DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES CONCERNANTS

LES PÉRIODES DES CLASSES DES FORMES BINAIRES DU SECOND DEGRÉ.

THÉORÈME I. *Le nombre des classes (pr. pr.) d'un même déterminant, qui élevées à la dignité P^{me}, P étant ou un nombre premier ou la puissance d'un nombre premier $= p^{\pi}$, produisent la classe principale K, est égal ou à 1 ou à une puissance de ce même nombre premier p.*

Démonstration. Soit (Ω) le groupe entier de toutes les classes en question et n leur nombre. Puisque la classe principale K est nécessairement contenue dans (Ω), le théorème est évident, si elle y est la seule. Mais s'il y en a d'autres, le nombre des classes contenues dans la période de chacune sera une puissance de p; soit une d'elles A, et supposons que sa période $(\mathfrak{A})$ contienne p^{α} classes, qui seront toutes comprises dans (Ω). Or si les classes de cette période $(\mathfrak{A})$ épuisent (Ω), on aura $p^{\alpha} = n$, et le théorème sera démontré; sinon, soit B une classe quelconque de (Ω) non contenue dans $(\mathfrak{A})$, et supposons que sa période soit développée jusqu'à ce qu'on y parvienne à une classe bB, qui soit en même temps parmi les classes de $(\mathfrak{A})$, ce qui doit nécessairement arriver, parceque du moins la classe principale est commune à cette période et à $(\mathfrak{A})$. Or supposant que bB soit la *première* classe dans la période de B commune à $(\mathfrak{A})$, ou b le plus petit possible, je dis

1°. Que b sera une puissance de p. Car il est évident qu'en faisant $b = p^{\beta}h$, $bB = iA$ et $hk \equiv 1 \ (\text{mod.}\ p^{\pi})$ (ce qui se pourra) on aura $kbB = p^{\beta}hkB = p^{\beta}B = ikA$,

c'est à dire que $p^{\beta}B$ sera aussi parmi les classes de $(\mathfrak{A})$, d'où il s'ensuit que $h = 1$ et $b = p^{\beta}$.

2°. Qu'en désignant les classes $K, B, 2B \ldots (b-1)B$ par $(\mathfrak{B})$, toutes les compositions d'une classe de $(\mathfrak{A})$ avec une classe de $(\mathfrak{B})$ donneront $p^{\alpha+\beta}$ classes différentes. Car en supposant $mA + nB = m'A + n'B$ et $n = n'$, on aura nécessairement $m = m'$; si $n > n'$, on aura $(n-n')B = (m'-m)A$, ce qui est impossible, si l'on n'a pas $n = n'$.

3°. Que ces $p^{\alpha+\beta}$ classes différentes seront comprises sous (Ω), ce qui est évident.

Or, si ces $p^{\alpha+\beta}$ classes épuisent (Ω), le théorème est démontré; sinon, on choisira une autre classe de (Ω) non contenue parmi celles-là, savoir C; on continuera sa période jusqu'à ce qu'on y parvienne à une classe déjà comprise sous les classes composées de $(\mathfrak{A})$ et $(\mathfrak{B})$. Par un raisonnement semblable au précédent on démontrera, que l'exposant de cette classe doit être une puissance de p, $= p^{\gamma}$, et que la composition des p^{γ} classes premières de la période de C avec les $p^{\alpha+\beta}$ classes déjà trouvées donnera $p^{\alpha+\beta+\gamma}$ classes différentes toutes comprises dans (Ω). Si ces classes n'épuisent pas encore (Ω), on traitera de la même manière une quatrième classe D etc. et il est évident que (Ω) étant formé d'un nombre fini de classes, ces opérations finiront aussi et qu'on aura n égal à une puissance de p. C. Q. F. D.

THÉORÈME. II. *Le nombre de toutes les classes du genre principal étant exprimé par $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}$ etc., a, b, c, dénotant des nombres premiers différents, il y aura dans ce genre $a^{\alpha}, b^{\beta}, c^{\gamma}$ etc. classes, qui étant élevées à la dignité $a^{\alpha}, b^{\beta}, c^{\gamma}$ etc. resp. produisent la classe principale.*

Démonstration. Soient A, A', A'' etc. toutes les classes qui élevées à la dignité a^{α} produisent K et $(\mathfrak{A})$ leur totalité; de même B, B', B'' etc. $(\mathfrak{B})$, C, C', C'', $(\mathfrak{C})$ etc. etc. Je dis que de la composition de toutes les classes de $(\mathfrak{A})$ avec toutes les classes de $(\mathfrak{B})$ avec toutes les classes de $(\mathfrak{C})$ etc. il proviendra des classes différentes entre elles. Car si $A + B + C \ldots = A' + B' + C' \ldots$ etc., on aura, en faisant $A - A' = A''$, $B - B' = B''$ etc.,

$$A'' + B'' + C'' \text{ etc.} = K$$

donc élevant à la dignité $b^{\beta}c^{\gamma}$ etc., $(b^{\beta}c^{\gamma}\ldots)A'' = K$, d'où il s'ensuit facilement

$A'' = K$ et $A = A'$ et de la même manière on aura $B = B'$, $C = C'$ etc. Soit la totalité de ces classes $= (S)$. De plus il est clair que toutes ces classes seront du genre principal. Enfin il ne peut exister aucune classe dans le genre principal qui ne soit comprise sous (S). Soit . . .

BEMERKUNG.

Dieses im Jahre 1801 geschriebene Fragment bezieht sich auf Disq. Arithm. art. 306, IX. Das Wort *dignité* wird hier in einem sonst nicht üblichen Sinne gebraucht.

STERN.

[I.]

DE NEXU INTER MULTITUDINEM CLASSIUM, IN QUAS FORMAE BINARIAE SECUNDI GRADUS DISTRIBUUNTUR, EARUMQUE DETERMINANTEM.

COMMENTATIO PRIOR

SOCIETATI REGIAE EXHIBITA 1834 . . . .

1.

Triginta tres iam elapsi sunt anni, ex quo principia nexus mirabilis, cui haec commentatio dicata est deteximus, uti iam in fine *Disquisitionum Arithmeticarum* annunciatum est. Sed aliae occupationes ab hac scrutatione per longum tempus detraxerant, donec recentiori tempore ad eam reverti et per novas curas eam ampliare contigit. Attamen quum haec nova Arithmeticae Sublimioris pars limites unius commentationis excedat, haecce prior formis determinantium negativorum dicata erit: formae vero determinantium positivorum, quae tractationem prorsus peculiarem requirunt, commentationi alteri reservatae manere debebunt.

2.

Basis totius argumenti est disquisitio peculiaris circa multitudinem omnium combinationum valorum integrorum, quos duo numeri integri indefiniti x, y intra ambitum praescriptum accipiunt. Manifesto hoc problema etiam sub aspectu geometrico exhiberi potest, ut eruatur multitudo *numerorum complexorum*, quorum repraesentatio intra figuram praescriptam cadit. Indoles figurae ex indole lineae quae eam circumdat, adeoque pendebit vel ab unica aequatione inter coordinatas x, y (quoties peripheria est curva in se rediens) vel a pluribus huiusmodi aequationibus (quoties constat e pluribus partibus curvis seu rectis), pendebitque ab arbitrio nostro, utrum puncta numeris integris complexis respondentia, si quae forte in ipsa peripheria sint, multitudini annumerare velimus an inde excludere.

In repraesentatione analytica problematis conditiones illius limitationis semper ita exhiberi poterunt, ut functio data variabilium x, y vel una vel plures P, Q, R etc. nancisci debeant valores positivos, vel non-negativos (prout valor 0 vel excluditur vel admittitur).

Ita e. g. si figura praescripta est circulus, cuius radius $= \sqrt{A}$, dum centrum cadit in punctum numero complexo integro respondens, conditio analytica erit, ut $A - xx - yy$ non sit negativus, siquidem, quod semper supponemus, puncta in ipsa peripheria sita retinere placet. Si figura est triangulum, tres functiones lineares $ax + by + c$, $a'x + b'y + c'$, $a''x + b''y + c''$ valores non-negativos habere debent, similiterque in aliis casibus.

3

Solutio problematis *exacta*, generaliter loquendo, ita procedere debet, ut primo e natura conditionum variabilis altera e. g. x intra limites coërceatur, inter quos valores singuli integri deinceps percurrant, et quot valores integri alterius y singulis respondeant, eruere oportet, quorum multitudines dein in summam colligi debent. In casibus specialibus plerumque aderunt artificia specialia ad laborem abbreviandum.

E. g. si figura, ut supra, est circulus, cuius radius $= \sqrt{A}$, sit r integer proxime minor quam $\sqrt{A}$, vel ipse $\sqrt{A}$, si A est quadratum. Perinde sint r', r'', r''' etc. $r^{(r)}$ integri proxime minores quam $\sqrt{(A-1)}$, $\sqrt{(A-4)}$, $\sqrt{(A-9)}$ etc. usque ad $\sqrt{(A-rr)}$. Tunc multitudo quaesita erit

$$= 2r + 1 + 2(2r' + 1) + 2(2r'' + 1) + 2(2r''' + 1) + \text{etc.}$$
$$= 1 + 4r + 4r' + 4r'' + 4r''' + \text{etc.} + 4r^{(r)}$$

Brevior erit in hoc exemplo methodus sequens. Sit q integer proxime minor quam $\sqrt{\tfrac{1}{2}A}$ (vel huic aequalis, quoties est integer), atque $r^{(q+1)}$, $r^{(q+2)}$, $r^{(q+3)}$ etc. integri proxime minores quam $\sqrt{(A-(q+1)^2)}$, $\sqrt{(A-(q+2)^2)}$, $\sqrt{(A-(q+3)^2)}$ etc. usque ad $\sqrt{(A-rr)}$. Tunc erit multitudo quaesita

$$= 4qq + 1 + 4r + 8(r^{(q+1)} + r^{(q+2)} + r^{(q+3)} + \text{etc.} + r^{(r)})$$

Per hanc formulam eruta est multitudo

A		A		A	
100	317	1000	3149	10000	31417
200	633	2000	6293	20000	62845
300	949	3000	9425	30000	94237
400	1257	4000	12581	40000	125629
500	1581	5000	15705	50000	157093
600	1885	6000	18853	60000	188453
700	2209	7000	21993	70000	219901
800	2521	8000	25137	80000	251305
900	2821	9000	28269	90000	282697
1000	3149	10000	31417	100000	314197

4.

Ad propositum nostrum non requiritur determinatio exacta, sed potius indagatio expressionis, quae ad multitudinem exactam quam prope velis accedere potest, dum limites in infinitum ampliantur. Sed ante omnia quum haec aliquid vagi involvant, rem exactius explicare oportet.

Supponemus itaque, functiones P, Q, R etc. praeter variabiles x, y implicare elementum constans k, ita ut singulae P, Q, R etc. sint functiones homogeneae trium quantitatum x, y, k. Hoc pacto figura per aequationes $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ etc. determinata pendebit a k, ita ut valoribus diversis ipsius k respondeant figurae similes et respectu initii coordinatarum similiter positae, dimensionesque lineares similes valoribus ipsius k, areae valoribus ipsius kk proportionales erunt. Denotetur iam multitudo punctorum intra figuram per M, area per V, patetque M et V, crescente k, crescere debere; crescente vero k in infinitum, M et V ad rationem aequalitatis quam proxime velis accedent, vel si elementarem claritatem postulas, proposita quantitate quantumvis parva λ, semper assignari poterit terminus talis, ut pro quolibet valore ipsius k hunc terminum superante certo $\frac{M}{V}$ iacere debeat inter $1-\lambda$ et $1+\lambda$. Secundum morem suetum hoc ita indicare licet: fieri $M = V$ pro valore infinito ipsius k.

In exemplo nostro conditio requisita locum tenet, statuendo $k = \sqrt{A}$, curvaque fit circulus, cuius area $= \pi A$, denotante π semicircumferentiam circuli pro radio $= 1$. Numeri supra traditi convergentiam luculenter addigitant.

Ceterum si operae pretium esset, facile demonstrationem illius theorematis antiquo rigore absolvere possemus, quam tamen hocce quidem loco supprimere maluimus ad difficiliora properantes.

5.

In hacce commentatione limes per *unicam* aequationem talem exprimetur $axx+2bxy+cyy=A$, ita quidem ut a, b, c sint integri, atque $bb-ac$ numerus negativus quem statuemus $=-D$. Manifesto curva figuram definiens erit ellipsis, patetque facile, quadrata semiaxium esse radices aequationis

$$(ac-bb)qq-(a+c)Aq+AA=0 \text{ sive } =A\left(\frac{a+c\pm\sqrt{(4bb+(a-c)^2)}}{2(ac-bb)}\right)$$

Productum harum radicum fit $\frac{AA}{ac-bb}=\frac{AA}{D}$, proin area ellipsis $=\frac{\pi A}{\sqrt{D}}$. Hinc itaque colligitur, multitudinem omnium combinationum valorum integrorum ipsarum x, y, pro quibus $axx+2bxy+cyy$ valorem A non superet, crescente A continuo magis appropinquare ad $\frac{\pi A}{\sqrt{D}}$, et pro A infinito huic valorem aequalem statui debere. Ceterum manifestum est, hocce respectu nihil interesse, utrum combinatio $x=0$, $y=0$ reliquis annumeretur, an inde excludatur. Hoc itaque modo multitudo quaesita (in ratione posteriori) nihil aliud est, nisi aggregatum multitudinum repraesentationum singulorum numerorum $1, 2, 3, \ldots A$ per formam binariam secundi gradus $axx+2bxy+cyy$; et quum inter illos numeros alii omnino per hanc formam repraesentari nequeant, alii plures, alii pauciores repraesentationes admittant, quantitas $\frac{\pi}{\sqrt{D}}$ consideranda erit tamquam valor medius multitudinis repraesentationum numeri positivi indefiniti per formam quamlibet, cuius determinans $=-D$.

6.

Antequam quae hinc sequantur generaliter perscrutemur, ut modus argumentationis facilius penetrari possit, casus quosdam singulares evolvere visum est. Resumamus itaque primo formam $xx+yy$, pro qua itaque multitudo repraesentationum numeri indefiniti valorem medium $=\pi$ nanciscitur. Multitudo vero repraesentationum actualium numeri dati haud difficile e principiis generalibus in Disquisitionibus Arithmeticis stabilitis determinatur. Designemus per fA multitudinem repraesentationum numeri A, quae erit $=4$, si $A=1$ vel 2 vel potestas binarii; $=8$, si A est numerus primus formae $4n+1$, vel productum

talis numeri primi in potestatem binarii; $=0$, si A est numerus primus formae $4n+3$, vel per talem numerum primum divisibilis, neque vero per ipsius quadratum; denique *generaliter*

$$\begin{aligned} &\text{vel } =4(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots \\ &\text{vel } =0 \end{aligned}$$

prout, reducto numero A ad formam $2^{\mu}Sa^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$, designantibus a, b, c etc. numeros primos inaequales formae $4n+1$, S autem productum e numeris primis formae $4n+3$, si qui inter factores numeri A semel pluriesve occurrunt, numerus S est vel quadratum vel non quadratum. Patet itaque, fA unice pendere a modo, quo numeri primi $3, 5, 7, 11, 13$ etc. inter factores numeri A reperiuntur, ita ut generaliter statuere oporteat

$$fA=4(3).(5).(7).(11).(13)\ldots$$

si valores characterum (3), (5), (7) etc. ita acceptos supponimus, ut denotante p numerum primum sit

primo $(p)=1$, si p ipsum A non metitur

secundo $(p)=\alpha+1$, si p est formae $4n+1$, atque p^{α} potestas summa ipsum A metiens

tertio $(p)=0$, si p est formae $4n+3$, atque exponens potestatis altissimae ipsius p ipsum A metientis est impar; denique

quarto $(p)=1$, si p est formae $4n+3$, atque exponens potestatis summae ipsius p ipsum A metientis est par.

Manifesto casus primus sub secundo et quarto continetur.

Hoc itaque modo termini progressionis $f1, f2, f3, f4$ etc. valde irregulariter procedunt, etiamsi quo maior multitudo sumatur, eo accuratius valor medius $=\pi$ inde surgere debeat. Aggregatum $f1+f2+f3+\ldots+fA$ denotabimus per FA.

7.

Statuamus iam generaliter $fm+f3m=f'm$, perspicieturque facile, fieri

$$f'A=4(5).(7).(11).(13)\ldots$$

i. e. $f'A$ a relatione ipsius A ad divisorem 3 erit independens, unde seriei $f'1$, $f'2$, $f'3$, $f'4$, $f'5$, $f'6$ etc. irregularitas tum serius incipiet tum longe minor erit. Porro si statuimus

$$f'1+f'2+f'3+f'4+\text{ etc. }+f'm = F'm$$

erit

$$\begin{aligned} F'3A &= F3A+f3+f6+f9+\ldots+f9A \\ &= F3A+FA \end{aligned}$$

Hinc facile concluditur crescente A in infinitum, statui debere

$$F'3A = 4\pi A$$

sive valorem medium terminorum seriei $f'1$, $f'2$, $f'3$, $f'4$ etc. esse

$$= \tfrac{4}{3}\pi$$

Simili modo statuendo generaliter $-f'm+f'5m = f''m$, fiet

$$f''A = 4(7)(11)(13)\ldots$$

sive e serie nova $f''1$, $f''2$ etc. abeunt vacillationes a relatione ad numerum 5 pendentes. Statuendoque aggregatum

$$f''1+f''2+f''3+\ldots+f''m = F''m$$

fiet

$$F''5m = -F'm+F'5m$$

unde concluditur crescente m in infinitum, statui debere

$$F''5m = \tfrac{4}{3}\pi.4m$$

sive valorem medium terminorum seriei esse $= \frac{4}{3}.\frac{4}{5}\pi$.

Si eodem modo ulterius procedimus, progressiones novas formando, dum deinceps factores (7), (11), (13), (17) etc. tollimus, hae continuo magis ad invariabilitatem appropinquabunt, valoresque medii deinceps novos factores $\frac{8}{7}$, $\frac{12}{11}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{16}{17}$, $\frac{20}{19}$ etc. nanciscentur, ubi denominatores erunt numeri primi serie naturali, numeratores vero unitate vel maiores vel minores, prout illi sunt formae $4n-1$, vel $4n+1$. Quare quum hoc processu in infinitum continuato valor constans 4 valori medio continuo propior fieri debeat, habemus

$$4 = \pi.\tfrac{4}{3}.\tfrac{4}{5}.\tfrac{8}{7}.\tfrac{12}{11}.\tfrac{12}{13}\ldots \text{ in inf.}$$

sive

$$\pi = 4\cdot\frac{3}{3+1}\cdot\frac{5}{5-1}\cdot\frac{7}{7+1}\cdot\frac{11}{11+1}\cdot\frac{13}{13-1}\ldots$$

Si singulae fractiones evolvuntur in series infinitas

$$\begin{aligned} \frac{3}{3+1} &= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots \\ \frac{5}{5-1} &= 1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\ldots \\ \frac{7}{7+1} &= 1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-\frac{1}{343}+\ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

productum facile evolvitur in

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}-\tfrac{1}{11}+\tfrac{1}{13}\ldots.$$

cuius seriei summam esse $=\frac{1}{4}\pi$ vulgo notum est. Revera via inversa olim iam hinc aequalitas inter $\frac{1}{4}\pi$ et productum infinitum $\frac{4}{3}.\frac{4}{5}.\frac{8}{7}\ldots$ ab ill. Euler erutum fuerat (*Introd. in analys. inf.* T. I. Cap. XV. art. 285).

8.

Consideremus secundo loco formam $xx+2yy$, pro qua multitudo repraesentationum numeri indefiniti valorem medium $=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ habebit. Designando per fA multitudinem repraesentationum numeri dati A per istam formam, haec erit $=2$ pro $A=1$ vel $A=2$, vel quoties A est potestas binarii; porro $fA=4$, quoties A est aliquis e serie numerorum primorum, quorum residuum quadraticum est -2, sive qui sunt formae $8k+1$, $8k+3$, puta $A=3, 11, 17, 19, 41, 43$ etc.; denique $fA=0$, quoties A est numerus primus, cuius non-residuum quadraticum est -2, puta e serie 5, 7, 13, 23, 29, 31 etc. sive vel formae $8k+5$, vel formae $8k+7$. Generaliter vero statui debet

$$\begin{aligned} &\text{vel} \quad fA = 2(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots \\ &\text{vel} \quad fA = 0 \end{aligned}$$

prout reducto numero A ad formam $2^{\mu}Sa^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$, designantibus a, b, c etc. numeros primos inaequales formae $8k+1$, $8k+3$, contra S productum e numeris reliquis (formae $8k+5$, $8k+7$); si qui inter factores numeri A habentur, prout S est quadratum vel non quadratum. Hinc per ratiocinia prorsus similia ut in art. praec. a serie $f1$, $f2$, $f3$, $f4$, $f5$ etc. puta 2, 2, 4, 2, 0, 2 etc., deinceps ad alias continuo longius *constantes* progrediemur, quarum valores *medii* sint deinceps $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$, $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}$, $\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}$ etc.; progrediemur ita, ut deducamur ad aequationem

$$2 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\ldots$$

ubi denominatores constituunt seriem naturalem numerorum primorum, numeratores vero unitate minores sunt, quoties denominatores sunt formae $8k+1$, vel $8k+3$, contra unitate maiores, quoties denominatores sunt formae $8k+5$ vel $8k+7$.

[II.]

DE NEXU INTER MULTITUDINEM CLASSIUM, IN QUAS FORMAE BINARIAE SECUNDI GRADUS DISTRIBUUNTUR, EARUMQUE DETERMINANTEM.

COMMENTATIO PRIOR

SOCIETATI REGIAE EXHIBITA 1837 ....

1.

Triginta sex elapsi sunt anni, ex quo principia nexus mirabilis in hac commentatione tractandi detecta sunt, uti iam in fine *Disquisitionum arithmeticarum* annuntiatum est. Sed aliae occupationes per longum tempus ab hac scrutatione detraxerant, donec recentiori tempore ad eam reverti, et per novas curas eam ampliare contigerit. Attamen quum ambitus huius novae Arithmeticae Sublimioris partis limites unius commentationis transgrediatur, haecce prior formis determinantium negativorum dicata erit: formae autem determinantium positivorum, quae tractationem prorsus peculiarem requirunt, commentationi alteri reservatae manebunt.

2.

Ad propositum nostrum opus erit theoremate per se quidem arithmetico, cuius tamen indolem commodius et clarius per considerationes in forma geometrica exhibendas ob oculos ponere licet.

Proposita in plano indefinito figura per lineam qualemcunque terminata, illius area approximative assignari poterit, si plano in quadrata dispertito multitudo tum eorum quae integra sunt intra figuram, tum eorum quae ambitus figurae secat, numeretur, manifestoque area justo minor vel maior prodibit, prout quadrata posteriora vel omittuntur vel prioribus adnumerantur: si vero quadrata posteriora in limine sita, ad normam qualiscunque principii, partim excludere partim adnumerare placuerit, error modo positivus modo negativus esse poterit, necessario tamen minor quam aggregatum cunctorum quadratorum in limine. Quo minora quadrata accipiantur, eo exactius hoc modo area determinabitur, talemque approximationem in infinitum producere sive quadrata tam parva accipere licebit, ut error quavis quantitate data minor evadat. Quod quamquam iam per se evidens esse videatur, tamen demonstratione rigorosa munire non aspernabimur.

Bina quadrata vel unum punctum angulare, vel duo, vel nullum commune habere possunt; in casu primo et secundo contigua, in tertio disiuncta dicentur. Manifesto quadrata, quae omnia inter se contigua sint, quaterna tantum exstant, adeoque inter quina quadrata diversa duo ad minimum disiuncta inveniri debent. Iam quum distantia inter duo puncta in quadratis disiunctis sita nequeat esse minor quam latus quadratorum, quod per a designabimus, patet, si punctum a quocunque alicuius quadrati loco profectum deinceps quadratum secundum, tertium, quartum traiecerit, tandem ad quintum pervenerit, longitudinem viae certe non esse minorem quam a. Et quum simili ratione si linea continuo alia quadrata permeat, pars inter quadratum quintum et nonum, nec non inter nonum et decimum tertium etc. non possit esse minor quam a, facile colligimus; lineam quamcunque in se ipsam redeuntem, quae omnino n quadrata diversa attigerit, certo non posse esse minorem quam $\frac{(n-4)a}{4}$. Vice versa itaque linea clausa, cuius longitudo est $= l$, certo plura quam $4+\frac{4l}{a}$ quadrata diversa attigisse non potest. Quorum area $= 4aa+4al$ quum decrescente a in infinitum quavis quantitate data minor fieri possit, idem a potiori valebit de errore quadraturae, de qua supra diximus.

3.

Principium admissionis vel exclusionis quadratorum in limite figurae positorum multis modis diversis condi posset: simplicissimum tamen videtur, tantummodo situm centri cuiusque quadrati respicere, ita ut admittantur quadrata, quorum centra sunt intra figuram, excludantur ea, quorum centra sunt extra figuram, denique arbitrio relinquatur, utrum centra, quae forte in peripheria ipsa sunt, interioribus vel exterioribus adnumerare malimus. Loco centrorum etiam quaevis alia puncta in singulis quadratis similiter sita adoptare possemus.

Hoc pacto res eo redit, ut in plano puncta aequidistantia et in rectis aequidistantibus ita disseminata concipiamus, ut quadrata offerant: quo facto per theorema art. praec. affirmare possumus, multitudinem punctorum in figura contentorum in quadratum distantiae binorum punctorum proximorum multiplicatam areae figurae quam prope velis aequalem evadere, si modo distantia ista satis parva accipiatur, sive ad instar vulgaris loquendi modi, productum illud aream exhibere, si distantia sit infinite parva.

4.

Curva per aequationem inter coordinatas orthogonales p, q hancce

$$app+2bpq+cqq=1$$

expressa, est sectio conica, et quidem ellipsis, si a, c atque $ac-bb$ sunt quantitates positivae: area hac ellipsi circumscripta invenitur $=\frac{\pi}{\sqrt{(ac-bb)}}$. Valor quantitatis $app+2bpq+cqq$ extra ellipsem ubique fit maior quam 1, intra ellipsem minor quam 1, negativus nullibi.

Concipiatur systema punctorum per planum, in quo ellipsis sita est, ita disseminatorum, ut forment quadrata, quorum latera $=\lambda$ axibus coordinatarum sint parallela, ubi nihil refert, utrum initium coordinatarum sive centrum ellipsis cum aliquo horum punctorum coincidat necne. Sit multitudo punctorum intra ellipsem, adnumeratis si quae sunt in ipsa peripheria, $=m$, eritque per theorema art. praec. $\frac{\pi}{\sqrt{(ac-bb)}}$ limes quantitatis $m\lambda\lambda$, ad quem quam prope velis accedit, decrescente λ in infinitum.

Si initium coordinatarum cum aliquo systematis puncto coincidere supponimus, statuendo $p=\lambda x$, $q=\lambda y$, manifesto pro singulis punctis systematis x et y erunt numeri integri, et vice versa quaevis combinatio valorum integrorum

quantitatum x, y respondebit alicui systematis puncto. Hinc numerus m nihil aliud est, nisi multitudo omnium combinationum valorum integrorum quantitatum x, y pro quibus F non fit maior quam M, si brevitatis caussa functionem, seu formam secundi ordinis $axx+2bxy+cyy$ per F, atque quantitatem $\frac{1}{\lambda\lambda}$ per M denotamus. Determinans huius formae est $bb-ac$, pro quo scribemus $-D$. Hoc pacto theorema nostrum iam ita enunciandum erit.

Theorema I. *Multitudo m omnium combinationum valorum integrorum indeterminatarum x, y, pro quibus valor formae determinantis negativi $-D$ limitem M non egreditur, fit $=\frac{\pi M}{\sqrt{D}}$ proxime quidem, sed approximatione in infinitum crescente, dum M crescit in infinitum. Vix erit monendum, approximationem infinitam hic (et perinde in sequentibus) non ita intelligendam, ac si differentia inter $\frac{\pi M}{\sqrt{D}}$ et m ipsa in infinitum decrescat, sed ratio inter has quantitates ad aequalitatem in infinitum appropinquabit, sive $\frac{\pi M}{m\sqrt{D}}-1$ in infinitum decrescet.*

5.

Ad dinumerationem reapse efficiendam ita procedi potest, ut pro singulis valoribus integris ipsius x inter limites $-\sqrt{\frac{cM}{D}}$ atque $+\sqrt{\frac{cM}{D}}$ sitis bini valores ipsius y aequationi $F=M$ respondentes computentur, unde multitudo integrorum inter hos iacentium sponte habetur. Quum haec multitudo eadem sit pro valoribus oppositis ipsius x, laboris dimidia fere parte liberamur. Res ita quoque perfici potest, ut valores ipsius x dinumerentur singulis valoribus ipsius y inter limites $-\sqrt{\frac{aM}{D}}$ atque $+\sqrt{\frac{aM}{D}}$ respondentes. Per combinationem idoneam utriusque methodi labor amplius sublevari potest, quod tamen fusius hic non exsequimur: sufficiat de casu simplicissimo quaedam adiungere.

Sit forma $F=xx+yy$, sive curva circulus, designentque $r, r', r'', r''' \ldots r^{(r)}$ numeros integros proxime minores quam

$$\sqrt{M},\ \sqrt{(M-1)},\ \sqrt{(M-4)},\ \sqrt{(M-9)} \ldots \sqrt{(M-rr)},$$

vel si quae inter has quantitates sunt integri, hos ipsos. Tunc erit multitudo quaesita

$$\begin{aligned} m &= 2r+1+2(2r'+1)+2(2r''+1)+2(2r'''+1)+\text{etc.}+2(2r^{(r)}+1) \\ &= 1+4r+4r'+4r''+4r'''+\text{etc.}+4r^{(r)} \end{aligned}$$

Expeditius autem idem assequimur, denotando per q integrum proxime minorem quam $\sqrt{\tfrac{1}{2}M}$ (vel hanc quantitatem ipsam, si fit numerus integer) adiumento formulae

$$m = 4qq+1+4r+8(r^{(q+1)}+r^{(q+2)}+r^{(q+3)}+\text{etc.}+r^{(r)})$$

Hoc modo eruta sunt sequentia:

M	m	M	m	M	m
100	317	1000	3149	10000	31417
200	633	2000	6293	20000	62845
300	949	3000	9425	30000	94237
400	1257	4000	12581	40000	125629
500	1581	5000	15705	50000	157093
600	1885	6000	18853	60000	188453
700	2209	7000	21993	70000	219901
800	2521	8000	25137	80000	251305
900	2821	9000	28269	90000	282697
1000	3149	10000	31417	100000	314197

6.

Theoremati art. 4 maiorem generalitatem conciliamus sequenti modo.

Theorema II. *Si non omnes combinationes valorum integrorum quantitatum x, y pro quibus F non egreditur valorem M, colligendae sunt, sed tantummodo per saltus, puta eae, ubi x congruus est numero dato G secundum modulum datum g, atque y congruus numero dato H secundum modulum datum h, harum combinationum multitudo m' exprimetur proxime per $\frac{\pi M}{gh\sqrt{D}}$, approximatione in infinitum aucta, dum M in infinitum crescet.*

Revera statuendo $x = gx'+G$, $y = hy'+H$, patet, m' esse multitudinem omnium combinationum valorum integrorum quantitatum x', y', pro quibus

$$agg(x'+\tfrac{G}{g})^2+2bgh(x'+\tfrac{G}{g})(y'+\tfrac{H}{h})+chh(y'+\tfrac{H}{h})^2$$

valorem M non egrediatur. Manifesto igitur si in plano systema punctorum perinde quidem ut in art. 4 disseminatum supponimus, attamen ita ut non initium coordinatarum sed punctum, cuius coordinatae sunt $p = \frac{G\lambda}{g}$, $q = \frac{H\lambda}{h}$, cum aliquo systematis puncto coincidat, m' exprimet multitudinem punctorum intra ellipsin, cuius aequatio est

$$aggpp+2bghpq+chhqq = 1$$

iacentium semper adnumeratis si quae sunt in peripheria ipsa. Cuius ellipsis area $= \frac{\pi}{gh\sqrt{(ac-bb)}} = \frac{\pi}{gh\sqrt{D}}$ erit limes, ad quem productum $m'\lambda\lambda = \frac{m'}{M}$ in infinitum appropinquabit, decrescente λ vel crescente M in infinitum.

Ceterum manifestum est, theorema nostrum complecti casum ubi alterutra indeterminatarum x, y sola per saltus progredi debet, dum alterius valor nulli conditioni subiicietur. Patet enim, hoc idem esse, ac si vel h vel g statuatur $= 1$.

7.

Quae hactenus exposita sunt, ab indole coëfficientium formae $axx+2bxy+cyy$ sunt independentia: abhinc vero supponemus, hosce coëfficientes esse integros. Ita quaevis combinatio valorum integrorum quantitatum x, y ipsi formae valorem integrum conciliabit, sive repraesentationi alicuius numeri integri per istam formam respondebit. Hinc patet, complexum omnium combinationum valorum integrorum quantitatum x, y, per quos forma $F = axx+2bxy+cyy$ valorem non maiorem limite M nanciscatur, esse idem ac complexum omnium repraesentationum numerorum integrorum limitem M non egredientium, sive usque ad hunc limitem incl., si ipse est numerus integer. Quodsi itaque brevitatis gratia multitudinem repraesentationum diversarum numeri determinati integri n per formam F per $F(n)$, vel quatenus ambiguitas non metuenda simpliciter per Fn denotamus, numerus supra per m expressus erit $= F0+F1+F2+F3+\text{etc.}+FM$, theoremaque primum sequentem induit formam.

Theorema III. *Aggregatum $F0+F1+F2+$ etc. $+FM$ proxime exprimitur per $\frac{\pi M}{\sqrt{D}}$, approximatione in infinitum crescente, dum M in infinitum augetur.*

8.

Theoremati tertio repraesentationes *omnium* numerorum spectanti aliud adiungere convenit, solos numeros impares spectans. Manifesto per formam F numeri impares repraesentari nequeunt, si a et c simul sunt numeri pares: quapropter disquisitio ad tres reliquos casus restricta erit.

I. Quoties a est impar, c par, numerus impar repraesentatur, tribuendo ipsi x valorem imparem, valore ipsius y arbitrario manente. Theorema II. itaque, statuendo $g=2$, $G=1$, $h=1$, docet, multitudinem omnium combinationum valorum talium ipsorum x, y, qui formae valorem imparem limite M non maiorem concilient, approximatione infinita exprimi per $\frac{\pi M}{2\sqrt{D}}$, crescente M in infinitum.

II. Quoties a est par, c impar, ad repraesentationem numeri imparis requiritur, ut y sit impar, unde statuendo $g=1$, $h=2$, $H=1$, ad eandem conclusionem deferimur.

III. Quoties tum a tum c impar est, vel valor impar ipsius x cum valore pari ipsius y combinari debet, vel valor par ipsius x cum valore impari ipsius y, ut prodeat valor impar formulae. Multitudo omnium combinationum tum prioris generis tum posterioris, pro quibus valor formae limitem M non egreditur, approximatione infinita per $\frac{\pi M}{4\sqrt{D}}$ exprimitur, quapropter multitudo omnium combinationum, quae formae valores impares limitem M non egredientes producunt, etiam hic approximatione infinita per $\frac{\pi M}{2\sqrt{D}}$ exprimitur.

Iam quum complexus omnium talium combinationum nihil aliud sit, nisi complexus omnium repraesentationum omnium numerorum $1, 3, 5, 7 \ldots M$, quoties M est integer impar, vel $1, 3, 5, 7 \ldots M-1$, quoties M est par, habemus

Theorema IV. *Aggregatum*

$$F1+F3+F5+F7 \ldots + FM \quad \text{vel} \quad F1+F3+F5+F7 \ldots + F(M-1)$$

(prout M impar est vel par) approximatione infinita exprimitur per $\frac{\pi M}{2\sqrt{D}}$, siquidem F est forma, in qua alteruter coëfficientium a, c vel uterque est impar.

[III.]

Es sei C der Complexus der Repräsentanten sämmtlicher Classen der formae proprie primitivae für den Determinant $-D$. Wir bezeichnen durch (n) die Anzahl aller Darstellungen der Zahl n durch Formen aus dem Complexus C. Es sei p eine ungerade Primzahl. Dann ist

1. $(pn) = (n)$ wenn p ein Divisor von D

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ (pn) = (n)+(h) \\ 3.\ (pn) = -(n)+(h) \end{array}\right\} \text{wenn } p \text{ Nichtdivisor von } D \left\{\begin{array}{l} \text{Divisor von } xx+D \\ \text{Nichtdivisor von } xx+D \end{array}\right.$$

wo $n = hp^\mu$, μ beliebig und h nicht durch p theilbar.

Im Fall 1. ist $(h) = (ph) = (pph) = (p^3h)$ etc.

2. $(ph) = 2(h)$, $(pph) = 3(h)$, $(p^3h) = 4(h)$ etc.

3. $(ph) = 0$, $(pph) = (h)$, $(p^3h) = 0$, $(p^4h) = (h)$ etc.

* * *

Aus jeder Classis pr. pr. für den Determinans $= -D$, deren Anzahl $= \lambda$, sei eine Form ausgewählt, und der Complexus dieser Formen sei L.

Man bezeichne durch fA die Anzahl sämmtlicher Darstellungen der Zahl A durch Formen aus L.

Es sei ferner $f(A;p) = f\frac{A}{p^\alpha}$, wenn p^α die höchste Potenz der Primzahl p ist, welche A misst; ferner $f(A;p,q) = f\frac{A}{p^\alpha q^\beta}$, wenn q eine andere Primzahl, deren höchste A messende Potenz $= q^\beta$ und so ferner $f(A;p,q,r) = f\frac{A}{p^\alpha q^\beta r^\gamma}$ wenn r eine dritte Primzahl, deren höchste Potenz A messend r^γ ist u. s. w.

[IV.]

Man bezeichne durch (n) die Anzahl der Werthe x aus dem Complexus

$$0, 1, 2, 3, 4 \ldots p^n - 1$$

für welche $xx - D = xx - ap^\mu$ durch p^n theilbar ist.

1) μ ungerade z. B. $= 7$. 2) μ gerade z. B. $= 6$

	aNp	aRp
$(1) = 1$		
$(2) = p$	$(1) = 1$	$(1) = 1$
$(3) = p$	$(2) = p$	$(2) = p$
$(4) = pp$	$(3) = p$	$(3) = p$
$(5) = pp$	$(4) = pp$	$(4) = pp$

$(6) = p^3$	$(5) = pp$	$(5) = pp$
$(7) = p^3$	$(6) = p^3$	$(6) = p^3$
$(8) = 0$	$(7) = 0$	$(7) = 2p^3$
$(9) = 0$	$(8) = 0$	$(8) = 2p^3$
etc.	etc.	etc.

Man mache nun | Dann ist

$$\begin{array}{ll} (1) - \frac{(2)}{p} = (1)' & fp = (1)' \\ (2) - \frac{(3)}{p} = (2)' & fpp = 1 + (2)' \\ (3) - \frac{(4)}{p} = (3)' & fp^3 = (1)' + (3)' \\ (4) - \frac{(5)}{p} = (4)' & fp^4 = 1 + (2)' + (4)' \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Es ist folglich, $\frac{p-1}{p}\left(1 + \frac{fp}{p} + \frac{fpp}{pp} + \frac{fp^3}{p^3} + \text{etc.}\right) = T$ gesetzt,

$$\frac{p+1}{p}\,T = 1 + \frac{(1)'}{p} + \frac{(2)'}{pp} + \frac{(3)'}{p^3} + \frac{(4)'}{p^4} + \text{etc.} = 1 + \frac{(1)}{p} = 1 + \frac{1}{p}$$

Also $T = 1$

[V.]

Multitudo classium mediocris *) circa determinantem negativum $-D$ est proxime

$$= \frac{\pi\sqrt{D}}{4\left(1 + \frac{1}{27} + \frac{1}{125} + \text{etc.}\right)}$$

Multitudo vera exprimitur sequentibus formulis, ubi brevitatis caussa scribitur m pro multitudine mediocri, M pro vera; p, q exprimunt omnes numeros impares primos ipsum D non metientes, ille divisores, hic non-divisores ipsius $\Box + D$; r numeros **) primos ipsum D metientes:

*) [Vergl. *Disquiss. Arithm.* art. 302; die dortige Formel weicht um eine Constante $\frac{2}{\pi}$ von der hier im Text vorkommenden ab.]

**) [impares.]

I.	$M = m$ Prod. ex $\frac{p^3+p^2}{p^3-1} \cdot \frac{q^3-q^2}{q^3-1} \cdot \frac{r^3-r}{r^3-1}$
II.	$M = \frac{\pi\sqrt{D}}{4}$ Prod. ex $\frac{p+1}{p} \cdot \frac{q-1}{q} \cdot \frac{rr-1}{rr}$
III. NB.	$M = \frac{2\sqrt{D}}{\pi}$ Prod. ex $\frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q+1}$
IV.	$M = \sqrt{\left\{\frac{D}{2} \cdot \text{Prod. ex } \frac{p+1}{p-1} \cdot \frac{q-1}{q+1} \cdot \frac{rr-1}{rr}\right\}}$
V.	$M = \frac{2\sqrt{D}}{\pi}\left\{1 \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{5} \pm \frac{1}{7} \pm \frac{1}{9} \text{ etc.}\right\}$

NB. Die Formel III wird unmittelbar aus der Vergleichung der beiden Arten, die darstellbaren Zahlen bis zu einer gewissen Grenze zu zählen, abgeleitet.

[VI.]

Theorema. Multitudo classium, in quas omnes formae binariae proprie primitivae determinantis negativi $-D$ *) aequalis est

$$\frac{\pi}{4} \times \sqrt{D} \times \text{Prod. ex.} \frac{p-1}{p}\,\frac{q+1}{q} \times \frac{rr-1}{rr}$$

designantibus

p omnes numeros primos **) quorum non-res. est $-D$
q omnes numeros primos **) quorum res. $-D$
r omnes numeros primos **) ipsum D metientes

$$= \frac{\frac{\pi}{4}\sqrt{D}\ \text{Prod. ex}\ \frac{rr-1}{rr}}{1 \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{5} \text{ etc.}}$$

ubi in denom. signum posit. praeponitur fractt., quarum denom. sunt in forma non divis.; negat. iis, quarum denom. sunt in forma divisorum ipsius $xx + D$; eae vero, quarum denom. ad D non forent primi, omnino omittuntur ***).

*) [distribuuntur.]

**) [impares.]

***) [Bezeichnet man mit m alle positiven ganzen Zahlen, die relative Primzahlen zu $2D$ sind, und benutzt man das durch Jacobi verallgemeinerte Symbol von Legendre, so ist die obige Regel für die Zeichenbestimmung in folgender Weise zu berichtigen: in der vorhergehenden Formel ist der Nenner

$$= \frac{2\sqrt{D}(1 \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{5} \ldots)}{\pi} = \frac{\operatorname{cotg}\theta \pm \operatorname{cotg} 3\theta \pm \operatorname{cotg} 5\theta \ldots \pm \operatorname{cotg} n\theta}{N : \sqrt{D}}$$

ponendo $\theta = \frac{\pi}{N}$, $N = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix} \right\} D$ et ponendo pro n omnes numeros ad D primos signo ut supra determinato*).

Pro determ. pos. erit mult. Classium**)

$$= \frac{2\sqrt{D}(1 \pm \frac{1}{3} \pm \frac{1}{5} \ldots)}{\log . T + U\sqrt{D}}$$

Designantibus T, U valores minimos quantitatum t, u aequationi $tt - Duu = 1$ satisfacientes

$$= \frac{\log \sin \frac{1}{2}\theta \pm \log \sin \frac{3}{2}\theta \pm \log \sin \frac{5}{2}\theta \text{ etc.}}{\log T + U\sqrt{D}}$$

[VII.]

Pro determinante negativo $-p$, qui***) est numerus primus formae $4n+1$, multitudo classium est†) $\equiv (\alpha - \beta)$, ubi α multitudo residuorum quadraticorum in quadrante primo

$$1 . 2 . 3 \ldots . \tfrac{1}{4}(p-1)$$

β multitudo non-residuorum.

$$1 \pm \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{5} \text{ etc.} = \Sigma \pm \left(\frac{-D}{m}\right)\frac{1}{m}$$

wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem die Zahl m ein Product aus einer geraden oder ungeraden Anzahl (gleicher oder ungleicher) Primzahlen ist; dagegen ist im Zähler der nachfolgenden Formel

$$1 \pm \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{5} \ldots = \Sigma \left(\frac{-D}{m}\right)\frac{1}{m}]$$

*) [Siehe die weiter unten folgende Note zu diesem Fragment.]

**) [In der nachfolgenden Formel bedeutet D den positiven Determinanten, und es ist

$$1 \pm \tfrac{1}{3} \pm \tfrac{1}{5} \ldots = \Sigma \left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}]$$

***) [d. h. wenn p eine positive Primzahl von der Form $4n+1$ ist.]

†) [multitudo classium est $= 2(\alpha - \beta)$.]

[VIII.]

$$b \equiv 2m + a - 1 \pmod{8}$$

wo m die [halbe] Anzahl der Classen für den Determinans $-p$

p	m	a	b	f	$\frac{2m+a-1-b}{8}$	α	β
17	2	+1	−4	−4	+1	3	2
41	4	+5	+4	+9	+1	3	4
73	2	−3	−8	+27	+1	1	6
89	6	+5	−8	+34	+3	9	2
97	2	+9	+4	+22	+1	5	6
113	4	−7	+8	+15	−1	9	4
137	4	−11	+4	+37	−1	3	8
193	2	−7	+12	+81	−2	11	6
233	6	+13	+8	+144	+2	15	2
241	6	+15	+4	+64	−1	13	6
257	8	+1	+16	+16	0	15	4
281	10	+5	−16	+53	+5	9	10
313	4	+13	−12	−25	+1	5	12
337	4	+9	+16	−148	0	7	12
353	8	+17	+8	+42	+3	15	8
5	1	+1	+2	+2	0		
13	1	−3	−2	+5	0		
29	3	+5	+2	+12	+1		
37	1	+1	−6	−6	+1		
53	3	−7	−2	+23	0		
61	3	+5	−6	+11	+2		
101	7	+1	−10	−10	+3		
109	3	−3	+10	+33	−1		
149	7	−7	−10	+44	+2		
157	3	−11	−6	−28	0		
173	7	+13	+2	+80	+3		
181	5	+9	+10	−19	+1		
197	5	+1	−14	−14	+3		
229	5	−15	+2	−107	−1		
269	11	+13	+10	−82	+3		
277	3	+9	+14	−60	0		
293	9	+17	+2	+138	+4		
317	5	−11	+14	+114	−2		
349	7	+5	+18	−136	0		
373	5	−7	+18	+104	−2		
389	11	+17	−10	−115	+6		
397	3	−19	−6	+63	−1		

[IX.]

Vertheilung der quadratischen Reste in Octanten.

p Primzahl; (r) Anzahl der quadratischen Reste von p, welche zwischen $(r-1)\frac{p}{8}$ und $r\frac{p}{8}$ liegen.

Erster Fall; $p = 8n+1$.

$2t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$;

$2u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-2p$.

$$(1) = (8) = \tfrac{1}{4}(2n+t+u)$$
$$(2) = (4) = (5) = (7) = \tfrac{1}{4}(2n+t-u)$$
$$(3) = (6) = \tfrac{1}{4}(2n-3t+u)$$

p	$2n$	t	u	(1)	(2)	(3)	p	$2n$	t	u	(1)	(2)	(3)
17	4	2	2	2	1	0	233	58	6	4	17	15	11
41	10	4	2	4	3	0	241	60	6	10	19	14	13
73	18	2	8	7	3	5	257	64	8	8	20	16	12
89	22	6	4	8	6	2	281	70	10	4	21	19	11
97	24	2	10	9	4	7	313	78	4	18	25	16	21
113	28	4	4	9	7	5	337	84	4	12	25	19	21
137	34	4	6	11	8	7	353	88	8	12	27	21	19
193	48	2	10	15	10	13	401	100	10	6	29	26	19

Zweiter Fall; $p = 8n+5$.

$2t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$;

$2u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-2p$.

$$(1) = (3) = (6) = (8) = \tfrac{1}{4}(2n-t+u)$$
$$(2) = (7) = \tfrac{1}{4}(2n+3t-u+2)$$
$$(4) = (5) = \tfrac{1}{4}(2n-t-u+2)$$

p	$2n$	t	u	(1)	(2)	(4)	p	$2n$	t	u	(1)	(2)	(4)
5	0	1	1	0	1	0	181	44	5	9	12	13	8
13	2	1	3	1	1	0	197	48	5	5	12	15	10
29	6	3	1	1	4	1	229	56	5	13	16	15	10
37	8	1	5	3	2	1	269	66	11	5	15	24	13
53	12	3	3	3	5	2	277	68	3	11	19	17	14
61	14	3	5	4	5	2	293	72	9	9	18	23	14
101	24	7	3	5	11	4	317	78	5	7	20	22	17
109	26	3	5	7	8	5	349	86	7	13	23	24	17
149	36	7	3	8	14	7	373	92	5	13	25	24	19
157	38	3	13	12	9	6	389	96	11	7	23	31	20
173	42	7	5	10	15	8	397	98	3	21	29	22	19

Dritter Fall; $p = 8n+3$.

t Anzahl der Classen für den Determinans $-p$

$2u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-2p$.

$$(1) = (4) = (7) = \tfrac{1}{4}(2n+t-u)$$
$$(2) = (5) = (8) = \tfrac{1}{4}(2n-t+u)$$
$$(3) \qquad\qquad = \tfrac{1}{4}(2n+t+u+2)$$
$$(6) \qquad\qquad = \tfrac{1}{4}(2n-t-u+2)$$

p	$2n$	t	u	(1)	(2)	(3)	(6)	p	$2n$	t	u	(1)	(2)	(3)	(6)
3	0	1	1	0	0	1	0	163	40	3	11	8	12	14	7
11	2	3	1	1	0	2	0	179	44	15	3	14	8	16	7
19	4	3	3	1	1	3	0	211	52	9	5	14	12	17	10
43	10	3	5	2	3	5	1	227	56	15	7	16	12	20	9
59	14	9	3	5	2	7	1	251	62	21	7	19	12	23	9
67	16	3	7	3	5	7	2	283	70	9	15	16	19	24	12
83	20	9	5	6	4	9	2	307	76	9	17	17	21	26	13
107	26	9	3	8	5	10	4	331	82	9	11	20	21	26	16
131	32	15	3	11	5	13	4	347	86	15	5	24	19	27	17
139	34	9	7	9	8	13	5	379	94	9	11	23	24	29	19

Vierter Fall; $p = 8n+7$.

t Anzahl der Classen für den Determinans $-p$;

$2u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-2p$.

$$(1) \qquad\qquad = \tfrac{1}{4}(2n+2t-u)$$
$$(2) = (3) = (5) = \tfrac{1}{4}(2n \quad +u+2)$$
$$(4) = (6) = (7) = \tfrac{1}{4}(2n \quad -u+2)$$
$$(8) \qquad\qquad = \tfrac{1}{4}(2n-2t+u)$$

p	$2n$	t	u	(1)	(2)	(4)	(8)	p	$2n$	t	u	(1)	(2)	(4)	(8)
7	0	1	2	0	1	0	0	191	46	13	4	17	13	11	6
23	4	3	2	2	2	1	0	199	48	9	10	14	15	10	10
31	6	3	4	2	3	1	1	223	54	7	16	13	18	10	14
47	10	5	4	4	4	2	1	239	58	15	4	21	16	14	8
7	16	7	2	7	5	4	1	263	64	13	6	21	18	15	11
79	18	5	4	6	6	4	3	271	66	11	12	19	20	14	14
103	24	5	10	6	9	4	6	311	76	19	6	27	21	18	11
127	30	5	8	8	10	6	7	359	88	19	6	30	24	21	14
151	36	7	6	11	11	8	7	367	90	9	20	22	28	18	23
167	40	11	6	14	12	9	6	383	94	17	12	29	27	21	18

[X.]

Vertheilung der quadratischen Reste in Zwölftel.

p Primzahl; (r) Anzahl der quadratischen Reste von p, welche zwischen $\frac{r-1}{12}p$ und $\frac{r}{12}p$ liegen.

Erster Fall; $p = 24n+1$.

$2t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$

$4u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-3p$

$$(1) = (12) = \tfrac{1}{6}(6n+3t+2u)$$
$$(2) = (4) = (6) = (7) = (9) = (11) = \tfrac{1}{6}(6n-3t+2u)$$
$$(3) = (5) = (8) = (10) = \tfrac{1}{6}(6n+3t-4u)$$

p	n	t	u	(1)	(2)	(3)
73	3	2	3	5	3	2
97	4	2	3	6	4	3
193	8	2	6	11	9	5
241	10	6	3	14	8	11

Zweiter Fall; $p = 24n+13$.

$2t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$;

$4u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-3p$.

$$(1) = (3) = (10) = (12) = \tfrac{1}{2}(2n+1+t)$$
$$(2) = (6) = (7) = (11) = \tfrac{1}{2}(2n+1-t)$$
$$(4) = (9) = \tfrac{1}{2}(2n+1-t+2u)$$
$$(5) = (8) = \tfrac{1}{2}(2n+1+t-2u)$$

p	n	t	u	(1)	(2)	(4)	(5)
13	0	1	1	1	0	1	0
37	1	1	2	2	1	3	0
61	2	3	2	4	1	3	2
109	4	3	3	6	3	6	3
157	6	3	4	8	5	9	4
181	7	5	3	10	5	8	7
229	9	5	3	12	7	10	9

Dritter Fall; $p = 24n+5$.

$2t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$;

$2u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-3p$.

$$(1) = (2) = (6) = (7) = (11) = (12) = n$$
$$(3) = (10) = \tfrac{1}{2}(2n+1+t)$$
$$(4) = (9) = \tfrac{1}{2}(2n-t+u)$$
$$(5) = (8) = \tfrac{1}{2}(2n+1-u)$$

p	n	t	u	(1)	(3)	(4)	(5)
5	0	1	1	0	1	0	0
29	1	3	3	1	3	1	0
53	2	3	5	2	4	3	0
101	4	7	5	4	8	3	2
149	6	7	7	6	10	6	3
173	7	7	9	7	11	8	3
197	8	5	11	8	11	11	3
269	11	11	7	11	17	9	8

Vierter Fall; $p = 24n+17$.

$2t$ Anzahl der Classen für den Determinans $-p$;

$2u$ Anzahl der Classen für den Determinans $-3p$.

$$(1) = (2) = (6) = (7) = (11) = (12) = \tfrac{1}{6}(6n+3+u)$$
$$(3) = (10) = \tfrac{1}{6}(6n+6+3t-2u)$$
$$(4) = (9) = \tfrac{1}{6}(6n+3-3t+u)$$
$$(5) = (8) = \tfrac{1}{6}(6n+6-2u)$$

p	n	t	u	(1)	(3)	(4)	(5)
17	0	2	3	1	1	0	0
41	1	4	3	2	3	0	1
89	3	6	3	4	6	1	3
113	4	4	9	6	4	4	2
137	5	4	9	7	5	5	3
233	9	6	15	12	8	9	5
257	10	8	9	12	12	8	8

BEMERKUNGEN ZUR ABHANDLUNG

DE NEXU INTER MULTITUDINEM CLASSIUM, IN QUAS FORMAE BINARIAE SECUNDI GRADUS DISTRIBUUNTUR, EARUMQUE DETERMINANTEM.

Zu I. und II.

Die zweite Formel für die Anzahl der innerhalb des Kreises liegenden Punkte (I. art. 3 und II. art. 5) ergiebt sich aus der Betrachtung des in denselben eingeschriebenen Quadrates, dessen Seiten den Coordinatenaxen parallel sind; die Vergleichung beider Formeln führt zu dem auch arithmetisch leicht zu beweisenden Satze

$$r' + r'' + \ldots + r^{(\varrho)} = \varrho\varrho + r^{(\varrho+1)} + r^{(\varrho+2)} + \ldots + r^{(r)}$$

aus welchem sich wieder die Richtigkeit der ersten von den beiden folgenden Regeln ergiebt, die sich auf einem besondern Blatt vorfanden:

„Auflösungen der Gleichung $xx + yy \leqq A$; formula

$$1 + 4\sqrt{A} + 4\sqrt{\tfrac{1}{2}A} + 8\Sigma(\sqrt{(A - nn)} - n)$$

wo bei jeder Wurzel der Bruch weggelassen und von $n = 1$ bis $n = \sqrt{A}$ „(soll heissen $\sqrt{\tfrac{1}{2}A}$)" summirt wird.

Andre Formel

$$1 + 4\left\{A - \frac{A}{3} + \frac{A}{5} - \frac{A}{7} + \frac{A}{9} - \frac{A}{11} \ldots\right\}$$

wo bei jedem Theil der Bruch weggelassen."

Diese letztere Formel folgt aus dem später (I. art. 6) zur Anwendung kommenden Satze über die Anzahl aller verschiedenen Darstellungen einer bestimmten Zahl durch die Form $xx + yy$ (vergl. Disqq. Arithm. art. 182, Note), welcher leicht in den folgenden umgeformt werden kann: die Anzahl der verschiedenen Darstellungen einer positiven ganzen Zahl m durch die Form $xx + yy$ ist $= 4(a - b)$, wo a, b die Anzahlen der Divisoren von m bedeuten, welche resp. von der Form $4n + 1$, $4n + 3$ sind. Aus der Vergleichung

dieser arithmetischen Formel mit der (in I. art. 5 oder II. art. 4) durch geometrische Betrachtungen gewonnenen mittlern Darstellungsanzahl erhält man leicht und in aller Strenge das bekannte Resultat

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots$$

welches in der Abhandlung (I. art. 7) durch eine ähnliche Vergleichung, aber mit Hülfe unendlicher Producte abgeleitet wird.

Zu III. und IV.

Ist C der Complex aller positiven, nicht eigentlich-äquivalenten formae proprie primitivae von negativem Determinant $-D$, und legt man den Variabeln dieser Formen je zwei Werthe bei, welche relative Primzahlen zu einander sind, so ist die Anzahl aller Darstellungen einer positiven ganzen Zahl m gleich $\varepsilon\psi(m)$; wo ε die Anzahl der Auflösungen der Gleichung $tt + Duu = 1$, und $\psi(m)$ die Anzahl derjenigen Wurzeln n der Congruenz $nn + D \equiv 0 \pmod{m}$ bedeutet, für welche die drei Zahlen m, $2n$ und $\frac{nn + D}{m}$ ohne gemeinschaftlichen Divisor sind (Disqq. Arithm. art. 180). Der Factor ε ist $= 4$ für $D = 1$, in allen andern Fällen $= 2$. Ist ferner $m = p^{\pi} p'^{\pi'} p''^{\pi''} \ldots$, wo $p, p', p'' \ldots$ von einander verschiedene Primzahlen bedeuten, so ist $\psi(m) = \psi(p^{\pi})\psi(p'^{\pi'})\psi(p''^{\pi''}) \ldots$; bedeutet $\mathfrak{A}(m)$ die Anzahl aller Wurzeln n der Congruenz $nn + D \equiv 0 \pmod{m}$, und bedient man sich des von Legendre eingeführten, von Jacobi verallgemeinerten Zeichens, so ist $\psi(p^{\pi}) = \mathfrak{A}(p^{\pi}) = 1 + \left(\frac{-D}{p}\right)$, wenn p nicht in $2D$ aufgeht, sonst aber $= \mathfrak{A}(p^{\pi}) - \frac{1}{p}\mathfrak{A}(p^{\pi+2})$; die Anzahl $\mathfrak{A}(p^{\pi})$ lässt sich immer leicht bestimmen (Disqq. Arithm. art. 104), für die Folge reicht aber die Bemerkung aus, dass $\mathfrak{A}(p^{\pi})$ immer von π unabhängig wird, sobald π eine gewisse Grösse überschreitet.

Legt man den Variabeln der in dem Complex C enthaltenen Formen alle ganzzahligen Werthe ohne Ausnahme bei (Disqq. Arithm. art. 181), so wird die Anzahl (m) aller Darstellungen der Zahl m gleich $\varepsilon f(m)$, wo $f(m) = \Sigma\psi\left(\frac{m}{\mu\mu}\right)$ ist, und das Summenzeichen sich auf alle quadratischen Divisoren $\mu\mu$ der Zahl m bezieht. Hieraus folgt unmittelbar

$$f(m) = f(p^{\pi} p'^{\pi'} p''^{\pi''} \ldots) = f(p^{\pi}) f(p'^{\pi'}) f(p''^{\pi''}) \ldots$$

und

$$f(p^{\pi}) = \psi(p^{\pi}) + \psi(p^{\pi-2}) + \psi(p^{\pi-4}) + \ldots$$

welche Reihe so lange fortzusetzen ist, als die Exponenten π, $\pi - 2$, $\pi - 4 \ldots$ nicht negativ werden. Wenn p nicht in $2D$ aufgeht, so folgt hieraus

$$f(p^{\pi}) = 1 + \left(\frac{-D}{p}\right) + \left(\frac{-D}{pp}\right) + \ldots + \left(\frac{-D}{p^{\pi}}\right)$$

und allgemein, wenn m relative Primzahl zu $2D$ ist,

$$f(m) = \Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Divisoren n der Zahl m bezieht.

Aus diesen Bemerkungen ergiebt sich unmittelbar die Richtigkeit der im Text (III, 1, 2, 3) aufgestellten Sätze über die Anzahl (m), wenn man für den ersten derselben noch die Bedingung hinzufügt, dass D nicht durch pp theilbar sein darf (die Bestimmung der Classenanzahl ist schon in den Disqq. Arithm. art. 256 auf den Fall zurückgeführt, in welchem D durch kein Quadrat theilbar ist). Zugleich findet man, auch ohne Rücksicht auf diese Beschränkung, dass die unendliche Reihe

$$1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(pp)}{pp}+\frac{f(p^3)}{p^3}+\ldots$$

den Werth

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p}} \text{ oder } \frac{1}{1-\frac{1}{p}}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-D}{p}\right)\frac{1}{p}}$$

hat, je nachdem $2D$ durch die Primzahl p theilbar oder nicht theilbar ist.

Zu V.

Die zu der Formel III hinzugefügte Bemerkung gibt den Weg an, auf welchem der Verf. zur Bestimmung der Anzahl k der in dem Complex C enthaltenen Formen gelangt ist. Aus geometrischen Betrachtungen (vergl. I. art. 5 und II. art. 4) ergiebt sich, dass der Grenzwerth, welchem sich der Quotient

$$\frac{(1)+(2)+(3)+\ldots+(m)}{m}$$

mit unbegrenzt wachsendem m nähert, d. h. die mittlere Anzahl der Darstellungen einer unbestimmten positiven ganzen Zahl

$$= k\frac{\pi}{\sqrt{D}}$$

ist; ein zweiter Ausdruck für denselben Grenzwerth lässt sich auf verschiedene Arten aus der Natur der im Vorhergehenden bestimmten Anzahl $(m)=\varepsilon f(m)$ der Darstellungen der Zahl m ableiten. Der zu diesem Zweck von dem Verf. zunächst eingeschlagene Weg scheint nach den vorhandenen Bruchstücken (I. artt. 7, 8; III und IV) folgender gewesen zu sein.

Ist $\vartheta(m)$ irgend eine Function der positiven ganzen Zahl m, und p irgend eine Primzahl, so kann man aus $\vartheta(m)$ immer eine neue Function $\vartheta'(m)$ ableiten, deren Werth unabhängig davon ist, ob und wie oft p als Factor in m enthalten ist, und welche für alle durch p nicht theilbaren Zahlen m mit $\vartheta(m)$ übereinstimmt; eine solche Function erhält man, wenn man $\vartheta'(m)=\vartheta\left(\frac{m}{p^\pi}\right)$ setzt, wo p^π die höchste in m aufgehende Potenz von p bedeutet; und man kann sagen, dass die Function $\vartheta'(m)$ aus $\vartheta(m)$ durch Elimination der Primzahl p entsteht. Bildet man auf diese Weise aus $f(m)$ eine neue Function $f'(m)$ durch Elimination der Primzahl 2, aus dieser die Function $f''(m)$ durch Elimination von 3 u.s.f., so wird jede folgende dieser Functionen einen regelmässigern Verlauf haben, als die vorhergehenden; eliminirt man eine Primzahl nach der andern, wie sie ihrer Grösse nach auf einander folgen, so wird eine solche Function

$\vartheta(m)$ für unendlich viele Werthe von m den Werth $f(1)=1$ haben, und namentlich für alle diejenigen Werthe von m, welche kleiner sind als die zuletzt eliminirte Primzahl. Durch unendliche Fortsetzung dieses Processes nähert man sich immer mehr der Function $f^\infty(m)$, welche für alle Werthe von m den Werth 1 hat, und deren mittlerer Werth folglich ebenfalls $=1$ ist. Gelingt es nun den mittlern Werth irgend einer Function $\vartheta(m)$ durch denjenigen der nächstfolgenden $\vartheta'(m)$ auszudrucken, so wird man auch den mittlern Werth der Function $f(m)$ durch eine unendliche Kette von Operationen finden können.

Ist p die Primzahl, durch deren Elimination $\vartheta'(m)$ aus $\vartheta(m)$ entsteht, so ist $\vartheta(m)=\vartheta'(m)f(p^\pi)$, wenn p^π wieder die höchste in m aufgehende Potenz von p bedeutet. Für den Fall, dass p nicht in $2D$ aufgeht, findet man hieraus leicht, dass

$$\vartheta'(m)=\vartheta(mp)-\left(\frac{-D}{p}\right)\vartheta(m)$$

ist; setzt man zur Abkürzung

$$\Theta(m)=\vartheta(1)+\vartheta(2)+\ldots+\vartheta(m)$$
$$\Theta'(m)=\vartheta'(1)+\vartheta'(2)+\ldots+\vartheta'(m)$$

so ergiebt sich

$$\Theta'(mp)=\Theta(mp)-\left(\frac{-D}{p}\right)\Theta(m)$$

und hieraus, wenn man mit ϖ, ϖ' resp. die mittlern Werthe der Functionen $\vartheta(m)$, $\vartheta'(m)$ bezeichnet,

$$\varpi=\frac{\varpi'}{1-\left(\frac{-D}{p}\right)\frac{1}{p}}$$

Wenn aber die Primzahl p in $2D$ aufgeht, so findet zwar zwischen den Functionen $\vartheta(m)$ und $\vartheta'(m)$ im Allgemeinen keine so einfache Beziehung mehr Statt; indessen ergiebt sich auf ähnliche Art leicht, dass in diesem Fall $\varpi=\varpi'$ ist. Ein anderer Weg, die Beziehung zwischen ϖ und ϖ' in beiden Fällen abzuleiten, ist folgender. Setzt man

$$\vartheta[m]=\Sigma\vartheta(\mu)$$

wo das Summenzeichen sich auf alle Zahlen μ bezieht, die nicht durch p theilbar und ausserdem nicht grösser als m sind, und bezeichnet man mit m', m'', m''' ... resp. die grössten in $\frac{m}{p}$, $\frac{m'}{p}$, $\frac{m''}{p}$ ... enthaltenen ganzen Zahlen, so ist

$$\Theta(m)=\vartheta[m]+\vartheta[m']f(p)+\vartheta[m'']f(pp)+\vartheta[m''']f(p^3)+\ldots$$
$$\Theta'(m)=\vartheta[m]+\vartheta[m']+\vartheta[m'']+\vartheta[m''']+\ldots$$

und hieraus folgt

$$\frac{\varpi}{\varpi'}=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left\{1+\frac{f(p)}{p}+\frac{f(pp)}{pp}+\frac{f(p^3)}{p^3}+\ldots\right\}$$

was mit dem eben gefundenen Resultat übereinstimmt (vergl. die Note zu III und IV).

Der mittlere Werth der Function $f(m)$ ist daher gleich dem unendlichen Product

$$\Pi\frac{1}{1-\left(\frac{-D}{p}\right)\frac{1}{p}}$$

in welchem p alle in $2D$ nicht aufgehenden Primzahlen durchlaufen muss, und hieraus folgt

$$k = \frac{\varepsilon\sqrt{D}}{\pi} \Pi \frac{1}{1-\left(\frac{-D}{p}\right)\frac{1}{p}}$$

Hinsichtlich der Strenge dieser Deduction bleibt aber ein Bedenken übrig, welches sich auf die Methode bezieht, den mittlern Werth der Function $f(m)$ durch successive Elimination aller Primzahlen zu bestimmen; denn wenn es auch einleuchtet, dass der Werth der durch Elimination der ersten n Primzahlen erhaltenen Function $f^{(n)}(m)$ mit dem der Function $f^{\infty}(m) = 1$ übereinstimmt, so lange m kleiner bleibt als die zuletzt eliminirte Primzahl, und dass also durch die Wahl eines hinreichend grossen Werthes n diese Uebereinstimmung bis zu jeder vorher vorgeschriebenen Grösse der Zahl m getrieben werden kann, so ist hiermit allein doch keineswegs erwiesen, dass mit unbegrenzt wachsendem n der mittlere Werth der Function $f^{(n)}(m)$ sich dem mittlern Werthe der Function $f^{\infty}(m)$, d. h. dem Werthe 1 unbegrenzt nähert. In welcher Weise der Verf. diese Lücke auszufüllen beabsichtigte, lässt sich aus den vorhandenen Papieren nicht mit Sicherheit erkennen; doch führt die schon oben (in der Note zu I) mitgetheilte Formel

$$1 + 4\left\{A - \frac{A}{3} + \frac{A}{5} - \frac{A}{7} + \frac{A}{9} - \frac{A}{11} \dots\right\}$$

für die Anzahl der Paare von Zahlen, deren Quadratsumme den Werth A nicht übertrifft, zu der Vermuthung, dass der Verf., mit Umgehung des unendlichen Productes, für den mittlern Werth der Function $f(m)$ unmittelbar die unendliche Reihe

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n}$$

gefunden hat, in welcher n der Grösse nach alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen muss, die relative Primzahlen zu $2D$ sind. Die einfachste Art, diesen Uebergang anzudeuten, scheint die folgende zu sein.

Ist μ der grösste aller derjenigen Divisoren einer Zahl m, welche relative Primzahlen zu $2D$ sind, und setzt man $\vartheta(m) = f(\mu)$, so ist $\vartheta(m)$ diejenige Function, welche durch Elimination aller in $2D$ aufgehenden Primzahlen aus $f(m)$ entsteht, und deren mittlerer Werth nach dem Obigen mit demjenigen der Function $f(m)$ übereinstimmt. Da nun $\vartheta(m) = \Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)$ ist, wo n alle Divisoren von μ, d. h. alle diejenigen Divisoren von m durchläuft, welche relative Primzahlen zu $2D$ sind, so ergibt sich die der obigen analoge Formel

$$\Theta(m) = \vartheta(1) + \vartheta(2) + \dots + \vartheta(m) = \Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{m}{n}$$

wo in der Summe rechter Hand der Buchstabe n alle relativen Primzahlen zu $2D$ durchläuft, und von dem Quotienten $\frac{m}{n}$ immer nur die grösste in ihm enthaltene ganze Zahl beizubehalten ist. Ordnet man die Glieder dieser Reihe so, dass die Zahlen n ihrer Grösse nach wachsend auf einander folgen, so nimmt der Factor $\frac{m}{n}$ fortwährend ab oder doch wenigstens nie zu, und die Reihe bricht ab, sobald $n > m$ wird. Ausserdem ergiebt sich aus dem Fundamentaltheorem in der Theorie der quadratischen Reste und aus der Verallgemeinerung desselben, dass die Summe von je $\varphi(4D)$ auf einander folgenden Werthen des Factors $\left(\frac{-D}{n}\right)$ verschwindet, woraus folgt, dass die Summe von noch so vielen auf einander folgenden Werthen

desselben ihrem absoluten Werth nach die endliche, nur von dem Determinant D abhängige Grösse $\Delta = \varphi(2D)$ niemals übertrifft. Verbindet man diese beiden Bemerkungen mit einander, so findet man leicht, dass die Summe aller auf das Glied $\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{m}{n}$ folgenden Glieder absolut genommen kleiner als $\Delta\frac{m}{n}$ ist, und dass folglich der Quotient $\Theta(m):m$ bei unendlich wachsendem m die in der angegebenen Art geordnete, convergirende unendliche Reihe

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n}$$

zum Grenzwerth hat. Nachdem so der gemeinschaftliche mittlere Werth der Functionen $\vartheta(m)$ und $f(m)$ gefunden ist, erhält man unmittelbar

$$k = \frac{\varepsilon\sqrt{D}}{\pi}\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n}$$

Es verdient noch bemerkt zu werden, dass die Artikel 6 und 8 der Abhandlung II auf eine in mancher Beziehung einfachere und auch leicht auszuführende Behandlungsweise des Problems hindeuten, bei welcher nur die Darstellungen ungerader oder sogar nur solcher Zahlen betrachtet werden, die relative Primzahlen zu $2D$ sind.

Zu VI und VII.

Die Art, wie der Verf. die Summation der Reihe $\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n}$ ausgeführt hat, ergiebt sich aus einigen speciellen Beispielen, welche sich auf einzelnen Blättern vorfinden.

Ist $D \equiv 3 \pmod{4}$, so folgt aus dem Fundamentaltheorem in der Theorie der quadratischen Reste mit Benutzung der Reihe

$$\operatorname{cotang} u = \frac{1}{u} + \frac{1}{u-\pi} + \frac{1}{u+\pi} + \frac{1}{u-2\pi} + \frac{1}{u+2\pi} + \dots$$

dass

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n} = \Sigma\left(\frac{n}{D}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2D}\Sigma\left(\frac{\nu}{D}\right)\operatorname{cotang}\frac{\nu\pi}{2D}$$

ist, wo ν alle relativen Primzahlen zu $2D$, durchläuft, die kleiner als D sind; setzt man

$$\sqrt{-1} = i, \quad \cos\frac{2\pi}{D} + i\sin\frac{2\pi}{D} = r$$

und bezeichnet mit μ alle relativen Primzahlen zu D, welche nicht grösser als D sind, so lässt die vorstehende Summe sich leicht in die folgende umformen

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi i}{4D}\left(\frac{2}{D}\right)\Sigma\left(\frac{\mu}{D}\right)\frac{r^{\mu}-1}{r^{\mu}+1}$$

wendet man nun die für jede Wurzel ω der Gleichung $\omega^D = 1$ gültige Formel

$$\frac{\omega-1}{\omega+1} = \Sigma(-1)^{\alpha-1}\omega^{\alpha}$$

an, in welcher α die Zahlen $1, 2, 3 \ldots (D-1)$ durchlaufen muss, so erhält man durch Umkehrung der Summationsordnung

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi i}{4D}\left(\frac{2}{D}\right)\Sigma(-1)^{\alpha-1}\Sigma\left(\frac{\mu}{D}\right)r^{\alpha\mu}$$

Die auf μ bezügliche Summation lässt sich bekanntlich mit Hülfe der in der Abhandlung *Summatio quarumdam serierum singularium* bewiesenen Sätze ausführen; beschränkt man sich auf den Fall, in welchem D durch kein Quadrat theilbar ist, so findet man allgemein

$$\Sigma\left(\frac{\mu}{D}\right)r^{\alpha\mu} = \left(\frac{\alpha}{D}\right)i^{\left(\frac{D-1}{2}\right)^2}\sqrt{D}$$

wo $\left(\frac{\alpha}{D}\right) = 0$ gesetzt werden muss, falls α keine relative Primzahl zu D ist. In dem Fall $D \equiv 3 \pmod{4}$ erhält man daher

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi}{4\sqrt{D}}\left(\frac{2}{D}\right)\Sigma(-1)^{\alpha}\left(\frac{\alpha}{D}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{D}}\Sigma\left(\frac{\alpha'}{D}\right)$$

wo α' alle relativen Primzahlen zu D durchläuft, die kleiner als $\frac{1}{2}D$ sind; da endlich $\varepsilon = 2$ ist, so wird die Anzahl der Classen

$$k = \Sigma\left(\frac{\alpha'}{D}\right)$$

Ist dagegen $D \equiv 1 \pmod{4}$, so erhält man mit Benutzung der Reihe

$$\operatorname{cosec} u = \frac{1}{u} - \frac{1}{u-\pi} - \frac{1}{u+\pi} + \frac{1}{u-2\pi} + \frac{1}{u+2\pi} - \ldots$$

auf ähnliche Weise

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n} = \Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n}{D}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2D}\Sigma(-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\left(\frac{\nu}{D}\right)\operatorname{cosec}\frac{\nu\pi}{2D} = \frac{\pi}{2D}\Sigma\left(\frac{\mu}{D}\right)\frac{r^{\mu}}{r^{2\mu}+1}$$

wo die Buchstaben ν und μ die frühere Bedeutung haben; schliesst man den evidenten Fall $D = 1$ aus und wendet die für jede Wurzel ω der Gleichung $\omega^D = 1$ (mit Ausnahme von $\omega = 1$) gültige Formel

$$\frac{\omega}{\omega\omega+1} = 1 + \Sigma\omega^{4\alpha''} + \Sigma\omega^{D-4\alpha''}$$

an, in welcher α'' die Zahlen $1, 2, 3 \ldots \frac{1}{4}(D-1)$ durchlaufen muss, so ergiebt sich, wieder unter der Beschränkung, dass D durch kein Quadrat theilbar ist,

$$\Sigma\left(\frac{-D}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{\pi}{\sqrt{D}}\Sigma\left(\frac{\alpha''}{D}\right)$$

und hieraus, da $\varepsilon = 2$ ist,

$$k = 2\Sigma\left(\frac{\alpha''}{D}\right)$$

Ganz ähnlich würden sich die Fälle behandeln lassen, in welchen D gerade ist. —

Was die Bestimmung der Classen-Anzahl für *positive* Determinanten D betrifft, so finden sich ausser der im Text mitgetheilten Schlussformel nur einzelne geometrische Figuren vor, welche Hyperbel-Sectoren von endlichen Dimensionen darstellen, und neben denselben Ungleichungen, durch welche die Punkte, deren Coordinaten die Variabeln der quadratischen Formen sind, in das Innere eines solchen Hyperbel-Sectors gedrängt werden. Diese Hyperbel-Sectoren treten an die Stelle der Ellipsen, welche den quadratischen Formen von negativen Determinanten entsprechen, und durch die Bestimmung ihres Flächeninhalts ergiebt sich wieder die mittlere Darstellungsanzahl, wenn nämlich nur solche Darstellungen zugelassen werden, bei welchen die Variabeln den eben erwähnten Ungleichungen Genüge leisten. Andererseits dienen diese Ungleichungen dazu, aus den unendlich vielen Darstellungen einer Zahl m, welche alle zu einer und derselben Wurzel n der Congruenz $nn - D \equiv 0 \left(\text{mod.}\ \frac{m}{\mu\mu}\right)$ gehören und welche den sämmtlichen Auflösungen der Gleichung $tt - Duu = 1$ entsprechen (vergl. Disqq. Arithm. art. 205), eine einzige zu isoliren und alle andern auszuschliessen. Die Anzahl aller zugelassenen Darstellungen der Zahl m durch den Complex aller nicht eigentlich äquivalenten formae proprie primitivae ist dann gleich dem Werth der Function $f(m)$, in welcher nur $-D$ durch D zu ersetzen ist, und aus der Betrachtung der Eigenschaften derselben ergiebt sich, wie früher bei negativen Determinanten, ein zweiter Ausdruck für die mittlere Darstellungsanzahl; die Vergleichung desselben mit dem vorher durch geometrische Betrachtungen abgeleiteten Werthe führt dann unmittelbar zu der Bestimmung der Anzahl der Classen.

Zu VIII.

Hier bedeutet p eine positive Primzahl von der Form $4n+1$; die Bezeichnung stimmt mit der in der Abhandlung *Theoria residuorum biquadraticorum* I. art. 23 angewendeten überein; es ist also

$$f \equiv 1.2.3 \ldots . \tfrac{1}{2}(p-3).\tfrac{1}{2}(p-1) \pmod{p}$$

$$p = aa + bb;\quad a \equiv 1 \pmod{4};\quad b \equiv af \pmod{p}$$

die mit α, β bezeichneten Zahlen sind durch die Zerlegung $p = \alpha\alpha + 2\beta\beta$ bestimmt. Die Columne f ist den beiden vorgefundenen Tabellen hinzugefügt; ausserdem sind einige Lücken in denselben ausgefüllt.

Der im Text aufgestellte Satz hängt mit dem biquadratischen Charakter der Zahl 2 zusammen; da nämlich (vergl. *Theoria resid. biqu.* I. art. 21)

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv f^{\frac{1}{2}b} \pmod{p}$$

ist, so folgt aus der Congruenz

$$b \equiv 2m + a - 1 \pmod{8}$$

die andere

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv f^{m+\frac{a-1}{2}} \pmod{p}$$

und umgekehrt jene aus dieser. Der Beweis dieser letztern Congruenz ergiebt sich leicht auf folgende Art. Ist μ die Anzahl der quadratischen Reste α_1, welche zwischen 0 und $\frac{1}{4}p$ liegen, so ist (nach VII)

$$m = 2\mu - \tfrac{1}{4}(p-1)$$

und die Anzahl der quadratischen Reste α_2, welche zwischen $\frac{1}{4}p$ und $\frac{1}{2}p$ liegen, ist $= \frac{1}{4}(p-1)-\mu$. Ist nun $p \equiv 1 \pmod{8}$, also die Zahl 2 quadratischer Rest, so stimmen die Zahlen $2\alpha_1$ und $p-2\alpha_2$ im Complex mit den Zahlen α_1 und α_2 überein, und bezeichnet man das Product dieser Zahlen mit A, so ergiebt sich

$$2^{\frac{p-1}{4}} A \equiv (-1)^{\frac{1}{4}(p-1)-\mu} A \pmod{p}$$

und folglich

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv (-1)^{\mu} \equiv f^{2\mu} \equiv f^{m+\frac{1}{4}(p-1)} \pmod{p}$$

da ferner in diesem Fall $b \equiv 0 \pmod{4}$, und folglich

$$\frac{p-1}{4} = (a+1)\frac{a-1}{4} + \frac{bb}{4} \equiv 2\frac{a-1}{4} \equiv \frac{a-1}{2} \pmod{4}$$

ist, so erhält man die zu beweisende Congruenz

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv f^{m+\frac{a-1}{2}} \pmod{p}$$

Ist dagegen $p \equiv 5 \pmod{8}$, also die Zahl 2 quadratischer Nichtrest, so stimmen die Zahlen $2\alpha_1$ und $p-2\alpha_2$ mit den sämmtlichen zwischen 0 und $\frac{1}{2}p$ liegenden quadratischen Nichtresten überein; bezeichnet man ihr Product mit B, und das Product der Zahlen α_1 und α_2 wieder mit A, so ist

$$f \equiv AB, \quad (-1)^{\frac{p-1}{4}-\mu}\, 2^{\frac{p-1}{4}} A \equiv B \pmod{p}$$

erhebt man diese beiden Congruenzen zum Quadrat, indem man berücksichtigt, dass

$$ff \equiv -1, \quad 2^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$$

ist, so erhält man

$$-1 \equiv AABB, \quad -AA \equiv BB$$

und hieraus $A^4 \equiv +1$; da nun A ein Product aus quadratischen Resten, also AA ein Product aus biquadratischen Resten und folglich selbst ein biquadratischer Rest ist, so muss $AA \equiv +1$ sein, weil -1 ein biquadratischer Nichtrest ist. Hieraus folgt

$$(-1)^{\frac{p-1}{4}-\mu}\, 2^{\frac{p-1}{4}} \equiv AB \equiv f \pmod{p}$$

und

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv (-1)^{\mu-1} f \equiv f^{2\mu-1} \equiv f^{m+\frac{p-5}{4}} \pmod{p}$$

da endlich in diesem Fall $b \equiv 2 \pmod{4}$, und folglich

$$\frac{p-5}{4} = (a+1)\frac{a-1}{4} + \frac{bb-4}{4} \equiv 2\frac{a-1}{4} \equiv \frac{a-1}{2} \pmod{4}$$

ist, so erhält man wieder die zu beweisende Congruenz

$$2^{\frac{p-1}{4}} \equiv f^{m+\frac{a-1}{2}} \pmod{p}$$

Zu IX.

Es sei p eine positive ungerade durch kein Quadrat theilbare Zahl, und

$$S_r = \Sigma\left(\frac{s_r}{p}\right)$$

wo s_r alle relativen Primzahlen zu p durchlaufen muss, welche zwischen $(r-1)\frac{p}{8}$ und $r\frac{p}{8}$ liegen; bezeichnet man die Anzahlen der nicht eigentlich äquivalenten formae proprie primitivae für die Determinanten $-p$ und $-2p$ resp. mit C_1 und C_2, so ist (vergl. Dirichlet Recherches sur diverses applications etc. §. 11 in Crelle's Journal XXI)

$$C_1 = 2(S_1 + S_2), \quad C_2 = 2(S_1 - S_4)$$

oder

$$C_1 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \quad C_2 = 2(S_2 + S_3)$$

je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod{4}$ ist. Bedenkt man ferner, dass die Zahlen s_1 und s_2 im Complex mit den Zahlen $2s_1$ und $p-2s_4$, und ebenso die Zahlen s_3 und s_4 im Complex mit den Zahlen $2s_2$ und $p-2s_3$ übereinstimmen, und dass im Falle $p \equiv 1 \pmod{4}$ die Summe $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0$ ist, so ergeben sich in beiden Fällen noch zwei neue Relationen zwischen den vier Summen S_1, S_2, S_3, S_4, so dass jede derselben durch C_1 und C_2 ausgedrückt werden kann. Man erhält auf diese Weise, wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist,

$$S_1 = S_8 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{2}{p}\right)C_1 + \tfrac{1}{4}C_2$$

$$S_2 = S_7 = \tfrac{1}{4}\left(2 - \left(\frac{2}{p}\right)\right)C_1 - \tfrac{1}{4}C_2$$

$$S_3 = S_6 = -\tfrac{1}{4}\left(2 + \left(\frac{2}{p}\right)\right)C_1 + \tfrac{1}{4}C_2$$

$$S_4 = S_5 = \tfrac{1}{4}\left(\frac{2}{p}\right)C_1 - \tfrac{1}{4}C_2$$

und, wenn $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist

$$S_1 = -S_8 = \tfrac{1}{4}\left(3 + \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_1 - \tfrac{1}{4} C_2$$
$$S_2 = -S_7 = -\tfrac{1}{4}\left(1 - \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_1 + \tfrac{1}{4} C_2$$
$$S_3 = -S_6 = \tfrac{1}{4}\left(1 - \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_1 + \tfrac{1}{4} C_2$$
$$S_4 = -S_5 = \tfrac{1}{4}\left(1 - \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_1 - \tfrac{1}{4} C_2$$

Ist p eine Primzahl, so findet man hieraus unmittelbar die im Text angegebenen Formeln für die Anzahlen der quadratischen Reste, welche in den einzelnen Octanten enthalten sind.

Zu X.

Es sei p eine positive und durch kein Quadrat theilbare Zahl von der Form $6h \pm 1$, und

$$S_r = \Sigma\left(\tfrac{s_r}{p}\right)$$

wo s_r alle relativen Primzahlen zu p durchlaufen muss, welche zwischen $(r-1)\frac{p}{12}$ und $r\frac{p}{12}$ liegen; bezeichnet man die Anzahlen der nicht eigentlich äquivalenten formae proprie primitivae für die Determinanten $-p$ und $-3p$ mit C_1, C_3, so findet man leicht (vergl. Dirichlet Recherches etc. §. 11 oder die Note zu VI und VII)

$$C_1 = 2(S_1 + S_2 + S_3), \quad C_3 = 2(S_1 + S_2 - S_5 - S_6)$$

oder

$$C_1 = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6, \quad C_3 = 2(S_2 + S_3 + S_4 + S_5)$$

je nachdem $p \equiv 1$ oder $\equiv 3 \pmod{4}$ ist. Berücksichtigt man ferner, dass

die Zahlen s_1 und s_2 mit den Zahlen $2s_1$ und $p - 2s_6$
" " s_3 und s_4 " " " $2s_2$ und $p - 2s_5$
" " s_5 und s_6 " " " $2s_3$ und $p - 2s_4$

und ebenso

die Zahlen s_1, s_2, s_3 mit den Zahlen $3s_1,\ 3s_5 - p,\ p - 3s_4$
" " s_4, s_5, s_6 " " " $3s_2,\ 3s_6 - p,\ p - 3s_3$

übereinstimmen, und dass im Falle $p \equiv 1 \pmod{4}$ die Summe $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = 0$ ist, so erhält man ausser den beiden obigen noch vier neue Relationen zwischen den sechs Summen $S_1, S_2 \ldots S_6$, so dass dieselben sämmtlich aus C_1 und C_3 bestimmt werden können. Man erhält auf diese Weise, wenn $p \equiv 1 \pmod{4}$ ist,

$$S_1 = S_{12} = \tfrac{1}{4}\left(1 + \left(\tfrac{3}{p}\right)\right) C_1 + \tfrac{1}{12}\left(1 + \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_3$$
$$S_2 = S_{11} = -\tfrac{1}{4}\left(1 + \left(\tfrac{3}{p}\right)\right) C_1 + \tfrac{1}{12}\left(1 + \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_3$$
$$S_3 = S_{10} = \tfrac{1}{2} C_1 - \tfrac{1}{4}\left(1 + \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_3$$
$$S_4 = S_9 = -\tfrac{1}{2} C_1 + \tfrac{1}{4}\left(2 - \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_3$$
$$S_5 = S_8 = \tfrac{1}{4}\left(1 + \left(\tfrac{3}{p}\right)\right) C_1 - \tfrac{1}{12}\left(5 - \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_3$$
$$S_6 = S_7 = -\tfrac{1}{4}\left(1 + \left(\tfrac{3}{p}\right)\right) C_1 + \tfrac{1}{12}\left(1 + \left(\tfrac{2}{p}\right)\right) C_3$$

und, wenn $p \equiv 3 \pmod{4}$ ist,

$$S_1 = -S_{12} = \tfrac{1}{12}\left(9 + 3\left(\tfrac{2}{p}\right) - \left(\tfrac{3}{p}\right) + \left(\tfrac{6}{p}\right)\right) C_1 - \tfrac{1}{4} C_3$$
$$S_2 = -S_{11} = \tfrac{1}{4}\left(-1 + \left(\tfrac{2}{p}\right) + \left(\tfrac{3}{p}\right) - \left(\tfrac{6}{p}\right)\right) C_1 + \tfrac{1}{4} C_3$$
$$S_3 = -S_{10} = \tfrac{1}{4}\left(-\left(\tfrac{3}{p}\right) + \left(\tfrac{6}{p}\right)\right) C_1$$
$$S_4 = -S_9 = \tfrac{1}{4}\left(3 - 2\left(\tfrac{3}{p}\right) - \left(\tfrac{6}{p}\right)\right) C_1$$
$$S_5 = -S_8 = \tfrac{1}{4}\left(-1 - \left(\tfrac{2}{p}\right) + \left(\tfrac{3}{p}\right) + \left(\tfrac{6}{p}\right)\right) C_1 + \tfrac{1}{4} C_3$$
$$S_6 = -S_7 = \tfrac{1}{12}\left(3 - 3\left(\tfrac{2}{p}\right) + \left(\tfrac{3}{p}\right) - \left(\tfrac{6}{p}\right)\right) C_1 - \tfrac{1}{4} C_3$$

Ist p eine Primzahl, so findet man aus dem ersten System die im Text angegebenen Formeln; für die andern Fälle erhält man ähnliche Formeln aus dem zweiten System.

R. Dedekind.

GEOMETRISCHE SEITE DER TERNÄREN FORMEN.

Ein Punkt im Raume (0) sei als Anfangspunkt angenommen. Der Uebergang von da zu drei andern Punkten P, P', P'', die mit jenem nicht in einer Ebene liegen, sei resp. t, t', t''; wo, so oft keine Verwechslung möglich ist, die Punkte P, P', P'' selbst durch $(t), (t'), (t'')$ bezeichnet werden mögen.

Es sei ferner allgemein (t, t') das Product der Länge der beiden Linien t, t' in den Cosinus ihrer Neigung etc.

Man hat allgemein $(\alpha t + \alpha' t' + \alpha'' t'' + \ldots,\ \sigma u + \sigma' u' + \sigma'' u'' + \ldots)$ wenn man die Multiplication

$$(\alpha t + \alpha' t' + \alpha'' t'' + \ldots) \times (\sigma u + \sigma' u' + \sigma'' u'' + \ldots)$$

ausführt und statt $tu, tu', tu'', t'u', t'u''$.. u. s. w. $(t,u), (t,u'), (t,u''), (t',u'), (t',u'')$u.s.w. schreibt.

Jeder Punkt im Raume wird durch ein Trinomium

$$(xt + x't' + x''t'')$$

dargestellt werden können.

Für alle Punkte, die in einer bestimmten Ebene liegen, wird dann eine Gleichung

$$\lambda x + \lambda' x' + \lambda'' x'' = L$$

statt finden, wo $\lambda, \lambda', \lambda'', L$ bestimmte Zahlen bedeuten. Für eine Ebene durch die drei Punkte $\mu t, \mu' t', \mu'' t''$ ist

$$\lambda\mu = \lambda'\mu' = \lambda''\mu'' = L$$

Schreibt man

$$(t,t) = a,\ (t',t') = a',\ (t'',t'') = a'',\ (t',t'') = b,\ (t,t'') = b',\ (t,t') = b''$$

und

$$\begin{aligned} a'a''-bb = A,\ \ aa''-b'b' = A',\ \ aa'-b''b'' = A'' \\ b'b''-ab = B,\ \ bb''-a'b' = B',\ \ bb'-a''b'' = B'' \\ D = aa'a''+2bb'b''-abb-a'b'b'-a''b''b'' \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} T &= At+B''t'+B't'' && \text{senkrecht gegen } t' \text{ und } t'' \\ T' &= B''t+A't'+Bt'' && t \text{ und } t'' \\ T'' &= B't+Bt'+A''t'' && t \text{ und } t' \end{aligned}$$

und allgemein, wenn

$$\lambda x+\lambda' x'+\lambda'' x'' = L$$

die Gleichung einer Ebene ist, so wird die Linie

$$\lambda T+\lambda' T'+\lambda'' T''$$

gegen dieselbe senkrecht sein.

Es ist dann ferner

$$\begin{aligned} aT+b''T'+b'T'' &= Dt \\ b''T+a'T'+bT'' &= Dt' \\ b'T+bT'+a''T'' &= Dt'' \end{aligned}$$

und die Linien t, t', t'' sind senkrecht gegen die Ebenen, deren Gleichungen

$$\begin{aligned} ax+b''x'+b'x'' &= \text{Const} \\ b''x+a'x'+bx'' &= \text{Const} \\ b'x+bx'+a''x'' &= \text{Const} \end{aligned}$$

Der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks durch die Punkte $mt, m't', m''t''$ ist aequal der Quadratwurzel aus dem Werthe der Form

$$F \ldots \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix}$$

wenn substituirt wird $X = m'm''$, $X' = mm''$, $X'' = mm'$, während der sechsfache Cubikinhalt der Pyramide, die sich dadurch mit dem 0 Punkte bildet, $= mm'm''\sqrt{D}$ wird, folglich ist das Perpendikel

$$= \sqrt{\frac{D}{F(\frac{1}{m}, \frac{1}{m'}, \frac{1}{m''})}}$$

T, T', T'' beziehen sich ebenso auf die Form $\begin{pmatrix} AD, & A'D, & A''D \\ BD, & B'D, & B''D \end{pmatrix}$ wie t, t', t'' auf $\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix}$

Die drei Wurzeln der Gleichung

$$0 = p^3-pp(a+a'+a'')+p(A+A'+A'')-D$$

stellen die Quadrate der drei Hauptaxen eines in dasjenige Parallelepipedum einbeschriebenen Ellipsoids vor, auf welches sich die ternäre positive Form

$$\begin{pmatrix} a, & a', & a'' \\ b, & b', & b'' \end{pmatrix} \text{ mit Adjuncte } \begin{pmatrix} A, & A', & A'' \\ B, & B', & B'' \end{pmatrix} \text{ und Determ. } = -D$$

bezieht

Beziehung der Raumverhältnisse auf ein gegebenes Tetraeder.

Es seien (0), (1), (2), (3) die vier Ecken, gegenüberstehenden Flächen und Perpendikel. Es kommen dann jedem Punkte des Raums P gegen einen beliebigen Anfangspunkt M vier Coordinaten zu x, x', x'', x''', unter welchen aber die Relation

$$x+x'+x''+x''' = 0$$

Statt findet. Es bedeutet nemlich x den Quotienten, wenn man die Distanz des

Punktes P von einer durch M mit dem Planum (0) parallel gelegten Ebene mit dem Perpendikel (0) dividirt u. s. f.

Allgemein ist dann

$$-(PM)^2 = xx'(01)^2 + xx''(02)^2 + xx'''(03)^2 + x'x''(12)^2 + x'x'''(13)^2 + x''x'''(23)^2$$

Das Grundgesetz der Crystallisation lässt sich am kürzesten so aussprechen:

Zwischen je fünf Ebenen, welche dabei vorkommen, gibt es folgende Relation:

Sind ihre Normalen auf der Kugelfläche (0), (1), (2), (3), (4), so sind allezeit die Producte $\sin 102 . \sin 304$, $\sin 103 . \sin 204$, $\sin 203 . \sin 104$ in einem rationalen Verhältnisse; ist dies wie $\alpha : \mathfrak{b} : \gamma$, so ist $\mathfrak{b} = \alpha + \gamma$.

Sind die Coordinaten der 5 Punkte auf der Kugelfläche

$$\left.\begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ a''' & b''' & c''' \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} \text{ so müssen } \begin{matrix} (ab' - ba') . (a''b''' - b''a''') \\ (ab'' - ba'') . (a'''b' - b'''a') \\ (ab''' - ba''') . (a'b'' - b'a'') \end{matrix}$$

in rationalem Verhältnisse stehen.

Allgemein seien 1, 2, 3, 4, 5 die 5 Punkte auf der Kugelfläche, 0 der Mittelpunkt; dann stehen, wenn 12 den körperlichen Inhalt des Tetraeders 0345 bedeutet

$$\left.\begin{matrix} 23.45 \\ 24.53 \\ 25.34 \end{matrix}\right\} \text{ in rationalem Verhältnisse}$$

ebenso

$$\left.\begin{matrix} 12.34 \\ 13.42 \\ 14.23 \end{matrix}\right\} \text{ u. s. f.}$$

Transformationen der Form $\begin{pmatrix} 5, & 5, & 5 \\ -1, & -1, & -1 \end{pmatrix}$ Det. $= 108$

Chaux carbonatée

$$\left\{\begin{matrix} +1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \end{matrix}\right\} \underset{36.108}{\begin{pmatrix} 17 & 17 & 17 \\ -7 & -7 & -7 \end{pmatrix}} \qquad \underset{256.11664}{\begin{pmatrix} 240 & 240 & 240 \\ +168 & +168 & +168 \end{pmatrix}} \underset{216}{\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ +7 & +7 & +7 \end{pmatrix}} \quad \text{equiaxe}$$

$$\left\{\begin{matrix} +1 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & +1 \\ +1 & 0 & +1 \end{matrix}\right\} \underset{4.108}{\begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 \\ +2 & +2 & +2 \end{pmatrix}} \underset{54}{\begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ +1 & +1 & +1 \end{pmatrix}} \underset{27.108}{\begin{pmatrix} 15 & 15 & 15 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}} \underset{54}{\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}} \quad \text{inverse}$$

$$\left\{\begin{matrix} +2 & +1 & +1 \\ +1 & +2 & +1 \\ +1 & +1 & +2 \end{matrix}\right\} \underset{16.108}{\begin{pmatrix} 20 & 20 & 20 \\ +14 & +14 & +14 \end{pmatrix}} \underset{216}{\begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ +7 & +7 & +7 \end{pmatrix}} \underset{432.108}{\begin{pmatrix} 51 & 51 & 51 \\ -21 & -21 & -21 \end{pmatrix}} \underset{16.108}{\begin{pmatrix} 17 & 17 & 17 \\ -7 & -7 & -7 \end{pmatrix}} \quad \text{contrastante}$$

$$\left\{\begin{matrix} +1 & +2 & +2 \\ +2 & +1 & +2 \\ +2 & +2 & +1 \end{matrix}\right\} \underset{25.108}{\begin{pmatrix} 29 & 29 & 29 \\ +23 & +23 & +23 \end{pmatrix}} \qquad \underset{67500.108}{\begin{pmatrix} 312 & 312 & 312 \\ -138 & -138 & -138 \end{pmatrix}} \underset{33750}{\begin{pmatrix} 52 & 52 & 52 \\ -23 & -23 & -23 \end{pmatrix}} \quad \text{mixte}$$

Setzt man die ursprüngliche Form allgemein $= \begin{pmatrix} t, & t, & t \\ u, & u, & u \end{pmatrix}$

und eine abgeleitete $\begin{pmatrix} T, & T, & T \\ U, & U, & U \end{pmatrix}$

so ist

$$\begin{array}{lll} 1, & T = 3t - 2u & U = -t + 2u \\ 2, & T = 2t + 2u & U = t + 3u \\ 3, & T = 6t + 10u & U = 5t + 11u \\ 4, & T = 9t + 16u & U = 8t + 17u \end{array}$$

Die Form $\begin{pmatrix} 1, & 3, & k \\ 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$ geht durch die Substitution

$$\begin{array}{lll} x = u + u' - 2u'' & \text{umgekehrt} & 6u = x + 3y + 2z \\ y = u - u' & & 6u' = x - 3y + 2z \\ z = u + u' + u'' & & 6u'' = -2x + 2z \end{array}$$

$$x \equiv z \,(\text{mod. } 3), \quad x \equiv y \,(\text{mod. } 2)$$

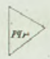
über in $\begin{pmatrix} 4+k, & 4+k, & 4+k \\ k-2, & k-2, & k-2 \end{pmatrix}$

Um den Kalkspath zu produciren ist $k = 0{,}973103$ zu setzen.

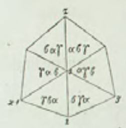
Sind die complexen Werthe der orthographischen Projection von drei gleich langen und unter einander senkrechten Graden a, b, c, so ist $aa + bb + cc = 0$, allgemein kann man setzen, p und q beliebige complexe Zahlen bedeutend

$$a = (p - q)(q - pii), \quad b = (q - qi)(pii - pi), \quad c = (qi - p)(pi - q)$$

Hexakisoctaeder.



Gleichung: $px+qy+rz=1$



Coordinaten.

1.	$\frac{1}{\gamma}$	0	0
2.	$\frac{1}{\beta+\gamma}$	$\frac{1}{\beta+\gamma}$	0
3.	$\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$	$\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$	$\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$

$\alpha<\beta<\gamma$

Sechsfacher Inhalt einer Elementarpyramide $=\frac{1}{\gamma\cdot(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}$

Alle [Flächen] sind um eine Kugel beschrieben, deren Halbmesser $=\frac{1}{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}$

Doppelte Fläche eines Dreiecks $=\frac{\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}{\gamma(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}$

Kante $1.2=\frac{\sqrt{(\beta\beta+\gamma\gamma)}}{\gamma(\beta+\gamma)}$, $1.3=\frac{\sqrt{((\alpha+\beta)^2+2\gamma\gamma)}}{\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}$, $2.3=\frac{\sqrt{(2\alpha\alpha+(\beta+\gamma)^2)}}{(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)}$

Cosinus Kanten Winkel $3.1.2=\frac{\alpha\beta+\beta\beta+\gamma\gamma}{\sqrt{(\beta\beta+\gamma\gamma)((\alpha+\beta)^2+2\gamma\gamma)}}$

Sinus $=\frac{\gamma\cdot\sqrt{(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)}}{\sqrt{(\beta\beta+\gamma\gamma)((\alpha+\beta)^2+2\gamma\gamma)}}$

Vorkommende Werthe.

	$\alpha\ \beta\ \gamma$	
7.	0. 0. 1	Hexaeder
3.	0. 1. 1	Rhombendodekaeder
6.	0. 1. 2	Tetrakishexaeder
	0. 1. 3	
	0. 2. 3	
1.	1. 1. 1	Octaeder
5.	1. 1. 2	Trapezicositetraeder
	1. 1. 3	

	$\alpha\ \beta\ \gamma$	
2.	1. 2. 2.	Triakisoctaeder
4.	1. 2. 3.	Hexakisoctaeder
	1. 2. 4	
2.	1. 3. 3	Triakisoctaeder
4.	1. 3. 5	Hexakisoctaeder
2.	2. 3. 3	Triakisoctaeder
	2. 3. 4?	
	3. 5. 11	

BEMERKUNGEN.

Neben den vorstehenden Notizen, welche die in der Anzeige von SEEBER's Untersuchungen der ternären Formen gegebenen Gesichtspunkte theilweise weiter entwickeln, sind in der Handschrift mehre eigne mit einem achtzölligen REICHENBACH'schen Theodolithen ausgeführte Crystallmessungen aufgezeichnet. Die einzelnen Protokolle enthalten das jedesmalige Datum der Beobachtung, woraus zu ersehen ist, dass diese Untersuchung dem Monat Juli 1831 angehört.

Aus der Theorie der indifferenten ternären quadratischen Formen findet sich im handschriftlichen Nachlass nur der folgende, wahrscheinlich in der Zeit der Ausarbeitung der Disqu. Arr. aufgezeichnete Lehrsatz

'Omnes transformationes formae ternariae

$$\begin{pmatrix}1, & 1, & -1\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$$

in se ipsam exhibentur per formulam

$$\begin{matrix}\alpha\delta+\beta\gamma & \alpha\beta-\gamma\delta & \alpha\beta+\gamma\delta\\ \alpha\gamma-\beta\delta & \frac{1}{2}(\alpha\alpha+\delta\delta-\beta\beta-\gamma\gamma) & \frac{1}{2}(\alpha\alpha+\gamma\gamma-\beta\beta-\delta\delta)\\ \alpha\gamma+\beta\delta & \frac{1}{2}(\alpha\alpha+\beta\beta-\gamma\gamma-\delta\delta) & \frac{1}{2}(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma+\delta\delta)\end{matrix}$$

acceptis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ita ut fiat $\alpha\delta-\beta\gamma=1$.'

Es entstehen nemlich alle Transformationen, in denen die neun Coëfficienten ganze Zahlen sind, wenn für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sowohl alle die der Bedingungsgleichung genügenden ganzen Zahlen und zwar zwei gerade und zwei ungerade gesetzt werden, als auch alle die ungeraden Vielfache von $\sqrt{\frac{1}{2}}$, welche dieselbe Bedingungsgleichung $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ erfüllen.

Zu Seite 309. Chaux carbonatée équiaxe, inverse, contrastante und mixte sind die von HAUY (Traité de Minéralogie 1801 Tome II pag. 132, 137) gebrauchten Benennungen.

Die Tafel der Transformationen der Form $\begin{pmatrix} 5, & 5, & 5 \\ 1, & 1, & 1 \end{pmatrix}$ enthält in der ersten Verticalreihe die Coëfficienten der Substitution, in der zweiten die dadurch entstandene neue Form, in der dritten die der letztern Form entsprechende primitive, wenn diese nicht selbst schon eine solche ist, und in der vierten deren Adjuncta.

SCHERING.

ZUR THEORIE DER BIQUADRATISCHEN RESTE.

[I.]

1.

Wir erweitern das Gebiet der höhern Arithmetik, indem wir darin auch die imaginären Grössen aufnehmen. Bei der gegenwärtigen Untersuchung nennen wir eine ganze imaginäre Zahl jede Grösse $x+iy$, wenn x, y reelle ganze Zahlen sind.

2.

Die unendliche Anzahl imaginärer ganzer Zahlen lässt sich am bequemsten durch Punkte in einer unbegrenzten Ebene sinnlich darstellen; wir nennen schlechthin denjenigen Punkt, dessen Abscisse x, die Ordinate y ist, den Punkt $x+iy$, alle Punkte, die ganze Zahlen vorstellen, sollen Ganzepunkte heissen.

3

Um etwas bestimmtes festzusetzen, sollen die Abscissen immer auf der linken Seite positiv, die Ordinaten oben positiv sein.

4.

Die gerade Linie von dem Punkte $x+iy$ zu dem Punkte $x'+iy'$ gezogen soll schlechtweg die gerade Linie $(x+iy, x'+iy')$ heissen, wir nehmen dabei zugleich, insofern es darauf ankommt, auf die Richtung Rücksicht und unterscheiden also die gerade Linie $x+iy, x'+iy'$ von der $x'+iy', x+iy$.

5.

Der Kürze wegen wollen wir imaginäre Grössen wie $x+iy$ auch durch einen einzigen Buchstaben bezeichnen, wie z.

6.

Die Figur, welche durch die geraden Linien $zz', z'z'', z''z''', \ldots z^{n-1}z^n, z^nz$ begrenzt wird, nennen wir schlechtweg die Figur $zz'z''z''' \ldots z^n$. Wir schliessen dabei den Fall nicht aus, wo etwa einige dieser Linien einander schneiden.

7.

Durch $S(z, z', z'' \ldots z^n)$ bezeichnen wir allgemein die Summe von so vielen reellen ganzen Zahlen, als Ganzepunkte innerhalb der Figur liegen, indem wir für jeden Punkt, um den die Grenzlinie der Figur einmal, zweimal, dreimal u.s.w. herumgeht, die Zahl ± 1, ± 2, ± 3 etc. setzen; die obern Zeichen gelten, wenn die Grenzlinie den Punkt so umgibt, dass dieser auf der rechten Seite der Figur liegt, die untern im entgegengesetzten Fall. Schneiden sich also keine Seiten der Figur, so ist $S(z, z', z'' \ldots)$ schlechthin die Anzahl der Punkte innerhalb der Figur, positiv oder negativ genommen.

8.

Offenbar ist immer

$$S(z, z', z'' \ldots z^n) = S(z', z'', z''' \ldots z^n, z) = S(z'', z''' \ldots z') \text{ etc.}$$
$$= -S(z^n, z^{n-1} \ldots z'', z', z) = -S(z^{n-1}, z^{n-2} \ldots z', z, z^n) \text{ etc.}$$

9.

Wie es hiebei mit den auf der Grenzlinie selbst liegenden Punkten gehalten werden soll, muss noch näher bestimmt werden. Es gibt viele Fälle, wo auf der Grenzlinie gar keine ganze Punkte liegen können: dann ist keine Bestimmung nöthig. Liegen aber auf der Grenzlinie zz' solche Punkte, so zeigen wir durch ein zwischen z und z' eingeschobenes $+$ an, dass diese Punkte so betrachtet werden sollen, als lägen sie rechts von der Grenzlinie, so wie durch ein $-$, als lägen sie links. Auch werden wir wol ein 0 oder $\frac{1}{2}$ einschieben, wodurch angedeutet werden soll, dass sie gar nicht oder nur mit dem halben Werthe auf jeder Seite in Betracht gezogen werden sollen. Falls einer oder der andere der

der Seite in Betracht gezogen werden sollen. Falls einer oder der andere der Punkte z, z', z'' etc. selbst ein Ganzepunkt, so wird er, wo nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird, gar nicht mitgezählt, als insofern er zugleich etwa als Nicht-Eckpunkt auch in Betracht kommt.

10.

Lehrsätze. Wenn alle z, z', z'' etc. um eine und dieselbe Ganzezahl vermehrt werden, so bleibt das S ungeändert.

Wenn i in $-i$ und jedes Bindezeichen ins entgegengesetzte verwandelt wird, so ändert S bloss das Zeichen.

$$S(z, z', z'' \ldots z^n) = S(z, u, u' \ldots u^n, z', z'', z^n) - S(z, u, u' \ldots u^n, z')$$
$$= S(z, u, u', u'' \ldots u^n, z^m, z^{m+1} \ldots z^n) - S(z, u, u', u'' \ldots u^n, z^m, z^{m-1} \ldots z', z)$$

wo die Bindezeichen correspondiren müssen, aber zwischen den rückwärts laufenden Gliedern entgegengesetzt werden.

Ist ζ eine ganze Zahl $= a+bi$, so ist, wenn die gegenüberliegenden Bindezeichen entgegengesetzt,

$$S(z, z', z'+\zeta, z+\zeta) = [bx'-ay'] - [bx-ay]$$

Hiebei ist zu bemerken, dass wenn $bx'-ay'$ selbst eine ganze Zahl ist, diese für $[bx'-ay']$ angenommen werde, wenn das Bindezeichen zwischen z' und $z'+\zeta$ $+$ ist, hingegen 1 oder $\frac{1}{2}$ weniger, wenn dieses Bindezeichen $-$ oder $\frac{1}{2}$ ist; bei $bx-ay$ gilt das Umgekehrte.

Uebrigens gilt die Formel nur für den Fall, wo a und b keinen gemeinschaftlichen Divisor haben; ist ihr grösster gemeinschaftlicher Theiler $= h$, so hat man dafür zu nehmen

$$h\left[\frac{bx'-ay'}{h}\right] - h\left[\frac{bx-ay}{h}\right]$$

11.

Wenden wir uns nun näher zu unserm Gegenstande selbst. Wenn für den Modulus $m = a+bi$ die Zahlen f, f', f'' etc. so beschaffen sind, dass sie erstlich alle nach dem Modulus m unter sich incongruent sind, zweitens aber jede ganze Zahl einer von ihnen nothwendig congruent sein muss, so nennen wir den

Inbegriff der Zahlen f, f', f'' etc. das System der Primitivreste von m. Ihre Anzahl ist immer $= aa + bb$.

12.

Man kann das System der Primitivreste auf vielfache Art bilden; die einfachste ist, die Punkte innerhalb des Quadrats $0, m, (1+i)m, im$ zu wählen; dazu müssen aber noch hinzugefügt werden

I. der Punkt oder die Grösse 0

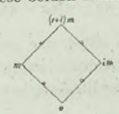
II. alle Punkte auf zwei einander nicht gegenüberliegenden Grenzlinien.

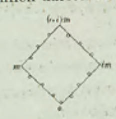
Anstatt auf einer der 4 Grenzlinien alle Punkte zu nehmen, kann man sie auch auf mehren zugleich nehmen.

Diese Auswahl dieser Punkte auf den Grenzlinien, falls welche darauf fallen, kann auf mehrfache Art geschehen, so dass obigen Bedingungen Genüge geschieht. Am einfachsten ist die folgende Manier.

Man nehme auf der Grenzlinie $0, m$ alle Punkte zwischen 0 und $\frac{1}{2}m$ inclus. und auf der Grenzlinie $0, im$ alle Punkte von $\frac{1}{2}im$ bis im exclusive und auf ähnliche Art bei den beiden andern.

Man kann diese beiden Manieren so sinnlich darstellen





13.

Schliesst man von den Primitivpunkten aus

I. Bloss den Punkt 0, wenn a gerade und b ungerade oder umgekehrt.

II. Die Punkte 0 und $\frac{1}{2}(1+i)m$, wenn a und b beide ungerade.

III. Die vier Punkte $0, \frac{1}{2}m, \frac{1}{2}(1+i)m, \frac{1}{2}im$, wenn a und b beide gerade,

so nennen wir die übrigbleibenden eigentliche Primitivpunkte, die ausgeschlossenen uneigentliche. Die Anzahl von jenen ist also

$$\begin{array}{ll} \text{im Fall I} & = aa+bb-1 \\ \text{II} & = aa+bb-2 \\ \text{III} & = aa+bb-4 \end{array}$$

also immer durch 4 theilbar.

14.

Diese eigentlichen Primitivpunkte lassen sich in 4 Classen F, F', F'', F''' theilen, so dass

$$\begin{array}{llll} iF \equiv F' & iF' \equiv F'' & iF'' \equiv F''' & iF''' \equiv F \\ -F \equiv F'' & -F' \equiv F''' & -F'' \equiv F & -F''' \equiv F' \\ -iF \equiv F''' & -iF' \equiv F & -iF'' \equiv F' & -iF''' \equiv F'' \end{array}$$

Hiebei findet nun folgendes höchst wichtige Theorem statt.

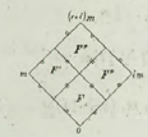
Es sei M eine Zahl, welche mit m keinen Factor gemein hat. Von den Zahlen MF gehören in die Classe F eine Anzahl von n

$$\begin{array}{ll} F' & n' \\ F'' & n'' \\ F''' & n''' \end{array}$$

und der kleinste Rest von $n' + 2n'' + 3n'''$ nach dem Modulus 4 sei $= N$, also N einer der 4 Zahlen $0, 1, 2, 3$ gleich: unter dieser Voraussetzung ist N *unabhängig* von der Art der Vertheilung der Primitivreste in Classen. Wir nennen ihn den Decident des biquadratischen Verhältnisses der Zahl M zu m.

15.

Die einfachste Art der Vertheilung ist allerdings folgende



Inzwischen kann in speciellen Fällen eine andere Vertheilung vortheilhafter sein.

16.

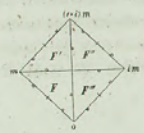
Sind f, f', f'' etc. die sämmtlichen Primitivreste des Modulus m, so ist

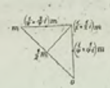
$$
\begin{aligned}
&S(z+\tfrac{f}{m},\quad z'+\tfrac{f}{m},\quad z''+\tfrac{f}{m},\quad \text{etc.})\\
+&S(z+\tfrac{f'}{m},\quad z'+\tfrac{f'}{m},\quad z''+\tfrac{f'}{m},\quad \text{etc.})\\
+&S(z+\tfrac{f''}{m},\quad z'+\tfrac{f''}{m},\quad z''+\tfrac{f''}{m},\quad \text{etc.})\\
+&\text{etc.}\\
=&S(mz,\ mz',\ mz'',\ \text{etc.})
\end{aligned}
$$

17.

Theorie des biquadratischen Restes $1+i$.

Der Modulus soll mit dem Reste keinen Theiler gemein haben, wir nehmen also an, dass von den Zahlen a und b die eine gerade, die andere ungerade sei. Die Vertheilung der eigentlichen Primitivreste in die vier Classen stellt folgendes Schema vor





Zu n sind zu rechnen alle Zahlen auf der Linie $0\ldots\frac{1}{2}m$ — Anzahl $=g$.

Zu n' alle Zahlen auf der Linie $0\ldots(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i)m$ — Anzahl $=g'$

Zu n'' alle Zahlen innerhalb des Dreiecks $\frac{1}{2}m,\ m,\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)m$ — Anzahl $=h$

Zu n''' alle Zahlen innerhalb des Dreiecks $0,\ \frac{1}{2}m,\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)m$ — Anzahl $=h'$

und ausserdem alle Zahlen auf der Linie $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i)m\,..\,(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)m$ — Anzahl $=g''$

Man hat immer $g'+g''=g$, $aa+bb=p$, $\frac{1}{4}(p-1)=g+g'+g''+h+h'$

Der Decident ist also

$$D=S(0_{(+)},\ \tfrac{1}{2}m,\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m_{(-)})+\tfrac{1}{4}(p-1)+2g''$$

Man nehme nun an, dass für den Modulus $m+1+i$

g	übergehe in	G
g'		G'
g''		G''
h		H
h'		H'

so hat man

$$
\begin{aligned}
\Delta S(0_{(+)},\ \tfrac{1}{2}m,\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m_{(-)})
&=+S(0_{(+)},\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m,\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m+i_{(-)})\\
&\quad-S(0_{(+)},\ \tfrac{1}{2}m,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(-)})\\
&\quad-S(\tfrac{1}{2}m,\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m,\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m+i,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)
\end{aligned}
$$

Das letzte dieser S ist

$$=[\tfrac{1}{2}(a-b)]-[\tfrac{1}{2}a]-S((\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m,\ \tfrac{1}{2}m,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i)$$

wenn a ungerade oder gerade

$$
\begin{aligned}
&=[\tfrac{1}{2}(a-b)]-[\tfrac{1}{2}a]-S(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i,\ \tfrac{1}{2}m-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i,\ \tfrac{1}{2}m+i)\\
&=[\tfrac{1}{2}(a-b)]-[\tfrac{1}{2}a]+S(0_{(+)},\ \tfrac{1}{2}m,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(-)})\\
&\qquad-S(0_{(+)},\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m,\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m+i_{(-)})
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
\Delta D=-[\tfrac{1}{2}(a-b)]+[\tfrac{1}{2}a]+2S(0_{(+)},\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m,\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m+i_{(-)})+a+b+1\\
-2S(0_{(+)},\ \tfrac{1}{2}m,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(-)})-2g''+2G''
\end{aligned}
$$

Die Bindezeichen gelten alle für den Fall, wo $a-b$ positiv ist, sonst nimmt man die entgegengesetzten.

Wir zerlegen ferner $S(0_{(+)},\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)m,\ (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i)m+i_{(-)})$ in

$$
\begin{aligned}
&S(0_{(+)},\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m,\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}m)+\tfrac{1}{2}i_{(-)})\\
+&[\tfrac{1}{2}(a-b)]-[\tfrac{1}{4}(a-b)]\\
-&S((\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m_{(-)},\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m,\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m-\tfrac{1}{2}i_{(+)})
\end{aligned}
$$

Der letzte Theil

$$\begin{aligned}
&= -S(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(-)},\ (-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}i)m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i,\ (-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}i)m+\tfrac{1}{2}{}_{(+)})\\
&= -S(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i_{(-)},\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i,\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m-\tfrac{1}{2}{}_{(+)})\\
&= -S(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i_{(+)},\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i,\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m-\tfrac{1}{2}{}_{(-)})+g''-G''\\
&= \quad S(0_{(+)},\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m,\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m+\tfrac{1}{2}i_{(-)})\\
&\quad -S(0_{(+)},\ \tfrac{1}{2}m,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(-)})+g''-G''
\end{aligned}$$

Dadurch wird also

$$\begin{aligned}
\Delta D = &+[\tfrac{1}{2}(a-b)]+[\tfrac{1}{2}a]-4S(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i_{(+)},\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}im-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i,\ (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)m-\tfrac{1}{2}{}_{(-)})\\
&-2[\tfrac{1}{4}(a-b)]+a+b+1
\end{aligned}$$

Für den Fall der Vermehrung des Modulus um $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ ist keine besondere Untersuchung nöthig, weil offenbar die Moduli m, im, $-m$, $-im$ gleiche Decidenten haben. Wir haben also folgende Lehrsätze:

Ist der Decident des Modulus $a+bi$, $=D$ so sind die Decidenten von

$$\begin{array}{l|l}
a+1+(b+1)i & D+a+b+1+[\tfrac{1}{2}a] \quad +[\tfrac{1}{2}(a-b)] \quad -2[\tfrac{1}{4}(a-b)]\\
a+1+(b-1)i & D+a-b+1+[-\tfrac{1}{2}b]+[-\tfrac{1}{2}(a+b)]-2[-\tfrac{1}{4}(a+b)]\\
a-1+(b+1)i & D-a+b+1+[\tfrac{1}{2}b] \quad +[\tfrac{1}{2}(a+b)] \quad -2[\tfrac{1}{4}(a+b)]\\
a-1+(b-1)i & D-a-b+1+[-\tfrac{1}{2}a]+[\tfrac{1}{2}(b-a)] \quad -2[\tfrac{1}{4}(b-a)]
\end{array}$$

Hieraus ferner

$$\begin{array}{l|l|l}
 & & \text{oder insofern } a \text{ ungerade ist}\\
a+2+bi & D-\frac{a-b-3}{2}+2[\tfrac{1}{2}a] \quad -2[\frac{a-b}{4}]-2[\frac{-a-b-2}{4}] & D+\frac{b-a-1}{2}\\
a-2+bi & D+\frac{a-b+3}{2}+2[-\tfrac{1}{2}a]-2[\frac{b-a}{4}]-2[\frac{a+b-2}{4}] & D\\
a+(b+2)i & D-\frac{a+b-3}{2}+2[\tfrac{1}{2}b] \quad -2[\frac{a+b}{4}]-2[\frac{a-b-2}{4}] & D+\frac{a+b-3}{2}\\
a+(b-2)i & D+\frac{a+b+3}{2}+2[-\tfrac{1}{2}b]-2[\frac{-a-b}{4}]-2[\frac{b-a-2}{4}] &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|ll}
a+2+(b+2)i & 2a-b+1+D & \text{oder } D+b-1\\
a+2+(b-2)i & -a-2b+1+D & D+a-1\\
a-2+(b+2)i & a+2b+1+D & D-a-1\\
a-2+(b-2)i & -2a+b+1+D & D-b-1
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
a+4+bi & D+a+b\\
a+(b+4)i & D-a+b\\
a-4+bi & D-a-b\\
a+(b-4)i & D+a-b
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
a+8+bi & D+2
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l}
a+4+(b+4)i & D+2b\\
a+4+(b-4)i & D+2a\\
a-4+(b+4)i & D+2a\\
a-4+(b-4)i & D+2b
\end{array}$$

Das Resultat der vorhergehenden Untersuchungen ist also folgendes:

Für den Modulus $m=a+bi$, wo a ungerade b gerade, wird

$$D\tfrac{1+i}{m} = \tfrac{1}{8}(-aa+2ab+bb-8b+1) \text{ (und wenn } a+bi=1+(2+2i)(\alpha+\beta i))$$

$$\text{oder } \tfrac{1}{8}(-aa+2ab-3bb+1) \equiv -(\alpha-\beta)^2-\beta$$

$$D\tfrac{1-i}{m} = \tfrac{1}{8}(+aa+2ab-bb-8b-1) \text{ oder } \tfrac{1}{8}(+aa+2ab+3bb-1)$$

$$D\tfrac{-1-i}{m} = \tfrac{1}{8}(-aa+2ab+bb+1) = \beta+\alpha\alpha+2\alpha\beta-\beta\beta \equiv -\beta+(\alpha+\beta)^2$$

$$D\tfrac{-1+i}{m} = \tfrac{1}{8}(+aa+2ab-bb-1) = \alpha+\alpha\alpha-2\alpha\beta-\beta\beta \equiv -\alpha-(\alpha+\beta)^2$$

$$D\tfrac{2}{m} = \tfrac{1}{2}ab$$

$$D\tfrac{i}{m} = \tfrac{1}{4}(aa+bb-1)$$

$$D\tfrac{-1}{m} = \tfrac{1}{2}(aa+bb-1)$$

Allgemeines Theorem über die Decidenten.

Es seien A, B, C etc. ungleiche (unger. imag.) Primzahlen, deren keine die Zahl M misst: alsdann ist

$$D\frac{M}{A^{\alpha}B^{\beta}C^{\gamma}D^{\delta}} = \alpha D\frac{M}{A}+\beta D\frac{M}{B}+\gamma D\frac{M}{C}+\text{etc.}$$

$$M^{\frac{1}{4}(aa+bb-1)} \equiv i^{D\frac{M}{a+bi}} \text{ mod. } (a+bi) \text{ wenn } a+bi \text{ eine Primzahl}$$

$$D\tfrac{1+i}{m} = \tfrac{1}{8}(-aa+2ab-3bb+1) = -\tfrac{1}{8}(3(a-b)\mp1)(a-b\mp1) \text{ wenn } a\equiv\tfrac{1}{3}$$

$$D\tfrac{1-i}{m} = \tfrac{1}{8}(+aa+2ab+3bb-1)$$

$$D\tfrac{-1-i}{m} = \tfrac{1}{8}(-aa+2ab+bb+1) = \tfrac{1}{8}(a-b\mp1)(a-b\mp3) \text{ wenn } a\equiv\pm1$$

$$D\tfrac{-1+i}{m} = \tfrac{1}{8}(+aa+2ab-bb-1)$$

Allgemein $m \equiv 1 \mod. (1+i)$

$$D\frac{1+i}{m} = -\text{P. Real.}\,\frac{(1+i)(m^4-1)}{16} = \text{Coëff. im.}\,\frac{m^4-1}{8+8i}$$

$$D\frac{1-i}{m} = +\text{P. Real.}\,\frac{(1-i)(m^4-1)}{16} = \text{Coëff. im.}\,\frac{m^4-1}{8-8i}$$

$1+i \pmod{16}$

a \ b	0	2	4	6	8	10	12	14
1	0	3	3	0	2	1	1	2
3	3	3	0	2	1	1	2	0
5	1	2	0	3	3	0	2	1
7	2	0	3	3	0	2	1	1
9	2	1	1	2	0	3	3	0
11	1	1	2	0	3	3	0	2
13	3	0	2	1	1	2	0	3
15	0	2	1	1	2	0	3	3

[18.]

Theorie des biquadratischen Restes $-1-2i$.

Der Modulus $= m = a+bi$ soll so beschaffen sein, dass a ungerade, b gerade; auch setzen wir voraus, dass derselbe eine Primzahl sei.

Der Decident wird durch folgende Schemata vorgestellt, von deren Identität man sich leicht überzeugt:

Der Kürze wegen bezeichnen wir $S(x,\ x+\alpha,\ x+\alpha+\mathfrak{b},\ x+\mathfrak{b})$ durch $[x, \alpha, \mathfrak{b}]$ so dass

$$[x, \alpha, \mathfrak{b}] = -[x, \mathfrak{b}, \alpha] = [x+\alpha, \mathfrak{b}, -\alpha] = -[x+\alpha, -\alpha, \mathfrak{b}]$$
$$= [x+\alpha+\mathfrak{b}, -\alpha, -\mathfrak{b}] = -[x+\alpha+\mathfrak{b}, -\mathfrak{b}, -\alpha]$$

Setzt man ferner

$$\frac{m}{-2-4i} = \frac{-a-2b}{10} + \frac{-b+2a}{10}i = Q$$

so besteht der Decident aus folgenden acht Theilen

$$\begin{aligned}
\mathrm{I} &= [0, \tfrac{1}{2}, -iQ]\\
-2\,\mathrm{II} &= -2[0, \tfrac{1}{2}, Q]\\
\mathrm{III} &= +[Q, \tfrac{1}{2}, -iQ]\\
\mathrm{IV} &= +[-iQ, \tfrac{1}{2}, Q]\\
-3\,\mathrm{V} &= -3[Q, \tfrac{1}{2}, Q]\\
-3\,\mathrm{VI} &= -3[2Q, \tfrac{1}{2}, -iQ]\\
+2\,\mathrm{VII} &= +2[(1-i)Q, \tfrac{1}{2}, Q]\\
+\ \mathrm{VIII} &= +[0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}im]
\end{aligned}$$

Ist F indefinite ein Elementarrest des Modulus $-1-2i$, so hat man

$$\Sigma[2FQ, \tfrac{1}{2}, iQ] = [0, -\tfrac{1}{2}-i, \tfrac{1}{2}im]$$

Setzt man also für F: $0, 1, i, -1, -i$ so hat man

$$\begin{aligned}
0 = \quad & [0, \tfrac{1}{2}, iQ] && = \mathrm{IX}\\
& +[2Q, \tfrac{1}{2}, iQ] && = \mathrm{X}\\
& +[2iQ, \tfrac{1}{2}, iQ] && = \mathrm{XI}\\
& +[-2Q, \tfrac{1}{2}, iQ] && = \mathrm{XII}\\
& +[-2iQ, \tfrac{1}{2}, iQ] && = \mathrm{XIII}\\
& -[0, -\tfrac{1}{2}-i, \tfrac{1}{2}im] && = -\mathrm{XIV}
\end{aligned}$$

Man setze dies zu dem vorigen Werth des Decident hinzu. Aus dieser Vereinigung fliessen folgende Resultate.

(1) Da $(1+2i)Q+\frac{1}{2}$ eine ganze Zahl ist, so wird

$$\mathrm{XI} = [-Q-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, iQ] = -[-Q, -\tfrac{1}{2}, iQ] = -[Q, \tfrac{1}{2}, -iQ]$$

also
$$\mathrm{III}+\mathrm{XI} = 0$$

(2) Wir ziehen zusammen IV, -3V, X, XIII auf folgende Weise

$$\begin{aligned}
\mathrm{IV} &= +[-2Q+\tfrac{1}{2}i, \tfrac{1}{2}, Q] && = [-2iQ-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}i, iQ]\\
\mathrm{V} &= -[2Q, +\tfrac{1}{2}, -Q] && = -[-2iQ, -\tfrac{1}{2}i, iQ]\\
\mathrm{X} &= [+iQ-\tfrac{1}{2}i, \tfrac{1}{2}, iQ]\\
&= [-iQ+\tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}, -iQ] && = [-2iQ-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i, \tfrac{1}{2}, iQ]\\
\mathrm{XIII} &= && \ [-2iQ, \tfrac{1}{2}, iQ]
\end{aligned}$$

Also die ganze Ausbeute aus diesen Theilen

$$\begin{aligned}&-4\,\mathrm{V}\\&+R(-2iQ)-R(-iQ)-I(-2iQ)+I(-iQ)\\&-\text{Quadr.}\,[-2iQ-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i]\\&+\text{Quadr.}\,[-2iQ+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}i]\end{aligned}$$

(3) $\mathrm{I}, -2\,\mathrm{II}, -3\,\mathrm{VI}, +2\,\mathrm{VII}, +\mathrm{IX}, +\mathrm{XII}$ zusammengezogen geben folgendes

$$\begin{aligned}\mathrm{I}\;&=[0, \tfrac{1}{2}, -iQ]\\\mathrm{II}\;&=[0, -\tfrac{1}{2}i, -iQ]\\\mathrm{VI}\;&=[iQ-\tfrac{1}{2}i, \tfrac{1}{2}, -iQ]=[\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}, iQ]=[-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i, \tfrac{1}{2}, -iQ]\\\mathrm{VII}\;&=[-Q-\tfrac{1}{2}i, \tfrac{1}{2}, Q]=[-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}, -Q]=[+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}i, -iQ]\\\mathrm{IX}\;&=[0, -\tfrac{1}{2}, -iQ]\\\mathrm{XII}\;&=[-iQ+\tfrac{1}{2}i, \tfrac{1}{2}, iQ]=[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}, -iQ]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=+4\,\mathrm{I}-4\,\mathrm{II}-4\,\mathrm{VI}+4\,\mathrm{XII}\\&\quad-I(\tfrac{1}{2}i)+I(-iQ+\tfrac{1}{2}i)+I0-I(-iQ)-2R0+2R(-iQ)\\&\quad+2\,\text{Quadr.}\,(-iQ+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)\\&=4\,\mathrm{I}-4\,\mathrm{II}-4\,\mathrm{VI}+4\,\mathrm{XII}\\&\quad+R(-1-2i)Q-R(-2iQ)-I(-iQ)+2R(-iQ)\\&\quad+2\,\text{Quadr.}\,(-2iQ+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)\end{aligned}$$

Dies Alles zusammen gibt folglich

$$\begin{aligned}&+4\,\mathrm{I}-4\,\mathrm{II}-4\,\mathrm{V}-4\,\mathrm{VI}+4\,\mathrm{XII}+\tfrac{1}{2}(a-1)-\tfrac{1}{2}b\\&+\text{Quadr.}(-2iQ+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}i)+2\,\text{Quadr.}\,(-2iQ+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)-\text{Quadr.}\,(-2iQ-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i)\end{aligned}$$

Endlich gibt $\mathrm{VIII}-\mathrm{XIV}=\frac{1}{2}(a-1)+\frac{1}{2}b$

Also da die drei Quadrattheile dem Decident von $\frac{m}{-1-2i}$ gleich sind, so wird

$$\text{Dec.}\,\frac{-1-2i}{m}\equiv a-1+\text{Dec.}\,\frac{m}{-1-2i}\quad \text{W. Z. B. W.}$$

Wahrscheinlich wird der Beweis noch sehr dadurch vereinfacht werden können, dass

$$\text{Dec.}\,\frac{1+2i}{m}=$$

[19.]

Durch Induction ist folgendes gefunden

$$\begin{aligned}\text{Dec.}\,\frac{a-bi}{a+bi}&\equiv\frac{aa+2ab-1}{4}, && a\equiv 1\ (\text{mod. }4)\\&\equiv\frac{aa+2ab+2bb-1}{4}, && a+bi\equiv 1\ (\text{mod. }2+2i)\end{aligned}$$

Hiermit steht Folgendes in Verbindung:

Es sei $aa+bb=p$ (Primzahl) $a\equiv 1$ (mod. 4)

$$\begin{aligned}&1.2.3\,\ldots\ldots\ldots\ldots\tfrac{1}{4}(p-1)\equiv\alpha\quad\text{mod. }p\\&\tfrac{1}{4}(p+3)\cdot\tfrac{1}{4}(p+7)\ldots\tfrac{1}{2}(p-1)\equiv\mathfrak{b}\\&\tfrac{1}{2}(p+1)\cdot\tfrac{1}{2}(p+3)\ldots\tfrac{3}{4}(p-1)\equiv\gamma\\&\tfrac{1}{4}(3p+1)\,\ldots\ldots\ldots\quad p-1\equiv\delta\end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned}\alpha&\equiv\delta, & \mathfrak{b}&\equiv\gamma && \text{wenn } \tfrac{1}{2}b \text{ gerade}\\\alpha&\equiv-\delta, & \mathfrak{b}&\equiv-\gamma && \text{wenn } \tfrac{1}{2}b \text{ ungerade}\end{aligned}$$

$$\pm\alpha\mathfrak{b}\equiv i,\quad \pm\mathfrak{b}\mathfrak{b}\equiv 2b,\quad \frac{\mathfrak{b}}{\alpha}\equiv 2a,\quad \frac{\mathfrak{b}}{1+\alpha\mathfrak{b}}\equiv\sqrt{a},\quad \tfrac{1}{2}\mathfrak{b}(1-\alpha\mathfrak{b})\equiv\sqrt{a}$$

Es wird demnach nur darauf ankommen die Decidenten bei reellen Resten zu bestimmen

$$a^{\frac{1}{4}bb}.\,b^{\frac{1}{4}(aa-1)}\equiv 1\ (\text{mod. }(aa+bb))\quad \text{si } a\equiv 1\ (\text{mod. }4)\ \ b \text{ par }\ aa+bb \text{ primus}$$

Will man bloss mit reellen Zahlen zu thun haben, so kommt es auf folgendes Haupttheorem an. Es sei $a-1$ durch 4, b durch 2 theilbar; a und b ohne gemeinschaftlichen Divisor, k bedeute die Zahlen $1, 2, 3\ldots aa+bb-1$.

Es sei

α die Zahl aller Werthe von k, wo die kleinsten Reste von ak, bk, aak, abk alle zwischen 0 und $\frac{1}{2}(aa+bb)$ liegen

$\mathfrak{b}$ $\quad ak, bk, aak, -abk$

γ $\quad ak, bk, -aak, -abk$

δ $\quad ak, bk, -aak, abk$

alsdann ist $\mathfrak{b}+2\gamma+3\delta-\frac{1}{4}(aa-1)$ durch 4 theilbar.

[II.]

VORBEREITUNGEN ZUR ALLGEMEINEN THEORIE DER BIQUADRATISCHEN RESTE.

(1.)

Es sei $P = x+iy$, wo weder x noch y eine ganze Zahl ist. Wir bezeichnen die Zahl $+1$ durch LP, $L'P$, $L''P$, $L'''P$, je nachdem P im ersten, zweiten, dritten oder vierten Qradranten liegt (im ersten und zweiten Quadranten ist $[y]$ gerade, im dritten und vierten ungerade; im ersten und vierten ist $[x]$ gerade, im zweiten und dritten ungerade). In allen Fällen, wo diese Zeichen nicht $=1$ sind, werden sie $=0$ vorausgesetzt. Man hat dann folgende 24 Relationen

$$\begin{array}{lll}
L(P\pm 1) = L'P & L(P\pm i) = L'''P & L(P\pm 1\pm i) = L''P \\
L'(P\pm 1) = LP & L'(P\pm i) = L''P & L'(P\pm 1\pm i) = L'''P \\
L''(P\pm 1) = L'''P & L''(P\pm i) = L'P & L''(P\pm 1\pm i) = LP \\
L'''(P\pm 1) = L''P & L'''(P\pm i) = LP & L'''(P\pm 1\pm i) = L'P
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
LiP = L'''P & L(-P) = L''P & L(-iP) = L'P \\
L'iP = LP & L'(-P) = L'''P & L'(-iP) = L''P \\
L''iP = L'P & L''(-P) = LP & L''(-iP) = L'''P \\
L'''iP = L''P & L'''(-P) = L'P & L'''(-iP) = LP
\end{array}$$

(2.)

Durch PP' oder z bezeichnen wir eine Linie, die von P anfängt und in P' endigt. Sie braucht nicht gerade zu sein. Wir legen allen geraden Linien von $2x+2iy$ nach $2x+(2y+1)i$ gezogen (wo x, y indefinite alle ganzen Zahlen bedeuten) eine positive und eine negative Seite bei; für jene wählen wir die rechte, für diese die linke. Durch Tz bezeichnen wir die Anzahl aller Schnitte

der Linie z mit den eben gedachten Linien, als positiv gezählt diejenigen, wo z von der negativen Seite auf die positive übergeht, als negativ die andern. Ferner setzen wir

$$Tz - T(z-1) = Sz$$

($z-1$ ist eine der z parallele Linie, die von dem Punkte $P-1$ nach $P'-1$ geht). Offenbar brauchen wir nur dem oben gedachten System von Linien noch die von $2x+1+2yi$ nach $2x+1+(2y+1)i$ gezognen beizufügen und deren linke Seiten positiv und die rechten als negativ zu betrachten um in Sz die Anzahl aller Schnitte von z mit diesem zweifachen System von Geraden zu erkennen. Wir haben nun ferner

$$\begin{aligned}
T(-z) &= -T(z+i) \\
T(z)+T(z+i) &= [\tfrac{1}{2}x]-[\tfrac{1}{2}x'] \\
S(z+1) &= -Sz \\
S(z+i) &= -Sz+LP+L'''P-LP'-L'''P' \\
S(z+1+i) &= Sz-LP-L'''P+LP'+L'''P' \\
Siz &= Sz-LP+LP' \\
S(-z) &= Sz-LP-L'''P+LP'+L'''P' \\
S(-iz) &= Sz+L'P-L'P'
\end{aligned}$$

1.

Wir betrachten in der Ebene zwei Gattungen von Punkten; einmal die, denen ganze Zahlen entsprechen; dann diejenigen, welche durch Producte aus ganzen Zahlen in die Grösse $Q = \frac{m}{2M}$ bestimmt werden. Wir können dieselben durch die Benennungen Punkte der ersten und Punkte der zweiten Ordnung unterscheiden.

2.

Indem wir jeden Punkt der zweiten Ordnung mit seinen vier Nachbarn durch gerade Linien verbinden, die wir *Ligaturen* nennen werden, theilt sich die ganze Ebene in unendlich viele Quadrate. Die Punkte der ersten Ordnung liegen theils innerhalb dieser Quadrate, theils auf den Ligaturen innerhalb der Grenzen derselben, theils auf den Grenzen der Ligaturen, das letzte, wenn sie zugleich Punkte der zweiten Ordnung sind. Ist kQ ein solcher Punkt, so muss insofern m, M ohne gemeinschaftlichen Theiler und beide ungerade sind, k durch M theilbar sein.

3.

Bei den Ligaturen können wir zugleich einen Unterschied zwischen dem Anfangspunkte und Endpunkte machen, also PQ von QP unterscheiden, oder auch in einigen Fällen diesen Unterschied bei Seite setzen. Wir nennen zwei solche Ligaturen entgegengesetzte. Bezeichnen können wir überhaupt am bequemsten die Ligaturen durch ihren Anfangs- und Endpunkt, die man allenfalls in eine Klammer einschliessen mag. Einer Ligatur entgegengesetzte soll durch das doppelte Ueberstreichen angedeutet werden $QP = \overline{\overline{PQ}}$.

4.

Jedes der gedachten Quadrate wird von vier solchen Ligaturen eingeschlossen

$$\{kQ, (k+1)Q\},\ \{(k+1)Q, (k+1+i)Q\},\ \{(k+1+i)Q, (k+i)Q\},\ \{(k+i)Q, kQ\} \ldots \Omega$$

denen es zur rechten liegt. Es ist wichtig hiebei auf die Form der Zahl k zu sehen, und wir unterscheiden in dieser Beziehung viererlei Quadrate, je nachdem $k \equiv 0, 1, 1+i, i \pmod{2}$ ist, und bedienen uns dann der Zahlen 0, 1, 2, 3, die wir resp. die Intensoren der Quadrate nennen.

5.

Den Ligaturen legen wir dieselben Intensoren bei, welche die ihnen zur rechten liegenden Quadrate haben.

6.

Wir haben nun ein anderes grösseres Quadrat Ω' zu betrachten, nemlich dasjenige, welches entsteht, wenn das in 4 angezeigte für $k = 0$, mit M multiplicirt wird: dies wird also durch die geraden Linien μ, μ', μ'', μ''' begrenzt

$$\{0, \tfrac{1}{2}m\},\ \{\tfrac{1}{2}m, \tfrac{1}{2}(1+i)m\},\ \{\tfrac{1}{2}(1+i)m, \tfrac{1}{2}im\},\ \{\tfrac{1}{2}im, 0\}$$

Es besteht aus ganzen Quadraten Ω und Stücken solcher Quadrate; man zähle

alle Punkte der ersten Ordnung innerhalb desselben zusammen, indem man für jeden Punkt den Intensor des Quadrats Ω, worin er liegt, nimmt, diese Summe oder deren kleinster Rest nach dem Modulus 4 heisst der Decident von M für den Modulus m, und bestimmt die biquadratische Modalität von M in Beziehung auf diesen Modulus.

7.

Wir zerlegen das Quadrat Ω' in 5 Stücke auf folgende Art. Man verbinde den Punkt 0 mit $\tfrac{1}{4}(1+i)(m-1)$ durch die Linie λ, die durch lauter Ligaturen innerhalb Ω' gehe. Es sei

$$\tfrac{1}{2}m + i\lambda = \lambda',\quad \tfrac{1}{2}(1+i)m - \lambda = \lambda'',\quad \tfrac{1}{2}im - i\lambda = \lambda'''$$

diese 4 Linien gehen also von den Ecken des Quadrats Ω' aus ins Innere und endigen sich an den vier Ecken des innersten Quadrats, dessen Intensor 0 sein wird, wenn $m \equiv 1 \pmod{2+2i}$; die Ligaturen dieses Quadrats seien ν, ν', ν'', ν'''.

Die 5 Stücke werden also begrenzt sein

I. . . . μ, λ', $\overline{\overline{\nu}}$, $\overline{\lambda}$
II. . . . μ', λ'', $\overline{\nu'}$, $\overline{\overline{\lambda'}}$
III. . . . μ'', λ''', $\overline{\overline{\nu''}}$, $\overline{\overline{\lambda''}}$
IV. . . . μ''', λ, $\overline{\overline{\nu'''}}$, $\overline{\overline{\lambda'''}}$
V. das innere Quadrat ν, ν', ν'', ν'''

Der Decident ist also die Aufzählung aller Punkte erster Ordnung in I. II. III. IV.

8.

Der Kürze wegen soll Intensor irgend eines Punkts der Intensor des Quadrats sein, in dem er liegt, und durch vorgesetztes Υ ausgedrückt werden.

9.

Der Decident ist also

$$\Sigma\Upsilon P + \Sigma\Upsilon P' + \Sigma\Upsilon P'' + \Sigma\Upsilon P'''$$

wo P alle Punkte in I. u. s. w. bedeuten.

10.

Wir betrachten nun noch den Raum $\mathrm{VI} = -i\,\mathrm{IV}$, welcher ausserhalb Ω' liegt, sich aber durch μ an I anschliesst und mit ihm zusammen den Raum ω ausmacht, der aus $AA+BB$ vollständigen Quadraten besteht. Bedeutet Π alle ganzen; Π' alle um $\frac{1}{2}i$ vermehrten ganzen Punkte dieses Raumes, so lässt sich leicht beweisen, dass der Decident

$$= \Sigma\Upsilon\Pi - \Sigma\Upsilon\Pi' + \text{Anzahl aller ganzen Punkte innerhalb VI,}$$
$$- \text{Anzahl aller halben Punkte innerhalb VI.}$$

11.

Man denke sich von jedem ganzen Punkte k nach $k+\frac{1}{2}i$ gerade Linien gezogen, deren rechte Seite als positiv, die linke als negativ angesehen wird. Es sei l eine Linie, und Sl bezeichne die Summe aller Schnitte der l mit jenem System von Linien, diejenigen als positiv angesehen, wo l von der negativen auf die positive übergeht, die entgegengesetzten Schnitte als negativ. Man hat dann für den Decidenten folgenden Ausdruck

$$\Sigma(\Upsilon l\,.\,Sl) + \Sigma Sl' - S\mu$$

wo l *alle* Ligaturen der Quadrate in ω bedeuten (immer so genommen, dass die Quadrate ihnen zur rechten liegen) und wo l' diejenigen Ligaturen bedeutet, die auf dem Umfange der Figur ω zwischen 0 und $\frac{1}{2}m$ liegen, also ausserhalb Ω'.

Alle Ligaturen l bestehen aus

1) l'
2) l'' die innerhalb Ω' liegenden Grenzligaturen also λ', $\overline{\overline{\nu}}$, $\overline{\overline{\lambda}}$.
3) l''' die im Innern von ω liegen.

Verstände man unter l indefin. alle Ligaturen, die sich innerhalb ω oder auf den Grenzen dieser Figur befinden, insofern sie von Punkten $\frac{km}{2M}$ ausgehen, so dass k durch $1+i$ theilbar ist, so wäre der Decident

$$= \Sigma\alpha\,.\,Sl - S\mu$$

wo $\alpha = 1$ für alle Ligaturen im Innern von ω

$\alpha = \Upsilon l + 1$ für alle Grenzligaturen ausserhalb Ω', deren Richtung in der von 0 nach $\frac{1}{2}m$ gehenden Grenze liegt

$\alpha = -(\Upsilon\overline{\lambda}+1) = -\Upsilon l$ für alle auf dieser Grenze, die in entgegengesetztem Sinne laufen

$\alpha = \Upsilon l$ für alle Grenzligaturen innerhalb Ω', deren Richtung auf 0 zugeht

$\alpha = -\Upsilon l + 1$ für alle Grenzligaturen innerhalb Ω', deren Richtung von 0 abwärts geht.

12.

Wir können nun die sämmtlichen vorkommenden l (nach der letzten Manier) zu zweien combiniren, nemlich l mit $\overline{\tfrac{1}{2}m - l}$, welche wir verbundene Ligaturen nennen wollen; eine einzige ist hiervon ausgenommen, welche isolirt steht oder mit ihrer verbundenen Ligatur identisch ist, nemlich diejenige, welche von

$$\tfrac{1}{2}(M-1)\,.\,\frac{m}{2M} \text{ nach } \tfrac{1}{2}(M+1)\frac{m}{2M} \text{ läuft}$$

für verbundene Ligaturen ist das α immer einerlei.

[III.]

THEORIE DER BIQUADRATISCHEN RESTE.

1.

Kleinste Reste des Modulus $m = a+bi$ heissen die ganzen Zahlen $\mu = \alpha + \mathfrak{b}i$, für welche $\frac{\mu}{m} = x+yi$ so beschaffen ist, dass x und y positiv und kleiner als 1 sind. Es kommt noch dazu der Rest 0 *). Ihre Anzahl ist $= aa+bb$.

2.

In sofern $aa+bb$ ungerade ist, wird $aa+bb$ von der Form $4n+1$ sein. Den kleinsten Rest 0 ausgeschlossen, theilen sich die übrigen in vier Classen. Zur ersten Classe f zählen wir diejenigen, wo x und y kleiner als $\frac{1}{2}$ sind,

*) und wenn a und b etwa den gemeinschaftlichen Divisor e haben, die Zahlen $\frac{m}{e}, \frac{2m}{e}, \frac{3m}{e} \ldots \frac{(e-1)m}{e}$. Jedoch wollen wir diesen Fall vorerst von der Untersuchung ausschliessen.

die zweite f' wo $x > \frac{1}{2},\ y < \frac{1}{2}$
dritte f'' $x > \frac{1}{2},\ y > \frac{1}{2}$
vierte f''' $x < \frac{1}{2},\ y > \frac{1}{2}$

Man erhält alle Reste

f' aus $if + m$
f'' aus $-f + (1+i)m$
f''' aus $-if + im$

3.

Es sei M eine andere Zahl, die mit m keinen Factor gemein hat, so wird

$$M^{aa+bb-1} \equiv 1 \pmod{m}$$

sein: folglich $M^{\frac{1}{4}(aa+bb-1)}$ entweder $\equiv 1$, oder $\equiv i$, oder $\equiv -1$, oder $\equiv -i$ d. i. $\equiv i^\varepsilon$, wo ε eine der vier Zahlen 0, 1, 2, 3 vorstellt. Im ersten Fall wird M biquadratischer Rest von m sein, mithin auch quadratischer. Im dritten ist M quadratischer aber nicht biquadratischer Rest; im zweiten und vierten sowohl quadratischer als biquadratischer Nichtrest. Wir nennen dies ε, wovon die biquadratische Modalität der Zahl M in Beziehung auf den Modulus m abhängt, den Decidenten von M beim Modulus m. Die Induction lehrt folgenden schönen Lehrsatz. „Sind M und m ungerade Primzahlen von der Form $1+(2+2i)\mu$ so dass μ eine ganze Zahl ist, so ist die Differenz der beiden Decidenten, von M beim Modulus m, und von m beim Modulus M entweder $= 0$ oder $= 2$; das erstere, wenn wenigstens eine der Zahlen m, M von der Form $1+4N$ ist; das andere, wenn beide von der Form $1+2i+4N$ sind.“ Dies Theorem der Reciprocität ist dem bei den Quadratischen Resten bei bloss reellen Zahlen analog.

4.

Man multiplicire alle Zahlen f mit M, und suche deren kleinste Reste nach dem Modulus m. Es seien darunter α zu f gehörig
β f'
γ f''
δ f'''

so ist $\varepsilon \equiv \beta + 2\gamma + 3\delta \pmod{4}$.

Beweis. Der Inbegriff derjenigen Zahlen aus f, deren Producte mit M Reste zu f gehörig geben, sei g; der Inbegriff derjenigen, deren Producte Reste aus f' geben, sei g', und ebenso g'', g'''; so werden die kleinsten Reste von

$$-ig'M,\quad -g''M,\quad ig'''M$$

alle in f enthalten, und sowohl unter sich als von den kleinsten Resten der Producte gM verschieden sein, folglich das Product aus allen

$$gM,\quad -ig'M,\quad -g''M,\quad +ig'''M$$

dem Producte aller f congruent sein, mithin auch dem Producte aller g, g', g'', g'''. Jenes Product ist aber gleich dem Producte aus allen g, g', g'', g''' in

$$M^\alpha . (-iM)^\beta . (-M)^\gamma . (iM)^\delta$$

also dies letzte Product $\equiv 1$

folglich $M^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}(-i)^\beta(-1)^\gamma i^\delta \equiv 1$
oder $M^{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \equiv i^\beta(-1)^\gamma(-i)^\delta \equiv i^{\beta+2\gamma+3\delta}$

woraus der Lehrsatz von selbst folgt.

5.

Die Entscheidung, ob der kleinste Rest einer Zahl N nach dem Modulus m zur Classe f, f', f'' oder f''' gehöre, ist leicht. Ist nemlich ω die in $\frac{N}{m}$ enthaltene ganze Zahl, so wird jener Rest $= N - \omega m$ sein, und also zu f, f', f'' gehören, je nachdem

$$\frac{N}{m} - \omega = x + iy$$

gesetzt

$x < \frac{1}{2},\ y < \frac{1}{2}$
$x > \frac{1}{2},\ y < \frac{1}{2}$
$x > \frac{1}{2},\ y > \frac{1}{2}$
$x < \frac{1}{2},\ y > \frac{1}{2}$

ist. In diesen 4 Fällen wird der Reihe nach die in $\frac{2N}{m}$ enthaltene ganze Zahl folgende sein

$$\begin{array}{l} 2\omega \\ 2\omega+1 \\ 2\omega+1+i \\ 2\omega+i \end{array}$$

Hieraus ist klar, dass der kleinste Rest von N nach dem Modulus m zu f, f', f'', f''' gehören werde, je nachdem die in $\frac{2N}{m}$ enthaltene ganze Zahl $= \xi+\eta i$ gesetzt

$$\begin{array}{ll} \xi \text{ gerade} & \eta \text{ gerade} \\ \xi \text{ ungerade} & \eta \text{ gerade} \\ \xi \text{ ungerade} & \eta \text{ ungerade} \\ \xi \text{ gerade} & \eta \text{ ungerade} \end{array}$$

6.

Hiernach findet sich der Decident von M nach dem Modulus m auf folgende Art. Man suche die ganzen Zahlen, die in allen einzelnen $\frac{2fM}{m}$ enthalten sind. Diese allgemein durch $x+yi$ bezeichnet, lasse man ganz aus der Acht, diejenigen, wo x und y beide gerade sind, rechne für jede derjenigen, wo x ungerade und y gerade ist, eins, entnehme für jede derjenigen, wo x und y beide ungerade sind, zwei, und drei für jede von denen, wo x gerade, y ungerade ist. Von der Summe aller dieser Zahlen nehme man den kleinsten Rest nach 4, welcher der verlangte Decident sein wird. Wir drücken dies so aus

$$\text{Dec.}\, \frac{M}{m} = \Sigma n$$

wo $\left[\frac{2fM}{m}\right] = x+yi$, $n = 0$ zu setzen ist wenn x gerade y gerade

$$\begin{array}{lll} 1 & x \text{ ungerade} & y \text{ gerade} \\ 2 & x \text{ ungerade} & y \text{ ungerade} \\ 3 & x \text{ gerade} & y \text{ ungerade} \end{array}$$

Kürze halber wollen wir n durch die Characteristik θ bezeichnen, $n = \theta\frac{2fM}{m}$ *).

*) Um zu entscheiden, in welche Classe M in Beziehung auf m gehört, wählt man diejenigen Werthe von k (unter den Zahlen $1, 2, 3 \ldots p-1$) aus wodurch $\left[\frac{2km'M}{p}\right]$ gerade wird und addirt $-\Sigma\left[\frac{2km'}{p}\right]^2$ Nimmt man k nur bis $\frac{1}{2}p$, so hat man zu summiren

$$-\Sigma\left\{\left[\frac{2km'M}{p}\right]^2+\left[\frac{2km'}{p}\right]^2\right\}$$

für diejenigen Werthe von $\left[\frac{2km'M}{p}\right]$ die durch $1+i$ theilbar sind.

7. 8.

Diese Regel ist allgemein, was für eine Zahl auch M bedeute. Für den Fall, der zunächst den Gegenstand unserer Untersuchung ausmachen soll, wo M ungerade und von der Form $1+(2+2i)N$ vorausgesetzt wird, ist eine etwas abgeänderte Vorschrift zweckmässiger.

Man denke sich die Zahlen f wiederum in 4 Classen zerlegt; in die erste setzt man die (h), deren Doppeltes sich auch noch in f findet; in die zweite h' zählen wir die, deren Doppelte $2h'$ zu f' gehören, und ebenso h'' und h''' bedeuten diejenigen, deren Doppelte zu f'' und f''' gehören. Es ist also der Decident ε

$$\varepsilon = \Sigma\theta\frac{2hM}{m}+\Sigma\theta\frac{2h'M}{m}+\Sigma\theta\frac{2h''M}{m}+\Sigma\theta\frac{2h'''M}{m}$$

Den Complexus aller $2h$ und $-2h''+(1+i)m$ nennen wir H

den von allen $-i(2h'-m)$ und $i(2h'''-im)$ nennen wir H'

H und H' umfassen also alle f, jene sind die geraden, diese die ungeraden.

Ferner sind folgende Relationen in Anwendung zu bringen

$$\begin{aligned} \theta iN &= 1+\theta N \\ \theta(-N) &= 2+\theta N \\ \theta(-iN) &= 3+\theta N \\ \theta(N+1) &= 1-\theta N \\ \theta(N+1+i) &= 2+\theta N \\ \theta(N+i) &= 3-\theta N \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} \theta\frac{(-2h'i+mi)M}{m} &= 3-\theta\frac{-2h'iM}{m} = -\theta\frac{2h'M}{m} \\ \theta\frac{(-2h''+m(1+i))M}{m} &= 2+\theta\frac{-2h''M}{m} = \theta\frac{2h''M}{m} \\ \theta\frac{(2h'''i+m)M}{m} &= 1-\theta\frac{2h'''iM}{m} = -\theta\frac{2h'''M}{m} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \Sigma\theta\frac{2hM}{m}-\theta\frac{(-2h'i+mi)M}{m}+\theta\frac{(-2h''+m(1+i))M}{m}-\theta\frac{(2h'''i+m)M}{m} \\ &= \Sigma\theta\frac{HM}{m}-\Sigma\theta\frac{H'M}{m} \end{aligned}$$

oder

$$\varepsilon = \Sigma \pm \theta \frac{fM}{m}$$

ubi signum superius accipiendum pro paribus f, inferius pro imparibus.

9.

Es sei nun allgemein $f = \xi + \eta i$. Die Zahlen ξ, η sind durch die Bedingung, dass f ein kleinster Rest von m sein, oder $\frac{f}{m} = x + yi$ gesetzt, x und y zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen müssen, innerhalb gewisser Grenzen beschränkt, wofür sich durch Unterscheidung der verschiedenen Fälle leicht bestimmte Regeln geben liessen. Ertheilen wir η einen bestimmten Werth, so wird wiederum ξ seine bestimmten Grenzen haben. Z. B. wenn wir annehmen, dass a negativ, b positiv ist, so muss, da

$$x = \frac{a\xi + b\eta}{aa + bb}$$

$$y = \frac{a\eta - b\xi}{aa + bb}$$

I. damit x positiv werde $\xi < -\frac{b}{a}\eta$

II. damit y positiv werde $\xi < \frac{a}{b}\eta$

III. damit $x < \frac{1}{2}$ werde $\xi > \frac{aa + bb - 2b\eta}{2a}$

IV. damit $y < \frac{1}{2}$ werde $\xi > \frac{2a\eta - aa - bb}{2b}$

für positive η schliesst die zweite Bedingung bereits die erste ein, für negative η hingegen ist es umgekehrt; ebenso ist die dritte Bedingung schon in der vierten enthalten,

wenn $\eta < \frac{1}{2}(a+b)$
und umgekehrt, wenn $\eta > \frac{1}{2}(a+b)$

Wir haben indessen nicht nöthig alle acht Fälle, die hier eintreten können, besonders zu betrachten, sondern bezeichnen nur für einen bestimmten Werth von η die kleinere Grenze von ξ durch ξ^0, die grössere durch ξ^{00} und bemerken nur, dass bei diesen Grenzwerthen immer entweder $x = 0$, $y = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ ist, und zwar dass

wenn	in der *obern* Grenze	in der *untern* Grenze
a pos. b positiv	$x = \frac{1}{2}$ oder $y = 0$	$x = 0$ oder $y = \frac{1}{2}$
a neg. b positiv	$x = 0$ oder $y = 0$	$x = \frac{1}{2}$ oder $y = \frac{1}{2}$
a neg. b negativ	$x = 0$ oder $y = \frac{1}{2}$	$x = \frac{1}{2}$ oder $y = 0$
a pos. b negativ	$x = \frac{1}{2}$ oder $y = \frac{1}{2}$	$x = 0$ oder $y = 0$

sein muss. Wir werden diese vier Fälle Kürze halber so unterscheiden, dass wir sagen, im ersten gehöre m zum ersten Quadranten, im zweiten zum zweiten etc.

10.

Wir wollen nun das Aggregat aller $\pm\theta\frac{fM}{m}$ näher betrachten, bei denen η einen bestimmten Werth hat. Indem ξ nach und nach stetig von dem kleinsten Werthe ξ^0 bis zum grössten ξ^{00} wächst, wird sich

$$\frac{(\xi + \eta i)M}{m} = X + Yi$$

auch nach dem Gesetze der Stetigkeit ändern, und zwar wird, wenn $\frac{M}{m}$ im ersten Quadranten liegt, sowohl X als Y beständig wachsen; liegt $\frac{M}{m}$ im zweiten Quadranten, so wird X beständig abnehmen und Y zunehmen; im dritten Quadranten wird das umgekehrte vom ersten, im vierten das umgekehrte vom zweiten Statt finden. Allein die in $X + iY$ enthaltene ganze Zahl wird sich sprungsweise ändern, indem entweder $[X]$ oder $[Y]$ sich um Eine Einheit ändert. Es seien die Werthe von ξ, wo ein solcher Uebergang Statt findet, d. i. wo entweder X oder Y eine ganze Zahl wird, der Reihe nach folgende

$$\xi', \xi'', \xi''', \ldots \xi^n$$

Hier muss bemerkt werden, dass weder diese Werthe noch ξ^0 und ξ^{00} ganze Zahlen sein können, ausgenommen für $\eta = 0$, wo entweder ξ^0 oder $\xi^{00} = 0$ wird. Es sei nun

$$\theta\frac{(\xi' + \eta i)M}{m} - \theta\frac{(\xi^0 + \eta i)M}{m} = \delta' \quad \text{(anders auszudrücken)}$$

$$\theta\frac{(\xi'' + \eta i)M}{m} - \theta\frac{(\xi' + \eta i)M}{m} = \delta''$$

etc.

$$\theta\frac{(\xi^{00} + \eta i)M}{m} - \theta\frac{(\xi^{n-1} + \eta i)M}{m} = \delta^n$$

so sieht man leicht, weil zwischen ξ^0 und ξ' $[\frac{1}{2}\xi'] - [\frac{1}{2}\xi^0]$ gerade und $[\frac{1}{2}\xi' + \frac{1}{2}] - [\frac{1}{2}\xi^0 + \frac{1}{2}]$ ungerade ganze Zahlen liegen etc., dass bloss den bestimmten Werth von η betrachtet

$$
\begin{aligned}
(\pm 1)\Sigma\theta\tfrac{fM}{m} = & \{[\tfrac{1}{2}\xi'] - [\tfrac{1}{2}\xi^0] - [\tfrac{1}{2}\xi' + \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{1}{2}\xi^0 + \tfrac{1}{2}]\} \,.\, \theta\tfrac{(\xi^0 + \eta i)M}{m} \\
& + \{[\tfrac{1}{2}\xi''] - [\tfrac{1}{2}\xi'] - [\tfrac{1}{2}\xi'' + \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{1}{2}\xi' + \tfrac{1}{2}]\} \,.\, \{\theta\tfrac{(\xi^0 + \eta i)M}{m} + \delta'\} \\
& + \{[\tfrac{1}{2}\xi'''] - [\tfrac{1}{2}\xi''] - [\tfrac{1}{2}\xi''' + \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{1}{2}\xi'' + \tfrac{1}{2}]\} \,.\, \{\theta\tfrac{(\xi^0 + \eta i)M}{m} + \delta' + \delta''\} \\
& + \text{etc.} \\
& + \{[\tfrac{1}{2}\xi^{00}] - [\tfrac{1}{2}\xi^n] - [\tfrac{1}{2}\xi^{00} + \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{1}{2}\xi^n + \tfrac{1}{2}]\} \,.\, \{\theta\tfrac{(\xi^0 + \eta i)M}{m} + \delta' + \delta'' + \ldots + \delta^n\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= & -([\tfrac{1}{2}\xi^0] - [\tfrac{1}{2}\xi^0 + \tfrac{1}{2}]) \,.\, \theta\tfrac{(\xi^0 + \eta i)M}{m} \\
& -([\tfrac{1}{2}\xi'] - [\tfrac{1}{2}\xi' + \tfrac{1}{2}]) \,.\, \delta' \\
& -([\tfrac{1}{2}\xi''] - [\tfrac{1}{2}\xi'' + \tfrac{1}{2}]) \,.\, \delta'' \\
& - \text{etc.} \\
& -([\tfrac{1}{2}\xi^n] - [\tfrac{1}{2}\xi^n + \tfrac{1}{2}]) \,.\, \delta^n \\
& +([\tfrac{1}{2}\xi^{00}] - [\tfrac{1}{2}\xi^{00} + \tfrac{1}{2}]) \,.\, \theta\tfrac{(\xi^{00} + \eta i)M}{m}
\end{aligned}
$$

(wo das obere Zeichen für gerade η, das untere für ungerade gilt.)

Die Zahlen δ', δ'', δ''' u.s.w. können keine andere Werthe haben als $+1$ und -1. Den Werth $+1$ bekommt δ', wenn die Werthe von X, Y, die zu ξ' gehören, durch X', Y' bezeichnet

$\frac{M}{m}$ im 1. Quadr.	$\frac{M}{m}$ im 2. Quadr.
X' ganze gerade Zahl	X' ganze gerade Zahl
und $[Y]$ ungerade	$[Y]$ gerade
Y' ganze gerade Zahl	Y' ganze gerade Zahl
und $[X]$ gerade	$[X]$ gerade

$\frac{M}{m}$ im 3. Quadr.	$\frac{M}{m}$ im 4. Quadr.
X' ganze gerade Zahl	X' ganze gerade Zahl
und $[Y]$ gerade	$[Y]$ ungerade
Y' ganze gerade Zahl	Y' ganze gerade Zahl
und $[X]$ ungerade	$[X]$ ungerade

So oft sich eine dieser Bedingungen in die entgegengesetzte ändert, wird $\delta = -1$; so oft sich beide ändern, bleibt $\delta = +1$.

11.

Zur bequemern Uebersicht dieser Rechnungen dienen folgende Formeln:

$$
\begin{aligned}
\text{es ist } m &= a + bi, & aa + bb &= d \\
M &= A + Bi, & AA + BB &= D \\
\tfrac{dM}{m} &= \alpha + \beta i, & \alpha = aA + bB, &\quad \beta = aB - bA \\
\tfrac{\xi + i\eta}{m} &= x + iy, & M(x + iy) &= X + iY
\end{aligned}
$$

Ist gegeben η und X, so wird

1. $\xi = \frac{\beta\eta}{\alpha} + \frac{dX}{\alpha}$
2. $Y = \frac{D\eta}{\alpha} + \frac{\beta X}{\alpha}$

Ist gegeben η und Y, so wird

3. $\xi = -\frac{\alpha\eta}{\beta} + \frac{dY}{\beta}$
4. $X = -\frac{D\eta}{\beta} + \frac{\alpha Y}{\beta}$

Ist gegeben η und x, so wird

5. $\xi = -\frac{b\eta}{a} + \frac{dx}{a}$
6. $X = -\frac{B\eta}{a} + \frac{\alpha x}{a}$
7. $Y = \frac{A\eta}{a} + \frac{\beta x}{a}$

Ist gegeben η und y, so wird

8. $\xi = \frac{a\eta}{b} - \frac{dy}{b}$
9. $X = \frac{A\eta}{b} - \frac{\alpha y}{b}$
10. $Y = \frac{B\eta}{b} - \frac{\beta y}{b}$

12.

Die Regel des 10. Art. lässt sich nun so ausdrücken. Indem η einen bestimmten Werth erhält, ist

$$\Sigma \pm \theta\tfrac{fM}{m} = k^0\theta(X^0 + Y^0 i) - k^{00}\theta(X^{00} + Y^{00} i) + \Sigma k$$

Hier ist $k^0 = 0$, wenn $[\xi^0]$ gerade; $k^0 = +1$, wenn $[\xi^0]$ ungerade und η gerade; $k^0 = -1$, wenn $[\xi^0]$ ungerade und η ungerade ist; k^{00} wird eben so durch $[\xi^{00}]$ und η bestimmt. Endlich ist Σk ein Aggregat von so vielen Zahlen, als es zwischen $\xi = \xi^0$ und $\xi = \xi^{00}$ ganze Werthe von X oder Y gibt; jedesmal ist $k = 0$, wenn das entsprechende $[\xi]$ gerade ist, hingegen $= \pm 1$, wenn $[\xi]$ ungerade ist. Das Zeichen wird auf folgende Art bestimmt. Ist X eine ganze Zahl, so wird $k = 1$, wenn zugleich

η gerade
X gerade
$[Y]$ gerade
$\frac{M}{m}$ im zweiten oder dritten Quadranten d. i. α negativ

Ist eine oder drei dieser Bedingungen nicht vorhanden, so wird $k = -1$; fehlen zwei oder alle vier, so bleibt $k = 1$. Ist hingegen Y eine ganze Zahl, so wird $k = 1$, wenn von den 4 Bedingungen

η gerade
Y gerade
$[X]$ gerade
$\frac{M}{m}$ im ersten oder zweiten Quadranten d. i. σ positiv

alle oder zwei oder keine erfüllt ist.

13.

Jetzt haben wir noch die Fälle besonders zu betrachten, wo ξ^0 oder ξ^{00} (oder X^0, Y^0, X^{00}, Y^{00}) eine ganze Zahl ist. Es sind hier vier Fälle zu unterscheiden, indem wir a und A ungerade setzen.

I. Liegt m im ersten Quadranten, so wird für $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$; $\eta = \frac{1}{2}b$ eine ganze Zahl; es ist dann $Y^{00} = \frac{1}{2}B$ eine ganze Zahl und $\theta(X^{00} + Y^{00}i)$ wird nur dann $= \theta(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}Bi)$ sein, wenn σ negativ ist, bei einem positiven σ hingegen wird dafür $\theta(\frac{1}{2}A + (\frac{1}{2}B - 1)i)$ genommen werden.

II. Liegt m im zweiten Quadranten, so wird für $x = 0$, $y = 0$; $\eta = 0$. Hier wird für diesen Werth von η, $X^{00} = 0$, $Y^{00} = 0$. Man hat dann

$$\theta(X^{00} + Y^{00}i) = \begin{matrix} 2, \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} \text{ je nachdem } \frac{M}{m} \text{ im } \begin{matrix} 1. \\ 2. \\ 3. \\ 4. \end{matrix} \text{ Quadr. liegt, und } k^{00} = 1$$

III. Liegt m im dritten Quadranten, so wird für $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$; $\eta = \frac{1}{2}b$ eine ganze Zahl, wofür $X^0 + Y^0 i = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}Bi$. Man setzt dann

$$\theta(X^0 + Y^0 i) = \theta(\tfrac{1}{2}A + (\tfrac{1}{2}B - 1)i)$$

so oft σ negativ ist.

IV. Liegt m im vierten Quadranten, so ist für $\eta = 0$,

$\theta(X^0 + Y^0 i) = 0, 1, 2, 3$ zu setzen, je nachdem $\frac{M}{m}$ im 1. 2. 3. 4. Quadranten liegt $k^0 = 0$.

14.

Aus den vorhergehenden Untersuchungen folgt nunmehr folgende Bestimmung des Decidenten.

Man sammle alle Werthe von x und y, die *innerhalb* der Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen und wofür entweder η und X oder η und Y eine ganze Zahl ist, und bestimme für jedes $x + iy$ nach den Regeln des 12. Art. den Werth von k.

Man sammle ferner alle Werthe auf den Grenzen d. i. wo entweder $x = 0$ oder $\frac{1}{2}$, während y *zwischen* 0 und $\frac{1}{2}$, oder $y = 0$ oder $= \frac{1}{2}$, während x *zwischen* 0 und $\frac{1}{2}$, die so beschaffen sind, dass η eine ganze Zahl und $[\xi]$ ungerade, und bestimme das zugehörige l auf folgende Weise. Es sei $\theta M(x + yi) = \pm \theta$, das obere Zeichen für gerade, das untere für ungerade η

so ist für m im

für	1. Quadr.	2. Quadr.	3. Quadr.	4. Quadr.
$y = 0$	$l = -\theta$	$l = -\theta$	$l = +\theta$	$l = +\theta$
$x = \frac{1}{2}$	$l = -\theta$	$l = +\theta$	$l = +\theta$	$l = -\theta$
$y = \frac{1}{2}$	$l = +\theta$	$l = +\theta$	$l = -\theta$	$l = -\theta$
$x = 0$	$l = +\theta$	$l = -\theta$	$l = -\theta$	$l = +\theta$

Kürzer so $\qquad l = \pm\theta,$

das Zeichen ist dasselbe wie das von a wenn $x = 0$
das entgegengesetzte wenn $x = \frac{1}{2}$
dasselbe wie das von b wenn $y = \frac{1}{2}$
das entgegengesetzte wenn $y = 0$

Zu $\Sigma k + \Sigma l$ kommt dann noch hinzu

wenn m im zweiten Quadranten liegt: 2, 1, 0, 3 $\Big\}$ je nachdem $\frac{M}{m}$ im
wenn m im vierten Quadranten liegt: 0, $\qquad$ 1. 2. 3. 4. Quadr.

wenn m im ersten Quadranten liegt und $\frac{1}{2}(a-1)$ ungerade ist

$$\theta(\tfrac{1}{2}A + (\tfrac{1}{2}B - 1)i) \text{ wenn } \beta \text{ positiv}$$
$$\theta(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}Bi) \text{ wenn } \beta \text{ negativ}$$

wenn m im dritten Quadranten liegt und $\frac{1}{2}(a-1)$ ungerade ist

$$-\theta(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}Bi) \text{ wenn } \beta \text{ positiv}$$
$$-\theta(\tfrac{1}{2}A + (\tfrac{1}{2}B - 1)i) \text{ wenn } \beta \text{ negativ.}$$

[IV.]

1.

Biquadratischer Rest? $\quad m = a + bi; \quad aa + bb = d$

Modulus $\quad M = A + Bi, \quad AA + BB = D$

$\frac{mD}{M} = \mu \quad \mu = \alpha + \beta i, \quad \alpha = aA + bB, \quad \beta = Ab - Ba$

$\xi + \eta i = \pi; \quad \pi m = x + yi = p; \quad \pi M = X + Yi = P$

Relationen

$$\begin{array}{lll}
x = a\xi - b\eta & d\xi = ax + by & D\xi = AX + BY \\
y = b\xi + a\eta & d\eta = -bx + ay & D\eta = -BX + AY \\
X = A\xi - B\eta & dX = \alpha x + \beta y & Dx = \alpha X - \beta Y \\
Y = B\xi + A\eta & dY = -\beta x + \alpha y & Dy = \beta X + \alpha Y
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\beta\xi = -Bx + bX = Ay - aY \\
\beta\eta = -Ax + aX = -By + bY \\
\alpha\xi = Ax + bY = By + aX \\
\alpha\eta = -Bx + aY = Ay - bX
\end{array}$$

Diejenigen π, wo ξ und η zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen, sollen durch π^0 bezeichnet werden, und die entsprechenden p und P durch p^0 und P^0; diejenigen π, wo $\eta = 0$ und ξ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, durch π'; die, wo $\xi = \frac{1}{2}$ und η zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, durch π''; diejenigen π, wo $\eta = \frac{1}{2}$ und ξ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, durch π'''; endlich die wo $\xi = 0$ und η zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ durch π''''.

Der Decident von $\frac{m}{M}$ wird so gefunden:

Man sammle alle *ganzen* P^0, für welche mithin x^0 und y^0 gebrochen sein werden; die respectiven Intensoren von p^0 seien t^0 d.i. die Zahlen 0, 1, 2, 3, je nachdem

$[x^0]$ gerade, ungerade, ungerade, gerade
$[y^0]$ gerade, gerade, ungerade, ungerade

So ist der gesuchte Decident $= \Sigma \pm t^0$, wo das obere Zeichen für gerade P^0, das untere für die ungeraden zu nehmen ist.

Dies ist die *erste* Methode.

2.

Wir wollen nun die einzelnen P^0 nach den Werthen von Y^0 zusammenordnen. Indem wir uns auf den Fall einschränken, wo a, b, A, B positiv sind, ist der kleinste Werth von $Y^0 \ldots +1$, der grösste $\frac{1}{2}(A + B - 1)$. Für jeden bestimmten Werth von Y^0 müssen die Werthe von X^0 zwischen bestimmten Grenzen liegen, nemlich

I. wenn $A - B$ positiv ist

wenn	zwischen	und
$Y < \frac{1}{2}B$	$-\frac{BY^0}{A}$	$\frac{AY^0}{B}$
$Y = \frac{1}{2}B$	$-\frac{BB}{2A}$	$\frac{1}{2}A$
$Y > \frac{1}{2}B$ und $< \frac{1}{2}A$	$-\frac{BY^0}{A}$	$-\frac{BY^0}{A} + \frac{D}{2A}$
$Y > \frac{1}{2}A$	$\frac{AY^0}{B} - \frac{D}{2B^0}$	$-\frac{BY^0}{A} + \frac{D}{2A}$

II. Wenn $A-B$ negativ ist,

wenn	zwischen	und
$Y<\frac{1}{2}A$	$-\frac{BY^0}{A}$	$\frac{AY^0}{B}$
$Y>\frac{1}{2}A$ und $<\frac{1}{2}B$	$\frac{AY^0}{B}-\frac{D}{2B}$	$\frac{AY^0}{B}$
$Y=\frac{1}{2}B$	$\frac{AB-D}{2B}$	$\frac{1}{2}A$
$Y>\frac{1}{2}B$	$\frac{AY^0}{B}-\frac{D}{2B}$	$-\frac{BY^0}{A}+\frac{D}{2A}$

In den kleinern Grenzen ist entweder $\xi=0$ oder $\eta=\frac{1}{2}$, in den grössern Grenzen hingegen entweder $\eta=0$ oder $\xi=\frac{1}{2}$. Es lässt sich leicht beweisen, dass nie die Grenzen von x ganze Zahlen sind.

3.

Wir wollen nun die Partialsummen für jedes bestimmte Y^0 auf eine andere Weise darstellen. Auf den Grenzen wird p bestimmte Werthe haben, die durch p^*, p^{**} bezeichnet werden mögen, und während X stetig von der einen Grenze zur andern sich ändert, wird p stetig von p^* zu p^{**} übergehen. Allein die in $[p]$ enthaltene ganze Zahl wird hiebei sprungsweise geändert, indem immer entweder der reelle oder der imaginäre Theil sich um eine Einheit ändert. Es geschehen die Aenderungen bei den Werthen von X

$$X', X'', X''' \ldots X^{\mu}$$

die bereits nach ihrer Grösse geordnet sind und denen die Werthe von p

$$p', p'', p''' \ldots$$

entsprechen.

Das letzte X^{μ} kann auch mit X^{**} identisch sein, wenn σ positiv, oder X' mit X^* identisch etc.

Die x sind hier zunehmend, also wenn x^{**} eine ganze Zahl, wird sie für x^{μ} gezählt.

Die y sind zunehmend bei positiven σ, da wird y^{**} ganz mitgezählt
abnehmend bei negativen σ, da wird y^* mitgezählt.

Die Intensoren von p^*, p^{**} seien λ^* und λ^{**}

der Intensor von p' an bis p'' .. $\lambda^*+\delta'$
p'' bis p''' .. $\lambda^*+\delta'+\delta''$
p^{μ} bis p^{**} .. $\lambda^*+\delta'+\delta''\ldots+\delta^{\mu}=\lambda^{**}$

so wird die Partialsumme, in sofern Y^0 gerade,

$$=\lambda^*(g-h)+(\lambda^*+\delta')(g'-h')+(\lambda^*+\delta'+\delta'')(g''-h'')+\text{etc.}+\lambda^{**}(g^{\mu}-h^{\mu})$$

wo g die Anzahl der geraden X^0 von X^* bis X', h die der ungeraden bedeutet.

4.

Diese Formel lässt sich auch so darstellen:

$$\begin{aligned}
&\lambda^*\left\{[\tfrac{1}{2}X^*-\tfrac{1}{2}]-[\tfrac{1}{2}X^*]\right\}\\
&+\delta'\left\{[\tfrac{1}{2}X'-\tfrac{1}{2}]-[\tfrac{1}{2}X']\right\}\\
&+\delta''\left\{[\tfrac{1}{2}X''-\tfrac{1}{2}]-[\tfrac{1}{2}X'']\right\}\\
&+\text{etc.}\\
&+\delta^{\mu}\left\{[\tfrac{1}{2}X^{\mu}-\tfrac{1}{2}]-[\tfrac{1}{2}X^{\mu}]\right\}\\
&-\lambda^{**}\left\{[\tfrac{1}{2}X^{**}-\tfrac{1}{2}]-[\tfrac{1}{2}X^{**}]\right\}
\end{aligned}$$

oder durch $\lambda^*\varepsilon^*+\delta'\varepsilon'+\delta''\varepsilon''+\text{etc.}+\delta^{\mu}\varepsilon^{\mu}-\lambda^{**}\varepsilon^{**}$

wo allgemein $\varepsilon=0$ wenn $[X]$ ungerade
und $=-1$ wenn $[X]$ gerade ist und Y gerade
$+1$ wenn $[X]$ gerade und Y ungerade.

Für δ hingegen hat man die Werthe

		σ positiv	σ negativ
wenn x eine ganze gerade Zahl,	$[y]$ gerade	-1	-1
	$[y]$ ungerade	$+1$	$+1$
x eine ganze ungerade Zahl,	$[y]$ gerade	$+1$	$+1$
	$[y]$ ungerade	-1	-1
y eine ganze gerade Zahl,	$[x]$ gerade	-3	$+3$
	$[x]$ ungerade	-1	$+1$
y eine ganze ungerade Zahl,	$[x]$ gerade	$+3$	-3
	$[x]$ ungerade	$+1$	-1

5.

Hieraus leiten wir folgende zweite Methode den Decidenten zu bestimmen ab.

I. Man sammle alle Combinationen von ganzen Werthen von Y und x, die folgende Eigenschaften haben

1. dass $\xi = \frac{Ax+bY}{\alpha}$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ falle, wobei die zweite Grenze inclusive genommen wird
2. dass $\eta = \frac{-Bx+aY}{\alpha}$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ falle, die erste Grenze inclusive genommen.

II Man berechne dafür

$$X = \frac{Dx+\beta Y}{\alpha}$$
$$y = \frac{\beta x+dY}{\alpha}$$

III. Man lasse alle diejenigen weg, wo $[X]$ eine ungerade Zahl ist, und theile die übrigen, wo $[X]$ gerade ist, in zwei Classen;

in die erste Classe setze man diejenigen, wo zugleich

Y gerade, x gerade, $[y]$ gerade

oder wo eine dieser Bedingungen Statt findet;

in die zweite Classe diejenigen, wo zwei dieser Bedingungen oder gar keine Statt hat,

oder in I. wo $[Y+x+y]$ gerade

II. wo $[Y+x+y]$ ungerade

und nenne den Ueberschuss der Anzahl in der ersten Classe über die in der zweiten c.

IV. Man sammle alle Combinationen von ganzen Werthen von Y und y, die folgende Eigenschaften haben:

1. dass $\xi = \frac{Ay-aY}{\beta}$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ falle, die erste Grenze inclusive, wenn β negativ, die zweite inclusive, wenn β positiv;
2. dass $\eta = \frac{-By+bY}{\beta}$ zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ falle, die erste Grenze inclusive bei positivem β, die zweite bei negativem.

[V.]

[1.]

Modulus $M = A+Bi$, $AA+BB = D$

Rest $m = a+bi$, $aa+bb = d$

$$\frac{mD}{M} = \mu = \alpha+\beta i = aA+bB+(Ab-Ba)i$$

$$\xi+\eta i = \pi, \quad \pi m = p = x+yi; \quad \pi M = P = X+Yi$$

ω eine unbestimmte unendlich kleine reelle positive Grösse.

[2.]

Vorbereitung.

I. Man sammle alle π, wo

ξ nicht negativ und nicht grösser als $\frac{1}{2}$

η positiv und kleiner als $\frac{1}{2}$

Entweder x oder y eine Ganze

Entweder X oder Y eine Ganze

und bestimme für jedes π die Grösse ε nach folgender Regel:

Es sei p^0 die nächste Ganze durch $1+i$ theilbare bei p

P^0 die nächste Ganze durch $1+i$ theilbare bei P

und setze $\varepsilon = \pm 1$, wo das Zeichen immer dasselbe ist wie das Zeichen des imaginären Theils der Grösse

$$\frac{p-p^0}{P-P^0}(\alpha-\beta i)$$

folgendes sind die Specialregeln: Erste Classe, x und X Ganze

$$\beta\xi = -Bx+bX$$
$$\beta\eta = -Ax+aX$$
$$\beta y = -\alpha x+dX$$
$$\beta Y = -Dx+\alpha X$$

$\varepsilon = -1$, wenn β positiv, x gerade, $[y]$ gerade, X gerade, $[Y]$ gerade oder wenn nur eine ungerade Anzahl dieser Bedingungen gilt.
$\varepsilon = +1$, wenn keine oder eine gerade Anzahl dieser Bedingungen gilt.

Zweite Classe, y und Y Ganze

$$\begin{aligned} \beta\xi &= +Ay - aY \\ \beta\eta &= -By + bY \\ \beta x &= +\alpha y - dY \\ \beta X &= +Dy - \alpha Y \end{aligned}$$

$\varepsilon = -1$, wenn β positiv, $[x]$ gerade, y gerade, $[X]$ gerade, Y gerade oder wenn eine ungerade Anzahl dieser Bedingungen gilt.
$\varepsilon = +1$, wenn keine oder eine gerade Anzahl gilt.

Dritte Classe, y und X Ganze

$$\begin{aligned} \alpha\xi &= +By + aX \\ \alpha\eta &= +Ay - bX \\ \alpha x &= -\beta y + dX \\ \alpha Y &= +Dy - \beta X \end{aligned}$$

$\varepsilon = -1$, wenn α positiv, $[x]$, y, X, $[Y]$ alle Gerade oder wenn eine ungerade Anzahl dieser Bedingungen gilt.
$\varepsilon = +1$, wenn keine oder eine gerade Anzahl Statt hat.

Vierte Classe, x und Y Ganze

$$\begin{aligned} \alpha\xi &= +Ax + bY \\ \alpha\eta &= -Bx + aY \\ \alpha y &= +\beta x + dY \\ \alpha X &= +Dx + \beta Y \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn α positiv, x, $[y]$, $[X]$, Y alle Gerade oder bei einer ungeraden Anzahl dieser Bedingungen.
$\varepsilon = -1$, bei keiner oder einer geraden Anzahl derselben.

[3.]

II. Man sammle alle π, wo

ξ positiv und kleiner als $\frac{1}{2}$
$\eta = \omega$
und entweder X oder Y eine Ganze,

und setze $\varepsilon = \pm 1$ so dass das Zeichen des imaginären Theils von

$$\frac{M}{P - P^0}$$

zu nehmen ist.

Specialregel: Erste Classe, X ganz

$$\begin{aligned} A\xi &= +\;X + B\omega \\ Ax &= +aX - \beta\omega \\ Ay &= +bX - \alpha\omega \\ AY &= +BX + D\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = -1$, wenn A positiv, X und $[Y]$ gerade oder wenn nur eine Bedingung gilt.
$\varepsilon = +1$, wenn keine oder zwei gelten.

Zweite Classe, Y ganz

$$\begin{aligned} B\xi &= +\;Y - A\omega \\ Bx &= +aY - \alpha\omega \\ By &= +bY - \beta\omega \\ BX &= +AY - D\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn B positiv, $[X]$ und Y gerade oder wenn nur eine Bedingung gilt.
$\varepsilon = -1$, wenn keine oder zwei gelten.

[4.]

III. Man sammle alle π, wo

ξ und η denselben Bedingungen unterworfen sind wie in II.
entweder x oder y Ganze,

und setze $\varepsilon = \pm 1$ mit dem Zeichen des imaginären Theils von

$$\frac{m}{p - p^0}$$

Specialregeln: Erste Classe, x ganz

$$\begin{aligned} a\xi &= +\ x\ + b\omega \\ ay &= + bx + d\omega \\ aX &= + Ax + \beta\omega \\ aY &= + Bx + \alpha\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = -1$, wenn a positiv, x, $[y]$ beide gerade oder wenn nur eine Bedingung gilt.
$\varepsilon = +1$, wenn keine oder zwei gelten.

Zweite Classe, y ganz

$$\begin{aligned} b\xi &= +\ y\ - a\omega \\ bx &= + ay - d\omega \\ bX &= + Ay - \alpha\omega \\ bY &= + By + \beta\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn b positiv, $[x]$ und y gerade oder wenn nur eine Bedingung gilt.
$\varepsilon = -1$, wenn keine gilt.

[5.]

IV. Man sammle alle π, wo

$\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\omega$
η positiv und kleiner als $\frac{1}{2}$
X oder Y ganz,

und setze $\varepsilon = \pm 1$ mit dem Zeichen des imaginären Theils von

$$\frac{iM}{P - P^0}$$

Specialregeln: Erste Classe X eine Ganze,

$$\begin{aligned} 2B\eta &= + A - \ 2X + A\omega \\ 2Bx &= - \beta + 2bX - \beta\omega \\ 2By &= + \alpha - 2aX + \alpha\omega \\ 2BY &= + D - 2AX + D\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn B positiv, X, $[Y]$ gerade oder bei einer Bedingung.
$\varepsilon = -1$, bei keiner oder zwei Bedingungen.

Zweite Classe, Y eine Ganze

$$\begin{aligned} 2A\eta &= - B + \ 2Y\ - B\omega \\ 2Ax &= + \alpha - 2bY + \alpha\omega \\ 2Ay &= + \beta + 2aY + \beta\omega \\ 2AX &= + D - 2BY + D\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn A positiv, $[X]$, Y gerade, oder bei einer
$\varepsilon = -1$ bei keiner oder zwei Bedingungen.

[6.]

V. Man sammle alle π, wo

ξ, η denselben Bedingungen unterworfen sind wie in IV,
und wo x oder y eine ganze Zahl,

und setze $\varepsilon = \pm 1$ mit dem Zeichen des imaginären Theils von

$$\frac{im}{p - p^0}$$

Specialregeln: Erste Classe, x eine Ganze

$$\begin{aligned} 2b\eta &= + a - \ 2x\ + a\omega \\ 2by &= + d - 2ax + d\omega \\ 2bX &= + \beta + 2Bx + \beta\omega \\ 2bY &= + \alpha - 2Ax + \alpha\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn b positiv, x, $[y]$ gerade oder bei einer Bedingung.
$\varepsilon = -1$, bei keiner oder zwei Bedingungen.

Zweite Classe, y eine Ganze

$$\begin{aligned} 2a\eta &= - b + \ 2y\ - b\omega \\ 2ax &= + d - 2by + d\omega \\ 2aX &= + \alpha - 2By + \alpha\omega \\ 2aY &= - \beta + 2Ay - \beta\omega \end{aligned}$$

$\varepsilon = +1$, wenn a positiv, $[x]$, y gerade, oder bei einer Bedingung,
$\varepsilon = -1$, bei keiner oder zwei Bedingungen.

[7.]

Die erste Methode gibt nun folgendes Resultat:

4 Decident = I. $\Sigma\varepsilon$ von allen
$-4\Sigma\varepsilon$ von denen, wo y ganz $[x]$ gerade

II. $-\Sigma\varepsilon$ von allen
$+4\Sigma\varepsilon$ von denen, wo $[x]$ gerade $[y]$ ungerade

IV. $+4\Sigma\varepsilon$ von denen, wo nicht zugleich $[x]$ und $[y]$ gerade
$+Q$

Hier ist

für A B	$Q =$
$+\ +$	$-$Intens. $+\mu\omega i$ $+$Int. $\frac{1}{2}m - \mu\omega$
$+\ -$	$-$Intens. $+\mu\omega$ $+$Int. $\frac{1}{2}mi - \mu\omega i$
$-\ -$	$-$Intens. $-\mu\omega i$ $-$Int. $\frac{1}{2}m + \mu\omega$
$-\ +$	$-$Intens. $-\mu\omega$ $-$Int. $\frac{1}{2}mi + \mu\omega i$

folgende Tabelle stellt dies dar

α σ	A B $+\ +$		A B $+\ -$		A B $-\ -$		A B $-\ +$	
$+\ +$	+2	0	0	+2	−3	−5	−3	−5
$+\ -$	0	+2	−2	0	−5	−3	−1	−3
$-\ -$	−3	−1	−1	+1	−4	−2	0	−2
$-\ +$	+1	−1	−1	+1	0	−2	−4	−6

$\frac{m-1}{2}$ par, impar

Pars prior ipsius

$$2Q\,..\,-3-(\alpha\sigma AB)+(A\alpha)+(A\sigma)+(B\alpha)-(B\sigma)$$

Das ganze $2Q$ für

$\frac{m-1}{2}$ impar $\quad -3+4(A)-(B)-(\sigma)+(\alpha A)+(\alpha B)+(\sigma A)-(\sigma B)-(\alpha\sigma AB)$

$\frac{m-1}{2}$ par $\quad -3+2(A)+(B)+(\sigma)+(\alpha A)+(\alpha B)+(\sigma A)-(\sigma B)+2(\sigma AB)$
$-(\alpha\sigma AB)$

Beispiel

$m = +3-2i \mid 13$
$M = -1-6i \mid 37$
$\mu = +9+20i$

$(1+i)M+(-2+i)m = 1$
$mM = -15-16i$

$+4+13i$	$+38+31i$	$+1$	-1
$+5+7i$	$+29+11i$	0	$+0$
$+6+i$	$+20-9i$	$0-i$	-3
$+10+14i$	$+58+22i$	$+1$	$+1$
$+11+8i$	$+49+2i$	$+1$	-1
$+12+2i$	$+40-18i$	$+1-i$	$+2$
$+16+15i$	$+78+13i$	$+2$	-0
$+17+9i$	$+69-7i$	$+1-i$	$+2$
$+18+3i$	$+60-27i$	$+1-i$	-2

Decident $= -2$

I . . $+1$ $\quad 0$
II . . $\quad 0$ -4
IV . . $\quad\quad 0$
$Q = -5$
-8
Gut.

I

x	X	20ξ	20η	$20y$	$20Y$	ε
+1	0	6	1	−9	−37	−1
	+1	4	4	+4	−28	−1
	+2	2	7	+17	−19	−1
+2	+1	10	5	−5	−65	−1
	+2	8	8	+8	−56	+1
						−3

y	Y	20ξ	20η	$20x$	20X	ε
0	−1	3	2	+13	+9	+1˙
	−2	6	4	+26	+18	+1
	−3	9	6	+39	+27	+1
+1	−1	2	8	+22	+46	+1
						+4
						(+1)

y	X	9ξ	9η	$9x$	$9Y$	ε
0	+1	3	2	+13	−20	+1
+1	+2	0	3	+6	−3	−1˙
						0 (−1)

x	Y	9ξ	9η	$9y$	9X	ε
+1	−1	1	3	+7	+17	−1
+2	−3	4	3	+1	+14	+1
						0

I . . . $+1$ (0)

II

Y	6ξ	$6x$	$6y$	6X	ε
−1	+1	$+3+9\omega$	−2	−1	−1˙
−2	+2	$+6+9\omega$	−4	−2	+1
					0(−1)

III

x	3ξ	$3y$	3X	$3Y$	ε
+1	1	−2	−1	$-6+9\omega$	−1

IV

X	12η	$12x$	$12y$	$12Y$	ε
0	+1	$+20+20\omega$	−9	−37	−1˙
+1	+3	$+24+20\omega$	−3	−39	+1˙
+2	+5	$+28+20\omega$	+3	−41	−1
					−1 (0)

V

x	4η	$4y$	4X	$4Y$	ε
+2	+1	−1	$+4-20\omega$	−13	+1

y	6η	$6x$	6X	$6Y$	ε
0	+2	+13	+9	−20	+1

[8.]

Wir wollen nunmehro das Resultat von I näher betrachten. Es sind vier Combinationen

1°, wenn x und X Ganze sind. Man hat hier

$$\begin{aligned} \sigma\xi &= -Bx+b\mathrm{X} \\ \sigma\eta &= -Ax+a\mathrm{X} \\ \sigma y &= -\alpha x+d\mathrm{X} \\ \sigma Y &= -Dx+\alpha\mathrm{X} \end{aligned}$$

Es seien y^0 und Y^0 die absolut kleinsten Reste von $-\alpha x+d\mathrm{X}$, $-Dx+\alpha\mathrm{X}$ nach dem Modulus σ und $\sigma y = \sigma y'+y^0$, $\sigma Y = \sigma Y'+Y^0$ und man setze

$$\begin{aligned} \sigma u &= -By^0+bY^0 \qquad & y^0 &= +au-bt \\ \sigma t &= -Ay^0+aY^0 \qquad & Y^0 &= +Au-Bt \end{aligned}$$

so werden t, u ganze Zahlen sein, nemlich

$$\begin{aligned} -u+ti &= M(x+y'i)-m(\mathrm{X}+Y'i) \\ i(t+ui) &= Mi(y'-y)-mi(Y'-Y) \end{aligned}$$

und man hat dann $\varepsilon = -1$, wenn
$t+u$ gerade, σ, y^0, Y^0 positiv, oder wenn zwei oder keine Bedingung gilt,
sonst $\varepsilon = +1$
Wir setzen

$$\begin{aligned} t+ui &= +\theta \quad \text{wenn } y^0 \text{ und } Y^0 \text{ beide positiv} \\ &\ -\theta \quad\phantom{\text{wenn }} y^0 \text{ und } Y^0 \text{ beide negativ} \\ &\ +\theta' \quad\phantom{\text{wenn }} y^0 \text{ positiv } Y^0 \text{ negativ} \\ &\ -\theta' \quad\phantom{\text{wenn }} y^0 \text{ negativ } Y^0 \text{ positiv} \end{aligned}$$

jedem durch $1+i$ theilbaren θ entspricht dann ein $\varepsilon = -1$
jedem durch $1+i$ theilbaren θ' $\varepsilon = +1$
jedem durch $1+i$ untheilbaren θ $\varepsilon = +1$
jedem durch $1+i$ untheilbaren θ' $\varepsilon = -1$

insofern σ positiv.

Für negative σ ist es umgekehrt.

x	X	y^0	Y^0	$t+ui$	θ	θ'	ε
$+1$	0	-9	$+3$	$0-3i$		$0+3i$	-1
	$+1$	$+4$	-8	$-1+2i$		$-1+2i$	-1
	$+2$	-3	$+1$	$0-i$		$0+i$	-1
$+2$	$+1$	-5	-5	$-1-i$	$+1+i$		-1
	$+2$	$+8$	$+4$	$+1+2i$	$+1+2i$		$+1$

[9.]

2°, wenn y und Y Ganze. Es seien hier x', X' die nächsten Ganzen bei x und X, und

$$x-x' = \frac{x^0}{\sigma}, \quad X-X' = \frac{X^0}{\sigma}$$

und man setze

$$\sigma(t+ui) = -Mx^0+mX^0 = -Mp^0+mP^0, \qquad t+ui = Mp'-mP'$$

d. i.

$$\begin{aligned} \sigma t &= -Ax^0+aX^0 \qquad & x^0 &= -bt+au \\ \sigma u &= -Bx^0+bX^0 \qquad & X^0 &= -Bt+Au \end{aligned}$$

Man hat dann

$\varepsilon = -1$, wenn σ positiv, x^0 positiv, X^0 positiv, $t+u$ gerade
etc.

Wir setzen

		besser
$t+ui = +\theta$	wenn x^0 und X^0 positiv	$+\theta''$
$= -\theta$	wenn beide negativ	$-\theta''$
$= +\theta'$	wenn x^0 positiv, X^0 negativ	$-\theta$
$= -\theta'$	wenn x^0 negativ, X^0 positiv	$+\theta$

wo für ε dieselbe Regel gelten wird wie oben

y	Y	x^0	X^0	$t+ui$	θ	θ'	ε
0	-1	-7	$+9$	$+1-3i$		$-1+3i$	$+1$
	-2	$+6$	-2	$0+2i$		$0+2i$	$+1$
	-3	-1	$+7$	$+1-i$		$-1+i$	$+1$
$+1$	-1	$+2$	$+6$	$+1$	$+1$		$+1$

Man kann nun beweisen

1) Dass alle θ, die aus (1) und aus (2) hervorgegangen sind, unter einander verschieden sind. Ihr Complexus heisse Θ.

2) Dass alle $\theta = T+Ui$ die Eigenschaft haben, dass

$$\begin{array}{c} -bT+aU \\ -BT+AU \end{array}$$

positive Zahlen kleiner als $\frac{1}{2}\sigma$ sind

3) Dass wenn T, U zwei der eben genannten Bedingung unterworfene ganze Zahlen sind, $T+Ui$ sich gewiss in Θ findet.
(wie denn? es wird auf obige Gleichung* gegründet.)

4) Auf ähnliche Weise verhält es sich mit θ', deren Complexus Θ' aus denjenigen Zahlen $T'+U'i$ bestehen wird, für welche

$$\begin{array}{c} -bT'+aU' \\ -(-BT'+AU') \end{array}$$

positive Zahlen kleiner als $\frac{1}{2}\sigma$.

In unserm Falle ist

θ	ε	θ'	ε	θ''	ε	θ'''	ε
$+1$	$+1$	$0+i$	-1	$+2-i$	$+1$	$+1$	-1
$+1+i$	-1	$0+2i$	$+1$	$+3-i$	-1	$+2$	$+1$
$+1+2i$	$+1$	$0+3i$	-1				
		$-1+i$	$+1$				
		$-1+2i$	-1				
		$-1+3i$	$+1$				

Hier ist

$$\begin{aligned} \theta &= -\cdot M + \cdot m \\ \theta' &= -\cdot M - \cdot m \\ \theta'' &= +\cdot Mi + \cdot m \\ \theta''' &= +\cdot Mi - \cdot m \end{aligned}$$

[10.]

3^0. y und X Ganze. Es seien x', Y' die nächsten Ganzen bei x und Y, und

$$x'+yi = p', \quad X+Y'i = P'; \quad p-p' = \frac{p^0}{\alpha}, \quad P-P' = \frac{P^0}{\alpha}$$

und man setze

$$i(t+ui) = Mp'-mP' = -\frac{Mp^0}{\alpha}+\frac{mP^0}{\alpha} = -\frac{Mx^0}{\alpha}+\frac{miY^0}{\alpha} \quad \text{d. i.}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha t = -Bx^0+aY^0 & \text{so ist} \quad x^0 = -bt+au \\ \alpha u = +Ax^0+bY^0 & \qquad\qquad Y^0 = +At+Bu \end{array}$$

Man hat dann

$\varepsilon = -1$, wenn α positiv, x^0 positiv, Y^0 positiv, $t+u$ gerade etc.

Wir setzen

$$\begin{array}{llll} & & & \textit{besser} \\ t+ui = +\theta'' & \text{wenn } x^0 \text{ positiv}, & Y^0 \text{ positiv} & +\theta' \\ = +\theta''' & \text{wenn } x^0 \text{ positiv}, & Y^0 \text{ negativ} & -\theta''' \\ -\theta'' & \text{wenn } x^0 \text{ negativ}, & Y^0 \text{ negativ} & -\theta' \\ -\theta''' & \text{wenn } x^0 \text{ negativ}, & Y^0 \text{ positiv} & +\theta''' \end{array}$$

Es wird also für jedes $\theta'' \ldots \varepsilon = -1$
$\theta''' \ldots \varepsilon = +1$
insofern θ'' oder θ''' durch $1+i$ theilbar und α positiv.

y	X	x^0	Y^0	$t+ui$	θ''	θ'''	ε
0	$+1$	$+4$	-2	$+2$		$+2$	$+1$
$+1$	$+2$	-3	-3	$-3+i$	$+3-i$		-1

[11.]

4^{te} Classe x und Y Ganze. Nach ähnlichen Praemissen wie in 3 setze man

$$-(t+ui) = Mp'-mP' = -\frac{Mp^0}{\alpha}+\frac{mP^0}{\alpha} = -\frac{Miy^0}{\alpha}+\frac{mX^0}{\alpha}$$

$$\begin{array}{ll} \alpha t = -By^0-aX^0 & \qquad y^0 = -bt+au \\ \alpha u = +Ay^0-bX^0 & \qquad X^0 = -At-Bu \end{array}$$

Man hat dann

$\varepsilon = +1$ wenn α positiv, y^0 positiv, X^0 positiv, $t+u$ gerade etc.

Wir setzen

$$
\begin{aligned}
t+ui = &+\theta'' \text{ wenn } y^0 \text{ positiv } X^0 \text{ negativ}\\
&+\theta''' \text{ wenn } y^0 \text{ positiv } X^0 \text{ positiv}\\
&-\theta'' \text{ wenn } y^0 \text{ negativ } X^0 \text{ positiv}\\
&-\theta''' \text{ wenn } y^0 \text{ negativ } X^0 \text{ negativ}
\end{aligned}
$$

für ε gilt dann die Regel, dass (wie oben in 3), insofern α positiv

$$\varepsilon = -1 \text{ für jedes durch } 1+i \begin{cases}\text{theilbare } \theta''\\ \text{untheilbare } \theta'''\end{cases}$$

$$\varepsilon = +1 \text{ für jedes durch } 1-i \begin{cases}\text{theilbare } \theta'''\\ \text{untheilbare } \theta''\end{cases}$$

x	Y	y^0	X^0	$t+ui$	θ''	θ'''	ε
$+1$	-1	-2	-1	-1		$+1$	-1
$+2$	-3	$+1$	-4	$+2-i$	$+2-i$		$+1$

Der Complexus aller θ'' aus 3 und 4, den wir durch Θ'' bezeichnen, besteht also aus allen Zahlen $T+Ui$, wofür

$$\left.\begin{aligned}&-bT+aU\\ \text{und }&+AT+BU\end{aligned}\right\}\text{positiv und kleiner als } \tfrac{1}{2}\alpha$$

der Complexus aller $\theta''' \ldots (\Theta''')$ aus denen, wo

$$\left.\begin{aligned}&-bT+aU\\ &-AT-BU\end{aligned}\right\}\text{positiv und kleiner als } \tfrac{1}{2}\alpha$$

[12.]

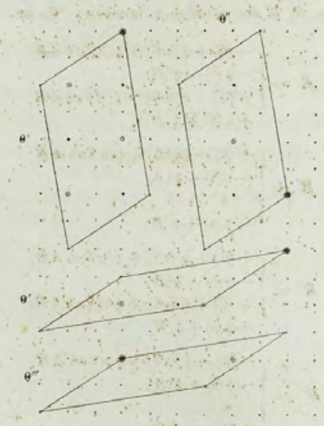
Nach obiger Verbesserung heisst also die Regel so.
Es enthalte

Θ alle Zahlen $T+Ui$, wo $+bT-aU$ positiv $-BT+AU$ positiv und $<\frac{1}{2}\mathfrak{b}$
Θ' alle Zahlen $T+Ui$, wo $-bT+aU$ positiv $+AT+BU$ positiv und $<\frac{1}{2}\alpha$
Θ'' alle Zahlen $T+Ui$, wo $-bT+aU$ positiv $-BT+AU$ positiv und $<\frac{1}{2}\mathfrak{b}$
Θ''' alle Zahlen $T+Ui$, wo $+bT-aU$ positiv $+AT+BU$ positiv und $<\frac{1}{2}\alpha$

insofern resp. $\mathfrak{b}$ oder α positiv.

Für alle durch $1+i$ theilbaren	ist dann $\varepsilon =$	wenn
θ	$+1$	$\mathfrak{b}$ positiv
θ'	-1	α positiv
θ''	-1	$\mathfrak{b}$ positiv
θ'''	$+1$	α positiv

Θ		Θ'		Θ''		Θ'''	
$0-i$	-1	$+2-i$	$+1$	$+1$	$+1$	-1	-1
$0-2i$	$+1$	$+3-i$	-1	$+1+i$	-1	-2	$+1$
$0-3i$	-1			$+1+2i$	$+1$		
$+1-i$	$+1$						
$+1-2i$	-1						
$+1-3i$	$+1$						



[13.]

Hieraus fliesst folgende Regel. Es sei das Resultat aus den Vorschriften

II ... G, III ... g, IV ... H, V ... h

So ist

$$\begin{aligned}
4\theta &= R = 0\\
4\theta' &= -\ g + \ G - h - H + R'\\
4\theta'' &= -2g + 2G \qquad\quad + R''\\
4\theta''' &= -\ g + \ G + h + H + R'''
\end{aligned}$$

In unserm Beispiele ist

$$G = 0,\quad g = -1,\quad H = -1,\quad h = +2,\quad R' = 0,\quad R'' = +2,\quad R''' = -2$$
$$4\theta = 0,\ 4\theta' = +1-1+0 = 0,\ 4\theta'' = +2+2 = +4,\ 4\theta''' = +1+1-2 = 0$$

und die Correctionen R, R' etc. werden so bestimmt: Es ist

$$R = \begin{cases} -(\beta) + \frac{1}{2}(\alpha\beta) + \frac{1}{2}(\alpha\beta abAB)\\ -\frac{1}{2}(b) - \frac{1}{2}(B)\\ +(\beta) - \frac{1}{2}(\alpha\beta) - \frac{1}{2}(\alpha\beta abAB)\\ +\frac{1}{2}(b) + \frac{1}{2}(B)\end{cases}$$

$$R' = \begin{cases} +(\alpha) - \frac{1}{2}(\alpha\beta) + \frac{1}{2}(\alpha\beta abAB)\\ -\frac{1}{2}(b) - \frac{1}{2}(A)\\ 0\\ -\frac{1}{2}(a) + \frac{1}{2}(B)\end{cases}$$

$$R'' = \begin{cases} +(\beta) + \frac{1}{2}(\alpha\beta) + \frac{1}{2}(\alpha\beta abAB)\\ -\frac{1}{2}(b) + \frac{1}{2}(B)\\ +(\beta) + \frac{1}{2}(\alpha\beta) + \frac{1}{2}(\alpha\beta abAB)\\ -\frac{1}{2}(b) + \frac{1}{2}(B)\end{cases}$$

$$R''' = \begin{cases} -(\alpha) - \frac{1}{2}(\alpha\beta) + \frac{1}{2}(\alpha\beta abAB)\\ -\frac{1}{2}(b) + \frac{1}{2}(A)\\ 0\\ +\frac{1}{2}(a) + \frac{1}{2}(B)\end{cases}$$

wo die in Paranthese stehenden Grössen bloss die Zeichen hergeben.

Es ist also

$$R + R' + R'' + R''' = 2(\alpha\beta abAB) - 2(b) + 2(B) + 2(\beta)$$

folglich

$$\begin{aligned}
\theta + \theta' + \theta'' + \theta''' &= -g + G + \tfrac{1}{2}(\alpha\beta abAB) + \tfrac{1}{2}(\beta) - \tfrac{1}{2}(b) + \tfrac{1}{2}(B)\\
&= -g + G + S
\end{aligned}$$

ab		$+\,+$			$-\,+$			$-\,-$			$+\,-$		
A	B	α	β	S	α	β	S	α	β	S	α	β	S
$+$	$+$	$+$	$+$	$+1$	$-$	$+$	$+1$	$-$	$-$	$+1$	$+$	$-$	$+1$
		$+$	$-$	-1	$+$	$+$	0	$-$	$+$	$+1$	$-$	$-$	0
$-$	$+$	$+$	$-$	0	$+$	$+$	$+1$	$-$	$+$	$+2$	$-$	$-$	$+1$
		$-$	$-$	-1	$+$	$-$	-1	$+$	$+$	$+1$	$-$	$+$	$+1$
$-$	$-$	$-$	$-$	-1	$+$	$-$	-1	$+$	$+$	$+1$	$-$	$+$	$+1$
		$-$	$+$	-1	$-$	$-$	-2	$+$	$-$	-1	$+$	$+$	0
$+$	$-$	$-$	$+$	0	$-$	$-$	-1	$+$	$-$	0	$+$	$+$	$+1$
		$+$	$+$	-1	$-$	$+$	-1	$-$	$-$	-1	$+$	$-$	-1

[14.]

Hiernach bekommt nun die erste Regel folgende Gestalt:

4 Dec. = I. $-4\Sigma\varepsilon$ von denen, wo y ganz, $[x]$ gerade
II. $+4\Sigma\varepsilon$ von denen, wo $[x]$ gerade, $[y]$ ungerade
III. $-\Sigma\varepsilon$ von allen
IV. $+4\Sigma\varepsilon$, von denen, wo nicht zugleich $[x]$ und $[y]$ gerade
$+Q+S$

In unserm Beispiel

I	0
II	-4
III	$+1$
IV	0
Q	-5
S	0
	-8

Man denke sich nun in III diejenigen besonders bemerkt, wo y ganz, $[x]$ gerade, so ist

III. $\Sigma\varepsilon$ von allen
$-4\Sigma\varepsilon$ der besonderen $\Big\}$ $=$ Intensor $(\frac{1}{2}-\omega)m$ — Intens. $\omega m = -W$

Hier ist $W =$

a b		
$++$	-3	-1
$-+$	-2	0
$--$	$+2$	0
$-+$	$+3$	$+1$
	$\frac{m-1}{2}$ par	$\frac{m-1}{2}$ impar

Also

4 Decident $=$ I. $-4\Sigma\varepsilon$ y ganz, $[x]$ gerade
II. $+4\Sigma\varepsilon$ $[x]$ gerade, $[y]$ ungerade
III. $-4\Sigma\varepsilon$ y ganz, $[x]$ gerade
IV. $+4\Sigma\varepsilon$ alle wo nicht zugleich $[x]$, $[y]$ gerade
$+Q+S+W$

Tabelle für $\frac{1}{4}(Q+S+W)$

a b	A B	α ϐ			a b	A B	α ϐ		
$++$	$++$	$++$	0	0	$--$	$++$	$--$	0	0
		$+-$	-1	0			$-+$	$+1$	0
	$-+$	$+-$	-1	-1		$-+$	$-+$	0	-1
		$--$	-1	-1			$++$	0	-1
	$--$	$--$	-2	-1		$--$	$++$	0	-1
		$-+$	-1	-1			$+-$	-1	-1
	$+-$	$-+$	-1	0		$+-$	$+-$	0	0
		$++$	-1	0			$--$	0	0
$-+$	$++$	$-+$	0	0	$+-$	$++$	$+-$	$+1$	$+1$
		$++$	0	0			$--$	0	0
	$-+$	$++$	-1	-1		$-+$	$--$	$+1$	0
		$+-$	-1	-1			$-+$	0	-1
	$--$	$+-$	-2	-1		$--$	$-+$	$+1$	0
		$--$	-2	-1			$++$	0	-1
	$+-$	$--$	-1	0		$+-$	$++$	$+1$	$+1$
		$-+$	-1	0			$+-$	0	0

[15.]

Die zweite Methode ist folgende:

Decident $=$ I. $+\ \Sigma\varepsilon$, wo Y ganz, $[X]$ gerade
$-4\Sigma\varepsilon$, unter diesen, wo noch y ganz, $[x]$ gerade
II. $+\ \Sigma\lambda\varepsilon$, wo Y ganz, $[X]$ gerade; λ ist der Intensor von p
II. $-\ \Sigma\lambda'\varepsilon$, wo X ganz, $[Y]$ ungerade
λ' der Intensor von ip $= 1, 2, 3, 0$
wenn λ $= 0, 1, 2, 3$
IV. $+\ \Sigma\lambda\varepsilon$, wo Y ganz, $[X]$ gerade, λ der Intensor von p
IV. $+\ \Sigma\lambda'\varepsilon$, wo X ganz, $[Y]$ gerade
λ' der Intensor von $im-ip$ $= 0\ 3\ 2\ 1$
wenn Int. p $= 0\ 1\ 2\ 3$
$+q$

Hier ist $q=0$, wenn $\frac{M-1}{2}$ ungerade i.e. nur durch $1+i$, nicht durch 2 theilbar, und nicht zugleich $AB+-$, hingegen übrigens

A B		α ϐ: $++$	α ϐ: $-+$	α ϐ: $--$	α ϐ: $+-$
$++$	Int. $\frac{1}{2}(m-\omega\mu)$	$+3$ $+1$	$+3$ $+1$	$+0$ $+2$	$+0$ $+2$
$-+$	0	0	0	0	0
$--$	— Int. $\frac{1}{2}(m+\omega\mu)$	-0 -2	-0 -2	-3 -1	-3 -1
$+-$	— Int. $\omega\mu$	-0	-1	-2	-3

wo doppelte Zahlen stehen, gilt die erste für gerade $\frac{m-1}{2}$, die andere für ungerade.

In unserm Beispiele: I.

y	Y	$20x$	$20Y$	ε	
0	-1	$+13$	$+9$	$+1$	
0	-2	$+26$	$+18$	$+1$	
$+1$	-1	$+22$	$+46$	$+1$	
				$+3\ (+1)$	

$+3$
-4
-1
Dec. $= -2$

II. desunt.

IV.

X	$12x$		$12y$	$12Y$	ε	λ	λ'	$\lambda'\varepsilon$
0	$+20$	$+20\omega$	-9	-37	-1	2	2	-2
$+1$	$+24$	$+20\omega$	-3	-39	$+1$	3	1	$+1$
$+2$	$+28$	$+20\omega$	$+3$	-41	-1	0	0	0
								-1

Was aus II genommen ist, vereinigt sich in folgendes Resultat

II. $-\ \Sigma\varepsilon$, wo Y ganz, $[X]$ gerade
$+4\Sigma\varepsilon$ von eben diesen, wenn zugleich $[x]$ gerade, $[y]$ ungerade
II. $+\ \Sigma\lambda'\varepsilon$, wo Y ganz, $[X]$ gerade
$-\ \Sigma\lambda'\varepsilon$, wo X ganz, $[Y]$ ungerade, λ' der Intensor von ip

Die beiden letzten Theile vereinigen sich wiederum in

III. $+\ \Sigma\varepsilon$, wo $[X]$ gerade, $[Y]$ ungerade
$-4\Sigma\varepsilon$, wenn zugleich x eine Ganze, $[y]$ ungerade
$+r+s$

wo $r = 0$, wenn $AB \ldots\ldots \begin{cases} ++ \\ -+ \\ -- \end{cases}$

und $r = \text{Int.}\,\omega mi$, wenn $AB\,..\,+-$
$s = -\text{Int.}(\frac{1}{2}-\omega)mi$, wenn $\frac{M-1}{2}$ gerade und B positiv, in allen andern Fällen $= 0$

In unserm Beispiele

III. Fällt aus. $r = 0$, $s = 0$

Was aus IV genommen ist, vereinigt sich in folgende Resultate

IV. $+4\Sigma\varepsilon$, wo Y ganz, $[X]$ gerade und nicht zugleich $[x]$ gerade, $[y]$ gerade
$-\Sigma\lambda'\varepsilon$, wo Y ganz, $[X]$ gerade
$+\Sigma\lambda'\varepsilon$, wo X ganz, $[Y]$ gerade
wo λ' Int. von $im-ip$

Die zwei letzten Theile vereinigen sich wiederum zu

V. $+\ \Sigma\varepsilon$, wo nicht zugleich $[X]$ und $[Y]$ gerade
$-4\Sigma\varepsilon$, wo zugleich x eine Ganze, $[y]$ gerade
$+w$

Hier ist $w = 0$, wenn $\frac{M-1}{2}$ gerade und A positiv; in allen übrigen Fällen
$= -\text{Intensor}\ (\frac{1}{2}i+\omega)m$

In unserm Beispiele

V.

y	$6x$	$6X$	$6Y$	ε
0	$+13$	$+9$	-20	$+1$

$w = -2$

Tafel für q, r, s, w und deren Summe.

ab	AB	$\alpha\beta$	$\frac{M-1}{2}$ ger. $\frac{m-1}{2}$ ger.					$\frac{M-1}{2}$ ung. $\frac{m-1}{2}$ ger.					$\frac{M-1}{2}$ ger. $\frac{m-1}{2}$ ung.					$\frac{M-1}{2}$ ung. $\frac{m-1}{2}$ ung.				
++	++	++	+3	0	0	0	+3	0	0	0	0	0	+1	0	−2	0	−1	0	0	0	−2	−2
		+−	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+2	0	−2	0	0	0	0	0	−2	−2
	−+	+−	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	−2	−4	0	0	0	−2	−2
		−−	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	−2	−4	0	0	0	−2	−2
	−−	−−	−3	0	0	0	−3	0	0	0	0	0	−1	0	0	−2	−3	0	0	0	−2	−2
		−+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	0	0	−2	−4	0	0	0	−2	−2
	+−	−+	−1	+1	0	0	0	−1	+1	0	0	0	−1	+1	0	0	0	−1	+1	0	−2	−2
		++	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	0	+1	0	+1	0	−2	−1
−+	++	−+	+3	0	0	0	+3	0	0	0	−1	−1	+1	0	−2	0	−1	0	0	0	−3	−3
		++	+3	0	0	0	+3	0	0	0	−1	−1	+1	0	−2	0	−1	0	0	0	−3	−3
	−+	++	0	0	0	−1	−1	0	0	0	−1	−1	0	0	−2	−3	−5	0	0	0	−3	−3
		+−	0	0	0	−1	−1	0	0	0	−1	−1	0	0	−2	−3	−5	0	0	0	−3	−3
	−−	+−	−3	0	0	−1	−4	0	0	0	−1	−1	−1	0	0	−3	−4	0	0	0	−3	−3
		−−	−3	0	0	−1	−4	0	0	0	−1	−1	−1	0	0	−3	−4	0	0	0	−3	−3
	+−	−−	−2	+2	0	0	0	−2	+2	0	−1	−1	−2	+2	0	0	0	−2	+2	0	−3	−3
		−+	−1	+2	0	0	+1	−1	+2	0	−1	0	−1	+2	0	0	+1	−1	+2	0	−3	−2
−−	++	−−	0	0	−1	0	−1	0	0	0	−1	−1	+2	0	−3	0	−1	0	0	0	−3	−3
		−+	+3	0	−1	0	+2	0	0	0	−1	−1	+1	0	−3	0	−2	0	0	0	−3	−3
	−+	−+	0	0	−1	−1	−2	0	0	0	−1	−1	0	0	−3	−3	−6	0	0	0	−3	−3
		++	0	0	−1	−1	−2	0	0	0	−1	−1	0	0	−3	−3	−6	0	0	0	−3	−3
	−−	++	0	0	0	−1	−1	0	0	0	−1	−1	−2	0	0	−3	−5	0	0	0	−3	−3
		+−	−3	0	0	−1	−4	0	0	0	−1	−1	−1	0	0	−3	−4	0	0	0	−3	−3
	+−	+−	−3	+3	0	0	0	−3	+3	0	−1	−1	−3	+3	0	0	0	−3	+3	0	−3	−3
		−−	−2	+3	0	0	+1	−2	+3	0	−1	0	−2	+3	0	0	+1	−2	+3	0	−3	−2
+−	++	+−	0	0	−1	0	−1	0	0	0	0	0	+2	0	−3	0	−1	0	0	0	−2	−2
		−−	0	0	−1	0	−1	0	0	0	0	0	+2	0	−3	0	−1	0	0	0	−2	−2
	−+	−−	0	0	−1	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	−3	−2	−5	0	0	0	−2	−2
		−+	0	0	−1	0	−1	0	0	0	0	0	0	0	−3	−2	−5	0	0	0	−2	−2
	−−	−+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	0	0	−2	−4	0	0	0	−2	−2
		++	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	0	0	−2	−4	0	0	0	−2	−2
	+−	++	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	−2	−2
		+−	−3	0	0	0	−3	−3	0	0	0	−3	−3	0	0	0	−3	−3	0	0	−2	−5

[16.]

Es ist folglich

$$\text{Dec.}\,\tfrac{m}{M} - \text{Dec.}\,\tfrac{M}{m} =$$

I. $-4\Sigma\varepsilon$, wo y, Y ganz, $[x]$, $[X]$ gerade
II. $+4\Sigma\varepsilon$, Y ganz, $[X]$ gerade, $[x]$ gerade, $[y]$ ungerade
III. $-4\Sigma\varepsilon$, x ganz, $[X]$ gerade, $[Y]$ ungerade, $[y]$ ungerade
IV. $+4\Sigma\varepsilon$, Y ganz, $[X]$ gerade, und nicht zugleich $[x]$, $[y]$ gerade
V. $-4\Sigma\varepsilon$, x ganz, $[y]$ gerade und nicht zugleich $[X]$, $[Y]$ gerade
$+\psi$

Hier ist ψ in folgender Tabelle dargestellt

$a\,b$	$A\,B$	$\alpha\,ϐ$	ψ				$a\,b$	$A\,B$	$\alpha\,ϐ$	ψ			
$++$	$++$	$++$	$+4$	0	0	-2	$--$	$++$	$--$	0	0	0	-2
	$++$	$+-$	0	0	0	-2		$++$	$-+$	$+4$	0	0	-2
	$-+$	$+-$	0	-4	0	-2		$-+$	$-+$	0	-4	0	-2
	$-+$	$--$	0	-4	0	-2		$-+$	$++$	0	-4	0	-2
	$--$	$--$	-4	-4	0	-2		$--$	$++$	0	-4	0	-2
	$--$	$-+$	0	-4	0	-2		$--$	$+-$	-4	-4	0	-2
	$+-$	$-+$	0	0	0	-2		$+-$	$+-$	0	0	0	-2
	$+-$	$++$	0	0	0	-2		$+-$	$--$	0	0	0	-2
$-+$	$++$	$-+$	$+4$	0	0	-2	$+-$	$++$	$+-$	0	0	0	-2
	$++$	$++$	$+4$	0	0	-2		$++$	$--$	0	0	0	-2
	$-+$	$++$	0	-4	0	-2		$-+$	$--$	0	-4	0	-2
	$-+$	$+-$	0	-4	0	-2		$-+$	$-+$	0	-4	0	-2
	$--$	$+-$	-4	-4	0	-2		$--$	$-+$	0	-4	0	-2
	$--$	$--$	-4	-4	0	-2		$--$	$++$	0	-4	0	-2
	$+-$	$--$	0	0	0	-2		$+-$	$++$	0	0	0	-2
	$+-$	$-+$	0	0	0	-2		$+-$	$+-$	-4	-4	-4	-6

Hier gelten die ersten beiden Columnen für $\frac{1}{2}(M-1)$ gerade
letzten beiden für $\frac{1}{2}(M-1)$ ungerade
die erste und dritte für $\frac{1}{2}(m-1)$ gerade
zweite und vierte für $\frac{1}{2}(m-1)$ ungerade

[17.]

Die 128 Fälle, welche in obiger Tafel bei der Bestimmung von ψ unterschieden sind, lassen sich viel kürzer auf folgende Weise umfassen:

$\psi = k + l$
$k = -4$, wenn zugleich $a, A, \alpha, b, B, ϐ$ die Zeichen $+++---$ haben, sonst immer
$k = 0$

$\frac{1}{2}(M-1)$ gerade	$\frac{1}{2}(m-1)$ gerade	$l = +4$, wenn $ABϐ$ positiv
		-4, wenn $ABϐ$ negativ
		0 in allen übrigen Fällen
$\frac{1}{2}(M-1)$ gerade	$\frac{1}{2}(m-1)$ ungerade	$l = -4$, wenn A negativ
		0, wenn A positiv
$\frac{1}{2}(M-1)$ ungerade	$\frac{1}{2}(m-1)$ gerade	$l = 0$
$\frac{1}{2}(M-1)$ ungerade	$\frac{1}{2}(m-1)$ ungerade	$l = -2$

Zu versuchen ist noch, ob es vortheilhafter ist, A und a positiv, dagegen aber $m \equiv 1$, $M \equiv 1$ nur nach mod. 2 (nicht nach Modulus $2+2i$) zu nehmen. Das Endresultat muss werden

$$\text{Dec.}\,\tfrac{m}{M} - \text{Dec.}\,\tfrac{M}{m} \equiv$$

$m \equiv$	$M \equiv$ 1	$1+2i$	3	$3+2i$
1	0	0	0	0
$1+2i$	0	2	2	0
3	0	2	0	2
$3+2i$	0	0	2	2

Alles nach Mod. 4.

[VI.]

THEORIE DER BIQUADRATISCHEN RESTE.

1.

Eine Reihe ganzer complexer Zahlen $\varphi, \varphi', \varphi''$ u. s. w. sei so beschaffen, dass erstlich sie unter einander alle incongruent sind nach dem Modulus $\mu = \alpha + 6i$, α und 6 ganze reelle Zahlen bezeichnend, zweitens dass jede ganze complexe Zahl einer von jenen nach dem Modulus μ congruent ist. Unter dieser Voraussetzung heisst der Inbegriff der Zahlen $\varphi, \varphi', \varphi''$ u. s. w. ein vollständiges Restsystem für den Modulus μ. Es ist bewiesen, dass die Anzahl der darin begriffenen Zahlen der Norm von μ, d. i. der Zahl $\alpha\alpha + 66$ gleich ist, welche mit ν bezeichnet werden soll.

2.

Unter den Zahlen $\varphi, \varphi', \varphi''$ u. s. w ist Eine durch μ theilbare; wird dieselbe ausgeschlossen und der Inbegriff der übrigen mit χ bezeichnet, so bildet χ ein vollständiges System der durch den Modulus untheilbaren Reste, deren Anzahl $= \nu - 1$. Beschränken wir die Untersuchung auf ungerade Modulen, so ist $\nu - 1$ durch 4 theilbar. Es werden dann ferner $f, if, -f, -if$ unter sich incongruent sein, folglich diejenigen Zahlen in χ, welche resp. denen $if, -f, -if$ congruent sind, unter sich und von f verschieden. (Associirte und zusammengesetzte Zahlen.)

Hieraus ergibt sich eine Zerlegung von χ in vier Gruppen oder partielle Systeme $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$. Man setzt eine beliebige Zahl aus χ, z. B. φ in die Gruppe $\varkappa$, und die drei den Zahlen $i\varphi, -\varphi, -i\varphi$ congruenten Glieder von χ der Reihe nach in die Gruppen $\varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$. Nachdem diese vier Zahlen aus χ gestrichen sind, setzt man eine beliebige der übrigen wieder in $\varkappa$, und die drei auf ähnliche Art davon abhängigen in $\varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$. So fährt man fort, bis das ganze System χ vertheilt ist. Die Gruppen $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$ sollen zusammengehörige Viertelsysteme heissen. Es ist klar, dass sie folgende Eigenschaften haben:

1) Jedes Viertelsystem besteht aus $\frac{1}{4}(\nu - 1) = \frac{1}{4}(\alpha\alpha + 66 - 1)$ Zahlen.
2) Das Charakteristische eines Viertelsystems ist, dass keine der darin befindlichen Zahlen weder selbst, noch ihr Product in $i, -1$, oder $-i$ einer andern aus demselben Viertelsystem congruent ist, jede durch μ nicht theilbare Zahl aber, entweder selbst oder ihr Product durch $i, -1$, oder $-i$ sich darin findet, oder einer daraus congruent ist.
3) So wie aus der Multiplication der Zahlen in $\varkappa$ mit $i, -1$ und $-i$, resp. die Zahlen in $\varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$ entstehen, oder ihnen congruente, so reproducirt die Multiplication der Zahlen in $\varkappa'$, mit jenen Factoren, resp. die Zahlen in $\varkappa'', \varkappa''', \varkappa$; die Multiplication der Zahlen $\varkappa''$ reproducirt auf ähnliche Weise die Zahlen $\varkappa''', \varkappa, \varkappa'$; endlich die Multiplication der Zahlen $\varkappa'''$ reproducirt $\varkappa, \varkappa', \varkappa''$. Kürze halber kann diese gegenseitige Abhängigkeit der vier Viertelsysteme so ausgedrückt werden $\varkappa' \equiv i\varkappa$, $\varkappa'' \equiv -\varkappa \equiv i\varkappa'$, $\varkappa''' \equiv i\varkappa'' \equiv -\varkappa' \equiv -i\varkappa$.

3.

Wenn m eine complexe ganze Zahl bedeutet, die mit μ keinen gemeinschaftlichen Divisor hat, und die sämmtlichen Zahlen eines Viertelsystems $\varkappa$ mit m multiplicirt werden, so bilden die Producte, oder beliebige ihnen congruente Zahlen ihrerseits auch ein Viertelsystem; und ebenso entstehen durch Multiplication der Zahlen der Systeme $\varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$ noch drei Viertelsysteme, die mit jenem zusammengehören werden. Der Beweis ist leicht zu führen. Diese vier neuen Systeme mögen mit $m\varkappa, m\varkappa', m\varkappa'', m\varkappa'''$ bezeichnet werden, gleichviel, ob die Producte selbst oder nur ihnen congruente Zahlen gewählt werden. Im letztern Fall kann dies so geschehen, dass man immer nur solche wählt, die sich in einem der Systeme $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$ befinden. Auf diese Art ist also das System χ, wenigstens allgemein zu reden, auf zwei verschiedene Arten in Viertelsysteme zerlegt. Nehmen wir an, dass $m\varkappa$ gemeinschaftlich hat

mit $\varkappa$ . . . . . λ Zahlen
$\varkappa'$ . . . . . λ' Zahlen
$\varkappa''$ . . . . . λ'' Zahlen
$\varkappa'''$ . . . . . λ''' Zahlen

so wird auch $\varkappa'$ mit $m\varkappa'$, $\varkappa''$ mit $m\varkappa''$, $\varkappa'''$ mit $m\varkappa'''$ gemein haben λ Glieder;

$\varkappa''$ mit $m\varkappa'$, $\varkappa'''$ mit $m\varkappa''$, $\varkappa$ mit $m\varkappa'''$, λ' Glieder u. s. w. Es sei ε der kleinste Rest von $\lambda'+2\lambda''+3\lambda'''$ nach dem Modulus 4, oder ε eine der vier Zahlen 0, 1, 2, 3, je nachdem $\lambda'+2\lambda''+3\lambda'''$ von der Form $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ ist. Ich behaupte nun, dass ε von der Anordnung des Viertelsystems $\varkappa$ unabhängig ist.

Um die Beweisführung zu erleichtern, bediene ich mich folgender Bezeichnung. $\Pi\psi$ soll die Zahl 0, 1, 2, 3 bezeichnen, je nachdem die durch μ nicht theilbare Zahl ψ sich (selbst oder durch Congruenz Repräsentation) in der Gruppe $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$ befindet. Von selbst hat man daher die Folge

I. $\Pi(i\psi) \equiv 1+\Pi\psi \pmod{4}$

II. Die Zahl $i^{-\Pi\psi}.\psi$ findet sich, entweder selbst oder durch Congruenz Repräsentation in der Gruppe $\varkappa$.

III. $\Sigma\Pi m\varphi \equiv \varepsilon$, (mod. 4), wenn die Summation über alle in $\varkappa$ befindliche Glieder φ erstreckt wird.

Es sei nun k ein anderes Viertelsystem, bestehend aus f, f', f'' u. s. w., während $\varkappa$ aus $\varphi, \varphi', \varphi''$ u. s. w. besteht. Ich setze voraus, was erlaubt ist, da die *Ordnung* der Glieder in $\varkappa$ willkürlich, dass f mit φ identisch oder zusammenhängend ist, f' mit φ', f'' mit φ'' u. s. w. Die mit k zusammenhängenden Viertelsgruppen seien $k'(\equiv ik)$, $k''(\equiv -k)$, $k'''(\equiv -ik)$. Es habe ferner die Charakteristik P in Beziehung auf die Gruppen k, k', k'', k''' dieselbe Bedeutung wie Π in Beziehung auf $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$, so dass $\mathrm{P}\psi = 0, 1, 2, 3$, je nachdem ψ zu k, k', k'', k''' gehört.

Es wird demnach, wenn man von der Vertheilung der χ in die Viertelsysteme k, k', k'', k''' anstatt von $\varkappa, \varkappa', \varkappa'', \varkappa'''$ ausgeht, an die Stelle von ε treten der kleinste Rest von $\mathrm{P}mf+\mathrm{P}mf'+\mathrm{P}mf''+\mathrm{P}mf'''$ u.s.w. u.s.w. oder von $\Sigma\mathrm{P}mf$ nach dem Modulus 4 und es handelt sich, zu beweisen, dass $\Sigma\mathrm{P}mf-\Sigma\Pi m\varphi$ durch 4 theilbar ist.

Wir schreiben diese Grösse so

$$\begin{array}{l} \mathrm{P}mf+\mathrm{P}mf'+\mathrm{P}mf''+\mathrm{P}mf'''+\text{u. s. w.} \\ -\mathrm{P}m\varphi-\mathrm{P}m\varphi'-\mathrm{P}m\varphi''-\mathrm{P}m\varphi'''- \\ +\mathrm{P}m\varphi+\mathrm{P}m\varphi'+\mathrm{P}m\varphi''+\mathrm{P}m\varphi'''+ \\ -\Pi m\varphi-\Pi m\varphi'-\Pi m\varphi''-\Pi m\varphi'''- \end{array}$$

Da der Voraussetzung nach f und φ congruent sind oder zusammengehören, so gilt dasselbe auch von mf und $m\varphi$ und man hat

$$\left.\begin{array}{r} f \equiv i^{-\mathrm{P}\varphi}\varphi \\ i^{-\mathrm{P}mf}mf \equiv i^{-\mathrm{P}m\varphi}m\varphi \end{array}\right\} \text{mod. } \mu$$

woraus leicht folgt $\mathrm{P}mf-\mathrm{P}m\varphi \equiv -\mathrm{P}\varphi \pmod{4}$ und das Aggregat der beiden obersten Reihen $\equiv -\Sigma\mathrm{P}\varphi$. Da nun ferner $\mathrm{P}m\varphi-\Pi m\varphi \equiv \mathrm{P}(i^{-\Pi m\varphi}m\varphi)$ ist, $m\varphi.i^{-\Pi m\varphi}$ zu $\varkappa$ gehört und der Inbegriff *aller* $m\varphi.i^{-\Pi m\varphi}$ ohne Rücksicht auf die Ordnung mit allen φ übereinkommt, so wird das Aggregat *aller* $\mathrm{P}(m\varphi.i^{-\Pi m\varphi})$ aequal sein dem Aggregat aller $\mathrm{P}\varphi$; folglich das Aggregat der dritten und vierten Reihe $\equiv \Sigma\mathrm{P}\varphi \pmod{4}$, also das Aggregat aller vier Reihen $\equiv 0 \pmod{4}$ W. Z. B. W.

Da also ε, unabhängig von der Wahl der Viertelsysteme bloss von m und μ abhängt, so werden wir ε den Character der Zahl m in Beziehung auf den Modulus μ nennen und mit Ch. m (mod. μ) bezeichnen. Man sieht leicht, dass dies nur eine Generalisirung derjenigen Definition ist, die (Art. . . .) für den Fall, wo μ eine Primzahl ist, gegeben ist, oder sie unter sich begreift.

4.

Ich gehe jetzt zu *bestimmten* Anordnungen der Viertelsysteme über, und werde den mit m zu bezeichnenden Modulus $= ea+ebi$ setzen, so dass die positive ganze Zahl e den grössten reellen Divisor, oder den grössten Divisor, welchen die beiden Bestandtheile von m haben, bedeutet, oder a, b Primzahlen unter sich. Das am einfachsten angeordnete Viertelsystem wird das sein, dessen Glieder $x+iy$ so beschaffen sind, dass $ax+by$ positiv und kleiner als $\frac{1}{2}e(aa+bb)$, $ay-bx$ nicht negativ, und gleichfalls kleiner als $\frac{1}{2}e(aa+bb)$ wird; die letztere Bedingung wird geflissentlich so ausgedrückt, dass auch die Fälle, wo $ay-bx=0$ wird, darunter begriffen sind. Man sieht leicht, dass solcher Fälle zusammen $\frac{1}{2}(e-1)$ sein werden, nemlich

$$\begin{array}{ll} x = a, & y = b \\ x = 2a, & y = 2b \\ x = 3a, & y = 3b \\ \quad\text{u. s. w. bis} & \\ x = \frac{1}{2}(e-1)a, & y = \frac{1}{2}(e-1)b \end{array}$$

also gar keine, wenn die Bestandtheile von m keinen gemeinschaftlichen Divisor haben. Nennen wir dieses Viertelsystem k, und k', k'', k''' diejenigen, welche entstehen, indem man die zu k gehörigen Zahlen mit $i, -1, -i$ multiplicirt, oder man mag auch setzen

$$k' = m+ik, \quad k'' = (1+i)m-k, \quad k''' = im-ik$$

Auf diese Art erhält man folgende Regel, um zu beurtheilen, ob eine beliebige vorgegebene durch m nicht theilbare ganze Zahl $x+iy$ congruent sei einem Gliede von k, k', k'' oder k''', nemlich indem man kann $2(ax+by)$ in die Form $Pe(aa+bb)+Q$, $2(ay-bx)$ in die Form $Re(aa+bb)+S$ bringen, so dass P, Q, R, S ganze reelle Zahlen und zwar

so dass	wenn $x+iy$ congruent ist einer Zahl aus k	k'	k''	k'''
P	gerade	ungerade	ungerade	gerade
R	gerade	gerade	ungerade	ungerade
Q	positiv	positiv	positiv	nicht negativ
$e(aa+bb)-Q$	positiv	nicht negativ	positiv	positiv
S	nicht negativ	positiv	positiv	positiv
$e(aa+bb)-S$	positiv	positiv	nicht negativ	positiv

Man erleichtert sich die Uebersicht, wenn man die Fälle, wo keine der Zahlen $ax+by$, $ay-bx$ durch $e(aa+bb)$ theilbar ist, von den übrigen unterscheidet.

I. Im ersten Falle hat man für P schlechthin die (algebraisch) kleinere der beiden ganzen Zahlen zu nehmen, zwischen welche (ausschliesslich) $\frac{2(ax+by)}{e(aa+bb)}$ fallen wird, und eben so für R die kleinere der beiden, zwischen welche $\frac{2(ay-bx)}{e(aa+bb)}$ fällt.

II. Ist $ax+by$ durch $e(aa+bb)$ theilbar, so wird $ay-bx$ zwar durch $aa+bb$, nicht aber durch $e(aa+bb)$ theilbar sein (weil sonst $x+iy$ durch $ea+ebi$ theilbar sein würde). Ist nun R, d. i. die Zahl, welche zunächst kleiner ist als $\frac{2(ay-bx)}{e(aa+bb)}$, gerade, so wird $x+iy$ einer Zahl aus k' congruent sein nach dem Mod. $ea+ebi$, einer aus k''' hingegen, wenn R ungerade ist.

III. Ist $ay-bx$ durch $e(aa+bb)$ theilbar, nicht aber $ax+by$, so wird $x+iy$ einer Zahl aus k, oder aus k'' congruent sein, je nachdem die ganze Zahl, welche algebraisch zunächst kleiner ist als $\frac{2(ax+by)}{e(aa+bb)}$, gerade oder ungerade ist.

5.

Man leitet aus obigem ohne Mühe folgende Methode ab zur Bestimmung des Characters einer gegebenen ganzen Zahl $M = A+Bi$ in Beziehung auf den ungeraden sie nicht messenden Modulus $m = ea+ebi$.

Zur Abkürzung bedienen wir uns folgender Bezeichnung.. Wenn p irgend eine gebrochene reelle Zahl vorstellt, soll durch $[p]$ diejenige ganze Zahl bezeichnet werden, die zugleich $p-[p]$ und $1+[p]-p$ positiv macht. Bei dieser Definition ist also die Anwendung der Bezeichnung auf ganze Zahlen ausgeschlossen. Fasste man die Definition so, dass weder $p-[p]$ noch $1+[p]-p$ negativ sein soll, so würde das Zeichen $[p]$ für den Fall, wo p ganze Zahl ist, zweideutig sein. Man könnte auch, wie in einer früheren Abhandlung geschehen ist, die Bedingung so stellen, dass $1+[p]-p$ positiv und $p-[p]$ nur nicht negativ sein soll. Für unsern Zweck ist es etwas bequemer, sich an die erste Begriffsbestimmung zu halten.

Das Viertelsystem k bilden hienach alle ganzen Zahlen f, wofür wenn man $\frac{2f}{m} = \xi+\eta i$ setzt, ξ zwischen 0 und 1 ausschliesslich, η zwischen 0 und 1, die 0 eingeschlossen, liegt, oder

$$[\xi] = 0, \quad [\eta] = 0$$
$$\text{oder} \quad [\xi] = 0, \quad \eta = 0$$

Setzt man nun für jedes f, $\frac{2fM}{m} = \xi+i\eta$ und nimmt

$\Psi f = 0$ wenn zugleich $[\xi]$ gerade und entweder $[\eta]$ gerade oder η ganz
1 $[\eta]$ gerade und entweder $[\xi]$ ungerade oder ξ ganz
2 $[\xi]$ ungerade und entweder $[\eta]$ ungerade oder η ganz
3 $[\eta]$ ungerade und entweder $[\xi]$ gerade oder ξ ganz

tabellarisch so

	$[\eta]$ gerade	$[\eta]$ ungerade	η ganz
$[\xi]$ gerade	0	3	0
$[\xi]$ ungerade	1	2	2
ξ ganz	1	3	—

was man durch $\nabla(\xi+i\eta)$ bezeichnen mag, so wird der gesuchte Character der Zahl M in Beziehung auf den Modulus m aequal dem kleinsten Reste von $\Sigma\Psi f$ nach dem Modulus 4.

6.

Die im vorhergehenden Art. gegebene Vorschrift ist allgemein: für den Fall, wo M ungerade ist, werden wir ihr aber eine andere Gestalt geben. Wir werden zugleich annehmen, dass die reellen Theile von m und M ungerade, also die imaginären gerade sind.

Wir lassen jeder zu dem Viertelsysteme k gehörenden Zahl f eine andere g correspondiren, die aus f auf folgende Art abgeleitet wird. Indem man $\frac{2f}{m} = \xi + i\eta$ setzt, unterscheidet man vier Fälle

I. Wenn $[2\xi] = 0$ und entweder $[2\eta] = 0$ oder $\eta = 0$

II. Wenn $[2\xi] = 1$ und entweder $[2\eta] = 0$ oder $\eta = 0$

III. Wenn $[2\xi] = 0$ und $[2\eta] = 1$

IV. Wenn $[2\xi] = 1$ und $[2\eta] = 1$

Im ersten Falle wird man $g = 2f$, im zweiten $g = im - 2if$, im dritten $g = m + 2if$, im vierten $g = (1+i)m - 2f$ setzen. Man sieht leicht, dass der Inbegriff aller g ein vollständiges Viertelsystem l bildet; ihre Characteristik ist, dass zugleich, wenn man $\frac{g}{m} = \xi + i\eta$ setzt

entweder $[\xi] = 0$, $[\eta] = 0$

oder $\eta = 0$, $[\xi] = 0$ und g durch $1+i$ theilbar

oder $\xi = 0$, $[\eta] = 0$ und g durch $1+i$ nicht theilbar

Daraus folgt, dass l sich von k nur dadurch unterscheidet, dass diejenigen Zahlen in k, für welche $\eta = 0$, und die durch $1+i$ untheilbar sind, nemlich

$$a+bi,\quad 3(a+bi),\quad 5(a+bi)\ldots\tfrac{e-3}{2}(a+bi) \text{ oder bis } \tfrac{e-1}{2}(a+bi)$$

je nachdem e von der Form $4n+1$ oder $4n+3$, in l fehlen und dagegen in letzterm Complex die Producte jener Zahlen in i auftreten. Zugleich sieht man, dass für $e = 1$, d. i. wenn m durch keine reelle ganze Zahl theilbar ist, k und l ganz gleich sind.

Es kommt nun darauf an, Ψf unmittelbar aus dem dem f entsprechenden g abzuleiten. Das Resultat ist, dass für obige 4 Fälle

I. $\Psi f = \nabla \frac{gM}{m}$

II. $\Psi f = \begin{cases} -\nabla \frac{gM}{m} & \text{wenn weder reeller noch imaginärer Th. von } \frac{gM}{m} \text{ ganz} \\ 1 - \nabla \frac{gM}{m} & \text{wenn einer von beiden ganz} \end{cases}$

III. wie II. IV. wie I.

BEMERKUNGEN.

Die Bruchstücke, die hier im Druck mit I und II bezeichnet sind, gehören nach dem Orte zu urtheilen, den die betreffenden Handschriften in einem Notizbuche einnehmen, dem Jahre 1811 oder der zunächst folgenden Zeit an. Von den vorangehenden Versuchen, den Beweis des Fundamentaltheorems für biquadratische Reste nach den hier für den Rest $1+i$ angewandten Methoden durchzuführen, ist eine Aufzeichnung vorhanden, welche den speciellen Fall des Restes $1+2i$ erledigt und von derjenigen Bestimmung des biquadratischen Characters ausgeht, die man als Note dem Art. 6 des Bruchstücks III beigefügt hat. Im übrigen lassen sich die historischen Angaben, die Gauss in den Anzeigen seiner arithmetischen Abhandlungen veröffentlicht hat, mit Hülfe des Nachlasses dahin ergänzen, dass die in den Artt. 15 bis 20 der *Theoria residuorum biquadrat.* aufgenommenen Lehrsätze schon vor der Ausarbeitung der *Theoria motus corporum coel.* niedergeschrieben sind. Die in den Anzeigen erwähnten Untersuchungen über cubische Reste werden wohl nicht zur Ausarbeitung gelangt sein; aufgezeichnet finden sich davon die mit den Hülfsmitteln, welche die Abhandlung *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio* bietet, durchgeführten Beweise der Reciprocitätssätze für zwei Primzahlen, von denen die eine reell ist.

Die Bruchstücke III bis VI bilden in der Handschrift besondere Hefte und für die drei ersten derselben weist die Form der Schriftzüge auf eine Zeit, die der für die Bruchstücke I und II nicht fern liegt, während für das letzte, Nr. VI, ein bedeutend späterer Zeitpunkt angenommen werden muss.

[I.] Art. 10. Die Bestimmung der Anzahl der Ganzepunkte in $(z, z', z'+\zeta, z+\zeta)$ ergibt sich aus dem Satze: bedeuten a und b relative Primzahlen, so geht die von $\xi+\eta i$ nach $\xi+\eta i+a+bi$ gezogene Gerade durch Einen Ganzepunkt, wenn der imaginäre Theil von $(\xi+\eta i).(-a+bi)$ eine ganze Zahl ist.

[I.] Art. 17. Die erste Umformung des letzten S in dem Ausdrucke für $\triangle S$ erhält man, wenn man das betreffende Flächenstück in solche drei Theile zerlegt, dass jenes S in

$$\begin{aligned}&S(\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i,\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m,\ (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m+i,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(+)})\\ -&S(\tfrac{1}{2}m,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i_{(+)},\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i)\\ -&S((\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}i)m,\ \tfrac{1}{2}m,\ \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}i)\end{aligned}$$

übergeht, und wenn man dann die Ganzepunkte in dem ersten Flächentheile mit Hülfe des Satzes in Art. 10 auszählt und ferner berücksichtigt, dass in dem zweiten Flächentheile sich kein Ganzepunkt befindet.

Die zweite Umformung erhält man, wenn man die den Eckpunkten des dritten Flächentheils entsprechenden Grössen mit i multiplicirt und um die ganze Zahl $(1-i)\frac{m-1}{2}$ vermehrt, endlich die dritte Umformung, wenn man mit der zuletzt entstandenen Figur nach Vorschrift des Art. 16 diejenige vergleicht, die gegen jene die Ortsverschiedenheit $\frac{-1}{1+i}$ hat.

[I.] Art. [18.] Eine Erläuterung zum ersten Schema findet man in dem später niedergeschriebenen hier mit [II.] bezeichneten Bruchstücke Art. 1 bis 6.

[I.] Art. [18.] (2.) Die geometrische Deutung ergibt mit Zuhülfenahme der beiden Systeme von Ganzepunkten

$[-2iQ-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, iQ] = [-2iQ+\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, iQ] = \mathrm{IV}^*$ und $-[-2iQ+\tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}i, iQ] = -[-2iQ-\tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}i, iQ] = \mathrm{X}^*$

die Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathrm{IV}-\mathrm{IV}^*+[-2iQ, \tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}] &= -\mathrm{X}+\mathrm{X}^*+[-iQ, \tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}]\\ \mathrm{XIII}+\mathrm{IV}^* = [-2iQ, 1, iQ] &= -I(-2iQ)+I(-iQ)\\ \mathrm{V}+\mathrm{X}^* = -[-2iQ, -i, iQ] &= R(-2iQ)-R(-iQ)\end{aligned}$$

wenn allgemein Rx und Ix die grössten Ganzen des reellen Theils und des Coëfficienten des imaginären Theils von x bedeuten.

$[-2iQ, \tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}]$ ist aber die Anzahl der Ganzepunkte in dem Quadrate, dessen Mittelpunkt sich in $-2iQ-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}i$ befindet und zwischen dessen Eckpunkten die Ortsunterschiede $\tfrac{1}{2}$ und $\tfrac{1}{2}i$ Statt haben.

$[-iQ, \tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}]$ oder $[-2iQ, -\tfrac{1}{2}i, \tfrac{1}{2}]$ ist die Anzahl der Ganzepunkte in einem gleichen Quadrate mit dem Mittelpunkte $-2iQ+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}i$.

[I.] Art. [18.] (3.) Mit Zuhülfenahme der Ganzepunkte $[0, \tfrac{1}{2}i, -iQ] = -[-\tfrac{1}{2}i, -\tfrac{1}{2}i, -iQ] = \mathrm{I}^*$ erhält man

$$\begin{aligned}\mathrm{VII}-\mathrm{XII} &= \mathrm{I}-\mathrm{I}^*+[-iQ, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}i]-[0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}i] = \mathrm{I}-\mathrm{I}^*+[-2iQ, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}i]\\ \mathrm{II}-\mathrm{I}^* &= [0, -i, -iQ] = -R0+R(-iQ)\\ \mathrm{IX}-\mathrm{I} &= [0, -1, -iQ] = I0-I(-iQ)\\ \mathrm{VI}-\mathrm{XII} &= -[\tfrac{1}{2}i, -1, -iQ] = -I(\tfrac{1}{2}i)+I(-iQ+\tfrac{1}{2}i)\\ \mathrm{VIII}-\mathrm{XIV} &= -[\tfrac{1}{2}, -1-i, \tfrac{1}{2}im_{(-)}] = \frac{a-1}{2}+\frac{b}{2}\end{aligned}$$

[II.] Art. 10. Es ist

$\Upsilon P' \equiv -\Upsilon(-iP'+\tfrac{1}{2}im),\ \ \Upsilon P'' \equiv -1-\Upsilon(P''-\tfrac{1}{2}im),\ \ \Upsilon P''' \equiv 1+\Upsilon(-iP''')\ (\mathrm{mod.}\ 4)$

und $-iP'+\tfrac{1}{2}im$, $P''-\tfrac{1}{2}im$ sind die um $\tfrac{1}{2}i$ vermehrten Ganzepunkte resp. in I, VI.

[III.] Art. 6. Die in der Note angegebenen Regeln für die Bestimmung des Dec. $\frac{M}{m}$ hat man der vorliegenden Abhandlung aus einem andern Orte der Handschriften beigefügt. Die erste dieser beiden Regeln, die wie leicht zu sehen mit der zweiten übereinstimmt, folgt aus der des Art. 6, weil

$$k \equiv f.i^{-n}\ (\mathrm{mod.}\ m),\ \ n = \theta\frac{2fM}{m},\ \ p = mm',\ \ \left[\frac{2km'}{p}\right]^2 \equiv \theta\frac{2km'}{p}\ (\mathrm{mod.}\ 2+2i)$$

ist.

[III.] Art. 8 enthält in der Handschrift ein Beispiel zu Art. 7, nemlich die Bestimmung des Decidenten von $-1+2i$ für den Modulus $-11+4i$.

[III.] Art. 10. In Bezug auf die Bemerkung 'anders auszudrücken' kann man Art. 3 des folgenden Bruchstücks [IV] vergleichen.

[IV.] Die Art. 1. 2. 4 enthalten in der Handschrift ausser dem hier Abgedruckten noch die Anwendung auf die beiden Beispiele für $m = 5+8i$, $M = 9+4i$ und für $m = 9+4i$, $M = 5+8i$.

[V.] Art. [7.] Es bezeichnet hier Dec. $\frac{m}{M}$ wie in Art. 1 des vorhergehenden Bruchstücks [IV] den Werth von

$$\Sigma(-1)^X\Sigma(-1)^Y\ \mathrm{Int.}\,p$$

worin die Summation über alle ganze Zahlen X und Y auszudehnen ist, für welche die zugehörigen ξ und η innerhalb der Grenzen 0 und $\tfrac{1}{2}$ liegen.

Die Formeln für den Decidenten in Art. 7 und 15 sind nach der Angabe des Textes auf zwei besondern Wegen gefunden, um aber diese Erläuterungen nicht zu sehr auszudehnen, werden sie hier aus einer gemeinsamen Quelle abgeleitet.

Indem X irgend einen bestimmten ganzzahligen Werth annimmt, sei Y^* das kleinere, Y^{**} das grössere der beiden Y, welche den Grenzwerthen von ξ, η entsprechen. Die zu Y^* und Y^{**} zugehörigen Werthe von p seien p^* und p^{**}, die ebenso wie Y^* und Y^{**} einander nicht gleich werden können, weil die Summe Σ sich nicht über die Grenzwerthe von ξ und η erstreckt.

Führt man auf dieselbe Weise wie in den beiden vorhergehenden Aufsätzen [III] und [IV] die Summation über alle bei demselben X Statt habenden Werthe von Y aus, setzt dabei für die Anzahl der zwischen Y' und Y'' liegenden ungeraden Zahlen $[\frac{1}{2}Y''-\frac{1}{2}]-[\frac{1}{2}Y'-\frac{1}{2}]$ und fügt die Intensoren, die sich auf die Grenzen $\xi = 0$ und $= \frac{1}{2}$ beziehen, zwei Mal aber mit entgegengesetzten Zeichen hinzu, so erhält man für $\Sigma(-1)^Y \operatorname{Int.} p$ den aus sieben Theilen bestehenden Ausdruck

$$-\Sigma[-\operatorname{Int.}(p-\mu\omega i)+\operatorname{Int.}(p+\mu\omega i)] \text{ worin alle } p \text{ aufzunehmen, für welche } [Y] \text{ gerade,}$$
$$x \text{ oder } y \text{ ganz, incl. } \xi = 0 \text{ und } \tfrac{1}{2}, \text{ excl. } \eta = 0 \text{ und } \tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\operatorname{Int.}(p^*-\mu\omega i) \text{ wenn } [Y^*] \text{ gerade} \\ +\operatorname{Int.}(p^{**}+\mu\omega i) \text{ wenn } [Y^{**}] \text{ gerade} \end{array}\right\} \xi = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}, \quad 0<\eta<\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\operatorname{Int.}(p^*+\mu\omega i) \text{ wenn } [Y^*] \text{ gerade} \\ +\operatorname{Int.}(p^{**}-\mu\omega i) \text{ wenn } [Y^{**}] \text{ gerade} \end{array}\right\} 0<\xi<\tfrac{1}{2}, \quad \eta = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\operatorname{Int.}(p^*+\mu\omega i) \text{ wenn } [Y^*] \text{ gerade} \\ +\operatorname{Int.}(p^{**}-\mu\omega i) \text{ wenn } [Y^{**}-\omega] \text{ gerade} \end{array}\right\} \xi = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}, \quad \eta = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}$$

welcher mit $(-1)^X$ multiplicirt und über alle ganzzahligen X summirt den Decidenten $\frac{m}{M}$ ergibt.

Aus dem ersten Theil des Ausdrucks entsteht auf diese Weise von den nach Art. 2 Vorschrift I gebildeten ε

$$\begin{array}{l} \Sigma\varepsilon \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade} \\ -4\Sigma\varepsilon \text{ wo ausserdem } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade} \end{array}$$

Für die folgenden Theile kann

$$\left.\begin{array}{l} -(B)\operatorname{Int.}(p-B\mu\omega i) \text{ wenn } \xi = 0 \\ +(B)\operatorname{Int.}(p+B\mu\omega i) \text{ wenn } \xi = \tfrac{1}{2} \end{array}\right\} X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade, } 0<\eta<\tfrac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} -(A)\operatorname{Int.}(p+A\mu\omega i) \text{ wenn } \eta = 0 \\ +(A)\operatorname{Int.}(p-A\mu\omega i) \text{ wenn } \eta = \tfrac{1}{2} \end{array}\right\} X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade, } 0<\xi<\tfrac{1}{2}$$

$$-\tfrac{1}{2}[(A')+(B')]\operatorname{Int.}(p+A'\mu\omega i) \text{ wenn } X \text{ ganz, } [Y+A'\omega] \text{ gerade, } \xi \text{ und } \eta = 0 \text{ oder } \tfrac{1}{2}$$

gesetzt werden, worin $A' = +A$ oder $-A$ ist, wenn $\eta = 0$ oder $\frac{1}{2}$, $B' = +B$ oder $-B$, wenn $\xi = 0$ oder $\frac{1}{2}$, und worin z. B. (A): $+1$ oder -1 bezeichnet, jenachdem A positiv oder negativ ist.

Multiplicirt man mit $(-1)^X$, führt die Summation über X aus, lässt dabei in diesen Ausdrücken u. zwar im

ersten	$p-B\mu\omega i,\ P-BD\omega i,\ \pi-AB\omega i-BB\omega,\ X,\ [Y]$	bez. in	$ip,\ iP,\ i\pi,\ -Y,\ [X]$
zweiten	$p+B\mu\omega i,\ P+BD\omega i,\ \pi+AB\omega i+BB\omega,\ X,\ [Y]$	…	$p,\ P,\ \pi,\ X,\ [Y]$
dritten	$p+A\mu\omega i,\ P+AD\omega i,\ \pi+AA\omega i+AB\omega,\ X,\ [Y]$	…	$p,\ P,\ \pi,\ X,\ [Y]$
vierten	$p-A\mu\omega i,\ P-AD\omega i,\ \pi-AA\omega i-AB\omega,\ X,\ [Y]$	..	$im-ip,\ iM-iP,\ i-i\pi,\ Y-B,\ A-1-[X]$

übergehen und bezeichnet das aus dem fünften Ausdruck sich ergebende Resultat mit Q_1, so entsteht

$$\begin{array}{l} -\Sigma(-1)^Y(B)\operatorname{Int.} ip, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade, } \eta = \omega, \ 0<\xi<\tfrac{1}{2} \\ +\Sigma(-1)^X(B)\operatorname{Int.} p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade, } \xi = \tfrac{1}{2}+\omega, \ 0<\eta<\tfrac{1}{2} \\ -\Sigma(-1)^X(A)\operatorname{Int.} p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade, } \eta = \omega, \ 0<\xi<\tfrac{1}{2} \\ +\Sigma(-1)^Y(A)\operatorname{Int.}(im-ip), \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade, } \xi = \tfrac{1}{2}+\omega, \ 0<\eta<\tfrac{1}{2} \\ +Q_1 \end{array}$$

Die Untersuchung der einzelnen Fälle lässt erkennen, dass unter der Voraussetzung $M \equiv 1 \pmod{2+2i}$

$$\begin{array}{rl} Q_1 = & -\operatorname{Int.}\mu\omega i \text{ ist, wenn } M \text{ im 1. Quadranten liegt} \\ & -\operatorname{Int.}(\tfrac{1}{2}mi+\mu\omega i), \text{ wenn } M \text{ im 2. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ gerade} \\ & +\operatorname{Int.}(\tfrac{1}{2}mi-\mu\omega i), \text{ wenn } M \text{ im 4. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ gerade} \end{array}$$

indem man eine complexe Zahl gerade oder ungerade nennt, je nachdem sie durch 2 theilbar ist oder nicht.

Hiernach wird also bei Anwendung der in den Vorschriften II und IV bestimmten ε

$$\begin{array}{rrl} \operatorname{Dec.}\frac{m}{M} = & \text{I,} & \Sigma\varepsilon, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade} \\ & & -4\Sigma\varepsilon, \text{ wo noch } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade} \\ & \text{II,} & -\Sigma\varepsilon\operatorname{Int.} ip, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade} \\ & \text{IV,} & +\Sigma\varepsilon\operatorname{Int.} p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade} \\ & \text{II,} & +\Sigma\varepsilon\operatorname{Int.} p, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade} \\ & \text{IV,} & +\Sigma\varepsilon\operatorname{Int.}(im-ip), \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ gerade} \\ & & +Q_1 \end{array}$$

In einer andern Form erhält man den Ausdruck für den Decidenten, wenn man zuerst nach X summirt und dabei die Anzahl der zwischen X' und X'' liegenden ungeraden Zahlen durch $[\frac{1}{2}X''+\frac{1}{2}]-[\frac{1}{2}X'+\frac{1}{2}]$ darstellt, nemlich

$$\begin{array}{rrl} \operatorname{Dec.}\frac{m}{M} = & \text{I,} & \Sigma\varepsilon, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\ & & -4\Sigma\varepsilon, \text{ wo noch } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade} \\ & \text{II,} & -\Sigma\varepsilon\operatorname{Int.} ip, \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ gerade} \\ & \text{IV,} & +\Sigma\varepsilon\operatorname{Int.} p, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\ & \text{II,} & +\Sigma\varepsilon\operatorname{Int.} p, \text{ wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade} \\ & \text{IV,} & +\Sigma\varepsilon\operatorname{Int.}(im-ip), \text{ wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade} \\ & & +Q_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} Q_2 = & -\operatorname{Int.}(-\mu\omega), \text{ wenn } M \text{ im 2. Quadr.} \\ & +\operatorname{Int.}(\tfrac{1}{2}m-\mu\omega), \text{ wenn } M \text{ im 1. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade} \\ & -\operatorname{Int.}(\tfrac{1}{2}m+\mu\omega), \text{ wenn } M \text{ im 3. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade} \end{array}$$

Führt man die Summation nach Y zuerst aus, wählt aber die zweite so eben angewandte Art der Bestimmung der Anzahl der zwischen zwei Werthen liegenden ungeraden Zahlen, so wird

$$
\begin{aligned}
\text{Dec.}\,\frac{m}{M} = \text{I},\quad & \Sigma\varepsilon,\ \text{wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade}\\
& -4\Sigma\varepsilon,\ \text{wo noch } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade}\\
\text{II},\ & -\Sigma\varepsilon\,\text{Int.}\,ip,\ \text{wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade}\\
\text{IV},\ & +\Sigma\varepsilon\,\text{Int.}\,p,\ \text{wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade}\\
\text{II},\ & +\Sigma\varepsilon\,\text{Int.}\,p,\ \text{wo } X \text{ ganz, } [Y] \text{ ungerade}\\
\text{IV},\ & +\Sigma\varepsilon\,\text{Int.}\,(im-ip),\ \text{wo } Y \text{ ganz, } [X] \text{ ungerade}\\
& +Q_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Q_3 = & -\text{Int.}\,(-\mu\omega i),\ \text{wenn } M \text{ im 3. Quadr.}\\
& -\text{Int.}\,(\tfrac{1}{2}mi+\mu\omega i),\ \text{wenn } M \text{ im 2. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade}\\
& +\text{Int.}\,(\tfrac{1}{2}mi-\mu\omega i),\ \text{wenn } M \text{ im 4. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade}
\end{aligned}
$$

Summirt man zuerst noch X und gebraucht dabei die erste Art der Darstellung der Anzahl der zwischen zwei Werthen liegenden ungeraden Zahlen, so erhält man die in [V.] Art. 15 angegebene Form für den Decidenten, wo die Grösse q auch durch folgende Gleichung definirt werden kann

$$
\begin{aligned}
q = & -\text{Int.}\,\mu\omega,\ \text{wenn } M \text{ im 1. Quadr.}\\
& +\text{Int.}\,(\tfrac{1}{2}m-\mu\omega),\ \text{wenn } M \text{ im 1. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ gerade}\\
& -\text{Int.}\,(\tfrac{1}{2}m+\mu\omega),\ \text{wenn } M \text{ im 3. Quadr. und } \frac{M-1}{2} \text{ gerade}
\end{aligned}
$$

Die Vereinigung dieser vier Ausdrücke für den Decidenten bildet das in [V.] Art. 7 aufgestellte Resultat, weil $\text{Int.}\,ip - \text{Int.}\,p$ gleich 3 wird für $[x]$ gerade $[y]$ ungerade, sonst aber gleich 1, ferner $\text{Int.}\,(im-ip)+\text{Int.}\,p$ gleich 0 für $[x]$ gerade $[y]$ gerade, in den übrigen Fällen aber gleich 4.

[V.] Art. [7.] Die erste Tafel für das Beispiel gibt in der ersten Spalte die zu jedem ganzzahligen P zugehörigen Werthe von $\frac{37\,.\,P}{M}$ oder $37(\xi+\eta i)$, wenn $0<\xi<\frac{1}{2}$, $0<\eta<\frac{1}{2}$ ist, in der zweiten $\frac{37\,.\,Pm}{M}$ oder $37\,.\,p$, in der dritten die in p enthaltene grösste ganze Zahl, in der vierten $\pm\,\text{Int.}\,p$, wo das obere Zeichen gilt, wenn P durch $1+i$ theilbar, das untere, wenn P nicht durch $1+i$ theilbar ist.

[V.] Art. [9.].[12.] Die verbesserte Bezeichnungsweise der θ ist nur bei der zweiten und dritten Classe Artt. 9. 10 angedeutet, aber auch auf die erste und vierte Artt. 8. 11 auszudehnen. Hiernach wird ein $\theta^\lambda = T+Ui$ denjenigen Index λ, $=0,\,1,\,2$ oder 3 haben, für welchen die durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
i^\lambda M = \mathfrak{A}+\mathfrak{B}i,\quad & i^{-\lambda}\mu = \rho+\sigma i\\
2\varphi^0 = -\text{Coëff. Img}\,\theta^\lambda(a-bi) & = +bT-aU\\
2\Phi^0 = +\text{Coëff. Img}\,\theta^\lambda(\mathfrak{A}-\mathfrak{B}i) & = -\mathfrak{B}T+\mathfrak{A}U
\end{aligned}
$$

bestimmten Grössen φ^0 und Φ^0 zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen.

Um nach den Andeutungen in Art. 9 (3) zu beweisen, dass, wenn T, U zwei ganze reelle Zahlen sind, welche die so eben aufgestellten Bedingungen erfüllen, $T+Ui$ sich auch in dem bei einer der vier Combinationen Artt. 8..11 bestimmten Complexus θ^λ befindet, bezeichne man mit φ', Φ' diejenigen ganzen complexen Zahlen, für welche die Gleichung

$$T+Ui = \varphi' i^\lambda M + \Phi' m$$

Statt hat und für welche eine der vier Grössen $\pm\frac{\varphi'-\varphi^0}{m}$, $\pm i\frac{\varphi'-\varphi^0}{m}$ so beschaffen, dass der reelle Theil und der Coëfficient des imaginären Theils zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen (*Theoria residuorum biquadr. artt.* 45, 46). Die betreffende Grösse ist dann, wie man aus der Untersuchung der in den vier Combinationen enthaltenen sechzehn einzelnen Fälle leicht ersieht, $\frac{P}{m}$ und die ihr entsprechende Grösse unter $\pm\frac{\Phi'-\Phi^0}{m}$, $\pm i\frac{\Phi'-\Phi^0}{M}$ ist $\frac{P}{M}$, weil $\frac{\Phi'-\Phi^0}{M} = -\frac{\varphi'-\varphi^0}{m}i^\lambda$ wird.

Aus dieser Art der Darstellung der Grössen $\frac{P}{m}$ oder $\frac{P}{M}$ folgt auch, dass I, $\Sigma\varepsilon$ von allen aus $\theta+\theta'+\theta''+\theta'''$ besteht, worin θ^λ die Summe derjenigen ε bedeutet, die für jeden Ganzepunkt θ innerhalb des Parallelogramms 0, $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}i^\lambda M$, $\frac{1}{2}i^\lambda M$,
$=+1$ zu setzen sind, wenn θ durch $1+i$ theilbar und Coëff. Imag. $\mu i^{-\lambda}$ positiv oder wenn keine Bedingung gilt, dagegen
$=-1$ wenn nur eine gilt.

[V.] Art. 13. Die Bestimmung von θ^λ kann entweder durch die oben für Dec. $\frac{m}{M}$ angewandten vier verschiedenen Summationsarten oder, was im Wesentlichen dasselbe ist, nach den in [II.] Art. 11 angedeuteten Methoden ausgeführt werden, bei welchen dann die vier Constructionen zu Grunde zu legen sind, die durch Verbindung der Punkte, deren θ ein Vielfaches von $1+i$ ist, resp. mit den Punkten $\theta+1$, $\theta+i$, $\theta-1$ und $\theta-i$ entstehen.

Lässt man in der Begrenzung des zuvor erwähnten Parallelogramms allen den Punkten ein θ entsprechen, für welche der reelle oder imaginäre Theil von θ eine ganze Zahl wird, bezeichnet mit θ^0 die nächste durch $1+i$ theilbare Ganze bei θ, mit l die Ortsverschiebung von einem Punkte des geraden Begrenzungsstückes, das den Punkt θ enthält, bis zu irgend einem nachfolgenden Punkte derselben Geraden, also z. B. bei jenem Parallelogramm der Reihe nach die Grössen m, Mi^λ, $-m$, $-Mi^\lambda$, und setzt

$$\varepsilon = \pm 1 \text{ mit dem Zeichen des imaginären Theils von } \frac{l}{\theta-\theta^0}$$

so ergibt die Vereinigung der auf die eine oder andere Weise erhaltenen vier Resultate $4\theta^\lambda = -\Sigma\varepsilon$.

Die gesonderte Bestimmung der den Eckpunkten entsprechenden θ und ε wird umgangen, wenn man dies Parallelogramm durch ein anderes ersetzt, dessen Begrenzungen den Begrenzungen des erstern unendlich nahe sind, und welches die beiden Punkte 0 und $\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}i^\lambda M$ nicht einschliesst. Die Begrenzung eines solchen Parallelogramms erhält man, wenn man sie an die positiven Seiten der Linien

$$0\ldots\tfrac{1}{2}m,\quad \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}i^\lambda M\ldots\tfrac{1}{2}m,\quad \tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}i^\lambda M\ldots\tfrac{1}{2}i^\lambda M,\quad 0\ldots\tfrac{1}{2}i^\lambda M$$

legt. Lässt man den vier so entstandenen Geraden der Reihe nach die unendlich kleinen positiven Grössen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ entsprechen, so kann man für die auf ihnen liegenden Punkte θ

$$\theta = p = m(\xi+\omega_1 i),\quad -\theta i^\lambda+\tfrac{1}{2}mi^\lambda+\tfrac{1}{2}M = P = M(\xi+\omega_2 i),\qquad -\theta+\tfrac{1}{2}m+\tfrac{1}{2}Mi^\lambda = p = m(\xi+\omega_3 i),$$
$$\theta i^{-\lambda} = P = M(\xi+\omega_4 i)\quad \text{wenn } \lambda \text{ gerade}$$
$$\theta = p = m(\xi+\omega_1 i),\quad \theta i^{1-\lambda}-\tfrac{1}{2}mi^{1-\lambda}+\tfrac{1}{2}M = P = M(\tfrac{1}{2}+\omega_2+\eta i),\quad \theta i+\tfrac{1}{2}m-\tfrac{1}{2}Mi^{1+\lambda} = p = m(\tfrac{1}{2}+\omega_3+\eta i),$$
$$\theta i^{-\lambda} = P = M(\xi+\omega_4 i)\quad \text{wenn } \lambda \text{ ungerade}$$

setzen, worin ξ und η auch theilweise zur Schliessung der Figur das Gebiet der reellen Werthe von 0 bis $\frac{1}{2}$ um unendlich kleine Grössen überschreiten.

Bezeichnen G, g, H, h die Summen der resp. nach den Vorschriften II, III, IV, V (in Artt. 3 bis 6) gebildeten ε, und umfassen G' oder $G_,$ und g' oder $g_,$ diejenigen ε, welche für die beim zweiten Parallelogramm etwa auftretenden unendlich kleinen Werthe von ξ Statt haben, im Uebrigen aber resp. nach den Vorschriften II und III gebildet sind, beziehen sich ferner G'' oder $G_{,,}$ und g'' oder $g_{,,}$ ebenso auf dieselben Vorschriften aber auf die unendlich kleinen Werthe von $\frac{1}{2}-\xi$, und endlich $H', h_,, H'', h_{,,}$ resp. auf die Vorschriften IV, V, IV, V und die unendlich kleinen Werthe resp. von $\frac{1}{2}-\eta, \frac{1}{2}-\eta, \eta, \eta$, so wird

$$4\Theta^\lambda = -(g+g'+g'') - i^\lambda(G+G'+G'') + i^\lambda(g+g_,+g_{,,}) + (G+G_,+G_{,,})\qquad \text{wenn } \lambda \text{ gerade}$$
$$4\Theta^\lambda = -(g+g'+g'') - i^{1-\lambda}(H+H'+H'') - i^{\lambda-1}(h+h_,+h_{,,}) + (G+G_,+G_{,,})\quad \text{wenn } \lambda \text{ ungerade}$$

Für denjenigen Eckpunkt θ des Parallelogramms, welcher dem Punkte 0 zunächst liegt, bezeichne ξ_1 den zugehörigen Werth von dem ξ der ersten Seite, ξ_4 den zugehörigen Werth von dem ξ der vierten Seite, so dass

$$\theta = m(\xi_1+\omega_1 i) = i^\lambda M(\xi_4+\omega_4 i)$$

wird, dann ergibt sich dasjenige ξ, welchem auf der ersten Seite oder deren Verlängerung ein Punkt p mit dem reellen Theile gleich 0 entspricht, aus der Gleichung

$$(\text{Real.}\, p = 0),\quad \xi-\xi_1 = \sigma a\mathfrak{A}\omega_1 - \sigma\omega_4$$

worin die positiven Factoren der unendlich kleinen positiven Grössen durch die Einheit ersetzt sind und $\sigma, \mathfrak{A}$ die durch

$$\rho+\sigma i = i^{-\lambda}(a+bi),\quad \mathfrak{A}+\mathfrak{B}i = i^\lambda(A+Bi)$$

bestimmten reellen Grössen bedeuten. Dieser Punkt p liegt auf der ersten Seite selbst, wenn $\xi-\xi_1$ positiv, also, indem man ω_1 unendlich klein gegen ω_4 annimmt, wenn σ negativ ist. Der dem Punkte p zunächst liegende Punkt p^0, dessen darstellende Zahl durch $1+i$ getheilt wird, ist der Punkt 0, also hat

$\text{Imag.}\,\frac{m}{p-p^0}$ oder $\text{Imag.}\,\frac{1}{\xi+\omega_1 i}$ das Minuszeichen. Man erhält daher für $\text{Real.}\,p = 0$:

$$\varepsilon = -1 \text{ wenn } (\sigma) = -1,\ \varepsilon = 0 \text{ wenn } (\sigma) = +1,\ \text{d. i. } \varepsilon = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(\sigma)$$

und auf dieselbe Weise für $\text{Imag.}\,p = 0$

$$\xi-\xi_1 = \sigma b\mathfrak{B}\omega_1 - \sigma\omega_4,\quad \text{Imag.}\,\frac{m}{p-p^0} = \text{Imag.}\,\frac{1}{\xi+\omega_1 i},\quad \varepsilon = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(\sigma)\quad \text{also } g' = -1+(\sigma)$$

In Bezug auf die vierte Seite wird $P^0 = 0$, $\text{Imag.}\,\frac{M}{P-P^0} = \text{Imag.}\,\frac{1}{\xi+\omega_4 i}$

$$\text{also für Real.}\,(i^\lambda P) = 0;\quad \xi-\xi_4 = -\sigma a\mathfrak{A}\omega_4+\sigma\omega_1,\quad \varepsilon = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(\sigma a\mathfrak{A})$$
$$\text{und für Imag.}\,(i^\lambda P) = 0;\quad \xi-\xi_4 = -\sigma b\mathfrak{B}\omega_4+\sigma\omega_1,\quad \varepsilon = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}(\sigma b\mathfrak{B})$$

demnach $G_, = -1+\frac{1}{2}(\sigma a\mathfrak{A})+\frac{1}{2}(\sigma b\mathfrak{B})$ oder, weil $\rho = a\mathfrak{A}+b\mathfrak{B}$ ist, $G_, = -1+\frac{1}{2}(\rho\sigma)+\frac{1}{2}(\rho\sigma ab\mathfrak{A}\mathfrak{B})$

Der Theil R_1^λ von $4\Theta^\lambda$, der aus dem unendlich nahe bei dem Punkte 0 liegenden Stücke der Begrenzung entsteht, ist also

$$R_1^\lambda = +G_, - g' = -(\sigma)+\tfrac{1}{2}(\rho\sigma)+\tfrac{1}{2}(\rho\sigma ab\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

Durch ähnliche Betrachtungen findet man für die Theile $R_2^\lambda, R_3^\lambda, R_4^\lambda$, welche ebensolche Beziehungen resp. zu den Punkten $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}Mi^\lambda$, $\frac{1}{2}Mi^\lambda$ haben, wie R_1^λ zum Punkte 0, bei geradem λ

$$R_2^\lambda = -g''-i^\lambda G'' = -\tfrac{1}{2}(b)-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}),\quad R_3^\lambda = -i^\lambda G'+i^\lambda g_, = i^\lambda(\sigma)-\tfrac{1}{2}i^\lambda(\rho\sigma)-\tfrac{1}{2}i^\lambda(\rho\sigma ab\mathfrak{A}\mathfrak{B}),$$
$$R_4^\lambda = +i^\lambda g_{,,}+G_{,,} = \tfrac{1}{2}i^\lambda(b)+\tfrac{1}{2}i^\lambda(\mathfrak{B})$$

bei ungeradem λ

$$R_2^\lambda = -g''-i^{1-\lambda}H'' = -\tfrac{1}{2}(b)-\tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}),\quad R_3^\lambda = -i^{1-\lambda}H'-i^{\lambda-1}h_, = 0,$$
$$R_4^\lambda = -i^{\lambda-1}h_{,,}+G_{,,} = \tfrac{1}{2}i^{\lambda+1}(a)+\tfrac{1}{2}i^{\lambda+1}(\mathfrak{A})$$

[V.] Art. [14.]. Die Auswerthung der Summen von den nach Vorschrift III gebildeten ε ergibt sich aus der durch die Definition der ε leicht zu verificirenden Gleichung

$$\text{III},\ \Sigma\varepsilon \text{ von allen } -4\Sigma\varepsilon \text{ von denen, wo } y \text{ ganz, } [x] \text{ gerade } = \text{III},\ \Sigma[-\text{Int.}(p-m\omega)+\text{Int.}(p+m\omega)]$$

worin p alle Werthe annimmt, die den unter Vorschrift III angegebenen Bedingungen genügen. Diese Intensoren lassen sich nemlich mit Ausnahme der beiden dem kleinsten (ξ^*) und dem grössten zulässigen Werthe (ξ^{**}) von ξ entsprechenden Intensoren, welche resp. gleich

$$-\text{Int.}(p^*-m\omega) \text{ und } +\text{Int.}(p^{**}+m\omega) \text{ oder } -\text{Int.}(\omega m) \text{ und } +\text{Int.}(\tfrac{1}{2}-\omega)m$$

sind, immer zu je zweien $+\text{Int.}(p'+m\omega)$ und $-\text{Int.}(p''-m\omega)$ so zusammen ordnen, dass zwischen ξ' und ξ'', welche den Grössen p' und p'' entsprechen, kein Werth von ξ liegt, der den reellen oder imaginären Theil von p zu einer ganzen Zahl macht, so dass also die zwei Intensoren sich stets gegenseitig annulliren.

[V.] Art. [15.] Es ist

$$\text{II.}\quad +\Sigma\varepsilon\,\text{Int.}\,ip \ \text{ wo } Y \text{ ganz } [X] \text{ gerade}, \quad -\Sigma\varepsilon\,\text{Int.}\,ip \ \text{ wo } X \text{ ganz } [Y] \text{ ungerade}$$

$$= \Sigma[-\text{Int.}\,i(p-m\omega)+\text{Int.}\,i(p+m\omega)] \text{ für diejenigen } p, \text{ für welche } x \text{ oder } y \text{ ganz}, [X] \text{ gerade}$$

$$Y \text{ ungerade}, \ 0<\xi<\tfrac{1}{2},\ \eta=\omega$$

$$+\text{Int.}\,i(p^{*}-m\omega) \text{ wenn } [X^{*}] \text{ gerade } [Y^{*}] \text{ ungerade}$$

$$-\text{Int.}\,i(p^{**}+m\omega) \text{ wenn } [X^{**}] \text{ gerade } [Y^{**}] \text{ ungerade}$$

wie man sich leicht überzeugt, wenn man auf der zweiten Seite der Gleichung die Summation nach dem in der vorhergehenden Note angewandten Verfahren über jedes so kleine Intervall von $\xi_{,}$ bis $\xi_{,,}$ ausführt, dass es zwischen $\xi_{,}$ und $\xi_{,,}$ kein ξ gibt, welches in dem zugehörigen P den reellen oder imaginären Theil zu einer ganzen Zahl macht. Die Anwendung der nach Vorschrift III gebildeten ε lässt die zweite Seite dieser Gleichung die in Art. 15. aufgestellte Form annehmen.

[V.] Art. [15.] Die Verwandlung der Summen von den nach Vorschrift IV gebildeten λ's in die Summen der ε aus V ergibt sich durch eben solche Betrachtungen wie die in der letzten Note angewandten, wenn noch die Gleichung

$$\text{V},\quad \Sigma\varepsilon \text{ von allen}, \ -4\Sigma\varepsilon \text{ wo } x \text{ ganz } [y] \text{ gerade}, \ = +\text{Int.}(\tfrac{1}{2}im+m\omega)-\text{Int.}(\tfrac{1}{2}im+\tfrac{1}{2}-\omega m)$$

zu Hülfe gezogen wird, die der zuvor ermittelten Auswerthung der Summe von den ε in Vorschrift III entspricht.

[V.] Art. [17.] Bestimmt man die Hülfsgrössen U, T, L, V durch die Gleichungen

$$U = 1-2(B)-(AB)+(\alpha a)+(\beta b)+(\alpha b)-(\beta a)+(\alpha\beta ab)-(\alpha\beta abAB) \text{ oder}$$

$$U = (1+(A))(1-(B))(1-(a\beta)+(b\beta)+(\alpha\beta))$$

$$\text{weil } (\alpha a)+(\beta b) = (A)+(A\alpha\beta ab), \ (\alpha b)-(\beta a) = (B)-(B\alpha\beta ab) \text{ ist},$$

$$T = -2+(a)+(b)-(\beta)-2(B)-(\alpha ab) \text{ oder}$$

$$T = -2+(a)+(b)-(\beta)-2(B)-(aA)+(bB)-(\beta AB)$$

$$L = (1+(A))(1+(B))(1+(\beta))-(1-(A))(1-(B))(1-(\beta))$$

$$V = (1+(A))(1-(B))(-2(a)+2(\beta)+(ab)+(\alpha\beta)) \text{ oder}$$

$$V = (1+(A))(1-(B))(-(a)+(b)+(\beta)+(ab)-(\beta ab)+(\alpha\beta))$$

$$\text{weil } (a)+(b) = (\beta)+(\beta ab) \text{ wenn } A \text{ positiv } B \text{ negativ}$$

und bezeichnet mit W', S', Q' die Grössen, in welche die W, S, Q des Ausdrucks für den Dec. $\frac{m}{M}$ in Art. 14. übergehen, wenn man darin m mit M also $\alpha+\beta i$ mit $\alpha-\beta i$ vertauscht, so wird

$$2W' = -5(B)-(AB) \text{ wenn } \frac{M-1}{2} \text{ gerade}$$

$$2W' = -(B)-(AB) \text{ wenn } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade}$$

$$2S' = -(\alpha\beta abAB)-(\beta)-(B)+(b)$$

$$2Q'+2S'+2W' = 2T+U \text{ wenn } \frac{M-1}{2} \text{ gerade}$$

$$2Q'+2S'+2W' = -4+4(a)+U \text{ wenn } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade}$$

$$8\psi = 8(q+r+s+w)-(2Q'+2S'+2W')$$

Ersetzt man hier $8(q+r+s+w)$ durch dessen in Art. 15 aufgestellten Werth, bringt ihn aber unter die Form

$$2T+4L+V \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ gerade} \quad \frac{m-1}{2} \text{ gerade}$$

$$2T-16+16(A)+V \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ gerade} \quad \frac{m-1}{2} \text{ ungerade}$$

$$-4+4(a)+V \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade} \quad \frac{m-1}{2} \text{ gerade}$$

$$-20+4(a)+V \quad \text{wenn } \frac{M-1}{2} \text{ ungerade} \quad \frac{m-1}{2} \text{ ungerade}$$

und beachtet, dass

$$V-U = -\tfrac{1}{2}(1+(a))(1+(A))(1+(\alpha))(1-(b))(1-(B))(1-(\beta))$$

ist, so erhält man für ψ die in Art. 17 angegebene Bestimmungsart.

[VI.] Art. 3. Das unvollständige Citat kann auf Art. 4 des Bruchstücks III bezogen werden.

SCHERING.

ZUR THEORIE DER COMPLEXEN ZAHLEN.

[I.]

NEUE THEORIE DER ZERLEGUNG DER CUBEN.

I. Wir nehmen an, es gebe eine Auflösung der Gleichung $x^3+y^3+z^3=0$, nemlich $x=a$, $y=b$, $z=c$, wo a, b, c keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, folglich auch unter sich Primzahlen sind. Wir setzen

$$\begin{aligned} b+c &= \alpha \\ c+a &= \beta \\ a+b &= \gamma \end{aligned}$$

wo nothwendig auch α, β, γ unter sich Primzahlen sein werden. Hätten nemlich α und β einen gemeinschaftlichen Divisor, so würde dieser auch a^3 und b^3 messen, es müssten daher auch a und b einen gemeinschaftlichen Divisor haben.

Wir werden nun haben

$$(\beta+\gamma-\alpha)^3+(\gamma+\alpha-\beta)^3+(\alpha+\beta-\gamma)^3=0$$

allein es ist identisch

$$(\beta+\gamma-\alpha)^3+(\gamma+\alpha-\beta)^3+(\alpha+\beta-\gamma)^3=(\alpha+\beta+\gamma)^3-24\,\alpha\beta\gamma$$

Es wird folglich

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3=24\,\alpha\beta\gamma$$

Sind α, β, γ reelle Zahlen, so wird $\alpha+\beta+\gamma$ durch 3 theilbar sein, also $(\alpha+\beta+\gamma)^3$ durch 27, folglich $\alpha\beta\gamma$ durch 9. Es muss daher eine der Zahlen α, β, γ z. B. γ durch 9 theilbar sein, also c^3 ebenfalls, folglich c durch 3.

Sind hingegen α, β, γ imaginäre Zahlen, so schliessen wir, dass $\alpha+\beta+\gamma$ durch $1-\varepsilon$, folglich $24\alpha\beta\gamma$ durch $(1-\varepsilon)^3$, mithin $\alpha\beta\gamma$ durch $1-\varepsilon$ theilbar sein müsse. Es ist also eine der Zahlen α, β, γ durch $1-\varepsilon$ theilbar und folglich auch eine der Zahlen a, b, c.

II. Wir haben allgemein die identische Gleichung

$$\begin{aligned}(p+q+r)^3+(p+q\varepsilon+r\varepsilon\varepsilon)^3+(p+q\varepsilon\varepsilon+r\varepsilon)^3 \\ = 27pqr+3(p+q+r)(p+q\varepsilon+r\varepsilon\varepsilon)(p+q\varepsilon\varepsilon+r\varepsilon)\end{aligned}$$

Ist folglich $p+q+r=0$, so wird

$$(p+q\varepsilon+r\varepsilon\varepsilon)^3+(p+q\varepsilon\varepsilon+r\varepsilon)^3-27pqr=0$$

Sind hier p, q, r selbst Cuben, nemlich resp. $=a^3, b^3, c^3$; d. i. existirt eine Auflösung der Gleichung $x^3+y^3+z^3=0$, so wird

$$\begin{aligned} a^3+b^3\varepsilon+c^3\varepsilon\varepsilon &= a' \\ a^3+b^3\varepsilon\varepsilon+c^3\varepsilon &= b' \\ -3abc &= c' \end{aligned}$$

gesetzt, auch $a'^3+b'^3+c'^3=0$ werden. Aus dieser neuen Auflösung kann man auf gleiche Weise eine dritte ableiten u. s. w. Man überzeugt sich leicht, dass wenn die erste Auflösung in reellen Zahlen ist, auch die dritte eine solche sein wird.

Es ist noch zu bemerken, dass wenn a, b, c keinen Factor gemein haben, dasselbe auch von a', b', c' gelten wird, den Factor $1-\varepsilon$ abgerechnet. Es ist nemlich

$$\begin{aligned} \frac{a'}{1-\varepsilon} &= -\varepsilon\varepsilon a^3+\varepsilon b^3 = a^3-\varepsilon c^3 = -b^3+\varepsilon\varepsilon c^3 \\ \frac{b'}{1-\varepsilon} &= a^3-\varepsilon b^3 = -\varepsilon\varepsilon a^3+\varepsilon c^3 = \varepsilon\varepsilon b^3-c^3 \\ \frac{c'}{1-\varepsilon} &= (\varepsilon\varepsilon-1)abc \end{aligned}$$

Die beiden ersten Zahlen haben also weder mit a, noch mit b, noch mit c einen Factor gemein, können auch nicht durch $1-\varepsilon$ theilbar sein, wenn nicht a, b, c

zugleich durch $1-\varepsilon$ theilbar sind: daher haben jene auch keinen Factor mit der dritten gemein.

III. Aber auch der umgekehrte Weg wird offen stehen. Wir haben gesehen, dass eine der Grössen durch $1-\varepsilon$ theilbar ist: dies mag c sein. Da man statt a auch $a\varepsilon$ oder $a\varepsilon\varepsilon$ substituiren kann, und ebenso statt b auch $b\varepsilon$ oder $b\varepsilon\varepsilon$, so dürfen wir voraussetzen, dass a entweder $\equiv 1$ oder $\equiv -1$ sein wird; wir werden das erstere voraussetzen, da im andern Fall $b\equiv 1$ sein würde und nur mit a vertauscht zu werden brauchte. Wir setzen demnach

$$\begin{aligned} a &= 1+3\alpha \\ b &= -1+3\beta \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{a\varepsilon+b\varepsilon\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon\varepsilon} &= 1+(\varepsilon\varepsilon-\varepsilon)(\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon\varepsilon) &= A \\ \frac{a\varepsilon\varepsilon+b\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon\varepsilon} &= -1+(\varepsilon\varepsilon-\varepsilon)(\alpha\varepsilon\varepsilon+\beta\varepsilon) &= B \\ \frac{a+b}{\varepsilon-\varepsilon\varepsilon} &= (\varepsilon\varepsilon-\varepsilon)(\alpha+\beta) &= C \end{aligned}$$

wo $A+B+C=0$ wird, und $ABC = \frac{a^3+b^3}{(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)^3} = \left(\frac{c}{\varepsilon\varepsilon-\varepsilon}\right)^3$

Da hier

$$\begin{aligned} a &= -\varepsilon A+\varepsilon\varepsilon B \\ b &= \varepsilon\varepsilon A-\varepsilon B \end{aligned}$$

so können A und B keinen Factor gemein haben, weil ein solcher sonst auch gemeinschaftlicher Factor von a und b sein würde. Wegen $A+B+C=0$ kann folglich auch C keinen Factor weder mit A noch mit B gemein haben. Hieraus folgt leicht, dass A und B und mithin auch C Cuben sind. Denn $\left(\frac{c}{\varepsilon\varepsilon-\varepsilon}\right)^3$ wird durch $\varepsilon-\varepsilon\varepsilon$, folglich auch durch $(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)^3$ theilbar sein oder $\alpha+\beta$ durch 3, daher wird $A\equiv 1$, $B\equiv -1$ (mod. 3).

Setzen wir nun

$$\begin{aligned} A &= a'^3 \\ B &= b'^3 \\ C &= c'^3 \end{aligned}$$

so haben wir aus der Auflösung der Gleichung $x^3+y^3+z^3=0$

$$x = a$$
$$y = b$$
$$z = c$$

eine andere abgeleitet

$$x = a'$$
$$y = b'$$
$$z = c'$$
$$\text{wo } a'^3 b'^3 c'^3 = \frac{c^3}{(\varepsilon\varepsilon - \varepsilon)^3}$$

wo folglich c' den Factor $1-\varepsilon$ einmal weniger enthalten wird, als c. Dies ist aber absurd, wenn c nur durch eine bestimmte Potenz von $1-\varepsilon$ theilbar, d. i. wenn c von 0 verschieden ist. Denn durch Fortsetzung dieser Operationen würde man sonst am Ende auf eine Auflösung kommen, wo z gar nicht durch $1-\varepsilon$ theilbar wäre gegen (I).

Einen ähnlichen Weg kann man für die 5^{ten} Potenzen nehmen. Ist nämlich $a^5+b^5+c^5 = 0$, so setzt man $b+c = \alpha$, $c+a = \beta$, $a+b = \gamma$, so wird

$$0 = (2a)^5+(2b)^5+(2c)^5 = (\beta+\gamma-\alpha)^5+(\gamma+\alpha-\beta)^5+(\alpha+\beta-\gamma)^5$$
$$= (\alpha+\beta+\gamma)^5 - 80\alpha\beta\gamma(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)$$

Es kann aber nicht $(\alpha+\beta+\gamma)^5 = 80\alpha\beta\gamma(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)$ werden, ohne dass eine der Zahlen α, β, γ durch $1-\varepsilon$ theilbar sei. Denn wären sie alle nicht theilbar, so müsste sowohl $\alpha+\beta+\gamma$ als $\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma$ durch $1-\varepsilon$ theilbar sein, folglich auch $2(\alpha\alpha+\beta\beta+\gamma\gamma)+2(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma) = (2\alpha+\beta)^2+3\beta\beta$, was unmöglich ist.

Man kann dies auch so darstellen. Ist $a^5+b^5+c^5 = 0$, so wird

$$4(a+b+c)^5 = 5(b+c)(c+a)(a+b)[(a+2b+3c)^2+3(a+c)^2-8(a+b+c)c]$$
$$= 5(b+c)(c+a)(a+b)[(b-c)^2+3(b+c)^2+4(a+b+c)a]$$
$$4(a+b+c)^5+5abc[(b-c)^2+3(b+c)^2] = 5(a+b+c)\{\ldots\}$$

Uebrigens würde der Beweis dem vorigen sehr ähnlich.

Versucht man aber denselben Gang bei den siebenten Potenzen, so gelingt es nicht zu beweisen, dass bei einer gegebenen Auflösung

$$a^7+b^7+c^7 = 0$$

nothwendig eine der Grössen a, b, c durch 7 theilbar sein müsse. Es folgt nemlich nur

$$(\alpha+\beta+\gamma)^7 = 5\alpha\beta\gamma\{3(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)+10(\alpha\alpha\beta\beta+\alpha\alpha\gamma\gamma+\beta\beta\gamma\gamma)\}$$

welches bestehen kann, ohne dass α, β, γ durch $1-\varepsilon$ theilbar wäre.

Hoffentlich wird sich indessen dies in Zukunft aus der Natur der Determinanten und der Einheitszahlen ableiten lassen.

[II.]

BESTIMMUNG DER NÄCHSTEN GANZEN ZAHL.

Es sei $\varepsilon^3 = 1$, $m = a+b\varepsilon+c\varepsilon\varepsilon$

$$2a-b-c = A+\alpha$$
$$2b-c-a = B+\beta$$
$$2c-a-b = C+\gamma$$

wo A, B, C ganze Zahlen; α, β, γ positive echte Brüche sind. Man hat dann

$$A+B+C+\alpha+\beta+\gamma = 0$$

also drei Fälle zu unterscheiden:

I. $\alpha+\beta+\gamma = 0$, folglich $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$

1, $A \equiv B \equiv C \pmod{3}$. Hier ist m selbst eine ganze Zahl.
2, $A-B \equiv B-C \equiv C-A \equiv \pm 1 \pmod{3}$. Hier ist $m \pm \frac{\varepsilon-\varepsilon\varepsilon}{3}.\varepsilon^n$ eine ganze Zahl.

II. $\alpha+\beta+\gamma = 1$.

Hier ist $A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+1$
$A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+\varepsilon$
$A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+\varepsilon\varepsilon$

jedes durch $1-\varepsilon$ theilbar, und eine dieser Zahlen durch 3. Der Quotient oder

$$m+\frac{\varepsilon^n-\alpha-\beta\varepsilon-\gamma\varepsilon\varepsilon}{3}$$

die gesuchte ganze Zahl.

III. $\alpha+\beta+\gamma=2$

$$\text{Hier sind}\quad \begin{array}{l} A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon\varepsilon \\ A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+\varepsilon\varepsilon+1 \\ A+B\varepsilon+C\varepsilon\varepsilon+1+\varepsilon \end{array}$$

durch $1-\varepsilon$ und eine dieser Zahlen durch 3 theilbar. Der Quotient, oder

$$m+\frac{\varepsilon^n(\varepsilon+\varepsilon\varepsilon)-\alpha-\beta\varepsilon-\gamma\varepsilon\varepsilon}{3}$$

ist die gesuchte ganze Zahl.

In allen drei Fällen hat der Rest die Form

$$x+y\varepsilon+z\varepsilon\varepsilon$$

so dass x, y, z ohne Rücksicht auf das Zeichen kleiner als $\frac{1}{3}$ und $x+y+z=0$ wird. Dadurch wird aber nothwendig

$$xx+yy+zz = 2xx-2yz = 2yy-2xz = 2zz-2xy < \tfrac{2}{3}$$

weil von den drei Grössen x, y, z nothwendig zwei einerlei Zeichen haben. Folglich ist der Determinant des Restes

$$= \tfrac{3}{2}(xx+yy+zz) < \tfrac{1}{3} \qquad \text{Q. E. D.}$$

Die Bestimmung der nächsten ganzen Zahl geschieht *bequemer* auf folgende Art. Es sei vorgegeben $a+b\varepsilon+c\varepsilon\varepsilon=m$, man setze

$$\begin{aligned} b-a &= C+\gamma \\ c-b &= A+\alpha \\ a-c &= B+\beta \end{aligned}$$

wo A, B, C die nächst kleinern ganzen Zahlen; α, β, γ positive Brüche sind. Hier sind drei Fälle zu unterscheiden:

I. $\alpha+\beta+\gamma=0$, so ist m selbst ganze Zahl

II. $\alpha+\beta+\gamma=1$, so ist die nächste ganze Zahl

$$\begin{array}{lll} B+(B+C)\varepsilon & & \text{wenn } \alpha \text{ der grösste Bruch ist.} \\ & C\varepsilon+(A+C)\varepsilon\varepsilon & \qquad\ \ \beta \\ A+B & \quad +A\varepsilon\varepsilon & \qquad\ \ \gamma \end{array}$$

III. $\alpha+\beta+\gamma=2$, so ist die nächste ganze Zahl

$$\begin{array}{lll} B+1+(B+C+2)\varepsilon & & \text{wenn } \alpha \text{ der kleinste Bruch ist.} \\ & (C+1)\varepsilon+(A+C+2)\varepsilon\varepsilon & \qquad\ \ \beta \\ A+B+2 & \quad +(A+1)\varepsilon\varepsilon & \qquad\ \ \gamma \end{array}$$

In II, 1 ist der Rest $\beta+(\beta+\gamma)\varepsilon$, dessen Determinant

$$= \beta\beta+\beta\gamma+\gamma\gamma = \tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{6}[(\alpha-\beta)(1+3\beta)+(\alpha-\gamma)(1+3\gamma)]$$

Noch einfacher so:

Man ordne die Brüche $a-[a]$, $b-[b]$, $c-[c]$ nach ihrer Grösse: so heissen sie der Reihe nach p, q, r. Sind alle drei gleich gross, so ist m eine ganze Zahl. Sind sie aber ungleich, so sei t ein beliebiger Bruch zwischen

$$\begin{array}{lll} p \text{ und } q, & \text{jenachdem} & q-p \text{ am grössten ist} \\ q \text{ und } r & & r-q \\ r \text{ und } 1+p & & 1+p-r \end{array}$$

Sodann ist

$$[a-t]+[b-t]\varepsilon+[c-t]\varepsilon\varepsilon$$

die nächste ganze Zahl.

[III.]

Es sei $\varepsilon^5 = 1$

$$\begin{aligned} a+b\varepsilon\ +c\varepsilon\varepsilon\ +d\varepsilon^3\ +e\varepsilon^4\ &= q' \\ a+b\varepsilon^{-1}+c\varepsilon^{-2}+d\varepsilon^{-3}+e\varepsilon^{-4} &= q'''' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-e)^2+(e-a)^2 &= 2p' \\ (a-c)^2+(b-d)^2+(c-e)^2+(d-a)^2+(e-b)^2 &= 2p'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'q'''' &= -p'\varepsilon-p''\varepsilon\varepsilon-p''\varepsilon^3-p'\varepsilon^4 = P' \\ q''q''' &= -p'\varepsilon\varepsilon-p''\varepsilon^4-p''\varepsilon-p'\varepsilon^3 = P'' \end{aligned}$$

Determinant $= P'P'' = -p'p'+3p'p''-p''p''$

Mensura $= 2p'+2p'' = 2P'+2P''$

$$= 5(aa+bb+cc+dd+ee)-(a+b+c+d+e)^2$$

Multiplicando per $1-\varepsilon$ fit mensura nova $= 8p'$

Höchste Mensur $= 2\left(\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}+\frac{\sin 36^\circ}{\sin 72^\circ}\right)\sqrt{D} = 4{,}472\sqrt{D}$

Modulus $= 1-\varepsilon$.

$$\begin{aligned} 1-\varepsilon &= x \\ \varepsilon &= 1-x \\ \varepsilon\varepsilon &= 1-2x+xx \\ \varepsilon^3 &= 1-3x+3xx-x^3 \\ \varepsilon^4 &= 1-4x+6xx-4x^3+x^4 \\ &= -4+6x-4xx+x^3 \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} \frac{1-\varepsilon^n}{1-\varepsilon} &\equiv n \text{ mod. } (1-\varepsilon) \\ \varepsilon^n &\equiv 1-nx \text{ mod. } (1-\varepsilon)^2 \\ \left(\frac{\varepsilon+\varepsilon^4}{\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^3}\right)^n &\equiv 1+nxx \text{ mod. } (1-\varepsilon)^3 \end{aligned}$$

Also eine Zahl, welche $\equiv 1$ mod. $(1-\varepsilon)^3$ kann *nur* dann eine Einzahl sein, wenn sie zugleich $\equiv 1$ (mod. 5).

[IV.]

EINIGES ÜBER DIE MENSUR DER ZAHLEN.

Es sei $\varepsilon^n = 1$, n Primzahl

$$\begin{aligned} m &= a+a'\varepsilon+a''\varepsilon\varepsilon+a'''\varepsilon^3+\ldots+a^{(n-1)}\varepsilon^{n-1} = f\varepsilon \\ D &= f\varepsilon.f\varepsilon\varepsilon.f\varepsilon^3\ldots f\varepsilon^{n-1} \\ f\varepsilon.f\varepsilon^{n-1} &= -b'(\varepsilon+\varepsilon^{n-1})-b''(\varepsilon^2+\varepsilon^{-2})-b'''(\varepsilon^3+\varepsilon^{-3})\ldots \end{aligned}$$

so ist

$$\begin{aligned} 2b' &= (a-a')^2+(a'-a'')^2+(a''-a''')^2+ \text{ etc.} \\ 2b'' &= (a-a'')^2+(a'-a''')^2+(a''-a'''')^2+ \text{ etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

hier sind also $b', b'', b'''\ldots$ lauter positive Grössen; sie heissen *Partialmensuren* von m, so wie ihre Summe

$$b'+b''+b'''+\text{ etc.} = n(aa+a'a'+a''a''+\ldots)-(a+a'+a''+\text{ etc.})^2$$

die *Generalmensur*. Setzt man

$$f\varepsilon.f\varepsilon^{n-1} = c',\quad f\varepsilon\varepsilon.f\varepsilon^{n-2} = c'' \text{ etc.}$$

so ist

$$c'+c''+c'''+\text{ etc.}+c^{\frac{1}{2}(n-1)} = b'+b''+b'''+\text{ etc.}+b^{\frac{1}{2}(n-1)}$$

$$c'(\varepsilon+\varepsilon^{n-1})+c''(\varepsilon\varepsilon+\varepsilon^{n-2})+c'''(\varepsilon^3+\varepsilon^{n-3})+\text{etc.} = 2(b'+b''+b'''+\text{etc.}+b^{\frac{1}{2}(n-1)})-nb'$$

$$c'(2-\varepsilon-\varepsilon^{n-1})+c''(2-\varepsilon\varepsilon-\varepsilon^{n-2})+c'''(2-\varepsilon^3-\varepsilon^{n-3})+\text{ etc.} = nb'$$

$$b' > \frac{n-1}{2n}(nD)^{\frac{2}{n-1}},\quad b'+b''+b'''+\text{ etc.} > \frac{n-1}{2}.D^{\frac{2}{n-1}}$$

Ist allgemein

$$f\varepsilon.f\varepsilon^{n-1} = A+A'\varepsilon+A''\varepsilon\varepsilon+A'''\varepsilon^3+\ldots$$

so ist die Generalmensur $\triangle = -A-A'-A''-\text{ etc.}+nA$

Mensur von $(1+\varepsilon)f\varepsilon \ldots \triangle' = 4\triangle-2n(A-A') = 4\triangle-2nb'$

Ist $a+a'+a''+\ldots = 0$, so ist $\triangle = n(aa+a'a'+a''a''+\text{etc.})$

und ist $A+A'+A''+\ldots = 0$, so ist $\triangle = nA$, $\triangle' = n(2A+2A')$

Ist also einer der Coëfficienten A', A'' etc. negativ und absolut grösser als $\frac{1}{2}A$, so lässt sich die Mensur salvo determinante herabbringen.

[V.]

Sollte sich bestätigen, dass jede Einheitszahl bloss aus Factoren von der Form

$$\frac{\varepsilon^\alpha - \varepsilon^\beta}{\varepsilon^\gamma - \varepsilon^\delta}$$

zusammengesetzt wäre, so würde folgender Satz bewiesen sein:

Ist $f(\varepsilon)$ *eine Einheitszahl, so ist*

$$\frac{f(\varepsilon)}{f(\varepsilon^{-1})} = \varepsilon^n$$

Auch ohne *jenen* Satz *vorauszusetzen*, ist der Schlusssatz leicht zu beweisen. Es sei

$$\frac{f\varepsilon}{f\varepsilon^{-1}} = F\varepsilon$$

so ist

$$F\varepsilon \,.\, F\varepsilon^{-1} = 1$$

woraus mit Hülfe der Lehre von der Mensur leicht gefolgert wird, dass

$$F\varepsilon = \pm \varepsilon^n$$

Das untere Zeichen ist aber unmöglich, weil sonst $f\varepsilon$ durch $1-\varepsilon$ theilbar sein müsste.

Dass der Determinant einer von 0 verschiedenen Zahl nicht $= 0$ sein könne, lässt sich leicht beweisen. Wenn der Determinant durch m theilbar ist, so ist die Zahl selbst durch $1-\varepsilon$ theilbar; folglich wenn der Determinant durch m^{m-1} theilbar ist, muss die Zahl selbst durch m theilbar sein. Welches absurd ist, da beim Det. 0 die Zahl erst salvo Det. so oft durch m dividirt werden könnte, bis sie nicht mehr theilbar wäre. Der erste Satz aber erhellt so. Es sei die vorgegebene Zahl

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon\varepsilon + \text{etc.} \equiv a + b + c \,.\,.\, \text{mod. } 1 - \varepsilon$$

also Determinans $\equiv (a + b + c \,.\,.)^{m-1}$ mod. $1 + \varepsilon$.

[VI.]

Es sei $\varepsilon^n = 1$

$$f\varepsilon = a + b\varepsilon + c\varepsilon\varepsilon + d\varepsilon^3 + \text{etc.}$$
$$m = \text{Determinans dieser Zahl}$$
$$\frac{m}{f\varepsilon} = f\varepsilon\varepsilon \,.\, f\varepsilon^3 \ldots f\varepsilon^{n-1} = A + B\varepsilon + C\varepsilon\varepsilon + \text{etc.} = F\varepsilon$$

Der Zahl $f\varepsilon$ entspricht eine Wurzel der Congruenz $x^n \equiv 1$ (mod. m.) Es sei dieselbe r. Man hat

$$\begin{aligned} nA &= F1 + F\varepsilon + F\varepsilon\varepsilon + \,.\,. \\ nB &= F1 + \varepsilon^{-1}F\varepsilon + \varepsilon^{-2}F\varepsilon\varepsilon + \,.\,. \\ nC &= F1 + \varepsilon^{-2}F\varepsilon + \varepsilon^{-4}F\varepsilon\varepsilon + \,.\,. \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

also, da $F\varepsilon\varepsilon$, $F\varepsilon^3$, $F\varepsilon^4$ etc. durch $f\varepsilon$ theilbar sind,

$$\begin{aligned} &nA - F1 - \varepsilon(nB - F1) \\ &nA - F1 - \varepsilon\varepsilon(nC - F1) \\ &nA - F1 - \varepsilon^3(nD - F1) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

alle durch $f\varepsilon$ theilbar, oder auch

$$\begin{aligned} &n(A - B) - \varepsilon n(B - C) \\ &n(B - C) - \varepsilon n(C - D) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

durch $f\varepsilon$ theilbar; folglich [wenn $f\varepsilon$ durch $1-\varepsilon$, und $F\varepsilon$ durch eine ganze reelle Zahl nicht theilbar ist]

$$\varepsilon \equiv \frac{A-B}{B-C} \equiv \frac{B-C}{C-D} \equiv \frac{C-D}{D-E} \text{ etc. (mod. } f\varepsilon)$$

BEMERKUNGEN.

Die hier unter der gemeinsamen Ueberschrift, zur Theorie der complexen Zahlen, zusammengestellten Untersuchungen bilden zerstreute Notizen in der Handschrift. Sie enthalten die wesentlichen Momente des Beweises vom Fermatschen Satze für die dritte und fünfte Potenz. Die aus dritten Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen sind in unvollständigen hier nicht abgedruckten Aufzeichnungen sowohl mit Hülfe der Theorie der binären quadratischen Formen, als auch der Kreistheilung untersucht. Bei Gelegenheit der Anwendung der letztern und zwar während der Ausarbeitung der Abhandlung *Disquisitionum circa aequationes puras ulterior evolutio* ist noch die ternäre cubische Form aufgestellt, in welche $27\frac{x^n-1}{x-1}$ für eine Primzahl $n \equiv 1 \text{ mod. } 3$ verwandelt werden kann, und zugleich die Theorie der Composition der mit jener verwandten Form $X^3 + mY^3 + mmZ^3 - 3mXYZ$ entwickelt.

Die in den Untersuchungen des Bruchstück [I] vorausgesetzte Eigenschaft der aus dritten Wurzeln der Einheit gebildeten ganzen Zahlen, dass jede nur auf Eine Weise in Primfactoren zerlegt werden kann, ergibt sich aus dem Euclidischen Verfahren, die gemeinsamen Theiler zweier Zahlen zu bestimmen, wenn dabei der unter [II] abgeleitete Satz über die nächste ganze Zahl für irgend eine vorgegebene Bruchzahl in Anwendung gebracht wird.

Dass dieselbe Fundamentaleigenschaft auch den aus fünften Wurzeln der Einheit zusammengesetzten Zahlen zukommt, folgt daraus, dass der nach einer ganz analogen Regel wie in [II] gebildete Bruchrest entweder von m oder doch von m multiplicirt in eine geeignete Einheitszahl E so beschaffen ist, dass er durch Subtraction von der vorgegebenen Zahl mE eine ganze Zahl entstehen lässt und dass sein Determinant die Einheit nicht übertrifft. Die Einheitszahlen lassen sich aber, wie in [III] angedeutet, aus der Theorie der binären quadratischen Formen vom Determinant 5 in Verbindung mit der Zerlegung irgend einer reellen Primzahl in vier Factoren (z. B. $11 = \text{Det.}(2+\varepsilon)$) ableiten, nemlich als Producte der Potenzen von ε und $1+\varepsilon$.

Schering.

TAFEL

DES QUADRATISCHEN CHARACTERS

DER PRIMZAHLEN VON 2 BIS 997 ALS RESTE

IN BEZUG

AUF DIE PRIMZAHLEN VON 3 BIS 503 ALS THEILER.

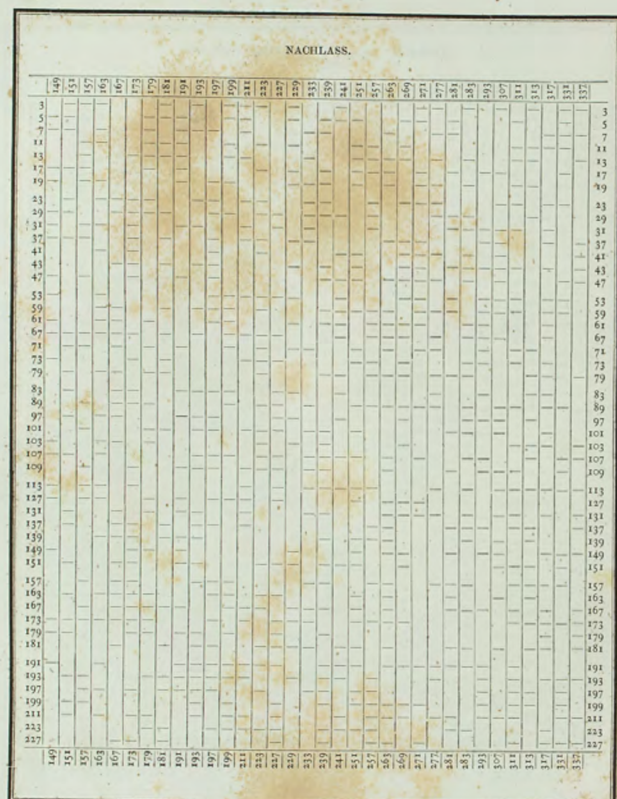
NACHLASS.

	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
3																																		
5																																		
7																																		
11																																		
13																																		
17																																		
19																																		
23																																		
29																																		
31																																		
37																																		
41																																		
43																																		
47																																		
53																																		
59																																		
61																																		
67																																		
71																																		
73																																		
79																																		
83																																		
89																																		
97																																		
101																																		
103																																		
107																																		
109																																		
113																																		
127																																		
131																																		
137																																		
139																																		
149																																		
151																																		
157																																		
163																																		
167																																		
173																																		
179																																		
181																																		
191																																		
193																																		
197																																		
199																																		
211																																		
223																																		
227																																		

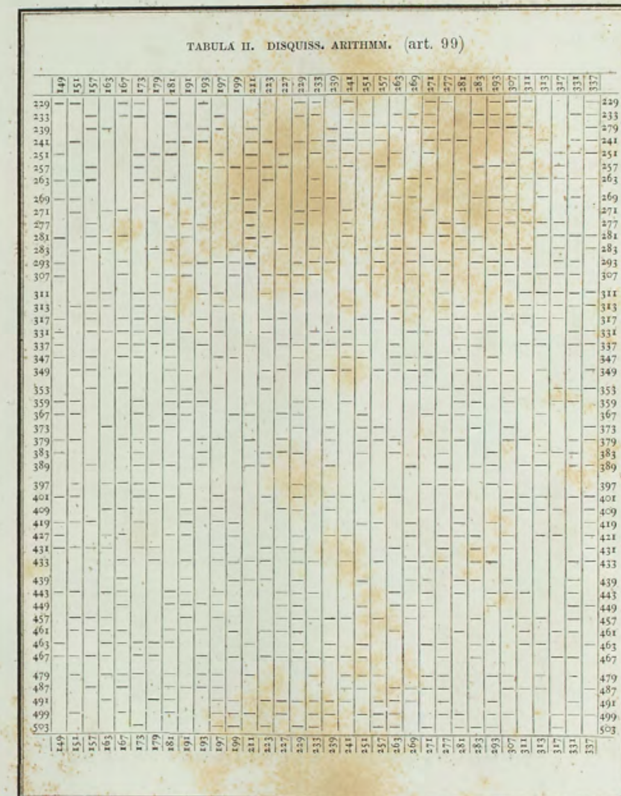
TABULA II. DISQUISS. ARITHMM. (art. 99)

	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139
229																																		
233																																		
239																																		
241																																		
251																																		
257																																		
263																																		
269																																		
271																																		
277																																		
281																																		
283																																		
293																																		
307																																		
311																																		
313																																		
317																																		
331																																		
337																																		
347																																		
349																																		
353																																		
359																																		
367																																		
373																																		
379																																		
383																																		
389																																		
397																																		
401																																		
409																																		
419																																		
421																																		
431																																		
433																																		
439																																		
443																																		
449																																		
457																																		
461																																		
463																																		
467																																		
479																																		
487																																		
491																																		
499																																		
503																																		

NACHLASS.



TABULA II. DISQUISS. ARITHMM. (art. 99)



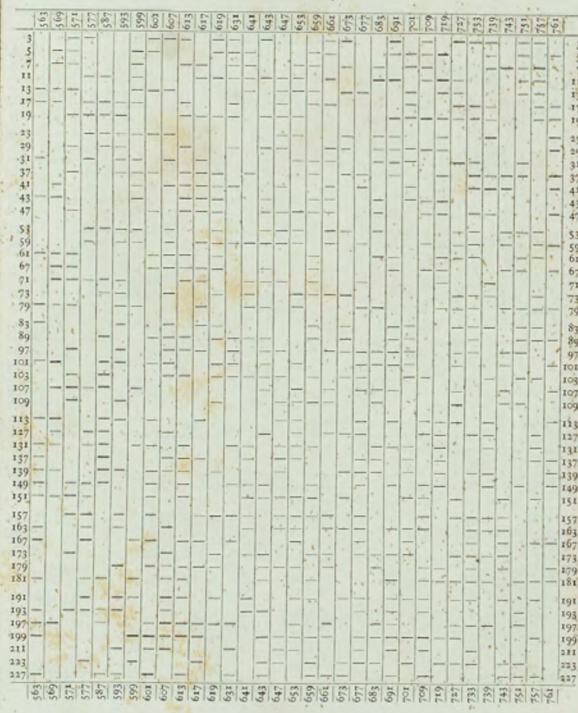
NACHLASS.

	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	
3																																			3
5																																			5
7																																			7
11																																			11
13																																			13
17																																			17
19																																			19
23																																			23
29																																			29
31																																			31
37																																			37
41																																			41
43																																			43
47																																			47
53																																			53
59																																			59
61																																			61
67																																			67
71																																			71
73																																			73
79																																			79
83																																			83
89																																			89
97																																			97
101																																			101
103																																			103
107																																			107
109																																			109
113																																			113
127																																			127
131																																			131
137																																			137
139																																			139
149																																			149
151																																			151
157																																			157
163																																			163
167																																			167
173																																			173
179																																			179
181																																			181
191																																			191
193																																			193
197																																			197
199																																			199
211																																			211
223																																			223
227																																			227
	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	

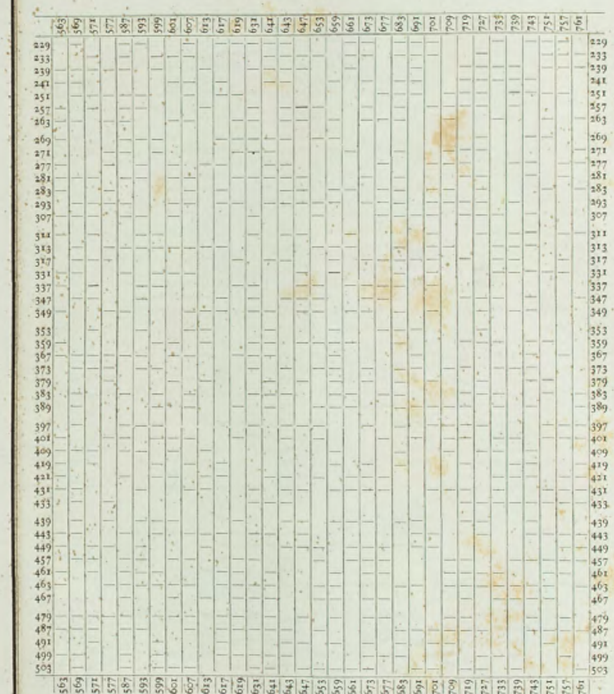
TABULA II. DISQUISS. ARITHMM. (art. 99)

	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	
229																																			229
233																																			233
239																																			239
241																																			241
251																																			251
257																																			257
263																																			263
269																																			269
271																																			271
277																																			277
281																																			281
283																																			283
293																																			293
307																																			307
311																																			311
313																																			313
317																																			317
331																																			331
337																																			337
347																																			347
349																																			349
353																																			353
359																																			359
367																																			367
373																																			373
379																																			379
383																																			383
389																																			389
397																																			397
401																																			401
409																																			409
419																																			419
421																																			421
431																																			431
433																																			433
439																																			439
443																																			443
449																																			449
457																																			457
461																																			461
463																																			463
467																																			467
479																																			479
487																																			487
491																																			491
499																																			499
503																																			503
	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	

NACHLASS.



TABULA II. DISQUISS. ARITHMM. (art. 99)



NACHLASS.

	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	
3																																		3
5																																		5
7																																		7
11																																		11
13																																		13
17																																		17
19																																		19
23																																		23
29																																		29
31																																		31
37																																		37
41																																		41
43																																		43
47																																		47
53																																		53
59																																		59
61																																		61
67																																		67
71																																		71
73																																		73
79																																		79
83																																		83
89																																		89
97																																		97
101																																		101
103																																		103
107																																		107
109																																		109
113																																		113
127																																		127
131																																		131
137																																		137
139																																		139
149																																		149
151																																		151
157																																		157
163																																		163
167																																		167
173																																		173
179																																		179
181																																		181
191																																		191
193																																		193
197																																		197
199																																		199
211																																		211
223																																		223
227																																		227
	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	

TABULA II. DISQUISS. ARITHMM. (art. 99)

	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	
229																																		229
233																																		233
239																																		239
241																																		241
251																																		251
257																																		257
263																																		263
269																																		269
271																																		271
277																																		277
281																																		281
283																																		283
293																																		293
307																																		307
311																																		311
313																																		313
317																																		317
331																																		331
337																																		337
347																																		347
349																																		349
353																																		353
359																																		359
367																																		367
373																																		373
379																																		379
383																																		383
389																																		389
397																																		397
401																																		401
409																																		409
419																																		419
421																																		421
431																																		431
433																																		433
439																																		439
443																																		443
449																																		449
457																																		457
461																																		461
463																																		463
467																																		467
479																																		479
487																																		487
491																																		491
499																																		499
503																																		503
	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	

T A F E L

ZUR VERWANDLUNG

GEMEINER BRÜCHE MIT NENNERN AUS DEM ERSTEN TAUSEND

IN DECIMALBRÜCHE.

NACHLASS.

3 (1)..6; (0)..3

7 (0)..428571

9 (1)..2; (2)..4; (3)..8; (4)..7; (5)..5; (0)..1

11 (1)..81; (2)..63; (3)..27; (4)..54; (0)..90

13 (1)..615384; (0)..769230

17 (0)..5882352941 176470

19 (0)..5263157894 73684210

23 (0)..4347826086 9565217391 30

27 (1)..740; (2)..481; (3)..962; (4)..925; (5)..851; (0)..370

29 (0)..3448275862 0689655172 41379310

31 (1)..4838709677 41935; (0)..3225806451 61290

37 (1)..351; (2)..756; (3)..783; (4)..918; (5)..594; (6)..972; (7)..864; (8)..324; (9)..621;
(10)..108; (11)..540; (0)..270

41 (1)..46341; (2)..78048; (3)..68292; (4)..09756; (5)..58536; (6)..51219; (7)..07317; (0)..24390

43 (1)..5116279069 7674418604 6; (0)..2325581395 3488372093 0

47 (1)..2127659574 4680851063 8297872340 4255319148 936170

49 (0)..2040816326 5306122448 9795918367 3469387755 10

53 (1)..9056603773 584; (2)..5471698113 207; (3)..2264150943 396; (0)..1886792452 830

59 (0)..1694915254 2372881355 9322033898 3050847457 6271186440 67796610

61 (0)..1639344262 2950819672 1311475409 8360655737 7049180327 8688524590

67 (1)..7910447761 1940298507 4626865671 641; (0)..1492537313 4328358208 9552238805 970

71 (1)..7323943661 9718309859 1549295774 64788; (0)..1408450704 2253521126 7605633802 81690

73 (1)..68493150; (2)..42465753; (3)..12328767; (4)..61643835; (5)..08219178; (6)..41095890
(7)..05479452; (8)..27397260; (0)..13698630

79 (1)..6708860759 493; (2)..4556962025 316; (3)..2151898734 177; (4)..2405063291 139;
(5)..9746835443 037; (0)..1265822784 810

81 (1)..358024691; (2)..938271604; (3)..320987654; (4)..530864197; (5)..839506172; (0)..123456790

83 (1)..0240963855 4216867469 8795180722 8915662650 6;
(0)..1204819277 1084337349 3975903614 4578313253 0

89 (1)..3707865168 5393258426 9662921348 3146067415 7303;
(0)..1123595505 6179775280 8988764044 9438202247 1910

97 (0)..1030927835 0515463917 5257731958 7628865979 3814432989 6907216494 8453608247 4226804123
7113402061 855670

101 (1)..1980; (2)..3960; (3)..7920; (4)..5841; (5)..1683; (6)..3366; (7)..6732; (8)..3465; (9)..6930;
(10)..3861; (11)..7722; (12)..5445; (13)..0891; (14)..1782; (15)..3564; (16)..7128;
(17)..4257; (18)..8514; (19)..7029; (20)..4059; (21)..8118; (22)..6237; (23)..2475;
(24)..4950; (0)..0990

103 (1)..5825242718 4466019417 4757281553 3980; (2)..4951456310 6796116504 8543689320 3883
(0)..0970873786 4077669902 9126213592 2330

VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

107 (1)..8878504672 8971962616 8224299065 4205607476 6355140186 915
(0)..0934579439 2523364485 9813084112 1495327102 8037383177 570

109 (0)..0917431192 6605504587 1559633027 5229357798 1651376146 7889908256 8807339449 5412844036
6972477064 2201834862 38532110

113 (0)..0884955752 2123893805 3097345132 7433628318 5840707964 6017699115 0442477876 1061946902
6548672566 3716814159 2920353982 30

121 (1)..8925619834 7107438016 52; (2)..2396694214 8760330578 51; (3)..3884297520 6611570247 93;
(4)..5950413223 1404958677 68; (0)..0826446280 9917355371 90;

127 (1)..3464566929 1338582677 1653543307 0866141732 28; (2)..7244094488 1889763779 5275590551
1811023622 041 (0)..0787401574 8031496062 9921259842 5196850393 70

131 (0)..0763358778 6259541984 7328244274 8091603053 4351145038 1679389312 9770992366 4122137404
5801526717 5572519083 9694656488 5496183206 1068702290

137 (1)..87591240; (2)..51094890; (3)..13138686; (4)..57664233; (5)..91970802; (6)..03649635;
(7)..43795620; (8)..25547445; (9)..06569343; (10)..78832116; (11)..45985401; (12)..51824817;
(13)..21897810; (14)..62773722; (15)..53284671; (16)..39416058; (0)..07299270

139 (1)..6187050359 7122302158 2733812949 6402877697 841726; (2)..9208633093 5251798561 1510791366
9064748201 438848; (0)..0719424460 4316546762 5899280575 5395683453 237410

149 (0)..0671140939 5973154362 4161073825 5033557046 9798657718 1208053691 2751677852 3489932885
9060402684 5637583892 6174496644 2953020134 2281879194 6308724832 21476510

151 (1)..5496688741 7218543046 3576158940 3973509933 7748344370 8609271523 1788079470 19867
(0)..0662251655 6291390728 4768211920 5298013245 0331125827 8145695364 2384105960 26490

157 (1)..1464968152 8662420382 1656050955 4140127388 5350318471 3375796178 3439490445 85987261
(0)..0636942675 1592356687 8980891719 7452229299 3630573248 4076433121 0191082802 54777070

163 (1)..2944785276 0736196319 0184049079 7546012269 9386503067 4846625766 8711656441 7177914110 4
(0)..0613496932 5153374233 1288343558 2822085889 5705521472 3926380368 0981595092 0245398773 0

167 (0)..0598802395 2095808383 2335329341 3173652694 6107784431 1377245508 9820359281 4371257485
0299401197 6047904191 6167664670 6586826347 3053892215 5688622754 4910179640 7185628742
514970

169 (1)..1065088757 3964497041 4201183431 9526627218 9349112426 0355029585 7988165680 47337278
(0)..0591715976 3313609467 4556213017 7514792899 4082840236 6863905325 4437869822 48520710

173 (1)..7398843930 6358381502 8901734104 0462427745 664; (2)..6705202312 1387283236 9942196531
7919075144 508; (3)..9826589595 3757225433 5260115606 9364161849 710; (0)..0578034682
0809248554 9132947976 8786127167 630

179 (0)..0558659217 8770949720 6703910614 5251396648 0446927374 3016759776 5363128491 6201117318
4357541899 4413407821 2290502793 2960893854 7486033519 5530726256 9832402234 6368715083
7988826815 64245810

181 (0)..0552486187 8453038674 0331491712 7071823204 4198895027 6243093922 6519337016 5745856353
5911602209 9447513812 1546961325 9668508287 2928176795 5801104972 3756906077 3480662983
4254143646 4088397790

191 (1)..2198952879 5811518324 6073298429 3193717277 4869109947 6439790575 9162303664 9214659685 8638743455 49738; (0)..0523560209 4240837696 3350785340 3141361256 5445026178 0104712041 8848167539 2670157068 0628272251 30890

193 (0)..0518134715 0259067357 5129533678 7564766839 3782383419 6891191709 8445595854 9222797927 4611398963 7305699481 8652849740 9326424870 4663212435 2331606217 6165803108 8082901554 4041450777 2020725388 6010362694 30

197 (1)..7055837563 4517766497 4619289340 1015228426 3959390862 9441624365 4822335025 3807106598 9847715736 04060913; (0)..0507614213 1979695431 4720812182 7411167512 6903553299 4923857868 0203045685 2791878172 5888324873 09644670

199 (1)..3819095477 3869346733 6683417085 4271356783 9195979899 4974874371 8592964824 1206030150 7537688442 211055276; (0)..0502512562 8140703517 5879396984 9246231155 7788944723 6180904522 6130653266 3316582914 5728643216 080402010

211 (1)..3317535545 0236966824 6445497630; (2)..3222748815 1658767772 5118483412; (3)..2559241706 1611374407 5829383886; (4)..7914691943 1279620853 0805687203; (5)..5402843601 8957345971 5639810426; (6)..7819905213 2701421800 9478672985; (0)..0473933649 2890995260 6635071090

223 (0)..0448430493 2735426008 9686098654 7085201793 7219730941 7040358744 3946188340 8071748878 9237668161 4349775784 7533632286 9955156950 6726457399 1031390134 5291479820 6278026905 8295964125 5605381165 9192825112 1076233183 8565022421 5246636771 30

227 (1)..1806167400 8810572687 2246696035 2422907488 9867841409 6916299559 4713656387 6651982378 8546255506 6079295154 1850220264 317; (0)..0440528634 3612334801 7621145374 4493392070 4845814977 9735682819 3832599118 9427312775 3303964757 7092511013 2158590308 370

229 (0)..0436681222 7074235807 8602620087 3362445414 8471615720 5240174672 4890829694 3231441048 0349344978 1659388646 2882096069 8689956331 8777292576 4192139737 9912663755 4585152838 4279475982 5327510917 0305676855 8951965065 5021834061 1353711790 39301310

233 (0)..0429184549 3562231759 6566523605 1502145922 7467811158 7982832618 0257510729 6137339055 7959914163 0901287553 6480686695 2789799570 8154506437 7682403433 4763948497 8540772532 1888412017 1673819742 4892703862 6609442060 0858369098 7124463519 3133047210 30

239 (1)..4644351; (2)..2552301; (3)..9330543; (4)..6569037; (5)..9916317; (6)..7071129; (7)..7489539; (8)..2133891; (9)..4686192; (10)..4016736; (11)..0585774; (12)..0502092; (13)..7573221; (14)..5062761; (15)..7196652; (16)..1882845; (17)..5899581; (18)..6485355; (19)..6987447; (20)..4560669; (21)..9623430; (22)..6820083; (23)..8702928; (24)..4602510; (25)..1087866; (26)..8075313; (27)..2635983; (28)..2259414; (29)..9079497; (30)..7782426; (31)..2384937; (32)..3472803; (33)..1548117; (0)..0418410

241 (1)..5809128630 7053941908 7136929460; (2)..1327800829 8755186721 9917012448; (3)..8589211618 2572614107 8838174273; (4)..0248962655 6016597510 3734439834; (5)..3485477178 4232365145 2282157676; (6)..8796680497 9253112033 1950207468; (7)..3153526970 9543568464 7302904564; (0)..0414937759 3360995850 6224066390

243 (1)..6748971193 4156378600 8230452; (2)..8683127572 0164609053 4979423; (3)..4403292181 0699588477 3662551; (4)..6213991769 5473251028 8065843; (5)..3909465020 5761316872 4279835; (0)..0411522633 7448559670 7818930

251 (1)..4223107569 7211155378 4860557768 9243027888 4462151394; (2)..8764940239 0438247011 9521912350 5976095617 5298804780; (3)..2908366533 8645418326 6932270916 3346613545 8167330677; (4)..2828685258 9641434262 9482071713 1474103585 6573705179; (0)..0398406374 5019920318 7250996015 9362549800 7968127490

257 (0)..0389105058 3657587548 6381322957 1984435797 6653696498 0544747081 7120622568 0933852140 0778210116 7315175097 2762645914 3968871595 3307392996 1089494163 4241245136 1867704280 1556420233 4630350194 5525291828 7937743190 6614785992 2178988326 8482490272 3735408560 3112840466 926070

263 (0)..0380228136 8821292775 6653992395 4372623574 1444866920 1520912547 5285171102 6615969581 7490494296 5779467680 6083650190 1140684410 6463878326 9961977186 3117870722 4334600760 4562737642 5855513307 9847908745 2471482889 7338403041 8250950570 3422053231 9391634980 9885931558 9353612167 30

269 (0)..0371747211 8959107806 6914498141 2639405204 4609665427 5092936802 9739776951 6728624535 3159851301 1152416356 8773234200 7434944237 9182156133 8289962825 2788104089 2193308550 1858736059 4795539033 4572490706 3197026022 3048327137 5464684014 8698884758 3643122676 5799256505 5762081784 38661710

271 (1)..22140; (2)..32841; (3)..97047; (4)..82287; (5)..93726; (6)..62361; (7)..74169; (8)..45018; (9)..70110; (10)..20664; (11)..23985; (12)..43911; (13)..63468; (14)..80811; (15)..84870; (16)..09225; (17)..55350; (18)..32103; (19)..92619; (20)..55719; (21)..34317; (22)..05904; (23)..35424; (24)..12546; (25)..75276; (26)..51660; (27)..09963; (28)..59778; (29)..58671; (30)..52029; (31)..12177; (32)..73062; (33)..38376; (34)..30258; (35)..81549; (36)..89298; (37)..35793; (38)..14760; (39)..88560; (40)..31365; (41)..88191; (42)..29151; (43)..74907; (44)..49446; (45)..96678; (46)..80073; (47)..80442; (48)..82656; (49)..95940; (50)..75645; (51)..53874; (52)..23447; (53)..39483; (0)..03690

277 (1)..8880866425 9927797833 9350180505 4151624548 7364620938 6281588447 653429602; (2)..0469314079 4223826714 8014440433 2129963898 9169675090 2527075812 274368231; (3)..7545126353 7906137184 1155234657 0397111913 3574007220 2166064981 949458483; (0)..0361010830 3249097472 9241877256 3176895306 8592057761 7328519855 595667870

281 (1)..9217081850 5338078291 81494661; (2)..7722419928 8256227758 00711743; (3)..7010676156 5836298932 38434163; (4)..8576512455 5160142348 75444839; (5)..3131672597 8647686832 74021352; (6)..9110320284 6975088967 97153024; (7)..1957295373 6654804270 46263345; (8)..5693950177 9359430604 98220640; (9)..7473309608 5409252669 03914590; (0)..0355871886 1209964412 81138790

283 (1)..1519434628 9752650176 6784452296 8197879858 6572438162 5441696113 0742049469 9646643109 5406360424 0282685512 3674911660 7773851590 1060070671 3780918727 9; (0)..0353356890 4593639575 9717314487 6325088339 2226148409 8939929328 6219081272 0848056537 1024734982 3321554770 3180212014 1342756183 7455830388 6925795053 0

289	(0)..0346020761	2456747404	8442906574	3944636678	2006920415	2249134948	0968858131	4878892733
	5640138408	3044982698	9619377162	6297577854	6712802768	1660899653	9792387543	2525951557
	0934256055	3633217993	0795847750	8650519031	1418685121	1072664359	8615916955	0173010380
	6228373702	4221453287	1972318339	10				
293	(1)..0375426621	1604095563	1399317406	1433447098	9761092150	1706484641	6382252559	7269624573
	3788395904	4368600682	5938566552	9010238907	8498293515	3583617747	440273	
	(0)..0341296928	3276450511	9453924914	6757679180	8873720136	5187713310	5802047781	5699658703
	0716723549	4880546075	0853242320	8191126279	8634812286	6894197952	218430	
307	(1)..4951140065	1465798045	6026058631	9218241042	3452768729	6416938110	7491856677	5244299674
	2671009771	9869706840	3908794788	2736156351	7915309446	2540716612	3778501628	664
	(0)..0325732899	0228013029	3159609120	5211726384	3648208469	0553745928	3387622149	8371335504
	8859934853	4201954397	3941368078	1758957654	7231270358	3061889250	8143322475	570
311	(1)..2958199356	9131832797	4276527331	1897106109	3247588424	4372990353	6977491961	4147909967
	8456591639	8713826366	5594855305	4662379421	2218649517	6848874598	0707395498	39228
	(0)..0321543408	3601286173	6334405144	6945337620	5787781350	4823151125	4019292604	5016077170
	4180064308	6816720257	2347266881	0289389067	5241157556	2700964630	2250803858	52090
313	(0)..0319488817	8913738019	1693290734	8242811501	5974440894	5686900958	4664536741	2140575079
	8722044728	4345047923	3226837060	7028753993	6102236421	7252396166	1341853035	1437699680
	5111821086	2619808306	7092651757	1884984025	5591054313	0990415335	4632587859	4249201277
	9552715654	9520766773	1629392971	2460063897	7635782747	6038338658	1469648562	30
317	(1)..2397476340	6940063091	4826498422	7129337539	4321766561	5141955835	9621451104	100946372
	(2)..0220820189	2744479495	2681388012	6182965299	6845425867	5078864353	3123028391	167192429
	(3)..5678233438	4858044164	0378548895	8990536277	6025236593	0599369085	1735015772	870662460
	(0)..0315457413	2492113564	6687697160	8832807570	9779179810	7255520504	7318611987	381703470
331	(1)..1178247734	1389728096	6767371601	2084592145	0151057401	8126888217	5226586102	7190332326
	2839879154	0785498489	4259818731					
	(2)..3595166163	1419939577	0392749244	7129909365	5589123867	0694864048	3383685890	6042296072
	5075528700	9063444108	7613293051					
	(0)..0302114803	6253776455	0453172205	4380664652	5679758308	1570996978	8519637462	2356495468
	2779466193	3534743202	4169184290					
337	(0)..0296735905	0445103857	5667655786	3501483679	5252225519	2878338278	9317507418	3976261127
	5964391691	3946587537	0919881305	6379821958	4569732937	6854599406	5281899109	7922848664
	6884272997	0326409495	5489614243	3234421364	9851632047	4727448071	2166172106	8249258160
	2373887240	3560830860	5341246290	8011869436	2017804154	3026706231	4540059347	1810089020
	7715133531	157270						
343	(0)..0291545189	5043731778	4256559766	7638483965	0145772594	7521865889	2128279883	3819241982
	5072886297	3760932944	6064139941	6909620991	2536443148	6880466472	3032069970	8454810495
	6268221574	3440233236	1526034985	4227405247	8134110787	1720116618	0758017492	7113702623
	9067055393	5860058309	0379008746	3556851311	9533527696	7930		

347	(1)..6023054755	0432276657	0605187319	8847262247	8386167146	9740634005	7636887608	0691642651
	2968299711	8155619596	5417867435	1585014409	2219020172	9106628242	0749279538	9048991354
	4668587896	253						
	(0)..0288184438	0403458213	2564841498	5590778097	9827089337	1757925072	0461095100	8645533141
	2103746397	6945244956	7723342939	4812680115	2737752161	3832853025	9365994236	3112391930
	8357348703	170						
349	(1)..3037249283	6676217765	0429799426	9340974212	0343839541	5472779369	6275071633	2378223495
	7020057306	5902578796	5616045845	272206				
	(2)..8194842406	8767908309	4555873925	5014326647	5644699140	4011461318	0515759312	3209169054
	4412607449	8567335243	5530085959	885386				
	(0)..0286532951	2893982808	0229226361	0315186246	4183381088	8252148997	1346704871	0601719197
	7077363896	8481375358	1661891117	478510				
353	(1)..7932011331	4447592067	9886685552	40;	(2)..2096317280	4532577903	6827195467	42;
	(3)..8696883852	6912181303	1161473087	81;	(4)..3512747875	3541076487	2521246458	92;
	(5)..8356940509	9150141643	0594900849	85;	(6)..3994334277	6203966005	6657223796	03;
	(7)..1841359773	3711048158	6402266288	95;	(8)..1558073654	3909348441	9263456090	65;
	(9)..3626062322	9461756373	9376770538	24;	(10)..1529745042	4929178470	2549575070	82;
	(0)..0283286118	9801699716	7138810198	30;				
359	(1)..3286908077	9944289693	5933147632	3119777158	7743732590	5292479108	6350974930	3621169916
	4345403899	7214484679	6657381615	5988857938	7186629526	4623955431	7548746518	1058485821
	7270194986	072423398						
	(0)..0278551532	0334261838	4401114206	1281337047	3537604456	8245125348	1894150417	8272980501
	3927576601	6713091922	0055710306	4066852367	6880222841	2256267409	4707520891	3649025069
	6378830083	565459610						
361	(0)..0277008310	2493074792	2437673130	1939058171	7451523545	7063711911	3573407202	2160664819
	9445983379	5013850415	5124653739	6121883656	3096952968	5872576177	2853185595	5678670360
	1108033240	9972299168	9750692520	7756232686	9806094182	8254847645	4293628808	8642659279
	7783933518	0055401662	0498614958	4487534626	0387811634	3490304709	1412742382	2714681440
	4432152963	9889196675	90					
367	(0)..0272479564	0326975476	8392370572	2070844686	6485013623	9782016348	7738419618	5286103542
	2343324250	6811989100	8174386920	9809264305	1771117166	2125340599	4550408719	3460490463
	2152588555	8583106267	0299727520	4359673024	5231607629	4277929155	3133514986	3760217983
	6512261580	3814713896	4577656675	7493188010	8991825613	0790190735	6948228882	8337874659
	4005449591	2806539509	5367847411	4441416893	732970			
373	(1)..1983914209	1152815013	4048257372	6541554959	7855227882	0375335120	6434316353	8873994638
	0697050938	3378016085	7908847184	9865951742	6273458445	0402144772	1179624664	8793565683
	6461126005	3619302949	061662					
	(0)..0268096514	7453083109	9195710455	7640750670	2412868632	7077747989	2761394101	8766756032
	1715817694	3699731903	4852546916	8900804289	5442359249	3297587131	3672922252	0107238605
	8981233243	9678284182	303630					

379	(0)..0263852242 7440633245 3825857519 7889182058 0474934036 9393139841 6886543535 6200527704
	4854881266 4907651715 0395778364 1160949868 0738786279 6833773087 0712401055 4089709762
	5329815303 4300791556 7282321899 7361477572 5593667546 1741424802 1108179419 5250659630
	6068601583 1134564643 7794722955 1451187335 0923482849 6042216358 8390501319 2612137203
	1662269129 2875989445 9102902374 6701846965 6992084432 71767810
383	(0)..0261096605 7441253263 7075718015 6657963446 4751958224 5430809399 4778067885 1174934725
	8485639686 6840731070 4960835509 1583812010 4438642297 6501305483 0287206266 3185378590
	0783289817 2323759791 1227154046 9973890339 4255874673 6292428198 4334203655 3524804177
	5456919060 0522193211 4882506527 4151436031 3315926892 9503916449 0861618798 9556135770
	2349869451 6971279373 3681462140 9921671018 2767624020 8877284595 30
389	(0)..0257069408 7403598971 7223650385 6041131105 3984575835 4755784061 6966580976 8637532133
	6760925449 8714652956 2982005141 3881748071 9794344473 0077120822 6221079691 5167095115
	6812339331 6195372750 6426735218 5089974293 0591259640 1028277634 9614395886 8894601542
	4164524421 5938303341 9023136246 7866323907 4550128534 7043701799 4858611825 1928020565
	5526992287 9177377892 0308483290 4884318766 0668380462 7249357326 47814910
397	(1)..3501259445 8438287153 6523929471 0327455919 3954659949 6221662468 5138539042 8211586901
	7632241813 602015113; (2)..5667506297 2292191435 7682619647 3551637279 5969773299 7481108312
	3425692695 2141057934 5088161209 068010075; (3)..3778337531 4861460957 1788413098 2367758186
	3979848866 4987405541 5617128463 4760705289 6725440806 045340050; (0)..0251889168 7657430730
	4785894206 5491183879 0931989924 4332493702 7707808564 2317380352 6448362720 303022670
401	(1)..7381546134 6633416458 8528678304 2394014962 5935162094 7630922693 2668329177 0573566084
	7880299251 8703241895 2618453865 3366583541 1471321695 7605985037 4064837905 2369077306
	7331670822 9426433915 2119700748 1296758104
	(0)..0249376558 6034912718 2044887780 5486284289 2768079800 4987531172 0698254364 0897755610
	9725685785 5361596009 9750623441 3965087281 7955112219 4513715710 7231920199 5012468827
	9301745635 9102244389 0274314214 4638403990
409	(1)..2542787286 0635696821 5158924205 3789731051 3447432762 8361858190 7090464547 6772616136
	9193154034 2298288508 5574572127 1393643031 7848410757 9462102689 4865525672 3716381418
	0929095354 5232273838 6308068459 6577017114 9144
	(0)..0244498777 5061124694 3765281173 5941320293 3985330073 3496332518 3374083129 5843520782
	3960880195 5990220048 8997555012 2249388753 0562347188 2640586797 0660146699 2665036674
	8166259168 7041564792 1760391198 0440097799 5110
419	(0)..0238663484 4868735083 5322195704 0572792362 7684964200 4773269689 7374701670 6443914081
	1455847255 3699284009 5465393794 7494033412 8878281622 9116945107 3985680190 9307875894
	9880668257 7565632458 2338902147 9713603818 6157517899 7613365155 4312649164 6778042959
	4272076372 3150357995 2267303102 6252983293 5560859188 5441527446 3007159904 5348062052
	5059665871 1217183770 8830548926 0143198090 6921241050 1183317422 4343675417 6610978520
	2863961813 84248210

421	(1)..2826603325 4156769596 1995249406 1757719714 9643705463 1828978622 3277909738 7173396674
	5843230403 8004750593 8242280285 0356294536 8171021377 6722090261
	(2)..2636579572 4465558194 7743467933 4916864608 0760095011 8764845605 7007125890 7363420427
	5534441805 2256532066 5083135391 9239904988 1235154394 2992874109
	(0)..0237529691 2114014251 7814726840 8551068883 6104513064 1330166270 7838479809 9762470308
	7885985748 2185273159 1448931116 3895486935 8669833729 2161520190
431	(1)..4872389791 1832946635 7308584686 7749419953 5962877030 1624129930 3944315545 2436194895
	5916473317 8654292343 3874709976 7981438515 0812064965 1972197772 6218097447 7958236658
	9327146171 6937354988 3990719257 5406032482 5986078886 31090
	(0)..0232018561 4849187935 0348027842 2273781902 5522041763 3410672853 8283062645 0116009280
	7424593967 5174013921 1136890951 2761020881 6705336426 9141531322 5058004640 3712296983
	7587006960 5568445475 6380510440 8352668213 4570765661 25290
433	(0)..0230946882 2170900692 8406466512 7020785219 3995381062 3556581986 1431870669 7459584295
	6120092378 7528868360 2771362586 6050808314 0877598152 4249422632 7944572748 2678983833
	7182448036 9515011547 3441108545 0346420323 3256351039 2609699769 0531177829 0993071593
	5334872979 2147806004 6189376443 4180138568 1293302540 4157043879 9076212471 1316397228
	6374133949 1916859122 4018475750 5773672055 4272517321 0161662817 5519630484 9884526558
	8914549653 5796766743 6489607390 30
439	(1)..4920273348 5193621867 8815489749 4305239179 9544419134 3963553530 7517084282 4601366742
	5968109339 4077448747 1526195899 7722095671 9817767653 7585421412 3006833712 9840546697
	0387243735 7630979498 8610478359 9088838268 7927107061 503416856
	(0)..0227790432 8018223234 6241457858 7699316628 7015945330 2961275626 4236902050 1138952164
	0091116173 1207289293 8496583143 5079726651 4806378132 1184510250 5694760820 0455580865
	6036446469 2482915717 5398633257 4031890660 5922551252 847380410
443	(1)..4176072234 7629796839 7291196388 2618510158 0135440180 5869574492 0993227990 9706546275
	3950338600 4514672686 2302483069 9774266365 6884875846 5011286681 7155756207 6749435665
	9142212189 6162528216 7042889390 5191873589 1647855530 4740406320 5
	(0)..0225733634 3115124153 4988713318 2844243792 3250564334 0857787810 3837471783 2957110609
	4808126410 8352144469 5259593679 4582392776 5237020316 9270880361 1738148984 1986455981
	9413092550 7900677200 9029345372 4604966139 9548532731 3769751693 0
449	(1)..7572383073 4966592427 6169265033 40; (2)..7461024498 8864142538 9755011135 85;
	(3)..3674832962 1380846325 1670378619 15; (4)..4944320712 6948775055 6792873051 22;
	(5)..8106904231 6258351893 0957683741 64; (6)..5634743875 2783964365 2561247216 03;
	(7)..1581291759 4654788418 7082405345 21; (8)..3763919821 8262806236 0801781737 19;
	(9)..7973273942 0935412026 7260579064 58; (10)..1091314031 1804008908 6859688195 99;
	(11)..7104677060 1336302895 3229398663 69; (12)..1559020044 5434298440 9799554565 70;
	(13)..3006681514 4766146993 3184855233 85; (0)..0222717149 2204899777 2828507795 10

457	(1)..	7768052526	4113785557	9868708971	5536105032	8227571115	9737417943	1072210065	6455142231
		9474835886	2144420131	2910284463	8949671772	4288840262	5820568927	7899343544	85
	(2)..	0765864532	6039387308	5339168490	1531728665	2078774617	0678336980	3063457330	4157549234
		1356673960	6126914660	8315098468	2713347921	2253829321	6630196936	5426695842	45
	(a)..	0218818380	7439824945	2954048240	0437636761	4879649890	5908096280	0875273522	9759299781
		1816192560	1750547045	9518599562	3632385120	3501094091	9037199124	7264770240	70
461	(o)..	0216919739	6963123644	2516268980	4772234273	3188720173	5357917570	4989154013	0151843817
		7874186550	9761388286	3340563991	3232104121	4750542299	3492407809	1106290672	4511930585
		6832971800	4338394793	9262472885	0325379609	5444685466	3774403470	7158351409	9783080260
		3036876355	7483731019	5227765726	6811279826	4642082429	5010845986	9848156182	2125813449
		0238611713	6659436008	6767895878	5249457700	6507592190	8893709327	5488069414	3167028199
		5661605206	0737527114	9674620390	4555314533	6225596529	2841648590		
463	(1)..	7580993520	5183585313	1749460043	1965442764	5788336933	0453563714	9028077753	7796976241
		9006479481	6414686825	0539956803	4557235421	1663066954	6436285097	1922246220	3023
	(2)..	9092872570	1943844492	4406047516	1987041036	7170626349	8920086393	0885529157	6673866090
		7127429805	6155507559	3952483801	2958963282	9373650107	9913606911	4470842332	6133
	(o)..	0215982721	3822894168	4665226781	8574514038	8768898488	1209503239	7408207343	4125269978
		4017278617	7105831533	4773218142	5485961123	1101511879	0496760259	1792656587	4750

[Theiler	3	9	11	13	27	31	37	41	43	53	67	71	73	79	81	83	89	101
Primitivwurzel . .	2	2	2	6	2	17	5	6	28	26	12	62	5	29	11	50	30	2
Theiler	103	107	121	127	137	139	151	157	163	169	173	191	197	199	211			
Primitivwurzel . .	6	63	35	106	12	92	114	18	70	137	82	157	73	127	7			
Theiler	227	239	241	243	251	271	277	281	283	293	307	311	317	331	347			
Primitivwurzel .	163	35	14	65	111	6	86	54	259	89	138	258	71	37	125			
Theiler	349	353	359	373	397	401	409	421	431	439	443	449	457	463]				
Primitivwurzel .	220	28	299	82	133	190	174	54	21	285	240	34	264	174]				

467	2141327623	1263383297	6445396145	6102783725	9100642398	2869379014	9892933618	8436830835
	1177730192	7194860813	7044967880	0856531049	2505353319	0578158458	2441113490	3640256959
	3147751605	9957173447	5374732334	0471092077	0877944325	4817987152	0342612419	7002141327
	. . . . .							
479	2087682672	2338204592	9018789144	0501043841	3361169102	2964509394	5720250521	9206680584
	5511482254	6972860125	2609603340	2922755741	1273486430	0626304801	6701461377	8705636743
	2150313152	4008350730	6889352818	3716075156	5762004175	3653444676	4091858037	5782881002
	. . . . .							
487	2053388090	3490759753	5934291581	1088295687	8850102669	4045174537	9876796714	5790554414
	7843942505	1334702258	7268993839	8357289527	7207392197	1252566735	1129363449	6919917864
	4763860369	6098562628	3367556468	1724845995	8932238193	0184804928	1314168377	8234086242
	2997946611	9096509240	2464065708	4188911704	3121149897	3305954825	4620123203	2854209445
	5852156057	4948665297	7412731006	1601642710	4722792607	8028747433	2648870636	5503080082
	1355236139	6303901437	3716632443	5318275154	0041067761	8069815195	0718685831	6221765913
	7577002053	. . .						
491	2036659877	8004073319	7556008146	6395112016	2932790224	0325865580	4480651731	1608961303
	4623217922	6069246435	8452138492	8716904276	9857433808	5539714867	6171079429	7352342158
	8594704684	3177189409	3686354378	8187372708	7576374745	4175152749	4908350305	4989816700
	6109979633	4012219959	2668024439	9185336048	8798370672	0977596741	3441955193	4826883910
	3869653767	8207739307	5356415478	6150712830	9572301425	6619144602	8513238289	2057026476
	5784114052	9531568228	1059063136	4562118126	2729124236	2525458248	4725050916	4969450101
	8329938900	. . .						
499	2004008016	0320641282	5651302605	2104208416	8336673346	6933867735	4709418837	6753507014
	0280561122	2444889779	5591182364	7294589178	3567134268	5370741482	9659318637	2745490981
	9639278557	1142284569	1382765531	0621242484	9699398797	5951903807	6152304609	2184368737
	4749498997	9959919839	6793587174	3486973947	8957915831	6633266533	0661322645	2905811623
	2464929859	7194388777	5551102204	4088176352	7054108216	4328657314	6292585170	3406813627
	2545090180	3607214428	8577154308	6172344689	3787575150	3006012024	0480961923	8476953907
	8156312625	2505010020	. . . .					
503	1988071570	5765407554	6719681908	5487077534	7912524850	8946322067	5944333996	0238568588
	4691848906	5606361829	0258449304	1749502982	1073558648	1113320079	5228628230	6163021868
	7872763419	4831013916	5009940357	8528827037	7733598409	5427435387	6739562624	2544731610
	3379721669	9801192842	9423459244	5328031809	1451292246	5208747514	9105367793	2405566600
	3976143141	1530815109	3439363817	0974155069	5825049701	7892644135	1888667992	0477137176
	9383697813	1212723658	0516898608	3499005964	2147117296	2226640159	0457256461	2326043737
	5745526838	9662027833	0019880715	. . . .				

509	1964636542	2396856581	5324165029	4695481335	9528487229	8624754420	4322200392	9273084479
	3713163064	8330058939	0962671905	6974459724	9508840864	4400785854	6168958742	6326129666
	0117878192	5343811394	8919449901	7681728880	1571709233	7917485265	2259332023	5756385068
	7622789783	8899803536	3457760314	3418467583	4970530451	8664047151	2770137524	5579567779
	9607072691	5520628683	6935166994	1060903732	8094302554	0275049115	9135559921	4145383104
	1257367387	0333988212	1807465618	8665108055	0098231827	1119842829	0766208251	4734774066
	7976424361	4931237721	0216110019	.....				
521	1919385796	5451055662	1880998080	6142034548	9443378119	0019193857....		
523	1912045889	1013384321	2237093690	2485659655	8317399617	5908221797	3231357552	5812619502
	8680688336	5200764818	3556405353	7284894837	4760994263	8623326959	8470363288	7189292543
	0210325047	8011472275	3346080305	9273422562	1414913957	9349904397	7055449330	7839388145
	3154875717	0172084130	0191204588	.....				
529	1890359168	2419659735	3497164461	2476370510	3969754253	3081285444	2344045368	6200378071
	8336483931	9470699432	8922495274	1020793950	8506616257	0888468809	0737240075	6143667296
	7863894139	8865784499	0548204158	7901701323	2514177693	7618147448	0151228733	4593572778
	8279773156	8998109640	8317580340	2646502835	5387523629	4896030245	7466918714	5557655954
	6313799621	9281663516	0680529300	5671077504	7258979206	0491493383	7429111531	1909262759
	9243856332	7032136105	8601134215	5009451795	8412098298	6767485822	3062381852	5519848771
	2665406427	2211720226	8431001890	....				
541	1848428835	4898336414	0480591497	2273567467	6524953789	2791127541	5896487985	2125693160
	8133086876	1552680221	8114602587	8003696857	6709796672	8280961182	9944547134	9353049907
	5785582255	0831792975	9704251386	3216266173	7523105360	4436229205	1756007393	7153419593
	3456561932	3659889094	2698706099	8151571164	5101663585	9519408502	7726432532	3475046210
	7208872458	4103512014	7874306839	1866913123	8447319778	1885397412	1996303142	3290203327
	1719038817	0055452865	0646950092	4214417744	9168207024	0295748613	6783733826	2476894639
	5563770794	8243992606	2846580406	6543438077	6340110905	7301293900	1848428835....	
547	1828153564	8994515539	3053016453	3820840950	6398537477	1480804387	5685557586	8372943327
	2394881170	0182815356	....					
557	1795332136	4452423698	3842010771	9928186714	5421903052	0646319569	1202872531	4183123877
	9174147217	2351885098	7432675044	8833034111	3105924596	0502692998	2046678635	5475763016
	1579892280	0718132854	5780969479	3536804308	7971274685	8168761220	8258527827	6481149012
	5673249551	1669658886	8940754039	4973070017	....			
563	1776198934	2806394316	1634103019	5381882770	8703374777	9751332149	2007104795	7371225577
	2646536412	0781527531	0834813499	1119005328	5968028419	1829484902	3090586145	6483126110
	1243339253	9964476021	3143872113	6767317939	6092362344	5825932504	4404973357	0159857904
	0852575488	4547069271	7584369449	3783303730	0177619893	.....		
569	1757469244	2882249560	6326889279	4376098418	2776801405	9753954305	7996485061	5114235500
	8787346221	4411247803	1634446397	1880492091	3884007029	8769771528	9982425307	5571177504
	3936731107	2056239015	8172231985	9402460456	9420035149	3848857644	9912126537	7855887521
	9683655536	0281195079	0861159929	7012302284	7100175746	....		

571	1751313485	1138353765	3239929947	4605954465	8493870402	8021015761	8213660245	1838879159
	3695271453	5901926444	8336252189	1418563922	9422066549	9124343257	4430823117	3380035026
	2697022767	0753064798	5989492119	0893169877	4080560420	3152364273	2049036777	5831873905
	4290718038	5288966725	0437828371	2784588441	3309982486	8651488616	4623467600	7005253940
	4553415061	2959719789	8423817863	3975481611	2084063047	2854640980	7355516637	4781085814
	3607705779	3345008756	5674255691	7688266199	6497373029	7723292469	3520140105	0788091068
	3012259194	3957968476	3572679509	6322241681	2609457092	8196147110	3327495621	7162872154
	4155866900	1751313485	....					
577	1733102253	0329289428	0762564991	3344887348	3535528596	1871750433	2755632582	3223570190
	6412478336	2218370883	8821490467	9376083188	9081455805	8925476603	1195840554	5927209705
	3726169844	0207972270	3639514731	3691507798	9601386481	8024263431	5424610051	9930675909
	8786828422	8769497400	3466204506	0658578856	1525129982	6689774696	7071057192	3743500866
	5511265164	6447140381	2824956672	4436741767	7642980935	8752166377	8162911611	7850953206
	2391681109	1854419410	7452339688	0415944540	7279029462	7383015597	9202772963	6048526863
	0849220103	9861351819	7573656845	7538994800	6932409012	1317157712	3050259965	3379549393
	4142114384	7487001733	....					
587	1703577512	7768313458	2623509369	1763202725	7240204429	3015332197	6149914821	1243611584
	3270868824	5315161839	8637137989	7785349233	3901192504	2589437819	4207836456	5587734241
	9080068143	1005110732	5383304940	3747870528	1090289608	1771720613	2879045996	5928449744
	4633730834	7529812606	4735945485	5195911413	9693356047	7001703577	....	
593	1686340640	8094435075	8853288364	2495784148	3979763912	3102866779	0893760539	6290050590
	2192242833	0522765598	6509274873	5244519392	9173693086	0033726812	8161888701	5177065767
	2849915682	9679595278	2462057335	5817875210	7925801011	8043844856	6610455311	9730185497
	4704890387	8583473861	7200674536	2563237774	0303541315	3456998313	6593591905	5649241146
	7116357504	2158516020	2360876897	1332209106	2394603709	9494097807	7571669477	2344013490
	7251264755	4806070826	3069139966	2731871838	1112984822	9542327150	0843170320	4047217537
	9426644182	1247892074	1989881956	1551433389	5446880269	8445025295	1096121416	5261382799
	3254637436	7622259696	4586846543	0016863406	....			
599	1669449081	8030050083	4724540901	5025041736	2270450751	2520868113	5225375626	0434056761
	2687813021	7028380634	3906310851	4190317195	3255425709	5158597662	7712854757	9298831385
	6427378964	9415692821	3689482470	7846410684	4741235392	3205342237	0617696160	2671118530
	8848080133	5559265442	4040066777	9632721202	0033388981	6360601001	....	
601	1663893510	8153078202	9950083194	6755407653	9101497504	1597337770	3826955074	8752079866
	8885191347	7537437603	9933444259	5673876871	8801996672	2129783693	8435940099	8336106489
	1846921797	0049916805	3244592346	0898502495	8402662229	6173044925	1247920133	1114808652
	2462562396	0066555740	4326123128	1198003327	7870216306	1564059900	1663893510	....

607	1647446457	9901153212	5205930807	2487644151	5650741350	9060955518	9456342668	8632619439
	8682042833	6079077429	9835255354	2009884678	7479406919	2751255584	8434925864	9093904448
	1054365733	1136738056	0131795716	6392092257	0016474464	....		
613	1631321370	3099510603	5889070146	8189233278	9559543230	0163132137	....	
617	1620745542	9497568881	6855753646	6774716369	5299837925	4457050243	1118314424	6353322528
	3630470016	....						
619	1615508885	2988691437	8029079159	9353796445	8804523424	8788368356	0258481421	6478190650
	0484652665	5896607431	3408723747	9806138933	7641357027	4636510500	8077544426	4943457189
	0145395799	6768982229	4022617124	3941841680	1292407108	2390953150	2423263327	9483037156
	7043618739	9030694668	8206785137	3182552504	0387722132	4717285945	0726978998	3844911147
	0113085621	9709208400	6462035542	1954765751	2116316639	7415185783	5218093699	5153473344
	1033925686	5912762520	1938610662	3586429725	3634894991	9224555735	0565428109	8546042003
	2310177705	9773828756	0581583198	7075928917	6090468497	5767366720	5169628432	9563812600
	9693053311	7932148626	8174474959	6122778675	2827140549	2730210016	....	
631	1584786053	8827258320	1267828843	1061806656	1014263074	4849445324	8811410459	5879556259
	9049128367	6703645007	9239302694	1362916006	3391442155	3090332805	0713153724	2472266244
	0570522979	3977812995	2456418383	5182250396	1965134706	8145800316	9572107765	4516640253
	5657686212	3613312202	8526148969	8890649762	2820919175	9112519809	8256735540	7290015847
	....							
641	1560062402	4960998439	9375975039	0015600624	..			
643	1555209953	3437013996	8895800933	1259720062	2083981337	4805598755	8320373250	3888024883
	3592534992	2239502332	8149300155	....				
647	1545595054	0958268933	5394126738	7944358578	0525502318	3925811437	4034003091	1901081916
	5378670788	2534775888	7171561051	0046367851	6228748068	0061823802	1638330757	3415765069
	5517774343	1221020092	7357032457	4961360123	6476043276	6615146831	5301391035	5486862442
	0401854714	0649149922	7202472952	0865533230	2936630602	7820710973	7248840803	7094281298
	2998454404	9459041731	0664605873	2612055641	4219474497	6816074188	5625965996	9088698918
	0834621329	2117465224	1112828438	9489953632	1483771251	9319938176	1978361669	2426584234
	9304482225	6568778979	9072642967	5425038639	8763523956	7233384853	1684698608	9644513137
	5579598145	2859350850	0772797527	0479134466	7697063369	3972179289	0262751159	1962905718
	7017001545	....						
653	1531393568	1470137825	4211352312	4042879019	9081163859	1117917304	7473200612	5574272588
	0551301684	5329249617	1516079632	4655436447	1669218989	2802450229	7090352220	5206738131
	6998468606	4318529862	1745788667	6875957120	9800918836	1408882082	6952526799	3874425727
	4119448698	3154670750	3828483920	3675344563	5528330781	0107197549	7702909647	7794793261
	8683001531	....						

659	1517450682	8528072837	6327769347	4962063732	9286798179	0591805766	3125948406	6767830045
	5235204855	8421851289	8330804248	8619119878	6039453717	7541729893	7784522003	0349013657
	0561456752	6555386949	9241274658	5735963581	1836115326	2518968133	5356600910	4704097116
	8437025796	6616084977	2382397572	0789074355	0834597875	5690440060	6980273141	1229135053
	1107738998	4825493171	4719271623	6722306525	0379362670	7132018209	4081942336	8740515933
	2321699544	7647951441	5781487101	6691957511	3808801213	9605462822	4582701062	2154779969
	6509863429	4385432473	4446130500	7587253414	2640364188	1638846737	4810318664	6433990895
	2959028831	5629742033	3839150227	6176024279	2109256449	1654021244	3095599393	0197268588
	7708649468	8922610015	....					
661	1512859304	0847201210	2874432677	7609682299	5461422087	7458396369	1376701966	7170953101
	3615733736	7624810892	5869894099	8487140695	9152798789	7125567322	2390317700	4538577912
	2541603630	8623298033	2829046898	6384266263	2375189107	4130105900	1512859304	....
673	1485884101	0401188707	2808320950	9658246656	7607726597	3254086181	2778603268	9450222882
	6151560178	3060921248	1426448736	9985141158	9895988112	9271916790	4903417533	4323922734
	0267459138	1872213967	3105497771	1738484398	2169390787	5185735512	6300148588	....
677	1477104874	4460856720	8271787296	8980797636	6322008862	6292466765	1403249630	7237813884
	7858197932	0531757754	8005908419	4977843426	8833087149	1875923190	5463288035	4505169867
	0605612998	5228951255	5391432791	7282127031	0192023633	6779911373	7075332348	5967503692
	7621861152	1418020679	4682422451	9940915805	0221565731	1669128508	1240768094	5347119645
	4948301329	3943870014	....					
683	1464128843	3382137628	1112737920	9370424597	3645680819	9121522693	9970717423	1332357247
	4377745241	5812591508	0527086383	6017569546	1200585651	5373352855	0512445095	1683748169
	8389458272	3279648609	0775988286	9692532942	8989751098	0966325036	6032210834	5534407027
	8184480234	2606149341	1420204978	0380673499	2679355783	3089311859	4436310395	3147877013
	1771595900	4392386530	0146412884	....				
691	1447178002	8943560057	8871201157	7424023154	8480463096	9609261939	2185338784	3704775687
	4095513748	1910274963	8205499276	4109985528	2199710564	3994211287	9884225759	7684515195
	3690303907	3806078147	6121562952	2431259044	8625189897	2503617945	0072358900	1447178022
	....							
701	1426533523	5378031383	7375178316	6904422253	9229671897	2895863052	7817403708	9871611982
	8815977175	4636233951	4978601997	1469329529	2439372325	2496433666	1911554921	5406562054
	2082738944	3651925820	2567760342	3680456490	7275320970	0427960057	0613409415	1212553495
	0071326676	1768901569	1868758915	8345221112	6961483594	8644793152	6390870185	4493580599
	1440798858	7731811697	5748930099	8573466476	4621968616	2624821683	3095577746	0770328102
	7104136947	2182596291	0128388017	1184022824	5363766048	5021398002	8530670470	7560627674
	7503566333	8088445078	4593437945	7917261055	6348074179	7432239657	6319543509	2724679029
	9572039942	9386590584	8787446504	9928673323	8231098430	8131241084	1654778887	3038516405
	1355206847	3609129814	5506419400	8559201141	2268188302	4251069900	....	

709	1410437235	5430183356	8406205923	8563892806	7700987306	0648801128	3497884344	1466854724
	9647390691	1142454160	7898448519	0409026798	3074753173	4837799717	9125528913	9653286318
	7588152327	2214386459	8025387870	2397743300	4231311706	6290550070	5218617771	5091678420
	3102961918	1946403385	0493653032	4400564174	8942172073	3427362482	3695345557	1227080394
	9224259520	4513399153	7376586741	8899858956	2764456981	6643159379	4076163610	7193229901
	2693935119	8871650211	9655853314	5275035260	9308885754	5839210155	1480959097	3201692524
	6826516220	0282087447	1086036671	3681241184	7672778561	3540197461	2129760225	6699576868
	8293370944	9929478138	2228490832	1579689703	8081805359	6614950634	6967559943	5825105782
	7926657263	7517630465	4442877291	9605077574	0479548660	0846262341	3258110014	....
719	1390320584	1446453407	5104311543	8108484005	5632823365	7858136300	4172461752	4339360222
	5312934631	4325452016	6898470097	3574408901	2517385257	3018080667	5958803894	2976356050
	0695410292	0723226703	7552155771	9054242002	7816411682	8929068150	2086230876	2169680111
	2656467315	7162726008	3449235048	6787204450	6258692628	6509040333	7969401947	2488178025
	0347705146	0361613351	8776077885	9527121001	....			
727	1375515818	4319119669	8762035763	4112792297	1114167812	9298486932	5997248968	3631361760
	6602475928	4731774415	4057771664	5741403026	1348005502	0632737276	4786795048	1430536451
	1691884456	6712517193	9477303988	9958734525	4470426409	9037138927	0976616231	0866574965
	6121045392	0220082530	9491059147	1801935722	1458046767	5378266850	0687757909	2159559834
	9381017881	7056396148	5557083906	4649243486	2998624484	1815680880	3391237964	2365887207
	7028885832	1879701513	0674002751	0316368638	2393397524	0715268225	5845942228	3356258596
	9738651994	4979367262	7235213204	9518569463	5488308115	5433287482	8060522696	0110041265
	4745529573	5900962861	0729023383	7689133425	0343878954	6079779917	4690508940	8528198074
	2778541953	2324621733	1499312242	0907840440	1650618982	1182943603	8514442916	0935350756
	5337001375	....						
729	1371742112	4828532235	9396433470	5075445816	1865569272	9766803840	8779149519	8902606310 0137174211
733	1364256480	2182810368	3492496589	3587994542	9740791268	7585266030	0136425648	....
739	1353179972	9364005412	7198917456	0216508795	6698240866	0351826792	9634641407	3071718538
	5656292286	8741542625	1691474966	1705006765	8998646820	0270635994	5872801082	5439783491
	2043301759	1339648173	2070365358	5926928281	4614343707	7131258457	3748308525	0338294993
	2341001353	....						
743	1345895020	1884253028	2637954239	5693135935	3970390309	5558546433	3781965006	7294751009
	4212651413	1897711978	4656796769	8519515477	7927321668	9098250336	4737550471	0632570659
	4885598923	2839838492	5975773889	6366083445	4912516823	6877523553	1628532974	4279946164
	1991924629	8788694481	8304172274	5625841184	3876177658	1426648721	3997308209	9596231493
	9434724091	5208613728	1292059219	3808882907	1332436069	9865410497	9811574697	1736204576
	0430686406	4602960969	0444145356	6621803499	8270524899	0578734858	6810228802	1534320323
	0148048452	2207267833	1090174966	3526244952	8936742934	0511440107	6716016150	7402422611
	0363391655	4508748317	6312247644	6837146702	5572005383	5800807537	0121130551	8169582772
	5437415881	5612382234	1857335127	8600269179	0040376850	6056527590	8479138627	1870794078
	0619111709	2866756393	0013458950	....				

751	1331557922	7696404793	6085219707	0572569906	7909454061	2516644474	0346205059	9201065246
	3382157123	8348868175	7656458055	9254327563	2490013315	....		
757	1321003963	0118890356	6710700132	....				
761	1314060446	7805519053	8764783180	0262812089	3561103810	7752956636	0052562417	8712220762
	1550591327	2910512483	5742444152	4310118265	4402102496	7148488830	4862023653	0880420499
	3429697766	0972404730	6176084099	8685939553	2194480946	1235216819	9737187910	6438896189
	2247043363	9947437582	1287779237	8449408672	7989487516	4257555847	5689881734	5597897503
	2851511169	5137976346	9119579500	6570302233	9027595269	3823915900	1314060446	....
769	1300390117	0351105331	5994798439	5318595578	6736020806	2418725617	6853055916	7750325097
	5292587776	3328998699	6098829648	8946684005	2015604681	4044213263	9791937581	2743823146
	9440832249	6749024707	4122236671	0013003901	....			
773	1293661060	8020698576	9728331177	2315653298	8357050452	7813712807	2445019404	9159120310
	4786545924	9676584734	7994825355	7567917205	6921096675	2910737386	8046571798	1888745148
	7710219922	3803363518	7580853816	3001293661	....			
787	1270648030	4955527318	9326556543	8373570520	9656925031	7662007623	8881829733	1639135959
	3392630241	4231257941	5501905972	0457433290	9783989834	8157560355	7814485387	5476493011
	4358322744	5997458703	9390088945	3622346886	9123252858	9580686149	9364675984	7522236340
	5336721728	0813214739	5171537484	1168996188	0559085133	4180432020	3303684879	2884371029
	2249047013	9771283354	5108005082	5921219822	1092757306	2261753494	2820838627	7001270648
	....							
797	1254705144	2910915934	7553324968	6323713927	2271016311	1668757841	9071518193	2245922208
	2810539523	2120451693	8519447929	7365119196	9887076537	0138017565	8720200752	8230865746
	5495608531	9949811794	2283563362	6097867001	....			
809	1236093943	1396786155	7478368355	9950556242	2744128553	7700865265	7601977750	3090234857
	8491965389	3695920889	9876390605	6860321384	4252163164	4004944375	7725587144	6229913473
	4239802224	9690976514	2156803461	0630407911	0012360939	....		
811	1233045622	6880394574	5992601726	2638717632	5524044389	6424167694	2046855733	6621454993
	8347718865	5980271270	0369913686	8064118372	3797780517	8791615289	7657213316	8927250308
	2614056720	0986436498	1504315659	6794081381	0110974106	0419235511	7139334155	3637484586
	9297163995	0678175092	4784217016	0295930949	4451294697	9038224414	3033292231	8125770653
	5141800246	6091245376	0789149198	5203452527	7435265104	8088779284	8335388409	3711467324
	2909987669	5437731196	0542540073	9827373612	8236744759	5561035758	3230579531	4426633785
	4500616922	8113440197	2872996300	8631319358	8162762022	1948212083	8471023427	8668310727
	4969173859	4327990135	6350184956	8434032059	1861898890	2589395807	6448828606	6584463625
	1541507028	3600493218	2490752157	8298397040	6905055487	0530209617	7558569667	0776818742
	2934648581	9975339087	5462392108	5080147965	4747225647	3489519112	2071516646	1159062885
	3267570900	1233045662	....					

NACHLASS.

821	1218026796	5893249695	4933008526	1875761266	7478684531	0596833130	3288672350	7917174177
	8319123020	7064555420	2192448233	8611449451	8879415347	1576370280	1461632155	9074299634
	5919610231	4250913520	0974421437	2716199756	3946406820	9500609013	3982947624	8477466504
	2630937880	6333739342	2655298416	5651644336	1753958587	0889159561	5103532277	7101096224
	1169305724	7259439707	6735688185	1400730816	0779537149	8172959805	1157125456	7600487210
	7186358099	8781973203	4104750304	5066991473	8124238733	2521315468	9403166869	6711327649
	2082825822	1680876979	2935444579	7807551766	1388550548	1120584652	8623629719	8538367844
	0925700365	4080389768	5749086479	9025578562	7283800243	6053593179	0499390986	6017052375
	1522533495	7369062119	3666260657	7344701583	4348355663	8246041412	9110840438	4896467722
	2898903775	8830694275	2740560292	3264311814	8599269183	9220462850	1827040194	8842874543
	2399512789	2813641900	1218026796	....				
823	1215066828	6755771567	4362089914	9453219927	0959902794	6537059538	2746051032	8068043742
	4058323207	7764277035	2369380315	9173754556	5006075334	1433778857	8371810449	5747266099
	6354799513	9732685297	6913730255	1640340218	7120291616	0388821385	1761846901	5795868772
	7825030376	6707168894	2891859052	2478736330	4981773997	5698663426	4884568651	2758201701
	0935601458	0801944106	9258809234	5078979343	8639125151	8833535844	4714459295	2612393681
	6524908869	9878493317	1324422843	2563791008	5054678007	2904009720	5346294046	1725394896
	7193195625	7594167679	2223572296	4763061968	4082624544	3499392466	5856622114	2162818955
	0425273390	0364520048	6026731470	2308626974	4835965978	1287970838	3961117861	4823815309
	8420413122	7217496962	3329283110	5710814094	7752126366	9501822600	2430133657	3511543134
	8724179829	8906439854	1919825589	3074119076	5492102065	6136087484	8116646415	5528554070
	4738760631	8347509113	0012150668	....				
827	1209189842	8053204353	0834340991	5356711003	6275695284	1596130592	5030229746	0701330108
	8270858524	7883917775	0906892382	1039903264	8125755743	6517533252	7206771463	1197097944
	3772672309	5525997581	6203143893	5912938331	3180169286	5779927448	6094316807	7388149939
	5405078597	3397823458	2829504232	1644498186	2152357920	1934703748	4885126964	9334945586
	4570737605	8041112454	6553808948	0048367593	7122128174	1233373639	6614268440	1451027811
	3663845223	7001209189	....					
829	1206272617	6115802171	2907117008	4439083232	8106151990	3498190591	0735826296	7430639324
	4873341375	1507840772	0144752714	1153896260	5548854041	0132689987	9372738238	8419782870
	9288299155	6091676718	9384800965	0180940892	6417370325	6936067551	2665862484	9215922798
	5524728588	6610373944	5114595898	6731001206	....			
839	1191895113	2300357568	5339690107	2705601907	0321811680	5721096543	5041716328	9630512514
	8986889153	7544696066	7461263408	8200238379	0226469071	5137067938	0214541120	3814064362
	3361144219	3087008343	2657926162	5029797377	8307508939	2133492252	6817640047	6758045292
	0143027413	5876042908	2240762812	8724672228	8438617401	6686531585	2205005959	4755661501
	7878426698	4505363528	0095351609	0584028605	4827175208	5816448152	5625744934	4457687723
	4803337306	3170441001	....					

VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

841	1189060642	0927467300	8323424494	6492271105	8263971462	5445897740	7847800237	8121284185
	4934601664	6848989298	4542211652	7942925089	1795481569	5600475624	2568370986	9203329369
	7978596908	4423305588	5850178359	0963139120	0951248513	6741973840	6658739595	7193816884
	6611177170	0356718192	6278240190	2497027348	3947681331	7479191438	7633769322	2354340071
	3436385255	6480380499	4054696789	5362663495	8382877526	7538644470	8680142687	2770511296
	0760998810	9393579072	5326991676	5755053507	7288941736	9285374554	1022592152	1997621878
	7158145065	3983353151	0107015457	7883472057	0749108204	5184304399	5243757431	6290130796
	6706302021	4030915576	6944114149	8216409036	8608799048	7514863258	0261593341	2604042806
	1831153388	8228299643	2818073721	7598097502	9726516052	3186682520	8085612366	2306777645
	6599286563	6147443519	6195005945	3032104637	3365041617	1224732461	3555291319	8573127229
	4887039239	0011890606	....					
853	1172332942	5556858147	7139507620	1641266119	5779601406	7995310668	2297772567	4091441969
	5193434935	5216881594	3728018757	3270808909	7303634232	1219226260	2579132473	6225087924
	9706916764	3610785463	0715123094	9589683470	1055099648	3001172332	....	
857	1166861143	5239206534	4224037339	5565927654	6091015169	1948658109	6849474912	4854142357
	0595099183	1971995332	5554259043	1738623103	8506417736	2893815635	9393232205	3675612602
	1003500583	4305717619	6032672112	0186697782	9638273045	5075845974	3290548424	7374562427
	0711785297	5495915985	9976662777	1295215869	3115519253	2088681446	9078179696	6161026837
	8063010501	7502917152	8588098016	3360560093	3488914819	1365227537	9229871645	2742123687
	2812135355	8926487747	9579929988	3313885647	6079346557	7596266044	3407234539	0898483080
	5134189031	5052508751	4585764294	0490081680	2800466744	4574095682	6137689614	9358226371
	0618436406	0676779463	2438739789	9649941656	9428238039	6732788798	1330221703	6172695449
	2415402567	0945157526	2543757292	8821470245	0408401400	2333722287	0478413068	8448074679
	1131855309	2182030338	3897316219	3698949824	9708284714	1190198366	3943990665	1108518086
	3477246207	7012835472	5787631271	8786464410	7351225204	2007001166	....	
859	1164144353	8998835855	6461001164	....				
863	1158748551	5643105446	1181923522	5955967555	0405561993	0475086906	1413673232	9084588644
	2641946697	5666280417	1494785631	5179606025	4924681344	1483198146	0023174971	0312862108
	9223638470	4519119351	1008111239	8609501738	1228273464	6581691772	8852838933	9513325608
	3429895712	6303592120	5098493626	8829663962	9200463499	4206257242	1784472769	4090382387
	0220162224	7972190034	7624565469	2931633835	4577056778	6790266512	1668597914	2526071842
	4101969872	5376593279	2584009269	9884125144	8435689455	3881807647	7404403244	4959443800
	6952491309	3858632676	7091541135	5735805330	2433371958	2850521436	8482039397	4507531865
	5851680185	3997682502	8968713789	1077636152	9548088064	8899188876	0139049826	1877172653
	5341830822	7114716106	6048667439	1657010438	7369640787	9490150637	3117033603	7079953650
	0579374275	7821552723	0590961761	2977983777	5202780996	5237543453	0706836616	4542294322
	1320973348	7833140208	5747392815	7589803012	7462340672	0741599073	0011587485	....

NACHLASS.

877	1140250855	1881413911	0604332953	2497149372	8620296465	2223489167	6168757126	5678449258
	8369441277	0809578107	1835803876	8529076396	8072976054	7320410490	3078677309	0079817559
	8631698973	7742303306	7274800456	1003420752	5655644241	7331812998	8597491448	1185860889
	3956670467	5028506271	3797035347	7765108323	8312428734	3215507411	6305587229	1904218928
	1641961231	4709236031	9270239452	6795895096	9213226909	9201824401	3683010262	2576966932
	7251995438	9965792474	3443557582	6681870011	....			
881	1135073779	7956867196	3677639046	5380249716	2315550510	7832009080	5902383654	9375709421
	1123723041	9977298524	4040862656	0726447219	0692395005	6753688989	7843359818	3881952326
	9012485811	5777525539	1600454029	5119182746	8785471055	6186152099	8864926220	2043132803
	6322360953	4619750283	7684449489	2167990919	4097616345	0624290578	8876276958	0022701475
	5959137343	9273552780	9307604994	3246311010	2156640181	6118047673	0987514188	4222474460
	8399545970	4880817253	1214528944	3813847900	1135073779	....		
883	1132502831	2570781426	9535673839	1845979614	9490373725	9343148357	8708946772	3669309173
	2729331823	3295583238	9580973952	4348810872	0271800679	5016987542	4688561721	4043035107
	5877689694	2242355605	8890147225	3680634201	5855039637	5990939977	3499433748	5843714609
	2865232163	0804077010	1925754813	1370328425	8210645526	6138165345	4133635334	0883352208
	3805209513	0237825594	5639864099	6602441506	2287655719	1392978482	4462061155	1528878822
	1970554926	3873159682	8992072480	1812004530	0113250283	....		
887	1127395715	8962795941	3754227733	9346110484	7801578354	0022547914	3179255918	8275084554
	6786922209	6956031567	0800450958	2863585118	3765501691	0935738444	1939120631	3416009019
	1657271702	3675310033	8218714768	8838782412	6268320180	3833145434	0473506200	6764374295
	3776775648	2525366403	6076662908	6809470124	0135287485	9075535512	9650507328	0721533258
	1736189402	4802705749	7181510710	2593010146	5614430665	1634723788	0496054114	9943630214
	2051860202	9312288613	3032694475	7609921082	2998872604	2841037204	0586245772	2660653889
	5152198421	6459977452	0856820744	0811724915	4453213077	7903043968	4329199549	0417136414
	8816234498	3089064261	5558060879	3686583990	9808342728	2976324689	9661781285	2311161217
	5873731679	8196166854	5659526493	7993235625	7046223224	3517474633	5963923337	0913190529
	8759864712	5140924464	4870349492	6719278466	7418263810	5975197294	2502818489	2897406989
	8534385569	3348365276	2119503945	8850056369	7857948139	7970687711	3866967305	5242390078
	9177001127	....						
907	1102535832	4145534729	8787210584	3439911797	1334068357	2216097023	1532524807	0562293274
	5314222712	2381477398	0154355016	5380374862	1830209481	8081587651	5986769570	0110253583
	....							
911	1097694840	8342480790	3402854006	5861690450	0548847420	4171240395	1701427003	2930845225
	0274423710	2085620197	5850713501	6465422612	5137211855	1042810098	7925356750	8232711306
	2568605927	5521405049	3962678375	4116355653	1284302963	7760702524	6981339187	7058177826
	5642151481	8880351262	3490669593	8529088913	2821075740	9440175631	1745334796	9264544456
	6410537870	4720087815	5872667398	4632272228	3205268935	2360043907	7936333699	2316136114
	1602634467	6180021953	8968166849	6158068057	0801317233	8090010976	....	

VERWANDLUNG GEMEINER BRÜCHE IN DECIMALBRÜCHE.

919	1088139281	8280739934	7116430903	1556039173	0141458106	6376496191	5125136017	4102285092
	4918389553	8628944504	8966267682	2633297062	0239390642	0021762785	6365614798	6942328618
	0631120783	4602829162	1327529923	8302502720	3482045701	8498367791	0772578890	0979325353
	6452665941	2404787812	8400435255	7127312295	9738846572	3612622415	6692056583	2426550598
	4766050054	4069640914	0369967355	8215451577	8019586507	0729053318	8248095756	2568008705
	1142546245	9194776931	4472252448	3133841131	6648531011	9695321001	....	
929	1076426264	8008611410	1184068891	2809472551	1302475780	4090419806	2432723358	4499461786
	8675995694	2949407965	5543595263	7244348762	1097954790	0968783638	3207750269	1065662002
	1528525296	0172228202	3681377825	6189451022	6049515608	1808396124	8654467168	9989235737
	3519913885	8988159311	0871905274	4886975242	1959095801	9375672766	4155005382	1313240043
	0570505920	3444564047	3627556512	3789020452	0990312163	6167922497	3089343379	9784714747
	0398277717	9763186221	7438105489	7739504843	9181916038	7513455328	3100107642	....
937	1067235859	1248665955	1760939167	5560298826	0405549626	4674493062	9669156883	6712913553
	8954108858	0576307363	9274279615	7950907150	4802561366	0618996798	2924226254	0021344717
	1824973319	1035218783	3511205976	5208110992	5293489861	2593383137	6734258271	0779082177
	1611526147	2785485592	3159018143	0096051227	3212379935	9658484525	0800426894	3436499466
	3820704375	6670224119	5304162219	8505869797	2251867662	7534685165	4215581643	5432230522
	9455709711	8463180362	8601921024	5464247598	7193169690	5016008537	8868729989	3276414087
	5133404482	3906083244	3970117395	9445037353	2550693703	3084311632	8708644610	4589114194
	2369263607	2572038420	4909284951	9743863393	8100320170	7577374599	7865528281	7502668089
	6478121664	8879402347	9188900747	0651013874	0661686232	6574172892	2091782283	8847385272
	1451440768	4098185699	0394877267	8762006403	4151547491	9957310565	6350053361	7929562433
	2977588046	9583778014	9413020277	4813233724	6531483457	8441835645	6776947705	4429028815
	3681963713	9807897545	3575240128	0683030949	8399146211	3127001067	....	
941	1062699256	1105207226	3549415515	4091392136	0255047821	4665249734	3251859723	6981934112
	6461211477	1519659936	2380446333	6875664187	0350690754	5164718384	6971307120	0850159404
	8884165781	0839532412	3273113708	8204038257	1732199787	4601487778	9585547290	1168969181
	7215727948	9904357066	9500531349	6280552603	6131774707	7577045696	0680127523	9107332624
	8671625929	8618490967	0563230605	7385759829	9681190223	1668437832	0935175345	3772582359
	1923485653	5600425079	7024442082	8905419766	2061636556	8544102019	1285866099	8937300743
	8894792773	6450584484	5908607863	9744952178	5334750265	6748140276	3018065887	3538788522
	8480340063	7619553666	3124335812	9649309245	4835281615	3028692879	9149840595	1115834218
	9160467587	6726886291	1795961742	8267800212	5398512221	0414452709	8831030818	2784272051
	0095642933	0499468650	3719447396	3868225292	2422954303	9319872476	0892667375	1328374070
	1381509032	9436769394	2614240170	0318809776	8331562167	9064824654	6227417640	8076514346
	4399574920	2975557917	1094580233	7938363443	1455897980	8714133900	1062699256	....

947	1055966209	0813093980	9926082365	3643083421	3305174234	4244984160	5068637803	5902851108
	7645195353	7486800422	3864836325	2375923970	4329461457	2333685322	0696937697	9936642027
	4551214361	1404435058	0781414994	7201689545	9345300950	3695881731	7845828933	4741288278
	7750791974	6568109820	4857444561	7740232312	5659978880	6758183738	1203801478	3526927138
	3315733896	5153115100	3167898627	2439281942	9778247096	0929250263	9915522703	2734952481
	5205913410	7708553326	2935586061	2460401267	1594508975	7127771911	2988384371	7001055966
	....							
953	1049317943	3368310598	1112277019	9370409233	9979013641	1332633788	0377754459	6012591815
	3200419727	1773347324	2392444910	8079748163	6935991605	4564533053	5152151101	7838405036
	7261280167	8908709338	9296956977	9643231899	2654774396	6421825813	2214060860	4407135362
	0146904512	0671563483	7355718782	7911857292	7597061909	7586568730	3252885624	3441762854
	1448058761	8048268625	3934942287	5131164742	9171038824	7639034627	4921301154	2497376705
	1416579223	5047219307	4501573976	9150052465	8971668415	5299055613	8509968520	4616998950
	6820566631	6894018887	7229800629	5907660020	9863588667	3662119622	2455403987	4081846799
	5802728226	6526757607	5550891920	2518363064	0083945435	4669464847	8488982161	5949632738
	7198321091	2906610703	0430220356	7681007345	2256033578	1741867785	9391395592	8646379853
	0954879328	4365162644	2812172088	1427072402	9389902413	4312696747	1143756558	2371458551
	9412381951	7313746065	0577124868	8352570828	9611752360	9653725078	6988457502	6232948583
	4207764952	7806925498	4260230849	9475341028	3315844700	9443861490	0314795383	0010493179
	....							
961	1040582726	3267429760	6659729448	4911550468	2622268470	3433922996	8782518210	1977107180
	0208116545	2653485952	1331945889	6982310093	6524453694	0686784599	3756503642	0395421436
	0041623309	0530697190	4266389177	9396462018	7304890738	8137356919	8751300728	4079084287
	2008324661	8106139438	0853277835	5879292403	7460978147	7627471383	9750260145	6815816857
	4401664932	3621227887	6170655567	1175858480	7492195629	5525494276	7950052029	1363163371
	4880332986	4724245577	5234131113	4235171696	1498439125	9105098855	3590010405	....
967	1034126163	3919338159	2554291623	5780765253	3609100310	2578490175	8014477766	2874870734
	2295760082	7300930713	5470527404	3433298862	4612202688	7280248190	2792140641	1582213029
	9896587383	6608066184	0744570837	6421923474	6639089968	9762150982	4198552223	3712512926
	5770423991	7269966928	6452947259	5656670113	7538779731	1271975180	9720785935	8841778697
	0010341261	....						

971	1029866117	4047373841	4006179196	7044284243	0484037075	1802265705	4582904222	4510813594
	2327497425	3347064881	5653964984	5520082389	2893923789	9073120494	3357363542	7394438722
	9660144181	2564366632	3377960865	0875386199	7940267765	1905252317	1987641606	5911431513
	9031925849	6395468589	0834191555	0978372811	5345005149	3305870236	8692070030	8959835221
	4212152420	1853759011	3285272914	5211122554	0679711637	4871266735	3244078269	8249227600
	4129464469	6189495365	6024716786	8177136972	1936148300	7209062821	8331616889	8043254376
	9309989701	3388259526	2615859938	2080329557	1575695159	6292481977	3429454170	9577754891
	8640576725	0257466529	3511843460	3561544799	1761071060	7621009268	7950566426	3645726055
	6127703398	5581874356	3336766220	3913491246	1380020597	3223480947	4768280123	5839340885
	6848669680	7415036045	3141091658	0844490216	2718846549	9485066941	2976313079	2996910401
	6477857878	4757981462	4098867147	2708547888	7744593202	8836251287	3326467559	2173017507
	7239958805	3553038105	0463439752	8321318228	6302780638	5169927909	3717816683	8311019567
	4562306900	1029866117	....					
977	1023541453	4288638689	8669396110	5424769703	1729785056	2947799385	8751279426	8167860798
	3623336745	1381780962	1289662231	3203684749	2323439099	2835209825	9979529170	9314227226
	2026612077	7891504605	9365404298	8741044012	2824974411	4636642784	0327533265	0972364380
	7574206755	3735926305	0153531218	0143295803	4800409416	5813715455	4759467758	4442169907
	8812691914	0225179119	7543500511	7707267144	3193449334	6980552712	3848515864	8925281473
	8996929375	6397134083	9303991811	6683725690	8904810644	8311156601	8423746161	7195496417
	6049129989	7645854657	1136131013	3060388945	7523029682	7021494370	5220061412	4872057318
	3213920163	7666325486	1821903787	1033776867	9631525076	7656090071	6479017400	2047082906
	8577277379	7338792221	0849589406	3459570112	5895598771	7502558853	6335721596	7246673490
	2763561924	2579324462	6407369498	4646878198	5670419651	9959058341	8628454452	4053224155
	5783009211	8730808597	7482088024	5649948822	9273285568	0655066530	1944728761	5148413510
	7471852610	0307062436	0286591606	9600818833	1627430910	9548935516	8884339815	7625383828
	0450358239	5087001023	....					
983	1017293997	9654120040	6917599186	1648016276	7039674465	9206510681	5869786368	2604272634
	7914547304	1709053916	5818921668	3621566632	7568667344	8626653102	7466937945	0661241098
	6775178026	4496439471	0071210579	8575788402	8484231943	0315361139	3692777212	6144456747
	7110885045	7782299084	4354018311	2919633774	1607324516	7853509664	2929806714	1403865717
	1922685656	1546286876	9074262461	8514750762	9704984740	5900305188	1993896236	0122075279
	7558494404	8830111902	3397761953	2044760935	9104781281	7904374364	1912512716	1749745676
	5005086469	9898270600	2034587995	9308240081	3835198372	3296032553	4079348931	8413021363
	4739572736	5208545269	5829094608	3418107833	1637843336	7243133265	5137334689	7253306205
	4933875890	1322482197	3550356052	8992878942	0142421159	7151576805	6968463886	0630722278
	7385554425	2288911495	4221770091	5564598168	8708036622	5839267548	3214649033	5707019328
	5859613428	2807731434	3845371312	3092573753	8148524923	7029501525	9409969481	1800610376
	3987792472	0244150559	5116988809	7660223804	6795523906	4089521871	8209562563	5808748728
	3825025432	3499491353	0010172939	....				

991	1009081735	6205852674	0665993945	5095862764	8839556004	0363269424	8234106962	6639757820
	3834510595	3582240161	4530776992	9364278506	5590312815	3380423814	3289606458	1231079717
	4571140262	3612512613	5216952573	1584258324	9243188698	2845610494	4500504540	8678102926
	3370332996	9727547931	3824419778	0020181634	7124117053	4813319878	9101917255	2976791120
	0807265388	4964682139	2532795156	4076690211	9071644803	2290615539	8587285570	1311806256
	3067608476	2865792129	1624621594	3491422805	2472250252	2704339051	4631685166	4984863773
	9656912209	8890010090	....					
997	1003009027	0812437311	9358074222	6680040120	3610832497	4924774322	9689067201	6048144433
	2998996990	9729187562	6880641925	7773319959	8796389167	5025075225	6770310932	7983951855
	5667001003	....						

TAFEL

DER

FREQUENZ DER PRIMZAHLEN.

NACHLASS.

1	168	51	89	101	81	151	85	201	77	251	71	301	85	351	74	401	70	451	92
2	135	52	97	102	93	152	90	202	87	252	88	302	83	352	80	402	71	452	76
3	127	53	89	103	87	153	88	203	78	253	78	303	72	353	82	403	76	453	63
4	120	54	92	104	80	154	77	204	78	254	81	304	84	354	76	404	75	454	72
5	119	55	90	105	91	155	84	205	77	255	76	305	88	355	87	405	70	455	74
6	114	56	93	106	82	156	85	206	85	256	87	306	80	356	79	406	83	456	82
7	117	57	99	107	92	157	76	207	83	257	72	307	82	357	67	407	67	457	73
8	107	58	91	108	76	158	88	208	87	258	78	308	73	358	80	408	81	458	77
9	110	59	90	169	91	159	87	209	85	259	86	309	76	359	83	409	79	459	75
10	112	60	94	110	88	160	85	210	88	260	76	310	80	360	71	410	82	460	68
11	106	61	88	111	83	161	85	211	84	261	77	311	79	361	68	411	73	461	77
12	103	62	87	112	84	162	84	212	86	262	73	312	69	362	79	412	81	462	69
13	109	63	88	113	81	163	81	213	69	263	79	313	86	363	76	413	74	463	74
14	105	64	93	114	88	164	83	214	81	264	84	314	86	364	84	414	69	464	77
15	102	65	80	115	82	165	77	215	86	265	80	315	76	365	77	415	90	465	85
16	108	66	98	116	93	166	80	216	74	266	78	316	77	366	77	416	80	466	74
17	98	67	84	117	81	167	81	217	76	267	87	317	84	367	85	417	67	467	69
18	104	68	99	118	90	168	83	218	80	268	94	318	84	368	79	418	82	468	83
19	94	69	80	119	79	169	73	219	84	269	75	319	81	369	72	419	85	469	85
20	102	70	81	120	87	170	87	220	91	270	78	320	86	370	68	420	75	470	72
21	98	71	98	121	88	171	87	221	78	271	84	321	79	371	70	421	75	471	87
22	104	72	95	122	86	172	81	222	80	272	78	322	80	372	76	422	73	472	78
23	100	73	90	123	88	173	89	223	81	273	83	323	81	373	81	423	77	473	73
24	104	74	83	124	88	174	79	224	80	274	71	324	71	374	73	424	83	474	78
25	94	75	92	125	83	175	83	225	83	275	80	325	87	375	82	425	81	475	80
26	98	76	91	126	84	176	75	226	84	276	83	326	85	376	85	426	74	476	86
27	101	77	83	127	83	177	95	227	76	277	83	327	73	377	80	427	71	477	75
28	94	78	95	128	86	178	73	228	80	278	74	328	86	378	71	428	78	478	69
29	98	79	84	129	89	179	89	229	89	279	81	329	73	379	77	429	71	479	85
30	92	80	91	130	83	180	94	230	88	280	73	330	81	380	83	430	89	480	71
31	95	81	88	131	85	181	71	231	84	281	87	331	80	381	72	431	76	481	77
32	92	82	92	132	83	182	79	232	78	282	85	332	82	382	76	432	79	482	78
33	106	83	89	133	87	183	91	233	76	283	77	333	72	383	74	433	84	483	82
34	100	84	84	134	82	184	79	234	71	284	72	334	80	384	81	434	80	484	75
35	94	85	87	135	80	185	83	235	87	285	90	335	77	385	78	435	85	485	65
36	92	86	85	136	89	186	91	236	73	286	77	336	77	386	80	436	82	486	63
37	99	87	88	137	96	187	79	237	76	287	71	337	84	387	78	437	73	487	82
38	94	88	93	138	80	188	87	238	73	288	71	338	80	388	69	438	70	488	78
39	90	89	76	139	85	189	80	239	87	289	85	339	77	389	75	439	75	489	83
40	96	90	94	140	84	190	88	240	79	290	84	340	68	390	84	440	75	490	78
41	88	91	89	141	87	191	75	241	80	291	84	341	84	391	81	441	79	491	78
42	101	92	85	142	87	192	81	242	91	292	77	342	77	392	79	442	72	492	76
43	102	93	97	143	82	193	89	243	76	293	78	343	77	393	86	443	85	493	67
44	85	94	86	144	77	194	84	244	77	294	68	344	80	394	87	444	88	494	82
45	96	95	87	145	79	195	74	245	78	295	85	345	80	395	75	445	82	495	80
46	86	96	95	146	85	196	85	246	80	296	75	346	76	396	72	446	68	496	87
47	90	97	84	147	84	197	76	247	84	297	82	347	80	397	75	447	68	497	68
48	95	98	82	148	83	198	87	248	79	298	73	348	82	398	75	448	73	498	81
49	89	99	87	149	83	199	96	249	88	299	73	349	77	399	82	449	70	499	72
50	98	100	87	150	91	200	77	250	80	300	78	350	82	400	81	450	80	500	81

FREQUENZ DER PRIMZAHLEN.

501	78	551	79	601	75	651	61	701	75	751	68	801	85	851	70	901	74	951	76
502	74	552	75	602	73	652	74	702	71	752	85	802	66	852	77	902	73	952	70
503	67	553	71	603	85	653	85	703	81	753	73	803	70	853	74	903	70	953	78
504	76	554	80	604	76	654	69	704	71	754	71	804	69	854	66	904	63	954	65
505	76	555	77	605	73	655	78	705	87	755	83	805	78	855	71	905	81	955	73
506	83	556	61	606	74	656	73	706	68	756	70	806	79	856	73	906	70	956	76
507	76	557	88	607	72	657	71	707	82	757	66	807	68	857	78	907	80	957	58
508	71	558	68	608	78	658	70	708	74	758	68	808	70	858	76	908	80	958	69
509	76	559	74	609	78	659	79	709	77	759	79	809	69	859	69	909	79	959	77
510	75	560	77	610	80	660	73	710	77	760	77	810	78	860	71	910	82	960	69
511	72	561	86	611	73	661	83	711	78	761	77	811	78	861	77	911	62	961	68
512	82	562	61	612	71	662	70	712	76	762	80	812	72	862	74	912	81	962	88
513	70	563	83	613	76	663	74	713	72	763	68	813	69	863	83	913	71	963	71
514	77	564	67	614	79	664	77	714	73	764	79	814	72	864	60	914	54	964	74
515	81	565	77	615	71	665	77	715	66	765	72	815	78	865	80	915	73	965	74
516	66	566	78	616	75	666	77	716	83	766	82	816	69	866	80	916	70	966	70
517	85	567	72	617	85	667	73	717	69	767	78	817	75	867	68	917	72	967	73
518	83	568	72	618	81	668	73	718	65	768	68	818	75	868	78	918	79	968	66
519	76	569	71	619	67	669	66	719	67	769	77	819	62	869	80	919	75	969	75
520	78	570	80	620	73	670	74	720	74	770	74	820	83	870	73	920	71	970	73
521	73	571	85	621	77	671	75	721	78	771	77	821	75	871	79	921	72	971	76
522	83	572	72	622	70	672	76	722	77	772	75	822	72	872	58	922	72	972	78
523	79	573	85	623	74	673	76	723	73	773	70	823	84	873	76	923	72	973	74
524	69	574	72	624	75	674	77	724	86	774	76	824	78	874	65	924	81	974	63
525	77	575	70	625	68	675	69	725	75	775	72	825	71	875	75	925	76	975	85
526	79	576	77	626	69	676	75	726	69	776	67	826	81	876	80	926	80	976	70
527	84	577	78	627	70	677	74	727	76	777	70	827	78	877	75	927	74	977	66
528	72	578	77	628	70	678	63	728	75	778	76	828	69	878	67	928	63	978	60
529	70	579	76	629	71	679	82	729	76	779	81	829	69	879	68	929	70	979	80
530	78	580	77	630	75	680	83	730	75	780	71	830	68	880	75	930	80	980	65
531	80	581	73	631	67	681	75	731	69	781	70	831	76	881	80	931	69	981	67
532	68	582	79	632	81	682	78	732	76	782	82	832	79	882	69	932	69	982	75
333	79	583	73	633	77	683	66	733	71	783	68	833	82	883	72	933	76	983	70
534	74	584	78	634	70	684	78	734	75	784	74	834	68	884	73	934	68	984	70
535	72	585	72	635	82	685	72	735	74	785	75	835	67	885	69	935	81	985	74
536	71	586	81	636	78	686	74	736	79	786	77	836	73	886	77	936	68	986	76
537	87	587	79	637	73	687	74	737	69	787	70	837	71	887	76	937	71	987	76
538	67	588	87	638	74	688	82	738	78	788	73	838	64	888	71	938	71	988	63
539	78	589	73	639	59	689	74	739	70	789	80	839	80	889	77	939	72	989	71
540	71	590	68	640	72	690	79	740	81	790	68	840	69	890	68	940	68	990	72
541	73	591	71	641	77	691	60	741	67	791	78	841	70	891	68	941	74	991	71
542	77	592	67	642	71	692	79	742	74	792	71	842	69	892	80	942	79	992	79
543	78	593	80	643	68	693	77	743	73	793	82	843	83	893	69	943	72	993	65
544	81	594	77	644	70	694	73	744	67	794	71	844	68	894	72	944	76	994	68
545	68	595	78	645	86	695	76	745	64	795	73	845	78	895	74	945	73	995	78
546	68	596	77	646	75	696	77	746	67	796	79	846	70	896	80	946	66	996	69
547	73	597	79	647	74	697	73	747	76	797	77	847	69	897	64	947	72	997	69
548	76	598	73	648	79	698	79	748	71	798	72	848	77	898	75	948	66	998	83
549	77	599	72	649	73	699	62	749	76	799	71	849	75	899	76	949	67	999	74
550	78	600	73	650	84	700	72	750	72	800	81	850	68	900	61	950	75	1000	65

1000000 . . . 1100000

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	1										1
2		1				1		1	1		4
3		4	2	2	3	1	2	3	3	1	21
4	2	8	5	4	3	6	9	4	5	8	54
5	11	10	8	18	12	10	10	12	15	8	114
6	14	14	18	21	16	22	19	15	17	15	171
7	26	17	23	23	24	24	17	22	20	21	217
8	19	19	21	7	14	15	20	17	15	17	164
9	11	13	9	13	14	14	12	13	11	16	126
10	8	6	8	5	9	5	5	9	7	9	71
11	6	6	4	6	3	1	3	1	4	5	39
12	1	1	2	1	1	1	2	2	1		12
13	1	1			1		1	1	1		6
14											
15											
16											
	752	719	732	700	731	698	713	722	706	737	7210

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 7212{,}99$$

1200000 . . . 1300000

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0											
1								1	1		2
2	2		2	1						1	6
3	3	2	4	5	4	3	1	4	3	3	32
4	7	7	7	3	5	7	12	2	3	10	63
5	15	12	12	15	10	14	9	15	6	12	120
6	16	14	13	19	17	16	16	15	20	14	160
7	24	15	25	24	21	20	15	22	24	24	214
8	17	19	16	11	17	15	22	18	19	14	168
9	8	12	7	10	12	13	14	13	13	9	111
10	3	11	10	8	10	4	5	3	9	10	73
11	3	6	3	2	3	5	3	6	1	3	35
12	1	1	1			1	3	1	1		9
13	1	1		1		2					5
14				1							1
16					1						1
	676	744	693	693	724	713	718	709	722	689	7081

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 7123{,}35$$

1100000 . . . 1200000

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
0											0
1					1						1
2			1				1	1		2	5
3	4	3	3	3	3	3	3	2		1	25
4	5	6	7	5	9	4	4	5	6	6	57
5	8	13	10	12	11	11	9	12	12	9	107
6	14	20	17	20	17	17	18	16	17	14	170
7	21	19	22	19	21	21	20	18	29	27	217
8	22	13	10	12	18	20	17	19	9	20	160
9	13	14	16	17	7	11	16	14	12	11	131
10	9	6	10	10	8	9	6	8	3	8	77
11	1	4	2	2	2	1	4	5	9	2	32
12	1	1	1		2	3	1		2		11
13	1	1	1				1		1		5
14	1				1						2
	736	710	716	713	697	725	729	723	735	710	7194

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 7165{,}911$$

1300000 . . . 1400000

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1						1					1
2		1	1		1	1	1	2	1	1	9
3	3	1	1	3	2	2	2		5		19
4	3	10	7	11	6	8	7	6	6	5	69
5	17	13	11	11	15	12	8	8	14	10	119
6	15	14	17	14	20	18	23	17	16	19	173
7	22	18	26	18	21	16	16	28	19	23	207
8	14	22	14	16	14	13	21	17	15	15	161
9	17	11	12	14	12	9	12	7	13	13	120
10	5	6	2	11	5	15	5	8	6	7	70
11	4	2	7	1	1	3	3	6	3	3	33
12		1	2	1	2	2	2	1	1	3	15
13		1			1				1		3
14										1	1
	709	702	733	705	692	713	709	723	695	737	7098

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 7084{,}48$$

1400000 . . . 1500000

	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	
0											0
1			1		1	1	1			1	5
2		1	1		2				2	1	7
3	3	3	0	2	1	2	2	4	2	0	19
4	8	8	8	4	6	7	9	9	5	8	72
5	17	9	7	14	13	11	14	15	16	13	129
6	21	23	20	18	20	19	11	16	16	19	183
7	17	23	18	18	13	24	18	11	15	22	179
8	12	16	28	17	24	14	17	18	23	14	183
9	12	11	4	15	6	10	13	12	7	8	98
10	7	2	7	7	9	7	8	9	8	9	73
11	2	2	2	4	2	3	6	5	4	4	34
12	1	2	3	1	2	2	1	1	2	1	16
13			1		1						2
	679	680	717	723	703	701	716	705	706	698	7028

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 7048{,}78186$$

1600000 . . . 1700000

	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	
0								1			1
1						2					2
2	1	3	1		1	1	2			2	11
3	3	3	3	4	4	2	2	4	4		29
4	7	4	9	7	7	10	4	4	10	6	68
5	10	11	8	12	11	11	13	12	18	14	120
6	18	22	15	19	15	11	14	19	10	16	159
7	22	15	14	21	25	18	22	24	24	18	203
8	14	23	25	15	17	16	17	15	13	19	174
9	8	12	18	12	12	21	12	8	14	13	130
10	7	2	5	8	4	6	11	7	4	9	63
11	7	3	1	1	3	1	3	2	2	3	26
12	2	1	1	1				4			9
13	1				1				1		3
14		1									1
15						1					1
	719	694	710	692	692	700	716	702	675	712	7012

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 6985{,}13714$$

1500000 . . . 1600000

	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	
0											0
1						1	1				2
2			1	1	2		2		1	3	10
3	2		4	2	2	3	5	3	6	1	28
4	8	5	5	7	9	13	6	10	7	7	77
5	8	19	9	13	11	9	12	15	11	17	124
6	16	20	25	21	20	12	26	14	23	22	199
7	19	21	18	19	18	15	12	19	11	20	172
8	19	12	15	18	15	17	10	17	15	11	149
9	16	14	16	12	8	17	15	6	11	9	124
10	8	3	5	4	9	7	5	10	10	2	63
11		5	2	2	3	3	3	2	4	5	29
12	4			1	3	1	1	4	1	2	17
13		1				2	2			1	6
	731	702	691	686	698	714	680	701	693	675	6971

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 7015{,}78776$$

1700000 . . . 1800000

	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	
0											0
1				1							1
2	1					2	1			1	5
3	3	4		3	3	4	3	5	3	2	30
4	7	9	6	6	5	8	6	6	10	7	70
5	13	15	19	16	12	15	21	13	13	15	152
6	17	16	22	22	20	14	15	13	18	17	174
7	23	21	22	15	22	19	19	21	17	15	194
8	11	16	11	15	16	15	13	18	19	13	147
9	18	11	8	11	15	10	12	14	10	15	124
10	3	1	8	7	2	9	6	9	5	11	61
11	1	3	3	1	3	4	4	1	4	2	26
12	2	3		1	1				1	2	10
13	1	1	1	2							5
14											
15					1						1
	695	685	691	689	706	684	679	700	689	713	6931

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 6956{,}53562$$

1800000 . . . 1900000

	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	
0											
1											
2	1	1	2	1		2				3	10
3	3	2	1	5	1	1	1	2	3	3	22
4	6	5	10	12	7	6	5	5	8	7	71
5	14	15	10	11	11	12	19	17	12	14	135
6	13	20	14	15	21	19	16	19	23	15	175
7	25	26	18	17	21	21	20	22	19	17	206
8	15	19	13	18	22	15	19	15	11	14	161
9	10	7	19	13	9	8	10	12	10	15	113
10	9	4	8	6	6	13	4	6	8	10	74
11	2		4			3	5	2	5	2	23
12	2	1	1	2	2		1		1		10
13											
14											
	704	672	718	674	700	707	703	689	697	691	6955

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 6929{,}73917$$

2000000 . . . 2100000

	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	
0											
1					2	1					3
2			2	2	1			2	2	1	10
3	3	3	5	2	2	3	4	5	2	3	32
4	7	8	9	4	8	5	6	7	9	6	69
5	13	10	9	15	13	10	12	13	9	15	119
6	25	20	13	16	26	23	25	14	17	18	197
7	10	22	23	25	13	23	18	23	25	22	204
8	13	17	15	22	12	13	12	16	18	19	157
9	16	15	11	4	11	12	11	14	11	10	115
10	10	2	8	6	11	7	7	3	3	6	63
11	2	1	5	3		1	3	3	3		21
12		2			1	2	2		1		8
13	1			1							2
	705	691	693	690	671	696	694	674	686	674	6874

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 6880{,}780$$

1900000 . . . 2000000

	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	
0											
1	1										1
2			1			1	2		1		5
3	4	3	1	2	10	1	3	4	4	2	34
4	5	4	4	6	4	9	7	10	11	7	67
5	12	18	15	18	11	12	11	16	11	12	136
6	19	20	18	16	17	24	20	20	18	10	182
7	21	20	23	27	20	16	25	17	21	31	221
8	16	10	16	14	14	18	17	15	8	20	148
9	15	14	8	8	9	12	8	8	15	6	103
10	5	6	8	6	11	4	5	5	6	6	62
11	2	4	6	2	3	2	1	3	2	5	30
12		1		1				2	1		5
13					1		1		1		3
14						1			1	1	3
	689	697	711	683	692	685	673	670	688	714	6902

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 6904{,}54424$$

2100000 . . . 2200000

	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	
0											
1		1					1				2
2	1	1	1			1	1	1	1	2	9
3	5	3	3	1	4		2	3	2	4	27
4	7	7	2	13	5	3	9	6	9	8	69
5	12	14	20	16	16	12	17	13	12	14	146
6	12	20	17	14	16	25	16	23	21	19	183
7	19	14	18	23	26	22	18	22	22	17	201
8	22	21	20	20	12	16	20	10	12	15	168
9	12	10	8	7	9	10	7	13	16	17	109
10	6	5	6	2	7	7	8	5	2	4	52
11	3	2	3	1	4	2	1		2		18
12	1	1	1	1	1	2		2			9
13		1	1	1					1		4
14				1				2			3
	699	683	697	673	693	712	666	691	679	664	6857

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 6858{,}292$$

2200000 . . . 2300000

	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	
1					1				1		2
2			1	1		2			3	2	9
3	5	2	4	7	2	1	2	2	2	2	29
4	8	9	5	5	10	7	7	7	6	9	73
5	12	24	16	13	11	10	14	14	15	9	138
6	17	18	12	18	18	20	16	17	21	22	179
7	19	17	25	21	18	20	23	25	19	18	205
8	12	12	19	15	18	24	13	17	16	22	168
9	14	9	6	9	19	11	16	9	13	7	113
10	7	6	6	6	1	3	7	5		3	44
11	5	2	4	4	2	2	2	2	2	5	30
12	1	1	2	1				2	2	1	10
	701	660	695	680	683	688	701	694	662	685	6849

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 6836{,}977$$

2400000 . . . 2500000

	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	
1									1		1
2	2						1	1	2	3	9
3	4	6	4	4	1	5	3	5	3	2	37
4	12	8	7	7	9	7	10	8	6	4	78
5	13	14	17	19	15	12	18	11	11	17	147
6	18	16	21	20	18	22	18	18	20	22	193
7	21	16	19	20	17	17	21	22	19	17	189
8	10	16	14	14	21	17	10	17	16	16	151
9	8	13	9	11	7	12	6	11	12	13	102
10	9	6	5	4	6	4	8	6	7	3	58
11	2	4	3	1	4	1	4	1	2	1	23
12	1		1		1	1	1			2	7
13		1			1	2			1		5
	660	690	672	657	701	687	666	672	687	674	6766

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 6797{,}394$$

2300000 . . . 2400000

	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	
1	1	1	1		1						4
2			1		2	2	1	2	1	2	11
3	4	1	2	3	4	3	2	6	4	3	32
4	8	12	10	9	8	7	3	13	7	9	86
5	13	18	13	14	17	12	10	13	10	16	136
6	15	16	21	20	16	21	26	11	14	16	176
7	22	25	20	20	13	16	26	18	19	15	194
8	13	9	16	21	17	15	15	15	21	16	158
9	13	9	6	7	14	14	8	13	14	14	112
10	7	5	3	2	5	5	8	7	8	5	55
11	3	3	4	3	3	5	1	2	2	2	28
12	1		3	1						2	7
13		1									1
	690	662	672	671	666	690	691	660	705	680	6787

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 6816{,}706$$

2500000 . . . 2600000

	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	
1		1	1							1	3
2	1	2		1	1						5
3	4		6	6	2	2	1	2	8	4	35
4	7	18	9	7	8	6	10	7	8	8	88
5	10	11	7	15	15	23	16	16	10	13	136
6	22	14	20	21	20	15	18	19	20	25	194
7	24	17	12	20	22	22	23	15	13	12	180
8	18	15	20	9	16	18	16	20	19	19	170
9	8	10	13	7	9	7	6	12	6	10	88
10	2	5	8	10	5	4	7	4	9	4	58
11	1	5	3	2	2	1	2	3	5		24
12	1	1	1	2		2	1	2	1	2	13
13	2	1							1	2	6
	677	675	696	670	670	671	678	698	693	676	6804

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\log x} = 6778{,}960$$

2600000 . . . 2700000

	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	
0				1							1
1			2					2			4
2	1	2	1		2		1	2	1		10
3	3	6	2	2	4		3	3	3	2	28
4	9	6	6	12	3	7	7	8	6	7	71
5	11	15	14	11	13	17	22	16	18	21	158
6	26	17	14	18	23	19	20	24	19	15	195
7	23	11	27	20	21	21	21	14	22	21	201
8	14	23	16	13	15	16	12	8	12	13	142
9	9	10	13	16	10	10	5	10	5	8	96
10	3	6	5	4	2	8	2	5	8	10	53
11	1	1		1	3	1	4	4	5	2	22
12		3		2	4	1	1	4	1	1	17
13							1				1
14							1				1
	653	681	672	680	689	695	660	665	681	686	6762

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6761{,}332$$

2800000 . . . 2900000

	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	
1					1		1				2
2		2	4		5	2		1	1		15
3	2	4	4	3	4	3	1	3	2	4	30
4	9	7	6	9	7	8	10	11	10	8	85
5	14	7	14	14	7	16	19	16	18	15	140
6	18	17	20	13	23	18	16	18	15	21	179
7	24	24	21	20	20	27	22	23	21	22	222
8	13	18	9	20	13	12	9	12	12	14	132
9	10	17	12	12	8	6	14	9	10	11	109
10	7	4	6	3	5	7	5	5	8	3	53
11		1	3	3	5		1	2	1	2	18
12	2	1				1	2		2		8
13			1	2	2						5
14	1			1							2
	690	695	667	704	671	654	672	653	676	662	6744

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6728{,}220$$

2700000 . . . 2800000

	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	
1						1			1		2
2	2		2			2			1		7
3	4	5	6	5	4	4	4	3	3	5	43
4	9	7	16	7	8	9	8	8	12	11	95
5	10	14	13	14	13	12	13	17	11	18	135
6	24	18	15	28	19	20	15	21	18	17	195
7	18	22	15	20	24	16	23	19	22	9	188
8	13	10	13	12	15	13	20	19	15	15	145
9	9	9	10	4	11	12	9	7	8	8	87
10	6	9	6	7	5	8	7	2	7	10	67
11	3	3	4	2		2		3	1	6	24
12	1	3		1	1	1			1	1	9
13							1	1			2
14											
15											
16											
17	1										1
	679	695	644	657	672	671	684	666	662	684	6714

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6744{,}430$$

2900000 . . . 3000000

	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	
1		1							1		2
2		1	2	1	2	2		1	1	3	13
3	3	3	5	2	8	6	4	4	5	4	44
4	7	7	6	6	7	9	6	6	6	4	64
5	20	11	14	18	12	15	17	19	16	11	153
6	17	21	22	18	18	16	11	26	21	17	187
7	19	30	18	22	22	25	27	13	15	23	214
8	14	11	12	12	17	11	13	11	14	19	134
9	10	9	12	13	9	6	12	12	9	11	103
10	6	4	5	6	3	6	8	7	9	4	58
11	2	1	3	1		2	1		1	4	15
12	2	1		1	2	2		1	2		11
13			1								1
14											
15							1				1
	680	663	671	680	649	652	694	658	671	687	6705

$$\int \frac{dx}{\log x} = 6712{,}64$$

1000000 . . . 2000000

	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	
0							1				1
1	1	1	2	1	5	2	2	1		1	16
2	4	5	6	9	7	10	11	5	10	5	72
3	21	25	32	19	19	28	29	30	22	34	259
4	54	57	63	69	72	77	68	70	71	67	668
5	114	107	120	119	129	124	120	152	135	136	1256
6	171	170	160	173	183	199	159	174	175	182	1746
7	217	217	214	207	179	172	203	194	206	221	2030
8	164	160	168	161	183	149	174	147	161	148	1615
9	126	131	111	120	98	124	130	124	113	103	1180
10	71	77	73	70	73	63	63	61	74	62	687
11	39	32	35	33	34	29	26	26	23	30	307
12	12	11	9	15	16	17	9	10	10	5	114
13	6	5	5	3	2	6	3	5		3	38
14		2	1	1			1			3	8
15							1	1			2
16			1								1
	7210	7194	7081	7098	7028	6971	7012	6931	6955	6902	70382

$$\int \frac{dx}{\log x} = 70427{,}78$$

2000000 . . . 3000000

	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	
0							1				1
1	3	2	2	4	1	3	4	2	2	2	25
2	10	9	9	11	9	5	10	7	15	13	98
3	32	27	29	32	37	35	28	43	30	44	337
4	69	69	73	86	78	88	71	95	85	64	778
5	119	146	138	136	147	136	158	135	140	153	1408
6	197	183	179	176	193	194	195	195	179	187	1878
7	204	201	205	194	189	180	201	188	222	214	1998
8	157	168	168	158	151	170	142	145	132	134	1525
9	115	109	113	112	102	88	96	87	109	103	1034
10	63	52	44	55	58	58	53	67	53	58	561
11	21	18	30	28	23	24	22	24	18	15	223
12	8	9	10	7	7	13	17	9	8	11	99
13	2	4		1	5	6	1	2	5	1	27
14		3					1		2		6
15										1	1
16											
17								1			1
	6874	6857	6849	6787	6766	6804	6762	6714	6744	6705	67862

Die 26379te Centade enthält keine Primzahl
Die 27050te Centade enthält 17 Primzahlen.

$$\int \frac{dx}{\log x} = 67915{,}733$$

GAUSS AN ENCKE.

Hochzuverehrender Freund!

— — Die gütige Mittheilung Ihrer Bemerkungen über die Frequenz der Primzahlen ist mir in mehr als einer Beziehung interessant gewesen. Sie haben mir meine eigenen Beschäftigungen mit demselben Gegenstande in Erinnerung gebracht, deren erste Anfänge in eine sehr entfernte Zeit fallen, ins Jahr 1792 oder 1793, wo ich mir die Lambertschen Supplemente zu den Logarithmentafeln angeschafft hatte. Es war noch ehe ich mit feineren Untersuchungen aus der höhern Arithmetik mich befasst hatte eines meiner ersten Geschäfte, meine Aufmerksamkeit auf die abnehmende Frequenz der Primzahlen zu richten, zu welchem Zweck ich dieselben in den einzelnen Chiliaden abzählte, und die Resultate auf einem der angehefteten weissen Blätter verzeichnete. Ich erkannte bald, dass unter allen Schwankungen diese Frequenz durchschnittlich nahe dem Logarithmen verkehrt proportional sei, so dass die Anzahl aller Primzahlen unter einer gegebenen Grenze n nahe durch das Integral

$$\int \frac{dn}{\log n}$$

ausgedrückt werde, wenn der hyperbolische Logarithm. verstanden werde. In späterer Zeit, als mir die in Vega's Tafeln (von 1796) abgedruckte Liste bis 400031 bekannt wurde, dehnte ich meine Abzählung weiter aus, was jenes Verhältniss bestätigte. Eine grosse Freude machte mir 1811 die Erscheinung von Chernac's

cribrum, und ich habe (da ich zu einer anhaltenden Abzählung der Reihe nach keine Geduld hatte) sehr oft einzelne unbeschäftigte Viertelstunden verwandt, um bald hie bald dort eine Chiliade abzuzählen; ich liess jedoch zuletzt es ganz liegen, ohne mit der Million ganz fertig zu werden. Erst später benutzte ich Goldschmidt's Arbeitsamkeit, theils die noch gebliebenen Lücken in der ersten Million auszufüllen, theils nach Burckhardt's Tafeln die Abzählung weiter fortzusetzen. So sind (nun schon seit vielen Jahren) die drei ersten Millionen abgezählt, und mit dem Integralwerth verglichen. Ich setze hier nur einen kleinen Extract her:

Unter	gibt es Primzahlen	Integral $\int \frac{dn}{\log n}$	Abweich.	Ihre Formel	Abweich.
500000	41556	41606,4	+ 50,4	41596,9	+ 40,9
1000000	78501	79627,5	+ 126,5	78672,7	+ 171,7
1500000	114112	114263,1	+ 151,1	114374,0	+ 264,0
2000000	148883	149054,8	+ 171,8	149233,0	+ 350,0
2500000	183016	183245,0	+ 229,0	183495,1	+ 479,1
3000000	216745	216970,6	+ 225,6	217308,5	+ 563,5

Dass Legendre sich auch mit diesem Gegenstande beschäftigt hat, war mir nicht bekannt, auf Veranlassung Ihres Briefes habe ich in seiner *Théorie des Nombres* nachgesehen, und in der zweiten Ausgabe einige darauf bezügliche Seiten gefunden, die ich früher übersehen (oder seit dem vergessen) haben muss. Legendre gebraucht die Formel

$$\frac{n}{\log n - A}$$

wo A eine Constante sein soll, für welche er 1,08366 setzt. Nach einer flüchtigen Rechnung finde ich danach in obigen Fällen die Abweichung

$$\begin{array}{r} -\ 23,3 \\ +\ 42,2 \\ +\ 68,1 \\ +\ 92,8 \\ +159,1 \\ +167,6 \end{array}$$

Diese Differenzen sind noch kleiner als die mit dem Integral, sie scheinen aber bei zunehmendem n schneller zu wachsen als diese, so dass leicht möglich wäre, dass bei viel weiterer Fortsetzung jene die letztern überträfen. Um Zählung und Formel in Uebereinstimmung zu bringen müsste man respective anstatt $A = 1{,}08366$ setzen

1,09040
1,07682
1,07582
1,07529
1,07179
1,07297

Es scheint, dass bei wachsendem n der (Durchschnitts-)Werth von A abnimmt, ob aber die Grenze beim Wachsen des n ins Unendliche 1 oder eine von 1 verschiedene Grösse sein wird, darüber wage ich keine Vermuthung. Ich kann nicht sagen dass eine Befugniss da ist, einen ganz einfachen Grenzwerth zu erwarten; von der andern Seite könnte der Ueberschuss des A über 1 ganz füglich eine Grösse von der Ordnung $\frac{1}{\log n}$ sein. Ich würde geneigt sein zu glauben, dass das Differential der betreffenden Function einfacher sein muss, als die Function selbst. Indem ich für jene $\frac{\mathrm{d}n}{\log n}$ vorausgesetzt habe, würde Legendre's Formel eine Differentialfunction voraussetzen, die etwa $\frac{\mathrm{d}n}{\log n-(A-1)}$ wäre. Ihre Formel übrigens würde für ein sehr grosses n als mit

$$\frac{n}{\log n-\frac{1}{2k}}$$

übereinstimmend betrachtet werden können, wo k der Modulus der Briggi'schen Logarithmen ist, also mit Legendre's Formel, wenn man

$$A = \tfrac{1}{2k} = 1{,}1513 \text{ setzt.}$$

Endlich will ich noch bemerken, dass ich zwischen Ihren Abzählungen und den meinigen ein Paar Differenzen bemerkt habe.

Zwischen	59000 u.	60000	haben Sie 95	ich 94
	101000	102000	94	93

Die erste Differenz hat vielleicht ihren Grund darin, dass in Lambert's Suppl. die Primzahl 59023 zweimal aufgeführt ist. Die Chiliade von 101000—102000 wimmelt in Lambert's Supplementen von Fehlern, ich habe in meinem Exemplare 7 Zahlen angestrichen, die keine Primzahlen sind, und dagegen 2 fehlende ein-

geschaltet. Könnten Sie nicht den jungen Dase veranlassen, dass er die Primzahlen in den folgenden Millionen aus denjenigen bei der Akademie befindlichen Tafeln abzählte, die wie ich fürchte das Publikum nicht besitzen soll? Für diesen Fall bemerke ich, dass in der 2. und 3. Million die Abzählung auf meine Vorschrift nach einem besondern Schema gemacht ist, welches ich selbst auch schon bei einem Theile der ersten Million angewandt hatte. Die Abzählungen von je 100000 stehen auf Einer (klein) Octavseite in 10 Columnen, jede sich auf Eine Myriode beziehend; dazu kommt noch eine Columne davor (links) und eine dahinter rechts; als Beispiel hier eine Verticalcolumne und die beiden Zusatzcolumnen aus dem Intervall 1000000 ... 1100000 — — —

Zur Erläuterung diene z. B. die 1. Verticalreihe. In der Myriade 1000000 bis 1010000 sind 100 Hecatontaden; darunter ist 1 die nur eine Primzahl enthält; gar keine mit 2 oder 3; 2 Stück mit je 4 Primzahlen; 11 Stück mit je 5 u. s. w. alle zusammen geben $752 = 1.1 + 4.2 + 5.11 + 6.14 + ..$ Die letzte Columne enthält die Aggregate aus den 10 einzelnen. Die Zahlen 14. 15. 16 in der ersten Verticalreihe stehen hier nur zum Ueberfluss, da keine Hecatontaden mit so vielen Primzahlen vorkommen; aber auf den folgenden Blättern bekommen sie Geltung. Zuletzt werden wieder die 10 Seiten in 1 vereinigt, und umfassen so die ganze 2te Million.

Doch es ist Zeit abzubrechen. — — — Unter herzlichen Wünschen für Ihr Wohlbefinden

Stets der Ihrige

Göttingen, 24. December 1849. C. F. Gauss.

T A F E L

DER ANZAHL DER CLASSEN

BINÄRER QUADRATISCHER FORMEN.

NACHLASS.

Centas 1.

G. I....(17)..(61)	
1	1. 2. 3. 4. 7
3	11. 19. 23. 27. 31. 43. 67
5	47. 79
7	71
9	59. 83
G. II..(58)..(280)	
1	5. 6. 8. 9. 10. 12. 13. 15. 16. 18. 22. 25. 28. 37. 58
2	14. 17. 20. 32. 34. 36. 39. 46. 49. 52. 55. 63. 64. 73. 82. 97. 100
3	26. 29. 35. 38. 44. 50. 51. 53. 54. 61. 75. 76. 81. 87. 91. 92. 99
4	41. 62. 68. 94. 95. 98
5	74. 86
6	89
G. IV..(25)..(136)	
1	21. 24. 30. 33. 40. 42. 45. 48. 57. 60. 70. 72. 78. 85. 88. 93
2	56. 65. 66. 69. 77. 80. 84. 90. 96
Summa	233...477
Irreg. 0	Impr. 74

Centas 2.

G. I......(11)..(101)	
3	163
5	103. 127
7	151
9	107. 139. 199
11	167
13	191
15	131. 179
G. II.....(46)..(406)	
2	142. 148. 193
3	106. 108. 109. 115. 118. 121. 123. 124. 135. 147. 157. 162. 169. 172. 175. 187
4	111. 113. 128. 137. 158. 178. 183. 196
5	119. 122. 125. 143. 159. 166. 181. 188. 197
6	116. 155. 171
7	101. 134. 149. 273
8	146. 164
10	194
G. IV....(39)..(356)	
1	102. 112. 130. 133. 177. 190
2	114. 117. 126. 132. 136. 138. 141. 144. 145. 150. 153. 154. 156. 160. 180. 184. 192. 198
3	104. 110. 129. 140. 152. 170. 174. 176. 182. 186. 189. 195. 200
4	161. 185
G. VIII...(4)...(32)	
1	105. 120. 165. 168
Summa	291 ... 895
Irreg. 0	

Centas 3.

G. I........(9).....(109)	
7	223
9	211. 243(*3*). 283
11	271
13	263
15	227. 239
21	251
G. II.......(42)......(482)	
3	202. 207. 214. 235. 247. 262. 267. 268. 277. 298
4	226. 256. 289. 292. 295
5	218. 229. 242. 250
6	203. 212. 219. 233. 241. 244. 259. 274. 275. 279. 291
7	215. 278. 284. 287
8	254. 257
9	236. 293
10	206. 281
11	269
12	299
G. IV.....(43).....(512)	
1	232. 253
2	205. 208. 213. 217. 220. 225. 228. 238. 252. 258. 265. 282. 288
3	201. 204. 216. 222. 231. 234. 237. 245. 246. 249. 255. 261. 270. 286. 294. 297. 300
4	221. 224. 248. 260. 272. 276
5	209. 230. 266. 290. 296
G. VIII.....(6)......(64)	
1	210. 240. 273. 280
2	264. 285
Summa	313.....1167
Irreg. 1	Impr. 183.

Centas 4.

G. I........(9).....(113)	
7	343
9	307(*3*). 331. 367. 379
15	347
17	383
19	311. 359
G. II......(40).....(554)	
3	358. 397
4	313. 337. 382. 388
5	303. 316. 317. 319. 346. 361. 373. 375. 394
6	302. 323. 324. 327. 334. 351. 355. 363. 387
7	338. 349. 391
8	353
9	332. 335. 339(*3*). 362
10	386. 398
11	326. 389
12	356. 371. 395
13	314
G. IV.....(43).....(608)	
2	301. 310. 322. 328. 333. 340. 352. 372. 400
3	304. 309. 315. 318. 325. 342. 348. 364. 366. 368. 370. 378. 393. 396
4	305. 306. 308. 320. 350. 354. 369. 376. 377. 380. 384. 392. 399
5	321. 344. 365. 381.
6	329
7	341. 374
G. VIII....(8)......(88)	
1	312. 330. 345. 357. 385
2	336. 360. 390
Summa	325.....1363
Irreg. 2	Impr. 229

DETERMINANTES NEGATIVI.

Centas 5.

G. I.....(10)..(174)	
7	463. 487
9	499
15	439. 443
21	431. 467
25	479
27	419. 491
G. II....(33)..(512)	
3	403. 427
4	457. 466. 478
5	412. 415. 421. 422. 423
6	433. 436. 475. 484
7	447. 454
8	407. 409. 452. 471
9	411. 428. 451. 459(*). 486
10	401. 449. 482. 500
13	458
14	404
15	461
16	446
G. IV....(49)..(760)	
2	418. 438. 442. 445. 448. 498
3	405. 417. 424. 430. 432. 435. 450. 453. 460. 472. 473. 477. 483. 490. 492. 493. 496
4	402. 406. 410. 414. 441. 444. 468. 469. 481. 485. 495
5	413. 437. 455. 470. 474. 476. 488. 489
6	416. 425. 426. 434. 464. 497
7	494
G. VIII...(8)..(120)	
1	408. 462
2	420. 429. 456. 465. 480
3	440
Summa	336 .. 1566
Irreg. 1	

Centas 6.

G. I.......(7)..(133)	
9	547
15	523. 571
21	503. 587
25	599
27	563
G. II....(40)..(724)	
4	562. 577. 583
5	508. 538. 541
6	507. 526. 529. 543. 567
7	502. 511. 535
8	512. 514. 548. 559. 578
9	515. 519. 527. 531. 556. 557. 575. 586
11	551. 554. 591
12	539. 542. 579. 593
14	596
15	509. 524. 566
16	521. 569
G. IV....(41)..(672)	
2	505. 522. 532. 553. 568. 592. 598
3	513. 517. 533. 537. 540. 550. 555. 565. 588. 595. 597
4	501. 518. 544. 558. 564. 573. 574. 576(*2*). 580(*2*). 582. 589
5	534. 572. 590
6	516. 549. 594
7	506. 530. 536. 581
8...	545. 584
G. VIII..(12)..(200)	
1	520
2	504. 510. 525. 528. 552. 561. 570. 585. 600
3	546. 560
Summa	347...1729
Irreg. 2	

Centas 7.

G. I.......(8)..(138)	
9	643
13	607. 631
15	619. 683. 691.
25	647
33	659
G. II....(37)..(718)	
3	652
5	613. 625. 694
6	603. 617. 622. 628. 655. 667. 673. 676. 687
7	604. 634. 639. 653
9	661. 675(*3*). 679
10	601
11	623. 662. 668
12	674. 695
13	698
14	641. 686. 692
15	611. 635. 671. 677. 699
17	614
18	626
G. IV....(43)..(812)	
2	658. 697
3	606. 610. 618. 627. 637; 648. 669. 670. 682. 685. 688. 700
4	612. 632. 640. 642. 646. 657. 663
5	615. 633. 636. 638. 649. 664. 666. 678. 681
6	602. 605. 608. 620. 621. 650. 651. 684
7	654
8	644. 656
9	629
10	689
G. VIII..(12)..(216)	
2	609. 616. 624. 630. 645. 660. 672. 690. 693
3	665. 680. 696
Summa	350 .. 1884
Irreg: 1	

Centas 8.

G. I..........(6)...(110)	
13	727
15	739. 751. 787
21	743
31	719
G. II.......(39)...(860)	
4	772
5	709. 757
6	718. 723. 763. 775
7	703. 733. 778
8	799
9	707. 722. 729. 747. 771. 783. 796
10	711. 724. 769. 788
11	758. 767
12	706. 766
13	746. 764. 773
15	716. 779. 797
16	791
17	701
18	731. 755(*3*)
20	734. 761
21	794
G. IV........(42)...(792)	
2	708. 742. 793
3	702. 715. 730. 748. 753. 762. 795
4	712. 717. 721. 732. 735. 736. 738. 745. 768. 784. 785. 786. 790
5	726. 737. 750. 752. 754. 774. 781
6	704. 713. 725. 756. 759. 782. 800
8	710. 740. 749. 789
10	776
G. VIII......(13)...(264)	
1	760
2	720. 765. 777. 792. 798
3	705. 714. 728. 741. 744. 780
4	770
Summa	356... 2026
Irreg. 1	

Centas 9.

G. I........(8)....(164)	
9	823. 883
21	811. 827. 859. 863
29	887
33	839
G. II........(34)....(750)	
4	862
5	847. 853. 877
6	802. 898
7	807. 838. 841. 892
8	895
9	835. 843. 844. 867. 886. 891(*3*)
10	878
11	829. 871. 879
13	842
14	818. 831
15	803. 815. 821. 851. 875
16	809. 857
20	881
21	899
22	866
G. IV.......(47)...(1024)	
3	808. 813. 814. 817. 826. 828. 837. 856
4	820(*2*). 832. 834. 850. 852. 855. 865. 868. 873. 882. 889. 900(*2*)
5	822. 830. 872. 874
6	801. 804. 810. 812. 819. 833. 848. 864. 876. 890. 894
7	806. 845. 849. 860. 893
8	846. 869. 884(*2*). 896
10	824. 836
11	854
G. VIII.....(10)....(200)	
2	805. 858. 870. 880. 897
3	816. 825. 861. 885. 888
G. XVI.....(1).....(16)	
1	840
Summa 360.....2154	
Irreg. 4	

Centas 10.

G. I........(8)....(174)	
9	907
11	967
15	947
17	991
19	919
27	983
31	911
45	971
G. II........(33)....(810)	
5	982
6	955
7	997
8	943. 958. 961
9	922. 931. 963. 972
10	916. 927. 937. 977
12	932. 939. 964. 979. 995. 999
13	934. 951. 998
15	908. 923. 956
16	953
18	914. 929. 959. 974(*3*).
20	926
23	941
G. IV......(45)....(976)	
2	928
3	913. 918. 925. 933. 940. 942. 949. 970. 973. 988
4	903. 904. 993. 938. 946. 975. 994
5	917. 921. 968. 1000
6	901. 905. 915. 948. 954. 976. 978. 980. 981. 985. 987. 996
7	902. 906. 909. 935. 962
8	992
9	944. 950. 989
11	965. 986
G. VIII.....(14)....(312)	
2	910. 912. 952. 957. 960
3	924. 930. 936. 945. 966. 969. 984. 990
5	920
Summa 366......2272	
Irreg. 1	

Centas 11.

G. I..........(7)......(191)	
9	1087
15	1051
19	1063
23	1039
35	1031
39	1019
51	1091
G. II..........(35)......(880)	
5	1093
6	1003. 1027. 1033. 1042
8	1024. 1047
9	1018. 1059. 1075(*3*). 1083. 1099
10	1006. 1009
11	1021. 1082. 1084
12	1043. 1058
13	1013. 1052. 1061. 1094
15	1007. 1069
16	1028
17	1079
18	1011. 1055. 1067. 1097
21	1004. 1046
22	1049. 1076.
G. IV.........(44)......(984)	
2	1012
3	1030. 1038. 1048. 1068. 1072. 1090
4	1002. 1015. 1017. 1023. 1054. 1057. 1060. 1078. 1081
5	1037. 1066. 1071. 1098
6	1026. 1035. 1036. 1044. 1053. 1062. 1073. 1077. 1089. 1096. 1100
7	1010. 1014. 1029. 1086. 1095
8	1016. 1022. 1025. 1074. 1088(*2*)
9	1041. 1070
11...1034	
G. VIII.......(14)......(344)	
2	1005. 1008. 1032. 1045. 1065. 1092
3	1020. 1050. 1080
4	1040. 1056. 1085
5	1001. 1064
Summa 365.......2399.	
Irreg. 2	

Centas 12.

G. I..............(6)......(148)	
15	1123
21	1163. 1171
23	1103
27	1187(*3*)
41	1151
G. II..........(36)......(924)	
6	1108. 1138. 1198
7	1117. 1183
8	1129. 1153. 1156. 1159
9	1197(*3*). 1132. 1135. 1142. 1147
10	1143
11	1111. 1114. 1126. 1167
12	1127. 1186. 1191. 1195.
15	1115. 1174. 1175. 1179
16	1119
18	1172. 1193
19	1199
20	1124
23	1181
24	1139
25	1109
28	1154
G. IV.........(40)......(1064)	
3	1162. 1177. 1192
4	1149. 1150. 1152. 1168. 1178. 1180
5	1102. 1125. 1237. 1165. 1182. 1189
6	1131. 1134. 1141. 1145. 1158. 1164. 1188
7	1101. 1112. 1133. 1136. 1148. 1157. 1194
8	1146
9	1116. 1118. 1161. 1166
10	1184
11	1121. 1130
12	1106. 1169. 1196
G. VIII......(18)......(408)	
2	1105. 1110. 1113. 1120. 1122. 1128. 1170. 1185. 1197
3	1144. 1155. 1173. 1176. 1200
4	1104. 1140
5	1160, 1190
Summa 382.......2544	
Irreg. 2	

Centas 13.

G. I...........(6).......(190)	
23	1279
27	1231. 1291
33	1283
35	1223
45	1259(*3*)
G. II.........(38).......(986)	
5	1213
6	1227. 1243. 1255. 1282. 1297
7	1237
8	1201. 1252
9	1203. 1207. 1215. 1219. 1228(*3*). 1267(*3*)
10	1261. 1263. 1268.
12	1202. 1234. 1299
13	1247
14	1294
15	1250
16	1217. 1249
17	1277
18	1251. 1262. 1289
19	1229. 1244
20	1214. 1271
21	1211. 1226. 1238
29	1286
G. IV.........(40).....(1008)	
3	1222. 1258. 1285
4	1204. 1225. 1233. 1246. 1278
5	1210. 1212. 1257. 1264. 1270. 1273. 1276. 1287
6	1208. 1216. 1236. 1242. 1269. 1275. 1292. 1293. 1296. 1300
7	1206
8	1220(*2*). 1239. 1241. 1253. 1266. 1280. 1298
9	1235. 1274. 1295
10	1205. 1284
13	1256
G. VIII......(16).......(416)	
2	1240. 1248. 1288. 1290
3	1218. 1230. 1254. 1260. 1272. 1281
4	1221. 1224. 1232. 1245
5	1209. 1265
Summa 370........2600	
Irreg. 4	

Centas 14.

G. I................(7).........(191)	
11	1303
15	1327
27	1367. 1399
33	1307. 1331
45	1319
G. II................(32).........(846)	
5	1318
6	1387
7	1372
8	1348
9	1306. 1315(*3*). 1323(*3*). 1324. 1347. 1363. 1366. 1369. 1373. 1383
10	1375
11	1354
12	1321. 1339. 1351
13	1381
14	1346. 1359
15	1388
17	1343
18	1355. 1371
19	1382
21	1322
22	1391
24	1379
25	1301
30	1361
G. IV................(46)........(1340)	
4	1312(*2*). 1332(*2*). 1345. 1357. 1393
5	1317. 1333. 1338. 1342. 1378. 1384. 1390. 1398
6	1308. 1313. 1336. 1337. 1350. 1358. 1362. 1377. 1395. 1397
7	1311. 1335. 1341. 1352. 1374. 1389. 1396
8	1314. 1334
9	1310. 1325. 1328. 1329. 1340. 1356(*3*)
10	1376
11	1304. 1370
12	1316. 1385. 1394
14	1349. 1364
G. VIII..............(13).........(328)	
2	1302. 1353. 1360. 1380
3	1309. 1330. 1368. 1392
4	1305. 1344. 1386. 1400
5	1326
G. XVI..............(2).........(32)	
1	1320. 1365.
Summa 391..........2737	
Irreg. 5	Propr. 3192

Centas 15.

G. I..........(10)........(308)	
9	1423
21	1483
23	1447. 1471
33	1459
37	1487
39	1439. 1451. 1499
45	1427
G. II........(26)........(746)	
6	1411. 1467
7	1402. 1453
8	1438
9	1458. 1468
10	1444. 1486. 1489. 1492.
11	1429. 1493
15	1431. 1478
16	1412
17	1415. 1418
18	1409. 1433. 1475
19	1436
21	1403
26	1481
29	1466
30	1454
G. IV.......(49).....(1348)	
3	1432. 1435. 1450
4	1408. 1417. 1422. 1462. 1465. 1474. 1477. 1498
5	1495. 1497. 1500
6	1404. 1405. 1407. 1413. 1420. 1437. 1442. 1443. 1452. 1457. 1472
7	1401. 1414. 1441. 1455. 1461. 1473. 1479
8	1426. 1434. 1446. 1463. 1476
9	1419. 1445. 1448. 1490. 1491
10	1460. 1494
11	1406
12	1421. 1424. 1484
14	1469
G. VIII.......(15).......(424)	
2	1428. 1488
3	1425. 1456. 1464. 1480. 1482. 1485
4	1410. 1416. 1430. 1440(*2*). 1449. 1470
7	1496
Summa 378........2826	
Irreg. 1	Propr. 3282

NACHLASS.

Centas 16.

G. I………(9)……(299)	
15	1567
19	1543
21	1523
27	1579
33	1531. 1583
49	1511
51	1559. 1571
G. II……(24)……(656)	
6	1507. 1555. 1588
7	1527. 1597
9	1516. 1519. 1549. 1563
10	1522
11	1503. 1591
12	1502. 1587
17	1532. 1546. 1594
18	1539(*3*)
19	1535
20	1553
22	1538. 1556
25	1514
27	1574
G. IV……(53)……(1564)	
3	1558. 1593
4	1510. 1513(*2*). 1528. 1537. 1552. 1578. 1582(*2*). 1600(*2*).
5	1534. 1542. 1570. 1573. 1576
6	1501. 1506. 1521. 1525. 1548. 1572. 1575. 1585
7	1557. 1562. 1564. 1565. 1569. 1577
8	1504. 1508. 1536. 1551. 1561. 1568(*2*). 1598
9	1515. 1541. 1547. 1566. 1599
10	1509. 1524. 1544. 1592
11	1586
12	1517. 1526. 1550. 1580. 1595
13	1529. 1589
G. VIII……(13)……(360)	
2	1540
3	1512. 1518. 1530. 1533. 1545. 1554. 1584
4	1520. 1590(*2*). 1596
5	1505. 1581
G. XVI……(1)……(32)	
2	1560
Summa 389……2911	
Irreg. 6	Propr. 3416

Centas 17.

G. I………(6)……(182)	
17	1663
21	1627
27	1607
33	1699
39	1667
45	1619
G. II……(37)……(1116)	
6	1618
7	1642
8	1657
9	1603. 1621. 1675(*). 1683. 1687
10	1678. 1681. 1684
11	1639. 1654. 1693
12	1647. 1651
13	1669
14	1609. 1623. 1697
15	1611. 1622. 1643. 1682
16	1636
19	1637. 1671
20	1604
21	1613. 1658
22	1631. 1646. 1655
26	1679
27	1676. 1691
28	1601
G. IV……(41)……(1312)	
3	1612
4	1633. 1660. 1698
5	1626. 1648. 1660. 1662. 1688. 1692. 1695
6	1615. 1620. 1635. 1659. 1666. 1668. 1690. 1696
7	1606. 1614. 1630. 1670
8	1602. 1628. 1673
9	1644. 1674. 1689
10	1625. 1629. 1652
11	1641. 1686
12	1649. 1661. 1664. 1694
13	1685
14	1616
16	1634
G. VIII……(15)……(368)	
2	1605. 1632. 1645. 1653. 1672. 1677
3	1617. 1638
4	1608. 1610. 1624. 1640. 1650. 1656. 1665
G. XVI……(1)……(32)	
2	1680
Summa 380……3010	
Irreg. 1	Impr. 513

Centas 18.

G. I………(5)……(95)	
15	1723. 1747
17	1783
21	1787
27	1759
G. II……(35)……(1182)	
10	1714. 1753. 1774
12	1726. 1731. 1732. 1762. 1777. 1795
13	1719. 1735. 1741. 1789
14	1703. 1711. 1775
15	1707. 1756. 1772. 1779
17	1733
18	1727. 1763(*3*). 1791
19	1754
21	1709. 1715. 1724
23	1718
24	1751
25	1766. 1799
26	1721
29	1706
30	1739
G. IV……(41)……(1260)	
3	1708
4	1717. 1737. 1738. 1780. 1792
5	1702. 1750. 1758. 1761. 1765. 1773. 1786. 1798
6	1728. 1743. 1744. 1771. 1782. 1797
7	1757. 1788
8	1764(*2*). 1767
9	1701. 1712. 1713. 1730. 1734. 1755(*). 1793
10	1745. 1746. 1748. 1778. 1796
11	1742
13	1790
16	1769. 1784
17	1781
G. VIII……(18)……(536)	
2	1705. 1710. 1752. 1768
3	1720. 1722. 1729. 1740. 1800
4	1716. 1725. 1776. 1794
5	1749. 1770
6	1704. 1736. 1760
G. XVI……(1)……(32)	
2	1785
Summa 399……3105	
Irreg. 3	Impr. 525

DETERMINANTES NEGATIVI.

Centas 19.

G. I………(7)…………(263)	
15	1867
19	1831
27	1879
43	1847
45	1823. 1871
69	1811
G II……(31)…………(994)	
6	1807. 1873
7	1852
8	1822. 1828
9	1843. 1863. 1882
10	1858
11	1849
12	1803
14	1801. 1838
15	1819. 1835. 1875. 1891. 1894
17	1877
18	1899
19	1861
20	1839
21	1851. 1859. 1868. 1883
23	1814
24	1895
28	1874
30	1844
36	1889
G. IV……(45)………(1416)	
4	1813. 1842. 1864. 1897
5	1810. 1857. 1887. 1893
6	1812. 1815. 1818. 1825. 1827. 1837. 1878. 1888. 1892. 1900
7	1816. 1846. 1855. 1898
8	1802. 1808. 1866. 1876. 1884
9	1804. 1809. 1821. 1834. 1836. 1853. 1862
10	1805. 1817. 1829. 1841. 1850. 1854
12	1856. 1865
13	1832
14	1826
16	1886(*2*)
G. VIII……(16)…………(496)	
2	1870. 1885
3	1830. 1833. 1840. 1890
4	1824. 1845. 1860. 1872
5	1806. 1820. 1869. 1880. 1881. 1896
G. XVI……(1)…………(16)	
1	1848
Summa 393…………3185	
Irreg. 1	Impr. 513

Centas 20.

G. I………(6)…………(252)	
21	1987
27	1999
33	1951
39	1907
63	1931(*3*)
69	1979
G. II……(33)…………(1090)	
7	1948
8	1983
9	1915. 1927. 1933. 1963. 1996
10	1906. 1975
11	1903. 1942
12	1939. 1982. 1993
14	1954
15	1923
16	1922. 1943
18	1913. 1966. 1967. 1971(*3*)
21	1901. 1959. 1973. 1997
22	1919
25	1916
26	1934
27	1964. 1994
28	1991
35	1949
G. IV……(43)…………(1356)	
3	1978
4	1912. 1918(*2*). 1945. 1957
5	1930. 1962. 1969. 1981
6	1908. 1917. 1926. 1936. 1941. 1947. 1972. 1984. 1990
7	1909. 1929. 1935
8	1911. 1924. 1940. 1958. 1961
9	1902. 1944. 1955. 1977. 1998
10	1921. 1928. 1952. 1956. 1985. 2000
12	1982. 1986. 1988
13	1970
14	1910
17	1946
G. VIII……(18)…………(584)	
2	1992
3	1905. 1932. 1950. 1960. 1968. 1995
4	1920. 1938. 1953. 1974. 1980. 1989
5	1904. 1965
6	1914. 1925
7	1976
Summa 388…………3282	
Irreg. 3	Impr. 556

Centas 21.

O. I……………(8)…………(284)	
21	2011. 2083
27	2003
33	2027
35	2087
45	2039. 2063
57	2099
G. II……………(30)…………(1054)	
6	2017. 2062
8	2095
9	2023. 2038. 2047. 2053
12	2059. 2098
14	2007. 2018
15	2043. 2071. 2092
16	2048
17	2026. 2029
19	2031. 2069
20	2078
21	2012
22	2089
24	2019
25	2042
27	2051. 2075(*3*)
28	2066
30	2036. 2081
32	2084
G. IV……………(42)…………(1376)	
4	2020. 2077
5	2032. 2073. 2074
6	2022. 2025. 2028. 2035. 2050. 2052. 2067. 2068. 2082. 2086. 2096
7	2008. 2033. 2044. 2055. 2058. 2094
8	2004. 2005. 2034. 2041. 2056
9	2014. 2049. 2060. 2076. 2079. 2091
10	2057. 2061
12	2006. 2009. 2045
13	2015
15	2096
17	2021
18	2054
G .VIII…………(19)…………(632)	
2	2002. 2013. 2080. 2088
3	2037. 2065
4	2010. 2016. 2046. 2072. 2100
5	2030. 2070. 2085. 2093
6	2001. 2064. 2090
7	2024
G. XVI…………(1)…………(32)	
2	2040
Summa 404…………3378	
Irreg. 1	Impr. 560

Centas 22.			2148.
G. I.....(5)..(149)			2157.
13	2143		2163.
21	2179		2172
27	2187(*3*)	7	2110.
39	2131		2140.
49	2111		2146.
G. II...(33).(1174)			2149.
8	2113.		2165
	2137	8	2134.
9	2122.		2176(*2*)
	2167.		2192
	2188	9	2106.
10	2164		2108.
11	2182		2117.
12	2107.		2124.
	2116		2133(*3*).
13	2102.		2175.
	2197		2181.
14	2127		2198
15	2151.	10	2150.
	2191		2154.
16	2153.		2166.
	2194		2177
17	2103.	11	2135
	2119	12	2105.
18	2155.		2156.
	2161.		2168.
	2199		2169.
21	2123.		2196
	2138.	14	2114.
	2147.		2144.
	2171.		2162
	2183.	15	2189
	2186	16	2180
24	2195	G. VIII.(14).(424)	
28	2129	2	2128.
30	2126.		2170
	2159	3	2160.
32	2174		2185.
39	2141		2190.
G. IV.(46).(1592)			2193.
5	2101.		2200
	2118.	4	2112(*2*).
	2125.		2130.
	2152.		2142
	2158.	5	2109.
	2173.		2121.
	2178		2136
6	2104.	7	2120
	2115.	G. XVI.(2)...(80)	
	2132.	2	2145
	2139.	3	2184
		Summa	399... 3419
Irreg. 4		Impr.	585

Centas 23.			2278
G. I.....(7)..(217)		7	2217.
15	2203		2238.
21	2251		2270
29	2287	8	2236.
33	2267		2245.
35	2239		2254(*2*).
39	2207		2286.
45	2243(*3*)		2292.
G. II..(29).(1084)			2298
7	2293	9	2214.
9	2221.		2221.
	2227.		2235(*3*).
	2283		2241.
10	2281		2253.
11	2215.		2266.
	2263		2295.
12	2209		2300
13	2218	10	2249.
14	2258		2250.
15	2237.		2255.
	2269.		2282
	2284.	11	2204.
	2299		2216
16	2206	12	2211.
17	2234		2225.
18	2228		2229
20	2297	13	2222
21	2213.	14	2274
	2259	15	2264.
22	2271		2285
24	2273	16	2201
27	2252.	19	2294
	2291	G. VIII.(17).(584)	
28	2279	2	2233.
29	2231		2277
32	2276	3	2205.
36	2219(*3*)		2220.
39	2246		2262
G. IV.(46).(1612)		4	2208.
4	2212.		2232.
	2242.		2244.
	2248.		2256.
	2272		2265.
5	2202.		2289.
	2230.		2296
	2247.	5	2226.
	2290		2288
6	2223.	6	2240
	2257.	7	2210
	2260.	9	2261
	2268.	G. XVI.(1)..(32)	
	2275.	2	2280
		Summa	401...3529
Irreg. 4		Impr.	571

Centas 24.		7	2314.
G. I....(7)..(291)			2382
15	2347	8	2304.
29	2311.		2312.
	2383		2313.
39	2371		2329(*2*).
57	2339		2343.
59	2399		2350.
63	2351		2356
G. II..(32).(1106)		9	2318.
7	2335		2344.
8	2302.		2349.
	2308.		2355.
	2377		2361.
11	2326.		2387
	2374	11	2334.
12	2307.		2364
	2323.	12	2316.
	2395		2331.
13	2362.		2376.
	2367		2379(*2*).
14	2359		2390
15	2303.	14	2324.
	2319.		2354.
	2341.		2384
	2363	15	2321.
16	2386		2330.
17	2333.		2378
	2389.	16	2336
	2391	18	2369
19	2381	G. VIII.(20).(648)	
20	2375	2	2392
21	2342.	3	2325.
	2348.		2346.
	2357		2352.
24	2327.		2370.
	2372		2373.
25	2396		2380
27	2315(*3*)	4	2320.
30	2393		2328.
32	2306		2337.
33	2309		2340.
G. IV..(40).(1520)			2365.
4	2332.		2385(*2*).
	2353.		2397.
	2368		2400(*2*)
5	2398	5	2360.
6	2305.		2394
	2317.	6	2301.
	2322.		2376
	2338.	7	2345
	2358.	G. XVI.(1)..(32)	
	2388	2	2310
		Summa	407... 3597
Irreg. 5		Impr.	611

Centas 25.			
G. I...(5)..(217)			2482.
21	2467		2488.
33	2423		2493
37	2447	7	2416.
57	2459		2431.
69	2411		2438.
G. II..(35).(1250)			2497
9	2403(*3*).	8	2454
	2437(*3*).	9	2430(*3*).
	2443.		2461
	2458	10	2449
10	2407.	11	2421.
	2452.		2489.
	2473.		2492
	2487.	12	2420(*2*).
	2500		2432.
12	2419.		2450.
	2468.		2466.
	2479		2484.
13	2428		2499
14	2401.	13	2453.
	2446.		2469.
	2455		2481
15	2476	14	2429.
16	2434.		2486
	2462	15	2406.
17	2463		2444
18	2417.	17	2456
	2491	18	2414
19	2477	G. VIII.(22).(720)	
20	2402.	3	2418.
	2404.		2424.
	2498		2440.
21	2427		2457.
22	2439		2472.
27	2426		2485
28	2495	4	2436.
30	2483		2442.
31	2471		2445.
33	2435		2448(*2*).
38	2441		2464.
39	2474		2465.
G. IV.(38).(1472)			2470.
4	2410		2478.
5	2422.		2490.
	2433.		2496
	2494	5	2405.
6	2412.		2409.
	2413.		2415.
	2425.		2460
	2451.	6	2408.
	2475.		2480
		Summa	403..3659
Irreg. 5		Impr.	595

Centas 26.			2536.
G. I...(7)..(301)			2556.
21	2503		2583
33	2539	8	2506.
35	2543		2513.
41	2551		2528.
51	2531		2560.
57	2591		2569.
63	2579		2589
G. II..(29).(1028)		9	2522.
8	2578		2555.
9	2515.		2581.
	2557.		2595
	2563(*3*).	10	2514.
	2566.		2529.
	2572		2532.
10	2527		2596
12	2587.	11	2570.
	2593		2573
13	2524	12	2597
15	2523.	13	2510
	2575.	14	2501.
	2518.		2525.
	2599		2586
16	2521	15	2526.
18	2511.		2534.
	2547		2537.
19	2554		2540
20	2559	16	2546.
21	2507.		2561
	2571	18	2504.
22	2567.		2516
	2594	G. VIII (18).(648)	
25	2582.	3	2508.
	2588		2530.
28	2564		2550.
32	2519.		2553.
	2558		2562.
35	2549		2590
G. IV.(45).(1752)		4	2568.
4	2533.		2580.
	2542(*2*)		2584
5	2577	5	2505.
6	2512.		2541.
	2517.		2544.
	2538.		2552.
	2545.		2585
	2548.	6	2565.
	2592.		2574.
	2598		2600
7	2502.	8	2576
	2509.	G. XVI.(1)..(32)	
	2535.	2	2520
		Summa	405..3761
Irreg. 2		Impr.	641

Centas 27.			2698
G. I...(7)...(231)		7	2607
15	2647.	8	2601.
	2683		2628(*2*).
23	2671		2655.
39	2659		2674.
43	2663		2686
45	2699(*3*)	9	2626.
51	2687		2634.
G. II..(29).(1196)			2635.
10	2638		2637.
11	2623.		2646(*3*).
	2662.		2673.
	2677		2700(*3*).
12	2611.	10	2656.
	2689.		2678
	2692	11	2645.
14	2612		2648.
15	2602.		2649.
	2643		2672
16	2617.	12	2661.
	2633.		2691.
	2657		2696
18	2619(*3*).	13	2679
	2627.	15	2630.
	2644		2684.
21	2693		2690.
23	2614.		2694
	2615	16	2624(*3*).
24	2631.		2639.
	2654		2669
26	2642	17	2666
27	2675(*3*)	18	2681
30	2603.	G. VIII.(17).(584)	
	2606	2	2632
31	2621	3	2613.
33	2636		2622.
39	2651		2680.
42	2609		2685.
G. IV.(46).(1776)			2697.
3	2608	4	2652.
4	2605		2665.
5	2641		2688
6	2620.	5	2610.
	2629.		2618.
	2650.		2625.
	2653.		2664.
	2658.		2670.
	2667.	6	2604.
	2668.		2660
	2676.	7	2616
	2682.	G. XVI..(1)..(32)	
	2695.	2	2640
		Summa	401...3819
Irreg. 7		Impr.	625

Centas 28.

		7	2703.
G. I ... (6) .. (208)			2761.
21	2707.		2766.
	2767		2782
33	2731	8	2733.
39	2791		2742.
41	2719		2775.
53	2711		2785
G. II . (29) . (1190)		9	2716.
9	2787.		2770.
	2797		2778.
10	2722.		2781.
	2743		2795
12	2713	10	2724.
13	2762		2751
14	2734.	11	2757
	2753	12	2701.
15	2727.		2702 (*2*).
	2732.		2739.
	2764		2754
18	2723.		2780
	2763 (*3*).	13	2721.
	2783		2792
19	2738.	14	2744.
	2746.		2768.
	2799		2774
20	2777	15	2750.
21	2749.		2796
	2779	17	2726
22	2798	18	2705.
27	2747.		2786
	2759	20	2714.
29	2741		2756 (*2*)
30	2708	G. VIII . (16) . (568)	
31	2735	2	2737
39	2771	3	2728.
40	2729		2800
41	2789	4	2706.
G. IV . (47) . (1864)			2709.
4	2773.		2717.
	2788		2745.
5	2776		2772.
6	2704.		2790.
	2710.		2793
	2715.	5	2712.
	2718.		2769
	2725.	6	2720.
	2740.		2736.
	2748.		2784
	2752.	7	2765
	2755.	G. XVI . (2) .. (64)	
	2758.	2	2730.
	2794		2760

Summa 412 .. 3894
Irreg. 3 Impr. 644

Centas 29.

			2847.
G. I .. (6) .. (250)			2848 (*2*).
25	2887		2868.
27	2803		2884
33	2851	9	2806.
45	2843		2828.
57	2879		2835 (*3*).
63	2819		2862.
G. II ... (32) . (1298)			2887.
8	2878		2888.
10	2818.		2890.
	2836.		2895
	2857	10	2810.
11	2815.		2844.
	2863		2869.
12	2827		2871.
13	2809.		2874.
	2823.		2896
	2839.	11	2841
	2854	12	2816.
15	2875.		2822.
	2883.		2824.
	2899		2825.
16	2833		2852.
18	2867.		2873.
	2897		2900
19	2858	13	2826
20	2866	15	2813.
23	2837		2864.
24	2811		2889
26	2807	16	2882
27	2859.	21	2834
	2891 (*3*)	G. VIII (17) . (648)	
30	2801.	2	2832
	2855	3	2808.
31	2876		2860
33	2861	4	2821.
34	2804.		2829.
	2831.		2850 (*2*).
	2894		2865.
36	2846		2880.
G. IV . (43) . (1680)			2898
4	2842.	5	2814.
	2893		2838.
5	2830.		2877.
	2853		2886
6	2802.	6	2820
	2872.	7	2870
	2892	8	2840.
7	2812.		2849
	2881	G. XVI . (2) .. (96)	
8	2817.	3	2805.
	2845.		2856

Summa 410 .. 3972
Irreg. 4 Impr. 636

Centas 30.

G. I .. (6) .. (322)		8	2944.
31	2927		2946.
33	2971		2949.
39	2963		2980 (*2*)
59	2903	9	2950.
73	2999		2955.
87	2939		2988.
G. II .. (33) . (1266)			2989
8	2962	10	2919.
9	2902.		2929.
	2923.		2948.
	2998		2975
10	2983	11	2922.
11	2917.		2933.
	2935		2934.
12	2947.		2967
	2953.	12	2993 (*2*)
	2995	13	2901.
13	2908		2984
14	2932	16	2921.
15	2956.		2994.
	2986		2996
17	2918	18	2915.
18	2916.		2924
	2943.	20	2936.
	2979		2954.
20	2942.		2981
	2959	G. VIII (24) . (888)	
21	2911.	2	2968
	2931.	3	2905.
	2972		2920.
24	2974.		2937.
	2991		2970.
26	2969		2982.
27	2951.		2992
	2957	4	2928.
30	2978.		2940.
	2987		2952.
33	2906		2958.
35	2909		2985
43	2966	5	2904.
G. IV . (37) . (1588)			2910.
5	2965		2926.
6	2907.		2990.
	2914.		3000
	2938.	6	2912.
	2977.		2925.
	2997		2961.
7	2913.		2964.
	2930.		2976
	2941.	8	2945.
	2973		2960

Summa 412 .. 4064
Irreg. 2 Impr. 714

Centas 43.

			4263.
G. I ... (7) .. (425)			4285.
27	4243		4293.
45	4219		4294.
51	4231		4300 (*3*)
63	4283	11	4215.
65	4271		4238.
69	4211		4281.
105	4259		4298
G. II . (32) . (1592)		12	4212 (*2*).
12	4222.		4232.
	4258.		4251.
	4267.		4275 (*2*).
	4273		4292
13	4207.	13	4202.
	4282		4206.
14	4279		4208.
15	4204.		4234
	4227	14	4205
17	4261	15	4235.
18	4201.		4250.
	4291 (*3*).		4266
	4297	17	4269
19	4252	18	4220.
21	4203.		4265.
	4253		4268
22	4223	19	4254
24	4239.	20	4214
	4287.	G. VIII (22) .. (976)	
	4295	3	4218.
26	4217.		4257.
	4244		4272
27	4262.	4	4216.
	4299		4240.
30	4276		4260.
31	4247		4270.
39	4229		4278
40	4286	5	4230.
42	4274		4233.
54	4226.		4242.
	4241		4264.
56	4289		4284
G. IV . (38) . (1780)		6	4245.
6	4225.		4248.
	4237.		4277
	4288	7	4209
7	4210.	8	4221.
	4213		4224.
8	4228.		4296
	4249	9	4280
9	4236.	10	4256
	4246.	G. XVI . (1) .. (48)	
	4255.	3	4290

Summa 415 ... 4821
Irreg. 4

Centas 51.

			5052.
G. I ... (8) .. (546)			5053.
25	5023		5056.
45	5003		5072.
57	5059		5092
63	5011	11	5093
69	5087	12	5022.
83	5039		5076
87	5051	13	5029.
117	5099		5090
G. II .. (22) . (1104)		14	5046.
11	5077.		5074
	5098	15	5019.
15	5047.		5030.
	5062		5094
16	5086	16	5012.
18	5007.		5031 (*2*)
	5041.	18	5004.
	5042.		5033.
	5063		5034.
21	5027.		5048.
	5043.		5054.
	5091		5069 (*3*).
24	5095		5075 (*3*).
25	5071	19	5001.
27	5067.		5018
	5078	20	5057.
30	5009		5084
32	5079	22	5015
39	5021	26	5024.
42	5006		5045
45	5036 (*3*)	30	5066
58	5081	G. VIII (16) . (784)	
G. IV . (51) . (2728)		3	5032
6	5020.	4	5037
	5065.	5	5061.
	5083		5080
7	5038	6	5010.
8	5002.		5025.
	5008.		5049.
	5017.		5070.
	5058.		5073.
	5089		5082.
9	5013.		5085.
	5014.		5088.
	5035.		5100
	5050.	8	5064
	5055.	9	5096
	5068 (*3*).	10	5060
	5097	G. XVI . (3) . (128)	
10	5026.	2	5005
	5028.	3	5016.
	5044.		5040

Summa 424 ... 5290
Irreg. 5

Centas 61.

			6004.
G. I ... (7) .. (353)			6008.
27	6007.		6025.
	6043		6027.
45	6067 (*3*).		6057.
	6091 (*3*)		6066.
57	6079		6077.
71	6047		6084.
81	6011 (*3*)		6099.
G. II .. (22) . (1440)			6100 (*2*)
12	6073	13	6033.
15	6022		6094
17	6037	14	6062
18	6087	15	6017.
22	6082.		6039.
	6092		6050.
24	6098		6081.
25	6031.		6093.
	6053	16	6016
27	6075 (*3*)	18	6065.
28	6046		6083 (*3*)
31	6038	19	6009
33	6019	20	6036.
35	6029		6054
39	6059	21	6035.
41	6023		6095
42	6051	24	6014 (*2*).
46	6002		6068.
48	6071		6086
49	6044	25	6056
58	6089	26	6005
63	6074	28	6026
G. IV . (53) . (3012)		30	6041
7	6013.	G. VIII . (14) . (768)	
	6028	3	6097
8	6001 (*2*).	4	6040.
	6052 (*2*)		6042
9	6015.	6	6018.
	6021 (*3*).		6024.
	6055.		6030.
	6063.		6048
	6064.	8	6032.
	6070.		6061.
	6076.		6069.
	6078.		6080
	6085 (*3*)	9	6060
10	6010.	10	6020.
	6034.		6096
	6049.	G. XVI . (4) . (208)	
	6058.	3	6045.
	6088.		6072.
11	6012		6090
12	6003.	4	6006

Summa 439 .. 5781
Irreg. 11 Impr. 933

Centas 62.			6181
G. I...(5)..(265)		14	6145.
33	6163		6174.
39	6199		6185
41	6143	15	6102.
59	6151		6109.
93	6131		6125.
G. II..(28).(1704)			6126.
11	6127		6129.
14	6103		6171
15	6115.	16	6144.
	6147		6189
16	6178	17	6128.
18	6183.		6184
	6187.	18	6111.
	6196		6135.
19	6172		6156 (*3*).
21	6133		6164
22	6121	19	6140
27	6122	20	6114.
29	6166		6137.
30	6139		6161.
33	6124.		6176.
	6167		6186
34	6113	22	6152.
35	6134.		6194
	6197	25	6170
37	6173	28	6146
40	6159	G. VIII (20).(1200)	
41	6119	4	6118
42	6155.	5	6136.
	6158		6153.
45	6107		6162.
49	6191		6168
53	6101	6	6132.
60	6179		6138.
G. IV.(44).(2568)			6150.
6	6157		6165.
7	6108.		6177.
	6142.		6180.
	6193		6192.
8	6112.		6195
	6148	7	6141
9	6130.	9	6188
	6154.	10	6110
	6175.	12	6104.
10	6106.		6200
	6117.	13	6116
	6169.	15	6149
	6198	G. XVI (3)..(128)	
11	6182.	2	6160
	6190	3	6105.
12	6123 (*2*).		6120
		Summa	445..5865
Irreg. 2		Impr.	975

Centas 63.		14	6228.
G. I...(7)..(447)			6245.
43	6247		6260.
45	6211		6276
51	6203.	15	6214.
	6271.		6234.
	6287		6249
77	6263	16	6231.
129	6299		6233.
G. II..(28).(1678)			6244.
12	6238.		6272 (*4*)
	6295	17	6294
15	6259.	18	6226 (*3*).
	6268		6251
16	6217	19	6281.
18	6267 (*3*).		6289
	6283 (*3*)	20	6261
20	6223.	21	6266
	6241.	22	6224
	6274	23	6278
23	6218.	24	6209.
	6277		6215
25	6207.	25	6206
	6250	27	6296
27	6227 (*3*)	35	6254
29	6229	G. VIII (23).(1176)	
30	6212.	3	6232
	6219	4	6273
33	6243	5	6205.
36	6242		6213.
38	6257		6258.
42	6275		6280.
45	6239.		6285
	6291 (*3*)	6	6210.
51	6236.		6222.
	6284		6225.
57	6269		6237.
63	6221 (*3*)		6288.
G. IV.(39).(2428)			6290.
6	6220.		6300
	6262	7	6248.
7	6253		6256.
8	6202.		6265.
	6208 (*2*)		6279.
9	6235.		6293
	6252.	8	6204
	6297	9	6264
10	6246.	10	6201
	6292	11	6230
11	6298	G. XVI (3)..(176)	
12	6255.	3	6216
	6286 (*2*)	4	6240.
13	6282		6270
		Summa	451..5905
Irreg. 9			

Centas 91.			9951.
G. I...(6)..(386)			9063
27	9067	17	9002.
35	9007		9057.
45	9043		9070
63	9091	18	9012.
99	9011		9015.
117	9059		9069 (*).
G. II..(26).(1960)			9075 (*3*)
15	9013	19	9053.
18	9003 (*3*).		9095
	9055	20	9039.
19	9034		9054.
21	9004.		9062.
	9046		9081
26	9079	21	9036
27	9031.	22	9084
	9094	27	9008.
29	9098		9050.
30	9001.		9074
	9076	28	9089
33	9068	30	9005.
36	9049.		9035.
	9083		9056.
40	9023		9077
42	9041	G. VIII (23).(1640)	
44	9047	5	9010
45	9019 (*3*)	6	9040.
46	9038		9042.
48	9092		9045.
54	9099 (*3*)		9072.
57	9029		9085.
69	9014.		9100
	9071	7	9078.
80	9026		9080.
G. IV.(42).(2928)			9090.
8	9087.		9093
	9088	8	9016 (*2*).
9	9022.		9024.
	9037.		9060
	9073.	9	9061.
	9097		9064
10	9025.	10	9020
	9058	11	9006
11	9052	12	9021.
12	9018.		9065
	9027.	14	9096
	9028	17	9086
13	9082	18	9044
14	9017.	G. XVI (3)..(176)	
	9032.	3	9030.
	9066		9048
15	9033.	5	9009
		Summa	458..7090
Irreg. 6		Impr.	1122

Centas 92.			9136.
G. I...(5)..(295)			9195.
51	9199		9196
57	9103.	17	9158
	9127	18	9154
63	9187	19	9146
67	9151	20	9169
G. II..(30).(2208)		21	9126.
13	9157		9197
14	9172	22	9138.
19	9133		9189
20	9124.	24	9113.
	9183		9159
21	9115	25	9101.
23	9181		9125
27	9109.	27	9164
	9123.	28	9116
	9167.	30	9140
	9175	31	9191
28	9137	32	9104 (*2*)
29	9148	33	9149
30	9147	34	9110
32	9111	G. VIII (26).(1752)	
34	9122.	4	9108
	9166	5	9102.
36	9143		9160
39	9107.	6	9112.
	9171		9130.
40	9188		9145.
47	9173		9150
54	9134.	7	9174
	9155	8	9135.
56	9182		9144.
57	9179		9156.
60	9131		9168.
62	9119		9184.
63	9194		9192.
72	9161		9198
G. IV.(36).(2652)		9	9105.
7	9178		9114.
8	9118 (*2*).		9180.
	9193		9185.
9	9132.		9200
	9139.	10	9128.
	9162.		9152
	9163 (*3*)	11	9129.
10	9190		9170
12	9121.	12	9141
	9142.	19	9176
	9153.	G. XVI (3)..(176)	
	9186	3	9177
13	9117	4	9120.
15	9106.		9165
		Summa	465..7083
Irreg. 3		Impr.	1207

Centas 93.		14	9217.
G. I...(4)..(340)			9226.
33	9283		9253
75	9227	15	9212.
93	9203		9250.
139	9239		9276
G. II..(27).(2092)		16	9214 (*2*).
13	9277		9216.
17	9223		9248 (*2*).
18	9241.		9252
	9298	17	9254
21	9235	18	9234
25	9293	21	9201.
27	9211.		9229.
	9247		9261
29	9244	22	9233.
30	9271		9245
31	9263	24	9275.
33	9267		9291
35	9279	25	9231.
36	9259		9294
37	9274	26	9218.
39	9242.		9290
	9286.	27	9260 (*3*)
	9287	29	9215
40	9278	30	9284
45	9251 (*3*)	32	9224
49	9221	36	9266 (*2*)
54	9209	G. VIII (20).(1440)	
60	9257	6	9205.
63	9206		9213.
66	9236		9265.
75	9299		9270.
80	9281		9288.
G. IV.(47).(3216)			9300
7	9262	7	9256
8	9202.	8	9222.
	9208.		9225.
	9232		9273.
10	9238.		9280 (*2*).
	9289		9285
11	9237.	9	9272
	9258	10	9210
12	9207.	11	9230
	9219.	12	9204.
	9220 (*2*).		9264
	9228.	14	9269.
	9243 (*2*).		9296
	9268.	15	9246
	9292.	G. XVI.(1)..(48)	
	9295. 9297	3	9282
13	9249.	G. XXXII (1).(64)	
	9255	2	9240
		Summa	454..7200
Irreg. 9		Impr.	1145

Centas 94			9316 (*2*)
G. I...(6)...(478)		17	9303
41	9319	18	9315 (*3*).
51	9343		9357.
55	9391		9362.
87	9323		9376.
97	9311		9385 (*3*).
147	9371		9396.
G. II..(27).(1894)			9398
15	9307.	21	9334.
	9388		9368.
18	9355		9392
21	9397	22	9305.
23	9382		9317.
25	9375	23	9365
26	9337	24	9308.
27	9349		9399
28	9327	27	9369.
30	9346.		9374
	9358.	30	9386
	9363.	32	9344 (*2*)
	9364	33	9329.
32	9377		9389
34	9326.	G. VIII (25).(1752)	
	9332	4	9310.
36	9347.		9328.
	9379.		9373
	9395	5	9333
41	9302	6	9352
46	9351	7	9321.
49	9335		9361.
51	9383		9381
52	9359	8	9312 (*2*).
56	9314		9348.
57	9356		9372.
69	9341		9393.
G. IV.(39).(2848)			9394.
7	9340.		9400
	9367	9	9390
9	9342 (*3*).	10	9330.
	9370		9338.
11	9304.		9366
	9322	11	9306.
12	9378.		9309.
	9387		9336
13	9313.	12	9324
	9318	14	9350.
14	9353.		9380
	9354	15	9320
15	9325.	G. XVI.(3)..(176)	
	9331.	3	9384
	9339	4	9345.
16	9301.		9360
		Summa	464..7148
Irreg. 6		Impr.	1210

NACHLASS.

Centas 95.		14	9436
G. I....(8)..(708)		15	9443.
33	9403		9452
45	9463	17	9410
75	9439	18	9444.
91	9431		9477.
101	9479		9482.
105	9419		9495
123	9467	20	9500
135	9491	21	9414.
G. II..(24).(1706)			9481.
16	9433		9489.
18	9475		9499
19	9466.	22	9441
	9487	24	9422 (*2*).
20	9442		9426.
21	9427		9474.
24	9406.		9488
	9409.	28	9494
	9423	29	9449
30	9459	30	9455
33	9421	35	9470
34	9458	36	9476
36	9451.	42	9434
	9497 (*3*)	G.VIII (25).(1744)	
39	9484	4	9430
40	9473	5	9417
42	9428	6	9408.
45	9411.		9432.
	9437		9438.
46	9407		9465.
51	9413		9492
57	9461	7	9453.
63	9404		9462
71	9446	8	9424.
G. IV.(41).(2988)			9460.
8	9412 (*2*).		9485.
	9457 (*2*).		9486.
	9472		9490
9	9493	9	9420.
11	9402.		9450 (*3*).
	9447.		9471
	9496	10	9440
12	9445.	11	9429.
	9469.		9456
	9483.	12	9425.
	9498		9435.
13	9415.		9464
	9418.	14	9416
	9448.	16	9401
	9454.	G. XVI.(2)..(112)	
	9468.	3	9480
	9478	4	9405
		Summa	452..7258
Irreg. 5			

Centas 96.			9529.
G. I....(5)..(471)			9542
39	9547	15	9582
69	9511.	16	9544
	9587	17	9564
129	9551	18	9558
165	9539	19	9565
G. II..(28).(1964)		20	9503 (*2*).
16	9508		9589.
17	9535		9591.
18	9523.		9593
	9583	21	9515.
20	9598		9561
24	9502.	24	9519.
	9507		9579
25	9559	25	9530.
26	9543		9584
27	9531 (*3*).	27	9509
	9563.	28	9536
	9574 (*3*)	30	9506
29	9532	38	9569
30	9571	40	9554
33	9527	G.VIII (26).(1960)	
34	9556.	4	9568
	9586	5	9592
38	9524.	6	9552.
	9567		9585.
42	9518		9597
43	9578	7	9528
48	9566	8	9510 (*2*).
49	9599		9513 (*2*).
51	9575		9537.
59	9596		9540 (*2*).
60	9572		9588.
61	9533		9600 (*2*).
64	9521	9	9541.
G. IV.(38).(2700)			9548.
8	9538.		9555 (*3*)
	9562.	10	9525.
	9577		9534.
10	9517.		9594
	9553.	12	9504.
	9573		9516 (*2*).
12	9505.		9560
	9522.	13	9545.
	9526.		9594
	9550.	14	9581
	9580.	15	9512
	9595 (*2*)		9590
13	9514.	G. XVI.(3).(176)	
	9549.	3	9520.
	9557		9570
14	9501.	5	9576
		Summa	469..7271
Irreg. 10			

Centas 97.		15	9639
G. I....(5)..(333)		16	9610
33	9643	17	9606
57	9619	18	9603.
71	9679		9675 (*3*).
77	9631		9693 (*3*)
95	9623	19	9638.
G. II..(29).(2108)			9694
12	9667	20	9608.
19	9661		9616.
20	9697		9650.
21	9607.		9653
	9613	21	9699
24	9601	22	9654.
26	9655		9684
27	9627 (*3*).	23	9695
	9663.	24	9641.
	9683 (*3*)		9666
28	9604.	25	9609
	9634.	29	9617.
	9649		9674.
30	9687.		9698
	9691	30	9621
32	9662	32	9665
33	9692	33	9635
36	9668	42	9686
42	9651	G.VIII (22).(1600)	
43	9647	4	9640
44	9602	5	9618.
45	9626		9625.
49	9677		9685.
52	9689		9688
55	9629	6	9648.
57	9659		9696
63	9671	7	9633.
66	9611		9646
69	9644	8	9645.
G. IV..(41).(3108)			9669
9	9612 (*3*).	9	9630.
	9615.		9657
	9622.	10	9620.
	9678		9636
10	9628	11	9681
11	9670	12	9605.
12	9652.		9632.
	9673 (*2*).		9680 (*2*)
	9676.	15	9624
	9682.	16	9614
	9700	18	9656
13	9637	G. XVI.(3)..(192)	
14	9642.	3	9672
	9658.	4	9690
	9664	5	9660
		Summa	451..7341
Irreg. 7			

DETERMINANTES NEGATIVI.

Centas 98.		17	9711
G. I...(6)..(524)		18	9715.
39	9739.		9723.
	9787		9782
89	9767	19	9773
105	9743	20	9714.
119	9791		9796
133	9719	21	9708.
G. II.(24).(1646)			9710.
17	9703		9770.
18	9748 (*3*).		9774
	9783	22	9725.
19	9727		9756
21	9733	24	9728
22	9742	26	9794
24	9763	27	9704.
25	9781		9726
26	9769.	28	9716.
	9778.		9734
27	9747 (*3*).	29	9761
	9751	30	9746
30	9755	33	9740
33	9799	36	9779
35	9754	38	9701
37	9788	G.VIII (24).(1752)	
39	9707.	5	9717.
	9771		9730
43	9722	6	9760.
46	9721.		9790
	9759	7	9724.
48	9731		9752
76	9764	8	9702 (*2*).
81	9749		9729.
G. IV.(43).(3292)			9735.
7	9718		9758.
9	9772		9780.
10	9732.		9792 (*2*)
	9793	9	9705.
11	9738.		9709.
	9753		9720 (*3*)
12	9706.	10	9741.
	9745.		9750.
	9762		9798
13	9712.	11	9737.
	9713		9786
14	9757.	12	9800
	9775.	14	9789
	9784	15	9776.
15	9766.		9785
	9777.	G. XVI (3)..(192)	
	9795.	4	9744.
16	9736.		9765.
	9797		9768
		Summa	466..7406
Irreg. 5			

Centas 99.			9814.
G. I...(8).(638)			9848
49	9871	17	9852.
51	9883		9893.
63	9811 (*3*).		9897
	9859	18	9801 (*3*).
75	9887		9844.
91	9839		9873.
111	9803		9891
135	9851	19	9815.
G. II..(22).(1700)			9879
20	9892	21	9855
21	9829.	22	9841
	9862.	25	9830
	9868	26	9812.
22	9847		9876
24	9817.	27	9831
	9874	28	9881 (*2*)
26	9838	31	9884
28	9886.	32	9809 (*2*)
	9895	34	9824
30	9857	37	9854
34	9826	39	9896
42	9827	41	9869
45	9899 (*3*)	G.VIII (24).(1712)	
48	9863	5	9877
49	9818	6	9804.
51	9819		9810.
52	9833		9828.
57	9836		9867.
60	9875		9888.
70	9806		9900
77	9866	7	9805.
G. IV.(43).(3164)			9858.
6	9823		9885
7	9802	8	9816.
8	9865		9856.
9	9832.		9860
	9843.	9	9825 (*3*).
	9853.		9849 (*3*).
	9898		9889
10	9808.	10	9821.
	9837.		9834
	9850	11	9894
11	9813	12	9861.
12	9872.		9864
	9835	13	9842
13	9846	16	9845
14	9820.	17	9890
	9878	G. XVI (3)..(192)	
15	9822.	3	9870
	9882	4	9880
16	9807.	5	9840
		Summa	464..7406
Irreg. 7			

Centas 100.			9921.
G. I...(4)..(228)			9969.
39	9967		9978
45	9907 (*3*)	16	9961.
69	9931		9985
75	9923	17	9919.
G. II.(28).(2302)			9965
16	9991	18	9910.
18	9934 (*3*)		9915.
23	9927.		9964
	9973	19	9951.
25	9949		9957.
27	9963 (*3*)		9977
28	9903.	20	9992
	9943	21	9909
30	9938.	22	9953.
	9979		9956.
31	9901		9962.
32	9986		9999
34	9998	23	9917.
38	9908		9994
39	9914.	25	9981
	9987	26	9924
42	9939.	27	9989
	9947	28	9926.
46	9983		9980
47	9935.	30	9932.
	9946		9950
50	9902	34	9911
60	9995	G.VIII (18).(1328)	
63	9971	4	9982
65	9959	5	9976
67	9941	6	9928.
76	9929		9940.
85	9974		9990
G. IV.(46).(3248)		7	9906
7	9937	8	9930.
9	9925.		9975.
	9958.		9984
	9997	10	9918
10	9913.	11	9968
	9942.	12	9965.
	9948.		9920.
	10000		9936.
11	9970		9954.
12	9916.		9996
	9922.	13	9966
	9952.	14	9944
	9955 (*2*).	G. XVI (4)..(240)	
	9972 (*2*)	3	9933
13	9993	4	9912.
14	9988		9945.
15	9904.		9960
		Summa	452..7346
Irreg. 5			

Centas 117.

G. I....(1)..(147)	
147	11699
G. II..(35).(2896)	
16	11617
18	11698
19	11677
20	11614
22	11668
26	11647
27	11643.
	11683 (*3*)
29	11663
30	11602.
	11623.
	11659
35	11686
36	11603.
	11631.
	11633.
	11667.
	11671.
	11689.
	11691.
	11695
37	11642
42	11657
43	11626
45	11611
51	11621
54	11619
56	11678
59	11612
63	11675
67	11639
70	11636
73	11654
81	11651 (*3*)
90	11681
G. IV..(35).(2672)	
8	11650
9	11608.
	11692
11	11638.
	11653
12	11635.
	11641.
	11673
13	11632.
	11674
14	11652.
	11662
15	11607.
	11694
16	11629.
	11665
17	11672
18	11601.
	11627.
	11637.
	11664
19	11687
21	11644
23	11618
24	11615
25	11693
26	11604.
	11669.
	11679
28	11646
29	11630
32	11666.
	11684
33	11624
35	11606
G. VIII (27).(2248)	
6	11610.
	11620.
	11628.
	11656.
	11680.
	11697
8	11605.
	11622.
	11658.
	11670.
	11682
9	11613.
	11655
10	11616.
	11625.
	11676
11	11688
12	11648.
	11661.
	11700 (*2*)
13	11634.
	11645.
	11649
14	11690
18	11660.
	11696
21	11609
G. XVI.(2).(128)	
3	11685
5	11640

Summa 459... 8091

Irreg. 3 Impr. prim. 1339

Centas 118.

G. I.....(5)..(319)	
39	11743
41	11719
63	11731
81	11779 (*3*)
95	11783
G. II..(28).(2560)	
18	11707
21	11767
22	11727.
	11758
25	11734
29	11722
30	11755
31	11701.
	11708
33	11702.
	11763
36	11762
39	11747.
	11787
40	11791
49	11789
50	11794
53	11751
54	11723
60	11711.
	11771.
	11777
61	11735.
	11738
65	11759
73	11717
87	11756
98	11714
G. IV.(40).(3100)	
8	11797
9	11782
10	11785
11	11740.
	11757
12	11733.
	11737.
	11788
14	11728.
	11746.
	11764
15	11710.
	11773.
	11793
16	11705.
	11775.
	11776.
	11796
17	11761
18	11754.
	11772
19	11706
20	11716.
	11768
21	11724.
	11799
22	11703.
	11732.
	11749
25	11709.
	11769.
	11780
27	11795 (*3*)
	11798.
28	11786
29	11721.
	11741.
30	11774
34	11729
40	11744
G. VIII (23).(1744)	
4	11713 (*3*)
6	11715.
	11718.
	11748.
	11752
7	11720.
	11742.
	11778
8	11712.
	11725 (*2*).
	11753.
	11770.
	11784.
	11790
9	11800
10	11792
11	11736
12	11739.
	11745
15	11766
16	11780
18	11726.
	11765
G. XVI.(4)..(320)	
4	11760
5	11704.
	11730
6	11781

Summa 469...8043

Irreg. 4 Impr. prim. 1369

Centas 119.

G. I.....(7)..(505)	
31	11863
39	11827
47	11887
61	11839
75	11867
113	11807
139	11831
G. II...(23).(1990)	
21	11878
24	11806.
	11812.
	11854
27	11851 (*3*).
	11881
30	11875
33	11884
39	11852
40	11833.
	11897
43	11821
45	11871.
	11899 (*3*)
49	11813.
	11846
52	11876
54	11828.
	11843 (*3*)
58	11855
70	11801
72	11819
75	11879
G. IV.(44).(3608)	
8	11848
9	11803.
	11818.
	11893
10	11860.
	11862
11	11815
12	11823
13	11838
14	11842.
	11892
15	11824.
	11853.
	11883
16	11857
18	11809.
	11811.
	11835 (*3*).
	11873.
	11874
19	11841
20	11822 (*2*).
	11836.
	11847.
	11858.
	11866
21	11859.
	11888
	11898
23	11829
24	11826.
	11889.
	11896
26	11834.
	11894
27	11804.
	11810.
	11861
29	11882
35	11870
36	11849
37	11885
42	11891
43	11864
G. VIII (22).(1688)	
4	11872
6	11817.
	11845.
	11869.
	11895
7	11830.
	11890
8	11805.
	11808 (*2*).
	11877
9	11802.
	11820.
	11825
10	11850.
	11900
11	11837.
	11868
12	11844.
	11886
16	11814.
	11840
20	11816
G. XVI.(4)..(304)	
3	11880
4	11832
6	11856.
	11865

Summa 469... 8095

Irreg. 6 Impr. 1337

Centas 120.

G. I...(7)..(547)	
39	11923
45	11971 (*3*)
81	11903.
	11939 (*3*)
83	11927
95	11959
123	11987
G. II..(22).(1912)	
20	11953
21	11962
24	11995
27	11907 (*9*).
	11911.
	11967
30	11943.
	11947
31	11983
33	11974.
	11979
41	11941
48	11963
49	11933.
	11999
50	11975
57	11915
66	11906
69	11909
71	11981
73	11996
80	11969
G. IV.(45).(3564)	
9	11992
10	11922.
	11932.
	11938.
	11958
11	11902.
	11965
12	11905.
	11908.
	11917.
	11929.
	11950.
	11980.
	11988 (*2*).
	11998
13	11986
15	11944.
	11955
17	11982
18	11916.
	11956.
	11991
19	11918.
	11993.
	11994
20	11978
21	11901.
	11957
23	11989
24	11926.
	11964.
	11972 (*2*)
26	11936.
	11945
27	11919.
	11930.
	11942.
	11961 (*3*)
29	11951
30	11912.
	11948
32	11966 (*2*)
33	11931
40	11924
42	11954
G. VIII (22).(1832)	
6	11914.
	11937.
	11968.
	11977
7	11973
8	11920 (*2*).
	11940.
	11946
9	11913.
	11925.
	11935.
	11949.
	11952
10	11997.
	12000
12	11904.
	11910
15	11934
16	11976.
	11984
17	11990
21	11921
G. XVI.(4)..(288)	
3	11928
4	11985
5	11960
6	11970

Summa 471.. 8143

Irreg. 8 Impr. prim. 1361

Millias I.

G. I...(93)..(1277)	
1	1. 2. 3.
	4. 7 . . 5
3	11. 19.
	23. 27.
	31. 43.
	67. 163 . . 8
5	47. 79.
	103. 127 . . 4
7	71. 151.
	223. 343.
	463. 487 . . 6
9	59. 83.
	107. 139.
	199. 211.
	243 (*3*).
	283.
	307 (*3*).
	331. 367.
	379. 499.
	547. 643.
	823. 883.
	907 18
11	167. 271.
	967 3
13	191. 263.
	607. 631.
	727 5
15	131. 179.
	227. 239.
	347. 439.
	443. 523.
	571. 619.
	683. 691.
	739. 751.
	787. 947 . . 16
17	383. 991 . . 2
19	311. 359.
	919 3
21	251. 431.
	467. 503.
	587. 743.
	811. 827.
	859. 863 . . 10
25	479. 599.
	647 3
27	419. 491.
	563. 983 . . 4
29	887 1
31	719. 911 . . 2
33	659. 839 . . 2
45	971 1

Irreg. 2 pr. 2130

G. II......(402)........(6068)	
1	5. 6. 8. 9. 10.
	12. 13. 15. 16. 18.
	22. 25. 28. 37. 58 15
2	14. 17. 20. 32. 34.
	36. 39. 46. 49. 52.
	55. 63. 64. 73. 82.
	97. 100. 142. 148. 193 . . 20
3	26. 29. 35. 38. 44.
	50. 51. 53. 54. 61.
	75. 76. 81. 87. 91.
	92. 99. 106. 108. 109.
	115. 118. 121. 123. 124.
	135. 147. 157. 162. 169.
	172. 175. 187. 202. 207.
	214. 235. 247. 262. 267.
	268. 277. 298. 358. 397.
	403. 427. 541. 652 49
4	41. 62. 68. 94. 95.
	98. 111. 113. 128. 137.
	158. 178. 183. 196. 226.
	256. 289. 292. 295. 313.
	337. 382. 388. 415. 457.
	466. 478. 562. 577. 583.
	772. 862 32
5	74. 86. 119. 122. 125.
	143. 159. 166. 181. 188.
	197. 218. 229. 242. 250.
	303. 316. 317. 319. 346.
	361. 373. 375. 394. 412.
	421. 422. 423. 508. 538.
	613. 625. 694. 709. 757.
	847. 853. 877. 982 39
6	89. 116. 155. 171. 203.
	212. 219. 233. 241. 244.
	259. 274. 275. 279. 291.
	302. 323. 324. 327. 334.
	351. 355. 363. 387. 433.
	436. 475. 484. 507. 526.
	529. 543. 567. 603. 617.
	622. 628. 655. 667. 673.
	676. 687. 718. 723. 763.
	775. 802. 898. 955 49
7	101. 134. 149. 173. 215.
	278. 284. 287. 338. 349.
	391. 447. 454. 502. 511.
	535. 604. 634. 639. 653.
	703. 733. 778. 807. 838.
	841. 892. 997 28
8	146. 164. 254. 257. 353.
	407. 409. 452. 471. 512.
	514. 527. 548. 559. 578.
	722. 799. 895. 943. 958.
	961 22

9 194. 236. 293. 332. 335.
339(*3*). 362. 411. 428.
451. 459. 486. 515. 519.
531. 556. 557. 575. 586.
661. 675(*3*). 679. 707.
729. 747. 771. 783. 796.
835. 843. 844. 867. 886.
891(*3*). 922. 931. 963.
972 37
10 206. 281. 386. 398. 401.
449. 482. 500. 601. 711.
724. 769. 788. 878. 916.
927. 937. 977 18
11 269. 326. 389. 551. 554.
591. 623. 662. 668. 758.
767. 829. 842. 871. 879 . 15
12 299. 356. 371. 395. 539.
542. 579. 593. 674. 695.
706. 766. 932. 939. 964.
979. 995. 999 18
13 314. 458. 698. 746. 764.
773. 934. 951. 998 9
14 404. 596. 641. 686. 692.
818. 831 7
15 461. 509. 524. 566. 611.
635. 671. 677. 699. 716.
779. 797. 803. 815. 821.
851. 875. 908. 923. 956 . 20
16 446. 521. 569. 791. 809.
857. 953 7
17 614. 701 2
18 626. 731. 755(*3*). 914.
929. 959. 974(*3*) 7
20 734. 761. 881. 926 4
21 794. 899 2
22 866 1
23 941 1
Irreg. 5 omnes *3* pr. 7394

G. IV . . . . . (417) . . . . (6620)
1 21. 24. 30. 33. 40.
42. 45. 48. 57. 60.
70. 72. 78. 85. 88.
93. 102. 112. 130. 133.
177. 190. 232. 253 24
2 56. 65. 66. 69. 77.
80. 84. 90. 96. 114.
117. 126. 132. 136. 138.
141. 144. 145. 150. 153.
154. 156. 160. 180. 184.
192. 198. 205. 208. 213.
217. 220. 225. 228. 238.
252. 258. 265. 282. 288.
301. 310. 322. 328. 333.
340. 352. 372. 400. 418.
438. 442. 445. 448. 498.
505. 522. 553. 568. 592.
598. 658. 697. 708. 742.
793. 928 67
3 104. 110. 129. 140. 152.
170. 174. 176. 182. 186.
189. 195. 200. 201. 204.
216. 222. 231. 234. 237.
245. 246. 249. 255. 261.
270. 286. 294. 297. 300.
304. 309. 315. 318. 325.
342. 348. 364. 366. 368.
370. 378. 393. 396. 405.
417. 424. 430. 432. 435.
450. 453. 460. 472. 473.
477. 483. 490. 492. 493.
496. 513. 517. 533. 537.
540. 550. 555. 565. 588.
595. 597. 606. 610. 618.
627. 637. 648. 669. 670.
682. 685. 688. 700. 702.
715. 730. 748. 753. 762.
784. 795. 808. 813. 814.
817. 826. 827. 837. 856.
913. 918. 925. 933. 940.
942. 949. 970. 973. 988 . 110
4 161. 185. 221. 224. 248.
260. 272. 276. 305. 306.
308. 320. 350. 354. 369.
376. 377. 380. 384. 392.
399. 402. 406. 410. 414.
441. 444. 468. 469. 481.
485. 495. 501. 518. 532.
544. 558. 564. 573. 574.
576(*2*). 580(*2*). 582.
589. 612. 632. 640. 642.
646. 657. 663. 712. 717.
721. 732. 735. 736. 738.
745. 768. 785. 786. 790.
820(*2*). 832. 834. 850.
852. 855. 865. 868. 873.
882. 889. 900(*2*). 903.
904. 933. 938. 946. 975.
994 82
5 209. 230. 266. 290. 296.
321. 344. 365. 381. 413.
425. 437. 455. 470. 474.
476. 488. 489. 534. 572.
590. 608. 615. 629. 633.
636. 638. 649. 664. 666.
678. 681. 726. 737. 750.
752. 754. 774. 781. 822.
830. 872. 874. 917. 921.
968. 1000 47
6 329. 416. 426. 434. 464.
497. 516. 549. 594. 602.
605. 620. 621. 650. 651.
684. 704. 713. 725. 756.
759. 782. 800. 801. 804.
810. 812. 819. 833. 848.
864. 876. 890. 894. 901
905. 915. 948. 954. 976.
978. 980. 981. 985. 987.
996 46
7 341. 374. 494. 506. 530.
536. 581. 654. 806. 845.
849. 860. 893. 902. 906.
909. 935. 962 18
8 545. 584. 644. 656. 710.
740. 749. 789. 846. 869.
884(*2*). 896. 992 13
9 944. 950. 989 3
10 689. 776. 824. 836 4
11 854. 965. 986 3
pr. 6904

G. VIII . . . . (87) . . . . (1496)
1 105. 120. 165. 168. 210.
240. 273. 280. 312. 330.
345. 357. 385. 408. 462.
520. 760 17
2 264. 285. 336. 360. 390.
420. 429. 456. 465. 480.
504. 510. 525. 528. 552.
561. 570. 585. 600. 609.
616. 624. 630. 645. 660.
672. 690. 693. 720. 765.
777. 792. 798. 805. 858.
870. 880. 897. 910. 912.
952. 957. 960 43
3 440. 546. 560. 665. 680
696. 705. 714. 728. 741.
744. 780. 816. 825. 861.
885. 888. 924. 930. 936.
945. 966. 969. 984. 990 . 25
4 770 1
5 920 1

G. XVI . . . . . . (1) . . . . (16)
1 840 1

Multitudo integra omnium
generum = 3277
classium $p.p.p.$ = 15467
$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{1000}$ = 21097,661
Quotiens = 0,733

Irreg. 11. 5(*2*). 6(*3*).

Millias III.

G. I . . . . . . (64) . . . . (2470)
13 2143 1
15 2203. 2347. 2647. 2683 . . 4
21 2011. 2083. 2179. 2251.
2467. 2503. 2707. 2767 . . 8
23 2671 1
25 2887 1
27 2003. 2187*. 2803 3
29 2287. 2311. 2383 3
31 2927 1
33 2027. 2267. 2423. 2539.
2731. 2851. 2971 7
35 2087. 2239. 2543 3
37 2447 1
39 2131. 2207. 2371. 2659.
2791. 2963 6
41 2551. 2719 2
43 2663 1
45 2039. 2063. 2243*. 2699*.
2843 5
49 2111 1
51 2531. 2687 2
53 2711 1
57 2099. 2339. 2459. 2591.
2879 5
59 2399. 2903 2
63 2351. 2579. 2819 3
69 2411 1
73 2999 1
87 2939 1
Irreg. 3

G. II . . . . . (311) . . . . . . (11646)
6 2017. 2062 2
7 2293. 2335 2
8 2095. 2113. 2137. 2302.
2308. 2377. 2578. 2878.
2962 9
9 2023. 2038. 2047. 2053.
2122. 2167. 2188. 2221.
2227. 2283. 2403(*3*).
2437(*3*). 2443. 2458.
2515. 2557. 2563(*3*).
2566. 2572. 2787. 2797.
2902. 2923. 2998 24
10 2164. 2281. 2407. 2452.
2473. 2487. 2500. 2527.
2638. 2722. 2743. 2818.
2836. 2857. 2983 15
11 2182. 2215. 2263. 2326.
2374. 2623. 2662. 2677.
2815. 2863. 2917. 2935 . . 12
12 2059. 2098. 2107. 2116.
2209. 2307. 2323. 2395.
2419. 2468. 2479. 2587.
2593. 2611. 2689. 2692.
2713. 2827. 2947. 2953.
2995 21
13 2102. 2197. 2218. 2362.
2367. 2428. 2524. 2762.
2809. 2823. 2839. 2854.
2908 13
14 2007. 2018. 2127. 2258.
2359. 2401. 2446. 2455.
2612. 2734. 2753. 2932 . . 12
15 2043. 2071. 2092. 2151.
2191. 2237. 2269. 2284.
2299. 2303. 2319. 2341.
2363. 2476. 2523. 2575.
2578. 2599. 2602. 2643.
2727. 2732. 2764. 2875.
2883. 2899. 2956. 2986 . . 28
16 2048. 2153. 2194. 2206.
2386. 2434. 2462. 2521.
2617. 2633. 2657. 2833 . . 12
17 2026. 2029. 2103. 2119.
2234. 2333. 2389. 2391.
2463. 2918 10
18 2155. 2161. 2199. 2228.
2417. 2491. 2511. 2547.
2619(*3*). 2627. 2644.
2723. 2763(*3*). 2783.
2867. 2897. 2916. 2943.
2979 19
19 2031. 2069. 2381. 2477.
2554. 2738. 2746. 2799.
2858 9
20 2078. 2297. 2375. 2402.
2404. 2498. 2559. 2777.
2866. 2942. 2959 11
21 2012. 2123. 2138. 2147.
2171. 2183. 2186. 2213.
2259. 2342. 2348. 2357.
2427. 2507. 2571. 2693.
2749. 2779. 2911. 2931.
2972 21
22 2089. 2271. 2439. 2567.
2594. 2798 6
23 2614. 2615. 2837 3
24 2019. 2195. 2273. 2327.
2372. 2631. 2654. 2811.
2974. 2991 10
25 2042. 2396. 2582. 2588 . . 4
26 2642. 2807. 2969 3
27 2651. 2075(*3*). 2252.
2291. 2315(*3*). 2426.
2675(*3*). 2747. 2759.
2859. 2891(*3*). 2951.
2957 13
28 2066. 2129. 2279. 2495.
2564 5
29 2231. 2741 2
30 2036. 2081. 2126. 2159.
2393. 2483. 2603. 2606.
2708. 2801. 2855. 2978.
2987 13
31 2471. 2621. 2735. 2876 . . 4
32 2084. 2174. 2276. 2306.
2519. 2558 6
33 2309. 2435. 2636. 2861.
2906 5
34 2804. 2831. 2894 3
35 2549. 2909 2
36 2219(*3*). 2846 2
38 2441 1
39 2141. 2246. 2474. 2651.
2771 5
40 2729 1
41 2789 1
42 2609 1
43 2966 1
Irreg. 10

G. IV . . . . (430) . . . . . . (16232)
3 2608 1
4 2020. 2077. 2212. 2242.
2248. 2272. 2332. 2353.
2368. 2410. 2533. 2542(*2*)
2605. 2773. 2788. 2842.
2893 17
5 2032. 2073. 2074. 2101.
2118. 2125. 2152. 2158.
2173. 2178. 2202. 2230.
2247. 2290. 2398. 2422.
2433. 2494. 2577. 2641.
2776. 2830. 2853. 2965 . . 24
6 2022. 2025. 2028. 2035.
2050. 2052. 2067. 2068.
2082. 2086. 2096. 2104.
2115. 2132. 2139. 2148.
2157. 2163. 2172. 2223.
2257. 2260. 2268. 2275.
2278. 2305. 2317. 2322.
2338. 2358. 2388. 2412.
2413. 2425. 2451. 2475.
2482. 2488. 2493. 2512.
2517. 2538. 2545. 2548.
2592. 2598. 2620. 2629.
2650. 2653. 2658. 2667.
2668. 2676. 2682. 2695.
2698. 2704. 2710. 2715.
2718. 2725. 2740. 2748.
2752. 2755. 2758. 2794.

2802. 2872. 2892. 2907.
2914. 2938. 2977. 2997 . . 76
7 2008. 2033. 2044. 2055.
2058. 2094. 2110. 2140.
2146. 2149. 2165. 2217.
2238. 2270. 2314. 2382.
2416. 2431. 2438. 2497.
2502. 2509. 2535. 2536.
2556. 2583. 2607. 2703.
2761. 2766. 2782. 2812.
2881. 2913. 2930. 2941.
2973 37
8 2004. 2005. 2034. 2041.
2056. 2134. 2176 (*2*).
2192. 2236. 2245. 2254 (*2*).
2286. 2292. 2298. 2304.
2312. 2313. 2329 (*2*).
2343. 2350. 2356. 2454.
2506. 2513. 2528. 2560.
2569. 2589. 2601. 2628 (*2*).
2655. 2674. 2686. 2733.
2742. 2775. 2785. 2817.
2845. 2847. 2848 (*2*).
2868. 2884. 2944. 2946.
2949. 2980 (*2*) 47
9 2014. 2049. 2060. 2076.
2079. 2091. 2106. 2108.
2117. 2124. 2133 (*3*).
2175. 2181. 2198. 2214.
2221. 2235 (*3*). 2241.
2253. 2266. 2295. 2300.
2318. 2344. 2349. 2355.
2361. 2387. 2430 (*3*).
2461. 2522. 2555. 2581.
2595. 2626. 2634. 2635.
2637. 2646 (*3*). 2673.
2700 (*3*). 2716. 2770.
2778. 2781. 2795. 2806.
2828. 2835 (*3*). 2862.
2887. 2888. 2890. 2895.
2950. 2955. 2988. 2989 . . 58
10 2057. 2061. 2150. 2154.
2166. 2177. 2249. 2250.
2255. 2282. 2449. 2514.
2529. 2532. 2596. 2656.
2678. 2724. 2751. 2810.
2844. 2869. 2871. 2874.
2896. 2919. 2929. 2948.
2975 29
11 2135. 2204. 2216. 2334.
2364. 2421. 2489. 2492.
2570. 2573. 2645. 2648.
2649. 2672. 2757. 2841.
2922. 2933. 2934. 2967 . . 20
12 2006. 2009. 2045. 2105.
2156. 2168. 2169. 2196.
2211. 2225. 2229. 2316.
2331. 2366. 2379 (*2*).
2390. 2420 (*2*). 2432.
2450. 2466. 2484. 2499.
2597. 2661. 2691. 2696.
2701. 2702 (*2*). 2739.
2754. 2780. 2816. 2822.
2824. 2825. 2852. 2873.
2900. 2993 (*2*) 39
13 2015. 2222. 2453. 2469.
2481. 2510. 2679. 2721.
2792. 2826. 2901. 2984 . . 12
14 2114. 2144. 2162. 2274.
2324. 2354. 2384. 2429.
2486. 2501. 2525. 2587.
2744. 2768. 2774 15
15 2096. 2189. 2264. 2285.
2321. 2330. 2378. 2406.
2444. 2526. 2534. 2537.
2540. 2630. 2684. 2690.
2694. 2750. 2796. 2813.
2864. 2889 22
16 2180. 2201. 2336. 2546.
2561. 2624 (*2*). 2639.
2669. 2882. 2921. 2994.
2996 12
17 2021. 2456. 2666. 2726 . . 4
18 2054. 2369. 2414. 2504.
2516. 2681. 2705. 2786.
2915. 2924 10
19 2294 1
20 2714. 2756 (*2*). 2936.
2954. 2981 5
21 2834 1

Irreg. 13 (2). 6 (3). Sa . . 19

G. VIII . . . . (184) . . . . (6344)

2 2002. 2013. 2080. 2088.
2128. 2170. 2233. 2277.
2392. 2632. 2737. 2832.
2968 13
3 2037. 2065. 2160. 2185.
2190. 2193. 2200. 2205.
2220. 2262. 2325. 2346.
2352. 2370. 2373. 2380.
2418. 2424. 2440. 2457.
2472. 2485. 2508. 2530.
2550. 2553. 2562. 2590.
2613. 2622. 2680. 2685.
2697. 2728. 2800. 2808.
2860. 2905. 2920. 2937.
2970. 2982. 2992 43
4 2010. 2016. 2046. 2072.
2100. 2112 (*2*). 2130.
2142. 2208. 2232. 2244.
2256. 2265. 2289. 2296.
2320. 2328. 2337. 2340.
2365. 2385 (*2*). 2397.
2400 (*2*). 2436. 2442.
2445. 2448 (*2*). 2464.
2465. 2470. 2478. 2490.
2496. 2568. 2580. 2584.
2652. 2665. 2688. 2706.
2709. 2717. 2745. 2772.
2790. 2793. 2821. 2829.
2850 (*2*). 2865. 2880.
2898. 2928. 2940. 2952.
2958. 2985 57
5 2030. 2070. 2085. 2093.
2109. 2121. 2136. 2226.
2288. 2360. 2394. 2405.
2409. 2415. 2460. 2505.
2541. 2544. 2552. 2585.
2610. 2618. 2625. 2664.
2670. 2712. 2769. 2814.
2838. 2877. 2886. 2904.
2910. 2926. 2990. 3000 . . 36
6 2001. 2064. 2090. 2240.
2301. 2376. 2408. 2480.
2564. 2574. 2600. 2604.
2660. 2720. 2736. 2784.
2820. 2912. 2925. 2961.
2964. 2976 22
7 2024. 2120. 2210. 2345.
2616. 2765. 2870 7
8 2576. 2840. 2849. 2945.
2960 5
9 2261 1

Irreg. 5 (2).

G. XVI . . . . (11) . . . . . (400)

2 2040. 2145. 2280. 2310.
2520. 2640. 2730. 2760 . . 8
3 2184. 2805. 2856 3

Summa omnium

gener. $p.p.p =$ 4054 exsp. 4051,3
class. $p.p.p =$ 37092 . . 37074,3
. . impr. $p.p =$ 6182
Irreg. 18 (*2*). 19 (*3*). Sa = 37

Millias X.

Genera I.

27 9067
33 9283. 9403. 9643
35 9907
39 9547. 9739. 9787. 9967
41 9319
45 9043. 9463. 9907 (*3*)
49 9871
51 9199. 9343. 9883
55 9391
57 9103. 9127. 9619
63 9091. 9187. 9811 (*3*). 9859
67 9151
69 9511. 9587. 9931
71 9679
75 9227. 9439. 9887. 9923
77 9631
87 9323
89 9767
91 9431. 9839
93 9203
95 9623
97 9311
99 9011
101 9479
105 9419. 9743
111 9059. 9803
119 9791
123 9467
129 9551
133 9719
135 9491. 9851
139 9239
147 9371
165 9539

57 . . . 4401.

Genera II.

12 9667 1
13 9157. 9277 2
14 9172 1
15 9013. 9307. 9388 3
16 9433. 9508. 9991 3
17 9223. 9535. 9703 3
18 9003 (*3*). 9055. 9241.
9298. 9355. 9475. 9523.
9583. 9748 (*3*). 9783.
9934 (*3*) 11
19 9034. 9133. 9466. 9487.
9661. 9727 6
20 9124. 9183. 9442. 9598.
9697. 9892 6
21 9004. 9046. 9115. 9235.
9397. 9427. 9607. 9613.
9733. 9829. 9862. 9868 . . 12
22 9742. 9847 2
23 9181. 9382. 9927. 9973 . . 4
24 9406. 9409. 9423. 9502.
9507. 9601. 9763. 9817.
9874 9
25 9293. 9375. 9559. 9781.
9949 5
26 9079. 9337. 9543. 9655.
9769. 9778. 9838 7
27 9031. 9094. 9109. 9123.
9167. 9175. 9211. 9247.
9349. 9531 (*3*). 9563.
9574 (*3*). 9627 (*3*).
9663. 9683 (*3*). 9747 (*3*)
9751. 9963 (*3*) 18
28 9137. 9327. 9604. 9634.
9649. 9886. 9895. 9903.
9943 9
29 9098. 9148. 9244. 9532 . . 4
30 9001. 9076. 9147. 9271.
9346. 9358. 9363. 9364.
9459. 9571. 9687. 9691.
9755. 9857. 9938. 9979 . . 16
31 9263. 9901 2
32 9111. 9377. 9662. 9986 . . 4
33 9068. 9267. 9421. 9527.
9692. 9799 6
34 9122. 9166. 9326. 9332.
9458. 9556. 9586. 9826.
9998 9
35 9279. 9754 2
36 9049. 9083. 9143. 9259.
9347. 9379. 9395. 9451.
9497 (*3*). 9668 10
37 9274. 9788 2
38 9524. 9567. 9908 3
39 9107. 9171. 9242. 9286.
9287. 9484. 9707. 9771.
9914. 9987 10
40 9023. 9188. 9278. 9473 . . 4
41 9302 1
42 9041. 9428. 9518. 9651.
9827. 9939. 9947 7
43 9578. 9647. 9722 3
44 9047. 9602 2
45 9019 (*3*). 9251 (*3*).
9411. 9437. 9626. 9899 (*3*). 6
46 9038. 9351. 9407. 9721.
9759. 9983 6
47 9173. 9935. 9946 3
48 9092. 9566. 9731. 9863 . . 4
49 9221. 9335. 9599. 9677.
9818 5
50 9902 1
51 9383. 9413. 9575. 9819 . . 4
52 9359. 9689. 9833 3
54 9099 (*3*). 9134. 9155.
9209 4
55 9629 1
56 9182. 9314 2
57 9029. 9179. 9356. 9461.
9659. 9836 6
59 9596 1
60 9131. 9257. 9572. 9875.
9995 5
61 9533 1
62 9119 1
63 9194. 9206. 9404. 9671.
9971 5
64 9521 1
65 9959 1
66 9236. 9611 2
67 9941 1
69 9014. 9071. 9341. 9644 . . 4
70 9806 1
71 9446 1
72 9161 1
75 9299 1
76 9764. 9929 2
77 9866 1
80 9026. 9281 2
81 9749 1
85 9974 1

Summa 265 . . 19580

Irreg. 14

Genera IV.

6 9823 1
7 9178. 9262. 9340. 9367.
9718. 9802. 9937 7
8 9087. 9088. 9118 (*2*).
9193. 9202. 9208. 9232.
9412 (*2*). 9457 (*2*).
9472. 9538. 9562. 9577.
9865 14
9 9022. 9037. 9073. 9097.
9132. 9139. 9162. 9163 (*3*).
9342 (*3*). 9370. 9493.
9612 (*3*). 9615. 9622.
9678. 9772. 9832. 9843.
9853. 9898. 9925. 9958.
9997 23
10 9025. 9058. 9190. 9238.
9289. 9517. 9553. 9573.
9628. 9732. 9793. 9808.
9837. 9850. 9913. 9942.
9948. 10000 18
11 9052. 9237. 9258. 9304.

	9322. 9402. 9447. 9496.	
	9670. 9738. 9753. 9813.	
	9970	13
12	9018. 9027. 9028. 9121.	
	9142. 9153. 9186. 9207.	
	9219. 9220(*2*). 9228.	
	9243(*2*). 9268. 9292.	
	9295. 9297. 9378. 9387.	
	9445. 9469. 9483. 9498.	
	9505. 9522. 9526. 9550.	
	9580. 9595(*2*). 9652.	
	9673(*2*). 9676. 9682.	
	9700. 9706. 9745. 9762.	
	9835. 9872. 9916. 9922.	
	9952. 9955(*2*). 9972(*2*)	43
13	9082. 9117. 9249. 9255.	
	9313. 9318. 9415. 9418.	
	9448. 9454. 9468. 9478.	
	9514. 9549. 9557. 9637.	
	9712. 9713. 9846. 9993 . .	20
14	9017. 9032. 9066. 9217.	
	9226. 9253. 9353. 9354.	
	9436. 9501. 9529. 9542.	
	9642. 9658. 9664. 9757.	
	9775. 9784. 9820. 9878.	
	9988	21
15	9033. 9051. 9063. 9106.	
	9136. 9195. 9196. 9212.	
	9250. 9276. 9325. 9331.	
	9339. 9443. 9452. 9582.	
	9639. 9766. 9777. 9795.	
	9822. 9882. 9904. 9921.	
	9969. 9978	26
16	9214(*2*). 9216(*2*).	
	9248(*2*). 9252. 9301.	
	9316(*2*). 9544. 9610.	
	9736. 9797. 9807. 9814.	
	9848. 9961. 9985	15
17	9002. 9057. 9070. 9158.	
	9254. 9303. 9410. 9564.	
	9606. 9711 9852. 9893.	
	9897. 9919. 9965	15
18	9012. 9015. 9069(*3*).	
	9075(*3*). 9154. 9234.	
	9315(*3*). 9357. 9362.	
	9376. 9385(*3*). 9396.	
	9398. 9444. 9477. 9482.	
	9495. 9558. 9603. 9675(*3*).	
	9693(*3*). 9715. 9723.	
	9782. 9801(*3*). 9844.	
	9873. 9891. 9910. 9915.	
	9964	31
19	9053. 9095. 9146. 9565.	
	9638. 9694. 9773. 9815.	
	9879. 9951. 9957. 9977 . .	12
20	9039. 9054. 9062. 9081.	
	9169. 9500. 9503(*2*).	
	9589. 9591. 9593. 9608.	
	9616. 9650. 9653. 9714.	
	9796. 9992	17
21	9036. 9126. 9197. 9201.	
	9229. 9261. 9334. 9368.	
	9392. 9414. 9481. 9489.	
	9499. 9515. 9561. 9699.	
	9708. 9710. 9770. 9774.	
	9855. 9909	22
22	9084. 9138. 9189. 9233.	
	9245. 9305. 9317. 9441.	
	9654. 9684. 9725. 9756.	
	9841. 9953. 9956. 9962.	
	9999	17
23	9365. 9695. 9917. 9994 . .	4
24	9113. 9159. 9275. 9291.	
	9308. 9399. 9422(*2*).	
	9426. 9474. 9488. 9519.	
	9579. 9641. 9666. 9728 . .	15
25	9101. 9125. 9231. 9294.	
	9530. 9584. 9609. 9830.	
	9981	9
26	9218. 9290. 9794. 9812.	
	9876. 9924	6
27	9008. 9050. 9074. 9164.	
	9260(*3*). 9369. 9374.	
	9509. 9704. 9726. 9831.	
	9989	12
28	9089. 9116. 9494. 9536.	
	9716. 9734. 9881(*2*).	
	9926. 9980	9
29	9215. 9449. 9617. 9674.	
	9698. 9761	6
30	9005. 9035. 9056. 9077.	
	9140. 9284. 9386. 9455.	
	9506. 9621. 9746. 9932.	
	9950	13
31	9191. 9884	2
32	9104(*2*). 9224. 9344(*2*).	
	9665. 9809(*2*)	5
33	9149. 9329. 9389. 9635.	
	9740	5
34	9110. 9824. 9911	3
35	9470	1
36	9266(*2*). 9476. 9779 . .	3
37	9854	1
38	9569. 9701	2
39	9896	1
40	9554	1
41	9869	1
42	9434. 9686	2
	Summa 416 . . .	30144

Irreg. 20(*2*). 11(*3*)

Genera VIII.

4	9108. 9310. 9328. 9373.	
	9430. 9568. 9640. 9982.	
5	9010. 9102. 9160. 9333.	
	9417. 9592. 9618. 9625.	
	9685. 9688. 9717. 9730.	
	9877. 9976	14
6	9040. 9042. 9045. 9072.	
	9085. 9100. 9112. 9130.	
	9145. 9150. 9206. 9213.	
	9265. 9270. 9288. 9300.	
	9352. 9408. 9432. 9438.	
	9465. 9492. 9552. 9585.	
	9597. 9648. 9696. 9760.	
	9790. 9804. 9810. 9828.	
	9867. 9888. 9900. 9928.	
	9940. 9990	38
7	9078. 9080. 9090. 9093.	
	9174. 9256. 9321. 9361.	
	9381. 9453. 9462. 9528.	
	9633. 9646. 9724. 9752.	
	9805. 9858. 9885. 9906 . .	20
8	9016(*2*). 9024. 9060.	
	9135. 9144. 9156. 9168.	
	9184 9192. 9198. 9222.	
	9225. 9273. 9280(*2*).	
	9285. 9312(*2*). 9348.	
	9372. 9393. 9394. 9400.	
	9424. 9460. 9485. 9486.	
	9490. 9510(*2*). 9513(*2*).	
	9537 9540(*2*). 9588.	
	9600(*2*). 9645. 9669.	
	9702(*2*). 9729. 9735.	
	9758. 9780. 9792(*2*).	
	9816. 9856. 9860. 9930.	
	9975. 9984	46
9	9061. 9064. 9105. 9114.	
	9180. 9185. 9200. 9272.	
	9390. 9420. 9450(*3*).	
	9471. 9541. 9548. 9555(*3*).	
	9630. 9657. 9705. 9709.	
	9720(*3*). 9825(*3*).	
	9849(*3*). 9889	23
10	9020. 9128. 9152. 9210.	
	9330. 9338. 9366. 9440.	
	9525. 9534. 9594. 9620.	
	9636. 9741. 9750. 9798.	
	9821. 9834. 9918	19
11	9006. 9129. 9170. 9230.	
	9306. 9309. 9336. 9429.	
	9456. 9681. 9737. 9786.	
	9894. 9968	14
12	9021. 9065. 9141. 9204.	
	9264. 9324. 9425. 9435.	
	9464. 9504. 9516(*2*).	

	9560. 9605. 9632. 9680(*2*).	
	9800. 9861. 9864. 9905.	
	9920. 9936. 9954. 9996 . .	23
13	9545. 9594. 9842. 9966 . .	4
14	9096. 9269. 9296. 9350.	
	9380. 9416. 9581. 9789.	
	9944	9
15	9246. 9320. 9512. 9590.	
	9624. 9776. 9785	7
16	9401. 9614. 9845	3
17	9086. 9890	2
18	9044. 9656	2
19	9176	1
	Summa 233 . .	16680

Irreg. 11(*2*). 5(*3*)

Genera XVI.

3	9030. 9048. 9177. 9281.	
	9384. 9480. 9520. 9570.	
	9672. 9870. 9933	11
4	9120. 9165. 9345. 9360.	
	9405. 9690. 9744. 9765.	
	9768. 9880. 9912. 9945.	
	9960	13
5	9009. 9576. 9660. 9840 . .	4
	28 . . . 1680.	

Genera XXXII.

2	9240	1
	1 . . . 64	

Summam omnium
classium $p.p.p.$ 72549
exsp. 72572
$\Sigma\gamma\sqrt{D}$ 72775
generum $p.p.p.$ 4595
exsp. 4594,9
Irreg. 31(*2*). 32(*3*) . . . 63
Quotiens maximus
1,729662 ex 9434 . IV, 42
minimus
0,2421048 ex 9823 . IV, 6
Multitudo classium
minor quam semissis radicis 244
minor quam radix
maior semissi 566
maior radice 199

Octingenti determ. neg.

formae $-(15n+7)$.

G. I	. . . . . . (93)	(2793)
1	7	1
3	67	1
5	127	1
7	487	1
9	307(*3*). 367. 547. 907.	
	1087	5
11	967	1
13	607. 727	2
15	787. 1327. 1567. 1747.	
	1867. 2347. 2647	7
17	4447	1
19	3607. 4327. 5527	3
21	1627. 1987. 2467. 2707.	
	2767. 3067. 3187. 3907.	
	5107. 5647	10
23	1447. 3847	2
25	2887	1
27	3307. 3547(*3*). 4027(*3*).	
	4987. 6007. 6427. 7027.	
	9067. 10627	9
29	2287. 7207. 7687	3
31	3727. 8647	2
33	3967. 4567. 5167. 6547.	
	6967. 7867. 8167. 10987 .	8
35	9007	1
37	6367	1
39	4507. 5347. 7507. 9547.	
	9787. 9967. 10567. 11467.	
	11587. 11827	10
41	11047	1
43	5407. 6247. 8527. 8887 . .	4
45	5227(*3*). 5827. 6067(*3*).	
	6607. 8287. 8467. 8707.	
	9907(*3*). 10267	9
47	7927. 11887	2
51	6907. 10687	2
53	11287	1
57	9127	1
61	11527	1
63	9187	1
69	10867	1
	Irreg. 6	
G. II	. . . . . (343)	(10010)
1	22. 37	2
2	52. 82. 97. 142	4
3	157. 172. 187. 202. 247.	
	262. 277. 397. 427. 652 .	10
4	292. 337. 382. 457. 562.	
	577. 772. 862	8
5	412. 757. 847. 877. 982 .	5
6	622. 667. 802. 1027. 1042.	
	1282. 1297. 1387. 1507.	
	1807. 2017. 2062	12
7	502. 892. 997. 1117.	
	1237. 1372. 1402. 1597.	
	1642. 1852	10
8	1252. 1657. 1822. 2137.	
	2302. 2377. 2962. 3217.	
	4687	9
9	922. 1132. 1147. 1207.	
	1267(*3*). 1687. 1882.	
	1927. 2047. 2122. 2167.	
	2227. 2437(*3*). 2557.	
	2572. 2797. 2902. 3037.	
	3292. 3427. 3532. 5692 .	22
10	937. 1492. 1522. 2407.	
	2452. 2527. 2722. 2857.	
	3007. 3412. 3697. 4057.	
	4162. 4372. 4852	15
11	1942. 2182. 2662. 2677.	
	2917. 3637. 3802. 4957.	
	5077. 5212. 6127. 6637 .	12
12	1732. 1762. 1777. 2107.	
	2587. 2692. 2827. 2947.	
	3127. 3202. 3742. 3787.	
	4132. 4222. 4267. 4387.	
	4657. 4747. 4867. 4882.	
	5182. 5587. 5707. 5947.	
	7417. 7492. 7522. 7987.	
	8002. 9667	30
13	2197. 2362. 3622. 3862.	
	4207. 4282. 5482. 6742.	
	6847. 6997. 8422. 8572.	
	8842. 9157. 9277. 10207.	
	11302	17
14	2932. 3022. 3457. 3487.	
	5422. 5602. 5812. 5887.	
	6337. 8017. 8782. 9172 .	12
15	2092. 2602. 3142. 3517.	
	3667. 3877. 4087. 4357.	
	4492. 4627. 5047. 5062.	
	5437. 6022. 6442. 6667.	
	6727. 6892. 6922. 7087.	
	7162. 7387. 7477. 7627.	
	8227. 8677. 8812. 8947.	
	9307. 10147. 10732. 10957	32
16	2617. 3247. 4612. 4702.	
	6217. 7177. 8452. 8962.	
	10327. 10462. 11617 . . .	11
17	4762. 4927. 5197. 5287.	
	5557. 6037. 6502. 6652.	
	6982. 7132. 7327. 7402.	
	7642. 7702. 8047. 8317.	
	10642. 11482	18
18	4297. 5737. 5767. 5857(*3*)	
	6187. 6382. 6577. 6787.	

7057. 7267(*3*). 7732.
7807. 8107(*3*). 8212.
8347. 8407. 8482. 8737.
8767. 10747(*3*). 10882.
11257. 11347. 11707 . . . 24
19 4252. 4597. 4822. 5722.
6172. 9487. 9727. 10597.
10837. 11062. 11197. 11677 12
20 3442. 4177. 7012. 8542.
9442. 9697. 9892. 10162.
10177 9
21 5242. 5932. 6487. 7147.
7447. 8182. 8332. 9397.
9427. 9607. 9862. 10012.
10102. 10342. 10927. 11002.
11227. 11317. 11767. 11962 20
22 6082. 6772. 7297. 7537.
7822. 9742. 9847. 11167 . 8
23 6277. 6397. 7237. 7717.
8902. 9382. 10522. 10762 . 8
24 7747. 7972. 8377. 9502.
9817. 10372. 10657. 10807.
10852. 10942. 11107. 11422.
11812 13
25 10477 1
26 7342. 7762. 9337. 11647 . 4
27 8587. 9247. 10357. 10447.
11212 5
28 11497 1
29 9532. 11722 2
30 10027. 11182. 11602. 11947 4
32 11332 1
34 10702 1
35 11437 1

Irreg. 6

G. IV . . . . . (310) . . . . (9688)
1 112. 232 2
2 217. 322. 352. 442. 532.
592. 697. 742. 1012 . . . 9
3 472. 517. 637. 682. 817.
1072. 1162. 1177. 1192.
1222. 1432. 1612. 12
4 712. 832. 1057. 1312(*2*).
1357. 1417. 1462. 1477.
1537. 1552. 1582 (*2*).
1717. 1792. 1897. 1912.
1957. 2077. 2212. 2242.
2272. 2332. 2542 (*2*).
2842. 3172 (*2*). 3322.
3502 (*2*). 3712 27
5 1102. 1342. 1702. 2032.
2152. 2422. 3082. 3367.
3382. 3397. 3817. 3922.
4102. 4342. 5272. 5377 . 16
6 1837. 1972. 2257. 2317.
2482. 2512. 2752. 2872.
2977. 3052. 3232. 3337.
3577. 3592. 3652. 3892.
3937. 3997. 4012. 4117.
4192. 4237. 4417. 4432.
4477. 4537. 4552. 4642.
4717. 4792. 4942. 4972.
5317. 5362. 5467. 5497.
5842. 6157. 6262. 6307.
6352. 6472. 6682. 6862.
7282. 7837. 10432 47
7 2497. 2782. 2812. 3097.
3112. 3277. 3352. 3562.
3982. 4582. 4732. 5122.
5137. 5302. 5902. 5977.
6142. 6517. 7792. 9262.
9367. 9802. 9937 23
8 3262 (*2*). 3682. 3757.
3772. 3832. 4402. 4672(*2*).
4777 (*2*). 5002. 5017.
5257. 5392. 5572. 5632.
5752. 5917. 5962. 6052(*2*).
6112. 6202. 6532. 6697.
6757. 6817. 7252. 7312.
7357. 7582 (*2*). 7597.
8122. 8197. 8257. 8497.
8992 (*2*). 9202. 9232.
9412 (*2*). 9457 (*2*).
9472. 9562. 9577. 10132(*2*).
10312. 10537. 10642. 11092.
11377. 11512. 11572. 11797 50
9 4042. 4072. 4147. 4837.
4897. 4912 (*3*). 5452.
5542. 5677. 5782. 5872.
6322. 6412. 6457. 7102.
7117. 7372. 7852. 7942.
8062. 8092. 8152. 8242(*3*).
8752. 8827 (*3*). 9022.
9037. 9097. 9622. 9772.
9832. 9997. 10222.
10252 (*3*). 10717. 10822.
11407. 11692. 11782. 11992 40
10 4462. 4807. 5092. 5332.
6292. 6592. 6712. 6802.
6937. 7432. 7897. 8077.
8137. 8302. 8557. 8617.
8692. 8857. 8977. 9517.
10057. 10087. 10297. 10402.
10552. 10777. 10972. 11122.
11272. 11932 30
11 5662. 7222. 7567. 7612.
7882. 8362. 8662. 8917.
9052. 9322. 10417. 10492.
11452. 11902 14
12 5617. 6562. 6877. 7042.
7552. 7957. 8392. 8722.
9142. 9292. 9652. 9682.
9922. 9952. 10237. 10387.
10612. 10672. 11017. 11542.
11737. 11917 22
13 8872. 9082. 9637. 9712.
10117. 11632. 6
14 8032. 9217. 9757. 11662.
11842 5
15 8797. 10072. 10507 . . . 3
16 10282. 10897. 11392(*2*).
11857 4

Irreg. 19

G. VIII . . . . . (54) . . . . (1856)
2 952. 1672. 2002. 2392.
2632. 2737 6
3 2992. 3157. 3952. 4522.
5032. 5797. 6097. 6232.
6832. 7912 10
4 3472. 4312. 5152 (*2*).
5992. 6622. 6952. 7072(*2*).
7672 (*2*). 8437. 8512.
8932. 9982. 11152. 11872 14
5 5512. 7192. 7462. 7657.
7777. 8632. 9592. 9877.
11242. 11362. 11557 . . . 11
6 8272. 9112. 9352. 10192.
10582. 10792. 10912. 11032.
11077. 11137. 11752. 11977 12
7 8602 1

Irreg. 3

Omnia gen. 2451 exsp. 2445,10
omnes class. 24347 exsp. 24358,82

$8n$ 3068	6078	12174
$8n+4$ .. 3010		
$8n+2$ .. 3062	6096	
$8n+6$ .. 3034		
$8n+1$ .. 3076	6102	12173
$8n+5$ .. 3026		
$8n+3$ .. 3033	6071	
$8n+7$ .. 3038		

$7n$ ..... 115 .. 3411
$7n+1$ .. 115 .. 3009
$7n+2$ .. 114 .. 2975
$7n+4$ .. 114 .. 2993
$R7$ ... 343 .. 8977
$7n+3$ .. 114 .. 3979
$7n+5$ .. 114 .. 3998
$7n+6$ .. 114 .. 3982
$N7$ ... 342 . 11959
Classes impr. 4049
Propriae cum impropriis
28396 exsp. 28418,62

Octingenti det. neg.
formae $-(15n+13)$
G. I . . . . . (91) . . . . . . (2561)
3 43. 163 2
5 103 1
7 223. 343. 463 3
9 283. 643. 823. 883. 1423 . 5
11 1303 1
13 2143 1
15 523. 1123. 1723. 2203.
2683 5
17 1663. 1783 2
19 1063. 1543. 3343. 3463 . . 4
21 1483. 2083. 2503. 4603.
5923 5
23 4783. 6703 2
25 5023. 5503 2
27 2803. 3163. 3643. 3943.
4243. 4363. 4483. 4723.
4903. 5443 (*3*). 6043.
6763. 6883. 7723 (*3*).
8563. 8803 (*3*). 11383 . 17
29 2383. 3583. 3823. 5743.
8863 5
31 11863 1
33 4423. 4663. 5623. 5683.
6163. 6343. 6823. 7603.
8443. 9283. 9403. 9643 . . 12
35 11503 1
39 4003. 7243. 7963. 11743.
11923 5
41 10903 1
43 8263 1
45 5323. 5563 (*3*). 9043.
9463. 10243. 10663.
10723 (*3*). 11083 8
51 8623. 9343. 9883. 10303.
11443 5
57 8923. 9103 2

G. II . . . . (340) . . . . . (10110)
1 13. 28. 58 3
2 73. 148. 193 3
3 118. 268. 298. 358. 403 . 5
4 178. 313. 388. 478. 583 . 5
5 373. 508. 538. 613. 853.
1093. 1213. 1318 8
6 433. 628. 673. 718. 763.
898. 1003. 1033. 1108.
1138. 1198. 1243. 1588.
1618. 1873 15
7 703. 733. 778. 838. 1183.
1453. 1948. 2293 8
8 943. 958. 1153. 1348.
1438. 1828. 2113. 2308.
2578. 2878 10
9 1018. 1228 (*3*). 1363.
1468. 1603. 1843. 1933.
1963. 2023. 2038. 2053.
2188. 2443. 2458. 2563(*3*).
2923. 2998. 3238. 3523.
3628. 3733. 3763. 4348.
4678. 5413 25
10 1678. 1753. 1858. 2473.
2638. 2743. 2818. 2983.
3028. 3103. 3118. 3508.
4153 13
11 1693. 1903. 2263. 2623.
2863. 3418. 3703. 3868.
3958. 4918. 5098. 8023.
8143 13
12 1993. 2098. 2323. 2593.
2713. 2953. 3283. 3313.
3403. 3433. 3778. 3883.
4063. 4258. 4273. 4513.
4843. 5188. 5233. 5758.
5938. 6073. 6238. 8068 . 24
13 2218. 2428. 2908. 3373.
3613. 3853. 3898. 4093.
4618. 4933. 5383. 5818.
5878. 6598. 7078. 8383.
8743. 10333. 10543 . . . 19
14 3673. 3988. 4078. 4183.
4468. 4948. 5218. 5263.
6103. 6388. 6658. 6673.
7438. 7753. 7858. 8233.
8353. 11113. 11278 19
15 2518. 3148. 3223. 4138.
4813. 5203. 5398. 5653.
5803. 6268. 6403. 6463.
6778. 6988. 7123. 7303.
7363. 7468. 7483. 8053.
8458. 8698. 9013. 9388.
10483. 10588. 26
16 2833. 4993. 6178. 6628.
7183. 7393. 8548. 8578.
9433. 9508. 11558 11
17 3253. 4303. 5308. 5578.
7333. 7558. 8038. 9223.
9703 9
18 3043. 3793. 4963. 5458.
5998. 6283 (*3*). 6418.
6553. 6583 (*3*). 6793.
7543. 9298. 9523. 9583.
9748 (*3*). 10003. 10618.
10228. 10603. 10753.
10798 (*3*). 11698 22
19 5158. 5638. 6373. 6733.
7573. 7933. 8983. 9133.
10198. 11173 10
20 3748. 5143. 6223. 6718.
6898. 7063. 7423. 8098.
8158. 9598. 10063. 10513.
10993. 11428. 11953 . . . 15
21 4198. 6133. 6508. 6523.
7213. 7318. 7948. 7978.
8518. 9613. 9733. 9868.
10093. 10123. 10363. 10378.
10453. 10828. 11023. 11068.
11263. 11323. 11878 23
22 5113. 5953. 5983. 7663.
7783. 7873. 7903. 7993.
8713. 10273. 10708. 11668.
11758 13
23 5788. 8278. 8293. 8893.
9973. 10423. 10618 7
24 4798. 6943. 7003. 7108.
8083. 8503. 8683. 8818.
9763. 10843. 10963. 11143.
11203. 11353. 11563 15
25 10783. 11548 2
26 8788. 9778. 9838 3
27 8203. 11683 (*3*) 2
28 9943. 10078. 11038. 11593 . 4
29 9148 1
30 9358. 11623 2
31 11983 1
32 10183. 10468 2
33 11338 1
40 11833 1

G. IV . . . . (320) . . . . (10088)
1 88. 133. 253 3
2 208. 238. 328. 418. 448.
553. 568. 598. 658. 793.
928 11
3 493. 688. 748. 808. 913.
973. 988. 1048. 1258.
1558. 1708. 1978. 2608 . 13
4 868. 1078. 1168. 1393.
1408. 1498. 1513 (*2*).
1528. 1633. 1738. 1813.
1918 (*2*). 2248. 2353.
2368. 2533. 2773. 2788(*2*).
2893. 3088. 3193. 3298.
3448 23
5 1273. 1333. 1378. 1573.
1648. 1798. 2158. 2173.
2398. 3133. 3178. 3388.
3928. 3973. 4558. 4873 . 16
6 1888. 2068. 2278. 2338.
2413. 2488. 2548. 2653.
2668. 2698. 2758. 2938.
3073. 3208. 3268. 3478.

3598. 3658. 3718. 4018.
4033. 4108. 4123. 4168.
4288. 4393. 4438. 4453.
4708. 4753. 4768. 4978.
5083. 5128. 5173. 5293.
5338. 5518. 5548. 5713.
5728. 6028. 6433. 6493.
6913. 7018. 7093. 7228.
7813. 8248. 9823 51
7 2008. 3538. 3568. 3838.
4213. 4333. 4498. 4543.
4573. 5038. 5488. 5608.
5833. 5863. 6013. 6193.
6253. 6538. 6568. 6973.
7198. 7408. 9178. 9718.
10858. 10873 26
8 2848 (*2*). 3013. 3058.
3328. 3358 (*2*). 3493.
4228. 4318 (*2*). 4633 (*2*).
4738. 5008. 5248 (*2*).
5428. 5533. 5668. 5908.
6148 (*2*). 6208 (*2*).
6868 (*2*). 6958 (*2*).
7033. 7168. 7288. 7588.
7648. 7828. 8308. 8338.
8638 (*2*). 8653. 8878 (*2*).
9088. 9118 (*2*). 9193.
9208. 9538. 10033. 10138.
11533. 11848 40
9 3688. 4378. 4528. 4588.
4693. 4828. 5068 (*3*).
5773. 6313. 6359. 6643.
6748. 7258. 7513. 7528.
7678. 7693 (*3*). 7708.
7738. 7918. 8188. 8218.
8323 (*3*). 8488. 8668.
8908. 8998. 9073. 9163 (*3*).
9493. 9853. 9898. 9958.
10213. 10288. 10393. 10693.
11158. 11188. 11608. 11803.
11818. 11893 43
10 4858. 5053. 5473. 5968.
6058. 6088. 6613. 7153.
7273. 7453. 7498. 7798.
8128. 8173. 8473. 8593.
8608. 8758. 8773. 8833.
8953. 9058. 9238. 9553.
9628. 9793. 9808. 9913.
10108. 10438. 10888. 10978.
11053. 11293. 11398. 11458.
11938 37
11 6298. 7618. 7768. 8413.
8728. 10648. 11638. 11653 8
12 5353. 5893. 6838. 6928.
7048. 7348. 7633. 7843.
8428. 9028. 9268. 9673 (*2*).
10048. 10258. 10348. 10768.
11008. 11218. 11308. 11488.
11578. 11788. 11908. 11998 24
13 8938. 9313. 9418. 9448.
9478. 10498. 10678. 10918.
11098. 11518 10
14 6478. 7138. 9253. 9658.
9988. 10573. 10633. 10933.
11233. 11728 10
15 8368. 10408. 10813. 11413.
11773 5

G. VIII . . . . (48) . . . . (1600)
2 1288. 1768. 2128. 2233.
2968. 4048 6
3 2728. 3553. 3913. 4648.
4888. 5278. 6448 7
4 3808. 5593. 5698. 5848.
6118. 6328 (*2*). 6688 (*2*).
6853. 7378. 8398. 8848.
8968. 9328. 9373. 9568.
10168 (*2*). 10528 (*2*).
10948. 11368. 11713 (*2*) 20
5 4408. 5368. 6808. 9688.
10153. 10738 6
6 7888. 8533. 9928. 10318.
11473. 11968 6
7 8113. 11128. 11248 3

G. XVI . . . . (1) . . . . . . (32)
2 8008 1

Summa G. 2451 Cl. 24391
Irreg. 37. impr. 4075

		$15n+7, 13$		
$7n$	115	3435	230	6846
$7n+1$	114	2988	229	5997
$7n+2$	114	2987	228	5962
$7n+4$	114	2994	228	5987
$R7$	342	8969	685	17946
$7n+3$	114	4005	228	7984
$7n+5$	114	3975	228	7973
$7n+6$	115	4007	229	7989
$N7$	343	11987	685	23946
Omnes	800	24391	1600	48738

Quot. min. 0,2349782 ex 163, 2608
max. 0,7354322 ex 11833

Det. formae

$-(15n+13)$	68	305	271	128	27
$-(15n+7)$	69	316	264	130	21
		0,3	0,4	0,5	0,6

[Det. in cent. 10000 formae $15n$]

G. VIII . . . (3) . . . . . . (1464)
48 999975
63 999945
72 999930
G. XVI . . . . (3) . . . . . . (2224)
39 999915
*44 999900
56 999990 (*2*)
G. XXXII . . (1) . . . . . . (576)
18 999960

104 4264
Impr. 592

[Quotiens in Cent.	Det.	$<\frac{1}{2}<$	$<1<$]	
11	24	1	56	19
12	28		51	21
13	21		58	21
14	27		57	16
15	21		62	17
16	22		56	22
17	29		52	19
18	25		57	18
19	22		64	14
20	21		61	18
21	18		62	20
22	18		63	19
23	19		61	20
24	27		55	18
25	31		51	18
26	26		54	20
27	30		51	19
28	27		53	20
29	23		57	20
30	24		58	18
117	24		56	20
118	20		61	19
119	24		61	15
120	29		52	19

Determinantes negativi.

in Cent.		Quotiens	ex det.
1	max.	1,271998	ex det. 89
	min.	0,2626128	58
2		1,435917	194
		0,2349782	163
22		1,685723	2141
		0,2808228	2143
23		1,645848	2246
		0,2923654	2293
24		1,479278	2369
		0,2897240	2335
27		1,6445315	2609
		0,2895883	2683
28		1,5527075	2789
		0,3030216	2788
29		1,5778996	2834
		0,2974718	2893
30		1,604748	2939
		0,2936893	2968
91		1,684117	9026
		0,2835515	9067
92		1,586777	9176
		0,2717044	9157
93		1,660820	9281
		0,2699414	9277
94		1,518533	9371
		0,2893063	9367
95		1,729662	9434
		0,3287980	9472
96		1,689400	9539
		0,3269906	9577
97		1,707014	9686
		0,2440986	9667
99		1,650848	9869
		0,2420048	9823
100		1,702214	9974
		0,2888862	9937
117		1,6654535	11681
		0,2964744	11650
118		1,810938	11714
		0,294621	11797
119		1,579112	11864
		0,2846194	11863
120		1,5326965	11921
		0,3287433	11992

Determinantes positivi.

Centas 1.
Excidunt determinantes quadrati 10.

G. I . . . . (12)
1 2. 5. 13.
17. 29. 41.
53. 61. 73.
89. 97
3 37

G. II . . . . (51)
1 3. 6. 7.
8. 10. 11.
12. 14. 18.
19. 20. 21.
22. 23. 26.
27. 28. 31.
32. 33. 38.
43. 44. 45.
46. 47. 50.
52. 54. 57.
58. 59. 62.
65. 67. 68.
69. 71. 74.
76. 77. 83.
85. 86. 92.
93. 94. 98.
2 34. 82
3 79

G. IV . . . (27)
1 15. 24. 30.
35. 39. 40.
42. 48. 51.
55. 56. 60.
63. 66. 70.
72. 75. 78.
80. 84. 87.
88. 90. 91.
95. 96. 99

Centas 2.
Excidunt 4.
G. I . . . . (11)
1 109. 113. 125.
137. 149. 157.
173. 181. 193
3 101. 197

G. II . . . . (41)
1 103. 106. 107.
108. 116. 117.
118. 122. 124.
127. 128. 129.
131. 133. 134.
139. 142. 151.
153. 158. 161.
162. 163. 164.
166. 167. 172.
174. 177. 179.
185. 188. 191.
199
2 145. 146. 178.
194
3 141. 148. 189

G. IV . . . (40)
1 102. 104. 105.
110. 111. 112.
114. 115. 119.
123. 126. 130.
132. 135. 136.
138. 140. 143.
147. 152. 154.
155. 156. 159.
160. 165. 170.
171. 175. 176.
180. 182. 183.
184. 186. 187.
190. 192. 198.
200

G. VIII . . . (4)
1 120. 150. 168.
195

Centas 3.

G. I
1 233. 241. 277.
281. 293
3 229. 257. 269

G. II
1 201. 202. 206.
211. 212. 213.
214. 217. 218.
229. 236. 237.
239. 242. 243.
244. 245. 249.
250. 251. 253.
261. 262. 263.
265. 268. 271.
278. 283. 284.
292. 297. 298
2 205. 221. 274
3 223. 226. 254.
291

G. IV
1 203. 204. 207.
215. 216. 222.
228. 230. 232.
234. 238. 246.
247. 248. 252.
258. 259. 260.
266. 267. 270.
272. 273. 275.
276. 279. 282.
285. 286. 287.
290. 294. 295.
296. 299. 300
2 219. 220. 224.
288
3 235

G. VIII
1 210. 231. 240.
255. 264. 280

NACHLASS. DETERMINANTES POSITIVI.

Centas 9.

G. I . . . . . (7)
1 809. 821. 853.
857. 881
3 829. 877

G. II . . . . (32)
1 801. 811. 823.
827. 833. 838.
844. 845. 849.
859. 862. 863.
865. 869. 873.
878. 883. 886.
887. 889. 893
2 802. 818. 866
3 813. 837. 839.
842. 892
5 817
6 898
14 (841)

G. IV . . . . (52)
1 803. 804. 805.
806. 807. 808.
810. 814. 815.
822. 824. 825.
826. 830. 831.
832. 834. 835.
836. 843 846.
847. 848. 850.
851. 852. 854.
856. 860. 861.
864. 867. 868.
871. 872. 875.
879. 882. 885
2 812. 820. 828.
876. 884. 890.
891. 896. 897
3 874. 894. 895.
899.

G. VIII . . . (8)
1 816. 819. 855.
858. 888
2 870. 880. (900)

G. XVI . . . (1)
1 840

Centas 10.

G. I . . . . (6) . . . . . (8)
1 929. 937. 941.
953. 977
3 997

G. II . . . (38) . . . . (130)
1 907. 908. 911.
913. 917. 919.
921. 922. 926.
932. 947. 949.
956. 958. 964.
965. 967. 971.
972. 974. 981.
983. 989. 991.
998
2 914
3 905. 909. 916.
925. 933. 934.
973. 985. 993
5 982
6 901
[15 961]

G. IV . . . . (40) . . . (224)
1 902. 918. 923.
927. 928. 931.
938. 942. 944.
945. 946. 948.
950. 951. 954.
955. 957. 962.
968. 969. 970.
976. 978. 980.
986. 988. 995.
996. 999. 1000
2 939. 943. 959.
963. 979. 992
3 906. 940
4 904. 994

G. VIII . . . (16) . . . (144)
1 903. 912. 915.
920. 924. 930.
935. 936. 952.
966. 975. 984.
987. 990
2 910. 960

Summa 370

G. I
1 313. 317
3 349. 373. 389.
397. 557. 677.
701. 709. 733.
757. 761
5 401
7 577

G. II
1 301. 302. 307.
309. 311. 314.
2 305
3 316. 321. 325.
326
5 727

G. IV
1 303. 304. 308.
310. 318. 319.
320. 327
2 306. 322. 323

G. VIII
1 312. 315

TAFEL

ZUR

CYKLOTECHNIE.

2	5	119	73.97	500	53.53.89	1341	73.109.113	3405	29.29.61.113
3	5	123	5.17.89	507	5.5.53.97	1385	41.149.157	3458	5.73.181.181
4	17	128	5.29.113	512	5.13.37.109	1393	5.5.197.197	3521	29.37.53.109
5	13	129	53.157	515	13.101.101	1407	5.5.17.17.137	3532	5.5.17.149.197
6	37	132	5.5.17.41	524	37.41.181	1432	5.5.5.5.17.193	3583	5.13.17.37.157
7	5.5	133	5.29.61	538	5.13.61.73	1433	5.29.73.97	3740	41.41.53.157
8	5.13	142	5.37.109	557	5.5.5.17.73	1467	5.29.41.181	3782	5.5.29.109.181
9	41	157	5.5.17.29	560	53.61.97	1477	5.13.97.173	3793	5.5.53.61.89
10	101	162	5.29.181	568	5.5.5.29.89	1560	17.37.53.73	3957	5.5.13.13.17.109
11	61	172	5.61.97	577	5.13.13.197	1567	5.41.53.113	4193	5.5.5.5.5.29.97
12	5.29	173	5.41.73	599	17.61.173	1568	5.5.5.13.17.89	4217	5.13.29.53.89
13	5.17	174	13.17.137	606	13.13.41.53	1597	5.37.61.113	4232	5.5.41.101.173
14	197	182	5.5.5.5.53	616	13.17.17.101	1607	5.5.13.29.137	4246	13.17.29.29.97
15	113	183	5.17.197	621	29.61.109	1636	17.29.61.89	4327	5.89.109.193
17	5.29	185	109.157	657	5.5.89.97	1744	137.149.149	4484	17.89.97.137
18	5.5.13	191	17.29.37	660	37.61.193	1772	5.17.17.41.53	4535	17.53.101.113
19	181	192	5.73.101	682	5.5.5.61.61	1818	5.5.5.137.193	4545	13.37.109.197
21	13.17	193	5.5.5.149	684	13.17.29.73	1823	5.17.113.173	4581	13.53.97.157
22	5.97	200	13.17.181	693	5.5.5.17.113	1832	5.5.17.53.149	4594	13.17.29.37.89
23	5.53	211	113.197	697	5.13.37.101	1893	5.5.13.37.149	4662	5.13.13.17.17.89
27	5.73	212	5.89.101	701	17.97.149	1918	5.5.37.41.97	4747	5.17.41.53.61
28	5.157	216	13.37.97	743	5.5.61.181	1929	13.13.101.109	4906	13.53.181.193
30	17.53	233	5.61.89	746	13.13.37.89	1955	13.29.37.137	4937	5.73.173.193
31	13.37	237	5.41.137	757	5.5.73.157	1984	13.29.53.197	4952	5.37.41.53.61
32	5.5.41	239	13.13.13.13	772	5.13.53.173	2010	13.17.101.181	5052	5.13.41.61.157
33	5.109	242	5.13.17.53	776	73.73.113	2013	5.29.89.157	5087	5.17.29.29.181
34	13.89	251	17.17.109	785	13.137.173	2018	5.5.29.41.137	5257	5.5.13.17.41.61
37	5.137	253	5.37.173	798	5.13.97.101	2042	5.29.149.193	5283	5.13.17.73.173
38	5.17.17	255	13.41.61	818	5.5.5.53.101	2059	13.41.41.97	5357	5.5.61.97.97
41	29.29	265	13.37.73	829	17.17.29.41	2153	5.13.181.197	5443	5.5.5.5.137.173
43	5.5.37	268	5.5.13.13.17	853	5.13.29.193	2163	5.13.17.29.73	5507	5.5.13.13.37.97
44	13.149	278	5.13.29.41	882	5.5.29.29.37	2191	89.149.181	5648	5.17.53.73.97
46	29.73	293	5.5.17.101	905	13.17.17.109	2309	13.53.53.73	5667	5.29.37.41.73
47	5.13.17	294	13.61.109	919	37.101.113	2350	17.17.97.197	5701	29.53.97.109
50	41.61	302	5.17.29.37	922	5.17.73.137	2418	5.41.149.193	5767	5.13.17.101.149
55	17.89	307	5.5.5.13.29	924	53.89.181	2436	13.13.13.37.73	5928	5.29.29.61.137
57	5.5.5.13	313	5.97.101	931	13.17.37.53	2515	101.173.181	5962	5.13.29.109.173
68	5.5.5.37	319	17.41.73	945	29.89.173	2540	13.29.109.157	6065	17.53.137.149
70	13.13.29	327	5.17.17.37	948	5.17.97.109	2547	5.37.89.197	6107	5.5.17.17.29.89
72	5.17.61	342	5.149.157	993	5.5.13.37.41	2621	13.37.37.193	6118	5.5.13.41.53.53
73	5.13.41	343	5.5.13.181	999	17.149.197	2673	5.13.17.53.61	6252	5.17.29.101.157
75	29.97	360	29.41.109	1032	5.5.13.29.113	2697	5.41.113.157	6481	17.37.173.193
76	53.109	378	5.17.41.41	1057	5.5.5.41.109	2738	5.13.29.41.97	6682	5.5.5.29.109.113
80	37.173	394	29.53.101	1067	5.17.37.181	2801	17.29.73.109	6898	5.13.17.17.17.149
81	17.193	401	37.41.53	1068	5.5.5.5.5.5.73	2818	5.5.5.17.37.101	6908	5.13.73.89.113
83	5.13.53	403	5.109.149	1087	5.13.61.149	2917	5.13.29.37.61	6943	5.5.5.29.61.109
91	41.101	408	5.13.13.197	1118	5.5.17.17.173	2943	5.5.5.5.13.13.41	6962	5.37.37.73.97
93	5.5.173	411	13.73.89	1123	5.13.89.109	3039	17.61.61.73	7093	5.5.13.17.29.157
98	5.17.113	437	5.13.13.113	1143	5.5.17.29.53	3112	5.13.13.73.157	7161	17.101.109.137
99	13.13.29	438	5.17.37.61	1148	5.29.61.149	3141	13.13.17.17.101	7443	5.5.5.37.53.113
100	73.137	443	5.5.5.5.157	1196	53.137.197	3149	17.29.89.113	7697	5.17.29.61.197
105	37.149	447	5.13.29.53	1228	5.17.113.157	3166	17.41.73.197	7782	5.5.13.17.97.113
111	61.101	463	5.13.17.97	1239	41.97.193	3207	5.5.29.41.173	8224	13.17.29.61.173
112	5.13.193	467	5.113.193	1270	61.137.193	3323	5.13.29.29.101	8307	5.5.5.5.5.61.181
117	5.37.37	499	13.61.157	1303	5.41.41.101	3362	5.13.17.53.193	8368	5.5.17.37.61.73

8393	5.5.13.29.37.101	20080	13.29.61.89.197	44179	13.13.13.17.17.29.53	104818	5.5.5.5.17.29.181.197
8457	5.5.53.137.197	20457	5.5.13.29.149.149	44507	5.5.13.113.149.181	106242	5.53.53.73.101.109
8578	5.37.41.89.109	21124	29.41.53.73.97	44733	5.89.101.113.197	109637	5.13.17.29.37.37.137
9133	5.17.37.89.149	21705	13.17.61.101.173	45050	13.41.109.181.193	112595	17.29.41.53.61.97
9152	5.29.41.73.193	21907	5.5.29.29.101.113	45068	5.5.5.41.61.73.89	112782	5.5.17.37.41.109.181
9193	5.5.5.5.17.41.97	22008	5.41.109.149.157	46444	13.41.149.157.173	114669	17.37.53.53.61.61
9298	5.41.53.73.109	22157	5.5.13.37.137.149	46617	5.53.137.173.173	117251	41.97.101.109.157
9431	17.97.149.181	22231	29.37.41.41.137	47403	5.13.29.37.89.181	117307	5.5.5.13.149.157.181
9466	29.37.37.37.61	24263	5.13.17.41.73.89	47783	5.13.17.53.101.193	117372	5.13.17.17.53.101.137
9667	5.13.41.89.197	24331	13.17.89.101.149	48187	5.97.101.137.173	128482	5.5.17.29.89.101.149
9703	5.13.13.17.29.113	24778	5.29.149.157.181	48737	5.29.29.53.73.73	129553	5.13.13.17.61.61.157
9762	5.17.37.157.193	24816	17.17.61.181.193	49083	5.13.17.73.109.137	133749	13.13.37.53.137.197
9872	5.13.13.29.41.97	25462	5.13.17.37.101.157	50052	5.17.41.41.89.197	136293	5.5.17.41.53.89.113
9901	13.13.29.73.137	25523	5.53.73.113.149	51115	17.17.17.29.53.173	136404	13.17.29.97.173.173
10298	5.17.61.113.181	25683	5.13.17.17.97.181	51387	5.17.37.53.89.89	137717	5.13.53.89.157.197
10312	5.29.53.101.137	25793	5.5.17.29.137.197	51412	5.17.61.61.61.137	137883	5.13.17.29.29.53.193
10833	5.17.41.113.149	25943	5.5.5.13.29.37.193	51917	5.13.37.53.97.109	141743	5.5.89.149.157.193
11018	5.5.157.157.197	26018	5.5.13.97.109.197	52571	37.41.61.109.137	143382	5.5.13.13.17.17.113.149
11471	13.17.41.53.137	27493	5.5.17.17.17.17.181	54193	5.5.5.5.5.41.73.157	145046	13.29.37.101.109.137
11981	13.17.41.89.89	28205	13.29.73.97.149	54358	5.13.29.73.109.197	145231	13.37.37.41.97.149
12332	5.5.13.41.101.113	28322	5.13.13.13.13.41.137	54507	5.5.37.53.157.193	148158	5.53.61.61.113.197
12433	5.13.61.101.193	28862	5.17.17.53.73.149	57532	5.5.17.41.41.41.113	148582	5.5.13.53.73.97.181
12882	5.5.17.37.61.173	29757	5.5.41.61.73.97	66347	5.13.13.17.37.41.101	150522	5.13.17.29.37.97.197
12943	5.5.5.5.13.13.13.61	30027	5.29.89.181.193	67333	5.17.53.61.73.113	155317	5.41.61.73.73.181
13043	5.5.17.17.61.193	30103	5.13.17.41.73.137	67852	5.13.37.89.137.157	157308	5.13.29.29.41.61.181
13068	5.5.5.53.149.173	30383	5.17.17.37.89.97	68463	5.13.17.113.137.137	157318	5.5.5.5.5.5.13.37.37.89
13241	29.101.173.173	31752	5.17.17.37.109.173	71564	37.61.97.149.157	159772	5.37.53.101.149.173
13252	5.13.13.37.41.137	32258	5.13.37.41.61.173	71700	13.29.37.41.89.101	160590	29.29.29.89.109.109
13545	17.17.53.53.113	32406	17.17.17.37.53.109	72662	5.13.17.29.37.61.73	161832	5.5.13.13.29.37.53.109
13918	5.5.13.37.89.181	32807	5.5.5.13.61.61.89	74043	5.5.13.37.37.61.101	162014	13.17.73.89.101.181
14140	17.29.37.97.113	32885	13.13.109.149.197	75382	5.5.13.17.73.73.193	173932	5.5.5.5.5.13.73.101.101
14318	5.5.5.13.17.41.181	32973	5.13.37.37.41.149	78629	13.17.41.41.53.157	174118	5.5.17.41.89.113.173
14573	5.17.73.109.157	33307	5.5.5.5.17.53.197	80593	5.5.17.17.17.137.193	177144	17.29.73.89.97.101
14646	13.37.41.73.149	34208	5.13.13.17.29.53.53	80802	5.37.41.53.109.149	180107	5.5.13.29.97.113.157
14773	5.13.13.29.61.73	34367	5.13.37.41.53.113	81141	13.61.137.157.193	181343	5.5.17.37.53.109.181
14942	5.13.13.37.37.193	35857	5.5.17.61.137.181	81749	13.17.17.53.97.173	181743	5.5.17.17.73.173.181
14958	5.13.101.173.197	36673	5.17.29.37.73.101	83071	37.61.89.89.193		
15075	13.17.53.89.109	37057	5.5.5.5.73.101.149	83247	5.13.13.13.29.73.149		
16513	5.29.53.113.157	37448	5.13.13.53.173.181	84141	13.29.29.41.53.149		
16928	5.17.109.157.197	37770	13.17.29.41.61.89	85353	5.13.17.37.41.41.53		
17191	13.17.61.97.113	38326	29.37.41.173.193	86143	5.5.13.17.61.101.109		
17557	5.5.5.17.29.41.61	38807	5.5.5.17.37.61.157	88668	5.5.13.17.73.101.193		
17766	13.37.73.89.101	39082	5.5.41.73.137.149	88699	29.53.89.149.193		
17923	5.61.61.89.97	39307	5.5.5.13.13.13.29.97	88733	5.13.41.97.97.157		
18258	5.29.97.137.173	39818	5.5.5.5.17.37.37.109	88868	5.5.29.37.37.73.109		
18432	5.5.5.17.29.37.149	40188	5.13.37.61.101.109	89361	29.37.137.157.173		
18543	5.5.13.17.29.29.37	40515	17.53.61.109.137	89471	13.13.41.41.73.193		
19123	5.29.37.173.197	40568	5.5.5.13.53.97.197	90212	5.13.37.89.193.197		
19283	5.37.37.157.173	41187	5.17.37.37.37.197	90657	5.5.13.17.61.89.137		
19326	13.29.61.109.149	41319	13.41.101.101.157	93020	13.13.17.17.29.41.149		
19534	13.13.13.29.53.113	41688	5.17.41.53.97.97	93197	5.37.53.53.61.137		
19653	5.37.61.109.157	42658	5.13.13.97.149.149	99557	5.5.5.5.41.41.53.89		
19703	5.13.13.29.89.89	42932	5.5.5.29.29.89.197	99893	5.5.29.181.193.197		
19902	5.73.89.89.137	43633	5.13.29.41.109.113	101343	5.5.13.29.41.97.137		
19911	13.17.29.157.197	43932	5.5.5.5.13.17.89.157	102163	5.37.41.41.97.173		

NACHLASS. ZERLEGBARE $aa+1$.

184133	5.29.73.101.101.157	500150	41.61.73.73.137.137	1477034	37.37.41.53.53.101.137
189782	5.5.13.61.89.137.149	508929	13.13.37.53.53.73.101	1518057	5.5.5.13.13.41.61.113.193
190393	5.5.13.13.137.173.181	518734	13.17.37.37.53.97.173	1528649	13.37.53.61.61.109.113
191407	5.5.13.13.17.37.61.113	520463	5.13.41.61.73.101.113	1615463	5.13.17.37.53.73.73.113
191807	5.5.5.13.17.41.109.149	534568	5.5.5.13.89.89.149.149	1618855	17.29.37.53.89.97.157
194708	5.5.29.41.73.101.173	538275	17.61.73.97.109.181	1635786	29.29.41.89.89.97.101
201106	17.17.61.89.149.173	548630	37.41.89.109.113.181	1664957	5.5.13.37.73.89.113.157
208048	5.53.89.109.113.149	566793	5.5.17.29.29.41.97.113	1750507	5.5.13.53.53.89.109.173
210195	61.113.137.149.157	567923	5.13.17.17.17.41.109.113	1766693	5.5.5.5.5.5.29.97.157.173
210943	5.5.5.13.37.37.73.137	571459	13.13.13.13.17.37.61.149	1824257	5.5.17.29.97.109.113.113
211765	13.17.53.89.137.157	586455	29.41.73.89.113.197	1909461	13.13.17.17.41.53.89.193
216676	13.29.41.97.173.181	606325	13.37.97.137.149.193	1954207	5.5.13.61.61.89.113.157
219602	5.17.17.53.53.109.109	607533	5.17.29.73.97.97.109	1984933	5.17.37.37.37.53.89.97
221382	5.5.13.73.101.113.181	617427	5.13.13.17.29.53.89.97	2036069	17.41.41.61.61.101.193
228068	5.5.5.17.29.61.101.137	623888	5.13.37.41.113.181.193	2050706	13.17.17.17.41.53.157.193
232643	5.5.13.13.13.41.61.197	627391	41.41.53.113.113.173	2052057	5.5.5.5.5.5.5.17.29.73.97.193
236151	17.17.41.89.137.193	662843	5.5.17.113.137.173.193	2126007	5.5.17.29.29.181.181.193
247643	5.5.17.29.73.173.197	672717	5.89.97.157.173.193	2277387	5.13.29.29.53.89.89.113
249501	13.53.53.61.89.157	683982	5.5.17.29.61.61.101.101	2298668	5.5.13.13.17.17.29.37.37.109
251103	5.13.17.17.89.109.173	700107	5.5.13.17.41.53.137.149	2343692	5.17.41.41.61.73.89.97
256638	5.13.29.37.61.113.137	703175	13.17.17.29.97.149.157	2353918	5.5.13.17.29.29.61.113.173
260359	13.13.17.41.53.61.89	704683	5.13.29.61.97.113.197	2379723	5.13.29.37.53.53.97.149
262433	5.17.29.29.53.61.149	721068	5.5.5.5.17.29.109.113.137	2457057	5.5.5.5.13.17.41.53.89.113
263317	5.17.17.17.89.101.157	780262	5.17.17.29.37.41.61.157	2471717	5.37.41.109.137.149.181
263557	5.5.5.13.37.41.73.193	783568	5.5.5.5.17.29.101.109.181	2475918	5.5.17.53.61.157.157.181
265842	5.13.17.17.101.193.193	791532	5.5.53.89.149.181.197	2478328	5.13.29.37.89.97.101.101
267657	5.5.41.41.61.89.157	793921	17.17.17.29.73.157.193	2484968	5.5.13.61.97.113.157.181
281897	5.13.29.37.37.89.173	812447	5.29.29.41.89.137.157	2680168	5.5.29.61.73.109.137.149
286018	5.5.13.13.53.53.61.113	832902	5.13.13.13.17.109.173.197	2733307	5.5.5.5.5.5.13.13.13.17.37.173
287228	5.17.17.29.73.149.181	848871	29.53.73.113.157.181	2809305	13.17.29.37.37.61.73.101
289038	5.17.17.37.89.97.181	899168	5.5.17.37.53.73.97.137	2923783	5.13.17.37.41.109.149.157
292362	5.13.17.41.61.157.197	907567	5.29.37.41.89.109.193	2959007	5.5.17.37.97.101.157.181
298307	5.5.5.5.41.53.181.181	911111	17.41.101.173.173.197	3014557	5.5.5.5.5.5.5.5.41.53.53.101
307939	13.29.61.101.137.149	936513	5.37.37.41.89.97.181	3025001	13.13.17.17.61.73.109.193
309070	13.29.101.113.149.149	1000193	5.5.5.29.53.101.149.173	3136570	13.13.29.37.53.61.97.173
320078	5.13.41.61.73.89.97	1010027	5.13.61.89.89.109.149	3139557	5.5.5.5.5.5.13.29.73.73.157
322392	5.13.17.41.89.149.173	1024240	37.61.109.157.157.173	3272693	5.5.5.13.37.41.101.137.157
330182	5.5.5.5.5.13.29.37.41.61	1031675	13.13.17.53.73.113.157.197	3370437	5.13.13.13.13.41.73.97.137
331068	5.5.5.5.53.101.181.181	1049433	5.13.61.89.89.89.197	3449051	13.13.13.53.61.89.97.97
383807	5.5.5.13.37.73.97.173	1059193	5.5.5.5.13.13.13.37.61.181	3637197	5.13.17.29.61.89.193.197
385692	5.13.17.61.89.137.181	1067157	5.5.41.113.157.173.181	3800438	5.13.29.29.97.101.149.181
389163	5.13.29.41.89.101.109	1068182	5.5.5.17.17.41.61.73.173	3801448	5.29.37.53.61.73.101.113
390112	5.13.17.17.17.17.17.17.97	1083493	5.5.13.61.61.61.73.109	3815076	13.13.17.37.53.109.137.173
403639	29.29.37.97.137.197	1089593	5.5.61.89.149.149.197	3894873	5.13.13.37.89.101.137.197
409557	5.5.5.5.13.13.73.73.149	1131527	5.41.53.53.73.97.157	3911450	29.29.41.97.137.173.193
411787	5.17.17.53.97.101.113	1139557	5.5.5.5.5.5.5.17.37.73.181	3931663	5.13.29.37.41.109.137.181
418048	5.97.97.109.173.197	1143007	5.5.13.41.61.73.101.109	4000300	13.13.13.17.17.73.137.181.181
444753	5.53.109.113.157.193	1197943	5.5.5.5.5.17.17.37.109.197	4079486	13.17.17.53.61.73.137.137
447342	5.17.29.41.97.137.149	1264557	5.5.5.5.5.13.13.29.53.197	4218932	5.5.5.5.29.41.41.61.61.157
464307	5.5.5.29.37.73.101.109	1306143	5.5.29.37.37.61.73.193	4466678	5.13.17.73.97.109.149.157
465525	13.13.29.89.97.113.197	1351742	5.17.53.109.137.157.173	4650839	17.17.89.113.137.157.173
465694	13.13.17.29.73.181.197	1373307	5.5.5.5.17.29.101.157.193	4697282	5.5.13.113.113.137.197.197
478707	5.5.13.13.13.17.41.41.73	1387203	5.29.41.41.113.181.193	4751232	5.5.13.17.29.73.97.101.197
485298	5.13.13.13.13.29.29.37.53	1402232	5.5.17.37.41.113.137.197	4773557	5.5.5.29.29.41.113.149.157
494607	5.5.29.89.101.137.137	1413443	5.5.13.29.37.41.89.157	5033696	13.17.37.37.89.89.97.109

ZUR CYKLOTECHNIE. ZERLEGBARE $aa+1$.

5982670	13.13.13.17.41.53.53.53.157	23747457	5.5.17.17.17.17.17.17.37.73.173
6151956	13.17.29.29.73.97.113.149	24208144	29.29.29.37.37.53.61.61.89
6208047	5.17.17.17.17.29.41.41.197.197	24280807	5.5.5.5.13.13.17.53.109.157.181
6225244	29.37.41.53.53.53.61.97	24310918	5.5.13.13.37.41.53.89.113.173
6315768	5.5.17.17.53.61.73.149.157	31011557	5.5.5.13.17.61.97.109.137.197
6356150	13.29.37.37.61.61.109.193	32944452	5.13.13.29.29.41.53.53.89.149
6367252	5.13.17.29.29.61.73.97.101	34436768	5.5.17.61.97.101.137.173.197
6656382	5.5.13.29.41.41.137.137.149	34602875	13.17.17.29.37.53.113.137.181
6817837	5.17.17.53.61.149.173.193	45500682	5.5.5.37.53.53.61.89.149.197
6829610	13.17.17.53.61.101.193.197	53365057	5.5.5.13.37.89.97.101.157.173
6981694	13.41.97.137.181.193.197	58305593	5.5.13.17.37.37.101.109.137.149
7138478	5.29.37.41.73.89.181.197	75505943	5.5.5.37.37.53.89.137.149.173
7620661	5.17.37.73.101.101.137.181	95665578	5.13.37.41.73.181.181.197.197
7691443	5.5.5.37.53.97.101.109.113	111530944	13.13.13.13.13.17.37.37.53.157.173
8082212	5.13.17.17.37.53.97.101.181	121042733	5.17.41.73.97.97.101.157.193
8571779	13.13.29.41.73.101.137.181	160007778	5.13.13.17.17.29.29.73.73.149.157
8809432	5.5.5.13.89.101.149.181.197	167207057	5.5.5.5.17.17.17.29.73.109.109.181
9407318	5.5.5.5.5.5.37.41.53.73.193	168623905	13.13.13.13.17.29.29.37.89.97.109
9548768	5.5.13.13.17.41.53.61.61.157	185507821	13.13.17.29.29.53.61.101.113.193
9614382	5.5.29.37.53.61.61.101.173	193788912	5.13.17.17.37.37.37.53.73.101.101
9639557	5.5.5.5.5.5.13.17.17.53.109.137	201229582	5.5.13.13.17.17.17.17.17.53.97.101
9689961	13.29.29.37.61.113.113.149	211823957	5.5.17.17.53.101.137.149.157.181
10328193	5.5.5.13.17.29.53.53.137.173	284862638	5.13.17.17.17.17.29.29.41.41.97.109
10669731	17.89.97.101.101.193.197	299252491	13.29.37.97.109.109.113.157
11131086	13.13.17.17.37.61.73.89.173	317742693	5.5.5.13.29.41.73.89.137.149.197
12477035	17.17.17.29.29.29.37.97.181	327012132	5.5.13.17.17.29.89.109.149.157.173
12514913	5.13.41.53.137.149.157.173	599832943	5.5.5.5.13.17.29.37.37.41.73.97.113
12750353	5.13.17.17.41.61.73.137.173	830426722	5.13.13.61.97.149.157.173.173.197
14698000	13.13.17.17.29.61.97.149.173	1112115023	5.17.17.61.73.113.157.173.173.181
15165443	5.5.5.5.37.53.61.97.101.157	1282794079	13.17.29.29.73.89.97.113.181.197.197
15986082	5.5.13.17.109.109.137.157.181	2189376182	5.5.5.17.17.29.29.53.61.61.89.89.101
16317267	5.13.17.17.61.61.101.109.173	2971354082	5.5.13.17.29.41.53.53.113.149.157.181
18378313	5.13.13.17.37.61.137.193.197	3955080927	5.13.17.17.17.17.53.53.61.61.101.149.173.197
18975991	13.17.17.17.53.61.89.97.101	8193535810	13.13.29.29.61.109.109.137.157.157.193
20198495	13.17.41.89.101.101.137.181	14033378718	5.5.13.13.17.17.61.61.61.61.73.73.157.181
22866693	5.5.5.5.41.61.73.101.113.197		

5	2. 3. 7
13	5. 8. 18. 57. 239
17	4. 13. 21. 38. 47. 268
29	12. 17. 41. 70. 99. 157. 307
37	6. 31. 43. 68. 117. 191. 302. 327. 882. 18543*
41	9. 32. 73. 132. 278. 378. 829. 993. 2943
53	23. 30. 83. 182. 242. 401. 447. 606. 931. 1143*. 1772. 6118. 34208. 44179. 85353. 485298
61	11. 50. 72. 133. 255. 438. 682. 2673. 2917. 4747*. 4952. 5257. 9466. 12943. 17557. 114669. 330182
73	27. 46. 173. 265. 319. 538. 557. 684. 1068. 1560*. 2163. 2309. 2436. 3039. 5667. 8368. 14773. 48737. 72662. 478707*
89	34. 55. 123. 233. 411. 500. 568. 746. 1568. 1636*. 3793. 4217. 4594. 4662. 6107. 11981. 19703. 24263. 32807. 37770*. 45068. 51387. 99557. 157318. 260359. 24208144
97	22. 75. 119. 172. 216. 463. 507. 560. 657. 1433*. 1918. 2059. 2738. 4193. 4246. 5357. 5507. 5648. 6962. 9193*. 9872. 17923. 21124. 29757. 30383. 39307. 41688. 112595. 320078. 390112*. 617427. 1984933. 2343692. 3449051. 6225244
101	10. 91. 111. 192. 212. 293. 313. 394. 515. 616*. 697. 798. 818. 1303. 2818. 3141. 3323. 8393. 17766. 36673*. 66347. 71700. 74043. 173932. 177144. 508929. 683982. 1635786. 2478328. 2809305*. 3014557. 6367252. 18975991. 193788912. 201229582. 2189376182
109	33. 76. 142. 251. 294. 360. 512. 621. 905. 948*. 1057. 1123. 1929. 2801. 3521. 3957. 5701. 6943. 8578. 9298*.

15075. 32406. 39818. 40188. 51917. 86143. 88868. 106242. 160590. 161832*. 219602. 389163. 464307. 607533. 1083493. 1143007. 2298668. 5033696. 168623905. 284862638*

113 15. 98. 128. 437. 693. 776. 919. 1032. 1341. 1567*. 1597. 3149. 3405. 4535. 6682. 6908. 7443. 7782. 9703. 12332*. 13545. 14140. 17191. 19534. 21907. 34367. 43633. 57532. 67333. 136293*. 191407. 286018. 411787. 520463. 566793. 567923. 1528649. 1615463. 1824257. 2277387*. 2457057. 3801448. 7691443. 599832943

137 37. 100. 174. 237. 922. 1407. 1607. 1955. 2018. 4484*. 5928. 7161. 9961. 10312. 11471. 13252. 19902. 22231. 28322. 30103*. 40517. 49083. 51412. 52571. 68463. 90657. 93197. 101343. 109637. 117372*. 145046. 210943. 228068. 256638. 494607. 500150. 721068. 899168. 1477034. 3370434*. 4079486. 9639557

149 44. 105. 193. 403. 701. 1087. 1148. 1744. 1832. 1893*. 5767. 6065. 6898. 9133. 10833. 14646. 18432. 19326. 20457. 22157*. 24331. 25523. 28205. 28862. 32973. 37057. 39082. 42658. 80802. 83247*. 84141. 93020. 128482. 143382. 145231. 189782. 191807. 208048. 262433. 307939*. 309070. 409557. 447342. 534568. 571459. 700107. 1010027. 2379723. 2680168. 6151956*. 6656382. 9689961. 32944452. 58305593

157 28. 129. 185. 342. 443. 499. 757. 1228. 1385. 2013*. 2540. 2697. 3112. 3583. 3740. 4581. 5052. 6252. 7093. 14573*. 16513. 19653. 22008. 25462. 38807. 41319. 43932. 54193. 67852. 71564*. 78629. 88733. 117251. 129553. 180107. 184133. 210195. 211765. 249503. 263317*. 267657. 703175. 780262. 812447. 1131527. 1413443. 1618855. 1664957. 1954207. 2923783*. 3139557. 3272693. 4218932. 4466678. 4773557. 5982670. 6315768. 9548768. 15165443. 16000778*. 299252491

173 80. 93. 253. 599. 772. 785. 945. 1118. 1477. 1823*. 3207. 4232. 5283. 5443. 5962. 8224. 12882. 13068. 13241. 18258*. 19283. 21705. 31752. 32258. 46444. 46617. 48187. 51115. 81749. 89361*. 102163. 136404. 159772. 174118. 194718. 201106. 251103. 281897. 322392. 383807*. 518734. 627391. 1000193. 1024240. 1068182. 1351742. 1750507. 1766693. 2353918. 2733307*. 3136570. 3815076. 4650839. 9614382. 10328193. 11131086. 12514913. 12750353. 14698000. 16317267*. 23747457. 24310918. 53365057. 75505943. 111580944. 327012132

181 19 162 200. 343. 524 743. 924. 1067. 1467 2010*. 2191. 2515. 3458. 3782. 5087. 8307. 9431. 10298. 13918. 14318*. 24778. 25683. 27493. 35857. 37448. 44507. 47403. 112782. 117307. 148582*. 155317. 157308. 162014. 181343. 181743. 190393. 216676 221382. 287228. 289038*. 298307. 331068. 385692. 538275. 548650 783568. 848871. 936513. 1059193. 1067157*. 1139557. 2471717. 2475918. 2484968. 2959007. 3800438. 3931663. 4000300 7620662. 8082212*. 8571779. 12477035. 15986092. 20198495. 24280807. 34602875. 167207057. 211823957 1112115023. 2971354082*. 14033378718

193 81. 112. 467. 660. 853. 1239 1270. 1432. 1818. 2042*. 2428. 2621. 3362. 4327. 4906. 4937. 6481. 9152. 9762. 12433*. 13043 14942. 24816. 25943. 30027. 28326. 45050. 47783. 54507. 75382*. 80593. 81141. 83071. 88668. 88699. 89471 137883. 141743. 236151. 263557*. 265842. 444753. 606385. 623888 662843. 672717. 793921. 907567. 1306143. 1373307*. 1387203. 1518057. 1909461. 2036069. 2050706. 2052057. 2126007. 3025001. 3911450. 6356150*. 6817837. 9407318. 121042733. 185507821. 8193535810

197 14. 183. 211. 408. 577. 999. 1196. 1393. 1984. 2153*. 2350. 2547. 3166. 3532. 4545. 7697. 8457. 9667. 11018. 14958*. 16928. 19123. 19911. 20080. 25793. 26018. 32885. 33307. 40568. 41187*. 42932. 44733. 50052. 54358. 90212. 99893. 104818. 133749. 137719. 148158*. 150522. 232643. 247643. 292362. 403639. 418048. 465525. 465694. 586455. 704683*. 791532. 832902. 911111. 1031675. 1049433. 1089593. 1197943. 1264557. 1402232. 3637197*. 3894873. 4697282. 4751232. 6208047. 6829610. 6981694. 7138478. 8809432. 10669731. 18378313*. 22866693. 31011557. 34436768. 45500682. 95665578. 317742693. 830426722. 1282794079. 3955080927

Zerlegbare $aa+4$.				127	13.17.73	283	13.61.101	691	5.29.37.89	1159	5.37.53.137
1	5	39	5.5.61	141	5.41.97	309	5.13.13.113	705	13.13.17.173	1305	97.97.181
3	13	43	17.109	143	113.181	311	5.5.53.73	749	5.29.53.73	1351	5.17.109.197
5	29	49	5.13.37	161	5.5.17.61	335	13.89.97	759	5.29.29.137	1371	5.41.53.173
7	53	53	29.97	169	5.29.197	359	5.149.173	761	5.5.5.41.113	1381	5.13.13.37.61
9	5.17	59	5.17.41	179	5.13.17.29	393	13.109.109	829	5.13.97.109	1499	5.41.97.113
11	5.5.5	61	5.5.149	199	5.89.89	417	17.53.193	841	5.17.53.157	1581	5.41.89.137
13	173	63	29.137	205	13.53.61	419	5.13.37.73	943	17.17.17.181	1745	13.29.41.197
19	5.73	81	5.13.101	211	5.5.13.137	469	5.29.37.41	961	5.5.17.41.53	1801	5.37.89.197
21	5.89	83	61.113	213	17.17.157	485	17.101.137	1011	5.5.5.13.17.37	1899	5.37.101.193
23	13.41	99	5.37.53	219	5.53.181	527	29.61.157	1043	13.13.41.157	2025	13.29.73.149
25	17.37	101	5.13.157	237	13.29.149	535	17.113.149	1047	89.109.113	2343	13.37.101.113
29	5.13.13	111	5.5.17.29	247	17.37.97	611	5.5.109.137	1089	5.5.13.41.89	2355	17.41.73.109
31	5.193	121	5.29.101	261	5.5.5.5.109	679	5.13.41.173	1131	5.17.101.149	2441	5.13.29.29.109

2677	17.17.137.181	29929	5.13.17.61.97.137	317039	5.5.53.61.89.89.157
3039	5.5.13.157.181	31351	5.37.149.181.197	326957	37.37.41.101.109.173
3339	5.5.41.73.149	32003	13.17.17.41.61.109	349835	17.41.73.97.137.181
3351	5.13.13.97.137	32139	5.5.13.17.73.197	355989	5.5.5.5.13.17.37.137.181
3377	13.61.73.197	32239	5.5.5.5.5.37.89.101	387921	5.61.101.137.181.197
3717	29.53.89.101	37579	5.17.29.41.89.157	396783	13.13.29.61.61.89.97
3749	5.17.37.41.109	44301	5.13.37.53.89.173	408489	5.5.5.5.13.29.73.89.109
4021	5.17.37.53.97	47389	5.5.53.97.101.173	466489	5.5.5.13.17.29.61.61.73
4123	17.29.29.29.41	47761	5.5.5.5.17.17.73.173	563235	13.17.41.61.61.97.97
4215	13.73.97.113	47829	5.17.37.41.113.157	567629	5.13.37.73.109.113.149
4761	5.5.5.13.13.29.37	49813	13.53.101.181.197	582997	37.41.73.113.157.173
4989	5.5.5.13.17.17.53	57989	5.5.5.53.53.61.157	588489	5.5.5.5.5.61.89.137.149
5041	5.13.13.17.29.61	63911	5.5.13.13.17.29.37.53	628261	5.5.5.13.17.29.41.61.197
5567	13.17.17.73.113	66361	5.5.41.113.193.197	634205	37.53.73.109.149.173
5573	29.61.97.181	79011	5.5.5.5.13.89.89.97	637855	13.37.41.41.61.73.113
5717	13.13.41.53.89	79871	5.29.37.61.101.193	834267	17.17.17.29.137.181.197
5821	5.13.37.73.193	81487	13.13.73.73.73.101	840421	5.13.17.137.149.173.181
6061	5.5.13.17.61.109	81669	5.13.29.113.173.181	851929	5.17.53.73.89.137.181
6261	5.5.5.53.61.97	86487	17.17.41.41.89.173	922769	5.13.13.17.41.61.137.173
6989	5.5.5.53.73.101	91587	17.29.29.37.101.157	966391	5.13.17.29.29.37.157.173
7319	5.17.73.89.97	95963	13.13.41.89.109.137	1029353	61.61.89.109.149.197
7745	13.13.37.53.181	99011	5.5.5.5.5.13.29.53.157	1165689	5.5.29.41.41.53.109.193
8049	5.17.53.73.197	99407	17.29.37.41.73.181	1230349	5.13.13.17.17.29.37.53.109
8579	5.29.53.61.157	108111	5.5.13.17.97.113.193	1299241	5.13.13.37.89.89.173.197
8879	5.29.41.89.149	110211	5.5.13.37.73.101.137	1341429	5.29.61.73.89.173.181
9801	5.17.73.113.137	114611	5.5.13.13.89.181.193	1362611	5.5.13.37.89.89.101.193
9817	17.37.37.41.101	115983	13.17.37.61.149.181	1493911	5.5.13.29.101.109.137.157
9947	73.89.97.157	117281	5.29.61.89.101.173	1499001	5.13.13.17.73.73.149.197
10039	5.5.13.17.17.29.37	128359	5.13.17.29.53.89.109	1780489	5.5.5.29.37.41.53.73.149
12383	37.109.193.197	139701	5.13.53.149.193.197	1996199	5.13.13.17.17.37.53.53.157
12605	17.37.41.61.101	140489	5.5.5.41.113.173.197	2028211	5.5.13.17.41.41.53.61.137
12815	13.13.41.137.173	140871	5.13.17.37.61.73.109	2050005	17.29.61.73.89.137.157
13251	5.17.101.113.181	142047	29.29.41.53.61.181	2159739	5.5.5.5.13.17.37.41.113.197
13489	5.5.5.5.5.5.5.17.137	148939	5.5.29.29.73.97.149	3376311	5.5.13.13.13.17.17.61.61.193
13507	17.17.41.89.173	183739	5.5.5.13.29.41.101.173	3666653	13.13.17.41.53.97.149.149
14261	5.5.5.89.101.181	191279	5.13.13.29.73.113.181	3872099	5.13.13.17.37.41.41.97.173
14901	5.13.13.13.17.29.41	203091	5.17.17.41.61.101.113	4370811	5.5.13.17.53.61.89.197
16041	5.73.89.89.89	205111	5.5.13.73.97.101.181	4490249	5.13.29.61.73.89.137.197
20511	5.5.5.13.17.97.157	206707	29.37.53.61.109.113	4705711	5.5.13.17.17.17.17.41.101.197
20769	5.29.37.37.41.53	207171	5.13.17.29.89.101.149	5125339	5.5.17.17.29.37.97.181.193
20875	13.29.53.113.193	211221	5.13.13.37.61.149.157	5472411	5.5.17.29.41.41.89.109.149
21139	5.5.17.37.157.181	228179	5.13.13.61.73.101.137	6101547	13.13.13.17.29.37.61.97.157
21161	5.5.13.89.113.137	234333	37.37.37.41.137.193	6489011	5.5.5.5.17.37.41.89.149.197
21189	5.5.37.61.73.109	234881	5.13.13.17.17.17.97.137	8175989	5.5.5.5.5.13.17.37.97.149.181
22805	13.17.89.137.193	241511	5.5.5.5.13.17.37.101.113	8649761	5.5.5.13.17.37.61.101.109.109
23311	5.5.29.41.101.181	244299	5.13.17.37.97.101.149	8812979	5.17.17.17.29.73.89.97.173
23901	5.29.137.149.193	245293	109.113.137.181.197	9530277	13.13.17.17.17.73.89.113.149
23915	13.29.73.113.173	247699	5.13.17.41.61.149.149	10126399	5.13.17.29.29.53.89.149.157
25689	5.5.29.41.149.149	257065	13.17.101.109.157.173	10251621	5.13.17.17.29.61.101.173.181
27355	13.37.53.149.197	263489	5.5.5.5.5.5.29.37.41.101	10763489	5.5.5.5.5.5.61.61.101.109.181
27411	5.5.41.61.61.197	269459	5.17.37.37.53.61.193	10831321	5.17.29.29.41.61.73.89.101
27429	5.17.29.37.73.113	289589	5.5.29.61.97.113.173	11398611	5.5.13.17.53.97.137.173.193
27611	5.5.41.61.89.137	302111	5.5.41.61.97.101.149	11483821	5.29.53.61.101.113.157.157
29169	5.13.29.41.101.109	306757	17.29.53.101.181.197	15035789	5.5.37.41.41.53.101.157.173
29691	5.17.17.29.109.193	313489	5.5.5.5.5.17.17.17.37.173	17363031	5.13.13.41.73.89.89.101.149

23866411	5.5.13.17.17.17.61.157.193.193
25252451	5.13.29.37.41.97.97.137.173
31456571	5.13.17.41.97.101.109.113.181
34411159	5.13.37.41.61.73.89.157.193
35272357	13.13.13.13.17.29.61.97.101.137
35944451	5.13.17.17.17.29.73.89.109.197
61017271	13.13.13.17.29.37.61.97.157
107402539	5.5.13.29.37.61.109.149.173.193
143828743	29.29.37.37.53.97.113.157.197
148757489	5.5.5.13.13.17.37.41.41.61.109.149
150446761	5.5.5.13.17.37.53.113.137.137.197
322564791	5.13.17.29.29.29.37.53.101.101.193
657182319	5.17.17.61.97.97.113.149.157.197
1359685525	13.17.53.61.61.97.113.157.157.157
4949475989	5.5.5.5.5.13.13.29.29.37.37.41.61.89.181
28608252345	13.29.29.29.37.53.61.73.97.113.149.181
112899039159	5.13.13.17.17.17.17.29.37.41.61.73.73.73.173

5	1. 11
13	3. 29
17	9
29	5. 111. 179
37	25. 49. 1011. 4761. 10039
41	23. 59. 469. 4123. 14901
53	7. 99. 961. 4989. 20769. 63911
61	39. 61. 205. 1381. 5041
73	19. 127. 311. 419. 749. 466489
89	21. 199. 691. 1089. 5717. 16041
97	53. 141. 247. 335. 4021. 6261. 7319. 79011. 396783. 563235*
101	81. 121. 283. 3717. 6989. 9817. 12605. 32239. 81487. 263489*. 10831321
109	43. 261. 393. 829. 2355. 2441. 3749. 6061. 21189. 29169*. 32003. 128359. 140871. 408489. 1230349. 8649761
113	83. 309. 761. 1047. 1499. 2343. 5567. 27429. 203091. 206707*. 244299. 637855
137	63. 211. 485. 611. 759. 1159. 1581. 3351. 9801. 13489*. 21161. 27611. 29929. 95963. 110211. 228179. 234881. 2028211. 35272357
149	61. 237. 535. 1131. 2025. 3339. 8879. 25689. 148939. 207171*. 244299. 247699. 302111. 567629. 588489. 1780489. 3666653. 5472411. 9530277. 17363031*. 148757489
157	101. 213. 527. 841. 1043. 8579. 9947. 20511. 37579. 47829*. 57989. 91587. 99011. 211221. 317039. 1493911. 1996199. 2050005. 6101547. 10126399*. 11483821. 61017271. 1359685525
173	13. 359. 679. 705. 1371. 12815. 13507. 23915. 44301. 47389*. 47761. 86487. 117281. 183739. 257065. 289589. 313489. 326957. 582997. 634205*. 922769. 966391. 3872099. 8812979. 15035789. 25252451. 112899039159
181	143. 219. 943. 1305. 2677. 3039. 5573. 7745. 13251. 14261*. 21139. 23311. 81669. 99407. 115983.

.	142047. 191279. 205111. 349835. 355989*. 840421. 851929. 1341429. 8175989. 10251621. 10763489. 31456571. 4949475989. 28608252345
193	31. 417. 1899. 4215. 5821. 20875. 22805. 23901. 29691. 79871*. 108111. 114611. 234333. 269459. 1165689. 1362611. 3376311. 5125339. 11398611. 23866411*. 34411159. 107402539. 322564791
197	169. 1351. 1745. 1801. 3377. 8049. 12383. 27355. 27411. 31351*. 32139. 49813. 66361. 139701. 140489. 245293. 306757. 387921. 628261. 834267*. 1029353. 1299241. 1499001. 2159739. 4370811. 4490249. 4705711. 6489011. 35944451. 143828743*. 150446761. 657182319

Zerlegbare $aa+9$				722	37.73.193
1	5	143	53.193	746	5.5.113.197
2	13	154	5.5.13.73	796	5.5.5.37.137
4	5.5	155	61.197	811	5.17.53.73
5	17	158	13.17.113	821	5.5.13.17.61
7	29	163	97.137	848	29.137.181
8	73	166	5.37.149	869	5.13.37.157
10	109	167	13.29.37	943	37.61.197
11	5.13	175	17.17.53	971	5.5.109.173
13	89	181	5.29.113	991	5.17.53.109
14	5.41	191	5.41.89	1015	17.157.193
16	5.53	196	5.5.29.53	1042	13.17.17.17.17
17	149	211	5.61.73	1055	13.13.37.89
19	5.37	232	13.41.101	1070	61.137.137
22	17.29	239	5.29.197	1081	5.13.89.101
26	5.137	241	5.37.157	1129	5.5.13.37.53
28	13.61	254	5.5.29.89	1144	5.17.89.173
29	5.5.17	271	5.5.13.113	1175	41.113.149
31	5.97	281	5.53.149	1259	5.13.89.137
37	13.53	284	5.13.17.73	1298	13.29.41.109
41	5.13.13	301	5.13.17.41	1309	5.53.53.61
46	5.5.5.17	314	5.13.37.41	1324	5.13.149.181
50	13.193	352	17.37.197	1421	5.5.5.41.197
55	37.41	379	5.5.13.13.17	1559	5.17.17.29.29
56	5.17.37	413	17.29.173	1618	97.137.197
65	29.73	419	5.97.181	1627	13.17.53.113
67	13.173	430	17.73.149	1646	5.5.29.37.101
68	41.113	436	5.193.197	1675	13.29.61.61
71	5.5.101	437	17.41.137	1687	73.101.193
73	17.157	446	5.5.73.109	1805	13.29.29.149
76	5.13.89	454	5.5.5.17.97	1831	5.13.17.37.41
79	5.5.5.5.5	464	5.17.17.149	1909	5.13.17.17.97
80	13.17.29	521	5.5.61.89	1979	5.5.29.37.73
89	5.13.61	529	5.5.29.193	2069	5.13.13.17.149
94	5.29.61	535	13.101.109	2182	13.29.73.173
106	5.13.173	544	5.13.29.157	2351	5.13.17.41.61
109	5.29.41	547	41.41.89	2528	17.41.53.173
119	5.13.109	574	5.13.37.137	2596	5.5.17.101.257
124	5.17.181	610	37.89.113	2719	5.13.29.37.53
128	13.13.97	629	5.5.41.193	2839	5.61.73.181
131	5.17.101	794	5.5.5.5.13.61	2953	13.17.109.181

3038	17.29.97.193	19504	5.5.17.89.89.113	105274	5.41.53.73.89.157	524704	5.5.5.13.13.29.
3089	5.17.37.37.41	20651	5.61.61.73.157	109279	5.5.29.37.41.61.89		41.97.113
3458	29.41.89.113	20813	17.37.53.73.89	109991	5.13.53.89.109.181	528967	17.29.101.109.
3496	5.5.37.73.181	22085	13.41.53.89.97	112171	5.5.5.17.109.157.173		149.173
3571	5.5.37.61.113	22367	17.17.37.149.157	114499	5.29.29.41.193.197	539996	5.5.13.13.37.109.
3677	13.13.13.17.181	22700	13.17.29.37.41.53	114896	5.5.13.41.61.109.149		109.157
4136	5.13.17.113.137	23425	29.29.41.73.109	115079	5.5.5.5.29.53.61.113	541829	5.5.5.13.17.29.
4171	5.5.5.13.53.101	23671	5.5.5.5.13.29.29.41	116881	5.13.53.73.157.173		41.41.109
4196	5.5.41.89.193	23879	5.5.13.61.73.197	127114	5.17.29.29.37.41.149	550985	37.41.61.101.
4237	37.41.61.97	24001	5.61.61.113.137	133523	17.29.41.53.53.157		109.149
4459	5.17.29.37.109	24311	5.53.61.101.181	134764	5.17.97.101.113.193	554279	5.5.13.13.37.61.
4489	5.53.193.197	25645	89.137.149.181	137659	5.13.37.137.149.193		89.181
4496	5.5.13.37.41.41	26141	5.13.17.37.61.137	141581	5.13.13.17.37.109.173	599510	13.17.29.29.109.
4565	13.41.113.173	27341	5.13.17.17.101.197	146794	5.13.41.41.53.61.61		113.157
4786	5.13.53.61.109	27731	5.13.29.37.37.149	147409	5.13.13.41.53.61.97	693775	17.17.17.41.97.
5029	5.5.13.13.41.73	27805	13.37.73.101.109	154679	5.5.29.37.41.73.149		109.113
5111	5.13.13.13.29.41	27844	5.13.13.13.13.61.89	154729	5.5.17.17.61.157.173	700061	5.13.41.53.89.
5125	37.37.53.181	28804	5.5.29.37.157.197	157454	5.5.5.13.37.41.89.113		101.193
5198	13.13.29.37.149	28973	17.41.73.73.113	167689	5.13.13.13.73.89.197	713291	5.17.29.29.29.
5401	5.17.29.61.97	30544	5.17.29.37.53.193	170107	13.17.17.29.37.37.97		41.41.73
5549	5.13.41.53.109	33629	5.5.13.89.113.173	174427	61.89.113.137.181	744421	5.5.5.13.37.149.
5579	5.5.5.13.61.157	34010	13.13.29.53.61.73	178336	5.13.13.41.61.101.149		157.197
5605	13.17.17.37.113	38608	13.41.137.137.149	178988	17.37.37.73.109.173	745249	5.13.13.29.29.
5921	5.5.5.17.73.113	39704	5.5.5.13.73.97.137	180416	5.13.17.29.89.101.113		53.73.101
6329	5.5.5.5.5.13.17.29	40030	17.41.97.137.173	190021	5.5.17.41.53.113.173	792113	29.61.89.101.
6346	5.5.13.17.37.197	40304	5.5.73.73.89.137	190541	5.17.41.137.193.197		109.181
6421	5.5.5.17.89.109	42173	29.29.89.109.109	193546	5.5.5.13.13.97.101.181	847319	5.17.37.73.101.
6494	5.37.37.61.101	42421	5.5.5.5.5.13.37.41.73	193829	5.5.5.5.5.29.89.137		113.137
6641	5.13.37.53.173	43864	5.13.37.89.89.101	219754	5.5.13.17.17.53.89.109	859379	5.5.17.29.29.53.
6821	5.5.53.97.181	47296	5.5.5.13.73.109.173	249871	5.5.13.17.17.29.73.157		101.193
7196	5.5.17.37.37.89	47335	13.29.89.173.193	250250	37.41.53.61.113.113	895208	13.17.17.17.29.
7271	5.5.17.37.41.41	48046	5.5.5.5.5.13.29.97.101	252328	13.41.89.97.101.137		41.61.173
7489	5.29.41.53.89	48829	5.5.5.5.5.17.29.53.73	263681	5.13.13.37.101.101.109	895861	5.17.29.89.97.
7616	5.13.53.113.149	49883	13.17.17.41.41.197	265256	5.17.29.41.61.101.113		109.173
7646	5.5.13.13.101.137	49924	5.17.41.73.97.101	280750	13.13.17.61.61.73.101	937766	5.13.17.29.41.
7729	5.5.97.109.113	54871	5.5.13.17.53.53.97	286904	5.5.17.29.29.41.41.137		53.73.173
7934	5.17.53.89.157	54926	5.37.41.41.89.109	293687	17.37.61.73.89.173	947329	5.5.5.37.73.89.
9650	29.113.157.181	55709	5.97.109.149.197	311921	5.5.5.17.53.61.73.97		109.137
10012	13.13.29.113.181	57701	5.37.41.41.53.101	313454	5.5.5.13.13.13.13.13.29.73	970454	5.5.5.37.73.97.
10154	5.5.17.41.61.97	57839	5.13.13.13.13.13.17.53	314257	17.17.73.109.109.197		149.193
10447	29.73.149.173	62402	13.13.17.89.97.157	316739	5.17.37.41.73.73.73	984934	5.13.17.29.29.
10736	5.13.97.101.181	66584	5.13.17.17.53.61.73	324952	29.37.41.89.149.181		61.109.157
11074	5.13.61.157.197	70171	5.5.5.17.37.173.181	341569	5.17.29.29.53.89.173	987406	5.17.53.73.101.
11671	5.5.5.41.97.137	71021	5.5.13.13.13.17.37.73	347543	17.29.41.113.137.193		149.197
12109	5.17.41.109.193	71276	5.17.61.89.101.109	356809	5.13.29.37.41.113.197	1196173	53.89.97.101.
12191	5.37.41.97.101	71354	5.5.17.37.41.53.149	377804	5.5.13.109.113.181.197		113.137
13561	5.13.13.17.37.173	73972	13.17.29.53.89.181	386742	13.29.109.109.173.193	1202704	5.5.5.17.17.37.
14029	5.5.13.29.53.197	78829	5.5.5.5.29.37.41.113	393079	5.5.5.13.17.137.137.149		61.113.157
15004	5.5.13.37.97.193	79031	5.13.13.37.37.37.73	415825	17.37.37.109.173.197	1256084	5.13.17.29.53.
16096	5.5.13.13.13.53.89	84563	13.17.17.17.17.37.89	419246	5.5.29.53.137.173.193		61.97.157
16291	5.13.17.29.41.101	84818	17.29.29.61.73.113	423475	17.41.89.89.109.149	1297090	13.29.37.41.109.
17029	5.5.17.41.53.157	86221	5.5.61.73.173.193	448280	41.41.41.89.181.181		137.197
17357	13.41.41.61.113	88411	5.13.37.73.113.197	496004	5.5.13.17.37.41.149.197	1460288	13.13.13.17.29.
17668	17.29.37.109.157	95071	5.5.13.37.61.61.101	512579	5.5.5.5.5.13.17.37.53.97		101.101.193
18671	5.5.5.5.5.17.17.193	95188	13.13.13.17.41.61.97	520921	5.5.5.13.53.97.109.149		

1717025	13.29.41.53.73.157.157
1799921	5.5.5.5.5.17.29.37.157.181
1800254	5.5.17.37.97.101.109.193
2153956	5.17.101.101.157.173.197
2253046	5.5.5.5.5.29.41.53.149.173
2347195	17.29.41.53.137.137.137
2362579	5.5.5.5.5.5.5.13.29.37.197
2382560	13.29.37.101.113.181.197
2454779	5.5.13.41.73.109.157.181
2473954	5.5.5.13.17.17.29.41.97.113
2579296	5.5.5.5.17.29.41.61.89.97
2710934	5.17.17.17.37.41.53.61.61
2867521	5.5.17.61.73.101.137.157
2960596	5.5.13.17.41.53.73.73.137
3045079	5.5.5.5.13.17.17.101.113.173
3287839	5.17.17.17.29.53.53.73.73
3386888	13.13.17.29.37.137.157.173
3569269	5.13.29.41.53.89.101.173
4046131	5.13.17.29.89.101.157.181
4546271	5.5.13.17.41.53.53.109.149
4699704	5.5.5.13.61.73.113.137.197
4889605	37.41.53.61.73.173.193
8026096	5.5.17.37.37.89.101.109.113
8182343	17.17.29.41.73.73.101.181
8931226	5.37.53.61.89.89.113.149
9237421	5.5.5.5.5.13.17.17.29.29.29.149
9250762	41.89.97.101.101.137.173
10419736	5.13.13.29.37.73.101.109.149
11077571	5.5.13.13.41.109.113.149.193
12519856	5.13.37.37.41.53.61.97.137
13237028	17.29.37.41.61.149.149.173
13382956	5.13.17.29.29.37.137.193.197
14937769	5.13.17.37.53.61.61.101.137
19912579	5.5.5.5.5.13.41.41.97.173.173
20620229	5.5.37.37.61.73.73.97.197
22181629	5.5.13.13.13.17.29.37.41.53.113
23504986	5.13.13.13.29.29.29.41.53.73
25674911	5.13.29.37.41.73.89.113.157
26999399	5.13.13.29.37.97.109.193.197
33399844	5.17.17.29.37.37.41.73.73.89
33753059	5.13.13.41.89.97.101.109.173
34618846	5.5.13.13.13.17.17.37.97.109.193
34792409	5.13.13.13.17.29.41.101.137.197
40103726	5.17.37.41.109.109.197
41494546	5.5.5.13.61.61.89.109.149.197
48279454	5.5.5.5.13.29.41.41.41.61.181
60740461	5.13.17.17.17.41.73.97.101.197
64370954	5.5.5.13.17.37.53.61.73.89.193
96499349	5.13.17.29.37.41.61.73.137.157
105742171	5.5.5.13.17.29.29.37.41.41.53.73
110518796	5.5.5.13.37.53.53.61.73.109.149
111009121	5.5.13.17.17.37.37.37.73.113.157
113737804	5.5.13.13.29.29.53.73.89.97.109
117290203	17.29.37.41.53.73.109.113.193
149574656	5.29.41.61.73.137.173.181.197

163030454	5.5.5.13.13.17.37.37.53.73.89.157
165242573	13.29.37.41.73.97.109.157.197
178643779	5.5.13.41.41.61.113.137.157.197
200760094	5.13.17.17.37.37.37.41.53.101.193
323643829	5.5.5.5.5.5.13.13.17.37.61.73.73.97
401580454	5.5.5.13.53.61.73.73.97.137.137.193
478666540	17.17.29.37.41.61.73.149.157.173
1411168679	5.5.13.17.17.89.113.157.173.197.197

5	1. 4. 79
13	2. 11. 41
17	5. 29. 46. 379. 1042
29	7. 22. 80. 1559. 6329
37	19. 56. 167
41	14. 55. 109. 301. 314. 1831. 3089. 4496. 5111. 7271*. 23671
53	16. 37. 175. 196. 1129. 2719. 22700. 57839
61	28. 89. 94. 704. 821. 1309. 1675. 2351. 146794. 2710934*
73	8. 65. 154. 211. 284. 811. 1979. 5029. 34010. 42421*. 48829. 66584. 71021. 79051. 313454. 316739. 713291. 3287839. 23504986. 105742171*
89	13. 76. 191. 254. 521. 547. 1055. 7196. 7489. 16096*. 20813. 27844. 84563. 109279. 33399844
97	31. 128. 454. 1909. 4237. 5401. 10154. 22085. 54871. 95188*. 147409. 170107. 311921. 512579. 2579296. 323643829
101	71. 131. 232. 1081. 1646. 4171. 6494. 12191. 16291. 43864*. 48046. 49924. 57701. 95071. 280750. 745249
109	10. 119. 446. 535. 991. 1298. 4459. 4786. 5549. 6421*. 23425. 27805. 42173. 54926. 71276. 219754. 263681. 541829. 113737804
113	68. 158. 181. 271. 610. 1627. 3458. 3571. 5605. 5921*. 7729. 17357. 19504. 28973. 78829. 84818. 115079. 157454. 180416. 250250*. 265256. 524704. 693775. 2473954. 8026096. 22181629
137	26. 163. 437. 574. 796. 1070. 1259. 4136. 7646. 11671*. 24001. 26141. 39704. 40304. 193829. 252328. 286904. 847319. 947329. 1196173*. 2347195. 2960596. 12519856. 14937769
149	17. 166. 281. 430. 464. 1175. 1805. 2069. 5198. 7616*. 27731. 38608. 71354. 114896. 127114. 154679. 178336. 393079. 423475. 520921*. 550985. 4546271. 8931226. 9237421. 10419736. 110518796
157	73. 241. 544. 869. 2596. 5579. 7934. 17029. 17668. 20651*. 22367. 62402. 105274. 133523. 249871. 539996. 599510. 984934. 1202704. 1256084*. 1717025. 2867521. 25674911. 96499349. 111009121. 163030454
173	67. 106. 413. 971. 1144. 2182. 2528. 4565. 6641. 10447*. 13561. 33629. 40030. 47296. 112171. 116881. 141581. 154729. 178988. 190021*. 293687. 341569. 528967. 895208. 895861. 937766. 2253046. 3045079. 3386888. 3569269*. 9250762. 13237028. 19912579. 33753059. 478666540
181	124. 419. 848. 1324. 2839. 2953. 3496. 3677. 5125. 6821*. 9650. 10012. 10736. 24311. 25645. 70171. 73972. 109991. 174427. 193546*. 324952. 448280. 554279. 792113. 1799921. 2454779. 4046131. 8182343. 48279454
193	50. 143. 529. 629. 722. 1015. 1687. 3038. 4196. 12109*. 15004. 18671. 30544. 47335. 86221. 134764. 137659. 347543. 386722. 419246*. 700061. 859379. 970454. 1460288. 1800254.

	4889605. 11077571. 34618846. 64370954. 117290203*. 200760094. 401580454.
197	155. 239. 352. 436. 746. 943. 1421. 1618. 4489. 6346*. 11074. 14029. 23879. 27341. 28804. 49883. 55709. 88411. 114499. 167689*. 190541. 314257. 356809. 377804. 415825. 496004. 744421. 987406. 1297090. 2153956*. 2362579. 2382560. 4699704. 13382956. 20620229. 26999399. 34792409. 40103726. 41494546. 60740461*. 149574656. 165242573. 178643779. 1411168679

Zerlegbare $aa+16$.

				4897	5.5.5.5.17.37.61	40853	5.5.5.13.61.113.149
1	17	579	13.17.37.41	5337	5.13.17.149.173	41373	5.13.29.29.173.181
3	5.5	619	29.73.181	5473	5.17.53.61.109	44269	17.53.61.181.197
5	41	647	5.5.5.17.197	5635	13.13.13.97.149	44947	5.5.13.17.17.137.157
7	5.13	677	5.29.29.109	5897	5.5.5.29.53.181	45793	5.13.37.89.97.101
9	97	747	5.5.13.17.101	5921	13.89.157.193	52157	5.17.17.17.37.41.73
11	137	851	13.17.29.113	6051	13.17.29.29.197	52379	37.73.89.101.113
13	5.37	897	5.5.5.41.157	6081	37.53.109.173	52393	5.17.29.41.157.173
17	5.61	903	5.5.13.13.193	6427	5.17.53.53.173	57323	5.13.17.29.41.41.61
19	13.29	987	5.17.73.157	6605	61.73.97.101	57803	5.5.89.97.113.137
23	5.109	1021	13.17.53.89	6727	5.13.61.101.113	66333	5.13.17.17.29.41.197
27	5.149	1203	5.5.13.61.73	7345	17.89.181.197	67327	5.37.41.61.97.101
33	5.13.17	1237	5.29.61.173	7413	5.17.37.101.173	68215	37.61.101.137.149
35	17.73	1293	5.13.17.17.89	7547	5.5.13.13.13.17.61	69347	5.5.101.101.109.173
39	29.53	1353	5.5.5.5.29.101	7683	5.17.37.137.137	73467	5.29.41.89.101.101
45	13.157	1359	13.17.61.137	7703	5.5.13.41.61.73	74133	5.13.13.41.41.53.73
47	5.5.89	1463	5.13.13.17.149	7963	5.13.89.97.113	81413	5.13.29.29.29.37.113
53	5.5.113	1553	5.5.13.41.181	8141	73.89.101.101	82817	5.13.73.89.109.149
61	37.101	1717	5.41.73.197	8523	5.37.41.61.157	82893	5.17.37.73.173.173
67	5.17.53	1837	5.17.29.37.37	8747	5.5.101.157.193	103317	5.13.13.29.37.61.193
77	5.29.41	1929	137.157.173	9133	5.13.61.109.193	104293	5.13.61.101.157.173
87	5.37.41	2203	5.5.13.109.137	9353	5.5.5.13.13.41.101	113699	29.29.29.53.73.137
97	5.5.13.29	2223	5.29.173.197	10003	5.5.13.37.53.157	126497	5.5.13.53.61.97.157
103	5.5.5.5.17	2243	5.13.17.29.157	11967	5.13.17.29.41.109	130553	5.5.13.53.97.101.101
105	61.181	2391	29.41.61.73.	12045	13.29.53.53.137	132143	5.29.53.193.193
131	89.193	2447	5.5.17.37.193	12257	5.29.53.113.173	139477	5.37.41.97.137.193
135	17.29.37	2455	29.37.41.137	12603	5.5.5.5.13.113.173	150897	5.5.5.13.29.61.89.89
137	5.13.17.17	2477	5.13.13.53.137	12667	5.37.73.109.109	154821	29.37.41.41.97.137
141	101.197	2593	5.13.13.73.109	13397	5.5.5.13.17.73.89	158373	5.13.17.37.61.89.113
147	5.5.5.173	2687	5.17.29.29.101	16897	5.5.5.17.29.41.113	158509	17.17.53.101.109.149
173	5.53.113	2823	5.17.29.53.61	17477	5.17.17.29.37.197	161399	17.17.53.89.97.197
227	5.13.13.61	2957	5.13.17.41.193	17635	13.41.53.101.109	162383	5.17.89.149.149.157
241	13.41.109	3095	17.37.97.157	17853	5.5.5.109.149.157	171293	5.17.29.41.41.73.97
253	5.5.13.197	3113	5.13.29.53.97	19991	17.29.61.97.137	172569	13.29.29.101.149.181
257	5.73.181	3153	5.5.13.13.13.181	20167	5.41.97.113.181	174727	5.13.17.37.53.73.193
263	5.101.137	3247	5.5.53.73.109	23677	5.53.97.113.193	232147	5.5.5.13.41.41.109.181
271	17.29.149	3293	5.101.109.197	24447	5.5.13.13.17.53.157	239387	5.53.97.109.113.181
279	13.53.113	3603	5.5.5.17.41.149	24785	13.13.17.29.73.101	240347	5.5.17.41.89.193.193
309	29.37.89	3607	5.13.13.89.173	25617	5.13.29.37.97.97	242897	5.5.5.17.17.97.113.149
357	5.13.37.53	3777	5.13.41.53.101	28581	13.53.73.109.149	251817	5.13.29.41.53.113.137
383	5.13.37.61	3847	5.5.29.137.149	29217	5.13.37.37.53.181	260033	5.13.13.17.29.29.29.193
397	5.5.5.13.97	4453	5.5.17.37.97	29853	5.5.5.17.41.53.193	260575	17.29.61.73.157.197
403	5.5.73.89	4497	5.5.61.89.149	36107	5.13.17.53.113.197	300527	5.13.17.37.113.113.173
487	5.13.41.89	4505	13.13.29.41.101	36823	5.13.17.41.173.173	374203	5.5.17.89.113.181.181
505	37.61.113	4601	29.37.109.181	37579	5.17.29.41.89.157	378671	13.13.37.41.53.61.173
545	17.101.173	4647	5.5.5.13.97.137	38863	5.13.17.17.37.41.53	434441	13.13.37.37.41.101.197
569	41.53.149	4853	5.5.5.29.73.89	39653	5.5.29.101.109.197	577603	5.5.5.5.29.29.41.113.137

648447	5.5.13.17.61.61.113.181
650103	5.5.5.5.29.37.73.89.97
658783	5.17.17.29.41.41.61.101
696353	5.5.5.5.17.17.37.37.37.53
748853	5.5.5.5.5.61.109.137.197
870487	5.13.61.73.97.137.197
873503	5.5.13.13.61.109.157.173
970497	5.5.17.37.53.73.113.137
1193679	13.29.41.41.101.113.197
1229533	5.13.13.53.53.53.61.197
1259837	5.13.13.13.17.29.37.89.89
1335487	5.17.89.97.113.137.157
1404163	5.13.13.37.41.97.101.157
1626475	13.29.41.73.109.137.157
2008103	5.5.5.13.41.53.61.97.193
2083893	5.13.17.53.73.89.101.113
2116091	17.29.37.101.113.137.157
2373167	5.17.29.37.41.53.157.181
2960653	5.5.13.13.17.17.17.101.113
3258603	5.5.5.37.41.61.61.101.149
3611583	5.17.29.37.61.109.137.157
3898603	5.5.5.13.13.37.41.73.73.89
4945505	13.13.17.17.17.29.89.101.113
5431603	5.5.5.17.17.29.41.73.97.97
8180243	5.13.29.29.37.37.41.53.53.113.193
8268383	5.13.13.29.41.73.73.113.113
9993613	5.13.29.37.53.53.61.61.137
10311423	5.41.41.61.109.113.113.149
15305803	5.5.13.37.53.101.109.173.193
16626883	5.17.73.101.109.149.157.173
17545053	5.5.13.17.17.41.53.101.109.137
17916571	17.37.37.61.73.109.157.181
18500917	5.13.29.41.41.61.89.101.197
19344643	5.13.13.29.41.73.73.113.113
20278927	5.13.17.29.53.73.113.149.197
22858302	5.5.17.17.17.17.17.29.53.61.157
38648107	5.17.17.29.97.109.109.157.197
40473647	5.5.5.5.13.37.41.73.97.137.137
46113113	5.13.13.17.29.37.53.73.181.197
1082687431	13.17.29.53.61.97.109.157.173.197
1254102921	13.13.17.17.41.53.61.97.101.137.181

5	3
13	7
17	1. 33. 103. 137
29	19. 97
37	13. 135. 1837
41	5. 77. 87. 579
53	39. 67. 357. 38863. 696353
61	17. 227. 383. 2823. 4897. 7547. 57323
73	35. 1203. 2301. 7703. 52157. 74133
89	47. 309. 403. 487. 1021. 1293. 4853. 13397. 150897. 1259837*. 3898603

97	9. 397. 3113. 4453. 25617. 171293. 650103. 5431603
101	61. 747. 1353. 2687. 3777. 4505. 6605. 8141. 9353. 24785*. 45793. 67327. 73467. 130553. 658783
109	23. 241. 677. 2593. 3247. 5473. 11967. 12667. 17635
113	53. 173. 279. 505. 851. 6727. 7963. 16897. 52379. 81413*. 158373. 2083893. 2960653. 4945505. 8268383. 19344643
137	11. 263. 1359. 2203. 2455. 2477. 4647. 7683. 12045. 19991*. 57803. 113699. 154821. 251817. 577603. 970497. 9993613. 17545053. 40473647
149	11. 271. 569. 1463. 3603. 3849. 4497. 5635. 28581. 40853*. 68215. 82817. 158509. 242897. 3258603. 10311423
157	45. 897. 987. 2243. 3095. 8523. 10003. 17853. 24447. 37579*. 44947. 126497. 162384. 1335487. 1404163. 1626475. 2116091. 3611583. 22858302
173	147. 545. 1237. 1929. 3607. 5337. 6081. 6427. 7413. 12257*. 12603. 36823. 52393. 69347. 82893. 104293. 300527. 378671 873503. 16626883*
181	105. 257. 619. 1553. 3153. 4601. 5897. 20167. 29217. 41373*. 172569. 232147. 239387. 374203. 648447. 2373167. 17916571. 1254102921
193	131. 903. 2447. 2957. 5921. 8747. 9133. 23677. 29853. 103317*. 132143. 139477. 174727. 240347. 260033. 2008103. 8180243. 15305803.
197	141. 253. 647. 1717. 2223. 3293. 6051. 7345. 17477. 36107*. 39653. 44269. 66333. 161399. 260575. 434441. 748853. 870487. 1193679. 1229533*. 18500917. 20278927. 38648107. 46113113. 1082687431

Zerlegbare $aa+25$.

				274	13.53.109	857	13.13.41.53
1	13	67	37.61	303	17.37.73	858	37.101.197
2	29	71	17.149	309	17.53.53	898	13.17.41.89
3	17	78	41.149	311	13.61.61	959	29.101.157
4	41	81	37.89	324	13.41.197	984	29.173.193
6	61	84	73.97	326	13.13.17.37	1092	61.113.173
7	37	86	41.181	354	17.73.101	1104	13.29.53.61
8	89	89	29.137	363	13.37.137	1177	37.97.193
9	53	97	53.89	376	13.73.149	1252	73.109.197
11	73	99	17.17.17	377	17.37.113	1364	13.13.101.109
12	13.13	116	13.17.61	414	37.41.113	1431	13.17.41.113
13	97	118	13.29.37	433	29.53.61	1442	13.17.97.97
14	13.17	119	41.173	437	29.37.89	1544	17.17.73.113
17	157	127	41.197	454	13.101.157	1561	13.17.37.149
19	193	151	101.113	488	37.41.157	1733	97.113.137
27	13.29	157	13.13.73	521	13.53.197	1767	13.29.41.101
31	17.29	168	13.41.53	573	13.73.173	1887	29.29.29.73
37	17.41	174	157.193	611	29.41.157	2128	17.41.73.89
38	13.113	181	13.13.97	636	13.29.29.37	2144	13.29.89.137
44	37.53	201	17.29.41	638	13.173.181	2341	13.41.53.97
48	17.137	207	13.17.97	677	13.17.17.61	2434	17.29.61.197
51	13.101	209	13.41.41	733	37.53.137	2751	17.41.61.89
53	13.109	227	149.173	753	13.113.193	2887	13.17.109.173
54	17.173	252	17.37.101	768	13.17.17.157	2989	13.17.17.29.41
56	29.109	259	13.29.89	816	41.109.149		
62	53.73	267	181.197	819	17.109.181		

3199	13.13.13.17.137	33381	29.37.53.97.101
3323	37.37.37.109	38011	13.41.89.97.157
3471	17.37.61.157	38134	17.41.97.137.157
3522	13.17.37.37.41	40559	13.17.17.37.61.97
3654	13.61.113.149	41037	29.41.73.89.109
3686	17.41.101.193	41891	17.37.73.97.197
3788	17.61.101.137	44407	13.17.17.37.41.173
4219	17.41.113.113	48062	13.17.53.53.61.61
4264	17.61.89.197	49943	17.37.73.157.173
4458	13.89.89.193	50051	13.17.173.181.181
4798	13.89.101.197	56913	13.17.37.37.53.101
4814	17.17.17.53.89	60347	13.17.29.29.97.101
5154	17.89.97.181	68626	13.13.17.53.157.197
5251	13.13.29.29.97	85699	37.61.89.101.181
5706	13.101.137.181	87989	17.53.113.193.197
5927	13.13.37.53.53	93469	13.13.13.17.29.37.109
6001	29.73.97.173	95473	13.13.13.73.157.181
6157	17.53.109.193	101151	37.41.101.173.193
6581	29.53.73.193	108871	17.53.173.193.197
6616	13.17.37.53.101	121479	17.17.29.41.109.197
7359	13.97.109.197	141777	13.17.37.73.113.149
7676	53.73.97.157	144808	13.41.61.61.97.109
7753	41.61.61.197	152762	13.41.41.97.101.109
8147	29.37.157.197	152803	13.29.37.41.137.149
8231	17.101.109.181	155187	73.97.101.113.149
8776	13.13.37.109.113	160314	29.37.41.61.61.157
9209	73.73.73.109	172561	13.13.13.13.37.73.193
10049	41.89.101.137	183971	17.37.41.73.89.101
10061	13.17.29.53.149	188618	13.17.17.29.53.61.101
10501	37.73.137.149	214482	29.37.53.61.89.149
12468	13.29.41.89.113	214631	13.29.41.73.137.149
12526	17.17.29.97.193	234852	17.41.53.73.113.181
13786	73.101.149.173	249014	13.73.73.89.89.113
13787	89.97.101.109	257841	13.29.61.89.101.149
14067	13.29.37.41.173	279007	13.13.17.29.29.89.181
14756	13.37.41.61.181	329219	17.37.73.89.89.149
15807	13.17.29.101.193	329848	13.17.17.29.37.137.197
17057	13.13.53.109.149	382537	13.17.17.29.61.101.109
18123	13.29.37.61.193	422419	17.17.17.41.53.61.137
18771	13.13.13.17.53.89	458742	17.17.113.173.193.193
18823	13.29.41.73.157	484041	13.29.37.37.61.61.61
19553	13.17.17.17.41.73	546534	13.13.37.41.41.157.181
19751	17.17.17.29.37.37	564812	13.37.37.41.53.73.113
20502	13.53.61.73.137	735331	13.13.37.41.53.101.197
21009	13.17.37.137.197	743781	13.13.13.13.17.37.89.173
21319	13.37.37.113.113	867847	17.89.89.137.137.149
21527	13.53.61.37.149	938003	13.29.53.61.61.61.97
21644	13.13.17.41.41.97	1000154	13.13.29.29.37.37.53.97
23488	29.37.53.89.109	1964806	13.13.17.29.41.73.113.137
24101	13.29.61.73.173	2144583	13.41.53.61.73.101.181
24358	17.29.41.149.197	3589859	17.17.73.109.113.137.181
25401	13.17.97.101.149	3879591	13.37.53.89.113.149.197
26707	29.29.37.73.157	5693622	13.13.13.53.97.101.157.181
30467	17.41.41.109.149	6991009	13.17.17.37.53.113.149.197
31226	17.53.61.113.157	7062082	13.29.29.41.53.73.149.193

8489259	13.17.29.29.29.41.41.41.97
8717008	13.13.17.17.37.37.89.113.113
9707868	13.29.29.37.101.113.137.149
10305788	13.17.37.53.101.109.113.197
17462342	13.37.61.61.89.89.137.157
38722306	13.13.29.37.61.89.89.109.157
48162204	13.17.37.37.41.53.101.181.193
60920523	13.17.17.53.61.61.101.137.181
63769026	17.29.37.41.53.89.101.101.113
111771087	13.17.37.61.61.89.113.137.149
141757784	13.17.53.61.89.113.137.137.149
172642653	13.17.29.73.89.89.137.149.197
190067607	73.89.97.101.101.109.149.173
308956283	13.29.29.37.41.53.61.73.89.137
569329071	13.13.29.37.41.97.101.109.137.149

13	1. 12
17	3. 14. 99
29	2. 27. 31
37	7. 118. 326. 636. 19751
41	4. 37. 201. 209. 2989. 3522
53	9. 44. 168. 309. 857. 5927
61	6. 67. 116. 311. 433. 677. 1104. 48062. 484041
73	11. 62. 157. 303. 1887. 19553
89	8. 81. 97. 259. 437. 898. 2128. 2751. 4814. 18771*
97	13. 84. 181. 207. 1442. 2341. 5251. 21644. 40559. 938203*. 1000154. 8489259
101	51. 252. 354. 1767. 6616. 33381. 56913. 60347. 183971. 188618*
109	53. 56. 274. 1364. 3323. 9209. 13787. 23488. 41037. 93469*. 144808. 152762. 382537
113	38. 151. 377. 414. 1431. 1544. 4219. 8776. 12468. 21319*. 249014. 564812. 8717008. 63769026
137	48. 89. 363. 733. 1733. 2144. 3199. 3788. 10049. 20502*. 422419. 1964806. 308956283
149	71. 78. 376. 816. 1561. 3654. 10061. 10501. 17057. 21527*. 25401. 30467. 141777. 152803. 155187. 214482. 214631. 257841. 329219. 867847*. 9707868. 111771087. 141757784. 569329071
157	17. 454. 488. 611. 768. 959. 3471. 7676. 18823. 26707*. 31226. 38011. 38134. 160314. 17462342. 38722306
173	54. 119. 227. 573. 1092. 2887. 6001. 13786. 14067. 24101*. 44407. 49943. 743781. 190067607
181	86. 638. 819. 5154. 5706. 8231. 14756. 50051. 85699. 95473*. 234852. 279007. 546534. 2144583. 3589859. 5693622. 60920523
193	19. 174. 753. 984. 1177. 3686. 4458. 6157. 6581. 12526*. 15807. 18123. 101151. 172561. 458742. 7062082. 48162204
197	127. 267. 324. 521. 858. 1252. 2434. 4264. 4798. 7359*. 7753. 8147. 21009. 24358. 41891. 68626. 87989. 108871. 121479. 329848*. 735331. 3879591. 6991009. 10305788. 172642653

Zerlegbare $aa+36$.

1	37	4031	41.61.73.89
5	61	4277	5.17.29.41.181
7	5.17	4883	5.5.37.149.173
11	157	5009	13.97.101.197
13	5.41	5321	13.13.29.53.109
17	5.5.13	5467	5.5.5.5.17.29.97
23	5.113	5495	13.13.29.61.101
35	13.97	5497	5.173.181.193
41	17.101	6217	5.5.5.37.61.137
43	5.13.29	6221	29.73.101.181
61	13.17.17	6655	29.41.193.193
67	5.5.181	6827	5.17.61.89.101
73	5.29.37	7547	5.37.37.53.157
85	53.137	7717	5.5.5.53.89.101
89	73.109	7813	5.17.61.61.193
95	13.17.41	7861	13.17.137.157
113	5.13.197	7919	37.97.101.173
115	89.149	8459	13.17.41.53.149
127	5.53.61	10261	13.17.53.89.101
191	13.53.53	10565	13.13.41.89.181
203	5.73.113	13763	5.13.17.37.41.113
217	5.5.5.13.29	13823	5.13.109.149.181
233	5.5.41.53	14543	5.13.29.29.53.73
293	5.89.193	15245	13.37.61.89.89
295	13.37.181	15733	5.5.29.29.61.193
307	5.109.173	17617	5.5.29.41.53.197
347	5.13.17.109	18659	13.17.97.109.149
445	37.53.101	22345	17.29.53.97.197
479	29.41.193	22481	13.17.17.17.41.193
517	5.5.17.17.37	22583	5.5.17.101.109.109
565	29.101.109	22733	5.5.13.13.13.97.97
617	5.5.97.157	22867	5.5.29.37.101.193
667	5.5.13.37.37	23753	5.37.113.137.197
673	5.17.73.73	29129	13.53.89.101.137
737	5.13.61.137	29995	13.13.13.13.17.17.109
763	5.13.13.13.53	30845	13.13.17.41.41.197
953	5.13.89.157	31885	13.17.29.41.53.73
971	13.29.41.61	32647	5.13.17.73.73.181
1183	5.5.17.37.89	38893	5.73.109.193.197
1333	5.5.17.37.113	38923	5.17.37.53.61.149
1463	5.41.53.197	39347	5.13.41.53.97.113
1517	5.5.13.73.97	42133	5.5.17.17.17.97.149
1673	5.13.17.17.149	44327	5.29.29.37.73.173
1717	5.5.5.5.53.89	48967	5.5.5.13.17.29.41.73
1873	5.41.109.157	49517	5.5.29.113.173.173
2201	13.41.61.149	54167	5.5.13.13.37.137.137
2251	17.17.89.197	61117	5.5.13.29.61.73.89
2383	5.5.13.101.173	62825	13.17.37.41.61.193
2557	5.13.17.61.97	74603	5.13.17.29.29.53.113
2567	5.5.29.61.149	87217	5.5.5.17.17.29.53.137
2963	5.89.109.181	96227	5.17.53.109.109.173
3181	13.37.109.193	125909	13.17.61.73.89.181
3553	5.13.29.37.181	130613	5.41.53.73.137.157
3767	5.5.17.173.193	141709	13.13.29.37.37.41.73

151163	5.29.61.109.137.173
161035	13.41.53.61.101.149
171655	89.97.109.173.181
174565	29.37.37.41.97.193
182743	5.17.29.29.29.89.181
189353	5.17.109.157.157.157
191203	5.53.53.73.181.197
206407	5.17.17.29.41.137.181
256693	5.17.17.29.61.149.173
387833	5.13.37.53.53.61.73
427795	13.17.37.37.53.101.113
429347	5.13.13.37.173.173.197
449921	13.29.37.41.41.89.97
533789	13.13.29.29.113.113.157
726029	17.17.29.29.101.109.197
837533	5.5.5.37.97.101.113.137
1097105	13.17.17.97.109.157.193
1396529	13.13.13.37.41.53.61.181
2390717	5.5.5.13.17.29.29.37.61.109
2525527	5.13.17.61.89.97.97.113
5318933	5.5.13.17.29.89.97.113.181
6920333	5.5.13.17.17.17.37.61.97.137
9439957	5.17.17.17.17.17.37.37.53.173
11776417	5.5.17.41.73.73.89.97.173
45435967	5.5.5.29.41.53.61.113.193.197
70145903	5.13.13.17.41.53.73.97.113.197
90115783	5.5.5.5.5.5.5.5.5.5.5.13.13.13.17.61.73
716295433	5.5.13.13.29.29.37.41.61.89.89.197
2009136133	5.5.13.17.41.61.73.89.97.113.181.197

5	.
13	17
17	7. 61
29	43. 217
37	1. 73. 517. 667
41	13. 95
53	191. 233. 763
61	5. 127. 971
73	673. 14543. 31885. 48967. 141709. 387833. 90115783
89	1183. 1717. 4031. 15245. 61117
97	35. 1517. 2557. 5467. 22733. 449921
101	41. 445. 5495. 6827. 7717. 10261
109	89. 347. 565. 5321. 22583. 29995. 2390717
113	23. 203. 1333. 13763. 39347. 74603. 427795. 2525527
137	85. 737. 6217. 29129. 54167. 87217. 837533. 6920333
149	115. 1673. 2201. 2567. 8459. 18659. 38923. 42133. 161035
157	11. 617. 953. 1873. 7547. 7861. 130613. 189353. 533789
173	307. 2383. 4883. 7919. 44327. 49517. 96227. 151163. 256693. 9439957*. 11776417
181	67. 295. 2963. 3553. 4277. 6221. 10565. 13823. 32647. 125909*. 171655. 182743. 206407. 1396529. 5318933
193	293. 479. 3181. 3767. 5497. 6655. 7813. 15733. 22481. 22867*. 62825. 174565. 1097105
197	113. 1463. 2251. 5009. 17617. 22345. 23753. 30845. 38893. 191203*. 429347. 726029. 45435967. 70145903. 716295433. 2009136133

Zerlegbare $aa+49$.				979	5.13.73.101	4630	17.37.173.197	16393	61.101.113.193
1	5.5	149	5.5.5.89	992	13.17.61.73	4657	37.37.89.89.	16446	5.29.109.109.157
2	53	152	13.13.137	1009	5.17.53.113	4715	13.13.17.53.73	17247	13.37.37.61.137
3	29	159	5.17.149	1031	5.13.13.17.37	4749	5.5.13.13.17.157	18099	5.5.17.29.97.137
4	5.13	171	5.29.101	1041	5.29.37.101	4754	5.13.17.113.181	18976	5.5.5.13.37.53.113
5	37	176	5.5.17.73	1111	5.17.53.137	4778	37.41.101.149	19743	13.17.41.137.157
6	5.17	181	5.17.193	1128	17.29.29.89	4918	13.13.13.101.109	20297	13.13.13.29.53.61
8	113	186	5.13.13.41	1179	5.13.17.17.37	4927	29.53.53.149	20999	5.13.29.149.157
9	5.13	199	5.5.13.61	1186	5.29.89.109	5024	5.5.5.5.41.197	21768	97.137.181.197
10	149	205	109.193	1221	5.29.53.97	5101	5.5.5.29.37.97	21834	5.17.29.41.53.89
11	5.17	214	5.53.173	1252	13.17.41.173	5191	5.13.17.89.137	22156	5.13.13.53.97.113
12	193	227	17.37.41	1364	5.37.89.113	5221	5.101.137.197	22569	5.41.41.157.193
13	109	229	5.29.181	1374	5.5.13.37.157	5226	5.5.5.41.73.73	25726	5.5.5.29.41.61.73
15	137	234	5.97.113	1395	13.29.29.89	5841	5.13.37.41.173	25931	5.13.17.41.41.181
16	5.61	249	5.5.17.73	1556	5.13.193.193	6008	41.41.109.197	26016	5.17.29.37.41.181
17	13.13	251	5.5.13.97	1592	17.29.53.97	6029	5.17.29.73.101	26337	113.113.157.173
19	5.41	264	5.13.29.37	1609	5.17.97.157	6309	5.13.53.53.109	27200	13.37.97.101.157
22	13.41	289	5.61.137	1621	5.13.17.29.41	6381	5.17.17.73.193	27564	5.13.13.73.109.113
23	17.17	295	13.17.197	1629	5.13.137.149	6574	5.5.13.13.53.193	27721	5.17.17.29.53.173
24	5.5.5.5	296	5.89.197	1649	5.5.5.73.149	6899	5.5.5.5.13.29.101	29254	5.13.13.53.97.197
26	5.5.29	314	5.109.181	1689	5.17.97.173	6998	13.17.37.53.113	29501	5.5.13.17.17.41.113
29	5.89	316	5.13.29.53	1751	5.5.13.53.89	7276	5.5.13.29.41.137	30179	5.61.73.113.181
30	13.73	321	5.13.13.61	1766	5.29.137.157	7316	5.17.53.109.109	30424	5.5.13.17.29.53.109
31	5.101	331	5.97.113	1929	5.37.89.113	7440	13.17.41.41.149	31274	5.5.5.5.13.17.73.97
32	29.37	334	5.13.17.101	1949	5.5.17.41.109	7914	5.29.61.73.97	32491	5.13.37.41.53.101
39	5.157	347	13.41.113	2069	5.41.53.197	8149	5.5.5.5.5.5.5.5.5.17	33258	13.17.17.37.73.109
40	17.97	351	5.5.5.17.29	2076	5.5.13.89.149	8219	5.37.41.61.73	34134	5.13.41.53.73.113
41	5.173	373	13.53.101	2151	5.5.37.41.61	8251	5.5.13.17.61.101	35303	17.37.61.109.149
43	13.73	374	5.5.29.193	2374	5.5.17.89.149	8515	37.89.101.109	35361	5.41.113.137.197
45	17.61	449	5.5.37.109	2381	5.29.113.173	8753	13.137.137.157	35524	5.5.5.17.17.181.193
48	13.181	474	5.5.89.101	2521	5.37.89.193	8919	5.17.41.101.113	36149	5.5.5.13.13.157.197
51	5.5.53	533	17.61.137	2578	13.17.17.29.61	9161	5.13.29.113.197	37409	5.61.89.149.173
55	29.53	550	13.17.37.37	2595	17.37.53.101	9301	5.5.73.137.173	37836	5.17.17.61.109.149
57	17.97	554	5.29.29.73	2607	17.29.61.113	9546	5.13.97.97.149	38601	5.5.5.13.17.149.181
60	41.89	555	13.17.17.41	2659	5.37.97.197	9616	5.13.13.17.41.157	39901	5.5.13.13.29.73.89
61	5.13.29	589	5.13.17.157	2817	13.37.73.113	9837	13.17.37.61.97	41801	5.5.41.61.89.157
69	5.13.37	591	5.181.193	2851	5.5.5.13.41.61	9993	13.149.149.173	41859	5.73.89.149.181
74	5.5.13.17	594	5.13.61.89	2930	17.41.109.113	10291	5.17.37.113.149	43416	5.13.13.13.29.61.97
79	5.17.37	601	5.5.5.5.17.17	2944	5.61.157.181	10630	13.13.61.97.113	44677	13.53.97.109.137
96	5.17.109	606	5.17.29.149	2999	5.5.13.101.137	10651	5.5.13.37.53.89	44976	5.5.5.5.5.13.17.29.101
99	5.5.197	634	5.37.41.53	3100	17.29.101.193	10727	29.97.113.181	46229	5.17.29.41.97.109
101	5.5.5.41	641	5.13.29.109	3156	5.17.17.61.113	10761	5.41.53.73.73	48317	13.13.29.37.41.157
103	73.73	667	13.109.157	3251	5.5.29.37.197	10887	41.89.109.149	49099	5.5.41.73.89.181
104	5.41.53	676	5.5.101.181	3501	5.5.13.109.173	11185	53.89.89.149	50632	17.73.101.113.181
106	5.37.61	691	5.17.53.53	3547	17.37.73.137	11632	29.149.173.181	51176	5.5.17.17.37.97.101
108	13.17.53	719	5.13.41.97	3709	5.13.29.41.89	12151	5.5.13.13.101.173	54274	5.5.5.37.53.61.197
113	13.17.29	776	5.5.13.17.109	3753	13.41.73.181	12489	5.13.13.17.61.89	55774	5.5.5.13.89.137.157
116	5.37.73	799	5.5.113.113	4034	5.13.29.89.97	13101	5.5.5.5.17.41.197	58881	5.13.53.61.73.113
118	89.157	809	5.29.37.61	4065	13.37.89.193	13329	5.13.73.97.113	64051	5.5.73.73.89.173
121	5.13.113	824	5.5.157.173	4211	5.97.101.181	14351	5.5.5.5.37.61.73	64644	5.29.37.61.113.113
122	109.137	839	5.17.41.101	4286	5.13.41.61.113	14656	5.41.61.89.193	67785	17.53.109.149.157
132	101.173	844	5.17.17.17.29	4324	5.5.17.29.37.41	14811	5.13.109.113.137	69983	13.13.17.61.89.157
137	97.97	899	5.5.5.53.61	4399	5.5.5.5.113.137	15356	5.41.61.109.173	72851	5.5.5.17.17.17.29.149
139	5.13.149	906	5.13.73.173	4556	5.29.37.53.73	15425	17.29.29.53.157	73043	13.17.37.41.73.109
142	17.29.41	919	5.13.73.89	4629	5.73.149.197	15661	5.13.61.157.197	73672	17.17.37.53.61.157

73721	5.29.29.53.89.137
76534	5.29.53.53.197
80841	5.17.61.73.89.97
82307	13.53.157.173.181
83430	13.17.29.37.149.197
87369	5.13.17.89.197.197
88213	37.41.97.137.193
88406	5.17.53.89.101.193
88989	5.13.17.17.41.53.97
89149	5.5.5.29.89.109.113
92049	5.5.13.17.29.137.193
102735	13.13.13.89.137.197
124029	5.13.13.37.37.61.109
131863	13.17.37.97.97.113
133149	5.5.5.5.5.41.101.137
138199	5.5.13.17.101.109.157
139551	5.5.13.29.53.101.193
141633	17.17.17.17.29.41.101
148439	5.37.41.73.101.197
150410	17.37.41.61.73.197
150681	5.29.53.97.97.157
154876	5.5.17.41.73.109.173
157995	29.37.41.53.53.101
160168	17.37.41.53.137.137
163609	5.13.13.37.41.53.137
166851	5.5.5.5.5.13.41.61.137
167124	5.5.13.13.29.37.61.101
174074	5.5.13.17.157.181.193
178149	5.5.5.5.17.89.97.173
179565	13.17.29.113.113.197
187249	5.5.17.17.109.113.197
189538	73.109.149.157.193
207814	5.13.17.17.97.137.173
213263	29.37.41.73.73.97
217351	5.5.5.13.13.17.17.53.73
231755	13.17.17.17.61.61.113
273694	5.17.37.41.53.97.113
281226	5.5.5.5.61.73.157.181
288901	5.5.29.37.53.149.197
299399	5.5.5.5.13.29.37.53.97
307519	5.13.17.17.29.29.41.73
343066	5.13.17.17.17.41.89.101
345094	5.13.17.37.113.149.173
361409	5.13.17.53.61.101.181
375967	5.17.37.53.61.149
401444	5.13.17.17.29.29.101.101
408628	41.53.89.89.89.109
415848	13.17.17.37.101.109.113
417317	13.41.61.113.137.173
428021	5.13.37.41.61.97.157
448976	5.5.5.17.61.89.101.173
462953	29.41.53.101.113.149
521044	5.13.13.17.17.73.97.157
527329	5.17.37.61.61.109.109
658576	5.5.13.13.13.13.53.73.157
689601	5.5.5.37.41.73.89.193
788493	13.41.109.157.173.197
935601	5.5.5.5.5.13.13.17.29.41.41
979976	5.5.5.5.17.17.137.197.197
1055864	5.13.17.29.37.53.113.157
1538221	5.13.13.29.53.61.109.137
1686759	5.13.29.29.41.41.113.137
2001229	5.13.17.29.41.53.149.193
2446492	13.41.73.89.101.109.157
3254151	5.5.13.17.29.41.61.73.181
3297075	37.41.53.53.73.101.173
3643774	5.5.5.13.17.41.109.137.157
4515359	5.13.13.13.17.17.113.157.181
5307581	5.17.37.53.73.73.101.157
5456999	5.5.41.73.73.101.137.197
7936717	13.29.37.41.41.41.181.181
8555207	13.17.41.53.61.73.109.157
12448726	5.5.5.5.13.13.13.41.89.157.197
21432319	5.17.37.73.149.173.197.197
40407039	5.17.37.41.53.89.97.101.137
41719774	5.5.5.17.17.29.29.41.41.173.197
118135085	17.17.37.41.61.101.109.137.173

5	1. 24
13	4. 9. 17
17	6. 11. 23. 74. 601. 8149
29	3. 26. 61. 113. 351. 844
37	5. 32. 69. 79. 264. 550. 1031. 1179
41	19. 22. 101. 142. 186. 227. 555. 1621. 4324. 935601*
53	2. 51. 55. 104. 108. 316. 634. 691
61	16. 45. 106. 199. 321. 809. 899. 2151. 2578. 2851*. 20297
73	30. 43. 103. 116. 176. 249. 554. 992. 4556. 4715*. 5226. 8219. 10761. 14351. 25726. 217351. 307519
89	29. 60. 149. 594. 919. 1128. 1395. 1751. 3709. 4657*. 10651. 12489. 21834. 39901
97	40. 57. 137. 251. 719. 1221. 1592. 4034. 5101. 7914*. 9837. 31274. 43416. 80841. 88989. 213263. 299399
101	31. 171. 334. 373. 474. 839. 979. 1041. 2595. 6029*. 6899. 8251. 32491* 44976. 51176. 141633. 157995. 167124. 343066. 401444*
109	13. 96. 449. 641. 776. 1186. 1949. 4918. 6309. 7316*. 8515. 30424. 33258. 46229. 73043. 124029. 408628. 527329
113	8. 121. 234. 331. 347. 799. 1009. 1364. 1929. 2607*. 2817. 2930. 3156. 4286. 6998. 8919. 10630. 13329. 18976. 22156. 27564*. 29501. 34134. 58881. 64644. 89149. 131863. 231755. 273694. 415848
137	15. 122. 152. 289. 533. 1111. 2999. 3547. 4399. 5191*. 7276. 14811. 17247. 18099. 44677. 73721. 133149. 160168. 163609. 166851*. 1538221. 1686759. 40407039
149	10. 139. 159. 606. 1629. 1649. 2076. 2374. 4778. 4927*. 7440. 9546. 10291. 10887. 11185. 35303. 37836. 72851. 375967. 462953*
157	39. 118. 589. 667. 1374. 1609. 1766. 4749. 8753. 9616*. 15425. 16446. 19743. 20999. 27200. 41801. 48317. 55774. 67785. 69983*. 73672. 138199. 150681. 428021. 521044. 658576. 1055864. 2446492. 3643774. 5307581*. 8555207.
173	41. 132. 214. 824. 906. 1252. 1689. 2381. 3501. 5841*. 9301. 9993. 12151. 15356. 26337. 27721. 37409. 64051. 154876. 178149*. 207814. 345094. 417317. 448976. 3297075. 118135085
181	48. 229. 314. 676. 2944. 3753. 4211. 4754. 10727. 11632*. 25931. 26016. 30179. 38601. 41859. 49099. 50632. 82307. 281226. 361409*. 3254151. 4515359. 7936717
193	12. 181. 205. 374. 591. 1556. 2521. 3100. 4065. 6381*. 6574. 14656. 16393. 22569. 35524. 88213. 88406. 92049. 139551*. 174074. 189538. 689601. 2001229
197	99. 295. 296. 2069. 2659. 3251. 4629. 4630. 5024. 5221*. 6008. 9161. 13101. 15661. 21768. 29254. 35361. 36149. 54274. 76534*. 83430. 87369. 102735. 148439. 150410. 179565. 187249. 288901. 788493. 979976*. 5456999. 12448726. 21432319. 41719774

Zerlegbare $aa+64$.

1	5.13
3	73
5	89
7	113
9	5.29
11	5.37
15	17.17
19	5.5.17
21	5.101
25	13.53
27	13.61
29	5.181
31	5.5.41
49	5.17.29
51	5.13.41
53	13.13.17
63	37.109
67	29.157
69	5.5.193
79	5.13.97
81	5.5.5.53
85	37.197
95	61.149
115	97.137
121	5.17.173
131	5.5.13.53
149	5.61.73
155	13.17.109
159	5.37.137
181	5.5.13.101
183	13.29.89
219	5.5.17.113
223	17.29.101
233	5.37.113
281	5.5.29.109
309	5.97.197
339	5.13.29.61
359	5.17.37.41
381	5.5.37.157
389	5.13.17.137
391	5.13.13.181
393	17.61.149
433	37.37.137
441	5.13.41.73
455	29.37.193
461	5.17.41.61
467	13.97.173
529	5.17.37.89
571	5.13.29.173
581	5.5.5.37.73
661	5.17.53.97
703	13.193.197
707	41.89.137
717	53.89.109
729	5.13.13.17.37
831	5.5.5.5.5.13.17
873	53.73.197
879	5.29.73.73
911	5.13.113.113
937	13.17.29.137
989	5.13.101.149
1035	17.29.41.53
1097	41.149.197
1141	5.17.17.17.53
1169	5.5.5.13.29.29
1171	5.13.17.17.73
1191	5.53.53.101
1247	13.37.53.61
1343	29.37.41.41
1419	5.5.5.89.181
1491	5.37.61.197
1589	5.41.109.113
1609	5.41.73.173
1613	13.17.61.193
1637	13.13.101.157
1681	5.5.17.61.109
1691	5.13.29.37.41
1749	5.17.17.29.73
1839	5.37.101.181
1861	5.37.97.193
1999	5.41.101.193
2019	5.5.41.41.97
2041	5.73.101.113
2055	13.17.97.197
2081	5.5.5.5.13.13.41
2131	5.5.13.89.157
2201	5.53.101.181
2445	13.29.101.157
2479	5.73.113.149
2601	5.13.29.37.97
2625	5.13.53.73.137
2771	5.73.109.193
2989	5.13.13.97.109
3171	5.13.37.37.113
3199	5.13.29.61.89
3413	29.41.97.101
3721	5.17.29.41.137
4031	5.5.13.17.17.173
4061	5.17.17.101.113
4109	5.13.13.13.29.53
4315	13.41.181.193
4419	5.5.5.13.61.197
4541	5.17.41.61.97
4979	5.29.37.97.157
5097	13.61.181.181
5169	5.5.5.37.53.109
5381	5.5.13.41.41.53
5459	5.13.17.149.181
5761	5.17.37.61.173
5869	5.5.89.113.137
6081	5.5.5.29.101.101
7781	5.5.29.37.37.61
9039	5.29.37.97.157
9779	5.37.73.73.97
10519	5.37.37.53.61
10527	41.109.137.181
10831	5.5.5.5.17.61.181
11511	5.17.41.193.197
13331	5.5.5.5.5.29.37.53
13581	5.5.5.17.29.41.73
13889	5.41.89.97.109
13911	5.13.13.29.53.149
14451	5.29.73.109.181
16069	5.5.13.37.109.197
16985	17.29.53.61.181
17421	5.13.137.173.197
18511	5.13.17.17.17.29.37
18563	13.37.41.101.173
18685	17.29.73.89.109
24061	5.29.29.37.61.61
24261	5.17.17.37.101.109
27665	13.37.41.197.197
29019	5.5.37.53.89.193
29981	5.5.37.41.137.173
31669	5.5.5.5.13.17.53.137
58397	13.17.29.37.73.197
59279	5.13.53.73.89.157
88789	5.13.17.29.37.61.109
103481	5.5.13.13.17.29.53.97
132081	5.5.5.5.5.5.5.13.89.193
170529	5.17.29.41.53.61.89
213331	5.5.5.5.5.13.13.17.37.137
383229	5.17.17.61.89.97.193
728391	5.13.73.97.101.101.113
1934581	5.5.5.5.13.17.17.17.29.53.61
2446081	5.5.5.13.17.17.37.53.73.89
4056181	5.5.13.17.29.41.101.137.181
5106581	5.5.5.13.17.37.41.61.101.101
14836119	5.5.13.13.17.17.17.17.29.137.157

13	1
17	15. 19. 53. 831.
29	9. 49. 1169
37	11. 729. 18511
41	31. 51. 359. 1343. 1691. 2081
53	25. 81. 131. 1035. 1141. 4109. 5381. 13331
61	27. 339. 461. 1247. 7781. 10519. 24061. 1934581
73	3. 149. 441. 581. 879. 1171. 1749. 13581
89	5. 183. 529. 3199. 170529. 2446081
97	79. 661. 2019. 2601. 4541. 9779. 103481
101	21. 181. 223. 1191. 3413. 6081. 5106581
109	63. 155. 281. 717. 1681. 2989. 5169. 13889. 18685. 24261*. 88789
113	7. 219. 233. 911. 1589. 2041. 3171. 4061. 728391
137	115. 159. 389. 433. 707. 937. 2625. 3721. 5869. 31669*. 213331
149	95. 393. 989. 2479. 13911
157	67. 381. 1637. 2131. 2445. 4979. 9039. 59279. 1483619
173	121. 467. 571. 1609. 4031. 5761. 18563. 29981
181	29. 391. 1419. 1839. 2201. 5097. 5459. 10527. 10831. 14451*. 16985. 4056181
193	69. 455. 1613. 1861. 1999. 2771. 4315. 29019. 132081. 383229
197	85. 309. 703. 873. 1097. 1491. 2055. 4419. 11511. 16069*. 17421. 27665. 58397

Zerlegbare $aa+81$.				1807	5.53.61.101	10118	5.37.53.53.197
1	41	323	5.53.197	2008	5.13.17.41.89	10577	5.29.41.97.97
2	5.17	352	5.137.181	2009	13.29.53.101	11563	5.5.13.29.41.173
4	97	376	17.53.157	2041	97.109.197	12143	5.29.29.89.197
5	53	389	17.61.73	2051	29.29.41.61	12565	13.17.29.109.113
7	5.13	406	17.89.109	2125	13.29.53.113	15233	5.29.73.97.113
8	5.29	409	13.41.157	2138	5.5.5.13.29.97	16237	5.5.5.17.17.41.89
10	181	427	5.17.29.37	2293	5.17.157.197	16522	5.17.29.37.41.73
11	101	461	13.13.17.37	2312	5.5.29.73.101	16777	5.13.13.17.97.101
13	5.5.5.	472	5.29.29.53	2450	13.17.157.173	17888	5.5.5.5.37.101.137
17	5.37	487	5.5.5.13.73	2531	17.29.73.89	17972	5.13.29.53.53.61
19	13.17	491	17.41.173	2623	5.41.97.173	18887	5.5.29.37.61.109
20	13.37	533	5.157.181	2705	17.29.41.181	18974	13.13.17.29.29.149
22	5.113	547	5.173.173	2888	5.5.5.5.5.17.157	19558	5.13.13.41.61.181
23	5.61	553	5.13.13.181	2906	13.37.97.181	20362	5.5.5.113.149.197
28	5.173	566	13.157.157	3088	5.5.13.13.37.61	23368	5.13.13.53.89.137
32	5.13.17	575	37.41.109	3238	5.5.41.53.193	24083	5.13.157.157.181
37	5.5.29	578	5.13.53.97	3322	5.13.41.41.101	24499	13.17.61.113.197
38	5.5.61	587	5.5.61.113	3347	5.13.17.37.137	24958	5.17.37.37.53.101
40	41.41	617	5.13.29.101	3503	5.13.13.53.137	29153	5.13.17.29.89.149
43	5.193	631	13.17.17.53	3517	5.13.17.29.193	29242	5.17.17.61.89.109
49	17.73	662	5.5.89.197	3791	29.37.37.181	29765	17.37.41.89.193
50	29.89	683	5.13.37.97	3988	5.5.29.97.173	30218	5.13.41.41.61.137
53	5.17.17	694	53.61.149	4010	13.13.17.29.193	31487	5.5.5.5.5.41.53.73
58	5.13.53	733	5.17.29.109	4112	5.5.5.17.73.109	31843	5.13.17.17.137.197
59	13.137	737	5.5.5.41.53	4354	17.61.101.181	34763	5.5.5.5.17.29.37.53
62	5.5.157	763	5.5.5.17.137	4388	5.5.5.13.17.17.41	35137	5.5.17.73.101.197
71	13.197	797	5.17.37.101	4429	29.41.73.113	35783	5.13.17.17.173.197
79	29.109	862	5.5.5.5.29.41	4648	5.13.29.73.157	37147	5.13.17.41.97.157
83	5.17.41	877	5.13.61.97	4657	5.101.109.197	38201	13.17.17.29.37.181
91	37.113	920	17.17.29.101	4837	5.5.41.101.113	44987	5.5.5.13.29.109.197
95	29.157	1018	5.17.89.137	5083	5.29.41.41.53	46963	5.5.13.29.29.53.73
97	5.13.73	1037	5.5.137.157	5162	5.5.61.101.173	56387	5.5.13.17.53.61.89
98	5.13.149	1060	13.13.61.109	5557	5.13.17.89.157	57037	5.5.13.17.37.73.109
101	53.97	1108	5.41.53.113	5747	5.109.157.193	60743	5.13.17.17.17.53.109
112	5.5.5.101	1118	5.53.53.89	5792	5.13.13.29.37.37	61337	5.5.41.109.113.149
122	5.41.73	1168	5.29.97.97	5833	5.17.17.61.193	69107	5.17.53.53.73.137
124	13.29.41	1201	37.101.193	6013	5.5.5.5.5.5.13.89	69244	13.13.29.37.137.193
128	5.37.89	1229	13.13.41.109	6233	5.13.37.41.197	79813	5.5.13.17.53.73.149
137	5.5.13.29	1243	5.17.61.149	6458	5.17.37.89.149	86528	5.17.29.97.173.181
139	89.109	1265	73.97.113	6532	5.5.37.113.157	87263	5.5.5.5.5.13.17.37.149
163	5.5.13.41	1277	5.17.53.181	6689	13.97.113.157	97577	5.29.61.73.73.101
188	5.5.13.109	1313	5.5.29.29.41	6883	5.13.13.17.17.97	98063	5.5.73.97.157.173
191	101.181	1436	13.41.53.73	7097	5.29.29.53.113	121933	5.13.41.97.149.193
202	5.13.17.37	1447	5.17.109.113	7160	53.61.101.157	132683	5.17.29.109.181.181
215	13.13.137	1463	5.5.13.37.89	7793	5.13.29.89.181	157723	5.13.13.29.53.61.157
217	5.53.89	1475	13.13.41.157	8158	5.13.13.17.41.113	168703	5.37.37.61.173.197
247	5.41.149	1487	5.5.5.5.29.61	8273	5.29.53.61.73	181508	5.41.41.101.197.197
248	5.109.113.	1585	53.137.173	8638	5.5.5.13.17.37.73	195787	5.5.13.17.29.37.53.61
253	5.13.17.29	1639	41.181.181	9028	5.13.73.89.193	237322	5.13.13.13.17.17.113.157
268	5.73.197	1645	13.29.37.97	9101	41.73.101.137	269861	13.37.41.101.101.181
287	5.5.17.97	1685	17.37.37.61	9295	61.73.89.109	278297	5.5.13.37.97.113.113
292	5.13.13.101	1702	5.17.173.197	9562	5.5.13.29.89.109	297212	5.5.13.97.113.137.193
313	5.5.37.53	1703	5.29.73.137	9587	5.5.13.13.73.149	314387	5.5.41.41.73.89.181
317	5.89.113	1787	5.5.13.17.17.17	9607	5.17.29.97.193	327737	5.5.5.5.13.13.29.89.197

349487	5.5.5.29.29.53.97.113
474013	5.5.5.13.17.17.29.73.113
609161	13.73.73.113.137.173
647665	29.37.53.97.193.197
934862	5.5.5.13.13.17.17.37.53.73
1125533	5.13.41.89.101.137.193
1158413	5.5.29.37.41.61.73.137
1880912	5.5.13.17.37.53.53.61.101
2023513	5.5.5.5.37.41.97.113.197
2092285	17.17.37.37.37.41.41.89
2898587	5.5.17.29.73.137.173.197
3559861	13.37.61.89.109.113.197
4034153	5.13.13.17.29.41.53.89.101
4676188	5.5.17.37.37.37.89.101.113
4802183	5.73.97.109.113.137.193
4947916	17.17.37.53.61.73.89.109
6678737	5.5.5.17.17.29.41.53.97.101
9578563	5.5.13.17.17.17.29.61.109.149
34928797	5.13.13.17.29.37.53.53.73.193
59554033	5.13.13.13.37.61.73.89.101.109

5	13
13	7
17	2. 19. 32. 53. 1787
29	8. 37. 137. 253
37	17. 20. 202. 427. 461. 5792
41	1. 40. 83. 124. 163. 862. 1313. 4388
53	5. 58. 313. 472. 631. 737. 5083. 34763
61	23. 38. 1487. 1685. 2051. 3088. 17972. 195787
73	49. 97. 122. 389. 487. 1436. 8273. 8638. 16522. 31487. 46963. 934862
89	50. 128. 217. 1118. 1463. 2008. 2531. 6013. 16237. 56387. 2092285
97	4. 101. 287. 578. 683. 877. 1168. 1645. 2138. 6883. 10577
101	11. 112. 292. 617. 797. 920. 1807. 2009. 2312. 3322. 16777. 24958. 97577. 1880912. 4034153. 6678737
109	79. 139. 188. 406. 575. 733. 1060. 1229. 4112. 9295. 9562. 18887. 29242. 57037. 60743. 4947916. 59554033
113	22. 91. 248. 317. 587. 1108. 1265. 1447. 2125. 4429. 4837. 7097. 8158. 12565. 15233. 278297. 349487. 474013. 4676188
137	59. 215. 763. 1018. 1703. 3347. 3503. 9101. 17888. 23368. 30218. 69107. 1158413
149	98. 247. 694. 1243. 6458. 9587. 18974. 29153. 61337. 79813. 87263. 9578563
157	62. 95. 376. 409. 566. 1037. 1475. 2888. 4648. 5557. 6532. 6689. 7160. 37147. 157723. 237322
173	28. 491. 547. 1585. 2450. 2623. 3988. 5162. 11563. 98063. 609161
181	10. 191. 352. 533. 553. 1277. 1639. 2705. 2906. 3791. 4354. 7793. 19558. 24083. 38201. 86528. 132683. 269861. 314387
193	43. 1201. 3238. 3517. 4010. 5747. 5833. 9028. 9607. 29765. 69244. 121933. 297212. 1125533. 4802183. 34928797
197	71. 268. 323. 662. 1702. 2041. 2293. 4657. 6233. 10118. 12143. 20362. 24499. 31843. 35137. 35783. 44987. 168703. 181508. 327737. 647665. 2023513. 2898587. 3559861

BEMERKUNGEN.

Diesem zweiten Bande von Gauss Werken sind alle Abhandlungen, Aufsätze und Tafeln aus dem Gebiete der Höheren Arithmetik, soweit diè sieben Sectionen der *Disqu. Arithm.* sie nicht schon umfassen, einverleibt, und zwar die in den '*Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis*' (in Quart) veröffentlichten fünf Abhandlungen, die in den '*Göttingischen Gelehrten Anzeigen*' (in Octav) erschienenen (von Gauss nicht unterzeichneten, aber durch die Acten der Göttinger Universitäts-Bibliothek in Betreff der Autorschaft verificirten) Anzeigen sowohl dieser eignen als auch einiger anderer nichteigner Schriften, und eine Auswahl aus dem Handschriftlichen Nachlasse.

Zur bessern Uebersicht der Gegenstände in einem so umfangreichen Bande sind die Lehrsätze auf gleiche Weise durch den Druck ausgezeichnet. Zum leichtern Gebrauch sowohl der ältern Ausgaben wie der vorliegenden ist bei den Verweisungen auf die Disqu. Arithm. statt der Nummer der Seite die der Artikel gesetzt, so wie bei den Angaben von Abhandlungen statt des Orts ihrer Veröffentlichung deren eigner Titel. Die Note, die dem Art. 2 der Abhandlung '*Theorematis arithmetici demonstratio nova*' ursprünglich beigegeben war und die eine Berichtigung des Art. 139 Disqu. Arithm. enthielt, ist dort der betreffenden Stelle eingefügt. Die Note auf Seite 91 ist einer handschriftlichen Notiz entlehnt. Ausserdem unterscheidet sich die vorliegende Ausgabe von den früheren nur durch die Berichtigung einiger Druckfehler.

Die *Tafel des quadratischen Characters der Primzahlen* ist nach der Weise der in Art. 99 beschriebenen und (in Art. 331) zur Zerlegung der Zahlen vorzugsweise angewandten Tabula II der Disqu. Arithm. gedruckt. Die Handschrift unter dem Titel '*Quadratorum numeris primis divisorum residua lateralia*' hat in den Schriftzügen am meisten Aehnlichkeit mit der des zweiten Theiles der Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche, sie enthält an der Stelle der den Quadratischen Rest anzeigenden horizontalen Striche kleine Kreise, von denen immer diejenigen durch Linien verbunden sind, die in benachbarten horizontalen oder verticalen Reihen vorkommen. Bei der Correctur wurde ich auf mehrere Fehler

aufmerksam, habe dann bei einer einmaligen Vergleichung mit Jacobi's *Canon Arithmeticus* 190 Abweichungen in den Angaben der Charactere und nach directer Bestimmung diese in Uebereinstimmung mit jenen gedruckten Tafeln gefunden, dem entsprechend ist hier die Ausgabe berichtigt.

Von der *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche* ist hier der erste Theil der Tabula III der Disqu. Arithm. ähnlich eingerichtet, er enthält für die Primzahlen und deren Potenzen p^π, welche zwischen 3 und 463 liegen, die Mantissen (1), (2) .. (0) der Decimalbrüche von $\frac{10.r}{p^\pi}$, $\frac{10.rr}{p^\pi} \ldots \frac{10}{p^\pi}$, worin r die Einheit bedeutet, also (1) = (2) = .. (0) wird, wenn 10 Primitivwurzel von p^π ist, sonst aber r die kleinste unter denjenigen Primitivwurzeln von p^π bezeichnet, für welche als Basis der Index von 10 den kleinsten Werth annimmt. Die von 1 verschiedenen Werthe von r hat man zur Erleichterung des Gebrauchs auf Seite 420 der Tafel beigefügt. Die Handschrift, in der auch noch nicht die Unterscheidungsziffern der verschiedenen Perioden angegeben sind, entspricht äusserlich am meisten der Analysis residuorum und scheint in der Zeit dem hier als zweiten Theil der ganzen Tafel hingestellten Stücke voraufzugehen. Dieser zweite Theil enthält für die Primzahlen und deren Potenz p^π zwischen 467 und 997 die Mantissen der Decimalbrüche von $\frac{100}{p^\pi}$. Die Handschrift gibt die Theiler in abnehmender Reihenfolge und schliesst mit den Worten: *Explicitus October* 11. 1795. Im Drucke ist beim Theiler 191 Periode (1) die 71ste Ziffer hinzugefügt und beim Theiler 829 eine zwischen der 151 und 152sten Ziffer stehende Zahl fortgelassen.

Die von Gauss selbst in einem Briefe (Seite 444) erläuterte *Tafel der Frequenz der Primzahlen* besteht für ihren ersten Theil, welche die Anzahl der Primzahlen in jedem der 1000 ersten Chiliaden gibt, in einer Handschrift von Gauss, es finden sich im Nachlass aber nicht die in dem Briefe angedeuteten Abzählungen der der ersten Million angehörenden Hunderte, die eine bestimmte Anzahl von Primzahlen enthalten. Der andere Theil der Tafel nemlich für die zweite und dritte Million ist einer von Goldschmidt allein herrührenden Handschrift entlehnt.

Die *Tafel der Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen* gibt die Anzahl der Genera und Classen so wie den Index der Irregularität für die negativen Determinanten in den Hunderten 1 bis 30, 43, 51, 61, 62, 63, 91 bis 100, 117 bis 120, dann noch in einer besondern Zusammenstellung für die des 1. 3. und 10ten Tausend, für die 800 ersten von der Form $-(15n+7)$ und $-(15n+13)$, sowie für einige sehr grosse Determinanten, ferner für die positiven Determinanten des 1. 2. 3. 9. 10ten Hundert und für einige andere. Die Handschrift besteht aus einzelnen Zetteln, auf denen die Tafeln verschiedenartig eingerichtet sind; z. B. ist bei den ältern das Wort Ordo statt Genus gebraucht, so bei den einzelnen Centaden mit Ausnahme der 9. und 10. positiver Determinanten, dann aber auch bei einzelnen vorläufigen Zusammenstellungen in Chiliaden. Zur leichtern Uebersicht ist hier überall die Bezeichnung der Disqu. Arithm. gewählt, auch die grössten und kleinsten Quotienten aus der Anzahl der Classen dividirt durch den Determinanten, sowie die Anzahl der Determinanten, für welche der Quotient innerhalb gewisser Grenzen fällt, sind wegen Mangel an Raum nicht unter die einzelnen Centaden gesetzt sondern am Ende der Tafel für die negativen Determinanten zusammengestellt. Aus einigen übrig gebliebenen Aufzeichnungen scheint hervorzugehen, dass Gauss zuerst die Classen für die Determinanten berechnet hat, die demselben Hundert und demselben Reste bei dem Theiler 15 angehören. Die Determinanten dieser Abtheilungen sind dann nach der Anzahl der Genera und Classen und zuletzt alle die demselben Hundert angehörigen auf die hier wiedergegebene Weise geordnet. Den Tafeln der einzelnen Centaden sind manche spätere Berichtigungen eingefügt, nicht aber den Zusammenstellungen in Tausenden. Zeitbestimmungen enthalten nur die beiden Tafeln mit den Determinanten der Form $-(15n+7)$ und $-(15n+13)$ nemlich resp. *'Expl. Jn. Febr. 1801'* und *'Expl. 27 Febr. 1807.'*

In diesen Tafeln habe ich unter anderen die folgenden Fehler bemerkt, denen ich hier zur leichtern Controle die Periodenzahlen der Fundamentalclassen wie z. B. 4. 4. 2 bei dem Determinanten -11713 und die durch Formen der resp. Fundamentalclassen dargestellten Zahlen wie 31. 37. 2 beifüge, indem als Fundamentalclassen solche Classen genommen werden, die in Vereinigung mit den Classen ihrer Perioden durch Composition jede eigentlich primitive Classe des Determinanten einmal und nur einmal hervorbringen.

Es sind schon die Angaben fortgelassen:				und hinzugefügt:			
Centas 9	G. IV …	3 ..	— 827 [21::3]	Centas 9	G. IV …	3 ..	— 828 [6.2::31.23]
26	IV	14	— 2587 [24::11]	26	IV	14	— 2586 [28.2::7.2]
26	VIII	6	— 2564 [56::3]	26	VIII	6	— 2565 [12.2.2::7.2.5]
91	I	111	— 9059 [117::5]	91	I	117	— 9059 [117::5]
120	IV	32	— 11956 *2* [36.2::11.49]	120	IV	32	— 11966 *2* [32.4::5.83]
1	I	2	+ 37 [3::3]	1	I	3	+ 37 [3::3]
2	I	2	+ 101 [3::4]	2	I	3	+ 101 [3::4]

Bei der Tafel für Centas 3 und der letzten auf Seite 476, welche in der Handschrift mit einer von der hier abgedruckten äusserlich verschiedenen Aufzeichnung der Centas 1 und 2 vereinigt vorkommen, sind die zwölf Abtheilungen statt mit I. Ordo unicus. 1; I. O. 2; I. O. 3; I. O. 4; II. Ordines duo. 1. 1; II. O. 1. 2; II. O. 2. 2; II. O. 3. 3; III. Ordines quatuor. 1. 1. 1. 1; III. O. 1. 1. 2. 2; III. O. 2. 2. 2. 2; IV. Ordines octo 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1; hier auf die sonst angewandte Weise mit G. I. 1; G. I. 3; G. I. 5; G. I. 7; G. II. 1; G. II. 2; G. II. 3; G. II. 5; G. IV. 1; G. IV. 2; G. IV. 3; G. VIII. 1; bezeichnet. Die Rechnung ergibt nemlich z. B. 269. I. 3 [3::4]; 235. IV. 3 [6. 2::3. 5]; 401. I. 5 [5::5]; 577. I. 7 [7::3]; 727. II. 5 [10::3]. (Genera I statt Genus I auf Seite 469 ist ein Druckfehler).

In Folge von Druckfehlern ist auszulassen:				und hinzuzufügen:			
Centas 12.	G. IV ….	5 …	— 1237	Centas 12.	G. IV ….	5 …	— 1137
27	IV	16	— 2624 *3*	27	IV	16	— 2624 *2* [16. 4::3. 16]
93	IV	16	— 9216	93	IV	16	— 9216 *2* [16. 4::5. 9]
118	VIII	4	— 11713 *3*	118	VIII	4	— 11713 *2* [4. 4. 2::31. 37. 2]

Ausserdem ist noch auszulassen:				und hinzuzufügen:			
Centas 10.	G. II ….	9 …	— 972 [6.3::7.13]	Centas 10.	G. II ….	9 …	— 972 *3* [6. 3::7. 13]
17	IV	4	— 1660 [10,2::11.5]	17	IV	12	— 1700 [24.2::3.17]
20	IV	12	— 1982 [24::3]	20	IV	12	— 1937 [24. 2::7.2]

Centas 21.	G. IV ….	6 …	— 2096 [30.2::3.4]	Centas 21.	G. IV ….	6 …	— 2097 [12.2::47.2]
23	IV	9	— 2221 [18::10]	23	IV	9	— 2224 [18.2::5.16]
24	IV	12	— 2376 [12.2.2::5.8.8]	24	IV	12	— 2366 [24.2::3.2]
29	IV	9	— 2887 [25::8]	29	IV	9	— 2885 [18.2::3.5]
61	IV	7	— 6028 [12.2::13.4]	61	IV	6	— 6028 [12.2::13.4]
96	VIII	13	— 9594 [20.2.2::31.2.13]	96	VIII	13	— 9546 [26.2.2::5.3.37]
118	IV	25	— 11780 [16.4.2::3.8.19]	118	IV	25	— 11750 [50.2::3.47]
118	VIII	16	— 11780 [16.4.2::3.8.19]	118	VIII	16	— 11780 *2* [16.4.2::3.8.19]
119	VIII	16	— 11844 [24.2.2::5.9.7]	119	VIII	16	— 11840 *2* [16.4.2::3.16.5]
Millias I	G. II	3	— 541 [10::11]	Millias I.	G. II	5	— 415 [10::13
I	II	4	— 415 [10::13]	I	II	5	— 541 [10::11]
I	II	8	— 527 [18::3]	I	II	9	— 459 *3* [6.3::5.9]
I	II	8	— 722 [18::3]	I	II	9	— 527 [18::3]
I	II	9	— 194 [20::5]	I	II	9	— 722 [18::3]
I	II	9	— 459 [6.3::5.9]	I	II	9	— 972 *3* [6.3::7.13]
I	II	9	— 972 [6.3::7.13]	I	II	10	— 194 [20::5]
I	II	11	— 842 [26::13]	I	II	13	— 842 [26::13]
I	IV	3	— 784 [8.2::5.4]	I	IV	2	— 532 [4.2::13.7]
I	IV	4	— 532 [4.2::13.7]	I	IV	4	— 784 [8.2::5.4]
I	IV	5	— 425 [12.2::3.17]	I	IV	6	— 425 [12.2::3.17]
I	IV	5	— 608 [12.2::13.27]	I	IV	6	— 608 [12.2::13.27]
I	IV	5	— 629 [18.2::5.2]	I	IV	9	— 629 [18.2::5.2]
III	II	15	— 2578 [16::13]	III	II	15	— 2518 [30::19]
X	I	111	— 9059 [117::5]	X	I	117	— 9059 [117::5]
formae $-(15n+13)$	IV	4	— 2788 *2* [8.2::19.17]	formae $-(15n+13$	IV	4	— 2788 [8. 2::19. 17]

Die Tafeln *zur Cyclotechnie* geben für 2452 Zahlen von der Form $aa+1$, $aa+4$, $aa+9$, …. $aa+81$ die sämmtlichen ungeraden Primtheiler p neben den zugehörigen a und zwar in solchen Fällen, wo die Primtheiler alle unter 200 liegen, nur dann werden $aa+1$ u.s.f. zerlegbar genannt.

Zur leichtern Uebersicht beim Gebrauche hat Gauss für jede Tafel, aus der sich die vollständigen Zerlegungen von Zahlen einer der besonderen Formen bestimmen lassen, eine Hülfstafel aufgestellt, die neben jeder Primzahl p solche Zahlen a enthält, deren um 1 oder 4… vermehrtes Quadrat die Zahl p zum grössten Primtheiler hat.

Der Hauptzweck der Tafeln ist die Erleichterung, die sie für die genaue Berechnung der Bögen gewähren, deren Cotangenten gegebene rationale Zahlen sind. Zunächst können nemlich mit ihrer Hülfe die Bögen für kleine Cotangenten aus den Bögen für grosse Cotangenten zusammengesetzt und dadurch die noch erforderlichen Berechnungen der Reihen, welche die Bögen in ihren Cotangenten ausdrücken, auf ein sehr geringes Maass beschränkt werden. Die hierauf hinzielenden Entwickelungen, die sich in dem handschriftlichen Nachlass finden, sind wenig ausgedehnt, die folgende ist die am weitesten fortgeführte. Es bezeichnen darin

$$[2]\,[5]\,[13]\,[17]\,[29]\,[37]\,[41]\,[53]\,[61]\ldots[197]\,(18)\,(57)\,(239)\,\left(\tfrac{79}{3}\right)\ldots$$

die Bögen der Cotangenten

$$1 \quad 2 \quad \frac{3}{2} \quad 4 \quad \frac{5}{2} \quad 6 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{6}{5} \ldots 14 \quad 18 \quad 57 \quad 239 \quad \frac{79}{3}\ldots$$

Mit Hülfe der Tafeln ist durch Zerlegung von $18+i$, $57+i$, $239+i$ in ihre complexe Primfactoren

$$\begin{aligned}(18) &= 2[2]-2[5]-[13]\\ (57) &= -[2]+3[5]-[13]\\ (239) &= 3[2]-4[13]\end{aligned}$$

gefunden und hieraus

$$\begin{aligned}[2] &= 12(18)+8(57)-5(239)\\ [5] &= 7(18)+5(57)-3(239)\\ [13] &= 9(18)+6(57)-4(239)\end{aligned}$$

ferner mit Hülfe der Tafeln

$$\begin{aligned}(268) &= -2[5]+2[13]-[17]\\ (38) &= -[5]+2[17]\end{aligned}$$

und hieraus durch Elimination von [17] und Einsetzen der zuvor erhaltenen Werthe von [5], [13]

$$(38)+2(268) = (18)-(57)-(239)$$

Die Elimination von (18) hat dann die neue Bestimmung ergeben

$$\begin{aligned}[2] &= 12(38)+20(57)+7(239)+24(268)\\ [5] &= 7(38)+12(57)+4(239)+14(268)\\ [13] &= 9(38)+15(57)+5(239)+18(268)\\ [17] &= 4(38)+6(57)+2(239)+7(268)\end{aligned}$$

Nach folgeweiser Anwendung der Cotangenten 117, 327, 882, 18543, 307, 278, 378, 829, 993, 2943, 447, 606, 931, 1143, 1772, 6118, 34208. 44179, 85353, 485298, 17772, 9466, 330182, 5257, 114669, 12943 sind endlich [2] [5] . . . [61] durch (5257), (9466) . . . (485298) ausgedrückt und deren Coëfficienten in den folgenden Spalten zusammengestellt:

	5257	9466	12943	34208	44179	85353	114669	330182	485298
2	+ 2805	− 398	+ 1950	+ 1850	+ 2021	+ 2097	+ 1484	+ 1389	+ 808
5	+ 1656	− 235	+ 1151	+ 1092	+ 1193	+ 1238	+ 876	+ 820	+ 477
13	+ 2100	− 298	+ 1460	+ 1385	+ 1513	+ 1570	+ 1111	+ 1040	+ 605
17	+ 875	− 124	+ 608	+ 577	+ 630	+ 654	+ 463	+ 433	+ 252
29	+ 1359	− 193	+ 945	+ 896	+ 979	+ 1016	+ 719	+ 673	+ 391
37	+ 590	− 84	+ 410	+ 389	+ 425	+ 441	+ 312	+ 292	+ 170
41	+ 2410	− 342	+ 1675	+ 1589	+ 1736	+ 1802	+ 1275	+ 1193	+ 694
53	+ 994	− 141	+ 691	+ 655	+ 716	+ 743	+ 526	+ 492	+ 286
61	+ 2481	− 352	+ 1725	+ 1637	+ 1788	+ 1855	+ 1313	+ 1229	+ 715

Von der Richtigkeit dieser Gleichungen, welche zur Bestimmung von [2] [5] . . . . [61] dienen können, überzeugt man sich unmittelbar durch die aus obigen Tafeln sich ergebenden Zerlegungen

$$\begin{array}{rllllllllll}
(5257) = & [2] & +2[5] & -[13] & +[17] & . & . & -[41] & . & -[61]\\
(9466) = & 2[2] & . & . & . & -[29] & -3[37] & . & . & -[61]\\
(12943) = & [2] & -4[5] & +3[13] & . & . & . & . & . & -[61]\\
(34208) = & 2[2] & -[5] & -2[13] & +[17] & +[29] & . & . & -2[53] & .\\
(44179) = & 3[2] & . & -3[13] & -2[17] & -[29] & . & . & +[53] & .\\
(85353) = & -[2] & -[5] & +[13] & -[17] & . & -[37] & +2[41] & -[53] & .\\
(114669) = & -3[2] & . & . & +[17] & . & +[37] & . & +2[53] & +2[61]\\
(330182) = & -4[2] & +5[5] & +[13] & . & +[29] & -[37] & -[41] & . & +[61]\\
(485298) = & -2[2] & -[5] & +4[13] & . & -2[29] & +[37] & . & +[53] & .
\end{array}$$

Die von den Rechnern bis jetzt angewandten Arten zur Bestimmung von $\frac{\pi}{4} = (1)$ stellt GAUSS in der folgenden Uebersicht zusammen

MACHIN	$(1) = 4(5)-(239)$	auch CLAUSEN
EULER	$= (2)+(3)$	(EULER à GOLDBACH 1746 Mai 28)
VEGA	$= 5(7)+2\left(\frac{79}{3}\right)$	(VEGA Thesaurus logar. p. 633)
VEGA	$= 2(3)+(7)$	auch CLAUSEN (Astr. Nachr. B. 25. S. 209)
RUTHERFORD	$= 4(5)-(70)+(99)$	(Philos. Trans. 1841. p. 283)
DASE	$= (2)+(5)+(8)$	(CRELLE Journal. B. 27. S. 198)
GAUSS. 1.	$= 12(18)+8(57)-5(239)$	
GAUSS. 2.	$= 12(38)+20(57)+7(239)+24(268)$	

Die ersten Rechnungen für die Tafeln gehören der Zeit der Ausarbeitung der *Disquiss. Arr.* an, sie sind dann besonders in den Jahren 1846 und 47 gefördert. Am 21. Juli 1847 waren 2283 Zerlegungen nach der hier wiedergegebenen Ordnung in Tafeln gebracht, die übrigen 169 sind später berechnet, und ich habe sie diesem Abdruck (der sich vom Original in der Einrichtung nur durch die des leichtern Satzes wegen statt der Potenzen angewandte Schreibweise der Wiederholung der Factoren unterscheidet) mit eingeordnet.

Die Manuscripte mit diesen letzten Rechnungen scheinen die Resultate in der Form zu enthalten, wie sie unmittelbar gefunden wurden. Die Reihenfolge, in welcher dabei die Zahlen a auftreten, lässt vermuthen, dass nur für die kleinern die Theiler von $aa+1$ u. s. f. aufgesucht wurden, und dass die grössern Zahlen sich aus diesen durch Anwendung besonderer Kunstgriffe ergeben haben. Aufgezeichnet ist aber nur folgende Regel: *Aus drei Zahlen a, $2a-n$, $2a+n$ findet sich eine vierte*

$$\frac{4a^3-(nn-3)a}{nn+1}$$

Diese ist immer eine ganze Zahl für $n = 0$ und $n = 1$, sonst nur

$$\begin{aligned}&\textit{für } a \equiv 0 \textit{ und } \equiv \pm\sqrt{-1} \bmod (nn+1) \textit{ wenn } n \textit{ gerade}\\ \textit{und } &\textit{für } a \equiv 0 \textit{ und } \equiv \pm\sqrt{-1} \bmod \frac{nn+1}{2} \textit{ wenn } n \textit{ ungerade}\end{aligned}$$

Beispiele	$a = 253,\ n = 6,$	1750507
	$a = 294,\ n = 11,$	832902
	$a = 119,\ n = 1,$	3370437
	$a = 57,\ n = 3,$	74043
	$a = 123,\ n = 9,$	90657

Zu der vierten Zahl gehören nemlich keine andern Primtheiler als zu den ersten dreien und davon sind auch nur diejenigen ungeraden Primtheiler ausgeschlossen, welche der Zahl n zugehören.

Die Handschriften der hier abgedruckten Abhandlungen und Tafeln bleiben mit dem übrigen Nachlasse vereinigt und werden auf der Göttinger Universitäts-Bibliothek zur Einsicht zugänglich sein.

SCHERING.

INHALT.

GAUSS WERKE BAND II. HÖHERE ARITHMETIK.

GÖTTINGEN,

GEDRUCKT IN DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTS-DRUCKEREI

W. FR. KAESTNER.