LXXII.

ÜBER EINE BESONDERE GATTUNG VON RATIONALEN CURVEN MIT IMAGINÄREN DOPPELPUNKTEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1900, VI, S. 74—78; vorgelegt am 1. Februar; ausgegeben am 8. Februar 1900.)

In einer analytischen Untersuchung bin ich zu folgendem Problem [74
geführt worden:

Es soll eine rationale Function z der unabhängigen Variablen t, $z = F(t)$, von folgender Beschaffenheit gebildet werden.

I. Die Function $F(t)$ soll nur für endliche nicht reale Werthe unendlich werden, welche sämmtlich in einer und derselben durch die reale Axe in der t-Ebene ausgeschnittenen Halbebene sich befinden.

II. Die der realen t-Axe in der z-Ebene entsprechende Curve C soll durch eine endliche Anzahl vorgeschriebener Punkte hindurchgehen. Endlich sollen

III. keinem Punkte der Curve C zwei verschiedene oder zusammenfallende reale Lösungen t der Gleichung $z = F(t)$ entsprechen.

Diese Aufgabe kann natürlicherweise verschiedenartige Lösungen zulassen. Sind $z_1, z_2, \dots, z_n$ die vorgeschriebenen Punkte in der z-Ebene, so könnte man beispielsweise n endliche nicht reale und von einander verschiedene Werthe $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ in einer und derselben Halbebene t willkürlich als Unendlichkeitsstellen der Function wählen und ebenso n willkürliche reale und von einander verschiedene Werthe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ auf der realen t-Axe den Punkten

$z_1, z_2, \dots, z_n$ zuordnen. Dann wird die Function

$$(1.)\qquad {}^{(n)}F(t) = \frac{c_1}{t-\varrho_1} + \frac{c_2}{t-\varrho_2} + \cdots + \frac{c_n}{t-\varrho_n},$$

wo

$$(2.)\qquad c_\varkappa = -\frac{{}^{(n)}g(\varrho_\varkappa)}{{}^{(n)}f'(\varrho_\varkappa)}\left\{\frac{{}^{(n)}f(\beta_1)}{{}^{(n)}g'(\beta_1)}\,\frac{z_1}{\beta_1-\varrho_\varkappa} + \frac{{}^{(n)}f(\beta_2)}{{}^{(n)}g'(\beta_2)}\,\frac{z_2}{\beta_2-\varrho_\varkappa} + \cdots + \frac{{}^{(n)}f(\beta_n)}{{}^{(n)}g'(\beta_n)}\,\frac{z_n}{\beta_n-\varrho_\varkappa}\right\},$$

wenn

$$(3.)\qquad \begin{aligned} {}^{(n)}f(x) &= (x-\varrho_1)(x-\varrho_2)\dots(x-\varrho_n), \\ {}^{(n)}g(x) &= (x-\beta_1)(x-\beta_2)\dots(x-\beta_n) \end{aligned}$$

gesetzt und mit dem rechts oben stehenden Accent die Ableitung nach t be- 75] zeichnet wird, den Bedingungen I und II Genüge leisten. Es würde sich nun darum handeln, nachzuweisen, dass $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ so gewählt werden können, dass auch die Bedingung III erfüllt wird.

Diese Aufgabe kann u. A. durch eine Methode gelöst werden, welche wir im Folgenden nur andeuten wollen, indem wir uns die nähere Begründung für eine andere Gelegenheit vorbehalten.

Es sei vorausgesetzt, dass die Existenz einer den Bedingungen I, II, III genügenden Function

$$z = {}^{(m)}F(t) = \frac{c_1}{t-\varrho_1} + \frac{c_2}{t-\varrho_2} + \cdots + \frac{c_m}{t-\varrho_m},$$

wo die $c_\varkappa$ durch die Gleichungen (2.) und (3.) für $n = m$ definirt sind, erwiesen sei.

Ist alsdann ζ ein von $z_1, z_2, \dots, z_m$ verschiedener Punkt in der z-Ebene, ϱ ein von $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$ verschiedener in derselben Halbebene t gelegener nicht realer Werth und β ein von $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ verschiedener Punkt der realen t-Axe, so geht die der realen t-Axe der Gleichung

$$(4.)\qquad z = {}^{(m+1)}F(t) = {}^{(m)}F(t) + \delta\,\frac{{}^{(m)}g(t)}{h(t)}$$

gemäss in der z-Ebene entsprechende Curve C' durch die Punkte $z_1, z_2, \dots, z_m, \zeta$, und es entsprechen denselben bez. die realen Werthe $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \beta$ auf der realen t-Axe, wenn

$$(5.)\qquad h(t) = {}^{(m)}f(t)(t-\varrho),$$

$$(6.)\qquad \delta = \frac{h(\beta)}{{}^{(m)}g(\beta)}(\zeta - {}^{(m)}F(\beta))$$

gesetzt wird.

Es lässt sich nun beweisen, dass in Folge der über ${}^{(m)}F(t)$ gemachten Voraussetzung die Function

$$H(t, t_1) = \frac{{}^{(m)}F(t) - {}^{(m)}F(t_1)}{\dfrac{{}^{(m)}g(t)}{h(t)} - \dfrac{{}^{(m)}g(t_1)}{h(t_1)}}$$

nicht für reale Werthe von t und t_1, mögen diese von einander verschieden oder einander gleich sein, verschwinden kann.

Der Modul dieser Function besitzt daher für reale Werthe von t und t_1 eine von Null verschiedene untere Grenze, welche wir mit M bezeichnen wollen. Hieraus folgt, dass die Gleichung (4.) ebenfalls der Bedingung III Genüge leistet, solange $\operatorname{mod}\delta < M$, d. h. solange der Abstand des Punktes ζ vom Punkte ${}^{(m)}F(\beta)$ eine gewisse angebbare Grenze nicht überschreitet.

Die Gleichung (4.) behält dieselbe Eigenschaft, wenn ζ aus einer [76 Anfangslage $\zeta^{(0)}$ fortschreitet und zugleich β, ϱ von den Anfangslagen $\beta = \beta^{(0)}$, $\varrho = \varrho^{(0)}$ ausgehend Lagenänderungen erfahren so lange, bis entweder neben den Gleichungen

$$(7.)\qquad \delta = -H(t, t_1),$$

$$(8.)\qquad \delta_0 = -H_0(t, t_1),$$

wo δ_0 der conjugirte Werth von δ ist und $H_0(t, t_1)$ aus $H(t, t_1)$ hervorgeht, wenn die Coefficienten von H durch ihre conjugirten Werthe ersetzt werden, noch die Gleichung

$$(9.)\qquad K(t, t_1) = \frac{\partial H}{\partial t}\,\frac{\partial H_0}{\partial t_1} - \frac{\partial H}{\partial t_1}\,\frac{\partial H_0}{\partial t} = 0$$

durch endliche Werthe von t und t_1 befriedigt wird; oder so lange bis den Gleichungen

$$(10.)\qquad {}^{(m)}F(t) + \delta\,\frac{{}^{(m)}g(t)}{h(t)} = 0,$$

$$(11.)\qquad {}^{(m)}F_0(t) + \delta_0\,\frac{{}^{(m)}g(t)}{h_0(t)} = 0,$$

wo ${}^{(m)}F_0(t)$, $h_0(t)$ bez. aus ${}^{(m)}F(t)$ und $h(t)$ hervorgehen, wenn die Coefficienten derselben durch ihre conjugirten Werthe ersetzt werden, endliche Werthe Genüge leisten; oder bis den beiden Gleichungen

$$\delta = -\frac{{}^{(m)}F'(t)\,h(t)^2}{{}^{(m)}g'(t)\,h(t) - {}^{(m)}g(t)\,h'(t)}, \tag{12.}$$

$$\delta_0 = -\frac{{}^{(m)}F_0'(t)\,h_0(t)^2}{{}^{(m)}g'(t)\,h_0(t) - {}^{(m)}g(t)\,h_0'(t)}, \tag{13.}$$

endliche Werthe von t genügen; oder endlich, bis

$$\delta + \lim_{t=\infty} ({}^{(m)}F(t)\,t) = 0. \tag{14.}$$

Die Elimination von t und t_1 aus den Gleichungen (7.), (8.), (9.) möge nun ergeben

$$S(\delta, \delta_0, \varrho, \varrho_0) = 0$$

oder

$$R(\zeta, \zeta_0, \beta, \varrho, \varrho_0) = 0, \tag{15.}$$

wo ζ_0 den conjugirten Werth von ζ darstellt. In gleicher Weise folge durch Elimination von t aus den Gleichungen (10.), (11.)

$$S_1(\delta, \delta_0, \varrho, \varrho_0) = 0$$

oder

$$R_1(\zeta, \zeta_0, \beta, \varrho, \varrho_0) = 0, \tag{16.}$$

77] endlich durch Elimination von t aus den Gleichungen (12.) und (13.) das Resultat

$$S_2(\delta, \delta_0, \varrho, \varrho_0) = 0$$

oder

$$R_2(\zeta, \zeta_0, \beta, \varrho, \varrho_0) = 0. \tag{17.}$$

Keine der drei Functionen R, R_1, R_2 besitzt einen Factor $\omega(\zeta, \zeta_0)$, dessen sämmtliche Coefficienten gleichzeitig von $\beta, \varrho, \varrho_0$ unabhängig sind, und es können die Gleichungen (14.) bis (17.) nicht für $\delta = 0$, $\delta_0 = 0$ identisch in Bezug auf ϱ, ϱ_0 erfüllt werden. Ist nun z_{m+1} ein in der z-Ebene vorgeschriebener Punkt, so werden im Allgemeinen die Ausgangswerthe $\zeta^{(0)}, \beta^{(0)}, \varrho^{(0)}$ so gewählt werden können, dass, wenn ζ eine von $\zeta^{(0)}$ nach z_{m+1} hinführende Curve Γ in der z-Ebene beschreibt, β und ϱ sich so ändern können, dass die durch die Gleichungen (14.) bis (17.) gebundene Mannigfaltigkeit $\zeta, \zeta_0, \beta, \varrho, \varrho_0$ entweder gar nicht oder nur eine gerade Anzahl Mal durchschnitten wird.

Ist alsdann für $\zeta = z_{m+1}$

$$\beta = \beta_{m+1}, \quad \varrho = \varrho_{m+1},$$

so wird die Function

$$z = {}^{(m)}F(t) + \delta_{m+1}\frac{{}^{(m)}g(t)}{h(t)}, \tag{18.}$$

wo

$$\delta_{m+1} = \frac{h(\beta_{m+1})}{{}^{(m)}g(\beta_{m+1})}(z_{m+1} - {}^{(m)}F(\beta_{m+1})), \tag{19.}$$

die Eigenschaft haben, dass für $t = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m, \beta_{m+1}$ z bez. die Werthe $z_1, z_2, \ldots, z_m, z_{m+1}$ annimmt und dass die Bedingung III für dieselbe noch erfüllt ist.

Da nun für $m = 1$ in der Gleichung

$$z = \frac{c_1}{t - \varrho_1} \tag{20.}$$

jedem Werthe von z nur ein Werth von t zugehört, so wird also durch successive Anwendung des angegebenen Verfahrens für eine beliebige Zahl n die Herstellung einer rationalen Function $F(t)$ ermöglicht sein, welche den im Eingange angegebenen Bedingungen I, II, III Genüge leistet.

Für etwa mögliche Ausnahmefälle kann auch das folgende Verfahren eingeschlagen werden.

Wir schalten zwischen der Punktreihe $z_1, z_2, \ldots, z_m$ einerseits und z_{m+1} andererseits eine endliche Anzahl von Punkten $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ ein, indem wir denselben entsprechend p willkürlich gewählte nicht reale mit $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ in derselben Halbebene t gelegene Grössen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p$ und ebenso dem [78 z_{m+1} entsprechend ϱ_{m+1} als Unendlichkeitsstellen zuordnen. Wir gehen nunmehr mit Hülfe von den Gleichungen (4.) und (5.) analogen Gleichungen von der Curve C successive zu den Curven $C_1, C_2, \ldots, C_p$ über, derart, dass die Curve $C_\varkappa$ die Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_m, \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\varkappa$ in sich aufgenommen hat, und bezeichnen zuletzt die Curve, welche bei dem Übergange von ζ_p nach z_{m+1} entstanden ist, mit C_{m+1}.

In die Gleichung

$$z = F_\varkappa(t), \tag{21.}$$

welche eine Curve $C_\varkappa$ darstellt, sind ausser den Unendlichkeitsstellen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m$ noch die Unendlichkeitsstellen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\varkappa$ eingetreten. Zuletzt erhalten wir bei dem Übergange von ζ_p nach z_{m+1} eine Gleichung der Form

$$(22.)\quad z = F(t) = \frac{c_1}{t-\varrho_1} + \frac{c_2}{t-\varrho_2} + \cdots + \frac{c_m}{t-\varrho_m} + \frac{e_1}{t-\sigma_1} + \frac{e_2}{t-\sigma_2} + \cdots + \frac{e_p}{t-\sigma_p} + \frac{c_{m+1}}{t-\varrho_{m+1}},$$

welche zunächst den Bedingungen $z_\varkappa = F(\beta_\varkappa)$, für $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, m, m+1$, Genüge leistet. Es lässt sich nunmehr beweisen, dass $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_p$ so nahe an einander und an z_m einerseits und z_{m+1} andererseits jedoch in endlicher Anzahl so gewählt werden können, dass für jede der Gleichungen (21.), (22.) die Bedingung III erfüllt wird.

ANMERKUNG.

Die nähere Begründung der in der vorliegenden Notiz skizzirten Methoden hat mein Vater nicht mehr gegeben. Im handschriftlichen Nachlass habe ich nicht genügendes Material zu einer Construction der Beweisführung gefunden.

Vgl. übrigens die Anmerkung 1) zur Abh. LVIII, S. 116 dieses Bandes. R. F.

LXXIII.

ZUR THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1901, II, S. 34—48; vorgelegt am 10. Januar; ausgegeben am 17. Januar 1901.)

Die folgende Notiz enthält einen Auszug aus einer demnächst zu ver- [34
öffentlichenden Arbeit. Man hatte in den bisherigen auf die linearen Differentialgleichungen bezüglichen Untersuchungen sich darauf beschränkt, die analytische Form der Lösungen derselben in der Umgebung je einer singulären Stelle der Differentialgleichung festzustellen. Für viele tiefergehende Probleme, welche auf die Natur der der Differentialgleichung zugehörigen Substitutionsgruppe Bezug haben, ist es von Wichtigkeit, auch eine analytische Form für ein Fundamentalsystem von Lösungen aufzustellen, welches aus der Fundamentalgleichung für einen **beliebigen** Umlauf entspringt. Mit dieser Aufstellung beschäftigt sich der erste Theil dieser Notiz.

Mit Hülfe der erhaltenen Resultate wird alsdann ein auf die Beschaffenheit der Gruppe von Substitutionen bezüglicher Satz hergeleitet für den Fall, dass ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung einem Systeme von homogenen Relationen mit constanten Coefficienten Genüge leistet.

Um aus diesem Satze weitere Folgerungen zu ziehen, wird vorläufig der Fall in's Auge gefasst, dass eine solche Relation mit der besonderen Eigenschaft stattfindet, dass dieselbe durch die Substitutionen der Gruppe ungeändert bleibt. In einer späteren Mittheilung sollen diese Folgerungen einer näheren Erörterung unterworfen werden.

1.

In den Grundlagen der Theorie der linearen Differentialgleichungen wird Folgendes*) bewiesen:

Es sei

$$\text{(A.)}\qquad \frac{d^n y}{dz^n}+p_1\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}}+\cdots+p_n y=0,$$

35] wo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ innerhalb eines Gebietes T der complexen Variablen z eindeutige und überall bestimmte Functionen von z sind. Ist U ein Umlauf von z innerhalb T und

$$\text{(B.)}\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11}-\omega & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\omega & \ldots & \alpha_{n2} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn}-\omega \end{vmatrix}=0$$

die zu diesem Umlaufe gehörige Fundamentalgleichung, so giebt es ein Fundamentalsystem von Lösungen von folgender Beschaffenheit: Sind $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ bez. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$-fache Wurzeln der Gleichung (B.), derart also, dass:

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_\nu=n,$$

so zerfallen die zu ω_k gehörigen λ_k Elemente des Fundamentalsystems derart in Gruppen von bez. $\mu_{k_1}, \mu_{k_2}, \ldots, \mu_{k_\varrho}$ Elementen, wo also:

$$\mu_{k_1}+\mu_{k_2}+\cdots+\mu_{k_\varrho}=\lambda_k,$$

dass die einer solchen Gruppe zugehörigen Elemente Umlaufsrelationen der Gestalt

$$\text{(C.)}\qquad \begin{cases} \bar{y}_1=\omega y_1, \\ \bar{y}_2=\omega y_2+y_1, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \bar{y}_\mu=\omega y_\mu+y_{\mu-1}\,{}^{**)} \end{cases}$$

genügen.

Diese Resultate sind selbstverständlich nicht bloss für einen Umlauf um eine der Unendlichkeitsstellen der Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — für welche

*) Crelles Journal, Bd. 66, S. 131 ff.; Bd. 68, S. 361 ff.[1]).

**) Vergl. Hamburger, Crelles Journal, Bd. 76, S. 121.

1) Abh. VI, S. 170 ff. und Abh. VII, S. 213 ff., Band I dieser Ausgabe. R. F.

sie in der Theorie zunächst Anwendung gefunden haben — sondern für jeden beliebigen Umlauf U gültig.

In dem Falle, dass der Umlauf U um eine der Unstetigkeitsstellen $z=a$ der Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vollzogen wird, ist nachgewiesen worden, dass die analytische Form der zu einer Gruppe (C.) zugehörigen Integralelemente die folgende ist:

Sei

$$r=\frac{1}{2\pi i}\log\omega$$

und setzen wir

$$\text{(1.)}\qquad f(t)=\left[\psi_{\mu-1}+\binom{\mu-1}{1}\psi_{\mu-2}t+\binom{\mu-1}{2}\psi_{\mu-3}t^2+\cdots+\psi_0 t^{\mu-1}\right](z-a)^r,$$

wo $\psi_{\mu-1}, \psi_{\mu-2}, \ldots, \psi_0$ in der Umgebung von a eindeutige Functionen von z sind, und wo

$$\text{(2.)}\qquad t=\frac{1}{2\pi i}\log(z-a).$$ [36

Alsdann ist

$$\text{(D.)}\qquad \begin{cases} y_\mu=f(t), \\ y_{\mu-1}=\dfrac{1}{\mu-1}\dfrac{\partial f(t)}{\partial t}, \\ y_{\mu-2}=\dfrac{1}{(\mu-1)(\mu-2)}\dfrac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ y_1=\dfrac{1}{(\mu-1)!}\dfrac{\partial^{\mu-1}f(t)}{\partial t^{\mu-1}}\,{}^{*)}. \end{cases}$$

2.

Wir gehen nach diesen Vorbereitungen dazu über, eine analytische Form der zu einer Gruppe (C.) gehörigen Lösungen der Gleichung (A.) auch in dem Falle aufzustellen, dass U nicht mehr einen Umlauf um einen einzigen singulären Punkt a, sondern vielmehr einen beliebigen Umlauf bedeute.

*) Vergl. Crelles Journal, Bd. 66, S. 136 ff., Bd. 68, S. 355 ff.[1]) und Jürgens, Crelles Journal, Bd. 80, S. 151 ff.; vergl. auch Heffter, lineare Differentialgleichungen, S. 107.

1) Abh. VI, S. 175 ff. und Abh. VII, S. 206, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Sind die sämmtlichen Gruppen (C.) eingliedrig, so ist entweder

$$\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = 1,$$

alsdann bleiben

$$y_1 = \varphi_1, \quad y_2 = \varphi_2, \quad \ldots, \quad y_n = \varphi_n$$

beim Umlauf U ungeändert, oder wenn z. B.

$$\omega_1 = e^{2\pi i r_1}$$

von Eins verschieden, so setzen wir

$$y_1^{\frac{1}{r_1}} = \zeta;$$

alsdann ist

$$y_1 = \zeta^{r_1}\varphi_1, \quad y_2 = \zeta^{r_2}\varphi_2, \quad \ldots, \quad y_n = \zeta^{r_n}\varphi_n, \tag{1a.}$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ beim Umlaufe U ungeändert bleiben.

Wenn nicht sämmtliche zu einem beliebigen Umlauf U gehörigen Gruppen (C.) eingliedrig sind, so sei η der Repräsentant einer mehrgliedrigen Gruppe, d. h. dasjenige Element derselben, welches sich bei dem Umlaufe U mit der Wurzel ω der Fundamentalgleichung multiplicirt; ferner sei η_2 das zweite Element derselben Gruppe, so dass

$$\bar{\eta}_2 = \omega\eta_2 + \eta_1. \tag{2.}$$

37] Wir setzen nunmehr

$$\xi = e^{2\pi i\omega\frac{\eta_2}{\eta_1}},$$

$$t = \frac{1}{2\pi i}\log\xi,$$

dann wird ξ bei dem Umlaufe U ungeändert bleiben, während t sich um Eins vermehrt.

Sind nunmehr $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ die zu einer der Gruppen (C.) gehörigen Elemente des Fundamentalsystems und ω_1 die zugehörige Wurzel der Fundamentalgleichung und werde wieder

$$\omega_1 = e^{2\pi i r_1}, \tag{2.}$$

gesetzt, alsdann ist in Folge der ersten Gleichung der bezüglichen Gruppe (C.)

$$y_1 = \xi^{r_1}\varphi_1, \tag{3.}$$

wo φ_1 beim Umlaufe U ungeändert bleibt. Aus der zweiten Gleichung (C.)

$$\bar{y}_2 = \omega_1 y_2 + y_1$$

folgt, dass $\frac{y_2}{y_1}$ nach dem Umlauf sich um $\frac{1}{\omega_1}$ vermehrt. Die gleiche Eigenschaft kommt auch $\frac{t}{\omega_1}$ zu; es ist also $\frac{y_2}{y_1} - \frac{t}{\omega_1}$ gegen den Umlauf U unempfindlich. Hieraus folgern wir analog wie bei dem entsprechenden besonderen Fall für den Umlauf um einen einzigen singulären Punkt*):

$$y_2 = \xi^{r_1}\{\varphi_{20} + \varphi_{21}t\}, \tag{4.}$$

wo $\varphi_{20}, \varphi_{21}$ bei dem Umlauf U ungeändert bleiben. Und so fortfahrend erhält man

$$y_\mu = \xi^{r_1}\{\varphi_{\mu 0} + \varphi_{\mu 1}t + \cdots + \varphi_{\mu,\mu-1}t^{\mu-1}\}, \tag{5.}$$

wo $\varphi_{\mu 0}, \varphi_{\mu 1}, \ldots, \varphi_{\mu,\mu-1}$ bei dem Umlauf U ungeändert bleiben.

Man kann alsdann analog wie für den Umlauf um einen einzigen singulären Punkt folgern, dass die Functionen φ_k sich als lineare homogene Functionen von μ linear unabhängigen unter ihnen mit constanten Coefficienten darstellen lassen, und dass namentlich die Coefficienten der höchsten Potenzen von t sich von φ_1 nur um einen constanten Factor unterscheiden.

3. [38

Wir machen jetzt Gebrauch von folgendem Satze:

Ist

$$y = f(z, u) \tag{1.}$$

eine Lösung der Gleichung (A.), wo u eine willkürliche Grösse bedeutet, von welcher die Coefficienten dieser Gleichung unabhängig sind, so sind auch die sämmtlichen partiellen Ableitungen von y nach der Grösse u Lösungen derselben Differentialgleichung**).

Wir haben***) nachgewiesen, dass eine ganze rationale Function von $\log(z-a)$, deren Coefficienten abgesehen von einem allen gemeinsamen Factor

*) CRELLES Journal, Bd. 66, S. 135[1]).

**) Vergl. KOEHLER, Inauguraldissertation, Heidelberg 1879.

***) CRELLES Journal, Bd. 68, S. 356[2]).

[1]) Abh. VI, S. 174, Band I dieser Ausgabe. R. F.

[2]) Abh. VII, S. 208, Band I dieser Ausgabe. R. F.

$(z-a)^r$ in der Umgebung von $z=a$ eindeutige Functionen sind, nur dann identisch verschwindet, wenn die einzelnen Coefficienten verschwinden.

I. Ein analoger Satz gilt auch für einen Ausdruck

$$F = \xi^r\{A_0 + A_1 t + \cdots + A_m t^m\}, \tag{2.}$$

worin ξ, t dieselbe Bedeutung wie in voriger Nummer haben und $A_0, A_1, \ldots, A_m$ Functionen von z sind, welche bei dem Umlaufe U ungeändert bleiben. Das identische Verschwinden von F erfordert, dass $A_0, A_1, \ldots, A_m$ identsch Null sind. Der Beweis ist ganz so wie bei dem Specialumlauf um $z=a$ zu führen. Dieser Satz gestattet auch eine Erweiterung*), welche der für einen speciellen Umlauf um eine einzige singuläre Stelle gemachten analog ist, dass das Verschwinden einer Summe von Ausdrücken der Form (2.), worin die Exponenten r sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, das Verschwinden aller einzelnen Summanden zur Folge hat.

II. Ist daher

$$y = F(z, t) \tag{3.}$$

eine ganze rationale Function von z und t, deren Coefficienten bis auf einen allen gemeinsamen Factor ξ^r bei dem Umlauf U ungeändert bleiben, eine Lösung der Gleichung (A.), so ist auch

$$y = F(z, t+\lambda) \tag{4.}$$

für einen willkürlichen Werth von λ eine Lösung der Gleichung (A.).

Der Beweis ist wieder analog wie für den Specialumlauf um $z=a$ zu führen**).

39] Hieraus ergiebt sich aber analog wie für den Specialumlauf um $z=a$:

III. Ist

$$y = F(z, t) \tag{5.}$$

*) Vergl. Thomé, Crelles Journal, Bd. 74, S. 194 und Heffter, a. a. O., S. 238.

**) Vergl. Heffter, a. a. O., S. 107.

eine Lösung der Gleichung (A.) so ist auch $\frac{\partial^k y}{\partial t^k}$ eine Lösung derselben Gleichung.

Wir können daher wie für den Specialumlauf um $z=a$ in No. 1 die in den Gleichungen (3.) bis (5.) No. 2 enthaltene Integralgruppe durch das System

$$\text{(E.)}\quad \begin{cases} y_\mu = f(t), \\ y_{\mu-1} = \dfrac{1}{\mu-1}\dfrac{\partial f(t)}{\partial t}, \\ y_{\mu-2} = \dfrac{1}{(\mu-1)(\mu-2)}\dfrac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1 = \dfrac{1}{(\mu-1)!}\dfrac{\partial^{\mu-1} f(t)}{\partial t^{\mu-1}} \end{cases}$$

ersetzen, wo

$$f(t) = \xi^r\left\{\psi_{\mu-1} + \binom{\mu-1}{1}\psi_{\mu-2}t + \binom{\mu-1}{2}\psi_{\mu-3}t^2 + \cdots + \psi_0 t^{\mu-1}\right\}, \tag{5.}$$

und $\psi_{\mu-1}, \psi_{\mu-2}, \ldots, \psi_0$ bei dem Umlaufe U ungeändert bleiben.

Die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ genügen daher den Gleichungen:

$$y_{\mu-\varkappa} = \frac{1}{\mu-\varkappa}\frac{\partial y_{\mu-\varkappa+1}}{\partial t}. \tag{F.}$$

Wir wollen im Folgenden diese Gestalt der Lösungen als die kanonische bezeichnen.

4.

Wir setzen jetzt voraus, dass ein Fundamentalsystem $w_1, w_2, \ldots, w_n$ von Lösungen der Gleichung (A.) einer gewissen Anzahl homogener Relationen des Grades ν und mit constanten Coefficienten Genüge leiste. Die Anzahl der linear unabhängigen derartigen Relationen ist eine endliche; wir bezeichnen dieselbe mit ϱ. Die Relationen seien

$$\text{(G.)}\quad \begin{cases} \varphi_1(w_1, w_2, \ldots, w_n) = 0, \\ \varphi_2(w_1, w_2, \ldots, w_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_\varrho(w_1, w_2, \ldots, w_n) = 0. \end{cases}$$

40] Es möge $w_1, w_2, \ldots, w_n$ das kanonische Fundamentalsystem sein, welches zu einem willkürlichen Umlaufe U gehört und welches gruppenweise in voriger Nummer durch die Gleichungen (E.) definirt worden ist. Wir lassen eine Abänderung in der Reihenfolge der in einer Gruppe enthaltenen Integralelemente in (E.) derart eintreten, dass wir

$$(1.)\qquad \begin{cases} y_\mu = w_1, \\ y_{\mu-1} = w_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ y_1 = w_\mu \end{cases}$$

setzen. Die Gleichung (F.) nimmt daher die Gestalt an:

$$(\mathrm{F}_1.)\qquad w_{\varkappa+1} = \frac{1}{\mu-\varkappa}\,\frac{\partial w_\varkappa}{\partial t}.$$

Wir wollen die Elemente $w_1, w_2, \ldots, w_n$ in folgender Reihenfolge schreiben:

$$(2.)\qquad \begin{aligned} & w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_{\mu_1};\ w_{\mu_1+1},\ w_{\mu_1+2},\ \ldots,\ w_{\mu_1+\mu_2};\ \ldots; \\ & w_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{\lambda-1}+1},\ w_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{\lambda-1}+2},\ \ldots,\ w_{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_{\lambda-1}+\mu_\lambda}, \end{aligned}$$

derart, dass wir die zu der $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda$-gliedrigen Gruppe bez. gehörigen Elemente zusammenstellen.

Substituiren wir in (G.) für $w_1, w_2, \ldots, w_n$ ihre analytischen Ausdrücke aus (E.), so müssen nach Satz I., No. 3 (Verallgemeinerung) in den Resultaten die Coefficienten der einzelnen Potenzen von t verschwinden.

Hieraus folgt

$$(3.)\qquad \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial t} = 0, \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots, \varrho)$$

d. h. nach Gleichung (F.)

$$(4.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial w_1}(\mu_1-1)\,w_2 + \dfrac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial w_2}(\mu_1-2)\,w_3 + \cdots + \dfrac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial w_{\mu_1-1}}\,1\,w_{\mu_1} \\ + \dfrac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial w_{\mu_1+1}}(\mu_2-1)\,w_{\mu_1+2} + \dfrac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial w_{\mu_1+2}}(\mu_2-2)\,w_{\mu_1+3} + \cdots + \dfrac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial w_{\mu_1+\mu_2-1}}\,1\,w_{\mu_1+\mu_2} \\ + \text{u. s. w.} = 0. \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \varrho) \end{cases}$$

Nach der über $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\varrho$ oben gemachten Voraussetzung muss demnach identisch für beliebige $w_1, w_2, \ldots, w_n$

$$(\mathrm{H.})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial w_1}(\mu_1-1)\,w_2 + \dfrac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial w_2}(\mu_1-2)\,w_3 + \cdots + \dfrac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial w_{\mu_1-1}}\,1\,w_{\mu_1} \\ + \dfrac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial w_{\mu_1+1}}(\mu_2-1)\,w_{\mu_1+2} + \dfrac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial w_{\mu_1+2}}(\mu_2-2)\,w_{\mu_1+3} + \cdots + \dfrac{\partial\varphi_\varkappa}{\partial w_{\mu_1+\mu_2-1}}\,1\,w_{\mu_1+\mu_2} \\ + \text{u. s. w.} \\ \qquad = M_{\varkappa 1}\varphi_1 + M_{\varkappa 2}\varphi_2 + \cdots + M_{\varkappa\varrho}\varphi_\varrho \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \varrho) \end{cases}$$

sein, wo die Grössen $M_{\varkappa l}$ von $w_1, w_2, \ldots, w_n$ unabhängig sind.

Um die allgemeine Lösung dieses Systems partieller Differential- [41 gleichungen zu finden, haben wir nach Jacobi*) zunächst das System der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(\mathrm{H}'.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dw_1}{(\mu_1-1)\,w_2} = \dfrac{dw_2}{(\mu_1-2)\,w_3} = \cdots = \dfrac{dw_{\mu_1-1}}{1\,w_{\mu_1}} \\ = \dfrac{dw_{\mu_1+1}}{(\mu_2-1)\,w_{\mu_1+2}} = \dfrac{dw_{\mu_1+2}}{(\mu_2-2)\,w_{\mu_1+3}} = \cdots = \dfrac{dw_{\mu_1+\mu_2-1}}{1\,w_{\mu_1+\mu_2}} \\ = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ = \dfrac{d\varphi_1}{N_1} = \dfrac{d\varphi_2}{N_2} = \cdots = \dfrac{d\varphi_\varrho}{N_3} \end{cases}$$

zu integriren, wo

$$N_\varkappa = M_{\varkappa 1}\varphi_1 + M_{\varkappa 2}\varphi_2 + \cdots + M_{\varkappa\varrho}\varphi_\varrho$$

gesetzt ist.

Ein System von Gleichungen der Form

$$(5.)\qquad \frac{dw_1}{(\mu-1)\,w_2} = \frac{dw_2}{(\mu-2)\,w_3} = \cdots = \frac{dw_{\mu-1}}{1\,w_\mu}$$

oder das identische System

$$(6.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dw_1}{d\vartheta} = (\mu-1)\,w_2, \\ \dfrac{dw_2}{d\vartheta} = (\mu-2)\,w_3, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dw_{\mu-1}}{d\vartheta} = w_\mu, \\ \dfrac{dw_\mu}{d\vartheta} = 0 \end{cases}$$

*) Crelles Journal, Bd. 2, S. 322; Gesammelte Werke, Bd. 4, S. 8.

besitzt die allgemeine Lösung

$$(7.)\quad \begin{cases} w_1 = w_\mu \vartheta^{\mu-1} + \binom{\mu-1}{1} A_{\mu-2}\vartheta^{\mu-2} + \binom{\mu-1}{2} A_{\mu-3}\vartheta^{\mu-3} + \cdots + \binom{\mu-1}{\mu-1} A_0, \\ w_2 = \dfrac{1}{\mu-1}\dfrac{dw_1}{d\vartheta}, \\ w_3 = \dfrac{1}{(\mu-1)(\mu-2)}\dfrac{d^2 w_1}{d\vartheta^2}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ w_{\mu-1} = \dfrac{1}{(\mu-1)!}\dfrac{d^{\mu-1} w_1}{d\vartheta^{\mu-1}}, \end{cases}$$

wo $A_{\mu-2}, A_{\mu-3}, \ldots, A_0$ willkürliche Constanten bedeuten.

42] Aus diesen Gleichungen folgt

$$(8.)\qquad \vartheta^{\mu-k} = B_{k0} + B_{k1} w_1 + B_{k2} w_2 + \cdots + B_{k\mu} w_\mu,$$

wo die B_{ik} sich rational aus den Coefficienten A_i zusammensetzen. Demnach ist

$$(J_1.)\qquad B_{k0} + B_{k1} w_1 + \cdots + B_{k\mu} w_\mu = (B_{\mu-1,0} + B_{\mu-1,1} w_1 + \cdots + B_{\mu-1,\mu} w_\mu)^{\mu-k}.$$
$$(k = 1, 2, \ldots, \mu-2)$$

Diese Gleichungen stellen die $\mu-2$ Integralgleichungen des Systems (5.) oder (6.) dar.

Von den Constanten $A_0, \ldots, A_{\mu-2}$ lässt sich eine willkürlich und so wählen, dass die Gleichungen $(J_1.)$ die Form annehmen:

$$(J_{1'}.)\qquad \begin{cases} \psi_1 = \gamma_1, \\ \psi_2 = \gamma_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \psi_{\mu-2} = \gamma_{\mu-2}, \end{cases}$$

wo ψ_k eine ganze rationale homogene Function der Grössen

$$w_1, w_2, \ldots, w_\mu$$

mit numerischen Coefficienten, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{\mu-2}$ willkürliche Constanten bedeuten.

So ergiebt sich z. B. für $\mu = 4$:

$$(8.)\qquad \begin{aligned} \psi_1 &= w_2 w_4 - w_3^2, \\ \psi_2 &= w_1 w_4^2 - 3 w_2 w_3 w_4 + 2 w_3^3. \end{aligned}$$

Die Functionen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{\mu-2}$ lassen sich in Determinantenform umgestalten*).

$$(J_{2'}.)\qquad \begin{cases} \psi_1 = \begin{vmatrix} w_{\mu-1} & w_\mu \\ w_{\mu-2} & w_{\mu-1} \end{vmatrix}; \qquad \psi_2 = \begin{vmatrix} 2w_{\mu-1} & w_\mu & 0 \\ w_{\mu-2} & w_{\mu-1} & w_\mu \\ w_{\mu-3} & w_{\mu-2} & w_{\mu-1} \end{vmatrix}; \\ \psi_3 = \begin{vmatrix} w_{\mu-2} & w_{\mu-1} & w_\mu \\ w_{\mu-3} & w_{\mu-2} & w_{\mu-1} \\ w_{\mu-4} & w_{\mu-3} & w_{\mu-2} \end{vmatrix}; \quad \psi_4 = \begin{vmatrix} 3w_{\mu-2} & 2w_{\mu-1} & w_\mu & 0 \\ w_{\mu-3} & w_{\mu-2} & w_{\mu-1} & w_\mu \\ w_{\mu-4} & w_{\mu-3} & w_{\mu-2} & w_{\mu-1} \\ w_{\mu-5} & w_{\mu-4} & w_{\mu-3} & w_{\mu-2} \end{vmatrix}; \\ \quad \text{u. s. w.} \\ \psi_{2\lambda} = \begin{vmatrix} (\lambda+1) w_{\mu-\lambda} & \lambda w_{\mu-\lambda+1} & \cdots & w_\mu & 0 \\ w_{\mu-\lambda-1} & w_{\mu-\lambda} & \cdots & w_{\mu-1} & w_\mu \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ w_{\mu-2\lambda-1} & w_{\mu-2\lambda} & \cdots & w_{\mu-\lambda-1} & w_{\mu-\lambda} \end{vmatrix}; \\ \psi_{2\lambda+1} = \begin{vmatrix} w_{\mu-\lambda-1} & w_{\mu-\lambda} & \cdots & w_\mu \\ w_{\mu-\lambda-2} & w_{\mu-\lambda-1} & \cdots & w_{\mu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ w_{\mu-2\lambda-2} & w_{\mu-2\lambda-1} & \cdots & w_{\mu-\lambda-1} \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen (H'.) [43

$$(9.)\qquad \frac{d\varphi_k}{dw_{\mu_1}-1} = \frac{1}{w_{\mu_1}}(M_{\varkappa 1}\varphi_1 + M_{\varkappa 2}\varphi_2 + \cdots + M_{\varkappa\varrho}\varphi_\varrho). \quad (k = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

Sind $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\varrho$ die Wurzeln der Gleichung

$$(10.)\qquad \begin{vmatrix} M_{11}-\sigma & M_{12} & \ldots & M_{1\varrho} \\ M_{21} & M_{22}-\sigma & \ldots & M_{2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ M_{\varrho 1} & M_{\varrho 2} & \ldots & M_{\varrho\varrho}-\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

so werden, wenn diese Gleichung nur ungleiche Wurzeln besitzt, die hieraus sich ergebenden Integralgleichungen:

*) Diese Umformung hat mein Sohn Richard ausgeführt.

$$
(\mathrm{J}'.)\quad \begin{cases}
\varphi_1 e^{-\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}\sigma_1} = \delta_1, \\
\varphi_2 e^{-\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}\sigma_2} = \delta_2, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_\varrho e^{-\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}\sigma_\varrho} = \delta_\varrho,
\end{cases}
$$

wo $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\varrho$ willkürliche Constanten bedeuten.

Bezeichnen wir die den verschiedenen Werthen $\mu_1, \mu_2, \ldots$ aus den Gleichungen (H'.) entsprechenden Integralgleichungen (J.) mit oberen Indices, so ist die Gesammtheit der Integralgleichungen von (H'.)

$$
(\mathrm{J}_2.)\quad \begin{cases}
\psi_1^{(\mu_1)} = \gamma_1^{(\mu_1)},\ \psi_2^{(\mu_1)} = \gamma_2^{(\mu_1)},\ \ldots,\ \psi_{\mu_1-2}^{(\mu_1)} = \gamma_{\mu_1-2}^{(\mu_1)}, \\
\psi_1^{(\mu_2)} = \gamma_1^{(\mu_2)},\ \psi_2^{(\mu_2)} = \gamma_2^{(\mu_2)},\ \ldots,\ \psi_{\mu_2-2}^{(\mu_2)} = \gamma_{\mu_2-2}^{(\mu_2)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\varphi_1 e^{-\sigma_1\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}} = \delta_1,\ \varphi_2 e^{-\sigma_2\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}} = \delta_2,\ \ldots,\ \varphi_\varrho e^{-\sigma_\varrho\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}} = \delta_\varrho.
\end{cases}
$$

I. *Die allgemeine Lösung des Systems der partiellen Differentialgleichungen (H.) ist demnach:*

$$
(\mathrm{K}.)\quad \varphi_k = e^{\sigma_k\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}} f_k\left(\psi_1^{(\mu_1)}, \psi_2^{(\mu_1)}, \ldots, \psi_{\mu_1-2}^{(\mu_1)};\ \psi_1^{(\mu_2)}, \psi_2^{(\mu_2)}, \ldots, \psi_{\mu_2-2}^{(\mu_2)};\ \ldots\right),
\qquad (k = 1, 2, \ldots, \varrho)
$$

wo f_k willkürliche Functionen der Argumente bezeichnen.

Diese Argumente sind algebraische Functionen der in das Differentialgleichungssystem (H.) eintretenden Grössen $w_1, w_2, \ldots$.

Sollen demnach die φ algebraische Functionen von $w_1, w_2, \ldots$ sein, so müssen die f_k selber algebraische Functionen ihrer Argumente und die $e^{\sigma_k\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}}$ von $\frac{w_{\mu_1-1}}{w_{\mu_1}}$ unabhängig werden. Es muss demnach

$$
\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_\varrho = 0
$$

44] sein. Daher muss

$$
(\mathrm{K}_1.)\quad \varphi_k = f_k\left(\psi_1^{(\mu_1)}, \psi_2^{(\mu_1)}, \ldots, \psi_{\mu_1-2}^{(\mu_1)};\ \psi_1^{(\mu_2)}, \psi_2^{(\mu_2)}, \ldots, \psi_{\mu_2-2}^{(\mu_2)};\ \ldots\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, \varrho)
$$

sein, wo f_k die allgemeinste derartige algebraische Zusammensetzung seiner Argumente bedeutet, für welche φ_k eine ganze homogene Function von $w_1, w_2, \ldots$ wird.

Ein ähnlicher Schluss ergiebt sich für den Fall, dass die Gleichung (10.) gleiche Wurzeln hat.

Hieraus ziehen wir den Schluss:

Wenn die φ_k nicht durch die Gleichungen (K_1.) bedingte Gestalten haben, so kann in keiner der zu den Gruppen (C.) gehörigen Integrale eine Potenz von t auftreten. Dieses Resultat besagt:

II. *Wenn zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems $w_1, w_2, \ldots, w_n$ von Lösungen der Gleichung (A.) ein System (G.) homogener Relationen mit constanten Coefficienten stattfindet, und es haben die Functionen φ_k* **nicht** *eine der durch die Gleichungen (K_1.) dargestellten Formen, so werden die Elemente des jedem beliebigen Umlaufe U zugehörigen canonischen Fundamentalsystems in sich selbst multiplicirt mit je einer Constanten (einer Wurzel der Fundamentalgleichung) übergehen.*

5.

Wir setzen jetzt voraus, dass ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (A.) einer homogenen Relation

$$
(\mathrm{L}.)\qquad \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0
$$

mit constanten Coefficienten von der Beschaffenheit genügt, dass

$$
\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n)
$$

für willkürliche Werthe dieser Argumente durch die Substitutionen der Gruppe der Differentialgleichung in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergeht.

In meiner Arbeit (Acta Math., Bd. 1, S. 323—326[1]) habe ich für den Fall $n = 3$ gezeigt, dass die Anzahl der Werthe von z, für welche $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}$ gleichzeitig denselben Werth annehmen können, eine endliche ist, wenn nicht die sämmtlichen Invarianten der Differentialgleichung verschwinden (was darauf hinauskommt, dass der Grad von φ der zweite ist).

[1]) Abh. XL, S. 301—304, Band II dieser Ausgabe. R. F.

45] Nach denselben Principien lässt sich allgemein*) für eine Differentialgleichung n^{ten} Ordnung der Satz beweisen, dass die Anzahl der Werthe der unabhängigen Variablen z, für welche sämmtliche Quotienten $\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}, \dots, \frac{y_n}{y_1}$ denselben Werth annehmen können, eine endliche ist, wenn nicht die sämmtlichen Invarianten der Differentialgleichung verschwinden oder die Covarianten der Form φ gewisse Besonderheiten darbieten.

Sei

$$(\text{M.}) \qquad u = A_0 y + A_1 y' + \dots + A_{n-1} y^{(n-1)},$$

wo $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ willkürlich angenommene rationale Functionen von z sind, und es werde

$$(1.) \qquad u_k = A_0 y_k + A_1 y_k' + \dots + A_{n-1} y_k^{(n-1)}$$

gesetzt, so wird $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ die Eigenschaft haben, nach jedem Umlaufe der Variablen z in sich selbst mit einer Constanten multiplicirt überzugehen, da $u_1, u_2, \dots, u_n$ dieselbe Substitutionsgruppe wie $y_1, y_2, \dots, y_n$ besitzen. Für willkürliche Functionen A_λ kann aber $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ nicht identisch verschwinden, da für einen willkürlichen Werth von z die Werthe $u_1, u_2, \dots, u_n$ willkürlich bestimmt werden können, $\varphi(\vartheta_1, \vartheta_2, \dots \vartheta_n)$ aber nicht für beliebige Werthe der Argumente verschwindet.

Sei daher

$$(\text{N.}) \qquad \varphi(u_1, u_2, \dots, u_n) = \chi(z),$$

so ist $\chi(z)$ eine nicht identisch verschwindende Function von z, deren logarithmische Ableitung rational ist, wenn wir voraussetzen, dass die Differentialgleichung (A.) zu der Klasse gehört, deren Lösungen überall bestimmt sind.

Setzen wir

$$(2.) \qquad \frac{u_2}{u_1} = \eta_1, \quad \frac{u_3}{u_1} = \eta_2, \quad \dots, \quad \frac{u_n}{u_1} = \eta_{n-1},$$

so folgt aus (N.)

$$(3.) \qquad u_1^n \psi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}) = \chi(z).$$

Für zwei Werthe z und z_1, für welche $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ dieselben Werthe erhalten, folgt dann

$$(4.) \qquad \frac{u_1(z)^n}{\chi(z)} = \frac{u_1(z_1)^n}{\chi(z_1)}.$$

*) Vergl. LUDWIG SCHLESINGER, Inauguraldissertation, S. 23 ff., Handbuch, II., 1, S. 232.

Hieraus folgt nach den oben angeführten Schlüssen:

Die Anzahl der Werthe von z, für welche $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ dieselben Werthe annehmen können, ist eine endliche, wenn nicht für jede Wahl der rationalen Functionen $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ die sämmtlichen Invarianten der Differentialgleichung [46

$$(\text{A.}) \qquad \frac{d^n u}{dz^n} + q_1 \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \dots + q_n u = 0,$$

welcher die u Genüge leisten, verschwinden.

Da von den Covarianten der Form $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ hier nicht Gebrauch gemacht worden ist, so kommen die durch das besondere Verhalten der Covarianten entstehenden Ausnahmen in Wegfall.

6.

Sind $z, z_1, z_2, \dots, z_{\nu-1}$ diejenigen Werthe von z, für welche jeder der Quotienten $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ denselben Werth annimmt, so ist*)

$$(1.) \qquad t = (\alpha - z)(\alpha - z_1)(\alpha - z_2) \dots (\alpha - z_{\nu-1}) = \varphi(z, \alpha)$$

eine rationale Function von z, und es entsprechen einem bestimmten willkürlichen Werthe von t genau die Werthe $z, z_1, \dots, z_{\nu-1}$, für welche jeder der Quotienten $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ denselben Werth annimmt.

Substituiren wir in Gleichung (A.)

$$(2.) \qquad u = \lambda v, \quad t = \varphi(z, \alpha),$$

wo

$$\lambda = e^{-\frac{1}{n}\int q_1 dz} \left(\frac{dt}{dz}\right)^{-\frac{1}{2}(n-1)},$$

so geht die Differentialgleichung (A.) über in

$$(\text{B.}) \qquad \frac{d^n v}{dt^n} + r_2(t) \frac{d^{n-2} v}{dt^{n-2}} + \dots + r_n(t) v = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von t sind.

I. Diese Differentialgleichung hat die Eigenschaft, dass ihre Integralquotienten mit den Functionen $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ überein-

*) Acta Math., Bd. 1, S. 335 ff.[1]) LUDWIG SCHLESINGER, Handbuch, II, 1, S. 244 ff.

[1]) Abh. XL, S. 312 ff., Band II dieser Ausgabe. R. F.

stimmen, und dass, wenn t einen willkürlichen Werth der unabhängigen Variablen bedeutet, es nicht noch einen davon verschiedenen Werth t_1 giebt, für welchen jeder der Quotienten $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ denselben Werth annehmen kann.

Nach einem von Herrn Ludwig Schlesinger bewiesenen Satze*) ist für 47] eine solche Differentialgleichung die Substitutionsgruppe der Quotienten $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$, welche der Gesammtheit der Umläufe der unabhängigen Variablen t entspricht, eine discontinuirliche.

Da einem willkürlichen Umlauf der unabhängigen Variablen z ein bestimmter Umlauf der Variablen t entspricht, so lässt sich hiernach diese Eigenschaft auf die Gleichung (A.) übertragen.

Wir erhalten also das Resultat:

II. Die Differentialgleichung (A.), für welche eine Form $\varphi(u_1, u_2, \dots, u_n)$ mit der durch die Gleichung (N.) bestimmten Beschaffenheit existirt, hat die Eigenschaft, dass die den sämmtlichen Umläufen der unabhängigen Variablen z entsprechende Substitutionsgruppe der Quotienten $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ eine discontinuirliche ist, wenn nicht für jede Wahl $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ die sämmtlichen Invarianten der Gleichung (A.) verschwinden.

7.

Sei jetzt $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein einem gewissen Umlaufe U_0 der unabhängigen Variablen z zugehöriges Fundamentalsystem der Gleichung (A.) in der kanonischen Form und so beschaffen, dass

$$(1.)\qquad \begin{cases} \bar{y}_1 = \omega_1 y_1, \\ \bar{y}_2 = \omega_2 y_2, \\ \dots\dots\dots \\ \bar{y}_n = \omega_n y_n, \end{cases}$$

wo $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ die Wurzeln der dem Umlaufe U_0 zugehörigen Fundamentalgleichung bedeuten.

Sei wieder, wie in Gleichung (M.)

$$(2.)\qquad u = A_0 y + A_1 y' + \dots + A_{n-1} y^{(n-1)},$$

*) Handbuch, II, 1, S. 291.

wo die rationalen Functionen $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ so gewählt seien, dass für einen willkürlich angenommenen Werth $z = z_0$

$$(3.)\qquad u_1 = A_0 y_1 + A_1 y_1' + \dots + A_{n-1} y_1^{(n-1)}$$

verschwindet, wobei wir voraussetzen, dass der Modul von ω_1 von keinem der Moduln der übrigen Grössen $\omega_2, \dots, \omega_n$ übertroffen wird.

Durch eine k-malige Wiederholung des Umlaufes U_0 gehen

$$(4.)\qquad \eta_1 = \frac{u_2}{u_1},\quad \eta_2 = \frac{u_3}{u_1},\quad \dots,\quad \eta_{n-1} = \frac{u_n}{u_1}$$

über in

$$(5.)\qquad (\eta_1)_k = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^k \eta_1,\quad (\eta_2)_k = \left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^k \eta_2,\quad \dots,\quad (\eta_{n-1})_k = \left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right)^k \eta_{n-1}.$$

Wenn die Moduln von $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ nicht sämmtlich gleich sind, so würde [48 die k-malige Wiederholung des zu U_0 inversen Umlaufes U_0^{-1} mit wachsenden Werthen von k unzählig viele dem Unendlichen zustrebende Werthe ergeben; da aber $\eta_1 = \infty, \eta_2 = \infty, \dots, \eta_{n-1} = \infty$ für $z = z_0$ dem Werthbereiche $(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1})$ angehören, so würde hiernach die Gruppe der Substitutionen der $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-1}$ nicht discontinuirlich sein.

Dasselbe würde sich auch ergeben, wenn zwar

$$\operatorname{mod}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = 1,\quad \operatorname{mod}\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right) = 1,\quad \dots,\quad \operatorname{mod}\left(\frac{\omega_n}{\omega_1}\right) = 1$$

wäre, aber die Argumente der Quotienten $\frac{\omega_x}{\omega_1}$ nicht rationale Zahlen wären.

Wenn aber eine Gleichung der Form (N.) existirt, so ist nach Satz II. voriger Nummer eine solche Annahme nicht zulässig. Wir erhalten also das Resultat:

Ist $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein einem gewissen Umlaufe U_0 der unabhängigen Variablen z zugehöriges Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (A.) in der kanonischen Form und so beschaffen, dass die Gleichungen (1.) stattfinden, und sind die Voraussetzungen des Satzes II. voriger Nummer erfüllt, so sind die Quotienten $\frac{\omega_2}{\omega_1}, \frac{\omega_3}{\omega_1}, \dots, \frac{\omega_n}{\omega_1}$ Einheitswurzeln.

Wenn wir voraussetzen, dass in Gleichung (A.)

$$(6.)\qquad p_1 = 0,$$

so genügen die Grössen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ überdies der Gleichung

$$\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_n = 1.$$

Alsdann sind die sämmtlichen Grössen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$$

selber Einheitswurzeln.

(Fortsetzung folgt)[1].

---

1) Diese Fortsetzung ist nicht erschienen. R. F.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 322, Zeile 8 y_1 statt y,

„ 10 v. u. $\xi = e^{2\pi i \omega \frac{\eta_2}{\eta_1}}$ statt $\xi = e^{2\pi i \omega} \frac{\eta_2}{\eta_1}$,

„ 323, „ 8 bleiben statt bleibt,

„ 14 wurde »unter ihnen« eingefügt,

„ 325, in der letzten der Gleichungen (E.) $\frac{1}{(\mu-1)!}$ statt $\frac{1}{\mu!}$.

„ 329, Zeile 1 Determinantenform statt Determinantenformen,

„ 332, „ 3 v. u. dieselben Werthe statt denselben Werth,

„ 333, „ 2 und 3 dieselben Werthe statt denselben Werth,

„ 10 v. u. wurde $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ hinzugefügt,

„ 334, „ 10 v. u. der statt die,

„ 335, Gleichungen (4.) und (5.) η_{n-1} statt η_n. R. F.

2) Der in der No. 7, S. 335 gezogene Schluss, dass die Moduln der Quotienten $\frac{\omega_2}{\omega_1}, \cdots, \frac{\omega_n}{\omega_1}$ und für den Fall, wo in der Gleichung (A.) der Coefffcient p_1 verschwindet, auch die Moduln der $\omega_1, \ldots, \omega_n$ gleich Eins sein müssen, wenn die zu den Integralquotienten $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ gehörige Monodromiegruppe eine discontinuirliche ist, wird durch den Umstand widerlegt, dass schon für $n = 2$, also für den Fall projectiver Substitutionen einer Variabeln, eine discontinuirliche Gruppe solcher Substitutionen, z. B. hyperbolische Substitutionen enthalten kann, d. h. Substitutionen der Form

$$\frac{\bar{\eta} - \alpha}{\bar{\eta} - \beta} = K \frac{\eta - \alpha}{\eta - \beta},$$

wo die $\left(\text{dem Quotienten } \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ entsprechende}\right)$ Grösse K einen realen von ± 1 verschiedenen Werth besitzt.

SCH.

LXXIV.

ÜBER GRENZEN, INNERHALB DEREN GEWISSE BESTIMMTE INTEGRALE VORGESCHRIEBENE VORZEICHEN BEHALTEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1902, II, S. 4—10; vorgetragen am 9. Januar; ausgegeben am 16. Januar 1902.)

1. [4

Die folgende Notiz ist ein Auszug aus einem ausführlicheren Aufsatze, welcher demnächst erscheinen wird[1]) und sich mit der folgenden Aufgabe beschäftigt.

Ist $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ eine quadratische Form der unbestimmten Function u und ihrer n ersten Ableitungen $u', \ldots, u^{(n)}$, deren Coefficienten g e g e b e n e reale Functionen der realen Variablen x sind; wird ferner vorausgesetzt, dass die Function u ebenfalls real ist und nebst ihren Ableitungen in der Nähe eines Werthes $x = a$ sich regulär verhält, so soll ein Intervall a bis b angegeben werden, von der Beschaffenheit, dass das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\, dx$$

für j e d e b e l i e b i g e der bezeichneten Functionen u beständig d a s s e l b e bleibt, solange x dem Intervalle a bis b angehört. Wir bedienen uns hierzu des Hülfsmittels, welches dem in der Variationsrechnung bei der Umformung der zweiten Variation angewendeten analog ist.

Wir suchen nämlich einen linearen Differentialausdruck

$$(1.) \qquad Q(u) = u^{(n)} + q_1 u^{(n-1)} + \cdots + q_n u,$$

---

1) Siehe die nachfolgende Arbeit LXXV, S. 345 dieses Bandes. R. F.

dessen Coefficienten reale Functionen von x, so zu bestimmen, dass

$$(2.)\qquad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) - p_{nn} Q(u)^2 = \frac{d}{dx}(\varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)}))$$

wird, wo p_{nn} den Coefficienten von $u^{(n)^2}$ in $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ bezeichnet, und wo φ ebenfalls eine quadratische Form ist, deren Coefficienten wohlbestimmte reale Functionen von x bedeuten.

5] Während jedoch in der Gleichung

$$(3.)\qquad \int_a^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\,dx = \varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=x} - \varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=a} + p_{nn}\int_a^x Q(u)^2\,dx$$

das Vorzeichen des Ausdruckes

$$\varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=x} - \varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=a}$$

in der Variationsrechnung, der Natur der in dieser Disciplin behandelten Probleme entsprechend, ausser Betracht kommt, ist es für unsere Aufgabe unumgänglich nöthig, das Vorzeichen dieses Ausdruckes zu kennen.

In der oben bezeichneten Arbeit führen wir die Untersuchung zunächst für den Fall aus, wo die Coefficienten der Form $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ von x unabhängige reale Grössen sind, also für

$$(4.)\qquad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) = \sum_{k,l} c_{kl}\, u^{(k)} u^{(l)}, \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, n \\ l = 0, 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

wo c_{kl} reale Constanten bedeuten und $c_{kl} = c_{lk}$ ist.

Ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, können wir $a = 0$ wählen.

2.

Für $n = 1$ sei

$$(1.)\qquad Q(u) = u' + q_1 u$$

und

$$(2.)\qquad F(u, u') - c_{11} Q(u)^2 = 2(c_{01} - c_{11} q_1)\, u u' + (c_{00} - c_{11} q_1^2)\, u^2.$$

Wenn dann

$$(3.)\qquad c_{00} - c_{11} q_1^2 = -c_{11} q_1',$$

so ist*) also

$$(4.)\qquad F(u, u') - c_{11} Q(u)^2 = \frac{d}{dx}((c_{01} - c_{11} q_1)\, u^2).$$

Wir wählen die Lösung q_1 der Gleichung (3.) so, dass q_1 für $x = 0$ unendlich wird. Dieselbe ist

$$(5.)\qquad q_1 = -r\,\frac{e^{rx} + e^{-rx}}{e^{rx} - e^{-rx}},$$

wo

$$r = \sqrt{\frac{c_{00}}{c_{11}}}.$$

Der Ausdruck q_1 ist immer eine reale Function von x. Haben näm- [6
lich c_{00}, c_{11} gleiche Vorzeichen, so ist r real, sind die Vorzeichen von c_{00}, c_{11} entgegengesetzt, so ist r rein imaginär $r = \varrho i$ und es ist $q_1 = -\varrho \operatorname{cotg} \varrho x$.

Für Functionen u, welche sich in der Nähe von $x = 0$ regulär verhalten und für $x = 0$ verschwinden, ist $Q(u)$ ebenfalls in der Nähe von $x = 0$ regulär. Dasselbe gilt von dem Ausdrucke $(c_{01} - c_{11} q_1) u^2$, welcher für $x = 0$ den Werth Null annimmt.

Aus (4.) ergiebt sich

$$(6.)\qquad \int_0^x F(u, u')\,dx = (c_{01} - c_{11} q_1)\, u^2 + c_{11}\int_0^x Q(u)^2\,dx.$$

Wir nehmen jetzt an, dass c_{11} positiv sei. Da q_1 nach Gleichung (5.) für hinlänglich kleine positive Werthe von x einen negativen Werth erhält, so ist für dieselben Werthe von x $c_{01} - c_{11} q_1$ positiv, und dieser Ausdruck behält das positive Vorzeichen bis

$$(7.)\qquad c_{01} - c_{11} q_1 = 0$$

wird.

Ist $x = \alpha$ der kleinste positive Werth, für welchen q_1 unendlich wird, β die kleinste positive Wurzel der Gleichung (7.), und bezeichnen wir mit b die kleinere der beiden Grössen α und β, so ergiebt sich demnach, dass für eine beliebige Function u, welche für $x = 0$ verschwindet und in der Nähe von $x = 0$ sich regulär verhält, die linke Seite der Gleichung (6.) positiv bleibt, solange x dem Intervalle 0 bis b angehört.

*) Vergl. Legendre, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris 1786.

3.

Für $n > 1$ würde das Legendresche Verfahren die Integration eines complicirten Systems von Differentialgleichungen erfordern, dessen Discussion in Bezug auf Realität und Stetigkeit der Lösungen sehr mühsam wäre. Es ist daher die Bestimmung von $Q(u)$ nach einem Verfahren vorzuziehen, welches dem von Jacobi*) für die Discussion der zweiten Variation gelehrten analog ist. Wir gehen zu diesem Zwecke von der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad P(y) = \sum_{k,l} (-1)^l c_{kl}\, y^{(k+l)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} k = 0, \ldots, n \\ l = 0, \ldots, n \end{pmatrix}$$

aus.

Da

$$(2.)\qquad c_{kl} = c_{lk},$$

7] so erhält die Gleichung (1.) die Form

$$(3.)\qquad P(y) = \sum_{m=0}^{n} C_m\, y^{(2m)} = 0,$$

wo

$$(4.)\qquad C_m = 2\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k c_{2m-k,k} + (-1)^m c_{mm}.$$

Wir bilden nunmehr den linearen Differentialausdruck $Q(u)$ derart, dass $Q(u)$ verschwindet, wenn für u ein System linear unabhängiger Lösungen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ der Gleichung (3.) gesetzt wird.

Diese Lösungen haben gewisse von Hesse**) und Clebsch***) aufgestellte Bedingungen zu befriedigen. Dieselben sind erfüllt, wenn wir die Anfangswerthe von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ so wählen, dass für $x = 0$ $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bez. der Ordnung $2n-1, 2n-2, \ldots, n$ verschwinden†).

Wir wollen der Einfachheit wegen, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, voraussetzen, dass die Wurzeln $\pm r_1, \pm r_2, \ldots, \pm r_n$ der Gleichung

$$(5.)\qquad \sum_{m=0}^{n} C_m\, r^{2m} = 0$$

*) Crelles Journal, Bd. 17 [1]).

**) Ebenda Bd. 54 [2]).

***) Ebenda Bd. 55.

†) Vergl. Frobenius, Crelles Journal, Bd. 85, S. 198.

[1]) C. G. J. Jacobis Gesammelte Werke, Bd. IV, S. 39 ff. R. F.

[2]) Hesse's Gesammelte Werke, Abh. 27, S. 442—444. R. F.

von einander verschieden sind. Ist y eine Lösung der Gleichung (3.), so ist auch jede Ableitung von y eine Lösung derselben Gleichung. Wir wählen daher y_1 so, dass diese Lösung für $x = 0$ der Ordnung $2n-1$ verschwindet, und dann

$$(6.)\qquad y_2 = \frac{dy_1}{dx}, \quad y_3 = \frac{d^2 y_1}{dx^2}, \quad \ldots, \quad y_n = \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}}.$$

Es ergiebt sich

$$(7.)\qquad y_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k f_k(r_k)} \{e^{r_k x} - e^{-r_k x}\},$$

wo

$$(8.)\qquad \begin{cases} f(z) = \sum_{m=0}^{n} C_m z^{2m}, \\ f_k(z) = \dfrac{f(z)}{z^2 - r_k^2}. \end{cases}$$

Es ist y_1 eine reale Function von x, folglich auch $y_2, y_3, \ldots, y_n$.

In der Gleichung

$$(9.)\qquad Q(u) = 0,$$

welche durch $y_1, y_2, \ldots, y_n$ befriedigt wird, sind $q_1, q_2, \ldots, q_n$ demnach reale [8 Functionen von x, welche bekanntlich in der Umgebung von $x = 0$ eindeutig werden und welche bez. mit $x, x^2, \ldots, x^n$ multiplicirt für $x = 0$ die Werthe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ annehmen, wo

$$(10.)\qquad \alpha_k = (-1)^k \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-(k-1)^2)}{k!}.$$

Um in der Gleichung

$$(11.)\qquad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) - c_{nn}\, Q(u)^2 = \frac{d\varphi}{dx}$$

φ zu bestimmen, sei

$$(12.)\qquad \varphi = \sum_{k,l} A_{kl}\, u^{(k)} u^{(l)}. \qquad \begin{pmatrix} k = 0, \ldots, n-1 \\ l = 0, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

Bezeichnen wir wie bisher mit oberen Accenten die Ableitungen nach x, so ist

$$(13.)\qquad \frac{d\varphi}{dx} = \sum_{k,l} A'_{kl}\, u^{(k)} u^{(l)} + 2u' \sum_{l=0}^{n-1} A_{0l}\, u^{(l)} + 2u'' \sum_{l=0}^{n-1} A_{1l}\, u^{(l)} + \cdots + 2u^{(n)} \sum_{l=0}^{n-1} A_{n-1,l}\, u^{(l)}.$$

Es hat daher (11.) die Gestalt

$$(14.)\quad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) - c_{nn}\, Q(u)^2$$
$$= \sum_{k,l} A'_{kl}\, u^{(k)} u^{(l)} + 2u' \sum_{l=0}^{n-1} A_{0l}\, u^{(l)} + 2u'' \sum_{l=0}^{n-1} A_{1l}\, u^{(l)} + \cdots + 2u^{(n)} \sum_{l=0}^{n-1} A_{n-1,l}\, u^{(l)}.$$

Daraus, dass diese Gleichung in Bezug auf $u, u', \ldots$ identisch erfüllt ist, ergiebt sich

$$(15.)\quad \frac{dA_{kl}}{dx} + A_{k-1,l} + A_{k,l-1} = c_{kl} - c_{nn}\, q_{n-k}\, q_{n-l} \quad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, n-1 \\ l = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

$$(15\text{a}.)\quad A_{n-1,l} = c_{n-1,l} - c_{nn}\, q_{n-l}.$$

Die Gleichung (15.) bleibt bestehen für $k = 0$ oder $l = 0$ oder $k = 0$ und $l = 0$, wenn die Grössen mit negativem Index gleich Null gesetzt werden.

Die Gleichungen (15.) und (15a.) liefern auch leicht die expliciten Ausdrücke für $A_{n-\lambda,\mu}$. Setzen wir nämlich

$$(16.)\quad a_{kl} = c_{kl} - c_{nn}\, q_{n-k}\, q_{n-l},$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned} A_{n-\lambda-1,\mu} = {} & a_{n-\lambda,\mu} - a_{n-\lambda+1,\mu-1} + \cdots \pm a_{n,\mu-\lambda} \\ & - \mathrm{D}_x (1_1 a_{n-\lambda+1,\mu} - 2_1 a_{n-\lambda+2,\mu-1} + 3_1 a_{n-\lambda+3,\mu-2} - \cdots \pm \lambda_1 a_{n,\mu-\lambda+1}) \\ & + \mathrm{D}_x^2 (2_2 a_{n-\lambda+2,\mu} - 3_2 a_{n-\lambda+3,\mu-1} + 4_2 a_{n-\lambda+4,\mu-2} - \cdots \pm \lambda_2 a_{n,\mu-\lambda+2}) + \cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \pm \mathrm{D}_x^\lambda (\lambda_\lambda a_{n,\mu}), \end{aligned}$$

wo λ_k Binomialcoefficient ist.

9] 4.

Für beliebige reale Functionen u, welche nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen für $x = 0$ verschwinden und in der Nähe von $x = 0$ sich regulär verhalten, ist $Q(u)$ für positive von der Null hinlänglich wenig verschiedene Werthe von x ebenfalls regulär.

Wir beweisen in der oben bezeichneten Arbeit den Satz:

I. Die quadratische Form

$$(1.)\quad \varphi = \sum_{k,l} A_{kl}\, u^{(k)} u^{(l)} \qquad \begin{pmatrix} k = 0, \ldots, n-1 \\ l = 0, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

ist für positive in der Nähe von $x = 0$ gelegene Werthe von x definit und positiv.

Die Form φ behält also diese Eigenschaft, bis x zum ersten Male die Gleichung

$$(2.)\quad |A_{kl}| = 0$$

erfüllt.

Die Function $Q(u)$, welche bei den gemachten Annahmen in der Nähe des singulären Punktes $x = 0$ der Differentialgleichung

$$(3.)\quad Q(y) = 0$$

endlich und stetig ist, verliert diese Eigenschaft, wenn x sich dem nächsten singulären Punkte der Gleichung (3.) annähert.

Bezeichnen wir den nächsten positiven singulären Punkt mit α, während β die kleinste positive Wurzel der Gleichung (2.) darstellt, so ergiebt sich, wenn wir c_{nn} als positiv voraussetzen und die über die Functionen u getroffene Vereinbarung festhalten, nach der aus der Gleichung (11.) No. 3 fliessenden Gleichung

$$(4.)\quad \int_0^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\, dx = \varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)}) + c_{nn} \int_0^x Q(u)^2\, dx$$

der Satz:

II. Bedeutet u eine beliebige Function, welche nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen für $x = 0$ verschwindet und in der Nähe von $x = 0$ sich regulär verhält, so ist das Integral

$$\int_0^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\, dx$$

für positive zwischen 0 und b gelegene Werthe von x positiv, wenn b die kleinere der beiden Grössen α und β darstellt, und wenn c_{nn} positiv vorausgesetzt wird.

5. [10

Die im vorhergehenden skizzirte Untersuchung hat nicht nur für die Anwendungen ein praktisches Interesse; sie kann vielmehr auch in rein analytischen Fragen verwerthet werden.

Es möge genügen, dieses an dem folgenden Beispiele zu erläutern.

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$(\alpha.)\quad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) = f(x), \qquad (f(0) \gtrless 0)$$

wo $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ dieselbe Beschaffenheit wie im vorhergehenden hat, während $f(x)$ eine innerhalb des Intervalls von $x = 0$ bis $x = b$ reguläre reale Function der realen Variablen x ist (b ist die in voriger Nummer charakterisirte Grösse).

Wird eine Lösung der Gleichung (α.) durch die Anfangswerthe

$$u = 0, \quad u' = 0, \quad \ldots, \quad u^{(n-1)} = 0$$

für $x = 0$ bestimmt und diese Lösung für reale positive Werthe von x verfolgt, so unterliegt die Frage, ob man in einem gewissen Intervall einer Singularität von u begegne, bekanntlich grossen Schwierigkeiten. Aus den Resultaten der vorigen Nummer kann man nun beispielsweise folgenden Schluss ziehen:

Ist $\int_x^x f(x)\,dx$ nicht für alle Werthe von x des Intervalles 0 bis b positiv, so kann u nicht in dem ganzen Intervalle eine reale sich regulär verhaltende Function bleiben.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

S. 338, Zeile 9 v. u. wurde »und $c_{kl} = c_{lk}$ ist« hinzugefügt,
„ 340, „ 16 linear statt linearer,
„ 341 lautet Zeile 11 im Original: Es ist y_1, folglich auch $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reale Functionen von x.

2) Wie ich aus Gesprächen mit meinem Vater über den Gegenstand der vorstehenden Arbeit weiss, sind die hier skizzirten Untersuchungen durch eine Frage veranlasst worden, die Herr Planck seiner Zeit an meinen Vater gerichtet hat und die gewisse in der Mechanik auftretende bestimmte Integrale betraf. Auf eine hierauf bezügliche Anfrage hatte Herr Planck die Güte mir folgendes zu schreiben: „Ich hatte in meinen mathematisch-physikalischen Übungen in der Universität einige Beispiele für das mechanische Princip der kleinsten Wirkung behandelt, indem ich in einem, bestimmten Kräften unterworfenen, Punktsystem ganz willkürlich virtuelle Bewegungen voraussetzte und darauf den Satz anwandte, dass unter allen virtuellen Bewegungen die wirkliche dadurch ausgezeichnet ist, dass sie das Integral $\int (L - U)\,dt$ zu einem Minimum macht. Auf diese Weise kommt man natürlich zu Sätzen über die Grösse, die dieses Integral mindestens haben muss, wenn man eine ganz beliebige virtuelle Bewegung, die also beliebige Functionen enthält, einsetzt. Es schien mir nun interessant, zu prüfen, ob man derartige Sätze auch auf rein mathematischem Wege, ohne den Umweg über die Mechanik, ableiten kann, und deshalb richtete ich an Ihren Herrn Vater eine derartige Frage“. R. F.

LXXV.

ÜBER GRENZEN, INNERHALB DEREN GEWISSE BESTIMMTE INTEGRALE VORGESCHRIEBENE VORZEICHEN BEHALTEN*).

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 124, 1902, S. 278—291.)

I.

[278

Es sei $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ eine quadratische Form der unbestimmten Function u und ihrer n ersten Ableitungen $u', \ldots, u^{(n)}$ nach einer unabhängigen Variablen x, deren Coefficienten gegebene reale und eindeutige Functionen der realen Variablen x sind. Wir setzen ferner voraus, dass die Function u ebenfalls real ist und nebst ihren Ableitungen in der Nähe eines Werthes $x = a$ sich regulär verhält, und stellen uns die Aufgabe, ein Intervall von a bis b anzugeben von der Beschaffenheit, dass das Vorzeichen des Integrals

$$\int_a^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\,dx$$

für jede beliebige der bezeichneten Functionen u beständig dasselbe [279 bleibt, so lange x dem Intervalle a bis b angehört.

*) Ein Auszug der vorliegenden Arbeit ist in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 9. Januar 1902, S. 4 ff. erschienen [1]).

Während der Drucklegung der vorliegenden Arbeit wurde der Verfasser L. Fuchs am Nachmittag des 26. April d. J. aus voller Schaffenskraft der Wissenschaft und diesem Journal — dessen Bände einen grossen Theil seines Lebenswerkes enthalten, und dem er seit dem Jahre 1892 als Herausgeber vorgestanden hat — jählings entrissen. Am Vormittag seines Todestages hatte er noch die erste Correctur des ersten Bogens dieser Arbeit erledigt. Die Besorgung der weiteren Correcturen und diese vorläufige Anzeige haben, Namens der verwaisten Journal-Redaction, die Unterzeichneten schmerzerfüllt übernommen.

R. Fuchs, L. Schlesinger.

1) Vgl. die vorhergehende Abhandlung LXXIV. R. F.

Wir bedienen uns hierzu eines Hülfsmittels, welches dem in der Variationsrechnung bei der Umformung der zweiten Variation angewendeten analog ist.

Wir suchen nämlich einen linearen Differentialausdruck

$$(1.)\qquad Q(u) = u^{(n)} + q_1 u^{(n-1)} + \cdots + q_n u,$$

dessen Coefficienten reale Functionen von x, so zu bestimmen, dass

$$(2.)\qquad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) - p_{nn} Q(u)^2 = \frac{d}{dx}(\varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)}))$$

wird, wo p_{nn} den Coefficienten von $u^{(n)2}$ in $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ bezeichnet, und wo φ ebenfalls eine quadratische Form ist, deren Coefficienten wohlbestimmte reale Functionen von x bedeuten.

Während jedoch in der Gleichung

$$(3.)\qquad \int_a^x F(u, u', \ldots, u^{(n)})\,dx = \varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=x} - \varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=a} + \int_a^x p_{nn} Q(u)^2\,dx$$

das Vorzeichen des Ausdruckes

$$\varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=x} - \varphi(u, u', \ldots, u^{(n-1)})_{x=a}$$

in der Variationsrechnung, der Natur der in dieser Disciplin behandelten Probleme entsprechend, ausser Betracht kommt, ist es für unsere Aufgabe unumgänglich nöthig, das Vorzeichen dieses Ausdruckes zu kennen.

Wir führen in dieser Arbeit die Untersuchung zunächst für den Fall aus, wo die Coefficienten der Form $F(u, u', \ldots, u^{(n)})$ von x unabhängige reale Grössen sind, also für

$$(4.)\qquad F(u, u', \ldots, u^{(n)}) = \sum_{k,l} c_{kl} u^{(k)} u^{(l)}, \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, n \\ l = 0, 1, \ldots, n \end{pmatrix}$$

wo c_{kl} reale Constanten bedeuten und $c_{kl} = c_{lk}$ ist.

Ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, können wir $a = 0$ wählen.

II.

Für $n = 1$ sei

$$(1.)\qquad Q(u) = u' + q_1 u$$

und

$$(2.)\qquad F(u, u') - c_{11} Q(u)^2 = 2(c_{01} - c_{11} q_1) u u' + (c_{00} - c_{11} q_1^2) u^2.$$

Soll die rechte Seite dieser Gleichung für eine unbestimmte Function [280
u ein vollständiger Differentialquotient sein, so ist die Bedingung zu erfüllen

$$(3.)\qquad c_{00} - c_{11} q_1^2 = -c_{11} q_1'.$$

Alsdann ist*)

$$(4.)\qquad F(u, u') - c_{11} Q(u)^2 = \frac{d}{dx}(c_{01} - c_{11} q_1) u^2.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung (3.) ist bekanntlich

$$(5.)\qquad q_1 = r \frac{Ae^{rx} - Be^{-rx}}{Ae^{rx} + Be^{-rx}},$$

wo

$$r = \sqrt{\frac{c_{00}}{c_{11}}},$$

und A und B willkürliche Constanten bedeuten.

Wir wählen uns dasjenige particuläre Integral, welches für $x = 0$ unendlich wird; dasselbe lautet

$$(6.)\qquad q_1 = -r \frac{e^{rx} + e^{-rx}}{e^{rx} - e^{-rx}}.$$

Der Ausdruck q_1 ist immer eine reale Function von x. Haben nämlich c_{00}, c_{11} gleiche Vorzeichen, so ist r real, sind die Vorzeichen von c_{00}, c_{11} entgegengesetzt, so ist r rein imaginär $r = \varrho i$ und es ist $q_1 = -\varrho \operatorname{cotg} \varrho x$.

Für Functionen u, welche sich in der Nähe von $x = 0$ regulär verhalten und für $x = 0$ verschwinden, ist $q_1 u$, folglich $Q(u)$ ebenfalls in der Nähe von $x = 0$ regulär. Dasselbe gilt von dem Ausdrucke $(c_{00} - c_{11} q_1) u^2$, welcher für $x = 0$ den Werth Null annimmt.

Aus (4.) ergiebt sich also

$$(7.)\qquad \int_0^x F(u, u')\,dx = (c_{01} - c_{11} q_1) u^2 + c_{11} \int_0^x Q(u)^2\,dx.$$

Wir nehmen jetzt an, dass c_{11} positiv sei. Nach Gleichung (6.) hat q_1 für hinlänglich kleine positive Werthe von x einen beliebig grossen negativen

*) Vergl. LEGENDRE, Mémoires de l'Académie des sciences de Paris 1786.

Werth; demnach ist für dieselben Werthe von x der Ausdruck $c_{01}-c_{11}q_1$ positiv. Dieser Ausdruck behält das positive Vorzeichen bis

$$c_{01}-c_{11}q_1 = 0 \tag{8.}$$

wird.

[281] Ist $x=\alpha$ der kleinste positive Werth, für welchen q_1 unendlich wird, β die kleinste positive Wurzel der Gleichung (8.) und bezeichnen wir mit b die kleinere der beiden Grössen α und β, so ergiebt sich demnach, dass für *eine beliebige Function u, welche für $x=0$ verschwindet und in der Nähe von $x=0$ sich regulär verhält, die linke Seite der Gleichung (7.) positiv bleibt, solange x dem Intervalle 0 bis b angehört.*

III.

Für $n>1$ würde das Legendresche Verfahren die Integration eines complicirten Systems von Differentialgleichungen erfordern, dessen Discussion in Bezug auf Realität und Stetigkeit der Lösungen sehr mühsam wäre. Es ist daher die Bestimmung von $Q(u)$ nach einem Verfahren vorzuziehen, welches dem von Jacobi für die Discussion der zweiten Variation gelehrten analog ist. Wir gehen zu diesem Zwecke von der Differentialgleichung

$$P(y) = \sum_{k,l}(-1)^l c_{kl}\, y^{(k+l)} = 0 \qquad \begin{pmatrix} k=0,\dots,n \\ l=0,\dots,n \end{pmatrix} \tag{1.}$$

aus.

Da

$$c_{kl} = c_{lk}, \tag{2.}$$

so erhält die Gleichung (1.) die Form

$$P(y) = \sum_{m=0}^{n} C_m\, y^{(2m)} = 0, \tag{3.}$$

wo

$$C_m = 2\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k c_{2m-k,k} + (-1)^m c_{mm}. \tag{4.}$$

Wir bilden nunmehr den linearen Differentialausdruck n^{ter} Ordnung $Q(u)$ derart, dass $Q(u)$ verschwindet, wenn für u ein System linear unabhängiger Lösungen $y_1, y_2, \dots, y_n$ der Gleichung (3.) gesetzt wird.

Diese Lösungen haben gewisse von Hesse*) und Clebsch**) aufgestellte Bedingungen zu befriedigen. Dieselben sind erfüllt, wenn wir die Anfangswerthe von $y_1, y_2, \dots, y_n$ so wählen, dass, für $x=0$, $y_1, y_2, \dots, y_n$ bezw. der Ordnung $2n-1, 2n-2, \dots, n$ verschwinden***).

Wir wollen der Einfachheit wegen, ohne der Allgemeinheit Abbruch [282 zu thun, voraussetzen, dass die Wurzeln $\pm r_1, \pm r_2, \dots, \pm r_n$ der Gleichung

$$\sum_{m=0}^{n} C_m r^{2m} = 0 \tag{5.}$$

von einander verschieden sind.

Eine lineare homogene Differentialgleichung mit constanten Coefficienten hat die Eigenschaft, durch eine beliebige Ableitung einer ihrer Lösungen befriedigt zu werden. Ist daher y eine Lösung der Gleichung (3.), so ist auch jede Ableitung von y eine Lösung derselben Gleichung. Wir können daher die Lösung y_1 so wählen, dass dieselbe für $x=0$ der Ordnung $2n-1$ verschwindet, und dann

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx},\quad y_3 = \frac{d^2y_1}{dx^2},\quad \cdots,\quad y_n = \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}.$$

Da eine Gleichung der Form

$$\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_n y_n = 0$$

mit constanten Coefficienten der Voraussetzung nach nur bestehen könnte, wenn die sämmtlichen Coefficienten verschwinden, so sind hiernach $y_1, y_2, \dots, y_n$ linear unabhängig.

Um für eine lineare homogene Differentialgleichung m^{ter} Ordnung mit constanten Coefficienten, für welche die characteristische Gleichung lauter verschiedene Wurzeln $r_1, r_2, \dots, r_m$ besitzt, eine Lösung anzugeben, welche nebst ihren $m-2$ ersten Ableitungen für $x=0$ verschwindet, während die $(m-1)^{\text{te}}$ Ableitung den Werth Eins erhält, hat man m Constanten $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ derart zu bestimmen, dass

$$r_1^{\varkappa}\gamma_1 + r_2^{\varkappa}\gamma_2 + \cdots + r_m^{\varkappa}\gamma_m = 0,$$

*) Dieses Journal Bd. 54 [1]).
**) Dieses Journal Bd. 55.
***) Vergl. Frobenius, dieses Journal Bd. 85, S. 198.

[1]) Hesse's Gesammelte Werke, Abh. 27, S. 442–444. R. F.

für $\varkappa = 0, 1, \ldots, m-2$, und

$$r_1^{m-1}\gamma_1 + r_2^{m-1}\gamma_2 + \cdots + r_m^{m-1}\gamma_m = 1.$$

Diese Gleichungen ergeben

$$\gamma_\varkappa = \frac{1}{2r_\varkappa \varphi'(r_\varkappa)}, \tag{6.}$$

wo $\varphi(r)$ die linke Seite der characteristischen Gleichung der vorgelegten Differentialgleichung, $\varphi'(r)$ ihre Ableitung nach r bedeutet.

Auf unsere Gleichung (3.) angewendet ergiebt sich demnach:

$$y_1 = \frac{1}{2}\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{1}{r_\varkappa f_\varkappa(r_\varkappa)}\left\{e^{r_\varkappa x} - e^{-r_\varkappa x}\right\}, \tag{7.}$$

wo

283]

$$\left\{\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m=0}^{n} C_m z^{2m}, \\ f_\varkappa(z) &= \frac{f(z)}{z^2 - r_\varkappa^2}. \end{aligned}\right. \tag{8.}$$

Nach unseren Voraussetzungen in No. I sind die Coefficienten C_m reale Grössen. Ist daher $r_\varkappa^2$ eine reale Wurzel der Gleichung

$$\sum_{m=0}^{n} C_m s^{2m} = 0, \tag{5a.}$$

so ist $f_\varkappa(r_\varkappa)$ real; wenn nun auch $r_\varkappa^2$ positiv ist, so ist unmittelbar zu sehen, dass

$$\frac{1}{r_\varkappa f_\varkappa(r_\varkappa)}\left\{e^{r_\varkappa x} - e^{-r_\varkappa x}\right\}$$

eine reale Function von x ist. Aber wenn $r_\varkappa^2$ negativ ist, also $r_\varkappa = \varrho_\varkappa i$, so ist

$$\frac{e^{r_\varkappa x} - e^{-r_\varkappa x}}{2r_\varkappa} = \frac{\sin \varrho_\varkappa x}{\varrho_\varkappa}$$

wiederum real.

Ist dagegen $r_\varkappa^2$ eine complexe Grösse gleich $\alpha + \beta i$, so ist die Summe

$$\sigma = \frac{1}{f_\varkappa(r_\varkappa)}\left\{\frac{e^{r_\varkappa x} - e^{-r_\varkappa x}}{r_\varkappa}\right\} + \frac{1}{f_\iota(r_\iota)}\left\{\frac{e^{r_\iota x} - e^{-r_\iota x}}{r_\iota}\right\},$$

wo $r_\iota^2 = \alpha - \beta i$, ins Auge zu fassen. Es sind aber sowohl $f_\varkappa(r_\varkappa)$ und $f_\iota(r_\iota)$ als auch

$$\frac{e^{r_\varkappa x} - e^{-r_\varkappa x}}{r_\varkappa} \quad \text{und} \quad \frac{e^{r_\iota x} - e^{-r_\iota x}}{r_\iota}$$

conjugirte complexe Grössen. Es ist demnach σ eine reale Function von x. Aus diesen Erwägungen ergiebt sich demnach, dass y_1 eine reale Function von x ist, folglich auch $y_2, \ldots, y_n$.

In der Gleichung

$$Q(u) = 0, \tag{9.}$$

welche durch $y_1, y_2, \ldots, y_n$ befriedigt wird, sind $q_1, \ldots, q_n$ demnach reale Functionen von x. Da die Lösungen dieser Gleichung in der Umgebung von $x = 0$ Potenzreihen mit nur positiven ganzen Potenzen sind, so ergiebt sich*), dass $q_1 x, q_2 x^2, \ldots, q_n x^n$ in der Umgebung von $x = 0$ nach positiven ganzen Potenzen von x entwickelbar sind. Die zu $x = 0$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Gleichung (9.) hat der Voraussetzung gemäss die Wurzeln $n, n+1, \ldots, 2n-1$.

Setzen wir daher [284

$$u = x^n v, \tag{10.}$$

wodurch (9.) in

$$v^{(n)} + s_1 v^{(n-1)} + \cdots + s_n v = 0 \tag{9a.}$$

übergeht, wo

$$x^n s_\lambda = n_\lambda D^\lambda(x^n) + (n-1)_{\lambda-1} q_1 D^{\lambda-1}(x^n) + (n-2)_{\lambda-2} q_2 D^{\lambda-2}(x^n) + \cdots + q_\lambda x^n,$$

so sind die Wurzeln der zu $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung von (9a.) $0, 1, 2, \ldots, n-1$, es muss daher $(x^\lambda s_\lambda)_{x=0}$ verschwinden für $\lambda = 1, 2, \ldots, n$.

Die Gleichung $(x s_1)_{x=0} = 0$ ist äquivalent $(n^2 + q_1 x)_{x=0} = 0$, also ergiebt sich

$$q_1 = -\frac{n^2}{x} + \mathfrak{P}_1(x),$$

wo $\mathfrak{P}_1(x)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe bedeutet. Ebenso folgt aus $(x^2 s_2)_{x=0} = 0$

$$\left[\frac{n^2(n-1)^2}{2} + n(n-1)q_1 x + q_2 x^2\right]_{x=0} = 0,$$

also

$$q_2 = \frac{n^2(n^2-1^2)}{2}\,\frac{1}{x^2} + \mathfrak{P}_2(x),$$

*) Dieses Journal, Bd. 68, S. 360[1]).

[1]) Abh. VII, S. 213, Band I dieser Ausgabe. R. F.

wo wieder $\mathfrak{P}_2(x)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe bedeutet.

Allgemein ist

$$q_\varkappa = \frac{\alpha_\varkappa}{x^\varkappa} + \mathfrak{P}_\varkappa(x), \tag{11.}$$

wo

$$\alpha_\varkappa = (-1)^\varkappa \frac{n^2(n^2-1^2)\ldots(n^2-(\varkappa-1)^2)}{\varkappa!}, \tag{12.}$$

und $\mathfrak{P}_\varkappa(x)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende Reihe bedeutet.

Um in der Gleichung

$$F(u, u', \ldots, u^{(n)}) - c_{nn} Q(u)^2 = \frac{d\varphi}{dx} \tag{13.}$$

φ zu bestimmen, sei

$$\varphi = \sum_{k,l} A_{kl} u^{(k)} u^{(l)}. \qquad \begin{pmatrix} k = 0, \ldots, n-1 \\ l = 0, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \tag{14.}$$

285] Bezeichnen wir wie bisher mit oberen Accenten die Ableitungen nach x, so ist

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sum_{k,l} A'_{kl} u^{(k)} u^{(l)} + 2u' \sum_{l=0}^{n-1} A_{0l} u^{(l)} + 2u'' \sum_{l=0}^{n-1} A_{1l} u^{(l)} + \cdots + 2u^{(n)} \sum_{l=0}^{n-1} A_{n-1,l} u^{(l)}. \tag{15.}$$

Es hat daher (13.) die Gestalt

$$\begin{aligned} F(u, u', \ldots, u^{(n)}) - c_{nn} Q(u)^2 = {} & \sum_{k,l} A'_{kl} u^{(k)} u^{(l)} + 2u' \sum_{l=0}^{n-1} A_{0l} u^{(l)} \\ & + 2u'' \sum_{l=0}^{n-1} A_{1l} u^{(l)} + \cdots + 2u^{(n)} \sum_{l=0}^{n-1} A_{n-1,l} u^{(l)}. \end{aligned} \tag{16.}$$

Daraus, dass diese Gleichung in Bezug auf $u, u', \ldots$ identisch erfüllt ist, ergiebt sich

$$\frac{dA_{kl}}{dx} + A_{k-1,l} + A_{k,l-1} = c_{kl} - c_{nn} q_{n-k} q_{n-l}, \tag{17.}$$

$$A_{n-1,l} = c_{n-1,l} - c_{nn} q_{n-l}. \tag{17a.}$$

Die Gleichungen (17.) und (17a.) liefern auch leicht die expliciten Ausdrücke für $A_{n-\lambda,\mu}$. Setzen wir nämlich

$$a_{kl} = c_{kl} - c_{nn} q_{n-k} q_{n-l}, \tag{18.}$$

so ergiebt sich

$$\left\{ \begin{aligned} A_{n-\lambda-1,\mu} = {} & a_{n-\lambda,\mu} - a_{n-\lambda+1,\mu-1} + \cdots \pm a_{n,\mu-l} \\ & - \mathrm{D}_x(1_1 a_{n-\lambda+1,\mu} - 2_1 a_{n-\lambda+2,\mu-1} + 3_1 a_{n-\lambda+3,\mu-2} - \cdots \pm \lambda_1 a_{n,\mu-\lambda+1}) \\ & + \mathrm{D}_x^2(2_2 a_{n-\lambda+2,\mu} - 3_2 a_{n-\lambda+3,\mu-1} + 4_2 a_{n-\lambda+4,\mu-2} - \cdots \pm \lambda_2 a_{n,\mu-\lambda+2}) \\ & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \pm \mathrm{D}_x^\lambda(\lambda_\lambda a_{n,\mu}), \end{aligned} \right. \tag{19.}$$

wo $\lambda_\varkappa$ Binomialcoefficient ist.

Aus den Gleichungen (17.) oder (19.) folgt:

$$(A_{n-\lambda-1,\mu} x^{n+\lambda-\mu})_{x=0} = \frac{c_{nn}(\lambda+1)(n-\mu)}{n^2(n+\lambda-\mu)} \alpha_{\lambda+1} \alpha_{n-\mu}. \tag{20.}$$

Man bestätigt diese Formel aus den Gleichungen (19.) unmittelbar [286 für $\lambda = 0$, $\lambda = 1$ und beweist alsdann, mit Hülfe der Gleichung (17.), indem man dieselbe für $k = n-\lambda-1$, $l = \mu$ auf die Form bringt

$$A_{n-\lambda-2,\mu} = -\frac{dA_{n-\lambda-1,\mu}}{dx} - A_{n-\lambda-1,\mu-1} + c_{n-\lambda-1,\mu} - c_{nn} q_{\lambda+1} q_{n-\mu}, \tag{17b.}$$

dass sie gültig ist für $\lambda+1$, wenn sie für $0, 1, \ldots, \lambda$ erwiesen ist.

Setzen wir

$$n - \lambda - 1 = k, \quad \mu = l,$$

so nimmt die Gleichung (20.) die Form an

$$(A_{kl} x^{2n-k-l-1})_{x=0} = \frac{c_{nn}(n-k)(n-l)}{n^2(2n-k-l-1)} \alpha_{n-k} \alpha_{n-l}. \tag{20a.}$$

IV.

Es seien $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{m+1}(x)$ ganze rationale Functionen m^{ten} Grades von x, in welchen der Coefficient von x^m gleich Eins ist. Bilden wir die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} f_1(x+m) & f_2(x+m) & \ldots f_{m+1}(x+m) \\ f_1(x+m-1) & f_2(x+m-1) & \ldots f_{m+1}(x+m-1) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ f_1(x) & f_2(x) & \ldots f_{m+1}(x) \end{vmatrix}, \tag{1.}$$

so lässt sich dieselbe vermöge der Identität

$$m! = f_\lambda(x+m) - m_1 f_\lambda(x+m-1) + m_2 f_\lambda(x+m-2) - \cdots + (-1)^m f_\lambda(x) \tag{2.}$$

in

$$(3.)\quad D = m!\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots 1 \\ f_1(x+m-1) & f_2(x+m-1) & f_3(x+m-1) & \dots f_{m+1}(x+m-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) & \dots f_{m+1}(x), \end{vmatrix}$$

umformen.

Setzen wir

$$(4.)\qquad f_\lambda(x)-f_1(x) = \mu_{2\lambda} f_{1\lambda}(x),$$

wo $\mu_{2\lambda}$ den Coefficienten der höchsten Potenz von x bedeutet, welcher in der Differenz $f_\lambda(x)-f_1(x)$ vorkommt, so ergiebt sich

287]

$$(5.)\quad D = m!\,\mu_{22}\mu_{23}\dots\mu_{2,m+1}\begin{vmatrix} f_{12}(x+m-1) & f_{13}(x+m-1) & \dots f_{1,m+1}(x+m-1) \\ f_{12}(x+m-2) & f_{13}(x+m-2) & \dots f_{1,m+1}(x+m-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{12}(x) & f_{13}(x) & \dots f_{1,m+1}(x) \end{vmatrix}.$$

$f_{12}, f_{13}, \dots, f_{1,m+1}$ sind ganze rationale Functionen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades, bei denen der Coefficient der $(m-1)^{\text{ten}}$ Potenz gleich Eins ist.

Die Determinante D lässt sich durch Anwendung der Identität

$$(6.)\qquad (m-1)! = f_{1\lambda}(x+m-1)-(m-1)_1 f_{1\lambda}(x+m-2) + (m-1)_2 f_{1\lambda}(x+m-3) - \dots + (-1)^{m-1} f_{1\lambda}(x)$$

umformen in

$$(7.)\quad D = m!\,\mu_{22}\mu_{23}\dots\mu_{2,m+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ f_{12}(x+m-2) & f_{13}(x+m-2) & \dots f_{1,m+1}(x+m-2) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{12}(x) & f_{13}(x) & \dots f_{1,m+1}(x) \end{vmatrix}.$$

Setzen wir

$$(8.)\qquad f_{1\lambda}(x)-f_{12}(x) = \mu_{3\lambda} f_{2\lambda}(x),$$

wo $\mu_{3\lambda}$ den Coefficienten der höchsten Potenz von x bedeutet, welcher in der Differenz $f_{1\lambda}(x)-f_{12}(x)$ vorkommt, so ist hiernach

$$(9.)\quad \begin{cases} D = m!\,(m-1)!\,\mu_{22}\mu_{23}\dots\mu_{2,m+1}\cdot\mu_{33}\dots\mu_{3,m+1}\times \\ \begin{vmatrix} f_{23}(x+m-2) & f_{24}(x+m-2) & \dots f_{2,m+1}(x+m-2) \\ f_{23}(x+m-3) & f_{24}(x+m-3) & \dots f_{2,m+1}(x+m-3) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{23}(x) & f_{24}(x) & \dots f_{2,m+1}(x) \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Man sieht, dass durch Fortsetzung dieses Processes schliesslich erhalten wird

$$(10.)\quad \begin{cases} D = m!\,(m-1)!\,(m-2)!\dots 2!\,1! \\ \quad\cdot\mu_{22}\mu_{23}\dots\mu_{2,m+1} \\ \quad\quad\cdot\mu_{33}\dots\mu_{3,m+1} \\ \quad\quad\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \quad\quad\quad\cdot\mu_{m+1,m+1}, \end{cases}$$

wo die Bedeutung der μ mit doppeltem Index aus dem vorhergehenden [288 ersichtlich ist.

Wir heben hier einen speciellen Fall hervor, von welchem wir später Gebrauch machen wollen. Sei

$$(11.)\qquad F(x) = (x-m)(x-m-1)\dots(x-2m)$$

und

$$(12.)\qquad f_\lambda(x) = \frac{F(x)}{x-m-\lambda+1}, \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, m+1)$$

so ergiebt sich für diesen Fall aus der Gleichung (10.)

$$(A.)\qquad D = (m!\,(m-1)!\dots 2!\,1!)^2.$$

V.

Sei

$$(1.)\qquad p_\lambda = \begin{vmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0\lambda} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\lambda 0} & A_{\lambda 1} & \dots & A_{\lambda\lambda} \end{vmatrix},$$

wo die $A_{\kappa\lambda}$ dieselbe Bedeutung haben wie in No. III.

Aus der Gleichung (20a.) No. III ergiebt sich

$$(2.)\quad \left(p_\lambda x^{2(\lambda+1)n-(\lambda+1)^2}\right)_{x=0} = \frac{(n(n-1)\dots(n-\lambda))^2(\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_{n-\lambda})^2 c_{nn}^{\lambda+1}\Delta}{n^{2(\lambda+1)}},$$

wo

$$(3.)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{2n-1} & \frac{1}{2n-2} & \dots & \frac{1}{2n-1-\lambda} \\ \frac{1}{2n-2} & \frac{1}{2n-3} & \dots & \frac{1}{2n-1-\lambda-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2n-1-\lambda} & \frac{1}{2n-1-\lambda-1} & \dots & \frac{1}{2n-1-2\lambda} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir

$$(4.)\quad \begin{cases} 2n-1 = \xi, \\ F(\xi) = (\xi-\lambda)(\xi-\lambda-1)\dots(\xi-2\lambda), \\ f_k(\xi) = \dfrac{F(\xi)}{(\xi-\lambda-k+1)}, \qquad (k=1,2,\dots,\lambda+1) \end{cases}$$

289] so wird

$$(5.)\quad \Delta = \frac{1}{\xi(\xi-1)^2(\xi-2)^3\dots(\xi-\lambda)^{\lambda+1}(\xi-\lambda-1)^{\lambda}\dots(\xi-2\lambda+1)^2(\xi-2\lambda)}\cdot\Delta',$$

wo

$$(6.)\quad \Delta' = \begin{vmatrix} f_1(\xi+\lambda) & f_2(\xi+\lambda) & \dots & f_{\lambda+1}(\xi+\lambda) \\ f_1(\xi+\lambda-1) & f_2(\xi+\lambda-1) & \dots & f_{\lambda+1}(\xi+\lambda-1) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_1(\xi) & f_2(\xi) & \dots & f_{\lambda+1}(\xi) \end{vmatrix}.$$

Es ist aber nach (A.) No. IV

$$(7.)\quad \Delta' = (\lambda!(\lambda-1)!\dots 2!1!)^2.$$

Wir erhalten daher schliesslich

$$(B.)\quad \begin{cases} \left(p_\lambda x^{2(\lambda+1)n-(\lambda+1)^2}\right)_{x=0} \\ = \dfrac{[n(n-1)\dots(n-\lambda)\alpha_n\alpha_{n-1}\dots\alpha_{n-\lambda}\lambda!(\lambda-1)!\dots 2!1!]^2 c_{nn}^{\lambda+1}}{n^{2(\lambda+1)}(2n-1)(2n-2)^2\dots(2n-1-\lambda)^{\lambda+1}(2n-1-\lambda-1)^{\lambda}\dots(2n-1-2\lambda+1)^2(2n-1-2\lambda)}. \end{cases}$$

VI.

Nach der vorigen Nummer, Gleichung (B.), ist

$$P_\lambda = \left(p_\lambda x^{2(\lambda+1)n-(\lambda+1)^2}\right)_{x=0}$$

eine wesentlich positive Grösse.

Die quadratische Form

$$(1.)\quad \varphi = \sum_{k,l} A_{kl}\, u^{(k)} u^{(l)} \qquad \begin{pmatrix} k=0,1,\dots,n-1 \\ l=0,1,\dots,n-1 \end{pmatrix}$$

lässt sich nach einer von Jacobi*) herrührenden Methode auf folgende Weise

*) Dieses Journal, Bd. 53, S. 270[1]).

1) C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke, Bd. III, S. 590. R. F.

durch eine Summe von Quadraten darstellen:

$$(2.)\quad \varphi = \frac{U^2}{p_0} + \frac{U_1^2}{p_0 p_1} + \dots + \frac{U_m^2}{p_{m-1}p_m} + \dots + \frac{U_n^2}{p_{n-1}p_n},$$

wo $p_0, p_1, \dots, p_n$ die in voriger Nummer, Gleichung (1.), angegebene Bedeutung haben und $U, U_1, \dots, U_n$ lineare homogene Functionen von $u, u', \dots, u^{(n-1)}$ bedeuten, deren Coefficienten ganze rationale Functionen von $q_1, \dots, q_n$ und deren Ableitungen sind.

Bezeichnen wir mit α den kleinsten positiven Werth von x, für welchen eine der Grössen $q_1, \dots, q_n$ unendlich wird, so sind für alle positiven Werthe von x, die kleiner sind als α, die Coefficienten A_{kl}, der Darstellung der- [290 selben durch Gleichung (19.) No. III gemäss, stetige Functionen von x.

Nun ist nach voriger Nummer, Gleichung (B.),

$$(3.)\quad p_\lambda = \frac{P_\lambda}{x^{2(\lambda+1)n-(\lambda+1)^2}} + \text{Glieder mit steigenden Potenzen von } x.$$

Demnach ist p_λ für $0 < x < \alpha$ stetig und für hinlänglich kleine Werthe von x positiv. Für hinlänglich kleine Werthe innerhalb derselben Grenzen ist daher auch nach Gleichung (2.) φ eine *definite positive quadratische Form*.

Eine Zeichenänderung von ϱ Coefficienten der Quadrate in Gleichung (2.) würde nach dem Trägheitsgesetz bei jeder anderen Art von Transformation der quadratischen Form in eine Summe von Quadraten ebenfalls eine Zeichenänderung von ϱ Coefficienten hervorrufen. Wählt man hierzu die Transformation durch eine orthogonale Substitution, so ergiebt sich aus der Stetigkeit der Coefficienten A_{kl}, dass solche Zeichenänderungen erst eintreten können, wenn die Determinante

$$(4.)\quad |A_{kl}| = 0$$

ist.

Wir wollen die kleinste positive Wurzel dieser Gleichung mit β bezeichnen.

Wenn wir c_{nn} als positiv voraussetzen, so ist für Functionen u, welche nebst ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen für $x = 0$ verschwinden und sich überdies nebst ihren n ersten Ableitungen für $x = 0$ regulär verhalten, nach

Gleichung (13.) No. III

$$(5.)\qquad \int_0^x F(u, u', \ldots, u^{(m)})\,dx = \varphi(u, u', \ldots, u^{(m-1)}) + c_{nn}\int_0^x Q(u)^2\,dx.$$

Wir gelangen also zu folgendem Resultat:

Bedeutet u eine beliebige Function, welche nebst ihren $n-1$ ersten Ableitungen für $x = 0$ verschwindet und sich überdies nebst ihren n ersten Ableitungen für $x = 0$ regulär verhält, so ist das Integral

$$\int_0^x F(u, u', \ldots, u^{(m)})\,dx$$

für positive zwischen 0 und b gelegene Werthe von x positiv, wenn b die kleinere der beiden Grössen α und β darstellt, und wenn c_{nn} positiv vorausgesetzt wird.

291]

VII.

Die im Vorhergehenden skizzirte Untersuchung hat nicht nur für die Anwendungen ein praktisches Interesse; sie kann vielmehr auch in rein analytischen Fragen verwerthet werden.

Es möge genügen, dieses an dem folgenden Beispiele zu erläutern.

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$(\alpha.)\qquad F(u, u', \ldots, u^{(m)}) = f(x),$$

wo $F(u, u', \ldots, u^{(m)})$ dieselbe Beschaffenheit wie im Vorhergehenden hat, während $f(x)$ eine innerhalb des Intervalles von $x = 0$ bis $x = b$ reguläre reale Function der realen Variablen x ist (b ist die in voriger Nummer charakterisirte Grösse).

Wird eine Lösung der Gleichung (α.) durch die Anfangswerthe

$$u = 0,\quad u' = 0,\quad \ldots,\quad u^{(n-1)} = 0$$

für $x = 0$ bestimmt*) und diese Lösung für reale positive Werthe von x verfolgt, so unterliegt die Frage, ob man in einem gewissen Intervall einer

*) Dass dabei selbstverständlich $f(0)$ von Null verschieden sein muss, hat mir mein Vater bei der Herstellung des Manuscripts mündlich bemerkt. R. Fuchs.

Singularität von u begegne, bekanntlich grossen Schwierigkeiten. Aus den Resultaten der vorigen Nummer kann man nun beispielsweise folgenden Schluss ziehen:

Ist $\int_0^x f(x)\,dx$ nicht für alle Werthe von x des Intervalles 0 bis b positiv, so kann u nicht in dem ganzen Intervalle eine reale sich regulär verhaltende Function bleiben.

ANMERKUNGEN.

---

1) Änderungen gegen das Original.

S. 346, Zeile 5 v. u. wurde »und $c_{kl} = c_{lk}$ ist« hinzugefügt,

„ 351, „ 2 und 3 steht im Original: dass y_1 folglich auch $y_2, \ldots, y_n$ reale Functionen von x sind.

2) Vgl. die Anmerkung zur vorhergehenden Abhandlung LXXIII. R. F.

LXXVI.

ÜBER ZWEI NACHGELASSENE ARBEITEN ABELS UND DIE SICH DARAN ANSCHLIESSENDEN UNTERSUCHUNGEN IN DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN*).

(Acta Mathematica, Band 26, 1902, S. 319—332.)

I.

[319

In zwei nachgelassenen Abhandlungen (t. II, No. VIII und No. IX der von Sylow und Lie besorgten Ausgabe der Abelschen Werke von 1881) hat Abel die Sätze Legendres über Vertauschung von Parameter und Argument bei den elliptischen Integralen dritter Gattung auf lineare Differentialgleichungen ausgedehnt.

Diese Arbeiten Abels sind alsdann von Jacobi (Crelles Journal, Bd. 32, S. 185[1]) durch eine abweichende Darstellung derselben in ein helles Licht gestellt worden.

*) Die Abhandlung, welche wir hier veröffentlichen, ist die letzte, welche aus der Hand des verewigten Verfassers stammt. Als die Abhandlung schon im Druck war, wurde der Verfasser am 26. April plötzlich auf der Strasse von der Krankheit betroffen, welche nach wenigen Minuten seinem ruhmreichen, der mathematischen Wissenschaft mit so grosser Hingabe und so seltenem Erfolg geweihten Leben ein Ende machte. Die Zeit und der Platz fehlen uns augenblicklich um eine angemessene Schilderung zu geben von der Stellung, welche Fuchs in der mathematischen Wissenschaft einnimmt, sowie von dem gewaltigen Einflusse, welchen er auf die Entwickelung der Mathematik in den letzten 37 Jahren, seit dem Erscheinen seiner berühmten Abhandlung Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen ausgeübt hat. Eine solche Schilderung wird jedoch, wie wir erfahren, nicht lange ausbleiben.

Die Redaktion.

1) Jacobi's Gesammelte Werke, Bd. II (1882), S. 121 ff. R. F.

Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ganze rationale Functionen von x, so betrachtet JACOBI neben dem Differentialausdrucke

$$[y]_1 = A_0 y + A_1 y' + \cdots + A_n y^{(n)},$$

320] wo die oberen Accente Ableitungen nach x bedeuten, den Differentialausdruck

$$[y]_2 = -A_0 y + \mathrm{D}_x(A_1 y) - \mathrm{D}_x^{(2)}(A_2 y) + \cdots \pm \mathrm{D}_x^{(n)}(A_n y) = B_0 y + B_1 y' + \cdots + B_n y^{(n)},$$

welchen wir jetzt als den zu $[y]_1$ adjungirten*) bezeichnen. Da nach LAGRANGE $z[y]_1 + y[z]_2$ für willkürliche Functionen y, z ein vollständiger Differentialquotient ist, so setzt JACOBI

$$\int \{z[y]_1 + y[z]_2\}\, dx = [y, z].$$

Wenn die unabhängige Variable x in $[y]_1, [y]_2, [y, z]$ mit einer unabhängigen Variablen α vertauscht wird, so sollen diese Ausdrücke mit $[y]_1^{(\alpha)}, [y]_2^{(\alpha)}, [y, z]^{(\alpha)}$, und im Gegensatze hierzu die ursprünglichen auf x bezüglichen Ausdrücke mit $[y]_1^{(x)}, [y]_2^{(x)}, [y, z]^{(x)}$ bezeichnet werden.

Sei $\mathfrak{A}_k$ dieselbe Function von α wie A_k von x und

$$\frac{A_k - \mathfrak{A}_k}{x - \alpha} = P_k,$$

so ist

$$U = -P_0 + \frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \cdots \pm \frac{\partial^n P_n}{\partial x^n}$$

eine ganze rationale Function von x und α,

$$\text{(A.)} \qquad U = \sum C_{mp}\, \alpha^m x^p,$$

wo C_{mp} den Coefficienten von x^p in $[x^{-m-1}]_2$ bedeutet. JACOBI findet nun die Beziehung

$$\left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_1^{(\alpha)} + \left[\frac{1}{x-\alpha}\right]_2^{(x)} = U,$$

aus welcher er die andere ableitet:

$$\text{(B.)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left[y, \frac{\mathfrak{z}}{x-\alpha}\right]^{(x)} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{y}{\alpha - x}, \mathfrak{z}\right]^{(\alpha)} = U y \mathfrak{z},$$

*) Vergl. CRELLES Journal, Bd. 76, S. 183 [1]).

[1]) Abh. XVI, S. 421, Band I dieser Ausgabe. R. F.

wo y eine Lösung der Gleichung $[y]_1^{(x)} = 0$, $\mathfrak{z}$ eine Lösung der Gleichung $[\mathfrak{z}]_2^{(\alpha)} = 0$ bedeutet.

Ist $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein linear unabhängiges System von Lösungen der Gleichung $[y]_1 = 0$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ebenso ein linear unabhängiges System von [321 Lösungen der adjungirten Gleichung $[z]_2 = 0$, die beiden Systeme so gewählt, dass $[y_i, z_i] = 1$, $[y_i, z_k] = 0$, für $i \neq k$, so folgt aus den Gleichungen

$$[y_k, z] = r_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für eine beliebige Function z

$$\text{(1.)} \qquad z^{(\lambda)} = z_1^{(\lambda)} r_1 + z_2^{(\lambda)} r_2 + \cdots + z_n^{(\lambda)} r_n \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n-1)$$

und ebenso aus den Gleichungen

$$[y, z_k] = s_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für eine beliebige Function y

$$\text{(2.)} \qquad y^{(\lambda)} = y_1^{(\lambda)} s_1 + y_2^{(\lambda)} s_2 + \cdots + y_n^{(\lambda)} s_n.$$

Setzt man mit JACOBI in r_i für z

$$z = \int \frac{\mathfrak{z}\, d\alpha}{x - \alpha},$$

wo $\mathfrak{z}$ eine Lösung der Gleichung $[\mathfrak{z}]_2^{(\alpha)} = 0$ bedeutet, so folgt unter Anwendung der Gleichungen (B.), (1.), (2.) das Resultat:

$$\text{(C.)} \qquad \Pi(k) \sum_1^n{}_\lambda\, z_\lambda^{(i)} \int \frac{y_\lambda\, dx}{(x-\alpha)^{k+1}} - \Pi(i) \sum_1^n{}_\lambda\, \mathfrak{y}_\lambda^{(k)} \int \frac{\mathfrak{z}_\lambda\, d\alpha}{(\alpha - x)^{i+1}}$$
$$= \sum C_{mp}\, \mathfrak{y}_g^{(k)} z_h^{(i)} \int \alpha^m \mathfrak{z}_g\, d\alpha \int x^p y_h\, dx,$$

wo $\mathfrak{y}_\lambda, \mathfrak{z}_\lambda$ resp. dieselben Functionen von α sind wie y_λ, z_λ von x, und wo die Summation auf der rechten Seite sich auf $g = 1, 2, \ldots, n$; $h = 1, 2, \ldots, n$ und auf dieselben Combinationen von m, p wie in Gleichung (A.) bezieht.

Für $i = 0, 1, \ldots, n-1$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$ stellt (C.) n^2 Gleichungen dar, welche gestatten die n^2 Grössen $\int \frac{y_i\, dx}{(x-\alpha)^{k+1}}$ linear durch die n^2 Grössen $\int \frac{\mathfrak{z}_i\, d\alpha}{(\alpha - x)^{k+1}}$ und umgekehrt auszudrücken.

Sie liefern die vollständige Lösung des Problems, welches sich ABEL in der No. IX der bezeichneten Abhandlungen gestellt hatte.

322]

II.

No. 1.

Am Schlusse seiner Abhandlungen (Crelles Journal, Bd. 32, S. 196[1]) sagt Jacobi: »Um das aufgestellte Theorem in ein vollständiges Licht zu setzen, und insbesondere die Anfangsgrenzen der Integrale zu bestimmen und die nothwendigen Beschränkungen des Theorems anzugeben, ist es nöthig, den Character der Lösungen der linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der Variablen sind, näher zu ergründen, wofür, wenn man die zweite Ordnung überschreitet, noch wenig von den Mathematikern geschehen ist«.

Nachdem mir die Resultate meiner Untersuchungen über die Natur dieser Functionen die Mittel hierzu gewährt hatten, unternahm ich es, die Abel-Jacobischen Theoreme zu präcisiren. Es gelang mir gleichzeitig, auf diese präcisirte Formulirung mich stützend, Consequenzen dieser Theoreme von, wie es scheint, weittragender Bedeutung zu ziehen. Die Resultate dieser Untersuchung habe ich im Crelleschen Journal, Bd. 76, S. 177 ff.[2]) unter dem Titel »Über Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden« veröffentlicht.

In dieser Arbeit beschränken wir uns auf Differentialgleichungen der Klasse, welche ich in meiner Arbeit (Crelles Journal, Bd. 66, S. 146, Gl. (12.)[3])) dahin characterisirt hatte, dass in den zur Umgebung jedes der singulären Punkte gehörigen Entwickelungen nicht unendlich viele negative Potenzen auftreten, welche also für jeden singulären Punkt eine determinirende Fundamentalgleichung aufweisen.

Nachdem nachgewiesen ist, dass die adjungirte Differentialgleichung jeder Gleichung dieser Klasse ebenfalls zu derselben Klasse gehört und dieselben singulären Punkte besitzt, werden die Beziehungen erörtert, welche zwischen den zu demselben singulären Punkte gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichung und ihrer adjungirten stattfinden.

1) C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke, Bd. II (1882), S. 134. R. F.
2) Abh. XVI, S. 415, Band I dieser Ausgabe. R. F.
3) Abh. VI, S. 186, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Es wird die Differentialgleichung jener besonderen Klasse in die Form [323
gesetzt:

$$\text{(D.)}\qquad [y]_1^{(x)} = \sum_0^n{}_\alpha F_{(n-\alpha)(\varrho-1)}(x)\, F(x)^\alpha y^{(\alpha)} = 0,$$

wo $F_k(x)$ eine ganze rationale Function k^{ten} Grades bedeutet und

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho)$$

ist.

Nun wird nachgewiesen, dass bei vorgeschriebenen singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ die Coefficienten der Functionen $F_{(n-\alpha)(\varrho-1)}(x)$ so gewählt werden können, dass die Wurzeln der zu jedem a_k gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Gleichung (D.) von einander verschieden und ihre realen Theile negativ und absolut kleiner als Eins sind; was zur Folge hat, dass auch für die zu (D.) adjungirte Differentialgleichung

$$\text{(E.)}\qquad [z]_2^{(x)} = \sum_0^n{}_\alpha (-1)^{\alpha-1} D_x^{(\alpha)}[F_{(n-\alpha)(\varrho-1)}(x)\, F(x)^\alpha z] = 0$$

die Wurzeln der zu jedem a_k gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung die nämliche Eigenschaft haben. Die Coefficienten können aber so gewählt werden, dass gleichzeitig die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung für jede der Gleichungen (D.) und (E.) von einander verschieden und in ihren realen Theilen positiv und grösser als Eins werden.

Von der Differentialgleichung (D.) wird in der Fortsetzung der Arbeit vorausgesetzt, dass die Wurzeln der zu jedem a_k gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von einander verschieden, und in ihren realen Theilen negativ und absolut kleiner als Eins sind, während für $x = \infty$ nur gefordert wird, dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung von einander verschieden seien. Nach den daselbst angestellten Erörterungen hat alsdann die zu (D.) adjungirte Gleichung (E.) dieselbe Eigenschaft.

No. 2.

[324

Wir setzen (S. 178 der Arbeit[1]), um die durch die Integration in $[y, z]$ eingeführte Constante zu fixiren,

$$\text{(1.)}\qquad [y, z] = \sum_0^n{}_\lambda H_\lambda,$$

1) S. 416, Band I dieser Ausgabe. R. F.

$$H_\lambda = \sum_0^{\lambda-1} {}_a (-1)^a y^{(\lambda-a-1)} D_x^{(a)}(A_\lambda z) = \sum_0^{\lambda-1} {}_a (-1)^a z^{(\lambda-a-1)} D_x^{(a)}(B_\lambda y). \tag{2.}$$

Wenn nun nach Gleichung (D.)

$$A_k = F_{(n-k)(\varrho-1)}(x)\, F(x)^k \tag{3.}$$

gewählt wird, so wird unter den am Schlusse der No. 1 erwähnten Voraussetzungen nachgewiesen, dass:

$$\left[y, \frac{1}{x-\alpha}\right]_{x=a}^{(x)} = 0, \tag{4.}$$

wenn y eine Lösung der Gleichung (D.), a einer der singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$, und α von a verschieden ist.

Setzt man in Gleichung (E.) α an die Stelle der Variablen x, und bezeichnet dann eine Lösung derselben mit $\mathfrak{z}$, so folgt ebenso

$$\left[\frac{1}{x-\alpha}, \mathfrak{z}\right]_{\alpha=a}^{(\alpha)} = 0, \tag{5.}$$

wenn x von a verschieden ist.

Es werde nunmehr die x-Ebene durch einen zusammenhangenden sich selbst nirgendwo schneidenden Linienzug $\mathfrak{S}$ zerschnitten, der die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ in sich aufnimmt, der aber auch durch $a_0 = \infty$ hindurchgeht, wenn die realen Theile der Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung grösser als Eins sind. Es möge l_μ den Theil des Schnittes $\mathfrak{S}$ bezeichnen, welcher in einer ein für allemal festgesetzten Rich-
325] tung von a_μ nach $a_{\mu+1}$ führte. Wenn α an die Stelle der Variablen x gesetzt wird, so soll die α-Ebene durch einen mit $\mathfrak{S}$ sich deckenden Linienzug zerschnitten werden.

Es wird jetzt, unter Beibehaltung der in (3.) festgelegten Bedeutung von A_k, von der ABEL-JACOBIschen Gleichung (B.) ausgegangen, in welcher mit y eine Lösung der Gleichung (D.), mit $\mathfrak{z}$ eine Lösung der Gleichung (E.) (nach Vertauschung der Variablen x mit α) bezeichnet wird. Wird diese Gleichung in Bezug auf x längs l_μ von a_μ bis $a_{\mu+1}$, und in Bezug auf α längs l_ν von a_ν bis $a_{\nu+1}$ integrirt, wobei vorausgesetzt wird, dass die Theile l_μ und l_ν nicht zusammenstossen, so erhält die linke Seite nach den Gleichungen (4.) und (5.) den Werth Null, es ist also

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha\, U y \mathfrak{z} = 0 \tag{F.}$$

(l. c. S. 188, Gl. (4.); S. 206, Gl. (T.)[1]).

Erheblichere Schwierigkeiten stellten sich in den Weg, als wir die Gleichung (B.) in Bezug auf x und in Bezug auf α resp. längs zweier auf einander folgender Theile $l_\mu, l_{\mu+1}$ zu integriren unternahmen. Es würde mich zu weit führen, wenn ich die Hülfsmittel, welche wir (l. c. S. 189—206[2]) aus einem tieferen Eindringen in die Natur der Lösungen der linearen Differentialgleichungen schöpfen mussten, hier skizziren wollte. Ich muss mich daher begnügen, das l. c. S. 206[3]) erhaltene Resultat hier nur zu beschreiben:

Wir bezeichnen mit $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ das zu $x = \infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (D.), mit $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ das zu $x = \infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem der adjungirten Gleichung (E.), welche so gewählt sind, dass η_k, ζ_k adjungirte Elemente bedeuten (l. c. p. 183[4])). Ferner bedeuten $\eta_{1\mu}, \eta_{2\mu}, \ldots, \eta_{n\mu}$ das zum singulären Punkte $a_{\mu+1}$ gehörige kanonische Fundamentalsystem der Gleichung (D.), $\zeta_{1\mu}, \zeta_{2\mu}, \ldots, \zeta_{n\mu}$ das zu demselben singulären Punkte gehörige kanonische Fundamentalsystem von Lösungen der adjungirten Gleichung (E.), welche wieder so gewählt sind, dass $\eta_{k\mu}$ und $\zeta_{k\mu}$ adjungirte Elemente bedeuten. (Vergl. die Definition des zu einem singulären Punkte gehörigen Fundamentalsystems in meinen Arbeiten, CRELLES Journal, Bd. 66, S. 139 und Bd. 68, S. 364[5]).

Zwischen diesen Systemen finden die Gleichungen [326

$$\begin{cases} \eta_k = \sum_1^n {}_\lambda\, b_{k\lambda}\, \eta_{\lambda\mu}, \\ \zeta_k = \sum_1^n {}_\lambda\, c_{k\lambda}\, \zeta_{\lambda\mu} \end{cases} \tag{6.}$$

statt, wo $b_{k\lambda}, c_{k\lambda}$ Constanten sind, für deren Berechnung in meiner Arbeit (CRELLES Journal, Bd. 75, S. 210[6]) ein Weg angegeben worden.

Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen determinirenden

[1]) S. 427 und S. 447, Band I dieser Ausgabe. R. F.
[2]) Ebenda S. 428—447. R. F.
[3]) Ebenda S. 447. R. F.
[4]) Ebenda S. 422. R. F.
[5]) Abh. VI, S. 179 und Abh. VII, S. 216—217, Band I dieser Ausgabe. R. F.
[6]) Abh. XIV, S. 396, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Fundamentalgleichung der Gleichung (D.)

$$D(r) = 0; \tag{7.}$$

so ist

$$\begin{cases} \eta_{\lambda\mu} = (x-a_{\mu+1})^{r_\lambda}\varphi_\lambda(x), \\ \zeta_{\lambda\mu} = (x-a_{\mu+1})^{-1-r_\lambda}\psi_\lambda(x), \end{cases} \tag{8.}$$

wo $\varphi_\lambda(x)$, $\psi_\lambda(x)$ in der Umgebung von $x = a_{\mu+1}$ holomorph und für $x = a_{\mu+1}$ von Null verschieden sind.

Es zeigt sich, dass

$$[\eta_{\lambda\mu}, \zeta_{\lambda\mu}] = \varphi_\lambda(a_{\mu+1})\psi_\lambda(a_{\mu+1})D'(r_\lambda), \tag{9.}$$

wo $D'(r)$ die Ableitung von $D(r)$ nach r bedeutet.

Die in $\varphi_\lambda(x)$, $\psi_\lambda(x)$ auftretenden willkürlichen Factoren werden nun so gewählt, dass die rechte Seite der Gleichung (9.) den Werth Eins annimmt, so dass

$$[\eta_{\lambda\mu}, \zeta_{\lambda\mu}] = 1. \tag{10.}$$

In gleicher Weise lassen sich die unbestimmten Factoren von η_{lk}, ζ_{k} so bestimmen, dass

$$[\eta_{lk}, \zeta_{k}] = 1. \tag{10a.}$$

Zwischen den Grössen c_{ik} und b_{ik} finden die Gleichungen statt

$$\begin{cases} \sum_1^n {}_i\, b_{\lambda i} c_{\mu i} = 0, \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda \neq \mu) \\ \sum_1^n {}_i\, b_{\lambda i} c_{\lambda i} = 1. \end{cases} \tag{11.}$$

327] Nach diesen Erörterungen und Festsetzungen wird das folgende Resultat erschlossen:

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha\, U \eta_{lk}\, \mathfrak{z}_l = (-1)^n \pi \sum_1^n {}_\alpha \frac{b_{k\alpha} c_{l\alpha} e^{-\pi i r_\alpha}}{\sin \pi r_\alpha}, \tag{G.}$$

wo $\mathfrak{z}_l$, dieselbe Function von α ist wie z_l von x, l. c. S. 206[1]).

[1]) Abh. XVI, S. 447, Band I dieser Ausgabe. R. F.

III.

No. 1.

Der wahre Sinn und die Wichtigkeit der in den Gleichungen (F.), (G.) auftretenden Resultate wird in ein helleres Licht gesetzt durch eine Arbeit, welche ich später in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie (22. December 1892, S. 1113[1]) veröffentlicht habe.

In dieser Arbeit wird auf die Rolle hingewiesen, welche die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Lösungen der Differentialgleichung in jenen Relationen (F.), (G.) spielen. Zu diesem Ende ist nur eine etwas veränderte Schreibweise der rechten Seite der Gleichung (G.) erforderlich. Durch diese Schreibweise tritt der Umstand besonders hervor, dass die rechte Seite lediglich von den Coefficienten der auf $a_{\mu+1}$ bezüglichen Fundamentalsubstitution der Lösungen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ abhängt. Dieser Umstand aber bringt es mit sich, dass die Relationen (F.), (G.) einen invarianten Character haben, in dem Sinne, dass sie für die gesammte Klasse von Differentialgleichungen, zu welcher eine vorgelegte Differentialgleichung gehört, die gleiche Form behalten. Diese Invarianz macht es möglich, gewisse beschränkende Voraussetzungen, welche in der Arbeit (Crelles Journal, Bd. 76, S. 177 ff.[2]) über die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen gemacht worden sind, aufzuheben. Dieses wird in der in Rede stehenden Arbeit nachgewiesen; es wird nur, um Complicationen in der Darstellung zu vermeiden, die Voraussetzung gemacht, dass die Differenzen zweier jener Wurzeln, wenn sie nicht sämmtlich ganzzahlig sind, aber zum Auftreten von Logarithmen keine Veranlassung geben, nicht zum Theil ganzzahlig sein sollen.

Sei [328

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho)(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_\sigma)$$

und

$$(\bar{\mathrm{D}}.)\quad [y]_1^{(x)} = \sum_0^n {}_\alpha F_{(n-\alpha)(\tau-1)}(x)\, F(x)^\alpha y^{(\alpha)} = 0, \tag{1.}$$

$$(\bar{\mathrm{E}}.)\quad [z]_2^{(x)} = \sum_0^n {}_\alpha (-1)^{\alpha-1} \mathrm{D}_x^\alpha (F_{(n-\alpha)(\tau-1)}(x)\, F(x)^\alpha z) = 0, \tag{2.}$$

$$\tau = \varrho + \sigma,$$

[1]) Abh. LX, S. 141 dieses Bandes. R. F.
[2]) Abh. XVI, S. 415 ff., Band I dieser Ausgabe. R. F.

wo $b_1, b_2, \ldots, b_\sigma$ diejenigen singulären Punkte bedeuten, bei deren Umkreisung sämmtliche Integralquotienten ungeändert bleiben, während mit $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ diejenigen singulären Punkte bezeichnet werden, für welche die Differenzen der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen nicht ganze Zahlen sind.

Es werden nun vorläufig noch die Voraussetzungen der Abhandlung (CRELLES Journal, Bd. 76[1]) festgehalten, dass die Wurzeln der zu $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen in ihren realen Theilen negativ und absolut kleiner als Eins sind, und, um die oben erwähnte veränderte Schreibweise der rechten Seite der Gleichung (G.) zu erzielen, wird die Substitution

$$(b_{ik}) \quad \text{(s. II., No. 2, Gl. (6.))}$$

mit B, die Substitution

$$\begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & \ldots, & 0 \\ . & . & \ldots, & . \\ 0, & 0, & \ldots, & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_a = e^{2\pi i r_a},$$

($r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung) mit L bezeichnet; dann ist

$$S_\mu = (g_{ik}) = BLB^{-1}$$

die dem Umlaufe um $a_{\mu+1}$ angehörige Fundamentalsubstitution. Setzt man die Determinante

$$|b_{ik}| = \Delta \quad \text{und} \quad B_{kl} = \frac{\partial \Delta}{\partial b_{kl}},$$

so ist nach den Gleichungen (11.) in II., No. 2

$$c_{kl} = \frac{B_{kl}}{\Delta}.$$

329] Alsdann ergiebt sich aus Gleichung (G.)

$$\text{(G}'.) \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha\, U \eta_{ik} \mathfrak{z}_l = (-1)^n\, 2\pi i \sum_{0}^{n}{}_a \frac{A_a^{(k,l)}}{\lambda_a - 1},$$

1) Abh. XVI, S. 415 ff., Band I dieser Ausgabe. R. F.

wenn wir

$$A_a^{(k,l)} = \frac{b_{ka} B_{la}}{\Delta} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

setzen. (Vergl. Sitzungsberichte, l. c., p. 1117, Gl. (S'.)[1]).

Die rechten Seiten der Gleichungen (G'.) sind lediglich durch die auf $a_{\mu+1}$ bezügliche Fundamentalsubstitution des Fundamentalsystems $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ bestimmt. Diese Gleichungen repräsentiren n^2 Gleichungen für die n^2 Coefficienten g_{ik} dieser Fundamentalsubstitution.

No. 2.

Wir können zunächst durch eine Substitution

$$\text{(1.)} \qquad y = (x-a_1)^{-\alpha_1}(x-a_2)^{-\alpha_2}\ldots(x-a_\varrho)^{-\alpha_\varrho} w,$$

wo die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ Null oder positive ganze Zahlen bedeuten, die Gleichung ($\overline{\text{D}}$.) in eine Gleichung

$$\text{(2.)} \qquad B_0 w + B_1 w' + \cdots + B_n w^{(n)} = 0$$

verwandeln, für welche die Wurzeln der zu $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen in ihren realen Theilen positiv sind.

Ist $m_a - 1$ die höchste ganze Zahl, welche in den realen Theilen der Wurzeln der zu a_a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Gleichung (2.) enthalten ist, so werde

$$\text{(3.)} \qquad \begin{cases} \Pi(x) = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\ldots(x-a_\varrho)^{m_\varrho}, \\ \psi(x) = (x-a_1)\ (x-a_2)\ \ldots(x-a_\varrho) \end{cases}$$

gesetzt. Wir beweisen nun, dass man n ganze rationale Functionen $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ derart bestimmen kann, dass, wenn

$$\text{(4.)} \qquad P_k(x) = \frac{\varphi_k(x)\psi(x)^k}{\Pi(x)}$$

und [330

$$\text{(5.)} \qquad u = P_0(x) w + P_1(x) w' + \cdots + P_{n-1}(x) w^{(n-1)}$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung, welcher u genügt,

1) Abh. LX, S. 145 dieses Bandes. R. F.

$$C_0 u + C_1 u' + \cdots + C_n u^{(n)} = 0 \tag{6.}$$

überhaupt dieselben singulären Punkte wie (2.) besitzt, und dass die realen Theile der Wurzeln der auf $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichungen von (6.) zwischen Null und der negativen Einheit sich befinden.

Die Gleichung (6.) gehört zu derselben Klasse mit der Gleichung $(\overline{\mathrm{D}}.)$, daher sind die Fundamentalsubstitutionen zu je einem singulären Punkte für beide Gleichungen übereinstimmend.

Hieraus fliesst das folgende Resultat:

Wenn die Gleichung $(\overline{\mathrm{D}}.)$ in Bezug auf die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen nicht den Voraussetzungen entspricht, auf Grund deren die Gleichung (G'.) aufgebaut worden ist, so kann durch rationale Rechnungsoperationen eine mit $(\overline{\mathrm{D}}.)$ zu derselben Klasse gehörige Differentialgleichung, wie Gleichung (6.), hergeleitet werden, welche den genannten Voraussetzungen Genüge leistet. Man hat alsdann in der linken Seite der Gleichung (G'.) nur für $\eta_k, \mathfrak{z}_k, U$ die auf die Gleichung (6.) bezüglichen entsprechenden Functionen zu substituiren, während die rechten Seiten ungeändert bleiben. Die so erhaltenen n^2 Gleichungen (G'.) liefern alsdann die Coefficienten $g_{\alpha\beta}$ der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen Fundamentalsubstitution der Gleichung $(\overline{\mathrm{D}}.)$.

No. 3.

In derselben Arbeit werden alsdann noch die Relationen discutirt, welche durch die Gleichungen (F.) und (G'.) zwischen den bestimmten Integralen

$$J_{kl}^{(\mu)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^l \eta_k \, dx, \qquad H_{kl}^{(\mu)} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^l \zeta_k \, dx$$

und den Coefficienten der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen Fundamentalsubstitutionen fest-
331] gestellt sind. Wir heben daraus das Ergebniss hervor: Sämmtliche Grössen $J_{kl}^{(\mu)}$ lassen sich durch $J_{k0}^{(\mu)}, J_{k1}^{(\mu)}, \ldots, J_{k,n(\tau-1)-1}^{(\mu)}$ und sämmtliche Grössen $H_{kl}^{(\mu)}$ durch $H_{k0}^{(\mu)}, H_{k1}^{(\mu)}, \ldots, H_{k,n(\tau-1)-1}^{(\mu)}$ linear und homogen darstellen.

Zum Beschluss wird noch die Rechnung für $n = 1$ und $n = 2$ durchgeführt.

IV.

Wir erwähnen hier noch die sich an die vorhergehenden Untersuchungen anschliessenden Arbeiten der Herren Schlesinger und Hirsch.

Auf den Zusammenhang, der zwischen dem Vertauschungssatze und der Integration linearer Differentialgleichungen durch Quadraturen (bestimmte Integrale) besteht, hat Herr Schlesinger (Crelles Journal, Bd. 116, S. 97 ff. und Handbuch, Bd. II^1, 1897, S. 405 ff.) hingewiesen. Bedeutet $\mathrm{D}_x(y)$ einen linearen homogenen Differentialausdruck n^{ter} Ordnung mit der unabhängigen Variablen x und Coefficienten, die ganze rationale Functionen m^{ten} Grades sind, so zeigt sich, dass der Abelsche Vertauschungssatz als specieller Fall $(\xi = 0)$ in der allgemeinen Identität (Gl. (C.), l. c. p. 102)

$$\mathrm{D}_x((z-x)^{\xi-1}) = \mathfrak{D}_z((z-x)^{\xi+m-1})$$

enthalten ist, wo $\mathfrak{D}_z$ einen linearen Differentialausdruck $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung mit der unabhängigen Variablen z darstellt, dessen Coefficienten sich aus denen von D_x (und umgekehrt) in einfacher Weise zusammensetzen lassen (Gl. (2.), (3.), l. c. p. 102, 103).

Die Lösungen von $\mathrm{D}_x(y) = 0$ lassen sich auf Grund der angegebenen Identität, durch die Lösungen v der zu $\mathfrak{D}_z = 0$ adjungirten Differentialgleichung (der Eulerschen Transformirten von $\mathrm{D}_x = 0$) in der Form

$$y = \int_L v(z-x)^{\xi-1} \, dz,$$

und umgekehrt die Lösungen von $\mathfrak{D}_z(u) = 0$ durch die Lösungen w der zu $\mathrm{D}_x = 0$ adjungirten Differentialgleichung, in der Form

$$u = \int_\Lambda w(z-x)^{\xi-1} \, dx$$

darstellen, wo L, Λ geeignet gewählte geschlossene Integrationswege bedeuten.

Herr Hirsch behandelt (Mathem. Annalen, Bd. 54, S. 202 ff.) die von [332
mir in den oben erwähnten Arbeiten aufgestellten Relationen (Periodenrelationen), nachdem er (Mathem. Annalen, Bd. 52, S. 130 ff.) den Fall $n = 1$ vorweggenommen, indem er 1) mit Benutzung der erwähnten Schlesinger-

schen Arbeit diese Relationen in der von mir gegebenen Form aus dem Vertauschungssatze herleitet (Mathem. Annalen, Bd. 54, II. Abschnitt, S. 249—275), und dann 2) eine andere — der ersten algebraisch äquivalente — Form dieser Relationen angiebt, die, in Nachbildung der von RIEMANN für die analoge Frage der Theorie der ABELschen Integrale angewendeten Methode, durch die Auswerthung eines gewissen Randintegrals erzielt wird (l. c. § 15—17, S. 276—295). Unter der Voraussetzung, dass die Monodromiegruppe der betrachteten Differentialgleichung eine definite HERMITEsche Form in sich selbst transformirt, liefert dieselbe Methode der Randintegration eine Ungleichung für die realen und imaginären Bestandtheile der gedachten Integrale (indem eine aus diesen Integralen gebildete HERMITEsche Form sich als stets positiv definit erweist), die der von RIEMANN für die Periodicitätsmoduln der ABELschen Integrale aufgestellten Ungleichung analog ist (l. c. § 18, S. 295—313; § 20, S. 316—322).

Berlin, 15. März 1902.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 364, Zeile 1 v. u. Differentialgleichung statt Differentialgleichungen,
„ 370, „ 4 v. u. den Gleichungen statt Gleichung.
„ „ , „ 3 v. u. B_{kl} statt B_k,
„ 371, „ 13 v. u. wurde »Wurzeln der« vor zu $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ hinzugefügt. R. F.

LXXVII.

Ueber den Zusammenhang zwischen Cometen und Sternschnuppen.

Rede

gehalten

am Königsgeburtstag in der Aula der Universität Greifswald

von

Professor Dr. L. Fuchs.

Greifswald.
Druck der Universitäts-Buchdruckerei von F. W. Kunike.
1873.

Hochansehnliche Versammlung!

Wie die Vertreter vieler tausender öffentlicher Anstalten unseres Vater- [3
landes an anderen Orten sind wir heute hier vereint, um den Geburtstag unseres allgeliebten und allverehrten Kaisers und Königs zu feiern. Es kann einem Festredner nicht an Stoff fehlen, um seinen Namen in gebührender Weise zu verherrlichen. Er darf nur in die Fülle der Heldenthaten hineingreifen, durch welche im letzten Decennium unser König in drei aufeinanderfolgenden gewaltigen Stufen zum Schöpfer unseres neuen deutschen Vaterlandes geworden, um durch schlichte Darstellung derselben ohne idealisirende Zuthaten jedes deutsche Gemüth zur innigsten Dankbarkeit gegen unsern Herrscher zu erwärmen und zu erheben. Er darf nur auf die organisatorische Kraft hinweisen, mit welcher unser Kaiser der neuen Schöpfung durch weise Gesetze einen stabilen Zustand zu verschaffen bemüht ist, auf die ethische Energie, welche von ihm ausgehend die widerstrebendsten Elemente in das allgemeine Bewusstsein der grossen Aufgaben unseres Vaterlandes zu einigen [4
trachtet, um die ehrerbietigste Bewunderung vor dem Manne hervorzurufen, der an Weisheit ein Greis, als heldenmüthiger Kämpfer gegen den äusseren und inneren Feind deutschen Wesens ein Jüngling dasteht.

Allein die grossen Thaten unseres Königs sprechen noch zu laut in unserem Herzen, als dass sie durch Worte ihren adäquaten Ausdruck finden könnten. Gegenüber aber einem solchen Herrscherleben, wie das unseres Königs, gegenüber solch treuer Pflichterfüllung in den ihm von der Vorsehung auferlegten Aufgaben, werden wir an einem solchen Tage mit unwiderstehlicher Gewalt an unsere eigenen Pflichten gemahnt, wir werden aufgefordert, uns unserer Aufgaben bewusst zu werden, dahin zu streben, durch gewissenhafte Erfüllung derselben uns unseres königlichen Vorbildes und unserer Gemeinsamkeit mit dem grossen Vaterlande würdig zu machen. Unsere Aufgabe ist die Pflege der Wissenschaft, und nichts ist geeigneter wissenschaftlichen Männern ihren Beruf zum vollen Bewusstsein zu bringen als die Vorführung dessen, was dem menschlichen Geiste durch beharrliche Ausdauer bereits gelungen.

Es sei mir daher gestattet, einen kleinen Abschnitt aus dem Buche derjenigen Wissenschaft vor Ihnen aufzurollen, welche schon oft eine königliche genannt worden, und die gewiss vor allen anderen geeignet ist unser Gemüth zu erheben und die Expansivkraft unseres Geistes anzuregen, ich meine der
5] Astronomie. Der Abschnitt handelt von den neuesten Bestrebungen der Gelehrten, den renitenten Mitgliedern des Weltgebäudes, welche mit unserem Sonnensysteme in nähere Berührung kommen, den Cometen und Sternschnuppen, Gesetze zu geben.

Die Untersuchungen über diese Himmelserscheinungen haben nämlich im letzten Decennium einen erneuten Aufschwung erhalten, welchen man besonders der Entdeckung des italienischen Astronomen Schiaparelli vom Zusammenhange der Sternschnuppen und Cometen und der weitreichenden Entdeckung der Heidelberger Naturforscher Bunsen und Kirchhoff verdankt, durch welche eine neue Wissenschaft, die Physik des Himmels, gegründet worden. In der allerneuesten Zeit hat der als physischer Astronom rühmlichst bekannte Leipziger Professor Zöllner durch sein Aufsehen erregendes Werk: »Über die Natur der Cometen, Beiträge zur Geschichte und Theorie der Erkenntniss« die Frage über den Ursprung und die Natur der erwähnten Himmelserscheinungen so zu sagen zu einer brennenden gemacht.

Man hat es nicht nöthig, um in weiteren gebildeten Kreisen das Interesse an diesen Untersuchungen wach zu rufen, zu dem problematischen Mittel zu greifen, welches in dem Hinweise gegeben ist, dass auch in diesen so wie in den übrigen Untersuchungen der Astronomie eine Befriedigung des geistigen Bedürfnisses nach dem Erkennen und Begreifen der Natur zu finden ist. Ich nenne dieses Mittel ein problematisches. Denn wenn allerdings für das
6] wissenschaftliche Bewusstsein das Erkennen stets das allein Begehrenswerthe war und bleiben wird, so ist dasselbe für die grössere Menge der Gebildeten nur ein Motiv, in welches sie sich dem wissenschaftlichen Be-

wusstsein zu Gefallen hineinzwängen muss. Die Geschichte der Astronomie zeigt dieses auf jedem ihrer Blätter. Da diese Wissenschaft die Herrschaft des menschlichen Geistes bis in die fernsten Welträume getragen, so hätte man erwarten sollen, dass ihre Resultate, welche den höchsten Triumph der Intelligenz über die Natur darstellen, in das allgemeine Bewusstsein eingedrungen seien. Keinesweges. Es hat auch nicht einmal geholfen, dass das theoretische Interesse durch die materielle Theilnahme unterstützt wurde für die Sonne, die uns Licht und Wärme spendet und unsere Tages- und Jahreszeiten regulirt, für den Sternenhimmel, welcher dem Schiffer als Leitstern auf der Meeresfläche dient. Es hat nichts geholfen, dass die Lehre des Kopernikus zum Dogma der gebildeten Welt geworden, dass die Kepler-schen Gesetze und das Gravitationsgesetz wenigstens zu einer Zeit des Lebens jedem gebildeten Menschen zu Gemüth geführt werden. Als wohnten zwei Seelen im Menschen, deren jede ihrer Wege geht, die eine nimmt diese Lehren auf, die andere aber verharrt in der Vorstellung vergangener Jahrtausende, welche in unserer Erde den Mittelpunkt der Welt und im Menschen das Centrum dieses Centrums erblickt.

Kräftiger, materieller müssen die Einwirkungen sein, welche ein wirk- [7
liches Interesse an der Astronomie in weiteren Kreisen wachrufen sollen. Diese erhabene Wissenschaft muss erst Materie werden, sie muss das Menschengeschlecht aus seiner Gleichgültigkeit dadurch wecken, dass sie eine enge Wechselseitigkeit zwischen den übrigen Himmelskörpern und unserer Erde nachweist, eine Wechselseitigkeit, die bis zur materiellen Berührung reicht. Das hat die Astronomie der letzten Jahrzehnte gethan, und ein bedeutendes Beispiel hierzu bietet uns die neueste Lehre der Cometen und Sternschnuppen. Diese modernen Lehren, an sich der lautersten Theorie angehörig, haben uns die Himmelskörper näher gerückt, nicht wie die Fernröhre nur optisch, sondern in mächtigen materiellen Impulsen. Sie werden, was so viele Jahrhunderte nicht vermochten, erreichen, das Interesse des ganzen Menschengeschlechts an der Astronomie.

Dass aber die Natur keine Sprünge macht, dass dieser Umschwung nur langsam vor sich geht, das haben wir — nicht zu unserem sonderlichen Stolze — häufig Gelegenheit wahrzunehmen. Man sieht heutzutage z. B. die Cometen nicht mehr als unheilverkündigende feurige Ruthen an, aber die

Furcht vor diesen Himmelskörpern ist keine geringere geworden, seitdem man von den Astronomen vernommen, dass Cometen auch zuweilen die Laune
8] hätten, mit der Erde handgreiflich zu werden. Ein Beispiel dieser Cometenfurcht ist uns noch in frischer Erinnerung aus dem Sommer vorigen Jahres, wo für den Monat August ein solches Rencontre angekündigt war.

Der Schrecken eines solchen Zusammentreffens hört sofort auf, wenn man weiss, dass mindestens mehreremale eines jeden Jahres, nicht bloss unseres Lebens, nicht bloss des Lebens unseres Menschengeschlechtes, sondern des Lebens der Erde dieselbe gewissermassen durch solche Cometenungeheuer hindurchgewandert und jetzt noch immer hindurchwandert. Und das geschieht nicht, ohne dass wir es merken. Wir können es vielmehr an dem friedlichen Schauspiele der Sternschnuppen mit unseren Augen sehen. In der That lehrt SCHIAPARELLI — und alle Thatsachen sprechen dafür, alle Gelehrten stimmen ihm bei —, dass wenn es hier auf Erden Sternschnuppen giebt, wir auf der Wanderung durch einen losgetrennten Theil eines Cometen begriffen sind.

Die äussere Erscheinung eines Cometen, wie man ihn mit unbewaffnetem Auge wahrnimmt, ist Jedem von uns erinnerlich. Man erblickt am Himmel in sternartiger Gestalt einen sogenannten Kern, an welchen sich ein fast immer von der Sonne abgewendeter Schweif von ausserordentlich grosser Länge anschliesst. LAPLACE in seinem berühmten Werke über das Weltgebäude weist nach, dass die Cometen in unserem Sonnensysteme als Fremdlinge angesehen werden müssen. Sie sind gewissermassen Boten, welche von
9] einem Sonnensystem zum anderen wandern. Geräth ein solcher Comet z. B. in das Reich unserer Sonne, so wird es nicht gleichgültig sein, ob er mit grösserer oder geringerer Hast seine Einfahrt gehalten. Es sind bestimmte Gesetze vorhanden, deren System Mechanik genannt wird, und diese schreiben folgendes vor: Fährt der Comet langsam ein, so hat er im Reiche sich als Bürger niederzulassen und wie die Planeten in einer geschlossenen Bahn, nämlich einer Ellipse um die Sonne zu kreisen. Fährt er mit grosser Hast ein, so ist er im Reich nicht zu dulden, es ist ihm vielmehr längs eines parabolischen oder hyperbolischen Zweiges seine Marschrute in die unermessliche Ferne anzuweisen, wenn nicht ein Planetenbürger, in dessen Nähe die Marschrute vorüberläuft, sich seiner annehmen und ihn so zu sich heranziehen sollte, dass er durch seinen Schutz erst das Bürgerrecht im Sonnenreiche erwirbt. Es wird ihm dann wiederum eine Ellipse zugewiesen, längs deren er sich nach den Gesetzen des Reiches um die Sonne herumtummeln kann.

Zuweilen aber wird einem Cometen nur vorläufig das Bürgerrecht ertheilt, um ihm alsbald wieder genommen zu werden. So begünstigte im Jahre 1765 der Jupiter einen in das Sonnenreich in seiner nächsten Nähe einpassirenden Cometen derart, dass ihm innerhalb des Reiches eine Ellipse mit $5\frac{1}{2}$jähriger Umlaufszeit verbrieft wurde. Als er aber, wie er musste, im Jahre 1776 nach zweimaligem Umlaufe wieder in dieselbe Nähe des Jupiters gelangte, brachte ihn dieser mächtige Planet auf einen parabolischen Ast, auf welchem er das [10
Sonnensystem verlassen musste, um uns seitdem nicht wieder sichtbar zu werden.

Die Cometen, welche sich eingebürgert, heissen periodische, da sie immer wieder nach Verlauf desselben Zeitraumes, nämlich desjenigen, den sie zum Durchlaufen ihrer elliptischen Bahn nöthig haben, der Sonne nahe genug kommen, um die zu ihrer Sichtbarkeit nöthige Beleuchtung zu erhalten. Die anderen Cometen sind nur einmal sichtbar.

Schon KEPLER beschäftigte sich mit der Frage nach der Natur der Cometen. Seine Beantwortung derselben, so wie diejenige NEWTONS konnten, dem derzeitigen Standpunkte der Physik entsprechend, genügen, alles zu erklären, was man bis dahin an den Cometen wahrgenommen hatte.

Während man sich nun seit den Zeiten NEWTONS nach dem Vorgange von HALLEY sorgfältig mit der Bestimmung der Bahn der verschiedenen Cometen befasste, blieb die Frage nach ihrer physischen Beschaffenheit ein ganzes Jahrhundert fast unberührt. Den ersten Anstoss zur Rückkehr zu derselben zu geben war OLBERS vorbehalten, dessen genaue Beobachtungen des grossen Cometen von 1811 bis dahin nicht beachtete Erscheinungen an diesen Himmelskörpern kennen lehrten. Er beobachtete nämlich, dass der Schweif nicht von dem hinteren, d. h. dem von der Sonne abgewendeten Theile des Cometen ausging, sondern, dass er von der vorderen, d. h. der Sonne zugewendeten Seite des Kopfes ausgehend sich zu beiden Seiten desselben umbog und nach rückwärts sich in's Unermessliche verlängerte, etwa [11
so wie ein üppiges Haar vom Scheitel nach abwärts fällt. OLBERS bemerkt, man könne sich diese Erscheinung nur erklären, wenn man annimmt, dass von

dem Cometen in Folge einer ihm eigenthümlichen Abstossungskraft auf seine eigene Materie die inneren Theile desselben nach der Sonne zu geschleudert werden. Diese würden sich fortbewegen, wenn nicht die Sonne ihrerseits ebenfalls eine Abstossungskraft ausübte, diese aber zwingt sie zur Umkehr. Beide Abstossungen treiben sie nach hinten, wo sie den Schweif bilden.

Ein weiterer Fortschritt wurde angebahnt durch Bessel, welcher die von Olbers gemachten Wahrnehmungen an dem Halleyschen Cometen wiederholte und neue Erscheinungen an demselben enthüllte. Er setzt die Resultate seiner Studien in meisterhafter Weise auseinander in einer berühmten Abhandlung in den Astronomischen Nachrichten des Jahres 1836. Er beobachtete nämlich an der vorderen Seite des Halleyschen Cometen wirklich die Ausströmung von Lichtmaterie aus dem Kopf nach der Sonne hin, und die Umkehr dieser Materie von einer gewissen Stelle aus zur Bildung des Schweifes. Die Umkehrstelle musste da stattfinden, wo die Abstossung der Sonne gegen die ausströmende Cometenmaterie die die Materie aus dem Kern heraustreibende Kraft, oder wie man auch sagen konnte, die Abstossungskraft des Cometen überwog.

12] Es war hiermit durch unzweifelhafte Beobachtungen zweierlei constatirt, erstlich eine treibende Kraft, die ihren Sitz im Cometen hat, und die Materie nach der Sonne hin schleuderte, zweitens eine Repulsivkraft der Sonne, welche diese Materie zurückstiess.

Diese Thatsachen sind nicht wegzuleugnen, und eine Cometentheorie, welche denselben nicht Rechnung trägt, ist als werthlos zu betrachten. In welcher Weise die Annäherung an die Sonne auf die Schweifbildung einwirken kann, zeigt der Comet von 1680, der in seiner grössten Sonnennähe, in zwei Tagen einen Schweif von 12 Millionen geographischen Meilen Länge bildete. Bessel berechnete aus der Grösse der Abstossung die Stärke der constatirten abstossenden Kraft, indem er von der Voraussetzung ausging, dass dieselbe sich im umgekehrten Quadratverhältniss der Entfernung verkleinerte. Pape wiederholte dieselbe Rechnung an dem uns allen bekannten herrlichen Cometen von 1858.

Seit Bessel sind nicht bloss zahlreiche Cometen entdeckt und ihre Bahnen bestimmt worden, sondern viele Beobachter haben die Erscheinungen einzelner Cometen nach dem Vorgange von Olbers und Bessel sorgfältig untersucht,

andere haben durch die Spectralanalyse die materielle Beschaffenheit derselben zu ermitteln sich bemüht, und wieder andere haben mehr oder minder glückliche Hypothesen über die Entstehung der Cometen, insbesondere ihrer [13 räthselhaften Schweife aufgestellt.

Es ist ein höchst interessantes Thema, die Geschichte dieser Hypothesen zu verfolgen und sie der Reihe nach zu kritisiren. Allein dasselbe würde mich hier zu weit führen. Eine jedoch kann ich hier nicht unerwähnt lassen, weil dieselbe gewissermassen zu dem oben erwähnten Werke Zöllners Veranlassung gegeben, ich meine die des sonst hochverdienten englischen Naturforschers Tyndall. Er sieht nämlich Kern und Schweif eines Cometen als chemische Niederschläge eines undurchsichtigen Gases längs der Sonnenstrahlen an. Indem Zöllner in scharfsinniger Weise die Gründe Tyndalls analysirt, weist er ihm nach, dass er vier neue Hypothesen machen müsse, um die eine ausgesprochene zu halten. Aber selbst wenn man Tyndall alles zugäbe, so müsste man seine Cometentheorie dennoch verwerfen, da sie insofern einen entschiedenen Rückschritt in die Zeiten vor Olbers thut, als sie die seitdem an den Cometen beobachteten Wahrnehmungen, namentlich die über die Lichtausströmung ganz ignorirt. —

Am meisten Beachtung verdient die Cometen-Theorie von Zöllner. Er knüpft an die beiden von Olbers und Bessel constatirten Thatsachen, dass die Cometenmaterie sowohl vom Cometen als von der Sonne abgestossen wird, und dass hierin die Ursache zur Schweifbildung liege, an und sucht dieselben zu erklären. Schon Olbers sagte, er wisse zwar nicht, woher diese Ab- [14 stossungen kämen, allein er fände nichts Unnatürliches darin, wenn jemand sie für elektrischer Natur hielte, da wir ja die Kraft der Elektricität in unserer feuchten stets leitenden Atmosphäre so grosse Wirkungen ausüben sähen.

Diesen Gedanken führt Zöllner aus. Er stellt sich vor, ein Comet sei eine flüssige Masse. Als solche muss sie sich erhalten, so lange sie im weiten Weltraume fernab von irgend einer der wärmenden Sonnen wandert. Denn so lange hat sie es sehr kalt, nämlich wie Pouillet berechnet hat, 142° unter dem Gefrierpunkte des Wassers. Nähert sie sich auf ihrer Reise einer Sonne, z. B. der unsrigen, so beginnt auf dem vorderen Theile die Verdampfung. Diese wird um so energischer, je näher der Comet der Sonne kommt, am stärksten in der grössten Nähe. Es strömt also Cometenmaterie in Dampf-

form nach der Sonne hin. Das erklärt die erste von OLBERS und BESSEL constatirte Thatsache der Abstossung des Cometen auf seine eigene Materie in sehr einfacher Weise. Danach hat man zur Erklärung dieser Erscheinung keine neue geheimnissvolle Kraft zu erfinden, man kommt vielmehr mit der banalen Erscheinung der Verdampfung einer Flüssigkeit aus, wie wir sie auch auf Erden wahrnehmen. Wie kommt es aber, dass die Verdampfung in so energischer Weise vor sich geht? Der Umstand allein, dass z. B. der HALLEY-
15] sche Comet in seiner Sonnennähe von der Sonne nur halb soweit absteht als die Erde vermag dieselbe doch nicht vollständig zu erklären? Doch diese Schwierigkeit lässt sich nach der ZÖLLNERschen Theorie beseitigen. Es ist nämlich ein Gesetz der Wärmelehre, dass die Verdampfung einer Flüssigkeit bei bestimmter Temperatur so lange fortdauert, bis die Spannkraft der über der Flüssigkeit lagernden Dämpfe eine gewisse festgesetzte Grenze erreicht. Ist die flüssige Masse mächtig, so zieht sie den entwickelten Dampf kräftig an, drückt ihn zusammen, vergrössert seine Spannkraft, die Verdampfung hört bald auf. Ist sie gering, so kann die Verdampfung bis zur vollständigen Umwandlung in Dampfform fortgehen — wie es in der That bei den kleinen Cometen der Fall ist.

ZÖLLNER sagt weiter, bei der kräftigen Dampfentwickelung werde die Flüssigkeit mächtig durcheinander geschüttelt und zerrissen, und dadurch werde der Dampf elektrisch — man hat in der That in der Nähe zerstäubender Wassertheilchen, z. B. in der Nähe von Wasserfällen, Elektricität sich entwickeln gesehen. Andererseits weisen die elektrischen und magnetischen Einflüsse der Sonnenatmosphäre darauf hin, dass die letztere elektrisch sei — ist ja doch auch unsere Atmosphäre elektrisch. Nun darf man nur noch annehmen, dass Sonnenelektricität und Cometenelektricität gleichartig sind, um die zweite von OLBERS und BESSEL constatirte Thatsache, dass die Cometen-
16] materie von der Sonne abgestossen werde, zu erklären. Es kämpfen hier zwei Kräfte, die Massenanziehung der Sonne und die elektrische Abstossungskraft. ZÖLLNER zeigt durch Rechnung, dass in dem Kampfe dieser Kräfte die letztere die Oberhand behält, wenn deren Spielball ein kleiner Körper ist. In der That hat man es aber mit kleinen Dampfkörperchen zu thun. Daher treibt sie die Abstossungskraft zurück und zwar so kräftig, dass sie — wenn die Elektricität der Sonnenatmosphäre an Stärke nur der unserer Erde gleich

käme — in zwei Tagen schon 70,540,000 geogr. Meilen nach hinten zurücklegen müssten und so den Schweif mit der immensen Geschwindigkeit bilden, wie man es wahrgenommen.

Diess in der Hauptsache die ZÖLLNERsche Theorie. Ich muss es mir versagen, hier die Schwierigkeiten, welche sie, besonders der bald zu besprechenden SCHIAPARELLIschen Lehre von den Sternschnuppen gegenüber, noch bestehen lässt, zu berühren, da ich schon zu lange Ihre Geduld durch Hypothesen auf die Probe gestellt. Es ist Zeit, dass wir zu lebendigen Thatsachen übergehen.

Unter den Männern, welche sich mit den Sternschnuppen beschäftigt, haben wohl einige, wie COULVIER-GRAVIER, BRÜCK, KESSELMEYER und andere, die Ansicht vertheidigt, dass die Sternschnuppen ihren Ursprung in unserer Erde oder in der Atmosphäre derselben hätten. Allein ihre Gründe waren zu leicht zu widerlegen. Es ist vielmehr die Ansicht durch alle Thatsachen erhärtet und zum Gemeingut aller Gelehrten geworden, dass jede Stern- [17
schnuppe ein verhältnissmässig kleiner Körper sei, welcher ebenso wie seine gewaltigen Himmelsgenossen, dem Gravitationsgesetze gehorchend, eine Bahn um die Sonne beschreibt, und auf seiner Wanderung das Unglück hat, der Erde so nahe zu kommen, dass sie ihn mit unwiderstehlicher Gewalt zu sich heranzieht. Hätte die Erde keine Lufthülle, so würde der Körper, wenn seine Bewegung in einer Verticalen erfolgte, mit gewaltiger Geschwindigkeit auf die Erde stürzen. — Er tritt nämlich nach den Beobachtungen schon mit einer Geschwindigkeit in die Atmosphäre der Erde ein, welche im Durchschnitt der anderthalbfachen Geschwindigkeit der Erde bei ihrem Umlaufe um die Sonne gleichkommt. Er würde also an sich schon in jeder Secunde circa 6 oder in jeder Minute 360 geogr. Meilen zurücklegen. Diese Geschwindigkeit wird aber noch vergrössert durch die Anziehungskraft der Erde, welche ja auch die Geschwindigkeit jedes freifallenden Körpers vergrössert. Wie mächtig wäre also der Anprall einer Sternschnuppe, wenn sie auf unsere Erde fiele! Nun hat zwar ALEXANDER HERSCHEL die Sternschnuppenkörperchen gewogen — ich meine nicht mit einer wirklichen Wagschale, denn wie hätte er des zu Wägenden habhaft werden sollen, sondern durch eine Reihe aus der mechanischen Wärmelehre entlehnter Schlüsse — und für die meisten dieser Körperchen das Gewicht von etwa $\frac{1}{3}$ bis 1 Gramm erhalten. Die Stärke des Anpralls wird jedoch durch die sogenannte lebendige Kraft, d. h. durch [18

das Product aus der Masse und dem Quadrat der Geschwindigkeit gemessen. Es würde deshalb der Anprall doch so mächtig sein, als der einer Kugel von über 3 bis über 9 Pfd. Gewicht, welche mit einer Geschwindigkeit von 2000 Fuss in der Secunde abgeschossen würde. Erwägt man, dass in manchen Nächten die Zahl der Sternschnuppen so gross ist, dass sie wie Schneeflocken herabstürzen, dass z. B. nach einer Schätzung von Arago am 12. November 1833 an seinem Beobachtungsorte wenigstens 240,000 fielen, so könnte uns für alles auf der Erde Lebende bange werden, wenn man nicht durch tausendjährige Erfahrung wüsste, dass die Sternschnuppen stets friedlich verschwunden sind, ohne Schaden angerichtet zu haben. Aber erst die Lehren der Physik neueren Datums geben über die Gründe der Unschädlichkeit der Meteore Aufschluss. Aus denselben folgt, dass wenn ein sich bewegender Körper eine Reibung oder den Widerstand eines Mittels zu erleiden hat, seine lebendige Kraft sich in Wärme umsetzt. Der Sternschnuppenkörper tritt in die Atmosphäre ein. Zwar sind an der Eintrittsstelle die Luftschichten sehr dünn, da aber der Widerstand mit der Geschwindigkeit des anrennenden Körpers in einem beträchtlichen Verhältnisse wächst, so wird in noch bedeutender Höhe von der Erde, im Mittel in einer Höhe von 12 deutschen Meilen, die lebendige
19] Kraft des Meteors ganz in Wärme umgesetzt sein. Diese Wärme reicht hin, so kleine Körper weissglühend zu machen und sie zu verflüchtigen. So dient also die Atmosphäre der Erde als Panzer gegen die himmlischen Geschosse, welche sie verzehrt, ehe sie ihre Reise bis zur Erde vollendet.

Gleichzeitig erkennen wir hieraus noch etwas Anderes. Wir sagten vorhin, die Sternschnuppe beschreibe im Weltraume eine Bahn um die Sonne. Sie wird nun zwar von dieser beschienen, und müsste uns so gut wie die Planeten sichtbar sein auf ihrer Reise im Weltraume. Allein sie ist zu klein, sie erhält also auf ihrer Oberfläche zu wenig Licht, um uns so viel zuzusenden, dass wir sie sehen könnten. Hieraus folgt, dass sie uns unsichtbar bleibt, bis sie in unserer Atmosphäre weissglühend geworden, was etwa im Durchschnitt in einer von Höhe $15\frac{1}{4}$ deutschen Meilen von der Erde geschieht, und uns wieder entschwindet, wenn sie sich entweder aufgezehrt, oder wenn es ihr gelungen, allerdings sehr erhitzt unserer Atmosphäre wieder zu entschlüpfen.

Begreiflicherweise hoffen die Naturforscher, dass diese Erscheinungen nicht

wenig zur Aufklärung der schwierigen Frage über die Höhe unserer Atmosphäre beitragen werden.

Ich habe schon angeführt, dass in manchen Nächten des Jahres die Sternschnuppen in ausserordentlich grosser Zahl auftreten. Von diesen sind schon lange am meisten hervorgetreten die Nacht vom 10. August und die Nächte vom 12. und 13. November. Im Jahre 1833 beobachteten einige [20
amerikanische Astronomen, dass die feurigen Linien, welche die einzelnen Sternschnuppen des Novemberschwarmes beschrieben, alle nach ein und demselben Punkte des Himmelsgewölbes, nämlich nach einem genau bestimmbaren Punkte des Sternbildes des Löwen hinwiesen. Sie nannten diesen Punkt den Radiationspunkt. Professor Olmsted erkannte sofort in dieser Erscheinung einen wichtigen Schlüssel zur Lösung des Räthsels der Sternschnuppen.

Weitere Beobachtungen ergaben, dass auch der Augustschwarm einen solchen Radiationspunkt am Himmel habe, und zwar im Sternbilde des Perseus. Von nun ab gab es erst so zu sagen einen Leitstern, die in den verschiedenen Nächten des Jahres sich zeigenden Sternschnuppen zu gruppiren. Jede solche Gruppe hat einen solchen herrschenden Mittelpunkt, einen Radiationspunkt. Durch die Bemühungen fleissiger Beobachter, namentlich des Professors Heis zu Münster, Julius Schmidt in Athen und des englischen Gelehrten Grey hat man jetzt nahezu hundert solcher Gruppen formirt und ihre Radiationspunkte am Himmel bestimmt.

So lange menschliche Augen den Sternenhimmel bewundern, erregten die Sternschnuppen ihre Aufmerksamkeit. Wie konnte es kommen, dass obgleich seit den Zeiten Galileis das bewaffnete Auge selbst nach den entferntesten Nebelflecken ausschaute, eine Thatsache wie die der Radiation der Glieder eines Sternschnuppenschwarms nach einem bestimmten Himmelspunkte bis in die dreissiger Jahre unseres Jahrhunderts dem Scharfblicke der Astronomen [21
entging? Nun die Antwort hierauf ist leider sehr leicht. Es galt noch bis vor gar nicht langer Zeit nicht für guten Ton, nicht eines wissenschaftlichen Mannes würdig, mit solchen Proletariern unter den Himmelserscheinungen, wie die Sternschnuppen es sind, sich zu beschäftigen. In solchen Geständnissen der Geschichte der Wissenschaft liegt wahrlich das heilsamste Gegengift gegen den die Wissenschaft nicht selten gefährdenden Gelehrtendünkel.

Da ich mich hier auf das Nothdürftigste beschränken muss, so wollen

wir bei den beiden wichtigsten Schwärmen, dem Augustschwarm und Novemberschwarm stehen bleiben, wovon der erstere die Perseiden, der letztere die Leoniden genannt wird, nämlich nach ihren Radiationspunkten. Was hat ein Radiationspunkt für eine Bedeutung? Es ist eine bekannte Erfahrung, dass parallele Linien in einiger Entfernung zusammenzulaufen scheinen, wie man es jederzeit in einer längeren Baumallee wahrnehmen kann. Die Wege, welche die einzelnen Sternschnuppen eines Schwarmes beschreiben, sind so weit von uns entfernt, dass sie diesen Schein in hohem Grade hervorrufen müssen. In der That sind in Wirklichkeit die feurigen Linien eines Schwarmes parallel, und nur die perspectivische Täuschung lässt sie nach dem Radiationspunkte
22] convergiren. Jede der feurigen Linien ist ein Theil der Bahn eines Sternschnuppenkörperchens des Schwarmes um die Sonne. Dasselbe geht also seinen Weg im Weltraume nicht vereinzelt, sondern ein mächtiger Schwarm solcher Körperchen fliegt in parallelen Bahnen nebeneinander her.

In eine neue Phase trat die Lehre von den Sternschnuppen durch die berühmte Abhandlung über die Sternschnuppen von Ermann in den Astronomischen Nachrichten des Jahres 1839. Um uns eine deutlichere Vorstellung von dem Wesentlichen derselben zu verschaffen, müssen wir die späteren Bestimmungen der Meteorenbahnen, namentlich die von Schiaparelli mit zu Hülfe nehmen.

Der Augustschwarm fliegt mit grösserer oder geringerer Stärke am 10. August jedes Jahres über unsere Köpfe hinweg. Die Bahnen seiner Mitglieder, oder wie man auch sagen kann, die Bahn des Schwarms ist nun dahin ermittelt worden, dass sie eine Ellipse sei, deren Ebene gegen die Ebene der Erdbahn um einen starken Winkel, nämlich 64° 3′ geneigt ist. Ihr Umfang ist ausserordentlich viel grösser als der der Erdbahn; der Schwarm hat nämlich von der Sonne einen mittleren Abstand 50 mal so gross als der der Erde von der Sonne, und braucht 108 Jahre, um seinen Umlauf zu vollenden.

Wir thun nunmehr gut, wenn wir folgende Fiction anwenden. Ein himmlischer Künstler eile hinter dem Schwarme her — er muss allerdings schon 400 Meilen in der Minute machen — und zeichne für jede einzelne Stern-
23] schnuppe mit mächtiger Farbe die Theile der jedesmal zurückgelegten Bahnstrecken nach, so würden wir, wenn der Maler vor 108 Jahren seine Reise angetreten, jetzt einen gewaltigen elliptischen Ring von mächtiger Breite

am Himmel sehen, und das wäre die Bahn des Augustschwarmes. Jedesmal am 10. August passirt die Erde dieselbe Stelle dieses farbigen Ringes; der Schwarm, den sie in diesem Jahre daselbst getroffen, ist übers Jahr weit im farbigen Ringe fortgeeilt, und doch findet die Erde an derselben Stelle den Raum nicht leer, ein neuer Schwarm, welchem derselbe farbige Ring als Bahn angehört, schiesst auf sie los. Da dieses ein Jahr ums andere so fortgeht, so schliesst man daraus, dass der farbige Ring in seiner ganzen Ausdehnung von eilenden Sternschnuppen erfüllt ist. Der fictive Ring ist ein wirklicher geworden, mit Materie erfüllt. Dieser Ring wäre das ganze Jahr hindurch am Himmel zu sehen, wenn das ihm von der Sonne geliehene Licht nicht zu schwach wäre. Nur in der Nacht des 10. August, wo wir ihn passiren, wird ein Theil desselben in der oben angegebenen Weise durch unsere Atmosphäre in leuchtende Sternschnuppen verwandelt. Von seiner Dicke kann man sich eine Vorstellung daraus machen, dass die Erde, welche in einer Secunde 4 Meilen weit fliegt, volle 6 Stunden braucht, um ihn zu passiren. Es haben danach Ermann und Boguslawski seine Dicke auf 864000 geogr. Meilen berechnet.

Die Bahn der Leoniden, oder des Novemberschwarms, ist ebenfalls [24
bestimmt worden. Dieselbe ist ebenfalls eine Ellipse, noch gewaltig genug an Umfang, aber geringer als der Ring des Augustschwarmes, es ist nämlich nach Schiaparelli der mittlere Abstand des Novemberschwarms von der Sonne das $10\frac{1}{2}$fache des mittleren Abstandes der Erde von der Sonne. Die Ebene seiner Bahn schmiegt sich mehr der Erdbahn an, sie hat gegen dieselbe nur eine Neigung von 17° 44′. Der Schwarm durchläuft seine Bahn in $33\frac{1}{3}$ Jahren. Machten wir wieder die Fiction, dass diese Bahn mit uns sichtbarer Farbe im Himmelsraume festgebannt wäre, so ist dieselbe zwar in einem grossen Theile mit eilenden Sternschnuppen erfüllt. Denn drei Jahre hintereinander trifft die Erde, wenn sie auf ihrer Sonnenreise an derselben Stelle der Bahn-Ebene des Novemberschwarmes in den Nächten des 12. und 13. November ankommt, mächtige Meteorschwärme an. Bei der Wiederkehr nach 4 Jahren aber ist es bis auf einige Nachzügler leer geworden, und erst nach 33 Jahren, wenn der Schwarm seinen Umlauf vollendet, erneuert sich das Schauspiel. Das letzte Mal ging die Erde durch den Novemberschwarm hindurch in den Jahren 1866—69, und bot besonders im Jahre 1867 in Nordamerika am 12.

und 13. November das Schauspiel eines Sternschnuppenschauers in seiner ganzen Pracht. 33 Jahre vorher, am 12. November 1833, bewunderte und
25] beschrieb ARAGO das Phänomen und noch 33 Jahre vorher beobachteten ALEXANDER V. HUMBOLDT und BONPLAND den Feuerregen des 12. und 13. November.

So wäre denn also die am Himmel festgemachte Bahn der Leoniden nicht überall ausgefüllt, aber wie mächtig lang der Schwarm, der sich auf dieser Bahn fortbewegt, sein müsse, ergiebt sich daraus, dass, obgleich jedes Glied des Schwarmes in jeder Secunde durchschnittlich 6 geogr. Meilen fliegt, die Erde drei Jahre hintereinander an derselben Stelle Sternschnuppen dicht gesäet findet. Hier haben wir also ein Ringstück, welches sich in unserer farbigen Ellipse in $33\frac{1}{4}$ Jahren herumbewegt.

Ähnliche Meteormassen wie die des August und November durchziehen den Himmelsraum in unabsehbarer Zahl. Sie schieben sich ihrer ganzen Länge nach ähnlich wie diese in Bahnen um die Sonne fort, die entweder auch Ellipsen sind und uns ebenfalls periodisch sichtbar werden, oder in Parabeln oder Hyperbeln, in welchem Falle sie sich auf einem der unendlichen Zweige dieser Linien in den Weltraum verlieren. Die Bahnen dieser verschiedenen Meteorschwärme sind unter allen möglichen Winkeln gegen die Ebene der Ekliptik geneigt, so dass man mit Recht sagen kann, das ganze Sonnensystem wird von Meteorkörperchen durchschwärmt. Zieht man hierzu die Thatsachen, dass unser ganzes Sonnensystem sich im Weltraum fortbewegt,
26] so müssen wir schliessen, dass nirgendwo in demselben öde Leere herrscht, vielmehr überall ein lustiges Jagen und Rennen materieller Individuen stattfindet.

So standen die Dinge, als im Jahre 1866 SCHIAPARELLI mit dem kühnen Gedanken auftrat, Cometen und Sternschnuppen seien nicht von einander verschieden, nämlich Sternschnuppenschwärme seien abgetrennte Theile eines Cometen.

Seine Gründe sind sehr einfach. Jedermann ist die Erscheinung von Ebbe und Fluth bekannt. Welcher Ursache verdankt diese die Entstehung? Nun, die verschiedenen Theile der Erde sind vom Monde ungleich weit entfernt, die Stärke der Anziehung des Mondes auf einen Theil der Erde verringert sich aber im umgekehrten Quadratverhältniss der Entfernung, demnach

zieht der Mond die verschiedenen Theile der Erde verschieden stark an. Steht der Mond in unserem Zenith, so hat er das Bestreben uns und unsere Antipoden so weit als möglich auseinanderzutreiben. Dass wir nicht auseinandergehen, verdanken wir der an sich respectabelen Anziehungskraft der gesammten Erdmasse auf ihre einzelnen Theile. Es kämpfen hier zwei Kräfte gegeneinander und nach den unerbittlichen Gesetzen der Mechanik — siegt immer die stärkere. Aber die stärkere büsst dabei so viel an Macht ein, als der unterliegende Theil zur Verfügung hatte, der Sieger gebietet alsdann nur über den Überschuss. Dieser Überschuss ist zu schwach, um die trotzige Masse des Festlandes auseinanderzutreiben, das nachgiebigere Wasser folgt [27
ihr, und dieser Folgsamkeit verdanken wir die Erscheinung der Ebbe und Fluth.

Dieselbe Naturkraft aber, welche uns Ebbe und Fluth verursacht, bringt manchen Cometen ins Verderben, bereitet ihm einen schnelleren oder langsameren Untergang. Wenn wir von den physischen Beschaffenheiten der Cometen auch ganz absehen, so ist doch allbekannt, dass die Dichtigkeit der in ihnen angehäuften Materie sehr gering sei, weil sie das Licht hinter ihnen stehender Sterne nicht bloss nicht abhalten, sondern auch wie aus den sorgfältigen Messungen von BESSEL und STRUVE hervorgeht, nicht einmal — wie es unsere atmosphärische Luft thut — brechen, d. h. von seiner Richtung ablenken. Füllt man daher zwei gleich grosse Würfel mit Luft und Cometenmaterie, so enthält demnach der letztere ausserordentlich viel weniger Massentheilchen als der erstere.

Gelangt also eine so lockere Masse, wie ein Comet es ist, auf seiner Reise im Weltraum in die Anziehungssphäre der Sonne, so wird alsbald durch die Verschiedenheit der Anziehung derselben auf die verschieden entfernten Theile des Cometen eine Kraft hervorgerufen, ähnlich der, welche auf der Erde die Erscheinung der Ebbe und Fluth hervorruft. Aber die Masse des Cometen ist so unvergleichlich viel nachgiebiger als das Wasser, dass sich Theile des Cometen loslösen. SCHIAPARELLI nennt daher diese Kraft die auflösende Kraft [28
der Sonne. Dieselbe wird um so energischer, je mehr der Comet sich in seiner Bahn der Sonne nähert, da die Verschiedenheit der Abstände der einzelnen Theile desselben um so mehr ins Gewicht fallen, je weniger beträchtlich sie sind — ein Umstand, der ja auch zur Folge hat, dass die Mondfluthen die Sonnenfluthen so sehr an Höhe überragen. — Was geschieht nun mit den losgelösten

Cometentheilen? Jeder Körper, und mag er kleiner wie ein Sandkörchen, dünner wie die Luft in den Geisslerschen Röhren sein, muss qua Materie, wenn er ins Reich der Sonne kommt, sich in einer Ellipse oder einer Parabel oder einer Hyperbel um die Sonne bewegen. Der losgelösten Cometenmasse wird die Wahl unter diesen Bahnen nicht schwer werden, sie wird nämlich in demselben Geleise verbleiben, in welchem sich ihre Mutter, der Comet, bewegt. Nun sagt Schiaparelli, diese losgelöste Cometenmaterie sei eben jener Schwarm eilender Körperchen, die uns als Sternschnuppen erscheinen. Wahrlich nichts ist einfacher als diese Theorie. Und doch würden ihr die ungläubigen Naturforscher nur das Lob einer geistreichen Hypothese gespendet haben, wenn sie nicht sichtbarlich durch die Erfahrung sich hätte bestätigen lassen. Das ist aber in reichlichem Masse geschehen. Oppolzer in Wien hatte die Bahn des grossen Cometen des Sommers 1862 in den Astronomischen Nachrichten
29] sorgfältig bestimmt. Eine Vergleichung dieser Bahn mit der schon oben erwähnten des Augustmeteors lieferte Schiaparelli das überraschende Resultat, dass beide Bahnen zusammenfallen, und so sprach Schiaparelli das grosse Wort aus: der grosse Comet des Sommers 1862 ist die Mutter der Perseiden, des Augustschwarms, Mutter und Kind laufen in demselben Geleise um die Sonne. Kurze Zeit darauf (am 28. Januar 1867) erschien wieder von Oppolzer in den Astronomischen Nachrichten die Bahnbestimmung des Cometen 1866 No. I oder des Tempelschen Cometen, und schon am 29. Januar gelangten Peters in Altona, Oppolzer und Schiaparelli, alle drei unabhängig von einander zu dem Resultate, dass der Tempelsche Comet die Mutter der Leoniden, des Novemberschnuppenschwarms sei, dass beide, Comet und der von ihm losgelöste Theil, in ein und demselben Geleise um die Sonne kreisen. Seitdem ist es gelungen, zu noch vielen anderen Sternschnuppenschwärmen die bezüglichen Cometen zu finden, aus denen sie entstanden und mit welchen sie in gemeinsamer Bahn um die Sonne laufen.

Wenn der Comet, von dem durch die auflösende Kraft der Sonne Sternschnuppencomplexe abgetrennt werden, sich wieder in seiner Bahn von der Sonne entfernt, so wird zwar die auflösende Kraft der Sonne fortwirken und immer neue Masse von ihm trennen, aber mit der Entfernung von der Sonne
30] wird diese auflösende Kraft immer geringer und geringer. Immer dünner und dünner wird also der Rückstand, welchen der Comet in seinem Geleise

zurücklässt, und der ihm nacheilt. Aber wenn der Comet sich wieder der Sonne nähert, verstärkt sich wieder seine Auflösung und das geht so fort. Es hat demnach keine Schwierigkeit, zu begreifen, wie sich z. B. nach und nach der Ring des Augustphänomens, welchen wir oben beschrieben, bilden konnte.

Leverrier hat berechnet, dass die kosmische Wolke, welche den Tempelschen Cometen bildet, im Jahre 126 unser Zeitrechnung aus fernen Welträumen in unser Sonnensystem eingedrungen. Die Sonne hat ihm seitdem sehr arg mitgespielt, sie hat von ihm den oben beschriebenen gewaltigen Schwarm der Novembersternschnuppen losgelöst, während der Comet selbst den Beobachtern immer kleiner und kleiner erscheint. Sein wahrscheinliches Loos, so wie das vieler seiner Brüder ist, ganz und gar in einen Sternschnuppenring aufgelöst zu werden. So arg spielt die Sonne in ihrer Fürsorge für die Ordnung ihres Reiches den Eindringlingen in dasselbe mit.

Vor der Schiaparellischen Erklärung der Sternschnuppen waren die Erfahrungen, die man am Bielaschen Comet gemacht, wunderbare Räthsel. Dieser Comet gehörte zu den ordentlichsten Himmelsbürgern. Er legte in je $6\frac{1}{2}$ Jahren seine Bahn um die Sonne zurück und fand sich regelmässig zur bestimmten Zeit an bestimmter Stelle, den Befehlen der Astronomen gehorsam, ein. Da plötzlich theilte er sich im Jahre 1846 vor den Augen der Be- [31
obachter in zwei Theile. Beide Theile liefen nun sich von einander immer mehr entfernend 20 Jahre als getrennte Cometen neben einander her, bis sie im Jahre 1866 ganz und gar verschwanden.

Die Spaltung dieses Cometen hat nach der Schiaparellischen Theorie nichts Befremdliches. Es ist die auflösende Kraft der Sonne, welche dieselbe bewirkte. Nach derselben Theorie musste man auch erwarten, dass die verschwundenen Theile sich in Sternschnuppen aufgelöst haben. Diese Erwartung hat sich erfüllt, und die Schiaparellische Theorie hat einen glänzenden Triumph gefeiert. Wir waren alle Zeugen davon. In diesem Winter am 27. November fand eines der grossartigsten Sternschnuppenphänomene statt. Es war dasselbe nur ein starkes Auftreten eines um diese Jahreszeit in bestimmten Perioden sich wiederholenden Sternschnuppenschauers, welchen man der Auflösung des Bielaschen Cometen zu verdanken glaubte.

In der Richtung der Fortbewegung der Sternschnuppen, d. h. nach dem

Himmelspunkte hin, welcher dem Radiationspunkte gerade gegenüber liegt, hätte man suchen müssen, ob sich nicht in Begleitung der Sternschnuppen Reste des Bielaschen Cometen entdecken liessen. Dieser Himmelspunkt liess sich aber in unseren Gegenden nicht gut beobachten. Da kam der Göttinger
32] Astronom Klinkerfues auf den glücklichen Gedanken, den Astronomen Pogson auf Madras, welcher Ort der Beobachtung der genannten Himmelsstelle günstig war, am 30. November telegraphisch aufzufordern, daselbst nach dem Cometen zu suchen. Am 3. December fand Pogson wirklich an der bezeichneten Stelle einen Cometen. Indessen, um einen Cometen als einen bestimmten, hier also als den Bielaschen zu legitimiren, dazu braucht man eine Anzahl scharf markirter Kennzeichen. Diese konnten so schnell in zureichendem Masse nicht signalisirt werden. Da half wieder Oppolzer, welcher durch seine Beobachtungsenergie schon so viel zur Glorificirung der Schiaparellischen Lehre beigetragen. Durch scharfsinnige Combination des unzureichenden Beobachtungsmaterials hat er es höchst wahrscheinlich gemacht, dass der von Pogson beobachtete Comet der Kopf des Bielaschen Cometen sei. — Sehen wir aber auch ganz von der Frage des Bielaschen Cometen ab, so ist die eine Thatsache unangreifbar feststehend, dass Klinkerfues durch die Sternschnuppenerscheinung im Stande war, einen Cometen — den Urheber der Erscheinung — in der Bahn des Sternschnuppenschwarms zu entdecken.

Glänzender konnte die Schiaparellische Theorie nicht bewährt werden. Ein selten schönes Loos für eine menschliche Entdeckung.

So werden wir durch das Datum der Entdeckung Schiaparellis auf das denkwürdige Jahr 1866 zurückgeführt. Wir sehen in demselben die italienische
33] Nation mit der unsrigen vereint nicht nur auf der Arena des Kampfes für das Vaterland, sondern auch des Kampfes, dessen Ziel die Erweiterung der Grenzen unseres Wissens ist. Wenn wir von der Betrachtung der unermesslichen Welträume zu unserer Erde zurückkehren, so könnte ein enges Gemüth und ein kurzsichtiges Auge leicht verführt werden, diese kleine Erde mit dem Treiben der auf derselben befindlichen Geschöpfe kleinlich zu finden. Der Naturforscher ist vor diesem Irrthum sicher — er weiss es, dass die Welt im Kleinen, die Welt unter dem Mikroscop und noch mehr die Welt der sich unserem Auge ganz entziehenden Atome ebensoviel gilt als die Welt im Grossen, dass das unermesslich Grosse und unermesslich Kleine nur relativ

von einander verschieden sei. Und wer ist es, in dem sich beide Vorstellungen vereinen? Es ist das winzige Geschöpf, der Mensch, dessen Geist, selber unendlich, die beiden Pole der Unendlichkeit erst in die Natur hineinträgt.

Während wir also auf unserer Excursion in das ferne Weltreich die selbstsüchtige Illusion verloren, der Mittelpunkt des Kosmos zu sein, auf welchen überall die Zwecke der Natur hinwiesen, wie die Halbmesser eines Kreises auf dessen Centrum, so haben wir als Ersatz das unvergleichlich erhabenere Bewusstsein mitgebracht, durch die Kraft unseres Geistes das [34
ganze Weltall umfassen, so zu sagen den Kosmos reproduciren zu können.

Muss nicht dieses Bewusstsein auch eine höhere Werthschätzung der übrigen Ideen, deren Träger der menschliche Geist ist, also insbesondere der Ideen der Sittlichkeit hervorrufen? Zwar wird die Vergleichung mit den Ideen, welche der Naturforschung zu Grunde liegen, uns belehren, dass so wie diese auch die Ideen der Sittlichkeit in ihrer Anwendung dem Irrthume unterworfen sind. Allein sie lehrt uns auch, dass die Ideen an sich — von ihren Anwendungen unabhängig — ewig unveränderlich sind, dass sie uns durch ein Labyrinth von Irrthümern, wenn auch nur in asymptotischer Annäherung, zur Wahrheit führen werden.

Wenn wir also von unserer Himmelsreise auf unsere Erde zurückkehren, so werden wir — weit davon entfernt, das, was auf derselben um uns herum durch Menschenhand vollbracht wird, gering zu schätzen — vielmehr ein offenes Herz allem Grossen und Edlen, das sich darin kundgiebt, entgegentragen.

Wenn wir also von unserer Himmelsbetrachtung aus auf das Jahr 1866 hingeführt werden, so wird die Erinnerung an die Thaten dieses Jahres — vollbracht im Namen der erhabenen Idee des Vaterlandes — auf unser Gemüth einen um so gewaltigeren Eindruck machen. Und — es ist das eine [35
herrliche Eigenschaft der menschlichen Natur — von dem Vollbrachten wenden wir uns sofort dem Vollbringer zu in inniger Dankbarkeit. Wir huldigen unserem Kaiser, welcher damals in seltener Seelengrösse die durch die Geschichte unseres Vaterlandes geschaffenen Hemmnisse zu überwinden und den Grundstein zu unserem neuen deutschen Reiche zu legen vermochte. Wir wissen alle, wie mächtig dieser königliche Vorgang engherzig erbaute Schranken erschüttert, und das bis dahin nur als lebendige Kraft latente nationale Be-

wusstsein der Deutschen zur energievollen Thätigkeit befreit hat. Und wir preisen unsern Kaiser und uns glücklich, dass schon nach Verlauf weniger Jahre unter seiner heldenmüthigen Führung der herrliche Bau selber hat vollführt werden können, dass der Traum vieler Jahrhunderte in einer so kurzen Spanne Zeit zur Wirklichkeit geworden. — Doch noch ist das Gebäude nicht nach allen Seiten geschlossen, von allen Seiten stürmen feindliche Elemente heran, in die Lücken einzudringen und die Grundfesten zu untergraben. Aber die starke Hand unseres Kaisers, die starke Hand, welche die Vorsehung zur Vollbringung so grosser Thaten ausersehen, wehrt heldenmüthig alle Angriffe ab und umgiebt das neue Gebäude mit kräftiger Schutzwehr. Möge diese starke Hand noch lange Jahre unser Schirm und Schutz sein. Möge es
36] unserem Kaiser noch vergönnt sein, sein Werk vollendet und unangreifbar zu schauen. Möge er als schönsten Lohn heiliger Pflichterfüllung noch sehen können, was ein grosses deutsches Reich in Frieden an Grossem und Erhabenem zu schaffen vermag.

Gott segne und erhalte unseren Kaiser und König.

LXXVIII.

Über das Verhältniss der exacten Naturwissenschaft zur Praxis.

Rede

bei Antritt des Rectorates

gehalten in der Aula

der

Königlichen Friedrich-Wilhelms-Universität

am 15. October 1899

von

Immanuel Lazarus Fuchs.

Berlin 1899.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke) in Berlin N.

Hochansehnliche Versammlung! [3
Geehrte Collegen!
Liebe Commilitionen!

In einer Zeit, in welcher die Anwendungen der Naturwissenschaften auf alle Zweige menschlichen Schaffens einen so gewaltigen Umfang angenommen haben, dass das allgemeine Interesse durch die Errungenschaften auf den Gebieten der Technik vollständig absorbirt wird, und die Schöpferin dieser Erfolge, die theoretische Wissenschaft, ganz in den Hintergrund des öffentlichen Interesses gedrängt erscheint, ist es wohl nicht überflüssig, sich des Verhältnisses bewusst zu werden, in welchem die reine Wissenschaft, die Theorie, zu ihren Anwendungen, der Praxis, steht, sich den Einfluss vor Augen zu führen, welchen Theorie und Praxis gegenseitig auf einander ausgeübt haben.

Es würde selbstverständlich an dieser Stelle unmöglich sein, alle Zweige der Naturwissenschaften in den Kreis unserer Betrachtung zu ziehen. Wenn ich mir aber die Beschränkung auferlege, nur die sogenannten exacten Naturwissenschaften ins Auge zu fassen, so dürfte gewiss der grössere Theil meiner Ausführungen für die übrigen Naturwissenschaften bestehen bleiben. Ich habe mir aber die exacten Naturwissenschaften auserwählt, nicht nur, weil sie meinem speciellen Forschungs- und Lehrgebiet, der Mathematik, am nächsten stehen, sondern vielmehr weil die Mathematik den genannten Zweigen der [4
Naturwissenschaften geradezu zugezählt werden muss.

Um dieses gerechtfertigt zu finden, ist es nicht nöthig, hier in eine tiefere Speculation einzugehen. Es liegt auf der Hand, dass die Objecte der Naturbetrachtung, soweit sie durch Maass und Gewicht in Raum und Zeit erfasst werden können, ihren adäquaten Ausdruck in den geometrischen und analytischen mathematischen Formen finden. Aber auch umgekehrt haben die mathematischen Gebilde ihren entsprechenden Ausdruck in den Naturerscheinungen, wenn auch diese Naturerscheinungen erst später, lange nachdem die mathematischen Gebilde gewissermaassen divinatorisch erzeugt waren, uns bekannt werden. Es mögen zur Erläuterung einige Beispiele genügen.

Der Mathematiker construirt die Fläche, welche unter dem Namen des Ellipsoids bekannt ist, aus rein geometrischen Anschauungen. Eine specielle Form dieses räumlichen Gebildes, das Sphäroid, welches durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe entsteht, erweist sich in der Natur als die uns alle gar sehr interessirende Form des von uns bewohnten Himmelskörpers.

Viele Jahrhunderte, ehe Keppler gezeigt, dass die Planeten, also auch unsere Erde, sich in einer Ellipse um die Sonne bewegen, waren die Mathematiker von rein theoretischen Gesichtspunkten zur Betrachtung dieser krummen Linie und zur Erforschung ihrer Eigenschaften gelangt.

Die Eigenschaft derselben Linie, dass die von den beiden Brennpunkten nach einem Punkte der Linie gezogenen Strahlen mit der Tangente daselbst gleiche Winkel bilden, findet in der Optik und Akustik ihren Ausdruck darin, dass die von einem der Brennpunkte eines elliptisch gebauten Gewölbes ausgehenden Licht- oder Schallwellen nach ihrem Auftreffen auf die Wand sich in dem anderen Brennpunkte concentriren.

5] Aber auch in der Methode der Forschung sind Mathematik und exacte Naturforschung nicht wesentlich verschieden. Diese Behauptung wird paradox nur denjenigen erscheinen, welchen nur die fertigen Formen und Beweismethoden der Mathematik bekannt sind, nicht aber den Forschern auf diesen Gebieten. Wie der Naturforscher Naturerscheinungen gegenübersteht, welche zuverlässig nach gewissen Gesetzen verlaufen, und bestrebt ist, diese Gesetze durch Beobachtung, Vergleichung mit bekannten Naturerscheinungen und Versuchen mit Hülfe entweder schon vorhandener oder erst zu construirender Werkzeuge zu erforschen, gerade so steht der mathematische Forscher gewissen Gebilden gegenüber, welche ebenso zuverlässig gewissen Gesetzen unterliegen, und ebenso muss derselbe durch Vergleichung mit anderweitig bekannten Thatsachen der Mathematik und durch Anwendung bereits vorhandener oder erst herzustellender Hülfsmittel die Geheimnisse dieser Gebilde zu entschleiern suchen.

Ich wünschte wohl hier zu zeigen, dass diese Übereinstimmung der Forschungsmethoden mehr als eine bloss oberflächliche sei, wenn nicht eine solche Auseinandersetzung den Rahmen dieses Vortrages überschritte.

In unserem Zeitalter, in welchem die Anwendung der Dampfkraft und der Electricität so bewundernswerthe Veränderungen in der Lebensführung des menschlichen Geschlechtes herbeigeführt hat, in welchem durch die Erleichterung des Verkehrs der Menschen unter einander der Austausch nicht nur der materiellen, sondern auch der geistigen Güter in so gewaltiger Weise gefördert, durch die Einführung von Maschinen die Production in allen gewerblichen Unternehmungen so zu sagen ins Unermessliche gesteigert und dafür die Arbeit menschlicher Hand in hohem Maasse bewerthet worden ist, in unserem Zeitalter, sage ich, ist es besonders wichtig, sich gegenwärtig zu halten, dass schon in allen Zeitaltern, von welchen uns die Geschichte be- [6
richtet, Forschritte gemacht worden sind, welche für jede dieser Zeitepochen von mächtigen Einwirkungen auf das menschliche Leben gewesen sind.

Da das Neue sich stets auf Grund des bereits Vorhandenen aufbaut, musste natürlich die Geschwindigkeit des Fortschrittes in dem Maasse sich steigern, wie ein Zins auf Zins angelegtes Capital sich zu einem immer grösseren und grösseren Capital aufspeichert. Fragen wir uns, aus welcher Quelle die immer neuen Machtmittel zur Bekämpfung und Ausnutzung der Naturkräfte dem Menschen zufliessen, so lehrt uns die Geschichte, dass diese Quelle nur selten die auf ein bestimmtes Ziel gerichtete Arbeit des Menschen gewesen ist. Denn der Zusammenhang zwischen den einzelnen Erscheinungen in der Natur ist meistentheils sehr verborgen, und was in der Natur dicht neben einander hergeht, tritt dem Menschen ebenso wie dasjenige, was weit auseinander zu liegen scheint, durch lange Jahrhunderte als indifferent in Bezug auf einander entgegen. Wer hätte z. B. noch im Anfange unseres Jahrhunderts zu sagen vermocht, dass Wärme, Licht und Electricität ein und derselben Quelle entstammen?

Das wahre Bindeglied zwischen den einzelnen Errungenschaften der Menschheit ist die Wissenschaft, diejenige Bethätigung des menschlichen Geistes, welche in das Wesen der Dinge einzudringen bestrebt ist, allein um der Erkenntniss willen, ohne auf den Nutzen oder auf die Lösung eines praktischen Problems zu zielen.

Es zeugt von einer vollständigen Verkennung des Wesens der Wissenschaft, wenn einer meint, dass ein auf Grund von Erfahrungsthatsachen erwachsenes und auf einen bestimmten Zweck gerichtetes Problem gelöst werden könne, wenn ihn nicht das Glück dahin begünstigt, dass er in der Wissenschaft die Hülfsmittel zur Lösung vorbereitet findet. Denn in der Forschung
7] nach wissenschaftlichen Wahrheiten muss der menschliche Geist sich von dem Besonderen loslösen und sich zu freiem Fluge nach allen Richtungen entfalten. Er darf nicht bei einer Vorstellung stehen bleiben, er muss vielmehr die mannigfaltigsten Gebilde durchmustern und in scheinbar indifferenten Dingen das Gemeinsame zu erfassen streben. Was schwer lösbar oder unlösbar in besonderer Sphäre erscheint, wird oft in unerwarteter Weise von einer scheinbar fern von ihr liegenden Sphäre belichtet, und die Gesetze der einen werden durch die der anderen enthüllt. Die Geschichte der Wissenschaft lehrt, dass oft Jahrhunderte andauernde Arbeit des frei thätigen menschlichen Geistes, welche ohne einen anderen Zweck, als den der Aufdeckung wissenschaftlicher Wahrheiten unternommen war, in unerwarteter Weise zur Auffindung weltbewegender Naturgesetze geführt hat.

Es sei mir gestattet, an einem Beispiele die Art, wie die Wissenschaft arbeitet, hervorzuheben.

Die ersten Anfänge der Geometrie sowie alle Anfänge naturwissenschaftlicher Bethätigung haben ihren Ursprung in den Anforderungen des täglichen Lebens. Allmählich löste sich aber die Geometrie von dem beschränkten Standpunkte des Suchens nach dem unmittelbar Nützlichen los, es entstand die eigentlich wissenschaftliche Geometrie. Die vollendetste Ausbildung fand dieselbe in den alten Zeiten bei den Griechen, demjenigen Volke, bei welchem die Keime fast aller unserer Wissenschaften zu suchen sind. Man braucht, was die Grundlagen der Geometrie anbetrifft, nur den Namen Euklid zu nennen, dessen Werk noch heutzutage ein mustergiltiges Lehrbuch dieser Wissenschaft bildet. Zu den schönsten Errungenschaften der griechischen Mathematiker auf dem Gebiete der Geometrie gehört die Theorie der drei krummen Linien Ellipse, Hyperbel, Parabel, welche unter dem Namen Kegel-
8] schnitte bekannt sind. In späteren Jahrhunderten haben andere Nationen dieselbe Theorie vertieft und sie auf andere Gebilde ausgedehnt.

Wenden wir für einen Augenblick unser Augenmerk von diesem schein-

bar so begrenzten Gebiete menschlichen Forschens weg und auf nichts Geringeres als auf das Weltall hin. Jedem Gebildeten ist es bekannt, welche Anstrengungen die hervorragendsten Philosophen und Naturforscher durch Jahrhunderte hindurch gemacht, um das Gesetz der Bewegung unseres Planetensystems zu erforschen, wie viele Theorieen aufeinander gehäuft worden waren, welche schon durch ihre Complication den Stempel des Unnatürlichen an sich trugen, und in der That auch von den Erscheinungen der Natur nicht vollkommen Rechenschaft gaben; bis es Keppler nach einer durch zwanzig Jahre fortgesetzten Bearbeitung des Tycho de Brahe'schen Beobachtungsmaterials gelang, die Bewegung der Planeten durch die drei Gesetze, welche wir mit dem Namen der Keppler'schen bezeichnen, in der natürlichsten und in vollkommen erschöpfender Weise zu erklären. Ich muss diese Gesetze hier wiederholen, um den Zusammenhang mit dem Vorhergehenden hervortreten zu lassen:

I. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne sich befindet.

II. Die von diesem Brennpunkte nach dem Planeten führenden Strahlen beschreiben in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

III. Die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten sich wie die Cuben der grossen Axen ihrer Bahnen.

Treten wir jetzt in eine dritte Sphäre der Naturforschung ein, welche wieder scheinbar von den beiden vorhergehenden abseits liegt. Newton war, wie man erzählt, durch das Fallen eines Apfels von einem Baume zum Nachdenken über die Ursache des Falles angeregt worden, und wurde zu dem Resultate geführt, dass eine Einwirkung der Erdmasse auf die Masse des [9
fallenden Körpers die wahre Ursache sei, ein Resultat, aus welchem sich die Fallgesetze in ungezwungener Weise ergeben.

Man stand also zu dieser Zeit drei Thatsachen gegenüber, wovon jede einer besonderen wissenschaftlichen Sphäre angehörte: die Natur und die Eigenschaften der Kegelschnitte, die Keppler'schen Gesetze und die Massenanziehung, welche der Erdkörper auf die Körper an seiner Oberfläche ausübt. Aus diesen Thatsachen folgerte Newton auf analytischem Wege, dass die Planeten von der Sonne mit einer Kraft angezogen werden, welche direct proportional ihren Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer

Entfernungen ist; sowie, dass für alle Planeten das Grundmaass der Anziehung dasselbe ist.

Dieses Gesetz, welches sich dahin zusammenfassen lässt, dass die Kraft, mit welcher zwei wägbare Massen auf einander wirken, für alle wägbaren Massen von derselben Natur ist und dem Producte der Massen direct, dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional wirkt, beherrscht also die Bewegungen der Himmelskörper, soweit sie den Raum erfüllen, ebenso wie die Bewegung eines an der Erdoberfläche fallenden Steines.

Diesem Gesetze hatte länger als ein Jahrhundert nach seiner Entdeckung die Beschränkung auf die wägbaren Massen angehaftet, als es COULOMB mit Hülfe der Torsionswage gelang, die Kraftwirkung elektrischer und magnetischer Massen einer Messung zu unterwerfen und festzustellen, dass zwei elektrische oder zwei magnetische Massen sich mit einer Kraft anziehen oder abstossen, welche dem Producte der Massen direct, dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist. Jetzt gelangte die Wissenschaft durch Induction zu dem Schlusse: Das NEWTONsche Gesetz gilt nicht nur für die wägbare Materie,
10] es ist vielmehr ein allgemeines Naturgesetz für alle Wirkungen von Massen auf einander, welcher Natur diese Massen auch sein mögen.

Diesem Bilde von der Arbeit der Wissenschaft liessen sich, wenn die Zeit es gestattete, zahlreiche andere anreihen. Welche schöne Aufgabe wäre es beispielsweise, die Entwickelung der Lehre der galvanischen Ströme zu verfolgen, von den ersten Versuchen GALVANIS an einem bei der Berührung mit verschiedenen Metallen zuckenden Froschschenkel bis auf unsere Zeit, wo die electrischen Drähte sich fast über die ganze Erde hinziehen! Wir würden auch hier sehen, wie Männer der Wissenschaft, allein von dem Streben nach der Erforschung der Naturgesetze getrieben, Versuche mit unablässigem Eifer verfolgen, welche weit von einer unmittelbaren praktischen Anwendbarkeit entfernt sind (wie es ja auch die Versuche von GALVANI und VOLTA waren), oder wo sie, wie GAUSS und WEBER bei der Verwendung der Entdeckung von OERSTED auf die Anlage eines Telegraphen auf, praktisch verwerthbare Resultate stiessen, welche ihnen reichen materiellen Gewinn und Popularität versprachen, solche Verwerthung anderen überlassen, um unbehindert ihre Forschungen — in welchen sie nicht von anderen vertreten werden zu können hoffen durften — zum Segen der Menschheit fortzusetzen.

Die Anfänge der exacten Naturwissenschaften, sagten wir vorhin, haben ihren Ursprung in den Anforderungen, welche das praktische Leben an den Menschen stellte. So berichtet uns beispielsweise HERODOT, dass die Aegypter zur Erfindung der Geometrie durch die Nothwendigkeit geführt wurden, die in Folge der Nilüberschwemmungen verloren gegangenen Landesbegrenzungen wieder herzustellen.

Da Messen und Zählen untrennbar mit einander verbunden sind, so haben wir mit Wahrscheinlichkeit auch die Wiege der Arithmetik in Aegypten aufzusuchen.

Um eine Eintheilung der periodisch wiederkehrenden Jahres- und [11
Tageszeiten zu finden, und insbesondere auch um sich bei ihren Fahrten auf dem Meere orientiren zu können, wurden schon in uralter Zeit die Menschen zur Beobachtung des Himmels hingeleitet. Wenigstens entstanden aus solchen praktischen Bedürfnissen die ersten Anfänge der wissenschaftlichen Astronomie bei den Chaldäern.

Bekannt ist, dass ARCHIMEDES durch den Auftrag des Königs HIERO VON Syrakus, den etwaigen Silbergehalt seiner Krone festzustellen, zur Auffindung eines Grundgesetzes der Hydrostatik geführt wurde, welches seinen Namen trägt.

Aber auch, nachdem die einzelnen Disciplinen der Naturwissenschaften ausgebildet waren, hat das praktische Leben zu allen Zeiten einen Impuls zu wissenschaftlicher Forschung gegeben. Dieses geschah nach zwei Richtungen hin. Einerseits wurden Praktiker, welche die ihnen durch die Wissenschaft überlieferten Kenntnisse als Mittel benutzten, um die Naturkräfte für die Zwecke des Menschengeschlechts zu unterjochen, oder Einrichtungen zu schaffen, welche das Wohlbefinden desselben zu erhöhen geeignet sind, zu Einzelproblemen geführt, welche die Wissenschaft aufnahm, um ihre Macht an der Lösung dieser Probleme zu prüfen, oder — wenn die Errungenschaften der Wissenschaft hierzu nicht ausreichten — in diesen Problemen einen Anstoss zu weiterem Forschen zu finden. Andererseits hat es geniale Männer gegeben, welche bei Gelegenheit ihrer praktischen Aufgaben intuitiv Gesetze erschauten, deren Prüfung alsdann zur weiteren Ausdehnung der Wissenschaft geführt.

Es haben sich daher jederzeit die Praxis und die Wissenschaft gegenseitig in die Hände gearbeitet, und wenn die Wissenschaft aus dem reichen Schatz ihrer Errungenschaften der Praxis die Mittel zur Bewältigung der von
12] der Natur ihr entgegengesetzten Schwierigkeiten bieten muss, so verdankt andererseits die Wissenschaft der Praxis so viele segensreiche Impulse.

Es kann daher nur zum Schaden des Forschrittes der Menschheit gereichen, wenn künstlich ein feindlicher Gegensatz zwischen der reinen Wissenschaft und der Technik construirt wird.

Wohl haben beide verschiedene Aufgaben. Die Aufgaben des Technikers sind stets auf bestimmte praktische Zwecke gerichtet. Zu ihrer Lösung ist unstreitig häufig eine grosse geistige Anstrengung und hohe geistige Begabung erforderlich; aber der Techniker muss diese Aufgaben mit den Hülfsmitteln der Wissenschaft in kurzer Zeit lösen können oder auf ihre Lösung verzichten; es sei denn, dass er das Ziel, welches ihm die Praxis gesteckt, bei Seite lassend zum wissenschaftlichen Forscher wird. Denn die Geschichte der Wissenschaft lehrt — und wir haben diess bereits hervorgehoben — dass concrete Aufgaben häufig erst in weit auseinander liegenden Zeiträumen, nachdem dem äusseren Anscheine nach weit ab von diesen Aufgaben liegende Gebiete cultivirt worden sind, ihre Lösung gefunden haben.

Sollte es also dahin kommen, dass wir, hingerissen von der gerechtfertigten Bewunderung der Erfolge der Technik, uneingedenk des Antheils der reinen Wissenschaft an diesen Erfolgen, die letztere auf Kosten des praktisch Nützlichen vernachlässigten, so würden wir nicht nur des schönsten unserer Güter, des Verständnisses des Waltens der Natur- und Geisteskräfte, für welches kein noch so hoher Grad leiblichen Behagens uns zu entschädigen vermag, verlustig gehen, sondern auch gerade der Technik die Wurzel weiteren Fortschrittes in kommenden Zeiten unterbinden. Denn wer vermag es zu sagen, ob nicht in kommenden Zeiten neue Fortschritte der Wissenschaft der Technik Mittel zuführen werden zu Errungenschaften, welche diejenigen, auf welche wir so stolz sind, weit in den Schatten stellen werden?

13] Ich kann es mir nicht versagen, hier die schönen Worte wörtlich wiederzugeben, welche Helmholtz im Jahre 1862 in einer akademischen Rede, betitelt: »Über das Verhältniss der Naturwissenschaften zur Gesammtheit der Wissenschaft«, über die Aufgabe wissenschaftlicher Forschung gesprochen:

»Wer bei der Verfolgung der Wissenschaften nach unmittelbarem »praktischen Nutzen jagt, kann ziemlich sicher sein, dass er vergebens »jagen wird. Vollständige Kenntniss und vollständiges Verständniss des »Waltens der Natur- und Geisteskräfte ist es allein, was die Wissen»schaft erstreben kann. Der einzelne Forscher muss sich belohnt »sehen durch die Freude an neuen Entdeckungen, als neuen Siegen »des Gedankens über den widerstrebenden Stoff, durch die ästhetische »Schönheit, welche ein wohlgeordnetes Gebiet von Kenntnissen ge»währt, in welchem geistiger Zusammenhang zwischen allen einzelnen »Theilen stattfindet, eines aus dem anderen sich entwickelt und alles »die Spuren der Herrschaft des Geistes zeigt; er muss sich belohnt »sehen durch das Bewusstsein, auch seinerseits zu dem wachsenden »Capital des Wissens beigetragen zu haben, auf welchem die Herr»schaft der Menschheit über die dem Geiste feindlichen Kräfte be»ruht«.

Soweit Helmholtz.

Aber glücklicher Weise ist jede Befürchtung vor der Niederdrückung der Wissenschaft durch eine noch so grosse Macht der Verhältnisse grundlos. Der Antrieb unseres Geistes zur Erforschung der Wahrheit ist eine ewige unvergängliche Macht, welche von keiner anderen Macht überwunden werden kann.

Diese Macht ist es auch, welche die treueste Stütze unserer Universitäten stets gewesen ist und für immer bleiben wird. Es ist stets das stolze Be- [14
streben unserer Universitäten gewesen, die Wissenschaft an sich und nur um ihretwillen zu lehren. Mit Recht fordern wohl der Staat und die Gesellschaft, dass die Universität ihre Beamten und Ärzte ausbilde. Wir lösen jedoch auch diese Aufgabe am besten dadurch, dass wir als höchstes Ziel unserer akademischen Erziehung die Pflege der Wissenschaft als solcher, die Erweckung der Liebe zu derselben, die Heranziehung und Anspornung der Jugend zur Mitarbeit an den idealen Aufgaben der Menschheit ansehen. Wir meinen, dass in diese Bahnen geleitete junge Männer auch die besten in ihrem Berufe werden müssen. Systematische Abrichtung zu einem bestimmten

Berufe wird nur handwerksmässig arbeitende Kräfte erzielen, welchen bei den Aufgaben des wirklichen Lebens diejenige geistige Elasticität abgeht, die allgemein wissenschaftlich geschulten Männern eigen ist. Diese Erziehungsmethode unserer Universitäten hat allezeit nicht nur reiche Früchte der wissenschaftlichen Forschung eingetragen, sondern auch dem deutschen Vaterlande ein von hohen Idealen getragenes und in seinem Berufe tüchtiges Beamtenthum gegeben, um welches uns andere Nationen beneideten.

LXXIX.

Über einige Thatsachen
in der
mathematischen Forschung des neunzehnten Jahrhunderts.

Rede

zur

Gedächtnissfeier des Stifters der Berliner Universität

König Friedrich Wilhelm III

in der Aula derselben

am 3. August 1900

gehalten von dem zeitigen Rector

Immanuel Lazarus Fuchs.

Berlin 1900.

Buchdruckerei von Gustav Schade (Otto Francke) in Berlin N.

Hochansehnliche Versammlung! [3
Werthe Commilitonen!

Unsere Universität feiert an dem heutigen Tage das Gedächtniss ihres erhabenen Stifters, des Königs Friedrich Wilhelms des Dritten von Preussen. Diese alljährlich wiederkehrende Feier gewährt uns, deren Aufgabe es ist die Wissenschaft an dieser Universität zu pflegen, in erster Linie die hochwillkommene Gelegenheit immer von Neuem den Manen des Stifters unsere Huldigung und den Ausdruck pietätvoller Dankbarkeit darzubringen für die Schaffung wissenschaftlicher Pflanzstätten, deren Antheil an der Wiedererhebung des preussischen Staates und an der Entwickelung zu seiner jetzigen Grösse, sowie mittelbar zur Erfüllung seiner Mission für das gesammte Deutschland allseitig anerkannt wird.

Aber diese Feier wird auch stets eine segensreiche Rückwirkung auf unser geistiges Leben ausüben. Wenn wir unseren Blick in die Geschichte der Zeit versenken, in welcher die Gründung unserer Universität sich vollzog, so werden wir nicht nur von Bewunderung erfüllt werden für die Männer, an deren Spitze der König Friedrich Wilhelm III., welche den Muth hatten, in bedrängter Zeit, die Wiederbelebung des Staates in der Pflege des idealen Sinnes seiner Bürger, in der Förderung der Wissenschaft, zu suchen; sondern wir werden auch durch die Folgen dieses idealen Strebens für die Gesammt- [4
heit darüber belehrt, dass die Ideale die wahren Träger des Wohles der Menschheit sind; wir werden befestigt in unserem unentwegten Streben für die Wissenschaft und in dem Kampfe gegen jedwedes Hemmniss dieses Strebens. Es wird dieser Tag auch stets für einen jeden von uns ein solcher sein, an welchem wir, jeder in dem Gebiete, welches ihm zugänglich ist,

einen Rückblick auf den Fortschritt der Wissenschaft zu thun veranlasst sind und uns so der Aufgaben bewusst werden, welche uns die Arbeiten unserer Vorgänger vorbereitet haben.

Wenn ich in der Wissenschaft, welcher ich mein Streben gewidmet habe, heute einen solchen Rückblick unternehme, wobei ich mich auf das neunzehnte Jahrhundert beschränke, so wäre es — auch wenn es hier ausführbar wäre — eine Vermessenheit, wollte ich das gesammte Gebiet der mathematischen Wissenschaft umfassen. Diese Wissenschaft hat im Laufe des XIX. Jahrhunderts eine so gewaltige Ausdehnung angenommen, hat sich in so verschiedenartige Disciplinen verzweigt, dass es dem Einzelnen nicht mehr möglich ist, die verschiedenen Theile unserer Wissenschaft mit gleichmässig tief eingehendem Verständnisse zu durchforschen.

Aber auch, wenn ich nur einzelne Zweige zum Gegenstande einer erschöpfenden Erörterung machen wollte, so würde sich eine solche Erörterung in den Rahmen meines heutigen Vortrages nicht einfügen lassen.

Es sei mir daher gestattet nur zweier, in erkenntnisstheoretischer Hinsicht wichtiger Thatsachen hier zu gedenken, welche den Arbeiten der Mathematiker des XIX. Jahrhunderts ihr besonderes Gepräge aufgedrückt haben.

Die erste Thatsache besteht in der Realisirung und unbedingten Ver-
5] wendung der bis dahin als imaginär bezeichneten Grössen. Diesen Grössen waren die Mathematiker schon seit langer Zeit begegnet, wenn es sich darum handelte, gewisse Gleichungen aufzulösen. Ihr Auftreten wurde jedoch nur dahin gedeutet, dass die in diesen Gleichungen gestellten Forderungen nicht erfüllbar seien. Dass aber die Bezeichnung »imaginäre Grössen« eine unzutreffende ist, ergiebt beispielsweise schon der Umstand, dass zu einer Zeit, wo die Brüche noch nicht in den Kreis der Zahlen Aufnahme gefunden hatten, die als Brüche auftretenden Lösungen gewisser Gleichungen ebensogut imaginär hätten genannt werden müssen. Deshalb hatte es auch schon im XVIII. Jahrhundert nicht an Versuchen gefehlt, den sogenannten imaginären Grössen eine reale Bedeutung zuzueignen. Aber erst Gauss gelang es, diesen Grössen das gleiche Bürgerrecht in der Mathematik zu verschaffen, welches bis dahin nur den sogenannten realen Grössen zuerkannt worden war. Der Unterschied zwischen beiden Grössenarten besteht, wie Gauss hervorhebt, nur darin, dass die realen Grössen nur die Lage der Punkte einer geraden Zählaxe

repräsentiren, während die sogenannten imaginären Grössen im Stande sind, die Lage der Punkte der ganzen Ebene zu bestimmen. Der Schritt von den realen Grössen zu den sogenannten imaginären erschien nicht gewagter als der von den ganzen Zahlen zu den Brüchen, von den rationalen Zahlen zu den irrationalen u. s. w. Da der Name imaginäre Grössen viel zur Verwirrung der Begriffe beiträgt, so ist für diese Grössen allgemein die Bezeichnung complexe Grössen angenommen worden.

Wenngleich Gauss in seinen Schriften zahlreiche Belege dafür hinterlassen hat, dass er über die Principien der Mathematik tiefe philosophische Speculationen angestellt hat — so hat er sich beispielsweise bei Gelegenheit der Rechtfertigung der complexen Grössen nicht enthalten können, in einer Fussnote gegen einen von Kant herrührenden Beweis der Vorstellung, dass [6
der Raum nur eine Form unserer äusseren Anschauung sei, Stellung zu nehmen — so ist er dennoch als ächter Mathematiker und Naturforscher für das Recht der complexen Grössen erst auf Grund der thatsächlichen Wahrnehmung eingetreten, dass diese Grössen ebenso unentbehrlich seien, wie die sogenannten realen, dass erst durch die Anwendung der ersteren gewisse Gesetze der Arithmetik einen allgemeinen Charakter gewinnen können. Es ist charakteristisch, dass Gauss gerade auf einem Gebiete die complexen Grössen zum Siege führen konnte, welches, wenn der Ausdruck erlaubt ist, das allerrealste in der Mathematik ist, nämlich auf dem Gebiete der Zahlentheorie. Die schönen Reciprocitätsgesetze für die quadratischen Reste finden sich schon bei den biquadratischen Resten nicht mehr vor, solange man einseitig nur reale Zahlen zulässt; sie erstehen aber, wie Gauss entdeckt hat, in ihrem ganzen Umfange, sobald man complexe ganze Zahlen in den Zahlenkreis aufnimmt.

Es ist hier am Platze eines Fortschrittes Erwähnung zu thun, welcher im XIX. Jahrhundert, nach dem Vorbilde des Vorgehens von Gauss auf dem Gebiete der biquadratischen Reste, zunächst in der Zahlentheorie gemacht worden ist. Die complexen ganzen Zahlen sind ganze ganzzahlige Functionen der vierten Wurzel der Einheit. Während das Gebiet dieser Zahlen insofern dem Gebiete der realen ganzen Zahlen gleichstand, dass dort wie hier die Primfactoren der Zahlen demselben Gebiete angehören wie diese, so zeigten die nach der Analogie gebildeten ganzen ganzzahligen Functionen einer be-

liebigen Einheitswurzel schon die Abweichung, dass die Primfactoren der Elemente dieses allgemeinen Zahlengebietes nicht immer in demselben Zahlengebiete gefunden werden können. Dieser Übelstand führte Kummer, welcher
7] durch lange Jahre eine Zierde unserer Universität gewesen ist, zu dem genialen Gedanken, dem bezeichneten Zahlenkreise die von ihm sogenannten idealen Zahlen zu adjungiren; das so erweiterte Zahlengebiet gewinnt alsdann wieder die Eigenschaft, dass die Primfactoren der Zahlen mit diesen zu demselben Gebiete gehören. Dieser Schritt von den complexen Zahlen zu den idealen ist nun zwar in seinem inneren Wesen vollständig von dem Übergange von den realen Zahlen zu den complexen verschieden. Denn nicht nur, dass die complexen Zahlen dieselben Rechnungsoperationen gestatten, wie die realen Zahlen, sondern — wie Gauss schon hervorgehoben hat — es ist mit den complexen Zahlen das Grössengebiet überhaupt abgeschlossen, welches sich dieser Eigenschaft erfreut. Wenn ich dennoch den Ausdruck brauche, dass die idealen Zahlen nach dem Vorgange von Gauss gebildet worden sind, so rechtfertigt sich derselbe durch den Hinweis auf die Aufgaben, welche sich der Schöpfer der idealen Zahlen neben dem Beweise der Unmöglichkeit der Auflösung der berühmten Fermatschen Gleichung gestellt hat, nämlich für die Potenzreste der aus den Einheitswurzeln gebildeten ganzen Zahlen die den quadratischen und biquadratischen Reciprocitätsgesetzen entsprechenden Gesetze für die höheren Potenzreste zu finden. Es war mir auch eine willkommene Gelegenheit diese Entdeckung Kummers zu erwähnen, da sie von den ausgedehntesten Folgen für die Zahlentheorie und die Algebra des XIX. Jahrhunderts gewesen ist.

Als Gauss im Jahre 1831 in den Göttingischen gelehrten Anzeigen für das Bürgerrecht der sogenannten imaginären Grössen mit Entschiedenheit öffentlich das Wort ergriff, hatte er schon seit langen Jahren zu beobachten Gelegenheit gehabt, dass die Rechnung mit den sogenannten imaginären Grössen, mehr als ein blosses Spiel mit Zeichen bedeutete. Es genüge hier zweier solcher Erscheinungen Erwähnung zu thun.

8] In einem »Disquisitiones arithmeticae« betitelten Werke, welches im Jahre 1801 der damals vierundzwanzigjährige Gauss herausgab, einem Werke, welches der Zahlentheorie und der Algebra neue Bahnen erschloss, befindet sich als letzter Abschnitt eine Untersuchung über die Kreistheilung. Schon zu Euklids

Zeiten verstand man es, durch Anwendung von Cirkel und Lineal die Kreisperipherie in drei, vier, fünf, fünfzehn gleiche Theile zu theilen und ebenso in eine Anzahl, welche durch wiederholte Verdoppelung dieser Zahlen entsteht. Es hat dann während zweitausend Jahren kein Fortschritt in der Frage der Kreistheilung stattgefunden, bis Gauss an der genannten Stelle das Problem zur Entscheidung brachte, durch welche Zahlen die Anzahl der Theilpunkte bestimmt sein müsse, damit die Theilung mit Cirkel und Lineal ausführbar sei. Und welches war der Weg, der ihn zu dieser Entdeckung führte? Es war das Studium der imaginären Wurzeln der Einheit, eine Untersuchung, welche für die Algebra und die Zahlentheorie des XIX. Jahrhunderts von mächtigem Einflusse geworden ist, und welche als eine ihrer unmittelbaren Früchte die Lösung des bezeichneten Problems der Kreistheilung lieferte. Gab da der Gewinn, welchen die Anwendung der sogenannten imaginären Grössen für das reale Gebiet der Geometrie abgeworfen hatte, nicht Anlass genug, den Schleier, welcher jene Grössen umgab, zu zerreissen?

Nicht weniger aber gab eine andere Gelegenheit einen Anstoss zum Nachdenken über das Wesen der imaginären Grössen. Die Königl. Societät der Wissenschaften zu Kopenhagen hatte in den zwanziger Jahren des XIX. Jahrhunderts die für die Kartenprojectionen und die höhere Geodäsie fundamentale Preisaufgabe gestellt: »die Theile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich sei«.

In einer Abhandlung, welche der Lösung dieser Aufgabe gewidmet [9
ist, zeigte Gauss, dass dieselbe mit Notwendigkeit zur Anwendung von Functionen einer complexen Variabeln führt, welche wir heutzutage als monogene oder analytische Functionen zu bezeichnen pflegen. Hier zeigte sich von Neuem die Wirkung der sogenannten imaginären Grössen auf die Welt des Realen, und somit die Ungebühr, die Realität jener Grössen in Abrede zu stellen. In der That führt Gauss in der genannten Schrift vom Jahre 1831 die eben bezeichnete Abbildungsaufgabe als einen der Impulse zu der von ihm unternommenen Rechtfertigung der complexen Grössen an.

Man darf es wohl sagen, dass die gewaltigen Fortschritte, welche die Analysis im XIX. Jahrhundert gemacht hat, wesentlich dem Umstande zu verdanken sind, dass man abweichend von den Speculationen früherer Zeiten bei der Betrachtung der Abhängigkeit veränderlicher Grössen, dieselben nicht auf sogenannte reale Werthe beschränkte, sondern vielmehr die allgemeinen complexen Werthe in Betracht zog. Auf Schritt und Tritt kann man diese Behauptung in der Analysis dieser Zeit nachweisen. Ich muss mich jedoch hier damit begnügen, dieses an einigen den Elementen der Analysis entnommenen Beispielen zu erläutern.

Sind zwei veränderliche Grössen in algebraischer Abhängigkeit von einander, und verlangt man, dass die eine der Veränderlichen durch den Zusammenhang mit der anderen jeden beliebigen realen Werth erziele, so ist dieses im allgemeinen nicht möglich, so lange der Werthbereich dieser anderen Veränderlichen dem realen Gebiete angehört; dieses wird vielmehr erst dadurch möglich, dass man dieser Veränderlichen gestattet, die reale Axe zu verlassen und sich frei in der ganzen Ebene zu ergehen. Das Gleiche nehmen
10] wir, um bei den elementaren Functionen zu verbleiben, bei den trigonometrischen Functionen Sinus und Cosinus wahr. Man erzielt für dieselben nur einen realen Werthbereich, der, vom Zeichen abgesehen, nicht grösser ist als Eins, so lange die unabhängige Variable nur reale Werthe durchläuft, während die Gesammtheit aller übrigen realen Werthe für jene Functionen erst hervorgerufen wird, wenn man für die unabhängige Veränderliche complexe Werthe zulässt.

Es ist hier jedoch am Platze hervorzuheben, dass eine ähnliche Erscheinung zu Tage tritt, auch wenn man für die functionalen Beziehungen zwischen zwei Veränderlichen durchweg das Gesammtgebiet der complexen Grössen zulässt. Die Entwickelung der Analysis des XIX. Jahrhunderts hat zu Functionen einer complexen Variabeln geführt, bei welchen die Gesammtheit aller complexen Werthe der unabhängigen Veränderlichen nur zu einem beschränkten complexen Werthbereich der abhängigen Veränderlichen führt. Es darf sogar wohl behauptet werden, dass diese Eigenschaft der Mehrzahl derjenigen Functionen zukommt, welche durch Differentialgleichungen definirt werden. Man könnte nun auf den Gedanken kommen, diesem Mangel durch Einführung neuer Grössen, denen die complexen Grössen untergeordnet sind, abzuhelfen, in der Hoffnung, für die Functionswerthe dadurch die ganze Ebene frei zu machen, dass die unabhängige Veränderliche auf das Gebiet jener neuen Grössen ausgedehnt wird. Allein da, wie schon erwähnt, allgemeinere Grössen

als wie die complexen nicht den sämmtlichen Rechnungsoperationen wie die letzteren unterworfen werden können, so muss man auf diesen Versuch verzichten. Man muss vielmehr die Thatsache des beschränkten Werthbereiches der Function als einen natürlichen Ausfluss des Grössenbegriffs hinnehmen.

In die Epoche, in welcher Gauss das Resultat seiner Reflexionen über die complexen Grössen substantiirte, fällt die Entdeckung der Theorie der [11
elliptischen Functionen durch Abel und Jacobi. Diese Functionen, welche der Analysis des XIX. Jahrhunderts neue Perspectiven eröffneten, und seitdem der Geometrie und Mechanik durch zahlreiche Anwendungen dienstbar geworden sind, wären ohne Herbeiziehung der complexen Grössen in ihrem innersten Kern unverständlich und einer Weiterentwickelung unfähig geblieben. Während nämlich die trigonometrischen Functionen sich einer realen Periode erfreuen — eine Eigenschaft, auf welcher die schönsten Anwendungen jener Functionen beruhen —, wurde in den elliptischen Functionen ein Functionsgebiet erschlossen und zugleich zum Abschluss gebracht, welches mit zwei Perioden begabt ist. Aber diese beiden Perioden sind so beschaffen, dass ihr Verhältniss durch eine sogenannte imaginäre Grösse dargestellt wird. Die letztere Eigenschaft aber ist gerade das Fundament für die analytische Darstellung der elliptischen Functionen geworden, eine Darstellung, welche auch die Anwendbarkeit dieser Functionen für das reale Sein bedingte.

Während Gauss das Verdienst zugesprochen werden muss, den complexen Grössen ihr Bürgerrecht in dem Reiche der Grössen gesichert zu haben, ist es dem grossen französischen Mathematiker Cauchy vorbehalten geblieben, die bis dahin nur geduldete complexe Grösse zur Herrscherin in der Analysis zu erheben. Cauchy, unser Aller Lehrmeister in der Analysis, auf dessen Schultern alle, welche bis jetzt nach ihm diesem Gebiete ihre Kräfte zugewendet, gestanden haben, begann in den zwanziger Jahren des XIX. Jahrhunderts eine lange Reihe von Arbeiten, in welchen er zuerst die elementaren Theile der Analysis, die bis dahin sich nur auf reale Werthe bezogen hatten, auf der Basis der complexen Grössen neu begründete, um alsdann zur Ausdehnung der in der Differential- und Integralrechnung verwendeten Vor- [12
stellungen auf die complexen Veränderlichen fortzuschreiten. Auf diesem Wege gelang es ihm, überall unverrückbare Fundamente für die ganze Analysis festzulegen. Indem er so die ganze Machtfülle der complexen Grössen

entfaltete, schuf er die Grundlagen für die Functionentheorie unserer Zeit. Es ist mir nicht möglich, an dieser Stelle die wunderbaren Erfolge dieses Meisters und die schöne Architektonik, welche durch ihn und seine Schüler im Gebäude der Functionentheorie ausgestaltet worden ist, auch nur zu skizziren. Man gewinnt einigermassen eine Vorstellung hiervon, wenn man das Lehrgebäude der elliptischen Functionen, wie es sich nach der Mitte des Jahrhunderts — nachdem die Lehren Cauchys von seinen Schülern Briot und Bouquet für die Theorie dieser Functionen flüssig gemacht worden waren — mit der Gestalt vergleicht, welche dieses Lehrgebäude in früherer Zeit darbot; wenn man die Grundlagen der Theorie der Abelschen Functionen, welche von Weierstrass und Riemann geschaffen worden sind, ins Auge fasst; wenn man die Basis kennen lernt, auf welcher sich eine rationelle Theorie der Differentialgleichungen aufbauen liess, eine Theorie, welche gleichwie die eben genannten Disciplinen für die Anwendungen auf die Probleme der Mechanik und Physik so wichtige Folgen aufzuweisen hat.

Je weiter die neue Theorie der Functionen fortschritt, desto mehr Licht verbreitete dieselbe über das Verhältniss der sogenannten imaginären Grössen zu den realen. Ich will hier nur beispielsweise auf die von Cauchy ausgebildete Integration einer Function einer complexen Veränderlichen längs willkürlicher Bahnen in der Ebene hinweisen. Diese eröffnete nicht nur eine neue Quelle für die Werthbestimmung von bestimmten Integralen mit realen Veränderlichen, sie erwies sich vielmehr als das einzige Hilfsmittel, um bis
13] dahin dunkel gebliebene Erscheinungen in der realen mathematischen Welt zu erhellen. Es sei mir gestattet, dieses an einem einfachen Falle zu erläutern. In den Elementen der Integralrechnung stellen sich die trigonometrischen Functionen der realen Veränderlichen als die Umkehrungsfunctionen gewisser bestimmter Integrale dar. Wollte man aus dieser Definition die periodische Natur dieser Functionen erschliessen, so würde dieses Unternehmen schlechterdings erfolglos bleiben, solange man das bestimmte Integral an die reale Bahn fesselt. Erst wenn man die complexe Integration längs beliebiger Bahnen zulässt, kommt die reale Periode unserer Functionen zum Vorschein. Wieder einer der zahlreichen Fälle, in welchen sich die Vorausschau von Gauss bestätigt, dass die complexen Grössen nicht nur für den logischen Aufbau der meisten Disciplinen der Mathematik unentbehrlich seien, dass ihnen

vielmehr eine reale Wesenheit im Reiche der Grössen zugeschrieben werden müsse.

Die zweite Thatsache, von welcher wir oben gesagt, dass sie den Arbeiten des XIX. Jahrhunderts ihr characteristisches Gepräge aufgedrückt habe, lässt sich als die Methode kennzeichnen, die functionalen Beziehungen zwischen veränderlichen Grössen begrifflich so zu fixiren, dass die Abhängigkeit derselben für ihren ganzen Verlauf vollkommen und unzweideutig bestimmt wird, unabhängig davon, ob für die functionalen Beziehungen geeignete Darstellungen durch analytische Formen herstellbar sind.

In gewissen Fällen gelangt man zu einer solchen begrifflichen Feststellung, indem solche Fundamentaleigenschaften einer Functionsklasse eruirt werden, aus welchen alle anderen Eigenschaften derselben als logische Folgerungen fliessen. Solcher Fundamentaleigenschaften kann es mehrere geben. Da sie sich gegenseitig begrifflich bedingen, so wird unter denselben eine solche ausgewählt werden können, welche entweder begrifflich die ein- [14
fachste ist, oder welche den Zwecken der besonderen Untersuchung entspricht. So ist beispielsweise für die trigonometrischen Functionen eine solche Fundamentaleigenschaft das für dieselben aus den Elementen der Mathematik bekannte Additionstheorem. In der That, wenn Functionen gefordert werden, welche sich eines solchen Additionstheorems wie die trigonometrischen Functionen erfreuen sollen, so ergiebt sich*), dass diese Functionen dem Gebiete der trigonometrischen Functionen angehören. Eine andere solche Fundamentaleigenschaft der trigonometrischen Functionen ist ihre Periodicität, da alle mit dieser Eigenschaft begabten Functionen ebenfalls dem Reiche der trigonometrischen zu eigen sind. Für die trigonometrischen Functionen besitzen wir zwar einfache analytische Darstellungsformeln in unendlichen Reihen oder Producten. Aber dort, wo aus einer Schlussreihe gefolgert wird, dass eine Function sich der einen oder der anderen der bezeichneten Fundamentaleigenschaften erfreut, wird ihre Zugehörigkeit zum Kreise der trigonometrischen Functionen hieraus unmittelbar erkannt werden können, während diese Erkenntniss vermittelst der analytischen Darstellung nur mühsam und oft erst durch langwierige Rechnungen zu erzielen ist.

*) Cauchy, Analyse algébrique, Chap. V.

Ähnlich ist es mit den doppeltperiodischen (elliptischen) Functionen bestellt. Diese besitzen ebenfalls ein Additionstheorem, welches eine Fundamentaleigenschaft dieser Functionen in dem Sinne darstellt, dass aus derselben alle anderen Eigenschaften dieser Functionen hergeleitet werden können. Dieser Umstand hat es WEIERSTRASS, dem unvergesslichen Meister der Analysis, möglich gemacht, in einer späteren Epoche seiner Vorlesungen an hiesiger
15] Universität, vom Additionstheorem ausgehend, die ganze Theorie der elliptischen Functionen aufzubauen.

Eines der lehr- und folgenreichsten Beispiele für die Bestimmung einer Function durch besondere Merkmale vollzog sich an der Theorie des Potentials, jener Function, welche in der Physik überall, wo das NEWTONsche Gesetz gilt, insbesondere in der Lehre vom Magnetismus und von der Electricität, von so grosser Bedeutung geworden ist. Der Werth des Potentials ist von der geometrischen Gestalt der Massen, auf welche dasselbe Bezug nimmt, und von der Dichtigkeit derselben abhängig, und ist durch ein einfaches oder mehrfaches bestimmtes Integral dargestellt. Die wirkliche exacte Berechnung jedoch ist nur in den seltensten Fällen durchführbar, unter einer solchen Berechnung die Darstellung durch bekannte Functionen verstanden. Es ist einer der schönsten Gedanken des grossen mathematischen Denkers G. LEJEUNE-DIRICHLET gewesen, dem Ausdrucke des Potentials diejenigen functionalen Eigenschaften abzulauschen, durch welche die Abhängigkeit seines Werthes von der Lage der durch die NEWTONschen Kräfte afficirten Massen vollkommen und unzweideutig bestimmt wird. Hierdurch ist die Frage der Ausrechnung in den Hintergrund gedrängt und für die wichtigsten Schlüsse sogar entbehrlich gemacht.

Der von DIRICHLET am Potential entwickelte Gedanke ist seitdem zu einem fundamentalen Princip für alle Gebiete der mathematischen Physik, namentlich für die Lehre der Electricität und des Magnetismus, sowie für die Lehren der Wärme und der durch die Elasticität hervorgerufenen Bewegungen ausgewachsen; und es war noch DIRICHLET selbst vergönnt, die leitenden Gedanken an grossen Beispielen zu verwirklichen. Überall begegnen wir hier gewissen Differentialgleichungen, welche die physikalischen Vorgänge
16] definiren. Es liegt jedoch in der Natur solcher Differentialgleichungen, dass sie eine unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen darbieten. Aus dieser

unendlichen Mannigfaltigkeit hat man nun diejenigen Lösungen herauszuschälen, welche die in einem bestimmten physikalischen Problem durch die Natur gegebenen Nebenbedingungen, wie Anfangszustände, Grenzbedingungen, Unstetigkeitsbedingungen, erfüllen. Um jedoch zu erkennen, ob die diesen Bedingungen angepassten Lösungen der Differentialgleichung das wahre Naturgesetz darstellen, ist es erforderlich nachzuweisen, dass diese Lösungen auch die einzigen sind, welche den Nebenbedingungen genügen. Hier greifen nun die von DIRICHLET am Potential entwickelten Principien ein und haben in vielen wichtigen Fällen auch schon zum Ziele geführt.

In der Geschichte der Mathematik begegnen wir häufig der Thatsache, dass Gedanken, welche Probleme auf dem Gebiete der exacten Naturwissenschaften hervorgerufen, reiche Früchte für die mathematische Speculation getragen haben. Nirgendwo aber ist in einer kurzen Spanne Zeit die Ernte für die Mathematik reicher gewesen, als in dem Falle dieser DIRICHLETschen Principien. Diese Ernte so schnell zur Reife zu bringen, ist dem Genius von RIEMANN gelungen, RIEMANN, welcher zum Schmerze der mathematischen Welt der Wissenschaft in so frühem Alter entrissen worden, und welcher dennoch während seines kurzen Lebens durch Erweiterung der mathematischen Erkenntniss sich einen Platz in der Reihe der grössten Mathematiker des Jahrhunderts gesichert hat. Auf der bekannten Thatsache fussend, dass die Bestandtheile jeder Function einer complexen Variabeln einer und derselben partiellen Differentialgleichung genügen, legte er, sich an die DIRICHLETschen Methoden anschliessend, den Grund zu einer neuen Auffassungsweise der Theorie der Functionen einer complexen Variabeln. In dieser Auffassungsweise scheiden sich die Functionen von einander nach den Grenz- und [17
Unstetigkeitsbedingungen, welchen sie einzeln unterliegen. Das Bemerkenswertheste an dieser Characteristik der Functionen ist die begriffliche Bestimmung derselben, losgelöst von ihrer Darstellbarkeit vermittelst analytischer Formeln. Von den Resultaten, welche RIEMANN auf diesem Wege gefunden, will ich hier nur seiner bewundernswerthen Theorie der allgemeinen ABELschen Functionen Erwähnung thun. Seine Methode machte es ihm möglich, diese Theorie auf wenigen Druckbogen zu entwickeln, während deren Aufbau auf dem Grunde der analytischen Form der algebraischen Functionen zu so grossen Weitläufigkeiten Anlass giebt. Es schmälert auch den Ruhm RIE-

MANNS nicht, dass in der Begründung der von ihm hierbei verwendeten Principien Lücken vorhanden waren, welche erst später von anderen Mathematikern ausgefüllt worden sind.

Wenn veränderliche Grössen in functionalen Beziehungen stehen, so verlangen wir von einer Darstellung dieser Beziehungen durch analytische Ausdrücke zunächst, dass sie für den ganzen durch die Natur der Beziehungen begrenzten Bereich der Veränderlichen gültig sei.

In analytischer Hinsicht ist an eine solche Darstellung die weitere Forderung zu stellen, dass aus derselben das Gesetz der Abhängigkeit der Veränderlichen, d. h. die fundamentalen Eigenschaften dieser Abhängigkeit unmittelbar abgelesen werden können.

Ich lasse die grossen Schwierigkeiten ausser Acht, welche zur Gewinnung einer solchen Darstellung zu überwinden sind. Es muss jedoch hervorgehoben werden, dass die Darstellung erst möglich wird, wenn der functionale Zusammenhang bereits begrifflich in seinem ganzen Umfange erfasst ist, sodass die Darstellung für die Erkenntniss der dargestellten Functionen wesentlich neues nicht liefert.

18] Grösser ist der Werth der analytischen Formeln, welche functionale Beziehungen darstellen, in der Anwendung auf practische Probleme, nämlich da, wo es sich um die numerische Berechnung von Grössen handelt, welche bei Versuchen oder Beobachtungen zu ermitteln sind; wie beispielsweise in der Astronomie bei der Bestimmung der Elemente der Bahn eines Himmelskörpers aus gewissen Beobachtungsdaten. Aber in den Anwendungen wird an eine analytische Darstellung noch die dritte Forderung gestellt, dass sie sich einer raschen Convergenz erfreue.

Wird die Abhängigkeit von Grössen, welche sich in der Natur gegenseitig bedingen, durch mathematische Hülfsmittel, wie durch Differentialgleichungen gebunden, so spiegelt sich das Gesetz dieser Abhängigkeit schon in dem begrifflich fixirten Zusammenhange der den Differentialgleichungen genügenden Quantitäten ab, wie zahlreiche Probleme der mathematischen Physik, insbesondere in den Anwendungen der Potentialtheorie beweisen. Es sei mir gestattet, an einem einfachen Beispiele den ausgesprochenen Gedanken zu erläutern. Die Lage und die Geschwindigkeit eines schweren Punktes, der sich auf einem verticalen Kreise bewegt, (die sogenannte Pendelbewegung) in

ihrer Abhängigkeit von der Zeit wird durch eine Differentialgleichung bestimmt. Die begriffliche Discussion der Functionen, welche dieser Differentialgleichung Genüge leisten, giebt schon darüber Aufschluss, dass je nach der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit drei Bewegungsweisen möglich sind, wovon die eine die hin- und hergehende Bewegung (die eigentliche Pendelbewegung) darstellt. Diese Bewegung entspricht dem Falle, dass die Lösung der Differentialgleichung periodisch wird. Wir lernen die Periode und damit die Schwingungsdauer, sowie die Grösse der Elevation bestimmen, und erhalten hiermit vermittelst der begrifflichen Discussion ein klares Bild von den wichtigsten Momenten der Bewegung. Andererseits sind die Functionen, welche [19
diese Bewegung in ihrer Abhängigkeit von der Zeit bestimmen, die sogenannten elliptischen Functionen. Für diese hat die Theorie Darstellungen durch Quotienten zweier sehr rasch convergirender Reihen geliefert. Über die Art der Bewegung liefern diese Darstellungen keine neuen Aufschlüsse, wohl aber sind sie bei dem durch Beobachtung herzustellenden Zusammenhang zwischen der Pendellänge, der Erdschwere und der Anfangsgeschwindigkeit mit Vortheil numerisch zu verwerthen.

Von besonders hervorragender Bedeutung ist im XIX. Jahrhundert die begriffliche Bestimmung der Functionen für die Integration der Differentialgleichungen geworden. Wenn eine Differentialgleichung vorgegeben war, so hatte man früher planlose Versuche gemacht sie so zu transformiren, dass sie auf gewisse Typen zurückgeführt würde, welche man im Laufe der Zeit zu integriren gelernt hatte. Oder man suchte, wo dieses nicht gelang, die Differentialgleichung auf sogenannte Quadraturen zurückzuführen; und wo auch dieser Versuch misslang, stellte man Reihen her, welche die Differentialgleichung befriedigten. Diese planlosen Versuche konnten jedoch, wie wir heutzutage einzusehen in der Lage sind, in nur seltenen Fällen zum Ziele führen. Die Fälle, wo eine vorgelegte Differentialgleichung auf jene kleine Anzahl von Typen oder auf Quadraturen zurückführbar ist, sind nur als Ausnahmsfälle zu bezeichnen — abgesehen davon, dass in der Regel die Hülfsmittel fehlen, um jedesmal die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Zurückführung zu erkennen. Aber wenn auch die Zurückführung auf Quadraturen gelingt, so ist damit für die Erkenntniss der Natur der Lösungen einer Differentialgleichung nur selten etwas gewonnen, wie das Beispiel der einfachsten

Differentialgleichungen zeigt, wo von vornherein die Form der Quadratur ge-
20] geben ist. Eine solche auf eine Quadratur zurückführbare Differentialgleichung ist z. B. diejenige, welche durch elliptische Functionen gelöst wird, und es war nichts weniger als die Theorie dieser Functionen erforderlich, um eine Einsicht in die Natur der Lösungen der Differentialgleichung zu gewinnen.

Und was die letzte Zuflucht anbetrifft, die Lösungen der Differentialgleichungen durch Reihen darzustellen, so musste dieser Versuch an dem Umstande scheitern, dass solche Reihen in der Regel die Function nicht für den ganzen zulässigen Bereich der unabhängigen Veränderlichen liefern.

Auch auf diesem Gebiete haben die Arbeiten von Cauchy und die seiner Schüler den Weg geebnet, auf welchem sich im XIX. Jahrhundert ein vollständiger Umschwung in der wissenschaftlichen Behandlung der Differentialgleichungen vollzog. Wie Gauss zum ersten Male eine strenge Begründung des Satzes gegeben hat, dass jede algebraische Gleichung eine Wurzel besitze, so hat Cauchy für die Differentialgleichungen eine sichere Grundlage durch den Nachweis geschaffen, dass es immer Lösungen der Differentialgleichungen gebe, welche gewissen vorgeschriebenen Bedingungen genügen. Die Existenz solcher Lösungen stellt Cauchy zuerst für beschränkte Gebiete der Veränderlichen, dann aber durch sein Fortsetzungsprincip für den ganzen Geltungsbereich der Functionen fest. — Briot und Bouquet, Schüler von Cauchy, haben seine Principien an der Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung in einer im Jahre 1856 erschienenen Arbeit erprobt, welche als ein Markstein auf dem Wege bezeichnet werden muss, den seitdem die Lehre von den Differentialgleichungen eingeschlagen hat.

Es ist hier natürlich nicht am Platze, eine Geschichte der Entwickelung dieser Disciplin bis auf die jetzige Zeit zu geben. Jedoch sei mir gestattet,
21] auf die Gedanken hinzuweisen, welche bei der begrifflichen Bestimmung der durch Differentialgleichungen definirten Functionen durchgängig die leitenden sind. Wenn der Geograph die Configuration eines Landes beschreiben will, so werden ihm alle die Theile, welche eine gleichmässige und zusammenhängende Beschaffenheit haben, keine Anhaltspunkte zur Characteristik des Landes geben können. Er muss die Unterbrechung des Planums durch Flüsse und Seen, die Erhebungen des Bodens, wie sie das Gebirge darbietet, um es

zusammenzufassen, die Unregelmässigkeiten, die Unstetigkeiten im Planum heranziehen, um ein vollständiges Bild der Landschaft entwerfen zu können. Ähnlich ergeht es dem Analytiker, welcher die Lösungen von Differentialgleichungen characterisiren will.

In einem Gebiete veränderlicher Grössen geben diejenigen Stellen, wo die Lösungen der Differentialgleichungen ein gleichmässiges, einförmiges Verhalten zeigen, keine directen Anhaltspunkte zur Beurtheilung der Natur der Lösungen. Erst die Stellen, wo die Lösungen ihre Einförmigkeit verlieren, seien es Punkte, Linien oder Flächen, sind die Elemente, aus welchen sich die Individualität der Lösungen entwickelt. Diese Unregelmässigkeiten nennen wir singuläre Stellen. Ihre Auffindung ist das erste, freilich oft mühsame Geschäft des Analytikers. Das Studium des Verhaltens der Lösungen in der Umgebung der singulären Stellen ist der nächste Schritt. Die dritte entscheidende Aufgabe ist die, die Einwirkung des Verhaltens der Lösungen in der Umgebung der singulären Stellen auf den Werthvorrath jener für jede beliebige Stelle des Gebietes der unabhängigen Veränderlichen zu erkennen. Zur Herstellung dieser Erkenntniss muss man sich nicht scheuen, alle Theile der Mathematik, wie fern sie auch zu liegen scheinen, in Contribution zu ziehen.

Die Integration der Differentialgleichungen in dem bezeichneten Sinne hat dem in älterer Zeit geübten planlosen Transformiren derselben gegen- [22
über den Vorzug, dass auf rationellem Wege die Natur der Lösungen aus dem, was die Differentialgleichungen selber über sie aussagen, erforscht wird. Aber man wird die Schwierigkeit der Aufgabe schon daraus ermessen, dass jede auf's Gerathewohl herausgegriffene Differentialgleichung immer eine neue Functionenklasse characterisirt, deren erschöpfende Erforschung oft eine ganz neue Disciplin erschaffen müsste. Es kann hiernach ebensowenig eine allgemeine Regel für die Integration der Differentialgleichungen angestrebt werden als es in der Medicin angezeigt wäre, nach einem Universalmittel zur Heilung aller Krankheiten zu trachten. Aber es ist in erkenntnisstheoretischer Hinsicht schon als ein hoher Gewinn zu bezeichnen, dass der Weg, welchen man zu gehen hat, gewiesen ist, mag man in seiner Verfolgung bei der einzelnen Aufgabe auch auf zeitweise unüberwindliche Schwierigkeiten stossen.

Die Bemühungen auf diesem Gebiete sind aber des Schweisses der Edlen werth. Man erwäge nur, dass der grösste Theil der Aufgaben der Analysis selbst, sowie die Aufgaben der Mechanik und Physik auf Differentialgleichungen führen, dass also das Schicksal dieser Aufgaben von der rationellen Entwickelung der Theorie der Differentialgleichungen abhängt.

Wohl können wir, mit Rücksicht auf die Schwäche und die Unzulänglichkeit unserer menschlichen Kraft, mit einer gewissen Genugthuung auf das zurückblicken, was auf dem Gebiete der Theorie der Differentialgleichungen im XIX. Jahrhundert geleistet worden ist. Wir dürfen jedoch unser Auge nicht vor der Erkenntniss verschliessen, dass wir erst den Eingang in ein grosses Reich der Wissenschaft erzwungen haben, dass die gethane Arbeit verschwindend klein ist gegenüber der Arbeit, welche uns und zukünftigen Geschlechtern zu thun noch übrig bleibt.

23] Dieses Endergebniss eines Rückblickes auf einen besonderen Theil der mathematischen Wissenschaft wird sich als das Resultat eines Rückblickes auf jede wissenschaftliche Disciplin wiederholen, die Erkenntniss nämlich von der Unendlichkeit der Wissenschaft und das sich Bewusstwerden des bescheidenen Maasses des bereits Errungenen im Verhältniss zur Unendlichkeit der noch zu lösenden Aufgaben. Dieses Bewusstsein, meine werthe Commilitonen, die Sie dazu berufen sind, in einer kommenden Generation die Führung in der wissenschaftlichen Arbeit zu übernehmen, ist weit davon entfernt, Sie zu entmuthigen. Wenn dieses Bewusstsein dazu angethan ist, in Ihnen die Bescheidenheit wach zu erhalten, so wird dasselbe auch stets die Pietät gegen die Männer wach erhalten, welche vor Ihnen nach ihren Kräften der Wissenschaft gedient haben. Diese Pietät aber wird Ihnen stets ein Sporn sein, gleich jenen nicht in dem Streben zu ermüden, mit allen Ihren Kräften die menschliche Erkenntniss schrittweise zu fördern.

ANMERKUNG.

Änderung gegen das Original.

S. 422, Zeile 1 und 2 v. u. heisst der Text im Original:

Die Lage und die Geschwindigkeit der Bewegung eines schweren Punktes auf einem vertikalen Kreise (der sogenannten Pendelbewegung). R. F.

LXXX.

ANZEIGE BETREFFEND DIE ÜBERNAHME DER REDACTION DES JOURNALS FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 109, 1892, zwischen S. 88 und 89.)

Am 29. December 1891 wurde die mathematische Welt durch die Nachricht von dem Hinscheiden des Herrn Leopold Kronecker schmerzlich überrascht. Schwer getroffen sehen sich durch diesen Verlust alle, welche an dem Fortschritte der mathematischen Wissenschaften Antheil nehmen, schwer getroffen alle die Körperschaften, welche das Glück gehabt, sich seiner unermüdlichen und segensreichen Mitarbeiterschaft zu erfreuen.

Die mathematischen Arbeiten Kroneckers haben auf die Entwicklung der Mathematik unserer Zeit einen so tief eingreifenden Einfluss ausgeübt, und sie umfassen so ausserordentlich viele Gebiete, dass eine angemessene Würdigung derselben an einem geeigneteren Orte Platz finden muss. Wir haben nur noch die Aufgabe, dem Danke der mathematischen Welt für die hohen Verdienste des Dahingeschiedenen um unser Journal hier Ausdruck zu geben.

Der unterzeichnete gegenwärtige Redacteur wird sich bemühen, der bisherigen Tradition des Journals treu zu bleiben, und bittet die Mathematiker, auch fernerhin durch wissenschaftliche Beiträge dem Journal ihr Wohlwollen zu bekunden.

Berlin, im Januar 1892. Fuchs.

LXXXI.

† HERMANN VON HELMHOLTZ.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 114, 1895, S. 353.)

Die Redaction erfüllt die schmerzliche Pflicht, an dieser Stelle des schweren Verlustes zu gedenken, welchen die wissenschaftliche Welt durch das am 8. September v. J. erfolgte Dahinscheiden von Hermann v. Helmholtz erlitten hat. Es kann nicht unsere Aufgabe sein, die Verdienste des grossen Forschers an dieser Stelle zu würdigen. An diesen Verdiensten sind so zahlreiche und verschiedenartige Gebiete menschlichen Wissens betheiligt, dass nur das Zusammenwirken der verschiedenen Vertreter dieser Gebiete ein getreues Bild der wissenschaftlichen Thätigkeit des Dahingeschiedenen wird schaffen können. Unserem Journal wird alsdann die Ehre zufallen, für die Würdigung seiner ausgezeichneten mathematischen Leistungen die wesentliche Quelle darzubieten. Seit dem Jahre 1858, wo H. v. Helmholtz im 55. Bande seine berühmte Arbeit über die Integrale der hydrodynamischen Differentialgleichungen veröffentlichte, hat derselbe das Journal durch eine lange Reihe von mathematisch-physikalischen Arbeiten geziert, von welchen jede einzelne als Fundament einer Disciplin betrachtet werden muss.

H. v. Helmholtz hat aber unserem Journal auch noch in weiterem Sinne sein Interesse erwiesen. Er hat es nicht nur gestattet, dass vom 104. Bande an auf dem Titelblatte unter die Namen der Mitwirkenden auch der seinige aufgenommen werde, sondern er hat auch seine Mitwirkung durch wirkliche Antheilnahme gern bethätigt, wenn dieselbe in Anspruch genommen wurde. Die Redaction darf daher die Ehre in Anspruch nehmen, unter denjenigen, welche die wissenschaftliche Thätigkeit des grossen Mannes zu besonderem Danke verpflichtet hat, in vorderster Reihe zu stehen.

LXXXII.

NACHRUF.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 115, 1895, S. 349—350.)

Die Redaction hat die schmerzliche Pflicht zu erfüllen, des Verlustes [349 dreier Mitarbeiter des Journals zu gedenken, welche seit kaum einem Jahre der wissenschaftlichen Welt durch den Tod entrissen worden sind.

Arthur Cayley, geboren 16. August 1821 in Richmond Surrey, war bis zum Jahre 1863 als Barrister at law thätig, in welchem Jahre er zum Sadlerian Professor für die reine Mathematik in Cambridge gewählt wurde. Diese Stellung bekleidete er bis an sein Lebensende. Er starb am 26. Januar 1895.

Es ist uns versagt, hier den Lebenslauf sowie die reiche wissenschaftliche Thätigkeit des berühmten Gelehrten zu schildern, wie es ihm vergönnt war, in die in diesem Jahrhundert für die mathematischen Wissenschaften neu errungenen Disciplinen schöpferisch und fördernd einzugreifen. In vorzüglicher Weise hat bereits Professor A. R. Forsyth in den Obituary Notices of the Proceedings of the Royal Society Vol. 58 das Leben und Wirken Cayleys geschildert (vgl. auch t. VIII of the Collected Mathematical Papers, herausgegeben von Forsyth, woselbst sich auch ein Verzeichniss der Vorlesungen befindet, welche Cayley in dem Zeitraum von 1863 bis 1895 in Cambridge gehalten hat).

Die mathematischen Schriften Cayleys sind sehr zahlreich, ein grosser Theil derselben stammt schon aus der Periode vor 1863, indem während der Thätigkeit am Bar die Zeit zwischen der Jurisprudenz und der Mathematik getheilt war.

Cayley hat noch bei Lebzeiten eine vollständige Sammlung seiner Schriften unternommen, von welcher es ihm vergönnt war, die sieben ersten Bände zu vollenden. Der weiteren Ausführung dieser Aufgabe hat sich in dankenswerther Weise Herr Forsyth unterzogen, aus dessen Händen wir jüngst den achten Band empfangen haben.

350] Unser Journal hat ganz besonderen Anlass, das Andenken Cayleys in hohen Ehren zu halten. Vom 29. Bande des Journals an hat er dasselbe bis in sein letztes Lebensjahr durch seine unschätzbaren Beiträge ausgezeichnet.

Ludwig Schläfli, geboren am 15. Januar 1814 zu Burgdorf, Canton Bern, gestorben am 20. März 1895 als Professor der Mathematik an der Universität Bern, bildete ebenfalls eine lange Reihe von Jahren hindurch — vom 43. Bande bis zum 78. — eine Zierde unseres Journals. Nachdem er eine Anzahl vorzüglicher Arbeiten aus den Gebieten der Geometrie, der Optik, der Astronomie in den Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern, und besonders auf die Theorie der elliptischen Functionen bezügliche analytische Untersuchungen in Grunerts Archiv veröffentlicht hatte, war das Crellesche Journal die Stätte, an welcher er sich durch seine Leistungen in der Algebra, in der Geometrie, in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen, der Kugelfunctionen und der Modulargleichungen sowie in dem Problem der conformen Abbildung ein unvergängliches Denkmal gesetzt hat.

Josef Dienger, geboren am 5. November 1818, von 1859 bis 1868 Professor der Mathematik und Vorstand der mathematischen Schule am Polytechnicum in Karlsruhe, von 1868 bis 1888 Director in der allgemeinen Versorgungsanstalt im Grossherzogthum Baden, starb am 27. November 1894. Ausser zahlreichen Schriften in Grunerts Archiv, in den Nouvelles Annales, im Journal von Tortolini, in den Denkschriften der Königl. Ges. d. Wissensch. zu Prag und der Kaiserl. Akademie in Wien, sowie einer Reihe von Büchern zur Einführung in das Studium der Geometrie, der Analysis, der Geodäsie, der Mechanik, der elliptischen Functionen, der höheren Gleichungen und der Variationsrechnung sind von dem in seinem Streben zur Förderung der mathematischen Wissenschaften unermüdlichen Gelehrten 14 Abhandlungen in unserem Journal (von Band 34 bis 46) erschienen.

LXXXIII.

† KARL WEIERSTRASS.

(Geb. 31. October 1815, gest. 19. Februar 1897.)

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 117, 1897, S. 357.)

Am 19. Februar dieses Jahres ist die mathematische Welt durch das Hinscheiden von Karl Weierstrass in tiefe Trauer versetzt worden.

Von seinem ersten Auftreten in der mathematischen Litteratur an bis in ein hohes Alter hinein hat Weierstrass die Wissenschaft nicht nur durch seine Entdeckungen bereichert, sondern auch durch sein Eingreifen in die Arbeiten der Zeitgenossen und durch seine Lehrthätigkeit an der hiesigen Universität, deren Zierde er über 40 Jahre gewesen, in einem solchen Maasse gefördert, dass eine Würdigung dieser reichen Wirksamkeit eine zu umfangreiche Aufgabe ist, um an dieser Stelle Platz zu finden.

Aber die Redaction dieses Journals hat die besondere Pflicht, hier das Andenken des grossen Mathematikers zu ehren. Unser Journal hatte das Glück, seine berühmtesten Arbeiten in seine Spalten aufnehmen zu können; und unter den Mitwirkenden ziert der Name Weierstrass unser Journal vom 53. bis zum 117. Bande, während die Bände 91 bis 103 ihn im Verein mit Kronecker als Redacteur bezeichnen durften.

Berlin, im März 1897.

LXXXIV.

ERNST CHRISTIAN JULIUS SCHERING †.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 119, 1898, S. 86.)

Am 2. November dieses Jahres verschied nach langem Leiden der ordentliche Professor der Mathematik an der Universität Göttingen Ernst Schering, geb. am 13. Juli 1833 im Forsthause Sandbergen bei Bleckede an der Elbe (in der Provinz Hannover). Ausser durch seine zahlreichen auf die reine Mathematik und auf die mathematische Physik bezüglichen Arbeiten hat er die mathematische Welt ganz besonders durch die im Auftrage der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von ihm besorgte Herausgabe der gesammelten Werke unseres grossen Lehrmeisters Karl Friedrich Gauss zu bleibendem Danke verpflichtet. Seine eigenen Schriften befinden sich grösstentheils in den Nachrichten und Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, eine derselben, zahlentheoretischen Inhalts, hat der Verfasser dem 100. Bande unseres Journals einverleiben lassen.

December 1897.

LXXXV.

FRANCESCO BRIOSCHI †.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 119, 1898, S. 259.)

Am 13. December 1897 verschied in Mailand der Präsident der R. Accademia dei Lincei, Director des R. Istituto tecnico Superiore in Mailand, Herausgeber der Annali di Matematica pura ed applicata, Francesco Brioschi. Die mathematische Welt vereint sich mit dem Vaterlande des Dahingeschiedenen in der tiefen Trauer um den schweren Verlust, welcher die Wissenschaft betroffen. An anderen Orten haben hervorragende Gelehrte die grossen Verdienste, welche Brioschi durch seine eigenen ausgezeichneten Arbeiten und durch die Förderung der mathematischen Studien in Italien sich erworben hat, in gebührender Weise gewürdigt. Wir haben aber die Pflicht, an dieser Stelle des langjährigen Mitarbeiters an unserem Journale (seine Aufsätze beginnen im 50. Bande desselben) in dankbarer Pietät zu gedenken.

LXXXVI.

CHARLES HERMITE †.

(Geb. 24. December 1822 in Dieuze (Lorraine), gest. 14. Januar 1901 in Paris.)

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 123, 1901, S. 174.)

Der Anfang des Jahres 1901 brachte der mathematischen Welt die schmerzliche Trauerkunde, dass ihr Altmeister Charles Hermite am 14. Januar aus diesem Leben geschieden ist. Wenn diese Kunde überall auf dem ganzen Erdball die Herzen derer, welche die mathematischen Wissenschaften pflegen, tief erschüttern musste, so sind es die deutschen Mathematiker, welche durch die ganze Schwere dieses traurigen Ereignisses nicht weniger betroffen worden sind als die Verehrer des grossen Mannes in seinem Vaterlande. Der Verewigte hat nicht nur mit den mathematischen Forschern Deutschlands während seiner ganzen Lebenszeit in engster Verbindung gestanden, sondern auch an ihren wissenschaftlichen Arbeiten in hervorragender Weise sich betheiligt und für die Verbreitung der Resultate dieser Arbeiten in die weitesten Kreise Sorge getragen.

Die Redaction dieses Journals hat einen Mitarbeiter verloren, welcher ein halbes Jahrhundert lang eine der höchsten Zierden des Journals gewesen ist. Seine ruhmreiche Mitwirkung am Journal beginnt 1846 im 32. Bande desselben mit der Arbeit »Extrait de deux lettres de M. Charles Hermite à M. C. G. J. Jacobi« und schliesst im Jahre 1896 im 116. Bande ab. Es gestattet uns nicht der Raum, an dieser Stelle in eine angemessene Würdigung der hohen Bedeutung der zahlreichen Arbeiten des Meisters auf den Gebieten der Zahlentheorie, der Algebra, der Theorie der Formen und der Analysis, und des mächtigen Einflusses einzutreten, welchen sie auf die Ausbildung der genannten mathematischen Disciplinen durch seine Schüler ausgeübt haben. Ein solches Unternehmen erheischte eine geschichtliche Darlegung der mathematischen Bestrebungen seiner Zeit. Auch sind unsere Herzen über den Verlust des Mannes noch zu tief bewegt, um einer so schwierigen Aufgabe nahezutreten. Selten mag es in der Geschichte der Mathematik vorgekommen sein, dass ein Gelehrter seinen Zeitgenossen auch als Mensch so nahe getreten ist und mit der Verehrung auch die Liebe derselben gewonnen hat. Jedes aufrichtige wissenschaftliche Streben erregte sein Interesse, gleichgültig ob der Strebende seinem Vaterlande angehörte oder dem Auslande; und es war ein Ausfluss seiner unbegrenzten und unparteiischen Liebe zur Wissenschaft, dass ihn mit der lebhaftesten Theilnahme für das wissenschaftliche Streben auch die herzliche Theilnahme für die Person des Strebenden erfüllte.

Wir werden seiner stets in Verehrung und Liebe gedenken.

Göttingen, Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

REGISTER

BEARBEITET

VON

L. SCHLESINGER.

SACHREGISTER

zur Theorie der Differentialgleichungen und zur Functionentheorie[1]).

1) Die Abhandlungen I—IV des ersten Bandes, LXXIV, LXXV, LXXVII—LXXXVI des dritten Bandes sind in diesem Sachregister nicht berücksichtigt. Bei den einzelnen Stichworten ist in der Regel nur diejenige Stelle angegeben, wo der betreffende Gegenstand am vollständigsten erörtert ist.

NAMENREGISTER

zu Text und Anmerkungen.

REGISTER DER ANMERKUNGEN NACH DEN NAMEN IHRER VERFASSER GEORDNET.

Berichtigungen.

S. 11, Zeile 6 v. o. Correlat statt Corrollat.
„ 185, „ 10 v. u. lies 3 statt (3.).
„ 388, „ 16 } lies ERMAN statt ERMANN (Druckfehler des Originals).
„ 389, „ 16 }

Im Inhaltsverzeichniss von Band II
S. VII, Zeile 3 v. u. lies 87 statt 86.