



桑木文庫
洋書

CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

DRITTER BAND

MIT ZWÖLF STEINDRUCKTAFELN

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

1866.

物理
03
G
2.3

九州帝國大學理學部
8305
物理學教室

九州帝國大學工學部
807853
昭和 年 月 日
數學力學物理學教室

桑本文庫
洋書
0355

CARL FRIEDRICH GAUSS WERKE

BAND III.

理学部 洋 週及
022232002005371
九州大学蔵書



CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

DRITTER BAND



HERAUSGEGEBEN

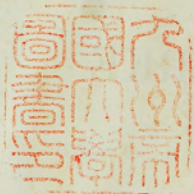
VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

1866.



DEMONSTRATIO NOVA

THEOREMATIS

OMNEM FUNCTIONEM ALGEBRAICAM
RATIONALEM INTEGRAM

UNIUS VARIABILIS

IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADUS

RESOLVI POSSE

QUAM PRO

OBTINENDIS SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

INCLITO PHILOSOPHORUM ORDINI

ACADEMIAE IULIAE CAROLINAE

EXHIBUIT

CAROLUS FRIDERICUS GAUSS

HELMSTADII

APUD C. G. FLECKEISEN. MDCCCLXXXIX.



DEMONSTRATIO NOVA THEOREMATIS
OMNEM FUNCTIONEM ALGEBRAICAM RATIONALEM INTEGRAM
UNIUS VARIABILIS

IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADUS RESOLVI POSSE.

1.

Quaelibet aequatio algebraica determinata reduci potest ad formam

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$$

ita ut m sit numerus integer positivus. Si partem primam huius aequationis per X denotamus, aequationique $X = 0$ per plures valores inaequales ipsius x satisfieri supponimus, puta ponendo $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$ etc. functio X per productum e factoribus $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ etc. divisibilis erit. Vice versa, si productum e pluribus factoribus simplicibus $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ etc. functionem X metitur: aequationi $X = 0$ satisfiet, aequando ipsam x cuicunque quantitatam α , β , γ etc. Denique si X producto ex m factoribus talibus simplicibus aequalis est (sive omnes diversi sint, sive quidam ex ipsis identici): alii factores simplices praeter hos functionem X metiri non poterunt. Quamobrem aequatio m^{th} gradus plures quam m radices habere nequit; simul vero patet, aequationem m^{th} gradus *pauciores* radices habere posse, etsi X in m factores simplices resolvable sit: si enim inter hos factores aliqui sunt identici, multitudo modorum diversorum aequationi satisfaciendi necessario minor erit quam m . Attamen concinnitatis caussa geometrae dicere maluerunt, aequationem in hoc quoque casu m radices habere, et tantummodo quasdam ex ipsis aequales inter se evadere: quod utique sibi permittere potuerunt.



2.

Quae hucusque sunt enarrata, in libris algebraicis sufficienter demonstrantur neque rigorem geometricum uspiam offendunt. Sed nimis praepropere et sine praevia demonstratione solida adoptavisse videntur analystae theorema cui tota fere doctrina aequationum superstructa est: *Quamvis functionem talem ut X semper in m factores simplices resolvi posse*, sive hoc quod cum illo prorsus conspirat, *quamvis aequationem m^{ti} gradus revera habere m radices*. Quum iam in aequationibus secundi gradus saepissime ad tales casus perveniatur, qui theoremati huic repugnant: algebraistae, ut hos illi subiicerent, coacti fuerunt, fingere quantitatem quandam imaginariam cuius quadratum sit -1 , et tum agnoverunt, si quantitates formae $a+b\sqrt{-1}$ perinde concedantur ut reales, theorema non modo pro aequationibus secundi gradus verum esse, sed etiam pro cubicis et biquadraticis. Hinc vero neutiquam inferre licuit, admissis quantitatibus formae $a+b\sqrt{-1}$ cuiusvis aequationi quinti superiorisve gradus satisfieri posse, aut uti plerumque exprimitur (quamquam phrasin lubricam minus probarem) radices cuiusvis aequationis ad formam $a+b\sqrt{-1}$ reduci posse. Hoc theorema ab eo, quod in titulo huius scripti enunciatur, nihil differt. si ad rem ipsam spectas, huiusque demonstrationem novam rigorosam tradere, constituit propositum praesentis dissertationis.

Ceterum ex eo tempore, quo analystae comperti sunt, infinite multas aequationes esse, quae nullam omnino radicem haberent, nisi quantitates formae $a+b\sqrt{-1}$ admittantur, tales quantitates fictitiae tamquam peculiare quantitatum genus, quas *imaginarías* dixerunt, ut a *realibus* distinguerentur, consideratae et in totam analysin introductae sunt; quoniam iure? hoc loco non disputo. — Demonstrationem meam absque omni quantitatum imaginaryarum subsidio absolvi, etsi eadem libertate, qua omnes recentiores analystae usi sunt, etiam mihi uti liceret.

3.

Quamvis ea, quae in plerisque libris elementaribus tamquam demonstratio theorematís nostri afferuntur, tam levia sint, tantumque a rigore geometrico abhorreant, ut vix mentione sint digna: tamen, ne quid decesse videatur, paucis illa attingam. — Ut demonstrent, quamvis aequationem

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$$

sive $X = 0$, revera habere m radices, suscipiunt probare, X in m factores simplices resolvi posse. Ad hunc finem assumunt m factores simplices $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$ etc. ubi α , β , γ etc. adhuc sunt incognitae, productumque ex illis aequale ponunt functioni X . Tum ex comparatione coefficientium deducunt m aequationes, ex quibus incognitas α , β , γ etc. determinari posse aiunt, quippe quarum multitudo etiam sit m . Scilicet $m-1$ incognitas eliminari posse, unde emergere aequationem, quae, quam placuerit, incognitam solam contineat. Ut de reliquis, quae in tali argumentatione reprehendi possent, taceam, quaecumque tantummodo, unde certi esse possimus, ultimam aequationem revera ullam radicem habere? Quidni fieri posset, ut neque huic ultimae aequationi neque propositae, ulla magnitudo in toto quantitatum realium atque imaginaryarum ambitu satisfaciatur? — Ceterum periti facile perspicient, hanc ultimam aequationem necessario cum proposita *omnino identicam* fore, siquidem calculus rite fuerit institutus; scilicet eliminatis incognitis β , γ etc. aequationem

$$\alpha^m + A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$$

prodire debere. Plura de isto ratiocinio exponere necesse non est.

Quidam auctores, qui debilitatem huius methodi percepisse videntur, tamquam *axioma* assumunt, quamvis aequationem revera habere radices, si non possibiles, impossibiles. Quid sub quantitatibus possibilibus et impossibilibus intelligi velint, haud satis distincte exposuisse videntur. Si quantitates possibiles idem denotare debent ut reales, impossibiles idem ut imaginariae: axioma illud neutiquam admitti potest, sed necessario demonstratione opus habet. Attamen in illo sensu expressiones accipiendae non videntur, sed axiomatis mens haec potius videtur esse: 'Quamquam nondum sumus certi, necessario dari m quantitates reales vel imaginarias, quae alicui aequationi datae m^{ti} gradus satisficiant, tamen aliquantisper hoc supponemus; nam si forte contingeret, ut tot quantitates reales et imaginariae inveniri nequeant, certe effugium patebit, ut dicamus reliquas esse impossibiles.' Si quis hac phrasi uti mavult quam simpliciter dicere, aequationem in hoc casu tot radices non habituram, a me nihil obstat: at si tum his radicibus impossibilibus ita utitur tamquam aliquid veri sint, et e. g. dicit, summam omnium radicum aequationis $x^m + Ax^{m-1} + \text{etc.} = 0$, esse $= -A$, etiamsi impossibiles inter illas sint (quae expressio proprie significat, *etiamsi aliquae deficient*): hoc neutiquam probare possum. Nam radices impossi-

biles, in tali sensu acceptae, tamen sunt radices, et tum axioma illud nullo modo sine demonstratione admitti potest, neque inepte dubitares, annon aequationes exstare possint, quae ne impossibiles quidem radices habeant?*)

4.

Antequam aliorum geometrarum demonstrationes theorematis nostri recensam, et quae in singulis reprehendenda mihi videantur, exponam: observo sufficere si tantummodo ostendatur, omni aequationi quantivis gradus

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M = 0$$

sive $X = 0$ (ubi coefficientes A, B etc. reales esse supponuntur) ad minimum uno modo satisfieri posse per valorem ipsius x sub forma $a + b\sqrt{-1}$ contentum. Constat enim, X tunc divisibile fore per factorem realem secundii gradus $xx - 2ax + aa + bb$, si b non fuerit $= 0$, et per factorem realem simplicem $x - a$, si $b = 0$. In utroque casu quotiens erit realis, et inferioris gradus quam X ; et quum hic eadem ratione factorem realem primi secundive gradus habere de-

*) Sub quantitate imaginaria hic semper intelligo quantitatem in forma $a + b\sqrt{-1}$ contentam, quamvis b non est $= 0$. In hoc sensu expressio illa semper ab omnibus geometris primae notae accepta est, neque audiendos censeo, qui quantitatem $a + b\sqrt{-1}$ in eo solo casu imaginariam vocare voluerunt ubi $a = 0$, impossibilem vero quando non sit $a = 0$, quum haec distinctio neque necessaria sit neque ullius utilitatis. — Si quantitates imaginariae omnino in analysi retineri debent (quod pluribus rationibus consultius videtur, quam ipsas abolere, modo satis solide stabiliantur): necessario tamquam aequae possibiles ac reales spectandae sunt; quamobrem reales et imaginarias sub denominatione communi *quantitatum possibilium* complecti mallet: contra, *impossibilem* dicerem quantitatem, quae conditionibus satisfacere debeat, quibus ne imaginariis quidem concessis satisfieri potest, attamen ita, ut *phrasis* haec idem significet ac si dicas, talem quantitatem in toto magnitudinum ambitu non dari. Hinc verò genus peculiare quantitatum formare, neutiquam concederem. Quodsi quis dicat, triangulum rectilineum aequilaterum rectangulum impossibile esse, nemo erit qui neget. At si tale triangulum impossibile tamquam novum triangulorum genus contemplari, aliasque triangulorum proprietates ad illud applicare voluerit, equis risum teneat? Hoc esset verbis ludere seu potius abuti. — Quamvis vero etiam summi mathematici saepius veritates, quae quantitatum ad quas spectant possibilitatem manifeste supponant, ad tales quoque applicaverint quarum possibilitas adhuc dubia erat; neque abonerim, huiusmodi licentias plerumque ad solam formam et quasi velamen ratiociniorum pertinere, quod veri geometrae acies mox penetrare possit: tamen consultius, scientiaequae, quae tamquam perfectissimum claritatis et certitudinis exemplar merito celebratur, subtilitate magis dignum videtur, tales libertates aut omnino proscribere, aut saltem parcius neque alias ipsis uti, nisi ubi etiam minus exercitati perspicere valeant, rem etiam absque illarum subsidio etsi forsitan minus breviter tamen aequae rigorose absolvi potuisse. — Ceterum haud negaverim, ea quae hic contra impossibilem abusum dixi, quodam respectu etiam contra imaginarias obici posse: sed harum vindicationem nec non totius huius rei expositionem uberiorem ad aliam occasionem mihi reservo.

beat, patet, per continuationem huius operationis functionem X tandem in factores reales simplices vel duplices resolutum iri, aut, si pro singulis factoribus realibus duplicibus binos imaginarios simplices adhibere mavis, in m factores simplices.

5.

Prima theorematis demonstratio illustri geometrae d'ALEMBERT debetur, *Recherches sur le calcul intégral, Histoire de l'Acad. de Berlin, Année 1746*, p. 182 sqq. Eadem extat in BOUGAINVILLE, *Traité du calcul intégral, à Paris 1754*, p. 47 sqq. Methodi huius praecipua momenta haec sunt.

Primo ostendit, si functio quaecunque X quantitatis variabilis x fiat $= 0$ aut pro $x = 0$ aut pro $x = \infty$, atque valorem infinite parvum realem positivum nancisci possit tribuendo ipsi x valorem realem: hanc functionem etiam valorem infinite parvum realem negativum obtinere posse per valorem ipsius x vel realem vel sub forma imaginaria $p + q\sqrt{-1}$ contentum. Scilicet designante Ω valorem infinite parvum ipsius X , et ω valorem respondentem ipsius x , asserit ω per seriem valde convergentem $a\Omega^2 + b\Omega^5 + c\Omega^7$ etc. exprimi posse, ubi exponentes α, β, γ etc. sint quantitates rationales continuo crescentes, et quae adeo ad minimum in distantia certa ab initio positivae evadant, terminosque, in quibus adsint, infinite parvos reddant. Iam si inter omnes hos exponentes nullus occurrat, qui sit fractio denominatoris paris, omnes terminos seriei reales fieri tum pro positivo tum pro negativo valore ipsius Ω ; si vero quaedam fractiones denominatoris paris inter illos exponentes reperiantur, constare, pro valore negativo ipsius Ω terminos respondentes in forma $p + q\sqrt{-1}$ contentos esse. Sed propter infinitam seriei convergentiam in casu priori sufficere, si terminus primus (i. e. maximus) solus retineatur, in posteriori ultra eum terminum, qui partem imaginariam primus producat, progredi opus non esse.

Per similia ratiocinia ostendi posse, si X valorem negativum infinite parvum ex valore reali ipsius x assequi possit: functionem illam valorem realem positivum infinite parvum ex valore reali ipsius x vel ex imaginario sub forma $p + q\sqrt{-1}$ contento adipisci posse.

Hinc secundo concludit, etiam valorem aliquem realem finitum ipsius X dari, in casu priori negativum, in posteriori positivum, qui ex valore imaginario ipsius x sub forma $p + q\sqrt{-1}$ contento produci possit.

Hinc sequitur, si X sit talis functio ipsius x , quae valorem realem V ex valore ipsius x reali v obtineat. atque etiam valorem realem quantitate infinite parva vel maiorem vel minorem ex valore reali ipsius x assequatur, eandem etiam valorem realem quantitate infinite parva atque adeo finita vel minorem vel maiorem quam V (resp.) recipere posse, tribuendo ipsi x valorem sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentum. Hoc nullo negotio ex praeced. derivatur, si pro X substitui concipitur $V+Y$, et pro x , $v+y$.

Tandem affirmat ill. d'ALEMBERT, si X totum intervallum aliquod inter duos valores reales R, S percurrere posse supponatur (i. e. tum ipsi R , tum ipsi S , tum omnibus valoribus realibus intermediis aequalis fieri), tribuendo ipsi x valores semper in forma $p+q\sqrt{-1}$ contentos; functionem X quavis quantitate finita reali adhuc augeri vel diminui posse (prout $S > R$ vel $S < R$), manente x semper sub forma $p+q\sqrt{-1}$. Si enim quantitas realis U daretur (inter quam et R supponitur S iacere), cui X per talem valorem ipsius x aequalis fieri non posset, necessario valorem maximum ipsius X dari (scilicet quando $S > R$; minimum vero, quando $S < R$), puta T , quem ex valore ipsius x , $p+q\sqrt{-1}$, consequeretur, ita ut ipsi x nullus valor sub simili forma contentus tribui posset, qui functionem X vel minimo excessu propius versus U promoveret. Iam si in aequatione inter X et x pro x ubique substituatur $p+q\sqrt{-1}$, atque tum pars realis, tum pars, quae factorem $\sqrt{-1}$ implicet, hoc omisso, cifrae aequentur: ex duabus aequationibus hinc prodeuntibus (in quibus p, q et X cum constantibus permixtae occurrunt) per eliminationem duas alias elici posse, in quarum altera p, X et constantes reperiantur, altera a p libera solas q, X et constantes involvat. Quamobrem quum X per valores reales ipsarum p, q omnes valores ab R usque ad T percurrerit, per praeced. X versus valorem U adhuc propius accedere posse tribuendo ipsius p, q valores tales $\alpha+\gamma\sqrt{-1}, \delta+\varepsilon\sqrt{-1}$ resp. Hinc vero fieri $x = \alpha-\delta+(\gamma+\varepsilon)\sqrt{-1}$, i. e. adhuc sub forma $p+q\sqrt{-1}$ esse, contra hyp.

Iam si X functionem talem ut $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + M$ denotare supponitur, nullo negotio perspicitur, ipsi x tales valores reales tribui posse, ut X totum aliquod intervallum inter duos valores reales percurrat. Quare x valorem aliquem sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentum talem etiam nancisci poterit, unde X fiat $= 0$. Q. E. D. *)

*) Observare convenit, ill. d'ALEMBERT in sua huius demonstrationis expositione considerationes geomet-

6.

Quae contra demonstrationem d'ALEMBERTIANAM obliici posse videntur, ad haec fere redeunt.

1. Ill. d'A. nullum dubium movet de *existentia* valorum ipsius x , quibus valores dati ipsius X respondeant, sed illam supponit, solamque *formam* istorum valorum investigat.

Quamvis vero haec obiectio per se gravissima sit, tamen hic ad solam dictionis formam pertinet, quae facile ita corrigi potest, ut illa penitus destruat.

2. Assertio, ω per talem seriem qualem ponit semper exprimi posse, certo est falsa, si X etiam functionem quamlibet transcendente designare debet (uti d'A. pluribus locis innuit). Hoc e. g. manifestum est, si ponitur $X = e^{\frac{1}{\log x}}$, sive $x = \frac{1}{\log X}$. Attamen si demonstrationem ad eum casum restringimus, ubi X est functio algebraica ipsius x (quod in praesenti negotio sufficit), propositio utique est vera. — Ceterum d'A. nihil pro confirmatione suppositionis suae attulit; cel. BOUGAINVILLE supponit, X esse functionem algebraicam ipsius x , et ad inventionem seriei parallelogrammum NEWTONIANUM commendat.

3. Quantitatibus infinite parvis liberius utitur, quam eum geometrico rigore consistere potest aut saltem nostra aetate (ubi illae merito male audiunt) ab analysta scrupulose concederetur, neque etiam saltum a valore infinite parvo ipsius Ω ad finitum satis luculenter explicavit. Propositionem suam, Ω etiam valorem aliquem finitum consequi posse, non tam ex possibilitate valoris infinite parvi ipsius Ω concludere videtur quam inde potius, quod denotante Ω quantitatem valde parvam, propter magnam seriei convergentiam, quo plures termini seriei accipiantur, eo propius ad valorem verum ipsius ω accedatur, aut, quo plurium partium summa pro ω accipiat, eo exactius aequationi, quae relationem inter ω et Ω sive x et X exhibeat, satisfactum iri. Praeterea quod tota haec argumentatio nimis vaga videtur, quam ut ulla conclusio rigorosa inde colligi possit: observo, utique dari series, quae quantumvis parvus valor quantitati,

tricas adhibuisse, atque X tamquam abscissam, x tamquam ordinatam curvae spectavisse (secundum morem omnium geometrarum primae huius saeculi partis, apud quos notio functionum minus usitata erat). Quia vero omnia ipsius ratiocinia, si ad ipsorum essentiam solam respiciis, nullis principiis geometricis, sed pure analyticis innituntur, et curva imaginaria, ordinataeque imaginariae expressiones duriores esse lectoremque hodiernum facilius offendere posse videntur, formam representationis mere analyticam hic adhibere malui. Hanc annotationem ideo adieci, ne quis demonstrationem d'ALEMBERTIANAM ipsam cum hac succincta expositione comparans aliquid essentielle, immutatum esse suspiceretur.



secundum cuius potestates progrediuntur, tribuatur, nihilominus semper divergant, ita ut si modo satis longe continentur, ad terminos quavis quantitate data maiores pervenire possit *). Hoc evenit, quando coefficientes seriei progressionem hypergeometricam constituunt. Quamobrem necessario demonstrari debuisset, talem seriem hypergeometricam in casu praesenti provenire non posse.

Ceterum mihi videtur, ill. d'A. hic non recte ad series infinitas confugisse, hasque ad stabiliendum theorema hoc fundamentale doctrinae aequationum haud idoneas esse.

4. Ex suppositione, X obtinere posse valorem S neque vero valorem U , nondum sequitur, inter S et U necessario valorem T iacere, quem X attingere sed non superare possit. Superest adhuc alius casus: scilicet fieri posset, ut inter S et U limes situs sit, ad quem accedere quidem quam prope velis possit X , ipsum vero nihilominus numquam attingere. Ex argumentis ab ill. d'A. allatis tantummodo sequitur, X omnem valorem, quem attigerit, adhuc quantitate finita superare posse, puta quando evaserit $= S$, adhuc quantitate aliqua finita Ω augeri posse; quo facto, novum incrementum Ω' accedere, tunc iterum augmentum Ω'' etc., ita ut quotcumque incrementa iam adiecta sint, nullum pro ultimo haberi debeat, sed semper aliquod novum accedere possit. At quamvis multitudo incrementorum possibilium nullis limitibus sit circumscripta: tamen utique fieri posset, ut si incrementa $\Omega, \Omega', \Omega''$ etc. continuo decrescerent, nihilominus summa $S + \Omega + \Omega' + \Omega''$ etc. limitem aliquem numquam attingeret, quotcumque termini considerentur.

Quamquam hic casus occurrere non potest, quando X designat functionem algebraicam integram ipsius x : tamen sine demonstratione, hoc fieri non posse, methodus necessario pro incompleta habenda est. Quando vero X est functio transcendens, sive etiam algebraica fracta, casus ille utique locum habere potest, e.g. semper quando valori cuidam ipsius X valor infinite magnus ipsius x respon-

*) Hacce occasione obiter adnoto, ex harum serierum numero plurimas esse, quae primo aspectu maxime convergentes videantur, e.g. ad maximam partem eas, quibus ill. EULER in parte poster. *Inst. Calc. Diff.* Cap. VI. ad summam aliarum serierum quam proxime assignandam utitur p. 441—471 (reliquae enim series p. 475—478 revera convergere possunt), quod, quantum scio, a nemine hucusque observatum est. Quocirca magnopere optandum esset, ut dilucide et rigorose ostenderetur, cur huiusmodi series, quae primo citissime, dein paulatim lentius lentiusque convergunt, tandemque magis magisque divergunt, nihilominus summam proximam veram suppedient, si modo non nimis multi termini capiantur, et quousque talis summa pro exacta tuto haberi possit?

det. Tum methodus d'ALEMBERTIANA non sine multis ambagibus, et in quibusdam casibus nullo forsitan modo, ad principia indubitata reduci posse videtur.

Propter has rationes demonstrationem d'ALEMBERTIANAM pro satisfaciente habere nequeo. Attamen hoc non obstante verus demonstrationis nervus probandi per omnes obiectiones neutiquam infringi mihi videtur, credoque eidem fundamento (quamvis longe diversa ratione, et saltem maiori circumspicientia) non solum demonstrationem rigorosam theorematis nostri superstrui, sed ibinde omnia peti posse, quae circa aequationum *transcendentium* theoriam desiderari queant. De qua re gravissima alia occasione fusi agam; conf. interim infra art. 24.

7.

Post d'ALEMBERTUM ill. EULER disquisitiones suas de eodem argumento promulgavit, *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, *Hist. de l'Acad. de Berlin A. 1749*, p. 223 sqq. Methodum duplicem hic tradidit: prioris summa continetur in sequentibus.

Primo ill. E. suscipit demonstrare, si m denotet quamcunque dignitatem numeri 2, functionem $x^{2m} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \text{etc.} + M = X$ (in qua coefficienti termini secundi est $= 0$) semper in duos factores reales resolvi posse, in quibus x usque ad m dimensiones ascendat. Ad hunc finem duos factores assumit,

$$x^m - ux^{m-1} + ax^{m-2} + bx^{m-3} + \text{etc.}, \text{ et } x^m + ux^{m-1} + \lambda x^{m-2} + \mu x^{m-3} \text{ etc.}$$

ubi coefficientes u, a, b etc. λ, μ etc. adhuc incogniti sunt, horumque productum aequale ponit functioni X . Tum coefficientium comparatio suppediat $2m-1$ aequationes, manifestoque demonstrari tantummodo debet, incognitis u, a, b etc. λ, μ etc. (quarum multitudo etiam est $2m-1$) tales valores reales tribui posse, qui aequationibus illis satisfaciant. Iam E. affirmat, si primo u tanquam cognita consideretur, ita ut multitudo incognitarum unitate minor sit quam multitudo aequationum. his secundum methodos algebraicas notas rite combinatis omnes a, b etc. λ, μ etc. rationaliter et sine ulla radicum extractione per u et coefficientes B, C etc. determinari posse, adeoque valores reales nancisci, simulac u realis fiat. Praeterea vero omnes a, b etc. λ, μ etc. eliminari poterunt, ita ut prodeat aequatio $U = 0$, ubi U erit functio integra solius u et coefficientium cognitorum. Hanc aequationem ipsam per methodum eliminationis vulgarem evolvere, opus immensum foret, quando aequatio proposita $X = 0$ est gradus ali-



quantum alti; et pro gradu indeterminato, plane impossibile (iudice ipso E. p. 239). Attamen hic sufficit, unam illius aequationis proprietatem novisse, scilicet quod terminus ultimus in U (qui incognitam u non implicat) necessario est negativus, unde sequi constat, aequationem ad minimum unam radicem realem habere, sive u et proin etiam α, β etc. λ, μ etc. ad minimum uno modo realiter determinari posse: illam vero proprietatem per sequentes reflexiones confirmare licet. Quum $x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \text{etc.}$ supponatur esse factor functionis X : necessario u erit summa m radicum aequationis $X = 0$, adeoque totidem valores habere debet, quot modis diversis ex $2m$ radicibus m excerpti possunt, sive per principia calculi combinationum $\frac{2m \cdot 2m-1 \cdot 2m-2 \cdot \dots \cdot m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}$ valores. Hic numerus semper erit impariter par (demonstrationem haud difficilem supprimo): si itaque ponitur $= 2k$, ipsius semissis k impar erit; aequatio $U = 0$ vero erit gradus $2k^{\text{ti}}$. Iam quoniam in aequatione $X = 0$ terminus secundus deest: summa omnium $2m$ radicum erit 0; unde patet, si summa quarumcunque m radicum fuerit $+p$, reliquarum summam fore $-p$, i. e. si $+p$ est inter valores ipsius u , etiam $-p$ inter eosdem erit. Hinc E. concludit, U esse productum ex k factoribus duplicibus talibus $uu - pp, uu - qq, uu - rr$ etc., denotantibus $+p, -p, +q, -q$ etc. omnes $2k$ radices aequationis $U = 0$, unde, propter multitudinem imparem horum factorum, terminus ultimus in U erit quadratum producti pqr etc. signo negativo affectum. Productum autem pqr etc. semper ex coefficientibus B, C etc. rationaliter determinari potest, adeoque necessario erit quantitas realis. Huius itaque quadratum signo negativo affectum certo erit quantitas negativa. Q. E. D.

Quum hi duo factores reales ipsius X sint gradus m^{ti} atque m potestas numeri 2: eadem ratione uterque rursus in duos factores reales $\frac{1}{2}m$ dimensionum resolvi poterit. Quoniam vero per repetitam dimidiationem numeri m necessario tandem ad binarium pervenitur, manifestum est, per continuationem operationis functionem X tandem in factores reales secundi gradus resolutam haberi.

Quodsi vero functio talis proponitur, in qua terminus secundus non deest, puta $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \text{etc.} + M$, designante etiamnum $2m$ potestatem binariam, haec per substitutionem $x = y - \frac{A}{2m}$ transibit in similem functionem termino secundo carentem. Unde facile concluditur, etiam illam functionem in factores reales secundi gradus resolubilem esse.

Denique proposita functione gradus n^{ti} , designante n numerum, qui non

est potestas binaria: ponatur potestas binaria proxime maior quam $n, = 2m$, multipliceturque functio proposita per $2m - n$ factores simplices reales quoscunque. Ex resolubilitate producti in factores reales secundi gradus, nullo negotio derivatur, etiam functionem propositam in factores reales secundi vel primi gradus resolubilem esse debere.

S.

Contra hanc demonstrationem obiici potest

1. Regulam, secundum quam E. concludit, ex $2m - 1$ aequationibus $2m - 2$ incognitis α, β etc. λ, μ etc. omnes rationaliter determinari posse, nequam esse generalem, sed saepissime exceptionem pati. Si quis e.g. in art. 3. aliqua incognitarum tamquam cognita spectata, reliquas per hanc et coefficientes datos rationaliter exprimere tentat, facile inveniet, hoc esse impossibile, nullamque quantitatem incognitarum aliter quam per aequationem $m - 1^{\text{ti}}$ gradus determinari posse. Quamquam vero hic statim a priori perspicui potest, illud necessario ita evenire debuisset: tamen merito dubitari posset, annon etiam in casu praesenti pro quibusdam valoribus m res eodem modo se habeat, ut incognitae α, β etc. λ, μ etc. ex u, B, C etc. aliter quam per aequationem gradus forsitan maioris quam $2m$ determinari nequeant. Pro eo casu, ubi aequatio $X = 0$ est quarti gradus, E. valores rationales coefficientium per u et coefficientes datos eruit; idem vero etiam in omnibus aequationibus altioribus fieri posse, utique explanatione ampliori egebat. — Ceterum operae pretium esse videtur, in formulas illas, quae α, β etc. rationaliter per u, B, C etc. exprimant, profundius et generalissime inquirere; de qua re aliisque ad eliminationis theoriam (argumentum haudquaquam exhaustum) pertinentibus alia occasione fusius agere suscipiam.

2. Etiamsi autem demonstratum fuerit, cuiusvis gradus sit aequatio $X = 0$, semper formulas inveniri posse, quae ipsas α, β etc. λ, μ etc. rationaliter per u, B, C etc. exhibeant: tamen certum est, pro valoribus quibusdam determinatis coefficientium B, C etc. formulas illas indeterminatas evadere posse, ita ut non solum impossibile sit, incognitas illas rationaliter ex u, B, C etc. definire, sed adeo revera quibusdam in casibus valori alicui reali ipsius u nulli valores reales ipsarum α, β etc. λ, μ etc. respondeant. Ad confirmationem huius rei brevitatis gratia ablego lectorem ad diss. ipsam E., ubi p. 236 aequatio quarti gradus fusius explicata est. Statim quisque videbit, formulas pro coefficientibus α, β indeter-



minatas fieri, si $C = 0$ et pro u assumatur valor 0, illorumque valores non solum sine extractione radicum assignari non posse, sed adeo ne reales quidem esse, si fuerit $BB - 4D$ quantitas negativa. Quamquam vero in hoc casu u adhuc alios valores reales habere, quibus valores reales ipsarum a, b respondeant, facile perspicui potest: tamen vereri aliquis posset, ne huius difficultatis enodatio (quam E. omnino non attigit) in aequationibus altioribus multo maiorem operam facessat. Certe haec res in demonstratione exacta neutiquam silentio praeteriri debet.

3. Ill. E. supponit tacite, aequationem $X = 0$ habere $2m$ radices, harumque summam statuit $= 0$, ideo quod terminus secundus in X abest. Quomodo de hac licentia (qua omnes auctores de hoc argumento utuntur) sentiam, iam supra art. 3 declaravi. Propositio, summam omnium radicum aequationis alicuius coefficienti primo, mutato signo, aequalem esse, ad alias aequationes applicanda non videtur, nisi quae radices habent: iam quum per hanc ipsam demonstrationem evinci debeat, aequationem $X = 0$ revera radices habere, haud permissum videtur, harum existentiam supponere. Sine dubio ii, qui huius paralogismi fallaciam nondum penetraverunt, respondebunt, *hic non demonstrari, aequationi $X = 0$ satisfieri posse* (nam hoc dicere vult expressio, eam habere radices), *sed tantummodo, ipsi per valores ipsius x sub forma $a + b\sqrt{-1}$ contentos satisfieri posse; illud vero tamquam axioma supponi.* At quum aliae quantitatum formae, praeter realem et imaginariam $a + b\sqrt{-1}$ concipi nequeant, non satis luculentum videtur, quomodo id, quod demonstrari debet, ab eo, quod tamquam axioma supponitur, differat; quin adeo si possibile esset adhuc alias formas quantitatum excogitare, puta formam F, F', F'' etc.: tamen sine demonstratione admitti non deberet, cuius aequationi per aliquem valorem ipsius x aut realem, aut sub forma $a + b\sqrt{-1}$, aut sub forma F , aut sub F' etc. contentum satisfieri posse. Quamobrem axioma illud alium sensum habere nequit quam hunc: Cuius aequationi satisfieri potest aut per valorem realem incognitae, aut per valorem imaginarium sub forma $a + b\sqrt{-1}$ contentum, aut forsitan per valorem sub forma alia lucusque ignota contentum, aut per valorem, qui sub nulla omnino forma continetur. Sed quomodo huiusmodi quantitates, de quibus ne ideam quidem fingere potes — vera umbrae umbra — summari aut multiplicari possint, hoc ea perspicuitate, quae in mathesi semper postulatur, certo non intelligitur *).

*) Tota haec res multum illustrabitur per aliam disquisitionem sub prelo iam sudantem, ubi in argu-

Ceterum conclusiones, quas E. ex suppositione sua elicit, per has obiectiones haudquaquam suspectas reddere volo; quin potius certus sum, illas per methodum neque difficilem neque ab EULERIANA multum diversam ita comprobari posse, ut nemini vel minimus scrupulus superesse debeat. Solam *formam* reprehendo, quae quamvis in *inveniendis* novis veritatibus magnae utilitatis esse possit, tamen in *demonstrando*, coram publico, minime probanda videtur.

4. Pro demonstratione assertionis, productum pqr etc. ex coefficientibus in X rationaliter determinari posse, ill. E. nihil omnino attulit. Omnia, quae hac de re in aequationibus *quarti gradus* explicat, haec sunt (ubi a, b, c, d sunt radices aequationis propositae $x^4 + Bxx + Cx + D = 0$):

‘On m’objectera sans doute, que j’ai supposé ici, que la quantité pqr était une quantité réelle, et que son carré $ppqrr$ était affirmatif; ce qui était encore douteux, vu que les racines a, b, c, d étant imaginaires, il pourrait bien arriver, que le carré de la quantité pqr , qui en est composée, fut négatif. Or je réponds à cela que ce cas ne saurait jamais avoir lieu; car quelque imaginaires que soient les racines a, b, c, d , on sait pourtant, qu’il doit y avoir $a + b + c + d = 0$; $ab + ac + ad + bc + bd + cd = B$; $abc + abd + acd + bcd = -C$; $abcd = D$, ces quantités B, C, D étant réelles. Mais puisque $p = a + b$, $q = a + c$, $r = a + d$, leur produit $pqr = (a + b)(a + c)(a + d)$ est déterminable comme on sait, par les quantités B, C, D , et sera par conséquent réel, tout comme nous avons vu, qu’il est effectivement $pqr = -C$, et $ppqrr = CC$. On reconnaîtra aisément de même, que dans les plus hautes équations cette même circonstance doit avoir lieu, et qu’on ne saurait me faire des objections de ce côté. Conditionem, productum pqr etc. rationaliter per B, C etc. determinari posse, E. nullibi adiecit, attamen semper subintellexisse videtur, quum absque illa demonstratio nullam vim habere possit. Iam verum quidem est in aequationibus quarti gradus, si productum $(a + b)(a + c)(a + d)$ evoluitur, obtineri $aa(a + b + c + d) + abc + abd + acd + bcd = -C$, attamen non satis perspicuum videtur, quomodo in omnibus aequationibus superioribus productum rationaliter

mento longe quidem diverso, nihilominus tamen analogo, licentiam similem prorsus eodem iure usurpare potuissem, ut hic in aequationibus ab omnibus analysis factum est. Quamquam vero plurium veritatum demonstrationes adiumento talium fictionum paucis verbis absolvere liceisset, quae absque his perquam difficiles evadunt et subtilissima artificia requirunt, tamen illis omnino abstinere malui, speroque, paucis me satisfactorum fuisse, si analystarum methodum imitatus essem.

*) E. per errorem habet C , unde etiam postea perperam statuit $pqr = C$.

per coefficients determinari possit. Clar. de FOXCENEX, qui primus hoc observavit (*Miscell. phil. math. soc. Taurin.* T. I. p. 117), recte contendit, sine demonstratione rigorosa huius propositionis methodum omnem vim perdere, illam vero satis difficilem sibi videri confitetur, et quam viam frustra tentaverit, enarrat*). Attamen haec res haud difficulter per methodum sequentem (cuius summam addigitarum tantummodo hic possum) absolvitur: Quamquam in aequationibus quarti gradus non satis clarum est, productum $(a+b)(a+c)(a+b)$ per coefficients B, C, D determinabile esse, tamen facile perspicui potest, idem productum etiam esse $= (b+a)(b+c)(b+b)$, nec non $= (c+a)(c+b)(c+b)$, denique etiam $= (b+a)(b+b)(b+c)$. Quare productum pqr erit quadrans summae $(a+b)(a+c)(a+b) + (b+a)(b+c)(b+b) + (c+a)(c+b)(c+b) + (b+a)(b+b)(b+c)$, quam, si evolvatur, fore functionem rationalem integram radicum a, b, c, d talem, in quam omnes eadem ratione ingrediantur, nullo negotio a priori praevideri potest. Tales vero functiones semper rationaliter per coefficients aequationis, cuius radices sunt a, b, c, d , exprimi possunt. — Idem etiam manifestum est, si productum pqr sub hanc formam redigatur:

$$\frac{1}{2}(a+b-c-d) \times \frac{1}{2}(a+c-b-d) \times \frac{1}{2}(a+b-d-c)$$

quod productum evolutum omnes a, b, c, d eodem modo implicaturum esse facile praevideri potest. Simul periti facile hinc colligent, quomodo hoc ad altiores aequationes applicari debeat. — Completam demonstrationis expositionem, quam hic apponere brevitatis non permittit, una cum uberiori disquisitione de functionibus plures variables eodem modo involventibus ad aliam occasionem mihi reservo.

Ceterum observo, praeter has quatuor obiectiones, adhuc quaedam alia in demonstratione E. reprehendi posse, quae tamen silentio praetereo, ne forte censor nimis severus esse videar, praesertim quum praecedentia satis ostendere videantur, demonstrationem in ea quidem forma, in qua ab E. proposita est, pro completa nequitiam haberi posse.

Post hanc demonstrationem, E. adhuc aliam viam theorema pro aequationibus, quarum gradus non est potestas binaria, ad alium aequationum resolutionem reducendi ostendit: attamen quum methodus haec pro aequationibus quarum

*) In hanc expositionem error irreparabilis videtur, scilicet p. 115. l. 5. loco characteris p (on choisissait seulement celles où entrât p etc.), necessario legere oportet, une même racine quelconque de l'équation proposée, aut simile quiddam, quum illud nullum sensum habeat.

gradus est potestas binaria, nihil doceat, insuperque omnibus obiectionibus praec. (praeter quartam) aequae obnoxia sit ut demonstratio prima generalis: haud necesse est illam hic fusius explicare.

9.

In eadem commentatione ill. E. theorema nostrum adhuc alia via confirmare annexus est p. 263, cuius summa continetur in his: Proposita aequatione $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2}$ etc. $= 0$, hucusque quidem expressio analytica, quae ipsius radices exprimat, inveniri non potuit, si exponens $n > 4$; attamen certum esse videtur (uti asserit E.), illam nihil aliud continere posse, quam operationes arithmeticas et extractiones radicum eo magis complicatas, quo maior sit n . Si hoc conceditur, E. optime ostendit, quantumvis inter se complicata sint signa radicalia, tamen formulae valorem semper per formam $M + N\sqrt{-1}$ repraesentabilem fore, ita ut M, N sint quantitates reales.

Contra hoc ratiocinium obiici potest, post tot tantorum geometrarum labores perexiguam spem superesse, ad resolutionem generalem aequationum algebraicarum umquam perveniendi, ita ut magis magisque verisimile fiat, talem resolutionem omnino esse impossibilem et contradictoriam. Hoc eo minus paradoxum videri debet, quum id, quod vulgo resolutio aequationis dicitur, proprie nihil aliud sit quam ipsius reductio ad aequationes puras. Nam aequationum purarum solutio hinc non docetur sed supponitur, et si radicem aequationis $x^n = H$ per $\sqrt[n]{H}$ exprimis, illam nequitiam solvisti, neque plus fecisti, quam si ad denotandam radicem aequationis $x^n + Ax^{n-1} +$ etc. $= 0$ signum aliquod excogitares, radicemque huic aequalem poneres. Verum est, aequationes puras propter facilitatem ipsarum radices per approximationem inveniendi, et propter nexum elegantem, quem omnes radices inter se habent, prae omnibus reliquis multum praestare, adeoque nequitiam vituperandum esse, quod analystae harum radices per signum peculiare denotaverunt: attamen ex eo, quod hoc signum perinde ut signa arithmetica additionis, subtractionis, multiplicationis, divisionis et eversionis ad dignitatem sub nomine *expressionum analyticarum* complexi sunt, minime sequitur cuiusvis aequationis radicem per illas exhiberi posse. Seu, missis verbis, sine ratione sufficienti supponitur, cuiusvis aequationis solutionem ad solutionem aequationum purarum reduci posse. Forsan non ita difficile foret, impossibilitatem iam pro quinto gradu omni rigore demonstrare, de qua re alio loco disquisitiones meas fusius proponam.

Hic sufficit, resolubilitatem generalem aequationum, in illo sensu acceptam, adhuc valde dubiam esse, adeoque demonstrationem, cuius tota vis ab illa suppositione pendet, in praesenti rei statu nihil ponderis habere.

10.

Postea etiam clar. DE FONCENEX, quum in demonstratione prima EULERI defectum animadvertisset (supra art. 8 obiect. 4), quem tollere non poterat, adhuc aliam viam tentavit et in comment. laudata p. 120 in medium protulit^{*)}. Quae consistit in sequentibus.

Proposita sit aequatio $Z = 0$, designante Z functionem m^{ti} gradus incognitae z . Si m est numerus impar, iam constat, aequationem hanc habere radicem realem; si vero m est par, clar. F. sequenti modo probare conatur, aequationem ad minimum unam radicem formae $p + q\sqrt{-1}$ habere. Sit $m = 2^n i$, designante i numerum imparem, supponaturque $zz + uz + M$ esse divisor functionis Z . Tunc singuli valores ipsius u erunt summae binarum radicum aequationis $Z = 0$ (mutato signo), quamobrem u habebit $\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2} = m'$ valores, et si u per aequationem $U = 0$ determinari supponitur (designante U functionem integram ipsius u et coefficientium cognitorum in Z), haec erit gradus m'^{ti} . Facile vero perspicitur, m' fore numerum formae $2^{n-1} i'$, designante i' numerum imparem. Iam nisi m' est impar, supponatur iterum, $uu + u'u + M'$ esse divisorem ipsius U , patetque per similia ratiocinia, u' determinari per aequationem $U' = 0$, ubi U' sit functio $\frac{m' \cdot m' - 1}{1 \cdot 2}$ ti gradus ipsius u' . Posito vero $\frac{m' \cdot m' - 1}{1 \cdot 2} = m''$, erit m'' numerus formae $2^{n-2} i''$, designante i'' numerum imparem. Iam nisi m'' est impar, statuatur $u'u' + u''u' + M''$ esse divisorem functionis U' , determinabiturque u'' per aequationem $U'' = 0$, quae si supponitur esse gradus m''^{ti} , m'' erit numerus formae $2^{n-3} i'''$. Manifestum est, in serie aequationum $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0$ etc. n^{tam} fore gradus imparis adeoque radicem realem habere. Statuamus brevitas gratia $n = 3$, ita ut aequatio $U'' = 0$ radicem realem u'' habeat, nullo enim negotio perspicitur, pro quovis alio valore ipsius n idem ratiocinium valere. Tunc coefficientem M'' per u'' et coefficientes in U' (quos fore functiones integras coefficientium in Z facile intelligitur), sive per u'' et coefficientes in

^{*)} In tomo secundo eorundem *Miscellaneorum* p. 337 dilucidationes ad hanc commentationem continentur: attamen hae ad disquisitionem praesentem non pertinent, sed ad logarithmos quantitatum negativarum, de quibus in eadem comm. sermo fuerat.

Z rationaliter determinabilem fore assertit clar. de F., et proin realem. Hinc sequitur, radices aequationis $u'u' + u''u' + M'' = 0$ sub forma $p + q\sqrt{-1}$ contentas fore; eadem vero manifesto aequationi $U' = 0$ satisfaciunt: quare dabitur valor aliquis ipsius u' sub forma $p + q\sqrt{-1}$ contentus. Iam coefficientes M' (eodem modo ut ante) rationaliter per u' et coefficientes in Z determinari potest, adeoque etiam sub forma $p + q\sqrt{-1}$ contentus erit; quare aequationis $uu + u'u + M'$ radices sub eadem forma contentae erunt, simul vero aequationi $U = 0$ satisfaciunt, i. e. aequatio haec habebit radicem sub forma $p + q\sqrt{-1}$ contentam. Denique hinc simili ratione sequitur, etiam M sub eadem forma contineri, nec non radicem aequationis $zz + uz + M = 0$, quae manifesto etiam aequationi propositae $Z = 0$ satisfaciet. Quamobrem quaevis aequatio ad minimum unam radicem formae $p + q\sqrt{-1}$ habebit.

11.

Obiectiones 1, 2, 3, quas contra EULERI demonstrationem primam feci (art. 8), eandem vim contra hanc methodum habent, ea tamen differentia, ut obiectio secunda, cui EULERI demonstratio tantummodo in quibusdam casibus specialibus obnoxia erat, praesentem in omnibus casibus attingere debeat. Scilicet a priori demonstrari potest, etiamsi formula detur, quae coefficientem M' rationaliter per u' et coefficientes in Z exprimat, hanc pro pluribus valoribus ipsius u' necessario indeterminatam fieri debere; similiterque formulam, quae coefficientem M'' per u'' exhibeat, indeterminatam fieri pro quibusdam valoribus ipsius u'' etc. Hoc luculentissime perspicitur, si aequationem quarti gradus pro exemplo assumimus. Ponamus itaque $m = 4$, sintque radices aequationis $Z = 0$. hae $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Tum patet, aequationem $U = 0$ fore sexti gradus ipsiusque radices $-(\alpha + \beta)$, $-(\alpha + \gamma)$, $-(\alpha + \delta)$, $-(\beta + \gamma)$, $-(\beta + \delta)$, $-(\gamma + \delta)$. Aequatio $U' = 0$ autem erit decimi quinti gradus, et valores ipsius u' hi

$$\begin{aligned} & 2\alpha + \beta + \gamma, \quad 2\alpha + \beta + \delta, \quad 2\alpha + \gamma + \delta, \quad 2\beta + \alpha + \gamma, \quad 2\beta + \alpha + \delta, \quad 2\beta + \gamma + \delta, \\ & 2\gamma + \alpha + \beta, \quad 2\gamma + \alpha + \delta, \quad 2\gamma + \beta + \delta, \quad 2\delta + \alpha + \beta, \quad 2\delta + \alpha + \gamma, \quad 2\delta + \beta + \gamma, \\ & \alpha + \beta + \gamma + \delta, \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta, \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta, \quad \alpha + \beta + \gamma + \delta \end{aligned}$$

Iam in hac aequatione, quippe cuius gradus est impar, subsistendum erit, habebitque ea revera radicem realem $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ (quae primo coefficienti in Z mutato signo aequalis adeoque non modo realis sed etiam rationalis erit, si coefficientes

tes in Z sunt rationales). Sed nullo negotio perspicui potest, si formula detur, quae valorem ipsius M' per valorem respondentem ipsius u' rationaliter exhibeat, hanc necessario pro $u' = \alpha + \bar{\alpha} + \gamma + \bar{\gamma}$ indeterminatam fieri. Hic enim valor ter erit radix aequationis $U' = 0$, respondebuntque ipsi tres valores ipsius M' , puta $(\alpha + \bar{\alpha})(\gamma + \bar{\gamma})$, $(\alpha + \gamma)(\bar{\alpha} + \bar{\gamma})$ et $(\alpha + \bar{\alpha})(\bar{\gamma} + \gamma)$, qui omnes irrationales esse possunt. Manifesto autem formula rationalis neque valorem irrationalem ipsius M' in hoc casu producere posset, neque tres valores diversos. Ex hoc specimine satis colligi potest, methodum clar. DE FOXCENEXII nequiquam esse satisfaciensem, sed si ab omni parte completa reddi debeat, multo profundius in theoriam eliminationis inquiri oportere.

12.

Denique ill. LA GRANGE de theoremate nostro egit in comm. *Sur la forme des racines imaginaires des équations*, *Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin* 1772, p. 222 sqq. Magnus hic geometra imprimis operam dedit, defectus in EULERI demonstratione prima supplere et revera praesertim ea, quae supra (art. 8) obiectionem secundam et quartam constituunt, tam profunde perscrutatus est, ut nihil amplius desiderandum restet, nisi forsan in disquisitione anteriori super theoria eliminationis (cui investigatio haec tota innititur) quaedam dubia superesse videantur. — Attamen obiectionem tertiam omnino non attingit, quin etiam tota disquisitio superstructa est suppositioni, quamvis aequationem m^{th} gradus revera m radices habere.

Probe itaque iis, quae hucusque exposita sunt, perpensis, demonstrationem novam theorematum gravissimi ex principiis omnino diversis petitam peritis haud ingratam fore spero, quam exponere statim aggredior.

13.

LEMMA. Denotante m numerum integrum positivum quemcunque, functio $\sin \varphi \cdot x^m - \sin m \varphi \cdot r^{m-1} x + \sin(m-1) \varphi \cdot r^m$ divisibilis erit per $xx - 2 \cos \varphi \cdot rx + rr$.

Demonstr. Pro $m = 1$ functio illa fit $= 0$ adeoque per quemcunque factorem divisibilis; pro $m = 2$ quotiens fit $\sin \varphi$, et pro quovis valore maiori quotiens erit $\sin \varphi \cdot x^{m-2} + \sin 2 \varphi \cdot rx^{m-3} + \sin 3 \varphi \cdot rrx^{m-4} + \text{etc.} + \sin(m-1) \varphi \cdot r^{m-2}$. Facile enim confirmatur, multiplicata hac functione per $xx - 2 \cos \varphi \cdot rx + rr$, productum functioni propositae aequale fieri.

14.

LEMMA. Si quantitas r angulusque φ ita sunt determinati, ut habeantur aequationes

$$\begin{aligned} r^m \cos m \varphi + A r^{m-1} \cos(m-1) \varphi + B r^{m-2} \cos(m-2) \varphi + \text{etc.} \\ + K r r \cos 2 \varphi + L r \cos \varphi + M = 0 \quad [1] \\ r^m \sin m \varphi + A r^{m-1} \sin(m-1) \varphi + B r^{m-2} \sin(m-2) \varphi + \text{etc.} \\ + K r r \sin 2 \varphi + L r \sin \varphi = 0 \quad [2] \end{aligned}$$

functio $x^m + A x^{m-1} + B x^{m-2} + \text{etc.} + K x x + L x + M = X$ divisibilis erit per factorem duplicem $xx - 2 \cos \varphi \cdot rx + rr$, si modo $r \sin \varphi \neq 0$; si vero $r \sin \varphi = 0$, eadem functio divisibilis erit per factorem simplicem $x - r \cos \varphi$.

Demonstr. I. Ex art. praec. omnes sequentes quantitates divisibiles erunt per $xx - 2 \cos \varphi \cdot rx + rr$:

$$\begin{array}{lll} \sin \varphi \cdot r x^m & - & \sin m \varphi \cdot r^m x & + & \sin(m-1) \varphi \cdot r^{m+1} \\ A \sin \varphi \cdot r x^{m-1} & - & A \sin(m-1) \varphi \cdot r^{m-1} x & + & A \sin(m-2) \varphi \cdot r^m \\ B \sin \varphi \cdot r x^{m-2} & - & B \sin(m-2) \varphi \cdot r^{m-2} x & + & B \sin(m-3) \varphi \cdot r^{m-1} \\ & \text{etc.} & & & \text{etc.} \\ K \sin \varphi \cdot r x x & - & K \sin 2 \varphi \cdot r r x & + & K \sin \varphi \cdot r^3 \\ L \sin \varphi \cdot r x & - & L \sin \varphi \cdot r x & & * \\ M \sin \varphi \cdot r & & & & + M \sin(-\varphi) \cdot r \end{array}$$

Quamobrem etiam summa harum quantitatum per $xx - 2 \cos \varphi \cdot rx + rr$ divisibilis erit. At singularum partes primae constituunt summam $\sin \varphi \cdot r X$; secundae additae dant 0, propter [2]; tertiarius vero aggregatum quoque evanescere, facile perspicitur, si [1] multiplicatur per $\sin \varphi$, [2] per $\cos \varphi$, productumque illud ab hoc subducitur. Unde sequitur, functionem $\sin \varphi \cdot r X$ divisibilem esse per $xx - 2 \cos \varphi \cdot rx + rr$, adeoque, nisi fuerit $r \sin \varphi = 0$, etiam functionem X . Q. E. P.

II. Si vero $r \sin \varphi = 0$, erit aut $r = 0$ aut $\sin \varphi = 0$. In casu priori erit $M = 0$, propter [1], adeoque X per x sive per $x - r \cos \varphi$ divisibilis; in posteriori erit $\cos \varphi = \pm 1$, $\cos 2 \varphi = +1$, $\cos 3 \varphi = \pm 1$ et generaliter $\cos n \varphi = \cos \varphi^n$. Quare propter [1] fiet $X = 0$, statuendo $x = r \cos \varphi$, et proin functio X per $x - r \cos \varphi$ erit divisibilis. Q. E. S.

15.

Theorema praecedens plerumque adiumento quantitatum imaginaryum demonstratur, vid. EULER *Introd. in Anal. Inf.* T. I. p. 110; operae pretium esse duxi, ostendere, quomodo aequae facile absque illarum auxilio erui possit. Manifestum iam est, ad demonstrationem theorematum nostri nihil aliud requiri quam ut ostendatur: *Proposita functione quacunq. X formae $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + Lx + M$, r et φ ita determinari posse, ut aequationes [1] et [2] locum habeant.* Hinc enim sequetur, X habere factorem realem primi vel secundi gradus; divisio autem necessario producet quotientem realem inferioris gradus, qui ex eadem ratione quoque factorem primi vel secundi gradus habebit. Per continuationem huius operationis X tandem in factores reales simplices vel duplices resolvitur. Illud itaque theorema demonstrare, propositum est sequentium disquisitionum.

16.

Concipiatur planum fixum infinitum (planum tabulae, fig. 1), et in hoc recta fixa infinita GC per punctum fixum C transiens. Assumpta aliqua longitudine pro unitate ut omnes rectae per numeros exprimi possint, erigatur in quovis puncto plani P, cuius distantia a centro C est r angulusque GCP = φ , perpendiculum aequale valori expressionis

$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1} \sin (m-1)\varphi + \text{etc.} + Lr \sin \varphi$$

quem brevitatis gratia in sequentibus semper per T designabo. Distantiam r semper tamquam positivam considero, et pro punctis, quae axi ab altera parte iacent, angulus φ aut tamquam duobus rectis maior, aut tamquam negativus (quod hic eodem redit) spectari debet. Extremitates horum perpendiculorum (quae pro valore positivo ipsius T supra planum accipiendae sunt, pro negativo infra, pro evanescente in plano ipso) erunt ad superficiem curvam continuam quaquaeversum infinitam, quam brevitatis gratia in sequentibus *superficiem primam* vocabo. Prorsus simili modo ad idem planum et centrum eundemque axem referatur alia superficies, cuius altitudo supra quodvis plani punctum sit

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1} \cos (m-1)\varphi + \text{etc.} + Lr \cos \varphi + M$$

quam expressionem brevitatis gratia semper per U denotabo. Superficiem vero hanc, quae etiam continua et quaquaeversum infinita erit, per denominationem

superficie secundae a priori distinguam. Tunc manifestum est, totum negotium in eo versari, ut demonstretur, ad minimum unum punctum dari, quod simul in plano, in superficie prima et in superficie secunda iaceat.

17.

Facile perspicui potest, superficiem primam partim supra planum partim infra planum iacere; patet enim distantiam a centro r tam magnam accipi posse, ut reliqui termini in T prae primo $r^m \sin m\varphi$ evanescant; hic vero, angulo φ rite determinato, tam positivus quam negativus fieri potest. Quare planum fixum necessario a superficie prima secabitur; hanc plani cum superficie prima intersectionem vocabo *lineam primam*; quae itaque determinabitur per aequationem $T = 0$. Ex eadem ratione planum a superficie secunda secabitur; intersectio constituet curvam per aequationem $U = 0$ determinatam, quam *lineam secundam* appellabo. Proprie utraque curva ex pluribus ramis constabit, qui omnino sciuncti esse possunt, singuli vero erunt lineae continuae. Quin adeo linea prima semper erit talis, quam complexam vocant, axisque GC tamquam pars huius curvae spectanda; quicunque enim valor ipsi r tribuatur, T semper fiet = 0, quando φ aut = 0 aut = 180° . Sed praestat complexum cunctorum ramorum per omnia puncta, ubi $T = 0$, transeuntium tamquam unam curvam considerare (secundum usum in geometria sublimiori generaliter receptum), similiterque cunctos ramos per omnia puncta transeuntes, ubi $U = 0$. Patet iam, rem eo reductam esse, ut demonstretur, ad minimum unum punctum in plano dari, ubi ramus aliquis lineae primae a ramo lineae secundae secetur. Ad hunc finem indolem harum linearum propius contemplari oportebit.

18.

Ante omnia observo, utramque curvam esse algebraicam, et quidem, si ad coordinatas orthogonales revocetur, ordinis m^{ti} . Sumto enim initio abscissarum in C, abscissisque x versus G, applicatis y versus P, erit $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, adeoque generaliter, quidquid sit n,

$$r^n \sin n\varphi = nx^{n-1}y - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3}y^3 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot \dots \cdot 5} x^{n-5}y^5 - \text{etc.},$$

$$r^n \cos n\varphi = x^n - \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2}yy + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^{n-4}y^4 - \text{etc.}$$

Quamobrem tum T tum U constabunt ex pluribus huiusmodi terminis ax^ay^b .

denotantibus α, δ numeros integros positivos, quorum summa, ubi maxima est, fit $=m$. Ceterum facile praevideri potest, cunctos terminos ipsius T factorem y involvere, adeoque lineam primam proprie ex recta (cuius aequatio $y=0$) et curva ordinis $m-1^{\text{ti}}$ compositam esse; sed necesse non est ad hanc distinctionem hic respicere.

Maioris momenti erit investigatio, an linea prima et secunda crura infinita habeant, et quot qualiaque. In distantia infinita a puncto C linea prima, cuius aequatio $\sin m\varphi + \frac{A}{r} \sin(m-1)\varphi + \frac{B}{r^2} \sin(m-2)\varphi$ etc. $= 0$, confundetur cum linea, cuius aequatio $\sin m\varphi = 0$. Haec vero exhibet m lineas rectas in puncto C se secantes, quarum prima est axis GG' , reliquae contra hanc sub angulis $\frac{1}{m}180^\circ, \frac{2}{m}180^\circ, \frac{3}{m}180^\circ$ etc. graduum inclinatae. Quare linea prima $2m$ ramos infinitos habet, qui peripheriam circuli radio infinito descripti in $2m$ partes aequales dispartitur, ita ut periphria a ramo primo secetur in concursu circuli et axis, a secundo in distantia $\frac{1}{m}180^\circ$, a tertio in distantia $\frac{2}{m}180^\circ$ etc. Eodem modo linea secunda in distantia infinita a centro habebit asymptotam per aequationem $\cos m\varphi = 0$ expressam, quae est complexus m rectarum in puncto C sub aequalibus angulis itidem se secantium, ita tamen, ut prima cum axe CG constituat angulum $\frac{1}{m}90^\circ$, secunda angulum $\frac{2}{m}90^\circ$, tertia angulum $\frac{3}{m}90^\circ$ etc. Quare linea secunda etiam $2m$ ramos infinitos habebit, quorum singuli medium locum inter binos ramos proximis lineae primae occupabunt, ita ut peripheriam circuli radio infinite magno descripti in punctis, quae $\frac{1}{m}90^\circ, \frac{2}{m}90^\circ, \frac{3}{m}90^\circ$ etc. ab axe distant, secant. Ceterum palam est, axem ipsum semper duos ramos infinitos lineae primae constituere, puta primum et $m+1^{\text{um}}$. Luculentissime hic ramorum situs exhibetur in fig. 2. pro casu $m=4$ constructa, ubi rami lineae secundae, ut a ramis lineae primae distinguantur, punctati exprimuntur, quod etiam de figura quarta est tenendum*). — Quum vero hae conclusiones maximi momenti sint, quantitatesque infinite magnae quosdam lectores offendere possint: illas etiam absque infinitorum subsidio in art. sequ. eruere docebo.

19.

THEOREMA. Manentibus cunctis ut supra, ex centro C describi poterit circulus,

*) Figura quarta constructa est supponendo $X = x^4 - 2xz + 3z + 10$, in qua itaque lectores disquisitionibus generalibus et abstractis minus assueti situm respectivum utriusque curvae in concreto intueri poterunt. Longitudo lineae CG assumpta est $= 10$ ($CN = 1,26222$).

in cuius periphria sint $2m$ puncta, in quibus $T=0$, totidemque, in quibus $U=0$, et quidem ita, ut singula posteriora inter bina priorum iaceant.

Sit summa omnium coefficientium A, B etc. K, L, M positive acceptorum $=S$, accipiatque R simul $>S\sqrt{2}$ et $>1^*)$: tum dico in circulo radio R descripto ea, quae in theoremate enunciata sunt, necessario locum habere. Scilicet designato brevitatis gratia eo puncto huius circumferentiae, quod $\frac{1}{m}45^\circ$ gradibus ab ipsius concursu cum laeva parte axis distat, sive pro quo $\varphi = \frac{1}{m}45^\circ$, per (1); similiter eo puncto, quod $\frac{3}{m}45^\circ$ ab hoc concursu distat, sive pro quo $\varphi = \frac{3}{m}45^\circ$, per (3); porro eo, ubi $\varphi = \frac{5}{m}45^\circ$, per (5) etc. usque ad $(8m-1)$, quod $\frac{8m-1}{m}45^\circ$ gradibus ab illo concursu distat, si semper versus eandem partem progredieris, (aut $\frac{1}{m}45^\circ$ a parte opposita), ita ut omnino $4m$ puncta in periphria habeantur, aequalibus intervallis dissita: iacebit inter $(8m-1)$ et (1) unum punctum, pro quo $T=0$; nec non sita erunt similia puncta singula inter (3) et (5); inter (7) et (9); inter (11) et (13) etc., quorum itaque multitudo $2m$; eodemque modo singula puncta, pro quibus $U=0$, iacebunt inter (1) et (3); inter (5) et (7); inter (9) et (11), quorum multitudo igitur etiam $=2m$; denique praeter haec $4m$ puncta alia in tota periphria non dabuntur, pro quibus vel T vel U sit $=0$.

Demonstr. I. In puncto (1) erit $m\varphi = 45^\circ$ adeoque

$$T = R^{m-1} \left(R\sqrt{\frac{1}{2}} + A \sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R} \sin(m-2)\varphi + \text{etc.} + \frac{L}{R^{m-1}} \sin \varphi \right)$$

summa vero $A \sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R} \sin(m-2)\varphi$ etc. certo non poterit esse maior quam S , adeoque necessario erit minor quam $R\sqrt{\frac{1}{2}}$: unde sequitur, in hoc puncto valorem ipsius T certo esse positivum. A potiori itaque T valorem positivum habebit, quando $m\varphi$ inter 45° et 135° iacet, i. e. a puncto (1) usque ad (3) valor ipsius T semper positivus erit. Ex eadem ratione T a puncto (9) usque ad (11) positivum valorem ubique habebit, et generaliter a quovis puncto $(8k+1)$ usque ad $(8k+3)$, denotante k integrum quemcunque. Simili modo T ubique inter (5) et (7), inter (13) et (15) etc. et generaliter inter $(8k+5)$ et $(8k+7)$ valorem negativum habebit, adeoque in omnibus his intervallis nullibi poterit esse $=0$. Sed quoniam in (3) hic valor est positivus, in (5) negativus: necessario alicubi inter (3) et (5) erit $=0$; nec non alicubi inter (7) et (9); inter (11) et (13) etc.

*) Quando $S > \sqrt{1}$, conditio prima secundam; quando vero $S < \sqrt{1}$, secunda primam implicabit.

usque ad intervallum inter $(8m-1)$ et (1) incl., ita ut omnino in $2m$ punctis habeatur $T = 0$. Q. E. P.

II. Quod vero praeter haec $2m$ puncta, alia, hac proprietate praedita, non dantur, ita cognoscitur. Quum inter (1) et (3) ; inter (5) et (7) etc. nulla sint, aliter fieri non posset, ut plura talia puncta exstent, quam si in aliquo intervallo inter (3) et (5) , vel inter (7) et (9) etc. ad minimum duo iacerent. Tum vero necessario in eodem intervallo T alicubi esset *maximum*, vel *minimum*, adeoque $\frac{dT}{d\varphi} = 0$. Sed $\frac{dT}{d\varphi} = mR^{m-2}(R\cos m\varphi + \frac{m-1}{m}A\cos(m-1)\varphi + \text{etc.})$ et $\cos m\varphi$ inter (3) et (5) semper est negativus et $> \frac{1}{2}$. Unde facile perspicitur, in toto hoc intervallo $\frac{dT}{d\varphi}$ esse quantitatem negativam; eodemque modo inter (7) et (9) ubique positivam; inter (11) et (13) negativam etc., ita ut in nullo horum intervallorum esse possit 0, adeoque suppositio consistere nequeat. Quare etc. Q. E. S.

III. Prorsus simili modo demonstratur, U habere valorem negativum ubique inter (3) et (5) , inter (11) et (13) etc. et generaliter inter $(8k+3)$ et $(8k+5)$; positivum vero inter (7) et (9) , inter (15) et (17) etc. et generaliter inter $(8k+7)$ et $(8k+9)$. Hinc statim sequitur, $U = 0$ fieri debere alicubi inter (1) et (3) , inter (5) et (7) etc., i. e. in $2m$ punctis. In nullo vero horum intervallorum fieri poterit $\frac{dU}{d\varphi} = 0$ (quod facile simili modo ut supra probatur): quomobrem plura quam illa $2m$ puncta in circuli peripheria non dabuntur, in quibus fiat $U = 0$. Q. E. T. et Q.

Ceterum ea theorematis pars, secundum quam plura quam $2m$ puncta non dantur, in quibus $T = 0$, neque plura quam $2m$, in quibus $U = 0$, etiam inde demonstrari potest, quod per aequationes $T = 0$, $U = 0$ exhibentur curvae m^{th} ordinis, quales a circulo tamquam curva secundi ordinis in pluribus quam $2m$ punctis secari non posse, ex geometria sublimiori constat.

20.

Si circulus alius radio maiori quam R ex eodem centro describitur, eodemque modo dividitur: etiam in hoc inter puncta (3) et (5) iacebit punctum unum, in quo $T = 0$, itemque inter (7) et (9) etc., perspiciturque facile, quo minus radius huius circuli a radio R differat, eo propius huiusmodi puncta inter (3) et (5) in utriusque circumferentia sita esse debere. Idem etiam locum habebit, si circulus radio aliquantum minori quam R , attamen maiori quam $S\sqrt{2}$ et 1, describitur. Ex his nullo negotio intelligitur, circuli radio R descripti circumferen-

tiam in eo puncto inter (3) et (5) , ubi $T = 0$, revera *secari* ab aliquo ramo lineae primae; idemque valet de reliquis punctis, ubi $T = 0$. Eodem modo patet, circumferentiam circuli huius in omnibus $2m$ punctis, ubi $U = 0$, ab aliquo ramo lineae secundae secari. Hae conclusiones etiam sequenti modo exprimi possunt: Descripto circulo debitaе magnitudinis e centro C , in hunc intrabunt $2m$ rami lineae primae totidemque rami lineae secundae, et quidem ita, ut bini rami proximi lineae primae per aliquem ramum lineae secundae ab invicem separantur. Vid. fig. 2, ubi circulus iam non infinitae sed finitae magnitudinis erit, numerique singulis ramis adscripti cum numeris, per quos in art. praec. et hoc limites certos in peripheria brevitatis causa designavi, non sunt confundendi.

21.

Iam ex hoc situ relativo ramorum in circulum intrantium tot modis diversis deduci potest, intersectionem alicuius rami lineae primae cum ramo lineae secundae intra circulum necessario dari, ut, quatenam potissimum methodus prae reliquis eligenda sit, propemodum nesciam. Luculentissima videtur esse haec: Designemus (fig. 2) punctum peripheriae circuli, ubi a laeva axis parte (quae ipsa est unus ex $2m$ ramis lineae primae) secatur, per 0; punctum proximum, ubi ramus lineae secundae intrat, per 1; punctum huic proximum, ubi secundus lineae primae ramus intrat, per 2, et sic porro usque ad $4m-1$, ita ut in quovis puncto numero pari signato ramus lineae secundae in circulum intret, contra ramus lineae secundae in omnibus punctis per numerum imparem expressis. Iam ex geometria sublimiori constat, quamvis curvam algebraicam, (sive singulas cuiusvis curvae algebraicae partes, si forte e pluribus composita sit) aut in se redeuntem aut utrumque in infinitum excurrentem esse, adeoque si ramus aliquis curvae algebraicae in spatium definitum intret, eundem necessario ex hoc spatio rursus alicubi exire debere*). Hinc concluditur facile, quodvis punctum numero pari signa-

*) Satis bene certe demonstratum esse videtur, curvam algebraicam neque alicubi subito abruptim posse (uti e. g. evenit in curva transcendente, cuius aequatio $y = \frac{1}{\log x}$), neque post spiras infinitas in aliquo puncto se quasi perdere (ut spiralis logarithmica), quantumque scio nemo dubium contra hanc rem movit. Attamen si quis postulat, demonstrationem nullis dubiis obnoxiam alia occasione tradere suscipiam. In casu praesenti vero manifestum est, si aliquis ramus e. g. 2, ex circulo nullibi exiret (fig. 3), tunc in circulum inter 2 et 1 intrare, postea circa totum hunc ramum (qui in circuli spatio se perdere deberet) circummeare, et tandem inter 2 et 1 rursus ex circulo egredi posse, ita ut nullibi in tota via in lineam primam incideris. Hoc vero absurdum esse inde patet, quod in puncto, ubi in circulum ingressus es, superficiem

tum (seu, brevitatis causa, *quodvis punctum par*) per ramum lineae primae cum alio puncto pari intra circulum iunctum esse debere, similiterque quodvis punctum numero impari notatum cum alio simili puncto per ramum lineae secundae. Quamquam vero haec binorum punctorum connexio secundum indolem functionis X perquam diversa esse potest, ita ut in genere determinari nequeat, tamen facile demonstrari potest, *quaecunque demum illa sit, semper intersectionem lineae primae cum linea secunda oriri.*

22.

Demonstratio huius necessitatis commodissime apagogice repraesentari posse videtur. Scilicet supponamus, iunctionem binorum quorumque punctorum parium, et binorum quorumque punctorum imparium ita adornari posse, ut nulla intersectio rami lineae primae cum ramo lineae secundae inde oriatur. Quoniam axis est pars lineae primae, manifesto punctum 0 cum puncto $2m$ iunctum erit. Punctum 1 itaque cum nullo puncto ultra axem sito, i. e. cum nullo puncto per numerum maiorem quam $2m$ expresso iunctum esse potest, alioquin enim linea iungens necessario axem secaret. Si itaque 1 cum puncto n iunctum esse supponitur, erit $n < 2m$. Ex simili ratione si 2 cum n' iunctum esse statuitur, erit $n' < n$, quia alioquin ramus $2 \dots n'$ ramum $1 \dots n$ necessario secaret. Ex eadem causa punctum 3 cum aliquo punctorum inter 4 et n' iacentium iunctum erit, patetque si 3, 4, 5 etc. iuncta esse supponantur cum n'' , n''' , n'''' etc., n'' iacere inter 5 et n'' , n''' inter 6 et n'' etc. Unde perspicuum est, tandem ad aliquod punctum h perventum iri, quod cum puncto $h+2$ iunctum sit, et tum ramus, qui in puncto $h+1$ in circulum intrat, necessario ramum puncta h et $h+2$ iungentem secabit. Quia autem alter horum duorum ramorum ad lineam primam, alter ad secundam pertinebit, manifestum iam est, suppositionem esse contradictoriam, adeoque necessario alicubi intersectionem lineae primae cum linea secunda fieri.

primam supra te habuisti, in egressu, infra; quare necessario alicubi in superficiem primam ipsam incidere debuisti, sive in punctum lineae primae. — Ceterum ex hoc ratiocinio principii geometriae situs innixi, quae haud minus valida sunt, quam principia geometriae magnitudinis, sequitur tantummodo, si in aliquo ramo lineae primae in circulum intres, te alio loco ex circulo rursus egredi posse, semper in linea prima manendo, neque vero, viam tuam esse lineam continuam in eo sensu, quo in geometria sublimiori accipitur. Sed hic sufficit, viam esse lineam continuam in sensu communi, i. e. nullibi interruptam sed ubique cohaerentem.

Si haec cum praecedentibus iunguntur, ex omnibus disquisitionibus explicatis colligetur, theorema, *quamvis functionem algebraicam rationalem integram unius indeterminatae in factores reales primi vel secundi gradus resolveri posse*, omni rigore demonstratum.

23.

Ceterum haud difficile ex iisdem principiis deduci potest, non solum unam sed ad minimum m intersectiones lineae primae cum secunda dari, quamquam etiam fieri potest, ut linea prima a pluribus ramis lineae secundae in eodem puncto secetur, in quo casu functio X plures factores aequales habebit. Attamen quum hic sufficiat, unius intersectionis necessitatem demonstravisse, fusius huic rei brevitatis causa non immoror. Ex eadem ratione etiam alias harum linearum proprietates hic uberius non persequor, e. g. intersectionem semper fieri sub angulis rectis; aut si plura crura utriusque curvae in eodem puncto conveniant, totidem crura lineae primae affore, quot crura lineae secundae, haecque alternatim posita esse, et sub aequalibus angulis se secare etc.

Denique observo, minime impossibile esse, ut demonstratio praecedens, quam hic principiiis geometricis superstruxi, etiam in forma mere analytica exhibeatur: sed eam repraesentationem, quam hic explicavi, minus abstractam evadere credidi, verumque nervum probandi hic multo clarius ob oculos poni, quam a demonstratione analytica expectari possit.

Coronidis loco adhuc aliam methodum theorema nostrum demonstrandi adigitabo, quae primo aspectu non modo a demonstratione praecedente, sed etiam ab omnibus demonstrationibus reliquis supra enarratis maxime diversa esse videbitur, et quae nihilominus cum d'ALEMBERTIANA, si ad essentiam spectas, proprie eadem est. Cum qua illam comparare, parallelismumque inter utramque explorare peritis committo, in quorum gratiam unice subiuncta est.

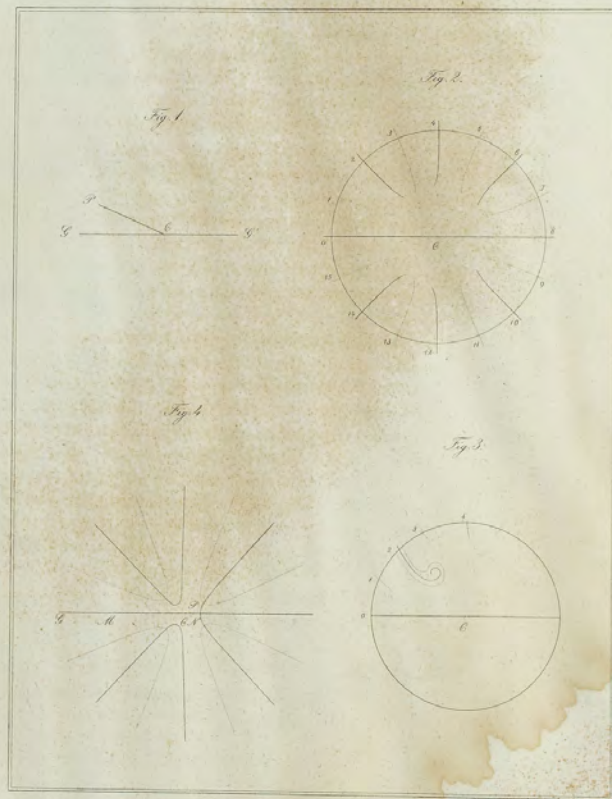
24.

Supra planum figurae 4 relative ad axem CG punctumque fixum C descriptas suppono superficiem primam et secundam eodem modo ut supra. Accipe punctum quodcunque in aliquo ramo lineae primae situm sive ubi $T=0$, (e. g. quodlibet punctum M in axe iacens), et nisi in hoc etiam $U=0$, progredere ex hoc puncto in linea prima versus eam partem, versus quam magnitudo abso-

luta ipsius U decrescit. Si forte in puncto M valor absolutus ipsius U versus utramque partem decrescit, arbitrarium est, quorsum progrediari; quid vero faciendum sit, si U versus utramque partem crescat, statim docebo. Manifestum est itaque, dum semper in linea prima progrediari, necessario tandem te ad punctum perventurum, ubi $U = 0$, aut ad tale, ubi valor ipsius U fiat minimum, e.g. punctum N . In priori casu quod quaerebatur, inventum est; in posteriori vero demonstrari potest, in hoc puncto plures ramos lineae primae sese intersectare (et quidem multitudinem parem ramorum), quorum semissis ita comparati sint, ut si in aliquem eorum deflectas (sive huc sive illuc) valor ipsius U adhuc dum decrescere pergat. (Demonstrationem huius theoremat, prolixiorum quam difficiliorem brevitatis gratia suppressere debeo.) In hoc itaque ramo iterum progredi poteris, donec U aut fiat $= 0$ (uti in fig. 4 evenit in P), aut denuo minimum. Tum rursus deflectes, necessarioque tandem ad punctum pervenies, ubi sit $U = 0$.

Contra hanc demonstrationem obiici posset dubium, annon possibile sit, ut quantumvis longe progrediari, et quamvis valor ipsius U semper decrescat, tamen haec decrementa continuo tardiora fiant, et nihilominus ille valor limitem aliquem nusquam attingat; quae obiectio responderet quartae in art. 6. Sed haud difficile foret, terminum aliquem assignare, quem simulac transieris, valor ipsius U necessario non modo semper rapidius mutari debeat, sed etiam *decrescere* non amplius possit, ita ut antequam ad hunc terminum perveneris, necessario valor 0 iam affuisse debeat. Hoc vero et reliqua, quae in hac demonstratione addigere tantummodo potui, alia occasione fusius exsequi mihi reservo.

Principia quibus haec demonstratio innititur detezinus Initio Octob. 1797.



Scilicet Vnde, Rem. 5. Sect. 10.



DEMONSTRATIO NOVA ALTERA

THEOREMATIS

OMNEM FUNCTIONEM ALGEBRAICAM
RATIONALEM INTEGRAM

UNIUS VARIABILIS

IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADUS

RESOLVI POSSE

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM TRADITA 1815. DEC. 7.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. III.
Gottingae MDCCCXVI.



DEMONSTRATIO NOVA ALTERA THEOREMATIS
OMNEM FUNCTIONEM ALGEBRAICAM RATIONALEM INTEGRAM
UNIUS VARIABILIS

IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADUS RESOLVI POSSE.

1.

Quamquam demonstratio theorematis de resolutione functionum algebraicarum integralium in factores, quam in commentatione sedecim abhinc annis promulgata tradidi, tum respectu rigoris tum simplicitatis nihil desiderandum relinquere videatur, tamen haud ingratum fore geometris spero, si iterum ad eandem quaestionem gravissimam revertar, atque e principiis prorsus diversis demonstrationem alteram haud minus rigorosam adstruere coner. Pendet scilicet illa demonstratio prior, partim saltem, a considerationibus geometricis: contra ea, quam hic exponere aggredior, principiis mere analyticis innixa erit. Methodorum analyticarum, per quas usque ad illud quidem tempus alii geometrae theorema nostrum demonstrare susceperunt, insigniores loco citato recensui, et quibus vitiis laborent copiose exposui. Quorum gravissimum ac vere radicale omnibus illis conatibus, perinde ac recentioribus, qui quidem mihi innotuerunt, commune: quod tamen neutiquam inevitabile videri in demonstratione analytica, iam tunc declaravi. Esto iam penes peritos iudicium, an fides olim data per has novas curas plene sit liberata.

2.

Disquisitioni principali quaedam praeliminares praemittentur, tum ne quid desesse videatur, tum quod ipsa forsitan tractatio iis quoque, quae ab aliis iam de-

libata fuerant, novam qualemcumque lucem affundere poterit. Ac primo quidem de altissimo divisore communi duarum functionum algebraicarum integrarum unius indeterminatae agemus. Ubi praemonendum, hic semper tantum de functionibus integris sermonem esse: e qualibus duabus si productum conflatur, utraque huius *divisor* vocatur. Divisoris *ordo* ex exponente summae potestatis indeterminatae quam continet diiudicatur, nulla prorsus coefficientium numericorum ratione habita. Ceterum quae ad divisores communes functionum pertinent, eo brevius absolvere licet, quod iis, quae ad divisores communes numerorum spectant, omnino sunt analogae.

Propositis duabus functionibus Y, Y' indeterminatae x , quarum prior sit ordinis altioris aut saltem non inferioris quam posterior, formabimus aequationes sequentes

$$\begin{aligned} Y &= q Y' + Y'' \\ Y' &= q' Y'' + Y''' \\ Y'' &= q'' Y''' + Y^{(4)} \\ &\text{etc. usque ad} \\ Y^{(n-1)} &= q^{(n-1)} Y^{(n)} \end{aligned}$$

ea scilicet lege, ut primo Y dividatur sueto more per Y' ; dein Y' per residuum primae divisionis Y'' , quod erit ordinis inferioris quam Y' ; tunc rursus residuum primum per secundum Y''' et sic porro, donec ad divisionem absque residuo perveniatur, quod tandem necessario evenire debere inde patet, quod ordo functionum Y', Y'', Y''' etc. continuo decrescit. Quas functiones perinde atque quotientes q, q', q'' etc. esse functiones *integras* ipsius x , vix opus est monere. His praemissis, manifestum est,

I. regrediendo ab ultima istarum aequationum ad primam, functionem $Y^{(n)}$ esse divisorem singularum praecedentium, adeoque certo divisorem communem propositarum Y, Y' .

II. Progrediendo a prima aequatione ad ultimam, elucet, quemlibet divisorem communem functionum Y, Y' etiam metiri singulas sequentes, et proinde etiam ultimam $Y^{(n)}$. Quamobrem functiones Y, Y' habere nequeunt ullum divisorem communem altioris ordinis quam $Y^{(n)}$, omnisque divisor communis eiusdem ordinis ut $Y^{(n)}$ erit ad hunc in ratione numeri ad numerum, unde hic ipse pro divisore communi summo erit habendus.

III. Si $Y^{(n)}$ est ordinis 0, i. e. numerus, nulla functio indeterminatae x proprie sic dicta ipsas Y, Y' metiri potest: in hoc itaque casu dicendum est, has functiones divisorem communem non habere.

IV. Excerptamus ex aequationibus nostris penultimam; dein ex hac eliminemus $Y^{(n-1)}$ adiumento aequationis antepenultimae; tunc iterum eliminemus $Y^{(n-2)}$ adiumento aequationis praecedentis et sic porro: hoc pacto habebimus

$$\begin{aligned} Y^{(n)} &= +k Y^{(n-2)} - k' Y^{(n-1)} \\ &= -k' Y^{(n-3)} + k'' Y^{(n-2)} \\ &= +k'' Y^{(n-4)} - k''' Y^{(n-3)} \\ &= -k''' Y^{(n-5)} + k^{(4)} Y^{(n-4)} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

si functiones k, k', k'' etc. ex lege sequente formatas supponamus

$$\begin{aligned} k &= 1 \\ k' &= q^{(n-2)} \\ k'' &= q^{(n-3)} k' + k \\ k''' &= q^{(n-4)} k'' + k' \\ k^{(4)} &= q^{(n-5)} k''' + k'' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Erit itaque

$$\pm k^{(n-2)} Y \mp k^{(n-1)} Y' = Y^{(n)}$$

valentibus signis superioribus pro n pari, inferioribus pro impari. In eo itaque casu, ubi Y et Y' divisorem communem non habent, invenire licet hoc modo duas functiones Z, Z' indeterminatae x tales, ut habeatur

$$ZY + Z'Y' = 1$$

V. Haec propositio manifesto etiam inversa valet, puta, si satisfieri potest aequationi

$$ZY + Z'Y' = 1,$$

ita, ut Z, Z' sint functiones integrae indeterminatae x , ipsae Y et Y' certo divisorem communem habere nequeunt.

3.

Disquisitio praeliminaris altera circa transformationem functionum symmetricarum versabitur. Sint a, b, c etc. quantitates indeterminatae, ipsarum multitudo m , designemusque per λ' illarum summam, per λ'' summam productorum e binis, per λ''' summam productorum e ternis etc., ita ut ex evolutione producti

$$(x-a)(x-b)(x-c) \dots$$

oriatur

$$x^m - \lambda' x^{m-1} + \lambda'' x^{m-2} - \lambda''' x^{m-3} + \text{etc.}$$

Ipsae itaque $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. sunt functiones symmetricae indeterminatarum a, b, c etc., i. e. tales, in quibus hae indeterminatae eodem modo occurrunt, sive clarius, tales, quae per qualemcunque harum indeterminatarum inter se permutationem non mutantur. Manifesto generalius, quaelibet functio integra ipsarum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. (sive has solas indeterminatas implicet, sive adhuc alias ab a, b, c etc. independentes contineat) erit functio symmetrica integra indeterminatarum a, b, c etc.

4.

Theorema inversum paullo minus obvium. Sit ρ functio symmetrica indeterminatarum a, b, c etc., quae igitur composita erit e certo numero terminorum formae

$$Ma^2 b^6 c^7 \dots$$

denotantibus a, b, c etc. integros non negativos, atque M coefficientem vel determinatum vel saltem ab a, b, c etc. non pendentem (si forte aliae adhuc indeterminatae praeter a, b, c etc. functionem ρ ingrediantur). Ante omnia inter singulos hos terminos ordinem certum stabiliemus, ad quem finem primo ipsas indeterminatas a, b, c etc. ordine certo per se quidem prorsus arbitrario disponemus, e. g. ita, ut a primum locum obtineat, b secundum, c tertium etc. Dein e duobus terminis

$$Ma^2 b^6 c^7 \dots \text{ et } Ma^4 b^5 c^7 \dots$$

priori ordinem altiore tribuimus quam posteriori, si fit

$$\text{vel } \alpha > \alpha', \text{ vel } \alpha = \alpha' \text{ et } \bar{\alpha} > \bar{\alpha}', \text{ vel } \alpha = \alpha', \bar{\alpha} = \bar{\alpha}' \text{ et } \gamma > \gamma', \text{ vel etc.}$$

i. e. si e differentiis $\alpha - \alpha', \bar{\alpha} - \bar{\alpha}', \gamma - \gamma'$ etc. prima, quae non evanescit, positiva evadit. Quocirca quum termini eiusdem ordinis non differant nisi respectu coefficientis M , adeoque in terminum unum conflari possint, singulos terminos functionis ρ ad ordines diversos pertinere supponemus.

Iam observamus, si $Ma^2 b^6 c^7 \dots$ sit ex omnibus terminis functionis ρ is, cui ordo altissimus competat, necessario α esse maiorem, vel saltem non minorem, quam $\bar{\alpha}$. Si enim esset $\bar{\alpha} > \alpha$, terminus $Ma^6 b^2 c^7 \dots$ quem functio ρ , utpote symmetrica, quoque involvet, foret ordinis altioris quam $Ma^2 b^6 c^7 \dots$ contra hyp. Simili modo $\bar{\alpha}$ erit maior vel saltem non minor quam γ ; porro γ non minor quam exponens sequens $\bar{\alpha}$ etc.: proin singulae differentiae $\alpha - \bar{\alpha}, \bar{\alpha} - \gamma, \gamma - \bar{\alpha}$ etc. erunt integri non negativi.

Secundo perpendamus, si e quocunque functionibus integris indeterminatarum a, b, c etc. productum conflatur, huius terminum altissimum necessario esse ipsum productum e terminis altissimis illorum factorum. Aequè manifestum est, terminos altissimos functionum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. resp. esse a, ab, abc etc. Hinc colligitur, terminum altissimum e producto

$$p = M\lambda'^{a-6}\lambda''^{b-7}\lambda'''^{c-2} \dots$$

prodeuntem esse $Ma^2 b^6 c^7 \dots$; quocirca statuendo $\rho - p = \rho'$, terminus altissimus functionis ρ' certo erit ordinis inferioris quam terminus altissimus functionis ρ . Manifesto autem p , et proin etiam ρ' , fiunt functiones integrae symmetricae ipsarum a, b, c etc. Quamobrem ρ' perinde tractata, ut antea ρ , disceperetur in $p' + \rho''$, ita ut p' sit productum e potestatibus ipsarum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. in coefficientem vel determinatum vel saltem ab a, b, c etc. non pendentem, ρ'' vero functio integra symmetrica ipsarum a, b, c etc. talis, ut ipsius terminus altissimus pertineat ad ordinem inferiorem, quam terminus altissimus functionis ρ' . Eodem modo continuando, manifesto tandem ρ ad formam $p + p' + p'' + p'''$ etc. redacta, i. e. in functionem integram ipsarum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. transformata erit.

5.

Theorema in art. praec. demonstratum etiam sequenti modo enunciare possumus: Proposita functione quacunque indeterminatarum a, b, c etc. integra symmetrica ρ , assignari potest functio integra totidem aliarum indeterminatarum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. talis, quae per substitutiones $\lambda' = \lambda, \lambda'' = \lambda'', \lambda''' = \lambda'''$ etc. transeat

in p . Facile insuper ostenditur, *hoc unico tantum modo fieri posse*. Supponamus enim, e duabus functionibus diversis indeterminatarum l', l'', l''' etc. puta tum ex r , tum ex r' post substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc. resultare eandem functionem ipsarum a, b, c etc. Tunc itaque $r - r'$ erit functio ipsarum l', l'', l''' etc. per se non evanescens, sed quae identice destruitur post illas substitutiones. Hoc vero absurdum esse, facile perspicimus, si perpendamus, $r - r'$ necessario compositam esse e certo numero partium formae

$$M l'^a l''^b l'''^c \dots$$

quarum coefficientes M non evanescant, et quae singulae respectu exponentium inter se diversae sint, adeoque terminos altissimos e singulis istis partibus prodeuntes exhiberi per

$$M a^{a+\ell+\gamma+\dots} b^{b+\ell+\gamma+\dots} c^{c+\gamma+\dots} \dots$$

et proin ad ordines diversos referendos esse, ita ut terminus absolute altissimus nullo modo destrui possit.

Ceterum ipse calculus pro huiusmodi transformationibus pluribus compendiis insigniter abbreviari posset, quibus tamen hoc loco non immoratur, quum ad propositum nostrum sola transformationis possibilitas iam sufficiat.

6.

Consideremus productum ex $m(m-1)$ factoribus

$$\begin{aligned} & (a-b)(a-c)(a-d) \dots \\ & \times (b-a)(b-c)(b-d) \dots \\ & \times (c-a)(c-b)(c-d) \dots \\ & \times (d-a)(d-b)(d-c) \dots \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

quod per π denotabimus, et, quum indeterminatas a, b, c etc. symmetrice involvat, in formam functionis ipsarum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. redactum supponemus. Trans-eat haec functio in p , si loco ipsarum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. resp. substituuntur l', l'', l''' etc. His ita factis, ipsam p vocabimus *determinantem* functionis

$$y = x^m - l' x^{m-1} + l'' x^{m-2} - l''' x^{m-3} + \text{etc.}$$

Ita e. g. pro $m = 2$ habemus

$$p = -l'^2 + 4l''$$

Perinde pro $m = 3$ invenitur

$$p = -l'^2 l''^2 + 4l'^3 l''' + 4l''^3 - 18l' l'' l''' + 27l'''^2$$

Determinans functionis y itaque est functio coefficientium l', l'', l''' etc. talis, quae per substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc. transit in productum ex omnibus differentiis inter binas quantitatum a, b, c etc. In casu eo, ubi $m = 1$, i. e. ubi unica tantum indeterminata a habetur, adeoque nullae omnino adsunt differentiae, ipsum numerum 1 tamquam determinantem functionis y adoptare convenit.

In stabilienda notione determinantis, coefficientes functionis y tamquam quantitates indeterminatas spectare oportuit. Determinans functionis cum coefficientibus determinatis

$$Y = x^m - L' x^{m-1} + L'' x^{m-2} - L''' x^{m-3} + \text{etc.}$$

erit numerus determinatus P , puta valor functionis p pro $l' = L', l'' = L'', l''' = L'''$ etc. Quodsi itaque supponimus, Y resolvi posse in factores simplices

$$Y = (x-A)(x-B)(x-C) \dots$$

sive Y oriri ex

$$u = (x-a)(x-b)(x-c) \dots$$

statuendo $a = A, b = B, c = C$ etc., adeoque per easdem substitutiones $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. resp. fieri L', L'', L''' etc., manifesto P aequalis erit producto e factoribus

$$\begin{aligned} & (A-B)(A-C)(A-D) \dots \\ & \times (B-A)(B-C)(B-D) \dots \\ & \times (C-A)(C-B)(C-D) \dots \\ & \times (D-A)(D-B)(D-C) \dots \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

Patet itaque, si fiat $P = 0$, inter quantitates A, B, C etc. duas saltem aequales reperiri debere; contra, si non fuerit $P = 0$, cunctas A, B, C etc. necessario inaequales esse. Iam observamus, si statuamus $\frac{dY}{dx} = Y'$, sive

$$Y' = mx^{m-1} - (m-1)L'x^{m-2} + (m-2)L''x^{m-3} - (m-3)L'''x^{m-4} + \text{etc.}$$

haberi

$$\begin{aligned} Y' = & (x-B)(x-C)(x-D) \dots \\ & + (x-A)(x-C)(x-D) \dots \\ & + (x-A)(x-B)(x-D) \dots \\ & + (x-A)(x-B)(x-C) \dots \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Si itaque duae quantitatum A, B, C etc. aequales sunt, e. g. $A = B$, Y' per $x-A$ divisibilis erit, sive Y et Y' implicabunt divisorem communem $x-A$. Vice versa, si Y' cum Y ullum divisorem communem habere supponitur, necessario Y' aliquem factorem simplicem ex his $x-A, x-B, x-C$ etc. implicare debebit, e. g. primum $x-A$, quod manifesto fieri nequit, nisi A alicui reliquarum B, C, D etc. aequalis fuerit. Ex his omnibus itaque colligimus duo THEOREMATA:

- I. Si determinans functionis Y fit $= 0$, certo Y cum Y' divisorem communem habet, adeoque, si Y et Y' divisorem communem non habent, determinans functionis Y nequit esse $= 0$.
- II. Si determinans functionis Y non est $= 0$, certo Y et Y' divisorem communem habere nequeunt; vel, si Y et Y' divisorem communem habent, necessario determinans functionis Y esse debet $= 0$.

7.

At probe notandum est, totam vim huius demonstrationis simplicissimae inniti suppositioni, functionem Y in factores simplices resolvi posse: quae ipsa suppositio, hocce quidem loco, ubi de demonstratione generali huius resolubilitatis agitur, nihil esset nisi petitio principii. Et tamen a paralogismis huic prorsus similibus non sibi caverunt omnes, qui demonstrationes analyticas theorematum principalium tentaverunt, cuius speciosae illusionis originem iam in ipsa disquisitionis enunciatione animadvertimus, quum omnes in *formam* tantum radicum aequationum inquisiverint, dum *existentiam* temere suppositam demonstrare oportuisset. Sed de tali procedendi modo, qui nimis a rigore et claritate abhorret, satis iam in commentatione supra citata dictum est. Quamobrem iam theoremata art. praec.

quorum altero saltem ad propositum nostrum non possumus carere, solidiori fundamento superstruemus: a secundo, tamquam faciliori initium faciemus.

8.

Denotemus per ρ functionem

$$\begin{aligned} & \frac{\pi(x-b)(x-c)(x-d) \dots}{(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2 \dots} \\ & + \frac{\pi(x-a)(x-c)(x-d) \dots}{(b-a)^2(b-c)^2(b-d)^2 \dots} \\ & + \frac{\pi(x-a)(x-b)(x-d) \dots}{(c-a)^2(c-b)^2(c-d)^2 \dots} \\ & + \frac{\pi(x-a)(x-b)(x-c) \dots}{(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2 \dots} \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

quae, quoniam π per singulos denominatores est divisibilis, fit functio integra indeterminatarum x, a, b, c etc. Statuamus porro $\frac{d\rho}{dx} = \rho'$, ita ut habeatur

$$\begin{aligned} \rho' = & (x-b)(x-c)(x-d) \dots \\ & + (x-a)(x-c)(x-d) \dots \\ & + (x-a)(x-b)(x-d) \dots \\ & + (x-a)(x-b)(x-c) \dots \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Manifesto pro $x = a$, fit $\rho' = \pi$, unde concludimus, functionem $\pi - \rho'$ indefinite divisibilem esse per $x-a$, et perinde per $x-b, x-c$ etc., nec non per productum ρ . Statuendo itaque

$$\frac{\pi - \rho'}{\rho} = \sigma$$

erit σ functio integra indeterminatarum x, a, b, c etc., et quidem, perinde ut ρ , symmetrica ratione indeterminatarum a, b, c etc. Erui poterunt itaque functiones duae integrae r, s , indeterminatarum x, l', l'', l''' etc., tales quae per substitutiones $l' = k', l'' = k'', l''' = k'''$ etc. transeant in ρ, σ resp. Quodsi itaque analogiam sequentes, functionem

$$mx^{m-1} - (m-1)l'x^{m-2} + (m-2)l''x^{m-3} - (m-3)l'''x^{m-4} + \text{etc.}$$

i. e. quotientem differentialem $\frac{dy}{dx}$ per y' denotemus, ita ut y' per easdem illas

substitutiones transeat in ν , patet, $p - sy - ry'$ per easdem substitutiones transire in $\pi - \sigma\nu - \rho\nu'$, i. e. in 0, adeoque necessario iam per se identice evanescere debere (art. 5): habemus proin aequationem identicam

$$p = sy + ry'$$

Hinc si supponamus, ex substitutione $l' = L$, $l'' = L''$, $l''' = L'''$ etc. prodire $r = R$, $s = S$, erit etiam identice

$$P = SY + RY'$$

ubi quum S, R sint functionis integræ ipsius x , P vero quantitas determinata seu numerus, sponte patet, Y et Y' divisorem communem habere non posse, nisi fuerit $P = 0$. Quod est ipsum theorema posterius art. 6.

9.

Demonstrationem theorematum prioris ita absolvemus, ut ostendamus, in casu eo, ubi Y et Y' non habent divisorem communem, certo fieri non posse $P = 0$. Ad hunc finem primo, per præcepta art. 2 erutas supponimus duas functiones integras indeterminatæ x , puta fx et φx , tales, ut habeatur aequatio identica

$$fx.Y + \varphi x.Y' = 1$$

quam hic ita exhibemus:

$$fx.\nu + \varphi x.\nu' = 1 + fx.(\nu - Y) + \varphi x.\frac{d(\nu - Y)}{dx}$$

sive, quoniam habemus

$$\nu' = (x-b)(x-c)(x-d)\dots + (x-a).\frac{d[(x-b)(x-c)(x-d)\dots]}{dx}$$

in forma sequente:

$$\begin{aligned} & \varphi x.(x-b)(x-c)(x-d)\dots \\ & + \varphi x.(x-a).\frac{d[(x-b)(x-c)(x-d)\dots]}{dx} \\ & + fx.(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\dots = 1 + fx.(\nu - Y) + \varphi x.\frac{d(\nu - Y)}{dx} \end{aligned}$$

Exprimamus brevitate causa

$$fx.(y - Y) + \varphi x.\frac{d(y - Y)}{dx}$$

quæ est functio integra indeterminatarum x, l', l'', l''' etc.

$$\text{per } F(x, l', l'', l''' \text{ etc.})$$

unde erit identice

$$1 + fx.(\nu - Y) + \varphi x.\frac{d(\nu - Y)}{dx} = 1 + F(x, l', l'', l''' \text{ etc.})$$

Habebimus itaque aequationes identicas [1]

$$\begin{aligned} \varphi a.(a-b)(a-c)(a-d)\dots &= 1 + F(a, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ \varphi b.(b-a)(b-c)(b-d)\dots &= 1 + F(b, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ \varphi c.(c-a)(c-b)(c-d)\dots &= 1 + F(c, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Supponendo itaque, productum ex omnibus

$$\begin{aligned} & 1 + F(a, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ & 1 + F(b, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ & 1 + F(c, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

quod erit functio integra indeterminatarum a, b, c etc., l', l'', l''' etc. et quidem functio symmetrica respectu ipsarum a, b, c etc., exhiberi per

$$\phi(l', l'', l''' \text{ etc.}, l', l'', l''' \text{ etc.})$$

e multiplicatione cunctarum aequationum [1] resultabit aequatio identica nova [2]

$$\pi \varphi a. \varphi b. \varphi c. \dots = \phi(l', l'', l''' \text{ etc.}, l', l'', l''' \text{ etc.})$$

Porro patet, quum productum $\varphi a. \varphi b. \varphi c. \dots$ indeterminatas a, b, c etc. symmetricè involvat, inveniri posse functionem integram indeterminatarum l', l'', l''' etc. talem, quæ per substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc. transeat in $\varphi a. \varphi b. \varphi c. \dots$. Sit t illa functio, eritque etiam identice [3]

$$pt = \phi(l', l'', l''' \text{ etc.}, l', l'', l''' \text{ etc.})$$

quoniam hæc aequatio per substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc. in identicam [2] transit.

Iam ex ipsa definitione functionis F sequitur, identice haberi



$$F(x, L, L', L'' \text{ etc.}) = 0$$

Hinc etiam identice erit

$$\begin{aligned} 1 + F(a, L, L', L'' \text{ etc.}) &= 1 \\ 1 + F(b, L, L', L'' \text{ etc.}) &= 1 \\ 1 + F(c, L, L', L'' \text{ etc.}) &= 1 \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

et proin erit etiam identice

$$\psi(\lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}, L, L', L'' \text{ etc.}) = 1$$

adeoque etiam identice [4]

$$\psi(l', l'', l''' \text{ etc.}, L, L', L'' \text{ etc.}) = 1$$

Quamobrem e combinatione aequationum [3] et [4], et substituendo $l' = L$, $l'' = L'$, $l''' = L''$ etc. habebimus [5]

$$PT = 1$$

si per T denotamus valorem functionis t illis substitutionibus respondentem. Qui valor quum necessario fiat quantitas finita, P certo nequit esse $= 0$. Q. E. D.

10.

E praecedentibus iam perspicuum est, quamlibet functionem integram Y unius indeterminatae x , cuius determinans sit $= 0$, deponi posse in factores, quorum nullus habeat determinantem 0 . Investigato enim divisore communi altissimo functionum Y et $\frac{dY}{dx}$, illa iam in duos factores resoluta habebitur. Si quis horum factorum *) iterum habet determinantem 0 , eodem modo in duos factores resolvitur, eodemque pacto continuabimus, donec Y in factores tales tandem resoluta habeatur, quorum nullus habeat determinantem 0 .

Facile porro perspicitur, inter hos factores, in quos Y resolvitur, ad mi-

*) Revera quidem non nisi factor iste, qui est ille divisor communis, determinantem 0 habere potest. Sed demonstratio huius propositionis hoc loco in quasdam ambages perduceret; neque etiam hic necessaria est, quum factorem alterum, si et huius determinans evanescere posset, eodem modo tractare, ipsumque in factores resolvere liceret.

nimum unum reperiri debere ita comparatum, ut inter factores numeri, qui eius ordinem exprimit, binarius saltem non pluries occurrat, quam inter factores numeri m , qui exprimit ordinem functionis Y : puta, si statuatur $m = k \cdot 2^u$, denotante k numerum imparem, inter factores functionis Y ad minimum unus reperietur ad ordinem $k \cdot 2^v$ referendus, ita ut etiam k sit impar, atque vel $v = u$, vel $v < u$. Veritas huius assertionis sponte sequitur inde, quod m est aggregatum numerorum, qui ordinem singulorum factorum ipsius Y exprimunt.

11.

Antequam ulterius progrediamur, expressionem quandam explicabimus, cuius introductio in omnibus de functionibus symmetricis disquisitionibus maximam utilitatem affert, et quae nobis quoque peropportuna erit. Supponamus, M esse functionem quarundam ex indeterminatis a, b, c etc., et quidem sit μ multitudo earum, quae in expressionem M ingrediuntur, nullo respectu habito aliarum indeterminatarum, si quas forte implicet ipsa M . Permutatis illis μ indeterminatis omnibus quibus fieri potest modis tum inter se tum cum $m - \mu$ reliquis ex a, b, c etc., orientur ex M aliae expressiones ipsi M similes, ita ut omnino habeantur

$$m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-\mu+1)$$

expressiones, ipsa M inclusa, quarum complexum simpliciter dicemus *complexum omnium* M . Hinc sponte patet, quid significet aggregatum omnium M , productum ex omnibus M etc. Ita e.g. π dicetur productum ex omnibus $a - b$, v productum ex omnibus $x - a$, v aggregatum omnium $\frac{v}{x-a}$ etc.

Si forte M est functio symmetrica respectu quarundam ex μ indeterminatis, quas continet, istarum permutationes inter se functionem M non variant, quamobrem in complexu omnium M quilibet terminus pluries, et quidem $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots v$ vicibus reperietur, si v est multitudo indeterminatarum, quarum respectu M est symmetrica. Si vero M non solum respectu v indeterminatarum symmetrica est, sed insuper respectu v' aliarum, nec non respectu v'' aliarum etc., ipsa M non variabitur sive binae e primis v indeterminatis inter se permutantur, sive binae e secundis v' , sive binae e tertiis v'' etc., ita ut semper

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots v \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots v' \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots v'' \text{ etc.}$$

permutationes terminis identicis respondeant. Quare si ex his terminis identicis semper unicum tantum retineamus, omnino habebimus

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-(k+1))}{1.2.3\dots k.1.2.3\dots k.1.2.3\dots k\dots\text{etc.}}$$

terminos, quorum complexum dicemus *complexum omnium M exclusis repetitionibus*, ut a *complexu omnium M admissis repetitionibus* distinguatur. Quoties nihil expressis verbis monitum fuerit, repetitiones admitti semper subintelligemus.

Ceterum facile perspicitur, aggregatum omnium *M*, vel productum ex omnibus *M*, vel generaliter quamlibet functionem symmetricam omnium *M* semper fieri functionem symmetricam indeterminatarum *a, b, c* etc., sive admittantur repetitiones, sive excludantur.

12.

Iam considerabimus, denotantibus *u, x* indeterminatas, productum ex omnibus $u - (a+b)x + ab$, exclusis repetitionibus, quod per ζ designabimus. Erit itaque ζ productum ex $\frac{1}{2}m(m-1)$ factoribus his

$$\begin{aligned} u - (a+b)x + ab \\ u - (a+c)x + ac \\ u - (a+d)x + ad \\ \text{etc.} \\ u - (b+c)x + bc \\ u - (b+d)x + bd \\ \text{etc.} \\ u - (c+d)x + cd \\ \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Quae functio quum indeterminatas *a, b, c* etc. symmetrice implicet, assignari poterit functio integra indeterminatarum *u, x, l', l'', l'''* etc., per *z* denotanda, quae transeat in ζ , si loco indeterminatarum l', l'', l''' etc. substituantur $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. Denique designemus per *Z* functionem solarum indeterminatarum *u, x*, in quam *z* transit, si indeterminatis l', l'', l''' etc. tribuamus valores determinatos *L', L'', L'''* etc.

Hae tres functiones ζ, z, Z considerari possunt tamquam functiones integrae ordinis $\frac{1}{2}m(m-1)$ indeterminatae *u* cum coefficientibus indeterminatis, qui

quidem coefficientes erunt

pro ζ , functiones indeterminatarum *x, a, b, c* etc.
pro *z*, functiones indeterminatarum *x, l', l'', l'''* etc.
pro *Z*, functiones solius indeterminatae *x*.

Singuli vero coefficientes ipsius *z* transibunt in coefficientes ipsius ζ per substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc. nec non in coefficientes ipsius *Z* per substitutiones $l' = L', l'' = L'', l''' = L'''$ etc. Eadem, quae modo de coefficientibus diximus, etiam de determinantibus functionum ζ, z, Z valebunt. Atque in hos ipsos iam propius inquiremus, et quidem cum in finem, ut demonstretur

THEOREMA. Quoties non est $P = 0$, determinans functionis *Z* certo nequit esse identice $= 0$.

13.

Perfacilis quidem esset demonstratio huius theoremat, si supponere liceret. *Y* resolvi posse in factores simplices

$$(x-A)(x-B)(x-C)(x-D)\dots$$

Tunc enim certum quoque esset, *Z* esse productum ex omnibus $u - (A+B)x + AB$, atque determinantem functionis *Z* productum e differentiis inter binas quantitates

$$\begin{aligned} (A+B)x - AB \\ (A+C)x - AC \\ (A+D)x - AD \\ \text{etc.} \\ (B+C)x - BC \\ (B+D)x - BD \\ \text{etc.} \\ (C+D)x - CD \\ \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Hoc vero productum identice evanescere nequit, nisi aliquis factorum per se identice fiat $= 0$, unde sequeretur, duas quantitates *A, B, C* etc. aequales esse, adeoque determinantem *P* functionis *Y* fieri $= 0$, contra hyp.

At seposita tali argumentatione, quam ad instar art. 6 a petitione principii proficisci manifestum est, statim ad demonstrationem stabilem theorematis art. 12 explicandam progredimur.

14.

Determinans functionis ζ erit productum ex omnibus differentiis inter binas $(a+b)x-ab$, quarum differentiarum multitudo est

$$\frac{1}{2}m(m-1)(\frac{1}{2}m(m-1)-1) = \frac{1}{4}(m+1)m(m-1)(m-2)$$

Hic numerus itaque indicat ordinem determinantis functionis ζ respectu indeterminatae x . Determinans functionis z quidem ad eundem ordinem pertinebit: contra determinans functionis Z utique ad ordinem inferiorem pertinere potest, quoties scilicet quidam coefficientes inde ab altissima potestate ipsius x evanescunt. Nostrum iam est demonstrare, in determinante functionis Z omnes certo coefficientes evanescere non posse.

Propius considerando differentias illas, quarum productum est determinans functionis ζ , deprehendemus, partem ex ipsis (puta differentias inter binas $(a+b)x-ab$ tales, quae elementum commune habent) suppeditare

$$\text{productum ex omnibus } (a-b)(x-c)$$

e reliquis vero (puta e differentiis inter binas $(a+b)x-ab$ tales, quarum elementa diversa sunt) oriri

$$\text{productum ex omnibus } (a+b-c-d)x-ab+cd, \text{ exclusis repetitionibus.}$$

Productum prius factorem unumquemque $a-b$ manifesto $m-2$ vicibus continebit, quemvis factorem $x-c$ autem $(m-1)(m-2)$ vicibus, unde facile concludimus, hocce productum fieri

$$= \pi^{m-2} \rho^{(m-1)(m-2)}$$

Quodsi ita productum posterius per ρ designamus, determinans functionis ζ erit

$$= \pi^{m-2} \rho^{(m-1)(m-2)}$$

Denotando porro per r functionem indeterminatarum x, l', l'', l''' etc. eam, quae transit in ρ per substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc., nec non per R

functionem solius x , eam, in quam transit r per substitutiones $l' = L', l'' = L'', l''' = L'''$ etc., patet determinantem functionis z fieri

$$= p^{m-2} y^{(m-1)(m-2)} r$$

determinantem functionis Z autem

$$= P^{m-2} Y^{(m-1)(m-2)} R$$

Quare quum per hypothesin P non sit $= 0$, res iam in eo vertitur, ut demonstremus, R certo identice evanescere non posse.

15.

Ad hunc finem adhuc aliam indeterminatam w introducemus, atque productum ex omnibus

$$(a+b-c-d)w+(a-c)(a-d)$$

exclusis repetitionibus considerabimus, quod quum ipsas a, b, c etc. symmetrice involvat, tamquam functio integra indeterminatarum $w, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. exhiberi poterit. Denotabimus hanc functionem per $f(w, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc.). Multitudo illorum factorum $(a+b-c-d)w+(a-c)(a-d)$ erit

$$= \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$$

unde facile colligimus, fieri

$$f(0, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}) = \pi^{(m-2)(m-3)}$$

et proin etiam

$$f(0, l', l'', l''' \text{ etc.}) = p^{(m-2)(m-3)}$$

nec non

$$f(0, L', L'', L''' \text{ etc.}) = P^{(m-2)(m-3)}$$

Functio $f(w, L', L'', L''' \text{ etc.})$ generaliter quidem loquendo ad ordinem

$$\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$$

referenda erit: at in casibus specialibus utique ad ordinem inferiorem pertinere potest, si forte contingat, ut quidam coefficientes inde ab altissima potestate ipsius w evanescant: impossibile autem est, ut illa functio tota sit identice $= 0$, quum

aequatio modo inventa doceat, functionis saltem terminum ultimum non evanescere. Supponemus, terminum altissimum functionis $f(w, L', L'', L''' \text{ etc.})$, qui quidem coefficientem non evanescentem habeat, esse Nw' . Si igitur substituimus $w = x - a$, patet, $f(x - a, L', L'', L''' \text{ etc.})$ esse functionem integram indeterminatarum x, a , sive quod idem est, functionem ipsius x cum coefficientibus ab indeterminata a pendentibus, ita tamen ut terminus altissimus sit Nx' , et proin coefficientem determinatum ab a non pendentem habeat, qui non sit $= 0$. Perinde $f(x - b, L', L'', L''' \text{ etc.})$, $f(x - c, L', L'', L''' \text{ etc.})$ erunt functiones integrae indeterminatae x , tales ut singularum terminus altissimus sit Nx' , terminorum sequentium autem coefficientes resp. a b, c etc. pendeant. Hinc productum ex m factoribus

$$\begin{aligned} & f(x - a, L', L'', L''' \text{ etc.}) \\ & f(x - b, L', L'', L''' \text{ etc.}) \\ & f(x - c, L', L'', L''' \text{ etc.}) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

erit functio integra ipsius x , cuius terminus altissimus erit $N^m x^{m'}$, dum terminorum sequentium coefficientes pendent ab indeterminatis a, b, c etc.

Consideremus iam porro productum ex m factoribus his

$$\begin{aligned} & f(x - a, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ & f(x - b, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ & f(x - c, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

quod quum sit functio indeterminatarum, x, a, b, c etc., $l', l'', l''' \text{ etc.}$, et quidem symmetrica respectu ipsarum a, b, c etc., exhiberi poterit tamquam functio indeterminatarum $x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}$, $l', l'', l''' \text{ etc.}$ per

$$\varphi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}, l', l'', l''' \text{ etc.})$$

denotanda. Erit itaque

$$\varphi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.})$$

productum ex factoribus

$$\begin{aligned} & f(x - a, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}) \\ & f(x - b, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}) \\ & f(x - c, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

et proin indefinite divisibilis per ρ , quum facile perspiciatur, quemlibet factorem ipsius ρ in aliquo illorum factorum implicari. Statuamus itaque

$$\varphi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}) = \rho \psi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.})$$

ubi characteristicam ψ functionem integram exhibebit. Hinc vero facile deducitur, etiam identice esse

$$\varphi(x, L', L'', L''' \text{ etc.}, L', L'', L''' \text{ etc.}) = R \psi(x, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

Sed supra demonstravimus, productum e factoribus

$$\begin{aligned} & f(x - a, L', L'', L''' \text{ etc.}) \\ & f(x - b, L', L'', L''' \text{ etc.}) \\ & f(x - c, L', L'', L''' \text{ etc.}) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

quod erit $= \varphi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}, l', l'', l''' \text{ etc.})$ habere terminum altissimum $N^m x^{m'}$; eundem proin terminum altissimum habebit functio $\varphi(x, L', L'', L''' \text{ etc.}, L', L'', L''' \text{ etc.})$ adeoque certo non est identice $= 0$. Quocirca etiam R nequit esse identice $= 0$, neque adeo etiam determinans functionis Z . Q. E. D.

16.

THEOREMA. Denotet $\varphi(u, x)^*$ productum ex quocunque factoribus talibus, in quos indeterminatae u, x lineariter tantum ingrediuntur, sive qui sint formae

$$\begin{aligned} & \alpha + \bar{\alpha}u + \gamma x \\ & \alpha' + \bar{\alpha}'u + \gamma'x \\ & \alpha'' + \bar{\alpha}''u + \gamma''x \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

sit porro w alia indeterminata. Tunc functio

$$\varphi(u + w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{dx}, x - w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{du}) = \Omega$$

indefinite erit divisibilis per $\varphi(u, x)$.

*) Vel nobis non momentibus quisque videbit, signa in art. praec. introducta restringi ad istum solum articulum, et proin significationem characterum φ, w praesentem non esse confundendam cum pristina.

Dem. Statuendo

$$\begin{aligned}\varphi(u, x) &= (\alpha + \bar{\sigma}u + \gamma x)Q \\ &= (\alpha' + \bar{\sigma}'u + \gamma'x)Q' \\ &= (\alpha'' + \bar{\sigma}''u + \gamma''x)Q'' \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

erunt Q, Q', Q'' etc. functiones integrae indeterminatarum $u, x, \alpha, \bar{\sigma}, \gamma, \alpha', \bar{\sigma}', \gamma', \alpha'', \bar{\sigma}'', \gamma''$ etc. atque

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(u, x)}{dx} &= \gamma Q + (\alpha + \bar{\sigma}u + \gamma x) \cdot \frac{dQ}{dx} \\ &= \gamma' Q' + (\alpha' + \bar{\sigma}'u + \gamma'x) \cdot \frac{dQ'}{dx} \\ &= \gamma'' Q'' + (\alpha'' + \bar{\sigma}''u + \gamma''x) \cdot \frac{dQ''}{dx} \\ &\text{etc.} \\ \frac{d\varphi(u, x)}{du} &= \bar{\sigma} Q + (\alpha + \bar{\sigma}u + \gamma x) \cdot \frac{dQ}{du} \\ &= \bar{\sigma}' Q' + (\alpha' + \bar{\sigma}'u + \gamma'x) \cdot \frac{dQ'}{du} \\ &= \bar{\sigma}'' Q'' + (\alpha'' + \bar{\sigma}''u + \gamma''x) \cdot \frac{dQ''}{du} \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Substitutis hisce valoribus in factoribus, e quibus conflatur productum Ω , puta in

$$\begin{aligned}\alpha + \bar{\sigma}u + \gamma x + \bar{\sigma}w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{dx} - \gamma w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{du} \\ \alpha' + \bar{\sigma}'u + \gamma'x + \bar{\sigma}'w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{dx} - \gamma'w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{du} \\ \alpha'' + \bar{\sigma}''u + \gamma''x + \bar{\sigma}''w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{dx} - \gamma''w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{du} \\ \text{etc. resp.}\end{aligned}$$

hi obtinent valores sequentes

$$\begin{aligned}(\alpha + \bar{\sigma}u + \gamma x)(1 + \bar{\sigma}w \cdot \frac{dQ}{dx} - \gamma w \cdot \frac{dQ}{du}) \\ (\alpha' + \bar{\sigma}'u + \gamma'x)(1 + \bar{\sigma}'w \cdot \frac{dQ'}{dx} - \gamma'w \cdot \frac{dQ'}{du}) \\ (\alpha'' + \bar{\sigma}''u + \gamma''x)(1 + \bar{\sigma}''w \cdot \frac{dQ''}{dx} - \gamma''w \cdot \frac{dQ''}{du}) \\ \text{etc.}\end{aligned}$$

quapropter Ω erit productum ex $\varphi(u, x)$ in factores

$$\begin{aligned}1 + \bar{\sigma}w \cdot \frac{dQ}{dx} - \gamma w \cdot \frac{dQ}{du} \\ 1 + \bar{\sigma}'w \cdot \frac{dQ'}{dx} - \gamma'w \cdot \frac{dQ'}{du} \\ 1 + \bar{\sigma}''w \cdot \frac{dQ''}{dx} - \gamma''w \cdot \frac{dQ''}{du}\end{aligned}$$

etc. i. e. ex $\varphi(u, x)$ in functionem integram indeterminatarum $u, x, w, \alpha, \bar{\sigma}, \gamma, \alpha', \bar{\sigma}', \gamma', \alpha'', \bar{\sigma}'', \gamma''$ etc. Q. E. D.

17.

Theorema art. praec. manifesto applicabile est ad functionem ζ , quam ab-
hinc per

$$f(u, x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.})$$

exhiberi supponemus, ita ut

$$f(u + w \cdot \frac{d\zeta}{dx}, x - w \cdot \frac{d\zeta}{du}, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.})$$

indefinite divisibilis evadat per ζ : quotientem, qui erit functio integra indeterminatarum u, x, w, a, b, c etc., symmetrica respectu ipsarum a, b, c etc., exhibebimus per

$$\phi(u, x, w, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.})$$

Hinc concludimus, fieri etiam identice

$$f(u + w \cdot \frac{d\zeta}{dx}, x - w \cdot \frac{d\zeta}{du}, l', l'', l''' \text{ etc.}) = z\phi(u, x, w, l', l'', l''' \text{ etc.})$$

nec non

$$f(u + w \cdot \frac{dZ}{dx}, x - w \cdot \frac{dZ}{du}, L', L'', L''' \text{ etc.}) = Z\phi(u, x, w, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

Quodsi itaque functionem Z simpliciter exhibemus per $F(u, x)$, ita ut habeatur

$$f(u, x, L', L'', L''' \text{ etc.}) = F(u, x)$$

erit identice

$$F(u + w \cdot \frac{dZ}{dx}, x - w \cdot \frac{dZ}{du}) = Z\phi(u, x, w, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

18.

Si itaque e valoribus determinatis ipsarum u, x , puta ex $u = U, x = X$, prodire supponimus

$$\frac{dZ}{dx} = X', \quad \frac{dZ}{du} = U'$$

erit identice

$$F(U + wX', X - wU') = F(U, X) \cdot \psi(U, X, w, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

Quoties U' non evanescit, statuere licebit

$$w = \frac{X - x}{U'}$$

unde emergit

$$F\left(U + \frac{XX'}{U'} - \frac{Xx}{U'}, x\right) = F(U, X) \cdot \psi\left(U, X, \frac{X-x}{U'}, L', L'', L''' \text{ etc.}\right)$$

quod etiam ita enunciare licet:

Si in functione Z statuitur $u = U + \frac{XX'}{U'} - \frac{Xx}{U'}$, transibit ea in

$$F(U, X) \cdot \psi(U, X, \frac{X-x}{U'}, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

19.

Quum in casu eo, ubi non est $P = 0$, determinans functionis Z sit functio indeterminatae x per se non evanescens, manifesto multitudo valorum determinatorum ipsius x , per quos hic determinans valorem 0 nancisci potest, erit numerus finitus, ita ut infinite multi valores determinati ipsius x assignari possint, qui determinanti illi valorem a 0 diversum concilient. Sit X talis valor ipsius x (quem insuper *realem* supponere licet). Erit itaque determinans functionis $F(u, X)$ non = 0, unde sequitur, per theorema II. art. 6, functiones

$$F(u, X) \text{ et } \frac{dF(u, X)}{du}$$

habere non posse divisorem ullum communem. Supponamus porro, exstare aliquem valorem determinatum ipsius u , puta U (sive realis sit, sive imaginarius i. e. sub forma $g + h\sqrt{-1}$ contentus), qui reddat $F(u, X) = 0$, i. e. esse $F(U, X) = 0$. Erit itaque $u - U$ factor indefinitus functionis $F(u, X)$, et proin functio $\frac{dF(u, X)}{du}$ certo per $u - U$ non divisibilis. Supponendo itaque, hanc functionem

$\frac{dF(u, X)}{du}$ nancisci valorem U' , si statuatur $u = U$, certo esse nequit $U' = 0$. Manifesto autem U' erit valor quotientis differentialis partialis $\frac{dZ}{du}$ pro $u = U, x = X$; quodsi itaque insuper pro iisdem valoribus ipsarum u, x valorem quotientis differentialis partialis $\frac{dZ}{dx}$ per X' denotemus, perspicuum est per ea quae in art. praec. demonstrata sunt, functionem Z per substitutionem

$$u = U + \frac{XX'}{U'} - \frac{Xx}{U'}$$

identice evanescere, adeoque per factorem

$$u + \frac{X'}{U'}x - \left(U + \frac{XX'}{U'}\right)$$

indefinite esse divisibilem. Quocirca statuendo $u = xx$, patet, $F(xx, x)$ divisibilem esse per

$$xx + \frac{X'}{U'}x - \left(U + \frac{XX'}{U'}\right)$$

adeoque obtinere valorem 0, si pro x accipiatur radix aequationis

$$xx + \frac{X'}{U'}x - \left(U + \frac{XX'}{U'}\right) = 0$$

i. e. si statuatur

$$x = \frac{-X' \pm \sqrt{(1UU'U' + 4XX'U' + XX')}}{2U'}$$

quos valores vel reales esse vel sub forma $g + h\sqrt{-1}$ contentos constat.

Facile iam demonstratur, per eosdem valores ipsius x etiam functionem Y evanescere debere. Manifesto enim $f(xx, x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.})$ est productum ex omnibus $(x-a)(x-b)$ exclusis repetitionibus, et proin $= y^{m-1}$. Hinc sponte sequitur

$$f(xx, x, l', l'', l''' \text{ etc.}) = y^{m-1}$$

$$f(xx, x, L', L'', L''' \text{ etc.}) = Y^{m-1}$$

sive $F(xx, x) = Y^{m-1}$, cuius itaque valor determinatus evanescere nequit, nisi simul evanescat valor ipsius Y .

20.

Adiumento disquisitionum praecedentium reducta est solutio aequationis $Y = 0$, i. e. inventio valoris determinati ipsius x , vel realis vel sub forma $g + h\sqrt{-1}$ contenti, qui illi satisfaciatur, ad solutionem aequationis $F(u, X) = 0$,

siquidem determinans functionis Y non fuerit $= 0$. Observare convenit, si omnes coefficientes in Y , i. e. numeri L', L'', L''' etc. sint quantitates reales. etiam omnes coefficientes in $F(u, X)$ reales fieri, siquidem, quod licet, pro X quantitas realis accepta fuerit. Ordo aequationis secundariae $F(u, X) = 0$ exprimitur per numerum $\frac{1}{2}m(m-1)$: quoties igitur m est numerus par formae 2^k denotante k indefinite numerum imparem, ordo aequationis secundariae exprimitur per numerum formae 2^{k-1} .

In casu eo, ubi determinans functionis Y fit $= 0$, assignari poterit per art. 10 functio alia $\mathfrak{Y}$ ipsam metiens, cuius determinans non sit $= 0$, et cuius ordo exprimatur per numerum formae 2^k , ita ut sit vel $\nu < \mu$, vel $\nu = \mu$. Quaelibet solutio aequationis $\mathfrak{Y} = 0$ etiam satisfacet aequationi $Y = 0$: solutio aequationis $\mathfrak{Y} = 0$ iterum reducitur ad solutionem alius aequationis, cuius ordo exprimatur per numerum formae 2^{k-1} .

Ex his itaque colligimus, generaliter solutionem cuiusvis aequationis, cuius ordo exprimatur per numerum parem formae 2^k , reduci posse ad solutionem alius aequationis, cuius ordo exprimatur per numerum formae 2^{k-1} , ita ut sit $\mu' < \mu$. Quoties hic numerus etiamnum par est, i. e. μ' non $= 0$, eadem methodus denuo applicabitur, atque ita continuabimus, donec ad aequationem perveniamus, cuius ordo exprimatur per numerum imparem; et huius aequationis coefficientes omnes erunt reales, siquidem omnes coefficientes aequationis primitivae reales fuerunt. Talem vero aequationem ordinis imparis certo solubilem esse constat, et quidem per radicem realem, unde singulae quoque aequationes antecedentes solubiles erunt, sive per radices reales sive per radices formae $g + h\sqrt{-1}$.

Evictum est itaque, functionem quamlibet Y formae $x^m - L'x^{m-1} + L''x^{m-2} - \text{etc.}$, ubi L', L'' etc. sunt quantitates determinatae reales, involvere factorem indefinitum $x - A$, ubi A sit quantitas vel realis vel sub forma $g + h\sqrt{-1}$ contenta. In casu posteriori facile perspicitur, Y nancisci valorem 0 etiam per substitutionem $x = g - h\sqrt{-1}$, adeoque etiam divisibilem esse per $x - (g - h\sqrt{-1})$, et proin etiam per productum $xx - 2gx + gg + hh$. Quaelibet itaque functio Y certo factorem indefinitum realem primi vel secundi ordinis implicat, et quum idem iterum de quotiente valeat, manifestum est, Y in factores reales primi vel secundi ordinis resolvi posse. Quod demonstrare erat propositum huius commentationis.

THEOREMATIS

DE RESOLUBILITATE FUNCTIONUM
ALGEBRAICARUM INTEGRARUM

IN FACTORES REALES

DEMONSTRATIO TERTIA

SUPPLEMENTUM COMMENTATIONIS PRAECEDENTIS

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM TRADITUM 1816. JAN. 30.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. III.
Gottingae MDCCCXVI.



THEOREMATIS DE RESOLUBILITATE
FUNCTIONUM ALGEBRAICARUM INTEGRARUM
IN FACTORES REALES
DEMONSTRATIO TERTIA.
SUPPLEMENTUM COMMENTATIONIS PRAECEDENTIS.

Postquam commentatio praecedens typis iam expressa esset, iteratae de eodem argumento meditationes ad novam theorematis demonstrationem perduxerunt, quae perinde quidem ac praecedens pure analytica est, sed principiis prorsus diversis innititur, et respectu simplicitatis illi longissime praeferenda videtur. Huic itaque *tertia* demonstrationi pagellae sequentes dicatae sunt.

1.

Proposita sit functio indeterminatae x haecce:

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{etc.} + Lx + M$$

in qua coefficients A, B, C etc. sunt quantitates reales determinatae. Sint r, φ aliae indeterminatae, statuamusque

$$\begin{aligned} r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1} \cos (m-1)\varphi + Br^{m-2} \cos (m-2)\varphi \\ + Cr^{m-3} \cos (m-3)\varphi + \text{etc.} + Lr \cos \varphi + M = t \\ r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1} \sin (m-1)\varphi + Br^{m-2} \sin (m-2)\varphi \\ + Cr^{m-3} \sin (m-3)\varphi + \text{etc.} + Lr \sin \varphi = u \end{aligned}$$

s*

$$\begin{aligned}
& m r^m \cos m \varphi + (m-1) A r^{m-1} \cos (m-1) \varphi + (m-2) B r^{m-2} \cos (m-2) \varphi \\
& \quad + (m-3) C r^{m-3} \cos (m-3) \varphi + \text{etc.} + L r \cos \varphi = t' \\
& m r^m \sin m \varphi + (m-1) A r^{m-1} \sin (m-1) \varphi + (m-2) B r^{m-2} \sin (m-2) \varphi \\
& \quad + (m-3) C r^{m-3} \sin (m-3) \varphi + \text{etc.} + L r \sin \varphi = u' \\
& m m r^m \cos m \varphi + (m-1)^2 A r^{m-1} \cos (m-1) \varphi + (m-2)^2 B r^{m-2} \cos (m-2) \varphi \\
& \quad + (m-3)^2 C r^{m-3} \cos (m-3) \varphi + \text{etc.} + L r \cos \varphi = t'' \\
& m m r^m \sin m \varphi + (m-1)^2 A r^{m-1} \sin (m-1) \varphi + (m-2)^2 B r^{m-2} \sin (m-2) \varphi \\
& \quad + (m-3)^2 C r^{m-3} \sin (m-3) \varphi + \text{etc.} + L r \sin \varphi = u'' \\
& \frac{(t t' + u u')(t t'' + u u'') + (t u' - u t')^2 - (t t' + u u')^2}{r(t t' + u u')} = y
\end{aligned}$$

Factorem r manifesto e denominatore formulae ultimae tollere licet, quum t', u', t'', u'' per illum sint divisibiles. Denique sit R quantitas positiva determinata, arbitraria quidem, attamen maior maxima quantitatum

$$m A \sqrt{2}, \sqrt[3]{m B \sqrt{2}}, \sqrt[4]{m C \sqrt{2}}, \sqrt[5]{m D \sqrt{2}} \text{ etc.}$$

abstrahendo a signis quantitatum A, B, C etc., i. e. mutatis negativis, si quae adsint, in positivas. His ita praeparatis, dico, $t t' + u u'$ certo nancisci valorem positivum, si statuatur $r = R$, quicumque valor (realis) ipsi φ tribuatur.

Demonstratio. Statuamus

$$\begin{aligned}
& R^m \cos 45^\circ + A R^{m-1} \cos (45^\circ + \varphi) + B R^{m-2} \cos (45^\circ + 2\varphi) \\
& \quad + C R^{m-3} \cos (45^\circ + 3\varphi) + \text{etc.} + L R \cos (45^\circ + (m-1)\varphi) + M \cos (45^\circ + m\varphi) = T \\
& R^m \sin 45^\circ + A R^{m-1} \sin (45^\circ + \varphi) + B R^{m-2} \sin (45^\circ + 2\varphi) \\
& \quad + C R^{m-3} \sin (45^\circ + 3\varphi) + \text{etc.} + L R \sin (45^\circ + (m-1)\varphi) + M \sin (45^\circ + m\varphi) = U \\
& m R^m \cos 45^\circ + (m-1) A R^{m-1} \cos (45^\circ + \varphi) + (m-2) B R^{m-2} \cos (45^\circ + 2\varphi) \\
& \quad + (m-3) C R^{m-3} \cos (45^\circ + 3\varphi) + \text{etc.} + L R \cos (45^\circ + (m-1)\varphi) = T' \\
& m R^m \sin 45^\circ + (m-1) A R^{m-1} \sin (45^\circ + \varphi) + (m-2) B R^{m-2} \sin (45^\circ + 2\varphi) \\
& \quad + (m-3) C R^{m-3} \sin (45^\circ + 3\varphi) + \text{etc.} + L R \sin (45^\circ + (m-1)\varphi) = U'
\end{aligned}$$

patetque

I. T compositam esse e partibus

$$\begin{aligned}
& \frac{R^{m-1}}{m \sqrt{2}} [R + m A \sqrt{2} \cdot \cos (45^\circ + \varphi)] \\
& + \frac{R^{m-2}}{m \sqrt{2}} [R R + m B \sqrt{2} \cdot \cos (45^\circ + 2\varphi)] \\
& + \frac{R^{m-3}}{m \sqrt{2}} [R^3 + m C \sqrt{2} \cdot \cos (45^\circ + 3\varphi)] \\
& + \frac{R^{m-4}}{m \sqrt{2}} [R^4 + m D \sqrt{2} \cdot \cos (45^\circ + 4\varphi)] \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}$$

quas singulas, pro valore quolibet determinato reali ipsius φ , positivas evadere facile perspicitur: hinc T necessario valorem positivum obtinet. Simili modo probatur, etiam U, T', U' fieri positivas, unde etiam $T T' + U U'$ necessario fit quantitas positiva.

II. Pro $r = R$ functiones t, u, t', u' resp. transeunt in

$$\begin{aligned}
& T \cos (45^\circ + m\varphi) + U \sin (45^\circ + m\varphi) \\
& T \sin (45^\circ + m\varphi) - U \cos (45^\circ + m\varphi) \\
& T' \cos (45^\circ + m\varphi) + U' \sin (45^\circ + m\varphi) \\
& T' \sin (45^\circ + m\varphi) - U' \cos (45^\circ + m\varphi)
\end{aligned}$$

uti evolutione facta facile probatur. Hinc vero valor functionis $t t' + u u'$, pro $r = R$, derivatur $= T T' + U U'$, adeoque est quantitas positiva. Q. E. D.

Ceterum ex iisdem formulis colligimus valorem functionis $t t + u u$, pro $r = R$, esse $T T + U U$, adeoque positivum, unde concludimus, pro nullo valore ipsius r , singulis $m A \sqrt{2}, \sqrt[3]{m B \sqrt{2}}, \sqrt[4]{m C \sqrt{2}}$ etc. maiori, simul fieri posse $t = 0, u = 0$.

2.

THEOREMA. Intra limites $r = 0$ et $r = R$, atque $\varphi = 0$ et $\varphi = 360^\circ$ certo exstant valores tales indeterminatarum r, φ , pro quibus fiat simul $t = 0$ et $u = 0$.

Demonstratio. Supponamus theorema non esse verum, patetque, valorem ipsius $t t + u u$ pro cunctis valoribus indeterminatarum intra limites assignatos fieri debere quantitatem positivam, et proin valorem ipsius y semper finitum. Consideremus integrale duplex

$$\iint y d r d \varphi$$

ab $r = 0$ usque ad $r = R$, atque a $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = 360^\circ$ extensum, quod igitur valorem finitum plene determinatum nanciscitur. Hic valor, quem

per Ω denotabimus, idem prodire debeat, sive integratio primo instituat secundum φ ac dein secundum r , sive ordine inverso. At habemus *indefinite*, considerando r tamquam constantem,

$$\int y d\varphi = \frac{tu' - ut'}{r(t + uu')}$$

uti per differentiationem secundum φ facile confirmatur. Constans non adicienda, siquidem integrale a $\varphi = 0$ incipiendum supponamus, quoniam pro $\varphi = 0$ fit $\frac{tu' - ut'}{r(t + uu')} = 0$. Quare quum manifesto $\frac{tu' - ut'}{r(t + uu')}$ etiam evanescat pro $\varphi = 360^\circ$, integrale $\int y d\varphi$ a $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = 360^\circ$ fit $= 0$, manente r indefinita. Hinc autem sequitur $\Omega = 0$.

Perinde habemus *indefinite*, considerando φ tamquam constantem,

$$\int y dr = \frac{tt' + uu'}{t + uu'}$$

uti aequae facile per differentiationem secundum r confirmatur: hic quoque constans non adicienda, integrali ab $r = 0$ incipiente. Quapropter integrale ab $r = 0$ usque ad $r = R$ extensum fit per ea, quae in art. praec. demonstrata sunt, $= \frac{TT' + UV'}{TT + UV}$ adeoque per theorema art. praec. semper quantitas positiva pro quolibet valore reali ipsius φ . Hinc etiam Ω , i. e. valor integralis

$$\int \frac{TT' + UV'}{TT + UV} d\varphi$$

a $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = 360^\circ$, necessario fit quantitas positiva*). Quod est absurdum, quoniam eandem quantitatem antea invenimus $= 0$: suppositio itaque consistere nequit, theorematique veritas hinc evicta est.

3.

Functio X per substitutionem $x = r(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1})$ transit in $t + u\sqrt{-1}$, nec non per substitutionem $x = r(\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})$ in $t - u\sqrt{-1}$. Quodsi igitur pro valoribus determinatis ipsarum r, φ , puta pro $r = g, \varphi = G$, simul provenit $t = 0, u = 0$ (quales valores exstare in art. praec. demonstratum est), X per utramque substitutionem

*) Uti iam per se manifestum est. Ceterum integrale indefinitum facile eruitur $= m\varphi + 45^\circ - \text{arc. tang. } \frac{U}{V}$, atque aliunde demonstrari potest (per se enim nondum obvium est, quoniam valorem ex infinite multis functioni multiformi arc. tang. $\frac{U}{V}$ competentibus pro $\varphi = 360^\circ$ adoptare oporteat), huius valorem usque ad $\varphi = 360^\circ$ extensum statui debere $= m \times 360^\circ$ sive $= 2m\pi$. Sed hoc ad institutum nostrum non est necessarium.

$$x = g(\cos G + \sin G \sqrt{-1}), \quad x = g(\cos G - \sin G \sqrt{-1})$$

valorem 0 obtinet, et proin *indefinite* per

$$x - g(\cos G + \sin G \sqrt{-1}), \quad \text{nec non per } x - g(\cos G - \sin G \sqrt{-1})$$

divisibilis erit. Quoties non est $\sin G = 0$, neque $g = 0$, hi divisores sunt inaequales, et proin X etiam per illorum productum

$$xx - 2g \cos G \cdot x + gg$$

divisibilis erit, quoties autem vel $\sin G = 0$ adeoque $\cos G = \pm 1$, vel $g = 0$, illi factores sunt identici scilicet $= x \mp g$. Certum itaque est, functionem X involvere divisorem realem secundi vel primi ordinis, et quum eadem conclusio rursus de quotiente valeat, X in tales factores complete resolubilis erit. Q. E. D.

4.

Quamquam in praecedentibus negotio quod propositum erat, iam plene perfuncti simus, tamen haud superfluum erit, adhuc quaedam de ratiocinatione art. 2 adiacere. A suppositione, t et u pro nullis valoribus indeterminatarum r, φ intra limites illic assignatos simul evanescere, ad contradictionem inevitabilem delapsi sumus, unde ipsius suppositionis falsitatem conclusimus. Haec igitur contradictio cessare debet, si revera adsunt valores ipsarum r, φ , pro quibus t et u simul fiunt $= 0$. Quod ut magis illustretur, observamus, pro talibus valoribus fieri $tt + uu = 0$, adeoque ipsam y infinitam, unde haud amplius licebit, integrale duplex $\iint y dr d\varphi$ tamquam quantitatem assignabilem tractare. Generaliter quidem loquendo, denotantibus ξ, η, ζ *indefinite* coordinatas punctorum in spatio, integrale $\iint y dr d\varphi$ exhibet volumen solidi, quod continetur inter quinque plana, quorum aequationes sunt

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad \xi = R, \quad \eta = 360^\circ$$

atque superficiem, cuius aequatio $\zeta = y$, considerando eas partes tamquam negativas, in quibus coordinatae ζ sunt negativae. Sed tacite hic subintelligitur, superficiem sextam esse *continuum*, qua conditione cessante, dum y evadit infinita, utique fieri potest, ut conceptus ille sensu careat. In tali casu de integrali $\iint y dr d\varphi$ colligendo sermo esse nequit, neque adeo mirandum est, operationes analyticas coeco calculo ad inania applicatas ad absurda perducere.

Integratio $\int y d\varphi = \frac{t'v - ut'}{r(t+uv)}$ eatenus tantum est integratio vera, i. e. summatio, quatenus inter limites, per quos extenditur, y ubique est quantitas finita, absurda autem, si inter illos limites y alicubi infinita evadit. Si integrale tale $\int \eta d\xi$, quod generaliter loquendo exhibet aream inter lineam abscissarum atque curvam, cuius ordinata $= \eta$ pro abscissa ξ , secundum regulas suetas evolvimus, continuitatis immemores, saepissime contradictionibus implicamur. E. g. statuendo $\eta = \frac{1}{\xi\xi'}$ analysis suppeditat integrale $= C - \frac{1}{\xi}$, quo area recte definitur, quamdiu curva continuitatem servat; qua pro $\xi = 0$ interrupta, si quis magnitudinem areae inde ab abscissa negativa usque ad positivam inepte rogat, responsum absurdum a formula feret, eam esse negativam. Quid autem sibi velint haec similiaque analyseos paradoxa, alia occasione fusi persequemur.

Hic unicam observationem adicere liceat. Propositis *absque restrictione* quaestionibus, quae certis casibus absurdae evadere possunt, saepissime ita sibi consulit analysis, ut responsum ex parte vagum reddat. Ita pro valore integralis $\iint y d\varphi d\psi$ ab $r = e$ usque ad $r = f$, atque a $\varphi = E$ usque ad $\varphi = F$ extendendi, si valor ipsius $\frac{u}{t}$

$$\begin{array}{ll} \text{pro } r = e, \varphi = E \text{ designatur per } \theta & \\ r = e, \varphi = F & \dots \dots \dots \theta' \\ r = f, \varphi = E & \dots \dots \dots \theta'' \\ r = f, \varphi = F & \dots \dots \dots \theta''' \end{array}$$

per operationes analyticas facile obtinetur

$$\text{Arc. tang } \theta - \text{Arc. tang } \theta' - \text{Arc. tang } \theta'' + \text{Arc. tang } \theta'''$$

Revera quidem integrale tunc tantum valorem certum habere potest, quoties y inter limites assignatos semper manet finita: hic valor sub formula tradita utique contentus, tamen per eam nondum ex asse definitur, quoniam Arc. tang. est functio multiformis, seorsimque per alias considerationes (haud quidem difficiles) decidere oportebit, quinam potissimum functionis valores in casu determinato sint adhibendi. Contra quoties y alicubi inter limites assignatos infinita evadit, quaestio de valore integralis $\iint y d\varphi d\psi$ absurda est: quo non obstante si responsum ab analysi extorquere obstinaveris, pro methodorum diversitate modo hoc modo illud reddetur, quae tamen singula sub formula generali ante tradita contenta erunt.

BEWEIS

EINES

ALGEBRAISCHEN LEHRSATZES.

Journal für die reine und ang. Mathematik herausg. von CRELLE. Band III.

Berlin 1828.



BEWEIS

EINES ALGEBRAISCHEN LEHRSATZES.

Der Gegenstand dieses Aufsatzes ist der CARTESISCHE, gewöhnlich nach HARMOT benannte, Lehrsatz über den Zusammenhang der Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit der Anzahl der Abwechselungen und Folgen in den Zeichen der Coëfficienten. Man vermisst an den von verschiedenen Schriftstellern versuchten Beweisen dieses Theorems die Klarheit, Kürze und umfassende Allgemeinheit, die man bei einem so elementarischen Gegenstande mit Recht verlangen kann, und eine neue Behandlung desselben scheint daher nicht überflüssig zu sein.

Es sei X eine algebraische ganze Function von x von der Ordnung m , nach absteigenden Potenzen von x geordnet. Wir nehmen an (ohne Nachtheil für die Allgemeinheit), dass das höchste Glied x^m sei, und das niedrigste von x freie Glied nicht fehle; bloss die wirklich vorhandenen Glieder sollen aufgestellt, also nicht die etwa fehlenden mit dem Coëfficienten 0 angesetzt sein.

Wenn nicht alle Coëfficienten positiv sind, so werden sie einen oder mehrere Zeichenwechsel darbieten. Es sei $-Nx^n$ das erste negative Glied, das erste hierauf folgende positive $+Px^p$, das erste hierauf folgende negative $-Qx^q$ u. s. w. Es sind mithin m, n, p, q u. s. w. abnehmende ganze Zahlen; N, P, Q u. s. w. positiv, und X erscheint so dargestellt

$$X = x^m + \dots - Nx^n - \dots + Px^p + \dots - Qx^q - \text{u. s. w.}$$

Es werde X mit dem einfachen Factor $x - \alpha$ multiplicirt, wo α positiv vorausgesetzt wird. Man sieht leicht, dass in dem Producte, x^{n+1} einen negativen, x^{p+1} einen positiven, x^{q+1} einen negativen Coefficienten u. s. w., also das Product diese Form erhalten wird:

$$X(x - \alpha) = x^{m+1} \dots - N'x^{p+1} \dots + P'x^{q+1} \dots - Q'x^{r+1} \dots$$

so dass N', P', Q' u. s. w. positiv werden. Die Zeichen zwischen den aufgestellten Gliedern bleiben zwar unentschieden: allein es ist klar, dass vom höchsten Gliede bis zur Potenz x^{n+1} wenigstens ein Zeichenwechsel, bis x^{p+1} wenigstens zwei, bis x^{q+1} wenigstens drei u. s. w. statt finden. Ist der letzte Zeichenwechsel in X bei dem Gliede $\pm Ux^n$, und bezeichnet man den Coefficienten von x^{n+1} in $X(x - \alpha)$ durch $\pm U'$, so wird U' positiv sein, und bis zum Gliede $\pm U'x^{n+1}$ haben dann wenigstens eben so viele Zeichenwechsel, wie in X sind, statt gefunden. Das letzte Glied in $X(x - \alpha)$ wird aber das Zeichen $\mp$ haben; es muss also bis dahin wenigstens noch ein Zeichenwechsel hinzugekommen sein. Wir schliessen also, dass $X(x - \alpha)$ wenigstens einen Zeichenwechsel mehr hat als X .

Es sei nun X das Product aller einfachen Factoren, die den negativen und imaginären Wurzeln einer Gleichung $y = 0$ entsprechen, also wenn α, β, γ u. s. w. die positiven Wurzeln derselben Gleichung sind,

$$y = X(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \dots$$

Es finden sich also nach vorstehendem Satze, in $X(x - \alpha)$ wenigstens ein Zeichenwechsel, in $X(x - \alpha)(x - \beta)$ wenigstens zwei, in $X(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$ wenigstens drei u. s. w. mehr als in X ; folglich werden, auch wenn in X gar kein Zeichenwechsel vorkommt, in y wenigstens so viele Zeichenwechsel sein, wie positive Wurzeln. Man sieht von selbst, dass wenn die Gleichung weder negative, noch imaginäre Wurzeln hat, man $X = 1$ zu setzen hat, und dieser Schluss seine Gültigkeit behält.

Es gehe y , wenn den Coefficienten der Potenzen $x^{m-1}, x^{m-3}, x^{m-5}$ u. s. w. die entgegengesetzten Zeichen beigelegt werden, in y' über; sämtliche Wurzeln der Gleichung $y' = 0$ werden dann den Wurzeln der Gleichung $y = 0$ entgegengesetzt sein. Es wird daher in y' wenigstens eben so viele Zeichenwechsel geben, als die Gleichung $y = 0$ negative Wurzeln hat.

Wir haben daher folgenden Lehrsatz:

Die Gleichung $y = 0$ kann nicht mehr positive Wurzeln haben, als es Zeichenwechsel in y gibt, und nicht mehr negative Wurzeln, als Zeichenwechsel in y' sind.

Diese Einkleidung des Theorems scheint die zweckmässigste zu sein, da sie die grösste Einfachheit mit der umfassendsten Allgemeinheit vereinigt, und alle Gestalten des Satzes, die nur unter besondern Bedingungen gelten, von selbst daraus fliessen.

Will man die Grenze der Anzahl der negativen Wurzeln unmittelbar an den Zeichen der Coefficienten von y erkennen, so wird es nothwendig, die unmittelbaren Zeichenwechsel und Zeichenfolgen (bei Gliedern, wo die Exponenten von x um eine Einheit verschieden sind) von den durch fehlende Glieder unterbrochenen zu unterscheiden. Offenbar wird jeder unmittelbare und jeder durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochene Zeichenwechsel in y' zu einer ähnlichen Zeichenfolge in y , während ein durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochener Zeichenwechsel in y' auch in y ein ähnlicher Zeichenwechsel bleibt. Der zweite Theil des Theorems lässt sich daher auch so ausdrücken:

Die Anzahl der negativen Wurzeln der Gleichung $y = 0$ kann nicht grösser sein, als die Anzahl der unmittelbaren und der durch eine gerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenfolgen, addirt zu der Anzahl der durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel in y .

Fehlt in y gar kein Glied, so ist die Anzahl der negativen Wurzeln nicht grösser, als die Anzahl der Zeichenfolgen.

Bezeichnet man durch A die Anzahl der unmittelbaren Zeichenwechsel, und durch B die Anzahl der unmittelbaren Zeichenfolgen in y , so wird, wenn kein Glied fehlt, $A + B = m$ sein, also der Anzahl aller Wurzeln gleich. Insofern diese Zeichen also bloss lehren, dass die Anzahl der positiven Wurzeln nicht grösser als A , und die der negativen nicht grösser als B sein kann, bleibt es unentschieden, ob oder wie viele imaginäre Wurzeln vorhanden sind. Weiss man aber anders woher, dass die Gleichung keine imaginäre Wurzeln hat, so muss nothwendig A der Anzahl der positiven, und B der Anzahl der negativen Wurzeln gleich sein.

Anders aber verhält es sich, wenn in y Glieder fehlen. Um mit Klarheit

zu übersehen, was sich daraus in Beziehung auf die imaginären Wurzeln schliessen lässt, bezeichnen wir durch a die Anzahl der durch eine gerade, durch c die Anzahl der durch eine ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenwechsel; durch b und d resp. die Anzahl der durch eine gerade und ungerade Anzahl fehlender Glieder unterbrochenen Zeichenfolgen in y . Man sieht leicht, dass $m - A - B - a - b - c - d$ der Anzahl sämtlicher fehlender Glieder, die wir durch e bezeichnen wollen, gleich sein werde. Nun ist nach unserm Lehrsatz die Anzahl der positiven Wurzeln höchstens $A + a + c$, die Anzahl der negativen höchstens $B + b + c$, also die Anzahl aller reellen Wurzeln höchstens

$$A + B + a + b + 2c = m + c - d - e$$

Es muss daher die Anzahl der imaginären Wurzeln wenigstens $e - c + d$ sein.

Zählt man also alle fehlenden Glieder zusammen, jedoch so, dass man in jeder Lücke zwischen einem Zeichenwechsel eine Einheit weniger, zwischen einer Zeichenfolge aber eine Einheit mehr rechnet, als Glieder fehlen, so oft deren Anzahl ungerade ist, so erhält man eine Zahl, der die Anzahl der imaginären Wurzeln wenigstens gleich kommen muss.

BEITRÄGE ZUR THEORIE

DER

ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN

VON

CARL FRIEDRICH GAUSS

Vorgelesen in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften am 16. Juli 1849.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Band IV.
Göttingen, 1850.



BEITRÄGE ZUR THEORIE
DER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNGEN.

Es werden in dieser Denkschrift zwei verschiedene die algebraischen Gleichungen betreffende Gegenstände behandelt. Zuerst stelle ich den vor fünfzig Jahren von mir gegebenen Beweis des Grundlehrsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen in einer veränderten Gestalt und mit erheblichen Zusätzen auf. Der zweite Theil ist einer speciellen Behandlung der algebraischen Gleichungen mit drei Gliedern gewidmet, und enthält Methoden, nicht bloss die reellen, sondern auch die imaginären Wurzeln solcher Gleichungen mit Leichtigkeit zu bestimmen.

ERSTE ABTHEILUNG.

Die im Jahre 1799 erschienene Denkschrift, *Demonstratio nova theorematum, omnem functionem algebraicam rationalem unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, hatte einen doppelten Zweck, nemlich erstens, zu zeigen, dass sämmtliche bis dahin versuchte Beweise dieses wichtigsten Lehrsatzes der Theorie der algebraischen Gleichungen ungenügend und illusorisch sind, und zweitens, einen neuen vollkommen strengen Beweis zu geben. Es ist unnöthig, auf den erstern Gegenstand noch einmal zurückzukommen. Dem dort gegebenen neuen Beweise habe ich selbst später noch zwei andere folgen lassen, und ein vierter ist zuerst von CAUCHY aufgestellt. Diese vier Beweise beru-



hen alle auf eben so vielen verschiedenen Grundlagen, aber darin kommen sie alle überein, dass durch jeden derselben zunächst nur das Vorhandensein *Eines* Factors der betreffenden Function erwiesen wird. Der Strenge der Beweise thut dies allerdings keinen Eintrag: denn es ist klar, dass wenn von der vorgegebenen Function dieser eine Factor abgelöst wird, eine ähnliche Function von niedriger Ordnung zurückbleibt, auf welche der Lehrsatz aufs neue angewandt werden kann, und dass durch Wiederholung des Verfahrens zuletzt eine vollständige Zerlegung der ursprünglichen Function in Factoren der bezeichneten Art hervorgehen wird. Indessen gewinnt ohne Zweifel jede Beweisführung eine höhere Vollendung, wenn nachgewiesen wird, dass sie geeignet ist, das Vorhandensein der sämtlichen Factoren unmittelbar anschaulich zu machen. Dass der erste Beweis in diesem Fall ist, habe ich bereits in der gedachten Denkschrift angedeutet (Art. 23), ohne es dort weiter auszuführen: dies soll jetzt ergänzt werden, und ich benutze zugleich diese Gelegenheit, die Hauptmomente des ganzen Beweises in einer abgeänderten und, wie ich glaube, eine vergrösserte Klarheit darbietenden Gestalt zu wiederholen. Was dabei die äussere Einkleidung des Lehrsatzes selbst betrifft, so war die 1799 gebrauchte, dass die Function $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{u. s. w.}$ sich in reelle Factoren erster oder zweiter Ordnung zerlegen lässt, damals deshalb gewählt, weil alle Einmischung imaginärer Grössen vermieden werden sollte. Gegenwärtig, wo der Begriff der complexen Grössen jedermann geläufig ist, scheint es angemessener, jene Form fahren zu lassen und den Satz so auszusprechen, dass jene Function sich in n einfache Factoren zerlegen lasse, wo dann die constanten Theile dieser Factoren nicht eben reelle Grössen zu sein brauchen, sondern für dieselben auch jede complexen Werthe zulässig sein müssen. Bei dieser Einkleidung gewinnt selbst der Satz noch an Allgemeinheit, weil dann die Beschränkung auf reelle Werthe auch bei den Coefficienten A, B u. s. w. nicht vorausgesetzt zu werden braucht, vielmehr jedwede Werthe für dieselben zulässig bleiben.

1.

Wir betrachten demnach die Function der unbestimmten Grösse x

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \text{u. s. w.} + Mx + N = X$$

wo $A, B, \dots, M, N$ bestimmte reelle oder imaginäre Coefficienten vorstellen.

Aus der Elementaralgebra ist der Zusammenhang zwischen den Wurzeln der Gleichung $X=0$ und den einfachen Factoren von X bekannt. Geschieht nemlich jener Gleichung durch die Substitution $x=p$ Genüge, so ist $x-p$ ein Factor von X , und gibt es n verschiedene Arten, jener Gleichung Genüge zu leisten, nemlich durch $x=p, x=p', x=p''$ u. s. w., so wird das Product $(x-p)(x-p')(x-p'') \dots$ mit X identisch sein. Unter besondern Umständen kann aber auch eine Auflösung, wie $x=p$, in X den Factor $(x-p)^2$, oder $(x-p)^3$ oder irgend eine höhere Potenz bedingen, in welchen Fällen man die Wurzel p wie zweimal, dreimal u. s. w. vorhanden betrachtet.

Verlangt man also nur den Beweis, dass die Function X gewiss *einen* einfachen Factor zulasse, so ist es zureichend, nur das Vorhandensein irgend einer Wurzel der Gleichung $X=0$ nachzuweisen. Soll aber die vollständige Zerlegbarkeit der Function in einfache Factoren auf Einmal bewiesen werden, so muss gezeigt werden, dass der Gleichung $X=0$ Genüge geleistet werden kann, entweder durch n ungleiche Werthe von x , oder durch eine zwar geringere Anzahl ungleicher Auflösungen, wovon aber ein Theil die Charactere der mehrfach geltenden gleichen Wurzeln dergestalt an sich trägt, dass die Zusammenzählung aller ungleichen und gleichen die Totalsumme $=n$ hervorbringt.

2.

Das ganze Gebiet der complexen Grössen, in welchem die der Gleichung $X=0$ genügenden Werthe von x gesucht werden sollen, ist ein Unendliches von zwei Dimensionen, indem, wenn ein solcher Werth $x=t+iu$ gesetzt wird (wo i immer die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$ bedeutet), für t und u alle reellen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ zulässig sind. Wir haben nun zuvörderst aus diesem unendlichen Gebiete ein abgegrenztes endliches auszuscheiden, ausserhalb dessen gewiss keine Wurzel der bestimmten Gleichung $X=0$ liegen kann. Dies kann auf mehr als Eine Art geschehen: unserm Zweck am meisten gemäss scheint die folgende zu sein.

Anstatt der Form $t+iu$ gebrauche man diese

$$x=r(\cos \rho + i \sin \rho)$$

wonach zur Umfassung des ganzen unendlichen Gebiets der complexen Grössen r durch alle positiven Werthe von 0 bis $+\infty$, und ρ von 0 bis 360° , oder, was

dasselbe ist, von einem beliebigen Anfangswerthe bis an einen um 360° grössern Endwerth ausgedehnt werden muss.

Um für r eine Grenze zu erhalten, über welche hinaus kein Werth mehr einer Wurzel der Gleichung $X = 0$ entsprechen kann, setze ich zuvörderst die Coefficienten der einzelnen Glieder von X in eine ähnliche Form, wie x , nemlich

$$\begin{aligned} A &= a(\cos \alpha + i \sin \alpha) \\ B &= b(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \\ C &= c(\cos \gamma + i \sin \gamma) \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

wo also a, b, c bestimmte positive Grössen bedeuten sollen, abgesehen davon, dass auch eine oder die andere darunter $= 0$ sein kann. Ich betrachte sodann die Gleichung

$$r^n - \sqrt{2} \cdot (ar^{n-1} + br^{n-2} + cr^{n-3} + \text{u. s. w.}) = 0$$

welche, wie man leicht sieht, eine positive Wurzel hat, und zwar (HARRIOTS Lehrsatz zufolge) nur Eine solche. Es sei R diese Wurzel, wo dann von selbst klar ist, dass für jeden positiven Werth von r , der grösser ist als R , der Werth von $r^n - \sqrt{2} \cdot (ar^{n-1} + br^{n-2} + cr^{n-3} + \text{u. s. w.})$ positiv sein, und dass dasselbe auch von der Function

$$nr^n - \sqrt{2} \cdot ((n-1)ar^{n-1} + (n-2)br^{n-2} + (n-3)cr^{n-3} + \text{u. s. w.})$$

gelten wird, da dieselbe das n -fache der erstern Function um

$$\sqrt{2} \cdot (ar^{n-1} + 2br^{n-2} + 3cr^{n-3} + \text{u. s. w.})$$

also um eine positive Differenz übertrifft.

3.

Ich behaupte nun, dass die Grösse R geeignet ist, eine solche Grenze für die Werthe von r , wie im vorhergehenden Artikel gefordert ist, abzugeben. Der Beweis dieses Satzes ist auf folgende Art zu führen.

Ich setze allgemein $X = T + iU$, wo selbstredend T und U reelle Grössen bedeuten, und zwar wird

$$\begin{aligned} T &= r^n \cos n\rho + ar^{n-1} \cos((n-1)\rho + \alpha) + br^{n-2} \cos((n-2)\rho + \vartheta) \\ &\quad + cr^{n-3} \cos((n-3)\rho + \gamma) + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U &= r^n \sin n\rho + ar^{n-1} \sin((n-1)\rho + \alpha) + br^{n-2} \sin((n-2)\rho + \vartheta) \\ &\quad + cr^{n-3} \sin((n-3)\rho + \gamma) + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Man übersieht leicht, dass wenn für r irgend ein positiver Werth grösser als R gewählt wird, T nothwendig dasselbe Zeichen haben wird wie $\cos n\rho$, so oft dieser Cosinus absolut genommen nicht kleiner ist als $\frac{1}{2}$. Man braucht nemlich nur T in folgende Form zu setzen

$$\begin{aligned} \pm T &= \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot r^n - ar^{n-1} - br^{n-2} - cr^{n-3} - \text{u. s. w.} \\ &\quad + [\pm \cos n\rho - \sqrt{\frac{1}{2}}] r^n \\ &\quad + [1 \pm \cos((n-1)\rho + \alpha)] ar^{n-1} \\ &\quad + [1 \pm \cos((n-2)\rho + \vartheta)] br^{n-2} \\ &\quad + [1 \pm \cos((n-3)\rho + \gamma)] cr^{n-3} \\ &\quad + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

wo die obern Zeichen für den Fall eines positiven, die untern für den Fall eines negativen $\cos n\rho$ gelten sollen, und wo der erste Theil des Ausdrucks auf der rechten Seite positiv ist, in Folge des im vorhergehenden Artikel gegebenen Satzes, von den folgenden aber wenigstens keiner negativ werden kann. Auf ganz ähnliche Weise erhellet (indem man in obiger Formel nur U anstatt T und durchgehends Sinus anstatt Cosinus schreibt), dass unter gleicher Voraussetzung in Beziehung auf r , allemal U dasselbe Zeichen hat wie $\sin n\rho$, so oft dieser Sinus absolut genommen nicht kleiner ist als $\frac{1}{2}$. Es hat demnach in allen Fällen wenigstens die eine der beiden Grössen T, U ein voraus bestimmtes positives oder negatives Zeichen, und es kann folglich für keinen Werth von ρ die Function $X = 0$ werden. W. Z. B. W.

4.

Um das Verhalten von T und U in Beziehung auf die Zeichen und deren Wechsel (bei einem bestimmten, R überschreitenden, Werthe von r) noch mehr ins Licht zu setzen, lasse man ρ alle Werthe zwischen zwei um 360° verschiedenen Grenzen durchlaufen, wozu jedoch nicht 0 und 360° , sondern, indem zur Abkürzung

$$\frac{15^\circ}{n} = \omega$$



gesetzt wird, $-\omega$ und $(8n-1)\omega$ gewählt werden sollen. Den ganzen Zwischenraum theile ich in $4n$ gleiche Theile, so dass der erste sich von $-\omega$ bis ω , der zweite von ω bis 3ω , der dritte von 3ω bis 5ω u. s. w. erstreckt. Zuvörderst hat man auch noch die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dT}{d\rho}$, $\frac{dU}{d\rho}$ in Betracht zu ziehen, wofür man hat

$$\begin{aligned}\frac{dT}{d\rho} &= -nr^n \sin n\rho - (n-1)ar^{n-1} \sin((n-1)\rho + \alpha) - (n-2)br^{n-2} \sin((n-2)\rho + \beta) \\ &\quad - (n-3)cr^{n-3} \sin((n-3)\rho + \gamma) - \text{u. s. w.} \\ \frac{dU}{d\rho} &= nr^n \cos n\rho + (n-1)ar^{n-1} \cos((n-1)\rho + \alpha) + (n-2)br^{n-2} \cos((n-2)\rho + \beta) \\ &\quad + (n-3)cr^{n-3} \cos((n-3)\rho + \gamma) + \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Man erkennt daraus leicht, durch ähnliche Schlüsse wie im vorhergehenden Artikel und unter Zuziehung des Satzes am Schlusse von Art. 2, dass $\frac{dT}{d\rho}$ immer das entgegengesetzte Zeichen von $\sin n\rho$ hat, so oft dieser Sinus absolut genommen nicht kleiner ist als $\sqrt{\frac{1}{2}}$, dass hingegen $\frac{dU}{d\rho}$ immer dasselbe Zeichen wie $\cos n\rho$ hat, so oft der absolute Werth dieses Cosinus nicht kleiner ist als $\sqrt{\frac{1}{2}}$. Hieraus zieht man folgende Schlüsse.

In dem ersten Intervalle, d. i. von $\rho = -\omega$ bis $\rho = +\omega$, ist T stets positiv, U hingegen für den Anfangswerth negativ, für den Endwerth positiv, mithin dazwischen gewiss einmal $= 0$, und zwar nur einmal, weil in dem ganzen Intervalle $\frac{dU}{d\rho}$ positiv ist.

In dem zweiten Intervalle ist U stets positiv, T zu Anfang positiv, am Ende negativ, dazwischen einmal $T = 0$ und zwar nur einmal, weil in dem ganzen Intervalle $\frac{dT}{d\rho}$ negativ ist.

In dem dritten Intervalle ist T stets negativ, U einem Zeichenwechsel unterworfen, so dass einmal $U = 0$ wird.

In vierten Intervalle ist U stets negativ, T einmal $= 0$.

In den folgenden Intervallen wiederholen sich in gleicher Ordnung diese Verhältnisse, so dass das fünfte dem ersten, das sechste dem zweiten u. s. f. gleicht.

5.

Aus der im vorhergehenden Artikel erörterten Folgeordnung der positiven und negativen Werthe von T und U , die bei jedem über R hinausgehenden

Werthe von r Statt findet*), lässt sich nun folgern, dass innerhalb des Gebiets der kleinern Werthe von r gewisse Kreuzungen in diesen Anordnungen vorhanden sein müssen, die das Wesen unsers zu beweisenden Lehrsatzes in sich schliessen. Ich werde die Beweisführung in einer der Geometrie der Lage entnommenen Einkleidung darstellen, weil jene dadurch die grösste Anschaulichkeit und Einfachheit gewinnt. Im Grunde gehört aber der eigentliche Inhalt der ganzen Argumentation einem höhern von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstracten Grössenlehre an, dessen Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Grössencombinationen sind, einem Gebiete, welches zur Zeit noch wenig angebaut ist, und in welchem man sich auch nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache.

6.

Das ganze Gebiet der complexen Grössen wird vertreten durch eine unbegrenzte Ebene, in welcher jeder Punkt, dessen Coordinaten in Beziehung auf zwei einander rechtwinklig schneidende Achsen t, u sind, als der complexen Grösse $x = t + iu$ entsprechend betrachtet wird; bringt man diese complexe Grösse in die Form $x = r(\cos \rho + i \sin \rho)$, so bedeuten r, ρ die Polarcoordinaten des entsprechenden Punkts. Der Inbegriff aller complexen Grössen, für welche r einerlei bestimmten Werth hat, wird demnach durch einen Kreis repräsentirt, dessen Halbmesser dieser Werth, und dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist. Denjenigen dieser Kreise, für welchen r um eine nach Belieben gewählte Differenz grösser als R ist, will ich mit K bezeichnen, und mit (1), (2), (3) . . . (2n) diejenigen Punkte auf demselben, welchen die beziehungsweise zwischen ω und 3ω , zwischen 5ω und 7ω , zwischen 9ω und 11ω u. s. f. bis zwischen $(8n-3)\omega$ und $(8n-1)\omega$ liegenden Werthe von ρ entsprechen, für welche nach dem 4. Artikel $T = 0$ wird. Man bemerke dabei, dass für die Punkte (1), (3), (5) u. s. w. U positiv, für die Punkte (2), (4), (6) u. s. w. hingegen negativ sein wird.

*) Es ist leicht zu zeigen, dass auch für den Werth $r = R$ selbst eine gleiche Folgeordnung noch gültig bleibt, nur mit der Einschränkung, dass dann in ganz speciellen Fällen ein Uebergangswerth von ρ , (d. i. ein solcher, für welchen T oder $U = 0$ wird) mit einer der Grössen $-\omega, \omega, 3\omega, 5\omega$ u. s. w. zusammenfallen kann, während für alle grösseren Werthe von r jeder Uebergangswerth von ρ zwischen zwei dieser Grössen liegen muss. Ich halte mich jedoch dabei nicht auf, da für unsern Zweck zureicht, das Bestehen jener Folgeordnung, von irgend einem Werthe von r an, nachgewiesen zu haben.

7.

Die Gesammtheit derjenigen Punkte in unserer Ebene, für welche T positiv ist, bildet zusammenhängende Flächentheile, wie schon von selbst erhellet, wenn man erwägt, dass bei einem stetigen Uebergange von einem Punkte zu einem andern T sich nach der Stetigkeit ändert. Eben so bilden sämtliche Punkte, für welche T negativ wird, zusammenhängende Flächentheile. Zwischen den Flächentheilen der ersten Art und denen der zweiten liegen Punkte, in welchen $T=0$ wird, und nach der Natur der Function T können diese Punkte nicht auch Flächenstücke, sondern nur Linien bilden, welche einerseits die einen, andererseits die andern Flächentheile begrenzen.

Der ausserhalb K liegende Raum enthält n Flächen der ersten Art, die mit eben so vielen der zweiten Art abwechseln, und wovon jede, von einem Stück der Kreislinie K an, zusammenhängend sich ins Unendliche erstreckt. Zugleich aber ist klar, dass jedes dieser Flächenstücke sich über die Kreislinie hinaus in den innern Raum fortsetzt, und dass in Beziehung auf die weitere Gestaltung folgende Fälle Statt finden können.

1) Das betreffende von einem Theile von K anfangende Flächenstück endigt sich isolirt innerhalb der Kreisfläche; seine peripherische Begrenzung besteht dann nur aus zwei zusammenhängenden Stücken, wovon eines ein Bestandtheil von K ist, das andere innerhalb des Kreisraumes liegt. In der beigelegten Figur, welche sich auf eine Gleichung fünften Grades bezieht und wo die Zeichen von T in den verschiedenen Flächentheilen eingeschrieben sind, finden sich drei der Flächen mit positivem T in diesem Falle; die eine hat die Grenzlinien 10.1 und 1.11.10; die zweite diese 4.5 und 5.12.4; die dritte 6.7 und 7.13.6. Flächentheile ähnlicher Art mit negativem T finden sich zwei vor.

2) Das Flächenstück durchsetzt einfach die Kreisfläche dergestalt, dass es mit einem an einer andern Stelle eintretenden Eine zusammenhängende Fläche bildet. Die ganze peripherische Begrenzungslinie wird dann aus vier Stücken bestehen, von denen zwei der Kreislinie K angehören, und die beiden andern dem innern Raume. In unserer Figur findet sich dieser Fall bei dem durch 2.3; 3.0.8; 8.9; 9.11.2 begrenzten Flächenstück.

3) Das Flächenstück spaltet sich im innern Kreisraume einmal oder mehrermale dergestalt, dass es mit noch zweien oder mehrern an andern Stellen eintretenden eine zusammenhängende Fläche bildet, deren ganze peripherische Be-

grenzung dann aus sechs, acht oder mehrern Stücken in gerader Zahl bestehen wird, die abwechselnd der Kreislinie und dem innern Raume angehören. In unserer Figur tritt dies ein bei einem Flächentheile, dessen Begrenzung durch die sechs Stücke 3.4; 4.12.5; 5.6; 6.13.7; 7.8; 8.0.3 gebildet wird, in welchem aber T negativ ist.

8.

Bei einer vollständigen Aufzählung aller denkbaren Gestaltungen der in den innern Kreisraum eintretenden Flächentheile würden den angegebenen Fällen noch anderweitige Modificationen beigelegt werden müssen. Wenn z. B. ein solcher Flächentheil sich zwar in zwei Aeste spaltet, diese aber im innern Raume sich wieder vereinigen, so würde dieser Fall, jenachdem nach der Vereinigung die Fläche im Innern ihren Abschluss findet, oder (ohne neue Theilung) sich bis zu einer andern Stelle der Kreislinie fortsetzt, dem ersten oder zweiten Falle des vorhergehenden Artikels zugerechnet werden können, indem die Gestaltung der Fläche nur durch das Einschliessen einer nicht zu ihr gehörenden Insel modificirt sein würde. Uebrigens würde es nicht schwer sein, strenge zu beweisen, dass bei der besondern Beschaffenheit der Function T Modificationen dieser Art *gar nicht möglich* sind: für unsern Zweck ist dies jedoch unnöthig, indem es nur auf die Folge der Stücke der *äussern* Begrenzung jedes der in Rede stehenden Flächentheile (d. i. derjenigen, in welchen T positiv ist) ankommt.

Wir haben nemlich schon bemerkt gemacht, dass die Anzahl dieser Stücke allemal gerade ist (zwei im ersten Falle des vorhergehenden Artikels, vier im zweiten, sechs oder mehrere im dritten), wovon wechselseitig eines der Kreislinie K , eines dem innern Raume angehört. Ferner ist klar, dass wenn jene äussere Begrenzungslinie immer in einerlei Sinn durchlaufen wird, wozu hier derjenige gewählt werden soll, in welchem die Beziffrungen der Punkte von K wachsen (also, Beispiels halber in unserer Figur so, dass die Fläche immer rechts von der Begrenzungslinie liegt), der Anfangspunkt und der Endpunkt eines der Kreislinie angehörenden Stücks beziehungsweise durch eine gerade und die um eine Einheit grössere ungerade Zahl bezeichnet sein wird, mithin der Anfangspunkt und der Endpunkt jedes den innern Raum durchlaufenden Stücks allemal beziehungsweise durch eine ungerade und eine gerade Zahl.

Es steht also fest, dass von den n an einem mit einer ungeraden Zahl be-

zeichneten Punkte von K in den innern Raum eintretenden Linien, in denen überall $T = 0$ ist, eine jede auf eine ganz bestimmte Art*) diesen Raum zusammenhängend durchläuft, bis sie an einer andern mit einer geraden Zahl bezeichneten Stelle wieder austritt. Da nun, wie schon oben (Schluss des 6. Art.) bemerkt ist, in ihrem Anfangspunkte den Werth von U positiv, am Endpunkte negativ ist, so muss wegen der Stetigkeit der Werthänderung nothwendig in einem Zwischenpunkte $U = 0$ werden. Dieser Punkt repräsentirt dann eine Wurzel der Gleichung $X = 0$; und da die Anzahl solcher Linien $= n$ ist, so ergeben sich auf diese Weise allemal n Wurzeln jener Gleichung.

9.

Wenn die gedachten Linien durch den Kreisraum gehen ohne ein Zusammentreffen mit einander, so ist klar, dass die so erhaltenen n Wurzeln nothwendig ungleich sind. Ein solches freies Durchgehen findet sich in unsrer Figur bei den Linien von 3 nach 8, von 5 nach 4 und von 7 nach 6, und es gehören dazu die durch die Punkte 9, 12, 13 repräsentirten Wurzeln. Wenn hingegen zwei solcher Linien, oder mehrere, einen Punkt gemeinschaftlich haben, so ist zwar darum noch nicht nothwendig, aber doch möglich, dass dieser Punkt zugleich derjenige ist, in welchem $U = 0$ wird, in welchem Falle dann zwei oder mehrere Wurzeln in Eine zusammenfallen, oder, wie es gewöhnlich ausgedrückt wird, unter sich gleich sein werden. In unsrer Figur treffen die Linien 1.10 und 9.2 in dem Punkte 11 zusammen, und in demselben wird zugleich $U = 0$; die Gleichung hat also ausser den schon aufgeführten drei ungleichen noch zwei gleiche Wurzeln.

10.

Es bleibt nur noch übrig, nachzuweisen, dass wenn der eine Wurzel $= p$

*) Dass sie allemal einen ganz bestimmten Lauf hat, beruht darauf, dass sie einen Theil der äussern Abgrenzung einer Fläche, für welche T ein bestimmtes Zeichen hat, ausmachen soll: ich habe das positive Zeichen gewählt, was an sich ganz willkürlich ist. So verstanden setzt sich z. B. die in 1 eintretende Linie durch 11 nach 10 fort: als Theil der Grenzlinie einer Fläche, worin T negativ ist, würde die Linie 1.11 durch 2 fortgesetzt werden müssen. Spricht man hingegen nur von einer Linie worin $T = 0$ ist, ohne sie als Theil der Begrenzung einer bestimmten Fläche zu betrachten, so würde eher 11.9 als natürliche Fortsetzung von 1.11 gelten können. Der hier gewählte Gesichtspunkt unterscheidet mein gegenwärtiges Verfahren von dem von 1792, und trägt wesentlich zur Vereinfachung der Beweisführung bei.

repräsentirende Punkt P in zweien oder mehrern Linien $T = 0$ zugleich liegt, das Quadrat von $x - p$ oder die der Anzahl jener concurrirenden Linien entsprechende höhere Potenz in X als Factor enthalten sein wird. Der Beweis davon beruht auf folgenden Sätzen.

Man führe anstatt der unbestimmten Grösse x eine andere z ein, indem man $x = z + p$ setzt. Es gehe durch diese Substitution X in Z über, wo also Z eine Function von z von gleicher Ordnung wie X von x sein wird, deren constantes Glied aber fehlt. Indem man dieselbe nach aufsteigenden Potenzen von z ordnet, sei das niedrigste nicht verschwindende Glied

$$= Kz^m \text{ und } Z = Kz^m(1 + \zeta)$$

wo ζ die Form $Lz + L'z^2 + L''z^3 + \text{u. s. w.} + \frac{1}{K}z^{n-m}$ haben wird; endlich setze man

$$z = s(\cos \psi + i \sin \psi)$$

Der reelle und der imaginäre Bestandtheil von z drücken die Lage jedes unbestimmten Punkts der Ebene als rechtwinklige Coordinaten, und die Grössen s, ψ die Polarcoordinaten ganz eben so relativ gegen den Punkt P aus, wie die Bestandtheile von x , und die Grössen r, φ die relative Lage gegen den ursprünglichen Anfangspunkt bezeichnen. Die Verbindung eines bestimmten Werthes von s mit allen Werthen von ψ in einer Ausdehnung von 360° stellt also die Punkte einer Kreislinie dar, die ihren Mittelpunkt in P hat und deren Halbmesser $= s$ ist.

Setzt man nun $K = k(\cos x + i \sin x)$, und folglich

$$Kz^m = ks^m(\cos(m\psi + x) + i \sin(m\psi + x))$$

so wird für ein unendlich kleines s die Grösse ζ , die wenigstens von derselben Ordnung ist wie s , neben der 1 vernachlässigt, und mithin gesetzt werden dürfen

$$T = ks^m \cos(m\psi + x)$$

woraus erhellt, dass während ψ um 360° wächst, das Zeichen von T in m Stücken der Kreisperipherie positiv, und in eben so vielen mit jenen abwechselnden negativ ist, oder dass T in $2m$ Punkten $= 0$ wird, nemlich für $\psi = \frac{1}{m}(x - 90^\circ), \frac{1}{m}(x + 90^\circ), \frac{1}{m}(x + 270^\circ) \text{ u. s. w.}$ Es gehen demnach von P zu-

sammen $2m$ Linien aus, in denen $T=0$ ist, oder wenn man sie paarweise so verbindet, dass jede, wo, bei wachsendem ψ , das Zeichen aus $-$ in $+$ übergeht, zusammen mit der nächstfolgenden, wo der entgegengesetzte Uebergang Statt findet, wie die Begrenzungslinie eines Flächentheils mit positivem T betrachtet wird, so treffen in P überhaupt m dergleichen Begrenzungslinien zusammen.

Von der andern Seite ist klar, dass so wie Z unbestimmt durch z^m und durch keine höhere Potenz von z theilbar ist, X den Factor $(x-p)^m$, aber keine höhere Potenz von $x-p$ enthalten wird. Es ist also allemal, wenn p irgend eine Wurzel der Gleichung $X=0$ bedeutet, der Exponent der höchsten Potenz von $x-p$, durch welche X theilbar ist, der Anzahl der in P zusammen treffenden Begrenzungslinien für Flächen mit positivem T gleich, oder was dasselbe ist, der Anzahl solcher an P zusammentreffender Flächen.

Uebrigens ist es leicht, der Beweisführung eine von Einmischung unendlich kleiner Grössen ganz unabhängige Einkleidung zu geben, und zwar ganz analog der Schlussreihe in den Art. 3 und 4. Es lässt sich nemlich ein Werth von s nachweisen, für welchen, so wie für jeden kleinern, der ganze Cyklus aller Werthe von ψ dieselbe abwechselnde Folge von m Stücken mit positivem T und ebensoviele mit negativem darbietet. Diese Eigenschaft hat die positive Wurzel der Gleichung

$$0 = m\sqrt{\frac{1}{2}} - (m+1)ls - (m+2)l's - (m+3)l''s^2 - \text{u. s. w.}$$

wo l, l', l'' u. s. w. die positiven Quadratwurzeln aus den Normen der complexen Grössen L, L', L'' u. s. w. bedeuten, oder wo

$$L = l(\cos \lambda + i \sin \lambda)$$

$$L' = l'(\cos \lambda' + i \sin \lambda')$$

$$L'' = l''(\cos \lambda'' + i \sin \lambda'') \text{ u. s. w.}$$

gesetzt ist. Ich glaube jedoch, die sehr leichte Entwicklung dieses Satzes hier übergehen zu können.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass bei der Beweisführung in der Abhandlung von 1799 die Betrachtung zweier Systeme von Linien erforderlich war, das eine die Linien wo $T=0$, das andere diejenigen wo $U=0$ enthaltend, während in unserm jetzigen Verfahren die Betrachtung Eines Systems aus-

gereicht hat; ich habe dazu das System der Begrenzungslinien der Flächentheile mit positivem T gewählt, es hätte aber eben so gut zu demselben Zweck die Betrachtung der Begrenzungslinien der Flächen mit positivem (oder negativem) U dienen können.

ZWEITE ABTHEILUNG.

11.

Zur numerischen Bestimmung der Wurzeln solcher algebraischen Gleichungen, die nur aus drei Gliedern bestehen, lassen sich verschiedene Methoden anwenden, die hier einer Eleganz und Bequemlichkeit fähig werden, gegen welche die mühsamen bei Gleichungen von weniger einfacher Gestalt unvermeidlichen Operationen weit zurückstehen. Solche Methoden verdienen also wohl eine besondere Darstellung, zumal da Gleichungen von jener Form häufig genug vorkommen.

Es gilt dies zunächst von der Entwicklung der Wurzeln in unendliche Reihen. In der That lässt sich jede, gleichviel ob reelle oder imaginäre, Wurzel einer Gleichung mit drei Gliedern durch eine convergente Reihe von einfachem Fortschritzungsgesetz ausdrücken. Ich werde jedoch diese Auflösungsart aus mehreren Gründen von meiner gegenwärtigen Betrachtung ganz ausschliessen, und bemerke hier nur, dass der Grad der Convergenz von dem gegenseitigen Verhalten der Coefficienten abhängig, dass sie desto langsamer ist, je näher dies Verhalten demjenigen kommt, bei welchem die Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, und dass in diesem Grenzfalle selbst sie schwächer ist, als bei irgendwelcher fallenden geometrischen Progression. So bemerkenswerth auch diese Reihen in allgemeiner theoretischer Rücksicht sind, so wird man doch, abgesehen von dem Falle, wo ihre Convergenz eine sehr schnelle wird, in praktischer Beziehung immer den indirecten Methoden den Vorzug geben, welche in den nachfolgenden Artikeln entwickelt werden sollen.

12.

Zur Auffindung der reellen Wurzeln benutze ich meine im Jahre 1810 zuerst gedruckte Hilfstafel für Logarithmen von Summen und Differenzen, oder, wo eine grössere Genauigkeit verlangt wird, als Logarithmen mit fünf Ziffern geben

können, die ähnliche aber erweiterte Tafel von MATTHIESSEN. Ich habe ein paar specielle Anwendungen dieses Verfahrens schon früher bekannt gemacht, nemlich zur Auflösung der quadratischen Gleichungen bei der 1840 erschienenen zwanzigsten Ausgabe von VEGA's logarithmischem Handbuch, und zur Auflösung der cubischen Gleichung, welche bei der parabolischen Bewegung zur Bestimmung der wahren Anomalie dient, in Nro. 474 der Astronomischen Nachrichten. An letztem Orte ist auch bereits die allgemeine Anwendbarkeit des Verfahrens auf alle algebraischen Gleichungen mit drei Gliedern bemerklich gemacht. Obgleich nun die Ausführung dieses ganz elementarischen Gegenstandes gar keine Schwierigkeiten hat, so wird man doch, bei der ziemlich grossen Mannigfaltigkeit der Fälle, einer übersichtlichen Sonderung derselben, und der Zusammenstellung der gebrauchfertigen Vorschriften ein paar Seiten gern eingeräumt sehen.

Anstatt jener logarithmischen Hilfstafeln kann man sich auch der gewöhnlichen logarithmisch-trigonometrischen Tafeln bedienen: allein theils sind jene im Allgemeinen für den gegenwärtigen Zweck von bequemerm Gebrauch, theils gewähren sie doppelt so grosse Genauigkeit als die letztern. Ich würde daher die Benutzung der trigonometrischen Tafeln für das in Rede stehende Geschäft auf den seltenen Fall beschränken, wo man die durch siebenziffrige Logarithmen erreichbare Genauigkeit noch zu überschreiten wünscht und dazu die bekannten zehnziffrigen Logarithmen in VLACQ's oder VEGA's Thesaurus verwenden kann. Uebrigens sind, wenn man sich der Hilfslogarithmen bedient, doppelt so viele Fälle zu unterscheiden, als wenn die trigonometrischen Logarithmen gebraucht werden. Als ein Nachtheil darf dies jedoch nicht angesehen werden; denn wenn einmal die vollständige allgemeine Classification vorliegt, ist es leicht, jedem concreten Falle sein Fach anzuweisen, und das eigentliche indirecte Geschäft ist so viel leichter auszuführen, wenn das ganze Fach nur den halben Umfang hat. Aber gerade aus jenem Grunde ist für die Auflösung durch trigonometrische Logarithmen die allgemeine Classification kürzer und bequemer darzustellen, und ich werde sie daher vorausschicken, da sodann die Classification für die andere Auflösungsform sich daraus von selbst ergibt.

Die Ausführung der Methode wird, unmittelbar, nur auf Bestimmung der positiven Wurzeln einer vorgegebenen Gleichung gerichtet; die negativen ergeben

sich, indem man dasselbe Verfahren auf diejenige Gleichung anwendet, welche aus jener durch Einführung der der ursprünglichen Unbekannten entgegengesetzten Grösse entsteht.

Die Gleichung setze ich in die Form

$$x^{m+n} \pm e x^m \pm f = 0$$

wo m, n, e, f gegebene positive Grössen bedeuten. Diese Form umfasst eigentlich, nach Verschiedenheit der Combination der Zeichen, vier verschiedene Fälle, wovon aber der erste, wo beidemal die oberen Zeichen gewählt werden, ausfällt, da offenbar die Gleichung

$$x^{m+n} + e x^m + f = 0$$

keine positive Wurzel haben kann. Uebrigens ist verstatet, vorauszusetzen, dass m und n (worunter ganze Zahlen verstanden werden, obwohl die Anwendbarkeit der Methode an sich davon unabhängig ist) keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, indem auf diesen Fall jeder andere leicht zurückzuführen ist. Endlich werde ich zur Abkürzung schreiben

$$\frac{f^n}{e^{m+n}} = \lambda$$

Erste Form.

$$x^{m+n} + e x^m - f = 0$$

Indem man einen immer im ersten Quadranten zu nehmenden Winkel θ einführt, so dass

$$\frac{x^{m+n}}{f} = \sin \theta^2, \quad \frac{e x^m}{f} = \cos \theta^2$$

wird, also (1)

$$x^{m+n} = f \sin \theta^2, \quad x^m = \frac{f \cos \theta^2}{e}, \quad x^n = e \tan \theta^2$$

findet sich durch Elimination von x die Gleichung

$$\lambda = \frac{\sin \theta^{2m}}{\cos \theta^{2m+2n}}$$

aus welcher θ bestimmt werden muss. Man erkennt leicht, dass der zweite Theil dieser Gleichung als Function einer unbestimmten Grösse θ betrachtet, von 0

bis ∞ wächst, während θ alle Werthe von 0 bis 90° durchläuft, und dass es also einen, und nur einen Werth von θ gibt, der jener Gleichung Genüge leistet. Nachdem derselbe gefunden ist, erhält man x aus einer der Formeln I. Man bemerke, dass $\theta = 45^\circ$ wird für $\lambda = 2^n$, und dass folglich θ im ersten Octanten zu suchen ist wenn λ kleiner, im zweiten wenn λ grösser ist als 2^n .

Zweite Form.

$$x^{m+n} - ex^n - f = 0$$

Man wird hier setzen

$$fx^{-m-n} = \sin \theta^2, \quad ex^{-n} = \cos \theta^2$$

oder (I)

$$x^{m+n} = \frac{f}{\sin \theta^2}, \quad x^n = \frac{e}{\cos \theta^2}, \quad x^m = \frac{f \cot \theta^2}{e}$$

wonach also θ aus der Gleichung

$$\lambda = \frac{\sin \theta^{2n}}{\cos \theta^{2m+2n}}$$

zu bestimmen sein wird, was auf eine und nur auf eine Art geschehen kann: der Werth von x findet sich sodann durch eine der Gleichungen I. Im ersten oder zweiten Octanten liegt θ , jenachdem λ kleiner oder grösser ist als 2^m .

Dritte Form.

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0$$

Hier wird man setzen

$$\frac{x^n}{e} = \sin \theta^2, \quad \frac{fx^{-m}}{e} = \cos \theta^2$$

oder (I)

$$x^{m+n} = f \tan \theta^2, \quad x^m = \frac{f}{e \cos \theta^2}, \quad x^n = e \sin \theta^2$$

von welchen Formeln eine zur Bestimmung von x dienen wird, sobald der Werth von θ gefunden ist. Dieser ergibt sich durch Auflösung der Gleichung

$$\lambda = \cos \theta^{2n} \sin \theta^{2m}$$

Da das auf der rechten Seite stehende Glied dieser Gleichung, als Function einer unbestimmten Grösse θ betrachtet, sowohl für $\theta = 0$ als für $\theta = 90^\circ$ verschwindet, so muss dazwischen ein grösster Werth liegen, und da das Differential des

Logarithmen dieser Function $= (2m \cot \theta - 2n \tan \theta) d\theta$ ist, so findet der grösste Werth Statt für $\theta = \theta^*$, wenn man $\sqrt{\frac{m}{n}} = \tan \theta^*$ setzt. Es wird demnach jene Function von 0 bis zu ihrem grössten Werthe, welcher offenbar

$$= \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

ist, zunehmen, und von da bis 0 abnehmen, während θ von 0 zu θ^* und von da bis 90° zunimmt. Der Maximumwerth ist daher jedenfalls grösser als der Werth für $\theta = 45^\circ$, d. i. grösser als $\frac{1}{2^{m+n}}$, den Fall ausgenommen, wo $m = n$, und also $\frac{1}{2^{m+n}}$ selbst der Maximumwerth ist.

Man schliesst hieraus, dass jenachdem λ grösser ist als

$$\frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

oder kleiner, der Gleichung $\lambda = \cos \theta^{2n} \sin \theta^{2m}$ gar nicht oder durch zwei verschiedene Werthe von θ wird Genüge geleistet werden können. Im erstern Falle hat die Gleichung $x^{m+n} - ex^m + f = 0$ gar keine (positive) Wurzel, im andern zwei. In dem speciellen Falle, wo

$$\lambda = \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

ist, fallen beide Auflösungen zusammen, und die Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln, wofür man nach Gefallen eine der drei Formeln benutzen kann

$$x^{m+n} = \frac{f}{e}, \quad x^m = \frac{f(m+n)}{en}, \quad x^n = \frac{em}{m+n}$$

Was übrigens in dem Falle, wo zwei Auflösungen wirklich vorhanden sind, die Octanten betrifft, in welche die Werthe von θ fallen, so sieht man leicht, dass wenn λ grösser ist als $\frac{1}{2^{m+n}}$, beide Werthe von θ mit θ^* in demselben Octanten liegen, nemlich im ersten oder zweiten, jenachdem m kleiner oder grösser ist als n : ist hingegen λ kleiner als $\frac{1}{2^{m+n}}$, so wird der eine Werth von θ im ersten, der andere im zweiten Octanten zu suchen sein. In dem speciellen Falle, wo $\lambda = \frac{1}{2^{m+n}}$, ist 45° selbst der eine Werth von θ , und der andere liegt in demselben Octanten wie θ^* .

Es mag noch die aus dieser Zergliederung aller drei Formen sich leicht ergebende Folge bemerkt werden, dass unsere Gleichung (insofern wir annehmen, dass m und n keinen gemeinschaftlichen Divisor haben) nicht mehr als drei reelle Wurzeln haben kann, was auch aus andern Gründen bekannt ist.

Die vorstehenden Vorschriften werden nun leicht in diejenigen umgeschmolzen, die der Anwendung der Hülfslogarithmen entsprechen, da diese $A = \log a$, $B = \log b$, $C = \log c$, betrachtet werden können wie die Logarithmen der Quadrate der Tangenten, Cossecanten und Secanten der von 45° bis 90° zunehmenden, oder, was dasselbe ist, wie die Logarithmen der Quadrate der Cotangenten, Secanten und Cossecanten der von 45° bis 0 abnehmenden Winkel, also

$$a = \tan \theta^2, \quad \frac{1}{b} = \sin \theta^2, \quad \frac{1}{c} = \cos \theta^2$$

für die Werthe von θ im zweiten Octanten, oder

$$\frac{1}{a} = \tan \theta^2, \quad \frac{1}{c} = \sin \theta^2, \quad \frac{1}{b} = \cos \theta^2$$

für die Werthe von θ im ersten Octanten.

Die vollständigen Vorschriften vereinige ich in folgendem Schema, wo eben so wie oben

$$\lambda = \frac{f^n}{e^{m+n}}$$

gesetzt ist.

Erste Form.

$$x^{m+n} + ex^m - f = 0$$

Erster Fall. $\lambda > 2^n$

$$\lambda = a^{m+n} b^n = a^m c^n = \frac{e^{m+n}}{b^n}$$

$$x^{m+n} = \frac{f}{b}, \quad x^m = \frac{f}{ec}, \quad x^n = ea$$

Zweiter Fall. $\lambda < 2^n$

$$\lambda = \frac{b^n}{a^n} = \frac{c^n}{a^{m+n}} = \frac{b^{m+n}}{c^n}$$

$$x^{m+n} = \frac{f}{c}, \quad x^m = \frac{f}{eb}, \quad x^n = \frac{e}{a}$$

Zweite Form.

$$x^{m+n} - ex^m - f = 0$$

Erster Fall. $\lambda > 2^m$

$$\lambda = a^{m+n} b^n = a^n c^m = \frac{e^{m+n}}{b^n}$$

$$x^{m+n} = fb, \quad x^m = \frac{f}{ea}, \quad x^n = ec$$

Zweiter Fall. $\lambda < 2^m$

$$\lambda = \frac{b^n}{a^n} = \frac{c^n}{a^{m+n}} = \frac{b^{m+n}}{c^n}$$

$$x^{m+n} = fc, \quad x^m = \frac{fa}{e}, \quad x^n = eb$$

Dritte Form.

$$x^{m+n} - ex^m + f = 0$$

Erster Fall. $\frac{1}{\lambda} < \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$

Gar keine Auflösung.

Zweiter Fall. $\frac{1}{\lambda} = \frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$

Zwei gleiche Wurzeln, zu deren Bestimmung eine der Gleichungen

$$x^{m+n} = \frac{fm}{n}, \quad x^m = \frac{f(m+n)}{en}, \quad x^n = \frac{em}{m+n}$$

dient.

Dritter Fall. $\frac{1}{\lambda}$ grösser als $\frac{(m+n)^{m+n}}{m^m n^n}$ aber nicht grösser als 2^{m+n} , und zugleich m grösser als n .

Zwei Wurzeln, für welche

$$\frac{1}{\lambda} = a^n b^{m+n} = \frac{e^{m+n}}{a^n} = b^m c^n$$

$$x^{m+n} = fa, \quad x^m = \frac{fe}{e}, \quad x^n = \frac{e}{b}$$

Vierter Fall. Für $\frac{1}{\lambda}$ dieselben Grenzen, wie im dritten Fall, aber m kleiner als n .

Zwei Wurzeln, für welche

$$\frac{1}{\lambda} = a^m b^{m+n} = \frac{e^{m+n}}{a^m} = b^n c^m$$

$$x^{m+n} = \frac{f}{a}, \quad x^m = \frac{fb}{e}, \quad x^n = \frac{e}{c}$$

Fünfter Fall. $\frac{1}{\lambda}$ grösser als 2^{m+n}

Zwei Wurzeln, wovon die eine durch die Formeln des dritten Falles, die andere durch die des vierten bestimmt wird.

Es mag noch bemerkt werden, dass im dritten Falle der Werth von a , welcher der einen Wurzel entspricht, kleiner als $\frac{m}{n}$, der zur andern Wurzel gehörende grösser als $\frac{m}{n}$ ist; im vierten Falle verhalten sich die beiden Werthe von a auf ähnliche Weise gegen $\frac{n}{m}$.

15.

Ueber die Anwendung dieser Vorschriften ist noch folgendes beizufügen.

Zur Bestimmung jeder Wurzel sind zwei Operationen auszuführen: zuerst aus λ den dazu gehörenden Werth von a (und damit zugleich den von b oder c) abzuleiten; sodann, aus diesem den Werth von x zu berechnen. Für jede dieser beiden Operationen kann man unter drei Formeln wählen; ich ziehe in den meisten Fällen die zuerst angesetzten vor. Bei allen diesen Rechnungen hat man es gar nicht mit den Grössen λ , a , b , c selbst, sondern nur mit ihren Logarithmen zu thun. Die erste Operation ist eine indirecte, und beruhet demnach in der Regel auf mehreren stufenweise fortschreitenden Annäherungen, wobei es bequem gefunden werden wird, zu Anfang Tafeln mit einer geringern Anzahl von Ziffern zu gebrauchen. MATTHESENS Tafel hat bekanntlich sieben Decimalen; die meine fünf; ENCKE und URSIN haben sie mit vier Ziffern abdrucken lassen, und wenn man beim Anfange der Arbeit noch gar keine Kenntniss einer ersten groben Annäherung mitbringt, wird man es vielleicht vortheilhaft finden, einen noch kürzern Extract der Tafeln mit nur drei Ziffern auf einem besondern Blättchen vor sich zu haben, etwa so:

A	B	A	B	A	B
0	0,301	1,0	0,041	2,0	0,004
0,1	0,254	1,1	0,033	2,1	0,003
0,2	0,212	1,2	0,027	2,2	0,003
0,3	0,176	1,3	0,021	2,3	0,002
0,4	0,146	1,4	0,017	2,4	0,002
0,5	0,119	1,5	0,014	2,5	0,001
0,6	0,097	1,6	0,011	2,9	0,001
0,7	0,079	1,7	0,009	3,0	0,000
0,8	0,064	1,8	0,007		
0,9	0,051	1,9	0,005		
1,0	0,041	2,0	0,004		

16.

Als Beispiel mag die Gleichung

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0$$

dienen, wo

$$\lambda = \frac{6750}{823543}, \quad \log \frac{1}{\lambda} = 2,0863825$$

wird. Die Gleichung hat die erste Form, mithin eine positive Wurzel, und gehört, da λ kleiner ist als 8, zum zweiten Fall. Die erste Operation besteht darin, dass der Gleichung $\log \frac{1}{\lambda} = 4A - 3B$ Genüge geschehe, also, wenn man die Rechnung mit drei Decimalen anfängt, dieser

$$2,086 = 4A - 3B$$

Ein flüchtiger Blick auf obige Tafel zeigt schon, dass A zwischen 0,5 und 0,6 zu suchen sei. Es wird nemlich

A	$4A - 3B$	Fehler
0,5	1,643	-0,443
0,6	2,109	+0,023

woraus sich auf einen genauern Werth 0,595 schliessen lässt. Eine neue Rechnung nach den Tafeln mit fünf Decimalen, wo also $\log \frac{1}{\lambda} = 2,08638$ zu setzen ist, gibt

A	$4A - 3B$	Fehler
0,595	2,08501	-0,00137
0,596	2,08961	+0,00323

woraus der noch genauere Werth 0,5953 erkannt wird. Endlich für sieben Decimalen hat man

A	$4A - 3B$	Fehler
0,5952	2,0859279	-0,000456
0,5953	2,0863885	+0,0000060

Zu dem Werthe $A = 0,5953$ muss also noch die Correction $-\frac{60}{4666}$ Einheiten der vierten Decimale hinzukommen, in welcher Form ich sie beibehalte, da es, wenn zur Bestimmung von x die erste Formel

$$x^7 = \frac{f}{e}$$

gebraucht werden soll, nur darauf ankommt, den entsprechenden Werth von C zu finden. Diesen erhält man, indem man zu dem neben $A = 0,5953$ stehenden Werthe $C = 0,6935705$ die Correction $-\frac{60}{4605} \times 798$ hinzufügt, letztere wie Einheiten der siebenten Decimale betrachtet, also

$$\begin{aligned} C &= 0,6935695 \\ \log f &= 2,6812412 \\ 7 \log x &= 1,9876717 \\ \log x &= 0,2839531 \\ x &= 1,9228841 \end{aligned}$$

Zur Auffindung der negativen Wurzeln wird man $x = -y$ schreiben und die positiven Wurzeln der Gleichung

$$y^7 - 28y^4 + 480 = 0$$

aufsuchen. Diese gehört zur dritten Form, und da $\frac{1}{\lambda} = \frac{823543}{6750}$ grösser ist als $\frac{2^7}{3^4} = \frac{823542}{6912}$, aber kleiner als $2^7 = 128$, zugleich auch m grösser ist als n , so gilt der dritte Fall, oder es finden zwei Wurzeln Statt, zu deren Ausmittlung der Gleichung

$$2,0863825 = 3A + 7B$$

genügt werden muss. Aus der Schlussbemerkung des 14. Art. weiss man, dass der eine Werth von A kleiner, der andere grösser sein muss als $\log \frac{1}{2} = 0,12494$. Auch ergeben sich die Grenzen der Werthe von A sofort aus der obigen Tafel mit dreiziffrigen Logarithmen, nach welchen man erhält:

A	$3A+7B$	Fehler
0,0	2,107	+0,021
0,1	2,078	-0,008
0,2	2,084	-0,002
0,3	2,132	+0,046

Will man zur nähern Bestimmung zuerst vierziffrige Logarithmen gebrauchen, so hat man zunächst für die erste Auflösung

A	$3A+7B$	Fehler
0,05	2,0869	+0,0005
0,06	2,0847	-0,0017

Sodann ergeben die fünfziffrigen Tafeln

0,052	2,08667	+0,00029
0,053	2,08638	0

Endlich die siebenziffrigen

0,0529	2,0863943	+0,0000118
0,0530	2,0863660	-0,0000165

Hienach wird

$$\begin{aligned} A &= 0,0529417 \\ \log f &= 2,6812412 \\ 7 \log y &= 2,7341829 \\ \log y &= 0,3905976 \\ -y = x &= -2,4580892 \end{aligned}$$

Für die zweite Auflösung steht die Rechnung, auf ähnliche Weise geführt, folgendermaassen:

A	$3A+7B$	Fehler
0,19	2,0843	-0,0021
0,20	2,0868	+0,0004
0,197	2,08627	-0,00011
0,198	2,08654	+0,00016
0,1975	2,0863805	-0,0000020
0,1976	2,0864082	+0,0000257

$$\begin{aligned} A &= 0,1975072 \\ \log f &= 2,6812412 \\ 7 \log y &= 2,8787484 \\ \log y &= 0,4112498 \\ x &= -2,5778036 \end{aligned}$$

Die Gleichung, welche uns hier als Beispiel gedient hat, ist absichtlich so gewählt, dass zwei ihrer Wurzeln wenig verschieden sind. In einem solchen Falle sind, wie schon oben im Art. 11 bemerkt ist, die Reihen wegen ihrer sehr langsamen Convergenz wenig brauchbar: auch bei der indirecten Auflösung ist davon wenigstens eine schwache Analogie erkennbar, indem das Fortschreiten der successiven Annäherungen bei den beiden negativen Wurzeln (welche eben die wenig ungleichen sind) etwas träger ist, als bei der positiven. Ein wesentlicher Unterschied ist aber der, dass die sehr langsame Convergenz der Reihen für sämtliche Wurzeln eintritt, während bei dem indirecten Verfahren die, auch nur in geringem Grade fühlbare, langsamere Annäherung lediglich bei den zwei wenig verschiedenen Wurzeln vorkommt.

17.

Ganz verschieden von dem in den vorhergehenden Artikeln gelehrt Verfahren ist dasjenige, welches zur Bestimmung der imaginären Wurzeln angewandt werden muss. Im Allgemeinen ist die Bestimmung der imaginären Wurzeln auf indirectem Wege deswegen weit schwieriger, als die der reellen, weil jene aus einem unendlichen Gebiet von zwei Dimensionen herausgesucht werden müssen, diese nur aus einem Unendlichen von Einer Dimension, und gerade darum verdient ein sehr umfassender besonderer Fall, wo man jene Schwierigkeit umgehen und die Frage in dasselbe Gebiet versetzen kann, zu welchem die Aufsuchung der reellen Wurzeln gehört, eine eigne Ausführung. Einen solchen Fall bieten die Gleichungen mit drei Gliedern dar.

Da die Methode mit gleicher Leichtigkeit angewandt werden kann, die Coefficienten der Gleichung mögen reell oder imaginär sein, so lege ich sofort die allgemeine Form der Gleichung zum Grunde

$$X = x^{m+n} + e(\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)x^m + f(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 0$$

wo e und f positive Grössen bedeuten: für einen reellen, positiven oder negativen, Coefficienten ist dann der betreffende Winkel (ε oder φ) entweder 0 oder 180° . Die Voraussetzung, dass m und n keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, wird ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auch hier beibehalten bleiben können. Eine der Gleichung Genüge leistende imaginäre Wurzel $x = t + iu$ setzt man in die Form $r(\cos \rho + i \sin \rho)$, wobei es für unsern gegenwärtigen Zweck

vortheilhafter ist, die sonst gewöhnliche Bedingung, dass r positiv sein soll, hier nicht zu machen, sondern anstatt derselben die, dass ρ immer zwischen den Grenzen 0 und 180° genommen werden soll. In dem Fall, wo die Coefficienten der Gleichung beide reell sind, kann man den Umfang der Werthe von ρ noch weiter auf die Hälfte verengen: denn da bekanntlich von den imaginären Wurzeln einer solchen Gleichung je zwei zusammengehören, wie $t + iu$ und $t - iu$, so wird offenbar für die eine Wurzel jedes Paares der Werth von ρ zwischen 0 und 90° fallen, und man braucht durch das indirecte Verfahren nur diese zu bestimmen, indem daraus die andere von selbst folgt durch Vertauschung von ρ mit $180^\circ - \rho$ und von r mit $-r$.

18.

Das Wesen der Methode besteht in der Aufstellung einer Gleichung, welche bloss ρ ohne r enthält. Um dazu zu gelangen, setze man die Gleichung $X = 0$ durch Division mit ihrem ersten Gliede in die Form

$$1 + e(\cos \varepsilon + i \sin \varepsilon)x^{-n} + f(\cos \varphi + i \sin \varphi)x^{-m-n} = 0$$

oder

$$1 + er^{-n}(\cos(n\rho - \varepsilon) - i \sin(n\rho - \varepsilon)) + fr^{-m-n}(\cos((m+n)\rho - \varphi) - i \sin((m+n)\rho - \varphi)) = 0$$

Da nun hier die imaginären Theile einander aufheben müssen, so hat man (I)

$$r^m = -\frac{f \sin((m+n)\rho - \varphi)}{e \sin(n\rho - \varepsilon)}$$

Auf ähnliche Art erhält man, wenn die Gleichung $X = 0$ mit ihrem zweiten oder dritten Gliede dividirt, und erwägt, dass in beiden Fällen die imaginären Theile der neuen Gleichungen einander aufheben müssen, die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} r^{m+n} &= \frac{f \sin(m\rho + \varepsilon - \varphi)}{\sin(n\rho - \varepsilon)} \\ r^n &= -\frac{e \sin(m\rho + \varepsilon - \varphi)}{\sin((m+n)\rho - \varphi)} \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Man sieht, dass jede der drei Gleichungen (I) auch schon aus der Verbindung der beiden andern abgeleitet werden kann. Eliminirt man aber r aus Verbindung zweier, so erhält man (II)

$$\lambda = (-1)^{m+n} \frac{\sin(m\rho + \varepsilon - \varphi)^m \sin(n\rho - \varepsilon)^n}{\sin((m+n)\rho - \varphi)^{m+n}}$$

wo zur Abkürzung (eben so wie oben)

$$\frac{f^n}{\rho^{m+n}} = \lambda$$

gesetzt ist. Aus dieser Gleichung hat man die verschiedenen Werthe von ρ zu bestimmen; den Werth von r , welcher jedem Werthe von ρ entspricht, findet man sodann aus einer der Gleichungen (I), am besten aus der zweiten, rücksichtlich der absoluten Grösse, wobei jedoch in dem Falle, wo $m+n$ gerade ist, noch eine der beiden andern Gleichungen zur Entscheidung des Zeichens hinzugezogen werden muss.

19.

Die Auflösung der Gleichung II auf indirectem Wege wird man immer mit Leichtigkeit beschaffen können, wozu noch die Berücksichtigung der folgenden Bemerkungen beitragen wird.

1) Die Werthe von ρ liegen zwischen 0 und 180° ; in dem Falle, wo die Coefficienten der vorgegebenen Gleichung reell sind, braucht man nur die halbe Anzahl, nemlich die zwischen 0 und 90° liegenden, einzeln aufzusuchen.

2) In dem einen wie in dem andern Falle wird man zuerst das betreffende Intervall in die verschiedenen Unterabtheilungen scheiden, die sich durch die Zeichenabwechslungen in den Werthen der auf der rechten Seite der Gleichung II stehenden Function von ρ bilden. Die Uebergangswerthe von ρ können offenbar nur solche sein, wo einer der Winkel $m\rho + \varepsilon - \varphi$, $n\rho - \varepsilon$, $(m+n)\rho - \varphi$ durch 180° theilbar, und also jene Function selbst entweder 0 oder unendlich wird. Von jenen Unterabtheilungen bleiben dann diejenigen, in welchen der Werth der Function negativ wird, schon von selbst aus der weitem Untersuchung ausgeschlossen.

3) Falls man nicht schon auf andern Wegen genäherte Werthe von ρ erlangen kann, wird man sich das indirecte Durchsuchen der geeigneten Intervalle dadurch sehr erleichtern, dass man auf ähnliche Weise, wie aus den Beispielen des 16. Artikels zu ersehen ist, die ersten Versuche nach abgekürzten Tafeln mit wenigen Ziffern ausführt, und in manchen Fällen möchte man wohl bequem fin-

den, zuerst nur die Sinuslogarithmen mit drei Ziffern auf einem Blättchen etwa von Grad zu Grad verzeichnet zu diesem Zweck zu verwenden.

20.

Zu weiterer Erläuterung mag die Berechnung der imaginären Wurzeln der oben behandelten Gleichung

$$x^7 + 28x^4 - 480 = 0$$

als Beispiel dienen. Nach der Bezeichnung des Art. 17 haben wir hier zuvörderst, wie oben, $m = 4$, $n = 3$, $e = 28$, $f = 480$, und sodann weiter $\varepsilon = 0$, $\varphi = 180^\circ$. Die Formeln I des Art. 18 werden demnach

$$\begin{aligned} r^4 &= \frac{480 \sin 7\rho}{28 \sin 3\rho} \\ r^7 &= -\frac{480 \sin 4\rho}{\sin 3\rho} \\ r^3 &= -\frac{28 \sin 4\rho}{\sin 7\rho} \end{aligned}$$

und die Formel II

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{523543}{6750} = \frac{\sin 7\rho^7}{\sin 3\rho^3 \sin 4\rho^4}$$

aus welcher Gleichung zwei zwischen 0 und 90° liegende Werthe von ρ zu bestimmen sind, da die Gleichung $X = 0$ neben ihren drei bereits ermittelten reellen Wurzeln noch zwei Paare zusammengehöriger imaginärer hat. Innerhalb dieser Grenzen wird $\sin 7\rho$ dreimal = 0, nemlich für $\rho = 25\frac{1}{3}^\circ$, $51\frac{2}{3}^\circ$ Grad und $77\frac{1}{3}^\circ$ Grad, wobei $\sin 7\rho^7$ jedesmal sein Zeichen ändert; $\sin 3\rho$ wird einmal = 0 für $\rho = 60^\circ$ gleichfalls mit Zeichenwechsel von $\sin 3\rho^3$; endlich $\sin 4\rho$ wird einmal = 0 für $\rho = 45^\circ$, aber ohne Zeichenwechsel für $\sin 4\rho^4$. Erwägt man nun noch, dass der Werth von $\frac{\sin 7\rho^7}{\sin 3\rho^3 \sin 4\rho^4}$ für $\rho = 0$ dem Grenzwerthe $\frac{7^7}{3^3 4^4}$ gleich zu setzen ist, so wird das Verhalten der Werthe jener Function in den sechs Unterabtheilungen des Zwischenraumes von 0 bis 90° in folgender Uebersicht zusammengefasst:

$\rho = 0$ Grad	$\frac{523543}{6912}$
25½	+
45	0
51½	—
60	∞
77½	+
90°	0

Man erkennt hieraus, dass sowohl im vierten als im sechsten Zwischenraume nothwendig ein der Formel II Genüge leistender Werth von ρ liegen muss, und eines Mehrern bedarf es für unsern Zweck nicht, da schon von vorne her fest steht, dass es nur zwei solche Werthe gibt. Die Gleichung II setze ich in die Form

$$7 \log \sin 7\rho - 3 \log \sin 3\rho - 4 \log \sin 4\rho = S = 2,0863825$$

Die Auffindung des zwischen 51½ und 60 Grad liegenden Werthes durch allmähliche Annäherung vermittelst der Tafeln mit 3, 4, 5, 7 Ziffern zeigt folgendes Schema:

ρ	S	Fehler
57°	1,527	—0,559
58	2,354	+0,268
57°40'	2,0624	—0,0240
57 50	2,2057	+0,1193
57°41'	2,07658	—0,00980
57 42	2,09074	+0,00436
57°41'41"	2,0862962	—0,0000863
57 41 42	2,0865320	+0,0001495

Hieraus $\rho = 57^\circ 41' 41'' 366$, und ferner nach der zweiten Formel in I,

$\log \sin 4\rho$	$= 9,8891425 n$
Compl. $\log \sin 3\rho$	$= 0,9193523$
$\log(-480)$	$= 2,6812412 n$
$7 \log r$	$= 3,4897360$
$\log r$	$= 0,4985337$

und damit

$$x = +1,6843159 + 2,6637914 i$$

so wie die andere dazu gehörige Wurzel

$$x = +1,6843159 - 2,6637914 i$$

Der andere zwischen 77½ und 90° liegende Werth von ρ wird durch Anwendung von Tafeln mit drei Decimalen als zwischen 86° und 87° liegend erkannt. Die Rechnung in gleicher Gestalt wie im vorhergehenden Falle steht so:

ρ	S	Fehler
86°	1,885	—0,201
87	2,533	+0,447
86°10'	1,9907	—0,0957
86 20	2,0946	+0,0082
86 19	2,08409	—0,00229
86 20	2,09447	+0,00809
86°19'13"	2,0863229	—0,0000596
86 19 14	2,0864970	+0,0001145

$$\rho = 86^\circ 19' 13'' 342$$

$\log \sin 4\rho$	$= 9,4049540 n$
Compl. $\log \sin 3\rho$	$= 0,0081108 n$
$\log(-480)$	$= 2,6812412 n$
$7 \log r$	$= 2,0943060 n$
$\log r$	$= 0,2991866 n$

Zieht man vor, r positiv zu haben, so braucht man nur zugleich für ρ den um 180° vergrößerten Werth $266^\circ 19' 13'' 342$ anzusetzen. Die Wurzel selbst ist

$$x = -0,1278113 - 1,9874234 i$$

und die andere dazu gehörige nur im Zeichen des imaginären Theils davon verschieden.

Die sämtlichen Wurzeln der Gleichung $x^7 + 28x^4 - 480 = 0$ sind demnach

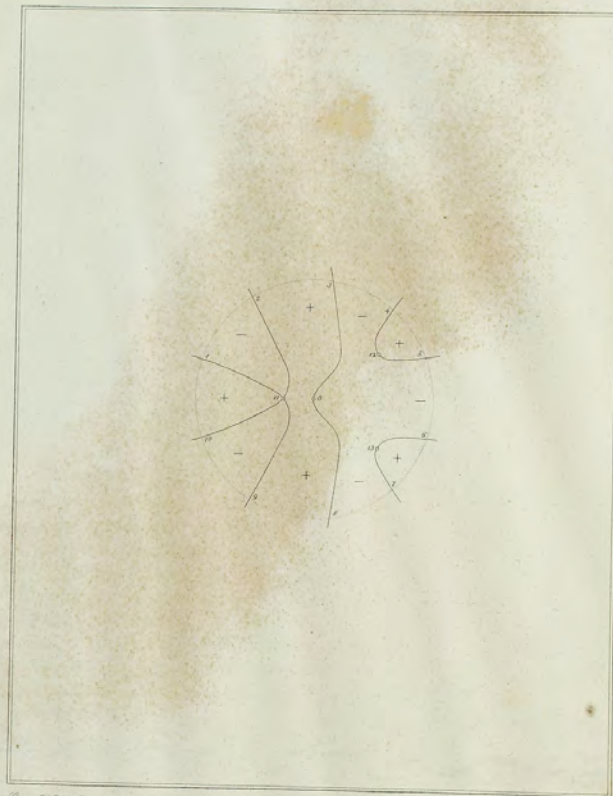
$$\begin{aligned} &+ 1,9228841 \\ &- 2,4580892 \\ &- 2,5778036 \\ &+ 1,6843159 + 2,6637914i \\ &+ 1,6843159 - 2,6637914i \\ &- 0,1278113 + 1,9874234i \\ &- 0,1278113 - 1,9874234i \end{aligned}$$

Die Summe der Wurzeln $+0,0000005$ ist so genau mit dem wahren Werthe 0 übereinstimmend, wie nur von dem Gebrauch siebenzifriger Logarithmen erwartet werden durfte. In der andern Form hat man

$\log r$	p
0,2839531	0
0,3905976	180°
0,4112498	180
0,4985337	57 41' 41" 366
0,4985337	302 18 18,634
0,2991866	93 40 46,658
0,2991866	266 19 13,342

Die Summe der Logarithmen der Werthe von r findet sich $= 2,6812411$, gleichfalls befriedigend genau mit dem Logarithmen von 480 übereinstimmend.

Es wird übrigens kaum nöthig sein zu erinnern, dass die in diesem so wie die im 16. Artikel aufgestellten Rechnungen nur dazu bestimmt sind, den Gang der Arbeit nach ihren Hauptmomenten zu erläutern, keinesweges aber für die Form des kleinen Mechanismus der Operationen maassgebend sein sollen. Geübtere Rechner werden meistens vorziehen, nicht so viele Zwischenstufen anzuwenden, als in jenen Beispielen geschehen ist. Ueberhaupt wird jeder in dergleichen Arbeiten einigermaassen erfahrene die Einzelheiten des Geschäfts leicht selbst in diejenige Gestalt bringen, die den jedesmaligen Umständen und seiner eignen individuellen Gewöhnung am meisten angemessen ist, und es kann hier nicht der Ort sein, in solche Einzelheiten weiter einzugehen.



Summe Wurzeln 18. Sept. 1877.



ANZEIGEN.



Göttingische gelehrte Anzeigen. 1815 December 23.

Am 7. December wurde der Königl. Societät vom Herrn Prof. GAUSS eine Vorlesung übergeben, überschrieben:

Demonstratio nova altera theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integrum unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.

Der hier ausgesprochene Lehrsatz, der wichtigste in der Theorie der Gleichungen, hat bekanntlich mehrere der ersten Geometer vielfältig beschäftigt. Die vornehmsten Versuche, einen vollkommen strengen Beweis davon zu geben, von D'ALEMBERT, EULER, FONCENEX und LAGRANGE, sind von dem Verf. gegenwärtiger Abhandlung bereits in einer vor sechzehn Jahren erschienenen Schrift zusammengestellt, und einer Prüfung unterworfen. So sehr man den Scharfsinn, welcher jene Arbeiten auszeichnet, anerkennen muss, so ist doch nicht zu leugnen, dass sie alle mehr oder weniger Lücken übrig lassen, wodurch die Beweiskraft zerstört wird, und wenn gleich durch LAGRANGE's tiefeindringende Untersuchungen dem grössten Theile jener Mängel abgeholfen worden ist, so können doch auch die Bemühungen dieses grossen Geometers eben so wie die scharfsinnige Art, wie später LAPLACE diesen Gegenstand behandelt hat, gerade von dem Hauptvorwurfe, welcher alle jene versuchten Beweise trifft, nicht freigesprochen werden. Dieser besteht darin, dass man die Sache so genommen hat, als sei bloss die *Form* der Wurzeln zu bestimmen, deren *Existenz* man voraussetzte, ohne sie zu beweisen,

eine Schlussart, die gerade hier bloss illusorisch, und in der That eine wahre *petitio principii* ist. Alle die erwähnten Beweise sind rein analytisch, auch den von D'ALEMBERT nicht ausgenommen, obgleich er in einer geometrischen Einkleidung erscheint, die aber für die Sache selbst ganz gleichgültig ist; und man könnte daher sich fast zu dem Schlusse verleiten lassen, als sei jene Voraussetzung, deren Unzulässigkeit übrigens den genannten Analysten selbst entgangen ist, bei einer analytischen Behandlung gar nicht zu vermeiden gewesen.

Der Verf. vorliegender Abhandlung hatte in der oben erwähnten Schrift diesen Gegenstand auf eine ganz verschiedene Art behandelt, und einen höchst einfachen neuen Beweis gegeben, welcher das Eigenthümliche hat, dass er sich zum Theil auf die Geometrie der Lage gründet, und übrigens in Ansehung der Strenge nichts zu wünschen übrig zu lassen scheint. Zugleich hatte er aber schon damals erklärt, dass er keinesweges für unmöglich halte, auf rein analytischem Wege zu einem vollkommen strengen Beweise zu gelangen, und sich die ausführliche Entwicklung seiner Ideen auf eine andere Zeit vorbehalten. Andere Beschäftigungen hatten ihn bisher von diesem Gegenstande abgezogen: die gegenwärtige Abhandlung ist bestimmt, jene Zusage zu erfüllen.

Was nun diesen neuen Beweis selbst betrifft, so steht er dem erwähnten frühern an Einfachheit und Kürze freilich sehr nach: allein dieser Umstand liegt in der Beschaffenheit der subtilen Untersuchung selbst. Immer bleibt es angenehm, neben einem höchst einfachen, aber zum Theil auf Fremdartigem beruhenden Beweise des wichtigen Lehrsatzes, noch einen zweiten zwar längern und künstlichern, aber für sich ganz selbstständigen zu besitzen. Eine Darstellung der Hauptideen des neuen Beweises, wenn sie nur einigermaßen befriedigend ausfallen sollte, würde übrigens bei weitem mehr Raum einnehmen, als der Zweck dieser Blätter verstattet: wir müssen daher diejenigen, welche einen Hauptreiz der Mathematik in der vollkommenen Klarheit ihrer Wahrheiten und der höchsten Strenge ihrer Beweise finden, auf den bald erscheinenden dritten Band der Commentationen der Societät verweisen.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1816 März 2.

Nachdem die in diesen Anzeigen vom v. J. angezeigte Vorlesung des Herrn Prof. GAUSS bereits abgedruckt war, hatte derselbe bei fortgesetzter Beschäftigung mit demselben Gegenstande das Glück, dasselbe Ziel noch auf einem ganz neuen Wege zu erreichen. Er hat hierüber am 30. Januar der königl. Societät eine kleine Abhandlung eingereicht, die die Aufschrift führt:

Theorematis de resolvibilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia.

Die beiden frühern Beweise des wichtigsten Lehrsatzes in der Lehre von den Gleichungen unterschieden sich dadurch, dass der erstere sehr kurz und einfach, aber zum Theil auf geometrische Betrachtungen gegründet war, der andere hingegen rein analytisch aber viel complicirter, so dass es unmöglich wurde, in dem engen Raume dieser Blätter einen genügenden Auszug daraus zu geben. Dagegen ist nun der gegenwärtige dritte auf gänzlich verschiedenen Principien beruhende Beweis ebenfalls rein analytisch, übertrifft aber selbst den ersten so sehr an Einfachheit und Kürze, dass wir hier ganzfügig alles Wesentliche desselben auf wenigen Seiten mittheilen können.

Es bezeichne X die algebraische Function der unbestimmten Grösse x ,

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{u. s. w.}$$

wo die Coefficienten A, B, C u. s. w. bestimmte reelle Grössen sind. Es seien ferner r und φ zwei neue unbestimmte Grössen, und man setze

$$\begin{aligned} r^m \cos m\varphi + A r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + B r^{m-2} \cos(m-2)\varphi + C r^{m-3} \cos(m-3)\varphi + \text{u. s. w.} &= t \\ r^m \sin m\varphi + A r^{m-1} \sin(m-1)\varphi + B r^{m-2} \sin(m-2)\varphi + C r^{m-3} \sin(m-3)\varphi + \text{u. s. w.} &= u \\ m r^m \cos m\varphi + (m-1) A r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + (m-2) B r^{m-2} \cos(m-2)\varphi + (m-3) C r^{m-3} \cos(m-3)\varphi + \text{u. s. w.} &= t' \\ m r^m \sin m\varphi + (m-1) A r^{m-1} \sin(m-1)\varphi + (m-2) B r^{m-2} \sin(m-2)\varphi + (m-3) C r^{m-3} \sin(m-3)\varphi + \text{u. s. w.} &= u' \\ m m r^m \cos m\varphi + (m-1)^2 A r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + (m-2)^2 B r^{m-2} \cos(m-2)\varphi + (m-3)^2 C r^{m-3} \cos(m-3)\varphi + \text{u. s. w.} &= t'' \\ m m r^m \sin m\varphi + (m-1)^2 A r^{m-1} \sin(m-1)\varphi + (m-2)^2 B r^{m-2} \sin(m-2)\varphi + (m-3)^2 C r^{m-3} \sin(m-3)\varphi + \text{u. s. w.} &= u'' \\ \frac{(t t' + u u') (t t'' + u u'') + (t u' - u t')^2 - (t t' + u u')^2}{r (t t' + u u')^2} &= y \end{aligned}$$

Der Factor r kann offenbar aus dem Nenner des Ausdrucks für y weggeschafft werden, da t', u', t'', u'' durch r theilbar sind.

Es sei ferner R eine beliebige bestimmte positive Grösse, mit der einzigen Einschränkung, dass sie grösser sei als die grösste von folgenden

$$m A \sqrt{2}, \sqrt{(m B \sqrt{2})}, \sqrt{(m C \sqrt{2})}, \sqrt{(m D \sqrt{2})} \text{ etc.}$$

abgesehen von dem Zeichen von A, B, C u. s. w., oder indem man alle als positiv betrachtet.

Endlich mögen noch folgende Bezeichnungen Statt finden:

$$\begin{aligned} R^m \cos 45^\circ + A R^{m-1} \cos(45^\circ + \varphi) + B R^{m-2} \cos(45^\circ + 2\varphi) + C R^{m-3} \cos(45^\circ + 3\varphi) + \text{u. s. w.} &= T \\ R^m \sin 45^\circ + A R^{m-1} \sin(45^\circ + \varphi) + B R^{m-2} \sin(45^\circ + 2\varphi) + C R^{m-3} \sin(45^\circ + 3\varphi) + \text{u. s. w.} &= U \\ m R^m \cos 45^\circ + (m-1) A R^{m-1} \cos(45^\circ + \varphi) + (m-2) B R^{m-2} \cos(45^\circ + 2\varphi) + (m-3) C R^{m-3} \cos(45^\circ + 3\varphi) + \text{u. s. w.} &= T' \\ m R^m \sin 45^\circ + (m-1) A R^{m-1} \sin(45^\circ + \varphi) + (m-2) B R^{m-2} \sin(45^\circ + 2\varphi) + (m-3) C R^{m-3} \sin(45^\circ + 3\varphi) + \text{u. s. w.} &= U' \end{aligned}$$

Nach allen diesen Vorbereitungen, welche wir der bequemern Uebersicht wegen zusammengestellt haben, ergeben sich leicht nachstehende Folgerungen:

I. Die Grösse T ist nothwendig positiv, welchen Werth man auch immer der Grösse φ beilege. Dies ist leicht zu übersehen, wenn man T in folgende Form bringt:

$$\begin{aligned} &\frac{R^{m-1}}{m \sqrt{2}} (R + m A \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + \varphi)) \\ &+ \frac{R^{m-2}}{m \sqrt{2}} (R R + m B \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + 2\varphi)) \\ &+ \frac{R^{m-3}}{m \sqrt{2}} (R^2 + m C \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + 3\varphi)) \\ &+ \frac{R^{m-4}}{m \sqrt{2}} (R^3 + m D \sqrt{2} \cdot \cos(45^\circ + 4\varphi)) \\ &+ \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

da jeder Theil einzeln genommen nothwendig positiv wird. Auf ähnliche Weise ist leicht zu beweisen, dass für jeden Werth von φ auch U, T', U' nothwendig positiv werden.

II. Für $r = R$ erhalten die Functionen t, u, t', u' der Reihe nach folgende Werthe

$$\begin{aligned} T \cos(45^\circ + m\varphi) + U \sin(45^\circ + m\varphi) \\ T \sin(45^\circ + m\varphi) - U \cos(45^\circ + m\varphi) \\ T' \cos(45^\circ + m\varphi) + U' \sin(45^\circ + m\varphi) \\ T' \sin(45^\circ + m\varphi) - U' \cos(45^\circ + m\varphi) \end{aligned}$$

Hieraus folgt, dass für $r = R$, $tt + uu = TT + UU$, $tt' + uu' = TT' + UU'$ also beide nothwendig positiv werden.

III. Es kann also für keinen Werth von r , der grösser ist als jede der Grössen $m A \sqrt{2}, \sqrt{(m B \sqrt{2})}, \sqrt{(m C \sqrt{2})}$ u. s. w., zugleich $t = 0$ und $u = 0$ werden.

Das Haupttheorem ist nun folgendes:

Innerhalb der Grenzen $r = 0$, $r = R$, und $\varphi = 0$, $\varphi = 360^\circ$ (einschl.) gibt es gewiss Werthe für r und φ , aus denen zugleich $t = 0$ und $u = 0$ wird.

Der Beweis davon wird auf folgende Art geführt. Wenn man annimmt, das Theorem sei nicht wahr, so folgt, dass $tt + uu$ für jede Werthe von r und φ zwischen den angegebenen Grenzen immer positiv, und folglich y immer endlich werden muss. Betrachten wir nur den Werth des doppelten Integrals

$$\iint y dr d\varphi$$

von $r = 0$ bis $r = R$, und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 360^\circ$ erstreckt, der also eine ganz bestimmte endliche Grösse haben wird. Dieser mit Q zu bezeichnende Werth kann auf zwifache Art gefunden werden, indem man entweder zuerst nach φ und dann nach r integrirt, oder in umgekehrter Ordnung. Beide Wege müssen nothwendig zu einerlei Resultate führen.

Nun hat man aber, wenn man r als beständig betrachtet, unbestimmt

$$\int y dr = \frac{t u' - u t'}{r (t t' + u u')}$$

wie man sich leicht durch Differentiation versichern kann. Eine beständige Grösse

ist bei der Integration nicht hinzuzufügen, insofern diese von $\varphi = 0$ anfangen soll, da für diesen Werth offenbar

$$\frac{tu' - ut'}{tt + uu} = 0$$

wird: und da eben dies für $\varphi = 360^\circ$ gilt, so ist der Werth von $\int y d\varphi$, von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 360^\circ$ erstreckt, $= 0$, bei jedem Werthe von r . Hieraus schliessen wir also $\Omega = 0$.

Von der andern Seite hat man, wenn man φ als beständig betrachtet, unbestimmt

$$\int y dr = \frac{tt' + uu'}{tt + uu}$$

wie ebenfalls leicht durch die Differentiation nach r bestätigt wird. Auch hier ist keine beständige Grösse hinzuzusetzen, insofern die Integration von $r = 0$ anfangen soll. Das Integral $\int y dr$, von $r = 0$ bis $r = R$ ausgedehnt, wird folglich nach II

$$= \frac{TT' + UU'}{TT + UU}$$

also gewiss positiv für jeden Werth von φ . Hieraus wird demnach auch Ω , d. i. der Werth des Integrals

$$\int \frac{TT' + UU'}{TT + UU} d\varphi$$

von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 360^\circ$ ausgedehnt, nothwendig positiv werden, welches mit dem erstern Resultate in Widerspruch steht. Die Voraussetzung war folglich unstatthaft, und dadurch ist die Wahrheit des Theorems selbst bewiesen.

Dass nun für jede Werthe von r und φ , welche zugleich $t = 0$ und $u = 0$ geben,

$$r(\cos \varphi + \sin \varphi \sqrt{-1}) \text{ und } r(\cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{-1})$$

Wurzeln der Gleichung $X = 0$ sind, oder dass die Function X dann entweder den Factor der zweiten Ordnung

$$xx - 2r \cos \varphi \cdot x + rr$$

(wenn weder r noch $\sin \varphi$ verschwinden) oder den Factor der ersten Ordnung

$$x + r$$

(wenn entweder $\sin \varphi = 0$, also $\cos \varphi = \pm 1$, oder $r = 0$ wird) enthält, ist bekannt genug, und braucht hier nicht erst weiter entwickelt zu werden. Was von X so eben bewiesen ist, gilt nachher wieder von dem Quotienten, wenn X durch jenen Factor dividirt ist, u. s. f., woraus die vollständige Zerlegbarkeit der Function X in dergleichen Factoren erhellet.

Durch diese kurze Reihe von Schlüssen ist das eigentliche Ziel vollständig erreicht. Nicht gefordert, aber doch gewünscht werden konnte noch eine Erläuterung, in wiefern der obige Widerspruch — der unvermeidlich war, wenn man das Theorem als unwahr ansah — wegfallen, wenn man von der Wahrheit des Theorems ausgeht. Der Verf. hat darüber einige Winke gegeben, die hier nur kurz berührt werden können. Ist das Theorem wahr, so sind nicht mehr alle Werthe von y endlich; es ist folglich nicht mehr ohne weiteres verstattet, $\iint y dr d\varphi$ als eine wirkliche bestimmte Grösse anzunehmen, und man darf sich daher nicht wundern, dass der blosse blinde Mechanismus des Calcüls, auf verschiedenen Wegen widersprechende Resultate liefert. Die Analyse pflegt sehr häufig sich so zu helfen, dass sie auf Fragen, die man ihr ohne Einschränkung vorlegt, obgleich sie in gewissen Fällen ungereimt sein können, nur halbbestimmte Antworten gibt. So ist es bei der Bestimmung des Werthes des Integrals $\iint y dr d\varphi$. Soll dasselbe allgemein, von $r = k$ bis $r = l$ und von $\varphi = K$ bis $\varphi = L$ erstreckt werden, und bezeichnet man den Werth von $\frac{u}{t}$

$$\text{für } r = k, \varphi = K \text{ durch } \theta$$

$$r = k, \varphi = L \text{ durch } \theta'$$

$$r = l, \varphi = K \text{ durch } \theta''$$

$$r = l, \varphi = L \text{ durch } \theta'''$$

so geben die analytischen Operationen für jenes Integral den Ausdruck

$$\text{Arc tg } \theta - \text{Arc tg } \theta' - \text{Arc tg } \theta'' + \text{Arc tg } \theta'''$$

Das Integral hat in der That nur dann einen wahren Werth, wenn y innerhalb der angegebenen Grenzen immer endlich bleibt: dieser wahre Werth ist dann unter obigem Ausdruck allerdings begriffen, aber an sich dadurch noch nicht ganz bestimmt, da die Function Arc. tg. eine vielförmige ist, und erst aus anderweitigen (übrigens nicht schwierigen) Betrachtungen muss entschieden werden, welche

Werthe dieser Function im bestimmten Fall zu nehmen sind. So oft hingegen innerhalb der angegebenen Grenzen y irgendwo unendlich wird, ist eigentlich die Frage nach dem Werthe von $\iint y d r d \varphi$ ungereimt; unterfängt man sich, diese Ungereimtheit ignorirend, dennoch, sie zu beantworten, so darf man sich nicht befremden lassen, auf einem Wege diese, auf andern jene Antwort zu erhalten, welche verschiedene Beantwortungen inzwischen allemal unter dem obigen halbbestimmten Ausdrücke begriffen sind.

Handschriftliche Bemerkungen.

Die Bedingung für R kann auch so gestellt werden, dass es grösser ist als 1 und als die absolute Summe der Grössen A, B, C etc. in $\sqrt{2}$ multiplicirt. Es sei diese absolute Summe $= aA + bB + \gamma C + \delta D + \text{etc.}$ so dass jeder der Coefficienten a, b, γ etc. entweder $+1$ oder -1 wird. Dann ist der positive Werth von T u. s. w. aus folgender Form klar

$$T = R^{m-1} \cos 45^\circ (R - \sqrt{2} \cdot (aA + bB + \gamma C + \text{etc.})) + R^{m-1} (aA + A \cos(45^\circ + \varphi)) + R^{m-1} (bB + B \cos(45^\circ + 2\varphi)) + \text{etc.}$$

Lehrsatz. Sind $a, b, c, \dots, m, n$ die Wurzeln der Gleichung $fx = 0$, $a', b', c', \dots, m'$ die Wurzeln der Gleichung $f'x = 0$, wo $f'x = \frac{dfx}{dx}$, und werden durch dieselben Buchstaben die entsprechenden Punkte in plano bezeichnet, so ist, wenn man sich in $a, b, c, \dots, m, n$ gleiche abstossende oder anziehende Massen denkt, die im umgekehrten Verhältniss der Entfernung wirken, in $a', b', c', \dots, m'$ Gleichgewicht.

Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1849 Juli 30.

Die in der Sitzung der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften am 16. Julius von dem Geh. Hofr. Gauss gehaltene Vorlesung bezog sich auf die

Theoria der algebraischen Gleichungen.

Von der ausführlichen Denkschrift, die in Kurzem im Druck erscheinen wird, geben wir hier nur folgenden Bericht.

Sie besteht aus zwei Abtheilungen, deren jede einem besondern Gegenstande gewidmet ist.

Die erste Abtheilung beschäftigt sich mit dem Grundlehrsatz der Lehre von den algebraischen Gleichungen, nemlich mit der Zerlegbarkeit jeder rationalen bruchfreien algebraischen Function Einer veränderlichen Grösse in Factoren, worüber der Verf. schon im Jahre 1799 eine Denkschrift veröffentlicht hatte unter dem Titel *Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*. Diese Denkschrift hatte einen doppelten Zweck, zuerst, zu zeigen, dass die sämmtlichen bis dahin versuchten Beweise des ausgesprochenen Lehrsatzes ungenügend und illusorisch waren, und zweitens, einen vollkommen strengen neuen Beweis zu geben. Es würde unnöthig sein, auf den ersten Gegenstand noch einmal zurückzukommen: dagegen aber muss bemerkt werden, dass der Verf. jenem ersten neuen Beweise späterhin noch zwei andere hat folgen lassen, die sich im 3. Bande

der *Commentationes recentiores* unserer Societät befinden, und dass ein vierter von CAUCHY zuerst aufgestellt ist. Alle diese vier vollkommen strengen Beweise beruhen auf eben so vielen ungleichen Grundlagen, darin aber kommen sie überein, dass sie sämtlich *unmittelbar* nur das Vorhandensein Eines Factors der betreffenden Function darthun. Der Strenge der Beweise geschieht hiedurch kein Eintrag. Denn es ist klar, dass nach Ablösung dieses einen Factors von der vorgegebenen Function eine ähnliche Function von niedriger Ordnung zurückbleibt, auf welche der Lehrsatz aufs neue angewandt werden kann, und dass aus der fortgesetzten Wiederholung des Verfahrens zuletzt eine vollständige Zerlegung der ursprünglichen Function in Factoren der bezeichneten Art hervorgehen wird. Indessen gewinnt offenbar jede Beweisführung eine höhere Vollendung, wenn gezeigt wird, dass sie geeignet ist, das Vorhandensein sämtlicher einzelnen Factoren auf einmal unmittelbar anschaulich zu machen. Der erste Beweis ist wirklich in diesem Falle, wie in der gedachten Denkschrift (Art. 23) bereits angedeutet, aber nicht weiter ausgeführt war. Die gegenwärtige Abhandlung gibt nun diese Erweiterung, jedoch nicht in der Gestalt eines Zusatzes zu der Denkschrift von 1799, sondern als Bestandtheil einer Umarbeitung derselben. Es wird nemlich der Beweis hier selbstständig von neuem aufgeführt, aber mit einigen wesentlichen Änderungen im Gange, wodurch eine bedeutende Vereinfachung gewonnen ist. Verändert ist ausserdem auch die ganze Einkleidung, die bei der ältern Schrift absichtlich so gewählt war, dass alle Einmischung imaginärer Grössen gänzlich vermieden werden konnte. Da jedoch die Beweisführung sowohl ihrem *Ursprunge* als ihrem wahren Wesen nach mit der Conception der complexen Grössen im innigsten Zusammenhang steht, was auch, seitdem diese in der Wissenschaft eingebürgert ist, aufmerksamen Lesern jener Denkschrift nicht entgangen ist, so hat Verf. es für angemessen gehalten, jene erste Einkleidung jetzt fallen zu lassen, und die Argumentation auf ihr eigentliches Feld zurück zu versetzen, deren Grundbegriffe jetzt Jedermann geläufig sind, zumal da dadurch nicht bloss grössere Einfachheit sondern auch noch etwas grössere Allgemeinheit gewonnen wird.

Die zweite Abtheilung ist den algebraischen Gleichungen mit drei Gliedern gewidmet. Diese haben das Eigenthümliche, dass von den zur numerischen Auflösung der Gleichungen bestimmten Methoden einige bei jenen einer Geschmeidigkeit und Eleganz fähig werden, von der ihre Anwendung auf Gleichungen von weniger einfacher Gestalt sehr weit entfernt bleibt. Dies gilt namentlich von der

Auflösung durch unendliche Reihen, und von der indirecten Methode. Es scheint daher die Entwicklung dieser Methoden für die Gleichungen von jener Form eine besondere Ausführung um so mehr zu verdienen, da das Vorkommen solcher Gleichungen in der That ein sehr häufiges ist.

Die Auflösung durch unendliche Reihen hat jedoch der Verf. von seinem gegenwärtigen Zweck gänzlich ausgeschlossen, und nur bemerkt, dass für *jede* Wurzel einer solchen Gleichung, sei sie reell oder imaginär, eine convergente und nach einem leicht erkennbaren Gesetz fortschreitende Reihe gefunden werden kann. So schön aber auch diese Auflösungsart in allgemein theoretischer Beziehung ist, so wird man doch, wo es auf wirkliche praktische Anwendung ankommt, den indirecten Methoden in allen den Fällen den Vorzug geben, wo jene Convergenz nicht eine sehr schnelle ist.

Diese indirecten Methoden nun sind der Gegenstand der zweiten Abtheilung. Es handelt sich hier von *zwei* Methoden, denn das Verfahren, welches zur Bestimmung der imaginären Wurzeln erfordert wird, ist ganz verschieden von dem für die reellen Wurzeln anzuwendenden. Von dem letztern hat der Verf. schon bei andern Gelegenheiten ein paar Proben an besondern Fällen gegeben, und dabei zugleich die allgemeine Anwendbarkeit des Verfahrens angedeutet. Obgleich diese Generalisirung durchaus keine Schwierigkeit hat, so hat der Verf. doch geglaubt, dass man gern die gebrauchfertigen Vorschriften zusammengestellt sehen würde, zumal weil die Anzahl der dabei zu unterscheidenden und einzeln zu behandelnden Fälle nicht unbeträchtlich ist.

Die Auffindung der imaginären Wurzeln auf indirectem Wege ist (insofern nicht schon einigermaßen angenäherte Werthe anderswoher bekannt sind) deswegen viel schwieriger, als die der reellen, weil jene aus einem unendlichen Gebiete von zwei Dimensionen herausgesucht werden müssen, diese nur aus einem Unendlichen von Einer Dimension. Diese Schwierigkeit lässt sich bei den Gleichungen von drei Gliedern durch einen einfachen sehr nahe liegenden aber wie es scheint sonst bisher noch nicht benutzten Kunstgriff umgehen. Auch für diese Aufgabe sind die zur Auflösung erforderlichen Vorschriften vollständig und in gebrauchfertiger Gestalt mitgetheilt.

Recherches mathématiques ou diverses questions non résolues ou dont la solution laisse quelque chose à désirer. Par P. L. COYTIER. Premier mémoire contenant des observations générales sur les équations algébriques. Paris 1813. Chez Eberhardt. (16 Seiten in Quart.)

Wenn wir die wortreiche, schwülstige Vorrede recht verstehen, so soll der Zweck des gegenwärtigen Aufsatzes, und anderer, die ihm noch folgen sollen, dahin gehen, allerlei nach des Verfassers Meinung usurpirte Resultate der Analyse mit den Waffen der Synthese zu bekämpfen und umzustürzen. Aus dem Ganzen der Schrift sieht man aber, dass der Verfasser eigentlich mit den Wörtern Analyse und Synthese ihm eigenthümliche Begriffe verbindet, und bei jener sich ein blosses blindes Zeichenspiel, bei dieser eine reelle anschauliche Erkenntniss denkt. Ein solches Unternehmen verdient allerdings Lob, wenn sich ein solches blindes Zeichenspiel vorfindet, das sich den Namen Analyse anmasst; bei den meisten Versuchen dieser Art aber, diesseit und jenseit des Rheins gemacht, finden wir, dass die Blindheit nicht in dem Bekämpften, sondern in dem Bekämpfenden lag. Wohin gegenwärtige Schrift zu rechnen sei, möge man aus dem Inhalt, den wir kurz anzeigen wollen, beurtheilen.

Hauptsächlich ist die vorliegende Schrift gegen die Zerlegbarkeit der algebraischen Gleichungen in einfache Factoren gerichtet (schon in diesem Ausdrucke liegt eine Unrichtigkeit, die sich freilich auch manche andere Schriftsteller haben

zu Schulden kommen lassen). Der Verfasser nennt dieselbe auch öfters das Theorem von 1746, ohne Zweifel, weil d'ALEMBERT um diese Zeit zuerst den Versuch eines strengen Beweises machte. Dass dieser Beweis von d'ALEMBERT, eben so wie die Beweise von EULER, FORCENEX, LAGRANGE, keineswegs befriedige, darüber haben wir schon vor 14 Jahren an einem andern Orte unser Urtheil erklärt, und eben so müssen wir freilich, unserer Ueberzeugung nach, von LAPLACE's und LAGRANGE's spätern Arbeiten über denselben Gegenstand urtheilen. Allein in diese Beweise selbst lässt sich unser Verfasser gar nicht ein: seine Bemerkungen sind ganz anderer Art, und nicht gegen die Beweise, sondern gegen den Lehrsatz selbst gerichtet. Er behauptet nemlich (um nur bei dem einfachsten Fall einer quadratischen Gleichung $xx - 2ax + b = 0$ stehen zu bleiben), $x - [a + \sqrt{aa - b}]$ sei gar kein einfacher Factor, weil $x - [a + \sqrt{aa - b}] = 0$ gar keine Gleichung der ersten Ordnung, sondern eine wahre quadratische Gleichung sei. Man möge vor die Wurzelgrösse das Zeichen +, oder das Doppelzeichen $\pm$ schreiben, immer drücke sie beide Wurzeln zugleich aus. Jede Gleichung stelle eigentlich die Relation zwischen zwei veränderlichen und einer beständigen Lineargrösse dar, die Classification der Gleichungen und die Classification der Curven nach Ordnungen müsse aufs genaueste zusammenhangen, die Gleichung $x - [a + \sqrt{aa - b}] = 0$ als identisch mit der Gleichung $xx - 2ax + b = 0$ betrachtet, und also erstere so gut, wie letztere, zur zweiten Ordnung gezählt werden. Diese Behauptungen machen den Inhalt der Schrift aus, und zeigen uns nichts, als die Verworrenheit der Begriffe des Verfassers. Die gemeine Algebra kennt gar keine veränderlichen Grössen, sondern bloss unbekannte und bekannte. Das Wurzelzeichen $\sqrt{}$ hat eigentlich in der mathematischen Zeichensprache eine doppelte Bedeutung (und dies ist allerdings eine kleine Unvollkommenheit); $\sqrt{A}$ soll entweder definirt werden, eine Grösse, deren Quadrat $= A$, oder die positive Grösse, deren Quadrat $= A$, insofern A positiv ist. Es hängt von dem Analysten ab, wie er das Zeichen gebrauchen will, und ein denkender, vorsichtiger Analyst wird sich immer klar bewusst sein, und sich immer so ausdrücken, dass auch dem Leser kein Zweifel übrig bleibe, ob das Zeichen in unbestimmter oder in bestimmter Bedeutung gebraucht sei. Gleichungen werden, wie wir schon oben andeuteten, gar nicht in Factoren zerlegt, sondern Functionen einer veränderlichen Grösse. Also nicht die Gleichung $xx - 2ax + b = 0$, sondern die Function $xx - 2ax + b$ wird in die Factoren $x - [a + \sqrt{aa - b}]$, $x - [a - \sqrt{aa - b}]$ zerlegt, und inso-

fern man darin bloss x als veränderlich betrachtet, *nennt* man dieselben Factoren der ersten Ordnung. Immerhin mag der Verfasser, wenn er die Gleichung $xx - 2ax + b = 0$ als Ausdruck einer Curve, und a oder b als veränderlich betrachtet, den Factor $x - [a + \sqrt{aa - b}]$ einen Ausdruck der zweiten Ordnung nennen, er bestreitet dadurch keine *Wahrheit*, sondern nur die Schicklichkeit einer *Benennung* in einem Fall, worin man sie nicht gebraucht, und nie gebraucht hat.

Den meisten mathematischen Lesern dieser Blätter werden freilich diese Erörterungen überflüssig sein; wir glaubten aber doch die Begriffe des Verfassers etwas entwickeln zu müssen, damit Niemand sich durch den Titel der Schrift verleiten lasse, neue Aufklärungen darin zu erwarten, wozu dem Verfasser die ersten Elemente zu fehlen scheinen.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1833 Februar 25.

Analyse des équations déterminées par FOURIER. Première partie. Paris 1831. Chez Firmin Didot frères. (XXIV und 258 S. in Quart.)

Nach dem Entwurf des Verfs. sollte dieses Werk aus zwei Abtheilungen bestehen, und die erstere ausser einer allgemeinen Uebersicht des Ganzen die beiden ersten Abschnitte, die zweite Abtheilung hingegen die fünf übrigen Abschnitte enthalten. Der Verf. wurde den Wissenschaften durch den Tod entrisen, als der Druck eben angefangen war. Indessen fand sich die ganze erste Abtheilung, die wir hier durch die Besorgung des Hrn. NAVIER erhalten, so gut wie vollständig ausgearbeitet vor, während der Rest von der Vollendung noch weit entfernt war: man muss dies um so mehr bedauern, da aus der allgemeinen Uebersicht hervorgeht, dass manche interessante Untersuchungen dafür bestimmt waren. Hier müssen wir, mit Uebergang dessen, was wir zu erwarten gehabt hätten, wenn dem Verf. ein längeres Leben zu Theil geworden wäre, uns auf die Anzeige von dem einschränken, was wir wirklich erhalten haben.

Der Zweck des Werks ist, die numerische Auflösung der bestimmten algebraischen Gleichungen in einen ganz sichern und möglichst einfachen Gang zu bringen, namentlich die Anzahl der reellen und imaginären Wurzeln mit völliger Bestimmtheit auszumitteln, jene einzeln in feste Grenzen einzuschliessen und die stufenweise zu beliebiger Schärfe zu führende Annäherung zu ihren Werthen ganz methodisch anzuordnen. Die Hauptgrundlage des Ganzen bildet ein dem Verf.



eigenthümliches Theorem, welches als eine glückliche Generalisirung von DESCARTES Lehrsatz (gewöhnlich nach HARRIOT benannt) zu betrachten ist, und, dem Wesen nach, in Folgendem besteht. Es sei X eine geordnete ganze algebraische Function von x (mit lauter reellen Zahlencoefficienten); ferner a, a' zwei beliebige bestimmte ungleiche reelle Grössen, und zwar $a' - a$ positiv; durch die Substitutionen $x = y + a, x = y + a'$ gehe X in die gleichfalls geordneten Functionen Y, Y' über, in welchen die Coefficienten resp. g, g' Zeichenfolgen enthalten; der ausnahmliche Fall, wo einer oder mehrere Coefficienten verschwinden, wird hier der Kürze wegen bei Seite gesetzt. Dies vorausgesetzt, kann die Gleichung $X = 0$ innerhalb der Grenzen $x = a, x = a'$ nicht mehr als $g' - g$ reelle Wurzeln enthalten, oder noch bestimmter, wenn die Anzahl der reellen Wurzeln zwischen jenen Grenzen $= \lambda$ ist, so ist allemal $g' - g - \lambda$ entweder $= 0$, oder eine gerade positive Zahl. Ist demnach die Differenz $g' - g$, welche niemals negativ sein kann, $= 0$, so gibt es zwischen jenen Grenzen gar keine reelle Wurzel; wird $g' - g = 1$, so enthalten die Grenzen eine reelle Wurzel und nicht mehr; ist endlich $g' - g = 2$, so bleibt einstweilen noch ungewiss, ob zwei reelle Wurzeln zwischen den Grenzen liegen oder gar keine. Anstatt zweier Grenzen a, a' kann man eine grössere Anzahl auf ganz ähnliche Art behandeln, und solche so wählen, dass erstlich der kleinsten eine Function Y mit blossen Zeichenwechseln, der grössten eine mit blossen Zeichenfolgen entspricht, also wenn die entsprechenden Zahlen der Zeichenfolgen der Reihe nach mit g, g', g'', g''' u. s. f. bezeichnet werden, die erste dieser Zahlen $= 0$, die letzte der Ordnungszahl der Gleichung gleich wird; und zweitens, dass sämtliche einzelne Differenzen $g' - g, g'' - g', g''' - g''$ u. s. w. nur entweder $= 1$ oder $= 2$ werden. Dadurch werden dann sämtliche reelle Wurzeln dergestalt zwischen Grenzen eingeschlossen, dass in jedem einzelnen Intervall entweder eine liegen muss, oder zwei liegen können. Wie im letztern Fall auf ganz methodische Art, nöthigenfalls durch weitere Verengung der Grenzen zur Entscheidung gebracht wird, ob die zwei reellen Wurzeln wirklich vorhanden sind, oder fehlen, kann hier des beschränkten Raumes wegen nicht näher ausgeführt werden. Wir bemerken nur, dass so oft dieser letzte Fall eintritt, es allemal innerhalb solcher Grenzen einen Zwischenwerth gibt, für welchen in der Function Y ein Coefficient vor dem letzten ausfällt, während der vorhergehende und folgende gleiche Zeichen haben. FOURIER nennt solche Stellen kritische: jede solche kritische

Stelle bedingt demnach das Fehlen von zwei reellen Wurzeln: wenn aber FOURIER sich zugleich so ausdrückt, dass jedesmal zwei solche ausfallende reelle Wurzeln *imaginär* werden, so können wir diesen Ausdruck nicht ganz billigen, da er leicht zu einer Missdeutung Veranlassung geben könnte. In der That ist es zwar wahr, dass die Gleichung $X = 0$ *zusammen gezählt* genau so viele Paare imaginärer Wurzeln enthält, als solche Ausfälle oder kritische Stellen vorkommen: allein die Werthe aller imaginären Wurzeln sind an sich eben so bestimmte Grössen wie die reellen, und jener Ausdruck kann daher leicht so gedeutet werden, als ob jeder bestimmten Lücke ein bestimmtes Paar imaginärer Wurzeln angehörte, was jedoch nicht nur von FOURIER nicht nachgewiesen ist, sondern so lange, als tiefer eindringende Untersuchungen diesen interessanten Punkt noch nicht in helles Licht gesetzt haben, zweifelhaft bleiben muss. Uebrigens soll hiermit nicht gesagt werden, dass FOURIER selbst den Ausdruck so verstanden habe; wir möchten eher das Gegentheil annehmen, und fast vermuthen, dass er über das Dasein oder Nichtdasein eines solchen bestimmten Zusammenhanges ungewiss geblieben, und absichtlich einer offenen Erklärung über den verfügblichen Ausdruck ausgewichen sei. Ueberhaupt hat FOURIER in das Wesen und die Berechnung der imaginären Wurzeln in diesem Werke sich gar nicht eingelassen, und es bleibt daher noch ein weites Feld zu bearbeiten übrig.

Einem so gewandten Grössenforscher, wie FOURIER war, konnte es, einmal im Besitz jenes schönen Lehrsatzes — und nach den von Herrn NAVIER mitgetheilten Notizen ist jener in diesem Besitz schon seit sehr langer Zeit gewesen — nicht schwer fallen, auf demselben die Anordnung der Technik der numerischen Auflösung der Gleichungen zu begründen, und diese Entwicklung ist mit grosser Vollständigkeit und Ausführlichkeit gegeben. Geübtere Leser möchten vielleicht eine etwas gedrängtere Darstellung und die Wegschneidung mancher Wiederholungen vorziehen, dem weniger geübten werden die vielen gut gewählten und ausführlich behandelten Beispiele willkommen sein. Jedenfalls sichert dieses Werk FOURIER's Namen auch in diesem Theile der Grössenlehre einen ehrenvollen Platz, den er in andern schon längst behauptet.



DISQUISITIONES GENERALES
CIRCA SERIEM INFINITAM

$$1 + \frac{\alpha \bar{b}}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \bar{b}(\bar{b}+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \bar{b}(\bar{b}+1)(\bar{b}+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \text{etc.}$$

PARS PRIOR

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM TRADITA 1812. JAN. 30.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. II.
Gottingae MDCCCXIII.



DISQUISITIONES GENERALES

CIRCA SERIEM INFINITAM

$$1 + \frac{\alpha\delta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\delta(\delta+1)}{1\cdot 2\cdot \gamma(\gamma+1)}x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\delta(\delta+1)(\delta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{etc.}$$

PARS PRIOR.

INTRODUCTIO.

1.

Series, quam in hac commentatione perscrutari suscipimus, tamquam functionem univariabilem x spectari potest, quas ipsius *elementa* vocabimus, ordine suo elementum primum α , secundum δ , tertium γ , quartum x distinguentes. Manifesto elementum primum cum secundo permutare licet: quodsi itaque brevitatis causa seriem nostram hoc signo $F(\alpha, \delta, \gamma, x)$ denotamus, habebimus $F(\delta, \alpha, \gamma, x) = F(\alpha, \delta, \gamma, x)$.

2.

Tribuendo elementis α, δ, γ valores determinatos, series nostra in functionem univariabilem x transit, quae manifesto post terminum $1 - \alpha^{\text{tum}}$ vel $1 - \delta^{\text{tum}}$ abruptitur, si $\alpha - 1$ vel $\delta - 1$ est numerus integer negativus, in casibus reliquis vero in infinitum excurrit. In casu priori series exhibet functionem algebraicam rationalem, in posteriori autem plerumque functionem transcendentem. Elementum tertium γ debet esse neque numerus negativus integer neque $= 0$, ne ad terminos infinite magnos delabamur.

3.

Coëfficientes potestatum x^m, x^{m+1} in serie nostra sunt ut

$$1 + \frac{\gamma+1}{m} + \frac{\gamma}{m^2} : 1 + \frac{\alpha+\delta}{m} + \frac{\alpha\delta}{m^2}$$

adeoque ad rationem aequalitatis eo magis accedunt, quo maior assumitur m . Si itaque etiam elemento quarto x valor determinatus tribuitur, ab huius indole convergentia seu divergentia pendeat. Quoties scilicet ipsi x tribuitur valor realis, positivus seu negativus, unitate minor, series certo, si non statim ab initio, tamen post certum intervallum, convergens erit, atque ad summam finitam ex asse determinatam perducet. Idem eveniet per valorem imaginarium ipsius x formae $a+b\sqrt{-1}$, quoties $aa+bb < 1$. Contra pro valore ipsius x reali unitateque maiori, vel pro imaginario formae $a+b\sqrt{-1}$, quoties $aa+bb > 1$, series si non statim tamen post certum intervallum necessario divergens erit, ita ut de ipsius *summa* sermo esse nequeat. Denique pro valore $x = 1$ (seu generalius pro valore formae $a+b\sqrt{-1}$, quoties $aa+bb = 1$) seriei convergentia seu divergentia ab ipsarum α, δ, γ indole pendeat, de qua, atque in specie de summa seriei pro $x = 1$, in Sect. tertia loquemur.

Patet itaque, quatenus functio nostra tanquam summa seriei definita sit, disquisitionem natura sua restrictam esse ad casus eos, ubi series revera convergat, adeoque quaestionem ineptam esse, quinam sit valor seriei pro valore ipsius x unitate maiori. Infra autem, inde a Sectione quarta, functionem nostram altiori principio superstruemus, quod applicationem generalissimam patiatur.

4.

Differentiatio seriei nostrae, considerando solum elementum quartum x tanquam variabile, ad functionem similem perducit, quum manifesto habeatur

$$\frac{dF(\alpha, \delta, \gamma, x)}{dx} = \frac{\alpha\delta}{\gamma} F(\alpha+1, \delta+1, \gamma+1, x)$$

Idem valet de differentiationibus repetitis.

5.

Operae pretium erit, quasdam functiones, quas ad seriem nostram reducere licet, quarumque usus in tota analysi est frequentissimus, hic apponere.

$$\text{I. } (t+u)^n = t^n F(-n, \delta, \delta, -\frac{u}{t})$$

ubi elementum δ est arbitrarium.

$$\text{II. } (t+u)^n + (t-u)^n = 2t^n F(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{uu}{tt})$$

$$\text{III. } (t+u)^n + t^n = 2t^n F(-n, \omega, 2\omega, -\frac{u}{t})$$

denotante ω quantitatem infinite parvam.

$$\text{IV. } (t+u)^n - (t-u)^n = 2nt^{n-1}uF(-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{uu}{tt})$$

$$\text{V. } (t+u)^n - t^n = nt^{n-1}uF(1-n, 1, 2, -\frac{u}{t})$$

$$\text{VI. } \log(1+t) = tF(1, 1, 2, -t)$$

$$\text{VII. } \log \frac{1+t}{1-t} = 2tF(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, tt)$$

$$\text{VIII. } e^t = F(1, k, 1, \frac{t}{k}) = 1+tF(1, k, 2, \frac{t}{k}) = 1+t+\frac{1}{2}t^2F(1, k, 3, \frac{t}{k}) \text{ etc.}$$

denotante e basin logarithmorum hyperbolicorum, k numerum infinite magnum.

$$\text{IX. } e^t + e^{-t} = 2F(k, k, \frac{1}{2}, \frac{tt}{4kk})$$

denotantibus k, k' numeros infinite magnos.

$$\text{X. } e^t - e^{-t} = 2tF(k, k', \frac{3}{2}, \frac{tt}{4kk'})$$

$$\text{XI. } \sin t = tF(k, k', \frac{3}{2}, -\frac{tt}{4kk'})$$

$$\text{XII. } \cos t = F(k, k', \frac{1}{2}, -\frac{tt}{4kk'})$$

$$\text{XIII. } t = \sin t \cdot F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sin^2 t)$$

$$\text{XIV. } t = \sin t \cdot \cos t \cdot F(1, 1, \frac{3}{2}, \sin^2 t)$$

$$\text{XV. } t = \tan t \cdot F(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -\tan^2 t)$$

$$\text{XVI. } \sin nt = n \sin t \cdot F(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \sin^2 t)$$

$$\text{XVII. } \sin nt = n \sin t \cdot \cos t \cdot F(\frac{1}{2}n+1, -\frac{1}{2}n+1, \frac{3}{2}, \sin^2 t)$$

$$\text{XVIII. } \sin nt = n \sin t \cdot \cos t^{n-1} F(-\frac{1}{2}n+1, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\tan^2 t)$$

$$\text{XIX. } \sin nt = n \sin t \cdot \cos t^{n-1} F(\frac{1}{2}n+1, \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\tan^2 t)$$

$$\text{XX. } \cos nt = F(\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}, \sin^2 t)$$

$$\text{XXI. } \cos nt = \cos t \cdot F(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sin^2 t)$$

$$\text{XXII. } \cos nt = \cos t^n F(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\tan^2 t)$$

$$\text{XXIII. } \cos nt = \cos t^n F(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}, -\tan^2 t)$$



Functiones praecedentes sunt algebraicae atque transcendentes a logarithmis circuloque pendentes. Neutiquam vero *harum* causa disquisitionem nostram *generalem* suscipimus, sed potius in gratiam theoriae functionum transcendentium altiorum promovendae, quarum genus amplissimum series nostra complectitur. Huc, inter infinita alia, pertinent coefficients ex evolutione functionis $(aa+bb-2ab\cos\varphi)^{-n}$ in seriem secundum cosinus angulorum φ , 2φ , 3φ etc. progredientem orti, de quibus *in specie* alia occasione fusius agemus. Ad formam seriei nostrae autem illi coefficients pluribus modis reduci possunt. Scilicet statuendo

$$(aa+bb-2ab\cos\varphi)^{-n} = \Omega = A + 2A'\cos\varphi + 2A''\cos 2\varphi + 2A'''\cos 3\varphi + \text{etc.}$$

habemus *primo*

$$\begin{aligned} A &= a^{-2n} F(n, n, 1, \frac{bb}{aa}) \\ A' &= na^{-2n-1} b F(n, n+1, 2, \frac{bb}{aa}) \\ A'' &= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} a^{-2n-2} bb F(n, n+2, 3, \frac{bb}{aa}) \\ A''' &= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{-2n-3} b^3 F(n, n+3, 4, \frac{bb}{aa}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Si enim $aa+bb-2ab\cos\varphi$ consideratur tamquam productum ex $a-br$ in $a-br^{-1}$ (designante r quantitatem $\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}$), fit Ω aequalis producto

$$\begin{aligned} \text{ex } a^{-2n} \\ \text{in } 1 + n \frac{br}{a} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{bbrr}{aa} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{b^3r^3}{a^3} + \text{etc.} \\ \text{in } 1 + n \frac{br^{-1}}{a} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{bb r^{-1}}{aa} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{b^3 r^{-3}}{a^3} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Quod productum quum identicum esse debeat cum

$$A + A'(r+r^{-1}) + A''(r+r^{-1})^2 + A'''(r^3+r^{-3})$$

valores supra dati sponte prodeunt.

Porro habemus *secundo*

$$\begin{aligned} A &= (aa+bb)^{-n} F(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}n+1, 1, \frac{4abbb}{(aa+bb)^2}) \\ A' &= n(aa+bb)^{-n-1} ab F(\frac{1}{2}n+1, \frac{1}{2}n+1, 2, \frac{4abbb}{(aa+bb)^2}) \\ A'' &= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} (aa+bb)^{-n-2} aabb F(\frac{1}{2}n+1, \frac{1}{2}n+1, 3, \frac{4abbb}{(aa+bb)^2}) \\ A''' &= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (aa+bb)^{-n-3} a^3 b^3 F(\frac{1}{2}n+1, \frac{1}{2}n+2, 4, \frac{4abbb}{(aa+bb)^2}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

qui valores facile deducuntur ex

$$\Omega(aa+bb)^n = 1 + n(r+r^{-1}) \frac{ab}{aa+bb} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} (r+r^{-1})^2 \frac{aabb}{(aa+bb)^2} + \text{etc.}$$

Tertio fit

$$\begin{aligned} A &= (a+b)^{-2n} F(n, \frac{1}{2}, 1, \frac{4ab}{(a+b)^2}) \\ A' &= n(a+b)^{-2n-1} ab F(n+1, \frac{3}{2}, 3, \frac{4ab}{(a+b)^2}) \\ A'' &= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} (a+b)^{-2n-2} aabb F(n+2, \frac{5}{2}, 5, \frac{4ab}{(a+b)^2}) \\ A''' &= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a+b)^{-2n-3} a^3 b^3 F(n+3, \frac{7}{2}, 7, \frac{4ab}{(a+b)^2}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Denique fit *quarto*

$$\begin{aligned} A &= (a-b)^{-2n} F(n, \frac{1}{2}, 1, -\frac{4ab}{(a-b)^2}) \\ A' &= n(a-b)^{-2n-1} ab F(n+1, \frac{3}{2}, 3, -\frac{4ab}{(a-b)^2}) \\ A'' &= \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} (a-b)^{-2n-2} aabb F(n+2, \frac{5}{2}, 5, -\frac{4ab}{(a-b)^2}) \\ A''' &= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a-b)^{-2n-3} a^3 b^3 F(n+3, \frac{7}{2}, 7, -\frac{4ab}{(a-b)^2}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Valores illi atque hi facile eruuntur ex

$$\begin{aligned} \Omega(a+b)^{2n} &= (1 - \frac{4ab\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{(a+b)^2})^{-n} \\ &= 1 + n \frac{ab}{(a+b)^2} (r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}})^2 + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{aabb}{(a+b)^4} (r^{\frac{1}{2}} + r^{-\frac{1}{2}})^4 + \text{etc.} \\ \Omega(a-b)^{2n} &= (1 + \frac{4ab\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{(a-b)^2})^{-n} \\ &= 1 + n \frac{ab}{(a-b)^2} (r^{\frac{1}{2}} - r^{-\frac{1}{2}})^2 + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{aabb}{(a-b)^4} (r^{\frac{1}{2}} - r^{-\frac{1}{2}})^4 + \text{etc.} \end{aligned}$$



SECTIO PRIMA.

Relationes inter functiones contiguas.

7.

Functionem ipsi $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ contiguam vocamus, quae ex illa oritur, dum elementum primum, secundum, vel tertium unitate vel augetur vel diminuitur, manentibus tribus reliquis elementis. Functio itaque primaria $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sex contiguas suppeditat, inter quarum binas ipsamque primariam aequatio persimplex linearis datur. Has aequationes, numero quindecim, hic in conspectum producimus, brevitatis gratia elementum quartum quod semper subintelligitur $= x$ omittentes, functionemque primariam simpliciter per F denotantes.

- [1] $0 = (\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)x)F + \alpha(1-x)F(\alpha+1, \beta, \gamma) - (\gamma - \alpha)F(\alpha-1, \beta, \gamma)$
- [2] $0 = (\beta - \alpha)F + \alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma) - \beta F(\alpha, \beta+1, \gamma)$
- [3] $0 = (\gamma - \alpha - \beta)F + \alpha(1-x)F(\alpha+1, \beta, \gamma) - (\gamma - \beta)F(\alpha, \beta-1, \gamma)$
- [4] $0 = \gamma(\alpha - (\gamma - \beta)x)F - \alpha\gamma(1-x)F(\alpha+1, \beta, \gamma) + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)F(\alpha, \beta, \gamma+1)$
- [5] $0 = (\gamma - \alpha - 1)F + \alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma) - (\gamma - 1)F(\alpha, \beta, \gamma-1)$
- [6] $0 = (\gamma - \alpha - \beta)F - (\gamma - \alpha)F(\alpha-1, \beta, \gamma) + \beta(1-x)F(\alpha, \beta+1, \gamma)$
- [7] $0 = (\beta - \alpha)(1-x)F - (\gamma - \alpha)F(\alpha-1, \beta, \gamma) + (\gamma - \beta)F(\alpha, \beta-1, \gamma)$
- [8] $0 = \gamma(1-x)F - \gamma F(\alpha-1, \beta, \gamma) + (\gamma - \beta)x F(\alpha, \beta, \gamma+1)$
- [9] $0 = (\alpha - 1 - (\gamma - \beta - 1)x)F + (\gamma - \alpha)F(\alpha-1, \beta, \gamma) - (\gamma - 1)(1-x)F(\alpha, \beta, \gamma-1)$
- [10] $0 = (\gamma - 2\beta + (\beta - \alpha)x)F + \beta(1-x)F(\alpha, \beta+1, \gamma) - (\gamma - \beta)F(\alpha, \beta-1, \gamma)$
- [11] $0 = \gamma(\beta - (\gamma - \alpha)x)F - \beta\gamma(1-x)F(\alpha, \beta+1, \gamma) - (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)F(\alpha, \beta, \gamma+1)$
- [12] $0 = (\gamma - \beta - 1)F + \beta F(\alpha, \beta+1, \gamma) - (\gamma - 1)F(\alpha, \beta, \gamma-1)$
- [13] $0 = \gamma(1-x)F - \gamma F(\alpha, \beta-1, \gamma) + (\gamma - \alpha)x F(\alpha, \beta, \gamma+1)$
- [14] $0 = (\beta - 1 - (\gamma - \alpha - 1)x)F + (\gamma - \beta)F(\alpha, \beta-1, \gamma) - (\gamma - 1)(1-x)F(\alpha, \beta, \gamma-1)$
- [15] $0 = \gamma(\gamma - 1 - (2\gamma - \alpha - \beta - 1)x)F + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)x F(\alpha, \beta, \gamma+1) - \gamma(\gamma - 1)(1-x)F(\alpha, \beta, \gamma-1)$

8.

Ecce iam demonstrationem harum formularum. Statuendo

$$\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot \gamma(\gamma+1) \dots (\gamma+m-1)} = M$$

erit coëfficiens potestatis x^m

$$\begin{aligned} \text{in } F & \dots \dots \dots \alpha(\beta+m-1)M \\ \text{in } F(\alpha, \beta-1, \gamma) & \dots \dots \alpha(\beta-1)M \\ \text{in } F(\alpha+1, \beta, \gamma) & \dots \dots (\alpha+m)(\beta+m-1)M \\ \text{in } F(\alpha, \beta, \gamma-1) & \dots \dots \frac{\alpha(\beta+m-1)(\gamma+m-1)M}{\gamma-1} \end{aligned}$$

coëfficiens autem potestatis x^{m-1} in $F(\alpha+1, \beta, \gamma)$, seu coëfficiens potestatis x^m in $x F(\alpha+1, \beta, \gamma)$

$$= m(\gamma+m-1)M$$

Hinc statim demanat veritas formularum 5 et 3; permutando α cum β , oritur ex 5 formula 12, atque ex his duabus per eliminationem 2. Perinde per eandem permutationem ex 3 oritur 6; ex 6 et 12 combinatis oritur 9, hinc per permutationem 14, quibus combinatis habetur 7; denique ex 2 et 6 eruitur 1, atque hinc permutando 10. Formula 8 simili modo ut supra formulae 5 et 3, e consideratione coëfficientium derivari potest (eodemque modo, si placeret, omnes 15 formulae erui possent), vel elegantius ex iam notis sequenti modo. Mutando in formula 5 elementum α in $\alpha-1$, atque γ in $\gamma+1$, prodit

$$0 = (\gamma - \alpha + 1)F(\alpha-1, \beta, \gamma+1) + (\alpha-1)F(\alpha, \beta, \gamma+1) - \gamma F(\alpha-1, \beta, \gamma)$$

Mutando vero in formula 9 tantummodo γ in $\gamma+1$, fit

$$0 = (\alpha-1 - (\gamma-\beta)x)F(\alpha, \beta, \gamma+1) + (\gamma-\alpha+1)F(\alpha-1, \beta, \gamma+1) - \gamma(1-x)F(\alpha, \beta, \gamma)$$

E subtractione harum formularum statim oritur 8, atque hinc per permutationem 13. Ex 1 et 8 prodit 4, hincque permutando 11. Denique ex 8 et 9 deducitur 15.

9.

Si $\alpha' = \alpha, \beta' = \beta, \gamma' = \gamma$, nec non $\alpha'' = \alpha, \beta'' = \beta, \gamma'' = \gamma$ sunt numeri integri (positivi seu negativi), α functione $F(\alpha, \beta, \gamma)$ ad functionem $F(\alpha', \beta', \gamma')$, et perinde ab hac usque ad functionem $F(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ transire licet per seriem similium functionum, ita ut quaelibet contigua sit antecedenti et consequenti, mutando scilicet primo elementum unum e.g. α continuo unitate, donec a $F(\alpha, \beta, \gamma)$ perventum sit ad $F(\alpha', \beta, \gamma)$, dein mutando elementum secundum, donec perven-



tum sit ad $F(\alpha', \delta', \gamma)$, denique mutando elementum tertium, donec perventum sit ad $F(\alpha', \delta', \gamma')$, et perinde ab hac usque ad $F(\alpha'', \delta'', \gamma')$. Quum itaque per art. 7 habeantur aequationes lineares inter functionem primam, secundam atque tertiam, et generaliter inter ternas quascunque consequentes huius seriei, facile perspicitur, hinc per eliminationem deduci posse aequationem linearem inter functiones $F(\alpha, \delta, \gamma)$, $F(\alpha', \delta', \gamma')$, $F(\alpha'', \delta'', \gamma'')$, ita ut generaliter loquendo e duabus functionibus, quarum tria elementa prima numeris integris differunt, quamlibet aliam functionem eadem proprietate gaudentem derivare liceat, siquidem elementum quartum idem maneat. Ceterum hic nobis sufficit, hanc veritatem insignem generaliter stabilivisse, neque hic compendiis immoramur, per quae operationes ad hunc finem necessariae quam brevissimae reddantur.

10.

Propositae sint e. g. functiones

$$F(\alpha, \delta, \gamma), F(\alpha+1, \delta+1, \gamma+1), F(\alpha+2, \delta+2, \gamma+2)$$

inter quas aequationem linearem invenire oporteat. Iungamus ipsas per functiones contiguas sequenti modo:

$$\begin{aligned} F(\alpha, \delta, \gamma) &= F \\ F(\alpha+1, \delta, \gamma) &= F' \\ F(\alpha+1, \delta+1, \gamma) &= F'' \\ F(\alpha+1, \delta+1, \gamma+1) &= F''' \\ F(\alpha+2, \delta+1, \gamma+1) &= F'''' \\ F(\alpha+2, \delta+2, \gamma+1) &= F''''' \\ F(\alpha+2, \delta+2, \gamma+2) &= F'''''' \end{aligned}$$

Habemus itaque quinque aequationes lineares (e formulis 6, 13, 5 art. 7):

$$\begin{aligned} \text{I. } 0 &= (\gamma - \alpha - 1)F - (\gamma - \alpha - 1 - \delta)F' - \delta(1-x)F'' \\ \text{II. } 0 &= \gamma F' - \gamma(1-x)F'' - (\gamma - \alpha - 1)x F''' \\ \text{III. } 0 &= \gamma F'' - (\gamma - \alpha - 1)F''' - (\alpha + 1)F'''' \\ \text{IV. } 0 &= (\gamma - \alpha - 1)F''' - (\gamma - \alpha - 2 - \delta)F'''' - (\delta + 1)(1-x)F''''' \\ \text{V. } 0 &= (\gamma + 1)F'''' - (\gamma + 1)(1-x)F''''' - (\gamma - \alpha - 1)x F'''''' \end{aligned}$$

Ex I et II prodit, eliminando F

$$\text{VI. } 0 = \gamma F' - \gamma(1-x)F'' - (\gamma - \alpha - \delta - 1)x F'''$$

Hinc atque ex III, eliminando F''

$$\text{VII. } 0 = \gamma F - (\gamma - \alpha - 1 - \delta x)F''' - (\alpha + 1)(1-x)F''''$$

Porro ex IV atque V, eliminando F''''

$$\text{VIII. } 0 = (\gamma + 1)F''' - (\gamma + 1)F'''' + (\delta + 1)x F''''''$$

Hinc atque ex VII, eliminando F''' ,

$$\text{IX. } 0 = \gamma(\gamma + 1)F - (\gamma + 1)(\gamma - (\alpha + \delta + 1)x)F'' - (\alpha + 1)(\delta + 1)x(1-x)F''''''$$

11.

Si omnes relationes inter ternas functiones $F(\alpha, \delta, \gamma)$, $F(\alpha + \lambda, \delta + \mu, \gamma + \nu)$, $F(\alpha + \lambda', \delta + \mu', \gamma + \nu')$, in quibus $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$ vel = 0 vel = +1 vel = -1, exhaurire vellemus, formularum multitudo usque ad 325 ascenderet. Haud inutilis foret talis collectio, saltem simpliciorum ex his formulis: hoc vero loco sufficiat, paucas tantummodo apposuisse, quas vel ex formulis art. 7, vel si magis placet, simili modo ut duae priores ex illis in art. 8 erutae sunt, quivis nullo negotio sibi demonstrare poterit.

$$\begin{aligned} [16] \quad F(\alpha, \delta, \gamma) - F(\alpha, \delta, \gamma - 1) &= -\frac{\alpha\delta x}{\gamma(\gamma - 1)}F(\alpha + 1, \delta + 1, \gamma + 1) \\ [17] \quad F(\alpha, \delta + 1, \gamma) - F(\alpha, \delta, \gamma) &= \frac{\alpha x}{\gamma}F(\alpha + 1, \delta + 1, \gamma + 1) \\ [18] \quad F(\alpha + 1, \delta, \gamma) - F(\alpha, \delta, \gamma) &= \frac{\delta x}{\gamma}F(\alpha + 1, \delta + 1, \gamma + 1) \\ [19] \quad F(\alpha, \delta + 1, \gamma + 1) - F(\alpha, \delta, \gamma) &= \frac{\alpha(\gamma - \delta)x}{\gamma(\gamma + 1)}F(\alpha + 1, \delta + 1, \gamma + 2) \\ [20] \quad F(\alpha + 1, \delta, \gamma + 1) - F(\alpha, \delta, \gamma) &= \frac{\delta(\gamma - \alpha)x}{\gamma(\gamma + 1)}F(\alpha + 1, \delta + 1, \gamma + 2) \\ [21] \quad F(\alpha - 1, \delta + 1, \gamma) - F(\alpha, \delta, \gamma) &= \frac{(\alpha - \delta - 1)x}{\gamma}F(\alpha, \delta + 1, \gamma + 1) \\ [22] \quad F(\alpha + 1, \delta - 1, \gamma) - F(\alpha, \delta, \gamma) &= \frac{(\delta - \alpha - 1)x}{\gamma}F(\alpha + 1, \delta, \gamma + 1) \\ [23] \quad F(\alpha - 1, \delta + 1, \gamma) - F(\alpha + 1, \delta - 1, \gamma) &= \frac{(\alpha - \delta)x}{\gamma}F(\alpha + 1, \delta + 1, \gamma + 1) \end{aligned}$$

SECTIO SECUNDA.
Fractiones continuæ.

12.

Designando

$$\frac{F(\alpha, \delta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \delta, \gamma, x)} \text{ per } G(\alpha, \delta, \gamma, x)$$

fit

$$\frac{F(\alpha+1, \delta, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \delta, \gamma, x)} = \frac{F(\delta, \alpha+1, \gamma+1, x)}{F(\delta, \alpha, \gamma, x)} = G(\delta, \alpha, \gamma, x)$$

et proin, dividendo æquationem 19 per $F(\alpha, \delta+1, \gamma+1, x)$,

$$1 - \frac{1}{G(\alpha, \delta, \gamma, x)} = \frac{\alpha(\gamma-\delta)}{\gamma(\gamma+1)} x G(\delta+1, \alpha, \gamma+1, x)$$

sive

$$[24] \quad G(\alpha, \delta, \gamma, x) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha(\gamma-\delta)}{\gamma(\gamma+1)} x G(\delta+1, \alpha, \gamma+1, x)}$$

et quum perinde fiat

$$G(\delta+1, \alpha, \gamma+1, x) = \frac{1}{1 - \frac{(\delta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x G(\alpha+1, \delta+1, \gamma+2, x)}$$

etc., resultabit pro $G(\alpha, \delta, \gamma, x)$ fractio continua

$$[25] \quad \frac{F(\alpha, \delta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \delta, \gamma, x)} = \frac{1}{1 - \frac{ax}{1 - \frac{bx}{1 - \frac{cx}{1 - \frac{dx}{1 - \text{etc.}}}}}}$$

ubi

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha(\gamma-\delta)}{\gamma(\gamma+1)} & b &= \frac{(\delta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} \\ c &= \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\delta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)} & d &= \frac{(\delta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)} \\ e &= \frac{(\alpha+2)(\gamma+2-\delta)}{(\gamma+4)(\gamma+5)} & f &= \frac{(\delta+3)(\gamma+3-\alpha)}{(\gamma+5)(\gamma+6)} \end{aligned}$$

etc., cuius lex progressionis obvia est.

Porro ex æquationibus 17, 18, 21, 22 sequitur

CIRCA SERIEM INFINITAM $1 + \frac{\alpha\delta}{1-\gamma}x + \text{etc.}$

$$[26] \quad \frac{F(\alpha, \delta+1, \gamma, x)}{F(\alpha, \delta, \gamma, x)} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{\gamma} G(\delta+1, \alpha, \gamma, x)}$$

$$[27] \quad \frac{F(\alpha+1, \delta, \gamma, x)}{F(\alpha, \delta, \gamma, x)} = \frac{1}{1 - \frac{\delta x}{\gamma} G(\alpha+1, \delta, \gamma, x)}$$

$$[28] \quad \frac{F(\alpha-1, \delta+1, \gamma, x)}{F(\alpha, \delta, \gamma, x)} = \frac{1}{1 - \frac{(\alpha-\delta-1)x}{\gamma} G(\delta+1, \alpha-1, \gamma, x)}$$

$$[29] \quad \frac{F(\alpha+1, \delta-1, \gamma, x)}{F(\alpha, \delta, \gamma, x)} = \frac{1}{1 - \frac{(\delta-\alpha-1)x}{\gamma} G(\alpha+1, \delta-1, \gamma, x)}$$

unde, substitutis pro functione G eius valoribus in fractionibus continuis, totidem fractiones continuæ novæ prodeunt.Ceterum sponte patet, fractionem continuam in formula 25 abrumpi, si e numeris $\alpha, \delta, \gamma-\alpha, \gamma-\delta$ aliquis fuerit integer negativus, alioquin vero in infinitum excurrere.

13.

Fractiones continuæ in art. præc. erutæ maximi sunt momenti, asserique potest, vix ulla fractiones continuas secundum legem obviæ progredientes ab analysi hactenus erutas esse, quæ sub nostris tamquam casus speciales non sint contentæ. Imprimis memorabilis est casus is, ubi in formula 25 statuatur $\delta=0$, unde $F(\alpha, \delta, \gamma, x) = 1$, adeoque, scribendo $\gamma-1$ pro γ

$$[30] \quad F(\alpha, 1, \gamma) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{ax}{1 - \frac{bx}{1 - \frac{cx}{1 - \frac{dx}{1 - \text{etc.}}}}}}$$

ubi

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{\gamma} & b &= \frac{\gamma-\alpha}{\gamma(\gamma+1)} \\ c &= \frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)} & d &= \frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)} \\ e &= \frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{(\gamma+3)(\gamma+4)} & f &= \frac{3(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+4)(\gamma+5)} \\ &\text{etc.} & & \end{aligned}$$

$$RF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x) = F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x)$$

$$QF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x) = F(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x)$$

sive permutando elementum primum cum secundo

$$QF(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x) = F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x)$$

Sed per aequationem 21 habemus

$$F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x) - F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x) = -\frac{1}{2}x F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, x)$$

unde fit $Q = R - \frac{1}{2}x$, quo valore in formula supra data substituto prodit

$$\xi = \frac{\frac{1}{2}x}{R - \frac{1}{2}x}$$

quae est formula posterior.

Statuendo in formula 30, $\alpha = \frac{m}{n}$, $x = -\gamma nt$, fit pro valore infinite magno ipsius γ

$$[36] F(\frac{m}{n}, 1, \gamma, -\gamma nt) = 1 - mt + m(m+n)tt - m(m+n)(m+2n)t^2 + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{mt}{1 + \frac{nt}{1 + \frac{(m+n)t}{1 + \frac{2nt}{1 + \frac{(m+2n)t}{1 + 3nt} \text{ etc.}}}}}}$$

SECTIO TERTIA.

De summa seriei nostrae statuendo elementum quartum = 1, ubi simul quaedam alias functiones transcendentes discutuntur.

15.

Quoties elementa α, β, γ omnia sunt quantitates positivae, omnes coefficients potestatum elementi quarti x positivi evadunt: quoties vero ex illis elementis unum alterumve negativum est, saltem inde ab aliqua potestate x^m omnes coefficients eodem signo affecti erunt, si modo m accipitur maior quam valor absolutus elementi negativi maximi. Porro hinc sponte patet, seriei summam pro

$x = 1$ finitam esse non posse, nisi coefficients saltem post certum terminum in infinitum decrescant, vel, ut secundum morem analystarum loquamur, nisi coefficienti termini x^∞ sit = 0. Ostendemus autem, et quidem, in gratiam eorum, qui methodis rigorosis antiquorum geometrarum favent, omni rigore,

primo, coefficients (siquidem series non abruptatur), in infinitum crescere, quoties fuerit $\alpha + \beta - \gamma - 1$ quantitas positiva.

secundo, coefficients versus limitem finitum continuo convergere, quoties fuerit $\alpha + \beta - \gamma - 1 = 0$.

tertio, coefficients in infinitum decrescere, quoties fuerit $\alpha + \beta - \gamma - 1$ quantitas negativa.

quarto, summam seriei nostrae pro $x = 1$, non obstante convergentia in casu tertio, infinitam esse, quoties fuerit $\alpha + \beta - \gamma$ quantitas positiva vel = 0.

quinto, summam verò finitam esse, quoties $\alpha + \beta - \gamma$ fuerit quantitas negativa.

16.

Hanc disquisitionem generalius adaptabimus seriei infinitae M, M', M'', M''' etc. ita formatae, ut quotientes $\frac{M'}{M}, \frac{M''}{M'}, \frac{M'''}{M''}$ etc. resp. sint valores fractionis

$$\frac{t^3 + At^{2-t} + Bt^{1-t} + Ct^{0-t} + \text{etc.}}{t^3 + at^{2-t} + bt^{1-t} + ct^{0-t} + \text{etc.}}$$

pro $t = m, t = m+1, t = m+2$ etc. Brevitatis causa huius fractionis numeratorem per P , denominatorem per p denotabimus: praeterea supponemus, P, p non esse identicas, sive differentias $A-a, B-b, C-c$ etc. non omnes simul evanescere.

I. Quoties e differentis $A-a, B-b, C-c$ etc. prima quae non evanescit est positiva, assignari poterit limes aliquis l , quem simulac egressus est valor ipsius t , valores functionum P et p certo semper evadent positivi, atque $P > p$. Manifestum est, hoc evenire, si pro l accipiat radix maxima realis aequationis $p(P-p) = 0$; si vero haec aequatio nullas omnino radices reales habeat, proprietatem illam pro omnibus valoribus ipsius t locum habere. Quapropter in serie $\frac{M'}{M}, \frac{M''}{M'}, \frac{M'''}{M''}$ etc. saltem post certum intervallum (si non ab initio) omnes termini erunt positivi atque maiores unitate; quodsi itaque nullus neque = 0 neque infinite magnus evadit, perspicuum est,

seriem M, M', M'', M''' etc. si non ab initio tamen post certum intervallum omnes suos terminos eodem signo affectos continuoque crescentes habituram esse.

Eadem ratione, si e differentiis $A-a, B-b, C-c$ etc. prima quae non evanescit est negativa, series M, M', M'', M''' etc. si non ab initio tamen post certum intervallum omnes suos terminos eodem signo affectos continuoque decrescentes habebit.

II. Si iam coefficientes A, a sunt inaequales, termini seriei M, M', M'', M''' etc. ultra omnes limites sive in infinitum vel crescent vel decrescent, prout differentia $A-a$ est positiva vel negativa: hoc ita demonstramus. Si $A-a$ est quantitas positiva, accipiatur numerus integer h ita, ut fiat $h(A-a) > 1$, statuaturque $\frac{M^h}{m} = N, \frac{M'^h}{m+1} = N', \frac{M''^h}{m+2} = N'', \frac{M'''^h}{m+3} = N'''$ etc., nec non $tP^h = Q, (t+1)P^h = q$. Tunc patet, $\frac{N'}{N}, \frac{N''}{N'}, \frac{N'''}{N''}$ etc. esse valores fractionis $\frac{Q}{q}$ ponendo $t = m, t = m+1, t = m+2$ etc., ipsas Q, q vero esse functiones algebraicas formae huius

$$Q = t^{h+1} + hAt^{h+1} + \text{etc.}$$

$$q = t^{h+1} + (h+1)t^{h+1} + \text{etc.}$$

Quare quum per hyp. differentia $hA - (h+1)$ sit quantitas positiva, termini seriei N, N', N'', N''' etc. si non ab initio tamen post certum intervallum continuo crescent (per 1); hinc termini seriei $mN, (m+1)N', (m+2)N'', (m+3)N'''$ etc. necessario ultra omnes limites crescent, et proin etiam termini seriei M, M', M'', M''' etc., quippe quorum potestates exponente h illis sunt aequales. Q. E. P.

Si $A-a$ est quantitas negativa, accipere oportet integrum h ita, ut $h(a-A)$ fiat maior quam 1, unde per ratiocinia similia termini seriei

$$mM^h, (m+1)M'^h, (m+2)M''^h, (m+3)M'''^h \text{ etc.}$$

post certum intervallum continuo decrescent. Quamobrem termini seriei M^h, M'^h, M''^h etc. adeoque etiam termini huius M, M', M'', M''' etc. necessario in infinitum decrescent. Q. E. S.

III. Si vero coefficientes primi A, a sunt aequales, termini seriei M, M', M'', M''' etc. versus limitem finitum continuo convergent, quod ita demonstramus. Supponamus primo, terminos seriei post certum intervallum continuo crescere, sive e differentiis $B-b, C-c$ etc. primam quae non evanescat

esse positivam. Sit h integer talis, ut $h+b-B$ fiat quantitas positiva, statuamusque

$$M(\frac{m-1}{m})^h = N, M'(\frac{m+1}{m})^h = N', M''(\frac{m+2}{m+1})^h = N'' \text{ etc.}$$

atque $(t-1)^h P = Q, t^h P = q$, ita ut $\frac{N'}{N}, \frac{N''}{N'}$ etc. sint valores fractionis $\frac{Q}{q}$ ponendo $t = m, t = m+1$ etc. Quum itaque habeatur

$$Q = t^{h+2h} + At^{h+2h-1} + (B-h)t^{h+2h-2} \text{ etc.}$$

$$q = t^{h+2h} + At^{h+2h-1} + bt^{h+2h-2} \text{ etc.}$$

atque per hyp. $B-h-b$ sit quantitas negativa, termini seriei N, N', N'', N''' etc. post certum saltem intervallum continuo decrescent, adeoque termini seriei M, M', M'', M''' etc., qui illis resp. semper sunt minores, dum continuo crescent, tantummodo versus limitem finitum convergere possunt. Q. E. P.

Si termini seriei M, M', M'', M''' etc. post certum intervallum continuo decrescent, accipere oportet pro h integrum talem, ut $h+B-b$ sit quantitas positiva, evinceturque per ratiocinia prorsus similia, terminos seriei

$$M(\frac{m-1}{m})^h, M'(\frac{m}{m+1})^h, M''(\frac{m+1}{m+2})^h \text{ etc.}$$

post certum intervallum continuo crescere, unde termini seriei M, M', M'' etc., qui illis resp. semper sunt maiores, dum continuo decrescent, necessario tantummodo versus limitem finitum decrescere possunt. Q. E. S.

IV. Denique quod attinet ad summam seriei, cuius termini sunt M, M', M'', M''' etc., in casu eo, ubi hi in infinitum decrescent, supponamus primo, $A-a$ cadere inter 0 et -1, sive $A+1-a$ esse vel quantitatem positivam vel = 0. Sit h integer positivus, arbitrarius in casu eo, ubi $A+1-a$ est quantitas positiva, vel talis qui reddat quantitatem $h+m+A+B-b$ positivam in casu eo ubi $A+1-a = 0$. Tunc erit

$$P(t-(m+h-1)) = t^{h+1} + (A+1-m-h)t^h + (B-A(m+h-1))t^{h-1} \text{ etc.}$$

$$p(t-(m+h)) = t^{h+1} + (a-m-h)t^h + (b-a(m+h))t^{h-1} \text{ etc.}$$

ubi vel $A+1-m-h-(a-m-h)$ erit quantitas positiva, vel, si haec fit = 0, saltem $B-A(m+h-1)-(b-a(m+h))$ positiva erit. Hinc (per 1) pro quantitate t assignari poterit valor aliquis l , quem simulac transgressa est, valores fractionis $\frac{P(t-(m+h-1))}{p(t-(m+h))}$ semper fient positivi atque unitate maiores. Sit n integer

maior quam l simulque maior quam h , sintque termini seriei M, M', M'', M''' etc. qui respondent valoribus $t = m+n$, $t = m+n+1$, $t = m+n+2$ etc., hi N, N', N'', N''' etc. Erunt itaque

$$\frac{(n+1-h)N'}{(n-h)N}, \quad \frac{(n+2-h)N''}{(n+1-h)N'}, \quad \frac{(n+3-h)N'''}{(n+2-h)N''} \text{ etc.}$$

quantitates positivae unitate maiores, unde

$$N' > \frac{(n-h)N}{n+1-h}, \quad N'' > \frac{(n-h)N}{n+2-h}, \quad N''' > \frac{(n-h)N}{n+3-h} \text{ etc.}$$

adeoque summa seriei $N+N'+N''+N'''$ etc. maior summa seriei

$$(n-h)N \left(\frac{1}{n-h} + \frac{1}{n+1-h} + \frac{1}{n+2-h} + \frac{1}{n+3-h} + \text{etc.} \right)$$

quocunque termini colligantur. Sed posterior series, crescente terminorum numero in infinitum, omnes limites egreditur, quum summa seriei $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}$ quam infinitam esse constat etiam infinita maneat, si ab initio termini $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\text{etc.}$ $+\frac{1}{n-1-h}$ rescindantur. Quare summa seriei $N+N'+N''+N'''$ etc., adeoque etiam summa huius $M+M'+M''+M'''$ etc., cuius pars est illa, ultra omnes limites crescit.

V. Quoties autem $A-a$ est quantitas negativa absolute maior quam unitas, summa seriei $M+M'+M''+M'''$ etc. in infinitum continuatae certo erit finita. Sit enim h quantitas positiva minor quam $a-A-1$, demonstrabiturque per ratiocinia similia, assignari posse valorem aliquem l quantitatis t , ultra quem fractio $\frac{P^t}{P^t(t-h-1)}$ semper adipiscatur valores positivos unitate minores. Quodsi iam pro n accipitur numerus integer ipsis $l, m, h+1$ maior, terminique seriei M, M', M'', M''' etc., valoribus $t=n$, $t=n+1$, $t=n+2$ etc. respondentes, designantur per N, N', N'' etc., erit

$$N' < \frac{n-h-1}{n} \cdot N, \quad N'' < \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(n+1)} \cdot N' \text{ etc.}$$

adeoque summa seriei $N+N'+N''$ etc., quocunque termini colligantur, minor producto ex N in summam totidem terminorum seriei

$$1 + \frac{n-h-1}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(n+1)} + \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{n(n+1)(n+2)} \text{ etc.}$$

Huius vero summa pro quolibet terminorum numero facile assignari potest; est scilicet

$$\text{terminus primus} = \frac{n-1}{h} - \frac{n-h-1}{h}$$

$$\text{summa duorum terminorum} = \frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)}{hn}$$

$$\text{summa trium terminorum} = \frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{hn(n+1)} \text{ etc.}$$

et quum pars altera (per II) formet seriem ultra omnes limites decrescentem, summa illa in infinitum continuata statui debet $= \frac{n-1}{h}$. Hinc $N+N'+N''$ etc. in infinitum continuata semper manebit minor quam $\frac{N(n-1)}{h}$, et proin $M+M'+M''$ etc. certo ad summam finitam converget. Q. E. D.

VI. Ut ea, quae generaliter de serie M, M', M'' etc. demonstravimus, ad coefficients potestatum x^m, x^{m+1}, x^{m+2} etc. in serie $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, applicentur, statuere oportebit $\lambda = 2$, $A = \alpha + \beta$, $B = \alpha\beta$, $a = \gamma + 1$, $b = \gamma$, unde quinque assertiones in art. praec. propositae sponte emanant.

17.

Disquisitio itaque de indole summae seriei $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ natura sua restringitur ad casum, quo $\gamma - \alpha - \beta$ est quantitas positiva, ubi illa summa semper exhibet quantitatem finitam. Praemittimus autem observationem sequentem. Si coefficients seriei $1+ax+bx^2+cx^3+\text{etc.} = S$ inde a certo termino ultra omnes limites decrescant, productum

$$(1-x)S = 1 + (a-1)x + (b-a)xx + (c-b)x^3 + \text{etc.}$$

pro $x=1$ statuere oportet $= 0$, etiamsi summa ipsius seriei S infinite magna evadat. Quoniam enim collectis duobus terminis summa fit $= a$, collectis tribus $= b$, collectis quatuor $= c$ etc., limes summae in infinitum continuatae est $= 0$. Quoties itaque $\gamma - \alpha - \beta$ est quantitas positiva, statuere oportet $(1-x)F(\alpha, \beta, \gamma-1, x) = 0$ pro $x=1$, unde per aequationem 15 art. 7 habebimus

$$0 = \gamma(\alpha + \beta - \gamma)F(\alpha, \beta, \gamma, 1) + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)F(\alpha, \beta, \gamma + 1, 1), \text{ sive}$$

$$[37] \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma - \alpha - \beta)} F(\alpha, \beta, \gamma + 1, 1)$$

Quare quum perinde fiat

$$F(\alpha, \beta, \gamma + 1, 1) = \frac{(\gamma + 1 - \alpha)(\gamma + 1 - \beta)}{(\gamma + 1)(\gamma + 1 - \alpha - \beta)} F(\alpha, \beta, \gamma + 2, 1)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma + 2, 1) = \frac{(\gamma + 2 - \alpha)(\gamma + 2 - \beta)}{(\gamma + 2)(\gamma + 2 - \alpha - \beta)} F(\alpha, \beta, \gamma + 3, 1)$$

et sic porro, erit generaliter, k denotante integrum positivum quemcunque

$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ aequalis producto ex $F(\alpha, \beta, \gamma + k, 1)$
 in $(\gamma - \alpha)(\gamma + 1 - \alpha)(\gamma + 2 - \alpha) \dots (\gamma + k - 1 - \alpha)$
 in $(\gamma - \beta)(\gamma + 1 - \beta)(\gamma + 2 - \beta) \dots (\gamma + k - 1 - \beta)$
 diviso per productum
 ex $\gamma(\gamma + 1)(\gamma + 2) \dots (\gamma + k - 1)$
 in $(\gamma - \alpha - \beta)(\gamma + 1 - \alpha - \beta)(\gamma + 2 - \alpha - \beta) \dots (\gamma + k - 1 - \alpha - \beta)$

18.

Introducamus abhinc sequentem notationem:

$$[38] \quad \Pi(k, z) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}{(z+1)(z+2)(z+3) \dots (z+k)} k^z$$

ubi k natura sua subintelligitur designare integrum positivum, qua restrictione $\Pi(k, z)$ exhibet functionem duarum quantitatum k, z prorsus determinatam. Hoc modo facile intelligitur, theorema in fine art. praec. propositum ita exhiberi posse

$$[39] \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(k, \gamma - 1) \cdot \Pi(k, \gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Pi(k, \gamma - \alpha - 1) \cdot \Pi(k, \gamma - \beta - 1)} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma + k, 1)$$

19.

Operae pretium erit, indolem functionis $\Pi(k, z)$ accuratius pendere. Quoties z est integer negativus, functio manifesto valorem infinite magnum obtinet, simulac ipsi k tribuitur valor satis magnus. Pro valoribus integris ipsius z non negativis autem habemus

$$\Pi(k, 0) = 1$$

$$\Pi(k, 1) = \frac{1}{1 + \frac{1}{k}}$$

$$\Pi(k, 2) = \frac{1 \cdot 2}{(1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{2}{k})}$$

$$\Pi(k, 3) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{2}{k})(1 + \frac{3}{k})}$$

etc. sive generaliter

$$[40] \quad \Pi(k, z) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots z}{(1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{2}{k})(1 + \frac{3}{k}) \dots (1 + \frac{z}{k})}$$

Generaliter autem pro quovis valore ipsius z habemus

$$[41] \quad \Pi(k, z+1) = \Pi(k, z) \cdot \frac{1+z}{1 + \frac{1+z}{k}}$$

$$[42] \quad \Pi(k+1, z) = \Pi(k, z) \cdot \left\{ \frac{(1 + \frac{1}{k})^{z+1}}{1 + \frac{1+z}{k}} \right\}$$

adeoque, quum $\Pi(1, z) = \frac{1}{z+1}$,

$$[43] \quad \Pi(k, z) = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{2^{z+1}}{1^2 \cdot (2+z)} \cdot \frac{3^{z+1}}{2^2 \cdot (3+z)} \cdot \frac{4^{z+1}}{3^2 \cdot (4+z)} \dots \frac{k^{z+1}}{(k-1)^2 \cdot (k+z)}$$

20.

Imprimis vero attentione dignus est *limes*, ad quem pro valore dato ipsius z functio $\Pi(k, z)$ continuo converget, dum k in infinitum crescit. Sit primo h valor finitus ipsius k maior quam z , patetque, si k transire supponatur ex h in $h+1$, logarithmum ipsius $\Pi(k, z)$ accipere incrementum, quod per seriem convergentem sequentem exprimitur

$$\frac{z(1+z)}{2(h+1)^2} + \frac{z(1-z)}{3(h+1)^3} + \frac{z(1+z^2)}{4(h+1)^4} + \frac{z(1-z^3)}{5(h+1)^5} + \text{etc.}$$

Si itaque k e valore h transit in $h+n$, logarithmus ipsius $\Pi(k, z)$ accipiet incrementum

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} z(1+z) \left(\frac{1}{(h+1)^2} + \frac{1}{(h+2)^2} + \frac{1}{(h+3)^2} + \text{etc.} + \frac{1}{(h+n)^2} \right) \\ & + \frac{1}{3} z(1-z) \left(\frac{1}{(h+1)^3} + \frac{1}{(h+2)^3} + \frac{1}{(h+3)^3} + \text{etc.} + \frac{1}{(h+n)^3} \right) \\ & + \frac{1}{4} z(1+z^2) \left(\frac{1}{(h+1)^4} + \frac{1}{(h+2)^4} + \frac{1}{(h+3)^4} + \text{etc.} + \frac{1}{(h+n)^4} \right) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

quod semper finitum manere, etiamsi n in infinitum crescat, facile demonstrari potest. Quare nisi iam in $\Pi(h, z)$ factor infinitus affuerit, i. e. nisi z sit numerus integer negativus, *limes* ipsius $\Pi(k, z)$ pro $k = \infty$ certo erit quantitas finita. Manifesto itaque $\Pi(\infty, z)$ tantummodo a z pendet, sive functionem ipsius z ex axe determinatam exhibet, quae abhinc simpliciter per Πz denotabitur. Definimus itaque functionem Πz per valorem producti

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k \cdot k^z}{(z+1)(z+2)(z+3) \dots (z+k)}$$

pro $k = \infty$, aut si mavis per limitem producti infiniti

$$\frac{1}{z+1} \cdot \frac{2^{2k+1}}{1^2(2+z)} \cdot \frac{3^{2k+1}}{2^2(3+z)} \cdot \frac{4^{2k+1}}{3^2(4+z)} \text{ etc.}$$

21.

Ex aequatione 41 statim sequitur aequatio fundamentalis

$$[44] \quad \Pi(z+1) = (z+1)\Pi z$$

unde generaliter, designante n integrum positivum quemcunque

$$[45] \quad \Pi(z+n) = (z+1)(z+2)(z+3) \dots (z+n)\Pi z$$

Pro valore integro negativo ipsius z erit valor functionis Πz infinite magnus; pro valoribus integris non negativis habemus

$$\begin{aligned} \Pi 0 &= 1 \\ \Pi 1 &= 1 \\ \Pi 2 &= 2 \\ \Pi 3 &= 6 \\ \Pi 4 &= 24 \text{ etc.} \end{aligned}$$

atque generaliter

$$[46] \quad \Pi z = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots z$$

Sed male haec proprietates functionis nostrae tamquam ipsius definitio venditaretur, quippe quae natura sua ad valores integros restringitur, et praeter functionem nostram infinitis aliis (e. g. $\cos 2\pi z$, Πz , $\cos \pi z^{2n} \Pi z$ etc., denotante π semiperipheriam circuli, cuius radius = 1) communis est.

22.

Functio $\Pi(k, z)$; etiamsi generalior videatur quam Πz , tamen abhinc nobis superflua erit, quum facile ad posteriorem reducat. Colligitur enim e combinatione aequationum 38, 45, 46

$$[47] \quad \Pi(k, z) = \frac{k^z \Pi k \cdot \Pi z}{\Pi(k+z)}$$

Ceterum nexus harum functionum cum iis, quas clar. KRAMP facultates nu-

mericas nominavit, per se obvius est. Scilicet facultas numerica, quam hic auctor per $a^{k/c}$ designat, in signis nostris est

$$= \frac{c^b b^{\frac{a}{c}} \Pi b}{\Pi(b, \frac{a}{c} - 1)} = \frac{c^b \Pi(\frac{a}{c} + b - 1)}{\Pi(\frac{a}{c} - 1)}$$

Sed consultius videtur, functionem *unius* variabilis in analysin introducere, quam functionem trium variabilium, praesertim quum hanc ad illam reducere liceat.

23.

Continuitas functionis Πz interrumpitur, quoties ipsius valor fit infinite magnus, i. e. pro valoribus integris negativis ipsius z . Erit itaque illa positiva a $z = -1$ usque ad $z = \infty$, et quum pro utroque limite Πz obtineat valorem infinite magnum, inter ipsos dabitur valor minimus, quem esse = 0,8856024 atque respondere valori $z = 0,4616321$ invenimus. Inter limites $z = -1$ et $z = -2$, valor functionis Πz fit negativus, inter $z = -2$ atque $z = -3$ iterum positivus et sic porro, uti ex aequ. 44 sponte sequitur. Porro patet, si omnes valores functionis Πz inter limites arbitrarios unitate differentes e. g. a $z = 0$ usque ad $z = 1$, pro notis habere liceat, valorem functionis pro quovis alio valore reali ipsius z adiumento aequationis 45 facile inde deduci posse. Ad hunc finem construximus *tabulam*, ad calcem huius sectionis annexam, quae ad figuras viginti exhibet logarithmos briggicos functionis Πz , pro $z = 0$ usque ad $z = 1$ per singulas partes centesimas summa cura computatos, ubi tamen monendum, figuram ultimam vigesimam interdum una duabusve unitatibus erroneam esse posse.

24.

Quum limes functionis $F(\alpha, \beta, \gamma + k, 1)$, crescente k in infinitum, manifesto sit unitas, aequatio 39 transit in hanc

$$[48] \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-1) \cdot \Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1) \cdot \Pi(\gamma-\beta-1)}$$

quae formula exhibet solutionem completam quaestionis, quae obiectum huius sectionis constituit. Sponte hinc sequuntur aequationes elegantes:

$$[49] \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = F(-\alpha, -\beta, \gamma - \alpha - \beta, 1)$$

$$[50] \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) \cdot F(-\alpha, \beta, \gamma - \alpha, 1) = 1$$

$$[51] \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) \cdot F(\alpha, -\beta, \gamma - \beta, 1) = 1$$

in quarum prima γ , in secunda $\gamma - \beta$, in tertia $\gamma - \alpha$ debet esse quantitas positiva.

25.

Applicemus formulam 48 ad quasdam ex aequationibus art. 5. Formula XIII. statuendo $t = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$, fit $\frac{1}{2}\pi = F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1)$, sive aequivalet aequationi notae

$$\frac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \text{etc.}$$

Quare quum per formulam 48 habeatur $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1) = \frac{\Pi \frac{1}{2} \cdot \Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi 0 \cdot \Pi 0}$, atque sit $\Pi 0 = 1$, $\Pi \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Pi(-\frac{1}{2})$, fit $\pi = (\Pi(-\frac{1}{2}))^2$ sive

$$[52] \quad \Pi(-\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$[53] \quad \Pi \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Formula XVI art. 5, quae aequivalet aequationi notae

$$\sin nt = n \sin t - \frac{n(n-1)}{2 \cdot 3} \sin^3 t + \frac{n(n-1)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \sin^5 t - \text{etc.}$$

atque generaliter pro quovis valore ipsius n locum habet, si modo t limites -90° et $+90^\circ$ non transgrediatur, dat pro $t = \frac{1}{2}\pi$,

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \frac{n \Pi \frac{1}{2} \cdot \Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{1}{2}n) \cdot \Pi \frac{1}{2}n}$$

unde deducitur formula elegans

$$\Pi \frac{1}{2}n \cdot \Pi(-\frac{1}{2}n) = \frac{\frac{1}{2}n\pi}{\sin \frac{1}{2}n\pi}, \text{ sive statuendo } n = 2z$$

$$[54] \quad \Pi(-z) \cdot \Pi(+z) = \frac{\pi}{\sin z\pi}$$

$$[55] \quad \Pi(-z) \cdot \Pi(z-1) = \frac{\pi}{\sin z\pi}$$

ne non scribendo $z + \frac{1}{2}$ pro z

$$[56] \quad \Pi(-\frac{1}{2} + z) \cdot \Pi(-\frac{1}{2} - z) = \frac{\pi}{\cos z\pi}$$

E combinatione formulae 54 cum definitione functionis Π sequitur, $\frac{\pi}{\sin z\pi}$ esse limitem producti infiniti

$$\frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot k)^2}{(1-zz)(1-zz)(1-zz) \dots (1-zz)(k-k-zz)}$$

crescente k in infinitum, adeoque

$$\sin z\pi = z\pi(1-zz)(1-\frac{zz}{4})(1-\frac{zz}{9}) \text{ etc. in inf.}$$

similique modo ex 56 deducitur

$$\cos z\pi = (1-4zz)(1-\frac{4zz}{9})(1-\frac{4zz}{25}) \text{ etc. in inf.}$$

formulae notissimae, quae ab analystis per methodos prorsus diversas erui solent.

26.

Designante n numerum integrum, valor expressionis

$$\frac{n^{\alpha\beta} \Pi(k, z) \cdot \Pi(k, z - \frac{1}{n}) \cdot \Pi(k, z - \frac{2}{n}) \cdot \dots \cdot \Pi(k, z - \frac{n-1}{n})}{\Pi(nk, nz)}$$

rite collectus invenitur

$$= \frac{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k)^n n^{\alpha\beta}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot nk \cdot k^{\frac{1}{2}(n-1)}}$$

adeoque a z est independens, sive idem manebit, quicunque valor ipsi z tribuatur. Exhiberi poterit itaque, quoniam $\Pi(k, 0) = \Pi(nk, 0) = 1$, per productum

$$\Pi(k, -\frac{1}{n}) \cdot \Pi(k, -\frac{2}{n}) \cdot \Pi(k, -\frac{3}{n}) \cdot \dots \cdot \Pi(k, -\frac{n-1}{n})$$

Crescente igitur k in infinitum, nanciscimur

$$\frac{n^{\alpha\beta} \Pi z \cdot \Pi(z - \frac{1}{n}) \cdot \Pi(z - \frac{2}{n}) \cdot \dots \cdot \Pi(z - \frac{n-1}{n})}{\Pi nz} = \Pi(-\frac{1}{n}) \cdot \Pi(-\frac{2}{n}) \cdot \Pi(-\frac{3}{n}) \cdot \dots \cdot \Pi(-\frac{n-1}{n})$$

Productum ad dextram, in se ipsum ordine factorum inverso multiplicatum, producit, per form. 55,

$$\frac{\pi}{\sin \frac{1}{n}\pi} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{2}{n}\pi} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{3}{n}\pi} \cdot \dots \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{n-1}{n}\pi} = \frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$$

Unde habemus theorema elegans



$$[57] \quad \frac{n^{\frac{1}{2}} \Pi z \cdot \Pi(z - \frac{1}{n}) \cdot \Pi(z - \frac{2}{n}) \cdots \Pi(z - \frac{n-1}{n})}{\Pi n z} = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} (n-1)}{\sqrt{n}}$$

27.

Integrale $\int x^{\lambda-1} (1-x^{\mu})^{\nu} dx$, ita acceptum, ut evanescat pro $x=0$, exprimitur per seriem sequentem, siquidem λ, μ sunt quantitates positivae:

$$\frac{x^{\lambda}}{\lambda} - \frac{\nu x^{\mu+\lambda}}{\mu+\lambda} + \frac{\nu(\nu-1)x^{2\mu+\lambda}}{1 \cdot 2 \cdot (2\mu+\lambda)} - \text{etc.} = \frac{x^{\lambda}}{\lambda} F(-\nu, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}+1, x^{\mu})$$

Hinc ipsius valor pro $x=1$ erit

$$= \frac{\Pi \frac{\lambda}{\mu} \cdot \Pi \nu}{\lambda \Pi(\frac{\lambda}{\mu} + \nu)}$$

Ex hoc theoremate omnes relationes, quas ill. EULER olim multo labore evoluit, sponte demanant. Ita e. g. statuendo

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = A, \quad \int \frac{xx dx}{\sqrt{1-x^2}} = B$$

erit $A = \frac{\Pi \frac{1}{2} \cdot \Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{1}{2})}$, $B = \frac{\Pi \frac{1}{2} \cdot \Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi \frac{1}{2}}$, adeoque $AB = \frac{1}{4} \pi$. Simul hinc sequitur, quoniam $\Pi \frac{1}{2} \cdot \Pi(-\frac{1}{2}) = \frac{\frac{1}{2} \pi}{\sin \frac{1}{2} \pi} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$,

$$\Pi \frac{1}{2} = \sqrt[4]{\frac{\pi}{2} A A} = \sqrt[4]{\frac{\pi^3}{128 B B}}, \quad \Pi(-\frac{1}{2}) = \sqrt[4]{\frac{\pi^3}{8 A A}} = \sqrt[4]{2 \pi B B}$$

Valor numericus ipsius A , computante STIRLINGO, habetur = 1,3110287771 4605987, valor ipsius B , secundum eundem auctorem, = 0,5990701173 6779611, ex nostro calculo, artificio peculiari innixo, = 0,5990701173 6779610372.

Generaliter facile ostendi potest, valorem functionis Πz , si z sit quantitas rationalis $= \frac{m}{\mu}$, denotantibus m, μ integros, ex $\mu-1$ valoribus determinatis talium integralium pro $x=1$ deduci posse, et quidem permultis modis diversis. Accipiendo enim pro λ numerum integrum atque pro ν fractionem, cuius denominator = μ , valor illius integralis semper reducit ad tres Πz , ubi z est fractio cum denominatore = μ ; quodvis vero huiusmodi Πz vel ad $\Pi(-\frac{1}{\mu})$, vel ad $\Pi(-\frac{2}{\mu})$, vel ad $\Pi(-\frac{3}{\mu})$ etc. vel ad $\Pi(-\frac{\mu-1}{\mu})$ reduci potest per formulam 45, siquidem z revera est fractio; si enim z est integer, Πz per se constat. Ex illis vero integralium valoribus, generaliter loquendo, quodvis $\Pi(-\frac{m}{\mu})$,

si $m < \mu$, per eliminationem erui potest *). Quin adeo semissis talium integralium sufficiet, si formulam 54 simul in auxilium vocamus. Ita e. g. statuendo

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}} = C, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^2}} = D, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)}} = E, \quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)^3}} = F, \quad \text{erit}$$

$$C = \Pi \frac{1}{2} \cdot \Pi(-\frac{1}{2}), \quad D = \frac{\Pi \frac{1}{2} \cdot \Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{1}{2})}, \quad E = \frac{\Pi \frac{1}{2} \cdot \Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{1}{2})}, \quad F = \frac{\Pi \frac{1}{2} \cdot \Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{1}{2})}$$

Hinc propter $\Pi \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Pi(-\frac{1}{2})$, habemus

$$\Pi(-\frac{1}{2}) = \sqrt[4]{\frac{C^4}{D E F}}, \quad \Pi(-\frac{2}{2}) = \sqrt[4]{\frac{2^5 C^2 D^2}{E E F F}}, \quad \Pi(-\frac{3}{2}) = \sqrt[4]{\frac{2^{15} C D D E E E}{F^2}},$$

$$\Pi(-\frac{1}{2}) = \sqrt[4]{625 C D E F}$$

Formulae 54, 55 adhuc suppeditant

$$C = \frac{\pi}{\sin \frac{1}{2} \pi}, \quad D = \frac{\sin \frac{1}{2} \pi}{\sin \frac{1}{2} \pi}$$

ita ut duo integralia D, E , vel E et F sufficiant, ad omnes valores $\Pi(-\frac{1}{2})$, $\Pi(-\frac{2}{2})$ etc. computandos.

28.

Statuendo $y = vx$, atque $\mu = 1$, $\frac{\Pi \lambda \cdot \Pi \nu}{\lambda \Pi(\lambda + \nu)}$ erit valor integralis $\int \frac{y^{\lambda-1} (1-\frac{y}{v})^{\nu} dy}{y^{\lambda}}$ ab $y=0$ usque ad $y=v$, sive valor integralis $\int y^{\lambda-1} (1-\frac{y}{v})^{\nu} dy$ inter eosdem limites $= \frac{\lambda \Pi \lambda \cdot \Pi \nu}{\lambda \Pi(\lambda + \nu)} = \frac{\Pi(\lambda, \lambda)}{\lambda}$ (form. 47), siquidem ν denotet integrum. Iam crescente ν in infinitum, limes ipsius $\Pi(\nu, \lambda)$ erit $= \Pi \lambda$, limes ipsius $(1-\frac{y}{v})^{\nu}$ autem e^{-y} , denotante e basin logarithmorum hyperbolicorum. Quamobrem si λ est positiva, $\frac{\Pi \lambda}{\lambda}$ sive $\Pi(\lambda-1)$ exprimet integrale $\int y^{\lambda-1} e^{-y} dy$ ab $y=0$ usque ad $y=\infty$, sive scribendo λ pro $\lambda-1$, $\Pi \lambda$ est valor integralis $\int y^{\lambda} e^{-y} dy$ ab $y=0$ usque ad $y=\infty$, si $\lambda+1$ est quantitas positiva.

Generalius statuendo $y = z^2$, $\alpha \lambda + \alpha - 1 = \theta$, transit $\int y^{\lambda} e^{-y} dy$ in $\int \alpha z^{\theta} e^{-z^2} dz$, quod itaque inter limites $z=0$ atque $z=\infty$ sumtum exprimitur per $\Pi(\frac{\theta+1}{2} - 1)$ sive

Valor integralis $\int z^{\theta} e^{-z^2} dz$, a $z=0$ usque ad $z=\infty$ fit $= \frac{\Pi(\frac{\theta+1}{2} - 1)}{\alpha} = \frac{\Pi \frac{\theta+1}{2}}{\theta+1}$ si modo α atque $\theta+1$ sunt quantitates positivae (si utraque est negativa, in-

*) Haec eliminatio, si pro quantitatibus ipsis logarithmos introducimus, aequationibus tantummodo linearibus applicanda erit.

tegrale per $-\frac{\Pi^{\frac{5}{6}+1}}{6+1}$ exprimitur. Ita e. g. pro $\bar{6} = 0$, $\alpha = 2$, valor integralis $\int e^{-z} dz$ invenitur $= \Pi \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$.

29.

III. EULER pro summa logarithmorum $\log 1 + \log 2 + \log 3 + \text{etc.} + \log z$ eruit seriem $(z + \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{\mathfrak{A}}{1.2z} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4z^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6z^5} - \text{etc.}$ ubi $\mathfrak{A} = \frac{1}{6}$, $\mathfrak{B} = \frac{1}{36}$, $\mathfrak{C} = \frac{1}{12}$ etc. sunt numeri BERNOULLIANI. Per hanc itaque seriem exprimitur $\log \Pi z$; etiamsi enim primo aspectu haec conclusio ad valores integros restricta videatur, tamen rem propius contemplando invenietur, evolutionem ab EULERO adhibitam (Instit. Calc. Diff. Cap. vi. 159) saltem ad valores positivos fractos eodem iure applicari posse, quo ad integros: supponit enim tantummodo, functionem ipsius z , in seriem evolvendam, esse talem, ut ipsius diminutio, si z transeat in $z-1$, exhiberi possit per theorema TAYLORI, simulque ut eadem diminutio sit $= \log z$. Conditio prior innititur *continuitati* functionis, adeoque locum non habet pro valoribus negativis ipsius z , ad quos proin seriem illam extendere non licet: conditio posterior autem functioni $\log \Pi z$ generaliter competit sine restrictione ad valores integros ipsius z . Statuamus itaque

$$[58] \log \Pi z = (z + \frac{1}{2}) \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{\mathfrak{A}}{1.2z} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4z^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6z^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8z^7} + \text{etc.}$$

Quum hinc quoque habeatur

$$\log \Pi 2z = (2z + \frac{1}{2}) \log 2z - 2z + \frac{1}{2} \log 2\pi + \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2z} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.8z^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.32z^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8.128z^7} + \text{etc.}$$

atque per formulam 57, statuendo $n = 2$,

$$\log \Pi(z - \frac{1}{2}) = \log \Pi 2z - \log \Pi z - (2z + \frac{1}{2}) \log 2 + \frac{1}{2} \log 2\pi, \text{ fit}$$

$$[59] \log \Pi(z - \frac{1}{2}) = z \log z - z + \frac{1}{2} \log 2\pi - \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2z} + \frac{7\mathfrak{B}}{3.4.8z^3} - \frac{31\mathfrak{C}}{5.6.32z^5} + \frac{127\mathfrak{D}}{7.8.128z^7} - \text{etc.}$$

Hae duae series pro valoribus magnis ipsius z ab initio satis promte convergunt, ita ut summam approximata commode satisque exacte colligere liceat: attamen probe notandum est, pro quovis valore dato ipsius z , quantumvis magno, praecisionem limitatam tantummodo obtineri posse, quum numeri BERNOULLIANI seriem hypergeometricam constituent, adeoque series illae, si modo satis longe extendantur, certo e convergentibus divergentes evadant. Ceterum negari nequit, theoriam talium serierum divergentium adhuc quibusdam difficultatibus premi, de quibus forsitan alia occasione pluribus commentabimur.

30.

Formula 38 sequitur

$$\frac{\Pi(k, z + \omega)}{\Pi(k, z)} = \frac{z+1}{z+1+\omega} \cdot \frac{z+2}{z+2+\omega} \cdot \frac{z+3}{z+3+\omega} \cdots \frac{z+k}{z+k+\omega} \cdot K^m$$

unde sumtis logarithmis, in series infinitas evolutis, prodit

$$[60] \log \Pi(k, z + \omega) = \log \Pi(k, z) + \omega \left(\log k - \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} - \text{etc.} - \frac{1}{z+k} \right) + \frac{1}{2} \omega \omega \left(\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z+3)^2} + \text{etc.} + \frac{1}{(z+k)^2} \right) - \frac{1}{6} \omega^3 \left(\frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{(z+2)^3} + \frac{1}{(z+3)^3} + \text{etc.} + \frac{1}{(z+k)^3} \right) + \text{etc. in inf.}$$

Series, hic in ω multiplicata, quae, si magis placet, ita etiam exhiberi potest,

$$-\frac{1}{z+1} + \log 2 - \frac{1}{z+2} + \log \frac{2}{3} - \frac{1}{z+3} + \log \frac{3}{4} - \frac{1}{z+4} + \log \frac{4}{5} - \text{etc.} + \log \frac{k}{k-1} - \frac{1}{z+k}$$

e terminorum multitudine finita constat, crescente autem k in infinitum, ad limitem certum converget, qui novam functionum transcendens speciem nobis sistit, in posterum per Ψz denotandam.

Designando porro summas serierum sequentium, in *infinitum* extensarum,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z+3)^2} + \text{etc.} \\ & \frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{(z+2)^3} + \frac{1}{(z+3)^3} + \text{etc.} \\ & \frac{1}{(z+1)^4} + \frac{1}{(z+2)^4} + \frac{1}{(z+3)^4} + \text{etc.} \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

resp. per P, Q, R etc. (pro quibus signa functionalia introducere minus necessarium videtur), habebimus

$$[61] \log \Pi(z + \omega) = \log \Pi z + \omega \Psi z + \frac{1}{2} \omega \omega P - \frac{1}{6} \omega^3 Q + \frac{1}{24} \omega^4 R - \text{etc.}$$

Manifesto functio Ψz erit functio derivata prima functionis $\log \Pi z$, adeoque

$$[62] \frac{d \Pi z}{d z} = \Pi z \cdot \Psi z$$

$$\text{Perinde erit } P = \frac{d \Psi z}{d z}, \quad Q = -\frac{d d \Psi z}{2 d z^2}, \quad R = +\frac{d^3 \Psi z}{2.3 d z^3} \text{ etc.}$$



31.

Functio Ψz aequae fere memorabilis est atque functio Πz , quapropter insigniores relationes ad illam spectantes hic colligemus. E differentiatione aequationis 44 fit

$$[63] \quad \Psi(z+1) = \Psi z + \frac{1}{z+1}$$

unde

$$[64] \quad \Psi(z+n) = \Psi z + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+3} + \text{etc.} + \frac{1}{z+n}$$

Huius adiumento a valoribus minoribus ipsius z ad maiores progredi, vel a maioribus ad minores regredi licet: pro valoribus maioribus positivis ipsius z functionis valores numerici satis commode per formulas sequentes e differentiatione aequationum 58, 59 oriundas computantur, de quibus tamen eadem sunt tenenda, quae in art. 29 circa formulas 58 et 59 monuimus:

$$[65] \quad \Psi z = \log z + \frac{1}{2z} - \frac{\pi^2}{24z^2} + \frac{\pi^4}{48z^4} - \frac{\pi^6}{64z^6} + \text{etc.}$$

$$[66] \quad \Psi(z-\frac{1}{2}) = \log z + \frac{\pi}{2.222} - \frac{7\pi^3}{4.822} + \frac{31\pi^5}{6.322} - \text{etc.}$$

Ita pro $z = 10$ computavimus

$$\Psi z = 2.3517525890 \ 6672110764 \ 743$$

unde regredimur ad

$$\Psi 0 = -0.5772156649 \ 0153286060 \ 653^*)$$

Pro valore integro positivo ipsius z fit generaliter

$$[67] \quad \Psi z = \Psi 0 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \text{etc.} + \frac{1}{z}$$

Pro valore integro negativo autem manifesto Ψz fit quantitas infinite magna.

*) Quam hic valor inde a figura vigesima discrepat ab eo quem computavit clar. MASCHERONI in Adnotat. ad EULERI *Calculus Integr.*, adhortatus sum FREDERICUM BERNHARDUM GOTHOFREDUM NICOLAI, iuvenem in calculo indefessum, ut computum illum repeteret ulteriusque extenderet. Invenit itaque per calculum duplicem, scilicet descendens tum a $z = 50$ tum a $z = 100$,

$$\Psi 0 = -0.5772156649 \ 0153286060 \ 6512099082 \ 4024310421$$

Eidem calculatori exercitissimo etiam debetur tabulae ad finem huius Sectionis annexae pars altera, exhibens valores functionis Ψz ad 18 figuras (quarum ultima haud certa), pro omnibus valoribus ipsius z a 0 usque ad 1 per singulas partes centesimas. Ceterum methodi, per quas utraque tabula constructa est, inniuntur partim theorematibus quae hic traduntur, partim calculi artificii singularibus, quae alia occasione proferemus.

32.

Formula 55 nobis suppeditat $\log \Pi(-z) + \log \Pi(z-1) = \log \pi - \log \sin z\pi$, unde fit per differentiationem

$$[68] \quad \Psi(-z) - \Psi(z-1) = \pi \cotang z\pi$$

Et quum e definitione functionis Ψ generaliter habeatur

$$[69] \quad \Psi x - \Psi y = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} - \frac{1}{x+3} + \text{etc.}$$

oritur series nota

$$\pi \cotang z\pi = \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} - \frac{1}{3-z} + \text{etc.}$$

Simili modo e differentiatione formulae 57 prodit

$$[70] \quad \Psi z + \Psi(z-\frac{1}{n}) + \Psi(z-\frac{2}{n}) + \text{etc.} + \Psi(z-\frac{n-1}{n}) = n\Psi nz - n \log n$$

adeoque statuendo $z = 0$

$$[71] \quad \Psi(-\frac{1}{n}) + \Psi(-\frac{2}{n}) + \Psi(-\frac{3}{n}) + \text{etc.} + \Psi(-\frac{n-1}{n}) = (n-1)\Psi 0 - n \log n$$

Ita e.g. habetur

$$\Psi(-\frac{1}{2}) = \Psi 0 - 2 \log 2 = -1.9635100260 \ 2142347944 \ 699, \text{ unde porro}$$

$$\Psi \frac{1}{2} = +0.0364899739 \ 7857652055 \ 901.$$

33.

Sicuti in art. praec. $\Psi(-\frac{1}{2})$ ad $\Psi 0$ et logarithmum reduximus, ita generaliter $\Psi(-\frac{m}{n})$, designantibus m, n integros, quorum minor m , ad $\Psi 0$ et logarithmos reducemus. Statuamus $\frac{2\pi}{n} = \omega$, sitque φ alicuius angulorum $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots, (n-1)\omega$ aequalis; unde $1 = \cos n\varphi = \cos 2n\varphi = \cos 3n\varphi$ etc., $\cos \varphi = \cos(n+1)\varphi = \cos(n+2)\varphi$ etc., $\cos 2\varphi = \cos(n+2)\varphi$ etc., nec non $\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \text{etc.} + \cos(n-1)\varphi + 1 = 0$. Habemus itaque

$$\begin{aligned} \cos \varphi \cdot \Psi \frac{1-n}{n} &= -n \cos \varphi + \cos \varphi \cdot \log 2 - \frac{n}{n+1} \cos(n+1)\varphi + \cos \varphi \cdot \log \frac{3}{2} - \text{etc.} \\ \cos 2\varphi \cdot \Psi \frac{2-n}{n} &= -\frac{n}{2} \cos 2\varphi + \cos 2\varphi \cdot \log 2 - \frac{n}{n+2} \cos(n+2)\varphi + \cos 2\varphi \cdot \log \frac{3}{2} - \text{etc.} \\ \cos 3\varphi \cdot \Psi \frac{3-n}{n} &= -\frac{n}{3} \cos 3\varphi + \cos 3\varphi \cdot \log 2 - \frac{n}{n+3} \cos(n+3)\varphi + \cos 3\varphi \cdot \log \frac{3}{2} - \text{etc.} \end{aligned}$$

etc. usque ad



$$\cos(n-1)\varphi \cdot \Psi\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{n}{n-1} \cos(n-1)\varphi + \cos(n-1)\varphi \cdot \log 2 - \frac{n}{2n-1} \cos(2n-1)\varphi \\ + \cos(n-1)\varphi \cdot \log \frac{3}{2} - \text{etc.}$$

$$\Psi 0 = -\frac{n}{n} \cos n\varphi + \log 2 - \frac{n}{2n} \cos 2n\varphi + \log \frac{3}{2} - \text{etc.}$$

atque per summationem

$$\cos \varphi \cdot \Psi\left(-\frac{1}{n}\right) + \cos 2\varphi \cdot \Psi\left(-\frac{2}{n}\right) + \cos 3\varphi \cdot \Psi\left(-\frac{3}{n}\right) + \text{etc.} + \cos(n-1)\varphi \cdot \Psi\left(-\frac{1}{n}\right) + \Psi 0 \\ = -n(\cos \varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi + \frac{1}{3} \cos 3\varphi + \frac{1}{4} \cos 4\varphi + \text{etc. in infin.})$$

Sed habetur generaliter, pro valore ipsius x unitate non maiori,

$$\log(1-2x\cos\varphi+xx) = -2(x\cos\varphi+\frac{1}{2}xx\cos 2\varphi+\frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi+\text{etc.})$$

quae quidem series facile sequitur ex evolutione $\log(1-rx)+\log(1-\frac{x}{r})$, denotante r quantitatem $\cos\varphi+\sqrt{1-\sin\varphi}$. Hinc fit aequatio praecedens

$$[72] \quad \cos \varphi \cdot \Psi\left(-\frac{1}{n}\right) + \cos 2\varphi \cdot \Psi\left(-\frac{2}{n}\right) + \cos 3\varphi \cdot \Psi\left(-\frac{3}{n}\right) + \text{etc.} + \cos(n-1)\varphi \cdot \Psi\left(-\frac{1}{n}\right) \\ = -\Psi 0 + \frac{1}{2}n \log(2-2\cos\varphi)$$

Statuatur in hac aequatione deinceps $\varphi = \omega$, $\varphi = 2\omega$, $\varphi = 3\omega$ etc. usque ad $\varphi = (n-1)\omega$, multiplicentur singulae hac aequationes ordine suo per $\cos m\omega$, $\cos 2m\omega$, $\cos 3m\omega$ etc. usque ad $\cos(n-1)m\omega$, productorumque aggregato adiciatur aequatio 71

$$\Psi\left(-\frac{1}{n}\right) + \Psi\left(-\frac{2}{n}\right) + \Psi\left(-\frac{3}{n}\right) + \text{etc.} + \Psi\left(-\frac{1}{n}\right) = (n-1)\Psi 0 - n \log n$$

Quodsi iam perpenditur, esse

$$1 + \cos m\omega \cdot \cos k\omega + \cos 2m\omega \cdot \cos 2k\omega + \cos 3m\omega \cdot \cos 3k\omega \\ + \text{etc.} + \cos(n-1)m\omega \cdot \cos(n-1)k\omega = 0$$

denotante k aliquem numerorum $1, 2, 3, \dots, (n-1)$ exceptis his duobus m atque $n-m$, pro quibus summa illa fit $= \frac{1}{2}n$, patebit, ex summatione illarum aequationum prodire, post divisionem per $\frac{n}{2}$,

$$[73] \quad \Psi\left(-\frac{m}{n}\right) + \Psi\left(-\frac{n-m}{n}\right) = \\ 2\Psi 0 - 2\log n + \cos m\omega \cdot \log(2-2\cos\omega) + \cos 2m\omega \cdot \log(2-2\cos 2\omega) \\ + \cos 3m\omega \cdot \log(2-2\cos 3\omega) + \text{etc.} + \cos(n-1)m\omega \cdot \log(2-2\cos(n-1)\omega)$$

Manifesto terminus ultimus huius aequationis fit $= \cos m\omega \cdot \log(2-2\cos\omega)$, pen-

ultimus $= \cos 2m\omega \cdot \log(2-2\cos 2\omega)$ etc. ita ut bini termini semper sint aequales, excepto, si n est par, termino singulari $\cos \frac{n}{2} \cdot m\omega \log(2-2\cos \frac{n}{2}\omega)$, qui fit $= +2\log 2$ pro m pari, vel $= -2\log 2$ pro m impari. Combinando iam cum aequatione 73 hanc

$$\Psi\left(-\frac{m}{n}\right) - \Psi\left(-\frac{n-m}{n}\right) = \pi \cotang \frac{m}{n} \pi$$

habemus, pro valore impari ipsius n , siquidem m est integer positivus minor quam n

$$[74] \quad \Psi\left(-\frac{m}{n}\right) = \Psi 0 + \frac{1}{2}\pi \cotang \frac{m\pi}{n} - \log n + \cos \frac{2m\pi}{n} \cdot \log(2-2\cos \frac{2\pi}{n}) \\ + \cos \frac{4m\pi}{n} \cdot \log(2-2\cos \frac{4\pi}{n}) + \cos \frac{6m\pi}{n} \cdot \log(2-2\cos \frac{6\pi}{n}) + \text{etc.} \\ + \cos \frac{(n-1)m\pi}{n} \cdot \log(2-2\cos \frac{(n-1)\pi}{n})$$

Pro valore pari ipsius n autem

$$[75] \quad \Psi\left(-\frac{m}{n}\right) = \Psi 0 + \frac{1}{2}\pi \cotang \frac{m\pi}{n} - \log n + \cos \frac{2m\pi}{n} \cdot \log(2-2\cos \frac{2\pi}{n}) \\ + \cos \frac{4m\pi}{n} \cdot \log(2-2\cos \frac{4\pi}{n}) + \text{etc.} + \cos \frac{(n-2)m\pi}{n} \cdot \log(2-2\cos \frac{(n-2)\pi}{n}) \\ + \log 2$$

ubi signum superius valet pro m pari, inferius pro impari. Ita e. g. invenitur

$$\Psi\left(-\frac{1}{4}\right) = \Psi 0 + \frac{1}{2}\pi - 3\log 2, \quad \Psi\left(-\frac{3}{4}\right) = \Psi 0 - \frac{1}{2}\pi - 3\log 2 \\ \Psi\left(-\frac{1}{3}\right) = \Psi 0 + \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\log 3, \quad \Psi\left(-\frac{2}{3}\right) = \Psi 0 - \frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}\log 3$$

Ceterum combinatis his aequationibus cum aequatione 64 sponte patet, Ψz generaliter pro quovis valore rationali ipsius z , positivo seu negativo per $\Psi 0$ atque logarithmos determinari posse, quod theorema sane maxime est memorabile.

34.

Quum, per art. 28, $\Pi\lambda$ sit valor integralis $\int y^\lambda e^{-y} dy$, ab $y = 0$ usque ad $y = \infty$, siquidem $\lambda+1$ est quantitas positiva, fit differentiando secundum λ

$$\frac{d\Pi\lambda}{d\lambda} = \frac{d\int y^\lambda e^{-y} dy}{d\lambda} = \int y^\lambda e^{-y} \log y dy$$

sive

$$[76] \quad \Pi\lambda \cdot \Psi\lambda = \int y^\lambda e^{-y} \log y \cdot dy, \quad \text{ab } y = 0 \text{ usque ad } y = \infty$$

Generalius statuendo $y = z^a$, $a\lambda + a - 1 = \bar{a}$, valor integralis $\int z^{\bar{a}} e^{-z} \log z \, dz$, a $z = 0$ usque ad $z = \infty$, fit

$$= \frac{1}{a^2} \Pi\left(\frac{\bar{a}+1}{a} - 1\right) \cdot \Psi\left(\frac{\bar{a}+1}{a} - 1\right) = \frac{1}{a(\bar{a}+1)} \Pi\frac{\bar{a}+1}{a} \cdot \Psi\frac{\bar{a}+1}{a} - \frac{1}{(\bar{a}+1)^2} \Pi\frac{\bar{a}+1}{a}$$

siquidem simul $\bar{a}+1$ atque a sunt quantitates positivae, vel aequalis eidem quantitati cum signo opposito, si utraque $\bar{a}+1$, a est negativa.

35.

At non solum productum $\Pi\lambda \cdot \Psi\lambda$, verum etiam ipsa functio $\Psi\lambda$ per integrale determinatum exhiberi potest. Designante k integrum positivum, patet valorem integralis $\int \frac{x^k - x^{k+1}}{1-x} \cdot dx$, ab $x = 0$ usque ad $x = 1$ esse

$$= \frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda+3} + \text{etc.} + \frac{1}{\lambda+k}$$

Porro quum valor integralis $\int \left(\frac{1}{1-x} - \frac{kx^{k-1}}{1-x^k} \right) dx$ generaliter sit $= \text{Const.} + \log \frac{1-x^k}{1-x}$, idem inter limites $x = 0$ atque $x = 1$ erit $= \log k$, unde patet, valorem integralis $S = \int \left(\frac{1-x^k}{1-x} - \frac{kx^{k-1}}{1-x^k} \right) dx$ inter eosdem limites esse

$$= \log k - \frac{1}{\lambda+1} - \frac{1}{\lambda+2} - \frac{1}{\lambda+3} - \text{etc.} - \frac{1}{\lambda+k}$$

quam expressionem denotabimus per Ω . Discerpamus integrale S in duas partes

$$\int \left(\frac{1-x^k}{1-x} \right) dx + \int \left(\frac{x^{k-1}}{1-x} - \frac{kx^{k-1}}{1-x^k} \right) dx$$

Pars prima $\int \frac{1-x^k}{1-x} \cdot dx$, statuendo $x = y^k$ mutatur in

$$\int \frac{ky^{k-1} - ky^{k+1}}{1-y^k} \cdot dy$$

unde sponte patet, illius valorem ab $x = 0$ usque ad $x = 1$, aequalem esse valori integralis

$$\int \frac{kx^{k-1} - kx^{k+1}}{1-x^k} \cdot dx$$

inter eosdem limites, quum manifesto literam y sub hac restrictione in x mutare liceat. Hinc fit integrale S , inter eosdem limites

$$= \int \left(\frac{x^{k-1}}{1-x} - \frac{kx^{k+1}}{1-x^k} \right) dx$$

Hoc vero integrale, statuendo $x^k = z$, transit in

$$\int \left(\frac{z^{\frac{\bar{a}+1}{k}}}{k(1-z)^{\frac{1}{k}}} - \frac{z^{\bar{a}}}{1-z} \right) dz$$

quod itaque inter limites $z = 0$ atque $z = 1$ sumtum aequale est ipsi Ω . Sed crescente k in infinitum, limes ipsius Ω est $\Psi\lambda$, limes ipsius $\frac{\bar{a}+1}{k}$ est 0 , limes ipsius $k(1-z)^{\frac{1}{k}}$ vero est $\log \frac{1}{z}$ sive $-\log z$. Quare habemus

$$[77] \quad \Psi\lambda = \int \left(\frac{1}{\log \frac{1}{z}} - \frac{z^{\bar{a}}}{1-z} \right) dz = \int \left(-\frac{1}{\log z} - \frac{z^{\bar{a}}}{1-z} \right) dz$$

a $z = 0$ usque ad $z = 1$.

36.

Integralia determinata, per quae supra expressae sunt functiones $\Pi\lambda$, $\Pi\lambda \cdot \Psi\lambda$, restringere oportuit ad valores ipsius λ tales, ut $\lambda+1$ evadat quantitas positiva: haec restrictio ex ipsa deductione demanavit, reveraque facile perspicitur, pro aliis valoribus ipsius λ illa integralia semper fieri infinita, etiamsi functiones $\Pi\lambda$, $\Pi\lambda \cdot \Psi\lambda$ finitae manere possint. Veritati formula 77 certo eadem conditio subesse debet, ut $\lambda+1$ sit quantitas positiva (alioquin enim integrale certo infinitum evadit, etiamsi functio $\Psi\lambda$ maneat finita): sed deductio formulae primo aspectu generalis nullique restrictioni obnoxia esse videtur. Sed propius attendenti facile patebit, ipsi analysi, per quam formula eruta est, hanc restrictionem iam inesse. Scilicet tacite supposuimus, integrale $\int \frac{1-x^k}{1-x} dx$ cui aequale $\int \frac{kx^{k-1} - kx^{k+1}}{1-x^k} dx$ substituiamus, habere valorem finitum, quae conditio requirit, ut $\lambda+1$ sit quantitas positiva. Ex analysi nostra quidem sequitur, haec duo integralia semper esse aequalia, si hoc extendatur ab $x = 0$ usque ad $x = 1-\omega$, illud ab $x = 0$ usque ad $x = (1-\omega)^k$, quantumvis parva sit quantitas ω , modo non sit $= 0$: sed hoc non obstante in casu eo, ubi $\lambda+1$ non est quantitas positiva, duo integralia ab $x = 0$ usque ad eundem terminum $x = 1-\omega$ extensa nequitiam ad aequalitatem convergunt, sed potius tunc ipsorum differentia, decrescente ω in infinitum, in infinitum crescit. Hocce exemplum monstrat, quanta circumspectio opus sit in tractandis quantitatibus infinitis, quae in ratiociniis analyticis nostro iudicio eatenus tantum sunt admittendae, quatenus ad theoriam limitum reduci possunt.

37.

Statuendo in formula 77, $z = e^{-u}$, patet, illam etiam ita exhiberi posse

$$\Psi\lambda = -\int \left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-u\lambda}}{1-e^{-u}} \right) du, \quad \text{ab } u = \infty \text{ usque ad } u = 0, \text{ i.e.}$$

$$[78] \quad \Psi\lambda = \int \left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-u\lambda}}{1-e^{-u}} \right) du, \quad \text{ab } u = 0 \text{ usque ad } u = \infty.$$

(Perinde valor ipsius $\Pi\lambda$ in art. 28 allatus, mutatur statuendo $e^{-v} = v$, in sequentem

$$\Pi\lambda = \int (\log \frac{1}{v})^\lambda dv, \quad \text{a } v = 0 \text{ usque ad } v = 1)$$

Porro patet e formula 77, esse

$$[79] \quad \Psi\lambda - \Psi\mu = \int \frac{z^\mu - z^\lambda}{1-z} dz, \quad \text{a } z = 0 \text{ usque ad } z = 1$$

ubi praeter $\lambda+1$ etiam $\mu+1$ debet esse quantitas positiva.

Statuendo in eadem formula 77, $z = u^a$, designante a quantitatem positivam, fit

$$\Psi\lambda = \int \left(-\frac{u^{a-1}}{\log u} - \frac{a u^{a\lambda+a-1}}{1-u^a} \right) du, \quad \text{ab } u = 0 \text{ usque ad } u = 1$$

et quum perinde statui possit, pro valore positivo ipsius θ ,

$$\Psi\lambda = \int \left(-\frac{u^{\theta-1}}{\log u} - \frac{\theta u^{\theta\lambda+\theta-1}}{1-u^\theta} \right) du$$

patet, fieri

$$0 = \int \left(\frac{u^{a-1}-u^{\theta-1}}{\log u} + \frac{a u^{a\lambda+a-1}}{1-u^a} - \frac{\theta u^{\theta\lambda+\theta-1}}{1-u^\theta} \right) du$$

sive

$$\int \frac{u^{a-1}-u^{\theta-1}}{\log u} du = \int \left(\frac{\theta u^{\theta\lambda+\theta-1}}{1-u^\theta} - \frac{a u^{a\lambda+a-1}}{1-u^a} \right) du$$

integralibus semper ab $u = 0$ usque ad $u = 1$ extensis. Sed ponendo $\lambda = 0$, integrale posterius *indefinite* assignari potest; est scilicet $= \log \frac{1-u^a}{1-u^\theta}$, si evanescere debet pro $u = 0$; quare quum pro $u = 1$ statuere oporteat $\frac{1-u^a}{1-u^\theta} = \frac{a}{\theta}$, erit integrale $\log \frac{a}{\theta} = \int \frac{u^{a-1}-u^{\theta-1}}{\log u} du$, ab $u = 0$ usque ad $u = 1$, quod theorema olim ab ill. EULER per alias methodos erutum est.

z	$\log \Pi z$	Ψz
0.00	0.0000000000 0000000000	-0.5772156649 01532861
0.01	9.99971287306 586917624	0.5608854578 68674498
0.02	9.9991278719 887924144	0.5447893104 56179789
0.03	9.9982962208 888389748	0.530210872 8430502
0.04	9.9972324004 0842900595	0.5172748789 16830312
0.05	9.9883378587 9021246216	0.4978449912 99870371
0.06	9.9862288685 5581945437	0.4826559358 14825705
0.07	9.9841455156 3523577773	0.4676124198 67553612
0.08	9.9821469485 3403172902	0.4527993380 01712885
0.09	9.9802122775 3951136603	0.4381817634 95314764
0.10	9.9784406739 6180524713	0.4237549624 11076796
0.11	9.9768111499 086640820	0.4095914670 7169448
0.12	9.9747834150 9201128961	0.3954553319 3493807
0.13	9.9723091811 6469083029	0.3815718168 38792064
0.14	9.9714688560 856966779	0.3678656106 07749546
0.15	9.9699006960 152903489	0.3543166779 76279272
0.16	9.9683909741 1917527943	0.3409531528 3261794
0.17	9.9669389805 351856982	0.3277412547 48392199
0.18	9.9655440208 2792421467	0.3146874417 8886021
0.19	9.9642054164 5653136162	0.3017881155 74610030
0.20	9.9629225038 1404835193	0.2890798965 92188296
0.21	9.9616946138 3869862929	0.2764394897 32192051
0.22	9.9605111715 6456577252	0.2639813700 44220200
0.23	9.9594044956 8673884734	0.2516694306 96100107
0.24	9.9583349981 4361387302	0.2394916791 25936794
0.25	9.9573121087 1550754011	0.2274513513 76056408
0.26	9.9563591696 3884357774	0.2155461686 00665182
0.27	9.9554488582 3498054112	0.2037788417 30621537
0.28	9.9545890715 5368282076	0.1921188951 02221732
0.29	9.9537797810 2903856417	0.1805937494 20369178
0.30	9.9530202771 4980077695	0.1691908888 66799556
0.31	9.9523100341 4034352140	0.1579078803 36141874
0.32	9.9516485366 5449703876	0.1467423567 95960217
0.33	9.9510355796 8042398079	0.1356900279 6469332
0.34	9.9504697672 5460261115	0.1247546278 97003946
0.35	9.9499515741 9025401627	0.1139280126 83088296
0.36	9.9494800438 096487612	0.1032100582 56977615
0.37	9.9490548886 918815282	0.0925987081 87861259
0.38	9.9486755902 2321722697	0.0820919681 58406487
0.39	9.9483416983 6257235731	0.0716878723 29281510
0.40	9.9480539724 1057187597	0.0613845445 53166146
0.41	9.9478081757 8828733174	0.0511801317 17807756
0.42	9.9476080858 2329302409	0.0410728433 24024175
0.43	9.9474514835 4291742066	0.0310609236 71447052
0.44	9.9473381584 7445730981	0.0211426703 33530475
0.45	9.9472677074 5305163035	0.0113164125 86445845
0.46	9.9472397344 2994856129	0.0018505619 87083418
0.47	9.9472535703 0199030853	+0.002664890 1164893
0.48	9.947299727 2650569072	0.017662685 88849461
0.49	9.9474068259 5866639475	0.0271002758 35482021
0.50	9.9475449406 8308573196	0.0364899739 78576520



z	$\log H_z$	V_z
0.50	9.9475449406 8108457196	+0.0364899739 78576510
0.51	9.9477236538 618222419	0.045796795 6194496
0.52	9.9479416065 7294550351	0.0550221845 79551822
0.53	9.9482074558 7500065798	0.0641673073 66077154
0.54	9.9484998446 4251966174	0.0733336936 45565776
0.55	9.9488574414 4659973817	0.082225675 39644344
0.56	9.9492139104 0978145536	0.0911551025 40655189
0.57	9.9496289230 7706494871	0.0999728024 44444623
0.58	9.9500821562 8891076887	0.1087366022 51781439
0.59	9.9505732920 5807738191	0.1174277690 35011022
0.60	9.9511020174 5015512544	0.1260474557 73476353
0.61	9.9516680144 6766136244	0.1345967771 58445310
0.62	9.9522780099 3756789359	0.1430768403 68980312
0.63	9.9529406754 0213704917	0.1514887158 1935181
0.64	9.953667270 1394797674	0.1598533458 8414461
0.65	9.9544588754 2799984466	0.1681120775 84327804
0.66	9.9553048357 1178337720	0.1762555932 71894293
0.67	9.9562183272 321579829	0.1842749812 67329607
0.68	9.9566490735 9612046512	0.1921612014 89132418
0.69	9.9575028024 9809525351	0.2000851930 56747012
0.70	9.9583912456 9225480685	0.2085478748 73493948
0.71	9.9593141388 7286450668	0.2164501481 89604789
0.72	9.9602712215 9607519880	0.224928871 4817521
0.73	9.9612623272 0531019641	0.2330769593 0087792
0.74	9.962286927 4212221320	0.2398032681 35096466
0.75	9.9633450588 7435456829	0.2472745355 46861164
0.76	9.9644365698 1871920339	0.25550855103 23688336
0.77	9.9655606212 6833798084	0.2626431686 02762795
0.78	9.9667175803 2189101417	0.2701492043 14883540
0.79	9.9679070054 1227146665	0.2775953776 1216806
0.80	9.9691286662 407764416	0.2849914332 93801542
0.81	9.9703833337 1127271150	0.2923531021 8879580
0.82	9.9716675118 6423658993	0.2996202095 64887544
0.83	9.9729847878 1655271065	0.3068681204 96501033
0.84	9.9743331316 9917940601	0.3140588602 31568639
0.85	9.9757125965 9857561442	0.3211999895 45479708
0.86	9.9771229684 9867851092	0.3282921690 83820641
0.87	9.9785640362 2407644771	0.335336466 24483409
0.88	9.9800355913 8811182162	0.3423325577 49553893
0.89	9.9815374283 3339012630	0.3492814254 57135499
0.90	9.9830693440 8561111078	0.3561841611 64059720
0.91	9.9846311382 9969520321	0.3630420646 48881123
0.92	9.9862226132 1076437381	0.3698527244 06401469
0.93	9.9878435735 8573930651	0.3766197779 23498793
0.94	9.9894938266 7612664682	0.3833416619 46740214
0.95	9.9911731821 7189109803	0.390019657 42043086
0.96	9.9928814521 5658844947	0.396683165 46662202
0.97	9.9946184510 613767975	0.4032523088 13771106
0.98	9.9963839956 322243515	0.4098041664 49890838
0.99	9.9981779248 6807320161	0.4163147060 45414956
1.00	0.0000000000 0000000000	0.4227843350 98467139

METHODUS NOVA

INTEGRALIU VALORES

PER APPROXIMATIONEM INVENIENDI

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM EXHIBITA 1814. SEPT. 16.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. III.
Gottingae MDCCCXVI.