LXIII.

REMARQUES SUR UNE NOTE DE M. PAUL VERNIER.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. 114, 1895, p. 231—232.)

Dans le Bulletin de la Société Mathématique de France t. XXII, [231
nº 8, p. 133, M. Paul Vernier vient de publier une note intitulée: »sur les formes binaires dont les variables sont des intégrales fondamentales d'une équation différentielle linéaire du second ordre«.

M. Vernier veut indiquer une démonstration du théorème suivant:

(α) Si une forme binaire dont les deux variables sont deux intégrales fondamentales de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = Py$ est égale à une racine d'une fonction rationnelle de x, elle renferme, à une même puissance, tous les facteurs linéaires qui forment un système réduit de racines pour l'équation irréductible vérifiée par l'un de ses facteurs linéaires.

Dans mon mémoire t. 81 de ce Journal p. 114—115 [1]) on peut lire les deux théorèmes suivants:

II. Inversement, $F(y_1, y_2)$ étant la racine d'une fonction rationnelle et $\eta = A_{01}y_1 + A_{02}y_2$ l'un des facteurs de la forme, et $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ formant un système réduit de racines de l'équation irréductible vérifiée par η, alors η_i a la forme $\eta_i = A_{i1}y_1 + A_{i2}y_2$, et la forme $F(y_1, y_2)$ renferme aussi les facteurs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$.

VI. Si une forme $f(y_1, y_2)$ est la racine d'une fonction rationnelle, elle renferme tous les facteurs qui forment ensemble le système réduit d'une équation irréductible, à une même puissance.

---

[1]) Mém. XX, p. 29—31, t. II de cette édition. R. F.

L'on voit donc que le théorème (α) n'est qu'une composition des théorèmes I et VI.

Mais cette composition étant presque littérale et renfermant, en particulier, la terminologie que j'ai introduite dans mon mémoire cité, je ne peux pas supposer que M. VERNIER ait eu l'intention de faire croire que le 232] théorème (α) était un théorème nouveau, je suppose plutôt que M. VERNIER a oublié d'indiquer l'origine de ce théorème.

Mais aussi dans la démonstration du théorème (α) contenue p. 135 du Bulletin, M. VERNIER a simplement reproduit la démonstration des théorèmes I. et VI. que j'ai donnée p. 114—115[1]) de mon mémoire cité.

J'ajoute les remarques suivantes:

M. VERNIER développe p. 133—134 du Bulletin un lemme, dont il tire la conséquence que f étant racine d'une fonction rationnelle, $H(f)$, le hessien de la forme f, est aussi racine d'une fonction rationnelle. Mais pour tirer cette conséquence, il ne faut pas partir d'une expression explicite du hessien, car le hessien étant un covariant de f, ce théorème n'est qu'un cas spécial du théorème p. 106, th. III[2]) de mon mémoire cité dont voici la teneur:

Soit y_1, y_2 un système fondamental d'intégrales de l'équation (B.) $\left(\frac{d^2y}{dx^2} = Py\right)$, tous les covariants d'une forme qui est égale à la racine d'une fonction rationnelle, sont aussi des racines de fonctions rationnelles.

Mais enfin on ne saurait du tout comprendre, pourquoi M. VERNIER fait intervenir ledit lemme. Il aurait pu omettre tout le contenu des pages 133 et 134 du Bulletin qui suit les mots: »j'indiquerai ici une démonstration très simple de ce théorème«, comme il n'en fait aucun usage dans la démonstration du théorème (α) p. 135 du Bulletin, qu'il a empruntée complètement aux pages 114—115[1]) de mon mémoire cité.

Mais je voudrais bien savoir, quel est le but de la note de M. VERNIER, puisqu'il emprunte à mon mémoire un théorème, de même que sa démonstration, sans indiquer la source dans laquelle il les a puisés?

Berlin, novembre 1894.

1) Mém. XX, p. 29—31, t. II de cette édition. R. F.

2) Ibid. p. 21. R. F.

LXIV.

ÜBER DIE ABHÄNGIGKEIT DER LÖSUNGEN EINER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNG VON DEN IN DEN COEFFICIENTEN AUFTRETENDEN PARAMETERN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1895, XXXVIII, S. 905—920; vorgelegt am 25. Juli; ausgegeben am 1. August 1895.)

Die folgende Notiz bezieht sich auf die Frage der Abhängigkeit der [905 Lösungen einer linearen homogenen Differentialgleichung von einem in den Coefficienten derselben auftretenden Parameter, welche ich bereits in einer Reihe früherer Aufsätze in den Sitzungsberichten ins Auge gefasst habe. Wenn die Coefficienten der zur Differentialgleichung gehörigen Substitutionsgruppe vom Parameter unabhängig sind, so genügen die Integrale der Differentialgleichung, aufgefasst als Functionen des Parameters, ebenfalls einer linearen homogenen Differentialgleichung höchstens derselben Ordnung, wie die vorgelegte*). Es bietet sich naturgemäss die Aufgabe dar, festzustellen, was umgekehrt für eine vorgelegte Differentialgleichung, deren Coefficienten rationale Functionen der unabhängigen Variablen und des Parameters sind, gefolgert werden kann, wenn es feststeht, dass ein Fundamentalsystem von Integralen derselben, aufgefasst als Functionen des Parameters, ebenfalls einer linearen homogenen Differentialgleichung Genüge leistet, deren Coefficienten rationale Functionen des Parameters und der unabhängigen Variablen der vorgelegten Differentialgleichung sind.

*) Siehe Sitzungsberichte vom 25. Februar 1892, S. 165[1]).

1) Abh. LIX, S. 126 dieses Bandes. R. F.

So genügt das hyperelliptische oder elliptische Integral z als Function der Variablen x einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Coefficienten rationale Functionen der Variablen x und eines der Verzweigungswerthe u. Dasselbe Integral z, aufgefasst als Function des Verzweigungswerthes u, genügt einer linearen homogenen Differentialgleichung der Form

$$q_1 Q(z) + q_0 \frac{\partial Q(z)}{\partial u} = 0,$$

$$Q(z) = \beta_{n-1} \frac{\partial^{n-1} z}{\partial u^{n-1}} + \beta_{n-2} \frac{\partial^{n-2} z}{\partial u^{n-2}} + \cdots + \beta_0 z,$$

906] wo q_1, q_0 rationale Functionen von x und u, $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ rationale Functionen von u allein sind und n den Grad des Radicanden der zu Grunde liegenden Quadratwurzel bedeutet. — Die Folge aus diesem Umstande ist aber, dass die Periodicitätsmoduln η des hyperelliptischen oder elliptischen Integrals der Differentialgleichung

$$Q(\eta) = 0$$

Genüge leisten. Diese Periodicitätsmoduln sind aber eben nichts anderes als Coefficienten der zur genannten Differentialgleichung zweiter Ordnung zugehörigen Substitutionsgruppe*).

Wir beschränken uns an dieser Stelle der Kürze halber darauf, die Ausführung der oben bezeichneten Aufgabe an dem Falle vorzunehmen, dass die vorgelegte Differentialgleichung der zweiten Ordnung ist, und dass von der Voraussetzung ausgegangen wird, dass die Differentialgleichung, welcher die Integrale derselben als Functionen des Parameters aufgefasst genügen, dritter Ordnung wird.

1.

Es sei vorgelegt die Differentialgleichung

$$\text{(1.)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + g \frac{\partial z}{\partial x} + hz = 0,$$

deren Coefficienten rational von x und y abhangen, und es werde vorausgesetzt, dass ein Fundamentalsystem von Integralen derselben, als Functionen von y, einer Differentialgleichung

$$\text{(2.)} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + p_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + p_2 \frac{\partial z}{\partial y} + p_3 z = 0,$$

deren Coefficienten ebenfalls rationale Functionen von x und y sind, genüge.

Sei

$$\text{(3.)} \qquad g = \frac{G(x, y)}{H(x, y)},$$

wo $G(x, y)$ und $H(x, y)$ ganze rationale Functionen ohne gemeinschaftlichen Theiler sind, und zwar

$$\text{(4.)} \qquad H(x, y) = H_1(x, y)^{\sigma_1} H_2(x, y)^{\sigma_2} \ldots H_s(x, y)^{\sigma_s},$$

wo $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_s$ positive ganze Zahlen, $H_k(x, y)$ irreductible ganze rationale Functionen und $H_k(x, y)$ von $H_l(x, y)$ verschieden, wenn k und l verschieden sind. Alsdann kann man bekanntlich g in die Form bringen: [907

$$\text{(5.)} \qquad g = \sum_1^s {}_k \frac{F_k(x, y)}{H_k(x, y)} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{V(x, y) H_1(x, y) H_2(x, y) \ldots H_s(x, y)}{H(x, y)} \right],$$

wo $F_k(x, y)$ und $V(x, y)$ ganze rationale Functionen von x, deren Coefficienten rational von y abhängen*).

Bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung

$$\text{(6.)} \qquad H_k(x, y) = 0$$

in Bezug auf x als Unbekannte mit $a_{k1}, a_{k2}, \ldots$, so ist

$$\text{(7.)} \qquad \frac{F_k(x, y)}{H_k(x, y)} = \frac{\alpha_{k1}}{x - a_{k1}} + \frac{\alpha_{k2}}{x - a_{k2}} + \cdots.$$

Wir machen nunmehr die vereinfachende Voraussetzung, dass $\alpha_{k1}, \alpha_{k2}, \ldots$ von y unabhängig sind. Diese Voraussetzung ist beispielsweise erfüllt, wenn die Integrale der Gleichung (1.) sich überall bestimmt verhalten und die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung von y unabhängig sind. Wenn $a_{k1}, a_{k2}, \ldots$ von y abhangen, so ist, mit Rücksicht darauf, dass nach dem Puiseuxschen Satze durch Umläufe von y jedes $a_{k\lambda}$ in jede andere Wurzel der Gleichung (6.) übergeführt werden kann, und andererseits darauf, dass solche

---

*) S. meine Arbeit in Crelles Journal, Bd. 71, S. 91 ff. [1]).

1) Abh. VIII, S. 241 ff., Band I dieser Ausgabe. R. F.

*) Vergl. Hermite, Cours d'Analyse, première partie, année 1873, p. 268.

Umläufe die rechte Seite der Gleichung (7.) nicht ändern,

$$(8.)\qquad \alpha_{k1} = \alpha_{k2} = \cdots = \alpha_k.$$

Es ist daher

$$(9.)\qquad \frac{\partial g}{\partial y} = \sum_k \alpha_k \left[\frac{\frac{da_{k1}}{dy}}{(x-a_{k1})^2} + \frac{\frac{da_{k2}}{dy}}{(x-a_{k2})^2} + \cdots \right] + \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \left[\frac{V(x,y)\, H_1(x,y)\, H_2(x,y) \ldots H_s(x,y)}{H(x,y)} \right]$$

und demnach

$$(10.)\qquad \frac{\partial}{\partial y} \int g\, dx = -\sum_k \alpha_k \left[\frac{\frac{da_{k1}}{dy}}{x-a_{k1}} + \frac{\frac{da_{k2}}{dy}}{x-a_{k2}} + \cdots \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{V(x,y)\, H_1(x,y)\, H_2(x,y) \ldots H_s(x,y)}{H(x,y)} \right]$$

eine rationale Function von x und y. Zu den Summen liefern nur diejenigen Factoren $H_k(x,y)$ einen Beitrag, für welche $a_{k1}, a_{k2}, \ldots$ von y abhängen.
908] Substituiren wir nunmehr in die Gleichungen (1.) und (2.)

$$(11.)\qquad z = e^{-\frac{1}{2}\int g\, dx}\, t,$$

indem wir bei der Bildung von $\int g\, dx$ aus Gleichung (5.) kein von x unabhängiges Glied hinzufügen, so verwandeln sich (1.) und (2.) in

$$(1a.)\qquad \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + h_1 t = 0,$$

$$(2a.)\qquad \frac{\partial^3 t}{\partial y^3} + P_1 \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + P_2 \frac{\partial t}{\partial y} + P_3 t = 0.$$

Der Coefficient h_1 und nach Gleichung (10.) auch die Coefficienten P_1, P_2, P_3 sind rationale Functionen von x und y, und es genügt ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1a.) der Gleichung (2a.), wenn ein solches der Gleichung (1.) die Gleichung (2.) befriedigt, und umgekehrt.

Wir dürfen also von vornherein in Gleichung (1.) den Coefficienten g gleich Null annehmen und von den Gleichungen

$$(A.)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + h z = 0,$$

$$(B.)\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} + p_1 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + p_2 \frac{\partial z}{\partial y} + p_3 z = 0$$

ausgehen, in welchen h, p_1, p_2, p_3 rationale Functionen von x und y sind.

2.

Bezeichnen wir der Kürze halber $\frac{\partial^{k+l} z}{\partial x^k \partial y^l}$ mit (k, l), so ergiebt die zweimalige Differentiation der Gleichung (B.) nach x

$$(1.)\qquad (1,3) + p_1(1,2) + p_2(1,1) + \frac{\partial p_1}{\partial x}(0,2) + p_3(0,1) + \frac{\partial p_2}{\partial x}(0,1) + \frac{\partial p_3}{\partial x}(0,0) = 0,$$

$$(2.)\qquad (2,3) + p_1(2,2) + p_2(2,1) + 2\frac{\partial p_1}{\partial x}(1,2) + p_3(2,0) + 2\frac{\partial p_2}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}(0,2) + 2\frac{\partial p_3}{\partial x}(1,0) + \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2}(0,1) + \frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2}(0,0) = 0.$$

Die dreimalige Differentiation der Gleichung (A.) nach y liefert

$$(3.)\qquad (2,1) + h(0,1) + \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0,$$

$$(4.)\qquad (2,2) + h(0,2) + 2\frac{\partial h}{\partial y}(0,1) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0) = 0,$$ [909

$$(5.)\qquad (2,3) + h(0,3) + 3\frac{\partial h}{\partial y}(0,2) + 3\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,1) + \frac{\partial^3 h}{\partial y^3}(0,0) = 0.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$(C.)\qquad A(1,2) + B(0,2) + C(1,1) + D(1,0) + E(0,1) + F(0,0) = 0,$$

wo

$$(6.)\qquad \begin{cases} A = 2\frac{\partial p_1}{\partial x}; \quad B = \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} - 3\frac{\partial h}{\partial y}, \\ C = 2\frac{\partial p_2}{\partial x}; \quad D = 2\frac{\partial p_3}{\partial x}, \\ E = \frac{\partial^2 p_2}{\partial x^2} - 3\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - 2p_1\frac{\partial h}{\partial y}, \\ F = \frac{\partial^2 p_3}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 h}{\partial y^3} - p_1\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - p_2\frac{\partial h}{\partial y}. \end{cases}$$

Differentiiren wir die Gleichung (C.) nach x, so folgt durch Anwendung der Gleichungen (1.) bis (5.)

$$(D.)\qquad A_1(1,2) + B_1(0,2) + C_1(1,1) + D_1(1,0) + E_1(0,1) + F_1(0,0) = 0,$$

wo

$$(7.)\quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{\partial A}{\partial x} + B; \quad B_1 = -Ah + \dfrac{\partial B}{\partial x}, \\ C_1 = \dfrac{\partial C}{\partial x} + E; \quad D_1 = F + \dfrac{\partial D}{\partial x}, \\ E_1 = -2A\dfrac{\partial h}{\partial y} - Ch + \dfrac{\partial E}{\partial x}, \\ F_1 = -\ A\dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2} - C\dfrac{\partial h}{\partial y} - Dh + \dfrac{\partial F}{\partial x}. \end{cases}$$

Aus (C.) und (D.) ergiebt sich:

$$(E.)\quad B_2(0,2) + C_2(1,1) + D_2(1,0) + E_2(0,1) + F_2(0,0) = 0,$$

wo

$$(8.)\quad \begin{cases} B_2 = AB_1 - A_1B; \quad C_2 = AC_1 - A_1C; \quad D_2 = AD_1 - A_1D; \\ E_2 = AE_1 - A_1E; \quad F_2 = AF_1 - A_1F. \end{cases}$$

Die Gleichung

$$(9.)\quad B_2 = 0$$

lässt sich in die Gestalt bringen:

$$A\frac{\partial B}{\partial x} - B\frac{\partial A}{\partial x} - hA^2 - B^2 = 0$$

910] oder

$$(9a.)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B}{A}\right) = h + \left(\frac{B}{A}\right)^2.$$

Setzen wir

$$(10.)\quad \frac{B}{A} = -\frac{\partial \log u}{\partial x},$$

so geht diese Gleichung über in

$$(11.)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + hu = 0.$$

Die Gleichung (9.) erfordert also, dass die Gleichung (A.) durch ein Integral der Form

$$(12.)\quad z = e^{-\int \frac{B}{A} dx}$$

befriedigt werde, wo $\frac{B}{A}$ eine rationale Function von x.

Tritt dieser Fall, den wir später einer besonderen Untersuchung unterwerfen werden, nicht ein, so sind also nicht sämmtliche Coefficienten der Gleichung (E.) Null, namentlich ist B_2 von Null verschieden.

3.

Sei z_1, z_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A.), welche zugleich Gleichung (B.) befriedigen, und seien $\alpha z_1 + \beta z_2$, $\gamma z_1 + \delta z_2$ zwei Zweige von z_1 oder z_2, in welche diese Functionen nach einem Umlaufe der Variablen x übergehen, so folgt aus (E.)

$$(F.)\quad \begin{cases} \alpha^{(2)} R_1 + \beta^{(2)} R_2 + \alpha' S_1 + \beta' S_2 = 0, \\ \gamma^{(2)} R_1 + \delta^{(2)} R_2 + \gamma' S_1 + \delta' S_2 = 0, \end{cases}$$

wenn wir

$$(1.)\quad \begin{cases} R_1 = B_2 z_1; \quad R_2 = B_2 z_2, \\ S_1 = 2B_2\dfrac{\partial z_1}{\partial y} + C_2\dfrac{\partial z_1}{\partial x} + E_2 z_1, \\ S_2 = 2B_2\dfrac{\partial z_2}{\partial y} + C_2\dfrac{\partial z_2}{\partial x} + E_2 z_2, \\ \alpha^{(k)} = \dfrac{d^k \alpha}{dy^k}, \quad \beta^{(k)} = \dfrac{d^k \beta}{dy^k} \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

setzen.

Wir setzen zunächst voraus, dass B_2 von Null verschieden ist.

Es können nun zwei Fälle eintreten: [911

I. Es giebt unter den Zweigen der Functionen z_1 und z_2, welche durch die verschiedenen Umläufe der Variablen x erzeugt werden, wenigstens zwei solche, für welche

$$(2.)\quad \varepsilon = \alpha'\delta' - \beta'\gamma'$$

von Null verschieden ist, oder

II. Es ist für alle Zweige $\varepsilon = 0$.

Im Falle I folgt aus den Gleichungen (F.)

$$(3.)\quad \begin{cases} \varepsilon S_1 = -\varepsilon_1 R_1 - \varepsilon_2 R_2, \\ \varepsilon S_2 = -\varepsilon_3 R_1 - \varepsilon_4 R_2, \end{cases}$$

wo

$$(4.)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \alpha^{(2)}\delta' - \gamma^{(2)}\beta'; \quad \varepsilon_2 = \beta^{(2)}\delta' - \delta^{(2)}\beta', \\ \varepsilon_3 = \gamma^{(2)}\alpha' - \alpha^{(2)}\gamma'; \quad \varepsilon_4 = \delta^{(2)}\alpha' - \beta^{(2)}\gamma'. \end{cases}$$

Setzen wir

$$D(z) = 2\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{C_2}{B_2}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{E_2}{B_2}z, \tag{5.}$$

so folgt aus den Gleichungen (3.), dass $D(z_1)$ und $D(z_2)$ Integrale der Gleichung (A.) sind.

Im Falle II folgt aus (F.)

$$\begin{cases} \varepsilon_1 R_1 + \varepsilon_2 R_2 = 0, \\ \varepsilon_3 R_1 + \varepsilon_4 R_2 = 0, \end{cases} \tag{6.}$$

d. h., da z_1, z_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A.) sind,

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = 0, \quad \varepsilon_4 = 0. \tag{7.}$$

Aus den Gleichungen (7.) folgt

$$\begin{cases} \gamma' = c\alpha'; \quad \delta' = c_1\beta'; \\ (c-c_1)\alpha^{(2)}\beta' = 0, \quad (c-c_1)\alpha'\beta^{(2)} = 0, \end{cases} \tag{8.}$$

wo c und c_1 von x und y unabhängige Grössen bedeuten. Die beiden letzten Gleichungen erfordern, dass entweder $\alpha' = 0$ oder $\beta' = 0$ oder $\alpha^{(2)} = 0$ und $\beta^{(2)} = 0$, oder endlich $c_1 = c$. Für $\alpha' = 0$ müsste nach der ersten Gleichung auch $\gamma' = 0$ sein, und demgemäss nach den Gleichungen (F.) die Function $D(z_2)$ der Gleichung (A.) Genüge leisten. Für $\beta' = 0$ folgt aus der zweiten Gleichung (8.), dass auch $\delta' = 0$, und dann aus den Gleichungen (F.), dass die Function $D(z_1)$ die Gleichung (A.) befriedigt. Für die Combination $\alpha^{(2)} = 0$, $\beta^{(2)} = 0$ folgt aus den beiden ersten Gleichungen (8.), dass auch $\gamma^{(2)} = 0$, $\delta^{(2)} = 0$, dass also $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ von y unabhängige Werthe a, b, c, d 912] annehmen. Es ergiebt sich alsdann aus (F.), dass für das gemeinschaftliche Integral der Gleichungen (A.) und (B.)

$$u = az_1 + bz_2 \tag{9.}$$

die Function $D(u)$ die Gleichung (A.) befriedigt.

Für den Fall $c_1 = c$ ergeben die Gleichungen (8.)

$$\gamma = c\alpha + \Gamma, \quad \delta = c\beta + \Gamma_1, \tag{10.}$$

wo auch Γ und Γ_1 von y unabhängig sind.

Wenn $\alpha z_1 + \beta z_2$; $\gamma z_1 + \delta z_2$ demselben Umlaufe der Variablen x entsprechende Zweige bezw. von z_1, z_2 bedeuten, so folgt mit Rücksicht darauf, dass in Gleichung (A.) $\frac{\partial z}{\partial x}$ nicht auftritt und demgemäss $z_2\frac{\partial z_1}{\partial x} - z_1\frac{\partial z_2}{\partial x}$ von x unabhängig wird,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{11.}$$

Substituiren wir in diese Gleichung die Werthe γ und β aus den Gleichungen (10.), so ergiebt sich

$$\alpha\Gamma_1 - \beta\Gamma = 1,$$

also

$$\Gamma_1\alpha' - \Gamma\beta' = 0.$$

Sei also

$$u = \Gamma z_1 + \Gamma_1 z_2, \tag{12.}$$

so folgt aus (F.), dass $D(u)$ der Gleichung (A.) Genüge leistet. Es können nicht beide Grössen Γ und Γ_1 verschwinden, weil sonst z_1, z_2 nach dem Umlaufe von x aufhören würden ein Fundamentalsystem zu bilden.

Fassen wir das Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich:

I. Wenn B_2 von Null verschieden ist, so existirt stets ein den Gleichungen (A.) und (B.) gemeinschaftliches Integral u, für welches die Function $D(u)$ ebenfalls die Gleichung (A.) befriedigt.

Sei u_1 ein anderes gemeinschaftliches Integral der Gleichungen (A.) und (B.), welches mit u ein Fundamentalsystem für die Gleichung (A.) bildet, und möge nach einem Umlauf der Variablen x die Function u übergehen in

$$\bar{u} = \lambda u + \mu u_1,$$

so geht $D(u)$ über in

$$\overline{D}(u) = D(\bar{u}) = \lambda D(u) + \mu D(u_1) + 2\frac{d\lambda}{dy}u + 2\frac{d\mu}{dy}u_1. \tag{13.}$$

Es muss aber auch $\overline{D}(u)$ ein Integral der Gleichung (A.) sein, folglich [913 ist auch

$$\mu D(u_1) = \overline{D}(u) - 2\frac{d\lambda}{dy}u - 2\frac{d\mu}{dy}u_1 \tag{14.}$$

ein Integral derselben Gleichung. Wenn demnach nicht für alle Umläufe der Variablen x die Grösse μ verschwindet, so ist auch $D(u_1)$ ein Integral der Gleichung (A.). Dieses führt zu dem folgenden Satze:

II. Wenn B_2 von Null verschieden ist und die Gleichungen (A.) und (B.) nicht ein gemeinschaftliches Integral besitzen, dessen logarithmische Ableitung nach x eine rationale Function von x ist, so giebt es stets ein Fundamentalsystem von Integralen z_1, z_2 der Gleichung (A.), welches ebenfalls die Gleichung (B.) befriedigt und so beschaffen ist, dass $D(z_1), D(z_2)$ der Gleichung (A.) Genüge leisten.

4.

Setzen wir zur Abkürzung

$$(1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{C_2}{B_2} = a, \quad \dfrac{E_2}{B_2} = b, \\[2mm] D(z) = 2\dfrac{\partial z}{\partial y} + a\dfrac{\partial z}{\partial x} + bz, \\[2mm] P(z) = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + hz, \end{cases}$$

so ist

$$(2.)\qquad P(D(z)) = 2(2,1) + a(3,0) + \left[2\frac{\partial a}{\partial x} + b\right](2,0)$$
$$+\left[\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2\frac{\partial b}{\partial x} + ha\right](1,0) + 2h(0,1) + \left[\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + hb\right](0,0).$$

Ist z ein Integral der Gleichung (A.), so folgt aus dieser Gleichung und aus Gleichung (3.) No. 2

$$(3.)\qquad P(D(z)) = \left[\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2\frac{\partial b}{\partial x}\right]\frac{\partial z}{\partial x} + \left[\frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - 2h\frac{\partial a}{\partial x} - a\frac{\partial h}{\partial x} - 2\frac{\partial h}{\partial y}\right]z.$$

Bilden z_1, z_2 ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A.) von der im Satze II. voriger Nummer angegebenen Beschaffenheit, so ist

$$(4.)\qquad P(D(z_1)) = 0; \quad P(D(z_2)) = 0.$$

914] Da $z_1\frac{\partial z_2}{\partial x} - z_2\frac{\partial z_1}{\partial x}$ von Null verschieden ist, so muss demnach

$$(5.)\qquad \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + 2\frac{\partial b}{\partial x} = 0,$$

$$(6.)\qquad \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} - 2h\frac{\partial a}{\partial x} - a\frac{\partial h}{\partial x} - 2\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

sein. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$(7.)\qquad \frac{\partial^3 a}{\partial x^3} + 4h\frac{\partial a}{\partial x} + 2a\frac{\partial h}{\partial x} + 4\frac{\partial h}{\partial y} = 0.$$

Es müsste demnach die Differentialgleichung:

$$(8.)\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + 4h\frac{\partial z}{\partial x} + 2\frac{\partial h}{\partial x}z + 4\frac{\partial h}{\partial y} = 0$$

durch die rationale Function a von x und y befriedigt werden.

Der Gleichung

$$(9.)\qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 4h\frac{\partial w}{\partial x} + 2\frac{\partial h}{\partial x}w = 0$$

genügt das Fundamentalsystem von Integralen $\frac{1}{2}z_1^2, -z_1z_2, \frac{1}{2}z_2^2$. Sie ist sich selbst adjungirt, und zwar sind $\frac{1}{2}z_1^2, -z_1z_2, \frac{1}{2}z_2^2$ und bezw. $\frac{1}{2}z_2^2, -z_1z_2, \frac{1}{2}z_1^2$ einander zugeordnet*).

Es müsste also der Ausdruck

$$(10.)\qquad -z_1^2\int\frac{\partial h}{\partial y}z_2^2\,dx + 2z_1z_2\int\frac{\partial h}{\partial y}z_1z_2\,dx - z_2^2\int\frac{\partial h}{\partial y}z_1^2\,dx$$

eine rationale Function von x werden, wenn die Gleichung (8.) durch eine rationale Function von x befriedigt werden soll.

Ist aber der Ausdruck (10.) eine rationale Function von x, so sind die Coefficienten der Substitutionen der zur Gleichung (A.) gehörigen Gruppe von y unabhängig**).

Wenn wir dieses Resultat mit den Resultaten der vorhergehenden Nummern zusammenhalten, so gelangen wir zu dem folgenden Theorem:

Soll ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A.) der Gleichung (B.) genügen, so muss die Gleichung (A.) entweder ein Integral zulassen, dessen logarithmische Ableitung nach x eine rationale Function von x ist, oder sie gehört zur Kategorie derjenigen Differentialgleichungen, deren Gruppe von y unabhängige Substitutionen besitzt.

In dem Falle, dass die Gruppe von Substitutionen der Gleichung [915 (A.) von y unabhängig ist, genügt z als Function von y einer Differentialgleichung höchstens zweiter Ordnung, deren Coefficienten rationale Functionen

*) Siehe Sitzungsberichte vom 1. November 1894, S. 1124 [1]).

**) Siehe Sitzungsberichte a. a. O. und Sitzungsberichte vom 25. Februar 1892, S. 163 [2]).

[1]) Abh. LXII, S. 192 dieses Bandes. R. F.

[2]) Abh. LIX, S. 125 dieses Bandes. R. F.

von x und y sind*); es müsste demnach die Gleichung (B.) in diesem Falle reductibel sein.

Es bleibt uns also noch übrig, den Fall zu untersuchen, in welchem die Gleichung (A.) ein Integral besitzt, dessen logarithmische Ableitung nach x eine rationale Function von x ist.

5.

Es sei jetzt

$$z_1 = e^{\int \mathfrak{R}\, dx} \tag{1.}$$

ein Integral der Gleichung (A.), wo $\mathfrak{R}$ eine rationale Function von x. Wir wollen nunmehr voraussetzen, dass $\mathfrak{R}$ die Gestalt habe

$$\mathfrak{R} = \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \frac{\alpha_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{x-a_m}, \tag{2.}$$

wo die Grössen $a_1, a_2, \ldots, a_m$ von einander verschieden, und

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$$

von x unabhängig seien. Substituiren wir z_1 in Gleichung (A.), so folgt

$$-h = \mathfrak{R}^2 + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x}. \tag{3.}$$

Die eben gemachte Voraussetzung schliesst also die in sich, dass die Integrale der Gleichung (A.) sich überall bestimmt verhalten**).

Wenn nach einem Umlauf der Variablen y $\mathfrak{R}$ sich in

$$\mathfrak{R}' = \frac{\alpha_1'}{x-a_1'} + \frac{\alpha_2'}{x-a_2'} + \cdots + \frac{\alpha_m'}{x-a_m'} \tag{4.}$$

verwandelt, so müssen die Grössen $a_1', a_2', \ldots, a_m'$ wiederum von einander verschieden sein, und es ist

$$z_2 = e^{\int \mathfrak{R}'\, dx} \tag{1a.}$$

ebenfalls ein Integral der Gleichung (A.). Zwischen $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ besteht nach Gleichung (3.) die Relation

$$\mathfrak{R}^2 + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} = \mathfrak{R}'^2 + \frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial x}. \tag{5.}$$

*) Siehe Sitzungsberichte vom 25. Februar 1892, S. 165–166[1]).

**) Siehe CRELLEs Journal, Bd. 66, S. 146, Gl. (12.)[2]).

1) Abh. LIX, S. 126–127 dieses Bandes. R. F.

2) Abh. VI, S. 186, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Aus derselben ergiebt sich

$$\frac{\partial \log}{\partial x}[\mathfrak{R} - \mathfrak{R}'] = -[\mathfrak{R} + \mathfrak{R}']. \tag{6.}$$

Ist $a_k = a_i' = a$, so muss eine der Functionen $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}'$ oder $\mathfrak{R} + \mathfrak{R}'$ für [916
$x = a$ unendlich werden, da sonst $\alpha_k = 0$, $\alpha_i' = 0$ sein müsste.

Ist $\alpha_k - \alpha_i'$ von Null verschieden, so ist die linke Seite der Gleichung (6.) für $x = a$ unendlich wie $-\frac{1}{x-a}$, folglich ist

$$\alpha_k + \alpha_i' = 1. \tag{7.}$$

Ist $\alpha_k - \alpha_i' = 0$, so muss

$$\alpha_k + \alpha_i' = -\varrho \tag{8.}$$

sein, wo ϱ die Ordnung bezeichnet, in welcher $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}'$ für $x = a$ verschwindet.

Ist a_i' ein Werth, der sich nicht unter den Werthen a_k befindet, so folgt durch einen analogen Schluss aus Gleichung (6.)

$$\alpha_i' = 1 \tag{9.}$$

und ebenso für a_k, wenn dasselbe nicht unter den a_i' befindlich ist,

$$\alpha_k = 1. \tag{10.}$$

Aus den Gleichungen (7.) bis (10.) folgern wir, dass

$$z_1 z_2 = e^{\int (\mathfrak{R} + \mathfrak{R}')\, dx} = \varphi(x) \tag{11.}$$

eine rationale Function von x darstellt.

Es müssten demnach*) z_1, z_2 die Form haben

$$\begin{cases} z_1 = \varphi^{\frac{1}{2}} e^{\frac{c}{2}\int \frac{dx}{\varphi}}, \\ z_2 = \varphi^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{c}{2}\int \frac{dx}{\varphi}}, \end{cases} \tag{12.}$$

wo c von x unabhängig ist.

Wir setzen

$$\varphi = \frac{G(x)}{\psi(x)}, \tag{13.}$$

*) Siehe CRELLEs Journal, Bd. 81, S. 118[1]).

1) Abh. XX, S. 34, Band II dieser Ausgabe. R. F.

wo $G(x)$ und $\psi(x)$ ganze rationale Functionen von x ohne gemeinsamen Theiler sind. Es sind alsdann für die Nullstellen von $\psi(x)$ die Exponentialfunctionen in (12.) endlich, der Factor $\varphi^{\frac{1}{2}}$ aber unendlich. Es wird demnach $\psi(x)$ nur Null für Werthe, für welche h unendlich wird. Für diese aber müssten z_1, z_2 gleichzeitig unendlich werden. Wenn wir aber voraussetzen, dass $\mathfrak{R}-\mathfrak{R}'$ nicht von x unabhängig ist, so bilden z_1, z_2 nach Gleichung (1.) und (1a.) ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A.). Es müsste demnach für dieselben Werthe von x jedes Integral dieser
917] Gleichung unendlich werden. Aber die zu den singulären Stellen der Gleichung (A.) zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen haben die Gestalt

$$(14.)\qquad \nu(\nu-1)+\varepsilon = 0,$$

d. h. für das einem solchen singulären Punkte der Gleichung (A.) zugehörige Fundamentalsystem ist die Summe der Exponenten gleich Eins, diese Exponenten können also nicht beide negativ sein. Also ist $\psi(x)$ eine von x unabhängige Grösse, und man hat

$$(15.)\qquad \varphi = G(x);$$

d. h. φ ist eine ganze rationale Function von x.

Die Differentialgleichung dritter Ordnung (8.) in No. 4, welche z_1^2, z_1z_2, z_2^2 als Fundamentalsystem besitzt, hat demnach eine ganze rationale Function $G(x)$ zum Integral. Besässe dieselbe noch ein zweites Integral $G_1(x)$, wo $G_1(x)$ eine nicht bloss um einen constanten Factor von $G(x)$ verschiedene ganze rationale Function bedeutet, so müssten sich die von x unabhängigen Grössen A, B, C so bestimmen lassen, dass

$$(16.)\qquad Az_1^2 + Cz_2^2 + BG = G_1$$

oder

$$Ae^{c\int\frac{dx}{G}} + Be^{-c\int\frac{dx}{G}} = \frac{G_1 - BG}{G}.$$

Demnach müsste $e^{c\int\frac{dx}{G}}$ eine zweiwerthige algebraische Function von x sein. Nach den Gleichungen (7.), (9.), (10.) enthält G nur einfache Factoren. Es müsste also diese zweiwerthige Function die Quadratwurzel einer rationalen

Function von x sein. Sehen wir von diesem Falle, in welchem die Gleichung (A.) durch Wurzeln rationaler Functionen integrirt werden würde, ab, so hätte die Gleichung (8.) in No. 4 nur eine ganze rationale Function zum Integral. Die Coefficienten desselben sind bis auf einen allen gemeinsamen Factor aus der Gleichung (8.) in No. 4 als rationale Functionen von y bestimmbar. Bezeichnen wir dieses Integral mit $\Gamma H(x)$, so dass die Coefficienten von $H(x)$ rationale Functionen von y sind und Γ von x unabhängig, so können wir setzen

$$(17.)\qquad \varphi(x) = \Gamma H(x).$$

Substituiren wir z_1 aus Gleichung (12.) in die Gleichung (A.), so erhalten wir

$$(18.)\qquad -\frac{1}{4}\left(\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{c^2}{4\varphi^2} = -h.$$

Wird der Werth von $\varphi(x)$ aus (18.) substituirt, so folgt

$$(19.)\qquad -\frac{1}{4}\left(\frac{\frac{\partial H(x)}{\partial x}}{H(x)}\right)^2 + \frac{1}{2H(x)}\frac{\partial^2 H(x)}{\partial x^2} + \frac{c^2}{4\Gamma^2}\frac{1}{H(x)^2} = -h,$$ [918

wodurch $\left(\frac{C}{\Gamma}\right)^2$ sich als rationale Function von y bestimmt.

I. Hiernach würde, wenn wir von dem Falle absehen, in welchem die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar ist, diese Gleichung durch ein Fundamentalsystem von Integralen der Form

$$(20.)\qquad \begin{cases} z_1 = H^{\frac{1}{2}} e^{\frac{c}{2\Gamma}\int\frac{dx}{H}}, \\ z_2 = H^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{c}{2\Gamma}\int\frac{dx}{H}} \end{cases}$$

befriedigt werden können, worin H eine ganze rationale Function von x ist, deren Coefficienten rational von y abhängen, und wo $\left(\frac{c}{\Gamma}\right)^2$ eine rationale Function von y ist, die aber sich auf eine von y unabhängige Grösse reducirt, wenn die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ in Gleichung (2.) als von y unabhängig vorausgesetzt werden.

Wenn aber für alle Umläufe der Variablen y die Function $\mathfrak{R}$ unverändert bleibt, so sind die Coefficienten von $\mathfrak{R}$ rationale Functionen von y.

6.

Wir wollen nunmehr noch den Fall näher betrachten, dass die Gleichung (A.) nur ein Integral besitzt, dessen logarithmische Ableitung nach x eine rationale Function ist. Alsdann hat nach voriger Nummer dieses Integral die Gestalt

$$z_1 = e^{\int \mathfrak{R}\, dx}, \tag{1.}$$

wo $\mathfrak{R}$ eine rationale Function von x und y darstellt. Wir setzen voraus, dass in Gleichung (2.) No. 5 die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ von y unabhängig seien; alsdann zerfallen die algebraischen Functionen von $y, a_1, a_2, \ldots, a_m$, welche in derselben Gleichung auftreten, in Gruppen von der Beschaffenheit, dass die zu einer Gruppe gehörigen bei den Umläufen von y sich nur untereinander vertauschen. Es müssen daher die Grössen α_k, welche zu den eine Gruppe bildenden Grössen a_k gehören, einander gleich sein. Wir können also aus (1.) und (2.) No. 5 folgern

$$z_1 = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_\mu^{\alpha_\mu} = S, \tag{2.}$$

919] wo $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ ganze rationale Functionen von x sind, deren Coefficienten rational von y abhängen.

Bekanntlich ist

$$z_2 = S \int \frac{dx}{S^2} \tag{3.}$$

ein Integral der Gleichung (A.), welches mit z_1 ein Fundamentalsystem bildet.

Substituiren wir in (A.)

$$z = Sv, \tag{4.}$$

so erhalten wir eine Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g_1 \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{5.}$$

und es ist g_1 eine rationale Function von x und y. Diese Differentialgleichung besitzt das Fundamentalsystem von Integralen

$$v_1 = \int \frac{dx}{S^2}, \quad v_2 = 1. \tag{6.}$$

Wenn v_1 als Function von y einer linearen Differentialgleichung

$$P(z) = \frac{\partial^m z}{\partial y^m} + p_1 \frac{\partial^{m-1} z}{\partial y^{m-1}} + \cdots + p_m z = 0, \tag{7.}$$

deren Coefficienten rationale Functionen von x und y, genügt, so befriedigt dieselbe auch jeder Zweig von v_1, welcher durch die Umläufe von x und von y erhalten wird.

Diese Zweige haben die Form

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\alpha^2} v_1 + \beta, \tag{8.}$$

wo α eine der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ in Gleichung (2.) bedeutet, während β nur von y abhängig ist.

Die Gleichung (7.) muss in Bezug auf y reductibel sein. Denn wäre sie irreductibel und substituirten wir $\bar{v}_1$ in dieselbe, so erhielten wir eine lineare homogene Differentialgleichung für β von gleicher Ordnung:

$$\frac{d^m \beta}{dy^m} + p_1 \frac{d^{m-1} \beta}{dy^{m-1}} + \cdots + p_m \beta = 0. \tag{9.}$$

Da die Coefficienten $p, p_2, \ldots, p_m$, sich durch ein Fundamentalsystem von Integralen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ derselben, welche als Zweige eines Integrals β von x unabhängig sind, und durch ihre Ableitungen nach y rational darstellen lassen, so müssten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ von x unabhängig sein.

Lässt sich beispielsweise $P(z)$ in der Form [920

$$P(z) = r_0 Q(x) + r_1 \frac{\partial Q(z)}{\partial y} + \cdots + r_n \frac{\partial^n Q(z)}{\partial y^n} \tag{10.}$$

darstellen, wo

$$Q(z) = q_0 z + q_1 \frac{\partial z}{\partial y} + \cdots + q_\mu \frac{\partial^\mu z}{\partial y^\mu} \tag{11.}$$

irreductibel in Bezug auf y ist, und wo $r_0, r_1, \ldots, r_n$ rationale Functionen von y sind, so würde sich für β die Differentialgleichung

$$Q(\beta) = 0 \tag{12.}$$

ergeben, und es müssten alsdann nur die Grössen $q_1, q_2, \ldots, q_\mu$ von x unabhängige rationale Functionen von y sein.

Dieses Verhalten wird durch das Beispiel der Differentialgleichungen erläutert, welchen die hyperelliptischen (elliptischen) Integrale bezw. aufgefasst als Functionen der unabhängigen Veränderlichen und als Functionen der Verzweigungswerthe genügen, wie bereits in der Einleitung angeführt worden ist.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 202, Zeile 10 v. u. wurde »darauf« hinter halber hinzugefügt,
" 207 wurde am Schluss der Gleichungen (1.) »u. s. w.« hinzugefügt,
" 208 nach den Gleichungen (7.) »Aus den Gleichungen (7.)« statt »Aus denselben«,
" 209, Gleichung (14.) $\frac{d\lambda}{dy}, \frac{d\mu}{dy}$ statt $\frac{d\lambda}{du}, \frac{d\mu}{du}$,
" 210, " (2.) $2h(0,1)$ statt $h(0,1)$,
" 214 wurde nach Gleichung (15.) »d. h. φ ist eine« hinzugefügt,
Zeile 9 v. u. »eine nicht bloss um einen constanten Factor« statt »eine nicht um einen blossen constanten Factor«.

2) Zu Gleichung (8.), No. 3, S. 208 sei Folgendes bemerkt: Aus (7.) folgt nicht nothwendig, dass c und c_1 beide von y unabhängig sind. Man kann aber z. B. auf folgende Weise zu dem aus (8.) gefolgerten Resultat gelangen: Wenn keine der Grössen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ gleich Null ist, so folgt aus (7.), dass $c = c_1$ und beide von y unabhängig, d. i. Annahme (10.). Ist aber irgend eine der Grössen $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ gleich Null, so lehren die Gleichungen (F.), dass sich entweder R_1 und S_1 oder R_2 und S_2, d. h. aber z_1 und $D(z_1)$ oder z_2 und $D(z_2)$ nur durch einen constanten Factor unterscheiden, d. h. dass $D(z_1)$ oder $D(z_2)$ der Gleichung (A.) genügt.

R. F.

LXV.

ÜBER EINE KLASSE LINEARER HOMOGENER DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1896, XXXIV, S. 753—769; vorgelegt am 9. Juli; ausgegeben am 16. Juli 1896.)

1.

[753

Sei

$$\frac{d^n u}{dz^n} + p_2 \frac{d^{n-2} u}{dz^{n-2}} + \cdots + p_n u = 0 \tag{A.}$$

eine lineare homogene Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten von der Beschaffenheit, dass die zu jedem beliebigen Umlauf der Variablen z um einen oder mehrere singuläre Punkte der Gleichung (A.) gehörige Fundamentalgleichung durch die reciproken Werthe der Wurzeln derjenigen Gleichung befriedigt wird, welche aus ihr durch Vertauschung der Coefficienten der sämmtlichen Potenzen der Unbekannten mit ihren conjugirten Werthen hervorgeht. Wir wollen überdies voraussetzen, dass die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ wenigstens einer dieser Fundamentalgleichungen von einander verschieden sind und den Modul 1 besitzen. Den ihr zugehörigen Umlauf der Variablen z wollen wir mit C und das zugehörige Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A.) mit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bezeichnen, so dass, nach Vollziehung des Umlaufes C, $u_1, u_2, \ldots, u_n$ übergehen in

$$\bar{u}_1 = \lambda_1 u_1, \quad \bar{u}_2 = \lambda_2 u_2, \quad \ldots, \quad \bar{u}_n = \lambda_n u_n. \tag{B.}$$

Die einem beliebigen Umlaufe U von z entsprechende Substitution

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

welche $u_1, u_2, \dots, u_n$ erleiden, wollen wir kurz mit (a_{kl}) bezeichnen, während $|a_{kl}|$ die Determinante dieser Substitution bedeutet.

Da in der Gleichung (A.) das Glied $\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}}$ fehlt, so folgt zunächst

(C.) $$|a_{kl}| = 1.$$

754] Die Fundamentalgleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\omega & \dots & a_{n2} \\ . & . & \dots & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0$$

bringen wir in die Gestalt

(D.) $$(-1)^n \omega^n + a_1 \omega^{n-1} + a_2 \omega^{n-2} + \dots + a_{n-1}\omega + 1 = 0.$$

Nun ist bekanntlich

(E.) $$a_k = \sum (-1)^{n-k} R_k,$$

wenn mit R_l eine Hauptunterdeterminante l^{ter} Ordnung der Determinante $|a_{kl}|$ bezeichnet wird, und wenn die Summation in (E.) sich auf die sämmtlichen Hauptunterdeterminanten k^{ter} Ordnung bezieht.

Wenn wir, wie im Folgenden stets, den conjugirten Werth einer Grösse a mit a' bezeichnen, so hat unserer Voraussetzung gemäss die Gleichung (D.) mit der Gleichung

(D$_1$.) $$(-1)^n \omega^n + (-1)^n a'_{n-1} \omega^{n-1} + (-1)^n a'_{n-2} \omega^{n-2} + \dots + (-1)^n a'_1 \omega + 1 = 0$$

sämmtliche Wurzeln gemeinschaftlich; daher ist

(1.) $$a_k = (-1)^n a'_{n-k}, \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

und hieraus ergiebt sich nach Gleichung (E.)

(F.) $$\sum R_k = \sum R'_{n-k}. \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Die analogen Gleichungen gelten unserer Voraussetzung gemäss für **jede** Substitution, welche $u_1, u_2, \dots, u_n$ durch einen beliebigen Umlauf erfahren.

Ist (b_{kl}) eine Substitution, welche $u_1, u_2, \dots, u_n$ durch einen Umlauf V erleiden, so betrachten wir die Substitution, welcher $u_1, u_2, \dots, u_n$ durch die Umläufe U, C, V, in dieser Reihenfolge nach einander angewendet, unterworfen werden.

Sei

(2.) $$(c_{kl}) = (a_{kl})(\lambda)(b_{kl}),$$

wo wir

(3.) $$(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

gesetzt haben.

Es ist alsdann [755

(4.) $$c_{kl} = a_{k1} b_{1l} \lambda_1 + a_{k2} b_{2l} \lambda_2 + \dots + a_{kn} b_{nl} \lambda_n.$$

Die inverse Substitution von (c_{kl}) ist

(5.) $$(c_{kl})^{-1} = (b_{kl})^{-1} (\lambda)^{-1} (a_{kl})^{-1}.$$

Nun ist

(6.) $$\begin{cases} (a_{kl})^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ . & \dots & . \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \\ (b_{kl})^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{n1} \\ . & \dots & . \\ B_{1n} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix}, \\ (c_{kl})^{-1} = \begin{pmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ . & \dots & . \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{pmatrix}, \end{cases}$$

wo A_k, B_{kl}, C_{kl} bez. die zu a_{kl}, b_{kl}, c_{kl} gehörigen Unterdeterminanten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Determinanten $|a_{kl}|, |b_{kl}|, |c_{kl}|$ bedeuten.

Es ergiebt daher die Gleichung (5.)

(7.) $$C_{kl} = A_{k1} B_{1l} \lambda_1^{-1} + A_{k2} B_{2l} \lambda_2^{-1} + \dots + A_{kn} B_{nl} \lambda_n^{-1}.$$

Wir wollen die Gleichung (F.) insbesondere für $k = n-1$ in Betracht ziehen. Sie lässt sich alsdann in die Form bringen

$$a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = A'_{11} + A'_{22} + \cdots + A'_{nn}. \tag{8.}$$

Da eine analoge Gleichung für jeden beliebigen Umlauf, also auch für die Aufeinanderfolge UCV gilt, so ergiebt sich aus den Gleichungen (4.) und (7.)

$$\sum_1^n{}_l \sum_1^n{}_k (A'_{kl} B'_{lk} - a_{kl} b_{lk}) \lambda_l = 0. \tag{9.}$$

Allgemein würde für die Substitution

$$(a_{kl})(\lambda^r)(b_{kl}),$$

welche dem Umlauf U, dem r-fach wiederholten Umlauf C und dem Umlauf V, in dieser Reihenfolge angewendet, entspricht, sich ergeben

$$\sum_1^n{}_l \sum_1^n{}_k (A'_{kl} B'_{lk} - a_{kl} b_{lk}) \lambda_l^r = 0, \tag{9a.}$$

für jeden beliebigen ganzzahligen Werth von r.

756] Setzen wir $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, so folgt aus dem entstehenden Systeme von Gleichungen, da $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ von einander verschieden sind,

$$\sum_1^n{}_k A'_{kl} B'_{lk} = \sum_1^n{}_k a_{kl} b_{lk}. \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{10.}$$

Da diese Gleichung für zwei beliebige Substitutionen der Gruppe unserer Differentialgleichung besteht, so können wir in derselben

$$(b_{kl}) = (\lambda), \tag{11.}$$

also

$$\begin{aligned} b_{kl} &= 0, \quad \text{für } k \neq l, \\ b_{kk} &= \lambda_k, \\ B_{kl} &= 0, \quad \text{für } k \neq l, \\ B_{kk} &= \lambda_k^{-1} \end{aligned}$$

setzen. Wir erhalten alsdann aus Gleichung (10.)

$$A'_{ll} = a_{ll}. \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{G.}$$

Da diese Gleichung für jede Substitution der Gruppe besteht, so folgt also für die Substitution

$$(e_{kl}) = (a_{kl})(\lambda^r)(b_{kl})$$

$$E'_{ll} = e_{ll}, \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{12.}$$

d. h. nach den Gleichungen (4.) und (7.)

$$\sum_1^n{}_p A'_{lp} B'_{pl} \lambda_p^r = \sum_1^n{}_p a_{lp} b_{pl} \lambda_p^r, \qquad (l = 1, 2, \ldots, n) \tag{13.}$$

also in Folge eines Schlusses, der dem an den Gleichungen (9.) und (9a.) gemachten Schlusse analog ist,

$$A'_{lp} B'_{pl} = a_{lp} b_{pl}. \qquad \begin{pmatrix} p = 1, \ldots, n \\ l = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{H.}$$

Für

$$\begin{cases} (b_{kl}) = (a_{kl})^{-1}, \quad \text{d. h.} \\ (b_{kl}) = (A_{lk}), \quad (B_{kl}) = (a_{lk}) \end{cases} \tag{14.}$$

ergiebt sich aus (H.) insbesondere

$$A'_{lp} a'_{lp} = A_{lp} a_{lp}. \qquad \begin{pmatrix} l = 1, \ldots, n \\ p = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{H$_1$.}$$

Für

$$(b_{kl}) = (a_{kl}) \tag{15.}$$

ergiebt die Gleichung (H.)

$$A'_{lp} A'_{pl} = a_{lp} a_{pl}. \qquad \begin{pmatrix} l = 1, \ldots, n \\ p = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{H$_2$.}$$

Für

$$(b_{kl}) = (a_{kl})(\lambda^r)(a_{kl}), \tag{16.}$$

also

[757

$$\begin{aligned} b_{kl} &= a_{k1} a_{1l} \lambda_1^r + a_{k2} a_{2l} \lambda_2^r + \cdots + a_{kn} a_{nl} \lambda_n^r, \\ (B_{kl}) &= (A_{kl})(\lambda^{-r})(A_{kl}), \\ B_{kl} &= A_{k1} A_{1l} \lambda_1^{-r} + A_{k2} A_{2l} \lambda_2^{-r} + \cdots + A_{kn} A_{nl} \lambda_n^{-r}, \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} & A'_{lp} [A'_{p1} A'_{1l} \lambda_1^r + A'_{p2} A'_{2l} \lambda_2^r + \cdots + A'_{pn} A'_{nl} \lambda_n^r] \\ & \qquad = a_{lp} [a_{p1} a_{1l} \lambda_1^r + a_{p2} a_{2l} \lambda_2^r + \cdots + a_{pn} a_{nl} \lambda_n^r], \end{aligned} \tag{17.}$$

und hieraus wieder durch einen Schluss, der dem an (9.) und (9a.) gemachten analog ist,

$$A'_{p\alpha} A'_{\alpha l} A'_{lp} = a_{p\alpha} a_{\alpha l} a_{lp}. \qquad \begin{pmatrix} p = 1, \ldots, n \\ l = 1, \ldots, n \\ \alpha = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{H$_3$.}$$

Wenn die Integrale u_k der Gleichung (A.) nach einem Umlaufe U sich in

$$\bar{u}_k = a_{k1} u_1 + a_{k2} u_2 + \cdots + a_{kn} u_n \tag{18.}$$

verwandeln, so gehen die conjugirten Werthe $\bar{u}_k$ dieser Integrale in

$$\bar{u}'_k = a'_{k1} u'_1 + a'_{k2} u'_2 + \cdots + a'_{kn} u'_n \tag{19.}$$

über.

Wir bilden nunmehr die bilineare Form

$$\varphi = A_1 u_1 u'_1 + A_2 u_2 u'_2 + \cdots + A_n u_n u'_n \tag{J.}$$

mit constanten Coefficienten $A_1, \ldots, A_n$ und wenden auf dieselbe die einem Umlaufe U der Variablen z entsprechenden Substitutionen (18.), (19.) an, alsdann geht φ über in

$$\bar{\varphi} = \sum_{k,l} P_{kl} u_k u'_l, \qquad \binom{k = 1, \ldots, n}{l = 1, \ldots, n} \tag{J$_1$.}$$

wo

$$P_{kl} = A_1 a_{1k} a'_{1l} + A_2 a_{2k} a'_{2l} + \cdots + A_n a_{nk} a'_{nl}. \tag{20.}$$

Wir bestimmen nunmehr $A_1, A_2, \ldots, A_n$ den Gleichungen

$$P_{12} = 0, \quad P_{13} = 0, \quad \ldots, \quad P_{1n} = 0 \tag{K.}$$

gemäss, aus welchen sich ergiebt:

$$\frac{A_k}{A_1} = \frac{A'_{k1}}{a_{k1}}. \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{K$_1$.}$$

Aus den Gleichungen (H$_1$.) folgt, dass die Verhältnisse der Grössen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *reale* Werthe haben.

Substituiren wir diese Werthe in $\frac{P_{kl}}{A_1}$, so ergiebt sich

$$\frac{P_{kl}}{A_1} = \sum_{p}^{1 \ldots n} a_{pk} a'_{pl} \frac{A'_{p1}}{a_{p1}}. \qquad \binom{k = 1, \ldots, n}{l = 1, \ldots, n} \tag{21.}$$

Nun ist

$$\frac{a'_{pl} A'_{p1}}{a_{p1}} = \frac{A_{pl} A_{lp} A'_{p1}}{a_{p1} a'_{lp}} = \frac{A_{pl} A'_{lp} A'_{p1}}{a_{p1} a_{lp}},$$

gemäss den Gleichungen (H$_1$.), (H$_2$.).

758] Ferner ist nach Gleichung (H$_3$.), für $\alpha = 1$,

$$A'_{lp} A'_{1l} A'_{p1} = a_{pl} a_{1l} a_{p1},$$

folglich wird

$$\frac{a'_{pl} A'_{p1}}{a_{p1}} = \frac{A_{pl} a_{lp} a_{1l} a_{p1}}{A'_{1l} a_{p1} a_{lp}} = \frac{A_{pl} a_{1l}}{A'_{1l}},$$

woraus hervorgeht, dass die Gleichungen (21.) sich umgestalten in

$$\frac{P_{kl}}{A_1} = \frac{a_{1l}}{A'_{1l}} \sum_{p}^{1 \ldots n} A_{pl} a_{pk}. \qquad \binom{k = 1, \ldots, n}{l = 1, \ldots, n} \tag{22.}$$

Ist demnach $k \neq l$, so folgt

$$P_{kl} = 0, \tag{L.}$$

während

$$\frac{P_{kk}}{A_1} = \frac{a_{1k}}{A'_{1k}} = \frac{a_{1k} a_{k1}}{A'_{1k} a_{k1}} = \frac{a'_{1k} A'_{k1}}{a_{k1} A'_{1k}} \quad \text{(nach Gl. (H}_2\text{.))},$$

also

$$\frac{P_{kk}}{A_1} = \frac{A'_{k1}}{a_{k1}} = \frac{A_k}{A_1}$$

oder

$$P_{kk} = A_k. \tag{M.}$$

Werden daher die Verhältnisse der Grössen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aus den Gleichungen (K$_1$.) bestimmt, so wird

$$\bar{\varphi} = \varphi,$$

d. h. *die bilineare Form φ bleibt ungeändert, wenn z den Umlauf U vollzieht.*

Würden ebenso bei einem Umlaufe V die Integrale u_k sich in

$$\bar{u}_k = b_{k1} u_1 + b_{k2} u_2 + \cdots + b_{kn} u_n \tag{23.}$$

verwandeln, so würden die conjugirten Werthe u'_k in

$$\bar{u}'_k = b'_{k1} u'_1 + b'_{k2} u'_2 + \cdots + b'_{kn} u'_n \tag{24.}$$

übergehen.

Bestimmen wir eine bilineare Form

$$\psi = B_1 u_1 u'_1 + B_2 u_2 u'_2 + \cdots + B_n u_n u'_n \tag{J$_2$.}$$

mit constanten Coefficienten $B_1, B_2, \ldots, B_n$ derart, dass

$$\frac{B_k}{B_1} = \frac{B'_{k1}}{b_{k1}}, \tag{K$_2$.}$$

so folgt aus der Gültigkeit der Relationen (G.), (H_1.), (H_2.), (H_3.) für die einem beliebigen Umlauf entsprechenden Substitutionen, dass die Form ψ durch den Umlauf V ungeändert bleibt.

Aber aus den Gleichungen (H.) folgt für $l = 1$, $p = k$, nach Gleichung (K_2.)

$$\frac{B_k}{B_1} = \frac{a_{1k}}{A'_{1k}} = \frac{a_{1k} A'_{k1}}{a_{1k} a_{k1}} \quad \text{(nach Gl. } (H_2.)),$$

759] d. h.

$$\text{(N.)} \qquad \frac{B_k}{B_1} = \frac{A'_{k1}}{a_{k1}} = \frac{A_k}{A_1} \quad \text{(nach Gl. } (K_1.)).$$

Demnach ist die Form ψ bis auf einen constanten Factor mit der Form φ übereinstimmend.

Wir erhalten also den Satz:

Ist für jeden beliebigen Umlauf der Variablen z um einen oder mehrere singuläre Punkte der Gleichung (A.) die zugehörige Fundamentalgleichung so beschaffen, dass sie durch die reciproken Werthe der Wurzeln derjenigen Gleichung befriedigt wird, welche aus ihr durch Verwandlung der Coefficienten der verschiedenen Potenzen der Unbekannten in ihre conjugirten Werthe hervorgeht, und giebt es überdies wenigstens zu einem Umlaufe eine Fundamentalgleichung, deren Wurzeln die Moduln 1 besitzen und von einander verschieden sind, so giebt es eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und den conjugirten Werthen $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ gebildete bilineare Form der Gestalt

$$\varphi = A_1 u_1 u'_1 + A_2 u_2 u'_2 + \cdots + A_n u_n u'_n,$$

deren Coefficienten von z unabhängig sind und reale Werthverhältnisse besitzen, und welche für alle Umläufe der Variablen z ungeändert bleibt.

2.

Wir setzen jetzt umgekehrt voraus, dass es eine aus einem Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von Integralen der Gleichung (A.) und aus den conjugirten Werthen $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ gebildete bilineare Form φ giebt:

$$\text{(1.)} \qquad \varphi = \sum_{kl} Q^{(k,l)} u_k u'_l, \qquad \binom{k = 1, \ldots, n}{l = 1, \ldots, n}$$

deren Coefficienten $Q^{(k,l)}$ von z unabhängig, und welche durch keinen Umlauf von z verändert wird.

Überdies seien für wenigstens einen Umlauf die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ der zugehörigen Fundamentalgleichung von einander verschieden, und ihre Moduln gleich 1. Das dieser Fundamentalgleichung entsprechende Fundamentalsystem haben wir mit $u_1, u_2, \ldots, u_n$ bezeichnet. Wir machen endlich noch die Voraussetzung, dass zwischen den Grössen $u_k u'_l$ nicht eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfinden könne.

Der Voraussetzung nach soll [760

$$\text{(2.)} \qquad \sum Q^{(k,l)} \lambda_k \lambda'_l u_k u'_l = \sum Q^{(k,l)} u_k u'_l$$

sein, woraus ebenfalls nach der Voraussetzung sich ergiebt

$$Q^{(k,l)}(\lambda_k \lambda'_l - 1) = 0,$$

d. h.

$$\text{(3.)} \qquad Q^{(k,l)}(\lambda_k - \lambda_l) = 0.$$

Demnach ist

$$\text{(4.)} \qquad Q^{(k,l)} = 0, \quad \text{für } k \neq l.$$

Es muss also φ, um den Voraussetzungen gerecht zu werden, die Form haben

$$\text{(J'.)} \qquad \varphi = A_1 u_1 u'_1 + A_2 u_2 u'_2 + \cdots + A_n u_n u'_n.$$

Wenn durch den Umlauf U die Integrale $u_1, \ldots, u_n$ die Substitution (a_{kl}) erleiden, so muss der Voraussetzung zufolge sein

$$\text{(K'.)} \qquad A_1 a_{1\alpha} a'_{1\beta} + A_2 a_{2\alpha} a'_{2\beta} + \cdots + A_n a_{n\alpha} a'_{n\beta} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n;\ \beta = 1, \ldots, n;\ \alpha \neq \beta)$$

und

$$\text{(M'.)} \qquad A_1 a_{1\alpha} a'_{1\alpha} + A_2 a_{2\alpha} a'_{2\alpha} + \cdots + A_n a_{n\alpha} a'_{n\alpha} = A_\alpha. \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

Für einen festen Werth von α und für

$$\beta = 1, 2, \ldots, \alpha - 1, \alpha + 1, \ldots, n$$

ergeben die Gleichungen (K'.)

$$\text{(K}'_1.) \qquad \frac{A_k}{A_1} = \frac{a_{1\alpha}}{a_{k\alpha}} \frac{A'_{k\alpha}}{A'_{1\alpha}}. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Ebenso ist aber auch

$$\frac{A_k}{A_1} = \frac{a_{1\gamma}}{a_{k\gamma}} \frac{A'_{k\gamma}}{A'_{1\gamma}}. \tag{5.}$$

Aus (K'_1.) folgt

$$\frac{A_k}{A_l} = \frac{a_{l\alpha}}{a_{k\alpha}} \frac{A'_{k\alpha}}{A'_{l\alpha}}$$

und aus (5.)

$$\frac{A_k}{A_l} = \frac{a_{l\gamma}}{a_{k\gamma}} \frac{A'_{k\gamma}}{A'_{l\gamma}}.$$

Demnach ist

$$\frac{a_{l\alpha} A'_{k\alpha}}{a_{k\alpha} A'_{l\alpha}} = \frac{a_{l\gamma} A'_{k\gamma}}{a_{k\gamma} A'_{l\gamma}}$$

oder

$$\frac{A'_{k\alpha} A'_{l\gamma}}{A'_{k\gamma} A'_{l\alpha}} = \frac{a_{k\alpha} a_{l\gamma}}{a_{k\gamma} a_{l\alpha}}. \tag{H'_2.}$$

761] Vertauschen wir in den Gleichungen (K'.) α mit β, so folgt ebenso wie Gleichung (K'_1.)

$$\frac{A_k}{A_1} = \frac{a'_{1\alpha}}{a'_{k\alpha}} \frac{A_{k\alpha}}{A_{1\alpha}}. \tag{6.}$$

Aus (K'_1.) und (6.) ergiebt sich

$$a'_{k\alpha} A'_{k\alpha} = a_{k\alpha} A_{k\alpha} \frac{a'_{1\alpha} A'_{1\alpha}}{a_{1\alpha} A_{1\alpha}}. \tag{7.}$$

Substituiren wir die Werthe aus (6.) in (M'.), so ergiebt sich, da $|a_{kl}| = 1$,

$$\frac{A_1 a'_{1\alpha}}{A_{1\alpha}} = A_\alpha,$$

also

$$\frac{A_\alpha}{A_1} = \frac{a'_{1\alpha}}{A_{1\alpha}}. \tag{8.}$$

Aus (6.) folgt

$$\frac{A_\alpha}{A_1} = \frac{a'_{1\alpha}}{a'_{\alpha\alpha}} \frac{A_{\alpha\alpha}}{A_{1\alpha}}.$$

Durch Vergleichung mit (8.) erhalten wir also

$$A_{\alpha\alpha} = a'_{\alpha\alpha}. \tag{G'.}$$

Aus (K'_1.) folgt daher auch

$$\frac{A_\alpha}{A_1} = \frac{a_{1\alpha}}{A'_{1\alpha}}. \tag{9.}$$

Durch Vergleichung von (8.) und (9.) ergiebt sich also, dass $\frac{A_\alpha}{A_1}$ real ist, d. h. es ist

$$\frac{a_{1\alpha}}{A'_{1\alpha}} = \frac{a'_{1\alpha}}{A_{1\alpha}},$$

oder

$$a_{1\alpha} A_{1\alpha} = a'_{1\alpha} A'_{1\alpha}. \tag{10.}$$

Daher geht die Gleichung (7.) über in

$$a'_{k\alpha} A'_{k\alpha} = a_{k\alpha} A_{k\alpha}. \tag{H'_1.}$$

Setzen wir in Gleichung (H'_2.) $k = \gamma$, $l = \alpha$, so erhalten wir

$$\frac{A'_{\gamma\alpha} A'_{\alpha\gamma}}{A'_{\gamma\gamma} A'_{\alpha\alpha}} = \frac{a_{\gamma\alpha} a_{\alpha\gamma}}{a_{\gamma\gamma} a_{\alpha\alpha}}, \tag{11.}$$

also nach (G'.)

$$A'_{\gamma\alpha} A'_{\alpha\gamma} = a_{\gamma\alpha} a_{\alpha\gamma}. \tag{H'_3.}$$

Die Glieder einer Hauptunterdeterminante von $|A'_{kl}|$ haben die Form

$$\pm A'_{k\alpha} A'_{l\beta} A'_{m\gamma} \ldots,$$

wenn A'_{kk}, A'_{ll}, A'_{mm}, … die Diagonalglieder sind und $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ eine Permutation von $k, l, m, \ldots$ bedeutet.

Nun ergiebt die Gleichung (H'_2.) für $\alpha = l$, $\gamma = 1$, [762

$$\frac{A'_{kl} A'_{l1}}{A'_{k1} A'_{ll}} = \frac{a_{kl} a_{l1}}{a_{k1} a_{ll}}, \tag{12.}$$

also nach (G'.)

$$A'_{kl} = \frac{a_{kl} a_{l1}}{a_{k1}} \frac{A'_{k1}}{A'_{l1}} \tag{13.}$$

oder nach (H'_3.)

$$A'_{kl} = \frac{a_{kl}}{a_{k1} a_{1l}} A'_{k1} A'_{1l}. \tag{14.}$$

Daher ist

$$\pm A'_{k\alpha} A'_{l\beta} A'_{m\gamma} \cdots = \pm a_{k\alpha} a_{l\beta} a_{m\gamma} \cdots \frac{A'_{k1} A'_{1\alpha} A'_{l1} A'_{1\beta} A'_{m1} A'_{1\gamma} \cdots}{a_{k1} a_{1\alpha} a_{l1} a_{1\beta} a_{m1} a_{1\gamma} \cdots}. \tag{15.}$$

Da aber $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ eine Permutation von $k, l, m, \ldots$ ist, so combiniren sich im Zähler A'_{k1} mit A'_{1k}, A'_{l1} mit A'_{1l}, A'_{m1} mit A'_{1m} u. s. w., ebenso im

Nenner a_{k1} mit a_{1k}, a_{l1} mit a_{1l}, a_{m1} mit a_{1m} u. s. w., also ist nach $(\mathrm{H}_2'.)$

$$\pm A'_{k\alpha} A'_{l\beta} A'_{m\gamma} \cdots = \pm a_{k\alpha} a_{l\beta} a_{m\gamma} \cdots. \tag{0.}$$

I. Demnach ist jede Hauptunterdeterminante der Determinante $|A'_{kl}|$ gleich der entsprechenden Hauptunterdeterminante der Determinante $|a_{kl}|$.

Sei nunmehr $|g_{kl}|$ eine beliebige Determinante von n^2 Elementen mit dem Werthe 1, $|G_{kl}|$ die Determinante aus den adjungirten Elementen, so ist bekanntlich eine Hauptunterdeterminante p^{ter} Ordnung der Determinante $|G_{kl}|$ gleich der Hauptunterdeterminante $(n-p)^{\text{ter}}$ Ordnung von $|g_{kl}|$, welche diejenigen Diagonalglieder ausschliesst, deren Indices mit denen der Hauptunterdeterminante von $|G_{kl}|$ übereinstimmen.

Demnach ergiebt sich aus dem Satze I.:

II. Jede Hauptunterdeterminante $(n-p)^{\text{ter}}$ Ordnung der Determinante $|a'_{kl}|$ ist mit derjenigen Hauptunterdeterminante p^{ter} Ordnung der Determinante $|a_{kl}|$ übereinstimmend, welche die Diagonalglieder mit denjenigen Indices, die in der ersteren Hauptunterdeterminante auftreten, ausschliesst.

Nach den an den Gleichungen (E.) und (F.) in No. 1 gemachten Schlüssen ergiebt sich also:

Die Fundamentalgleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\omega & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22}-\omega & \dots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0 \tag{16.}$$

763] wird von den reciproken Werthen der Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a'_{11}-\omega & a'_{21} & \dots & a'_{n1} \\ a'_{12} & a'_{22}-\omega & \dots & a'_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a'_{1n} & a'_{2n} & \dots & a'_{nn}-\omega \end{vmatrix} = 0$$

befriedigt.

Wir erhalten daher den Satz:

III. Wenn es eine aus einem Fundamentalsysteme von Integralen der Gleichung (A.) $u_1, u_2, \dots, u_n$ und den conjugirten Werthen $u'_1, u'_2, \dots, u'_n$ gebildete bilineare Form mit constanten Coefficienten giebt, welche durch die sämmtlichen Umläufen entsprechenden Substitutionen der Gestalt

$$\begin{aligned} \bar{u}_k &= a_{k1} u_1 + a_{k2} u_2 + \cdots + a_{kn} u_n, \\ \bar{u}'_k &= a'_{k1} u'_1 + a'_{k2} u'_2 + \cdots + a'_{kn} u'_n \end{aligned} \qquad (k = 1, 2, \dots, n)$$

ungeändert bleibt, und wenn überdies wenigstens für einen Umlauf die Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichung von einander verschiedene Grössen mit den Moduln 1 sind, wenn endlich zwischen den Grössen $u_k u'_l$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten Statt hat, so hat die zu jedem Umlauf gehörige Fundamentalgleichung die Eigenschaft, durch die reciproken Werthe der Wurzeln derjenigen Gleichung befriedigt zu werden, welche aus ihr durch Vertauschung der Coefficienten der verschiedenen Potenzen der Unbekannten mit ihren conjugirten Werthen hervorgeht.

Dieser Satz bildet die Umkehrung des Satzes am Schlusse der No. 1.

3.

Sind die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\frac{d^n w}{dz^n} + q_1 \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + q_2 \frac{d^{n-2} w}{dz^{n-2}} + \cdots + q_n w = 0 \tag{α.}$$

eindeutige Functionen von z, so führt die Substitution

$$w = e^{-\frac{1}{n}\int q_1\, dz}\, u \tag{β.}$$

dieselbe in eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d^n u}{dz^n} + p_2 \frac{d^{n-2} u}{dz^{n-2}} + \cdots + p_n u = 0 \tag{A.}$$

mit ebenfalls eindeutigen Coefficienten über.

Ist für irgend einen Umlauf U die auf (α.) bezügliche Fundamental- [764 gleichung

$$(-1)^n r_i^n + \alpha_1 r_i^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0 \tag{1.}$$

und wird dieselbe durch die reciproken Werthe der Wurzeln der Gleichung

$$(1a.)\qquad (-1)^n \eta^n + \alpha'_1 \eta^{n-1} + \cdots + \alpha'_n = 0$$

befriedigt, so müssen die Coefficienten von (1.) mit den entsprechenden Coefficienten der Gleichung

$$(2.)\qquad (-1)^n \eta^n + (-1)^n \frac{\alpha'_{n-1}}{\alpha'_n} \eta^{n-1} + \cdots + (-1)^n \frac{\alpha'_1}{\alpha'_n} \eta + \frac{1}{\alpha'_n} = 0$$

übereinstimmen; es ist also

$$(3.)\qquad \alpha_k = (-1)^n \frac{\alpha'_{n-k}}{\alpha'_n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

und

$$(4.)\qquad \alpha_n = \frac{1}{\alpha'_n}.$$

Wegen der letzten Gleichung nimmt Gleichung (3.) die Form an:

$$(3a.)\qquad \alpha_k = (-1)^n \alpha'_{n-k} \alpha_n.$$

Bezeichnen wir mit Δ die Hauptdeterminante eines Fundamentalsystems $w_1, w_2, \ldots, w_n$ der Gleichung (α.), so ist*)

$$(5.)\qquad \Delta = e^{-\int q_1 dz}.$$

Nach dem Umlaufe U geht nun Δ über in $\Delta\alpha_n$, demnach multiplicirt sich $e^{\frac{1}{n}\int q_1 dz}$ durch diesen Umlauf mit einer Grösse j, wo

$$(6.)\qquad j = \alpha_n^{-\frac{1}{n}},$$

deren Modul nach Gleichung (4.) den Werth Eins hat. Die zu demselben Umlauf U gehörige auf (A.) bezügliche Fundamentalgleichung lautet daher

$$(7.)\qquad (-1)^n \omega^n + \alpha_1 j \omega^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} j^{n-1} \omega + 1 = 0,$$

welche mit der Gleichung

$$(7a.)\qquad (-1)^n \omega^n + (-1)^n \alpha'_{n-1} j^{-(n-1)} \omega^{n-1} + \cdots + (-1)^n \alpha'_1 j^{-1} \omega + 1 = 0$$

gemäss den Gleichungen (3a.) und (6.) die Wurzeln gemeinschaftlich hat.

Wenn daher für alle Umläufe von z die auf (α.) bezüglichen Funda-
765] mentalgleichungen durch die reciproken Werthe der Wurzeln derjenigen

*) Vergl. CRELLES Journal, Bd. 66, S. 128, Gl. (3.)[1]).

[1]) Abh. VI, S. 166, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Gleichungen befriedigt werden, welche aus ihnen durch Verwandlung der Coefficienten der sämmtlichen Potenzen der Unbekannten in ihre conjugirten Werthe hervorgehen, so haben die auf (A.) bezüglichen Fundamentalgleichungen dieselbe Eigenschaft.

I. Der Satz am Schlusse der No. 1 gilt daher für eine Differentialgleichung der Form (α.) ebenso wie für eine Differentialgleichung der Form (A.)

Wenn wir umgekehrt voraussetzen, dass eine aus einem Fundamentalsystem $w_1, w_2, \ldots, w_n$ von Integralen der Gleichung (α.) und aus ihren conjugirten Werthen $w'_1, w'_2, \ldots, w'_n$ gebildete bilineare Form mit constanten Coefficienten existirt, welche durch keinen Umlauf von z verändert wird, und dass mindestens für einen Umlauf die zugehörige Fundamentalgleichung von einander verschiedene Wurzeln mit den Moduln 1 besitzt, dass endlich zwischen den Grössen $w_k w'_i$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten Statt hat, so ergiebt sich, wenn wir Schritt für Schritt die Schlüsse der No. 2 verfolgen, an Stelle des dortigen Satzes I. der Satz:

I'. Jede Hauptunterdeterminante p^{ter} Ordnung der Determinante $|A'_{ik}|$ ist gleich dem Producte aus der entsprechenden Hauptunterdeterminante der Determinante $|a_{ik}|$ und $|A'_{ik}|^p$,

und an Stelle des Satzes II. daselbst der Satz:

II'. Jede Hauptunterdeterminante $(n-p)^{\text{ter}}$ Ordnung der Determinante $|A'_{ik}|$ ist gleich dem Producte aus $|a'_{ik}|$ und derjenigen Hauptunterdeterminante p^{ter} Ordnung der Determinante $|a_{ik}|$, welche die Diagonalglieder mit denjenigen Indices, die in der ersteren Hauptunterdeterminante auftreten, ausschliesst.

Die auf (α.) bezügliche zur Substitution (a_{ik}) gehörige Fundamentalgleichung ist aber der Form

$$(8.)\qquad (-1)^n \eta^n + (-1)^{n-1} \sum R_1 \eta^{n-1} + (-1)^{n-2} \sum R_2 \eta^{n-2} + \cdots + (-1) \sum R_{n-1} \eta + |a_{ik}| = 0,$$

wo $\sum R_k$ dieselbe Bedeutung wie in Gleichung (E.) hat.

Aus dem Satze II'. ergiebt sich

$$(9.)\qquad \sum R_{n-k} = \frac{1}{|a_{ik}|} \sum R'_k,$$

welches die Bedingung dafür ist, dass die Gleichung (8.) durch die reciproken

Werthe der Wurzeln derjenigen Gleichung, welche aus ihr durch Verwandlung der Coefficienten der Unbekannten in die conjugirten Werthe hervorgeht, befriedigt wird.

766] Hieraus folgt:

III'. Der Satz III. in No. 2 gilt daher für eine Differentialgleichung der Form (α.) ebenso wie für eine Differentialgleichung der Form (A.).

4.

Sei

$$\frac{d^n u}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \cdots + p_n u = 0 \tag{1.}$$

und

$$z = x + yi, \tag{2.}$$

wo x und y real. Wir setzen ebenso

$$\begin{cases} p_k = P_k + Q_k i, \\ u = \xi + \eta i, \end{cases} \tag{3.}$$

wo P_k, Q_k, ξ, η reale Functionen der realen Variabeln x, y sind.

Die Gleichung (1.) zerfällt alsdann in die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^n \xi}{\partial x^n} + \sum_1^{n-1}{}_k \left\{ P_k \frac{\partial^{n-k} \xi}{\partial x^{n-k}} - Q_k \frac{\partial^{n-k} \eta}{\partial x^{n-k}} \right\} + P_n \xi - Q_n \eta = 0, \tag{4.}$$

$$\frac{\partial^n \eta}{\partial x^n} + \sum_1^{n-1}{}_k \left\{ P_k \frac{\partial^{n-k} \eta}{\partial x^{n-k}} + Q_k \frac{\partial^{n-k} \xi}{\partial x^{n-k}} \right\} + Q_n \xi + P_n \eta = 0. \tag{5.}$$

Durch Elimination, bez. von η und von ξ erhalten wir aus diesen beiden Gleichungen:

$$P_n \frac{\partial^n \xi}{\partial x^n} + Q_n \frac{\partial^n \eta}{\partial x^n} + \sum_1^{n-1}{}_k \left\{ M_k \frac{\partial^{n-k} \xi}{\partial x^{n-k}} - N_k \frac{\partial^{n-k} \eta}{\partial x^{n-k}} \right\} + \{P_n^2 + Q_n^2\} \xi = 0, \tag{6.}$$

$$P_n \frac{\partial^n \eta}{\partial x^n} - Q_n \frac{\partial^n \xi}{\partial x^n} + \sum_1^{n-1}{}_k \left\{ N_k \frac{\partial^{n-k} \xi}{\partial x^{n-k}} + M_k \frac{\partial^{n-k} \eta}{\partial x^{n-k}} \right\} + \{P_n^2 + Q_n^2\} \eta = 0, \tag{7.}$$

wo

$$\begin{cases} M_k = P_k P_n + Q_k Q_n, \\ N_k = Q_k P_n - P_k Q_n. \end{cases} \tag{8.}$$

Ersetzen wir in (6.) $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ durch $-\frac{\partial \xi}{\partial y}$ und in (7.) $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ durch $\frac{\partial \eta}{\partial y}$, so erhalten wir

$$\begin{cases} P_n \frac{\partial^n \xi}{\partial x^n} - Q_n \frac{\partial^n \xi}{\partial x^{n-1} \partial y} + \sum_1^{n-1}{}_k \left\{ M_k \frac{\partial^{n-k} \xi}{\partial x^{n-k}} + N_k \frac{\partial^{n-k} \xi}{\partial x^{n-k-1} \partial y} \right\} + \{P_n^2 + Q_n^2\} \xi = 0, \\ P_n \frac{\partial^n \eta}{\partial x^n} - Q_n \frac{\partial^n \eta}{\partial x^{n-1} \partial y} + \sum_1^{n-1}{}_k \left\{ M_k \frac{\partial^{n-k} \eta}{\partial x^{n-k}} + N_k \frac{\partial^{n-k} \eta}{\partial x^{n-k-1} \partial y} \right\} + \{P_n^2 + Q_n^2\} \eta = 0. \end{cases} \tag{6a.}$$

Demnach genügen ξ und η, folglich auch $u = \xi + \eta i$ und [767
$u' = \xi - \eta i$ derselben Differentialgleichung

$$P_n \frac{\partial^n \omega}{\partial x^n} - Q_n \frac{\partial^n \omega}{\partial x^{n-1} \partial y} + \sum_1^{n-1}{}_k \left\{ M_k \frac{\partial^{n-k} \omega}{\partial x^{n-k}} + N_k \frac{\partial^{n-k} \omega}{\partial x^{n-k-1} \partial y} \right\} + \{P_n^2 + Q_n^2\} \omega = 0, \tag{1a.}$$

deren Coefficienten reale Functionen der realen Variablen x, y sind.

Umgekehrt genügt jede monogene Function von $x+yi$, welche die Gleichung (1a.) befriedigt, auch der Gleichung

$$(P_n - Q_n i) \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + \sum_1^{n-1}{}_k (M_k + N_k i) \frac{\partial^{n-k} w}{\partial x^{n-k}} + (P_n^2 + Q_n^2) w = 0,$$

d. h.

$$(P_n - Q_n i) \frac{\partial^n w}{\partial x^n} + (P_n - Q_n i) \sum_1^{n-1}{}_k (P_k + Q_k i) \frac{\partial^{n-k} w}{\partial x^{n-k}} + (P_n^2 + Q_n^2) w = 0,$$

oder endlich

$$\frac{d^n w}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} w}{dz^{n-1}} + \cdots + p_n w = 0,$$

welche mit der Gleichung (1.) übereinstimmt.

Wenn es demnach eine aus den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ der Gleichung (1.) und ihren conjugirten Werthen $u'_1, u'_2, \ldots, u'_n$ gebildete bilineare Form mit constanten Coefficienten giebt, welche bei beliebigen Umläufen der Variablen z ungeändert bleibt, so wird diejenige Differentialgleichung, welcher die Quadrate der Integrale der Gleichung (1a.) genügen, durch einwerthige Functionen von x, y befriedigt.

5.

Indem wir nunmehr zu besonderen Fällen von Differentialgleichungen übergehen, welche zu der in den vorhergehenden Nummern charakterisirten Klasse gehören, betrachten wir zuerst diejenigen Differentialgleichungen, deren

Integrale für jeden Werth der unabhängigen Variablen z nur eine endliche Anzahl von Werthen annehmen.

Ist U ein beliebiger Umlauf von z um einen oder mehrere singuläre Punkte und ω irgend eine Wurzel der zu diesem Umlauf gehörigen Funda-
768] mentalgleichung, so giebt es*) ein Integral u der Differentialgleichung, von der Beschaffenheit, dass u nach Vollziehung des Umlaufes in

$$\bar{u} = \omega u$$

übergeht.

Da die Wiederholung des Umlaufes nur eine endliche Anzahl von Zweigen der Function u hervorrufen kann, so muss ω eine ganzzahlige Wurzel der Einheit sein. Diejenige Gleichung, welche aus der Fundamentalgleichung durch Vertauschung der Coefficienten der verschiedenen Potenzen der Unbekannten mit den conjugirten Werthen hervorgeht, wird demnach durch die reciproken Werthe der Wurzeln der Fundamentalgleichung befriedigt.

Aus dem Satze I'. der No. 3 ergiebt sich also das folgende Theorem:

I. Sind die Integrale einer linearen homogenen Differentialgleichung mit eindeutigen Coefficienten sämmtlich endlichwerthige Functionen der unabhängigen Variablen z, und sind überdies wenigstens für einen Umlauf von z die Wurzeln der zugehörigen Fundamentalgleichung verschieden, so giebt es eine aus einem Fundamentalsystem von Integralen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und den conjugirten Werthen $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ gebildete bilineare Form der Gestalt

$$\varphi = A_1 u_1 u_1' + A_2 u_2 u_2' + \cdots + A_n u_n u_n'$$

mit constanten Coefficienten — deren Werthverhältnisse real —, welche bei allen Umläufen von z ungeändert bleibt.

Als Corollar zu diesem Satze ergiebt sich:

II. Ist eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung algebraisch integrirbar, und hat wenigstens für einen Umlauf die zugehörige Fundamentalgleichung ungleiche Wurzeln,

*) Crelles Journal, Bd. 66, S. 132 [1]).

[1]) Abh. VI, S. 171, Band I dieser Ausgabe. R. F.

so giebt es eine aus einem Fundamentalsysteme von Integralen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ und den conjugirten Werthen $u_1', u_2', \ldots, u_n'$ gebildete bilineare Form

$$\varphi = A_1 u_1 u_1' + A_2 u_2 u_2' + \cdots + A_n u_n u_n'$$

mit constanten Coefficienten — deren Werthverhältnisse real —, welche bei allen Umläufen von z ungeändert bleibt.

In einer Notiz*) hat Herr Picard, davon ausgehend, dass für diejenigen algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche durch Gausssche Reihen befriedigt werden, eine bilineare Form

$$A u_1 u_1' + B u_1 u_2' + B' u_1' u_2 + C u_2 u_2'$$

— um unsere obigen Bezeichnungen anzuwenden —, in welcher A und [769
C real und B und B' conjugirte complexe Grössen sind, durch die Fundamentalsubstitutionen in sich selbst verwandelt wird, die von Herrn Jordan gegebenen Typen von Fundamentalsubstitutionen der algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen dritter Ordnung, von dem ersten Typus abgesehen, in die bilineare Form

$$\varphi = u_1 u_1' + u_2 u_2' + u_3 u_3'$$

eingesetzt und gefunden, dass, mit Ausnahme des Falles des vierten Typus, die Form φ durch die Fundamentalsubstitutionen in sich selbst verwandelt wird.

Wir bemerken hierzu das Folgende. Da im vierten Typus eine Fundamentalsubstitution

$$\begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & \tau^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vorhanden ist, wo τ eine primitive Wurzel der Gleichung $\tau^5 = 1$, und die zu dieser Substitution gehörige Fundamentalgleichung also verschiedene Wurzeln hat, so muss nach unserem Satze II. dieser Nummer auch für den vierten Typus eine bilineare Form

$$\psi = A_1 u_1 u_1' + A_2 u_2 u_2' + A_3 u_3 u_3'$$

*) Bulletin de la Société Mathématique, t. 15, p. 154, 20 Avril 1887.

existiren, welche durch keine der Fundamentalsubstitutionen des Typus verändert wird.

In der That ergiebt die Rechnung, dass

$$\psi = u_1 u_1' + u_2 u_2' + 2a(1-a) u_3 u_3',$$

wo a eine reale Grösse ist, die angegebene Eigenschaft hat.

(Fortsetzung folgt)[1].

---

[1]) Diese Fortsetzung ist nicht erschienen. R. F.

ANMERKUNGEN.

[1]) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 219, Zeile 11 v. u. gehörige statt zugehörige,
„ 222, „ 9 v. u. derselben statt dieselbe,
„ 223 wurde vor Gleichung (17.) »folgt« eingefügt,
„ 224, Gleichung (21.) a_{p1} statt A_{p1},
„ 225, Zeile 10 A'_{k1} statt P'_{k1},
„ 226, „ 1 und 9 v. u. und an anderen Stellen »den« statt »ihren«,
„ 229, „ 12 v. u. eine Permutation von $k, l, m, \ldots$ bedeutet statt Permutationen von $k, l, m, \ldots$ bedeuten,
„ 230 und 233 im Wortlaut der Sätze II. und II'. denjenigen Indices, die in der ersteren Hauptunterdeterminante auftreten, ausschliesst statt denselben Indices wie die der ersteren Hauptunterdeterminante ausschliesst,
„ 232, Zeile 6 wurde »es ist« eingefügt,
„ 234, „ 13 Wir setzen statt Setzen wir,
„ 2 v. u. Ersetzen wir in (6.) statt In (6.) ersetzen wir,
„ 236, „ 11 wurde »also« nach dem Worte »Gleichung« gestrichen.

[2]) In seiner Note »Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M. HERMITE«, die am 20. Juli 1896 der Académie des Sciences vorgelegt und in den Comptes Rendus, t. 123, S. 168–171 veröffentlicht worden ist[1]), berichtet Herr ALFRED LOEWY über Untersuchungen, die mit den in den Nummern 2 und 5 der vorstehenden Abhandlung enthaltenen nahe Berührungspunkte haben, jedoch in einigen wesentlichen Punkten über sie hinausgehen. — Wie schon aus der Datirung unzweifelhaft hervorgeht, sind diese Untersuchungen des Herrn LOEWY ohne Kenntniss der FUCHSschen Abhandlung LXV, also von dieser völlig unabhängig geführt worden. — In der erwähnten Note stellt Herr LOEWY u. A. einen algebraischen Satz auf, der die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür angiebt, dass eine lineare Substitution mit ihrer conjugirt imaginären eine bilineare Form mit conjugirt imaginären Variabeln und nicht verschwindender Determinante in sich selbst transformirt, und der, wie der Herr Verfasser (Nova Acta, Abhandlgn. der Kaiserl. Leop.-Carol. Deut-

---

[1]) Auf diese Note bezieht sich die folgende Abb. LXVI.

schen Akademie der Naturforscher, Bd. LXXI, 1898, S. 384 und Mathemat. Annalen, Bd. 50, 1897, S. 559) bemerkt hat, den Fuchsschen Satz III. der No. 2 (bezw. III'. der No. 3) als speciellen Fall enthält. In der That ist bei dem Beweise, den Fuchs in der No. 2 für seinen Satz giebt, stillschweigend vorausgesetzt, dass die Determinante der Form φ (Gl. (J'.), S. 227) nicht verschwindet. Die Angabe am Schlusse der No. 2, dass der Satz III. dieser Nummer »die Umkehrung des Satzes am Schlusse der No. 1 bildet« trifft also nicht zu, da aus den Bedingungen des letzteren Satzes, wie sich an Beispielen zeigen lässt[2]) keineswegs folgt, dass die Coefficienten $A_0, A_1, \ldots, A_n$ der Form φ sämmtlich von Null verschieden sein müssen. — Diese letztere Bemerkung überträgt sich natürlich auch auf die Schlüsse, die Fuchs in der No. 5 für den Fall der endlichen Gruppen linearer Substitutionen gezogen hat, indem daselbst (Sätze I. und II., S. 236, 237) unter der beschränkenden Voraussetzung, dass die endliche Gruppe mindestens eine Substitution enthält, deren Fundamentalgleichung lauter ungleiche Wurzeln besitzt, nur gezeigt ist, dass eine solche Gruppe eine Form

$$\varphi = A_1 u_1 u_1' + \cdots + A_n u_n u_n'$$

mit realen Coefficientenverhältnissen in sich selbst transformirt, wobei es aber, da φ sogar eine verschwindende Determinante haben kann, nicht ausgeschlossen ist, dass diese Form φ für von Null verschiedene Werthe der $u_1, \ldots, u_n, u_1', \ldots, u_n'$ verschwindet.

Dagegen enthält die Note des Herrn Loewy den Satz, dass jede endliche Gruppe linearer Substitutionen eine definite Hermitesche Form in sich selbst transformirt.

Die Aufstellung der invarianten Hermiteschen Form, die zu dem vierten Typus der algebraisch integrirbaren linearen Differentialgleichungen dritter Ordnung gehört, ist den Arbeiten von Fuchs und Herrn A. Loewy gemeinsam.

Sch.

[2]) Herr Loewy war so gütig, mir am 25. Juli 1907 brieflich ein solches Beispiel mitzutheilen.

LXVI.

REMARQUES SUR UNE NOTE DE M. ALFRED LOEWY*) INTITULEE: «SUR LES FORMES QUADRATIQUES DÉFINIES À INDÉTERMINÉES CONJUGUÉES DE M. HERMITE».

(Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, t. 123, Paris 1896, p. 289—290; Séance du 3 août 1896.)

Je viens de lire dans les Comptes rendus la Note dont il s'agit. [289
M. Loewy énonce sans démonstration ce théorème, qu'il correspond à tout groupe linéaire d'ordre fini à n variables une forme quadratique définie à indéterminées conjuguées, qui est transformée en elle-même quand on effectue les substitutions du groupe d'ordre fini sur les variables.

Je crois devoir faire remarquer que ce théorème n'est qu'un cas spécial des résultats d'un Mémoire que j'avais publié dans les Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin (9 juillet, p. 753—769[1])), intitulé «Sur une classe d'équations différentielles linéaires et homogènes».

Dans mon Mémoire, j'ai démontré les deux théorèmes suivants:

»I. Soit donnée une équation différentielle

$$(\alpha.) \qquad \frac{d^n\omega}{dz^n} + q_1 \frac{d^{n-1}\omega}{dz^{n-1}} + \cdots + q_n\omega = 0$$

dont les coefficients sont des fonctions uniformes de la variable z. Si, [290
pour toute rotation de la variable z autour d'un ou de plusieurs points sin-

*) Comptes rendus du 20 juillet 1896, t. CXXIII, p. 168—171.

[1]) Mém. LXV, p. 219 et suiv. du présent volume. R. F.

guliers de l'équation (α.), l'équation fondamentale qui y appartient est satisfaite par les valeurs réciproques des racines de l'équation résultant de l'équation fondamentale par le changement des coefficients des puissances de l'inconnue dans leurs valeurs conjuguées; si, de plus, au moins pour une de ces rotations, les racines de l'équation fondamentale qui y appartient sont différentes entre elles et ont toutes le module un, il existe une forme bilinéaire φ, composée des éléments d'un système fondamental d'intégrales de l'équation (α.) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ et de leurs valeurs conjuguées $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$:

$$\varphi = A_1 \omega_1 \omega'_1 + A_2 \omega_2 \omega'_2 + \cdots + A_n \omega_n \omega'_n,$$

à coefficients réels et indépendants de z, forme qui n'est altérée par aucune rotation de la variable z.«

Inversement:

»II. S'il existe une forme bilinéaire composée des éléments d'un système fondamental d'intégrales de l'équation (α.) $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ et de leurs valeurs conjuguées $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$, à coefficients indépendants de z; si, en outre, pour une, au moins, de ces rotations, les racines de l'équation fondamentale qui y appartient sont différentes entre elles et ont toutes le module un; si, enfin, il n'y a pas une relation linéaire et homogène à coefficients constants entre les quantités $\omega_k \omega'_l$, alors l'équation fondamentale qui appartient à chaque rotation de la variable z est satisfaite par les valeurs réciproques des racines de l'équation résultant de l'équation fondamentale par le changement des coefficients des puissances de l'inconnue dans leurs valeurs conjuguées.«

Dans le no. 5 de mon Mémoire mentionné, je démontre que les équations différentielles linéaires et homogènes dont les intégrales n'ont qu'un nombre fini de déterminations, et spécialement les équations différentielles intégrables algébriquement, rentrent dans la classe des équations (α.) pour lesquelles il existe une forme bilinéaire à indéterminées conjuguées qui n'est altérée par aucune rotation de la variable.

ANMERKUNG.

Zu den Theoremen I., II. vergl. die Anmerkung zur Abhandlung LXV. Mit Rücksicht auf die daselbst in Bezug auf die Sätze I., II. der No. 5 der Abh. LXV gemachten Bemerkungen[1]), kann die Angabe der vorstehenden Note, das Theorem des Herrn Alfred Loewy sei nur ein specieller Fall der Resultate der Abhandlung LXV., nicht aufrecht erhalten werden.

Sch.

[1]) Vergl. auch die Fussnote des Herrn A. Loewy, Mathemat. Annalen, Bd. 50, 1897, S. 561, 562.

LXVII.

BEMERKUNG ZUR VORSTEHENDEN MITTHEILUNG DES HERRN HAMBURGER[1]).

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 118, 1897, S. 354—355.)

In meiner Arbeit »zur Theorie der linearen Differentialgleichungen [354 mit veränderlichen Coefficienten«, welche ich vor Ablauf des Jahres 1864 vollendete und im Januar 1865 zur Publication im Osterprogramm der städtischen Gewerbeschule zu Berlin desselben Jahres einlieferte[2]), und welche in diesem Journal Bd. 66[3]) wieder abgedruckt worden ist, habe ich in der ersten Nummer den Bereich fixirt, innerhalb dessen die Integrale einer Differentialgleichung

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y,$$

deren Coefficienten innerhalb eines einfach zusammenhangenden Flächentheils T der x-Ebene nur in einer endlichen Anzahl von singulären Punkten unstetig werden, im Übrigen aber innerhalb dieser Fläche eindeutig und continuirlich sind, sich nach ganzen positiven Potenzen entwickeln lassen.

Wenn es sich nur darum handelte zu zeigen, dass für eine hinlänglich kleine Umgebung eines von den singulären Stellen verschiedenen Punktes x_0 der Fläche T eine convergirende, nach positiven ganzen Potenzen von $x-x_0$

---

1) Neuer Beweis der Existenz eines Integrals einer linearen homogenen Differentialgleichung (nach einer Mittheilung von PAUL GÜNTHER), Journal f. d. r. u. a. Math., Bd. 118, S. 351—353. R. F.

2) Abh. V, S. 111, Band I dieser Ausgabe. R. F.

3) Abh. VI, S. 159, Band I dieser Ausgabe. R. F.

fortschreitende Reihe y von der Art existirt, dass $y, \frac{dy}{dx}, \cdots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ beliebig vorgeschriebene Werthe annehmen, und dass sie der Differentialgleichung Genüge leistet, so konnten wir uns auf den für beliebige Differentialgleichungen von CAUCHY gelieferten Existenzbeweis berufen.

Es handelte sich vielmehr darum zu lehren, dass für die linearen Differentialgleichungen die singulären Punkte der Coefficienten die einzigen Stellen sind, wo die Integrale derselben Singularitäten haben können; mit anderen Worten, dass die Reihe y innerhalb eines x_0 als Mittelpunkt umge-
355] benden bis zum nächsten singulären Punkte a heranreichenden Kreises convergirt. Hierzu war erforderlich, in Anlehnung an die CAUCHYsche Methode (méthode des limites) die Hülfsdifferentialgleichung (Gl. (3.) No. 1 der citirten Abhandlung[1]) so zu wählen, dass für diese die Darstellbarkeit des entsprechenden Integrals innerhalb eines x_0 umgebenden bis a heranreichenden Kreises durch eine convergente nach ganzen positiven Potenzen von $x-x_0$ fortschreitende Reihe zur Evidenz gebracht werden kann, woraus alsdann nach der Methode von CAUCHY dasselbe für die vorgelegte Differentialgleichung erschlossen wird.

In jüngster Zeit hat ein amerikanischer Schriftsteller*) bei Gelegenheit der Besprechung des Buches des Herrn HEFFTER über lineare Differentialgleichungen und des Handbuches des Herrn SCHLESINGER die Aufgabe übernommen, das was ich in der Theorie der linearen Differentialgleichungen erstrebt habe, zu verkleinern. Unter anderem will derselbe unter Berufung auf eine Stelle in einer Arbeit des Herrn THOMÉ, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 66, p. 322, in Bezug auf den Existenzbeweis für die Integrale linearer Differentialgleichungen mir die Priorität streitig machen. Die vorstehende Arbeit von GÜNTHER, welche eine Abänderung der von mir angewendeten Hülfsdifferentialgleichung enthält, giebt mir Veranlassung hier ausdrücklich zu constatiren, dass mir vor dem Erscheinen meiner Programmarbeit über das oben erwähnte Merkmal, welches die linearen Differentialgleichungen von den nicht linearen unterscheidet, oder über den Beweis der

*) Bulletin of the American Mathematical Society, November 1896, Ser. II, Vol. III, No. 2 und Januar 1897, Ser. II, Vol. III, No. 4.

[1]) Abh. VI, S. 161, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Convergenz von y innerhalb eines x_0 umgebenden bis zum nächsten singulären Punkte heranreichenden Kreises weder eine Publication, noch auf einem anderen Wege eine Mittheilung von irgend einem anderen Mathematiker bekannt geworden ist.

Es ist übrigens hier nicht der Ort auf die Art näher einzugehen, wie derselbe Verfasser auch nach anderen Seiten hin durch Zusammenstellung von Schriften anderer Autoren, welche später als die meinigen publicirt worden sind, mit den letzteren sich historische Daten nach Belieben construirt.

ANMERKUNG.

Änderung gegen das Original:

S. 246, Zeile 6, 7 wurde statt »die einzigen singulären Stellen der Integrale derselben sind« der genauere Ausdruck »die einzigen Stellen sind, wo die Integrale derselben Singularitäten haben können« gesetzt. R. F.

LXVIII.

ZUR THEORIE DER ABELSCHEN FUNCTIONEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1897, XXVIII, S. 608—621; vorgelegt am 20. Mai; ausgegeben am 27. Mai 1897.)

Die Abhängigkeit der Periodicitätsmoduln des Integrals einer ratio- [608 nalen Function des Ortes in einer Riemannschen Fläche sowohl von den im Integranden als auch von den in den Coefficienten der die Riemannsche Fläche definirenden algebraischen Grundgleichung auftretenden Parametern kann in durchgreifender Weise nur durch das Studium der Differentialgleichungen erkannt werden, welchen die Periodicitätsmoduln als Functionen dieser Parameter genügen. Ich habe*) nachgewiesen, dass diese Differentialgleichungen linear sind, und dass ihre Coefficienten die veränderlichen Parameter in demselben Rationalitätsbereiche enthalten wie der Integrand und die Coefficienten der Grundgleichung. Für die hyperelliptischen Integrale habe ich bereits**) diese Differentialgleichungen in expliciter Form zur Darstellung gebracht, und für die allgemeinen Abelschen Integrale die Regeln skizzirt***), nach welchen sie herzustellen sind. Es erscheint jedoch nicht überflüssig, für die wirkliche Ausrechnung Methoden zu entwickeln, welche eine tiefere Einsicht in die Beschaffenheit der Coefficienten der Differentialgleichungen gewähren, wodurch zu gleicher Zeit die Discussion der Lösungen derselben erleichtert wird.

*) Crelles Journal, Bd. 73, S. 324 ff. [1]).

**) Ebenda Bd. 71, S. 112 ff. [2]).

***) Ebenda Bd. 73, a. a. O. [1]).

[1]) Abh. XIII, S. 343, Band I dieser Ausgabe. R. F.

[2]) Abh. VIII, S. 264 ff., Band I dieser Ausgabe. R. F.

Im Folgenden werden drei verschiedene Verfahrungsarten zur Lösung dieser Aufgabe versucht, von welchen die beiden ersteren sich im Wesentlichen an diejenigen anschliessen, welche ich bereits für die hyperelliptischen Integrale*) gegeben habe, während die dritte mit der Frage in Verbindung gebracht wird, unter welchen Umständen das Product einer rationalen Function einer Variablen z und einer algebraischen Function derselben Variablen zum vollständigen Differentialquotienten nach z einer rationalen Function von (z, s) wird.

Einer späteren Mittheilung sollen die aus den gefundenen Resultaten zu ziehenden Schlussfolgerungen vorbehalten bleiben.

609] 1.

Es bedeute s einen Integranden erster Gattung in einer eine algebraische Function der Variablen z repräsentirenden RIEMANNschen Fläche vom Geschlechte p. Wir wollen voraussetzen, dass nur einfache und zu von einander verschiedenen endlichen Werthen

$$z = k, \quad z = k_1, \quad z = k_2, \quad \dots, \quad z = k_{\mu-1}$$

gehörige Verzweigungen auftreten. Überdies seien $k, k_1, \dots, k_{\mu-1}$ von einander unabhängige Grössen**). Den Integranden s denken wir uns dadurch bestimmt, dass derselbe für $p-1$ willkürlich vorgeschriebene von den Verzweigungswerthen unabhängige Grössen

$$(a_1, b_1), \; (a_2, b_2), \; \dots, \; (a_{p-1}, b_{p-1})$$

verschwindet.

Ist

$$J = \int s\,dz, \tag{1.}$$

so ist

$$\frac{\partial^\lambda J}{\partial k^\lambda} = \int \frac{\partial^\lambda s}{\partial k^\lambda}\,dz$$

das Integral einer rationalen Function von z und s. Wir stellen uns zunächst

*) CRELLES Journal, Bd. 71, S. 107–108 und S. 112 ff.[1]).

**) Vergl. CRELLES Journal, Bd. 73, S. 325–326[2]).

[1]) Abh. VIII, S. 258–260 und S. 264 ff., Band I dieser Ausgabe. R. F.

[2]) Abh. XIII, S. 344–345, Band I dieser Ausgabe. R. F.

die Aufgabe, $\mu+1$ von z unabhängige Grössen $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_\mu$ derart zu bestimmen, dass

$$\beta_0 J + \beta_1 \frac{\partial J}{\partial k} + \cdots + \beta_\mu \frac{\partial^\mu J}{\partial k^\mu} = \mathfrak{R} \tag{2.}$$

eine algebraische Function von z, also nach einem bekannten Satze von ABEL und LIOUVILLE eine rationale Function von z und s werde.

Die Function $\mathfrak{R}$ besitzt folgende Eigenschaften:

1) Sie wird unendlich der Ordnung $2\mu-1$ in $z=k$ und bleibt an allen anderen Stellen (z, s) endlich, weil wir $k_1, k_2, \dots, k_{\mu-1}$ als von k unabhängig vorausgesetzt haben.

2) Sie darf in der für die Umgebung von $z=k$ gültigen Entwickelung keine ganzzahligen negativen Potenzen von $z-k$ enthalten, da solche Potenzen auch nicht in der Entwickelung von $\frac{\partial^\lambda J}{\partial k^\lambda}$ auftreten können.

3) $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z}$ muss für $(a_1, b_1), \dots, (a_{p-1}, b_{p-1})$ verschwinden.

Die Bedingung 1) bewirkt, dass $\mathfrak{R}$ eine Anzahl $2\mu-p$ willkürlicher Constanten enthält*). Von diesen tritt eine additiv auf. Für die $2\mu-p-1$ übrigen liefert die Bedingung 2) $\mu-1$, die Bedingung 3) $p-1$ lineare [610 homogene Gleichungen.

Es muss also

$$2\mu-p-1 \geqq \mu+p-1,$$

d. h.

$$\mu \geqq 2p \tag{3.}$$

sein, wenn nicht besondere Voraussetzungen über die Natur der RIEMANNschen Fläche gemacht werden.

Wir gelangen also zu dem Resultat:

I. Im Allgemeinen ist eine Gleichung der Form (2.) für $\mu < 2p$ nicht möglich.

Wenn die sämmtlichen Periodicitätsmoduln P von J einer Gleichung

$$\beta_\mu \frac{\partial^\mu P}{\partial k^\mu} + \beta_{\mu-1} \frac{\partial^{\mu-1} P}{\partial k^{\mu-1}} + \cdots + \beta_0 P = 0 \tag{4.}$$

*) Nach einem allgemeinen Satze von RIEMANN, ABELsche Functionen § 5, CRELLES Journal, Bd. 54, S. 122[1]).

[1]) Riemanns Gesammelte Mathematische Werke, II. Auflage (1892), S. 106. R. F.

genügen, so ist

$$\beta_\mu \frac{\partial^\mu J}{\partial k^\mu} + \beta_{\mu-1} \frac{\partial^{\mu-1} J}{\partial k^{\mu-1}} + \cdots + \beta_0 J$$

eine rationale Function von (z, s).

Es besagt also der Satz I. soviel als

II. Im Allgemeinen ist die Differentialgleichung (4.) der Periodicitätsmoduln eines Integrales erster Gattung nicht niedrigerer als $2p^{\text{ter}}$ Ordnung.

Dass dieselbe in irreductibler Form auch nicht höherer als $2p^{\text{ter}}$ Ordnung ist, ergiebt sich aus meinen Untersuchungen in Crelles Journal, Bd. 73, S. 329[1]).

Wir wollen ein System von $2p$ Integralen rationaler Functionen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2p}$ ein Fundamentalsystem*) nennen, wenn diese Integrale nirgendwo logarithmisch unendlich werden und eine Gleichung der Form

$$C_1 \zeta_1 + C_2 \zeta_2 + \cdots + C_{2p} \zeta_{2p} = \Re(z, s), \tag{5.}$$

wo die Grössen C von z unabhängig sind und $\Re(z, s)$ eine rationale Function bedeutet, nicht bestehen kann. Der Satz I. lässt sich also auch dahin aussprechen:

Ia. Die Functionen $J, \frac{\partial J}{\partial k}, \frac{\partial^2 J}{\partial k^2}, \cdots, \frac{\partial^{2p-1} J}{\partial k^{2p-1}}$ bilden ein Fundamentalsystem.

Bilden $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2p}$ ein Fundamentalsystem, und sind

$$P_{\lambda 1}, P_{\lambda 2}, \ldots, P_{\lambda, 2p}$$

611] die Periodicitätsmoduln des Integrales ζ_λ, so ist die Determinante

$$\Delta = |P_{\lambda\mu}| \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 1, \ldots, 2p \\ \mu = 1, \ldots, 2p \end{pmatrix} \tag{6.}$$

von Null verschieden, weil sonst $2p$ von z unabhängige Grössen $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$ gefunden werden könnten der Beschaffenheit, dass

$$C_1 P_{1\mu} + C_2 P_{2\mu} + \cdots + C_{2p} P_{2p,\mu} = 0, \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, 2p)$$

*) Im Anschluss an eine Terminologie der Herren Appell et Goursat, »Théorie des fonctions algébriques etc.«, p. 338.

[1]) Abh. XIII, S. 349, Band I dieser Ausgabe. R. F.

was zur Folge hätte, dass

$$C_1 \zeta_1 + C_2 \zeta_2 + \cdots + C_{2p} \zeta_{2p}$$

eine rationale Function von (z, s) würde. Da Δ von Null verschieden ist, so ergiebt sich, dass jedes nicht logarithmisch unendlich werdende Integral Ω von (z, s) sich in die Form

$$\Omega = C_1 \zeta_1 + \cdots + C_{2p} \zeta_{2p} + \Re(z, s) \tag{7.}$$

bringen lässt, wo die Grössen C von z unabhängig sind und $\Re(z, s)$ eine rationale Function von (z, s) ist. Demnach ist auch im Allgemeinen Ω darstellbar in der Form

$$\Omega = C_0 J + C_1 \frac{\partial J}{\partial k} + C_2 \frac{\partial^2 J}{\partial k^2} + \cdots + C_{2p-1} \frac{\partial^{2p-1} J}{\partial k^{2p-1}} + \Re(z, s), \tag{8.}$$

wo $C_0, C_1, \ldots, C_{2p-1}$ von z unabhängig sind. Die Coefficienten $C_1, C_2, \ldots, C_{2p}$ in Gleichung (7.) oder $C_0, C_1, \ldots, C_{2p-1}$ in (8.) lassen sich algebraisch aus den in $\frac{\partial \Omega}{\partial z}, \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial z}$ auftretenden Constanten bestimmen*).

Für (8.) ergiebt die Multiplication mit $\frac{\partial^\lambda s}{\partial k^\lambda}$ auf beiden Seiten der Gleichung, wenn wir die Summe der Residuen des Productes $\frac{\partial^\lambda s}{\partial k^\lambda} \frac{\partial^\mu J}{\partial k^\mu}$

$$\sum \operatorname{Res} \frac{\partial^\lambda s}{\partial k^\lambda} \frac{\partial^\mu J}{\partial k^\mu} = (\lambda, \mu) \tag{9.}$$

setzen,

$$\sum \operatorname{Res} \left(\frac{\partial^\lambda s}{\partial k^\lambda} \Omega \right) = (\lambda, 0) C_0 + (\lambda, 1) C_1 + \cdots + (\lambda, 2p-1) C_{2p-1}, \tag{10.}$$
$$(\lambda = 0, 1, \ldots, 2p-1)$$

da die Summe der Residuen einer rationalen Function von (z, s) gleich Null ist.

Sind die am Anfange dieser Nummer gemachten Voraussetzungen erfüllt, so wird $\frac{\partial^\mu J}{\partial k^\mu} \cdot \frac{\partial^\lambda s}{\partial k^\lambda}$ nur in $z = k$ unendlich. Es ist demnach

$$(\lambda, \mu) = \operatorname{Res} \frac{\partial^\lambda s}{\partial k^\lambda} \frac{\partial^\mu J}{\partial k^\mu} \text{ (für } z = k). \tag{9a.}$$

*) Vergl. hierüber Crelles Journal, Bd. 73, S. 328–329[1]); Humbert, Acta Mathematica, t. 10, p. 281; Appell et Goursat, a. a. O.

[1]) Abh. XIII, S. 348–349, Band I dieser Ausgabe. R. F.

612]

2.

Sei

$$\zeta_\lambda = \int \psi_\lambda \, dz \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p) \tag{1.}$$

ein System linear unabhängiger Integrale erster Gattung,

$$\zeta_{p+\lambda} = \int \chi_\lambda \, dz \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, p) \tag{1a.}$$

ein System von Integralen zweiter Gattung, von der Beschaffenheit, dass $\zeta_{p+\lambda}$ an der Stelle (a_λ, b_λ) unendlich wird wie $\frac{1}{z-a_\lambda}$, an allen übrigen Stellen aber endlich bleibt. Die Werthe (a_λ, b_λ) sind willkürlich und von einander unabhängig gewählt. Die Integrale $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2p}$ bilden alsdann ein Fundamentalsystem *).

Es ist daher

$$\frac{\partial^\varrho J}{\partial k^\varrho} = D_{\varrho 1}\zeta_1 + D_{\varrho 2}\zeta_2 + \cdots + D_{\varrho, 2p}\zeta_{2p} + \mathfrak{R}_\varrho, \tag{2.}$$

wo $D_{\varrho 1}, \ldots, D_{\varrho, 2p}$ von z unabhängig sind und $\mathfrak{R}_\varrho$ eine rationale Function von (z, s) ist.

Aus dieser Gleichung ergiebt sich

$$\frac{\partial^\varrho s}{\partial k^\varrho} = D_{\varrho 1}\psi_1 + \cdots + D_{\varrho p}\psi_p + D_{\varrho, p+1}\chi_1 + D_{\varrho, p+2}\chi_2 + \cdots + D_{\varrho, 2p}\chi_p + \frac{\partial \mathfrak{R}_\varrho}{\partial z}. \tag{2a.}$$

Setzen wir

$$\sum \operatorname{Res} \frac{\partial^\lambda s}{\partial k^\lambda}\zeta_m = R_{\lambda m}, \tag{3.}$$

so ergiebt sich aus (2.)

$$(\lambda, \mu) = D_{\mu 1} R_{\lambda 1} + \cdots + D_{\mu, 2p} R_{\lambda, 2p}. \tag{4.}$$

Es gilt daher für die Determinante

$$E = |(\lambda, \mu)| \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, 2p-1 \\ \mu = 1, 2, \ldots, 2p \end{pmatrix} \tag{5.}$$

die Gleichung

$$E = \delta\, |R_{\lambda m}|, \qquad \begin{pmatrix} \lambda = 0, 1, \ldots, 2p-1 \\ m = 1, 2, \ldots, 2p \end{pmatrix}. \tag{6.}$$

*) Vergl. die analoge Untersuchung in CRELLES Journal, Bd. 73, S. 327–328 [1]); vergl. auch APPELL et GOURSAT, a. a. O.

[1]) S. 347–348, Band I dieser Ausgabe. R. F.

wo $|R_{\lambda m}|$ die aus den Grössen $R_{\lambda m}$ gebildete Determinante und δ die Determinante

$$\delta = |D_{\alpha\beta}| \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, 2p-1 \\ \beta = 1, 2, \ldots, 2p \end{pmatrix} \tag{7.}$$

darstellt.

Nach Gleichung (2a.) ist [613

$$R_{\lambda m} = D_{\lambda 1} S_{m1} + D_{\lambda 2} S_{m2} + \cdots + D_{\lambda p} S_{mp} + D_{\lambda, p+1} T_{m1} + \cdots + D_{\lambda, 2p} T_{mp}, \tag{8.}$$

wo

$$\begin{cases} S_{m\nu} = \sum \operatorname{Res} \zeta_m \psi_\nu, \\ T_{m\nu} = \sum \operatorname{Res} \zeta_m \chi_\nu \end{cases} \tag{8a.}$$

gesetzt worden ist.

Nun ist für $m \leqq p$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\zeta_m \zeta_{p+\nu}) = \psi_m \zeta_{p+\nu} + \zeta_m \chi_\nu, \tag{9.}$$

also

$$\sum \operatorname{Res}(\zeta_m \chi_\nu) = -\sum \operatorname{Res}(\psi_m \zeta_{p+\nu}) = -\psi_m(a_\nu, b_\nu). \tag{9a.}$$

Demnach ist für $m \leqq p$

$$T_{m\nu} = -\psi_m(a_\nu, b_\nu). \tag{10.}$$

Da aber für $m = p + \mu$

$$S_{m\nu} = \psi_\nu(a_\mu, b_\mu) \tag{11.}$$

und für $m \leqq p$

$$S_{m\nu} = 0, \tag{12.}$$

so wird, wenn die Determinante

$$|\psi_\nu(a_\alpha, b_\alpha)| = \varepsilon \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, \ldots, p \\ \alpha = 1, \ldots, p \end{pmatrix} \tag{13.}$$

gesetzt wird,

$$E = \delta^2 \varepsilon^2. \tag{14.}$$

Die Determinante δ muss von Null verschieden sein, weil

$$J, \frac{\partial J}{\partial k}, \ldots, \frac{\partial^{2p-1} J}{\partial k^{2p-1}}$$

ein Fundamentalsystem ist (Satz Ia. voriger Nummer).

Die Determinante ε ist ebenfalls von Null verschieden, weil

$$\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p$$

linear unabhängige Integranden erster Gattung und

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_p, b_p)$$

willkürlich angenommene Stellen der Riemannschen Fläche sind.

Hieraus ergiebt sich

I. Die Determinante E des Gleichungssystemes (10.) No. 1 ist von Null verschieden.

614] Aus der Gleichung

$$\text{(15.)} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^\lambda J}{\partial k^\lambda}\,\frac{\partial^\mu J}{\partial k^\mu}\right] = \frac{\partial^\lambda J}{\partial k^\lambda}\,\frac{\partial^\mu s}{\partial k^\mu} + \frac{\partial^\lambda s}{\partial k^\lambda}\,\frac{\partial^\mu J}{\partial k^\mu}$$

folgt

$$\sum \mathrm{Res}\left(\frac{\partial^\lambda J}{\partial k^\lambda}\,\frac{\partial^\mu s}{\partial k^\mu}\right) = -\sum \mathrm{Res}\,\frac{\partial^\lambda s}{\partial k^\lambda}\,\frac{\partial^\mu J}{\partial k^\mu},$$

d. h.

$$\text{(16.)} \qquad (\mu, \lambda) = -(\lambda, \mu),$$

$$\text{(16a.)} \qquad (\lambda, \lambda) = 0.$$

Demnach erhalten wir den Satz:

II. Es ist E die Determinante eines alternirenden Systems von gerader Ordnung.

3.

Für die Berechnung der Grössen C aus den Gleichungen (10.) No. 1 sind noch folgende Bemerkungen von Wichtigkeit.

Aus der Gleichung

$$\text{(1.)} \qquad \frac{\partial}{\partial k}\,\mathrm{Res}\left(\frac{\partial^\lambda s}{\partial k^\lambda}\,\frac{\partial^\mu J}{\partial k^\mu}\right) = \mathrm{Res}\left[\frac{\partial^{\lambda+1} s}{\partial k^{\lambda+1}}\,\frac{\partial^\mu J}{\partial k^\mu} + \frac{\partial^\lambda s}{\partial k^\lambda}\,\frac{\partial^{\mu+1} J}{\partial k^{\mu+1}}\right]$$

folgt

$$\text{(2.)} \qquad \mathrm{D}_k(\lambda, \mu) = (\lambda+1, \mu) + (\lambda, \mu+1),$$

wo wir mit D_k^α die α^{te} Ableitung nach k bezeichnen.

Aus dieser folgern wir die Gleichung

$$\text{(3.)} \quad (q, \lambda) = \mathrm{D}_k^q(0, \lambda) - q_1\mathrm{D}_k^{q-1}(0, \lambda+1) + q_2\mathrm{D}_k^{q-2}(0, \lambda+2) - \cdots + (-1)^q q_q(0, \lambda+q),$$

wenn wir mit q_α den α^{ten} Binomialcoefficienten von q bezeichnen.

Es sind daher direct nur die Grössen $(0, \lambda)$ zu berechnen, während die Grössen (q, λ) sich vermittelst der Gleichungen (3.) aus denselben ergeben.

Wenn wir in den Gleichungen (8.) No. 1

$$\text{(4.)} \qquad \Omega = \frac{\partial^{2p} J}{\partial k^{2p}}$$

setzen und die zugehörigen Werthe $C_0, C_1, \ldots, C_{2p-1}$ bezw. mit

$$-\beta_0,\ -\beta_1,\ \ldots,\ -\beta_{2p-1}$$

bezeichnen, so ist

$$\text{(5.)} \qquad \frac{\partial^{2p} J}{\partial k^{2p}} + \beta_{2p-1}\frac{\partial^{2p-1} J}{\partial k^{2p-1}} + \cdots + \beta_0 J = \Re(z, s),$$ [615

wo $\Re(z, s)$ eine rationale Function von (z, s) bezeichnet.

Die Grössen $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2p-1}$ ergeben sich aus den Gleichungen (10.) No. 1, welche jetzt die Gestalt

$$\text{(6.)} \qquad (\lambda, 2p) + \beta_{2p-1}(\lambda, 2p-1) + \cdots + \beta_0(\lambda, 0) = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, 2p-1)$$

annehmen.

Ist Π irgend einer der Periodicitätsmoduln des Integrales J, so folgt aus Gleichung (5.):

$$\text{(7.)} \qquad \frac{\partial^{2p}\Pi}{\partial k^{2p}} + \beta_{2p-1}\frac{\partial^{2p-1}\Pi}{\partial k^{2p-1}} + \cdots + \beta_0\Pi = 0.$$

Diese Gleichung stellt also die Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln des Integrales erster Gattung J dar, wobei die Coefficienten β_m durch die Gleichung (6.) bestimmt werden. Die hier gegebene Herleitung dieser Differentialgleichung schliesst sich dem Verfahren an, welches ich früher*) für die hyperelliptischen Integrale ausgeführt habe.

4.

Eine zweite Methode zur Bestimmung der Coefficienten der Differentialgleichung (7.) voriger Nummer, welche wir jetzt entwickeln wollen, schliesst sich ebenfalls einem Verfahren an, welches ich früher**) für die Differential-

*) Crelles Journal, Bd. 71, S. 105–112 [1]).

**) Ebenda S. 112 ff. [2]).

[1]) Abh. VIII, S. 258—264, Band I dieser Ausgabe. R. F.

[2]) Ebenda S. 264 ff. R. F.

gleichungen der Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale benutzt habe.

Wir wollen der Einfachheit wegen die am Anfang der No. 1 gemachten Voraussetzungen festhalten. Alsdann ergiebt sich aus derselben Nummer, dass wir von z unabhängige Grössen

$$\beta_{2p},\ \beta_{2p-1},\ \ldots,\ \beta_0$$

so bestimmen können, dass

$$\beta_{2p}\frac{\partial^{2p} J}{\partial k^{2p}}+\beta_{2p-1}\frac{\partial^{2p-1} J}{\partial k^{2p-1}}+\cdots+\beta_0 J = \mathfrak{R}(z,s), \tag{1.}$$

wo $\mathfrak{R}(z,s)$ eine rationale Function von (z,s) *).

Die zweite Methode besteht in der directen Bestimmung von $\mathfrak{R}(z,s)$.

616] Diese Function muss nach Gleichung (1.) für die Verzweigungsstelle $z=k$ unendlich der Ordnung $4p-1$ werden, an allen übrigen Stellen der Riemannschen Fläche aber endlich bleiben. Bestimmen wir eine rationale Function $\mathfrak{R}(z,s)$ von dieser Eigenschaft, so enthält dieselbe noch

$$4p-1-p+1 = 3p$$

willkürliche homogen auftretende Constanten.

Aus Gleichung (1.) folgt ferner, dass $\mathfrak{R}(z,s)$ in seiner Entwickelung in der Umgebung von $z=k$ keine ganzzahligen negativen Potenzen enthalten darf, weil $\frac{\partial^\lambda J}{\partial k^\lambda}$ nur in den Verzweigungsstellen unendlich wird und in den in der Umgebung derselben gültigen Entwickelungen keine ganzzahligen negativen Potenzen enthält. Diese Bedingung liefert $2p-1$ lineare homogene Gleichungen zwischen den Constanten. Sei ferner der Integrand s des Integrales erster Gattung dadurch bestimmt, dass derselbe für die willkürlich angenommenen von k unabhängigen Stellen $(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_{p-1},b_{p-1})$ verschwindet, so muss auch $\frac{\partial\mathfrak{R}(z,s)}{\partial z}$ für dieselben Stellen verschwinden. Diese Bedingung ergiebt $p-1$ neue lineare homogene Gleichungen zwischen den Constanten. Die Gesammtzahl der Bedingungsgleichungen ist also $3p-2$.

*) Vergl. auch Crelles Journal, Bd. 73, S. 328–329 [1]).

[1]) Abh. XIII, S. 347–349, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Es bleiben daher von den $3p$ Constanten noch zwei übrig. Hiervon ist eine additiv.

Daher ist $\frac{\partial\mathfrak{R}(z,s)}{\partial z}$ bis auf eine willkürliche multiplicative Constante bestimmt.

Aus der Gleichung (1.) ergiebt sich

$$\beta_{2p}\frac{\partial^{2p} s}{\partial k^{2p}}+\beta_{2p-1}\frac{\partial^{2p-1} s}{\partial k^{2p-1}}+\cdots+\beta_0 s = \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{R}(z,s). \tag{2.}$$

Durch Vergleichung der Entwickelungscoefficienten in der Umgebung irgend einer Stelle ergeben sich alsdann die Verhältnisse der Grössen $\frac{\beta_m}{\beta_n}$. Am geeignetsten hierzu erscheint die Entwickelung in der Umgebung von $z=k$ *).

Wird die Gleichung (2.) längs irgend eines Querschnittes integrirt und der zugehörige Periodicitätsmodul mit Π bezeichnet, so ist wieder

$$\beta_{2p}\frac{\partial^{2p}\Pi}{\partial k^{2p}}+\beta_{2p-1}\frac{\partial^{2p-1}\Pi}{\partial k^{2p-1}}+\cdots+\beta_0\Pi = 0. \tag{3.}$$

Diese Gleichung ist also die Differentialgleichung, welcher [617 die Periodicitätsmoduln der Abelschen Integrale erster Gattung genügen.

5.

Eine dritte Methode zur Bestimmung der Differentialgleichungen der Periodicitätsmoduln, welche wir hier noch geben wollen, zeichnet sich vor den beiden Vorhergehenden dadurch aus, dass wir die beschränkenden Voraussetzungen, die wir am Anfange der No. 1 gemacht, fallen lassen können. Ferner können wir als unabhängige Variable, von der wir die Periodicitätsmoduln abhängen lassen, nicht bloss einen Verzweigungspunkt der Riemannschen Fläche, sondern einen beliebigen Parameter wählen, welcher in den Coefficienten der zwischen z und s bestehenden Gleichung auftritt und von welchem die hierzu gehörige Klasse algebraischer Functionen wesentlich abhängt.

Sei wiederum s ein Integrand erster Gattung und die Gleichung zwischen z und s

*) Vergl. Crelles Journal, Bd. 71, S. 112 ff. [1]).

[1]) Abh. VIII, S. 264 ff., Band I dieser Ausgabe. R. F.

$$(1.)\qquad F(z, \overset{\mu}{s}) = 0$$

vom Grade μ in s.

Sei ξ ein wesentlich in den Coefficienten dieser Gleichung enthaltener Parameter, so ist

$$(2.)\qquad \frac{\partial s}{\partial z} = \alpha_0 + \alpha_1 s + \cdots + \alpha_{\mu-1} s^{\mu-1},$$

$$(3.)\qquad \frac{\partial s}{\partial \xi} = \beta_0 + \beta_1 s + \cdots + \beta_{\mu-1} s^{\mu-1},$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\mu-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{\mu-1}$ rationale Functionen von z bedeuten, welche auf bekannte Weise hergestellt werden können.

Durch wiederholte Differentiation der Gleichung (2.) nach z und Anwendung derselben Gleichung, sowie durch Reduction der höheren Potenzen vermittelst der Gleichung (1.) ergiebt sich

$$(4.)\qquad \frac{\partial^\lambda s}{\partial z^\lambda} = \alpha_{\lambda 0} + \alpha_{\lambda 1} s + \cdots + \alpha_{\lambda,\mu-1} s^{\mu-1},$$

wo $\alpha_{\lambda 0}, \alpha_{\lambda 1}, \ldots, \alpha_{\lambda,\mu-1}$ rationale Functionen von z sind.

Ebenso ergiebt sich durch Differentiation der Gleichung (3.) nach ξ

$$(5.)\qquad \frac{\partial^l s}{\partial \xi^l} = \beta_{l0} + \beta_{l1} s + \cdots + \beta_{l,\mu-1} s^{\mu-1},$$

wo $\beta_{l0}, \beta_{l1}, \ldots, \beta_{l,\mu-1}$ rationale Functionen von z sind.

618] Wählen wir in (4.) $\lambda = 1, 2, \ldots, \mu-1$, so können wir aus diesem System von $\mu-1$ Gleichungen und aus Gleichung (5.) die Grössen $s^0, s^2, s^3, \ldots, s^{\mu-1}$ eliminiren und erhalten demgemäss

$$(6.)\qquad \frac{\partial^l s}{\partial \xi^l} = M_{l0} s + M_{l1} \frac{\partial s}{\partial z} + \cdots + M_{l,\mu-1} \frac{\partial^{\mu-1} s}{\partial z^{\mu-1}},$$

wo $M_{l0}, M_{l1}, \ldots, M_{l,\mu-1}$ rationale Functionen von z sind.

Es ist wohl zu beachten, dass es nicht nöthig ist, dass in Gleichung (6.) die Ableitungen nach z auch wirklich bis zur $(\mu-1)^{\text{ten}}$ ansteigen.

Nun ist

$$M_{l\alpha} \frac{\partial^\alpha s}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z}\left[M_{l\alpha} \frac{\partial^{\alpha-1} s}{\partial z^{\alpha-1}}\right] - \frac{\partial}{\partial z}\left[M'_{l\alpha} \frac{\partial^{\alpha-2} s}{\partial z^{\alpha-2}}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[M^{(2)}_{l\alpha} \frac{\partial^{\alpha-3} s}{\partial z^{\alpha-3}}\right] - \cdots \mp \frac{\partial}{\partial z}\left[M^{(\alpha-1)}_{l\alpha} \frac{\partial s}{\partial z}\right] \pm M^{(\alpha)}_{l\alpha} s$$

oder

$$(7.)\qquad M_{l\alpha} \frac{\partial^\alpha s}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z}\left[M_{l\alpha} \frac{\partial^{\alpha-1} s}{\partial z^{\alpha-1}} - M'_{l\alpha} \frac{\partial^{\alpha-2} s}{\partial z^{\alpha-2}} + M^{(2)}_{l\alpha} \frac{\partial^{\alpha-3} s}{\partial z^{\alpha-3}} - \cdots \mp M^{(\alpha-1)}_{l\alpha} \frac{\partial s}{\partial z}\right] \pm M^{(\alpha)}_{l\alpha} s,$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem α eine gerade oder ungerade Zahl ist, und wo durch die oberen Accente Ableitungen nach z angedeutet werden.

Wir erhalten also aus Gleichung (6.)

$$(8.)\qquad \frac{\partial^l s}{\partial \xi^l} \equiv [M_{l0} - M'_{l1} + M^{(2)}_{l2} - \cdots \pm M^{(\mu-1)}_{l,\mu-1}]\, s,$$

wenn wir mit dem Zeichen $\equiv$ die Gleichheit bis auf die Ableitungen rationaler Functionen von (z, s) nach der Variablen z bezeichnen.

Es giebt aber ausnahmslos von z unabhängige Grössen

$$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2p}$$

von der Beschaffenheit, dass

$$(9.)\qquad \beta_0 s + \beta_1 \frac{\partial s}{\partial \xi} + \cdots + \beta_{2p} \frac{\partial^{2p} s}{\partial \xi^{2p}} = \frac{\partial}{\partial z} \mathfrak{R}(z, s),$$

wo $\mathfrak{R}(z, s)$ eine rationale Function von (z, s).

Wenn wir also

$$(10.)\qquad P_l = M_{l0} - M'_{l1} + M^{(2)}_{l2} - \cdots \pm M^{(\mu-1)}_{l,\mu-1}$$

setzen, so muss

$$(11.)\qquad S = [\beta_0 P_0 + \beta_1 P_1 + \cdots + \beta_{2p} P_{2p}]\, s$$

der Differentialquotient einer rationalen Function von (z, s) [619 sein.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine rationale Function $G(z, s)$ von (z, s) der Differentialquotient einer rationalen Function von (z, s) ist, sind die folgenden*):

1. Die Residuen von $G(z, s)$ sind sämmtlich Null.

2. Ist $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2p}$ irgend ein Fundamentalsystem von Abelschen Integralen, so besteht die Gleichung

$$\sum \operatorname{Res} \zeta_m G(z, s) = 0. \qquad (m = 1, 2, \ldots, 2p)$$

Die Bedingungen unter 1. sind für $G(z, s) = S$ von selbst erfüllt. Denn da $\frac{\partial^l s}{\partial \xi^l}$ nur da unendlich ist, wo s unendlich wird, also nur in den Ver-

*) Vergl. Humbert, a. a. O.

zweigungsstellen, und in den für die Umgebung derselben gültigen Entwickelungen negative Potenzen nur mit gebrochenen Exponenten enthält, und weil die Residuen der Ableitungen rationaler Functionen von (z, s) verschwinden müssen, so ergiebt die Congruenz

$$\frac{\partial^l s}{\partial \xi^l} \equiv P_l s, \qquad \text{[Gl. (8.)]}$$

dass auch die Residuen von $P_l s$, folglich auch die von S verschwinden.

Es verbleiben also nur die Bedingungsgleichungen

$$(12.) \qquad \sum \mathrm{Res}\, S\zeta_m = \sum \mathrm{Res}\,[\beta_0 P_0 + \cdots + \beta_{2p} P_{2p}]\, s\zeta_m = 0, \quad (m = 1, 2, \ldots, 2p)$$

welche $2p$ lineare homogene Gleichungen für die $2p+1$ Unbekannten $\beta_0, \ldots, \beta_{2p}$ liefern.

Nachdem wir die Verhältnisse der Grössen β aus diesen Gleichungen bestimmt haben, ergiebt die Integration der Gleichung (9.) über einen beliebigen Querschnitt die Differentialgleichung

$$(\text{II.}) \qquad \beta_0 \Pi + \beta_0 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + \cdots + \beta_{2p-1} \frac{\partial^{2p} \Pi}{\partial \xi^{2p}} = 0$$

der Periodicitätsmoduln der Abelschen Integrale erster Gattung als Functionen von ξ.

6.

Die Ordnung der Differentialgleichung (II.) der Periodicitätsmoduln von J kann niedriger als $2p$ sein. Wenn nämlich schon $\mu+1\,(\mu < 2p)$ von z unabhängige Grössen $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\mu$ sich so bestimmen lassen, dass

620] $$(1.) \qquad S_\mu = (\beta_0 P_0 + \beta_1 P_1 + \cdots + \beta_\mu P_\mu)\, s = \frac{\partial}{\partial z} \mathfrak{R}(z, s),$$

wo $\mathfrak{R}(z, s)$ eine rationale Function von (z, s) ist, alsdann ist auch

$$(2.) \qquad \beta_0 s + \beta_1 \frac{\partial s}{\partial \xi} + \cdots + \beta_\mu \frac{\partial^\mu s}{\partial \xi^\mu} = \frac{\partial}{\partial z} \mathfrak{R}(z, s),$$

wo $\mathfrak{R}(z, s)$ eine rationale Function von (z, s). Die Integration der Gleichung (2.) über einen beliebigen Querschnitt ergiebt also die Differentialgleichung

$$(3.) \qquad \beta_0 \Pi + \beta_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + \cdots + \beta_\mu \frac{\partial^\mu \Pi}{\partial \xi^\mu} = 0$$

von der μ^{ten} Ordnung für die Periodicitätsmoduln der Integrale J als Functionen von ξ.

Da aus der Gleichung (3.) sich ergiebt, dass die Periodicitätsmoduln von

$$\beta_0 J + \beta_1 \frac{\partial J}{\partial \xi} + \cdots + \beta_\mu \frac{\partial^\mu J}{\partial \xi^\mu}$$

sämmtlich verschwinden, so ist

$$(4.) \qquad \beta_0 J + \beta_1 \frac{\partial J}{\partial \xi} + \cdots + \beta_\mu \frac{\partial^\mu J}{\partial \xi^\mu} = \mathfrak{R}_1(z, s),$$

wo $\mathfrak{R}_1(z, s)$ eine rationale Function von (z, s).

I. Es ist also das System der Functionen $J, \frac{\partial J}{\partial \xi}, \cdots, \frac{\partial^{2p-1} J}{\partial \xi^{2p-1}}$ dann und nur dann ein Fundamentalsystem, wenn die niedrigste Ordnung der Differentialgleichung (3.) $\mu = 2p$, d. h. wenn die Gleichung (1.) für nicht weniger als $\mu+1 = 2p+1$ von z unabhängige Grössen $\beta_0, \ldots, \beta_{2p}$ erfüllbar ist.

In dem Falle, dass $J, \frac{\partial J}{\partial \xi}, \cdots, \frac{\partial^{2p-1} J}{\partial \xi^{2p-1}}$ ein Fundamentalsystem darstellt, folgt wie in No. 1 Gleichung (8.) für die unabhängige Variable k, dass für ein beliebiges Integral Ω, welches nicht logarithmisch unendlich wird,

$$(5.) \qquad \Omega = C_0 J + C_1 \frac{\partial J}{\partial \xi} + \cdots + C_{2p-1} \frac{\partial^{2p-1} J}{\partial \xi^{2p-1}} + \mathfrak{R}(z, s),$$

wo die Coefficienten C ähnlich wie dort durch die Gleichungen

$$(6.) \qquad \sum \mathrm{Res}\left(\frac{\partial^\lambda s}{\partial \xi^\lambda}\,\Omega\right) = (\lambda, 0)\, C_0 + (\lambda, 1)\, C_1 + \cdots + (\lambda, 2p-1)\, C_{2p-1}$$
$$(\lambda = 0, 1, \ldots, 2p-1)$$

bestimmt werden, worin

$$(7.) \qquad (\lambda, \mu) = \sum \mathrm{Res}\, \frac{\partial^\mu J}{\partial \xi^\mu}\, \frac{\partial^\lambda s}{\partial \xi^\lambda}$$

gesetzt ist.

Wenn die Integration in (5.) über einen beliebigen Querschnitt erfolgt, so ergiebt sich: [621

$$(8.) \qquad T = C_0 \Pi + C_1 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} + \cdots + C_{2p-1} \frac{\partial^{2p-1} \Pi}{\partial \xi^{2p-1}},$$

wo T jedesmal den mit Π correspondirenden Periodicitätsmodul des Integrales Ω bezeichnet.

Hieraus folgt in Übereinstimmung mit früheren Resultaten*):

II. Enthält $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ die Grösse ξ in demselben Rationalitätsbereich wie $\frac{\partial J}{\partial z}$, so drückt die Gleichung (8.) aus, dass T mit Π zu derselben Klasse der in Bezug auf die Variable ξ gebildeten linearen homogenen Differentialgleichungen gehört.

Ist z. B. η ein von ξ unabhängiger wesentlicher Parameter in den Coefficienten der die algebraische Function s von z bestimmenden Gleichung

$$F(z, s) = 0, \tag{9.}$$

und ist

$$\Omega = \int \frac{ds}{d\eta} dz = \frac{\partial J}{\partial \eta}, \tag{10.}$$

alsdann ist

$$T = \frac{\partial \Pi}{\partial \eta}. \tag{11.}$$

Demnach folgt aus Gleichung (8.)**):

III. Die zur Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln der Integrale J gehörige Substitutionsgruppe ändert sich nicht stetig mit η.

---

*) Crelles Journal, Bd. 71, S. 91; Bd. 73, S. 330. Diese Berichte 1888, S. 1275[1]).

**) Diese Berichte 1888, S. 1278[2]).

---

1) Abh. VIII, S. 241, Abh. XIII, S. 349, Band I dieser Ausgabe und Abh. LIV, S. 17 dieses Bandes. R. F.

2) S. 21 dieses Bandes. R. F.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

S. 249, Zeile 4 des Textes wurde »auftretenden Parametern« hinzugefügt,

„ 254, Gleichung (5.) $\mu = 1, 2, \ldots, 2p$ statt $\mu = 0, 1, \ldots, 2p$,

„ 256 wurde in den Gleichungen (2.) und (3.) statt des Derivationszeichens D bezw. D^{i} das Zeichen D bezw. D_{k}^{q} gesetzt,

„ 257, Zeile 11, Gleichungen (10.) No. 1 statt Gleichungen (11.) No. 1,

„ „ 8 v. u. wobei die statt deren,

„ „ 7 v. u. dieser Differentialgleichung statt derselben,

„ 258, „ 1 benutzt statt eingeschlagen,

„ 259, „ 8 v. u. von der statt wovon,

„ 262, „ 1 wurde »in der« vor »Umgebung« gestrichen,

„ „ 3 v. u. wurde »eine« eingefügt und »der Gleichung (2.)« statt derselben gesetzt,

„ 263, Gleichung (5.) C_{2p-1} statt C_{2p}.

R. F.

LXIX.

ZUR THEORIE DER SIMULTANEN LINEAREN PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1898, XVI, S. 222—233; vorgelegt am 17. März; ausgegeben am 24. März 1898.)

Die gegenwärtige Notiz knüpft an die Untersuchungen an, welche [222 ich seit dem Jahre 1888 in verschiedenen Mittheilungen der Sitzungsberichte*) veröffentlicht habe. Der Ausgangspunkt unserer Untersuchung ist hier von dem früher eingenommenen dadurch verschieden, dass ich weder über die Natur der Coefficienten der vorgelegten Differentialgleichung, noch über die analytische Bedeutung der Coefficienten in dem Ausdrucke der Ableitung der Integralfunction nach einem Parameter etwas voraussetze. Hiernach beschäftigen wir uns mit einer Klasse von zwei simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen. An die Stelle der associirten Differentialgleichung (H.)**) tritt eine allgemeinere Klasse von Differentialgleichungen, von welchen die erstere ein besonderer Fall ist. Die im Folgenden ausgeführten Entwickelungen bilden die Grundlage für die analytische Untersuchung der Integrale einer linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten von einem Parameter abhängen in **allen** Fällen, sobald besondere Voraussetzungen über die Coefficienten gemacht sind. Sie gestatten

*) 1888, S. 1115, 1273; 1889, S. 713; 1890, S. 21; 1892, S. 157; 1893, S. 975; 1894, S. 1117[1]).
**) Sitzungsberichte 1888, S. 1118[2]).

[1]) Abh. LIV S. 1, LIX S. 117, LXII S. 169 dieses Bandes. R. F.
[2]) S. 5 dieses Bandes. R. F.

nicht nur, früher gewonnene Resultate von einem neuen Gesichtspunkte aus herzuleiten, sondern sie geben auch Gelegenheit zu weiteren Resultaten, wie ich in einer späteren Mittheilung zeigen zu können hoffe.

Es möge bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, dass sich in der Mittheilung in den Sitzungsberichten 1888, S. 1284, Gleichung (15.) bis (21.)[1]) ein Rechenfehler eingeschlichen hat, welcher den dort gegebenen Beweis beeinträchtigt.

1.

Es seien $P(y)$, $M(y)$ zwei lineare homogene Differentialausdrücke, deren 223] Coefficienten Functionen von x, von der Beschaffenheit sind, dass $M(y)P(y)$ für eine willkürliche Function y von x ein vollständiger Differentialquotient werde. Seien $P'(y)$, $M'(y)$ die zu $P(y)$, $M(y)$ bezüglich adjungirten Differentialausdrücke, so ergiebt sich aus den Entwickelungen (Sitzungsberichte 1888, S. 1273—74[2])), dass auch

$$yP'(M(y))$$

ein vollständiger Differentialquotient werden muss, wofür die Identität

$$P'(M(y)) + M'(P(y)) = 0 \tag{1.}$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung ist.

Aus derselben folgt, dass für eine Lösung y der Gleichung

$$P(y) = 0 \tag{2.}$$

der Ausdruck $M(y)$ der adjungirten Differentialgleichung genügt.

Die Gleichung (1.) ist nur erfüllbar, wenn die Summe der Ordnungszahlen von $P(y)$ und $M(y)$ eine ungerade Zahl ist.

Setzen wir

$$P(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y, \tag{A.}$$

wo $y^{(\lambda)}$ die λ^{te} Ableitung nach x bedeuten soll, und

$$M(y) = 2[R_{n-1,n-1} y^{(n-1)} + \cdots + R_{n-1,0} y], \tag{B.}$$

so muss demnach die Ordnungszahl der höchsten nicht verschwindenden Ableitung in $M(y)$ die Form haben $n-1-2\varkappa$, wo $\varkappa$ Null oder eine ganze positive Zahl bedeutet.

1) Abh. LIV, S. 27—28 dieses Bandes; vgl. die Anmerkung 4) S. 71 dieses Bandes. R. F.

2) Abh. LIV, S. 15—16 dieses Bandes. R. F.

Sei

$$Z = \int M(y)P(y)\,dx = \int yP'(M(y))\,dx + B(y, M(y)) = \sum_{0}^{n-1}{}_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} y^{(\alpha)} y^{(\beta)}, \tag{C.}$$
$$R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha},$$

wo $B(u, v)$ einen bilinearen Ausdruck von u, v bedeutet, dessen Coefficienten sich rational aus den Coefficienten von $P(y)$ und ihren Ableitungen zusammensetzen (vergl. Sitzungsberichte 1888, S. 1273[1])), und wo $R_{\alpha\beta}$ solche Functionen von x sind, dass die Gleichung

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = M(y)P(y) \tag{D.}$$

für jede Function y von x befriedigt wird. Aus (D.) ergiebt sich zur Bestimmung der $R_{\alpha\beta}$ das System von Differentialgleichungen

$$\frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial x} = -R_{\alpha,\beta-1} - R_{\alpha-1,\beta} + R_{n-1,\alpha} p_{n-\beta} + R_{n-1,\beta} p_{n-\alpha}, \quad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \tag{E.}$$

wo die R mit einem negativen Index durch Null zu ersetzen sind.

Aus Gleichung (C.) ergiebt sich der folgende Satz: [224

Sind die Coefficienten von $P(y)$ algebraische (rationale) Functionen von x und sind von einem Lösungssysteme $R_{\alpha\beta}$ der Gleichungen (E.) die Elemente $R_{n-1,\beta}$ ebenfalls algebraische (rationale) Functionen von x, so sind auch die übrigen Elemente algebraische (rationale) Functionen von x.

2.

Wir wollen nunmehr voraussetzen, dass die Coefficienten p_α in $P(y)$ ausser von x noch von einer anderen Variablen t abhängen.

Wir differentiiren die Gleichung

$$P(y) = 0 \tag{1.}$$

nach t und erhalten, wie in den Sitzungsberichten 1888, S. 1281[2])

$$P\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial t} y^{(n-1)} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial t} y = 0. \tag{2.}$$

1) Ebenda S. 15 dieses Bandes. R. F.

2) Ebenda S. 24 dieses Bandes. R. F.

Wir setzen jetzt

$$(3.)\qquad \frac{\partial y}{\partial t} = D_{00}\,y + D_{01}\,y' + \cdots + D_{0,n-1}\,y^{(n-1)}.$$

Die Differentiation dieser Gleichung nach x ergebe nach Reduction der Ableitungen von y höherer Ordnung als $n-1$ durch die niedrigerer Ordnung vermittelst der Gleichung (1.)

$$(4.)\qquad \frac{\partial y^{(\alpha)}}{\partial t} = D_{\alpha 0}\,y + \cdots + D_{\alpha,n-1}\,y^{(n-1)}.$$

Substituiren wir die Ausdrücke (3.), (4.) in Gleichung (2.) und fordern, dass das Resultat in Bezug auf $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ eine Identität werde, so ergiebt sich das folgende System von Differentialgleichungen für die Functionen $D_{\alpha\beta}$

$$(\text{F.})\qquad \frac{\partial D_{\alpha\beta}}{\partial x} = D_{\alpha+1,\beta} - D_{\alpha,\beta-1} + p_{n-\beta}\,D_{\alpha,n-1}, \qquad (\text{für } \alpha \leqq n-2)$$

$$(\text{F}'.)\qquad \frac{\partial D_{n-1,\beta}}{\partial x} = -D_{n-1,\beta-1} + p_{n-\beta}\,D_{n-1,n-1} - \sum_{1}^{n}{}_{l}\, p_l\, D_{n-l,\beta} - \frac{\partial p_{n-\beta}}{\partial t},$$

wo die Grössen $D_{\alpha\beta}$ mit einem negativen Index durch Null zu ersetzen sind.

3.

Setzen wir

$$(\text{G.})\qquad W_{\alpha\beta} = \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial t} + \sum_{0}^{n-1}{}_{\varkappa}\,[R_{\varkappa\beta}\,D_{\varkappa\alpha} + R_{\varkappa\alpha}\,D_{\varkappa\beta}],$$

225] so folgt zunächst aus $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$

$$(1.)\qquad W_{\alpha\beta} = W_{\beta\alpha}.$$

Aus den Gleichungen (E.) ergiebt sich:

$$(2.)\qquad \frac{\partial^2 R_{\alpha\beta}}{\partial x\,\partial t} = -\frac{\partial R_{\alpha,\beta-1}}{\partial t} - \frac{\partial R_{\alpha-1,\beta}}{\partial t} + p_{n-\beta}\frac{\partial R_{n-1,\alpha}}{\partial t} + p_{n-\alpha}\frac{\partial R_{n-1,\beta}}{\partial t}$$
$$+ R_{n-1,\alpha}\frac{\partial p_{n-\beta}}{\partial t} + R_{n-1,\beta}\frac{\partial p_{n-\alpha}}{\partial t}.$$

Ferner folgt aus (E.), (F.), (F$'$.)

$$(3.)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\sum_{0}^{n-1}{}_{\varkappa}\,[R_{\varkappa\beta}\,D_{\varkappa\alpha} + R_{\varkappa\alpha}\,D_{\varkappa\beta}] = -\left(W_{\alpha,\beta-1} - \frac{\partial R_{\alpha,\beta-1}}{\partial t}\right)$$
$$-\left(W_{\alpha-1,\beta} - \frac{\partial R_{\alpha-1,\beta}}{\partial t}\right) + p_{n-\alpha}\left(W_{n-1,\beta} - \frac{\partial R_{n-1,\beta}}{\partial t}\right)$$
$$+ p_{n-\beta}\left(W_{\alpha,n-1} - \frac{\partial R_{\alpha,n-1}}{\partial t}\right) - R_{n-1,\alpha}\frac{\partial p_{n-\beta}}{\partial t} - R_{n-1,\beta}\frac{\partial p_{n-\alpha}}{\partial t}.$$

Aus (1.) und (2.) folgt demnach

$$(\text{H.})\quad \frac{\partial W_{\alpha\beta}}{\partial x} = -W_{\alpha,\beta-1} - W_{\alpha-1,\beta} + p_{n-\alpha}\,W_{n-1,\beta} + p_{n-\beta}\,W_{\alpha,n-1}, \quad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, \ldots, n-1\\ \beta = 0, 1, \ldots, n-1\end{pmatrix}$$

welches System mit (E.) übereinstimmt.

I. Es genügen also die Functionen $W_{\alpha\beta}$ demjenigen Systeme von Differentialgleichungen in Bezug auf die Variable x, welches von den Functionen $R_{\alpha\beta}$ befriedigt wird.

Bezeichnen wir daher ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichungen (E.) mit $R^{(1)}_{\alpha\beta}, R^{(2)}_{\alpha\beta}, \ldots, R^{(\nu)}_{\alpha\beta}$, wo

$$(4.)\qquad \nu = \frac{n(n+1)}{2},$$

und

$$R^{(i)}_{\alpha\beta} = R^{(i)}_{\beta\alpha}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, \ldots, n-1\\ \beta = 0. 1, \ldots, n-1\\ i = 1, 2, \ldots, \nu\end{pmatrix}$$

so ist

$$(\text{J.})\qquad W_{\alpha\beta} = c_1\,R^{(1)}_{\alpha\beta} + \cdots + c_\nu\,R^{(\nu)}_{\alpha\beta}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, \ldots, n-1\\ \beta = 0, 1, \ldots, n-1\end{pmatrix}$$

worin die Grössen $c_\varkappa$ von x unabhängig sind. Diese Grössen behalten für alle Combinationen von α, β denselben Werth, haben aber im Allgemeinen verschiedene Werthe für die verschiedenen Lösungen $D_{\alpha\beta}$ des Gleichungssystems (F.), (F$'$.) und für die verschiedenen Lösungen $R_{\alpha\beta}$ des Gleichungssystems (E.) im Ausdrucke von $W_{\alpha\beta}$ in Gleichung (G.).

4. [226

Ehe wir unseren Gegenstand weiter verfolgen, schalten wir folgende Digression über Systeme von linearen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen ein.

Sei

$$(1.)\qquad \frac{\partial z_i}{\partial x} = a_{i1}\,z_1 + a_{i2}\,z_2 + \cdots + a_{in}\,z_n. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Es soll festgestellt werden, wann ein Fundamentalsystem von Integralen dieses Systems gleichzeitig das System

$$(2.)\qquad \frac{\partial z_i}{\partial t} = b_{i1}\,z_1 + b_{i2}\,z_2 + \cdots + b_{in}\,z_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigt.

Hierzu ist zunächst die nothwendige Bedingung, dass die Gleichungen

$$(3.)\qquad \frac{\partial a_{\varkappa\lambda}}{\partial t}+\sum_1^n{}_i\, a_{\varkappa i}b_{i\lambda} = \frac{\partial b_{\varkappa\lambda}}{\partial x}+\sum_1^n{}_i\, b_{\varkappa i}a_{i\lambda} \qquad \binom{\varkappa=1,\dots,n}{\lambda=1,\dots,n}$$

identisch erfüllt sind.

Ist

$$z_{1i},\ z_{2i},\ \dots,\ z_{ni} \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

ein Fundamentalsystem von (1.), so soll (2.) befriedigt werden durch

$$(4.)\qquad z_i = c_1 z_{1i}+c_2 z_{2i}+\cdots+c_n z_{ni}, \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

wo die $c_1, c_2, \dots, c_n$ Functionen bloss von t sind. Substituiren wir die Ausdrücke (4.) in (2.), so erhalten wir

$$(5.)\qquad \frac{\partial c_1}{\partial t} z_{1\lambda}+\cdots+\frac{\partial c_n}{\partial t} z_{n\lambda} = c_1 P_{1\lambda}+\cdots+c_n P_{n\lambda},$$

wo

$$(6.)\qquad P_{\mu\lambda} = b_{\lambda 1} z_{\mu 1}+\cdots+b_{\lambda n} z_{\mu n}-\frac{\partial z_{\mu\lambda}}{\partial t}. \qquad (\lambda,\mu=1,2,\dots,n)$$

Es ist

$$(7.)\qquad \frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x} = \sum_1^n{}_i\left[\frac{\partial b_{\lambda i}}{\partial x}+b_{\lambda 1}a_{1i}+\cdots+b_{\lambda n}a_{ni}\right]z_{\mu i}-\frac{\partial^2 z_{\mu\lambda}}{\partial x\,\partial t},$$

oder nach (3.)

$$(8.)\qquad \frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x} = \sum_1^n{}_i\left[\frac{\partial a_{\lambda i}}{\partial t}+a_{\lambda 1}b_{1i}+\cdots+a_{\lambda n}b_{ni}\right]z_{\mu i}-\frac{\partial^2 z_{\mu\lambda}}{\partial x\,\partial t}.$$

Hieraus folgt

$$(9.)\qquad \frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x} = a_{\lambda 1}P_{\mu 1}+a_{\lambda 2}P_{\mu 2}+\cdots+a_{\lambda n}P_{\mu n}.$$

Aus (9.) folgt

$$(10.)\qquad P_{\mu\lambda} = \gamma_{1\mu} z_{1\lambda}+\cdots+\gamma_{n\mu} z_{n\lambda},$$

227] wo $\gamma_{\varkappa\mu}$ von x unabhängig. Substituiren wir die Ausdrücke (10.) in (5.), so kommt

$$(11.)\qquad \frac{\partial c_1}{\partial t} z_{1\lambda}+\cdots+\frac{\partial c_n}{\partial t} z_{n\lambda} = \sum_1^n{}_\varkappa\, c_\varkappa[\gamma_{1\varkappa} z_{1\lambda}+\cdots+\gamma_{n\varkappa} z_{n\lambda}].$$

Hieraus folgt

$$(12.)\qquad \frac{\partial c_\mu}{\partial t} = c_1\gamma_{\mu 1}+c_2\gamma_{\mu 2}+\cdots+c_n\gamma_{\mu n}.$$

Aus diesen Gleichungen bestimmen sich $c_1, c_2, \dots, c_n$ als Functionen von t.

Ist

$$\varepsilon_{1i},\ \varepsilon_{2i},\ \dots,\ \varepsilon_{ni} \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen von (12.), so ist

$$(13.)\qquad c_i = \delta_1\varepsilon_{1i}+\cdots+\delta_n\varepsilon_{ni}, \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

wo $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ willkürliche von x und t unabhängige Grössen bedeuten.

Es genügen demnach

$$(14.)\qquad z_i = \delta_1 w_{1i}+\cdots+\delta_n w_{ni}, \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

wo

$$(15.)\qquad w_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha 1} z_{1\beta}+\cdots+\varepsilon_{\alpha n} z_{n\beta},$$

den beiden Systemen (1.) und (2.) für beliebige von x und t unabhängige Werthe von $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$.

5.

Sei eine bestimmte Particularlösung $D^{(0)}_{\alpha\beta}$ von (F.), (F′.) gegeben, so ist jede Lösung des Systems (F.), (F′.) in der Form

$$(1.)\qquad D_{\alpha\beta} = D^{(0)}_{\alpha\beta}+E_{\alpha\beta}$$

enthalten, wo die Grössen $E_{\alpha\beta}$ durch das Gleichungssystem

$$(\mathrm{K.})\qquad \frac{\partial E_{\alpha\beta}}{\partial x} = E_{\alpha+1,\beta}-E_{\alpha,\beta-1}+p_{n-\beta}E_{\alpha,n-1}, \qquad (\alpha=0,1,\dots,n-2)$$

$$(\mathrm{K'.})\qquad \frac{\partial E_{n-1,\beta}}{\partial x} = -E_{n-1,\beta-1}+E_{n-1,n-1}p_{n-\beta}-\sum_1^n{}_l\, p_l E_{n-l,\beta}$$

bestimmt werden.

Sei nunmehr vorausgesetzt, dass eine Lösung $R_{\alpha\beta}$ des Systems (E.) der Gleichung

$$(\mathrm{L.})\qquad W^{(0)}_{\alpha\beta} = \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial t}+\sum_0^{n-1}{}_\varkappa[R_{\varkappa\beta}D^{(0)}_{\varkappa\alpha}+R_{\varkappa\alpha}D^{(0)}_{\varkappa\beta}] = 0$$

Genüge leistet. Dass solche Lösungen $R_{\alpha\beta}$ vorhanden sind, ergiebt sich [228 daraus, dass für die Systeme (E.) und (L.) die Bedingungen der Integrabilität, Gleichungen (3.) voriger Nummer, erfüllt sind.

Sei $E^{(1)}_{\alpha\beta}, E^{(2)}_{\alpha\beta}, \dots, E^{(n^2)}_{\alpha\beta}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen des Systems (K.), (K′.), so ist nach No. 3 Gleichung (J.)

$$\text{(2.)} \qquad \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial t} + \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} [R_{\varkappa\beta}(E^{(\lambda)}_{\varkappa\alpha} + D^{(0)}_{\varkappa\alpha}) + R_{\varkappa\alpha}(E^{(\lambda)}_{\varkappa\beta} + D^{(0)}_{\varkappa\beta})] = c_{\lambda 1} R^{(1)}_{\alpha\beta} + \cdots + c_{\lambda\nu} R^{(\nu)}_{\alpha\beta},$$

wo $c_{\lambda\varkappa}$ von x unabhängige Grössen bedeuten. Aus dieser Gleichung folgt wegen (L.)

$$\text{(M.)} \qquad \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} [R_{\varkappa\beta} E^{(\lambda)}_{\varkappa\alpha} + R_{\varkappa\alpha} E^{(\lambda)}_{\varkappa\beta}] = c_{\lambda_1} R^{(1)}_{\alpha\beta} + \cdots + c_{\lambda\nu} R^{(\nu)}_{\alpha\beta}.$$

Wir bilden diese Gleichungen successive für $\lambda = 1, 2, \ldots, n^2$ und multipliciren die zum Index λ gehörige mit einer von x unabhängigen Grösse γ_λ, addiren sämmtliche Gleichungen, setzen

$$\text{(3.)} \qquad E'_{\alpha\beta} = \gamma_1 E^{(1)}_{\alpha\beta} + \gamma_2 E^{(2)}_{\alpha\beta} + \cdots + \gamma_{n^2} E^{(n^2)}_{\alpha\beta}$$

und bestimmen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n^2}$ den Gleichungen

$$\text{(4.)} \qquad \gamma_1 c_{1\varkappa} + \gamma_2 c_{2\varkappa} + \cdots + \gamma_{n^2} c_{n^2,\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \nu)$$

gemäss, so ergiebt sich

$$\text{(M'.)} \qquad \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} (R_{\varkappa\beta} E'_{\varkappa\alpha} + R_{\varkappa\alpha} E'_{\varkappa\beta}) = 0. \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

Die Functionen $E'_{\alpha\beta}$ enthalten

$$n^2 - \nu = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

von x unabhängige willkürliche Grössen linear und homogen.

6.

Um die Abhängigkeit der Functionen $E'_{\alpha\beta}$ von den willkürlichen Grössen besser hervortreten zu lassen, setzen wir

$$\text{(N.)} \qquad \sum_0^{n-1} R_{\varkappa\beta} E'_{\varkappa\alpha} = a_{\alpha\beta}. \qquad \begin{pmatrix} \alpha = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

Hierdurch gehen die Gleichungen (M'.) über in

$$\text{(M}^{(2)}\text{.)} \qquad \begin{cases} \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} R_{\varkappa\beta} E'_{\varkappa\alpha} = a_{\alpha\beta}, \\ \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} R_{\varkappa\alpha} E'_{\varkappa\beta} = -a_{\alpha\beta}, \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \alpha \neq \beta, \\ \alpha = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$
$$\sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} R_{\varkappa\alpha} E'_{\varkappa\alpha} = 0. \qquad (\alpha = 0, 1, \ldots, n-1)$$

229] Durch Differentiation der Gleichungen (N.) nach x ergiebt sich mit Hülfe

der Gleichungen (E.), (K.), (K'.)

$$\text{(O.)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial x} &= -a_{\alpha,\beta-1} - a_{\alpha-1,\beta} + p_{n-\beta} a_{\alpha,n-1} + p_{n-\alpha} a_{n-1,\beta}, \\ a_{\alpha\alpha} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad \begin{pmatrix} \alpha \neq \beta, \\ \alpha = 0, \ldots, n-1 \\ \beta = 0, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

Sei

$$\text{(1.)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} R_{00} & R_{10} & \ldots & R_{n-1,0} \\ R_{01} & R_{11} & \ldots & R_{n-1,1} \\ . & . & \ldots & . \\ R_{0,n-1} & R_{1,n-1} & \ldots & R_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

und $\varrho_{\varkappa l}$ die zu $R_{\varkappa l}$ gehörige Unterdeterminante der Determinante Δ.

Die Gleichungen (M$^{(2)}$.) ergeben alsdann

$$\text{(P.)} \qquad \Delta E'_{\varkappa\alpha} = \sum_0^{n-1}{}_{\beta} \varrho_{\varkappa\beta} a_{\alpha\beta}. \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1, \ldots, n-1 \\ \alpha = 0, 1, \ldots, n-1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems (O.) enthält $\frac{n(n-1)}{2}$ willkürliche Constanten. Daher ergiebt sich das folgende Resultat:

Ist Δ von Null verschieden, so liefern die Gleichungen (P.) die Werthe der Functionen $E'_{\alpha\beta}$, wenn in denselben für $a_{\alpha\beta}$ die allgemeine Lösung der Gleichung (O.) gesetzt wird.

Aus den Gleichungen (E.) folgt

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \sum_0^{n-1}{}_{\lambda} \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} \varrho_{\lambda\varkappa} \frac{\partial R_{\lambda\varkappa}}{\partial x} = \sum_0^{n-1}{}_{\lambda} \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} \varrho_{\lambda\varkappa} [-R_{\lambda,\varkappa-1} - R_{\lambda-1,\varkappa} + R_{n-1,\lambda} p_{n-\varkappa} + R_{n-1,\varkappa} p_{n-\lambda}].$$

Da $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$ und folglich auch $\varrho_{\alpha\beta} = \varrho_{\beta\alpha}$, so folgt

$$\begin{gathered} \Sigma_{\varkappa} \varrho_{\lambda\varkappa} R_{\lambda-1,\varkappa} = 0, \quad \Sigma_{\lambda} \varrho_{\varkappa\lambda} R_{\varkappa-1,\lambda} = 0, \\ \Sigma_{\varkappa} p_{n-\varkappa} \Sigma_{\lambda} \varrho_{\varkappa\lambda} R_{n-1,\lambda} = p_1 \Delta, \\ \Sigma_{\lambda} p_{n-\lambda} \Sigma_{\varkappa} \varrho_{\lambda\varkappa} R_{n-1,\varkappa} = p_1 \Delta; \end{gathered}$$

folglich

$$\text{(Q.)} \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial x} = 2 p_1 \Delta.$$

Sei

$$\text{(2.)} \qquad \mathrm{E} = \begin{vmatrix} E_{00} & E_{01} & \ldots & E_{0,n-1} \\ E_{10} & E_{11} & \ldots & E_{1,n-1} \\ . & . & \ldots & . \\ E_{n-1,0} & E_{n-1,1} & \ldots & E_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

230] Bezeichnen wir mit $e_{\lambda\mu}$ die zum Elemente $E_{\lambda\mu}$ gehörige Unterdeterminante von E, so folgern wir aus den Gleichungen (K.), (K'.)

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x} = \sum_0^{n-1}{}_\lambda \sum_0^{n-1}{}_\varkappa e_{\lambda\varkappa} \frac{\partial E_{\lambda\varkappa}}{\partial x} = \sum_0^{n-2}{}_\lambda \sum_0^{n-1}{}_\varkappa e_{\lambda\varkappa} [E_{\lambda+1,\varkappa} - E_{\lambda,\varkappa-1} + p_{n-\varkappa} E_{\lambda,n-1}]$$
$$+ \sum_0^{n-1}{}_\varkappa e_{n-1,\varkappa} \Big[- E_{n-1,\varkappa-1} + E_{n-1,n-1} p_{n-\varkappa} - \sum_1^n{}_l p_l E_{n-l,\varkappa} \Big].$$

Nun ist

$$\sum_0^{n-2}{}_\lambda \sum_0^{n-1}{}_\varkappa e_{\lambda\varkappa} E_{\lambda,\varkappa-1} + \sum_0^{n-1}{}_\varkappa e_{n-1,\varkappa} E_{n-1,\varkappa-1} = \sum_0^{n-1}{}_\lambda \sum_0^{n-1}{}_\varkappa e_{\lambda\varkappa} E_{\lambda,\varkappa-1} = \sum_0^{n-1}{}_\varkappa \sum_0^{n-1}{}_\lambda e_{\lambda\varkappa} E_{\lambda,\varkappa-1} = 0,$$

$$\sum_0^{n-2}{}_\lambda \sum_0^{n-1}{}_\varkappa e_{\lambda\varkappa} E_{\lambda+1,\varkappa} = 0,$$

$$\sum_0^{n-2}{}_\lambda \sum_0^{n-1}{}_\varkappa p_{n-\varkappa} e_{\lambda\varkappa} E_{\lambda,n-1} + E_{n-1,n-1} \sum_0^{n-1}{}_\varkappa p_{n-\varkappa} e_{n-1,\varkappa} = \sum_0^{n-1}{}_\lambda \sum_0^{n-1}{}_\varkappa p_{n-\varkappa} e_{\lambda\varkappa} E_{\lambda,n-1}$$
$$= \sum_0^{n-1}{}_\varkappa p_{n-\varkappa} \sum_0^{n-1}{}_\lambda e_{\lambda\varkappa} E_{\lambda,n-1} = p_1 \mathrm{E}.$$

Endlich ist

$$\sum_1^n{}_l p_l \sum_0^{n-1}{}_\varkappa e_{n-1,\varkappa} E_{n-l,\varkappa} = p_1 \mathrm{E},$$

folglich

(R.) $$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x} = 0.$$

Bezeichnen wir mit E' die Determinante, welche entsteht, wenn wir in E an Stelle von $E_{\alpha\beta}$ die speciellen Functionen $E'_{\alpha\beta}$ treten lassen, so ergeben die Gleichungen (P.) mit Rücksicht darauf, dass $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$ und folglich auch $\varrho_{\alpha\beta} = \varrho_{\beta\alpha}$,

(S.) $$\Delta^n \mathrm{E}' = \Delta^{n-1} A,$$

wo

(4.) $$A = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}.$$

Aus den Gleichungen ($\mathrm{M}^{(2)}$.) folgt

(5.) $$a_{\alpha\beta} = - a_{\beta\alpha}, \quad a_{\alpha\alpha} = 0.$$

Es folgt also aus Gleichung (S.):

Für eine ungerade Ordnungszahl n der Differentialgleichung

231] (6.) $$P(y) = 0$$

ist identisch entweder

(7.) $$\Delta = 0,$$

oder

(7a.) $$\mathrm{E}' = 0.$$

Da sich aus den Gleichungen (Q.), (R.) ergiebt

(8.) $$\begin{cases} \Delta = \gamma e^{\int 2 p_1 dx}, \\ \mathrm{E}' = \delta, \end{cases}$$

wo γ, δ von x unabhängige Grössen bedeuten, so muss nach Gleichung (S.)

(9.) $$A = \gamma \delta e^{\int 2 p_1 dx}$$

sein. In der That folgt auch mit Hülfe der Gleichungen (O.) direct, dass

(10.) $$A = C e^{\int 2 p_1 dx},$$

wo C von x unabhängig.

Aus den Gleichungen $M^{(2)}$ ergiebt sich auch

(P'.) $$\mathrm{E}' R_{\varkappa\beta} = \sum_0^{n-1}{}_\alpha e_{\varkappa\alpha} a_{\alpha\beta}.$$

Da $R_{\varkappa\beta} = R_{\beta\varkappa}$, so folgt aus (P'.)

(11.) $$\sum_0^{n-1}{}_\alpha (e_{\varkappa\alpha} a_{\alpha\beta} - e_{\beta\alpha} a_{\alpha\varkappa}) = 0. \qquad \begin{pmatrix} \varkappa = 0, 1, \dots, n-1 \\ \beta = 0, 1, \dots, n-1 \end{pmatrix}$$

7.

Wir setzen

(1.) $$R_{m,n-1} y^{(n-1)} + R_{m,n-2} y^{(n-2)} + \dots + R_{m0} y = w_m, \qquad (m = 0, 1, \dots, n-1)$$

wo $R_{\alpha\beta}$ Lösungen der Gleichungen (E.) und y irgend eine Lösung der Gleichung

(2.) $$P(y) = 0$$

bedeutet.

Nach No. 1 ist w_{n-1} ein Integral der zu (2.) adjungirten Differentialgleichung.

Wir erhalten unter Benutzung der Gleichungen (E.)

(T.) $$\frac{\partial w_m}{\partial x} = - w_{m-1} + p_{n-m} w_{n-1}, \qquad (m = 0, 1, \dots, n-1)$$

wenn wir $w_{-1} = 0$ setzen.

232] Ist

$$\Delta = 0, \tag{3.}$$

so ergeben sich aus (1.) zwischen $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ die Relationen

$$\varrho_{0\varkappa} w_0 + \varrho_{1\varkappa} w_1 + \cdots + \varrho_{n-1,\varkappa} w_{n-1} = 0. \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{4.}$$

Sind insbesondere die Coefficienten $p_\varkappa$ rationale Functionen und die Functionen $R_{\alpha\beta}$ in Gleichung (1.) rationale Lösungen von (E.), so folgt aus dem Umstande, dass jede Ableitung von w nach x eine lineare homogene Function von $w_0, \ldots, w_{n-1}$ mit rationalen Coefficienten ist, aus Gleichung (3.), dass schon zwischen

$$w_m, \frac{\partial w_m}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} w_m}{\partial x^{n-1}}$$

eine lineare homogene Relation mit rationalen Coefficienten stattfindet. Insbesondere ergiebt sich dann, dass die zu (2.) adjungirte Differentialgleichung und folglich auch die Differentialgleichung (2.) reductibel ist.

Wenn wiederum die Grössen $R_{\alpha\beta}$ den Gleichungen (L.) genügen, so ergiebt sich nach Gleichung (4.) No. 2

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = \sum_0^{n-1}{}_\lambda \left[R_{m\lambda} \frac{\partial y^{(\lambda)}}{\partial t} + y^{(\lambda)} \frac{\partial R_{m\lambda}}{\partial t}\right] = \sum_0^{n-1}{}_\lambda \left[R_{m\lambda} \sum_0^{n-1}{}_\varkappa D^{(0)}_{\lambda\varkappa} y^{(\varkappa)} - y^{(\lambda)} \sum_0^{n-1}{}_\varkappa (R_{\varkappa\lambda} D^{(0)}_{\varkappa m} + R_{\varkappa m} D^{(0)}_{\varkappa\lambda})\right].$$

Der Coefficient von $y^{(\varrho)}$ in dieser Summe ist:

$$\sum_\lambda R_{m\lambda} D^{(0)}_{\lambda\varrho} - \sum_\varkappa (R_{\varkappa\varrho} D^{(0)}_{\varkappa m} + R_{\varkappa m} D^{(0)}_{\varkappa\varrho}) = -\sum_\varkappa R_{\varkappa\varrho} D^{(0)}_{\varkappa m},$$

also

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = -\sum_0^{n-1}{}_\varrho \sum_0^{n-1}{}_\varkappa R_{\varkappa\varrho} D^{(0)}_{\varkappa m} y^{(\varrho)},$$

woraus sich ergiebt

$$\frac{\partial w_m}{\partial t} = -\sum_0^{n-1}{}_\varkappa D^{(0)}_{\varkappa m} w_\varkappa. \tag{T'.}$$

Durch Vergleichung der beiden Werthe von $\frac{\partial^2 w_m}{\partial x\, \partial t}$, welche aus den Gleichungen (T.) und (T'.) unter Zuhülfenahme der Gleichungen (E.), (F.), (F'.) erhalten werden, ergiebt sich die Relation:

$$\sum_0^{n-1}{}_\alpha (e_{\varkappa\alpha} a_{\alpha\beta} - e_{\beta\alpha} a_{\alpha\varkappa}) = 0, \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{U.}$$

welche wir bereits in voriger Nummer Gleichung (11.) unmittelbar aus den Gleichungen (P.), (P'.) hergeleitet haben.

Nach Gleichung (C.) ist [233

$$Z = w_{n-1} y^{(n-1)} + w_{n-2} y^{(n-2)} + \cdots + w_0 y. \tag{5.}$$

Die Differentiation nach x unter Benutzung der Gleichungen (T.) und der Gleichung

$$P(y) = 0 \tag{6.}$$

ergiebt, wie es sein muss,

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 0. \tag{7.}$$

Differentiiren wir die Gleichung (5.) nach t, und wenden hierbei die Gleichung (4.) No. 2, ferner die Gleichungen (T'.) und (6.) an, so ergiebt sich auch

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = 0. \tag{7a.}$$

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

S. 269, Zeile 5 v. u. noch von statt von noch,

„ 271 zwischen (4.) und (J.) $R^{(i)}_{\alpha\beta} = R^{(i)}_{\beta\alpha}$ statt $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$,

Zeile 14 unabhängig sind statt unabhängige Grössen bedeuten,

„ 273 vor bezw. nach den Gleichungen (K.), (K′.) Zeile 12 bezw. 9 v. u. wo die Grössen $E_{\alpha\beta}$ bestimmt werden statt wo $E_{\alpha\beta}$ bestimmt wird,

Zeile 3 u. 4 v. u. die Bedingungen erfüllt sind statt die Bedingung erfüllt ist,

„ 276, „ 1 Elemente statt Gliede.

2) Zur vorstehenden Arbeit erlaube ich mir einige Bemerkungen zu machen, die mir geeignet erscheinen, zur Klärung des hier gegebenen Formelsystems beizutragen.

Setzt man

$$(\alpha.)\qquad u_{\beta\mu} = \frac{(-1)^{\beta+\mu+1}}{D}\begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_{\mu-1} & y_{\mu+1} & \cdots & y_n \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ y_1^{(\beta-1)} & \cdots & y_{\mu-1}^{(\beta-1)} & y_{\mu+1}^{(\beta-1)} & \cdots & y_n^{(\beta-1)} \\ y_1^{(\beta+1)} & \cdots & y_{\mu-1}^{(\beta+1)} & y_{\mu+1}^{(\beta+1)} & \cdots & y_n^{(\beta+1)} \\ . & \cdots & . & . & \cdots & . \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_{\mu-1}^{(n-1)} & y_{\mu+1}^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\beta = 0, \dots, n-1 \\ \mu = 1, \dots, n\end{pmatrix}$$

wo $D = D(y_1, y_2, \dots, y_n)$ die Determinante von $y_1, y_2, \dots, y_n$ ist, so ist

$$(\beta.)\qquad \frac{\partial u_{\beta\mu}}{\partial x} = -u_{\beta+1,\mu} + p_{n-\beta}\, u_{n-1,\mu}, \qquad \begin{pmatrix}\beta = 0, \dots, n-1 \\ \mu = 1, \dots, n\end{pmatrix}$$

wo $p_\varkappa$ die Coefficienten von (A.) der No. 1 sind, und $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen dieser Gleichung darstellen.

Bildet man nun die Ausdrücke

$$(\gamma.)\qquad R_{\alpha\beta} = \sum_1^n{}_\lambda \sum_1^n{}_\mu\, c_{\lambda\mu}\, u_{\alpha\lambda}\, u_{\beta\mu}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, \dots, n-1 \\ \beta = 0, 1, \dots, n-1\end{pmatrix}$$

so genügen die Grössen $R_{\alpha\beta}$ den Gleichungen (E.) der No. 1, wenn die Grössen $c_{i\varkappa}$ von x unabhängig gewählt werden.

Soll, wie in No. 1, $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$ sein, so muss $c_{i\varkappa} = c_{\varkappa i}$ genommen werden.

Genügen $y_1, y_2, \dots, y_n$ den Gleichungen (4.) der No. 2, so ist

$$\frac{\partial u_{\beta\mu}}{\partial t} = (D_{00} + D_{11} + \cdots + D_{n-1,n-1})\, u_{\beta\mu} - \sum_0^{n-1}{}_\varkappa\, D_{\varkappa\beta}\, u_{\varkappa\mu} - u_{\beta\mu}\frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial t};$$

weil aber

$$(\delta.)\qquad \frac{1}{D}\frac{\partial D}{\partial t} = D_{00} + D_{11} + \cdots + D_{n-1,n-1},$$

so folgt

$$(\varepsilon.)\qquad \frac{\partial u_{\beta\mu}}{\partial t} = -\sum_0^{n-1}{}_\varkappa\, D_{\varkappa\beta}\, u_{\varkappa\mu}. \qquad \begin{pmatrix}\beta = 0, 1, \dots, n-1 \\ \mu = 1, 2, \dots, n\end{pmatrix}$$

Die Grössen $W_{\alpha\beta}$ der Gleichungen (G.) No. 3 werden also zu Folge (γ.) und (ε.)

$$W_{\alpha\beta} = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \frac{\partial c_{i\varkappa}}{\partial t}\, u_{\alpha i}\, u_{\beta\varkappa} - \sum_0^{n-1}{}_\varkappa [R_{\varkappa\beta} D_{\varkappa\alpha} + R_{\varkappa\alpha} D_{\varkappa\beta}] + \sum_0^{n-1}{}_\varkappa [R_{\varkappa\beta} D_{\varkappa\alpha} + R_{\varkappa\alpha} D_{\varkappa\beta}],$$

d. h.

$$(\zeta.)\qquad W_{\alpha\beta} = \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_\varkappa \frac{\partial c_{i\varkappa}}{\partial t}\, u_{\alpha i}\, u_{\beta\varkappa}.$$

Aus (ζ.) ergeben sich aber sofort die Gleichungen (H.) und der Satz I der No. 3.

Die Gleichungen (ζ.) lehren weiter, dass die Gleichungen (L.) der No. 5 dann und nur dann bestehen, wenn die Grössen $c_{i\varkappa}$ in (γ.) von t unabhängig gewählt werden.

Die Gleichungen (K.) und (K′.) der No. 5 werden, wie die Differentiation nach x mit Benutzung von (β.) zeigt, befriedigt durch die Ausdrücke

$$(\eta.)\qquad E_{\alpha\beta} = \sum_1^n{}_\lambda \sum_1^n{}_\mu\, d_{\lambda\mu}\, y_\lambda^{(\alpha)}\, u_{\beta\mu}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, \dots, n-1 \\ \beta = 0, 1; \dots, n-1\end{pmatrix}$$

wo wiederum $d_{i\varkappa}$ beliebige von x unabhängige Grössen sind.

Nun ist

$$\sum_1^n{}_i\, y_{\beta i}^{(\alpha)}\, u_{\beta i} = 0, \quad \text{wenn } \alpha \lessgtr \beta,$$

$$\sum_1^n{}_i\, y_i^{(\alpha)}\, u_{\alpha i} = 1,$$

also folgt

$$(\vartheta.)\qquad a_{\alpha\beta} = \sum_0^{n-1}{}_\varkappa\, R_{\varkappa\beta}\, E_{\varkappa\alpha} = \sum_1^n{}_\lambda \sum_1^n{}_\mu\, \delta_{\lambda\mu}\, u_{\alpha\lambda}\, u_{\beta\mu},$$

wenn

$$\delta_{\lambda\mu} = \sum_1^n{}_i\, c_{\lambda i}\, d_{i\mu}$$

gesetzt wird.

Die Grössen $a_{\alpha\beta}$ genügen also den Gleichungen (E.) der No. 1, woraus die Gleichungen (O.) der No. 6 ihre Erklärung finden.

Damit $a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha}$ und $a_{\alpha\alpha} = 0$ werde, muss

$$(\iota.)\qquad \delta_{\lambda\mu} = -\delta_{\mu\lambda}, \quad \delta_{\lambda\lambda} = 0$$

genommen werden.

Für die zu den Grössen $E'_{\alpha\beta}$ (Gleichungen (3.) der No. 6) gehörige Substitution $(d_{i\varkappa})$ folgt also

$$(\delta_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})(d_{i\varkappa})$$

oder

$$(d_{i\varkappa}) = (c_{i\varkappa})^{-1}(\delta_{i\varkappa}).$$

Da, wegen (ι.), die Zahl der Grössen $\delta_{i\varkappa}$ $\frac{n(n-1)}{2}$ ist, so enthalten die Grössen $E'_{\alpha\beta}$, wenn die Gleichungen (M.) der No. 5 bestehen sollen, in der That $\frac{n(n-1)}{2}$ willkürliche Constanten.

Aus (α.) folgt

$$\begin{vmatrix} u_{01} & u_{02} & \cdots & u_{0n} \\ u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ u_{n-1,1} & u_{n-1,2} & \cdots & u_{n-1,n} \end{vmatrix} = \frac{1}{D}.$$

Also ergeben die Gleichungen (γ.)

$$(\varkappa.) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} R_{00} & R_{10} & \cdots & R_{n-1,0} \\ R_{01} & R_{11} & \cdots & R_{n-1,1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ R_{0,n-1} & R_{1,n-1} & \cdots & R_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} = \frac{|c_{i\varkappa}|}{D^2},$$

d. h. also sofort die Gleichungen (Q.) und (S.) der No. 6.

Weiter ergiebt die Gleichung (ϑ.)

$$(\lambda.) \qquad A = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0,n-1} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n-1,0} & a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \frac{|\delta_{i\varkappa}|}{D^2}$$

und

$$(\mu.) \qquad E = \begin{vmatrix} E_{00} & E_{01} & \cdots & E_{0,n-1} \\ E_{10} & E_{11} & \cdots & E_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ E_{n-1,0} & E_{n-1,1} & \cdots & E_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \frac{|\delta_{i\varkappa}|}{|c_{i\varkappa}|},$$

also die Gleichung (R.) der No. 6.

Zum besseren Verständniss der No. 7 ist zu beachten, dass

$$\sum_{0}^{n-1}{}_{\beta} R_{\alpha\beta}\, y_i^{(\beta)} = \sum_{0}^{n-1}{}_{\beta} \sum_{1}^{n}{}_{\lambda} \sum_{1}^{n}{}_{\mu} c_{\lambda\mu}\, u_{\alpha\lambda}\, u_{\beta\mu}\, y_i^{(\beta)} = \sum_{1}^{n}{}_{\lambda} c_{\lambda i}\, u_{\alpha\lambda} = \sum_{1}^{n}{}_{\lambda} c_{i\lambda}\, u_{\alpha\lambda}.$$

Setzt man also in den Gleichungen (1.) der No. 7

$$(\nu.) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n,$$

so wird

$$(\varrho.) \qquad w_m = d_1 u_{m1} + d_2 u_{m2} + \cdots + d_m u_{mn}, \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-1)$$

wenn

$$d_\lambda = \sum_{1}^{n}{}_{i} c_i\, c_{i\lambda}$$

gesetzt wird.

Da die Grössen $c_{i\varkappa}$ wegen des Bestehens der Gleichungen (L.) der No. 5 (Vgl. (ζ.)) von t unabhängig sind, so lehren die Gleichungen (ι.) in Verbindung mit (ν.) und (ϱ.), dass die Gleichungen (T.) der No. 7 nur dann richtig sind, wenn die Grössen c_i in (ν.) von t unabhängig gewählt werden.

Dann aber ergiebt sich für Z (Gleichung (5.) der No. 7)

$$(\sigma.) \qquad Z = \sum_{0}^{n-1}{}_{\alpha} \sum_{1}^{n}{}_{i} \sum_{1}^{n}{}_{\varkappa} d_i\, c_\varkappa\, y_\varkappa^{(\alpha)}\, u_{\alpha i} = \sum_{1}^{n}{}_{i} c_i\, d_i,$$

was unmittelbar $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0$ und $\frac{\partial Z}{\partial t} = 0$ zur Folge hat.

R. F.

LXX.

ZUR THEORIE DER ABELSCHEN FUNCTIONEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1898, XXXIV, S. 477—486; vorgelegt am 7. Juli; ausgegeben am 14. Juli 1898.)

Die gegenwärtige Notiz knüpft an eine Untersuchung an, welche ich [477
in den Sitzungsberichten der Akademie vom Jahre 1888 an[1]) über die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale angestellt habe. Bilden $y_1, y_2, \ldots, y_{2p}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung (G.), welcher die Periodicitätsmoduln eines Integrals erster Gattung als Functionen eines Verzweigungswerthes x genügen, und sind $y'_1, y'_2, \ldots, y'_{2p}$ die Ableitungen derselben nach x, alsdann sind die Functionen $y_k y'_l - y_l y'_k$ Lösungen einer Differentialgleichung $p(2p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung (H.), welche wir nach einer später eingeführten Bezeichnungsweise*) die $2p-2^{\text{te}}$ Associirte der Gleichung (G.) nennen wollen.

In der oben bezeichneten Untersuchung führte ich für den Fall der ultraelliptischen Integrale ($p = 2$) aus, dass die Gleichung (H.), welche in diesem Falle sechster Ordnung wird, reductibel sein muss, indem ich unter Zuhülfenahme der Sustitutionsgruppe der Gleichung (G.) nachwies, dass die Gleichung (H.) eine rationale Lösung besitzt**).

*) L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. 2. Theil, S. 127, Leipzig 1897.

**) Vergl. Sitzungsberichte 1889, S. 713 ff.[2]).

[1]) Abh. LIV, S. 1 ff. dieses Bandes. R. F.

[2]) Ebenda S. 34 ff. R. F.

Später ist für die allgemeinen hyperelliptischen Integrale erster Gattung derselbe Satz bewiesen worden*), indem ebenfalls durch Anwendung der von mir**) aufgestellten Substitutionsgruppe der Gleichung (G.) die Existenz einer rationalen Lösung der $2p-2^{\text{ten}}$ Associirten der Gleichung (G.) erhärtet wird***). Daselbst†) wird überdies der explicite Ausdruck dieser rationalen Function entwickelt.

In meiner oben erwähnten Untersuchung habe ich weiter für $p = 2$ aus-
478] geführt, dass die Reductibilität der genannten Associirten die WEIERSTRASSschen Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung liefert††). Das Gleiche findet für einen beliebigen Werth von p statt†††).

Bedeutet aber (G.) die Differentialgleichung $2p^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher die Periodicitätsmoduln eines **allgemeinen ABELschen Integrals** erster Gattung genügen§), und (H.) die $2p-2^{\text{te}}$ Associirte von (G.), so ist die Untersuchung der letzteren nicht auf demselben Wege ausführbar, so lange nicht auch für den allgemeinen Fall der Periodicitätsmoduln der ABELschen Integrale die Substitutionsgruppe der Gleichung (G.) aufgestellt ist.

Ich will nun in der folgenden Note zeigen, wie man jetzt **ohne Kenntniss dieser Substitutionsgruppe** aus der Bestimmungsweise, welche ich für die Coefficienten der Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln der ABELschen Integrale entwickelt habe§§), unmittelbar und auf viel einfachere Weise für den **allgemeinen Fall der ABELschen Integrale** nachweisen kann, dass die $2p-2^{\text{te}}$ Associirte von (G.) eine Lösung besitzt, welche mit

---

*) Von meinem Sohne RICHARD, in seiner im CRELLEschen Journal, Bd. 119, abgedruckten Inauguraldissertation, welche ich im Folgenden mit R. F. bezeichnen werde.

**) CRELLES Journal, Bd. 71, S. 100 ff. [1]).

***) R. F. S. 4–7.

†) R. F. S. 7–12.

††) Vergl. a. a. O. S. 717 [2]).

†††) Vergl. R. F. S. 12–17.

§) Vergl. CRELLES Journal, Bd. 73, S. 329 ff. [3]).

§§) Sitzungsberichte 1897, S. 608 ff. [4]).

---

1) Abh. VIII, S. 251–252, Band I dieser Ausgabe. R. F.

2) Abh. LIV, S. 39 dieses Bandes. R. F.

3) Abh. XIII, S. 349 ff., Band I dieser Ausgabe. R. F.

4) Abh. LXVIII, S. 249 ff. dieses Bandes. R. F.

den Coefficienten von (G.) zu demselben Rationalitätsbereiche gehört (also auch reductibel ist). Der Nachweis wird eben dadurch geführt, dass eine solche Lösung unmittelbar aus den für die Coefficienten von (G.)*) aufgestellten Gleichungen zu entnehmen ist.

Wir zeigen alsdann, dass die Relationen, welche die Reductibilität ausdrücken, zu den RIEMANNschen Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der ABELschen Integrale erster und zweiter Gattung führen.

1.

Wir betrachten ein System von Differentialgleichungen:

$$\text{(A.)}\qquad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}y_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

wo mit a_{ik} gegebene Functionen von x bezeichnet werden.

Wir bezeichnen mit $y_{\lambda 1}, y_{\lambda 2}, \cdots, y_{\lambda n}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, n)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen desselben und setzen

$$\text{(B.)}\qquad y_{\lambda k}\,y_{\mu l} - y_{\lambda l}\,y_{\mu k} = \overset{(\lambda\mu)}{u}_{kl},$$

so dass [479

$$\text{(1.)}\qquad \begin{cases} \overset{(\lambda\mu)}{u}_{lk} = -\overset{(\lambda\mu)}{u}_{kl}, & \overset{(\lambda\mu)}{u}_{kk} = 0, \\ \overset{(\mu\lambda)}{u}_{kl} = -\overset{(\lambda\mu)}{u}_{kl}, & \overset{(\lambda\lambda)}{u}_{kl} = 0. \end{cases}$$

Aus (A.) ergiebt sich dann:

$$\text{(2.)}\qquad \frac{d\overset{(\lambda\mu)}{u}_{kl}}{dx} = \sum_1^n{}_\alpha\, a_{k\alpha}\overset{(\lambda\mu)}{u}_{\alpha l} + \sum_1^n{}_\alpha\, a_{l\alpha}\overset{(\lambda\mu)}{u}_{k\alpha}.$$

Es genügen daher die Grössen $\overset{(\lambda\mu)}{u}_{kl}$ für

$$\lambda = 1, 2, \ldots, n;\quad \mu = 1, 2, \ldots, n$$

dem Systeme von Differentialgleichungen:

$$\text{(C.)}\qquad \frac{dv_{kl}}{dx} = \sum_1^n{}_\alpha\, a_{k\alpha}v_{\alpha l} + \sum_1^n{}_\alpha\, a_{l\alpha}v_{k\alpha},$$

worin $k = 1, 2, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, n$

$$v_{lk} = -v_{kl},\quad v_{kk} = 0.$$

---

*) In den Sitzungsberichten 1897, S. 615 [1]).

---

1) Abh. LXVIII, S. 257 dieses Bandes. R. F.

Hat insbesondere das System (A.) die Form

$$(\mathrm{A}_1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = \gamma_0 y_1 + \gamma_1 y_2 + \cdots + \gamma_{n-1} y_n, \end{cases}$$

d. h. in dem Falle, wo $y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$(\mathrm{D}.)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} - \gamma_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \cdots - \gamma_1 \frac{dy}{dx} - \gamma_0 y = 0$$

ist, so nimmt das System (C.) die Gestalt an:

$$(\mathrm{C}_1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dv_{kl}}{dx} = v_{k+1,l} + v_{k,l+1}, & \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ l = 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \\ \dfrac{dv_{kn}}{dx} = v_{k+1,n} + \sum\limits_0^{n-1}{}_m \gamma_m v_{k,m+1}, & (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ \dfrac{dv_{nl}}{dx} = v_{n,l+1} + \sum\limits_0^{n-1}{}_m \gamma_m v_{m+1,l}, & (l = 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

worin wieder $v_{lk} = -v_{kl};\ v_{kk} = 0$ zu setzen ist.

480]

2.

Sei

$$(1.)\qquad J = \int s\,dz$$

ein Abelsches Integral erster Gattung*), so genügen die Periodicitätsmoduln desselben der linearen Differentialgleichung:

$$(\mathrm{D}_1.)\qquad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \beta_{n-1}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \cdots + \beta_1 \frac{\partial y}{\partial x} + \beta_0 y = 0,$$

wo x einen Verzweigungswerth der Riemannschen Fläche bedeutet, und wo

*) Vergl. Sitzungsberichte 1897, S. 609 [1]).

[1]) Abh. LXVIII, S. 250 dieses Bandes. R. F.

die Grössen β_k durch das System von Gleichungen

$$(\mathrm{E}.)\qquad (\lambda, n) + \beta_{n-1}(\lambda, n-1) + \cdots + \beta_1(\lambda, 1) + \beta_0(\lambda, 0) = 0 \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n-1)$$

bestimmt sind*), wenn wir

$$(\mathrm{F}.)\qquad (\lambda, \mu) = \sum \mathrm{Res}\, \frac{\partial^\lambda s}{\partial x^\lambda}\, \frac{\partial^\mu J}{\partial x^\mu}$$

setzen**).

Das System $(\mathrm{A}_1.)$ wird in unserem Falle

$$(\mathrm{A}_1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \\ \dfrac{dy_n}{dx} = -\beta_0 y_1 - \beta_1 y_2 - \cdots - \beta_{n-1} y_n. \end{cases}$$

Es genügen also für diesen Fall die Grössen $\overset{(\alpha\alpha)}{u}_{kl}$, welche in voriger Nummer definirt worden sind, dem Systeme von Differentialgleichungen:

$$(\mathrm{C}_1.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial v_{kl}}{\partial x} = v_{k+1,l} + v_{k,l+1}, & \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n-1 \\ l = 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix} \\ \dfrac{\partial v_{kn}}{\partial x} = v_{k+1,n} - \sum\limits_0^{n-1}{}_m \beta_m v_{k,m+1}, & (k = 1, 2, \ldots, n-1) \\ \dfrac{\partial v_{nl}}{\partial x} = v_{n,l+1} - \sum\limits_0^{n-1}{}_m \beta_m v_{m+1,l}, & (l = 1, 2, \ldots, n-1) \end{cases}$$

worin wiederum $v_{lk} = -v_{kl},\ v_{kk} = 0$ zu setzen ist.

Nun ist***) [481

$$(\mathrm{G}.)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\lambda, \mu)}{\partial x} = (\lambda+1, \mu) + (\lambda, \mu+1), \\ \dfrac{\partial(\lambda, n-1)}{\partial x} = (\lambda+1, n) - \sum\limits_0^{n-1}{}_m \beta_m(\lambda, m), \\ (\mu, \lambda) = -(\lambda, \mu);\quad (\lambda, \lambda) = 0. \end{cases}$$

*) Sitzungsberichte 1897, S. 615, Gleichungen (6.) [1]).

**) A. a. O. S. 611, Gleichung (9.) [2]).

***) A. a. O. S. 614, Gleichung (2.); S. 615, Gleichung (6.); S. 614, Gleichung (16.) und Gleichung (16a.) [3]).

[1]) Abh. LXVIII, S. 257 dieses Bandes. R. F.

[2]) Ebenda S. 253. R. F.

[3]) Ebenda S. 256, 257. R. F.

Durch Vergleichung der Systeme (C_2.) und (G.) ergiebt sich also:

I. Die Gleichungen (C_2.) besitzen die Particularlösung

$$(\text{H.})\qquad v_{kl} = (k-1, l-1),$$

welche von der Wahl des Fundamentalsystems von Lösungen $y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}$ der Gleichung (D_1.) unabhängig ist.

Die Grössen (λ, μ) sind nach den Gleichungen (F.) algebraische Functionen von x, während die Grössen β_k nach den Gleichungen (E.) zu demselben Rationalitätsbereiche wie (λ, μ) gehören.

Die Anzahl der in den Gleichungen (C_2.) auftretenden verschiedenen Grössen v_{kl} ist

$$(2.)\qquad \sigma = \frac{n(n-1)}{2} = p(2p-1).$$

Aus denselben Gleichungen folgt durch Differentiation nach x

$$(3.)\qquad \frac{\partial^m v_{\alpha\beta}}{\partial x^m} = \sum_{kl} \overset{(m)}{A}_{kl} v_{kl},$$

wo $\overset{(m)}{A}_{kl}$ mit β_k zu demselben Rationalitätsbereich gehörige algebraische Functionen von x sind. Wird successive $m = 1, 2, \dots, \sigma$ gesetzt, und werden aus den entstehenden Gleichungen alle v_{kl} mit Ausnahme von $v_{\alpha\beta}$ eliminirt, so ergiebt sich für $v_{\alpha\beta}$ eine Differentialgleichung

$$(\text{J.})\qquad \frac{\partial^\sigma v}{\partial x^\sigma} + \overset{(\alpha\beta)}{P}_1 \frac{\partial^{\sigma-1} v}{\partial x^{\sigma-1}} + \dots + \overset{(\alpha\beta)}{P}_\sigma v = 0,$$

deren Coefficienten $\overset{(\alpha\beta)}{P}_k$ mit β_k zu demselben Rationalitätsbereich gehören.

Aus I. folgt nunmehr:

II. Jede der Differentialgleichungen (J.) besitzt je ein algebraisches Integral $v_{\alpha\beta} = (\alpha-1, \beta-1)$, welches mit β_k, also mit $\overset{(\alpha\beta)}{P}_k$ zu demselben Rationalitätsbereich gehört; jede dieser Differentialgleichungen ist also reductibel.

Die in der Einleitung definirte Associirte $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung unserer Differentialgleichung (D_1.) wird aus (J.) für $\alpha = 1$, $\beta = 2$ erhalten:

482] $$(\text{J}_1.)\qquad \frac{\partial^\sigma v}{\partial x^\sigma} + \overset{(12)}{P}_1 \frac{\partial^{\sigma-1} v}{\partial x^{\sigma-1}} + \dots + \overset{(12)}{P}_\sigma v = 0.$$

Derselben genügt nach dem Satze II.

$$(4.)\qquad v_{12} = (0, 1) = -(1, 0) = -\sum \operatorname{Res} \frac{\partial s}{\partial x} J.$$

Nach den*) gemachten Voraussetzungen ist in der Umgebung von $z = x$

$$(5.)\qquad \begin{cases} s = (z-x)^{-\frac{1}{2}} \varphi_0(x) + \cdots, \\ \dfrac{\partial s}{\partial x} = \dfrac{1}{2}(z-x)^{-\frac{3}{2}} \varphi_0(x) + \cdots, \\ \int s\,dz = 2\,(z-x)^{\frac{1}{2}}\, \varphi_0(x) + \cdots. \end{cases}$$

Da für (λ, μ) die einzige Residuenstelle die Verzweigungsstelle $z = x$ ist, so folgt

$$(6.)\qquad (0, 1) = -\varphi_0(x).$$

Für die hyperelliptischen Integrale ist beispielsweise

$$(7.)\qquad s = (z-x)^{-\frac{1}{2}} \psi(z)^{-\frac{1}{2}},$$

wo

$$\psi(z) = (z-k_1)(z-k_2)\dots(z-k_{2p}),$$

also

$$(8.)\qquad (0, 1) = -\frac{1}{\psi(x)}.$$

Die $2p-2^{\text{te}}$ Associirte der Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale besitzt also das rationale Integral $\frac{1}{\psi(x)}$, ein Resultat, welches bereits in der Einleitung erwähnt worden ist**).

Da aus den Gleichungen (C_2.) gefolgert wird

$$(\text{K.})\qquad v_{kl} = \overset{(kl)}{B}_0 v_{\alpha\beta} + \overset{(kl)}{B}_1 \frac{\partial v_{\alpha\beta}}{\partial x} + \dots + \overset{(kl)}{B}_{\sigma-1} \frac{\partial^{\sigma-1} v_{\alpha\beta}}{\partial x^{\sigma-1}},$$

wo $\overset{(kl)}{B}_\lambda$ mit den $\overset{(\alpha\beta)}{P}_\lambda$ zu demselben Rationalitätsbereiche gehörige algebraische Functionen von x sind, so ergiebt sich:

III. Die Differentialgleichungen (J.) gehören sämmtlich zu derselben Klasse, in dem Sinne, welcher dieser Bezeichnung in meinen früheren Untersuchungen***) beigelegt worden ist.

*) In den Sitzungsberichten a. a. O. S. 609[1]).

**) Vergl. R. F. S. 12, Gleichung (18.).

***) Vergl. Sitzungsberichte 1888, S. 1275[2]).

[1]) Abh. LXVIII, S. 250 dieses Bandes. R. F.

[2]) Abh. LIV, S. 17 dieses Bandes. R. F.

Die Sätze II. und III. bilden also die Verallgemeinerung der in der Ein-
483] leitung erwähnten Sätze über die zu den Differentialgleichungen der Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale gehörigen Associirten auf die Associirten derjenigen Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der allgemeinen Abelschen Integrale genügen. Der Beweis dieser Sätze ist ohne Zuhülfenahme der Gruppe der Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln erbracht, indem direct aus der Gestalt der Associirten die rationalen Lösungen, welche denselben genügen, hergestellt wurden.

3.

In meiner erwähnten Notiz*) habe ich bereits darauf hingewiesen, dass die von Weierstrass zuerst hergeleiteten Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale unmittelbare Folgerungen sind aus der Reductibilität der Associirten $(2p-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der Differentialgleichung, welcher die Periodicitätsmoduln genügen. Die Rechnung findet sich daselbst**) für die ultraelliptischen Integrale ausgeführt. Später ist dieselbe für die hyperelliptischen Integrale überhaupt ausgeführt worden***).

Wir wollen nunmehr zeigen, dass die in der Theorie der allgemeinen Abelschen Integrale von Riemann hergeleiteten Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster und zweiter Gattung ebenso unmittelbare Folgerungen der in der vorigen Nummer gegebenen Reductibilitätssätze I. und II. darstellen.

Die Riemannschen Relationen lassen sich nämlich in die folgende Form bringen:

Ist $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2p}$ ein Fundamentalsystem von Abelschen Integralen, welche nirgendwo in der Riemannschen Fläche logarithmisch unendlich werden†), so kann man ein Periodensystem $A_{k\lambda}, B_{k\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \ldots, p)$ von ζ_k so wählen, dass

*) Sitzungsberichte 1889, S. 714–717 [1]).
**) A. a. O. S. 717 [2]).
***) Vergl. R. F. S. 12–17.
†) Vergl. Sitzungsberichte 1897, S. 612 [3]).

1) Abh. LIV, S. 36–39 dieses Bandes. R. F.
2) Ebenda S. 39. R. F.
3) Abh. LXVIII, S. 254 dieses Bandes. R. F.

$$\text{(L.)}\qquad \sum_{1}^{p}{}_{\lambda}(A_{k\lambda}B_{l\lambda}-A_{l\lambda}B_{k\lambda}) = \sum \operatorname{Res}\zeta_k\frac{d\zeta_l}{dz}.\quad \begin{pmatrix}k=1,2,\ldots,2p\\ l=1,2,\ldots,2p\end{pmatrix}{}^{*)}$$

Wir wollen nun zunächst zeigen:

(S.) Wenn die Gleichung (L.) für ein beliebig gewähltes Fundamentalsystem $\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)}, \ldots, \zeta_{2p}^{(0)}$ erfüllt ist, so besteht dieselbe Gleichung für jedes andere Fundamentalsystem $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2p}$. [484

Es ist nämlich zunächst

$$\text{(1.)}\qquad \zeta_m = C_{m1}\zeta_1^{(0)}+C_{m2}\zeta_2^{(0)}+\cdots+C_{m,2p}\zeta_{2p}^{(0)}+\Re_m(z,s),\quad (m=1,2,\ldots,2p)$$

wo die Grössen $C_{m\lambda}$ von z unabhängig sind und $\Re_m(z,s)$ eine rationale Function von (z,s) bedeutet**).

Sei nun $A_{kl}^{(0)}, B_{kl}^{(0)}$ dasjenige Periodensystem, für welches nach unserer Voraussetzung die Relation

$$\text{(2.)}\qquad \sum_{1}^{p}{}_{\lambda}[A_{k\lambda}^{(0)}B_{l\lambda}^{(0)}-A_{l\lambda}^{(0)}B_{k\lambda}^{(0)}] = \sum \operatorname{Res}\zeta_k^{(0)}\frac{d\zeta_l^{(0)}}{dz}$$

besteht.

Ist $A_{k\lambda}, B_{k\lambda}$ das entsprechende Periodensystem für ζ_k, so folgt aus (1.)

$$A_{k\lambda}B_{l\lambda}-A_{l\lambda}B_{k\lambda} = \sum_{\mu\nu}(C_{k\mu}C_{l\nu}-C_{k\nu}C_{l\mu})(A_{\mu\lambda}^{(0)}B_{\nu\lambda}^{(0)}-A_{\nu\lambda}^{(0)}B_{\mu\lambda}^{(0)}),$$

also

$$\text{(3.)}\qquad \sum_{1}^{p}{}_{\lambda}[A_{k\lambda}B_{l\lambda}-A_{l\lambda}B_{k\lambda}] = \sum_{\mu\nu}(C_{k\mu}C_{l\nu}-C_{k\nu}C_{l\mu})\sum \operatorname{Res}\zeta_\mu^{(0)}\frac{d\zeta_\nu^{(0)}}{dz}.$$

Andererseits ist

$$\text{(4.)}\ \sum \operatorname{Res}\zeta_k\frac{\partial\zeta_l}{dz} = \frac{1}{2}\sum \operatorname{Res}\left[\zeta_k\frac{d\zeta_l}{dz}-\zeta_l\frac{d\zeta_k}{dz}\right] = \sum_{\mu\nu}(C_{k\mu}C_{l\nu}-C_{k\nu}C_{l\mu})\sum \operatorname{Res}\zeta_\mu^{(0)}\frac{d\zeta_\nu^{(0)}}{dz}.$$

Aus (3.) und (4.) ergiebt sich aber unsere Behauptung.

Nun folgt aber aus dem Satze I. voriger Nummer, dass von x unabhängige Grössen $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\sigma$ derart bestimmt werden können, dass

$$\text{(5.)}\qquad \delta_1\overset{(12)}{u}_{kl}+\delta_2\overset{(13)}{u}_{kl}+\cdots+\delta_\sigma\overset{(n-1,n)}{u}_{kl} = -(k-1,l-1)\,\delta,$$

*) Vergl. Appell et Goursat, Fonctions algébriques etc., p. 142, 143.
**) Vergl. Sitzungsberichte 1897, S. 611 [1]).

1) Abh. LXVIII, S. 253 dieses Bandes. R. F.

wo die $\overset{(\lambda\mu)}{u}_{kl}$ die ihnen in No. 1 beigelegte Bedeutung haben, während die Grössen (λ, μ) durch die Gleichung (F.) No. 2 definirt sind.

Wir wählen jetzt für $y_{11}, y_{21}, \dots, y_{n1}$ insbesondere ein Periodensystem des Integrals J, und für $y_{1l}, y_{2l}, \dots, y_{nl}$ das entsprechende Periodensystem von $\frac{\partial^{l-1} J}{\partial x^{l-1}}$. Für diese speciellen Functionen y_k ergiebt sich aus der Definition der Perioden eines Abelschen Integrals, dass, wenn x einen Umlauf vollzieht, welcher s in sich selbst zurückführt, y_{kl} in eine lineare homogene Function von $y_{1l}, y_{2l}, \dots, y_{nl}$ mit ganzzahligen Coefficienten übergeht. Durch denselben Umlauf geht daher $\overset{(\alpha\beta)}{u}_{kl}$ in eine lineare homogene Function von

$$\overset{(12)}{u}_{kl}, \ \overset{(13)}{u}_{kl}, \ \dots, \ \overset{(n-1,n)}{u}_{kl}$$

485] mit ebenfalls ganzzahligen Coefficienten über. Andererseits bleibt der Ausdruck (λ, μ) seiner Bedeutung nach bei demselben Umlaufe von x ungeändert. Da aber $\overset{(\alpha\beta)}{u}_{kl}$ ein Fundamentalsystem der Gleichungen (C_2.) darstellt, so ergiebt die Gleichsetzung des Ausdruckes der linken Seite der Gleichung (5.) vor und nach dem Umlaufe von x für die Grössen $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_\sigma$ ein System linearer Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten. Es sind daher $\frac{\delta_2}{\delta_1}, \frac{\delta_3}{\delta_1}, \dots, \frac{\delta_\sigma}{\delta_1}$ rationale Zahlen.

Sei

$$\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad \frac{\delta_3}{\delta_1} = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}, \quad \dots, \quad \frac{\delta_\sigma}{\delta_1} = \frac{\varepsilon_\sigma}{\varepsilon_1}, \tag{6.}$$

wo $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_\sigma$ ganze Zahlen sind, von der Beschaffenheit, dass sie nicht sämmtlich denselben Theiler haben. Es ist also

$$\delta_1 = r\varepsilon_1, \quad \delta_2 = r\varepsilon_2, \quad \dots, \quad \delta_\sigma = r\varepsilon_\sigma.$$

Nehmen wir $\delta = r$, so erhält die Gleichung (5.) die Form

$$\varepsilon_1 \overset{(12)}{u}_{kl} + \varepsilon_2 \overset{(13)}{u}_{kl} + \dots + \varepsilon_\sigma \overset{(n-1,n)}{u}_{kl} = -(k-1, l-1). \tag{7.}$$

Auf bekannte Weise*) lässt sich nun zeigen, dass das Periodensystem y_{kl} so gewählt werden kann, dass die Gleichung (7.) wird

$$\overset{(12)}{u}_{kl} + \overset{(13)}{u}_{kl} + \dots + \overset{(n-1,n)}{u}_{kl} = -(k-1, l-1). \tag{8.}$$

*) Vergl. die auf die Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung bezüglichen Sätze von Clebsch und Gordan (Abelsche Functionen, § 29), Sätze, welche ihre Gültigkeit behalten für nicht logarithmisch unendlich werdende Integrale überhaupt.

Setzen wir

$$\zeta_1^{(0)} = J, \quad \zeta_2^{(0)} = \frac{\partial J}{\partial x}, \quad \dots, \quad \zeta_n^{(0)} = \frac{\partial^{n-1} J}{\partial x^{n-1}} \tag{9.}$$

und bezeichnen mit $A_{k\lambda}, B_{k\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, \dots, p)$ dasjenige Periodensystem von $\zeta_k^{(0)}$, für welches die Gleichung (8.) statt hat, so erhält $\overset{(\alpha\beta)}{u}_{kl}$ die Form:

$$\overset{(\alpha\beta)}{u}_{kl} = A_{k\lambda} B_{l\lambda} - A_{l\lambda} B_{k\lambda}. \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, p)$$

Ferner ist

$$(k-1, l-1) = \sum \mathrm{Res}\, \frac{\partial^{k-1} s}{\partial x^{k-1}} \frac{\partial^{l-1} J}{\partial x^{l-1}} = \sum \mathrm{Res}\, \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^{k-1} J}{\partial x^{k-1}}\right) \frac{\partial^{l-1} J}{\partial x^{l-1}} = \sum \mathrm{Res}\, \zeta_l^{(0)} \frac{\partial \zeta_k^{(0)}}{\partial z}.$$

Die Gleichung (8.) wird daher

$$\sum_{\lambda=1}^{p} (A_{k\lambda} B_{l\lambda} - A_{l\lambda} B_{k\lambda}) = \sum \mathrm{Res}\, \zeta_k^{(0)} \frac{\partial \zeta_l^{(0)}}{\partial z}. \tag{10.}$$

Dieselbe findet für $\zeta_1^{(0)}, \zeta_2^{(0)}, \dots, \zeta_n^{(0)}$, welche ein Fundamentalsystem bilden*), [486 statt, folglich nach dem Satze (S.) für jedes Fundamentalsystem von Integralen $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$.

Es sei schliesslich noch bemerkt, dass die Sätze in No. 2 zusammen mit der Gleichung (7.) noch anderweitige Consequenzen ergeben, auf welche ich bei anderer Gelegenheit einzugehen mir vorbehalte.

*) Vergl. Sitzungsberichte a. a. O., S. 610, Satz Ia [1]).

[1]) Abh. LXVIII, S. 252 dieses Bandes. R. F.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original.

S. 283, Zeile 2 wurde hinter 1888 »an« eingefügt,
Fussnote **) 1889 statt 1888,
„ 290 „ *) 1889 statt 1888,
„ 291, Zeile 4 wurde »so besteht« eingefügt,
„ 5 wurde »besteht« unterdrückt,
„ 13 wurde hinter Gleichung (2.) »besteht« hinzugefügt,
„ 292, „ 1 wurde »die« hinter wo eingefügt,
„ 293, Gleichung (10.) $\sum_1^p{}_\lambda$ statt $\sum_1^g{}_\lambda$.

R. F.

LXXI.

BEMERKUNGEN ZUR THEORIE DER ASSOCIIRTEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1899, XIII, S. 182—195; vorgelegt am 9. März; ausgegeben am 16. März 1899.)

Das Folgende enthält einen Auszug aus weiteren Untersuchungen [182
über die mit einer linearen, homogenen Differentialgleichung $2n^{ter}$ Ordnung (A.) verbundenen Associirten n^{ter} Ordnung (H.), deren Theorie ich in den Sitzungsberichten 1888, S. 1115 ff.[1]) eingeleitet und in späteren Mittheilungen daselbst fortgesetzt habe. Es wird die Frage, wann die associirte Differentialgleichung n^{ter} Ordnung reductibel sei, welche wir bereits für den Fall erledigt hatten, wo es sich um die Differentialgleichungen der Periodicitätsmoduln der Abelschen Integrale handelt*), für den allgemeinen Fall wieder aufgenommen, indem wir die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reductibilität zur Darstellung bringen. Das hier eingeschlagene Verfahren giebt zugleich über die Art, wie die Reductibilität sich bewerkstelligt, Aufschluss. Hieran schliesst sich der Nachweis, dass die Bedingungen der Reductibilität für den Fall erfüllt sind, dass die Adjungirte der Differentialgleichung $2n^{ter}$ Ordnung mit dieser zu ein und derselben Klasse gehört.

Endlich wird der Satz, welchen ich an der bereits erwähnten Stelle**) aufgestellt und mit Hülfe einer gewissen quadratischen Form Z bewiesen

*) Vergl. Sitzungsberichte 1889, S. 713 ff., und 1898, S. 477 ff.[2]).
**) Sitzungsberichte 1888, S. 1115 ff.[3]).

[1]) Abh. LIV, S. 1 ff. dieses Bandes. R. F.
[2]) Abh. LIV, S. 34 ff. und Abh. XLXX, S. 283 ff. dieses Bandes. R. F.
[3]) Abh. LIV, S. 1 ff. dieses Bandes. R. F.

hatte, dass die Lösungen der Associirten (H.), durch die Quadratwurzel der Hauptdeterminante der Differentialgleichung (A.) dividirt, einer Differentialgleichung (H'.) genügen, die mit ihrer Adjungirten zu derselben Klasse gehört, durch ein neues Verfahren begründet, welches den Vorzug hat, in die Natur der Coefficienten des Differentialausdruckes, durch welchen die Lösungen von (H'.) mit denen ihrer Adjungirten zusammenhängen, einen tieferen Einblick zu gewähren. Wir haben zwar im Folgenden in den Entwickelungen uns auf die Betrachtung des Falles, wo $n = 2$ ist, beschränkt. Es ist jedoch sichtbar, dass der allgemeine Fall keine Modification der Methode erfordert.

183]

1.

Sei

$$(A.)\qquad y^{(4)} + p_1 y^{(3)} + p_2 y^{(2)} + p_3 y' + p_4 y = 0$$

eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten der unabhängigen Variablen x, deren Lösungen sich überall bestimmt verhalten.

Sei y_1, y_2, y_3, y_4 ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (A.) und werde gesetzt

$$(1.)\qquad \begin{cases} y_1 y_2' - y_2 y_1' = u_1, & y_2 y_3' - y_3 y_2' = u_4, \\ y_1 y_3' - y_3 y_1' = u_2, & y_2 y_4' - y_4 y_2' = u_5, \\ y_1 y_4' - y_4 y_1' = u_3, & y_3 y_4' - y_4 y_3' = u_6, \end{cases}$$

so genügen diese sechs Functionen einer linearen, homogenen Differentialgleichung sechster Ordnung*):

$$(B.)\qquad u^{(6)} + P_1 u^{(5)} + P_2 u^{(4)} + P_3 u^{(3)} + P_4 u^{(2)} + P_5 u' + P_6 u = 0.$$

Die Lösungen derselben verzweigen sich in denselben singulären Punkten wie die Lösungen von (A.) und verhalten sich ebenfalls überall bestimmt.

Es soll festgestellt werden, unter welchen Umständen die Differentialgleichung (B.) reductibel wird.

Hierzu mache ich von einem Satze Gebrauch, welchen ich in den Sitzungsberichten**) gegeben habe, dass eine Klasse von linearen, homogenen

*) Vergl. Sitzungsberichte 1888, S. 1118[1]).
**) Vergl. Sitzungsberichte 1888, S. 1276[2]).

1) Abh. LIV, S. 5 dieses Bandes. R. F.
2) Ebenda S. 13. R. F.

Differentialgleichungen im Allgemeinen m^{ter} Ordnung, in welcher sich eine reductible befindet, auch solche enthält, deren Ordnung kleiner ist als m.

Soll also die Gleichung (B.) reductibel sein, so giebt es rationale Functionen $B_0, B_1, \ldots, B_5$ von der Art, dass die Functionen

$$(2.)\qquad U_k = B_0 u_k + B_1 u_k' + B_2 u_k^{(2)} + B_3 u_k^{(3)} + B_4 u_k^{(4)} + B_5 u_k^{(5)}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6)$$

einer linearen, homogenen Gleichung genügen:

$$(C.)\qquad K_1 U_1 + K_2 U_2 + \cdots + K_6 U_6 = 0,$$

wo $K_1, K_2, \ldots, K_6$ constante Grössen bedeuten.

Sei a ein bestimmter der singulären Punkte, in welchem sich die Lösungen von (A.) und (B.) verzweigen, und seien r_1, r_2, r_3, r_4 die Wurzeln der zu a gehörenden determinirenden Fundamentalgleichung von (A.).

Wir wollen der Einfachheit der Darstellung wegen voraussetzen (die Resultate werden von dieser Voraussetzung nicht berührt), dass nicht das [184
Doppelte der Differenz zweier der Grössen r_k eine ganze Zahl wird. Bedeuten alsdann y_1, y_2, y_3, y_4 die bezüglich zu r_1, r_2, r_3, r_4 als Exponenten gehörigen Lösungen von (A.), und setzen wir:

$$(3.)\qquad \begin{matrix} \varrho_1 = r_1 + r_2 - 1, & \varrho_2 = r_1 + r_3 - 1, & \varrho_3 = r_1 + r_4 - 1, \\ \varrho_4 = r_2 + r_3 - 1, & \varrho_5 = r_2 + r_4 - 1, & \varrho_6 = r_3 + r_4 - 1, \end{matrix}$$

so gehören die Functionen u_k bezüglich zu den Exponenten ϱ_k und die Functionen U_k bezüglich zu den Exponenten $\sigma_k = \varrho_k + g_k$, wo g_k eine ganze Zahl bedeutet.

Das Bestehen der Gleichung (C.) erfordert, dass wenigstens zwei der Grössen ϱ_k sich nur um eine ganze Zahl unterscheiden. Der über die Grössen r_k gemachten Voraussetzung zufolge kann es aber unter den Grössen ϱ_k nicht mehr als zwei geben, die sich um eine ganze Zahl unterscheiden. Wir können die Bezeichnungsweise der Grössen r_1, r_2, r_3, r_4 so wählen, dass ϱ_1 und ϱ_6 diejenigen beiden der Grössen ϱ_k bedeuten, deren Differenz eine ganze Zahl ist; alsdann muss die Gleichung (C.) die Gestalt annehmen:

$$(C'.)\qquad K_1 U_1 + K_6 U_6 = 0.$$

2.

Mögen die Lösungen y_k nach irgend einem Umlaufe W übergehen in:

$$\text{(D.)} \qquad (y_k) = \alpha_{k1}y_1 + \alpha_{k2}y_2 + \alpha_{k3}y_3 + \alpha_{k4}y_4; \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

alsdann erleiden die Functionen u_k durch denselben Umlauf die Substitution:

$$\text{(D'.)} \qquad \begin{cases} (u_1) = \sum_k (12)_k u_k, & (u_2) = \sum_k (13)_k u_k, \\ (u_3) = \sum_k (14)_k u_k, & (u_4) = \sum_k (23)_k u_k, \\ (u_5) = \sum_k (24)_k u_k, & (u_6) = \sum_k (34)_k u_k, \end{cases}$$

wo die Summation in Bezug auf k von 1 bis 6 zu nehmen ist, und wo

$$\text{(E.)} \qquad \begin{cases} (k,l)_1 = \alpha_{k1}\alpha_{l2} - \alpha_{k2}\alpha_{l1}, \\ (k,l)_2 = \alpha_{k1}\alpha_{l3} - \alpha_{k3}\alpha_{l1}, \\ (k,l)_3 = \alpha_{k1}\alpha_{l4} - \alpha_{k4}\alpha_{l1}, \\ (k,l)_4 = \alpha_{k2}\alpha_{l3} - \alpha_{k3}\alpha_{l2}, \\ (k,l)_5 = \alpha_{k2}\alpha_{l4} - \alpha_{k4}\alpha_{l2}, \\ (k,l)_6 = \alpha_{k3}\alpha_{l4} - \alpha_{k4}\alpha_{l3} \end{cases}$$

gesetzt worden ist.

Aus den Gleichungen (2.) voriger Nummer und aus (D'.) ergiebt sich, dass durch den Umlauf W die Functionen U_k die Substitution

185]

$$\text{(D}''\text{.)} \qquad \begin{cases} (U_1) = \sum_k (12)_k U_k, & (U_2) = \sum_k (13)_k U_k, \\ (U_3) = \sum_k (14)_k U_k, & (U_4) = \sum_k (23)_k U_k, \\ (U_5) = \sum_k (24)_k U_k, & (U_6) = \sum_k (34)_k U_k, \end{cases}$$

erfahren.

Soll aber die Gleichung (B.) reductibel werden, so muss nach voriger Nummer [(C'.)], und den über die Grössen r_k gemachten Voraussetzungen zufolge:

$$\text{(F.)} \qquad K_1(U_1) + K_6(U_6) = \lambda[K_1U_1 + K_6U_6]$$

sein, wo λ eine Constante bedeutet; d. h.

$$\text{(F'.)} \qquad \begin{cases} K_1(12)_2 + K_6(34)_2 = 0, & K_1(12)_4 + K_6(34)_4 = 0, \\ K_1(12)_3 + K_6(34)_3 = 0, & K_1(12)_5 + K_6(34)_5 = 0, \\ K_1(12)_1 + K_6(34)_1 = \lambda K_1, & K_1(12)_6 + K_6(34)_6 = \lambda K_6. \end{cases}$$

Die beiden letzten Gleichungen liefern zusammen die Bedingungsgleichung:

$$(\alpha.) \qquad K_1K_6[(12)_1 - (34)_6] + K_6^2(34)_1 - K_1^2(12)_6 = 0.$$

Sind umgekehrt die Bedingungsgleichungen (F'.) erfüllt, so folgt, dass die Function:

$$\text{(G.)} \qquad \varphi = K_1u_1 + K_6u_6$$

nach dem Umlauf W übergeht in

$$\text{(G'.)} \qquad (\varphi) = \lambda'\varphi,$$

wo λ' ebenfalls einen constanten Factor bedeutet.

Sind die Bedingungsgleichungen (F.) oder (F'.) für alle Umläufe W der unabhängigen Variablen erfüllt, so wird demnach die logarithmische Ableitung der Function φ eine rationale Function sein. Damit die Gleichung (F.) für alle Umläufe erfüllt werde, ist aber nothwendig und hinreichend, dass dieses für die um die einzelnen singulären Punkte der Gleichung (A.) vollzogenen Umläufe (die Fundamentalumläufe) geschieht.

Wir erhalten also die folgenden Sätze:

I. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung (B.) reductibel werde, ist die, dass die Beziehungen (F.) oder (F'.) für alle Fundamentalumläufe der unabhängigen Variablen bestehen.

II. Im Allgemeinen wird die Gleichung (B.) in dem Sinne reductibel, dass sie mit einer linearen, homogenen Differentialgleichung erster Ordnung mit rationalen Coefficienten ein Integral gemeinsam hat.

Der zweite Satz bestätigt sich in der That an den Differential- [186 gleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der ABELschen Integrale Genüge leisten*).

Hieran möge noch eine Bemerkung angeschlossen werden.

---

*) Vergl. Sitzungsberichte 1889, S. 715, 1898, S. 481[1]).

---

[1]) Abh. LIV, S. 36 und Abh. LXX, S. 288 dieses Bandes. R. F.

Die Anzahl der in einer beliebigen Differentialgleichung vierter Ordnung, deren Lösungen überall bestimmt sind, ausser den singulären Punkten auftretenden Parameter ist grösser als die Anzahl der durch die Gleichungen (F'.) für die einzelnen Fundamentalumläufe denselben aufzuerlegenden Bedingungen. Hieraus kann a priori geschlossen werden, dass, wenn die singulären Punkte von vorn herein festgelegt werden, man diese Parameter stets so bestimmen kann, dass die zweite Associirte der Differentialgleichung vierter Ordnung reductibel wird.

3.

Wir wollen nunmehr eine specielle Art von Differentialgleichungen vierter Ordnung behandeln, für welche die Bedingungen für die Reductibilität der zweiten Associirten, welche wir in den vorhergehenden Nummern gegeben haben, erfüllt sind.

Es werde vorausgesetzt, dass die Adjungirte der Differentialgleichung (A.):

$$\text{(A'.)} \qquad z^{(4)}+q_1 z^{(3)}+q_2 z^{(2)}+q_3 z'+q_4 z = 0$$

mit (A.) zu derselben Klasse gehört.

Seien wieder r_1, r_2, r_3, r_4 die Wurzeln der zu einem singulären Punkte a gehörenden determinirenden Fundamentalgleichung und y_1, y_2, y_3, y_4 Lösungen von (A.), welche bezüglich zu den Exponenten r_1, r_2, r_3, r_4 gehören. Bedeuten z_1, z_2, z_3, z_4 die bezüglich zu y_1, y_2, y_3, y_4 adjungirten Lösungen von (A'.), so gehören dieselben bekanntlich bezüglich zu den Exponenten:

$$-r_1+3,\ -r_2+3,\ -r_3+3,\ -r_4+3.$$

Unserer Voraussetzung gemäss giebt es rationale Functionen

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ A_3$$

von der Beschaffenheit, dass:

$$\text{(1.)} \qquad A(y) = A_0 y+A_1 y'+A_2 y^{(2)}+A_3 y^{(3)}$$

für jede Lösung y der Gleichung (A.) der Gleichung (A'.) Genüge leistet. Da die Exponenten, zu welchen die Functionen $A(y_k)$ gehören, sich bezüglich
187] von r_k um ganze Zahlen unterscheiden, so müssen, von additiven ganzen

Zahlen abgesehen, $-r_1+3, \dots, -r_4+3$ bis auf die Reihenfolge mit $r_1, \dots, r_4$ übereinstimmen.

Wir machen der Einfachheit wegen die Voraussetzung, dass für keinen der singulären Punkte zwei der Grössen r_k um ganze Zahlen von einander verschieden sind oder $2r_k$ eine ganze Zahl wird. Dann zerfallen die Wurzeln in zwei Gruppen zu je zweien, und in jeder dieser Gruppen ist die Summe der Elemente eine ganze Zahl, und diese Gruppirung ist nur auf eine Weise möglich. Wir wählen die Bezeichnung so, dass r_1+r_2, r_3+r_4 ganze Zahlen sind. Alsdann ergiebt sich:

I. Die Determinante Δ der Substitution (D.) ist der positiven Einheit gleich.

Ist nämlich

$$\text{(2.)} \qquad p_1 = \frac{\alpha}{x-a}+\mathfrak{P}(x-a),$$

so ist:

$$\text{(3.)} \qquad r_1+r_2+r_3+r_4 = 6-\alpha.$$

Es ist also α eine ganze Zahl, und daher die Hauptdeterminante des Fundamentalsystems $y_1, \dots, y_4$ eine rationale Function, woraus sich unmittelbar ergiebt: $\Delta = 1$.

Wir haben nunmehr

$$\text{(4.)} \qquad z_1 = \mu_1 A(y_2),\quad z_2 = \mu_2 A(y_1),\quad z_3 = \mu_3 A(y_4),\quad z_4 = \mu_4 A(y_3),$$

wo $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ constante Factoren bedeuten. Wenn dem Umlaufe W die Substitution (D.) der y_k entspricht, so ist die Substitution, welche z_1, z_2, z_3, z_4 durch denselben Umlauf erfahren, nach Gleichung (1.):

$$\text{(5.)} \qquad \sigma = \begin{pmatrix} \alpha_{22}, & \alpha_{21}\frac{\mu_1}{\mu_2}, & \alpha_{24}\frac{\mu_1}{\mu_3}, & \alpha_{23}\frac{\mu_1}{\mu_4} \\ \alpha_{12}\frac{\mu_2}{\mu_1}, & \alpha_{11}, & \alpha_{14}\frac{\mu_2}{\mu_3}, & \alpha_{13}\frac{\mu_2}{\mu_4} \\ \alpha_{42}\frac{\mu_3}{\mu_1}, & \alpha_{41}\frac{\mu_3}{\mu_2}, & \alpha_{44}, & \alpha_{43}\frac{\mu_3}{\mu_4} \\ \alpha_{32}\frac{\mu_4}{\mu_1}, & \alpha_{31}\frac{\mu_4}{\mu_2}, & \alpha_{34}\frac{\mu_4}{\mu_3}, & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

Bekanntlich erfahren die Elemente $z_1, \ldots, z_4$ durch den Umlauf W die zur Substitution (D.) reciproke Substitution.

Bezeichnen wir daher die zum Elemente α_{kl} adjungirte Unterdeterminante mit A_{kl}, so erfährt nach dem Umlaufe W das System $z_1, \ldots, z_4$ die Substitution

$$\tau = (A_{kl}). \tag{6.}$$

Durch Vergleichung mit (5.) folgt demnach:

188]

$$\left\{\begin{array}{llll} A_{11} = \alpha_{22}, & A_{12} = \alpha_{21}\frac{\mu_1}{\mu_2}, & A_{13} = \alpha_{24}\frac{\mu_1}{\mu_3}, & A_{14} = \alpha_{23}\frac{\mu_1}{\mu_4}, \\ A_{21} = \alpha_{12}\frac{\mu_2}{\mu_1}, & A_{22} = \alpha_{11}, & A_{23} = \alpha_{14}\frac{\mu_2}{\mu_3}, & A_{24} = \alpha_{13}\frac{\mu_2}{\mu_4}, \\ A_{31} = \alpha_{42}\frac{\mu_3}{\mu_1}, & A_{32} = \alpha_{41}\frac{\mu_3}{\mu_2}, & A_{33} = \alpha_{44}, & A_{34} = \alpha_{43}\frac{\mu_3}{\mu_4}, \\ A_{41} = \alpha_{32}\frac{\mu_4}{\mu_1}, & A_{42} = \alpha_{31}\frac{\mu_4}{\mu_2}, & A_{43} = \alpha_{34}\frac{\mu_4}{\mu_3}, & A_{44} = \alpha_{33}. \end{array}\right. \tag{7.}$$

Setzen wir:

$$\left\{\begin{array}{ll} A_{k1}A_{l2} - A_{k2}A_{l1} = \gamma_{kl}^{(1)}, & A_{k1}A_{l3} - A_{k3}A_{l1} = \gamma_{kl}^{(2)}, \\ A_{k1}A_{l4} - A_{k4}A_{l1} = \gamma_{kl}^{(3)}, & A_{k2}A_{l3} - A_{k3}A_{l2} = \gamma_{kl}^{(4)}, \\ A_{k2}A_{l4} - A_{k4}A_{l2} = \gamma_{kl}^{(5)}, & A_{k3}A_{l4} - A_{k4}A_{l3} = \gamma_{kl}^{(6)}, \end{array}\right. \tag{8.}$$

so ist nach bekannten Determinantensätzen:

$$\left\{\begin{array}{lll} \gamma_{13}^{(2)} = -(24)_4, & \gamma_{13}^{(4)} = -(24)_3, & \gamma_{13}^{(5)} = (24)_2, \\ \gamma_{14}^{(2)} = -(23)_5, & \gamma_{14}^{(4)} = (23)_3, & \gamma_{14}^{(5)} = -(23)_2, \\ \gamma_{24}^{(2)} = (13)_5, & \gamma_{24}^{(3)} = -(13)_4, & \gamma_{24}^{(4)} = -(13)_3, \\ \gamma_{23}^{(2)} = -(14)_5, & \gamma_{23}^{(3)} = (14)_4, & \gamma_{23}^{(5)} = -(14)_2. \end{array}\right. \tag{9.}$$

Andererseits folgt vermittelst der Gleichungen (7.):

$$\left\{\begin{array}{lll} \gamma_{13}^{(2)} = \frac{\mu_3}{\mu_4}(24)_4, & \gamma_{13}^{(4)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}(24)_3, & \gamma_{13}^{(5)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\mu_3}{\mu_4}(24)_2, \\ \gamma_{14}^{(2)} = \frac{\mu_4}{\mu_3}(23)_5, & \gamma_{14}^{(4)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\mu_4}{\mu_3}(23)_3, & \gamma_{14}^{(5)} = \frac{\mu_1}{\mu_2}(23)_2, \\ \gamma_{24}^{(2)} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\mu_4}{\mu_3}(13)_5, & \gamma_{24}^{(3)} = \frac{\mu_2}{\mu_1}(13)_4, & \gamma_{24}^{(4)} = \frac{\mu_4}{\mu_3}(13)_3, \\ \gamma_{23}^{(2)} = \frac{\mu_2}{\mu_1}(14)_5, & \gamma_{23}^{(3)} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\mu_3}{\mu_4}(14)_4, & \gamma_{23}^{(5)} = \frac{\mu_3}{\mu_4}(14)_2. \end{array}\right. \tag{10.}$$

Aus (9.) und (10.) ergiebt sich:

$$\left\{\begin{array}{ll} \left(\frac{\mu_3}{\mu_4}+1\right)(24)_4 = 0, & \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}+1\right)(24)_3 = 0, \\ \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\mu_3}{\mu_4}-1\right)(24)_2 = 0, & \left(\frac{\mu_4}{\mu_3}+1\right)(23)_5 = 0, \\ \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}+1\right)(23)_3 = 0, & \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\frac{\mu_4}{\mu_3}-1\right)(23)_2 = 0, \\ \left(\frac{\mu_3}{\mu_4}+1\right)(14)_2 = 0, & \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}+1\right)(14)_5 = 0, \\ \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\mu_3}{\mu_4}-1\right)(14)_4 = 0, & \left(\frac{\mu_4}{\mu_3}+1\right)(13)_3 = 0, \\ \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}+1\right)(13)_4 = 0, & \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{\mu_4}{\mu_3}-1\right)(13)_5 = 0. \end{array}\right. \tag{11.}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass im Allgemeinen: [189

$$\left\{\begin{array}{l} \mu_4 = -\mu_3, \\ \mu_2 = -\mu_1 \end{array}\right. \tag{12.}$$

sein muss. Analog, wie die Gleichungen (9.) und (10.), ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{ll} \gamma_{12}^{(1)} = (34)_6 = (12)_1, & \gamma_{12}^{(2)} = -(34)_5 = -\frac{\mu_2}{\mu_3}(12)_5, \\ \gamma_{12}^{(3)} = (34)_4 = -\frac{\mu_2}{\mu_4}(12)_4, & \gamma_{12}^{(4)} = (34)_3 = -\frac{\mu_1}{\mu_3}(12)_3, \\ \gamma_{12}^{(5)} = -(34)_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_4}(12)_2, & \gamma_{12}^{(6)} = (34)_1 = \frac{\mu_1}{\mu_3}\frac{\mu_2}{\mu_4}(12)_6; \end{array}\right. \tag{13.}$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \gamma_{34}^{(5)} = -(12)_2 = -\frac{\mu_3}{\mu_2}(34)_2, & \gamma_{34}^{(4)} = (12)_3 = -\frac{\mu_4}{\mu_2}(34)_3, \\ \gamma_{34}^{(3)} = (12)_4 = -\frac{\mu_3}{\mu_1}(34)_4, & \gamma_{34}^{(2)} = -(12)_5 = -\frac{\mu_4}{\mu_1}(34)_5, \\ \gamma_{34}^{(1)} = (12)_6 = \frac{\mu_3}{\mu_1}\frac{\mu_4}{\mu_2}(34)_1, & \gamma_{34}^{(6)} = (12)_1 = (34)_6. \end{array}\right. \tag{14.}$$

Die Form

$$\varphi = K_1 u_1 + K_6 u_6 \tag{15.}$$

verwandelt sich durch den Umlauf W in

$$(\varphi) = [K_1(12)_1 + K_6(34)_1]u_1 + [K_1(12)_6 + K_6(34)_6]u_6, \tag{16.}$$

wenn das Verhältniss $\frac{K_1}{K_6}$ den Gleichungen:

$$(17.)\quad \begin{cases} K_1(12)_2+K_6(34)_2 = 0, \\ K_1(12)_5+K_6(34)_5 = 0, \end{cases}$$

$$(17a.)\quad \begin{cases} K_1(12)_3+K_6(34)_3 = 0, \\ K_1(12)_4+K_6(34)_4 = 0, \end{cases}$$

genügt. Aus den Gleichungen (17.) und (17a.) folgt vermittelst der Gleichungen (13.), (14.) der gemeinsame Werth:

$$(18.)\quad K_6 = -K_1\frac{\mu_2}{\mu_1}.$$

Nach den Gleichungen (13.), (14.) ist ferner

$$(19.)\quad \begin{cases} K_1(12)_1+K_6(34)_1 = K_1\left\{(12)_1+\frac{\mu_1}{\mu_2}(12)_6\right\}, \\ K_1(12)_6+K_6(34)_6 = K_1\frac{\mu_2}{\mu_1}\left\{(12)_1+\frac{\mu_1}{\mu_2}(12)_6\right\}. \end{cases}$$

190] Es hat demnach die Form

$$(15a.)\quad \varphi = u_1+\frac{\mu_2}{\mu_1}u_6$$

die Eigenschaft, nach dem Umlaufe W in

$$(20.)\quad (\varphi) = \varphi\left[(12)_6\frac{\mu_1}{\mu_2}+(12)_1\right]$$

überzugehen.

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

II. **Die zweite Associirte einer mit ihrer Adjungirten zu derselben Klasse gehörigen Differentialgleichung vierter Ordnung ist reductibel*).**

In Übereinstimmung mit II. voriger Nummer folgt aber ferner aus Gleichung (20.) die Art, wie die Reductibilität sich herstellt, nämlich:

III. **Die zweite Associirte wird durch eine Function befriedigt, deren logarithmische Ableitung rational ist.**

*) Diesen Satz hat mein Sohn RICHARD in einer demnächst zu veröffentlichenden Arbeit auf einem anderen Wege bewiesen[1]).

1) Vgl. Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 121, S. 205—209 „Über lineare Differentialgleichungen, welche mit ihrer Adjungirten zu derselben Art gehören". R. F.

4.

Ich habe früher*) für die n^{te} Associirte einer Differentialgleichung $2n^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(1.)\quad y^{(2n)}+p_1y^{(2n-1)}+\cdots+p_{2n}y = 0,$$

nämlich

$$(2.)\quad u^{(\nu)}+P_1u^{(\nu-1)}+\cdots+P_\nu u = 0^{**})$$

nachgewiesen, dass dieselbe zu ihrer Adjungirten:

$$(3.)\quad v^{(\nu)}+Q_1v^{(\nu-1)}+\cdots+Q_\nu v = 0$$

in der Beziehung steht, dass

$$(4.)\quad u = H[A_0v+A_1v'+\cdots+A_{\nu-1}v^{(\nu-1)}]$$

ist, wo H die Hauptdeterminante von (1.) und $A_0, A_1, \ldots, A_{\nu-1}$ rationale Functionen von x bedeuten, oder, was dasselbe besagt, dass die Differentialgleichung für $\frac{u}{\sqrt{H}}$ mit ihrer Adjungirten zu derselben Klasse gehört. Ich habe daselbst***) diesen Satz mit Hülfe einer aus der Function u und ihren Ableitungen gebildeten quadratischen Form bewiesen. Ich will hier den- [191 selben Satz durch eine andere Methode herleiten, welche den Vorzug hat, in die Beschaffenheit der Coefficienten A_k eine tiefere Einsicht zu gewähren. Ich beschränke mich dabei, ohne der Allgemeinheit Abbruch zu thun, auf den Fall, dass die Differentialgleichung (1.) von der vierten Ordnung ist.

Es sei also y_1, y_2, y_3, y_4 ein Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung:

$$(1a.)\quad y^{(4)}+p_1y^{(3)}+\cdots+p_4y = 0,$$

deren Integrale überall bestimmt sind. Es mögen dann $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_6$ dieselbe Bedeutung haben, wie in Gleichung (1.) No. 1.

*) Vergl. Sitzungsberichte 1888, S. 1116 ff.[1]).
**) Vergl. a. a. O. S. 1118, Gleichung (H.)[2]).
***) Vergl. a. a. O. S. 1120[3]).

1) Abh. LIV, S. 2 ff. dieses Bandes. R. F.
2) Ebenda S. 5. R. F.
3) Ebenda S. 7—8. R. F.

Wir wollen

$$\text{(H.)}\qquad u_1^{(k)}u_6^{(l)}+u_1^{(l)}u_6^{(k)}-(u_2^{(k)}u_5^{(l)}+u_2^{(l)}u_5^{(k)})+u_3^{(k)}u_4^{(l)}+u_3^{(l)}u_4^{(k)} = P(k,l)$$

setzen.

Für ein anderes Fundamentalsystem der Gleichung (1a.) $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ seien $w_1, w_2, \dots, w_6$ ebenso aus $\eta_1, \dots, \eta_4$ gebildet, wie $u_1, \dots, u_6$ aus $y_1, \dots, y_4$, also

$$\text{(5.)}\qquad w_1 = \eta_1\eta_2'-\eta_2\eta_1', \quad \dots, \quad w_6 = \eta_3\eta_4'-\eta_4\eta_3'.$$

Sei

$$\text{(6.)}\qquad \eta_k = c_{k1}y_1+c_{k2}y_2+c_{k3}y_3+c_{k4}y_4, \qquad (k=1,2,3,4)$$

so ergiebt sich aus bekannten Determinantensätzen:

$$\text{(J.)}\qquad P(k,l) = \Delta Q(k,l),$$

wo

$$\text{(H'.)}\qquad Q(k,l) = w_1^{(k)}w_6^{(l)}+w_1^{(l)}w_6^{(k)}-(w_2^{(k)}w_5^{(l)}+w_2^{(l)}w_5^{(k)})+w_3^{(k)}w_4^{(l)}+w_3^{(l)}w_4^{(k)}$$

und Δ die Determinante der Grössen c_{kl}, also

$$\text{(7.)}\qquad \Delta = |c_{kl}|$$

ist.

Aus (J.) ergiebt sich zunächst:

I. Es ist $P(k,l)$ eine Invariante in Bezug auf die verschiedenen Fundamentalsysteme y_1, y_2, y_3, y_4 der Gleichung (1a.). Aus derselben Gleichung (J.) schliessen wir ferner, dass $\frac{1}{H}P(k,l)$ durch keinen Umlauf der unabhängigen Variablen geändert wird, wenn H die Hauptdeterminante der Gleichung (1a.) ist. Da die Lösungen von (1a.) überdies überall bestimmt sind, so erhalten wir den Satz:

$$\text{II.}\qquad \varphi_{kl}(x) = \frac{1}{H}P(k,l)$$

ist eine rationale Function von x.

192] Zur Bestimmung dieser rationalen Function können wir nach Satz I. für $y_1, \dots, y_4$ ein zu einem singulären Punkte a der Gleichung (1a.) zugehöriges kanonisches Fundamentalsystem wählen. Sind r_1, r_2, r_3, r_4 die Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, welche bezüglich den Elementen $y_1, \dots, y_4$ entsprechen, so werden im Allgemeinen $u_1, u_2, \dots, u_6$ zu

den Exponenten

$$r_1+r_2-1,\ r_1+r_3-1,\ \dots,\ r_3+r_4-1$$

gehören und demzufolge in der Umgebung von $x=a$:

$$\text{(8.)}\qquad P(k,l) = (x-a)^{\Sigma r-k-l-2}\mathfrak{P}_{kl}(x-a)$$

sein, wo

$$\Sigma r = r_1+r_2+r_3+r_4,$$

$\mathfrak{P}_{kl}(x-a)$ eine nach ganzen, positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe bedeutet. In der Umgebung von a ist aber:

$$\text{(9.)}\qquad H = (x-a)^{\Sigma r-6}\mathfrak{P}_{kl}'(x-a),$$

wo $\mathfrak{P}_{kl}'(x-a)$ eine nach ganzen, positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe bedeutet, die für $x=a$ nicht verschwindet*).

Folglich ist

$$\text{(10.)}\qquad \frac{P(k,l)}{H} = (x-a)^{-k-l+4}\mathfrak{P}_{kl}^{(2)}(x-a).$$

Seien s_1, s_2, s_3, s_4 die Wurzeln der zu $x=\infty$ gehörenden determinirenden Fundamentalgleichung, und wählen wir für $y_1, \dots, y_4$ das zu $x=\infty$ gehörende kanonische Fundamentalsystem, dessen Elemente bezüglich zu $s_1, \dots, s_4$ gehören, so ergiebt sich ebenso:

$$\text{(8a.)}\qquad P(k,l) = x^{-\Sigma s-2-k-l}Q_{kl}\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $Q_{kl}\left(\frac{1}{x}\right)$ eine nach ganzen, positiven Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihe bedeutet. Nun ist aber in der Umgebung von $x=\infty$

$$\text{(9a.)}\qquad H = x^{-\Sigma s-6}Q_{kl}'\left(\frac{1}{x}\right),$$

wo $Q_{kl}'\left(\frac{1}{x}\right)$ eine nach ganzen, positiven Potenzen von $\left(\frac{1}{x}\right)$ fortschreitende Reihe bedeutet, die für $x=\infty$ nicht verschwindet.

Es ist also in der Umgebung von $x=\infty$

$$\text{(10a.)}\qquad \frac{P(k,l)}{H} = x^{4-k-l}Q_{kl}^{(2)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

*) Crelles Journal, Bd. 66, S. 144[1]).

[1]) Abh. VI, S. 184, Band I dieser Ausgabe. R. F.

193] Für $k+l<4$ muss also zufolge der Gleichung (10.) $\varphi_{kl}(x)$ für $x=a$ mindestens von der $(4-k-l)^{\text{ten}}$ Ordnung verschwinden.

Ist also σ die Anzahl der im Endlichen gelegenen singulären Punkte der Gleichung (1a.), so würde $\varphi_{kl}(x)$ eine ganze, rationale Function mindestens $\sigma(4-k-l)^{\text{ten}}$ Grades sein. Nach Gleichung (10a.) aber ist dieser Grad nicht höher als $4-k-l$.

III. Ist also die Anzahl σ der im Endlichen gelegenen singulären Punkte der Gleichung (1a.) grösser als 1, so ist $\varphi_{kl}(x)$, für $k+l<4$, identisch Null.

Für $k+l=4$ ist nach Gleichung (10.) $\varphi_{kl}(x)$ in keinem der im Endlichen gelegenen Punkte unendlich, aber nach (10a.) auch im Unendlichen nicht; es folgt also:

IV. Für $k+l=4$ ist $\varphi_{kl}(x)$ eine Constante γ_{kl}.

Aus der Definitionsgleichung (H.) für $P(k,l)$ ergiebt sich

$$\text{(K.)}\qquad \mathrm{D}P(k,l) = P(k+1,l)+P(k,l+1),$$

wo D den Differentialquotienten nach x bedeutet, und

$$\text{(L.)}\qquad P(l,k) = P(k,l).$$

Nach Satz III. ist nun

$$\text{(11.)}\qquad \begin{cases} P(0,0)=0, & P(0,1)=0, \quad P(0,2)=0, \quad P(0,3)=0, \\ P(1,1)=0, & P(1,2)=0, \quad P(0,4)=\gamma_{04}H, \\ P(1,3)=\gamma_{13}H, & P(2,2)=\gamma_{22}H. \end{cases}$$

Nach (K.) ist

$$0 = \mathrm{D}P(0,3) = P(1,3)+P(0,4),$$

also

$$(\alpha.)\qquad P(1,3) = -P(0,4).$$

Aus

$$0 = \mathrm{D}P(1,2) = P(2,2)+P(1,3)$$

ergiebt sich

$$(\beta.)\qquad P(2,2) = P(0,4).$$

Ferner ist

$$(\gamma.)\qquad 0 = \mathrm{D}^2P(0,3) = P(2,3)+2P(1,4)+P(0,5).$$

Durch Differenzirung von $(\beta.)$ erhalten wir

$$(\delta.)\qquad 2P(2,3) = P(1,4)+P(0,5).$$

Aus $(\gamma.)$ und $(\delta.)$ folgt

$$(\varepsilon.)\qquad P(1,4) = -\frac{3}{5}P(0,5); \quad P(2,3) = \frac{1}{5}P(0,5).$$

Setzen wir diese Werthe in [194

$$\mathrm{D}P(0,4) = P(1,4)+P(0,5)$$

ein, so ergiebt sich

$$P(0,5) = \frac{5}{2}\mathrm{D}P(0,4),$$

also nach $(\varepsilon.)$

$$\text{(M.)}\qquad P(1,4) = -\frac{3}{2}\mathrm{D}P(0,4) = \frac{3}{2}\mathrm{D}P(1,3).$$

5.

Um nun den oben bezeichneten Satz zu beweisen, bedienen wir uns eines Verfahrens, welches wir bereits bei früherer Gelegenheit*) angewendet haben. Aus der Gleichung

$$P(0,0) = F(u_1,u_2,\dots,u_6) = 2(u_1u_6-u_2u_5+u_3u_4) = 0$$

folgt nämlich das System:

$$\text{(N.)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u_1}u_1 + \dfrac{\partial F}{\partial u_2}u_2 + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial u_6}u_6 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_1}u_1' + \dfrac{\partial F}{\partial u_2}u_2' + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial u_6}u_6' = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_1}u_1^{(2)} + \dfrac{\partial F}{\partial u_2}u_2^{(2)} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial u_6}u_6^{(2)} = -2P(1,1) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_1}u_1^{(3)} + \dfrac{\partial F}{\partial u_2}u_2^{(3)} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial u_6}u_6^{(3)} = -2P(1,2) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_1}u_1^{(4)} + \dfrac{\partial F}{\partial u_2}u_2^{(4)} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial u_6}u_6^{(4)} = -2P(1,3), \\ \dfrac{\partial F}{\partial u_1}u_1^{(5)} + \dfrac{\partial F}{\partial u_2}u_2^{(5)} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial u_6}u_6^{(5)} = -2P(1,4)-2\mathrm{D}P(1,3). \end{cases}$$

*) Vergl. Acta mathematica, Bd. 1, p. 330 ff. [1]).

[1]) Abh. XI., S. 308 ff., Band II dieser Ausgabe. R. F.

Bezeichnen wir mit $v_1, v_2, \ldots, v_6$ die zu $u_1, u_2, \ldots, u_6$ bezüglichen adjungirten Lösungen der Gleichung (3.) (für $n = 2$, $\nu = 6$), mit δ die Hauptdeterminante der $u_1, u_2, \ldots, u_6$, und setzen

$$(1.)\qquad \begin{cases} \lambda = 2\left[-P(1,4) - \mathrm{D}P(1,3) + \dfrac{d\log\delta}{dx}P(1,3)\right], \\ \mu = 2P(1,3), \end{cases}$$

so ergiebt die Auflösung der Gleichungen (N.)

$$(2.)\qquad \frac{\partial F}{\partial u_k} = \lambda v_k + \mu v_k'. \qquad (k = 1, \ldots, 6)$$

195] Da nach den Gleichungen (11.) und (M.) voriger Nummer

$$P(1,3) = \gamma H \ (\gamma \text{ constant}),$$
$$P(1,4) = \frac{3}{2}\mathrm{D}P(1,3) = \frac{3}{2}\gamma\frac{dH}{dx},$$

und da

$$\frac{d\log\delta}{dx} = -P_1, \quad \frac{d\log H}{dx} = -p_1,$$

so ist

$$(\mathrm{O.})\qquad \lambda = \gamma H(5p_1 - 2P_1), \quad \mu = 2\gamma H.$$

Die Gleichungen (2.) sind gleichbedeutend mit

$$(\mathrm{P.})\qquad \begin{cases} 2u_6 = \lambda v_1 + \mu v_1', & 2u_3 = \lambda v_4 + \mu v_4', \\ -2u_5 = \lambda v_2 + \mu v_2', & -2u_2 = \lambda v_5 + \mu v_5', \\ 2u_4 = \lambda v_3 + \mu v_3', & 2u_1 = \lambda v_6 + \mu v_6', \end{cases}$$

und diese Gleichungen beweisen nicht nur den am Anfange der Nummer 4 erwähnten Satz, sondern sie bestimmen auch die Beziehung der Lösungen $u_1, \ldots, u_6$ zu ihren adjungirten vollständig.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

S. 295, Zeile 6 des Textes wurde hinter Differentialgleichung »n^{ter} Ordnung« eingefügt,
„ 297, „ 2 enthält statt vorhanden sind,
„ 10 »und seien« vor r_1, r_2, r_3, r_4 eingefügt,
„ 299, „ 9 v. u. bestehen statt besteht,
Fussnote 715 statt 57,
„ 302, Zeile 5 v. u. Gleichungen statt Gleichung,
„ 304, „ 1 »von« vor $\frac{K_1}{K_6}$ gestrichen,
„ 7 v. u. Die zweite Associirte statt die Differentialgleichung der zweiten Associirten,
„ 6 v. u. Differentialgleichung statt Gleichung,
„ 306, „ 9 v. u. der statt zur,
„ 308, „ 14 Definitionsgleichung (H.) statt Differentialgleichung (H.),
„ 16 »und« am Ende hinzugefügt,
„ 310, „ 2 »und« vor mit δ unterdrückt.

2) Die in der No. 3, Gleichung (12.) aufgestellte Behauptung: Aus den Gleichungen (11.) folgt, dass im Allgemeinen $\mu_4 = -\mu_3$, $\mu_2 = -\mu_1$ sein muss, kann nicht aufrecht erhalten werden. Vielmehr muss zwischen den beiden wesentlich verschiedenen Fällen: 1) $\mu_4 = \mu_3$, $\mu_2 = \mu_1$ und 2) $\mu_4 = -\mu_3$, $\mu_2 = -\mu_1$ unterschieden werden. Auf den vorliegenden Gegenstand bezieht sich meine Arbeit (Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 123, S. 54–65, Über lineare homogene Differentialgleichungen, welche mit ihrer Adjungirten zu derselben Art gehören). Ich habe daselbst (No. V) gezeigt, dass im Falle 2) die Grösse A_1 (No. 3, Gleichung (1.) der vorstehenden Arbeit meines Vaters) verschwindet, und dass A_2 ein Integral der zweiten Associirten wird, was mit dem Satze III. der No. 3 übereinstimmt. Im Falle 1) dagegen, der mit den Gleichungen (11.), (13.) und (14.) der No. 3 gleichfalls verträglich ist, wird die zweite Associirte in anderer Weise reductibel.

Eine ähnliche Bemerkung gilt auch von dem Satze II. der No. 2. Wenn die Reductibilität der zweiten Associirten so erfolgt, wie in diesem Satze angegeben, so besteht zwischen einem Integral y der Gleichung (A.) und einem Integral z ihrer Adjungirten eine Bezeichnung

$$z = A_0 y + A_1 y' + A_2 y'',$$

wo die logarithmischen Ableitungen von A_0, A_1, A_2 rationale Functionen von x sind. Die Reductibilität der zweiten Associirten kann aber auch in ganz anderer Weise erfolgen. Mein Vater ist, wie es scheint, zu der speciellen Art von Reductibilität zufolge der von ihm in der No. 1 gemachten Annahme über die Natur der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen und der Annahme (C.) bezw. (C'.) derselben Nummer gelangt.

R. F.