{\alpha}''' \sin 3t + \text{etc.}
\end{aligned}$$

identicum esse debere, unde coefficientes $\alpha, \alpha', \bar{\alpha}', \alpha'', \bar{\alpha}''$ etc. innotescunt. Ceterum formula pro T , ut hic exhibita est, ita est comparata, ut sponte et sine calculo pateat, substitutis pro t resp. a, b, c, d etc. valoribus propositis A, B, C, D etc. probe satisfieri.

11.

Si multitudo valorum datorum A, B, C, D etc. unitate minor esset, quam supposuimus, puta $= 2m$, hi non sufficient ad determinationem $2m+1$ coefficientium incognitorum, nisi inter eos relatio aliqua cognita fuerit. In hoc itaque casu expressio generalis pro T aliter exhiberi nequit, nisi ita, ut constantem incognitam implicet. Ratiocinia art. praec. hic adhiberi non possunt, quoniam summatio $W=0$, ex art. 2 petita, suppositioni innixa est, multitudinem quantitatum $A, B \dots T$ esse parem. Formula quidem in art. praec. pro T inventa valoribus A, B etc. generaliter satisfacit, sive horum multitudo par sit sive impar: sed levi attentione perspicitur, ex evolutione productorum e sinibus prodire, in nostro casu, expressionem propositae non similem, sed huius formae

$$\mathfrak{A} \cos \frac{1}{2} t + \mathfrak{A}' \cos \frac{3}{2} t + \mathfrak{A}'' \cos \frac{5}{2} t + \text{etc.} \\ + \mathfrak{B} \sin \frac{1}{2} t + \mathfrak{B}' \sin \frac{3}{2} t + \mathfrak{B}'' \sin \frac{5}{2} t + \text{etc.}$$

Quamobrem pro hoc casu viam aliam ingredi oportebit.

Multiplicetur X per $\cos(\frac{1}{2}x+k)$, proditque, si termini ultimi in X statuuntur $\alpha^m \cos mx + \beta^m \sin mx$

$$\alpha \cos(\frac{1}{2}x+k) + \frac{1}{2} \alpha' \cos(\frac{3}{2}x+k) + \frac{1}{2} \alpha'' \cos(\frac{5}{2}x+k) + \dots \\ + \frac{1}{2} \alpha^m \cos((m+\frac{1}{2})x+k) \\ + \frac{1}{2} \alpha' \cos(\frac{1}{2}x-k) + \frac{1}{2} \alpha'' \cos(\frac{3}{2}x-k) + \frac{1}{2} \alpha''' \cos(\frac{5}{2}x-k) + \dots \\ + \frac{1}{2} \alpha^m \cos((m-\frac{1}{2})x-k) \\ + \frac{1}{2} \beta' \sin(\frac{3}{2}x+k) + \frac{1}{2} \beta'' \sin(\frac{5}{2}x+k) + \dots \\ + \frac{1}{2} \beta^m \sin((m+\frac{1}{2})x+k) \\ + \frac{1}{2} \beta' \sin(\frac{1}{2}x-k) + \frac{1}{2} \beta'' \sin(\frac{3}{2}x-k) + \frac{1}{2} \beta''' \sin(\frac{5}{2}x-k) + \dots \\ + \frac{1}{2} \beta^m \sin((m-\frac{1}{2})x-k)$$

Iam si in hac expressione pro x successive substituitur $a, b, c, d, \dots, t$, quod inde provenit resp. per

$$\frac{1}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots \sin \frac{1}{2}(a-t)} \\ \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c) \sin \frac{1}{2}(b-d) \dots \sin \frac{1}{2}(b-t)} \\ \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b) \sin \frac{1}{2}(c-d) \dots \sin \frac{1}{2}(c-t)} \\ \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(d-a) \sin \frac{1}{2}(d-b) \sin \frac{1}{2}(d-c) \dots \sin \frac{1}{2}(d-t)} \\ \text{etc.} \\ \frac{1}{\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots}$$

multiplicatur, productorumque aggregatum $= W$ ponitur: ex iis, quae in art. 2, (in casu priori, ubi m idem erat, quod hic est $2m+1$) tradidimus, facile sequitur, haberi

$$W = \frac{1}{2} (2i)^{2m} \alpha^m \cos(\frac{1}{2}(a+b+c+d+\dots+t)+k) \\ + \frac{1}{2} (2i)^{2m} \beta^m \sin(\frac{1}{2}(a+b+c+d+\dots+t)+k)$$

Ex altera vero parte erit

$$W = \frac{A \cos(\frac{1}{2}a+k)}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots \sin \frac{1}{2}(a-t)} \\ + \frac{B \cos(\frac{1}{2}b+k)}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c) \sin \frac{1}{2}(b-d) \dots \sin \frac{1}{2}(b-t)} \\ + \frac{C \cos(\frac{1}{2}c+k)}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b) \sin \frac{1}{2}(c-d) \dots \sin \frac{1}{2}(c-t)} \\ + \frac{D \cos(\frac{1}{2}d+k)}{\sin \frac{1}{2}(d-a) \sin \frac{1}{2}(d-b) \sin \frac{1}{2}(d-c) \dots \sin \frac{1}{2}(d-t)} \\ + \text{etc.} \\ + \frac{T \cos(\frac{1}{2}t+k)}{\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots}$$

Quodsi iam quantitatem k , quae prorsus arbitraria est, $= -\frac{1}{2}t$ ponimus, summam autem $a+b+c+d+\dots = s$ (exclusa t), prodit, multiplicando per $\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots$

$$T = \frac{\sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots} A \cos \frac{1}{2}(t-a) \\ + \frac{\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c) \sin \frac{1}{2}(b-d) \dots} B \cos \frac{1}{2}(t-b) \\ + \frac{\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b) \sin \frac{1}{2}(c-d) \dots} C \cos \frac{1}{2}(t-c) \\ + \frac{\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \dots}{\sin \frac{1}{2}(d-a) \sin \frac{1}{2}(d-b) \sin \frac{1}{2}(d-c) \dots} D \cos \frac{1}{2}(t-d) \\ + \text{etc.} \\ + 2^{2m-1} i^{2m} \sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots \\ \times \{ \alpha^m \cos \frac{1}{2}s + \beta^m \sin \frac{1}{2}s \}$$

Circa hanc formulam quasdam adhuc annotationes adiciamus

I. Est $i^{2m} = +1$, vel -1 , prout m par est vel impar.

II. Quam formula indefinite pro quovis valore ipsius t valeat, necessario, evolutis sinuum productis in sinus et cosinus arcuum multiplicium, cum formula pro X , si pro x scribitur t , identica erit, i. e. cum

$$\alpha + \alpha' \cos t + \alpha'' \cos 2t + \text{etc.} \\ + \beta' \sin t + \beta'' \sin 2t + \text{etc.}$$

III. Determinantur itaque omnes coefficientes $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ etc. per quantitates cognitae, atque unicam incognitam $\alpha^m \cos \frac{1}{2}s + \beta^m \sin \frac{1}{2}s$, quamobrem, si qua inter illos relatio insuper datur, omnes ex asse facile poterunt assignari.

IV. Quodsi autem tantummodo expressio eiusdem formae ut

$$\alpha + \alpha' \cos t + \alpha'' \cos 2t + \text{etc.} \\ + \beta' \sin t + \beta'' \sin 2t + \text{etc.}$$

quaeritur (sive cum hac identica sit, sive non), per quam valores propositi A, B, C, D etc. repraesententur, si pro t resp. a, b, c, d etc. substituitur: quantitas $\alpha^m \cos \frac{1}{2}s + \beta^m \sin \frac{1}{2}s$ ex incognita *arbitraria* evadit, quam si placet etiam $= 0$ statuere licebit; reveraque formula nostra pro T ita comparata est, ut absque calculo sponte pateat, hacce eam proprietate praeditam esse.

12.

Operae pretium erit, transformationem ei analogam, quam in art. 4 explicavimus, etiam ad formulas art. 10 et art. praec., si ibi $\alpha^m \cos \frac{1}{2}s + \beta^m \sin \frac{1}{2}s = 0$ ponitur, applicare, quo pacto hos duos casus diversos sub formula unica comprehendere licebit. Crescat itaque multitudo quantitatum $a, b, c, d, \dots$ successive ab una a , ad duas a, b , deinde ad tres a, b, c etc.; evolvaturn alternis vicibus per artt. 10 et 11 valor, quem t pro singulis his suppositionibus nanciscitur, tandem quisque valor a proxime sequente subtrahatur, sequenti modo:

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(t-b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} A \cos \frac{1}{2}(t-a) + \frac{\sin \frac{1}{2}(t-a)}{\sin \frac{1}{2}(b-a)} B \cos \frac{1}{2}(t-b) \\ + \frac{\sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c)}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c)} A + \frac{\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-c)}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c)} B + \frac{\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b)}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b)} C \\ \text{etc.}$$

Hic differentia inter valorem primum et secundum fit

$$= \sin \frac{1}{2}(t-a) \cos \frac{1}{2}(t-b) \left\{ \frac{A}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} + \frac{B}{\sin \frac{1}{2}(b-a)} \right\}$$

Differentia inter valorem secundum et tertium

$$= \sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \left\{ \frac{A \cos \frac{1}{2}(a-c)}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c)} + \frac{B \cos \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c)} + \frac{C}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b)} \right\}$$

Quae operatio si ultra continuatur, facile emergit lex generalis. Scilicet statuendo

$$A' = \frac{A}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} + \frac{B}{\sin \frac{1}{2}(b-a)} \\ A'' = \frac{A \cos \frac{1}{2}(a-c)}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c)} + \frac{B \cos \frac{1}{2}(b-c)}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c)} + \frac{C}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b)} \\ A''' = \frac{A}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d)} + \frac{B}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c) \sin \frac{1}{2}(b-d)} \\ + \frac{C}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b) \sin \frac{1}{2}(c-d)} + \frac{D}{\sin \frac{1}{2}(d-a) \sin \frac{1}{2}(d-b) \sin \frac{1}{2}(d-c)} \\ A^{(4)} = \frac{A \cos \frac{1}{2}(a-e)}{\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \sin \frac{1}{2}(a-e)} \\ + \frac{B \cos \frac{1}{2}(b-e)}{\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c) \sin \frac{1}{2}(b-d) \sin \frac{1}{2}(b-e)} \\ + \frac{C \cos \frac{1}{2}(c-e)}{\sin \frac{1}{2}(c-a) \sin \frac{1}{2}(c-b) \sin \frac{1}{2}(c-d) \sin \frac{1}{2}(c-e)} \\ + \frac{D \cos \frac{1}{2}(d-e)}{\sin \frac{1}{2}(d-a) \sin \frac{1}{2}(d-b) \sin \frac{1}{2}(d-c) \sin \frac{1}{2}(d-e)} \\ + \frac{E}{\sin \frac{1}{2}(e-a) \sin \frac{1}{2}(e-b) \sin \frac{1}{2}(e-c) \sin \frac{1}{2}(e-d)}$$

etc. fiet

$$T = A + A' \sin \frac{1}{2}(t-a) \cos \frac{1}{2}(t-b) \\ + A'' \sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \\ + A''' \sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \cos \frac{1}{2}(t-d) \\ + A^{(4)} \sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \\ + A^{(5)} \sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \sin \frac{1}{2}(t-e) \cos \frac{1}{2}(t-f) \\ + A^{(6)} \sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \sin \frac{1}{2}(t-e) \sin \frac{1}{2}(t-f) \\ + \text{etc.}$$

quae progressio ad totidem terminos continuanda est, quot valores functionis X dati sunt.

Coëfficientes $A', A'', A''', A^{(4)}$ etc. etiam per algorithmum sequentem computari possunt. Designetur per $B', B'', B''', B^{(4)}$ etc. id quod illi resp. fiunt, si

resp. mutantur in

$$a, A, b, B, c, C, d, D \text{ etc.}$$

$$b, B, c, C, d, D, e, E \text{ etc.}$$

Porro transcant

$$A', A'', A''', A^{(4)} \text{ etc. in } C', C'', C''', C^{(4)} \text{ etc. vel in } D', D'', D''', D^{(4)} \text{ etc. etc.}$$

si

resp. mutantur in
vel in
Tunc erit

$$\begin{aligned} A' &= \frac{A-B}{\sin \frac{1}{2}(a-b)}, & B' &= \frac{B-C}{\sin \frac{1}{2}(b-c)}, & C' &= \frac{C-D}{\sin \frac{1}{2}(c-d)} \text{ etc.} \\ A'' &= \frac{A' \cos \frac{1}{2}(a-c) - B'}{\sin \frac{1}{2}(a-c)}, & B'' &= \frac{B' \cos \frac{1}{2}(b-d) - C'}{\sin \frac{1}{2}(b-d)} \text{ etc.} \\ A''' &= \frac{A'' \cos \frac{1}{2}(a-c) + A' \sin \frac{1}{2}(a-c) - B''}{\sin \frac{1}{2}(a-d)}, & B''' &= \frac{B'' \cos \frac{1}{2}(b-d) + B' \sin \frac{1}{2}(b-d) - C''}{\sin \frac{1}{2}(b-e)} \text{ etc.} \\ A^{(4)} &= \frac{A''' \cos \frac{1}{2}(a-c) - B'''}{\sin \frac{1}{2}(a-c)}, & B^{(4)} &= \frac{B''' \cos \frac{1}{2}(b-f) - C'''}{\sin \frac{1}{2}(b-f)} \text{ etc.} \\ A^{(5)} &= \frac{A^{(4)} \cos \frac{1}{2}(a-c) + A''' \sin \frac{1}{2}(a-c) - B^{(4)}}{\sin \frac{1}{2}(a-f)}, & B^{(5)} &= \frac{B^{(4)} \cos \frac{1}{2}(b-f) + B''' \sin \frac{1}{2}(b-f) - C'''}{\sin \frac{1}{2}(b-g)} \text{ etc.} \\ A^{(6)} &= \frac{A^{(5)} \cos \frac{1}{2}(a-g) - B^{(5)}}{\sin \frac{1}{2}(a-g)}, & B^{(6)} &= \frac{B^{(5)} \cos \frac{1}{2}(b-h) - C^{(5)}}{\sin \frac{1}{2}(a-h)} \text{ etc.} \end{aligned}$$

etc.
Lex formationis hic satis obvia est, si modo observetur, numeratores in valoribus pro $A'', A''', A^{(4)}, A^{(5)}$ etc. (valor pro A' ab hac regula excipiendus est) alternis vicibus e duabus vel tribus partibus constare.

13.

THEOREMA. Si X est functio arcus x formae (F)

$$\alpha + \alpha' \cos x + \alpha'' \cos 2x + \alpha''' \cos 3x + \text{etc.} \\ + \beta' \sin x + \beta'' \sin 2x + \beta''' \sin 3x + \text{etc.}$$

vel huius formae (G)

$$\gamma \cos \frac{1}{2}x + \gamma' \cos \frac{3}{2}x + \gamma'' \cos \frac{5}{2}x + \text{etc.} \\ + \delta \sin \frac{1}{2}x + \delta' \sin \frac{3}{2}x + \delta'' \sin \frac{5}{2}x + \text{etc.}$$

positoque $x = a$, valor functionis X fit = 0: erit X divisibilis per $\sin \frac{1}{2}(x-a)$, quotiensque in casu priore formae G , in posteriore formae F .

Demonstratio. Casus prior. Si in functione X pro quavis parte $\cos nx$ substituitur $\cos nx - \cos na$, pro quavis parte $\sin nx$ autem $\sin nx - \sin na$,

denique pro α , $\alpha - \alpha$ sive 0, manifestum est, partes determinatas hoc modo adiunctas, mutuo se tollere adeoque functionem X hoc modo non variari. Singulae vero partes ipsius X nunc per $\sin \frac{1}{2}(x-a)$ divisibiles erunt, puta

$$\begin{aligned} \frac{\cos nx - \cos na}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} &= -2 \sin \left((n - \frac{1}{2})x + \frac{1}{2}a \right) \\ &\quad - 2 \sin \left((n - \frac{3}{2})x + \frac{3}{2}a \right) \\ &\quad - 2 \sin \left((n - \frac{5}{2})x + \frac{5}{2}a \right) \\ &\quad - \text{etc.} \\ &\quad - 2 \sin \left((\frac{1}{2}x + (n - \frac{1}{2})a \right) \\ \frac{\sin nx - \sin na}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} &= +2 \cos \left((n - \frac{1}{2})x + \frac{1}{2}a \right) \\ &\quad + 2 \cos \left((n - \frac{3}{2})x + \frac{3}{2}a \right) \\ &\quad + 2 \cos \left((n - \frac{5}{2})x + \frac{5}{2}a \right) \\ &\quad + \text{etc.} \\ &\quad + 2 \cos \left(\frac{1}{2}x + (n - \frac{1}{2})a \right) \end{aligned}$$

Uterque coefficientis manifesto ad formam G reduci potest, quamobrem etiam tota X per $\sin \frac{1}{2}(x-a)$ divisibilis, quotiensque ad formam G reducibilis est. Q. E. D.

Casus posterior. Si in functione X pro quavis parte $\cos nx$ (designante iam n non ut ante integrum, sed integri imparis semissem) substituitur $\cos nx - \cos \frac{1}{2}(x-a) \cos na$, pro quavis parte $\sin nx$ autem $\sin nx - \cos \frac{1}{2}(x-a) \sin na$, manifestum est, partes, quae hoc modo functioni X accedunt, mutuo se tollere, adeoque X non variari. Singulae autem partes ipsius X nunc per $\sin \frac{1}{2}(x-a)$ divisibiles erunt, puta

$$\begin{aligned} \frac{\cos nx - \cos \frac{1}{2}(x-a) \cos na}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} &= -2 \sin \left((n - \frac{1}{2})x + \frac{1}{2}a \right) \\ &\quad - 2 \sin \left((n - \frac{3}{2})x + \frac{3}{2}a \right) \\ &\quad - 2 \sin \left((n - \frac{5}{2})x + \frac{5}{2}a \right) \\ &\quad - \text{etc.} \\ &\quad - 2 \sin \left((x + (n - 1)a \right) \\ &\quad - \sin na \\ \frac{\sin nx - \cos \frac{1}{2}(x-a) \sin na}{\sin \frac{1}{2}(x-a)} &= +2 \cos \left((n - \frac{1}{2})x + \frac{1}{2}a \right) \\ &\quad + 2 \cos \left((n - \frac{3}{2})x + \frac{3}{2}a \right) \\ &\quad + 2 \cos \left((n - \frac{5}{2})x + \frac{5}{2}a \right) \\ &\quad + \text{etc.} \\ &\quad + 2 \cos \left((x + (n - 1)a \right) \\ &\quad + \cos na \end{aligned}$$

ut per multiplicationem facile confirmatur. Uterque quotiens est formae F . Quamobrem functio tota X per $\sin \frac{1}{2}(x-a)$ divisibilis, quotiensque ad formam F reducibilis erit. Q. E. D.

14.

THEOREMA. Si functio X formae F vel G pro pluribus valoribus diversis*) ipsius x , puta a, b, c, d etc. fit $= 0$, per productum

$$\sin \frac{1}{2}(x-a) \sin \frac{1}{2}(x-b) \sin \frac{1}{2}(x-c) \sin \frac{1}{2}(x-d) \dots$$

divisibilis, quotiensque vel eiusdem formae erit ut X vel diversae, prout multitudo valorum $a, b, c, d \dots$ par est vel impar.

Demonstr. Ponatur $X = X' \sin \frac{1}{2}(x-a)$, sitque M valor ipsius X' pro $x = b$. Hinc $M \sin \frac{1}{2}(b-a)$ erit valor ipsius X pro $x = b$, qui quum esse debeat $= 0$, necessario erit $M = 0$. Quare X' divisibilis erit per $\sin \frac{1}{2}(x-b)$ et simili ratione quotiens hinc oriundus per $\sin \frac{1}{2}(x-c)$, et sic porro. Quare X divisibilis erit per productum

$$\sin \frac{1}{2}(x-a) \sin \frac{1}{2}(x-b) \sin \frac{1}{2}(x-c) \sin \frac{1}{2}(x-d) \dots \text{ Q. E. D.}$$

Altera theorematism pars tam obvia est, ut demonstratione opus non sit.

Ceterum aequè obviū est theorema inversum, si X per productum

$$\sin \frac{1}{2}(x-a) \sin \frac{1}{2}(x-b) \sin \frac{1}{2}(x-c) \sin \frac{1}{2}(x-d) \dots$$

divisibilis sit, ipsius valorem fieri $= 0$, si ipsi x aliquis valorum a, b, c, d etc. tribuatur.

15.

Ex theoremate praec. sequitur, si functionis X , formae F , valores pro $x = a, b, c, d$ etc. resp. sint A, B, C, D etc., quamvis aliam similem functionem arcus x , quae iisdem valoribus satisfiat, sub formula $X + PY$ contentam esse debere, ubi per P designamus productum

$$\sin \frac{1}{2}(x-a) \sin \frac{1}{2}(x-b) \sin \frac{1}{2}(x-c) \sin \frac{1}{2}(x-d) \text{ etc.}$$

per Y autem functionem indefinitam arcus x , quae sit vel formae F vel formae

*) Adiecta eadem restrictione, quam in art. 10 exhibuimus.

G , prout multitudo valorum a, b, c, d etc., quam per μ designabimus, par est vel impar. Iam observamus:

I. In artt. 10, 11, 12 eruere docuimus functionem X ordinis m^{ti} (i.e. ultra $\cos mx$ et $\sin mx$ non progredientem), quae μ valoribus propositis A, B, C, D etc. satisfiat, ita ut m sit $= \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}$, vel $\frac{1}{2}\mu$, prout μ impar est vel par. Productum P manifesto est ordinis $\frac{1}{2}\mu^{\text{ti}}$. Quando itaque μ impar est, adeoque Y vel ordinis $\frac{1}{2}^{\text{ti}}$ vel altioris, erit PY ordinis ad minimum $\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}^{\text{ti}}$ adeoque ordinis altioris quam X , unde colligitur, functiones alias quam X , quae iisdem valoribus propositis satisfiant, non dari, nisi ordinis altioris. Quando vero μ est par, PY tunc tantummodo fit ordinis $\frac{1}{2}\mu^{\text{ti}}$, si pro Y accipitur quantitas definita; quare in hoc casu infinite multae quidem functiones similis formae et ordinis ut X dantur, quae iisdem valoribus satisfiunt, omnes autem sub forma $X + hP$ comprehensae erunt, designante h quantitatem definitam. Eadem conclusiones ex methodo, per quam in artt. 10, 11 functionem X derivavimus, sponte sequuntur.

II. Vice versa autem, si quae functio X' aliunde innotuisset, quae omnibus quidem valoribus propositis A, B, C, D etc. satisfiat, sed ad altiore quam opus est ordinem ascendit, functionem Y ita determinare licebit, ut $X' + PY$ ad ordinem $\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}^{\text{tum}}$ vel $\frac{1}{2}\mu^{\text{tum}}$ (prout μ impar est vel par) deprimatur. Sint termini summi in X' , $K \cos nx + L \sin nx$; in P , $k \cos \frac{1}{2}\mu x + l \sin \frac{1}{2}\mu x$, accipianturque pro terminis summis in Y hi

$$\rho = -\frac{2(Kk + Ll)}{kk + ll} \cos(n - \frac{1}{2}\mu)x + \frac{2(Kl - Lk)}{kk + ll} \sin(n - \frac{1}{2}\mu)x$$

Hinc calculo facto inveniatur, coefficientes ipsorum $\cos nx$ et $\sin nx$ in $X' + PY$ fieri $= 0$, siquidem fuerit $n > \frac{1}{2}\mu$; similique modo ex terminis summis functionis evolutae $X' + P\rho$ (qui erunt ordinis $n - 1^{\text{ti}}$) definientur termini proxime inferiores in Y (ordinis $n - \frac{1}{2}\mu - 1^{\text{ti}}$). Haec operatio eousque repetenda erit, donec $X' + PY$ depressa sit ad ordinem non altiore quam $\frac{1}{2}\mu$, adeoque ad ordinem $\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}^{\text{tum}}$, quando μ impar est, ad ordinem $\frac{1}{2}\mu^{\text{tum}}$, quando μ par est. Ulterius hanc depressionem non patere, nullo negotio perspicitur.

III. In casu itaque priore (quando μ impar est) hoc modo necessario ad eandem functionem X perveniemus, quam per methodum supra traditam e valoribus datis A, B, C, D etc. eruissemus. In casu posteriore autem methodus modo exposita suppeditat functionem, quae quidem eiusdem ordinis erit, cuius est functio, per methodum art. 12, sive per methodum art. 11, si terminus ultimus

$= 0$ ponitur, oriunda, attamen ab hac diversa esse potest. Sit functio illa X'' , haec X''' ; adeoque $X''' = X'' + hP$, designante h quantitatem definitam. Ponamus terminos summos in X'' esse $K' \cos \frac{1}{2} \mu x + L' \sin \frac{1}{2} \mu x$; in X''' autem $K'' \cos \frac{1}{2} \mu x + L'' \sin \frac{1}{2} \mu x$, ita ut sit $K'' = K' + hK$, $L'' = L' + hL$. Iam non difficile est, ex art. 11 vel ex art. 12 demonstrare, si aggregatum $a + b + c + d + \text{etc.}$ designetur per s , esse $K'' \cos \frac{1}{2} s + L'' \sin \frac{1}{2} s = 0$, unde deducitur

$$\begin{aligned} h &= -\frac{K' \cos \frac{1}{2} s + L' \sin \frac{1}{2} s}{K \cos \frac{1}{2} s + L \sin \frac{1}{2} s} \\ K'' &= \frac{K' l - L' k}{K \cos \frac{1}{2} s + L \sin \frac{1}{2} s} \sin \frac{1}{2} s \\ L'' &= -\frac{K' l - L' k}{K \cos \frac{1}{2} s + L \sin \frac{1}{2} s} \cos \frac{1}{2} s \end{aligned}$$

Haud difficiliter demonstratur, esse

$$k = \pm \frac{\cos \frac{1}{2} s}{2^{\mu-1}}, \quad l = \pm \frac{\sin \frac{1}{2} s}{2^{\mu-1}}$$

ubi signum superius valet, quando $\frac{1}{2} \mu$ est par, inferius, quando est impar. Quare in valoribus modo traditis pro K'' et L'' denominator fit $\pm \frac{1}{2^{\mu-1}}$ adeoque

$$\begin{aligned} K'' &= (K' \sin \frac{1}{2} s - L' \cos \frac{1}{2} s) \sin \frac{1}{2} s \\ L'' &= -(K' \sin \frac{1}{2} s - L' \cos \frac{1}{2} s) \cos \frac{1}{2} s \end{aligned}$$

16.

Hactenus tales functiones consideravimus, in quibus tum cosinus tum sinus adsunt: saepissime vero aut hi aut illi absunt, quae functionum genera seorsim tractare conveniet. Utrumque quidem casum ad casum generalem hucusque consideratum reducere liceret; attamen etiam magis e re esse videtur, hanc disquisitionem ad problema art. 3 reducere.

Primo, si constat, omnes coefficientes $\delta', \delta'', \delta'''$ etc. in functione X (art. 10) esse $= 0$, multitudo incognitarum ad $m+1$ diminuitur, et proin pro tot valoribus diversis ipsius x valores respondentes functionis X novisse sufficit. Quoniam vero in hoc casu valor functionis X non mutatur, si pro x substituitur $-x$, manifestum est, non solum tales valores ipsius x , quorum differentia peripheriae vel multiplo peripheriae aequalis est, sed tales quoque, quorum summa est 0 vel peripheriae vel multiplo peripheriae aequalis, pro diversis non esse habendos. Aut generaliter, ut duos valores ipsius x pro diversis habere liceat, cosinus inaequa-

les habere debent. Quibus ita intellectis sint $m+1$ valores dati functionis X hi A, B, C, D etc., valoribus ipsius x his a, b, c, d etc. respondentes, quaeriturque expressio generalis pro valore T , quem functio pro $x = 0$ adipiscitur. Quum functionem X in casu nostro etiam sub formam

$$\gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' (\cos x)^2 + \gamma''' (\cos x)^3 + \text{etc.} + \gamma^m (\cos x)^m$$

reducere liceat, habebimus per art. 3

$$\begin{aligned} T &= \frac{(\cos t - \cos b)(\cos t - \cos c)(\cos t - \cos d) \dots}{(\cos a - \cos b)(\cos a - \cos c)(\cos a - \cos d) \dots} A \\ &+ \frac{(\cos t - \cos a)(\cos t - \cos c)(\cos t - \cos d) \dots}{(\cos b - \cos a)(\cos b - \cos c)(\cos b - \cos d) \dots} B \\ &+ \frac{(\cos t - \cos a)(\cos t - \cos b)(\cos t - \cos d) \dots}{(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b)(\cos c - \cos d) \dots} C \\ &+ \frac{(\cos t - \cos a)(\cos t - \cos b)(\cos t - \cos c) \dots}{(\cos d - \cos a)(\cos d - \cos b)(\cos d - \cos c) \dots} D \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Secundo, si omnes coefficientes $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ etc. evanescent, multitudo incognitarum erit m , sufficitque adeo, valores functionis X pro totidem valoribus diversis ipsius x novisse. Quum valor functionis X pro $x = -t$ ex valore pro $x = +t$ sponte sequatur (per solam mutationem signi in oppositum), etiam hic tales valores pro diversis haberi nequeunt, unde facile colligitur, hic perinde ut in casu praec. eos tantummodo valores ipsius x pro diversis agnosci, quorum cosinus sunt inaequales. Praeterea quum valor functionis X pro $x = 0, 180^\circ, 360^\circ$ etc. et generaliter pro tali valore ipsius x , cuius sinus est $= 0$, sponte fiat $= 0$, adeoque iam ex natura problematis datus sit, talem valorem inter m datos non numerari supponimus. Iam quum constet, esse

$$\frac{\sin nx}{\sin x} = 2 \cos(n-1)x + 2 \cos(n-3)x + 2 \cos(n-5)x + \dots + 2 \cos x$$

pro valore pari ipsius n , atque

$$= 2 \cos(n-1)x + 2 \cos(n-3)x + 2 \cos(n-5)x + \dots + 2 \cos 2x + 1$$

pro valore impari ipsius n , facile concluditur $\frac{X}{\sin x}$ ad formam

$$\delta + \delta' \cos x + \delta'' (\cos x)^2 + \delta''' (\cos x)^3 + \text{etc.} + \delta^{m-1} (\cos x)^{m-1}$$

reduci posse, adeoque, quum valores functionis $\frac{X}{\sin x}$ pro $x = a, b, c, d \dots$ fiant
 $= \frac{A}{\sin a} \cdot \frac{B}{\sin b} \cdot \frac{C}{\sin c} \cdot \frac{D}{\sin d} \dots$, haberi per eundem art. 3

$$T = \frac{\sin t (\cos t - \cos b) (\cos t - \cos c) (\cos t - \cos d) \dots}{\sin a (\cos a - \cos b) (\cos a - \cos c) (\cos a - \cos d) \dots} A \\
+ \frac{\sin t (\cos t - \cos a) (\cos t - \cos c) (\cos t - \cos d) \dots}{\sin b (\cos b - \cos a) (\cos b - \cos c) (\cos b - \cos d) \dots} B \\
+ \frac{\sin t (\cos t - \cos a) (\cos t - \cos b) (\cos t - \cos d) \dots}{\sin c (\cos c - \cos a) (\cos c - \cos b) (\cos c - \cos d) \dots} C \\
+ \frac{\sin t (\cos t - \cos a) (\cos t - \cos b) (\cos t - \cos c) \dots}{\sin d (\cos d - \cos a) (\cos d - \cos b) (\cos d - \cos c) \dots} D \\
+ \text{etc.}$$

Ceterum in utroque casu formula pro T cum functione X identica erit, mutando t in x , quoniam illa indefinite pro valore quocunque ipsius t valet.

17.

E principiis algebraicis facile conclusio petitur, si, pro casu priore art. praec. productum

$$(\cos t - \cos a) (\cos t - \cos b) (\cos t - \cos c) (\cos t - \cos d) \text{ etc.}$$

pro posteriore autem productum

$$\sin t (\cos t - \cos a) (\cos t - \cos b) (\cos t - \cos c) (\cos t - \cos d) \text{ etc.}$$

per P designetur, quamvis functionem ipsi X similem, quae iisdem valoribus A, B, C, D etc. pro $x = a, b, c, d$ etc. satisfacit, necessario sub forma $X + PY$ contentam esse debere, ubi Y est functio indefinita arcus x formae

$$\gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' \cos 2x + \gamma''' \cos 3x + \text{etc.}$$

Theorema inversum, scilicet quamlibet functionem sub forma $X + PY$ contentam illis valoribus satisfacere, sponte patet. Porro manifestum est, productum P esse ordinis $m+1^{\text{st}}$, adeoque proxime altioris quam X ; quamobrem alia functio ipsi X similis quae iisdem valoribus satisfaciatur non datur, nisi ex ordine altiore quam X .

Vice versa, si quae functio X' , ipsi X similis quidem, sed altioris ordinis, aliunde innotuit, quae valoribus datis A, B, C, D etc. satisfacit, functionem Y , eius quam tradidimus formae, ita determinare licet, ut $X' + PY$ ad ordinem

m^{um} deprimatur, unde necessario functio X ipsa, quae e valoribus A, B, C, D etc. per methodum art. praec. eruitur, prodire debebit. Quum methodus terminum summum functionis Y atque inde deinceps inferiores evolvendi, tamquam casus specialis e methodo in art. 15, II tradita peti possit, non opus est, huic rei hic diutius inhaerere.

18.

Omnes disquisitiones praecedentes superstructae sunt conditioni, X esse progressionem cum cosinu sinuque arcus mx abruptam. Quae conditio si locum non habet, tot valores ipsius X , quot cognitos esse hactenus assumimus, manifesto non sufficiunt ad determinationem completam, expressioque pro T in variis quos consideravimus casibus tradita, correctione opus habebit, a coefficientibus sequentibus in X pendente et per summationes artt. 1 et 2 facile assignabili. Quodsi autem series X , sive in infinitum excurrat sive usquam abruptatur, tantopere convergit, ut partes post $\cos mx$ et $\sin mx$ sequentes pro evanescentibus haberi possint, etiam illam correctionem negligere licebit, adeoque valorem T saltem proxime verum nacti erimus. Quomodocunque vero haec se habeant, T certo functionem verae similem simplicissimam exhibet, per quam omnibus valoribus propositis satisfieri potest.

19.

Imprimis frequens, maximaque adeo attentione dignus est casus iste, ubi valores arcus x , pro quibus valores functionis X dati sunt, progressionem arithmetica constituant, in qua terminorum differentia aequalis est coefficienti, ex divisione peripheriae integrae in totidem partes quot sunt termini orto, ita ut si progressio ultra terminum postremum continuaretur, termini primi peripheria integra aucti rursus deinceps prodituri essent. Postquam itaque disquisitionis generalis praecipua momenta in praecedentibus absolvimus, hunc casum, ubi termini dati quasi *periodum* completam constituunt, coronidis loco seorsim copiosius tractabimus. Antequam vero hanc disquisitionem ipsam aggrediamur, duo lemmata erunt praemittenda.

LEMMA PRIMUM. Si arcus a, b, c, d etc., quorum multitudo est μ , constituent progressionem arithmetica, in qua terminorum differentia $b-a = c-b = d-c$ etc. est $= \frac{2\pi\theta}{\mu}$, productum ex μ factoribus $P =$

$$\sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \text{ etc.}$$

fit = $\mp \frac{\sin \frac{1}{2}\mu(t-a)}{2^{\mu-1}}$, ubi signum superius vel inferius valet, prout μ par est vel impar.

Demonstr. Potest quidem hoc theorema facile ex alio ab ill. EULERO in *Introd. in Anal. Infin.* I, §. 240 tradito derivari; ne quid vero hic desiderari videatur, demonstrationem aliam paucis hic explicabimus.

I. Si productum P primo ponitur sub formam

$$\cos \frac{1}{2}(t-a-180^\circ) \cos \frac{1}{2}(t-b-180^\circ) \cos \frac{1}{2}(t-c-180^\circ) \cos \frac{1}{2}(t-d-180^\circ) \dots$$

atque tunc secundum algorithmum sinuum notum in aggregatum cosinuum evolvitur, facile perspicitur, inde prodire functionem vel formae F vel formae G (art. 13) ad ordinem $\frac{1}{2}\mu^{\text{tum}}$ ascendente, terminumque summum fieri

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^{\mu-1}} \cos \frac{1}{2}(\mu t - a - b - c - d - \text{etc.} - \mu \times 180^\circ) \\ &= \frac{1}{2^{\mu-1}} \cos \left(\frac{1}{2}\mu(t-a-360^\circ) + 90^\circ \right) \\ &= -\frac{1}{2^{\mu-1}} \sin \frac{1}{2}\mu(t-a-360^\circ) \\ &= -\frac{1}{2^{\mu-1}} \sin \frac{1}{2}\mu(t-a) \cos \mu \times 180^\circ \\ &= \mp \frac{1}{2^{\mu-1}} \sin \frac{1}{2}\mu(t-a) \end{aligned}$$

signo superiore pro valore pari ipsius μ valente, inferiore pro impari.

II. Quum $\sin \frac{1}{2}\mu(t-a)$ fiat = 0, si ipsi t aliquis valorum a, b, c, d etc. tribuitur, per theorema art. 14 erit $\sin \frac{1}{2}\mu(t-a)$ per productum P divisibilis; quotiens autem necessario erit quantitas definita = h , quoniam $\sin \frac{1}{2}\mu(t-a)$ et P eiusdem sunt ordinis. Manifesto autem (per I) ex aequatione $P = \frac{1}{h} \sin \frac{1}{2}\mu(t-a)$ sequitur esse $h = \mp 2^{\mu-1}$, adeoque $P = \mp \frac{\sin \frac{1}{2}\mu(t-a)}{2^{\mu-1}}$ Q. E. D.

LEMMA SECUNDUM. Si arcus $a, b, c, d, \dots$ eodem modo se habent, ut in lem-
mate primo, productum ex μ factoribus

$$(\cos t - \cos a)(\cos t - \cos b)(\cos t - \cos c)(\cos t - \cos d) \dots$$

$$\text{fit} = \frac{\cos \mu t - \cos \mu a}{2^{\mu-1}}$$

Demonstr. Quum fiat

$$\begin{aligned} \cos t - \cos a &= 2 \sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(-t-a) \\ \cos t - \cos b &= 2 \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(-t-b) \\ \cos t - \cos c &= 2 \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(-t-c) \\ \cos t - \cos d &= 2 \sin \frac{1}{2}(t-d) \sin \frac{1}{2}(-t-d) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

productum ex his factoribus fit, per lemma primum

$$\begin{aligned} &= 2^\mu \times \mp \frac{\sin \frac{1}{2}\mu(t-a)}{2^{\mu-1}} \times \mp \frac{\sin \frac{1}{2}\mu(-t-a)}{2^{\mu-1}} \\ &= \frac{\sin \frac{1}{2}\mu(t-a) \sin \frac{1}{2}\mu(-t-a)}{2^{\mu-2}} = \frac{\cos \mu t - \cos \mu a}{2^{\mu-1}} \quad \text{Q. E. D.} \end{aligned}$$

Quum habeatur

$$\sin \frac{1}{2}\mu(t-a) = -\sin \frac{1}{2}\mu(t-b) = \sin \frac{1}{2}\mu(t-c) = -\sin \frac{1}{2}\mu(t-d) \text{ etc.}$$

nec non $\cos \mu a = \cos \mu b = \cos \mu c = \cos \mu d$ etc.: manifestum est, productum in lem-
mate primo fieri etiam

$$= \pm \frac{\sin \frac{1}{2}\mu(t-b)}{2^{\mu-1}} = \mp \frac{\sin \frac{1}{2}\mu(t-c)}{2^{\mu-1}} = \pm \frac{\sin \frac{1}{2}\mu(t-d)}{2^{\mu-1}} \text{ etc.}$$

nec non productum in lem-
mate secundo fieri etiam

$$= \frac{\cos \mu t - \cos \mu b}{2^{\mu-1}} = \frac{\cos \mu t - \cos \mu c}{2^{\mu-1}} = \frac{\cos \mu t - \cos \mu d}{2^{\mu-1}} \text{ etc.}$$

20.

Consideremus primo casum generalem art. 10, ubi X est formae

$$\alpha + \alpha' \cos x + \alpha'' \cos 2x + \alpha''' \cos 3x + \dots + \alpha^{(m)} \cos mx \\ + \beta' \sin x + \beta'' \sin 2x + \beta''' \sin 3x + \dots + \beta^{(m)} \sin mx$$

atque $\mu = 2m+1$. Hic igitur erit

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots &= \frac{\sin \frac{1}{2}\mu(t-a)}{2^{\mu-1} \sin \frac{1}{2}(t-a)} \\ &= \frac{1}{2^{\mu-1}} (1 + 2 \cos(t-a) + 2 \cos 2(t-a) + 2 \cos 3(t-a) + \dots + 2 \cos m(t-a)) \end{aligned}$$

unde substituendo a pro t

$$\sin \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \sin \frac{1}{2}(a-d) \dots = \frac{\mu}{2^{\mu-1}}$$

Hinc in formula art. 10 pro T , fit coefficientis ipsius A

$$= \frac{1}{\mu} (1 + 2 \cos(t-a) + 2 \cos 2(t-a) + 2 \cos 3(t-a) + \dots + 2 \cos m(t-a))$$

Simili modo fit

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots &= -\frac{\sin \frac{1}{2} \mu(t-b)}{2^{\mu-1} \sin \frac{1}{2}(t-b)} \\ &= -\frac{1}{2^{\mu-1}} (1 + 2 \cos(t-b) + 2 \cos 2(t-b) + 2 \cos 3(t-b) + \dots + 2 \cos m(t-b)) \end{aligned}$$

atque

$$\sin \frac{1}{2}(b-a) \sin \frac{1}{2}(b-c) \sin \frac{1}{2}(b-d) \dots = -\frac{\mu}{2^{\mu-1}}$$

Hinc coefficientis ipsius B in formula pro T fit

$$= \frac{1}{\mu} (1 + 2 \cos(t-b) + 2 \cos 2(t-b) + 2 \cos 3(t-b) + \dots + 2 \cos m(t-b))$$

Prorsus similes erunt coefficientes ipsorum C, D etc., unde tandem concluditur, fieri

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\mu} (A+B+C+D+\dots) \\ &+ \frac{2}{\mu} (A \cos a + B \cos b + C \cos c + D \cos d + \dots) \cos t \\ &+ \frac{2}{\mu} (A \sin a + B \sin b + C \sin c + D \sin d + \dots) \sin t \\ &+ \frac{2}{\mu} (A \cos 2a + B \cos 2b + C \cos 2c + D \cos 2d + \dots) \cos 2t \\ &+ \frac{2}{\mu} (A \sin 2a + B \sin 2b + C \sin 2c + D \sin 2d + \dots) \sin 2t \\ &+ \text{etc.} \\ &+ \frac{2}{\mu} (A \cos ma + B \cos mb + C \cos mc + D \cos md + \dots) \cos mt \\ &+ \frac{2}{\mu} (A \sin ma + B \sin mb + C \sin mc + D \sin md + \dots) \sin mt \end{aligned}$$

Quum haec formula cum

$$\alpha + \alpha' \cos t + \alpha'' \sin t + \alpha''' \cos 2t + \alpha^{(iv)} \sin 2t + \text{etc.} + \alpha^{(m)} \cos mt + \alpha^{(m+1)} \sin mt$$

identica esse debeat, valores coefficientium $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ etc. hinc protinus habentur.

21.

Si progressio pro X cum terminis $\cos mx$ et $\sin mx$ non abruptitur, sive in infinitum excurrat, sive finita sit, valor pro T in art. praec. inventus incom-

pletus erit, itemque valores singulorum coefficientium $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ etc. ibi traditi correctione opus habebunt. Haec autem commodius per methodum sequentem quam per summationem art. 2 determinatur. Ante omnia observamus, esse

$$\begin{aligned} \cos na + \cos nb + \cos nc + \cos nd + \dots &= \mu \cos na \\ \sin na + \sin nb + \sin nc + \sin nd + \dots &= \mu \sin na \end{aligned}$$

quoties n est integer per μ divisibilis; contra

$$\begin{aligned} \cos na + \cos nb + \cos nc + \cos nd + \dots &= 0 \\ \sin na + \sin nb + \sin nc + \sin nd + \dots &= 0 \end{aligned}$$

quoties n est integer per μ non divisibilis. Pro casu priore res per se clara est; pro posteriore sit summa prima $\neq P$, secunda $= Q$, unde facile deducitur

$$\begin{aligned} P \cos n(b-a) - Q \sin n(b-a) &= P \\ P \sin n(b-a) + Q \cos n(b-a) &= Q \end{aligned}$$

Multiplicando aequationem primam per $\cos n(b-a) - 1$, secundam per $\sin n(b-a)$, fit addendo delendoque quae mutuo se destruant

$$2P(1 - \cos n(b-a)) = 0$$

Similiter multiplicando aequationem primam per $\sin n(b-a)$, secundam per $1 - \cos n(b-a)$, provenit addendo

$$2Q(1 - \cos n(b-a)) = 0$$

Iam pro casu quidem priore (ubi n per μ divisibilis est, et proin $\cos n(b-a) = 1$) hae aequationes identicae sunt, pro posteriore autem (ubi n per μ non est divisibilis, adeoque $\cos n(b-a) = \cos \frac{n}{\mu} \times 360^\circ$ non potest esse $= 1$) consistere nequeunt, nisi fuerit $P = 0$ et $Q = 0$.

Iam ponamus, post terminos $\alpha^m \cos mx + \alpha^{m+1} \sin mx$ in expressione functionis X sequi

$$\begin{aligned} &\alpha^{m+1} \cos(m+1)x + \alpha^{m+2} \cos(m+2)x + \text{etc.} \\ &+ \alpha^{m+1} \sin(m+1)x + \alpha^{m+2} \sin(m+2)x + \text{etc.} \end{aligned}$$

valorem vero (incompletum), in suppositione, has partes non adesse, pro T in art. praec. inventum, esse

$$\gamma + \gamma' \cos t + \gamma'' \cos 2t + \gamma''' \cos 3t + \dots + \gamma^m \cos mt \\ + \delta' \sin t + \delta'' \sin 2t + \delta''' \sin 3t + \dots + \delta^m \sin mt$$

ita ut habeatur $\gamma = \frac{1}{\mu} (A + B + C + D + \text{etc.})$ etc. Substituatur pro A, B, C, D etc. valores sui, puta

$$A = \alpha + \alpha' \cos a + \alpha'' \cos 2a + \dots + \alpha^m \cos ma + \alpha^{m+1} \cos (m+1)a \dots \\ + \delta' \sin a + \delta'' \sin 2a + \dots + \delta^m \sin ma + \delta^{m+1} \sin (m+1)a \dots \\ \text{etc.}$$

fietque (per summationem modo traditam)

$$\gamma = \alpha + \alpha' \cos \mu a + \alpha^{2\mu} \cos 2\mu a + \alpha^{3\mu} \cos 3\mu a + \text{etc.} \\ + \delta' \sin \mu a + \delta^{2\mu} \sin 2\mu a + \delta^{3\mu} \sin 3\mu a + \text{etc.} \\ \gamma' = \alpha' + (\alpha^{\mu-1} + \alpha^{\mu+1}) \cos \mu a + (\alpha^{2\mu-1} + \alpha^{2\mu+1}) \cos 2\mu a + \text{etc.} \\ + (\delta^{\mu-1} + \delta^{\mu+1}) \sin \mu a + (\delta^{2\mu-1} + \delta^{2\mu+1}) \sin 2\mu a + \text{etc.} \\ \delta' = \delta' - (\delta^{\mu-1} - \delta^{\mu+1}) \cos \mu a - (\delta^{2\mu-1} - \delta^{2\mu+1}) \cos 2\mu a - \text{etc.} \\ - (\alpha^{\mu-1} - \alpha^{\mu+1}) \sin \mu a - (\alpha^{2\mu-1} - \alpha^{2\mu+1}) \sin 2\mu a - \text{etc.} \\ \gamma'' = \alpha'' + (\alpha^{\mu-2} + \alpha^{\mu+2}) \cos \mu a + (\alpha^{2\mu-2} + \alpha^{2\mu+2}) \cos 2\mu a + \text{etc.} \\ + (\delta^{\mu-2} + \delta^{\mu+2}) \sin \mu a + (\delta^{2\mu-2} + \delta^{2\mu+2}) \sin 2\mu a + \text{etc.} \\ \delta'' = \delta'' - (\delta^{\mu-2} - \delta^{\mu+2}) \cos \mu a - (\delta^{2\mu-2} - \delta^{2\mu+2}) \cos 2\mu a - \text{etc.} \\ - (\alpha^{\mu-2} - \alpha^{\mu+2}) \sin \mu a - (\alpha^{2\mu-2} - \alpha^{2\mu+2}) \sin 2\mu a - \text{etc.}$$

etc. usque ad

$$\gamma^m = \alpha^m + (\alpha^{\mu-m} + \alpha^{\mu+m}) \cos \mu a + (\alpha^{2\mu-m} + \alpha^{2\mu+m}) \cos 2\mu a + \text{etc.} \\ + (\delta^{\mu-m} + \delta^{\mu+m}) \sin \mu a + (\delta^{2\mu-m} + \delta^{2\mu+m}) \sin 2\mu a + \text{etc.} \\ \delta^m = \delta^m - (\delta^{\mu-m} - \delta^{\mu+m}) \cos \mu a - (\delta^{2\mu-m} - \delta^{2\mu+m}) \cos 2\mu a - \text{etc.} \\ - (\alpha^{\mu-m} - \alpha^{\mu+m}) \sin \mu a - (\alpha^{2\mu-m} - \alpha^{2\mu+m}) \sin 2\mu a - \text{etc.}$$

Si itaque progressio tantopere convergit, ut α^{m+1} , δ^{m+1} , α^{m+2} , δ^{m+2} etc. negligi possint, valores γ , γ' , δ' etc. pro veris α , α' , δ' etc. accipere licebit.

22.

Transimus ad casum alterum art. 11, ubi progressio X quidem eadem manet ut in art. 20, multitudo valorum datorum autem unitate minor est, quam multitudo coefficientium incognitorum, puta $= 2m = \mu$. Hic habetur

$$\cos \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots \\ = - \frac{\sin \frac{1}{2}\mu(t-a) \cos \frac{1}{2}(t-a)}{2^{\mu-1} \sin \frac{1}{2}(t-a)} \\ = - \frac{\cos \frac{1}{2}(t-a)}{2^{\mu-1}} (\cos \frac{1}{2}(t-a) + \cos \frac{3}{2}(t-a) + \cos \frac{5}{2}(t-a) + \dots + \cos \frac{\mu-1}{2}(t-a)) \\ = - \frac{1}{2^{\mu-1}} (1 + 2 \cos(t-a) + 2 \cos 2(t-a) + 2 \cos 3(t-a) + \dots + 2 \cos(m-1)(t-a) \\ + \cos m(t-a))$$

Quare in formula art. 11 pro T coefficienti ipsius A fit

$$= \frac{1}{\mu} (1 + 2 \cos(t-a) + 2 \cos 2(t-a) + 2 \cos 3(t-a) + \dots \\ + 2 \cos(m-1)(t-a) + \cos m(t-a))$$

Et prorsus similes expressiones (mutato tantummodo a in b, c, d etc.) pro coefficientibus ipsorum B, C, D etc. inveniuntur. Denique pars ultima ipsius T

$$2^{2m-1} i^{2m} \sin \frac{1}{2}(t-a) \sin \frac{1}{2}(t-b) \sin \frac{1}{2}(t-c) \sin \frac{1}{2}(t-d) \dots \times \{\alpha^m \cos \frac{1}{2}s + \delta^m \sin \frac{1}{2}s\} \\ \text{fit} \\ = - i^{2m} \sin m(t-a) \{\alpha^m \cos(ma + (2m-1)90^\circ) + \delta^m \sin(ma + (2m-1)90^\circ)\} \\ = - \sin m(t-a) (\alpha^m \sin ma - \delta^m \cos ma)$$

Hinc tandem colligitur

$$T = \frac{1}{\mu} (A + B + C + D + \text{etc.}) \\ + \frac{2}{\mu} (A \cos a + B \cos b + C \cos c + D \cos d + \text{etc.}) \cos t \\ + \frac{2}{\mu} (A \sin a + B \sin b + C \sin c + D \sin d + \text{etc.}) \sin t \\ + \frac{2}{\mu} (A \cos 2a + B \cos 2b + C \cos 2c + D \cos 2d + \text{etc.}) \cos 2t \\ + \frac{2}{\mu} (A \sin 2a + B \sin 2b + C \sin 2c + D \sin 2d + \text{etc.}) \sin 2t \\ + \text{etc.} \\ + \frac{1}{\mu} (A \cos ma + B \cos mb + C \cos mc + D \cos md + \text{etc.}) \cos mt \\ + \frac{1}{\mu} (A \sin ma + B \sin mb + C \sin mc + D \sin md + \text{etc.}) \sin mt \\ + (\alpha^m \sin ma - \delta^m \cos ma) (\sin ma \cos mt - \cos ma \sin mt)$$

Quae expressio, si, rescissa parte ultima, per

$$\gamma + \gamma' \cos t + \gamma'' \cos 2t + \text{etc.} + \gamma^m \cos mt \\ + \delta' \sin t + \delta'' \sin 2t + \text{etc.} + \delta^m \sin mt$$

exhibetur, omnes coefficientes $\gamma, \gamma', \delta, \delta', \gamma'', \delta''$ etc. praecise eosdem valores habere patet, ut in art. praec., ubi erat $\mu = 2m+1$, exceptis duobus ultimis γ^m, δ^m , qui illic duplo erant maiores. Porro liquet, omnes coefficientes $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots \alpha^{m-1}, \delta', \delta'' \dots \delta^{m-1}$ illis $\gamma, \gamma', \gamma'' \dots \gamma^{m-1}, \delta', \delta'' \dots \delta^{m-1}$ resp. aequales adeoque cognitos fieri, inter ultimos α^m, δ^m autem haberi aequationes

$$\begin{aligned}\alpha^m &= \gamma^m + (\alpha^m \sin ma - \delta^m \cos ma) \sin ma \\ \delta^m &= \delta^m - (\alpha^m \sin ma - \delta^m \cos ma) \cos ma\end{aligned}$$

quae tamen (ut ex natura problematis praevidere licebat) non sufficiunt ad determinationem completam coefficientium α^m, δ^m . Scilicet quum fiat

$$\cos ma = -\cos mb = \cos mc = -\cos md \text{ etc.}$$

atque $\sin ma = -\sin mb = \sin mc = -\sin md \text{ etc.}$

$$\begin{aligned}\gamma^m &= \frac{\cos ma}{\mu} (A - B + C - D + \text{etc.}) \\ \delta^m &= \frac{\sin ma}{\mu} (A - B + C - D + \text{etc.})\end{aligned}$$

facile perspicitur, utramque aequationem contentam esse sub.unica

$$\alpha^m \cos ma + \delta^m \sin ma = \frac{1}{\mu} (A - B + C - D + \text{etc.})$$

Aliam itaque insuper relationem inter α^m et δ^m datam esse oportet, ut utrumque coefficientem penitus assignare liceat.

23.

Si progressio X cum $\cos mx$ et $\sin mx$ non abruptitur, valor ipsius T in art. praec. inventus incompletus erit, coefficientesque $\gamma, \gamma', \delta, \delta'$ etc. a veris α, α', δ' etc. diversi erunt. Et quidem facile perspicitur, si coefficientes terminorum sequentium in X per eosdem characteres denotentur, quibus in art. 21 usi sumus, pro $\gamma, \gamma', \delta, \delta'$ etc. usque ad $\gamma^{m-1}, \delta^{m-1}$ prorsus eosdem valores prodire, quos illic erimus; duos ultimos autem fieri

$$\begin{aligned}\gamma^m &= \frac{1}{2} \alpha^m + \frac{1}{2} (\alpha^m + \alpha^{2m}) \cos \mu a + \frac{1}{2} (\alpha^{2m} + \alpha^{4m}) \cos 2\mu a + \text{etc.} \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta^m + \delta^{3m}) \sin \mu a + \frac{1}{2} (\delta^{3m} + \delta^{5m}) \sin 2\mu a + \text{etc.} \\ \delta^m &= \frac{1}{2} \delta^m - \frac{1}{2} (\delta^m - \delta^{3m}) \cos \mu a - \frac{1}{2} (\delta^{3m} - \delta^{5m}) \cos 2\mu a - \text{etc.} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\alpha^m - \alpha^{2m}) \sin \mu a - \frac{1}{2} (\alpha^{2m} - \alpha^{4m}) \sin 2\mu a - \text{etc.}\end{aligned}$$

In hoc itaque casu coefficientes $\gamma, \gamma', \delta, \delta', \gamma'', \delta'' \dots \gamma^{m-1}, \delta^{m-1}$ pro veris $\alpha, \alpha', \delta', \alpha'', \delta'' \dots \alpha^{m-1}, \delta^{m-1}$ adoptare licet, quatenus sequentes $\alpha^{m+1}, \delta^{m+1}$ etc. neglegi possunt; ad ultimos vero γ^m, δ^m nisi ipsi pro negligendis haberi possunt, haec conclusio non est extendenda.

24.

Per disquisitionem inde ab art. 20 traditam eo pervenimus, ut propositis μ valoribus functionis X arcus indeterminati x , periodum completam formantibus, functionem $(X) =$

$$\begin{aligned}&\gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' \cos 2x + \dots + \gamma^m \cos mx \\ &+ \delta' \sin x + \delta'' \sin 2x + \dots + \delta^m \sin mx\end{aligned}$$

quae illis omnibus satisfiat, assignare possimus, ita, ut numerus m , ordinem huius functionis exprimens sit vel $= \frac{1}{2} \mu - \frac{1}{2}$ vel $= \frac{1}{2} \mu$, prout μ impar est vel par. Ex artt. 15, 19 concluditur, quamvis aliam similem functionem, quae iisdem valoribus satisfiat, sub forma $X' + Y \sin \frac{1}{2} \mu (x-a)$ contentam esse debere, ubi Y functionem indefinitam arcus x exhibet formae G vel F (art. 13), prout μ impar est vel par. In casu priore praeter X' functio alia similis non datur, iisdem valoribus satisfaciens, nisi ex ordine altiore, unde X' cum X identica erit, si constat X ordinem m^{tum} non egredi. In casu posteriore autem infinitae quidem aliae similes functiones ordinis m^{ti} iisdem valoribus satisfaciunt, omnes tamen in eo convenient, quod sub forma $X' + h \sin m(x-a)$ contenti erunt, designante h quantitatem definitam: quamobrem, si constat X ordinem m^{tum} non egredi, saltem X et X' aliter quam in coefficientibus ipsorum $\cos mx$ et $\sin mx$ non discrepabunt; in functione X' autem inter hos coefficientes aequatio $\gamma^m \sin ma - \delta^m \cos ma = 0$ locum habebit. Porro patet, si qua functio X'' similis formae ut X' , quae iisdem valoribus satisfiat, aliunde constet, iisdem satisfieri per functionem quameunque $X'' + Y \sin \frac{1}{2} \mu (x-a)$, atque Y ita determinari posse, ut haec functio ordinem m^{tum} non egrediatur. Ad hunc finem observamus, si qua pars ipsius Y exhibeatur per $K \cos (x+k)$, designante K coefficientem definitum, k arcum definitum, x numerum vel integrum vel fractionem $\frac{1}{2}$ affectum (prout μ par vel impar) — ad quam formam singulae partes reduci possunt, si cosinus et sinus eiusdem arcus contrahuntur — pars respondens producti $Y \sin \frac{1}{2} \mu (x-a)$ exhibebitur per

$$\frac{1}{2} K \sin \left((x + \frac{1}{2} \mu) x + k - \frac{1}{2} \mu a \right) - \frac{1}{2} K \sin \left((x - \frac{1}{2} \mu) x + k + \frac{1}{2} \mu a \right)$$

sive quod eodem redit per

$$L \sin (\lambda x + l) - L \sin ((\lambda - \mu) x + l + \mu a)$$

designante λ integrum. Quocirca in X'' pro quavis parte $L \sin (\lambda x + l)$ substituere licebit hanc $L \sin ((\lambda - \mu) x + l + \mu a)$ et simili ratione pro hac rursus $L \sin ((\lambda - 2\mu) x + l + 2\mu a)$ porroque $L \sin ((\lambda - 3\mu) x + l + 3\mu a)$ etc. Ut similis conclusio ad cosinus extendatur, sufficit observatio, cosinus pro sinibus prodire, si modo pro l scribatur $l + 90^\circ$. Hinc colligitur, si in X'' occurrat terminus $L \cos \lambda x$, designante λ integrum maiorem quam $\frac{1}{2} \mu$, qui proin sub formam $\lambda = \nu \mu \pm \lambda'$ poni potest, ita ut ν sit integer atque λ' non maior quam $\frac{1}{2} \mu$, pro isto termino substitui posse

$$L \cos (\pm \lambda' x + \nu \mu a) = L \cos \nu \mu a \cos \lambda' x \mp L \sin \nu \mu a \sin \lambda' x$$

et similiter pro termino tali $L \sin \lambda x$ substitui poterit

$$L \sin (\pm \lambda' x + \nu \mu a) = L \sin \nu \mu a \cos \lambda' x \pm L \cos \nu \mu a \sin \lambda' x$$

Hoc modo manifesto functio X'' deprimeretur ad aliam, ordinis certo non maiorem quam $\frac{1}{2} \mu^{\text{ti}}$.

Per hanc itaque operationem X'' semper transibit in ipsam X' , quoties μ impar est; in casu altero autem, ubi μ par est, certo in functionem talem, quae tantummodo in coefficientibus ipsorum $\cos mx$ et $\sin mx$ a functione X' diversa esse potest. Ut ex illis coefficientibus coefficientes respondentes in X' deducantur, methodus generalis art. 15 adhiberi potest, ex qua sine negotio sequitur, si in illa functione termini ultimi sint $K \cos mx + L \sin mx$, pro his substitui debere, ut functio X' prodeat,

$$(K \cos ma + L \sin ma) \cos ma \cos mx \\ + (K \cos ma - L \sin ma) \sin ma \sin mx$$

Hi termini fiunt $= K \cos mx + L \sin mx$, si inter K et L aequatio $K \sin ma = L \cos ma$ locum habet, ut per calculum facile confirmatur: tunc igitur illa functio cum X' omnino iam identica est.

25.

Si functio X cum terminis $\cos mx$, $\sin mx$ non abrumpitur, sed ulterius excurrit, coefficientesque terminorum sequentium adhuc nimis considerabiles sunt, ita ut ipsos negligere non liceat, coefficientes γ , γ' , δ' etc. in functione X' , quae μ valoribus functionis X periodum completam formantibus, pro $x = a, b, c, d$ etc. satisfacit, notabiliter a coefficientibus respondentibus α , α' , δ' etc. discrepabunt. Quodsi itaque pro periodo $x = a, b, c, d$ etc. periodum aliam μ terminorum, puta pro $x = a', b', c', d'$ etc. simili modo tractamus, functionemque m^{ti} ordinis, his novis valoribus functionis X satisfaciendam evolvimus, et perinde ut X' per expressionem

$$\gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' \cos 2x + \dots + \gamma^m \cos mx \\ + \delta' \sin x + \delta'' \sin 2x + \dots + \delta^m \sin mx$$

exhibemus: pro coefficientibus γ , γ' , δ' etc. iam valores nanciscemur, ab iis, quos ante invenimus, notabiliter diversos. Hinc intelligitur, quo pacto hos coefficientes tamquam *variables* spectare liceat, et quidem, quum ex artt. 21, 23 singulos perinde per arcum $\mu a'$ determinari pateat, ut valores priores per arcum μa , singuli coefficientes considerari poterunt tamquam functiones arcus indeterminati y , similiter ut X est functio arcus x . Iam supponamus, $\mu \nu = \pi$ valores functionis X periodum integrum formantes, pro

$$x = a, a', a'', \dots b, b', b'', \dots c, c', c'', \dots d, d', d'' \dots \text{etc.}$$

cognitos esse, ita ut sit

$$a' = a + \frac{1}{\pi} 360^\circ, \quad a'' = a + \frac{2}{\pi} 360^\circ \text{ etc.} \\ b = a + \frac{\nu}{\pi} 360^\circ = a + \frac{1}{\mu} 360^\circ, \quad b' = a + \frac{\nu+1}{\pi} 360^\circ = a' + \frac{1}{\mu} 360^\circ \text{ etc.} \\ c = a + \frac{2\nu}{\pi} 360^\circ = a + \frac{2}{\mu} 360^\circ \text{ etc.}$$

patetque, hanc periodum π terminorum in ν periodos μ terminorum pro

$$x = a, b, c, d \text{ etc.} \\ x = a', b', c', d' \text{ etc.} \\ x = a'', b'', c'', d'' \text{ etc.} \\ \text{etc.}$$

discerpi posse. Quodsi itaque eo quo docuimus modo pro singulis periodis functio

X' evolvitur, nanciscimur ν valores singulorum coefficientium γ, γ', δ' etc., qui hisce deinceps valoribus ipsius y respondent

$$y = \mu a, \quad y = \mu a' = \mu a + \frac{1}{\nu} 360^\circ, \quad y = \mu a'' = \mu a + \frac{2}{\nu} 360^\circ \text{ etc.}$$

adeoque periodos completas ν terminorum formant. Quocirca, per methodum nostram, singuli coefficientes γ, γ', δ' etc. per expressionem talem

$$\begin{aligned} & \varepsilon + \varepsilon' \cos y + \varepsilon'' \cos 2y + \dots + \varepsilon^n \cos ny \\ & + \zeta' \sin y + \zeta'' \sin 2y + \dots + \zeta^n \sin ny \end{aligned}$$

exhiberi poterunt, ita ut sit n vel $= \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}$ vel $= \frac{1}{2}\nu$, prout ν impar est vel par. Manifestum est, talem expressionem eundem valorem ex substitutione $y = \mu b, \mu c, \mu d$ etc. obtinere, quem obtinet ex $y = \mu a$; nec non eundem ex $y = \mu b', \mu c', \mu d'$ etc., quem obtinet ex $y = \mu a'$ et sic porro. Quamobrem si in

$$\begin{aligned} & \gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' \cos 2x + \text{etc.} \\ & + \delta' \sin x + \delta'' \sin 2x + \text{etc.} \end{aligned}$$

pro singulis coefficientibus γ, γ', δ' etc. hae functiones arcus indeterminati y substituuntur, prodibit functio Z , duos arcus x, y involvens, transibitque Z in eam functionem X' , quae e periodo prima deducta est, si pro y aliquis valorum $\mu a, \mu b, \mu c, \mu d$ etc. substituitur; si vero pro y aliquis valorum $\mu a', \mu b', \mu c', \mu d'$ etc. accipitur, transibit Z in eam functionem, quae eruta est e periodo secunda. Hinc tandem colligitur, si in Z pro y statim scribatur μx , ita ut functio solius x prodeat (X''), hanc ita comparatam fore, ut pro omnibus π valoribus ipsius x , valoribus propositis functionis X satisfaciatur.

26.

Si methodus artt. 20, 22 ad omnes π valores propositos immediate sine praevia disceptione in ν periodos minores applicata esset, prodiiisset functio (X'') ordinis $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}^{\text{ti}}$ vel $\frac{1}{2}\pi^{\text{ti}}$, prout π impar vel par, quam cum functione X'' iam comparabimus. Quum haec posterior, si rite reducta est, manifesto ad ordinem $\mu n + m^{\text{tum}}$ ascendat, tres casus distinguemus.

I. Quando tum μ tum ν est impar, erit $\mu n + m = \frac{1}{2}\mu\nu - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}$, unde patet, X' cum X'' prorsus identicam esse debere.

II. Quando μ par est, ν impar, fit $\mu n + m = \frac{1}{2}\mu\nu = \frac{1}{2}\pi$, adeoque X'' eius-

dem ordinis ut X'' . Sufficit itaque utriusque functionis terminos ultimos comparare. Haud difficile perspicitur, hos terminos ultimos in X'' prodire unice ex terminis $\gamma^m \cos mx + \delta^m \sin mx$, et quidem ex iis terminis coefficientium γ^m, δ^m , qui continent $\cos ny$ et $\sin ny$ sive $\cos \mu n x$ et $\sin \mu n x$. Sint hi termini

$$\begin{aligned} & \text{in } \gamma^m \dots k \cos \mu n x + l \sin \mu n x \\ & \text{in } \delta^m \dots K \cos \mu n x + l' \sin \mu n x \end{aligned}$$

produceturque hinc in X''

$$(k \cos \mu n x + l \sin \mu n x) \cos m x + (K \cos \mu n x + l' \sin \mu n x) \sin m x$$

unde prodeunt termini ordinis $\mu n + m^{\text{ti}}$ sequentes

$$\frac{1}{2}(k-l') \cos(\mu n + m)x + \frac{1}{2}(l+K') \sin(\mu n + m)x$$

Iam haud difficile quidem ex formatione coefficientium demonstrari potest, esse

$$(k-l') \sin(\mu n + m)a = (l+K') \cos(\mu n + m)a$$

praeferrimus tamen methodum sequentem, quae concinnior videtur. Ex art. 24 sequitur, esse

$$\gamma^m \sin \frac{1}{2}y - \delta^m \cos \frac{1}{2}y = 0$$

tum si pro y substituitur μa , atque pro γ^m, δ^m valores ex periodo prima deducti; tum si pro y substituitur $\mu a'$, atque pro γ^m, δ^m valores ex periodo secunda deducti etc. Quodsi itaque pro γ^m, δ^m expressiones, quae erutae sunt indefinitae substituuntur, ita ut $\gamma^m \sin \frac{1}{2}y - \delta^m \cos \frac{1}{2}y$ fiat functio arcus y formae G ad ordinem $n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\nu$ ascendens, haec pro omnibus ν valoribus ipsius y his $\mu a, \mu a', \mu a''$ etc. fiet $= 0$, adeoque per art. 14 per

$$\sin \frac{1}{2}(y - \mu a) \sin \frac{1}{2}(y - \mu a') \sin \frac{1}{2}(y - \mu a'') \text{ etc.}$$

divisibilis, hinc etiam per $\sin \frac{1}{2}\nu(y - \mu a)$ et proin formae $h \sin \frac{1}{2}\nu(y - \mu a)$, ita ut h sit quantitas definita. Quamobrem termini ultimi functionis $\gamma^m \sin \frac{1}{2}y - \delta^m \cos \frac{1}{2}y$ evolutae esse debebunt

$$-h \sin \frac{1}{2}\pi a \cos \frac{1}{2}\nu y + h \cos \frac{1}{2}\pi a \sin \frac{1}{2}\nu y$$

omnes vero antecedentes evanescere: illos vero fieri patet

$$= -\frac{1}{2}(l+K)\cos(n+\frac{1}{2})y + \frac{1}{2}(k-l')\sin(n+\frac{1}{2})y$$

$$\begin{aligned}\text{Quocirca erit } \frac{1}{2}(k-l') &= h\cos\frac{1}{2}\pi a = h\cos\frac{1}{2}(\mu n+m)a \\ \frac{1}{2}(l+K) &= h\sin\frac{1}{2}\pi a = h\sin\frac{1}{2}(\mu n+m)a \quad \text{Q. E. D.}\end{aligned}$$

Haec vero aequatio ipsissimum erit criterium coefficientium ultimorum functionis X'' , ut in art. 24 ostentum est: quare in hoc quoque casu functio X'' cum X''' prorsus identica erit.

III. Quando ν par est, fit $\mu n+m = \frac{1}{2}\pi + m$, adeoque X'' ordinis altioris quam X''' . Facile autem perspicitur, omnes terminos in X'' , qui ordinem $\frac{1}{2}\pi^{\text{um}}$ transcendunt, provenire unice ex iis terminis singulorum coefficientium $\gamma, \delta, \gamma', \delta'$ etc., qui continent $\cos ny$ et $\sin ny$ sive $\cos \mu n x$ et $\sin \mu n x$. Sint hi termini, in expressione pro coefficiente aliquo γ^λ vel δ^λ $k\cos \mu n x + l\sin \mu n x$, ex quibus producitur in X''

$$\begin{aligned}(k\cos \mu n x + l\sin \mu n x)\cos \lambda x &\text{ in casu primo} \\ \text{vel } (k\cos \mu n x + l\sin \mu n x)\sin \lambda x &\text{ in casu secundo}\end{aligned}$$

unde

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}k\cos(\mu n+\lambda)x + \frac{1}{2}l\sin(\mu n+\lambda)x \\ + \frac{1}{2}k\cos(\mu n-\lambda)x + \frac{1}{2}l\sin(\mu n-\lambda)x\end{aligned}$$

in casu primo atque

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}l\cos(\mu n+\lambda)x + \frac{1}{2}k\sin(\mu n+\lambda)x \\ + \frac{1}{2}l\cos(\mu n-\lambda)x - \frac{1}{2}k\sin(\mu n-\lambda)x\end{aligned}$$

in casu secundo. Per art. 24 autem substituere oportet pro $\cos(\mu n+\lambda)x$ sive $\cos(\frac{1}{2}\pi+\lambda)x$, $\cos \pi a \cos(\frac{1}{2}\pi-\lambda)x + \sin \pi a \sin(\frac{1}{2}\pi-\lambda)x$; atque pro $\sin(\mu n+\lambda)x$ sive $\sin(\frac{1}{2}\pi+\lambda)x$, $\sin \pi a \cos(\frac{1}{2}\pi-\lambda)x - \cos \pi a \sin(\frac{1}{2}\pi-\lambda)x$. Quare habebimus in casu primo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(k+k\cos \pi a + l\sin \pi a)\cos(\frac{1}{2}\pi-\lambda)x \\ + \frac{1}{2}(l+k\sin \pi a - l\cos \pi a)\sin(\frac{1}{2}\pi-\lambda)x\end{aligned}$$

in casu secundo autem

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(l-l\cos \pi a + k\sin \pi a)\cos(\frac{1}{2}\pi-\lambda)x \\ - \frac{1}{2}(k+l\sin \pi a + k\cos \pi a)\sin(\frac{1}{2}\pi-\lambda)x\end{aligned}$$

Sed ex aequatione $k\sin\frac{1}{2}\pi a = l\cos\frac{1}{2}\pi a$, quae in utroque casu inter k et l locum habere debet (art. 24), nullo negotio deducitur

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(k+k\cos \pi a + l\sin \pi a) &= k \\ \frac{1}{2}(l+k\sin \pi a - l\cos \pi a) &= l\end{aligned}$$

Hinc tandem colligitur, pro iis partibus in X'' , quae ex terminis ultimis

$$k\cos ny + l\sin ny$$

cuiusvis coefficientis γ^λ vel δ^λ producerentur, designante λ indicem maiorem quam 0, statim substitui posse

$$\begin{aligned}k\cos(\frac{1}{2}\pi-\lambda)x + l\sin(\frac{1}{2}\pi-\lambda)x &\text{ in casu priore vel} \\ l\cos(\frac{1}{2}\pi-\lambda)x - k\sin(\frac{1}{2}\pi-\lambda)x &\text{ in casu posteriore}\end{aligned}$$

Hoc modo loco functionis X'' , quae ad ordinem $\frac{1}{2}\pi + m^{\text{um}}$ ascenderet, aliam X''' nanciscimur, quae ordinem $\frac{1}{2}\pi^{\text{um}}$ non egreditur. Nihil itaque superest, nisi ut coefficientes cosinus et sinus arcus $\frac{1}{2}\pi x$, qui manifesto in hac functione iidem manserunt ut in X'' , cum coefficientibus respondentibus in X''' comparemus. Levi attentione autem perspicitur, hosce terminos unice produci ex coefficiente primo γ , et quidem ex ultimis eius terminis; qui si per $k\cos ny + l\sin ny$ exhibentur, illi erunt $k\cos\frac{1}{2}\pi x + l\sin\frac{1}{2}\pi x$, adeoque necessario identici cum respondentibus in X''' . Hinc itaque colligitur, functionem X''' , quae per praeccepta modo tradita loco functionis X'' obtinetur, cum functione X'' prorsus identicam fieri.

27.

Pro eo itaque casu, ubi multitudo valorum propositorum functionis X , periodum integram formantium, numerus compositus est $= \pi = \mu\nu$, per partitionem illius periodi in ν periodos μ terminorum eandem functionem cunctis valoribus datis satisfaciendam erueri in artt. 25, 26 didicimus, quae per applicationem immediatam theoriae generalis ad periodum totam prodiret: illam vero methodum calculi mechanici taedium magis minuere, praxis tentantem docebit. Nulla iam amplius explicatione opus erit, quomodo illa partitio adhuc ulterius extendi et ad eum casum applicari possit, ubi multitudo omnium valorum propositorum numerus e tribus pluribusve factoribus compositus est, e. g. si numerus μ

rursus esset compositus, in quo casu manifesto quaevis periodus μ terminorum in plures periodos minores subdividi potest. Ceterum ex pluribus aliis annotationibus applicationi practicae inservientibus hic sequentes tantummodo attingemus. Valores talium aggregatorum

$$A \cos \lambda a + B \cos \lambda b + C \cos \lambda c + D \cos \lambda d + \text{etc.} = p$$

$$A \sin \lambda a + B \sin \lambda b + C \sin \lambda c + D \sin \lambda d + \text{etc.} = q$$

(ubi ut in praecedentibus, supponimus $b-a=c-b=d-c$ etc. $= \frac{1}{p} 360^\circ = \Delta$) saepius, siquidem nondum est $a=0$, commodius determinantur per formulas

$$A + B \cos \lambda \Delta + C \cos 2\lambda \Delta + D \cos 3\lambda \Delta + \text{etc.} = P$$

$$B \sin \lambda \Delta + C \sin 2\lambda \Delta + D \sin 3\lambda \Delta + \text{etc.} = Q$$

$p = P \cos a - Q \sin a$, $q = P \sin a + Q \cos a$, sive etiam faciendo $\frac{Q}{P} = \tan \varphi$, atque $\frac{P}{\cos \varphi} = \frac{Q}{\sin \varphi} = R$, per has $p = R \cos(\varphi + a)$, $q = R \sin(\varphi + a)$.

28.

Exemplum. In commercio literario a clar. barone DE ZACH edito, vol. X p. 188 invenitur tabula, limitem borealem et australem zodiaci *Palladis* exhibens. Utriusque limites declinatio tamquam functio periodica ascensionis rectae spectatur, quae in tabula illa per singulos quinque gradus progreditur. Ad illustrationem disquisitionum praecedentium applicationem ad limitem borealem hic faciemus, cuius itaque declinatio nobis erit X , ascensio recta x . Excerptimus ex tabula illa periodum sequentem 12 terminorum

x	X
0°	$6^\circ 48' \text{ Bor.} = + 408'$
30	$1^\circ 29' \dots \dots + 89$
60	$1^\circ 6' \text{ Austr.} \dots - 66$
90	$0^\circ 10' \text{ Bor.} \dots + 10$
120	$5^\circ 38' \dots \dots + 338$
150	$13^\circ 27' \dots \dots + 807$
180	$20^\circ 38' \dots \dots + 1238$
210	$25^\circ 11' \dots \dots + 1511$
240	$26^\circ 23' \dots \dots + 1583$
270	$24^\circ 22' \dots \dots + 1462$
300	$19^\circ 43' \dots \dots + 1183$
330	$13^\circ 24' \dots \dots + 804$

Distribuamus hanc periodum primo in tres periodos quaternorum terminorum

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l} a = 0^\circ & A = + 408 & a' = 30^\circ & A' = + 89 & a'' = 60^\circ & A'' = - 66 \\ b = 90^\circ & B = + 10 & b' = 120^\circ & B' = + 338 & b'' = 150^\circ & B'' = + 807 \\ c = 180^\circ & C = + 1238 & c' = 210^\circ & C' = + 1511 & c'' = 240^\circ & C'' = + 1583 \\ d = 270^\circ & D = + 1462 & d' = 300^\circ & D' = + 1183 & d'' = 330^\circ & D'' = + 804 \end{array}$$

In formula

$$X' = \gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' \cos 2x$$

$$+ \delta' \sin x + \delta'' \sin 2x$$

fit itaque

$$\gamma = \frac{1}{3}(A+B+C+D) = 779,5$$

$$\gamma' = \frac{1}{3}(A \cos a + B \cos b + C \cos c + D \cos d) = \frac{1}{3}(A-C) = -415,0$$

$$\delta' = \frac{1}{3}(A \sin a + B \sin b + C \sin c + D \sin d) = \frac{1}{3}(B-D) = -726,0$$

$$\gamma'' = \frac{1}{3}(A \cos 2a + B \cos 2b + C \cos 2c + D \cos 2d) = \frac{1}{3}(A-B+C-D) = +43,5$$

$$\delta'' = \frac{1}{3}(A \sin 2a + B \sin 2b + C \sin 2c + D \sin 2d) = 0$$

et similiter pro periodo secunda ac tertia. Hoc modo emergit

Pro periodo	ubi $y = 4x$	γ	γ'	δ'	γ''	δ''
prima	0°	$+779,5$	$-415,0$	$-726,0$	$+43,5$	0
secunda	120°	$+780,2$	$-404,5$	$-721,4$	$+9,9$	$+17,1$
tertia	240°	$+782,0$	$-413,5$	$-713,3$	$+11,7$	$-20,3$

Hic porro exhibetur γ per formulam

$$\frac{1}{3}(779,5 + 780,2 + 782,0)$$

$$+ \frac{1}{3}(779,5 + 780,2 \cos 120^\circ + 782,0 \cos 240^\circ) \cos 4x$$

$$+ \frac{1}{3}(780,2 \sin 120^\circ + 782,0 \sin 240^\circ) \sin 4x$$

sive per

$$780,6 - 1,1 \cos 4x - 1,0 \sin 4x, \text{ et perinde}$$

$$\gamma' \text{ per } -411,0 - 4,0 \cos 4x + 5,2 \sin 4x$$

$$\delta' \text{ per } -720,2 - 5,8 \cos 4x - 4,7 \sin 4x$$

$$\gamma'' \text{ per } +21,7 + 21,8 \cos 4x - 1,1 \sin 4x$$

$$\delta'' \text{ per } -1,1 + 1,1 \cos 4x + 21,6 \sin 4x$$

Quibus valoribus in X' substitutis prodit formula 12 valores propositos exhibens

$$\begin{aligned}
& + 780,6 \\
& - 411,0 \cos x - 720,2 \sin x \\
& + 43,4 \cos 2x - 2,2 \sin 2x \\
& - 4,3 \cos 3x + 5,5 \sin 3x \\
& - 1,1 \cos 4x - 1,0 \sin 4x \\
& + 0,3 \cos 5x - 0,3 \sin 5x \\
& + 0,1 \cos 6x
\end{aligned}$$

Distribuamus secundo eandem periodum in quatuor periodos ternorum terminorum, quibus singulis itaque per formulam primi ordinis

$$X' = \gamma + \gamma' \cos x + \delta' \sin x$$

satisfaciendum erit. Hic invenitur

Pro periodo	ubi $y = 3x$	γ	γ'	δ'
prima	0°	+776,3	-368,3	-718,8
secunda	90°	+786,0	-414,5	-676,0
tertia	180°	+785,0	-453,0	-721,1
quarta	270°	+775,0	-408,2	-765,0

unde deducuntur formulae, sub quibus γ, γ', δ' exhibentur sequentes:

$$\begin{aligned}
\gamma & \dots + 780,6 - 4,3 \cos 3x + 5,5 \sin 3x + 0,1 \cos 6x \\
\gamma' & \dots - 411,0 + 42,3 \cos 3x - 3,2 \sin 3x + 0,3 \cos 6x \\
\delta' & \dots - 720,2 + 1,2 \cos 3x + 44,5 \sin 3x + 0,3 \cos 6x
\end{aligned}$$

His valoribus in $\gamma + \gamma' \cos x + \delta' \sin x$ substitutis, partibusque ultimis in γ, γ', δ' , quae $\cos 6x$ continent, secundum praecepta art. 26 tractatis, prorsus eadem formula eruitur, ad quam supra pervenimus.

29.

Supersunt casus, ubi in functione X vel cosinus vel sinus soli adsunt, quos in artt. 16, 17 generaliter tractavimus. Supponemus, ut in praec., datam esse periodum μ terminorum, puta $X = A, B, C, D$ etc. pro $x = a, b, c, d$ etc. Duo vero casus hic probe distinguendi sunt. Aliter enim tractari debet

1^{mo} casus, ubi a est complementum alicuius valorum sequentium b, c, d etc. ad 360° vel ad 0 vel ad multipulum peripheriae. Sit hic terminus $a + \frac{k}{\mu} 360^\circ$.

atque $a + \frac{k}{\mu} 360^\circ + a = l \times 360^\circ$, sive $a = (\mu l - k) \frac{180}{\mu}$. Quare in hoc casu a per $\frac{180}{\mu}$ divisibilis erit, adeoque $\sin \mu a = 0$; porro habetur $b = (\mu l - k + 2) \frac{180}{\mu}$, atque $\sin \mu b = 0$, et perinde de sequentibus c, d etc. Supponendo itaque, a esse minorem quam $\frac{360}{\mu}$, sed non negativum (quod permissum est, quum ab omnibus a, b, c, d etc. multipulum proxime minus totius peripheriae subtrahere et ex residuis minimum, quod proprietate illa praeditum erit pro periodi initio accipere liceat), erit vel $a = 0$, atque $b = \frac{1}{\mu} 360^\circ$, $c = \frac{2}{\mu} 360^\circ$, $d = \frac{3}{\mu} 360^\circ$ etc.; vel $a = \frac{1}{\mu} 180^\circ$, $b = \frac{3}{\mu} 180^\circ$, $c = \frac{5}{\mu} 180^\circ$, $d = \frac{7}{\mu} 180^\circ$ etc.

aliter 2^{do} casus, ubi non est complementum ullius valorum sequentium b, c, d etc. ad 360° vel 0 vel multipulum peripheriae. Hic a non erit divisibilis per $\frac{180}{\mu}$, adeoque $\sin \mu a = \sin \mu b = \sin \mu c = \sin \mu d$ etc. non $= 0$.

In casu posteriore methodus generalis art. 16 statim applicari potest. In priore autem ex valoribus a, b, c, d etc. (quos infra 360° reductos esse supponimus), omnes antea reicere oportet, qui sunt majores quam 180° , quippe quorum complementa ad 360° inter reliquos reperiuntur; insuperque, quando adsunt, valores 0 et 180° , si in functione X sinus soli occurrunt: sed quoniam applicatio methodi generalis hac ratione minus concinna evaderet, hunc casum alio modo infra absolvemus. Initium iam ab illo casu faciemus, ubi $\sin \mu a$ non est $= 0$.

30.

Sit primo X functio formae

$$a + a' \cos x + a'' \cos 2x + a''' \cos 3x + \dots + a^n \cos nx$$

unde esse debet $\mu = n + 1$. Hic habetur per lemma secundum art. 19

$$\begin{aligned}
& (\cos t - \cos b)(\cos t - \cos c)(\cos t - \cos d) \text{ etc.} = \frac{1}{2^{\mu-1}} \times \frac{\cos \mu t - \cos \mu a}{\cos t - \cos a} \\
& = \frac{1}{2^{\mu-1} \sin a} \{ \sin \mu a + 2 \sin(\mu-1)a \cos t + 2 \sin(\mu-2)a \cos 2t + \text{etc.} + 2 \sin a \cos(\mu-1)t \}
\end{aligned}$$

Facile scilicet confirmatur, productum ex aggregato secundae partis huius aequationis per $\cos t - \cos a$ fieri $= \sin a (\cos \mu t - \cos \mu a)$. Quare fit quoque, scribendo a pro t

$$\begin{aligned}
& (\cos a - \cos b)(\cos a - \cos c)(\cos a - \cos d) \text{ etc.} = \frac{1}{2^{\mu-1} \sin a} \{ \sin \mu a + 2 \sin(\mu-1)a \cos a \\
& \quad + 2 \sin(\mu-2)a \cos 2a + \text{etc.} + 2 \sin a \cos(\mu-1)a \}
\end{aligned}$$

Aggregatum in hac expressione fit $= \mu \sin \mu a$, ut inde manifestum est, quod

$$\begin{aligned}\text{terminus secundus} &= \sin \mu a + \sin (\mu - 2) a \\ \text{ultimus} &= \sin \mu a - \sin (\mu - 2) a \\ \text{porro terminus tertius} &= \sin \mu a + \sin (\mu - 4) a \\ \text{terminus penultimus} &= \sin \mu a - \sin (\mu - 4) a \\ \text{etc.}\end{aligned}$$

Hinc colligitur, coefficientem ipsius A in formula art. 16 pro T fieri

$$\frac{1}{\mu \sin \mu a} \{ \sin \mu a + 2 \sin (\mu - 1) a \cos t + 2 \sin (\mu - 2) a \cos 2t + \text{etc.} + 2 \sin a \sin (\mu - 1) t \}$$

Prorsus similes expressiones proveniunt pro coefficientibus ipsorum B, C, D etc., mutando tantummodo a in b, c, d etc. Quamobrem statuendo

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{\mu} (A + B + C + D + \text{etc.}) \\ \epsilon' &= \frac{2}{\mu \sin \mu a} \{ A \sin (\mu - 1) a + B \sin (\mu - 1) b + C \sin (\mu - 1) c + D \sin (\mu - 1) d + \text{etc.} \} \\ \epsilon'' &= \frac{2}{\mu \sin \mu a} \{ A \sin (\mu - 2) a + B \sin (\mu - 2) b + C \sin (\mu - 2) c + D \sin (\mu - 2) d + \text{etc.} \} \\ \epsilon''' &= \frac{2}{\mu \sin \mu a} \{ A \sin (\mu - 3) a + B \sin (\mu - 3) b + C \sin (\mu - 3) c + D \sin (\mu - 3) d + \text{etc.} \} \\ \text{etc.}\end{aligned}$$

$$\epsilon^n = \frac{2}{\mu \sin \mu a} (A \sin a + B \sin b + C \sin c + D \sin d + \text{etc.})$$

erit

$$T = \epsilon + \epsilon' \cos t + \epsilon'' \cos 2t + \epsilon''' \cos 3t + \text{etc.} + \epsilon^n \cos nt$$

Quum haec formula generaliter pro valore quocunque ipsius t valere debeat, necessarium cum X identica fiet, mutata t in x , adeoque coefficientes $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ etc. ipsis $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc. resp. aequales.

31.

Quum per praecepta supra explicata functio X' formae

$$\begin{aligned}\gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' \cos 2x + \dots + \gamma^m \cos mx \\ + \delta' \sin x + \delta'' \sin 2x + \dots + \delta^m \sin mx\end{aligned}$$

quae omnibus μ valoribus propositis satisfiat, et in qua sit $m = \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{2}\mu$, prout μ impar est vel par; operae pretium est, hanc functionem cum functione modo inventa

$$\epsilon + \epsilon' \cos x + \epsilon'' \cos 2x + \epsilon''' \cos 3x + \dots + \epsilon^{n-1} \cos (\mu - 1)x$$

comparare, quam per X'' exprimemus. Comparando valores coefficientium $\gamma, \gamma', \delta', \delta''$ etc. in artt. 20, 22 traditos cum valoribus coefficientium $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ etc. modo inventis, invenitur

$$\begin{aligned}\epsilon &= \gamma \\ \epsilon' &= \gamma' - \delta' \cotang \mu a, & \epsilon^{n-1} &= \delta' \operatorname{cosec} \mu a \\ \epsilon'' &= \gamma'' - \delta'' \cotang \mu a, & \epsilon^{n-2} &= \delta'' \operatorname{cosec} \mu a \\ \epsilon''' &= \gamma''' - \delta''' \cotang \mu a, & \epsilon^{n-3} &= \delta''' \operatorname{cosec} \mu a \\ \text{etc.} &\text{ usque ad} \\ (\frac{1}{2}) \epsilon^m &= \gamma^m - \delta^m \cotang \mu a, & (\frac{1}{2}) \epsilon^{n-m} &= \delta^m \operatorname{cosec} \mu a\end{aligned}$$

Factor $\frac{1}{2}$ ipsis ϵ^m et ϵ^{n-m} praepositus tunc tantummodo valet, quando μ par est, omittique debet, quando μ est impar. Quo pacto, in casu posteriore, ubi $\mu - m = m + 1$ manifesto omnes μ coefficientes $\epsilon, \epsilon', \epsilon''$ etc. per γ, γ', δ' etc. determinati sunt; in priore vero, ubi $m = \mu - m$, pro coefficiente $\epsilon^{\frac{1}{2}\mu}$ valores duos $2\gamma^{\frac{1}{2}\mu} - 2\delta^{\frac{1}{2}\mu} \cotang \mu a$, $2\delta^{\frac{1}{2}\mu} \operatorname{cosec} \mu a$ habemus, quorum aequalitatem ex aequatione $\gamma^{\frac{1}{2}\mu} \sin \frac{1}{2}\mu a = \delta^{\frac{1}{2}\mu} \cos \frac{1}{2}\mu a$ facile perspicere, et pro quibus igitur etiam hunc $\gamma^{\frac{1}{2}\mu} - \delta^{\frac{1}{2}\mu} \cotang \mu a + \delta^{\frac{1}{2}\mu} \operatorname{cosec} \mu a$ adoptare possumus.

Hinc facile deducitur, esse in utroque casu

$$\begin{aligned}X'' &= (X' - \delta' \sin x - \delta'' \sin 2x - \delta^m \sin 3x - \text{etc.} - \delta^m \sin mx) \\ &= -\cotg \mu a (\delta' \cos x + \delta'' \cos 2x + \delta^m \cos 3x + \dots + \delta^m \cos mx) \\ &\quad + \operatorname{cosec} \mu a (\delta' \cos (\mu - 1)x + \delta'' \cos (\mu - 2)x + \dots + \delta^m \cos (\mu - m)x)\end{aligned}$$

Hinc patet, X'' ex X' deduci, si pro quovis termino $\delta^{\frac{1}{2}\mu} \sin \lambda x$ substituitur

$$-\cotg \mu a \delta^{\frac{1}{2}\mu} \cos \lambda x + \operatorname{cosec} \mu a \delta^{\frac{1}{2}\mu} \cos (\mu - \lambda)x$$

sive

$$\frac{-\delta^{\frac{1}{2}\mu} \cos \mu a \cos \lambda x + \delta^{\frac{1}{2}\mu} \cos (\mu - \lambda)x}{\sin \mu a}$$

cuius praecepti comparisonem cum iis, quae in art. 24 explicata sunt, lectoribus linquimus.

32.

Si functio X cum $\cos nx$ non abruptitur, sed ulterius excurrit, terminis sequentibus per $\alpha^m \cos \mu x + \alpha^{m+1} \cos (\mu + 1)x + \text{etc.}$ expressis, habebimus

$$\varepsilon = \alpha + \alpha^{\mu} \cos \mu a + \alpha^{2\mu} \cos 2\mu a + \text{etc.}$$

$$\varepsilon' = \frac{1}{\sin \mu a} \{ \alpha' \sin \mu a + \alpha^{\mu+1} \sin 2\mu a + \alpha^{2\mu+1} \sin 3\mu a + \text{etc.} \\ - \alpha^{2\mu-1} \sin \mu a - \alpha^{3\mu-1} \sin 2\mu a - \alpha^{4\mu-1} \sin 3\mu a - \text{etc.} \}$$

$$\varepsilon'' = \frac{1}{\sin \mu a} \{ \alpha'' \sin \mu a + \alpha^{\mu+2} \sin 2\mu a + \alpha^{2\mu+2} \sin 3\mu a + \text{etc.} \\ - \alpha^{2\mu-2} \sin \mu a - \alpha^{3\mu-2} \sin 2\mu a - \alpha^{4\mu-2} \sin 3\mu a - \text{etc.} \}$$

etc.

$$\varepsilon^{\mu-1} = \frac{1}{\sin \mu a} \{ \alpha^{\mu-1} \sin \mu a + \alpha^{2\mu-1} \sin 2\mu a + \alpha^{3\mu-1} \sin 3\mu a + \text{etc.} \\ - \alpha^{\mu+1} \sin \mu a - \alpha^{2\mu+1} \sin 2\mu a - \alpha^{3\mu+1} \sin 3\mu a - \text{etc.} \}$$

ex quibus formulis iudicari potest, quatenus differentiam coefficientium $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ etc. a veris $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc. negligere liceat. In hoc itaque casu functio X'' non erit X ipsa, cum qua tamen in eo convenit, quod omnibus μ valoribus propositis satisfaciatur. Omnes autem similes functiones his valoribus satisfaciens sub forma $X'' + Y(\cos \mu x - \cos \mu a)$ contenti erunt, designante Y functionem indefinitam arcus x eiusdem formae ut X , scilicet a sinibus liberam. Functio X'' erit unica ordinis $\mu-1$ ti: quaevis alia similis valoribus datis satisfaciens ad ordinem altiore ascendet. Quodsi talis functio X'' aliunde constaret, omnes similes functiones, per quos valores dati repraesentantur, in hac quoque forma $X'' + Y(\cos \mu x - \cos \mu a)$ contenti erunt, poteritque Y ita determinari, ut functio ad ordinem $\mu-1$ tum depressa prodeat, quae erit ipsa X'' . Methodus vero facillima ad hunc finem videtur esse, si primo ex X'' derivetur X' per art. 24 atque hinc X'' per art. 31. Sit itaque terminus quicumque in X'' $L \cos \lambda x$, ponaturque $\lambda = k\mu + \lambda'$, ita ut sit $\lambda' < \mu$ atque k integer. Tunc per art. 24 pro illo termino scribi debet in X'

$$L \cos k\mu a \cos \lambda' x - L \sin k\mu a \sin \lambda' x, \quad \text{si } \lambda' < \frac{1}{2}\mu, \text{ neque vero } \lambda' = 0 \\ L \cos(k+1)\mu a \cos(\mu - \lambda')x + L \sin(k+1)\mu a \sin(\mu - \lambda')x, \quad \text{si } \lambda' > \frac{1}{2}\mu \\ L \cos \frac{1}{2}\mu a \cos(k + \frac{1}{2})\mu a \cos \frac{1}{2}\mu x + L \sin \frac{1}{2}\mu a \cos(k + \frac{1}{2})\mu a \sin \frac{1}{2}\mu x, \quad \text{si } \lambda' = \frac{1}{2}\mu$$

Hinc autem prodit in X'' , per art. praec. in casu primo

$$L \cos k\mu a \cos \lambda' x + L \sin k\mu a \cotang \mu a \cos \lambda' x - L \sin k\mu a \operatorname{cosec} \mu a \cos(\mu - \lambda')x$$

in casu secundo

$$L \cos(k+1)\mu a \cos(\mu - \lambda')x - L \sin(k+1)\mu a \cotg \mu a \cos(\mu - \lambda')x \\ + L \sin(k+1)\mu a \operatorname{cosec} \mu a \cos \lambda' x$$

in casu tertio

$$L \cos \frac{1}{2}\mu a \cos(k + \frac{1}{2})\mu a \cos \frac{1}{2}\mu x - L \sin \frac{1}{2}\mu a \cos(k + \frac{1}{2})\mu a \cotg \mu a \cos \frac{1}{2}\mu x \\ + L \sin \frac{1}{2}\mu a \cos(k + \frac{1}{2})\mu a \operatorname{cosec} \mu a \cos \frac{1}{2}\mu x$$

quae expressio in omnibus tribus casibus reducitur ad

$$\frac{L \sin(k+1)\mu a \cos \lambda' x - L \sin k\mu a \cos(\mu - \lambda')x}{\sin \mu a}$$

Quoties autem $\lambda' = 0$, habemus in X' simpliciter $L \cos k\mu a$, qui terminus sine variatione in X'' retinetur.

33.

Sit secundo X functio formae

$$\bar{v}' \sin x + \bar{v}'' \sin 2x + \bar{v}''' \sin 3x + \text{etc.} + \bar{v}^n \sin nx$$

unde esse debet $\mu = n$. Hic fit, ex art. 30, coefficientis ipsius A in formula secunda art. 16 pro T

$$= \frac{1}{\mu \sin \mu a} \times \frac{\sin t}{\sin a} (\sin \mu a + 2 \sin(\mu-1)a \cos t + 2 \sin(\mu-2)a \cos 2t + \text{etc.} \\ + 2 \sin a \cos(\mu-1)t) \\ = \frac{1}{\mu \sin \mu a} (2 \cos(\mu-1)a \sin t + 2 \cos(\mu-2)a \sin 2t + 2 \cos(\mu-3)a \sin 3t + \text{etc.} \\ + 2 \cos a \sin(\mu-1)t + \sin \mu t)$$

Prorsus similes expressiones pro coefficientibus ipsorum B, C, D etc. prodeunt, mutato tantummodo arcu a in b, c, d etc. Quamobrem faciendo

$$\zeta' = \frac{2}{\mu \sin \mu a} \{ A \cos(\mu-1)a + B \cos(\mu-1)b + C \cos(\mu-1)c + D \cos(\mu-1)d + \text{etc.} \} \\ \zeta'' = \frac{2}{\mu \sin \mu a} \{ A \cos(\mu-2)a + B \cos(\mu-2)b + C \cos(\mu-2)c + D \cos(\mu-2)d + \text{etc.} \} \\ \zeta''' = \frac{2}{\mu \sin \mu a} \{ A \cos(\mu-3)a + B \cos(\mu-3)b + C \cos(\mu-3)c + D \cos(\mu-3)d + \text{etc.} \} \\ \text{etc.}$$

$$\zeta^{\mu-1} = \frac{2}{\mu \sin \mu a} \{ A \cos a + B \cos b + C \cos c + D \cos d + \text{etc.} \}$$

$$\zeta^{\mu} = \frac{1}{\mu \sin \mu a} \{ A + B + C + D + \text{etc.} \}$$

erit

$$T = \zeta' \sin t + \zeta'' \sin 2t + \zeta''' \sin 3t + \text{etc.} + \zeta^{\mu} \sin \mu t$$

Quum haec formula generaliter pro valore quocunque ipsius t valeat, necessario

cum X identica erit, mutando t in x , unde coefficientes $\zeta', \zeta'', \zeta'''$ etc. ipsis $\delta', \delta'', \delta'''$ etc. resp. aequales erunt.

34.

Si ut in art. 31 omnibus valoribus propositis per functionem talem

$$X' = \gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' \cos 2x + \text{etc.} + \gamma^m \cos mx \\ + \delta' \sin x + \delta'' \sin 2x + \text{etc.} + \delta^m \sin mx$$

satisfactum est, existente $m = \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}$ vel $= \frac{1}{2}\mu$, prout μ impar vel par est, comparatio huius functionis cum hac

$$X'' = \zeta' \sin x + \zeta'' \sin 2x + \zeta''' \sin 3x + \text{etc.} + \zeta^\mu \sin \mu x$$

quam in art. praec. eruimus, hasce aequationes suppeditant:

$$\zeta^\mu = \gamma \operatorname{cosec} \mu a \\ \zeta' = \delta' + \gamma' \cotg \mu a, \quad \zeta^{\mu-1} = \gamma' \operatorname{cosec} \mu a \\ \zeta'' = \delta'' + \gamma'' \cotg \mu a, \quad \zeta^{\mu-2} = \gamma'' \operatorname{cosec} \mu a \\ \zeta''' = \delta''' + \gamma''' \cotg \mu a, \quad \zeta^{\mu-3} = \gamma''' \operatorname{cosec} \mu a \\ \text{etc. usque ad}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \zeta^m = \delta^m + \gamma^m \cotg \mu a, \quad \left(\frac{1}{2}\right) \zeta^{\mu-m} = \gamma^m \operatorname{cosec} \mu a$$

ubi factor $\frac{1}{2}$ coefficientibus $\zeta^m, \zeta^{\mu-m}$ praepositus pro eo tantum casu valet, ubi μ par est, pro altero vero, ubi μ impar est, omitti debet. In casu itaque posteriore ubi $\mu - m = m + 1$, pro quovis coefficiente ζ', ζ'' etc. valorem unum per $\gamma, \gamma', \gamma''$ etc. et δ', δ'' etc. habemus; in priore vero, ubi $\mu - m = m$, pro coefficiente $\zeta^{\frac{1}{2}\mu}$ duos aequales, pro quibus etiam valor $\delta^{\frac{1}{2}\mu} + \gamma^{\frac{1}{2}\mu} \cotg \mu a + \gamma^{\frac{1}{2}\mu} \operatorname{cosec} \mu a$ adoptari potest. Hinc colligitur

$$X'' = X' - \gamma - \gamma' \cos x - \gamma'' \cos 2x - \text{etc.} - \gamma^m \cos mx \\ + \cotg \mu a (\gamma \sin x + \gamma' \sin 2x + \gamma'' \sin 3x + \text{etc.} + \gamma^m \sin mx) \\ + \operatorname{cosec} \mu a (\gamma \sin \mu x + \gamma' \sin (\mu - 1)x + \gamma'' \sin (\mu - 2)x + \text{etc.} + \gamma^{\mu-m} \sin (\mu - m)x)$$

Quamobrem ex X' producitur X'' , scribendo pro $\gamma, \gamma \operatorname{cosec} \mu a \sin \mu x = \frac{\gamma \sin \mu x}{\sin \mu a}$ et, pro quovis termino $\gamma^k \cos \lambda x$

$$\gamma^k \cotg \mu a \sin \lambda x + \gamma^k \operatorname{cosec} \mu a \sin (\mu - \lambda)x \quad \text{sive} \quad \frac{\gamma^k \cos \mu a \sin \lambda x + \gamma^k \sin (\mu - \lambda)x}{\sin \mu a}$$

quod praeceptum lectores cum iis, quae in art. 24 tradidimus, ipsi comparent.

35.

Si functio X cum $\sin \mu x$ non abruptitur, sed ulterius excurrit, terminis sequentibus per $\delta^{\mu+1} \sin (\mu + 1)x + \delta^{\mu+2} \sin (\mu + 2)x$ etc. expressis, habebimus:

$$\zeta' = \frac{1}{\sin \mu a} \{ \delta' \sin \mu a + \delta^{\mu+1} \sin 2\mu a + \delta^{2\mu+1} \sin 3\mu a + \text{etc.} \\ + \delta^{2\mu-1} \sin \mu a + \delta^{2\mu-1} \sin 2\mu a + \delta^{4\mu-1} \sin 3\mu a + \text{etc.} \} \\ \zeta'' = \frac{1}{\sin \mu a} \{ \delta'' \sin \mu a + \delta^{\mu+2} \sin 2\mu a + \delta^{2\mu+2} \sin 3\mu a + \text{etc.} \\ + \delta^{2\mu-2} \sin \mu a + \delta^{2\mu-2} \sin 2\mu a + \delta^{4\mu-2} \sin 3\mu a + \text{etc.} \} \\ \zeta''' = \frac{1}{\sin \mu a} \{ \delta''' \sin \mu a + \delta^{\mu+3} \sin 2\mu a + \delta^{2\mu+3} \sin 3\mu a + \text{etc.} \\ + \delta^{2\mu-3} \sin \mu a + \delta^{2\mu-3} \sin 2\mu a + \delta^{4\mu-3} \sin 3\mu a + \text{etc.} \}$$

etc. Pro coefficiente ultimo autem

$$\zeta^\mu = \frac{1}{\sin \mu a} (\delta^\mu \sin \mu a + \delta^{2\mu} \sin 2\mu a + \delta^{3\mu} \sin 3\mu a + \text{etc.})$$

Hae formulae ostendunt, quatenus differentia inter X et X'' negligi possit. Haec posterior formula simplicissima erit inter omnes similes, per quas μ valoribus propositis satisfit; hae vero omnes in formula $X'' + Y \sin x (\cos \mu x - \cos \mu a)$ contentae erunt, designante Y , ut in art. 32 functionem indefinitam arcus x a sinibus liberam. Et generaliter, si X'' est functio quaecunque eiusdem formae ut X , i. e. solos sinus continens, per quam μ valoribus datis satisfit, formula $X'' + Y \sin x (\cos \mu x - \cos \mu a)$ omnes huiusmodi functiones continebit, quae si Y rite determinatur, ad ordinem μ^{tum} deprimi potest, quo pacto necessario functio X'' ipsa prodire debet. Prorsus simili modo ut in art. 32 regula generalis sequens ad hunc finem eruitur: Pro quovis termino in X'' tali $L \sin \lambda x$, ubi λ est maior quam μ , substituere oportet in X'' , faciendo $\lambda = k\mu + \lambda'$, ita ut $k\mu$ sit multipulum ipsius μ proxime minus quam λ adeoque λ' inter limites 1 et μ incl. situs, terminos

$$L \frac{\sin (k+1)\mu a}{\sin \mu a} \sin \lambda' x + L \frac{\sin k\mu a}{\sin \mu a} \sin (\mu - \lambda') x$$

qui, quoties fit $\lambda' = \mu$, ad unum $L \frac{\sin \lambda a}{\sin \mu a} \sin \mu x$ reducuntur:

Transformationes in art. praec. atque in art. 32 traditae concinnius ex theoremate quodam generali deduci possunt, quod quum per se quoque satis elegans sit, paucis hic adhuc attingemus.

THEOREMA. Designantibus $\lambda, \lambda', \lambda''$ numeros integros quoscunque, μ numerum integrum, qui differentias inter illos, $\lambda - \lambda', \lambda' - \lambda'', \lambda - \lambda''$ metitur (e. g. unitatem), x arcum indefinitum, a arcum definitum functiones

$$\begin{aligned} P &= \sin(\lambda' - \lambda'') a \cos \lambda x + \sin(\lambda'' - \lambda) a \cos \lambda' x + \sin(\lambda - \lambda') a \cos \lambda'' x \\ Q &= \sin(\lambda' - \lambda'') a \sin \lambda x + \sin(\lambda'' - \lambda) a \sin \lambda' x + \sin(\lambda - \lambda') a \cos \lambda'' x \end{aligned}$$

per $\cos \mu x - \cos \mu a$ erunt divisibiles.

Demonstr. Quando λ per μ divisibilis est, ideoque etiam λ', λ'' per μ divisibiles erunt, facile confirmatur, valorem ipsarum P, Q , si substituatur $x = a$, esse identice $= 0$; quare P non mutabitur, si pro

$$\begin{array}{ll} \cos \lambda x & \text{substituatur } \cos \lambda x - \cos \lambda a \\ \cos \lambda' x & \cos \lambda' x - \cos \lambda' a \\ \cos \lambda'' x & \cos \lambda'' x - \cos \lambda'' a \end{array}$$

neque Q , si pro

$$\begin{array}{ll} \sin \lambda x & \text{substituatur } \sin \lambda x - \frac{\sin \lambda a \sin \mu x}{\sin \mu a} \\ \sin \lambda' x & \sin \lambda' x - \frac{\sin \lambda' a \sin \mu x}{\sin \mu a} \\ \sin \lambda'' x & \sin \lambda'' x - \frac{\sin \lambda'' a \sin \mu x}{\sin \mu a} \end{array}$$

Sed hac sex expressiones per $\cos \mu x - \cos \mu a$ divisibiles sunt, quod pro valore positivo ipsius λ de prima et quarta ostendisse sufficit. Scilicet facile per multiplicationem confirmatur, esse

$$\begin{aligned} \sin \mu a (\cos \lambda x - \cos \lambda a) &= (\cos \mu x - \cos \mu a) \{ 2 \sin \mu a \cos(\lambda - \mu)x + 2 \sin 2 \mu a \cos(\lambda - 2 \mu)x \\ &\quad + 2 \sin 3 \mu a \cos(\lambda - 3 \mu)x + \text{etc.} + 2 \sin(\lambda - \mu)a \cos \mu x + \sin \lambda a \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \mu a \sin \lambda x - \sin \lambda a \sin \mu x &= (\cos \mu x - \cos \mu a) \{ 2 \sin \mu a \sin(\lambda - \mu)x + 2 \sin 2 \mu a \sin(\lambda - 2 \mu)x \\ &\quad + 2 \sin 3 \mu a \sin(\lambda - 3 \mu)x + \text{etc.} + 2 \sin(\lambda - \mu)a \sin \mu x \} \end{aligned}$$

Casus, ubi λ est negativus, ad hunc sponte reducitur. Hinc patet, functiones

P, Q ex partibus per $\cos \mu x - \cos \mu a$ divisibiles compositas, ideoque ipsas quoque per hunc divisorem divisibiles esse.

II. Quando λ per μ non est divisibilis, sit l numerus integer arbitrarius per μ divisibilis, ponaturque $\lambda = l + \theta, \lambda' = l' + \theta, \lambda'' = l'' + \theta$, unde etiam l, l' per μ divisibiles erunt. Iam patet, si ponatur

$$\begin{aligned} \sin(l' - l'') a \cos l x + \sin(l'' - l) a \cos l' x + \sin(l - l') a \cos l'' x &= P' \\ \sin(l' - l'') a \sin l x + \sin(l'' - l) a \sin l' x + \sin(l - l') a \sin l'' x &= Q' \end{aligned}$$

fieri

$$P = P' \cos \theta x - \theta' \sin \theta x, \quad Q = P' \sin \theta x + Q' \cos \theta x,$$

atque functiones P', Q' , quippe quae sub casum primum iam absolutum pertinent, per $\cos \mu x - \cos \mu a$ divisibiles: hinc manifesto etiam P et Q per $\cos \mu x - \cos \mu a$ divisibiles erunt. Q. E. D. Ceterum demonstratio casus primi ita perfecta est, ut non sine quibusdam explicationibus applicari possit, quoties $\sin \mu a = 0$; tunc vero fit $P = 0, Q = 0$, ita ut demonstratione omnino non opus sit.

Quodsi itaque ponitur $\lambda - \lambda' = k\mu, \lambda - \lambda'' = (k+1)\mu$, patet, per $\cos \mu x - \cos \mu a$ divisibiles esse

$$\begin{aligned} \sin \mu a \cos \lambda x - \sin(k+1)\mu a \cos \lambda' x + \sin k\mu a \cos(\lambda' - \mu)x \\ \sin \mu a \sin \lambda x - \sin(k+1)\mu a \sin \lambda' x + \sin k\mu a \sin(\lambda' - \mu)x \end{aligned}$$

adeoque etiam

$$\begin{aligned} \cos \lambda x - \frac{\sin(k+1)\mu a \cos \lambda' x - \sin k\mu a \cos(\lambda' - \mu)x}{\sin \mu a} \\ \sin \lambda x - \frac{\sin(k+1)\mu a \sin \lambda' x + \sin k\mu a \sin(\lambda' - \mu)x}{\sin \mu a} \end{aligned}$$

unde ratio substitutionum in artt. 32, 35 statim elucet: quotiens enim ex divisione posteriore et solis sinibus constabit, adeoque manifesto denuo per $\sin x$ divisibilis erit.

In artt. 30—36 supposuimus, $\sin \mu a$ non esse $= 0$: superest itaque, ut easdem disquisitiones pro eo casu resumamus, ubi $\sin \mu a = 0$. Hic statim supponemus, esse $a = 0$, vel $a = \frac{180^\circ}{\mu}$.

Sit primo X functio formae

$$\gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' \cos 2x + \text{etc.} + \gamma^n \cos nx$$

adeoque multitudo coefficientium incognitorum $= 1 + n$. Iam scimus, ex omnibus valoribus propositis functionis X eos reici debere, qui respondent valori ipsius maiori quam 180° ; quatuor itaque casus hic sunt distinguendi:

1) quando μ par, atque $a = 0$, erit 180° valor $\frac{1}{2}\mu + 1^{\text{tus}}$ ipsius x ; quare quum sequentes reici debeant, remanent valores $\frac{1}{2}\mu + 1$. Hinc esse debet $n = \frac{1}{2}\mu$.

2) quando μ par, atque $a = \frac{180^\circ}{\mu}$, valor $\frac{1}{2}\mu + 1^{\text{tus}}$ ipsius x erit $180^\circ - \frac{180^\circ}{\mu}$; sequentes, qui fiunt maiores quam 180° , reiciendi sunt. Hinc esse debet $n = \frac{1}{2}\mu - 1$.

3) quando μ impar est, atque $a = 0$, fit valor $\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}^{\text{tus}}$ $180^\circ - \frac{180^\circ}{\mu}$, et

4) quando μ impar est, atque $a = \frac{180^\circ}{\mu}$, fit valor $\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}^{\text{tus}}$ 180° ; sequentes in utroque casu reici debent, adeoque erit $n = \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}$.

Iam quoniam methodus in praec. adhibita ad casum praesentem, ubi pars valorum datorum a periodo completa antea rescindenda esset, non sine quibusdam ambagibus applicari posset, methodum sequentem praeferimus.

Si per praecepta artt. 20, 22 functio formae

$$\gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' \cos 2x + \text{etc.} + \gamma^m \cos mx \\ + \delta' \sin x + \delta'' \sin 2x + \text{etc.} + \delta^m \sin mx$$

investigatur, per quam omnibus μ valoribus datis satisfit, et in qua $m = \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}$ vel $= \frac{1}{2}\mu$, prout μ impar est vel par, coefficientes $\delta', \delta'', \delta^m$ etc. sponte fient $= 0$. Nullo enim negotio patet, in expressione tali

$$A \sin \lambda a + B \sin \lambda b + C \sin \lambda c + D \sin \lambda d + \text{etc.}$$

fieri vel partem primam $= 0$, atque ultimam $= -B \sin \lambda b$, penultimam $= -C \sin \lambda c$, antepenultimam $= -D \sin \lambda d$ etc. puta quando $a = 0$; vel ultimam $= -A \sin \lambda a$, penultimam $= -B \sin \lambda b$, antepenultimam $= -C \sin \lambda c$ etc., quando $a = \frac{180^\circ}{\mu}$, quum pro talibus valoribus ipsius x , quorum alter alterius complementum ad 360° est, valores functionis X aequales sint. Quamobrem functio

$$X' = \gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' \cos 2x + \text{etc.} + \gamma^m \cos mx$$

in qua coefficientes $\gamma, \gamma', \gamma''$ etc. determinantur per formulas

$$\gamma = \frac{1}{\mu} (A + B + C + D + \text{etc.})$$

$$\gamma' = \frac{2}{\mu} (A \cos a + B \cos b + C \cos c + D \cos d + \text{etc.})$$

$$\gamma'' = \frac{2}{\mu} (A \cos 2a + B \cos 2b + C \cos 2c + D \cos 2d + \text{etc.})$$

etc., ultimus autem, quando μ par est atque adeo $m = \frac{1}{2}\mu$, per hanc

$$\gamma^m = \frac{1}{\mu} (A \cos ma + B \cos mb + C \cos mc + D \cos md + \text{etc.})$$

necessario cum functione X identica erit, siquidem haec non est gradus altioris quam supra definivimus. Namque in casibus 3 et 4 X est ordinis $\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}^{\text{ti}}$, i.e. eiusdem ut X' et proin per art. 24 cum X' identica. In casu primo X' est eiusdem ordinis ut X' et in casu secundo non maioris, quare tum hic tum illic omnes termini saltem usque ad ordinem $\frac{1}{2}\mu - 1^{\text{tum}}$ in utraque functione convenient (art. 24). Terminos ordinis $\frac{1}{2}\mu^{\text{ti}}$ in his functionibus quoque convenire debere, inde per eundem art. 24 patet, quod in X aequatio conditionalis $K \sin ma = L \cos ma$ locum habet; scilicet fit $L = 0$, atque in casu primo $\sin ma = 0$, in secundo, ubi X ad ordinem $\frac{1}{2}\mu - 1$ tantummodo ascendit, $K = 0$. Ceterum in casu secundo X' ordinis altioris esse videtur quam X , sed in hoc casu terminus ordinis $\frac{1}{2}\mu^{\text{ti}}$ in X' quoque evanescit, quum fiat

$$\gamma^{1\mu} = \frac{1}{\mu} (A \cos 90^\circ + B \cos 270^\circ + C \cos 450^\circ + D \cos 630^\circ + \text{etc.}) = 0$$

ita ut in hoc quoque casu X' revera sit ordinis $m - 1^{\text{ti}}$ sive $\frac{1}{2}\mu - 1^{\text{ti}}$.

38.

Si functio X cum termino $\cos nx$ non abruptitur, sed ulterius excurrit: denotatis terminis sequentibus per $\alpha^{n+1} \cos(n+1)x + \alpha^{n+2} \cos(n+2)x + \text{etc.}$ erit per artt. 21, 23

$$\gamma = \alpha \pm \alpha^n + \alpha^{2n} \pm \text{etc.}$$

$$\gamma' = \alpha' \pm \alpha^{n-1} \pm \alpha^{n+1} + \alpha^{2n-1} + \alpha^{2n+1} \pm \text{etc.}$$

$$\gamma'' = \alpha'' \pm \alpha^{n-2} \pm \alpha^{n+2} + \alpha^{2n-2} + \alpha^{2n+2} \pm \text{etc.}$$

$$\gamma''' = \alpha''' \pm \alpha^{n-3} \pm \alpha^{n+3} + \alpha^{2n-3} + \alpha^{2n+3} \pm \text{etc.}$$

et sic porro usque ad ultimum γ^m , quando μ impar est, vel ad penultimum γ^{m-1} , quando μ par est; signum inferius hic valet, quoties $a = \frac{180^\circ}{\mu}$, adeoque

in casu 2 et 4. superius in casu 1 et 2; denique pro ultimo habebitur in casu primo

$$\gamma^m = \alpha^m + \alpha^{2m} + \alpha^{3m} + \text{etc.}$$

in casu secundo autem $\gamma^m = 0$. Hae aequationes ostendunt, quatenus differentiam inter functiones X et X' negligere permissum esse possit. Haec posterior functio inter omnes, quae μ valoribus propositis satisfaciunt, simplicissima erit, quae omnes sub forma $X' + Y \sin(\frac{1}{2}\mu x - \frac{1}{2}\mu a)$ contenti erunt, quae in casu 1 et 3 ad $X' + Y \sin \frac{1}{2}\mu x$, in casibus 2 et 4 vero ad $X' + Y \cos \frac{1}{2}\mu x$ reducitur. Manifesto autem, si haec expressio eiusdem formae esse debet ut X i. e. a sinibus libera, Y esse debet

in casu primo formae $g \sin x + g' \sin 2x + g'' \sin 3x + \text{etc.}$

in casu secundo formae $g + g' \cos x + g'' \cos 2x + \text{etc.}$

in casu tertio formae $g \sin \frac{1}{2}x + g' \sin \frac{3}{2}x + g'' \sin \frac{5}{2}x + \text{etc.}$

in casu quarto formae $g \cos \frac{1}{2}x + g' \cos \frac{3}{2}x + g'' \cos \frac{5}{2}x + \text{etc.}$

Et generalius, designante X' functionem quamcunque ipsi X similem, quae μ valoribus propositis satisfaciunt, omnes huiusmodi formae sub formula $X'' + Y \sin \frac{1}{2}\mu x$ vel $X'' + Y \cos \frac{1}{2}\mu x$ contentae erunt, ubi Y functionem indefinitam eius, quam modo docuimus formae designat. Hoc ita perficere licet, ut sic functio ad ordinem $\frac{1}{2}\mu$, $\frac{1}{2}\mu - 1$, $\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\mu - \frac{3}{2}$ depressa prodeat, quae manifesto cum X' identica erit. Regula autem generalis pro reductione talis functionis X'' ad X' ex art. 24 facile deducitur. Pro quovis termino $L \cos \lambda x$ in X'' substitui debet in X' , facto $\lambda = k\mu \pm \lambda'$, ita ut λ' non sit maior quam $\frac{1}{2}\mu$, terminus $\pm L \cos \lambda' x$, ubi signum inferius accipiendum est, quoties simul $a = \frac{180^\circ}{\mu}$ atque k par, superius in casibus reliquis; denique quoties in casu secundo, i. e. pro $a = \frac{180^\circ}{\mu}$ et valore pari ipsius μ , evadit $\lambda' = \frac{1}{2}\mu$, pro $L \cos \lambda x$ statim poni debet 0 in X' , sive terminus ille omnino negligi.

39.

Si secundo functio X est formae

$$\delta' \sin x + \delta'' \sin 2x + \delta''' \sin 3x + \text{etc.} + \delta^m \sin mx$$

adeoque multitudo coefficientium incognitorum $= n$, etiam multitudo valorum

datorum, subductis superfluis, esse debet $= n$, ut ad coefficientium determinationem completam sufficiant. Iam quum ut superflui in hoc casu reiciendi sint valores functionis X ii, qui respondent valori ipsius x maiori quam 180° nec non valori 0 et 180° , habebimus pro quatuor casibus supra distinctis:

1. quando μ par, $a = 0$, erit $n = \frac{1}{2}\mu - 1$
2. quando μ par, $a = \frac{180^\circ}{\mu}$, erit $n = \frac{1}{2}\mu$
3. quando μ impar, $a = 0$, erit $n = \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}$
4. quando μ impar, $a = \frac{180^\circ}{\mu}$, erit $n = \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}$

Iam prorsus simili modo ut in art. 37, in functione

$$\gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' \cos 2x + \text{etc.} + \gamma^m \cos mx \\ + \delta' \sin x + \delta'' \sin 2x + \text{etc.} + \delta^m \sin mx$$

ad normam artt. 20, 22 eruta, quae omnibus μ valoribus satisfacit, et in qua m vel $= \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}$, vel $= \frac{1}{2}\mu$, coefficientes γ , γ' , γ'' etc. sponte evanescent. Quum enim in serie A, B, C, D etc. vel termini ultimi ordine retrogrado in casu praesenti vel fiant $= -B, -C, -D$ etc. vel $= -A, -B, -C$ etc., prout $a = 0$, vel $= \frac{180^\circ}{\mu}$, insuperque pro illo casu $A = 0$, manifesto

$$A \cos \lambda a + B \cos \lambda b + C \cos \lambda c + D \cos \lambda d + \text{etc.}$$

pro quovis valore ipsius x erit $= 0$. Quamobrem functio $X' =$

$$\delta' \sin x + \delta'' \sin 2x + \delta''' \sin 3x + \text{etc.} + \delta^m \sin mx$$

in qua coefficientes $\delta', \delta'', \delta'''$ etc. determinantur per aequationes

$$\delta' = \frac{2}{\mu} (A \sin a + B \sin b + C \sin c + D \sin d + \text{etc.})$$

$$\delta'' = \frac{2}{\mu} (A \sin 2a + B \sin 2b + C \sin 2c + D \sin 2d + \text{etc.})$$

$$\delta''' = \frac{2}{\mu} (A \sin 3a + B \sin 3b + C \sin 3c + D \sin 3d + \text{etc.})$$

etc., ultimus autem, quando μ par est, adeoque $m = \frac{1}{2}\mu$, per hanc

$$\delta^m = \frac{1}{\mu} (A \sin ma + B \sin mb + C \sin mc + D \sin md + \text{etc.})$$

necessario cum X identica erit, quod eodem modo, ut in art. 37, facile demonstratur. Ceterum functio X' in casu primo, ubi $a = 0$, μ par, revera ad or-

dinem $\frac{1}{2}\mu - 1$ tantum ascendit, quum fiat

$$\delta^m = \frac{1}{\mu} (A \sin 0 + B \sin 180^\circ + C \sin 360^\circ + D \sin 540^\circ + \text{etc.}) \\ = 0$$

40.

Si functio X non est ordinis n^{ti} , ut supposuimus, sed ulterius excurrit, aequationes sequentes docebunt, quomodo differentia inter X' et X a coefficientibus sequentibus pendeat (v. artt. 21, 23)

$$\begin{aligned} \delta' &= \delta' - \delta'^{\mu-1} + \delta'^{\mu+1} - \delta'^{2\mu-1} + \delta'^{2\mu+1} - \text{etc.} \\ \delta'' &= \delta'' - \delta''^{\mu-2} + \delta''^{\mu+2} - \delta''^{2\mu-2} + \delta''^{2\mu+2} - \text{etc.} \\ \delta''' &= \delta''' - \delta'''^{\mu-3} + \delta'''^{\mu+3} - \delta'''^{2\mu-3} + \delta'''^{2\mu+3} - \text{etc.} \end{aligned}$$

et sic porro usque ad ultimum δ^m vel penultimum δ^{m-1} , prout μ impar est vel par; signa superiora hic valent, quando $a = 0$, inferiora, quando $a = \frac{180^\circ}{\mu}$; denique pro ultimo habetur in casu (1) $\delta^m = 0$, in casu (2) vero $\delta^m = \delta^m - \delta^{3m} + \delta^{3m} - \delta^{7m} + \text{etc.}$ Omnes functiones periodicae, per quas μ valoribus propositis satisfit, et ex quibus X' est simplicissima, sub forma $X' + Y \sin(\frac{1}{2}\mu x - \frac{1}{2}\mu a)$ sive generalius sub forma $X' + Y \sin(\frac{1}{2}\mu x - \frac{1}{2}\mu a)$ contentae erunt, designante X'' functionem talem quaecunque, quae formula pro casu 1 et 3 ad $X'' + Y \sin \frac{1}{2}\mu x$, pro casu 2 et 4 autem ad $X'' + Y \cos \frac{1}{2}\mu x$ reducitur; Y vero, siquidem alias functiones non consideramus, nisi quae ipsi X sunt similes, i. e. e solis sinibus compositae, necessario debet esse:

in casu 1 formae $g + g' \cos x + g'' \cos 2x + \text{etc.}$
 in casu 2 formae $g \sin x + g' \sin 2x + g'' \sin 3x + \text{etc.}$
 in casu 3 formae $g \cos \frac{1}{2}x + g' \cos \frac{3}{2}x + g'' \cos \frac{5}{2}x + \text{etc.}$
 in casu 4 formae $g \sin \frac{1}{2}x + g' \sin \frac{3}{2}x + g'' \sin \frac{5}{2}x + \text{etc.}$

Functionem Y hic ita determinare licebit, ut prodeat functio ad ordinem $\frac{1}{2}\mu - 1$, $\frac{1}{2}\mu$, $\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}$ depressa, quae cum X' necessario identica erit. Pro reductione functionis X'' ad X' regula generalis sequens habetur:

Quivis terminus in X'' talis $L \sin \lambda x = L \sin(k\mu + \lambda)x$, transmutetur aut in $\pm L \sin \lambda x$ (quoties $a = 0$, vel k par), aut in $\mp L \sin \lambda x$ (quoties nec $a = 0$, nec k par, i. e. quoties simul $a = \frac{180^\circ}{\mu}$ atque k impar): denique quoties in casu

primo i. e. pro $a = 0$, et valore pari ipsius μ evadit $\lambda' = \frac{1}{2}\mu$, terminus $L \sin \lambda x$ omnino destruat.

41.

Quum omnes casus speciales in artt. 29—40 considerati ad casum generalem in artt. 20—28 absolute reducti sint, omnia artificia, per quae in hoc casu calculus abbreviatur, qualia in artt. 25, 26, 27 explicavimus, etiam ad illos applicari poterunt. Quamobrem non opus erit, huic disquisitioni immorari, cui sequens exemplum ad artt. 39, 40 pertinens, finem imponet.

Aequatio centri pro novo planeta *Iunone*, adhibita excentricitate 0,254236, calculata est per methodum indirectam per singulos denos gradus, ut sequitur

Anomaliam media = x		Aequatio Centri = X	
		-	+
0 ^o	360 ^o	0	0
10	350	3 ^o 50' 38" 30	13838" 30
20	340	7 38 21,47	27501,47
30	330	11 20 8,79	40808,79
40	320	14 52 48,06	53568,06
50	310	18 12 49,21	65569,21
60	300	21 16 17,02	76577,02
70	290	23 58 42,92	86322,92
80	280	26 14 55,85	94495,85
90	270	27 58 52,36	100732,36
100	260	29 3 28,13	104608,13
110	250	29 20 33,68	105633,68
120	240	28 41 2,10	103262,10
130	230	26 55 22,77	96922,77
140	220	23 55 2,70	86102,70
150	210	19 35 0,79	70500,79
160	200	13 57 40,52	50260,52
170	190	7 16 58,33	26218,33
180	180	0	0

Discerpimus hanc periodum 36 terminorum in sex minores senorum terminorum; valores seni functionis X in singulis periodis contenti exhibebuntur per formulam talem

$$\gamma + \gamma' \cos x + \gamma'' \cos 2x + \gamma''' \cos 3x \\ + \delta' \sin x + \delta'' \sin 2x + \delta''' \sin 3x$$

ubi pro coefficientibus γ, γ', δ' etc. valores sequentes invenimus:

Periodus	$y = 6x$	γ	γ'	γ''	γ'''	δ'	δ''	δ'''
prima	0°	0	0	0	0	-103830,145	+15406,638	0
secunda	60	+56"205	-217"737	+761"671	-1528,823	-103937,346	+15841,387	-882,667
tertia	120	+56,115	-217,467	+760,805	-1527,397	-104151,314	+16709,402	-2645,530
quarta	180	0	0	0	0	-104258,100	+17142,684	-3525,740
quinta	240	-56,115	-217,467	-760,805	+1527,397	-104151,314	+16709,402	-2645,530
sexta	300	-56,205	-217,737	-761,671	+1528,823	-103937,346	+15841,387	-882,667

Singuli coefficientes $\gamma, \gamma', \gamma'', \gamma''', \delta', \delta'', \delta'''$ rursus sub formam talem

$$\begin{aligned} & \varepsilon + \varepsilon' \cos 6x + \varepsilon'' \cos 12x + \varepsilon''' \cos 18x \\ & + \zeta' \sin 6x + \zeta'' \sin 12x + \zeta''' \sin 18x \end{aligned}$$

reducentur: nullo vero negotio perspicitur, pro quatuor prioribus evanescere debere $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''$; et pro tribus posterioribus, $\zeta', \zeta'', \zeta'''$. Hoc modo invenitur

$$\begin{aligned} \gamma &= + 64",848 \sin 6x + 0",052 \sin 12x \\ \gamma' &= - 251",277 \sin 6x - 0",167 \sin 12x \\ \gamma'' &= + 879",002 \sin 6x + 0",500 \sin 12x \\ \gamma''' &= -1764",511 \sin 6x - 0",824 \sin 12x \\ \delta' &= -104044",264 + 213",968 \cos 6x + 0",132 \cos 12x + 0",000 \cos 18x \\ \delta'' &= + 16275",150 - 868",020 \cos 6x - 0",489 \cos 12x - 0",003 \cos 18x \\ \delta''' &= - 1763",689 + 1762",868 \cos 6x + 0",819 \cos 12x + 0",002 \cos 18x \end{aligned}$$

His valoribus pro γ, γ' etc. substitutis, praeceptisque art. praec. observatis, prodit functio sequens pro aequatione centri, in qua singuli coefficientes intra centesimam minuti secundi partem exacti sunt.

$$\begin{array}{ll} -104044",264 \sin x & -1",643 \sin 9x \\ + 16275,150 \sin 2x & + 0,494 \sin 10x \\ - 3527,378 \sin 3x & - 0,149 \sin 11x \\ + 873,511 \sin 4x & + 0,052 \sin 12x \\ - 232,622 \sin 5x & - 0,017 \sin 13x \\ + 64,848 \sin 6x & + 0,006 \sin 14x \\ - 18,655 \sin 7x & - 0,004 \sin 15x \\ + 5,491 \sin 8x & + 0,003 \sin 16x \end{array}$$

Hoc modo manifesto calculus ita se habet, ac si pro arcu x alius $x' = x - a$ introduceretur. Saepenumero etiam calculus magnopere sublevare potest, si pro functione X alia $X - \bar{x}$ adhibetur, ubi pro $\bar{x}$ functio quaelibet ipsi X similis assumi potest, modo ordinem $\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}^{\text{tum}}$ pro valore impari vel ordinem $\frac{1}{2}\mu^{\text{tum}}$ pro valore pari ipsius μ non egrediatur, et in casu posteriori coefficientes terminorum $\cos \frac{1}{2}\mu x$ et $\sin \frac{1}{2}\mu x$ (siquidem eo ascendit) teneant debitam rationem ($\cos \frac{1}{2}\mu a: \sin \frac{1}{2}\mu a$). Manifestum est, si valores functionis $\bar{x}$ pro $x = a, b, c, d$ etc. sint resp. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc., fore valores functionis $X - \bar{x}$ pro iisdem valoribus resp. $A - \mathfrak{A}, B - \mathfrak{B}, C - \mathfrak{C}, D - \mathfrak{D}$ etc.; si porro functio Z hisce valoribus satisfaciens per praecepta praecedentia investigatur, functio $\bar{x} + Z$ identica erit cum ea, quae ex applicatione directa horum praeceptorum ad valores ipsius functionis X prodiret. Semper autem functionem $\bar{x}$ ita determinare oportet, ut valores propositi functionis X prope per illam exhibeantur, quo pacto quantitates $A - \mathfrak{A}, B - \mathfrak{B}, C - \mathfrak{C}, D - \mathfrak{D}$ etc. parvae et ad calculum magis tractabiles evadent. Ceterum pro $\bar{x}$ etiam quantitas constans assumi potest, e. g. haec $\frac{1}{\mu}(A + B + C + D + \text{etc.})$, quae functionis quaesitae partem invariabilem constituit.



BEMERKUNGEN.

Die vorliegende Abhandlung über Interpolation ist die wiederholte Ausarbeitung einer Untersuchung, von welcher ein früherer Entwurf im October 1803 begonnen zu sein scheint. Sie enthält die Methoden, die bei der Berechnung der Ausdrücke für die durch Störungskräfte hervorgebrachten Aenderungen der Elemente einer Planetenbahn vielfach angewandt worden sind. Dieser Ausmittlung der Störungen steht ein anderes Verfahren zur Seite, das direct die Werthe der Bahnelemente für einzelne Zeitpunkte ergibt und das, wie aus den im vorgefundenen handschriftlichen Nachlasse aufzeichneten schliesslichen Formeln hervorgeht, auf folgenden Principien beruht.

Bilden die Werthe des Arguments, für welche die Werthe der Function gegeben sind, eine arithmetische Reihe, und hat man ein Argument x eingeführt, das bei jenen Werthen wie die ganzen Zahlen fortschreitet, bezeichnet die gegebenen Werthe mit f_x , führt deren aufeinanderfolgende Differenzenreihen ein:

$$f(x+1) - f_x = f'(x+\frac{1}{2}), \quad f'(x+\frac{1}{2}) - f'(x-\frac{1}{2}) = f''(x), \quad f''(x+1) - f''(x) = f'''(x+\frac{1}{2}) \text{ u. s. f.}$$

ferner deren mit beliebigen Anfangsgliedern beginnende Summenreihen $f^{(n)}(x+\frac{1}{2})$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(x+\frac{1}{2})$ u. s. f. für welche

$$f = f^{(0)}(x+\frac{1}{2}) - f^{(1)}(x-\frac{1}{2}), \quad f^{(1)}(x+\frac{1}{2}) = f^{(0)}(x+1) - f^{(0)}(x) \text{ u. s. f.}$$

endlich die Mittelwerthe der aufeinander folgenden Glieder der so entstandenen Reihen nemlich

$$\dots f^{(n)}x = \frac{1}{2}f^{(n)}(x+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f^{(n)}(x-\frac{1}{2}), \quad f(x+\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f(x+1) + \frac{1}{2}f_x, \quad f'(x) = \frac{1}{2}f'(x+\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f'(x-\frac{1}{2}) \dots$$

also in übersichtlicher Anordnung zusammengestellt folgendes System von gegebenen und daraus zunächst berechneten Werthen

BEMERKUNGEN.

329

M. W.	II. Summe	M. W.	I. Summe	gegeben. W.	M. W.	I. Differ.	M. W.	II. Differ.	M. W.
$f^{(n)}(x-\frac{1}{2})$	$f^{(n)}(x-1)$	$f^{(n)}(x-1)$	$f^{(n)}(x-\frac{1}{2})$	$f(x-1)$	$f(x-\frac{1}{2})$	$f'(x-1)$	$f'(x-\frac{1}{2})$	$f''(x-1)$	$f''(x-\frac{1}{2})$
$f^{(n)}(x+\frac{1}{2})$	$f^{(n)}x$	$f^{(n)}x$	$f^{(n)}(x+\frac{1}{2})$	f_x	$f(x+\frac{1}{2})$	$f'(x+\frac{1}{2})$	$f'(x+1)$	$f''x$	$f''(x+\frac{1}{2})$
	$f^{(n)}(x+1)$	$f^{(n)}(x+1)$		$f(x+1)$				$f''(x+1)$	

so gibt Art. 4, wenn man 1^a für $t, a, b, c, d, e \dots$ resp. $x+t, x, x+1, x-1, x+2, x-2$ für $t, a, b, c, d, e \dots$ resp. $x+t, x, x-1, x+1, x-2, x+2 \dots$ setzt, 2^a aus den entsprechenden Seiten der beiden so erhaltenen Gleichungen die halbe Summe bildet, 3^a aus denselben Gleichungen, nachdem zuvor in der zweiten $x+1$ und $t-1$ resp. für x und t gesetzt ist, die halbe Summe bildet und 3^a in der zuletzt erhaltenen Gleichung $t = \frac{1}{2}$ macht, folgende Gleichungen für die durch Interpolation zu bestimmenden Werthe $\varphi(x+t)$ und $\varphi(x+\frac{1}{2})$ derjenigen Function φx , die bei jedem ganzzahligen Werthe von x der gegebenen Grösse f_x gleich wird:

$$\varphi(x+t) = f_x + t.f'(x+\frac{1}{2}) + \frac{t.t-1}{1.2}f''x + \frac{t.t-1.t+1}{1.2.3}f'''(x+\frac{1}{2}) + \dots$$

$$+ \frac{\Pi(t+n-1)}{\Pi 2n. \Pi(t-n-1)}f^{2n}x + \frac{\Pi(t+n)}{\Pi(2n+1). \Pi(t-n-1)}f^{2n+1}(x+\frac{1}{2}) \dots$$

$$\varphi(x+t) = f_x + t.f'(x-1) + \frac{t.t+1}{1.2}f''x + \frac{t.t+1.t-1}{1.2.3}f'''(x-1) + \dots$$

$$+ \frac{\Pi(t+n)}{\Pi 2n. \Pi(t-n)}f^{2n}x + \frac{\Pi(t+n)}{\Pi(2n+1). \Pi(t-n-1)}f^{2n+1}(x-1) \dots$$

$$\varphi(x+t) = f_x + t.f''x + \frac{t.t}{1.2}f''x + \frac{t.t-1.t+1}{1.2.3}f'''x + \dots$$

$$+ \frac{\Pi(t+n-1)}{\Pi 2n. \Pi(t-n)}t f^{2n}x + \frac{\Pi(t+n)}{\Pi(2n+1). \Pi(t-n-1)}f^{2n+1}x + \dots$$

$$\varphi(x+t) = f(x+\frac{1}{2}) + (t-\frac{1}{2})f'(x+\frac{1}{2}) + \frac{t.t-1}{1.2}f''(x+\frac{1}{2}) + \frac{t.t-1}{1.2}(t-\frac{1}{2})f'''(x+\frac{1}{2}) + \dots$$

$$+ \frac{\Pi(t+n-1)}{\Pi 2n. \Pi(t-n-1)}f^{2n}(x+\frac{1}{2}) + \frac{\Pi(t+n-1)}{\Pi(2n+1). \Pi(t-n-1)}(t-\frac{1}{2})f^{2n+1}(x+\frac{1}{2}) + \dots$$

$$\varphi(x+\frac{1}{2}) = f(x+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}f''(x+\frac{1}{2}) + \frac{1}{24}f'''(x+\frac{1}{2}) - \frac{1}{720}f^{(5)}(x+\frac{1}{2}) + \frac{1}{30240}f^{(7)}(x+\frac{1}{2}) \dots$$

$$+ (-1)^n \frac{\Pi 2n}{\Pi n. \Pi n} \cdot f^{2n}(x+\frac{1}{2}) + \dots$$

Die Coefficienten von f^n in der dritten, vierten und fünften Gleichung sind gleich den Coefficienten von $(2i \sin \omega)^n$ in den Reihenentwickelungen resp. für $\cos 2t\omega + i \frac{\sin 2t\omega}{\cos \omega}$, $\frac{\cos(2t-1)\omega}{\cos \omega} + i \sin(2t-1)\omega$ und $\frac{1}{\cos \omega}$ nach Potenzen der Grösse $2i \sin \omega$.

Setzt man nun

$$\Phi(x+1) = f^{-1}(x+1) + \frac{1}{1!} f'(x+1) - \frac{1}{2!} f''(x+1) + \frac{1}{3!} f'''(x+1) - \frac{1}{4!} f^{(4)}(x+1) + \dots$$

$$\Phi x = f^{-1}x - \frac{1}{1!} f'x + \frac{1}{2!} f''x - \frac{1}{3!} f'''x + \frac{1}{4!} f^{(4)}x - \dots$$

$$\Psi x = f^{-2}x + \frac{1}{1!} f'x - \frac{1}{2!} f''x + \frac{1}{3!} f'''x - \frac{1}{4!} f^{(4)}x + \dots$$

$$\Psi(x+1) = f^{-2}(x+1) - \frac{1}{1!} f'(x+1) + \frac{1}{2!} f''(x+1) - \frac{1}{3!} f'''(x+1) + \dots$$

indem man als Coefficienten von f^m in diesen vier Gleichungen die Coefficienten nimmt, die bei den Entwicklungen resp. für $\frac{1}{2! \cos \omega}$, $\frac{1}{2! \cos \omega}$, $-\frac{1}{4! \cos \omega}$, $-\frac{1}{4! \cos \omega}$ noch Potenzen von $2i \sin \omega$ entstehen, so sind $\Phi(x+1)$, Φx , Ψx , $\Psi(x+1)$ die besonderen Werthe solcher Functionen $\Phi(x+t)$, $\Psi(x+t)$, für welche die Gleichungen

$$\Phi(x+t) - \Phi(x+t_0) = \int_{t_0}^t \varphi(x+t) dt, \quad \Psi(x+t) - \Psi(x+t_0) = \int_{t_0}^t \varphi(x+t) dt$$

Statt haben, sie werden also bestimmten Integralen von $\varphi(x+t) dt$ und $\varphi(x+t) \cdot dt \cdot dt$ gleich, wenn man die Anfangswerthe der Summenreihen $f^{-1}(x-1)$, $f^{-1}(x+1)$, $f^{-2}x$, $f^{-2}(x+1)$ auf geeignete Weise ausgewählt.

Die Ableitung der Reihen für Φ und Ψ aus der dritten und vierten der obigen Gleichungen für $\varphi(x+t)$ erhält man unmittelbar, wenn man die Integrationen so ausführt, dass zunächst die Ausdrücke für $\Phi(x+1) - \Phi(x-1)$, $\Phi(x+1) - \Phi x$, $\Psi(x+1) - 2\Psi x + \Psi(x-1)$ und $\Psi(x+1) - 2\Psi(x+1) + \Psi(x-1)$ entstehen.

SCHERING.

DETERMINATIO ATTRACTIONIS

QUAM IN PUNCTUM QUODVIS POSITIONIS DATAE

EXERCERET PLANETA SI EIUS MASSA

PER TOTAM ORBITAM

RATIONE TEMPORIS QUO SINGULAE PARTES DESCRIBUNTUR

UNIFORMITER ESSET DISPERTA

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM EXHIBITA 1818. IAN. 17.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. IV.
Gottingae MDCCCXVIII.