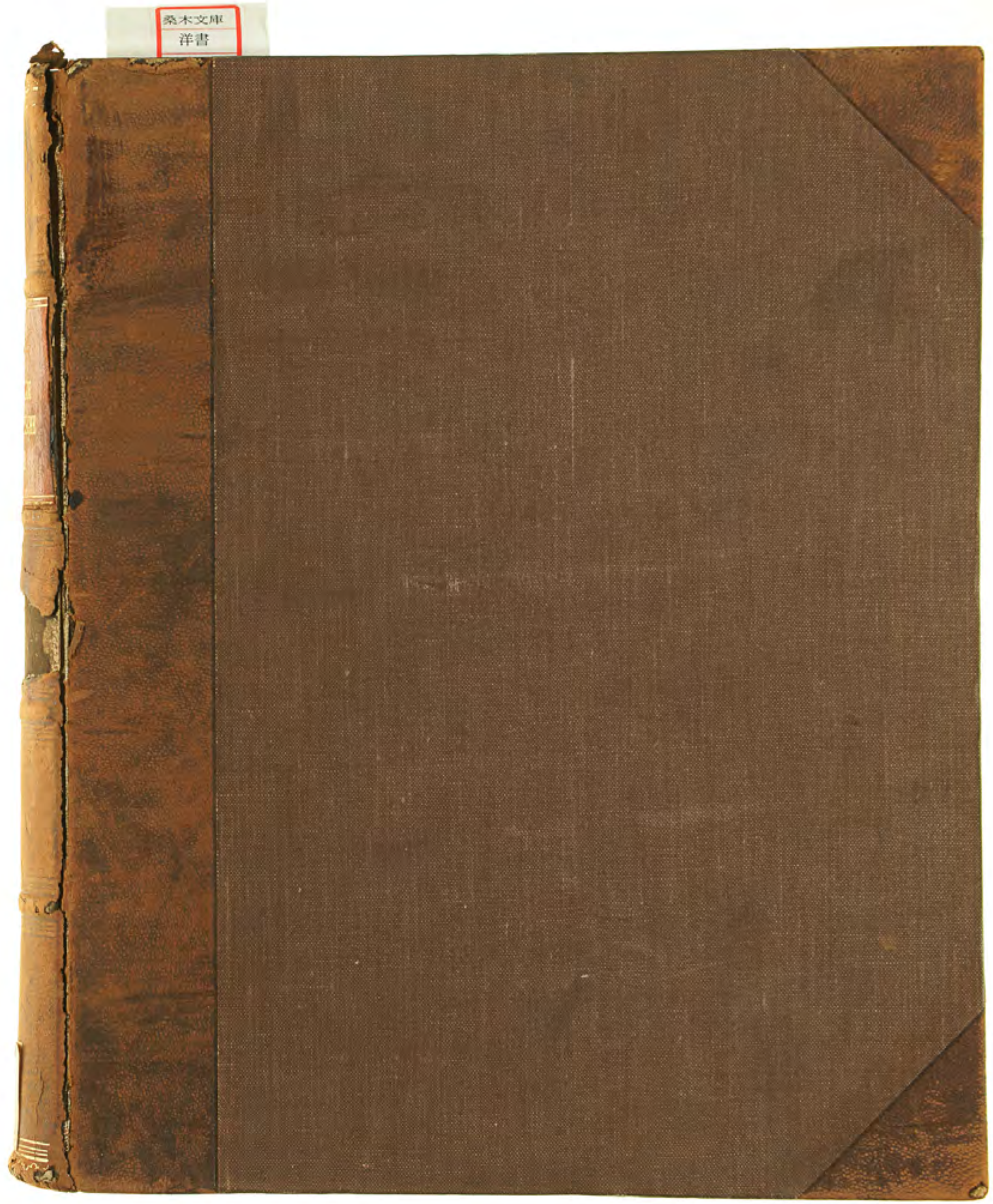

桑木文庫
洋書

GESAMMELTE
MATHEMATISCHE WERKE

VON

L. FUCHS.

GESAMMELTE MATHEMATISCHE WERKE

VON

L. FUCHS.

HERAUSGEGEBEN

VON

RICHARD FUCHS IN BERLIN. UND LUDWIG SCHLESINGER IN KLAUSENBURG.

DRITTER BAND:

ABHANDLUNGEN (1888—1902) UND REDEN

REDIGIRT

VON

RICHARD FUCHS.

BERLIN.
MAYER & MÜLLER.
1909.

VORWORT.

Hiermit übergebe ich den dritten und letzten Band der mathematischen Werke meines Vaters, L. Fuchs, der Öffentlichkeit. Er enthält die letzten zweiundzwanzig Arbeiten, die der Verewigte vom Jahre 1888 an bis zu seinem Tode veröffentlicht hat, die drei gedruckten Akademischen Reden aus den Jahren 1873, 1899, 1900 und diejenigen Nachrufe, die er in seiner Eigenschaft als Redakteur des Journals für die reine und angewandte Mathematik verfasst hat. Die redaktionelle Arbeit dieses Bandes wurde in derselben Weise wie die der beiden ersten Bände durchgeführt. Auch hier sind die Abhandlungen im Wesentlichen unverändert wiedergegeben worden. Alle bemerkenswerthen Abänderungen und alle sonst nothwendigen Angaben findet man in den Anmerkungen, die den einzelnen Arbeiten folgen.

Es ist mir ein Bedürfnis, an dieser Stelle allen denen, die mir bei der Drucklegung ihre Hilfe haben zu Theil werden lassen, meinen herzlichsten Dank zu sagen. Bei der Revision der Abhandlungen hat mich der andere Herausgeber, Herr L. Schlesinger, durch seine werthvollen Rathschläge unterstützt. Herr H. Vogt hat wiederum die in französischer Sprache verfassten Noten (LXIII, LXVI) in sprachlicher Hinsicht revidirt und mein Freund H. Lemke hat eine Correctur der Druckbogen gelesen. Vor allem aber richtet sich mein Dank an Herrn L. Heffter für die treue Sorgfalt, mit der er mir bei der Durchsicht und der Correctur aller Arbeiten in so wirkungsvoller Weise seine Hilfe hat zu Theil werden lassen.

Es war ursprünglich geplant, dass den Abschluss dieses dritten Bandes etwaige nachgelassene Arbeiten meines Vaters bilden sollten. Eine genaue

Durchsicht des handschriftlichen Nachlasses hat mir aber gezeigt, dass zur Zeit druckfertiges oder leicht druckfertig zu machendes Material nicht vorhanden ist. Da es aber gewiss nicht im Sinne des Entschlafenen wäre, Unfertiges der Öffentlichkeit zu übergeben, so musste zunächst von einer solchen Veröffentlichung Abstand genommen werden, wenn die Herausgabe dieses Bandes nicht auf unbestimmte Zeit verschoben werden sollte.

Die am Schlusse dieses Bandes befindlichen von Herrn Schlesinger angefertigten Register des ganzen Werkes sollen seine Benutzung erleichtern.

Schliesslich sei auch an dieser Stelle der Verlagsbuchhandlung für ihr freundliches Entgegenkommen und für die vornehme Ausstattung der Bände, durch die sie dem Verewigten ein auch äusserlich schönes Denkmal gesetzt hat, der Dank der Herausgeber ausgesprochen.

Halensee bei Berlin, im October 1908.

Richard Fuchs.

INHALTS-VERZEICHNISS.

LIV.

ZUR THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin; Einleitung und No. 1—7, 1888, XLII, S. 1115—1126, vorgelegt am 1. November, ausgegeben am 8. November 1888; No. 8—15, 1888, L, S. 1273—1290, vorgelegt am 13. December, ausgegeben am 20. December 1888; No. 16—21, 1889, XXXVI, S. 713—726, vorgelegt am 18. Juli, ausgegeben am 25. Juli 1889; No. 22—31, 1890, II, S. 21—38, vorgelegt am 9. Januar, ausgegeben am 16. Januar 1890).

Die folgenden Entwickelungen bilden einen Theil von Untersuchungen, [1115 welche ich über lineare Differentialgleichungen angestellt habe, und welche ihren Ausgangspunkt von den folgenden Erwägungen genommen haben. Es sei $y_1, y_2, \ldots, y_p$ ein Fundamentalsystem von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung p^{ter} Ordnung, deren Coefficienten rationale Functionen der unabhängigen Variablen x sind. Es seien $y_1, y_2, \ldots, y_\lambda$ λ willkürliche Elemente aus der Reihe $y_1, y_2, \ldots, y_p$, und es werde eine Determinante von λ^2 Elementen gebildet, deren Horizontalreihen aus den Ableitungen gleicher Ordnung von $y_1, y_2, \ldots, y_p$ bestehen. Die Ordnung dieser Ableitungen sei durch eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p-1$ bestimmt und sei für die verschiedenen Horizontalreihen verschieden. Solcher Determinanten können wir

$$q = \frac{p(p-1)\ldots(p-\lambda+1)}{1 \cdot 2 \ldots \lambda}$$

bilden. Bezeichnen wir dieselben in irgend einer Reihenfolge mit $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{q-1}$, so ergiebt sich für diese Functionen das System von Differentialgleichungen

$$\frac{du_k}{dx} = A_{k0} u_0 + A_{k1} u_1 + \cdots + A_{k,q-1} u_{q-1},$$

wo $A_{k0}, A_{k1}, \ldots, A_{k,q-1}$ rationale Functionen von x bedeuten. Aus diesem Systeme können wir demnach für jede der Functionen u_k eine lineare homogene Differentialgleichung q^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten herleiten.

Das Folgende beschäftigt sich mit der Untersuchung dieser Differentialgleichungen, unter der Voraussetzung, dass die Ordnung p der vorgelegten Differentialgleichung eine gerade Zahl $2n$ ist, und sie bezieht sich auf den Fall, dass $\lambda = n$ gewählt wird.

In einer folgenden Mittheilung beabsichtige ich eine Fortsetzung der gegenwärtigen Untersuchung und eine Anwendung zu veröffentlichen, welche ich von derselben gemacht habe, und die Ziele darzulegen, welche ich dabei im Auge gehabt.

1.

1116] Es seien die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + p_1 \frac{d^{2n-1} y}{dx^{2n-1}} + \cdots + p_{2n} y = 0$$

rationale Functionen von x.

Sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n von einander linear unabhängige Integrale der Gleichung (A.), so wollen wir eine Determinante mit n^2 Elementen bilden, deren Horizontalreihen aus den Ableitungen gleicher Ordnung von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bestehen. Die Ordnung dieser Ableitungen sei durch eine der Zahlen $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$ bestimmt und sei für die verschiedenen Horizontalreihen verschieden. Solcher Determinanten können wir

$$\nu = \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1.2\ldots n}$$

bilden. Bezeichnen wir dieselben in irgend einer Reihenfolge mit $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}$ und setzen nur fest, dass u_0 diejenige unter diesen Determinanten sei, in welcher die Ordnungen der Ableitungen in den verschiedenen Horizontalreihen der Reihe nach $0, 1, 2, \ldots, n-1$ sind, und welche wir die Hauptdeterminante von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ nennen wollen.

Bedeutet $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ein anderes System von n linear unabhängigen Integralen der Gleichung (A.), so mögen diejenigen Determinanten, welche aus $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ hervorgehen, wenn an Stelle von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bez. $z_1, z_2, \ldots, z_n$ gesetzt werden, bez. mit $v_0, v_1, \ldots, v_{\nu-1}$ bezeichnet werden.

Bezeichnen wir ferner die Hauptdeterminante der $2n$ Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_n; z_1, z_2, \ldots, z_n$ mit Δ, so ist*)

$$\text{(B.)} \qquad \Delta = Ce^{-\int p_1 dx},$$

wo C eine Constante bezeichnet, welche von Null verschieden ist, wenn $y_1, y_2, \ldots, y_n; z_1, z_2, \ldots, z_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A.) ausmachen, dagegen den Werth Null annimmt, wenn dieses nicht der Fall ist.

Zerlegen wir Δ in eine Summe von Producten aus Partialdeterminanten n^{ter} Ordnung, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (B.) zwischen $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}; v_0, v_1, \ldots, v_{\nu-1}$ die Relation

$$\text{(C.)} \qquad \Delta = \sum_{0}^{\nu-1}{}_{\lambda} \pm u_\lambda v_{\nu-1-\lambda} = Ce^{-\int p_1 dx},$$

wo die Vorzeichen nach bekannter Regel zu bestimmen sind, und wo C den oben bezeichneten constanten Werth hat.

2.

Ist $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung [1117 (A.), bilden wir die ν Combinationen derselben zu je n und setzen in u_λ (No. 1) an Stelle von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ je eine solche Combination, so erhalten wir ν verschiedene Grössen u_λ, welche wir mit $u_{0\lambda}, u_{1\lambda}, \ldots, u_{\nu-1,\lambda}$ bezeichnen wollen, indem wir festsetzen, dass $u_{\nu-1-\mu,\lambda}$ aus denjenigen Functionen y_k gebildet werde, welche vom Systeme $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ übrig bleiben, nachdem hiervon die zur Bildung von $u_{\mu\lambda}$ zu verwendende Combination weggenommen worden.

Wir bilden die Determinante

$$\text{(1.)} \qquad P = |u_{\mu\lambda}|. \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, \nu-1 \\ \lambda = 0, 1, \ldots, \nu-1 \end{pmatrix}$$

*) Siehe meine Arbeit in BORCHARDTS Journal, Bd. 66, S. 126—130 [1]).

[1]) Abh. VI, S. 164—168, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Da

$$|u_{\mu\lambda}| = |u_{\nu-1-\mu,\,\nu-1-\lambda}|,$$

so ergiebt sich

$$P^2 = |u_{\mu\lambda}|\,|u_{\nu-1-\mu,\,\nu-1-\lambda}|. \tag{2.}$$

Vollführen wir die Multiplication der beiden Determinanten rechterhand, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Gleichung (C.) eine Determinante mit ν^2 Elementen, deren Diagonalglieder, abgesehen von einem constanten Factor, den Werth $e^{-\int p_1 dx}$ annehmen, während die übrigen verschwinden. Demnach ergiebt sich

$$P = Ce^{-\frac{\nu}{2}\int p_1 dx}, \tag{D.}$$

wo C eine von Null verschiedene Constante bedeutet.

Aus Gleichung (D.) folgt

I. Die Determinante P ist nicht identisch Null.

Sei

$$\varphi_0 u_0 + \varphi_1 u_1 + \cdots + \varphi_{\nu-1} u_{\nu-1} = 0 \tag{3.}$$

eine Gleichung, welche für jede beliebige Combination $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bestehe, so ist demgemäss auch

$$\varphi_0 u_{l0} + \varphi_1 u_{l1} + \cdots + \varphi_{\nu-1} u_{l,\nu-1} = 0. \qquad (l = 0, 1, \ldots, \nu-1) \tag{4.}$$

Da aber die Determinante P dieser Gleichungen mit den Unbekannten $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}$ nach Satz I. von Null verschieden ist, so muss

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \cdots = \varphi_{\nu-1} = 0$$

sein, d. h.

II. Zwischen $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ kann nicht eine für jede Combination $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gültige lineare homogene Relation bestehen.

Differentiiren wir u_λ und ersetzen die Ableitungen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$, deren Ordnung $2n$ oder grösser als $2n$, durch ihre aus der Gleichung (A.) sich ergebenden Ausdrücke in den Ableitungen niedrigerer Ordnung, so erhalten wir

1118] (E.) $$\frac{du_\lambda}{dx} = \varphi_{\lambda 0} u_0 + \varphi_{\lambda 1} u_1 + \cdots + \varphi_{\lambda,\nu-1} u_{\nu-1}, \quad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1)$$

worin $\varphi_{\lambda k}$ rationale Functionen von x bedeuten.

Aus diesem Systeme von Gleichungen ergiebt sich, dass auch die höheren Ableitungen von u_λ lineare homogene Functionen von $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ sind. Es sei insbesondere

$$\frac{d^k u_0}{dx^k} = \psi_{k0} u_0 + \psi_{k1} u_1 + \cdots + \psi_{k,\nu-1} u_{\nu-1}, \tag{F.}$$

wo ψ_{kl} rationale Functionen von x sind, so bleiben diese Gleichungen bestehen, wenn wir in denselben u_0 durch u_{l0} und u_λ durch $u_{l\lambda}$ ersetzen. Bezeichnen wir die Hauptdeterminante der Functionen $u_{00}, u_{10}, u_{20}, \ldots, u_{\nu-1,0}$ mit ϑ, so ist nach den Gleichungen (1.) und (F.)

$$\vartheta = QP, \tag{G.}$$

wenn wir die Determinante

$$|\psi_{kl}| = Q \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, \nu-1 \\ l = 1, \ldots, \nu-1 \end{pmatrix} \tag{5.}$$

setzen. Aus Gleichung (D.) folgt daher:

III. Die Determinante ϑ ist dann und nur dann Null, wenn die Determinante Q verschwindet.

3.

In den Gleichungen (F.) mögen dem k die Werthe $1, 2, \ldots, \nu$ beigelegt werden. Aus dem entstehenden System von ν Gleichungen eliminiren wir $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}$, so ergiebt sich, wenn wir u statt u_0 setzen, als Resultat der Elimination

$$\frac{d^\nu u}{dx^\nu} + P_1 \frac{d^{\nu-1} u}{dx^{\nu-1}} + \cdots + P_\nu u = 0, \tag{H.}$$

wo $P_1, \ldots, P_\nu$ rationale Functionen von x bedeuten. Diese Differentialgleichung wird durch die ν Functionen $u_{00}, u_{10}, \ldots, u_{\nu-1,0}$ befriedigt.

Ist die Determinante Q identisch Null, so können aus den ν Gleichungen, welche aus (F.) für $k = 0, 1, \ldots, \nu-1$ zu bilden sind, $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}$ eliminirt werden. Wir erhalten alsdann als Resultat der Elimination eine Differentialgleichung für u niedrigerer als ν^{ter} Ordnung, welcher die Functionen $u_{00}, u_{10}, \ldots, u_{\nu-1,0}$ genügen müssen. Ist aber Q von Null verschieden, so ergiebt sich aus Satz III. vor. No., dass die Differentialgleichung, welcher diese Functionen genügen, nicht niedriger als ν^{ter} Ordnung sein könne. Denn da ϑ von

Null verschieden ist, so ist das Bestehen einer linearen homogenen Relation 1119] mit constanten Coefficienten zwischen $u_{00}, u_{10}, \ldots, u_{\nu-1,0}$ ausgeschlossen*), eine solche Relation würde aber aus der Annahme, dass diese Functionen einer Differentialgleichung niedrigerer als ν^{ter} Ordnung genügten, hervorgehen müssen. Wir haben also das Resultat:

I. Die Functionen $u_{00}, u_{10}, \ldots, u_{\nu-1,0}$ genügen einer linearen homogenen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten. Dieselbe wird erhalten, wenn wir in (F.) successive $k = 0, 1, 2, \ldots$ setzen und aus den entstehenden Gleichungen $u_1, u_2, \ldots, u_{\nu-1}$ eliminiren. Ist Q nicht identisch Null, so wird die Differentialgleichung genau ν^{ter} Ordnung [Gleichung (H.)], und es sind $u_{00}, u_{10}, \ldots, u_{\nu-1,0}$ ein Fundamentalsystem derselben. Ist aber Q identisch Null, so wird die Differentialgleichung, welcher $u_{00}, u_{10}, \ldots, u_{\nu-1,0}$ gleichzeitig genügen, niedriger als ν^{ter} Ordnung.

4.

Es werde vorausgesetzt, dass Q nicht identisch verschwindet.

Alsdann folgt durch Auflösung der Gleichungen (F.) (welche für $k = 0, 1, \ldots, \nu-1$ entstehen), für die Unbekannten u_λ

$$u_\lambda = \chi_{\lambda 0} u_0 + \chi_{\lambda 1} u_0' + \cdots + \chi_{\lambda,\nu-1} u_0^{(\nu-1)}, \tag{J.}$$

wo $\frac{d^k u_0}{dx^k} = u_0^{(k)}$ gesetzt worden, und wo $\chi_{\lambda k}$ rationale Functionen von x bedeuten.

Die Gleichungen (J.) bleiben bestehen, wenn wir u_λ durch $u_{l\lambda}$ und $u_0^{(k)}$ durch $u_{l0}^{(k)}$ ersetzen. Machen wir diese Substitution für $l = 0, 1, \ldots, \nu-1$, multipliciren die Gleichungen successive mit den Constanten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}$ und setzen

$$w = \gamma_0 u_{00} + \gamma_1 u_{10} + \cdots + \gamma_{\nu-1} u_{\nu-1,0}, \tag{1.}$$

$$w_\lambda = \gamma_0 u_{0\lambda} + \gamma_1 u_{1\lambda} + \cdots + \gamma_{\nu-1} u_{\nu-1,\lambda}, \tag{2.}$$

wo $u_{0\lambda}$ mit u_λ übereinstimmt, so folgt

$$w_\lambda = \chi_{\lambda 0} w + \chi_{\lambda 1} w' + \cdots + \chi_{\lambda,\nu-1} w^{(\nu-1)}, \tag{3.}$$

*) Vergl. meine Arbeit in BORCHARDTS Journal, Bd. 66, S. 126—130 [1]).

[1]) Abh. VI, S. 164—168, Band I dieser Ausgabe. R. F.

wo wiederum

$$w^{(k)} = \frac{d^k w}{dx^k}$$

gesetzt ist.

Wir bilden nunmehr den Ausdruck

$$\mathrm{E} = \sum_0^{\nu-1}{}_\lambda \pm w_\lambda w_{\nu-1-\lambda}, \tag{4.}$$

wo das Vorzeichen des Gliedes $w_\lambda w_{\nu-1-\lambda}$ mit dem Vorzeichen des Gliedes [1120 $u_\lambda v_{\nu-1-\lambda}$ der in Gleichung (C.) auftretenden Summe übereinstimmen soll. Aus Gleichung (2.) folgt, dass E die Gestalt

$$\mathrm{E} = \sum_{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \gamma_\alpha \gamma_\beta \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, \ldots, \nu-1\\ \beta = 0, 1, \ldots, \nu-1\end{pmatrix} \tag{5.}$$

annimmt. Die Coefficienten $A_{\alpha\beta}$ haben die Form

$$A_{\alpha\beta} = \sum \pm u_{\alpha\lambda} u_{\beta,\nu-1-\lambda} + \sum \pm u_{\beta\lambda} u_{\alpha,\nu-1-\lambda}. \tag{6.}$$

Mit Rücksicht auf die im Anfange von No. 2. fixirte Bedeutung der Functionen $u_{k\lambda}$ folgern wir aus Gleichung (C.), dass die Summen rechterhand in Gleichung (6.) verschwinden, wenn nicht $\beta = \nu-1-\alpha$. Ist aber $\beta = \nu-1-\alpha$ so werden diese Summen einander gleich und bis auf einen nicht verschwindenden constanten Factor gleich $e^{-\int p_1 dx}$. Hieraus ergiebt sich

$$\mathrm{E} = \Gamma e^{-\int p_1 dx}, \tag{K.}$$

wo Γ eine Constante bedeutet.

Substituiren wir für die w_k in E Gleichung (4.) ihre Ausdrücke durch die Gleichung (3.), so erhalten wir

$$\mathrm{E} = \sum_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} w^{(\alpha)} w^{(\beta)}, \tag{7.}$$

wo $P_{\alpha\beta}$ rationale Functionen von x bedeuten. Aus Gleichung (K.) ergiebt sich daher der Satz:

I. Setzen wir in der quadratischen Form

$$\mathrm{Z} = \sum_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} u^{(\alpha)} u^{(\beta)} \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, \ldots, \nu-1\\ \beta = 0, 1, \ldots, \nu-1\end{pmatrix} \tag{L.}$$

für u ein willkürliches Integral der Gleichung (H.), so wird das Resultat gleich $e^{-\int p_1 dx}$ multiplicirt mit einer Constanten. Der

Werth dieser Constanten ist von den Anfangswerthen des Integrals u abhängig.

Substituiren wir in Gleichung (H.)

$$u = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx} t, \tag{8.}$$

so haben wir

$$u^{(k)} = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}[B_{k0} t + B_{k1} t' + \cdots + B_{kk} t^{(k)}] \tag{9.}$$

zu setzen, wo $t^{(l)} = \frac{d^l t}{dx^l}$ und wo B_{kl} rationale Functionen von x bedeuten. Die Gleichung (H.) transformirt sich in

$$\frac{d^\nu t}{dx^\nu} + R_1 \frac{d^{\nu-1} t}{dx^{\nu-1}} + \cdots + R_\nu t = 0, \tag{H'.}$$

wo $R_1, R_2, \ldots, R_\nu$ rationale Functionen von x bedeuten.

Die quadratische Form Z wird

$$Z = e^{-\int p_1 dx} Z', \tag{10.}$$

wo

$$Z' = \sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} t^{(\alpha)} t^{(\beta)}, \qquad \begin{pmatrix}\alpha = 0, 1, \ldots, \nu-1 \\ \beta = 0, 1, \ldots, \nu-1\end{pmatrix} \tag{11.}$$

$R_{\alpha\beta}$ rationale Functionen von x.

1121] Aus Satz I. ergiebt sich

II. Setzen wir in

$$Z' = \sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} t^{(\alpha)} t^{(\beta)}, \tag{L'.}$$

für t ein willkürliches Integral der Gleichung (H'.), so wird dieser Ausdruck einer Constanten gleich. Der Werth dieser Constanten ist von den Anfangswerthen des Integrals t abhängig.

Übrigens ergiebt sich aus der Gleichung (8.), dass

$$R_1 = -\tfrac{1}{2}\nu p_1 + P_1. \tag{12.}$$

Andererseits ist*) nach Gleichung (G.)

$$P_1 = -\frac{d\log P}{dx} - \frac{d\log Q}{dx}, \tag{13.}$$

*) Siehe meine Arbeit in Borchardts Journal, Bd. 66, S. 128[1]).

[1]) Abh. VI, S. 166, Band I dieser Ausgabe. R. F.

also nach Gleichung (D.)

$$P_1 = \frac{1}{2}\nu p_1 - \frac{d\log Q}{dx}, \tag{14.}$$

folglich ergiebt sich aus (12.)

$$R_1 = -\frac{d\log Q}{dx}. \tag{15.}$$

5.

Aus Gleichung (L.) folgt durch Differentiation

$$\frac{dZ'}{dx} = \frac{\partial Z'}{\partial t^{(\nu-1)}} t^{(\nu)} + R, \tag{1.}$$

wo R eine ganze homogene Function zweiten Grades von $t, t', \ldots, t^{(\nu-1)}$ mit rationalen Coefficienten bedeutet. Setzen wir für $t^{(\nu)}$ seinen aus Gleichung (H'.) sich ergebenden Werth

$$t^{(\nu)} = -R_1 t^{(\nu-1)} - R_2 t^{(\nu-2)} - \cdots - R_\nu t, \tag{2.}$$

so ist nach Satz II. voriger Nummer

$$0 = -\frac{\partial Z'}{\partial t^{(\nu-1)}}[R_1 t^{(\nu-1)} + R_2 t^{(\nu-2)} + \cdots + R_\nu t] + R. \tag{3.}$$

Diese Gleichung ist eine identische. Denn t bedeutet in (2.) ein beliebiges Integral der Gleichung (H'.), dessen Anfangswerthe für einen beliebigen Werth $x = x_0$, $t = t_0$, $t' = t'_0$, $\ldots$, $t^{(\nu-1)} = t_0^{(\nu-1)}$ willkürlich wählbar, zwischen welchen also eine Relation nicht stattfinden kann.

Subtrahiren wir (3.) von (1.), so ergiebt sich demnach, dass identisch für jede beliebige Function t [1122

$$\frac{dZ'}{dx} = \frac{\partial Z'}{\partial t^{(\nu-1)}}[t^{(\nu)} + R_1 t^{(\nu-1)} + \cdots + R_\nu t]. \tag{M.}$$

Nach Satz II. voriger Nummer wird die rechte Seite dieser Gleichung identisch Null, wenn für t irgend ein Integral der Gleichung (H'.) substituirt wird. Setzen wir demnach

$$\frac{\partial Z'}{\partial t^{(\nu-1)}} = M = S_0 t^{(\nu-1)} + S_1 t^{(\nu-2)} + \cdots + S_{\nu-1} t, \tag{N.}$$

wo $S_0, S_1, \ldots, S_{\nu-1}$ rationale Functionen von x, so ergiebt sich der Satz

I. **Bedeutet t irgend ein Integral der Gleichung (H'.), so ist M ein Multiplicator dieser Gleichung, oder was dasselbe besagt, es ist M ein Integral der zu (H'.) adjungirten*) Differentialgleichung.**

Bilden wir die successiven Ableitungen von M, indem wir die Ableitungen von t, deren Ordnung gleich oder grösser als ν, vermittelst der Gleichung (H'.) auf die Ableitungen niedrigerer Ordnung reduciren, so ergiebt sich

$$(4.)\qquad \frac{d^k M}{dx^k} = a_{k0}\,t + a_{k1}\,t' + \cdots + a_{k,\nu-1}\,t^{(\nu-1)}.$$

Setzen wir hierin $k = 0, 1, \ldots, \nu-1$ und bezeichnen ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (H'.) mit $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$, die nach Gleichung (N.) zugehörigen Werthe von M bez. mit $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$, so wie die Hauptdeterminanten von $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ und von $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ bez. mit T und M, so ist den Gleichungen (4.) gemäss

$$(5.)\qquad \mathrm{M} = |a_{kl}|\,\mathrm{T}.$$

Der zweite Factor auf der rechten Seite ist von Null verschieden, weil $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ ein Fundamentalsystem bilden**), folglich ist die Hauptdeterminante M der Functionen $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ gleichzeitig mit $|a_{kl}|$ Null oder von Null verschieden. Ist aber M von Null verschieden, so ist $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ ein Fundamentalsystem von Integralen der zu (H'.) adjungirten Differentialgleichung***). Wir erhalten also den Satz:

II. **Die ν Functionen $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$, welche aus Gleichung (N.) hervorgehen, wenn t durch die Elemente eines Fundamentalsystems $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ von Integralen der Gleichung (H'.) ersetzt wird,**
1123] **bilden ein Fundamentalsystem von Integralen der zu (H'.) adjungirten Differentialgleichung oder sie bilden ein solches nicht, je nachdem $|a_{kl}|$ von Null verschieden, oder gleich Null.**

---

*) Diese Bezeichnung in dem Sinne genommen, welchen ich derselben in meiner Arbeit BORCHARDTS Journal, Bd. 76, S. 183 beigelegt habe [1]).

**) Siehe meine Arbeit in BORCHARDTS Journal, Bd. 66, S. 126–130 [2]).

***) Siehe ebendaselbst.

---

[1]) Abh. XVI, S. 421, Band I dieser Ausgabe. R. F.

[2]) Abh. VI, S. 164–168, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Ist $|a_{kl}|$ nicht Null, so können wir aus den Gleichungen (4.) (wenn daselbst $k = 0, 1, \ldots, \nu-1$ gesetzt wird) $t, t', \ldots, t^{(\nu-1)}$ als lineare homogene Functionen von $M, M', \ldots, M^{(\nu-1)}$ mit rationalen Coefficienten bestimmen, wenn $M^{(k)} = \frac{d^k M}{dx^k}$ gesetzt wird. Da nun jedes Integral t der Gleichung (H'.) ein Multiplicator der zu (H'.) adjungirten Differentialgleichung ist, so erhalten wir als Correllat zum Satze II den Satz

III. **Ist $|a_{kl}|$ von Null verschieden, so sind auch die Multiplicatoren der zu (H'.) adjungirten Differentialgleichung lineare homogene Functionen mit rationalen Coefficienten der Integrale M dieser Differentialgleichung und ihrer Ableitungen.**

6.

Es sei $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (H'.) von der Beschaffenheit, dass das Element τ_k zu M_k adjungirt ist*), so haben wir die Gleichungen

$$(1.)\qquad \sum_{1}^{\nu}{}_l\, \tau_l M_l^{(k)} = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, \nu-2)$$

$$(2.)\qquad \sum_{1}^{\nu}{}_l\, \tau_l M_l^{(\nu-1)} = -1^{**}).$$

Wir substituiren in diese Gleichungen die Ausdrücke (4.) voriger Nummer, indem wir daselbst successive $t = t_1,\ t = t_2, \ldots, t = t_\nu$ setzen. Ist $|a_{kl}|$ von Null verschieden, so können wir $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-1}$ so bestimmen, dass

$$(3.)\qquad \sum_{0}^{\nu-1}{}_m\, \lambda_m a_{ml} = 0, \qquad (l = 1, 2, \ldots, \nu-1)$$

$$(4.)\qquad \sum_{0}^{\nu-1}{}_m\, \lambda_m a_{m0} = 1.$$

Multipliciren wir dann die Gleichungen (1.) successive mit $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\nu-2}$, die Gleichung (2.) mit $\lambda_{\nu-1}$ und addiren sämmtliche Gleichungen, so folgt

$$(0.)\qquad \sum_{1}^{\nu}{}_m\, t_m \tau_m = \lambda_{\nu-1},$$

---

*) In dem Sinne, welchen ich dieser Bezeichnung in meiner Arbeit BORCHARDTS Journal, Bd. 76, S. 183 beigelegt habe [1]).

**) Siehe die Arbeit des Herrn FROBENIUS, BORCHARDTS Journal, Bd. 77, S. 249.

---

[1]) Abh. XVI, S. 421–422, Band I dieser Ausgabe. R. F.

wo $\lambda_{\nu-1}$ eine rationale Function von x. Die linke Seite der Gleichung (O.) ist eine quadratische Form von $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ mit constanten Coefficienten.

1124] Würden wir in den Gleichungen (3.) successive $l = 1, 2, \dots, \nu-1$ ausschliessen und die ausgeschlossene Zahl in der Gleichung (4.) an Stelle des zweiten Index wählen, so erhielten wir durch einen ähnlichen Process

$$(O_1.)\qquad \sum_1^{\nu}{}_m \tau_m t'_m \;\;= \lambda_{\nu-1,1},$$

$$(O_2.)\qquad \sum_1^{\nu}{}_m \tau_m t^{(2)}_m \;\;= \lambda_{\nu-1,2},$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$(O_{\nu-1}.)\qquad \sum_1^{\nu}{}_m \tau_m t^{(\nu-1)}_m = \lambda_{\nu-1,\nu-1},$$

wo $\lambda_{\nu-1,1}, \lambda_{\nu-1,2}, \dots, \lambda_{\nu-1,\nu-1}$ sämmtlich rationale Functionen von x bedeuten. Diese Gleichungen können übrigens auch direct aus Gleichung (O.) gefolgert werden.

Zu diesen Relationen fügen wir eine andere hinzu. Wenn wir die linke Seite der Gleichung

$$(5.)\qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots\dots\dots & y_{2n} \\ y'_1 & y'_2 & \dots\dots\dots & y'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ y^{(n)}_1 & y^{(n)}_2 & \dots\dots\dots & y^{(n)}_{2n} \\ y_1 & y_2 & \dots\dots\dots & y_{2n} \\ y'_1 & y'_2 & \dots\dots\dots & y'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ y^{(n)}_1 & y^{(n)}_2 & \dots\dots\dots & y^{(n)}_{2n} \end{vmatrix} = 0$$

nach Producten von Partialdeterminanten n^{ter} Ordnung ordnen, so erhalten wir zwischen den Elementen des Fundamentalsystems $u_{00}, u_{10}, \dots, u_{\nu-1,0}$ von Integralen der Gleichung (H.) die homogene Gleichung zweiten Grades

$$(P.)\qquad \sum_0^{\nu-1}{}_k \pm u_{k0} u_{\nu-1-k,0} = 0,$$

wo die Vorzeichen auf bekannte Weise zu bestimmen sind.

Setzen wir gemäss Gleichung (8.) No. 4

$$(6.)\qquad u_{k0} = e^{-\frac{1}{2}\int p_1 dx}\, t_{k+1},$$

so verwandelt sich (P.) in

$$(P'.)\qquad \sum_1^{\nu}{}_k \pm t\, t_{\nu-k-1} = 0.$$

7.

Nach Gleichung (M.) hat die Function Z' die folgende Eigenschaft: Sie nimmt einen constanten Werth an für solche Functionen t und nur für solche, welche entweder einer linearen [1125 homogenen Differentialgleichung (H'.) ν^{ter} Ordnung oder einer solchen Differentialgleichung,

$$(1.)\qquad M = 0$$

$(\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung Genüge leisten. Wir wollen zum Beschluss dieser Notiz die Gestalt einer Function Z', welcher diese Eigenschaften zukommen, etwas näher charakterisiren.

Nach Gleichung (N.) können wir setzen

$$(2.)\qquad Z' = \frac{1}{2S_0} M^2 + Z'_1,$$

wo Z'_1 eine homogene Function zweiten Grades von $t, t', \dots, t^{(\nu-2)}$ mit rationalen Coefficienten bedeutet.

Sei

$$(3.)\qquad \frac{dZ'_1}{dx} = \frac{\partial Z'_1}{\partial t^{(\nu-2)}} t^{(\nu-1)} + R',$$

wo R' eine homogene ganze Function von $t, t', \dots, t^{(\nu-2)}$.

Aus der oben angegebenen Beschaffenheit von Z' und aus Gleichung (2.) ergiebt sich, dass Z'_1 einen constanten Werth erhalten muss, wenn für t ein Integral der Gleichung (1.) gesetzt wird. Demnach folgt aus Gleichung (3.):

$$(4.)\qquad 0 = -\frac{\partial Z'_1}{\partial t^{(\nu-2)}} \left(\frac{S_1}{S_0} t^{(\nu-2)} + \dots + \frac{S_{\nu-1}}{S_0} t \right) + R'.$$

Ist S_0 von Null verschieden, so ist diese Gleichung wieder eine identische. Denn t ist ein willkürliches Integral der Gleichung (1.), es können daher die Anfangswerthe von $t, t', \dots, t^{(\nu-2)}$ willkürlich gewählt werden, demnach kann zwischen diesen Grössen eine Relation nicht stattfinden. Subtrahiren wir Gleichung (4.) von Gleichung (3.), so ergiebt sich die für jede beliebige

Function t bestehende Gleichung

$$(\mathrm{M}'.)\qquad \frac{dZ'_1}{dx} = \frac{\partial Z'_1}{\partial t^{(\nu-2)}}\left[t^{(\nu-1)} + \frac{S_1}{S_0}t^{(\nu-2)} + \cdots + \frac{S_{\nu-1}}{S_0}t\right].$$

Setzen wir

$$(\mathrm{N}'.)\qquad \frac{\partial Z'_1}{\partial t^{(\nu-2)}} = M_1 = T_0 t^{(\nu-2)} + T_1 t^{(\nu-3)} + \cdots + T_{\nu-2}t,$$

so folgt:

Ist t irgend ein Integral der Gleichung (1.), so ist M_1 ein Multiplicator dieser Gleichung, und die Function Z'_1 hat folgende Eigenschaft: Sie nimmt einen constanten Werth für solche Functionen t an und nur für solche, welche entweder der Gleichung (1.) oder der Gleichung

$$(5.)\qquad M_1 = 0$$

Genüge leisten.

1126] Nach Gleichung (N'.) können wir setzen

$$(6.)\qquad Z'_1 = \frac{1}{2T_0}M_1^2 + Z'_2,$$

wo Z'_2 eine homogene ganze Function zweiten Grades von $t, t', \ldots, t^{(\nu-3)}$ bedeutet. Indem wir an Z'_2 die obigen Schlüsse wiederholen und so fortfahren, gelangen wir schliesslich zu folgendem Resultate:

Die quadratische Form Z' lässt sich **im Allgemeinen** auf die folgende Gestalt bringen

$$(\mathrm{Q}.)\qquad Z' = \frac{1}{2\sigma_0}M_0^2 + \frac{1}{2\sigma_1}M_1^2 + \frac{1}{2\sigma_2}M_2^2 + \cdots + \frac{1}{2\sigma_{\nu-1}}M_{\nu-1}^2.$$

Hierin sind $M_0, M_1, \ldots, M_{\nu-1}$ lineare homogene Functionen einer Variablen t und ihrer Ableitungen nach x mit rationalen Coefficienten, und zwar ist M_k von $t, t', \ldots, t^{(\nu-1-k)}$ abhängig. Es ist ferner M_{k+1} ein Multiplicator der Differentialgleichung

$$(\mathrm{R}.)\qquad M_k = 0,$$

wenn in M_{k+1} für t ein Integral dieser Gleichung gesetzt wird. Die Grössen $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}$ sind rationale Functionen von x, nämlich σ_k der Coefficient von $t^{(\nu-1-k)}$ im Ausdruck von M_k. Endlich ist

$$M_{\nu-2} = \sigma_{\nu-2}\left[t' - \frac{\sigma'_{\nu-1}}{2\sigma_{\nu-1}}t\right].$$

Die Form (Q.) setzt voraus, dass die successiv zu bildenden Ausdrücke $M_0, M_1, \ldots, M_{\nu-1}$ die Ableitung höchster Ordnung von t, welche sie noch enthalten können, auch wirklich enthalten, dass also keine der Grössen $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{\nu-1}$ verschwindet. Wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, so nimmt Z' andere specielle Formen an.

8.

Bezeichnen wir die linke Seite der Gleichung (H'.) mit $H(t)$ und [1273 bedeute $M(t)$ den durch Gleichung (N.) gegebenen Ausdruck, alsdann ist nach Gleichung (M.)

$$(1.)\qquad M(t)\,H(t) = \frac{dZ'}{dx}.$$

Sei $H'(t)$ der zu $H(t)$ adjungirte Differentialausdruck, so ist*)

$$(2.)\qquad v\,H(t) - t\,H'(v) = \frac{d}{dx}H(t, v),$$

wo t, v beliebige Functionen von x, und wo $H(t, v)$ einen in t, v und ihren Ableitungen bis zur $(\nu-1)^{\text{ten}}$ Ordnung linearen und homogenen Ausdruck bedeutet.

Setzen wir

$$v = M(t),$$

so ergiebt sich

$$(3.)\qquad M(t)\,H(t) - t\,H'(M(t)) = \frac{d}{dx}H(t, M(t)).$$

Diese Gleichung ist nach Gleichung (1.) gleichbedeutend mit

$$(4.)\qquad \frac{dZ'}{dx} - t\,H'(M(t)) = \frac{d}{dx}H(t, M(t)),$$

demnach muss auch für jede Function t der Ausdruck

$$t\,H'(M(t))$$

ein vollständiger Differentialquotient sein.

*) Jacobi, Crelles Journal, Bd. 32, S. 189 [1]).

[1]) Gesammelte Werke, Bd. II, S. 127—128. R. F.

Ist aber $f(u)$ ein Differentialausdruck von der Eigenschaft, dass $uf(u)$ für jede Function u der vollständige Differentialquotient einer in u und seinen 1274] Ableitungen linearen und homogenen Functionen $\Pi(u)$, und ist $f'(u)$ der zu $f(u)$ adjungirte Differentialausdruck, so ist identisch

$$f'(u) = -f(u)$$

und umgekehrt*). Da nun der zu $H'(M(t))$ adjungirte Differentialausdruck dem Ausdrucke $M'(H(t))$ gleich wird, wenn wir mit $M'(t)$ den zu $M(t)$ adjungirten Ausdruck bezeichnen**), so ergiebt sich aus Gleichung (4.), dass identisch für jede Function t

$$(\overline{\mathrm{M}}.) \qquad H'(M(t)) = -M'(H(t)).$$

Ist umgekehrt diese Gleichung identisch erfüllt, so ist $tH'(M(t))$ ein vollständiger Differentialquotient und demgemäss auch nach Gleichung (3.) $M(t)\,H(t)$ ein vollständiger Differentialquotient.

9.

Wir gehen nunmehr zur Untersuchung des Falles über, in welchem die Gleichung (H'.) reductibel wird***). Zuvor aber wollen wir einige auf allgemeine lineare Differentialgleichungen bezügliche Sätze aufstellen, von welchen wir Gebrauch machen werden.

Sei eine lineare, homogene Differentialgleichung

$$(1.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + r_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + r_m y = R(y) = 0$$

mit rationalen Coefficienten vorgelegt, so genügt jeder Ausdruck der Form

$$(2.) \qquad w = A_0 y + A_1 y' + \cdots + A_{m-1} y^{(m-1)} = P(y),$$

in welchem y ein Integral von (1.), $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ rationale Functionen von x und die oberen Accente Ableitungen bedeuten, ebenfalls einer linearen Differentialgleichung höchstens m^{ter} Ordnung. Differentiiren wir nämlich die

*) Vergl. den vor Kurzem erschienenen II. Theil der »Leçons sur la théorie des surfaces« von Herrn Darboux, S. 111.

**) Siehe Frobenius, Borchardts Journal, Bd. 85, S. 189.

***) Über die Begriffe der Irreductibilität und Reductibilität siehe Frobenius, Borchardts Journal, Bd. 76, S. 236.

Gleichung (2.) und ersetzen die Ableitungen von y höherer als m^{ter} Ordnung mit Hülfe der Gleichung (1.) durch die Ableitungen niedrigerer Ordnung, so ergiebt sich, dass jede Ableitung von w eine lineare homogene Function von $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ mit rationalen Coefficienten ist. Durch Elimination von $y, y', \ldots, y^{(m-1)}$ aus den Ausdrücken für $w, w', \ldots, w^{(m)}$ ergiebt sich die bezeichnete Differentialgleichung für w. Alle diese Differentialgleichungen wollen [1275 wir mit Riemann*) als mit (1.) zu derselben Klasse gehörig bezeichnen.

Seien $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ willkürlich gewählte rationale Functionen und bezeichnen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.), so ist eine Relation der Form

$$(3.) \qquad \gamma_1 P(y_1) + \gamma_2 P(y_2) + \cdots + \gamma_m P(y_m) = 0,$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ Constanten bedeuten, nicht möglich. Setzen wir nämlich

$$(4.) \qquad \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_m y_m = \eta,$$

so ist Gleichung (3.) gleichbedeutend mit

$$(5.) \qquad A_0 \eta + A_1 \eta' + \cdots + A_{m-1} \eta^{(m-1)} = 0.$$

Es ist η ein Integral der Gleichung (1.), welches der Voraussetzung nach nicht identisch verschwinden kann. Da aber Gleichung (1.) nicht mit der willkürlichen Differentialgleichung

$$A_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + A_1 \frac{dy}{dx} + A_0 y = 0$$

ein Integral gemeinschaftlich haben kann, so kann die Gleichung (5.), folglich auch die Gleichung (3.) nicht bestehen.

Aus Gleichung (2.) ergiebt sich durch Differentiation

$$(6.) \qquad w^{(k)} = A_{k0} y + A_{k1} y' + \cdots + A_{k,m-1} y^{(m-1)}. \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

Die Hauptdeterminante der Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sei Δ und diejenige der Functionen $w_1 = P(y_1)$, $w_2 = P(y_2)$, $\ldots$, $w_m = P(y_m)$ sei δ, so folgt aus

$$(7.) \qquad \delta = |A_{kl}|\,\Delta, \qquad (k, l = 0, 1, \ldots, m-1)$$

dass die Determinante $|A_{kl}|$ nicht verschwinden kann, weil sowohl Δ als auch

*) Gesammelte Werke, Nachlass, S. 358 [1]).

1) Zweite Auflage (1892), S. 380. R. F.

ϑ von Null verschieden sind. Man kann also aus den Gleichungen (6.) y, folglich auch die Integrale aller zu derselben Klasse gehörigen Differentialgleichungen, als lineare homogene Functionen von $w, w', \ldots, w^{(m-1)}$ mit rationalen Coefficienten darstellen. Wir erhalten also den Satz:

I. Sind $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ willkürlich gewählte rationale Functionen, so ist die Differentialgleichung, welcher w genügt, nicht niedrigerer als m^{ter} Ordnung, und man kann umgekehrt y, also jedes Integral einer der Klasse zugehörigen Differentialgleichung als lineare homogene Function von $w, w', \ldots, w^{(m-1)}$ mit rationalen Coefficienten darstellen.

1276] Durch diesen Satz ist die bevorzugte Stellung der Gleichung (1.) beseitigt, es kann an deren Stelle jede Gleichung derselben Klasse, von der m^{ten} Ordnung, treten.

II. Ist eine Differentialgleichung der Klasse reductibel, so giebt es unter den Differentialgleichungen derselben Klasse auch solche, deren Ordnung kleiner ist als m. Die Differentialgleichungen derselben Klasse sind sämmtlich reductibel.

Ist nämlich Gleichung (1.) reductibel, so existirt ein Differentialausdruck $Q(y)$ der Ordnung $\mu < m$, von der Beschaffenheit, dass

$$R(y) = S(Q(y)), \tag{8.}$$

wenn mit $S(y)$ ein Differentialausdruck der $(m-\mu)^{\text{ten}}$ Ordnung bezeichnet wird*).

Ist w ein Integral einer Differentialgleichung der Klasse, deren Ordnung nicht kleiner als m, so folgt aus dem Obigen, dass y und seine sämmtlichen Ableitungen als lineare homogene Functionen von $w, w', \ldots, w^{(m-1)}$ darstellbar sind. Wir haben demnach

$$v = Q(y) = B_0 w + B_1 w' + \cdots + B_{m-1} w^{(m-1)} = Q_1(w), \tag{9.}$$

wo $B_0, B_1, \ldots, B_{m-1}$ rationale Functionen von x bedeuten.

Da der Voraussetzung nach $Q(y)$ für Integrale der Gleichung (1.) verschwinden soll, so hat die Differentialgleichung für w mit einer Gleichung

$$Q_1(w) = 0$$

niedrigerer als m^{ter} Ordnung Integrale gemeinschaftlich, ist also reductibel.

*) Siehe FROBENIUS, BORCHARDTs Journal, Bd. 76, S. 258.

Andererseits ist die Differentialgleichung für v derselben Klasse angehörig, und es ist die Ordnung derselben nach Gleichung (8.) die $(m-\mu)^{\text{te}}$. Aus dem Satze II. folgt als Corollar:

III. Ist eine Differentialgleichung der Klasse irreductibel, so sind alle Differentialgleichungen derselben Klasse irreductibel, und es giebt unter ihnen keine von niedrigerer Ordnung als von der m^{ten}.

10.

Die Coefficienten $S_0, S_1, \ldots, S_{\nu-1}$ in dem Multiplicator

$$M(t) = S_0 t + S_1 t' + \cdots + S_{\nu-1} t^{(\nu-1)} \tag{N.}$$

des Ausdruckes $H(t)$ genügen einem gewissen Systeme (Σ) linearer homogener Gleichungen mit rationalen Coefficienten, welche nach No. 8 erhalten [1277 werden, wenn wir in Gleichung $(\overline{\text{M}}.)$ die Coefficienten der Ableitungen gleich hoher Ordnung von t auf beiden Seiten einander gleichsetzen. Der Voraussetzung nach lässt dieses System rationale Lösungen für $S_0, S_1, \ldots, S_{\nu-1}$ zu.

Lässt das System (Σ) zwei rationale Lösungen $S_0, S_1, \ldots, S_{\nu-1}$; $S'_0, S'_1, \ldots, S'_{\nu-1}$ von solcher Beschaffenheit zu, dass zwischen den Functionen $M(t)$ und $M_1(t)$, welche den Gleichungen

$$M(t) = S_0 t + S_1 t' + \cdots + S_{\nu-1} t^{(\nu-1)}, \tag{1.}$$

$$M_1(t) = S'_0 t + S'_1 t' + \cdots + S'_{\nu-1} t^{(\nu-1)} \tag{2.}$$

entsprechen, **nicht** eine Gleichung

$$M_1(t) = \gamma M(t), \tag{3.}$$

wo γ von x unabhängig, identisch besteht, so ist die Gleichung (H'.) reductibel.

Es sei nämlich $t = \xi$ eine Lösung der Gleichung (H'.), so ist nach dem Satze I. in No. 5 [vergl. die Gleichung $(\overline{\text{M}}.)$] sowohl $M(\xi)$ als auch $M_1(\xi)$ ein Integral der zu (H'.) adjungirten Differentialgleichung

$$H'(t) = 0. \tag{4.}$$

Die Differentialgleichungen, welchen $M(\xi)$, $M_1(\xi)$ genügen, sind mit der Gleichung (H'.) von derselben Klasse. Ist (H'.) irreductibel, so sind, nach Satz III.

voriger Nummer, auch die ersteren Gleichungen irreductibel, und es ist

$$(5.)\qquad \frac{d^k\xi}{dx^k} = T_0\eta + T_1\eta' + \cdots + T_{\nu-1}\eta^{(\nu-1)},$$

wenn

$$(6.)\qquad \eta = M(\xi)$$

gesetzt und mit $T_0, T_1, \ldots, T_{\nu-1}$ rationale Functionen von x bezeichnet werden. — Demnach ist auch

$$(7.)\qquad \eta_1 = M_1(\xi) = \mathfrak{U}_0\eta + \mathfrak{U}_1\eta' + \cdots + \mathfrak{U}_{\nu-1}\eta^{(\nu-1)},$$

wo $\mathfrak{U}_0, \mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_{\nu-1}$ rationale Functionen von x sind. Es besitzt daher die Gleichung (4.) zwei Integrale η und η_1, welche in der durch Gleichung (7.) gegebenen Beziehung zu einander stehen. Der Voraussetzung nach besteht eine Gleichung der Form (3.) nicht identisch. Würde sie für $t = \xi$ erfüllbar sein, so müsste die Gleichung (H'.) mit der Gleichung

$$(8.)\qquad M_1(t) - \gamma M(t) = 0$$

Integrale gemeinschaftlich haben und daher reductibel sein. Würde die
1278] Gleichung (3.) nicht für $t = \xi$ erfüllbar sein, so würde aus dem Bestehen der Gleichung (7.) folgen, dass die Gleichung (4.) reductibel sei*). Dann aber, dass auch (H'.) selber reductibel sei**).

11.

Es sei k ein in den Coefficienten einer Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + r_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + r_m y = 0$$

auftretender Parameter, mit welchem sich die ersteren stetig ändern. Wir machen nunmehr die folgende Voraussetzung:

(α.) Es giebt ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ der Differentialgleichung (1.) von der Beschaffenheit, dass in dem ganzen Verlaufe der Variabeln x die Gleichungen

$$(2.)\qquad \frac{\partial y_a}{\partial k} = A_0 y_a + A_1 y_a' + \cdots + A_{m-1} y_a^{(m-1)}, \qquad (a = 1, 2, \ldots, m)$$

wo $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ rationale Functionen von x, erfüllt werden.

*) Siehe Frobenius, Borchardts Journal, Bd. 76, S. 268.

**) A. a. O. S. 261.

Von den Differentialgleichungen dieser Art stellen wir zunächst folgenden Satz auf:

I. Die Coefficienten der Substitutionen der zur Gleichung (1.) gehörigen Gruppe sind unter der Voraussetzung (α.) von k unabhängig.

In der That möge ein Umlauf der Variabeln x, y_a in $\bar{y}_a$ überführen, alsdann ist

$$(3.)\qquad \bar{y}_a = \alpha_{a1}y_1 + \alpha_{a2}y_2 + \cdots + \alpha_{am}y_m, \qquad (a = 1, 2, \ldots, m)$$

wo α_{ab} von x unabhängig. Da die Gleichungen (2.) im ganzen Verlaufe der Variabeln x bestehen, so folgt

$$(4.)\qquad \frac{\partial \bar{y}_a}{\partial k} = A_0\sum_1^m{}_b\, \alpha_{ab}y_b + A_1\sum_1^m{}_b\, \alpha_{ab}y_b' + \cdots + A_{m-1}\sum_1^m{}_b\, \alpha_{ab}y_b^{(m-1)},$$

also unter Anwendung derselben Gleichung (2.)

$$(5.)\qquad \frac{\partial \bar{y}_a}{\partial k} = \alpha_{a1}\frac{\partial y_1}{\partial k} + \alpha_{a2}\frac{\partial y_2}{\partial k} + \cdots + \alpha_{am}\frac{\partial y_m}{\partial k}.$$

Differentiiren wir aber Gleichung (3.) nach k, so folgt

$$(6.)\qquad \frac{\partial \bar{y}_a}{\partial k} = \alpha_{a1}\frac{\partial y_1}{\partial k} + \alpha_{a2}\frac{\partial y_2}{\partial k} + \cdots + \alpha_{am}\frac{\partial y_m}{\partial k} + y_1\frac{\partial \alpha_{a1}}{\partial k} + y_2\frac{\partial \alpha_{a2}}{\partial k} + \cdots + y_m\frac{\partial \alpha_{am}}{\partial k}.$$

Durch Vergleichung von (6.) und (5.) ergiebt sich demnach

$$(7.)\qquad y_1\frac{\partial \alpha_{a1}}{\partial k} + y_2\frac{\partial \alpha_{a2}}{\partial k} + \cdots + y_m\frac{\partial \alpha_{am}}{\partial k} = 0. \qquad (a = 1, 2, \ldots, m)$$ [1279

Da $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem ist, so ergiebt sich hieraus

$$(8.)\qquad \frac{\partial \alpha_{a1}}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial \alpha_{a2}}{\partial k} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \alpha_{am}}{\partial k} = 0,$$

wodurch unser Satz bewiesen ist.

Es ergiebt sich aber auch der folgende Satz:

II. Ist $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.), das den Gleichungen (2.) genügt, und ist f eine von x unabhängige Grösse so genügt für den ganzen Verlauf der Variabeln x das System

$$f y_1, f y_2, \ldots, f y_m$$

den Gleichungen

$$\frac{\partial (f y_\alpha)}{\partial k} = \left(f A_0 + \frac{\partial f}{\partial k}\right) y_\alpha + f A_1 y'_\alpha + \cdots + f A_{m-1} y_\alpha^{(m-1)}. \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{9.}$$

Es ist nämlich

$$\frac{\partial (f y_\alpha)}{\partial k} = \frac{\partial f}{\partial k} y_\alpha + f \frac{\partial y_\alpha}{\partial k};$$

hieraus ergiebt sich nach Gleichung (2.) die Gleichung (9.).

Endlich ergiebt sich noch:

III. Sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ von k und von x unabhängige Grössen, so genügt

$$\gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 + \cdots + \gamma_m y_m$$

ebenfalls der Gleichung (2.).

12.

Es sei umgekehrt vorausgesetzt, dass ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.) voriger Nummer angebbar sei, von der Beschaffenheit, dass die Coefficienten der Substitutionen der zu dieser Differentialgleichung gehörigen Gruppe von einem in den Coefficienten derselben auftretenden Parameter k unabhängig sind; ferner sei vorausgesetzt, dass die Integrale derselben Differentialgleichung keinen Punkt der Unbestimmtheit*) besitzen, d. h. dass die Gleichung (1.) voriger Nummer zur Kategorie der in Borchardts Journal, Bd. 66, S. 146, Gleichung (12.)[1]
1280] charakterisirten Klasse gehöre. Alsdann finden in dem ganzen Verlaufe der Variabeln x die Gleichungen (2.) voriger Nummer statt.

Wenn nämlich wiederum nach irgend einem Umlaufe von x ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.) voriger Nummer

$$y_1, y_2, \ldots, y_m$$

bez. in

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m$$

*) Vergl. über den Sinn dieser Bezeichnungsweise Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1886, S. 281[2]).

[1]) Abh. VI, S. 186, Band I dieser Ausgabe. R. F.
[2]) Abh. XLVII, S. 394, Band II dieser Ausgabe. R. F.

übergeht, wo

$$\bar{y}_\alpha = \alpha_{\alpha 1} y_1 + \alpha_{\alpha 2} y_2 + \cdots + \alpha_{\alpha m} y_m, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.}$$

so ist jetzt vorausgesetzt, dass die von x unabhängigen Grössen α_{ab} auch von k unabhängig seien. Wenn wir in Gleichung (1.) voriger Nummer $k + \delta k$ an die Stelle von k setzen, so möge dieselbe in

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \bar{r}_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + \bar{r}_m y = 0 \tag{2.}$$

übergehen. Es sei U derjenige Umlauf der Variabeln x, welcher die Substitution (1.) hervorgebracht, so werden die innerhalb U gelegenen singulären Punkte der Gleichung (1.) voriger Nummer in solche der Gleichung (2.) übergegangen sein, und wenn der Modul von δk hinlänglich klein, so werden die letzteren ebenfalls noch innerhalb U gelegen sein, und es wird kein anderer der singulären Punkte von (2.) innerhalb U liegen. Für das Fundamentalsystem

$$y_1 + \delta y_1, \; y_2 + \delta y_2, \; \ldots, \; y_m + \delta y_m$$

der Gleichung (2.) soll alsdann nach unserer Voraussetzung ebenfalls die Substitution (1.) bestehen, d. h.

$$\overline{(y_\alpha + \delta y_\alpha)} = \alpha_{\alpha 1}(y_1 + \delta y_1) + \alpha_{\alpha 2}(y_2 + \delta y_2) + \cdots + \alpha_{\alpha m}(y_m + \delta y_m). \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{3.}$$

Aus den Gleichungen (1.) und (3.) folgt

$$\overline{(\delta y_\alpha)} = \alpha_{\alpha 1} \delta y_1 + \alpha_{\alpha 2} \delta y_2 + \cdots + \alpha_{\alpha m} \delta y_m. \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.}$$

Dividiren wir diese Gleichungen durch δk, so erhalten wir, indem wir für δk unendlich kleine Werthe setzen, für die Functionen $\frac{\partial y_\alpha}{\partial k}$ nach demselben Umlaufe U von x

$$\overline{\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial k}\right)} = \alpha_{\alpha 1} \frac{\partial y_1}{\partial k} + \alpha_{\alpha 2} \frac{\partial y_2}{\partial k} + \cdots + \alpha_{\alpha m} \frac{\partial y_m}{\partial k}. \tag{5.}$$

Bestimmen wir nunmehr m Grössen $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ aus den Gleichungen

$$\frac{\partial y_\alpha}{\partial k} = A_0 y_\alpha + A_1 y'_\alpha + \cdots + A_{m-1} y_\alpha^{(m-1)}. \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{6.}$$

Nach einem Umlaufe U der Variabeln x möge y_α die durch die Gleichung [1281
(1.) bezeichnete Substitution und demgemäss $\frac{\partial y_\alpha}{\partial k}$ die durch Gleichung (5.) bezeichnete Substitution erfahren. Demnach werden Zähler und Nenner in

den Werthen, welche die Gleichungen (6.) für $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ ergeben, nach dem Umlaufe U mit demselben Factor multiplicirt sein. Hieraus folgt, dass $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ durch die Umläufe der Variabeln x um die singulären Punkte der Gleichung (1.) voriger Nummer nicht geändert werden.

Bedeutet W ein Gebiet, in welchem kein singulärer Punkt der Gleichung (1.) voriger Nummer sich befindet, so ist für jeden Punkt x dieses Gebietes nach dem Theoreme von Cauchy, wenn wir

$$y_{\mathfrak{a}} = f_{\mathfrak{a}}(x, k), \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, m) \tag{7.}$$

setzen,

$$f_{\mathfrak{a}}(x, k) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f_{\mathfrak{a}}(z, k)\, dz}{z - x}, \tag{8.}$$

das Integral erstreckt über die Begrenzung von W. Wir haben daher

$$\frac{\partial y_{\mathfrak{a}}}{\partial k} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\partial f_{\mathfrak{a}}(z, k)}{\partial k} \frac{dz}{z - x}, \tag{9.}$$

woraus hervorgeht, dass $\frac{\partial y_{\mathfrak{a}}}{\partial k}$ innerhalb W eindeutig, endlich und stetig ist. Ebenso ergiebt sich, dass $\frac{\partial y_{\mathfrak{a}}}{\partial k}$ in der Umgebung von $x = \infty$ die gleiche Eigenschaft hat, wenn $y_{\mathfrak{a}}$ daselbst eindeutig, endlich und stetig ist.

Da hiernach $\frac{\partial y_{\mathfrak{a}}}{\partial k}$ keine anderen Singularitäten besitzt als $y_{\mathfrak{a}}$, so ergiebt sich, dass $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ eindeutige Functionen von x sind.

Differentiiren wir die Gleichung (1.) voriger Nummer nach k, so folgt:

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\partial y}{\partial k}\right) + r_1 \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{\partial y}{\partial k}\right) + \cdots + r_m \frac{\partial y}{\partial k} = -\frac{\partial r_1}{\partial k}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} - \frac{\partial r_2}{\partial k}\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} - \cdots - \frac{\partial r_m}{\partial k} y. \tag{10.}$$

Da die Integrale y der Gleichung (1.) voriger Nummer keine Punkte der Unbestimmtheit besitzen, so folgt aus dieser Gleichung, dass auch $\frac{\partial y}{\partial k}$ keine
1282] Punkte der Unbestimmtheit hat. Daher haben auch die aus den Gleichungen (6.) sich ergebenden Werthe von $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ keine Punkte der Unbestimmtheit. Dieselben sind also rationale Functionen von x, und die Gleichungen (6.) sind mit den Gleichungen (2.) voriger Nummer übereinstimmend.

13.

Es möge nunmehr von der Gleichung (A.) vorausgesetzt werden, dass sie den Anforderungen (α.) in No. 11 Genüge leiste. Sind alsdann $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$

ein Fundamentalsystem von Integralen derselben, für welches die Gleichungen

$$\frac{\partial y_{\mathfrak{a}}}{\partial k} = A_0 y_{\mathfrak{a}} + A_1 y'_{\mathfrak{a}} + \cdots + A_{2n-1} y_{\mathfrak{a}}^{(2n-1)} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, 2n) \tag{S.}$$

bestehen, so folgt,

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{\partial y_{\mathfrak{a}}}{\partial k}\right) = A_{i0} y_{\mathfrak{a}} + A_{i1} y'_{\mathfrak{a}} + \cdots + A_{i,2n-1} y_{\mathfrak{a}}^{(2n-1)}, \quad (i = 1, 2, \ldots, 2n) \tag{1.}$$

daher ist auch

$$\frac{\partial u_{\mathfrak{b}0}}{\partial k} = B_0 u_{\mathfrak{b}0} + B_1 u_{\mathfrak{b}1} + \cdots + B_{\nu-1} u_{\mathfrak{b},\nu-1}. \tag{2.}$$

Machen wir wie in No. 4 die Voraussetzung, dass die Determinante Q nicht verschwindet, so ergiebt sich durch wiederholte Anwendung der Gleichung (J.), dass das Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (H.)

$$u_{00},\ u_{10},\ \ldots,\ u_{\nu-1,0}$$

den Gleichungen

$$\frac{\partial u_{\mathfrak{b}0}}{\partial k} = C_0 u_{\mathfrak{b}0} + C_1 u'_{\mathfrak{b}0} + \cdots + C_{\nu-1} u_{\mathfrak{b}0}^{(\nu-1)} \tag{S$_1$.}$$

genügt, wo $C_0, C_1, \ldots, C_{\nu-1}$ rationale Functionen von x bedeuten. Machen wir aber die Substitution (8.) No. 4, so folgt ebenso

Die Gleichung (H'.) besitzt ein Fundamentalsystem von Integralen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$, welches die Gleichungen

$$\frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}}{\partial k} = D_0 \xi_{\mathfrak{a}} + D_1 \xi'_{\mathfrak{a}} + \cdots + D_{\nu-1} \xi_{\mathfrak{a}}^{(\nu-1)} \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{S$_2$.}$$

befriedigt, wo $D_0, D_1, \ldots, D_{\nu-1}$ rationale Functionen von x sind.

Durch Differentiation der Gleichungen (S$_2$.) nach x ergiebt sich

$$\frac{d^i}{dx^i}\left(\frac{\partial \xi_{\mathfrak{a}}}{\partial k}\right) = D_{i0} \xi_{\mathfrak{a}} + D_{i1} \xi'_{\mathfrak{a}} + \cdots + D_{i,\nu-1} \xi_{\mathfrak{a}}^{(\nu-1)}, \qquad (\mathfrak{a} = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{3.}$$

wo $D_{i0}, D_{i1}, \ldots, D_{i,\nu-1}$ rationale Functionen von x sind.

Wir wollen nun der quadratischen Form Z' in Gleichung (L'.) eine [1283
andere Form $\mathrm{H}(t)$ von folgender Gestalt zuordnen:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}(t) = \textstyle\sum_{\alpha\beta} \frac{dR_{\alpha\beta}}{\partial k} t^{(\alpha)} t^{(\beta)} + \textstyle\sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} [& t^{(\beta)}(D_{\alpha 0} t + D_{\alpha 1} t' + \cdots + D_{\alpha,\nu-1} t^{(\nu-1)}) \\ & + t^{(\alpha)}(D_{\beta 0} t + D_{\beta 1} t' + \cdots + D_{\beta,\nu-1} t^{(\nu-1)})]. \end{aligned} \tag{L$_1$.}$$

Schreiben wir $Z'(t)$ an Stelle von Z', so folgern wir aus Gleichung (3.):

$$\mathrm{H}(\xi_a) = \frac{d}{dk}[Z'(\xi_a)]. \qquad (a = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{4.}$$

Da $Z'(t)$ von x unabhängig wird, wenn wir für t ein beliebiges Integral der Gleichung (H'.) setzen (siehe No. 4), so ergiebt sich aus Gleichung (4.), dass auch $\mathrm{H}(\xi_a)$ von x unabhängig ist.

Ist f eine willkürliche von x unabhängige Grösse, so haben wir nach Satz II. No. 11 und nach Gleichung (S$_2$.),

$$\frac{\partial(f\xi_a)}{\partial k} = \left[D_0 f + \frac{\partial f}{\partial k}\right]\xi_a + D_1 f\xi'_a + \cdots + D_{\nu-1} f\xi_a^{(\nu-1)}. \tag{5.}$$

Daher ergiebt sich aus Gleichung (3.)

$$\frac{d^i}{dx^i}\left[\frac{\partial(f\xi_a)}{\partial k}\right] = D_{i0} f\xi_a + D_{i1} f\xi'_a + \cdots + D_{i,i-1} f\xi_a^{(i-1)} + \left(D_{ii} f + \frac{\partial f}{\partial k}\right)\xi_a^{(i)} \\ + D_{i,i+1} f\xi_a^{(i+1)} + \cdots + D_{i,\nu-1} f\xi_a^{(\nu-1)}. \tag{6.}$$

Setzen wir in (L$_1$.) $t = f\xi_a$, so ergiebt sich

$$\mathrm{H}(f\xi_a) = f^2 \mathrm{H}(\xi_a) = f^2 \frac{d}{dk} Z'(\xi_a). \tag{7.}$$

Demnach ist auch $\mathrm{H}(f\xi_a)$ von x unabhängig.

Nach Satz III. No. 11 genügt $\xi_a + \xi_b$ der Gleichung (S$_2$.), folglich ist auch $\mathrm{H}(\xi_a + \xi_b)$ von x unabhängig, d. h. da

$$\mathrm{H}(\xi_a + \xi_b) = \mathrm{H}(\xi_a) + \mathrm{H}(\xi_b) + \frac{\partial \mathrm{H}(\xi_a)}{\partial \xi_a}\xi_b + \frac{\partial \mathrm{H}(\xi_a)}{\partial \xi'_a}\xi'_b + \cdots + \frac{\partial \mathrm{H}(\xi_a)}{\partial \xi_a^{(\nu-1)}}\xi_b^{(\nu-1)}, \tag{8.}$$

dass auch der Ausdruck

$$\overline{\mathrm{H}}(\xi_a, \xi_b) = \frac{\partial \mathrm{H}(\xi_a)}{\partial \xi_a}\xi_b + \frac{\partial \mathrm{H}(\xi_a)}{\partial \xi'_a}\xi'_b + \cdots + \frac{\partial \mathrm{H}(\xi_a)}{\partial \xi_a^{(\nu-1)}}\xi_b^{(\nu-1)} \tag{9.}$$

von x unabhängig ist.

Nun sei g eine willkürliche Grösse, so ist

$$\mathrm{H}(f\xi_a + g\xi_b) = \mathrm{H}(f\xi_a) + \mathrm{H}(g\xi_b) + \overline{\mathrm{H}}(f\xi_a, g\xi_b) \tag{10.}$$

und

$$\overline{\mathrm{H}}(f\xi_a, g\xi_b) = fg\,\overline{\mathrm{H}}(\xi_a, \xi_b). \tag{11.}$$

Demnach ist auch $\mathrm{H}(f\xi_a + g\xi_b)$ von x unabhängig. Hieraus ergiebt sich:

I. Es wird $\mathrm{H}(t)$ von x unabhängig, wenn wir für t ein be- [1284
liebiges Integral der Gleichung (H'.) setzen.

Setzen wir:

$$\mathrm{H}(t) = \gamma Z'(t), \tag{12.}$$

und nehmen wir an, dass, wie auch das Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (H'.), welches einer Gleichung der Form (S$_2$.) genügt, beschaffen sein möge, die Grösse γ von x unabhängig werde. Setzen wir

$$\Sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial R_{\alpha\beta}}{\partial k} t^{(\alpha)} t^{(\beta)} = \psi(t), \tag{13.}$$

$$\Sigma_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} [t^{(\beta)}(D_{\alpha 0} t + D_{\alpha 1} t' + \cdots + D_{\alpha,\nu-1} t^{(\nu-1)}) \\ + t^{(\alpha)}(D_{\beta 0} t + D_{\beta 1} t' + \cdots + D_{\beta,\nu-1} t^{(\nu-1)})] = \chi(t), \tag{14.}$$

so ist nach Gleichung (12.)

$$\psi(t) + \chi(t) = \gamma Z'(t). \tag{15.}$$

Für ein Fundamentalsystem $f\xi_a$, wo f eine von x unabhängige, dagegen von k abhängige Grösse bedeutet, tritt an die Stelle von Gleichung (3.) die Gleichung (6.), an die Stelle von $\chi(t)$ tritt daher

$$f\chi(t) + 2\frac{df}{dk} Z'(t).$$

Es tritt dann endlich $\mathrm{H}_1(t)$ an die Stelle von $\mathrm{H}(t)$, wo

$$\mathrm{H}_1(t) = \psi(t) + f\chi(t) + 2\frac{df}{dk} Z'(t). \tag{16.}$$

Soll nun auch

$$\mathrm{H}_1(t) = \gamma_1 Z'(t) \tag{17.}$$

und γ_1 von x unabhängig sein, so ergiebt sich

$$\psi(t) + f\chi(t) = \left(\gamma_1 - 2\frac{df}{dk}\right) Z'(t). \tag{18.}$$

Aus den Gleichungen (15.) und (18.) folgt:

$$\chi(t) = \lambda\psi(t), \tag{19.}$$

wo

$$\lambda = \frac{(\gamma_1 - \gamma)\frac{dk}{df} - 2}{(\gamma f - \gamma_1)\frac{dk}{df} + 2}. \tag{20.}$$

Diese Grösse λ muss von f unabhängig sein. Da auch γ die gleiche Eigenschaft besitzt, so erhalten wir demnach die Gleichung

$$\frac{d\gamma_1}{df} - \frac{1}{f-1}\gamma_1 + \frac{2(f-1)\frac{d^2k}{df^2} + 2\frac{dk}{df} + \gamma\left(\frac{dk}{df}\right)^2}{\left(\frac{dk}{df}\right)^2(f-1)} = 0. \tag{21.}$$

1285] Ist nun beispielsweise f eine algebraische Function von k, so müsste γ_1 der Identität (17.) zu Folge eine algebraische Function von f sein. Die Gleichung (21.) ist aber nicht für jede Wahl von $\frac{dk}{df}$ als algebraische Function von f algebraisch integrirbar, daher ist unsere Voraussetzung, dass gleichzeitig die Identitäten (12.) und (17.) bestehen, unzulässig, und wir erhalten den Satz:

II. Man kann das Fundamentalsystem ξ_0 so wählen, dass eine Identität der Form (12.) nicht für einen von x unabhängigen Werth von γ erfüllt wird.

Aus dem Satze I. ergiebt sich nach Satz I. No. 5:

III. Sei

$$M_1(t) = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t^{(\nu-1)}} = T_0 t + T_1 t' + \cdots + T_{\nu-1} t^{(\nu-1)}, \tag{N$_1$.}$$

wo $T_0, T_1, \ldots, T_{\nu-1}$ rationale Functionen von x, so ist identisch für jede Function t

$$\frac{d\mathrm{H}(t)}{dx} = M_1(t)\, H(t). \tag{M$_1$.}$$

Da nun nach Gleichung (M.)

$$\frac{dZ'}{dt} = M(t)\, H(t),$$

so folgt aus Satz II.:

IV. Setzen wir

$$M_1(t) = \gamma M(t),$$

so ist γ nicht von x unabhängig.

Nach dem Theoreme in No. 10 ergiebt sich demnach:

V. Wenn die Differentialgleichung (A.) den Anforderungen (α.) in No. 11 genügt, so ist die Gleichung (H'.), also auch die Gleichung (H.) reductibel.

Diese Eigenschaft ist für die specielle Differentialgleichung (A.), welche den Anforderungen (α.) in No. 11 genügt, eine fundamentale, wie insbesondere aus dem Beispiel, welches wir in den folgenden Nummern entwickeln wollen, hervorgeht.

14.

Zu den linearen Differentialgleichungen, welche die Anforderungen (α.) in No. 11 befriedigen, gehören die Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Functionen genügen, die ich in Borchardts Journal, Bd. 71, S. 91[1]) gegeben habe. Es wird sich zeigen, dass die [1286 Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln, welche zuerst Herr Weierstrass*) aus dem Satze von der Umkehrung von Parameter und Argument hergeleitet hat, sich als unmittelbare Folgerungen darstellen aus dem Satze von der Reductibilität (Satz V. voriger Nummer), angewendet auf den Fall, dass die Gleichung (A.) diejenige ist, welcher die Periodicitätsmoduln genügen.

Ist

$$y = \frac{g(z)}{s}\,{}^{**)}, \tag{1.}$$

wo

$$s^2 = \varphi(z, x), \tag{2.}$$

$\varphi(z, x)$ eine ganze rationale Function von z und x und zwar vom $(2n+1)^{\text{ten}}$ Grade in Bezug auf z, $g(z)$ eine rationale Function von z und x, welche nur für die Wurzeln der Gleichung

$$\varphi(z, x) = 0$$

unendlich wird, so ist

$$\frac{d^a y}{dx^a} = \sum_0^{2n-1}{}_b\, \mathfrak{K}_{ab} \frac{z^b}{s} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mathrm{X}_a(z)\, s\right)^{***)}; \tag{3.}$$

$\mathfrak{K}_{ab}$ sind von z unabhängige Grössen, welche sich rational aus den Coeffi-

*) Programm des Braunsberger Gymnasiums 1848/49[2]).

**) Wir setzen für unseren gegenwärtigen Gebrauch in meiner oben citirten Abhandlung z an Stelle von x, x an Stelle von u und $2n+1$ an Stelle von n.

***) Siehe Borchardts Journal, Bd. 71, S. 107[3]).

1) Abh. VIII, S. 241 ff., Band I dieser Ausgabe. R. F.

2) Werke, Bd. I, S. 111—131. R. F.

3) Abh. VIII, S. 258, Band I dieser Ausgabe. R. F.

cienten von $\varphi(z,x)$ und von $g(z)$ zusammensetzen, $X_{\mathfrak{a}}(z)$ bedeutet eine rationale Function von z.

Ist w ein Periodicitätsmodul des Integrals

$$\int y\,dz,$$

so genügt w als Function von x im Allgemeinen einer Differentialgleichung der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung

$$(\mathrm{A}_1.) \qquad \beta_{2n}\frac{d^{2n}w}{dx^{2n}}+\beta_{2n-1}\frac{d^{2n-1}w}{dx^{2n-1}}+\cdots+\beta_0 w = 0^{*}),$$

wo die Verhältnisse der Grössen $\beta_{2n}, \beta_{2n-1}, \ldots, \beta_0$ rationale Functionen von x bedeuten.

I. Alle Differentialgleichungen der Form (A_1.), welche einer willkürlichen Wahl der rationalen Function $g(z)$ entsprechen, gehören derselben Klasse an.

Es sei z. B.

$$(4.) \qquad g(z) = \alpha_0+\alpha_1 z+\cdots+\alpha_{n-1}z^{n-1},$$

1287] wo $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ rationale Functionen von x bedeuten, alsdann ist

$$w = \eta$$

der Periodicitätsmodul des Integrals erster Gattung

$$\int \frac{g(z)}{s}\,dz,$$

und es sei für diesen Fall nach Gleichung (A_1.)

$$(\mathrm{A}_2.) \qquad \frac{d^{2n}\eta}{dx^{2n}}+p_1(x)\frac{d^{2n-1}\eta}{dx^{2n-1}}+\cdots+p_{2n}(x)\,\eta = 0.$$

Wir wollen beweisen, dass

$$(5.) \qquad w = \varphi_0\eta+\varphi_1\eta'+\cdots+\varphi_{2n-1}\eta^{(2n-1)},$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n-1}$ rationale Functionen von x und die oberen Accente Ableitungen nach x bedeuten.

Wenden wir die Gleichung (3.) auf den Fall an, wo wir $g(z)$ nach Gleichung (4.) bestimmt haben, und setzen daselbst successive $0, 1, 2, \ldots, 2n-1$

*) A. a. O. S. 108 [1]).

1) S. 259 des ersten Bandes dieser Ausgabe. R. F.

für $\mathfrak{a}$, so erhalten wir ein System von Gleichungen, aus welchen wir im Allgemeinen herleiten können

$$(6.) \quad \frac{z^{\mathfrak{b}}}{s} = \mathfrak{L}_0 y+\mathfrak{L}_1\frac{\partial y}{\partial x}+\cdots+\mathfrak{L}_{2n-1}\frac{\partial^{2n-1}y}{\partial x^{2n-1}}+\frac{\partial}{\partial z}(\Psi_{\mathfrak{b}}(z)\,s), \quad (\mathfrak{b}=0,1,2,\ldots,2n-1)$$

wo $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \ldots, \mathfrak{L}_{2n-1}$ rationale Functionen von x und $\Psi_{\mathfrak{b}}(z)$ rationale Functionen von z bedeuten.

Integriren wir beide Seiten dieser Gleichung längs eines geschlossenen Umlaufs der Variabeln z, welcher den Periodicitätsmodul η liefert und bezeichnen den entsprechenden Periodicitätsmodul von

$$\int \frac{z^{\mathfrak{b}}}{s}\,dz$$

mit $\zeta_{\mathfrak{b}}$, so folgt aus Gleichung (6.)

$$(7.) \qquad \zeta_{\mathfrak{b}} = \mathfrak{L}_0\eta+\mathfrak{L}_1\frac{d\eta}{dx}+\cdots+\mathfrak{L}_{2n-1}\frac{d^{2n-1}\eta}{dx^{2n-1}}.$$

Nun ist nach Gleichung (3.) für eine beliebige rationale Function $g(z)$, die nur für die Wurzeln der Gleichung $\varphi(z,x) = 0$ unendlich wird,

$$(8.) \qquad y = \frac{g(z)}{s} = \sum_0^{2n-1}{}_{\mathfrak{b}}\,\mathfrak{K}_{0\mathfrak{b}}\frac{z^{\mathfrak{b}}}{s}+\frac{\partial}{\partial z}(X_0(z)\,s).$$

Integriren wir diese Gleichung nach z längs derselben Curve, so folgt

$$(9.) \qquad w = \sum_{\mathfrak{b}}\mathfrak{K}_{0\mathfrak{b}}\zeta_{\mathfrak{b}}.$$

Demnach ist nach Gleichung (7.)

$$(10.) \qquad w = \mathfrak{M}_0\eta+\mathfrak{M}_1\frac{d\eta}{dx}+\cdots+\mathfrak{M}_{2n-1}\frac{d^{2n-1}\eta}{dx^{2n-1}}, \qquad [1288$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Es mögen nunmehr die Coefficienten von $\varphi(z,x)$ und von $g(z)$ ganze rationale Functionen eines Parameters k sein (wir können als solchen z. B. einen Verschwindungswerth der Function $\varphi(z,x)$ wählen), so genügt der Periodicitätsmodul des Integrals

$$\int \frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{g(z)}{s}\right)dz$$

einer Differentialgleichung (A_1.); derselbe ist daher in der Form (10.) enthalten. Andererseits ist dieser Periodicitätsmodul, wenn wir $g(z)$ nach Gleichung (4.) bestimmen, auch mit $\frac{\partial \eta}{\partial k}$ übereinstimmend. Demnach genügt η einer Gleichung der Form:

$$\frac{\partial \eta}{\partial k} = A_0 \eta + A_1 \frac{d\eta}{dx} + \cdots + A_{2n-1} \frac{d^{2n-1}\eta}{dx^{2n-1}}. \tag{11.}$$

Diese Gleichung bleibt bestehen, wenn für η irgend ein Periodicitätsmodul des Integrals

$$\int \frac{g(z)}{s}\, dz,$$

d. h. irgend ein Integral der Gleichung (A_2.) eingesetzt wird. Wir erhalten also den Satz:

II. Die Differentialgleichung (A_2.) genügt den Anforderungen (α.) in No. 11*).

In meiner oben erwähnten Arbeit**) habe ich gezeigt, dass die Coefficienten der zur Differentialgleichung (A_2.) gehörigen Substitutionsgruppe von k unabhängige, nämlich wohlbestimmte, ganze Zahlen sind. Dieses ist also in vollkommener Übereinstimmung mit den Sätzen in No. 11 und 12.

15.

Bilden wir jetzt die Differentialgleichung (H′.) für unsere Differentialgleichung (A_2.)

$$\frac{d^\nu t}{dx^\nu} + R_1(x) \frac{d^{\nu-1} t}{dx^{\nu-1}} + \cdots + R_\nu(x)\, t = 0, \tag{H_1'.}$$

1289] so folgt aus dem Satze V. No. 13, dass (H_1'.) reductibel ist. Demnach ist auch die der Gleichung (H.) entsprechende Differentialgleichung, welche wir aus (A_2.) herstellen, reductibel. Dieselbe sei

$$\frac{d^\nu u}{dx^\nu} + P_1(x) \frac{d^{\nu-1} u}{dx^{\nu-1}} + \cdots + P_\nu(x)\, u = 0. \tag{H_1.}$$

*) Ein Beispiel hiervon für den Fall der elliptischen Integrale habe ich bereits in BORCHARDTS Journal, Bd. 83, S. 31 [1]) hervorgehoben und daselbst aus der entsprechenden Gleichung die LEGENDREsche Relation zwischen den Perioden der Integrale erster und zweiter Gattung hergeleitet.

**) BORCHARDTS Journal, Bd. 71, S. 100 [2]).

[1]) Abh. XXIV, S. 105, Band II dieser Ausgabe. R. F.

[2]) Abh. VIII, S. 251, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Nach Satz II. No. 9 giebt es also in der zu (H_1.) gehörigen Klasse von Differentialgleichungen auch solche niedrigerer als ν^{ter} Ordnung, d. h. wir können die rationalen Functionen von x, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\nu-1}$ so bestimmen, dass

$$w = \varphi_0 u + \varphi_1 u' + \cdots + \varphi_{\nu-1} u^{(\nu-1)} \tag{1.}$$

einer Differentialgleichung niedrigerer als ν^{ter} Ordnung Genüge leistet. Drücken wir mit Hülfe des aus unserer Gleichung (A_2.) herzustellenden Systems von Gleichungen (F.), nämlich

$$\frac{d^l u}{dx^l} = \psi_{l0} u_0 + \psi_{l1} u_1 + \cdots + \psi_{l,\nu-1} u_{\nu-1}, \tag{F_1.}$$

die Ableitungen von u durch die Functionen $u_0, u_1, \ldots, u_{\nu-1}$ aus, so erhält w die Form

$$w = \psi_0 u_0 + \psi_1 u_1 + \cdots + \psi_{\nu-1} u_{\nu-1}, \tag{2.}$$

wo $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{\nu-1}$ rationale Functionen von x bedeuten. Setzen wir in (2.) an die Stelle von u_λ successive $u_{0\lambda}, u_{1\lambda}, \ldots, u_{\nu-1,\lambda}$ und bezeichnen die zugehörigen Werthe von w mit $w_0, w_1, \ldots, w_{\nu-1}$, so ergiebt sich daraus, dass w einer Differentialgleichung niedrigerer als ν^{ter} Ordnung Genüge leistet, dass $w_0, w_1, \ldots, w_{\nu-1}$ Relationen der Form

$$\gamma_0 w_0 + \gamma_1 w_1 + \cdots + \gamma_{\nu-1} w_{\nu-1} = 0 \tag{T.}$$

mit von x unabhängigen Coefficienten erfüllen.

Es sei

$$\overset{\lambda}{v} = \chi_{\lambda 0} \eta + \chi_{\lambda 1} \eta' + \cdots + \chi_{\lambda, 2n-1} \eta^{(2n-1)}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.}$$

wo $\chi_{\lambda\alpha}$ rationale Functionen von x bedeuten. Sind $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \ldots, \eta_{i_{2n}}$ die Periodicitätsmoduln des Integrals

$$\int \frac{g(z)}{s}\, dz$$

(wo $g(z)$ nach Gleichung (4.) voriger Nummer bestimmt ist) an den $2n$ Querschnitten, so bilden dieselben im Allgemeinen ein Fundamentalsystem der Gleichung (A_2.). Setzen wir in (3.) η_i an Stelle von η, so möge der zugehörige Werth von $\overset{\lambda}{v}$ mit $\overset{i\lambda}{v}$ bezeichnet werden. Bilden wir nun mit den Grössen $\overset{i\lambda}{v}$ die Determinanten

$$\mathfrak{U}^{(0)}, \mathfrak{U}^{(1)}, \ldots, \mathfrak{U}^{(\nu-1)}$$

1290] mit je n^2 Elementen, indem wir in den Horizontalreihen $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ wählen, während die Verticalreihen für l successive die Zahlen einer Combination n^{ter} Klasse der Zahlenreihe $1, 2, \ldots, 2n$ sind, so erhalten wir

$$(4.)\qquad \mathfrak{U}^{(i)} = s_{i0}u_0 + s_{i1}u_1 + \cdots + s_{i,\nu-1}u_{\nu-1},$$

wo die $s_{i\varkappa}$ homogene alternirende Functionen von den $\chi_{\lambda a}$ der Ordnung n sind.

Bestimmen wir $\chi_{\lambda a}$ so, dass

$$(5.)\qquad s_{i0} = \psi_0,\quad s_{i1} = \psi_1,\quad \ldots,\quad s_{i,\nu-1} = \psi_{\nu-1},$$

und sind $(\mathfrak{U})^{i\varkappa}$ die Werthe von $\mathfrak{U}^{(i)}$, welche aus (4.) dadurch hervorgehen, dass $u_{\varkappa\lambda}$ an die Stelle von u_λ gesetzt wird, so folgt aus Gleichung (T.) für diese Grössen eine Relation der Form

$$(\mathrm{T}_1.)\qquad \gamma_0(\mathfrak{U})^{i0} + \gamma_1(\mathfrak{U})^{i1} + \cdots + \gamma_{\nu-1}(\mathfrak{U})^{i,\nu-1} = 0$$

mit von x unabhängigen Coefficienten.

Die weitere Ausführung dieser Rechnung, welche ich mir für eine spätere Mittheilung vorbehalte, ergiebt die oben bezeichneten Relationen zwischen den Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung in der Form wie sie Herr Weierstrass gegeben hat.

16.

713] Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung, welcher die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale vom Range $p = 2$ genügen.

Die Periodicitätsmoduln des Integrals

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}},$$

wo

$$(1.)\qquad \varphi(z) = (z-x)(z-k_1)(z-k_2)(z-k_3)(z-k_4),$$

befriedigen alsdann, wie ich*) nachgewiesen habe, die Gleichung

*) Crelles Journal, Bd. 71, S. 119 [1]).

[1]) Abh. VIII, S. 241, Band I dieser Ausgabe. R. F.

$$(2.)\qquad \psi(x)\frac{d^4y}{dx^4} + 3\psi'(x)\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{25}{8}\psi^{(2)}(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{5}{4}\psi^{(3)}(x)\frac{dy}{dx} + \frac{15}{128}\psi^{(4)}(x)y = 0,$$

wo

$$\psi(x) = (x-k_1)(x-k_2)(x-k_3)(x-k_4),\quad \text{und}\quad \psi^{(\alpha)}(x) = \frac{d^\alpha\psi}{dx^\alpha}.$$

Die in der eben erwähnten Arbeit*) eingeführten Grössen (x, k_1), (x, k_2), (x, k_3), (x, k_4) wollen wir bez. mit y_1, y_2, y_3, y_4 bezeichnen. Die letzteren Functionen von x bilden ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (2.), dessen Fundamentalsubstitutionen aus der genannten Abhandlung**) sich folgendermaassen ergeben: Ist $\bar{y}_\lambda$ der Werth, in welchen y_λ nach einem Umlaufe der Veränderlichen x übergeht, so ist nach einem Umlaufe um

$$(3.)\qquad \begin{cases} k_1)\,\bar{y}_1 = y_1, & \bar{y}_2 = y_2 + 2y_1, \quad \bar{y}_3 = y_3 + 2y_1, \quad \bar{y}_4 = y_4 + 2y_1; \\ k_2)\,\bar{y}_1 = y_1 - 2y_2, & \bar{y}_2 = y_2, \quad \bar{y}_3 = y_3 + 2y_2, \quad \bar{y}_4 = y_4 + 2y_2; \\ k_3)\,\bar{y}_1 = y_1 - 2y_3, & \bar{y}_2 = y_2 - 2y_3, \quad \bar{y}_3 = y_3, \quad \bar{y}_4 = y_4 + 2y_3; \\ k_4)\,\bar{y}_1 = y_1 - 2y_4, & \bar{y}_2 = y_2 - 2y_4, \quad \bar{y}_3 = y_3 - 2y_4, \quad \bar{y}_4 = y_4. \end{cases}$$ [714

Setzen wir

$$(4.)\qquad y_\lambda\frac{dy_\mu}{dx} - y_\mu\frac{dy_\lambda}{dx} = (\lambda\mu),$$

so genügen die sechs Functionen von x

$$(12),\ (13),\ (14),\ (23),\ (24),\ (34)$$

nach No. 3 Gleichung (H.) einer Differentialgleichung

$$(5.)\qquad \frac{d^6u}{dx^6} + Q_1\frac{d^5u}{dx^5} + Q_2\frac{d^4u}{dx^4} + Q_3\frac{d^3u}{dx^3} + Q_4\frac{d^2u}{dx^2} + Q_5\frac{du}{dx} + Q_6u = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von x und von den Grössen k_λ sind.

Aus No. 14 ergiebt sich, dass die Gleichung (5.) reductibel sein muss.

Es ist zweckmässig und für die Folge auch wichtig, dieses noch auf eine andere Art zu beweisen, welche zugleich von den am Anfange der No. 14

*) Crelles Journal, Bd. 71, S. 100 [1]).

**) Ebendas. S. 100–101 [2]).

[1]) S. 251, Band I dieser Ausgabe. R. F.

[2]) S. 251–252, Band I dieser Ausgabe. R. F.

angedeuteten Relationen diejenigen unmittelbar liefert, die hier vorzugsweise in Betracht kommen.

Aus den Gleichungen (3.) ergiebt sich, wenn wir wieder mit $(\overline{\lambda\mu})$ denjenigen Werth bezeichnen, in welchen $(\lambda\mu)$ nach einem angegebenen Umlaufe der Veränderlichen x übergeht, dass nach einem Umlaufe um

$$(6.)\quad \left\{\begin{array}{l} k_1)\left\{\begin{array}{l} \overline{(12)} = (12),\quad \overline{(13)} = (13),\quad \overline{(14)} = (14), \\ \overline{(23)} = -2(12)+2(13)+(23), \\ \overline{(24)} = -2(12)+2(14)+(24), \\ \overline{(34)} = -2(13)+2(14)+(34); \end{array}\right. \\ k_2)\left\{\begin{array}{l} \overline{(12)} = (12),\quad \overline{(13)} = 2(12)+(13)-2(23), \\ \overline{(14)} = 2(12)+(14)-2(24),\quad \overline{(23)} = (23), \\ \overline{(24)} = (24),\quad \overline{(34)} = -2(23)+2(24)+(34); \end{array}\right. \\ k_3)\left\{\begin{array}{l} \overline{(12)} = (12)-2(13)+2(23),\quad \overline{(13)} = (13), \\ \overline{(14)} = 2(13)+(14)-2(34),\quad \overline{(23)} = (23), \\ \overline{(24)} = 2(23)+(24)-2(34),\quad \overline{(34)} = (34); \end{array}\right. \\ k_4)\left\{\begin{array}{l} \overline{(12)} = (12)-2(14)+2(24),\quad \overline{(13)} = (13)-2(14)+2(34), \\ \overline{(14)} = (14),\quad \overline{(23)} = (23)-2(24)+2(34), \\ \overline{(24)} = (24),\quad \overline{(34)} = (34). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Bilden wir das Particularintegral der Gleichung (5.)

$$(7.)\qquad w = (12)-(13)+(14)+(23)-(24)+(34),$$

715] so ergiebt die eben gebildete Tabelle (6.), dass w durch die Umläufe der Veränderlichen x um einen der Punkte k_1, k_2, k_3, k_4 keine Änderung erleidet. Da aber die Integrale der Gleichung (5.) sich für keine anderen endlichen Werthe von x verzweigen, so folgt, dass w eine eindeutige Funktion von x ist. Da nun die Integrale der Gleichung (2.), folglich auch die der Gleichung (5.), für alle Werthe von x nur bestimmte Werthe annehmen*), so ergiebt sich:

Das Particularintegral w der Gleichung (5.) ist eine rationale Function von x, also diese Gleichung reductibel.

*) Siehe meine Arbeit in CRELLES Journal, Bd. 66, S. 146, Gleichung (12.)[1].

[1]) Abh. VI, S. 186, Band I dieser Ausgabe. R. F.

17.

Es sei η Integral einer Differentialgleichung, welche mit Gleichung (2.) No. 16 zu derselben Klasse gehört, also

$$(1.)\qquad \eta = \varphi_0 y + \varphi_1 y' + \varphi_2 y^{(2)} + \varphi_3 y^{(3)},$$

wo φ_λ eine rationale Function von x, $y^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda y}{dx^\lambda}$.

Setzen wir

$$(2.)\qquad y_\lambda \eta_\mu - y_\mu \eta_\lambda = [\lambda\mu],$$

so folgt

$$(3.)\qquad [\lambda\mu] = \varphi_1(\lambda\mu) + \varphi_2\frac{d}{dx}(\lambda\mu) + \varphi_3(y_\lambda y_\mu^{(3)} - y_\mu y_\lambda^{(3)}).$$

Nun ist nach No. 4

$$(4.)\qquad y_1 y_2^{(3)} - y_2 y_1^{(3)} = P_0(12) + P_1\frac{d}{dx}(12) + P_2\frac{d^2}{dx^2}(12)$$
$$+ P_3\frac{d^3}{dx^3}(12) + P_4\frac{d^4}{dx^4}(12) + P_5\frac{d^5}{dx^5}(12),$$

wo P_λ wohlbestimmte rationale Functionen von x und den Grössen k_λ bedeuten. Demnach ist

$$(5.)\qquad [\lambda\mu] = (\varphi_1 + P_0\varphi_3)(\lambda\mu) + (\varphi_2 + P_1\varphi_3)\frac{d}{dx}(\lambda\mu) + P_2\varphi_3\frac{d^2}{dx^2}(\lambda\mu)$$
$$+ P_3\varphi_3\frac{d^3}{dx^3}(\lambda\mu) + P_4\varphi_3\frac{d^4}{dx^4}(\lambda\mu) + P_5\varphi_3\frac{d^5}{dx^5}(\lambda\mu).$$

Aus dieser Gleichung folgt, dass

$$(6.)\qquad [12]-[13]+[14]+[23]-[24]+[34] = w_1$$

eine rationale Function von x ist, nämlich

$$(7.)\quad w_1 = (\varphi_1 + P_0\varphi_3)w + (\varphi_2 + P_1\varphi_3)w' + P_2\varphi_3 w^{(2)} + P_3\varphi_3 w^{(3)} + P_4\varphi_3 w^{(4)} + P_5\varphi_3 w^{(5)},$$ [716

wo w die durch die Gleichung (7.) voriger Nummer bestimmte rationale Function von x, $w^{(\lambda)}$ ihre Ableitungen nach x bedeuten. Da die Function η der Gleichung (1.) bei verschiedener Wahl der Grössen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die Periodicitätsmoduln sämmtlicher Integrale erster und zweiter Gattung umfasst (siehe No. 14), so drücken die Gleichung (7.) voriger Nummer und die Gleichung (6.) der gegenwärtigen Nummer die sämmtlichen zwischen den Periodicitätsmoduln statthabenden Relationen aus, welche in der Theorie der ABELschen Functionen auf anderem Wege und von anderen Gesichtspunkten aus hergeleitet werden. Sie ergeben sich hier, wie schon in No. 14 bemerkt, als eine Folge der Reductibilität der Gleichung (5.) voriger Nummer.

Wenn wir insbesondere $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ so wählen, dass

$$(8.)\quad (\varphi_1 + P_0\varphi_3)w + (\varphi_2 + P_1\varphi_3)w' + P_2\varphi_3 w^{(2)} + P_3\varphi_3 w^{(3)} + P_4\varphi_3 w^{(4)} + P_5\varphi_3 w^{(5)} = 0,$$

dann ist

$$(9.)\quad [12] - [13] + [14] + [23] - [24] + [34] = 0.$$

Diese Grössen $[\lambda\mu]$ genügen im Allgemeinen einer Differentialgleichung sechster Ordnung, welche nach Gleichung (5.) mit der Gleichung (5.) voriger Nummer zu derselben Klasse gehört. Sind aber $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ der Gleichung (8.) gemäss gewählt, so genügen $[\lambda\mu]$ nach Gleichung (9.) einer Differentialgleichung nur fünfter Ordnung, in Übereinstimmung mit dem Satze II. No. 9.

Ein Beispiel, welches uns hier besonders interessirt, ist dasjenige, wo η die Periodicitätsmoduln des Integrals erster Gattung

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$$

darstellt. Die in No. 14 angedeutete Rechnung ergiebt für den gegenwärtigen Fall

$$(10.)\quad \eta = [\tfrac{1}{24}\psi^{(4)}(x)x - \tfrac{1}{3}\psi^{(3)}(x)]y - 3\psi^{(2)}(x)y' - \tfrac{16}{3}\psi'(x)y^{(2)} - \tfrac{8}{3}\psi(x)y^{(3)}.$$

Die Werthe

$$(11.)\quad \varphi_1 = -3\psi^{(2)}(x),\quad \varphi_2 = -\tfrac{16}{3}\psi'(x),\quad \varphi_3 = -\tfrac{8}{3}\psi(x)$$

befriedigen nämlich die Gleichung (8.), und die Relation (9.) ist für dieselben, wie wir sehen werden, bis auf die Bezeichnungsweise mit der zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung bestehenden Relation übereinstimmend.

18.

717] Sei nämlich v_1, v_2, v_3, v_4 ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (2.), No. 16, welches mit y_1, y_2, y_3, y_4 folgendermaassen zusammen-

hängt:

$$(1.)\quad \begin{cases} v_1 = y_2 - y_1 + y_4 - y_3, & v_2 = y_4 - y_3, \\ v_3 = y_1, & v_4 = y_3 - y_2, \end{cases}$$

so sind v_1, v_2 übereinstimmend mit den Periodicitätsmoduln A_1, A_2 des Integrals

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$$

an den Querschnitten a_1, a_2, während v_3, v_4 die Periodicitätsmoduln B_1, B_2 desselben Integrals an den Querschnitten b_1, b_2 darstellen*).

Ist η durch die Gleichung (10.) voriger Nummer bestimmt, und ist $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung vierter Ordnung, welcher η genügt, das mit dem Fundamentalsystem von Integralen $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ derselben Gleichung in folgendem Zusammenhange steht:

$$(2.)\quad \begin{cases} \zeta_1 = \eta_2 - \eta_1 + \eta_4 - \eta_3, & \zeta_2 = \eta_4 - \eta_3, \\ \zeta_3 = \eta_1, & \zeta_4 = \eta_3 - \eta_2, \end{cases}$$

so sind ζ_1, ζ_2 die Periodicitätsmoduln A'_1, A'_2 des Integrals

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$$

an den Querschnitten a_1, a_2 und ζ_3, ζ_4 die Periodicitätsmoduln B'_1, B'_2 desselben Integrals an den Querschnitten b_1, b_2.

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) ergiebt sich

$$(3.)\quad y_1 = v_3,\quad y_2 = v_1 - v_2 + v_3,\quad y_3 = v_1 - v_2 + v_3 + v_4,\quad y_4 = v_1 + v_3 + v_4;$$

$$(4.)\quad \eta_1 = \zeta_3,\quad \eta_2 = \zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3,\quad \eta_3 = \zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4,\quad \eta_4 = \zeta_1 + \zeta_3 + \zeta_4.$$

Setzen wir diese Werthe in Gleichung (9.) voriger Nummer ein, so folgt

$$(5.)\quad v_1\zeta_3 - v_3\zeta_1 + v_2\zeta_4 - v_4\zeta_2 = 0$$

oder auch

$$(5a.)\quad A_1B'_1 - B_1A'_1 + A_2B'_2 - B_2A'_2 = 0,$$

welches die oben erwähnte Relation zwischen den Periodicitätsmoduln der Integrale erster Gattung ist.

---

*) Über die Bezeichnungsweise vergl. RIEMANN, ABELsche Functionen, No. 20 [1]).

---

[1]) Werke, II. Auflage (1892), S. 130—131. R. F.

718] Setzen wir

$$(6.)\quad \begin{cases} v_1\zeta_2 - v_2\zeta_1 = a, & v_1\zeta_3 - v_3\zeta_1 = b, \\ v_1\zeta_4 - v_4\zeta_1 = c, & v_2\zeta_3 - v_3\zeta_2 = d, \\ v_2\zeta_4 - v_4\zeta_2 = e, & v_3\zeta_4 - v_4\zeta_3 = f, \end{cases}$$

so nimmt die Relation (5.) die Gestalt an

$$(7.)\quad b + e = 0.$$

Hierzu tritt die identische Beziehung (siehe No. 1)

$$(8.)\quad af - be + cd = 0.$$

Aus der Tabelle Gleichung (3.) No. 16 ergiebt sich, dass nach einem Umlaufe von x um

$$(9.)\quad \begin{cases} k_1)\ \bar v_1 = v_1 + 2v_3,\ \ \bar v_2 = v_2,\ \ \bar v_3 = v_3,\ \ \bar v_4 = v_4; \\ k_2)\begin{cases} \bar v_1 = 3v_1 - 2v_1 + 2v_3,\ \ \bar v_2 = v_2,\ \ \bar v_3 = -2v_1 + 2v_2 - v_3, \\ \bar v_4 = 2v_1 - 2v_2 + 2v_3 + v_4; \end{cases} \\ k_3)\begin{cases} \bar v_1 = 3v_1 - 2v_2 + 2v_3 + 2v_4,\ \ \bar v_2 = 2v_1 - v_2 + 2v_3 + 2v_4, \\ \bar v_3 = -2v_1 + 2v_2 - v_3 - 2v_4,\ \ \bar v_4 = 2v_1 - 2v_2 + 2v_3 + 3v_4; \end{cases} \\ k_4)\begin{cases} \bar v_1 = 3v_1 + 2v_3 + 2v_4,\ \ \bar v_2 = 2v_1 + v_2 + 2v_3 + 2v_4, \\ \bar v_3 = -2v_1 - v_3 - 2v_4,\ \ \bar v_4 = v_4. \end{cases} \end{cases}$$

Dieselben Transformationsformeln gelten den Gleichungen (10.) voriger Nummer und den Gleichungen (2.) zufolge, für $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$. Demnach ist nach einem Umlaufe der Variabeln x um

$$(10.)\quad \begin{cases} k_1)\ \bar a = a - 2d,\ \ \bar b = b,\ \ \bar c = c + 2f,\ \ \bar d = d,\ \ \bar e = e,\ \ \bar f = f; \\ k_2)\begin{cases} \bar a = 3a - 2d,\ \ \bar b = 2a + b - 2d,\ \ \bar c = -2a + 4b + 3c + 2f, \\ \bar d = 2a - d,\ \ \bar f = -4b - 2c + 2d - f; \end{cases} \\ k_3)\begin{cases} \bar a = a + 4b + 2c - 2d,\ \ \bar b = 2a + b - 2c - 2d - 2f, \\ \bar c = -2a + 4b + 5c + 2f,\ \ \bar d = 2a + 4b - 3d - 2f, \\ \bar f = -4b - 2c + 2d + f; \end{cases} \\ k_4)\begin{cases} \bar a = 3a + 4b + 2c - 2d,\ \ \bar b = b - 2c - 2f, \\ \bar c = 3c + 2f,\ \ \bar d = 2a + 4b - d - 2f,\ \ \bar f = -2c - f. \end{cases} \end{cases}$$

19.

Es sei

$$(1.)\quad y^{(4)} + p_1 y^{(3)} + p_2 y^{(2)} + p_3 y' + p_4 y = 0,$$

wo $y^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda y}{dx^\lambda}$, eine Differentialgleichung, deren Coefficienten ausser von x [719 noch von zwei veränderlichen Parametern k_1, k_2, rational abhängen. Es sei η ein Integral einer Differentialgleichung

$$(2.)\quad \eta^{(4)} + q_1\eta^{(3)} + q_2\eta^{(2)} + q_3\eta' + q_4\eta = 0,$$

welche mit (1.) zu derselben Klasse gehört, also

$$(3.)\quad \eta = \varphi_0 y + \varphi_1 y' + \varphi_2 y^{(2)} + \varphi_3 y^{(3)},$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ rationale Functionen von x. Wir wollen überdies voraussetzen, dass dieselben auch von k_1, k_2 rational abhängen. Setzen wir in (3.) für y successive y_1, y_2, y_3, y_4 (die Elemente eines Fundamentalsystems), so sollen die bezüglichen Werthe von η mit $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ bezeichnet werden. Wir wollen überhaupt zwei Integrale der Gleichungen (1.) und (2.) der Form

$$u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4$$

und

$$u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + u_3\eta_3 + u_4\eta_4,$$

wo u_1, u_2, u_3, u_4 willkürlich gewählte von x unabhängige Werthe bedeuten, entsprechende Integrale nennen.

Ist (x, k_1, k_2) ein Werthsystem, welches die drei Gleichungen

$$(4.)\ \sum u_\lambda y_\lambda = 0, \qquad (5.)\ \sum v_\lambda y_\lambda = 0, \qquad (6.)\ \sum w_\lambda y_\lambda = 0$$
$$(\lambda = 1, 2, 3, 4)$$

befriedigt, worin $u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda$ willkürlich gewählte Grössen bezeichnen, so wollen wir über $u_\lambda, v_\lambda, w_\lambda$ so verfügen, dass dasselbe Werthsystem (x, k_1, k_2) auch den mit den entsprechenden Integralen gebildeten Gleichungen

$$(7.)\ \sum u_\lambda \eta_\lambda = 0, \qquad (8.)\ \sum v_\lambda \eta_\lambda = 0, \qquad (9.)\ \sum w_\lambda \eta_\lambda = 0$$

genüge. Wir können zunächst $u_4 = 0$, $v_3 = 0$, $w_2 = 0$ wählen, und wir erhalten, wenn wir

$$y_\alpha \eta_\beta - y_\beta \eta_\alpha = [\alpha\beta]$$

setzen,

$$(10.)\qquad \begin{cases} \dfrac{u_1}{u_3} = \dfrac{[23]}{[12]}, & \dfrac{u_2}{u_3} = -\dfrac{[13]}{[12]}, \\[2ex] \dfrac{v_1}{v_4} = \dfrac{[24]}{[12]}, & \dfrac{v_2}{v_4} = -\dfrac{[14]}{[12]}, \\[2ex] \dfrac{w_1}{w_4} = \dfrac{[34]}{[13]}, & \dfrac{w_3}{w_4} = -\dfrac{[14]}{[13]}. \end{cases}$$

Es ist aber identisch

$$(11.)\qquad [12][34]-[13][24]+[14][23] = 0.$$

Demnach haben wir

720] $$(12.)\qquad \frac{w_1}{w_4} = \frac{v_1}{v_4} - \frac{v_2}{v_4}\frac{u_1}{u_2},$$

$$(13.)\qquad \frac{w_3}{w_4} = -\frac{v_2}{v_4}\frac{u_3}{u_2}.$$

Die Beziehungen zwischen den u und den v, wie sie sich aus den Gleichungen (10.) ergeben, sind im Allgemeinen transcendent; wenn dagegen die Gleichungen (1.) und (2.) so beschaffen sind, dass eine Gleichung

$$(14.)\qquad \alpha_1[12]+\alpha_2[13]+\alpha_3[14]+\alpha_4[23]+\alpha_5[24]+\alpha_6[34] = 0$$

mit von x, k_1, k_2 unabhängigen Coefficienten stattfindet, so folgt aus derselben nach Gleichung (12.) zwischen den u und v die Relation

$$(15.)\qquad \alpha_1 - \alpha_2\frac{u_2}{u_3} - \alpha_3\frac{v_2}{v_4} + \alpha_4\frac{u_1}{u_3} + \alpha_5\frac{v_1}{v_4} - \alpha_6\left(\frac{v_1}{v_4}\frac{u_2}{u_3} - \frac{v_2}{v_4}\frac{u_1}{u_3}\right) = 0.$$

Es verbleiben hiernach drei von den Verhältnissen $\frac{u_2}{u_3}, \frac{u_1}{u_3}, \frac{v_2}{v_4}, \frac{v_1}{v_4}$ willkürlich, und x, k_1, k_2 sind Functionen derselben.

Ist z. B. die Form der Gleichung (14.):

$$(16.)\qquad [13]+[24] = 0,$$

so geht (15.) über in

$$(17.)\qquad -\frac{u_2}{u_3}+\frac{v_1}{v_4} = 0.$$

Setzen wir

$$(18.)\qquad \frac{u_2}{u_3} = -\xi,\quad \frac{v_2}{v_4} = -\eta,\quad \frac{u_1}{u_3} = \zeta,$$

so liefern die Gleichungen (4.), (5.), (6.) und (7.), (8.), (9.) die folgenden

Gleichungen:

$$(19.)\qquad \begin{cases} \zeta y_1 - \xi y_2 + y_3 = 0, \\ \zeta \eta_1 - \xi \eta_2 + \eta_3 = 0, \\ -\xi y_1 - \eta y_2 + y_4 = 0, \\ -\xi \eta_1 - \eta \eta_2 + \eta_4 = 0, \end{cases}$$

woraus sich wiederum ergiebt:

$$(20.)\qquad \frac{[23]}{[12]} = \zeta,\quad \frac{[13]}{[12]} = \xi,\quad \frac{[14]}{[12]} = \eta.$$

Aus diesen drei Gleichungen sind x, k_1, k_2 als Functionen der unabhängigen Variablen, ξ, η, ζ zu bestimmen.

Die Natur dieser Functionen ist natürlich von der Beschaffenheit der Coefficienten der Gleichungen (1.) und (2.) abhängig. Man kann unter [721 Umständen an Stelle dieser Gleichungen irgend zwei andere derselben Klasse setzen, von der Art, dass x, k_1, k_2 eindeutige Functionen von ξ, η, ζ werden. Dieses Verhalten ist analog dem Verhalten derjenigen Function, welche durch Umkehrung des Quotienten eines Fundamentalsystems von Integralen einer Differentialgleichung zweiter Ordnung entsteht. Man vergleiche z. B. die Natur dieser Function an den beiden Gleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale bezüglich erster und zweiter Gattung genügen und welche zu derselben Klasse gehören*).

20.

Wir wollen nunmehr die Resultate der vorigen Nummer auf die Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale anwenden, indem wir an die Stelle der Gleichung (1.) voriger Nummer die der Periodicitätsmoduln des Integrals

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$$

(Gleichung (2.), No. 16), und an die Stelle von η in Gleichung (3.) voriger Nummer den Ausdruck aus Gleichung (10.) (No. 17) des Periodicitätsmoduls

*) Vergl. Crelles Journal, Bd. 83, S. 31 [1]).

[1]) Abh. XXIV, S. 105, Band II dieser Ausgabe. R. F.

des Integrals

$$\int \frac{z\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}}$$

setzen. An Stelle des Fundamentalsystems (y_1, y_2, y_3, y_4) der vorigen Nummer wählen wir das Fundamentalsystem (v_1, v_2, v_3, v_4), wie es durch die Gleichungen (1.), No. 18, bestimmt wird; also an Stelle von $(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ das durch die Gleichungen (2.), No. 18, definirte Fundamentalsystem $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)$. Alsdann ergeben die Gleichungen (20.) voriger Nummer, dass x, k_1, k_2 als Functionen von drei unabhängigen Variablen ξ, η, ζ definirt werden durch die Gleichungen

$$\text{(1.)} \qquad \frac{b}{a} = \xi, \quad \frac{c}{a} = \eta, \quad \frac{d}{a} = \zeta,$$

wo a, b, c, d die in No. 18 Gleichung (6.) eingeführten Grössen sind.

Den Grössen k_3, k_4, welche noch in $\varphi(z)$ auftreten, legen wir feste Werthe, z. B. die Werthe 0, 1 bei.

722] Wir wollen in eine nähere Untersuchung der Functionen x, k_1, k_2 von ξ, η, ζ eintreten und namentlich die Eindeutigkeit derselben nachweisen, mit den für Functionen mehrerer Variablen erforderlichen Modificationen, im Wesentlichen nach der Methode, welche wir*) angewendet, um den Modul k der elliptischen Functionen als Function des Quotienten der Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale zu erforschen.

Durch Differentiation der Gleichungen (1.) ergiebt sich

$$\text{(2.)} \qquad \begin{cases} d\xi = \dfrac{\partial \xi}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \xi}{\partial k_1} dk_1 + \dfrac{\partial \xi}{\partial k_2} dk_2, \\[2mm] d\eta = \dfrac{\partial \eta}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \eta}{\partial k_1} dk_1 + \dfrac{\partial \eta}{\partial k_2} dk_2, \\[2mm] d\zeta = \dfrac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \zeta}{\partial k_1} dk_1 + \dfrac{\partial \zeta}{\partial k_2} dk_2. \end{cases}$$

Wir haben nunmehr die Functionaldeterminante

$$\text{(3.)} \qquad \Delta = \sum \pm \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial k_1} \frac{\partial \zeta}{\partial k_2}$$

*) CRELLES Journal, Bd. 83, S. 13, Brief an Herrn HERMITE [1]).

[1]) Abh. XXIV, S. 85 ff., Band II dieser Ausgabe. R. F.

zu untersuchen. Dieselbe lässt sich, den Gleichungen (1.) zufolge*), auf die Form bringen

$$\text{(4.)} \qquad \Delta = \frac{1}{a^4} \sum \pm a \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial k_1} \frac{\partial d}{\partial k_2}.$$

Es werde

$$\text{(5.)} \qquad \sum \pm p \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial r}{\partial k_1} \frac{\partial s}{\partial k_2} = G(p, q, r, s)$$

gesetzt. Aus der Gleichung (8.), No. 18, und den Gleichungen (1.) folgt

$$\text{(6.)} \qquad \vartheta = \frac{f}{a} = -\xi^2 - \eta\zeta.$$

Es ist daher

$$\sum \pm \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial k_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial k_2} = -\eta \sum \pm \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial k_1} \frac{\partial \zeta}{\partial k_2}.$$

Daher ist

$$G(a, b, c, f) = a^4 \sum \pm \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial k_1} \frac{\partial \vartheta}{\partial k_2} = -\eta\, G(a, b, c, d),$$

$$\text{(7.)} \qquad G(a, b, c, f) = -\eta\, G(a, b, c, d).$$

Auf gleiche Weise erhalten wir [723

$$\text{(8.)} \qquad G(a, b, d, f) = \zeta\, G(a, b, c, d).$$

$$\text{(9.)} \qquad G(a, c, d, f) = -2\xi\, G(a, b, c, d).$$

$$\text{(10.)} \qquad G(b, c, d, f) = \vartheta\, G(a, b, c, d).$$

21.

Als Functionen der Variablen x sind die verschiedenen Zweige von a, b, c, d, f lineare homogene Functionen von einander; die Fundamentalsubstitutionen dieser Abhängigkeit sind in den Gleichungen (10.), No. 18, gegeben. Die verschiedenen Zweige der Grössen $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ als Functionen von x hängen linear von einander ab; die Fundamentalsubstitutionen dieser Abhängigkeit sind unmittelbar aus den Gleichungen (10.), No. 18, abzulesen.

Wir wollen zur Abkürzung für $G(a, b, c, d)$ da, wo kein Missverständniss möglich ist, kurz den Buchstaben G setzen, und wir wollen mit $\overline{G}$ denjenigen

*) Vergl. JACOBI, CRELLES Journal, Bd. 12, S. 40 [1]).

[1]) C. G. J. Jacobis gesammelte Werke, Bd. III, S. 236. R. F.

Werth bezeichnen, in welchen G nach einem Umlaufe der Variablen x übergeht.

Aus den Gleichungen (10.), No. 18, und den Gleichungen (7.) bis (10.), No. 20, ergiebt sich, dass nach einem Umlaufe von x um k_1

$$\bar{G} = \frac{(a-2d)G}{a} \tag{1.}$$

und nach einem Umlaufe von x um k_2

$$\bar{G} = \frac{(3a-2d)G}{a}. \tag{2.}$$

Hieraus folgt, dass sowohl für den Umlauf von x um k_1, als auch für den Umlauf um k_2 die Function $\frac{G}{a}$ unverändert bleibt.

Wir behaupten, dass diese Function auch unverändert bleibt nach einem Umlaufe von x um k_3 und k_4. Wir könnten dieses durch directe Berechnung aus den Gleichungen (10.), No. 18, und (7.) bis (10.) voriger Nummer herleiten; wir ziehen es jedoch vor, den Beweis nach einem Verfahren zu geben, welches für den allgemeinen Fall der hyperelliptischen Functionen eines beliebigen Ranges in gleicher Weise anwendbar ist und durch welches eine Reihe combinatorischer Rechnungen umgangen wird.

Aus den Gleichungen (10.), No. 18, und den Gleichungen (7.) bis (10.) voriger Nummer ergiebt sich nämlich, dass nach einem Umlaufe S der Variablen x

$$\bar{G} = (m+m_1\xi+m_2\eta+m_3\zeta+m_4\vartheta)G, \tag{3.}$$

724] wo m, m_1, m_2, m_3, m_4 ganze Zahlen bedeuten. Ein zweiter Umlauf S_1 der Variablen x führe G in $\bar{G}_1$ über; so ist ebenso

$$\bar{G}_1 = (m'+m'_1\xi+m'_2\eta+m'_3\zeta+m'_4\vartheta)G, \tag{4.}$$

wo $m', m'_1, \ldots, m'_4$ ganze Zahlen sind.

Endlich möge der aus S, S_1 zusammengesetzte Umlauf G in $\bar{G}_2$ überführen; dann ist wiederum

$$\bar{G}_2 = (m''+m''_1\xi+m''_2\eta+m''_3\zeta+m''_4\vartheta)G, \tag{5.}$$

wo $m'', m''_1, \ldots, m''_4$ wieder ganze Zahlen sind.

Durch den Umlauf S_1 mögen $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ bez. in $\xi', \eta', \zeta', \vartheta'$ übergehen; dann ergiebt sich aus (3.), (4.), (5.):

$$\begin{aligned} &m''+m''_1\xi+m''_2\eta+m''_3\zeta+m''_4\vartheta \\ &= (m+m_1\xi'+m_2\eta'+m_3\zeta'+m_4\vartheta')(m'+m'_1\xi+m'_2\eta+m'_3\zeta+m'_4\vartheta). \end{aligned} \tag{6.}$$

Da jede der Grössen $\xi', \eta', \zeta', \vartheta'$ die Form hat

$$\frac{ga+g_1b+g_2c+g_3d+g_4f}{a'},$$

wo $g, g_1, \ldots, g_4$ ganze Zahlen und a' das bedeutet, worin a durch den Umlauf S_1 übergeht, so ist

$$m+m_1\xi'+m_2\eta'+m_3\zeta'+m_4\vartheta' = \frac{na+n_1b+n_2c+n_3d+n_4f}{a'}. \tag{7.}$$

Setzen wir noch

$$a' = \alpha a+\alpha_1 b+\alpha_2 c+\alpha_3 d+\alpha_4 f, \tag{8.}$$

so geht die Gleichung (6.) über in

$$\begin{aligned} &(m''a+m''_1b+m''_2c+m''_3d+m''_4f)(\alpha a+\alpha_1b+\alpha_2c+\alpha_3d+\alpha_4f) \\ &= (na+n_1b+n_2c+n_3d+n_4f)(m'a+m'_1b+m'_2c+m'_3d+m'_4f). \end{aligned} \tag{9.}$$

Diese Gleichung erhält die Form

$$Kf^2+Lf+M = 0, \tag{10.}$$

wo K eine ganze Zahl, L und M ganze homogene Functionen bez. ersten und zweiten Grades von a, b, c, d mit ganzzahligen Coefficienten sind. Da nun ausser der Relation

$$af+b^2+cd = 0 \tag{11.}$$

(s. Gleichung (8.) No. 18) keine homogene Relation zwischen a, b, c, d, f bestehen kann, so muss

$$K = 0, \tag{12.}$$

$$L = \gamma a, \tag{13.}$$

$$M = \gamma(b^2+cd) \tag{13a.}$$

sein, wo γ eine ganze Zahl ist, so dass

$$\begin{aligned} &(m''a+m''_1b+m''_2c+m''_3d+m''_4f)(\alpha a+\alpha_1b+\alpha_2c+\alpha_3d+\alpha_4f) \\ &-(na+n_1b+n_2c+n_3d+n_4f)(m'a+m'_1b+m'_2c+m'_3d+m'_4f) = \gamma(af+b^2+cd) \end{aligned} \tag{14.}$$ [725

identisch für beliebige Werthe von a, b, c, d, f.

Eine genauere Untersuchung dieser Identität ergiebt

$$\gamma = 0. \tag{15.}$$

Es ist demnach identisch

$$\begin{aligned}(m''a+m''_1b+m''_2c+m''_3d+m''_4f)(\alpha a+\alpha_1b+\alpha_2c+\alpha_3d+\alpha_4f)\\ -(na+n_1b+n_2c+n_3d+n_4f)(m'a+m'_1b+m'_2c+m'_3d+m'_4f) = 0.\end{aligned} \tag{16.}$$

Wenn also keine der Gleichungen

$$\begin{cases} n\alpha_1-n_1\alpha = 0, \\ n\alpha_2-n_2\alpha = 0, \\ n\alpha_3-n_3\alpha = 0, \\ n\alpha_4-n_4\alpha = 0 \end{cases} \tag{17.}$$

erfüllt ist, so muss

$$\begin{cases} m'\alpha_1-m'_1\alpha = 0, \\ m'\alpha_2-m'_2\alpha = 0, \\ m'\alpha_3-m'_3\alpha = 0, \\ m'\alpha_4-m'_4\alpha = 0 \end{cases} \tag{18.}$$

sein. Bedeutet S den Umlauf um k_1, so ist nach Gleichung (1.)

$$\bar{G} = \frac{a-2d}{a}G,$$

also $m=1$, $m_1=0$, $m_2=0$, $m_3=-2$, $m_4=0$.

Bedeutet S_1 den Umlauf von x um k_3, so ist in unserem Falle nach Gleichung (10.), No. 18,

$$\begin{cases} n=-3, & n_1=-4, & n_2=2, & n_3=4, & n_4=4, \\ \alpha=1, & \alpha_1=4, & \alpha_2=2, & \alpha_3=-2, & \alpha_4=0; \end{cases} \tag{19.}$$

demnach ist keine der Gleichungen (17.) erfüllt. Wir haben also nach den Gleichungen (18.)

$$m'_1 = 4m', \quad m'_2 = 2m', \quad m'_3 = -2m', \quad m'_4 = 0. \tag{20.}$$

Daher ist nach Gleichung (4.) nach einem Umlaufe von x um k_3

$$\bar{G}_1 = \frac{m'a'}{a}G. \tag{21.}$$

Ist wieder S der Umlauf um k_1, aber S_1 der Umlauf um k_4, so ergiebt sich nach den Gleichungen (10.), No. 18, im gegenwärtigen Falle

$$\begin{cases} n=-1, & n_1=-4, & n_2=2, & n_3=0, & n_4=4, \\ \alpha=3, & \alpha_1=4, & \alpha_2=2, & \alpha_3=-2, & \alpha_4=0. \end{cases} \tag{22.}$$ [726

Es sind wiederum die Gleichungen (17.) nicht erfüllt.

Daher folgt aus den Gleichungen (18.), wenn wir

$$m' = 3\lambda \tag{23.}$$

setzen,

$$m'_1 = 4\lambda, \quad m'_2 = 2\lambda, \quad m'_3 = -2\lambda, \quad m'_4 = 0. \tag{24.}$$

Demnach ist nach einem Umlaufe um k_4

$$\bar{G}_1 = \lambda\frac{a'}{a}G, \tag{25.}$$

wo λ eine rationale Zahl ist.

Setzen wir demnach

$$\frac{G}{a} = H(a,b,c,d) = H, \tag{26.}$$

so folgt aus den Gleichungen (1.) und (2.), (21.) und (25.), dass nach einem Umlaufe von x um k_1 oder k_2

$$\bar{H} = H, \tag{27.}$$

nach einem Umlaufe um k_3 oder k_4

$$\bar{H} = \lambda H, \tag{28.}$$

wo λ eine rationale Zahl ist. Da die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen der Gleichung (2.), No. 16, reale ganze Zahlen sind, so ergiebt sich, dass in Gleichung (28.) λ nur den Werth $+1$ haben kann. Demnach ist $H(a,b,c,d)$ eine eindeutige Function von x. Weil aber die Differentialgleichung (2.), No. 16 zu der Klasse von Differentialgleichungen CRELLES Journal, Bd. 66, S. 146[1]), Gleichung (12.), gehört, ergiebt sich hieraus

$H(a,b,c,d)$ ist eine rationale Function von x.

[1]) Abh. VI, S. 186, Band I dieser Ausgabe. R. F.

22.

21] Die zu den singulären Punkten k_1, k_2, k_3, k_4 gehörigen derterminirenden Fundamentalgleichungen der Gleichung (2.) No. 16 lauten übereinstimmend

$$r^2(r-1)(r-2) = 0. \tag{1.}$$

Demnach ist nach den Gleichungen (3.) No. 16 und den Gleichungen (9.) No. 18 in der Umgebung von $x = k_1$

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= \psi_{11} + \frac{1}{\pi i} y_1 \log(x-k_1), \\ v_2 &= \psi_{21}, \\ v_3 &= y_1, \\ v_4 &= \psi_{41}; \end{aligned}\right. \tag{2.}$$

in der Umgebung von $x = k_2$

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= \psi_{12} + \frac{1}{\pi i} y_2 \log(x-k_2), \\ v_2 &= \psi_{22}, \\ v_3 &= \psi_{32} - \frac{1}{\pi i} y_2 \log(x-k_2), \\ v_4 &= \psi_{42} + \frac{1}{\pi i} y_2 \log(x-k_2); \end{aligned}\right. \tag{3.}$$

in der Umgebung von $x = k_3$

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= \psi_{13} + \frac{1}{\pi i} y_3 \log(x-k_3), \\ v_2 &= \psi_{23} + \frac{1}{\pi i} y_3 \log(x-k_3), \\ v_3 &= \psi_{33} - \frac{1}{\pi i} y_3 \log(x-k_3), \\ v_4 &= \psi_{43} + \frac{1}{\pi i} y_3 \log(x-k_3); \end{aligned}\right. \tag{4.}$$

22] in der Umgebung von $x = k_4$

$$\left\{\begin{aligned} v_1 &= \psi_{14} + \frac{1}{\pi i} y_4 \log(x-k_4), \\ v_2 &= \psi_{24} + \frac{1}{\pi i} y_4 \log(x-k_4), \\ v_3 &= \psi_{34} - \frac{1}{\pi i} y_4 \log(x-k_4), \\ v_4 &= \psi_{44}. \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

In den Gleichungen (2.) bis (5.) bedeuten die Grössen $\psi_{\lambda\mu}$ und y_μ nach positiven ganzen Potenzen von $x-k_\mu$ fortschreitende Reihen, und zwar ist

$$y_\mu = -\pi i \psi'(k_\mu)^{-\frac{1}{2}} + \frac{\pi i}{8} \psi'(k_\mu)^{-\frac{3}{2}} \psi^{(2)}(k_\mu)(x-k_\mu) + \cdots, \tag{6.}$$

ferner sind $\psi_{21}(k_1), \psi_{41}(k_1), \psi_{22}(k_2), \psi_{44}(k_4)$ von Null verschieden.

Die Integrale ζ gehören zu derselben Klasse mit den Integralen v (vergl. No. 9 und Gl. (10.) No. 17), daher bleiben die Gleichungen (9.) No. 18 bestehen, wenn v_λ durch ζ_λ und $\bar{v}_\lambda$ durch $\bar{\zeta}_\lambda$ ersetzt wird, und es ist in der Umgebung von $x = k_1$

$$\left\{\begin{aligned} \zeta_1 &= \chi_{11} + \frac{1}{\pi i} \eta_1 \log(x-k_1), \\ \zeta_2 &= \chi_{21}, \\ \zeta_3 &= \eta_1, \\ \zeta_4 &= \chi_{41}; \end{aligned}\right. \tag{2a.}$$

in der Umgebung von $x = k_2$

$$\left\{\begin{aligned} \zeta_1 &= \chi_{12} + \frac{1}{\pi i} \eta_2 \log(x-k_2), \\ \zeta_2 &= \chi_{22}, \\ \zeta_3 &= \chi_{32} - \frac{1}{\pi i} \eta_2 \log(x-k_2), \\ \zeta_4 &= \chi_{42} + \frac{1}{\pi i} \eta_2 \log(x-k_2); \end{aligned}\right. \tag{3a.}$$

in der Umgebung von $x = k_3$

$$\left\{\begin{aligned} \zeta_1 &= \chi_{13} + \frac{1}{\pi i} \eta_3 \log(x-k_3), \\ \zeta_2 &= \chi_{23} + \frac{1}{\pi i} \eta_3 \log(x-k_3), \\ \zeta_3 &= \chi_{33} - \frac{1}{\pi i} \eta_3 \log(x-k_3), \\ \zeta_4 &= \chi_{43} + \frac{1}{\pi i} \eta_3 \log(x-k_3); \end{aligned}\right. \tag{4a.}$$

in der Umgebung von $x = k_4$ [23

$$(5a.)\qquad \left\{\begin{aligned} \zeta_1 &= \chi_{14}+\frac{1}{\pi i}\eta_4\log(x-k_4),\\ \zeta_2 &= \chi_{24}+\frac{1}{\pi i}\eta_4\log(x-k_4),\\ \zeta_3 &= \chi_{34}-\frac{1}{\pi i}\eta_4\log(x-k_4),\\ \zeta_4 &= \chi_{44}.\end{aligned}\right.$$

In den Gleichungen (2a.) bis (5a.) sind die Grössen $\chi_{\lambda\mu}$ und η_μ nach positiven ganzen Potenzen von $x-k_\mu$ fortschreitende Reihen, und zwar ist

$$(6a.)\qquad (\eta_\mu)_{x=k_\mu} = -\pi i k_\mu \psi'(k_\mu)^{-\frac{1}{2}},$$

ferner sind $\chi_{21}(k_1), \chi_{41}(k_1), \chi_{22}(k_2), \chi_{44}(k_4)$ von Null verschieden.

Aus den Gleichungen (9.) No. 18 folgt, dass nach einem Umlaufe um $x=\infty$

$$(7.)\qquad \bar v_1 = -v_1,\quad \bar v_2 = -v_2,\quad \bar v_3 = -v_3+2v_1,\quad \bar v_4 = -v_4.$$

Ferner ist die zu $x=\infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Gleichung (2.) No. 16

$$(8.)\qquad (r-\tfrac{1}{2})(r-\tfrac{3}{2})^2(r-\tfrac{5}{2}) = 0.$$

Demnach ist in der Umgebung von $x=\infty$

$$(9.)\qquad \left\{\begin{aligned} v_1 &= x^{-\frac{3}{2}}\psi_{1\infty},\\ v_2 &= x^{-\frac{1}{2}}\psi_{2\infty},\\ v_3 &= x^{-\frac{1}{2}}\psi_{3\infty}-\frac{1}{\pi i}v_1\log\frac{1}{x},\\ v_4 &= x^{-\frac{1}{2}}\psi_{4\infty},\end{aligned}\right.$$

wo $\psi_{\lambda\infty}$ nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihen bedeuten, von denen $\psi_{1\infty}, \psi_{2\infty}, \psi_{4\infty}$ für $x=\infty$ nicht verschwinden.

Alsdann ist

$$(9a.)\qquad \left\{\begin{aligned} \zeta_1 &= x^{-\frac{1}{2}}\chi_{1\infty},\\ \zeta_2 &= x^{-\frac{1}{2}}\chi_{2\infty},\\ \zeta_3 &= x^{-\frac{1}{2}}\chi_{3\infty}-\frac{1}{\pi i}\zeta_1\log\frac{1}{x},\\ \zeta_4 &= x^{-\frac{1}{2}}\chi_{4\infty},\end{aligned}\right.$$

24] wo $\chi_{1\infty}, \chi_{2\infty}, \chi_{4\infty}, \chi_{3\infty}$ nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihen bedeuten, wovon die drei ersten für $x=\infty$ nicht verschwinden.

23.

Die Functionen a, b, c, d, f genügen der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \psi\frac{d^2\Omega}{dx^2}+\psi'\frac{d\Omega}{dx}+\frac{1}{8}\psi^{(2)}\Omega+6\psi\frac{dw}{dx}+3\psi'w = 0,$$

wenn wir

$$(2.)\qquad \Omega = 8\psi\frac{d^3w}{dx^3}+16\psi'\frac{d^2w}{dx^2}+9\psi^{(2)}\frac{dw}{dx}+\psi^{(3)}w$$

setzen.

Die zu den singulären Punkten k_1, k_2, k_3, k_4 gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Gleichung (1.) lauten übereinstimmend:

$$(3.)\qquad r^2(r-1)(r-2)^2 = 0.$$

Die zum Punkte $x=\infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung derselben Gleichung ist

$$(4.)\qquad (r-1)^2(r-2)(r-3)^2 = 0.$$

Aus den Gleichungen (10.) No. 18 ergiebt sich demnach in der Umgebung von $x=k_1$

$$(5.)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= A^{(1)}-\frac{d}{\pi i}\log(x-k_1),\\ b &= B^{(1)},\\ c &= C^{(1)}+\frac{f}{\pi i}\log(x-k_1),\\ d &= D^{(1)},\\ f &= F^{(1)};\end{aligned}\right.$$

in der Umgebung von $x=k_2$

$$(6.)\qquad \left\{\begin{aligned} a &= A^{(2)}+\frac{1}{\pi i}(a-d)\log(x-k_2),\\ b &= B^{(2)}+\frac{1}{\pi i}(a-d)\log(x-k_2),\\ c &= C^{(2)}+\frac{1}{\pi i}(-a+2b+c+f)\log(x-k_2),\\ d &= D^{(2)}+\frac{1}{\pi i}(a-d)\log(x-k_2),\\ f &= F^{(2)}+\frac{1}{\pi i}(-2b-c+d-f)\log(x-k_2);\end{aligned}\right.$$

25] in der Umgebung von $x = k_3$

$$(7.)\quad \begin{cases} a = A^{(3)} + \frac{1}{\pi i}(2b+c-d)\log(x-k_3), \\ b = B^{(3)} + \frac{1}{\pi i}(a-c-d-f)\log(x-k_3), \\ c = C^{(3)} + \frac{1}{\pi i}(-a+2b+2c+f)\log(x-k_3), \\ d = D^{(3)} + \frac{1}{\pi i}(a+2b-2d-f)\log(x-k_3), \\ f = F^{(3)} + \frac{1}{\pi i}(-2b-c+d)\log(x-k_3); \end{cases}$$

in der Umgebung von $x = k_4$

$$(8.)\quad \begin{cases} a = A^{(4)} + \frac{1}{\pi i}(a+2b+c-d)\log(x-k_4), \\ b = B^{(4)} - \frac{1}{\pi i}(c+f)\log(x-k_4), \\ c = C^{(4)} + \frac{1}{\pi i}(c+f)\log(x-k_4), \\ d = D^{(4)} + \frac{1}{\pi i}(a+2b-d-f)\log(x-k_4), \\ f = F^{(4)} - \frac{1}{\pi i}(c+f)\log(x-k_4). \end{cases}$$

In den Gleichungen (5.) bis (8.) bedeuten $A^{(\mu)}, B^{(\mu)}, C^{(\mu)}, D^{(\mu)}, F^{(\mu)}$ nach positiven ganzen Potenzen von $x-k_\mu$ fortschreitende Reihen. Ebenso sind die Coefficienten von $\log(x-k_1)$, $\log(x-k_2)$, $\log(x-k_3)$, $\log(x-k_4)$ in den Gleichungen (5.), (6.), (7.), (8.) nach positiven ganzen Potenzen bez. von

$$x-k_1,\; x-k_2,\; x-k_3,\; x-k_4$$

fortschreitende Reihen, welche bez. für

$$x = k_1,\quad x = k_2,\quad x = k_3,\quad x = k_4$$

nicht verschwinden.

Aus den Gleichungen (10.) No. 18 ergiebt sich, dass nach einem Umlaufe um $x = \infty$

$$(9.)\qquad \bar{a} = a,\quad \bar{b} = b,\quad \bar{c} = c,\quad \bar{d} = d+2a,\quad \bar{f} = f-2c.$$

Es ist daher mit Rücksicht auf Gleichung (4.) in der Umgebung von $x = \infty$

$$(10.)\quad \begin{cases} a = x^{-1}A^{(\infty)}, \\ b = x^{-1}B^{(\infty)}, \\ c = x^{-1}C^{(\infty)}, \\ d = x^{-1}D^{(\infty)} + \frac{a}{\pi i}\log\frac{1}{x}, \\ f = x^{-1}F^{(\infty)} - \frac{c}{\pi i}\log\frac{1}{x}, \end{cases}$$

wo $A^{(\infty)}, B^{(\infty)}, C^{(\infty)}, D^{(\infty)}, F^{(\infty)}$ nach positiven ganzen Potenzen von $\frac{1}{x}$ fort- [26
schreitende Reihen bedeuten, von welchen die drei ersten für $x = \infty$ nicht verschwinden.

24.

Durch Differentiation erhalten wir die Gleichungen:

$$(1.)\qquad \frac{\partial \zeta_\lambda}{\partial x} = x\frac{\partial v_\lambda}{\partial x} + \frac{1}{2}v_\lambda, \qquad (\lambda = 1, 2, 3, 4)$$

woraus sich ergiebt

$$(2.)\qquad \frac{\partial}{\partial x}[v_\lambda\zeta_\mu - v_\mu\zeta_\lambda] = (\zeta_\mu - xv_\mu)\frac{\partial v_\lambda}{\partial x} - (\zeta_\lambda - xv_\lambda)\frac{\partial v_\mu}{\partial x}.$$

Nach den Gleichungen (6.) No. 18 ist daher

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{\partial a}{\partial x} = (\zeta_2 - xv_2)\frac{\partial v_1}{\partial x} - (\zeta_1 - xv_1)\frac{\partial v_2}{\partial x}, \\ \frac{\partial b}{\partial x} = (\zeta_3 - xv_3)\frac{\partial v_1}{\partial x} - (\zeta_1 - xv_1)\frac{\partial v_3}{\partial x}, \\ \frac{\partial c}{\partial x} = (\zeta_4 - xv_4)\frac{\partial v_1}{\partial x} - (\zeta_1 - xv_1)\frac{\partial v_4}{\partial x}, \\ \frac{\partial d}{\partial x} = (\zeta_3 - xv_3)\frac{\partial v_2}{\partial x} - (\zeta_2 - xv_2)\frac{\partial v_3}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial x} = (\zeta_4 - xv_4)\frac{\partial v_3}{\partial x} - (\zeta_3 - xv_3)\frac{\partial v_4}{\partial x}. \end{cases}$$

Multipliciren wir die erste der Gleichungen (3.) mit $x-k_1$ und setzen $x = k_1$, so folgt, wenn wir die Bezeichnung

$$(4.)\qquad \psi_\lambda(z) = \frac{\psi(z)}{z-k_\lambda}$$

einführen, aus den Gleichungen (2.) No. 22 und (5.) No. 23:

$$(5.)\qquad (d)_{x=k_1} = -y_1(k_1)\int_{k_3}^{k_4} \frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}}.$$

Multipliciren wir die dritte der Gleichungen (3.) mit $x-k_1$ und setzen $x=k_1$, so ergiebt sich aus den Gleichungen (2.) No. 22 und (5.) No. 23:

$$(6.)\qquad (f)_{x=k_1} = y_1(k_1)\int_{k_2}^{k_3} \frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}}.$$

27] Durch Multiplication der ersten und der letzten der Gleichungen (3.) mit $x-k_2$ ergiebt sich aus den Gleichungen (3.) No. 22 und (6.) No 23, wenn wir $x=k_2$ setzen,

$$(7.)\qquad (a-d)_{x=k_2} = y_2(k_2)\int_{k_3}^{k_4} \frac{dz}{\sqrt{\psi_2(z)}},$$

$$(8.)\qquad (-2b-c+d-f)_{x=k_2} = -y_2(k_2)\int_{k_1}^{k_3} \frac{dz}{\sqrt{\psi_2(z)}}.$$

Multipliciren wir die beiden ersten der Gleichungen (3.) mit $x-k_3$ und setzen $x=k_3$, so folgt aus den Gleichungen (4.) No. 22 und (7.) No. 23:

$$(9.)\qquad (2b+c-d)_{x=k_3} = y_3(k_3)\int_{k_1}^{k_2} \frac{dz}{\sqrt{\psi_3(z)}},$$

$$(10.)\qquad (a-c-d-f)_{x=k_3} = y_3(k_3)\int_{k_2}^{k_4} \frac{dz}{\sqrt{\psi_3(z)}}.$$

Multipliciren wir endlich die beiden ersten der Gleichungen (3.) mit $x-k_4$ und setzen $x=k_4$, so ergeben die Gleichungen (5.) No. 22 und (8.) No. 23:

$$(11.)\qquad (a+2b+c-d)_{x=k_4} = y_4(k_4)\int_{k_1}^{k_2} \frac{dz}{\sqrt{\psi_4(z)}},$$

$$(12.)\qquad (c+f)_{x=k_4} = -y_4(k_4)\int_{k_2}^{k_3} \frac{dz}{\sqrt{\psi_4(z)}}.$$

25.

Wir wollen mit k irgend eine der Grössen k_1, k_2, k_3, k_4 bezeichnen. Um die Function $H(a,b,c,d)$ (No. 21) zu bestimmen, sind nunmehr die Werthe der Ableitungen nach k von den Functionen a, b, c, d für die singulären Punkte $x=k_1, k_2, k_3, k_4$ und für $x=\infty$ zu berechnen. Wir könnten dieselben unmittelbar durch Differentiation der Gleichungen (5.) bis (8.) und der Gleichungen (10.) No. 23 nach der Variabeln k erhalten — die Zulässigkeit dieser Differentiation liesse sich ohne erhebliche Schwierigkeit erweisen — aber auch der folgende Weg führt uns schnell zu demselben Ziele.

Da die Integrale a, b, c, d, f der Gleichung (1.) No. 23 durch die Umläufe um ihre singulären Punkte k_1, k_2, k_3, k_4 die Substitutionen (10.) No. 18 [28 erleiden, deren Coefficienten von den Werthen der Grössen k_1, k_2, k_3, k_4 unabhängig sind, so wird nach No. 12 eine Gleichung

$$(1.)\qquad \frac{\partial w}{\partial k} = A_0 w + A_1 \frac{\partial w}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + A_3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + A_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4},$$

in welcher A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 nach getroffener Wahl des k wohlbestimmte rationale Functionen von x sind, durch jede der Grössen a, b, c, d, f befriedigt.

Hieraus und aus den Gleichungen (5.) bis (8.) und Gleichungen (10.) No. 23 ergiebt sich demnach, dass die Functionen $\frac{\partial a}{\partial k}, \frac{\partial b}{\partial k}, \frac{\partial c}{\partial k}, \frac{\partial d}{\partial k}, \frac{\partial f}{\partial k}$ in der Umgebung von $x=k_\mu$ die Form $P_\mu + Q_\mu \log(x-k_\mu)$ und in der Umgebung von $x=\infty$ die Form $P_\infty + Q_\infty \log\frac{1}{x}$ haben, also in der Bezeichnungsweise meiner Arbeit*) wie F beschaffene Ausdrücke sind.

Setzen wir die Differentialgleichung (1.) No. 23 in die Form

$$(2.)\qquad B_0 \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + B_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + B_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + B_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_4 \frac{\partial w}{\partial x} + B_5 w = 0,$$

worin $B_0, B_1, \ldots, B_5$ ganze rationale Functionen von x und den Grössen k_μ sind, und differentiiren diese Gleichung nach k, so folgt

$$(3.)\qquad B_0 \frac{\partial^5}{\partial x^5}\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right) + B_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4}\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right) + B_2 \frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right) + B_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right) + B_4 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right)$$
$$+ B_5 \frac{\partial w}{\partial k} + \frac{\partial B_0}{\partial k}\frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + \frac{\partial B_1}{\partial k}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial B_2}{\partial k}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial B_3}{\partial k}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial B_4}{\partial k}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial B_5}{\partial k} w = 0.$$

*) BORCHARDTS Journal, Bd. 66, S. 155[1]).

1) Abh. VI, S. 198, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Ist w eine der Functionen a, b, c, d, f, so ist nach den Gleichungen (5.) bis (8.) No. 23 w in der Umgebung von $x = k_\mu$ eine wie F beschaffene Function, welche zum Exponenten Null gehört. Ist $-\lambda$ der Exponent, zu welchem $\frac{\partial w}{\partial k}$ gehört, und ist $\lambda > 0$, so gehört $\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left(\frac{\partial w}{\partial k}\right)$ zum Exponenten $-\lambda - r$, während $\frac{\partial^r w}{\partial x^r}$ zum Exponenten $-r$ gehört. Setzen wir also in Gleichung (3.) für w seinen in einer der Gleichungen (5.) bis (8.) enthaltenen Ausdruck und für $\frac{\partial w}{\partial k}$ den obigen Ausdruck $P_\mu + Q_\mu \log(x - k_\mu)$, welcher unserer Annahme nach zum Exponenten $-\lambda$ gehört, so ergiebt die Vergleichung der gleich hohen Potenzen von $x - k_\mu$ entweder im Coefficienten von $\log(x - k_\mu)$ oder in
29] den vom Logarithmus freien Gliedern, dass λ die Einheit nicht überschreiten darf, wenn $k = k_\mu$, und dass λ nicht positiv ist, wenn k von k_μ verschieden.

Auf demselben Wege ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (10.) No. 23, dass der Exponent, zu welchem $\frac{\partial w}{\partial k}$ in der Umgebung von $x = \infty$ gehört, nicht grösser als die negative Einheit ist.

Die oben erwähnte Coefficientenvergleichung zeigt übrigens auch — wie nach der directen Differentiation der Gleichungen (5.) bis (8.) No. 23 zu erwarten war, — dass im Falle $k = k_\mu$ die Summen

$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial k}, \quad \frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial k}, \quad \ldots$$

zu einem nicht negativen Exponenten gehören.

Hieraus ergiebt sich, dass $G(a, b, c, d)$ in der Umgebung eines jeden der singulären Punkte k_1, k_2, k_3, k_4 eine wie F beschaffene Function ist, deren Exponent nicht unter die negative Einheit sinkt, während der Exponent von $G(a, b, c, d)$ in der Umgebung von $x = \infty$ höchstens den Werth -5 hat.

Nach Gleichung (26.) No. 21 ist

$$G(a, b, c, d) = aH(a, b, c, d). \tag{4.}$$

Wir wollen zunächst bemerken, dass H ausser für die Werthe $x = k_\mu$ für keinen anderen endlichen Werth von x unendlich werden kann. Ist nämlich $x = \beta$ ein von den k_μ verschiedener Werth, für welchen H unendlich würde, so müsste, weil $G(a, b, c, d)$ für $x = \beta$ einen endlichen Werth erhält, a für $x = \beta$ verschwinden. Macht x einen beliebigen Umlauf,

und gehen dabei a und $G(a, b, c, d)$ bez. in $\bar{a}$ und $\overline{G}(a, b, c, d)$ über, so ist — weil nach No. 21 H eine rationale Function von x — nach Gleichung (4.)

$$\overline{G}(a, b, c, d) = \bar{a}H(a, b, c, d). \tag{5.}$$

Aus dieser Gleichung ergäbe sich, dass auch $\bar{a}$ für $x = \beta$ verschwinden müsste. Ein Werth $x = \beta$ aber, für welchen jeder Zweig eines Integrals der irreductibelen Gleichung (1.) No. 23 verschwindet, müsste die Function $\psi(x)$ annulliren, was der Voraussetzung widerspricht.

Aus den obigen Entwickelungen und aus den Gleichungen (5.) bis (8.) No. 23 folgt, dass

$$H(x - k_1)(x - k_2)(x - k_3)(x - k_4) = H_1 \tag{6.}$$

für keinen endlichen Werth von x unendlich werden kann.

Aus denselben Entwickelungen und aus den Gleichungen (10.) No. 23 folgt aber, dass H für $x = \infty$ wenigstens vierter Ordnung verschwindet. Dem- [30
nach ist H_1 eine von x unabhängige Grösse. Da H nicht identisch verschwinden kann, so ergiebt sich, dass diese Function für $x = \infty$ genau vierter Ordnung verschwindet.

Vertauschen wir in Gleichung (2.) No. 16 x mit k_1, so erhalten wir die Differentialgleichung, welcher y_1, y_2, y_3, y_4 als Functionen von k_1 genügen. Wir gelangen also durch den obigen Schlüssen analoge Schlüsse zu dem Resultate, dass

$$H(k_1 - x)(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_1 - k_4)$$

eine von k_1 unabhängige Grösse ist. Ebenso folgt, dass

$$H(k_2 - x)(k_2 - k_1)(k_2 - k_3)(k_2 - k_4)$$

von k_2 unabhängig wird.

Setzen wir daher

$$(x - k_1)(x - k_2)(x - k_3)(x - k_4)(k_1 - k_2)(k_1 - k_3)(k_1 - k_4)(k_2 - k_3)(k_2 - k_4) = \Pi, \tag{7.}$$

so erhalten wir

$$H(a, b, c, d) = \frac{\lambda}{\Pi}, \tag{8.}$$

wo λ eine von x, k_1, k_2 unabhängige Grösse bedeutet.

Nach den Gleichungen (4.) und (5.) No. 20 und der Gleichung (26.) No. 21 ist daher

$$(9.)\qquad \Delta = \frac{\lambda}{a^3 \Pi},$$

wo λ *eine von* x, k_1, k_2 *unabhängige Grösse* bedeutet.

26.

Wir wollen nunmehr die Functionen a, b, c, d, f in ihren realen und imaginären Bestandtheil zerlegen, also setzen:

$$(1.)\quad a = a_1 + a_2 i,\quad b = b_1 + b_2 i,\quad c = c_1 + c_2 i,\quad d = d_1 + d_2 i,\quad f = f_1 + f_2 i.$$

Setzen wir ebenso

$$(2.)\qquad x = x_1 + x_2 i,$$

so ergiebt sich aus dem Umstande, dass die Coefficienten der Tabelle (10.) No. 18 *reale Grössen sind*, dass es erlaubt ist, in dieser Tabelle a, b, c, d, f durch a_1, b_1, c_1, d_1, f_1, bez. und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{f}$ durch $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1, \bar{f}_1$ bez. zu ersetzen, wenn mit $\bar{a}_1, \bar{b}_1, \bar{c}_1, \bar{d}_1, \bar{f}_1$ diejenigen Werthe bezeichnet werden, in welche sich die realen Functionen a_1, b_1, c_1, d_1, f_1 der realen Variablen x_1, x_2
[31] verwandeln, wenn der durch die Coordinaten (x_1, x_2) bestimmte Punkt um je einen der Punkte k_1, k_2, k_3, k_4 einen Umlauf vollzieht. Gleichermaassen ist es erlaubt, in derselben Tabelle a, b, c, d, f durch a_2, b_2, c_2, d_2, f_2 bez. und $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{f}$ durch $\bar{a}_2, \bar{b}_2, \bar{c}_2, \bar{d}_2, \bar{f}_2$ zu ersetzen, wenn die letzteren Grössen das bezeichnen, was aus a_2, b_2, c_2, d_2, f_2 durch dieselben Umläufe von $(x_1; x_2)$ wird.

Die Function $af + b^2 + cd$ verschwindet nach den Gleichungen (7.) und (8.) No. 18 identisch für jedes x und verwandelt sich durch die Umläufe um die singulären Punkte k_μ in sich selbst.

Bilden wir daher analog die Ausdrücke

$$(3.)\qquad \varphi_1 = a_1 f_1 + b_1^2 + c_1 d_1$$

$$(4.)\qquad \varphi_2 = a_2 f_2 + b_2^2 + c_2 d_2,$$

so ergeben die Verwandlungstabellen für $a_1, b_1, \ldots$ und $a_2, b_2, \ldots$, von welchen eben die Rede war, *dass die realen Functionen* φ_1, φ_2 *der realen Variablen* x_1, x_2 *bei Umläufen des Punktes* (x_1, x_2) *um die Punkte* k_μ *ungeändert bleiben.*

Ihrer Bedeutung nach bleiben $a_1, b_1, \ldots$ und $a_2, b_2, \ldots$, folglich auch φ_1 und φ_2 ungeändert, wenn (x_1, x_2) irgend welche Umläufe um andere Punkte vollzieht.

Demnach sind φ_1, φ_2 *eindeutige Functionen von* x_1, x_2.

Aus der Gleichung

$$(5.)\qquad af + b^2 + cd = 0 \quad \text{(s. Gleichungen (7.) und (8.) No. 18)}$$

folgt durch Trennung des realen und des imaginären Theiles

$$(6.)\qquad \begin{cases} (a_1^2 + a_2^2) f_1 = -b_1 [ab] + b_2 (ab) - c_1 [ad] + c_2 (ad), \\ (a_1^2 + a_2^2) f_2 = -b_1 (ab) - b_2 [ab] - c_1 (ad) - c_2 [ad], \end{cases}$$

wo

$$(7.)\qquad \begin{cases} (pq) = p_1 q_2 - p_2 q_1, \\ [pq] = p_1 q_1 + p_2 q_2 \end{cases}$$

gesetzt ist. Substituiren wir die Werthe von f_1 und f_2 aus den Gleichungen (6.) in φ_1, φ_2 (Gleichungen (3.) und (4.)), so folgt

$$(8.)\qquad \varphi_1 (a_1^2 + a_2^2) = \varphi_2 (a_1^2 + a_2^2) = (ab)^2 + (ad)(ac).$$

Hieraus ergiebt sich zunächst, wie auch unmittelbar aus Gleichung (5.) sich ergiebt,

$$(9.)\qquad \varphi_1 = \varphi_2.$$

Setzen wir demnach

$$(10.)\qquad \varphi_2 = \varphi_1 = \varphi,$$

so lautet die Gleichung (8.)

$$(11.)\qquad \varphi (a_1^2 + a_2^2) = (ab)^2 + (ad)(ac) = R.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich die wichtige Folgerung, *dass das* [32
Vorzeichen der Function R *für eine beliebige Stelle* (x_1, x_2) *nach Vollziehung beliebiger Umläufe ungeändert bleibt.*

27.

Aus den Gleichungen (5.) bis (8.) und (10.) No. 23 ergiebt sich, dass in der Umgebung von $x = k_1$

$$(1.)\qquad \varphi = \frac{1}{\pi} (d_1 f_2 - d_2 f_1) \log \varrho_1 + r_1,$$

in der Umgebung von $x = k_2$

$$\varphi = \frac{1}{\pi}[(a_1-d_1)(-2b_2-c_2+d_2-f_2)-(a_2-d_2)(-2b_1-c_1+d_1-f_1)]\log\varrho_2+r_2, \tag{2.}$$

in der Umgebung von $x = k_3$

$$\varphi = \frac{1}{\pi}[(2b_1+c_1-d_1)(a_2-c_2-d_2-f_2)-(2b_2+c_2-d_2)(a_1-c_1-d_1-f_1)]\log\varrho_3+r_3, \tag{3.}$$

in der Umgebung von $x = k_4$

$$\varphi = \frac{1}{\pi}[(c_1+f_1)(a_2+2b_2+c_2-d_2)-(c_2+f_2)(a_1+2b_1+c_1-d_1)]\log\varrho_4+r_4, \tag{4.}$$

in der Umgebung von $x = \infty$

$$\varphi = \frac{1}{\pi}(c_1 a_2 - c_2 a_1)\log\varrho_\infty + r_\infty. \tag{5.}$$

Wir haben hierbei in der Umgebung von $x = k_\mu$

$$x - k_\mu = \varrho_\mu e^{\psi_\mu i} \tag{6.}$$

und in der Umgebung von $x = \infty$

$$\frac{1}{x} = \varrho_\infty e^{\psi_\infty i} \tag{7.}$$

gesetzt. Die Grössen r_μ und r_∞ erhalten für $\varrho_\mu = 0$, bez. $\varrho_\infty = 0$ endliche Werthe.

Aus den Gleichungen (1.) bis (5.) ergiebt sich:

Das Vorzeichen von φ in hinlänglicher Nähe von k_1 ist übereinstimmend mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von $-\frac{f}{d}$, demnach nach den Gleichungen (5.) und (6.) No. 24 mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$\alpha_1 = \int_{k_2}^{k_3}\frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}} : \int_{k_3}^{k_4}\frac{dz}{\sqrt{\psi_1(z)}}. \tag{8.}$$

33] In hinlänglicher Nähe von k_2 ist das Vorzeichen von φ übereinstimmend mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$-\frac{-2b-c+d-f}{a-d},$$

demnach nach den Gleichungen (7.) und (8.) No. 24 mit dem Vorzeichen des

imaginären Theiles von

$$\alpha_2 = \int_{k_1}^{k_3}\frac{dz}{\sqrt{\psi_2(z)}} : \int_{k_3}^{k_4}\frac{dz}{\sqrt{\psi_2(z)}}. \tag{9.}$$

In hinlänglicher Nähe von k_3 ist das Vorzeichen von φ übereinstimmend mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$-\frac{a-c-d-f}{2b+c-d},$$

demnach nach den Gleichungen (9.) und (10.) No. 24 mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$\alpha_3 = -\int_{k_2}^{k_4}\frac{dz}{\sqrt{\psi_3(z)}} : \int_{k_1}^{k_2}\frac{dz}{\sqrt{\psi_3(z)}}. \tag{10.}$$

In hinlänglicher Nähe von k_4 ist das Vorzeichen von φ übereinstimmend mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$-\frac{a+2b+c-d}{c+f},$$

demnach nach den Gleichungen (11.) und (12.) No. 24 mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$\alpha_4 = \int_{k_1}^{k_2}\frac{dz}{\sqrt{\psi_4(z)}} : \int_{k_2}^{k_3}\frac{dz}{\sqrt{\psi_4(z)}}. \tag{11.}$$

Endlich ist in hinlänglicher Nähe von $x = \infty$ das Vorzeichen von φ übereinstimmend mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von $-\frac{a}{c}$, demnach mit dem Vorzeichen des imaginären Theiles von

$$\alpha_\infty = -\int_{k_3}^{k_4}\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}} : \int_{k_2}^{k_3}\frac{dz}{\sqrt{\psi(z)}}. \tag{12.}$$

Die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_\infty$ sind Quotienten von elliptischen Periodicitätsmoduln. Jede derselben lässt sich durch Anwendung einer linearen Substitution in die Form $-\frac{\eta_2}{\eta_1}i$ bringen, nach der Bezeichnungsweise meiner [34 Arbeit*). Nach den Ergebnissen dieser Abhandlung ist also der imaginäre Theil der Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_\infty$ negativ.

*) BORCHARDTS Journal, Bd. 83, S. 13[1]).

[1]) Abh. XXIV, S. 85 ff., Band II dieser Ausgabe. R. F.

Es ergiebt sich also:

Die Function φ ist in hinlänglicher Nähe der Punkte $x = k_\mu$ und $x = \infty$ **negativ.**

28.

Aus den Gleichungen (5.) bis (8.) und (10.) No. 23 ergiebt sich, dass in der Umgebung von $x = k_1$

$$(1.)\qquad (ad) = -\frac{1}{\pi}(d_1^2 + d_2^2)\log \varrho_1 + s_1,$$

in der Umgebung von $x = k_2$

$$(2.)\qquad (ad) = -\frac{1}{\pi}\{(a_1 - d_1)^2 + (a_2 - d_2)^2\}\log \varrho_2 + s_2,$$

in der Umgebung von $x = k_3$

$$(3.)\qquad (ad) = \frac{1}{\pi^2}\{(2b_1 + c_1 - d_1)(a_2 - c_2 - d_2 - f_2) - (2b_2 + c_2 - d_2)(a_1 - c_1 - d_1 - f_1)\}(\log \varrho_3)^2 + s_3' \log \varrho_3 + s_3,$$

in der Umgebung von $x = k_4$

$$(4.)\qquad (ad) = -\frac{1}{\pi^2}\{(a_1 + 2b_1 + c_1 - d_1)(c_2 + f_2) - (a_2 + 2b_2 + c_2 - d_2)(c_1 + f_1)\}(\log \varrho_4)^2 + s_4' \log \varrho_4 + s_4,$$

endlich in der Umgebung von $x = \infty$

$$(5.)\qquad (ad) = -\frac{1}{\pi}(a_1^2 + a_2^2)\log \varrho_\infty + s_\infty^*.$$

Die Grössen s_μ und s_∞ sind für $\varrho_\mu = 0$ bez. $\varrho_\infty = 0$, und ebenso s_3', s_4' bez. für $\varrho_3 = 0$, $\varrho_4 = 0$ endlich.

Aus den Gleichungen (1.) bis (5.) ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.) und (4.) voriger Nummer, dass (ad) sowohl in hinlänglicher Nähe der Punkte k_μ als auch in hinlänglicher Nähe von $x = \infty$ einen positiven Werth hat.

29.

Die Function φ ist für jeden nicht singulären Werth von x
35] von Null verschieden, so lange die Grössen k_μ endlich und von einander verschieden. Nun haben wir in No. 27 bewiesen, dass φ in der Nähe von $x = \infty$ und von $x = k_\mu$ negativ ist. Da aber diese Function

in einer nicht singulären Stelle ihr Vorzeichen nur wechseln könnte, wenn sie daselbst verschwände, so ergiebt sich:

I. So lange die Grössen k_μ endlich und von einander verschieden sind, ist φ stets negativ.

Aus Gleichung (11.) No. 26 ergiebt sich daher:

II. Unter derselben Voraussetzung haben die Grössen (ac), (ad) entgegengesetzte Vorzeichen.

III. In einer nicht singulären Stelle kann keine der Grössen (ac), (ad) verschwinden, weil sonst nach Gleichung (11.) No. 26 daselbst φ einen positiven Werth annehmen müsste.

Da nach No. 28 (ad) in der Nähe der singulären Stellen positiv ist, so ergiebt sich aus Satz III.:

IV. Unter derselben Voraussetzung wie in I. und II. ist ausserhalb der singulären Stellen (ad) stets positiv und (ac) negativ.

Wir wollen den Coefficienten von i einer Grösse z mit $I(z)$ bezeichnen, dann ergiebt sich aus den Gleichungen (5.) bis (8.) und Gleichungen (10.) No. 23:

Für $x = k_1, k_2$

$$(1.)\qquad I\left(\frac{b}{a}\right) = 0,\quad I\left(\frac{d}{a}\right) = 0,$$

für $x = k_3, k_4$

$$(2.)\qquad I\left(\frac{c}{a}\right) = -I\left(\frac{b}{a}\right),\quad I\left(\frac{d}{a}\right) = I\left(\frac{b}{a}\right),$$

für $x = \infty$

$$(3.)\qquad I\left(\frac{d}{a}\right) = \infty.$$

Hieraus folgt:

V. In einem der Punkte k_1, k_2, k_3, k_4 und in $x = \infty$ ist entweder φ gleich Null oder $I\left(\frac{d}{a}\right)$ unendlich.

Die Grössen a, b, c, d, f, als Functionen einer der Grössen k_μ aufgefasst, erleiden für die Umläufe dieser Variabeln dieselben Substitutionen, welche in den Gleichungen (10.) No. 18 angegeben sind. Es gelten daher die Sätze I—IV, wenn wir x mit k_μ vertauschen. Diese Sätze können wir alsdann folgendermassen zusammenfassen:

VI. So lange die Grössen x, k_1, k_2, k_3, k_4 endlich und unter einander verschieden sind, haben die Grössen $I(\eta), I(-\zeta), I(\xi)^2 - I(\eta)\,I(-\zeta)$ stets das negative Vorzeichen.

36] In der Theorie der ABELschen Functionen werden Grössen $a_{11}, a_{12} = a_{21}, a_{22}$ betrachtet*), welche mit unseren Variabeln ξ, η, ζ in folgendem Zusammenhange stehen:

$$a_{11} = \pi i \zeta, \quad a_{12} = -\pi i \xi, \quad a_{22} = -\pi i \eta.$$

Die in den obigen Theoremen enthaltenen Resultate, in diese Bezeichnungsweise übertragen, liefern den Satz, dass der reale Theil der quadratischen Form $a_{11} m^2 + 2a_{12} mn + a_{22} n^2$ (m, n reale ganze Zahlen) eine definite Form mit negativem Werthe ist. Dieses Theorem, welches zuerst RIEMANN**) mit anderen Hülfsmitteln bewiesen, hat sich also in unserer Untersuchung als eine Eigenschaft der Functionen, welche gewissen linearen Differentialgleichungen genügen, ergeben, gleich wie wir das Theorem von den Periodenrelationen***) in No. 18 unserer Untersuchung ebenfalls als einen Ausfluss aus den Eigenschaften der Integrale linearer Differentialgleichungen erkannt haben.

30.

Wenn wir den Satz V. voriger Nummer auf ξ, η, ζ als Functionen der Variabeln x, k_1, k_2 übertragen, so lautet derselbe:

I. Wenn zwei der Variabeln x, k_1, k_2 unter einander oder gleich einer der Grössen k_3, k_4 oder wenn eine der Variabeln unendlich wird, so ist entweder $I(\zeta) = \infty$ oder $I(\xi)^2 - I(\eta)\,I(-\zeta) = 0$.

Nach Gleichung (11.) No. 26 ist

$$I(\xi)^2 - I(\eta)\,I(-\zeta) = \frac{\varphi}{a_1^2 + a_2^2}. \tag{1.}$$

Wenn x unzählig viele Umläufe vollzieht, derart dass eine oder mehrere der Grössen ξ, η, ζ von x unabhängig werden, so wird, da φ ungeändert bleibt, die rechte Seite der Gleichung (1.) verschwinden, folglich auch die linke.

*) RIEMANN, Ab. F., No. 18[1]).
**) A. a. O., No. 21[2]).
***) RIEMANN, a. a. O., No. 20[3]).

[1]) Riemanns Werke, II. Aufl. (1892), S. 129. R. F.
[2]) A. a. O., S. 131—132. R. F.
[3]) A. a. O., S. 131. R. F.

— Wenn ξ, η, ζ auch als Functionen der Veränderlichen k_1, k_2 betrachtet werden, so lässt sich dieses Resultat folgendermassen aussprechen:

II. Wenn die Veränderlichen x, k_1, k_2 solche Umläufe in unendlicher Anzahl vollziehen, dass eine oder mehrere der Grössen ξ, η, ζ von einer oder mehreren dieser Veränderlichen unabhängige Werthe annehmen, so wird

$$I(\xi)^2 - I(\eta)\,I(-\zeta) = 0. \tag{2.}$$

31. [37

Wir haben es in No. 20 ausgesprochen, dass x, k_1, k_2 eindeutige Functionen von ξ, η, ζ sind, und bemerkt, dass wir den Beweis dieses Satzes im Wesentlichen nach der Methode liefern wollen, welche wir für die elliptische Modulfunction*) angewendet haben. Diese Methode war im Wesentlichen die folgende.

Sind η_1, η_2 die dort näher bezeichneten Fundamentalintegrale der Differentialgleichung der Periodicitätsmoduln mit der unabhängigen Variabeln u, so beweisen wir zuerst, dass der reale Theil des Quotienten $\mathrm{H} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ in der Nähe der singulären Punkte $u = 0, 1, \infty$ positiv ist. Bezeichnen wir den realen Theil von H mit $\Re(\mathrm{H})$, so kann es kein Gebiet Γ geben, innerhalb dessen $\Re(\mathrm{H})$ negativ ist. Denn es müsste an der Begrenzung von Γ, wo $\Re(\mathrm{H})$ sein Vorzeichen wechselt, $\Re(\mathrm{H})$ verschwinden. Wir zeigen aber daselbst, dass das Vorzeichen von $\Re(\mathrm{H})$ vom Wege der Variabeln u unabhängig ist. Wir können nun den Umlauf von u so wählen, dass innerhalb Γ die Function H, also auch $\Re(\mathrm{H})$ nicht unendlich wird. Weil aber innerhalb Γ keiner der Punkte $u = 0, 1, \infty$ sich befindet, so müsste $\Re(\mathrm{H})$ innerhalb Γ identisch verschwinden. Wir zeigen dann, dass für unendlich viele Umläufe, welche H von u unabhängig machen, $\Re(\mathrm{H})$ gegen Null convergirt. Der Gesammtwerthvorrath, den H für alle möglichen Umläufe von u erhält, befindet sich daher auf der positiven Seite der lateralen H-Axe. In diese Axe fallen auch die Werthe von H, welche $u = 0$, $u = 1$ entsprechen. Für die Function u von H, wie sie durch die Differentialgleichung zwischen u

*) BORCHARDTs Journal, Bd. 83, S. 13[1]).

[1]) Abh. XXIV, S. 85, Band II dieser Ausgabe. R. F.

und H*) definirt wird, sind aber $u = 0, 1$ die einzigen wirklichen singulären Punkte. Demnach ist u eine eindeutige Function des Werthvorrathes H.

Genau ebenso verfahren wir in der Frage, die uns gegenwärtig beschäftigt. Aus den Gleichungen (2.) No. 20, und aus den Sätzen am Schlusse der No. 21 und am Schlusse der No. 25 Gleichung (9.) folgt, dass die einzigen Singularitäten der Grössen x, k_1, k_2 als Functionen der unabhängig von einander sich ändernden Grössen ξ, η, ζ, durch das Zusammenfallen zweier der Grössen x, k_1, k_2, k_3, k_4 oder das Unendlichwerden einer oder mehrerer derselben erhalten werden. Nach No. 29, Satz VI. ist der Gesammtwerthvorrath V der Mannigfaltigkeit ξ, η, ζ, wenn die unabhängigen Variabeln x, k_1, k_2 beliebige Wege beschreiben, so beschaffen, dass $I(\eta)$, $I(-\zeta)$, $I(\xi)^2 - I(\eta)I(-\zeta)$ negativ bleiben. 38] Diejenigen Werthe, welche durch unzählig viele Umläufe von x, k_1, k_2 von solcher Beschaffenheit erzielt werden, dass eine oder mehrere der Grössen ξ, η, ζ von einer oder mehreren der Grössen x, k_1, k_2 unabhängig werden, liegen auf der Begrenzung von V (Satz II. No. 30). Für diese Werthe ist nämlich $I(\xi)^2 - I(\eta)I(-\zeta) = 0$. Ebenfalls auf der Begrenzung liegen die oben bezeichneten singulären Stellen von x, k_1, k_2 als Functionen von ξ, η, ζ (Satz I. No. 30). Für diese ist nämlich entweder $I(\zeta) = \infty$ oder $I(\xi)^2 - I(\eta)I(-\zeta) = 0$. Hieraus folgt: die Variabeln x, k_1, k_2 sind eindeutige Functionen des Werthvorrathes V der Mannigfaltigkeit ξ, η, ζ.

In der That sind diese Functionen x, k_1, k_2 vermittelst der Thetafunction als eindeutige Functionen von ξ, η, ζ darstellbar.

(Fortsetzung folgt)[1].

*) S. l. c. p. 25[2]).

[1]) Diese Fortsetzung ist nicht erschienen. R. F.

[2]) S. 98, Band II dieser Ausgabe. R. F.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.

Es wurde gesetzt nach der Druckfehler-Berichtigung zur Mittheilung vom 1. November 1888 (No. 1—7), die mein Vater selbst am Schlusse der Mittheilung vom 13. December (Sitzungsberichte 1888, S. 1290) gegeben hat:

S. 11, Gleichung (2.) rechter Hand -1 an Stelle von $+1$,
„ 13 ist in Gleichung (P′.) hinter $\sum$ das Zeichen $\pm$ hinzugefügt.

Ferner wurde, von einigen Druckfehlern, die stillschweigend verbessert wurden, abgesehen, Folgendes verändert:

S. 3, Zeile 1 Bedeutet statt Bedeuten,
„ 5 wurde hinter Gleichung (5.) $\begin{pmatrix} k = 1, \ldots, \nu-1 \\ l = 1, \ldots, \nu-1 \end{pmatrix}$ hinzugefügt,
„ 10, Zeile 4 v. u. wird statt werden,
„ 14, „ 9 wurde »der« vor Gleichung eingefügt,
„ 16, „ 3 v. u. wurde »y ein Integral von (1.)« eingefügt,
„ 21, „ 4 v. u. wurde »das den Gleichungen (2.) genügt« eingefügt,
„ 22, „ 1 den Gleichungen statt der Gleichung,
Gleichung (9.) wurde $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ angefügt,
Zeile 8 v. u. finden statt findet,
„ 7 v. u. Gleichungen statt Gleichung; dasselbe noch an einigen anderen Stellen,
„ 24, „ 5 wurden die im Original hinter W stehenden Worte: »einen Umlauf von x um« gestrichen.
„ 25, Gleichung (1.) rechter Hand $A_{i0}, A_{i1}, \ldots, A_{i,2n-1}$ statt $A_{\alpha 0}, A_{\alpha 1}, \ldots, A_{\alpha, 2n-1}$ und $(i = 1, 2, \ldots, 2n)$ statt $(\alpha = 1, 2, \ldots, 2n)$,
Gleichung (S_2.) wurde $(\alpha = 1, 2, \ldots, \nu)$ angefügt,
Zeile 13 genügt statt genügen,
„ 5 v. u. $D_{i0}, D_{i1}, \ldots, D_{i,\nu-1}$ statt $D_{\alpha 0}, D_{\alpha 1}, \ldots, D_{\alpha,\nu-1}$,
„ 26, „ 4 (s. No. 4) statt (s. No. 5),
„ 6 wurde »von x unabhängige« eingefügt,
„ 29, „ 8 wurde »in« vor Borchardts Journal eingefügt,
„ 33, „ 2, 6, 16 niedrigerer statt niedriger,
„ 34, „ 5 »die $s_{i\tau}$« statt $s_{i\tau}$ und »den $\chi_{\lambda\alpha}$« statt $\chi_{\lambda\alpha}$,

S. 35, Zeile 8 ist das Wort »bezeichneten« vor Umlaufe weggelassen,
„ „ 3 v. u. »muss« statt müsse,
„ 37, „ 5 v. u. ihre Ableitungen statt die Ableitungen,
„ 39, „ 11 v. u. zwischen a_2, ζ_3 »und« eingefügt,
„ 41, „ 13 v. u. »von x unabhängige« vor Werthe eingefügt,
„ „ 11 v. u. Ist statt Sind,
„ 42, Gleichung (15.) $-\alpha_6\left(\frac{v_1}{v_4}\frac{u_4}{u_3}-\frac{v_2}{v_4}\frac{u_1}{u_3}\right)$ statt $+\alpha_6\left(\frac{v_1}{v_4}-\frac{v_2}{v_4}\frac{u_1}{u_2}\right)$,
„ 43, Zeile 15 eines Fundamentalsystems statt des Fundamentalsystems,
„ 46, „ 1 »angegebenen« vor Umlaufe gestrichen,
„ 47, „ 5 v. u. wurde Gleichung (13a.) $M = \gamma(b^2+cd)$ hinzugefügt,
„ „ 4 v. u. wurde zu Anfang »sein« eingefügt,
„ 52 in der dritten der Gleichungen (9.) $-$ statt $+$,
in der dritten der Gleichungen (9a.) $-$ statt $+$,
„ 57, Zeile 11 ihre singulären Punkte statt die singulären Punkte derselben,
„ 60, „ 10 v. u., S. 62, Zeile 1 und 7 v. u., S. 63, Zeile 6 ist »den« vor Gleichungen eingefügt,
„ 61, „ 3 v. u. No. 23 statt No. 18,
„ 63, Gleichung (11.) die obere Grenze im zweiten Integral k_3 statt k_4,
„ 65, Zeile 9 wurde »sonst« nach weil eingefügt,
„ „ 18 vor Gleichung (1.) $x = k_1, k_2$ statt $x = k_1$,
„ „ 20 vor Gleichung (2.) $x = k_3, k_4$ statt $x = k_2, k_3, k_4$,
Gleichung (3.) $J\left(\frac{d}{a}\right) = \infty$ statt $J\left(\frac{d}{a}\right) = 0$,
Zeile 7 v. u. $J\left(\frac{d}{a}\right)$ unendlich statt $J\left(\frac{d}{a}\right)$ Null,
„ 66, „ 6 v. u. $J(\zeta) = \infty$ statt $J(\zeta) = 0$, ebenso S. 68, Zeile 7 v. u.

2) Was die Einführung der zu einer linearen Differentialgleichung gehörigen Klasse (No. 9, S. 17) im Anschluss an die beiden nachgelassenen Arbeiten Riemanns »zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten« (Riemanns Gesammelte Werke, zweite Auflage (1892), S. 380) anbetrifft, so ist dazu Folgendes zu bemerken: Mein Vater bedient sich hier der Bezeichnung »Klasse« in einem etwas anderen Sinne, als sie ursprünglich von Riemann gedacht war. Nach Riemann gehören lineare Differentialgleichungen, deren Lösungen an keiner Stelle von unendlich hoher Ordnung unendlich werden, zu derselben Klasse, wenn sie nicht nur in allen Verzweigungsstellen ihrer Integrale, sondern auch in denjenigen Unendlichkeitsstellen übereinstimmen, wo sich die Integrale wie rationale Functionen verhalten. Mein Vater aber bezeichnet weitergehend Differentialgleichungen, deren Lösungen keinen Punkt der Unbestimmtheit besitzen, als zu einer Klasse gehörig, wenn ihre Integrale dieselben Verzweigungsstellen besitzen. Für diesen weiteren Begriff hat Herr Poincaré (Acta Mathematica, Bd. 5, 1884, S. 212) die Bezeichnung espèce (von Herrn Schlesinger mit »Art« übersetzt) eingeführt. Man vgl. über diese Bezeichnungen: L. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen Band II_1, No. 164 und No. 222;

3) Zu dem in No. 12, S. 24, Gleichungen (7.), (8.) und (9.) gegebenen Nachweis, dass die Ableitungen $\frac{\partial y_a}{\partial k}$ der Elemente eines Fundamentalsystems nach einem Parameter k keine anderen Singularitäten besitzen als y_a selbst, ist Folgendes zu bemerken: Die rechte Seite der Gleichnng (9.)

$$\frac{\partial y_a}{\partial k} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\partial f_a(z,k)}{\partial k}\,\frac{dz}{z-x},$$

wo das Integral über die Begrenzung W eines Gebietes erstreckt ist, in welchem kein singulärer Punkt der Differentialgleichung sich befindet, setzt das zu Beweisende schon voraus, da diese Gleichung nur besteht, wenn $\frac{\partial y_a}{\partial k}$ innerhalb W eindeutig, endlich und stetig ist.

Dass die Functionen $\frac{\partial y_a}{\partial k}$ als Functionen von x in der That keine anderen Singularitäten als die Functionen y_a selbst besitzen, so lange der Parameter k innerhalb gewisser Grenzen bleibt, folgt, wie Herr Schlesinger, Handbuch u. s. w., II_1, No. 228, gezeigt hat, aus den Untersuchungen des Herrn Poincaré (Acta Mathematica, Band IV, S. 212 ff. Vgl. hierzu auch: Schlesinger, Handbuch u. s. w., Band I, No. 85 und 106).

4) Zu dem in No. 13 gegebenen Nachweis, dass die Gleichung (H.) — die jetzt sogenannte n^{te} Associirte der Gleichung (A.) — reductibel sein muss, wenn (A.) den Anforderungen (α.) in No. 11 genügt, ist zu bemerken, dass dieser Beweis und überhaupt der Satz von der Reductibilität der n^{ten} Associirten nicht richtig ist. In der Einleitung zu der Mittheilung vom 17. März 1898 in den Sitzungsberichten der Akademie 1898, S. 222 sagt mein Vater: »Es möge bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, dass sich in die Mittheilung in den Sitzungsberichten 1888, S. 1284, Gleichung (15.) bis (21.) ein Rechenfehler eingeschlichen hat, welcher den dort gegebenen Beweis beeinträchtigt«. Dieser Rechenfehler ist der folgende: Aus den Gleichungen (6.) der No. 13, S. 26 folgt, dass für ein Fundamentalsystem $f\xi_a$, wenn f von x unabhängig ist, die Grössen $D_{\alpha\beta}$ dieselben bleiben wie für ξ_a, wenn $\alpha \lesseqgtr \beta$, dass dagegen $D_{\alpha\alpha}$ durch $D_{\alpha\alpha}+\frac{1}{f}\frac{df}{dk}$ zu ersetzen ist. Demnach tritt an Stelle von $\chi(t)$, für $f\xi_a$, nicht $f\chi(t)+2\frac{df}{dk}Z'(t)$, sondern $\chi(t)+\frac{2}{f}\frac{df}{dk}Z'(t)$. Dann lautet aber die Gleichung (16.), S. 27

$$\mathrm{H}_1(t) = \psi(t)+\chi(t)+\frac{2}{f}\frac{df}{dk}Z'(t).$$

Statt (18.) ist zu setzen

$$\psi(t)+\chi(t) = \left(\gamma_1-\frac{2}{f}\frac{df}{dk}\right)Z'(t).$$

Also ist

$$\gamma_1 = \gamma+\frac{2}{f}\frac{df}{dk}.$$

Die Gleichung (17.) ist also selbstverständlich, wenn (12.) erfüllt ist. Es lässt sich in der That zeigen, dass für jedes Fundamentalsystem $\mathrm{H}(t) = \gamma Z'(t)$ ist, so dass man auf diese Weise die Reductibilität der n^{ten} Associirten nicht erschliessen kann. Mein Vater ist später noch einmal auf den Gegenstand zurückgekommen in der Mittheilung vom 9. März 1899, wo er die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Reductibilität der n^{ten} Associirten entwickelt.

Die folgenden Untersuchungen über die Periodicitätsmoduln der ultraelliptischen Integrale bleiben durch den angegebenen Fehler unbeeinflusst, da ja für deren Differentialgleichung 4ter Ordnung die Reductibilität der zweiten Associirten unmittelbar durch das Vorhandensein eines rationalen Integrals bewiesen wird.

5) Zu No. 21, S. 48, Gleichung (15.) möchte ich zum besseren Verständniss die genauere Untersuchung, welche ergiebt, dass $\gamma = 0$, hier zum Abdruck bringen, so wie sie sich im handschriftlichen Nachlass meines Vaters gefunden hat:

Setzen wir auf beiden Seiten der Gleichung (14.) $f = 0$, $d = 0$ und für a, b, c Werthe, welche den Gleichungen

$$m'a+m'_1b+m'_2c = 0,$$
$$\alpha a+\alpha_1 b+\alpha_2 c = 0$$

genügen, so folgt, dass entweder $\gamma = 0$ oder $m' = \lambda\alpha$, $m'_2 = \lambda\alpha_2$. Setzen wir auf beiden Seiten von (14.) $f = 0, c = 0$ und für a, b, d Werthe, welche sich aus den Gleichungen

$$m'a + m'_1 b + m'_3 d = 0,$$
$$\alpha a + \alpha_1 b + \alpha_3 d = 0$$

ergeben, so folgt wiederum, wenn nicht $\gamma = 0$, dass $m' = \lambda\alpha$, $m'_3 = \lambda\alpha_3$. Setzen wir endlich auf beiden Seiten der Gleichung (14.) $a = 0$, $d = 0$ und für b, c, f Werthe, welche den Gleichungen

$$m'_1 b + m'_2 c + m'_4 f = 0,$$
$$\alpha_1 b + \alpha_2 c + \alpha_4 f = 0$$

genügen, so folgt, wenn nicht $\gamma = 0$, dass $m'_2 = \lambda\alpha_2$, $m'_4 = \lambda\alpha_4$. Es ist demnach, wenn nicht γ verschwindet, identisch

$$m'a + m'_2 c + m'_3 d + m'_4 f = \lambda(\alpha a + \alpha_2 c + \alpha_3 d + \alpha_4 f).$$

Ebenso ergiebt sich, dass unter denselben Umständen

$$\begin{aligned} na + n_2 c + n_3 d + n_4 f &= \mu(\alpha a + \alpha_2 c + \alpha_3 d + \alpha_4 f), \\ m''a + m''_2 c + m''_3 d + m''_4 f &= \nu(m'a + m'_2 c + m'_3 d + m'_4 f) \\ &= \lambda\nu(\alpha a + \alpha_2 c + \alpha_3 d + \alpha_4 f). \end{aligned}$$

Setzen wir also

$$\alpha a + \alpha_2 c + \alpha_3 d + \alpha_4 f = V,$$

so geht (14.) über in

$$(\lambda\nu V + m''_1 b)(V + \alpha_1 b) - (\mu V + n_1 b)(\lambda V + m'_1 b) = \gamma(af + b^2 + cd);$$

diese Identität kann aber nur bestehen, wenn $\gamma = 0$.

6) Die Theile dieser Arbeit von No. 26 an sind wohl nur als ein Entwurf einer sehr tief liegenden Untersuchung über die Art der Abhängigkeit der Werthe x, k_1, k_2 von den ξ, η, ζ anzusehen. In Bezug auf den am Anfang der No. 29 ausgesprochenen Satz, dass φ für jeden nicht singulären Werth von x, so lange die Grössen k_μ endlich und von einander verschieden sind, immer einen negativen Werth haben müsse, sei Folgendes bemerkt. Mein Vater hat, wie aus dem handschriftlichen Nachlass hervorgeht, wiederholt versucht, für diesen Satz, der für die in den folgenden Nummern angedeutete Theorie grundlegend ist, einen Beweis zu geben. Ich möchte die beiden letzten Noten, die ich zu diesem Gegenstand im Nachlass vorgefunden habe, hier zum Abdruck bringen, wenn mir auch das Beweisverfahren noch nicht vollständig zu sein scheint, da ihr Inhalt vielleicht für eine spätere Forschung von Wichtigkeit werden kann.

a) Setzen wir, wie in No. 26, $x = x_1 + x_2 i$, $k_\mu = l_{\mu 1} + i l_{\mu 2}$, so ist φ eine reale Function der realen Variablen $x_1, x, l_{\mu 1}, l_{\mu 2}$. So lange x in hinläng-

licher Nähe eines k_μ sich befindet, oder in der Nähe von $x = \infty$, ist φ negativ (No. 27). Soll φ in einem Gebiete Γ positiv sein, so müsste dasselbe durch Curven abgegrenzt sein, welche die Punkte k_μ und ∞ ausschliessen. Möge eine solche Curve, die k_μ ausschliesst, C_μ heissen und die ∞ ausschliessende C_∞. Betrachten wir φ in seiner Abhängigkeit von k_1, so wird C_1 sich verändern, wenn k_1 sich verändert, und es wird nach No. 27, da φ in Bezug auf k_μ dieselbe Eigenschaft, wie in Bezug auf x besitzt, wenn k_1 in hinlängliche Nähe von k_2 rückt, φ durchaus negativ sein, also müsste C_1 aufhören zu existiren. Dieses ist jedoch nicht möglich, weil C_1 in hinlänglicher Entfernung von jedem der Punkte k_μ bleiben muss. Demnach kann es überhaupt kein Gebiet Γ geben.

b) Der Beweis, dass φ stets negativ, lässt sich am besten folgendermassen liefern. Wir nehmen an, dass x und k_1 eine solche Lage haben, dass noch $\varphi = 0$ sei, dass aber, wenn k_1 sich um ein Kleines nach einer Richtung fortbewegt, φ negativ wäre; dann ist, weil x und k_1 nicht singulär sind, wenn wir setzen

$$x = x_1 + i x_2 = \alpha_1 + i\alpha_2, \quad k_1 = l_{11} + i l_{12} = \beta_1 + i\beta_2,$$

$$\text{(1.)} \quad \varphi = A(x_1 - \alpha_1) + B(x_2 - \alpha_2) + C(x_1 - \alpha_1)^2 + D(x_1 - \alpha_1)(x_2 - \alpha_2) + E(x_2 - \alpha_2)^2 + \cdots,$$

worin die Coefficienten $A, B, C, \ldots$ stetige Functionen von l_{11}, l_{12} sind. Ändern wir l_{11}, l_{12} stetig, so geht φ über in

$$\text{(2.)} \quad \varphi' = A'(x_1 - \alpha_1) + B'(x_2 - \alpha_2) + C'(x_1 - \alpha_1)^2 + D'(x_1 - \alpha_1)(x_2 - \alpha_2) + E'(x_2 - \alpha_2)^2 + \cdots,$$

wo $A', B', C', \ldots, \varphi'$ resp. von $A, B, C, \ldots, \varphi$ beliebig wenig verschieden sind (der gleichmässigen Convergenz wegen). Es würde also auch, für das veränderte System l_{11}, l_{12}, φ' für $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$ verschwinden; aber wenn l_{11}, l_{12} nach der oben bezeichneten Richtung abgeändert werden, so muss φ' negativ sein etc.

R. F.

LV.

BEMERKUNG ZU DER ARBEIT IM BANDE 75 SEITE 177 DIESES JOURNALS.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 106, 1890, S. 1—4.)

In meiner Arbeit (Journal für Mathematik, Bd. 75, S. 179[1]) habe ich [1 den grössten unter denjenigen um den Nullpunkt der complexen Variablen w beschriebenen Kreisen, innerhalb deren nicht zwei verschiedene Werthe w der Function

$$z = F(w) = \frac{f(w)}{wg(w)}$$

($f(w)$, $g(w)$ ganze rationale Functionen und $f(0)$, $g(0)$ von Null verschieden) denselben Werth ertheilen, als Grenzkreis definirt. Der Radius dieses Kreises ergab sich (daselbst S. 184[2]) als der Modul derjenigen Wurzel der Gleichung $F'(w) = 0$, welche unter allen Wurzeln derselben den kleinsten Modul hat.

Wenn die Coefficienten der ganzen Functionen $f(w)$ und $g(w)$ besonderen Bedingungen Genüge leisten, kann jedoch der Radius des Grenzkreises einen kleineren Werth haben*). In der folgenden Notiz soll dieser Ausnahmefall präcisirt werden.

Hieran schliesse ich eine Bemerkung, aus welcher hervorgeht, dass die Bestimmbarkeit des Grenzkreises nach den S. 194[3]) (daselbst) zusammengefassten Forderungen von dem Ausnahmefalle nicht beeinflusst wird.

---

*) Ein solches Beispiel wurde mir von Herrn Anissimoff, Privatdocent an der Universität Moskau, vorgelegt.

---

1) Abh. XIV, S. 361, Band I dieser Ausgabe. R. F.
2) Ebenda S. 369. R. F.
3) Ebenda S. 379. R. F.

1.

Der Ausnahmefall zieht seinen Ursprung aus dem S. 181—182 [1]) (daselbst) betrachteten Falle $B = 0$ und ergiebt sich folgendermassen:

Setzen wir in die Gleichung

$$\psi(w, w_1) = 0, \tag{1.}$$

$$w = re^{\varphi i}, \quad w_1 = re^{\varphi_1 i},$$

2] so ergeben sich hieraus durch Trennung des realen und des imaginären Theiles die algebraischen Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &G(\cos\varphi, \cos\varphi_1, r) = 0, \\ &H(\cos\varphi, \cos\varphi_1, r) = 0 \end{aligned}\right. \tag{2.}$$

mit realen Coefficienten. Der Voraussetzung gemäss werden dieselben befriedigt durch die realen Werthe $r = R$, $\cos\varphi = \cos\varphi''$, $\cos\varphi_1 = \cos\varphi'$. Demgemäss ergeben die Gleichungen (2.) in der Umgebung von $r = R$

$$\left\{\begin{aligned} \cos\varphi &= \cos\varphi'' + \mathfrak{P}\left((r-R)^{\frac{1}{\lambda}}\right), \\ \cos\varphi_1 &= \cos\varphi' + \mathfrak{P}_1\left((r-R)^{\frac{1}{\lambda}}\right), \end{aligned}\right. \tag{3.}$$

wo $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}_1$ nach positiven ganzen Potenzen von $(r-R)^{\frac{1}{\lambda}}$ fortschreitende Reihen mit realen Coefficienten bedeuten. Die Gleichungen (3.) liefern der Voraussetzung nach nur für $r > R$ reale Werthe für die beiden Grössen φ und φ_1 (vgl. daselbst S. 182 [2])). Dieselben lehren, dass die Lagen je zweier zusammengehörigen Punkte eines Kreises K_r sich mit r stetig ändern.

Der Voraussetzung gemäss entsprechen den Werthen von w in der Umgebung von w'' Punkte w_1 in der Umgebung von w', die ausserhalb oder innerhalb K liegen, je nachdem w innerhalb oder ausserhalb K befindlich ist. Sind daher $\overline{w}$ und $\overline{w}_1$ zusammengehörige Punkte des dem Kreise K unendlich benachbarten concentrischen und grösseren Kreises K', welche resp. den Punkten w'' und w' unendlich benachbart liegen, so müssen die geometrischen Quantitäten $\overline{w} - w''$ und $\overline{w}_1 - w'$ die Richtungen der Tangenten des Kreises K resp. in w'' und w' haben. Nun sind aber dieselben geometrischen Quanti-

[1]) Abh. XIV, S. 365—367, Band I dieser Ausgabe. R. F.

[2]) Ebenda S. 366. R. F.

täten Halbsehnen eines und desselben Kreises K'. Sind demnach $\varphi'' + d\varphi$, $\varphi' + d\varphi$ resp. die Argumente von $\overline{w}$ und $\overline{w}_1$, so folgt daher zunächst

$$Rd\varphi = \pm Rd\varphi_1,$$

also

$$d\varphi = \pm d\varphi_1. \tag{4.}$$

Da $\frac{dw_1}{dw}$ für alle von $w = w''$, $w_1 = w'$ ausgehenden entsprechenden Wegelemente denselben Werth annimmt, so gilt Gleiches von

$$-\frac{d\log w_1}{d\log w}.$$

Für die entsprechenden Wegelemente $\overline{w} - w''$ und $\overline{w}_1 - w'$, für welche $dr_1 = dr$, erhält

$$-\frac{d\log w_1}{d\log w} = -\frac{\frac{dr_1}{R} + id\varphi_1}{\frac{dr}{R} + id\varphi}$$ [3

nach Gleichung (4.) den Werth

$$-\frac{1 \pm iR\frac{d\varphi}{dr}}{1 + iR\frac{d\varphi}{dr}}. \tag{5.}$$

Nun ist

$$-\frac{d\log w_1}{d\log w} = -\frac{F'(w)\,w}{F'(w_1)\,w_1} = \frac{\frac{\partial\psi}{\partial w}\,w}{\frac{\partial\psi}{\partial w_1}\,w_1} = A + Bi. \tag{6.}$$

Es wird gefordert, dass $B = 0$ sei. Wenn demnach $\frac{d\varphi}{dr}$ endlich und von Null verschieden, so müsste im Ausdrucke (5.) das obere Vorzeichen gewählt werden, und es ergäbe sich demnach $A = -1$. Derselbe Werth von A würde für $\frac{d\varphi}{dr} = 0$ auftreten. Da aber der Werth $A = -1$ nicht statt haben kann (siehe daselbst S. 182 [1])), so bleibt nur die Annahme übrig, dass $\frac{d\varphi}{dr}$ unendlich wird. Die Wahl des unteren Zeichens liefert alsdann

$$A = 1 \tag{7.}$$

oder

$$wF'(w) + w_1 F'(w_1) = 0. \tag{8.}$$

[1]) Abh. XIV, S. 366, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Hierdurch ist der Ausnahmefall vollständig umgrenzt:

Haben die beiden Gleichungen (1.) und (8.) Lösungen (w_1, w), für welche die Moduln von w_1 und w einander gleich sind, und ist der kleinste dieser Moduln kleiner als die Moduln der Wurzeln der Gleichung $F'(w) = 0$, so ist derselbe der Radius des Grenzkreises.

Dass die Möglichkeit, dass w_1 und w denselben Modul haben, in der That einen Ausnahmefall ausmacht, ergiebt folgende Erwägung:

Setzen wir in die Gleichungen (1.) und (8.) $w = re^{\varphi i}$, $w_1 = re^{\varphi_1 i}$, und trennen die realen und die imaginären Bestandtheile, so erhalten wir zur Bestimmung von r, $\cos\varphi$, $\cos\varphi_1$ vier algebraische Gleichungen, deren Zusammenbestehen eine Bedingungsgleichung für die Coefficienten von $f(w)$ und $g(w)$ zur Folge hat.

Wir bemerken übrigens, dass auch der Fall $B = \infty$ (S. 181 daselbst[1]) 4] gewissermassen zum Ausnahmefalle gehört. Es kann nämlich nicht w' eine Verzweigungsstelle der Function w von w_1 sein. Denn aus der Entwickelung

$$(9.)\qquad w - w'' = e_0(w_1 - w')^{\frac{\varkappa}{\lambda}} + e_1(w_1 - w')^{\frac{\varkappa+1}{\lambda}} + \cdots,$$

welche in der Umgebung von $w_1 = w'$ gilt, und wo $\varkappa$, λ ganze positive Zahlen, letztere grösser als Eins, würde sich ergeben, dass innerhalb K gelegenen Punkten der Umgebung von w' ebenfalls innerhalb K gelegene Punkte der Umgebung von w'' entsprächen, was dem Begriffe des Grenzkreises widerspricht. Es ist demnach mit $F'(w') = 0$ gleichzeitig $F'(w'') = 0$. Also auch in dem Falle $B = \infty$ genügen $w_1 = w'$, $w = w''$ den Gleichungen (1.) und (8.), und haben denselben Modul.

Demgemäss ist der Normalfall der, dass auf der Peripherie des Grenzkreises zwei entsprechende Punkte zusammenfallen (siehe S. 180 daselbst[2]).

2.

Um zu zeigen, dass die Bestimmbarkeit des Grenzkreises den Forderungen gemäss, welche S. 194[3]) daselbst zusammengefasst sind, von dem Ausnahme-

1) Abh. XIV, S. 365, Band I dieser Ausgabe. R. F.
2) Ebenda S. 364. R. F.
3) Ebenda S. 379. R. F.

falle nicht berührt wird, wollen wir an die in No. 5 bis 9 daselbst[1]) getroffenen Bestimmungen anknüpfen.

Die Gleichung (1.) No. 6 daselbst eingeführte Grösse a bleibt willkürlich, und nur ihr Modul hat eine gewisse untere Grenze. Setzen wir (Gl. (3.) No. 5 und Gl. (1.) No. 6, Gl. (9.) No. 8 daselbst)

$$z = F(w) = \frac{\varphi(w)\left[(m-1)w^{m+1} - (m+1)\right] + a(m-1)(w^{m+1} - 1)}{w\left[(m-1)w^{m+1} - (m+1)\right]}.$$

Bilden wir mit dieser Function die Gleichungen (1.) und (8.) voriger Nummer, setzen in denselben $a = p + p'i$, $w = re^{\varphi i}$, $w_1 = re^{\varphi_1 i}$, so ergiebt die Trennung des realen und des imaginären Theiles vier Gleichungen für r, $\cos\varphi$, $\cos\varphi_1$. Die Elimination dieser Grössen liefert eine algebraische Gleichung zwischen p und p'. Man darf also nur p und p' so wählen, dass diese Gleichung nicht erfüllt werde. Dann gehört der Grenzkreis unserer Function $F(w)$ dem Normalfalle an, und es bleiben die Schlüsse der No. 6 bis 9 daselbst bestehen.

Berlin, September 1889.

1) Abh. XIV, S. 370—376, Band I dieser Ausgabe. R. F.

ANMERKUNG.

Vgl. zu dieser Abhandlung die Anmerkung 2 zur Abh. XIV, S. 411—412 des ersten Bandes und die Anmerkung 1 zu Abh. LVIII dieses Bandes. R. F.

LVI.

ÜBER ALGEBRAISCH INTEGRIRBARE LINEARE DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1890, XXVI, S. 469—483; vorgelegt am 22. Mai; ausgegeben am 5. Juni 1890.)

Es seien die Integrale der irreductiblen Differentialgleichung [469

$$\text{(A.)} \qquad \frac{d^3 y}{dz^3} + p\frac{d^2 y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0$$

mit rationalen Coefficienten überall bestimmt*), und es werde vorausgesetzt, dass die Wurzeln der sämmtlichen determinirenden Fundamentalgleichungen rationale Zahlen sind, und dass zwischen den Elementen eines Fundamentalsystems von Integralen y_1, y_2, y_3 der Gleichung (A.) eine homogene Relation n^{ten} Grades mit constanten Coefficienten

$$\text{(B.)} \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0$$

bestehe, deren linke Seite sich nicht in Formen niedrigeren Grades zerlegen lässt. — In früheren Arbeiten**) habe ich für $n > 2$ aus diesen Voraussetzungen die Folgerung gezogen, dass die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar sei, indem ich den Nachweis führte, dass z als Function von $\eta = \frac{y_2}{y_1}$

*) Siehe Borchardts Journal, Bd. 66, S. 146, Gleichung (12.)[1].

**) Sitzungsberichte vom 8. Juni 1882, S. 703 ff. und Acta mathematica, t. I, p. 321[2].

[1]) Abh. VI, S. 186, Band I dieser Ausgabe. R. F.

[2]) Abh. XXXIX, S. 289 ff., und Abh. XL, S. 299 ff., Band II dieser Ausgabe. R. F.

nur eine endliche Anzahl von Werthen annehme*), und dass zwischen z und η eine algebraische Differentialgleichung erster Ordnung besteht, in welcher die Variablen separirt sind**).

Diese Differentialgleichung wird folgendermaassen gebildet. Es sei $H(f)$ die Hessesche Covariante der Form f, so ist***)

$$H(f) = X(z),$$

wo $X(z)$ Wurzel einer rationalen Function von z. Sei

470]

$$\frac{y_2}{y_1} = \eta, \quad \frac{y_3}{y_1} = \zeta,$$
$$H(f) = y_1^{3n-6} H_1(\eta, \zeta),$$
$$\frac{d^2\zeta}{d\eta^2} = G(\eta, \zeta),$$

endlich $\Delta(z)$ diejenige Wurzel einer rationalen Function von z, welcher die Hauptdeterminante von y_1, y_2, y_3 gleichwerthig ist. Setzen wir zur Abkürzung

$$\sqrt[3n-6]{\frac{\Delta^{n-2}}{X}} = \Omega(z), \qquad \sqrt[3n-6]{X} = \Theta(z),$$
$$\sqrt[3n-6]{\frac{H_1(\eta, \zeta)}{G(\eta, \zeta)^{n-2}}} = K(\eta), \qquad \sqrt[3n-6]{\frac{1}{H_1(\eta, \zeta)}} = L(\eta),$$

so lautet die genannte Differentialgleichung†)

$$(\alpha.) \qquad \frac{d\eta}{dz} = \Omega(z)\, K(\eta).$$

Wir fügen für den weiteren Gebrauch noch hinzu, dass††)

$$(\beta.) \qquad y_1 = \Theta(z)\, L(\eta).$$

*) Acta math., a. a. O., S. 328 [1]).
**) Acta math., S. 329 [2]).
***) Acta math., S. 323 [3]).
†) Acta math., S. 329, Gleichung (27.) [4]).
††) Acta math., S. 329, Gleichung (26.) [5]).

[1]) Abh. XL, S. 306, Band II dieser Ausgabe. R. F.
[2]) Ebenda S. 307. R. F.
[3]) Ebenda S. 301. R. F.
[4]) Ebenda S. 307. R. F.
[5]) Ebenda S. 307. R. F.

Wie mit Hülfe der Gleichung (α.) die algebraische Natur der Integrale der Gleichung (A.) zu erweisen ist, findet sich am angeführten Orte nur angedeutet. Indem wir auf diesen Nachweis hier des Näheren eingehen, wollen wir zwei Verfahrungsarten entwickeln, welche auf verschiedenen Principien beruhen und, wie es scheint, ein über den vorliegenden Zweck hinausreichendes Interesse darbieten.

1.

Wir schicken einige Sätze voraus, welche wir im Folgenden verwenden wollen.

I. Sind w_1, w_2, w_3 die zu y_1, y_2, y_3 adjungirten Functionen, so hat das Bestehen der Gleichung (B.) zur Folge, dass w_1, w_2, w_3 einer homogenen Relation mit constanten Coefficienten genügen.

Denn durch Differentiation nach z folgt aus (B.)

$$(1.) \qquad f_1 y_1' + f_2 y_2' + f_3 y_3' = 0,$$

wo $f_k = \frac{\partial f}{\partial y_k}$, $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dz^k}$ gesetzt ist. Ausserdem ist [471

$$(2.) \qquad f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0.$$

Eliminiren wir aus (1.) und (2.) successive f_3 und f_2, so ergiebt sich

$$(3.) \qquad f_1 w_2 - f_2 w_1 = 0,$$
$$(4.) \qquad f_3 w_1 - f_1 w_3 = 0.$$

Aus den Gleichungen (B.), (3.), (4.) ergiebt sich durch Elimination von y_1, y_2, y_3 eine homogene Relation zwischen w_1, w_2, w_3 mit constanten Coefficienten.

Ist $n > 2$, so ist auch der Grad der zwischen w_1, w_2, w_3 stattfindenden Relation grösser als 2.

II. Es sei die Differentialgleichung

$$(5.) \qquad y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \cdots + p_m y = 0$$

irreductibel und die Integrale derselben überall bestimmt*). Es seien überdies die Zweige eines Integrals y derselben, bis auf constante Factoren, von endlicher Anzahl, so besitzt dieselbe

*) Borchardts Journal, Bd. 66, S. 146, Gleichung (12.) [1]).

[1]) Abh. VI, S. 186, Band I dieser Ausgabe. R. F.

ein Fundamentalsystem von Integralen, deren logarithmische Ableitungen algebraische Functionen sind.

In der That, wenn die Zweige eines Integrals y der Gleichung (5.) bis auf constante Factoren mit den Werthen $y, y_1, y_2, \dots, y_{r-1}$ übereinstimmen, so sind die Zweige der Function $u = \frac{d \log y}{dz}$ genau mit den Werthen

$$u = \frac{d \log y}{dz}, \quad u_1 = \frac{d \log y_1}{dz}, \quad u_2 = \frac{d \log y_2}{dz}, \quad \dots, \quad u_{r-1} = \frac{d \log y_{r-1}}{dz}$$

übereinstimmend. Die symmetrischen Functionen von $u, u_1, u_2, \dots, u_{r-1}$ sind daher eindeutige Functionen von z. Da die Integrale von (5.) überall bestimmt sind, so haben diese eindeutigen Functionen keine wesentlich singuläre Stelle, sie sind also rationale Functionen von z. Demnach ist u eine algebraische Function von z. Die Gleichung (5.) besitzt die Integrale

$$y_\lambda = e^{\int u_\lambda dz}. \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \dots, r-1)$$

Von diesen müssen m linear unabhängig sein, da sonst Gleichung (5.) mit einer linearen Differentialgleichung niedrigerer als m^{ter} Ordnung und mit rationalen Coefficienten Integrale gemeinschaftlich hätte, gegen die Voraussetzung. Die Gleichung (5.) besitzt daher ein Fundamentalsystem von Integralen, deren logarithmische Ableitungen algebraisch sind.

472] 2.

Wenn die Gleichung (A.) die Relation (B.) zulässt, und wenn ausserdem bekannt ist, dass die Zweige eines Integrals y derselben, bis auf constante Factoren, von endlicher Anzahl sind, so hat dieselbe nach Satz II. voriger Nummer ein Fundamentalsystem von Integralen y_1, y_2, y_3, deren logarithmische Ableitungen Zweige einer algebraischen Function sind. Bezeichnen wir dieselben bezüglich mit u_1, u_2, u_3, so folgt aus Gleichung (1.) voriger Nummer

$$(1.) \qquad f_1 y_1 u_1 + f_2 y_2 u_2 + f_3 y_3 u_3 = 0.$$

Aus dieser Gleichung und aus Gleichung (2.) voriger Nummer ergiebt sich

$$(2.) \qquad f_1 y_1 (u_1 - u_3) + f_2 y_2 (u_2 - u_3) = 0.$$

Wenn wir vermittelst der Gleichung (B.) ζ als algebraische Function von η in Gleichung (2.) substituiren, so könnte sich ereignen, dass dieselbe für die *beiden unabhängigen Variablen* z, η *identisch* erfüllt würde.

Sind A_1, A_2 blosse Functionen von z und B_1, B_2 blosse Functionen von η, und ist identisch für die unabhängigen Variablen η, z

$$(3.) \qquad A_1 B_1 + A_2 B_2 = 0,$$

so ist auch

$$(3a.) \qquad A_1' B_1 + A_2' B_2 = 0$$

identisch erfüllt, wenn A_1', A_2' die Ableitungen von A_1, A_2 bedeuten. Sind B_1, B_2 nicht identisch Null, so folgt aus (3.) und (3a.), dass die Hauptdeterminante der Functionen A_1, A_2 identisch verschwindet, dass demnach*)

$$(4.) \qquad A_1 = \gamma A_2,$$

wo γ von z unabhängig. Ist

$$A_1 = u_1 - u_3, \quad A_2 = u_2 - u_3,$$

sowie B_1, B_2 die sich aus $\frac{f_1}{y_1^{n-1}}, \frac{f_2 y_2}{y_1^n}$ vermittelst Gleichung (B.) sich ergebenden Functionen von η, so würde das identische Bestehen von (2.) nach Gleichung (4.) zur Folge haben

$$(5.) \qquad u_1 - u_3 = \gamma (u_2 - u_3)$$

und

$$(5a.) \qquad f_2 y_2 + \gamma f_1 y_1 = 0,$$

$$(5b.) \qquad f_3 y_3 + (1-\gamma) f_1 y_1 = 0,$$

wo γ eine Constante. Es kann nämlich wegen der vorausgesetzten Be- [473 schaffenheit von f nicht B_1, B_2 identisch verschwinden.

In Folge der über f gemachten Voraussetzung ergiebt sich aus (5a.) und (5b.), dass *identisch für alle* y_1, y_2, y_3

$$(6.) \qquad f_2 y_2 + \gamma f_1 y_1 = Mf$$

und

$$(6a.) \qquad f_3 y_3 + (1-\gamma) f_1 y_1 = M_1 f,$$

wo M und M_1 Constanten bedeuten.

*) Borchardts Journal, Bd. 66, S. 128 [1]).

[1]) Abh. VI, S. 166, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Es können nicht M und M_1 gleichzeitig verschwinden, da sonst durch Addition der Gleichungen (6.) und (6a.) sich ergeben würde, dass f für alle Werthe y_1, y_2, y_3 identisch verschwindet. Es sei daher zunächst M von Null verschieden, und wir setzen

$$f = \varphi_0 y_3^n + \varphi_1 y_3^{n-1} + \cdots + \varphi_n, \tag{7.}$$

wo φ_λ eine homogene Function λ^{ten} Grades von y_1, y_2 bedeutet. Aus (6.) ergiebt sich

$$\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y_2} y_2 + \gamma \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y_1} y_1 = M \varphi_\lambda. \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n) \tag{7a.}$$

Setzen wir

$$\varphi_\lambda = \varepsilon_{\lambda 0} y_1^\lambda + \varepsilon_{\lambda 1} y_1^{\lambda-1} y_2 + \cdots + \varepsilon_{\lambda\lambda} y_2^\lambda, \tag{8.}$$

so folgt aus (7a.)

$$M \varepsilon_{\lambda k} = [k + \gamma(\lambda - k)] \varepsilon_{\lambda k}. \qquad (k = 0, 1, \ldots, \lambda) \tag{9.}$$

Demnach ist entweder $\gamma = 1$, oder es besteht φ_λ nur aus einem einzigen Gliede, nämlich

$$\varphi_\lambda = \varepsilon_\lambda y_1^{\lambda - k_\lambda} y_2^{k_\lambda}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n,\ \varphi_0 = 0) \tag{10.}$$

wo

$$k_\lambda = \frac{M - \lambda\gamma}{1-\gamma} = \frac{M}{1-\gamma} - \lambda \frac{\gamma}{1-\gamma} = \mu - \lambda\nu. \tag{10a.}$$

Es kann aber nicht $\gamma = 1$ sein, da sonst (6a.) ergeben würde, dass f eine zerlegbare Form sei, oder dass $\frac{\partial f}{\partial y_3}$, d. h.*) w_3 verschwinden würde, was der Voraussetzung widerspricht, dass y_1, y_2, y_3 ein Fundamentalsystem bilden.

Wir haben daher

474] $$f = \sum_1^n \varepsilon_\lambda y_1^{\lambda - k_\lambda} y_2^{k_\lambda} y_3^{n-\lambda}$$

oder

$$f = y_3^n y_2^\mu y_1^{-\mu} \sum_1^n \varepsilon_\lambda (y_1^{1+\nu} y_2^{-\nu} y_3^{-1})^\lambda. \tag{11.}$$

Die Gleichung (B.) erforderte daher

$$y_1^{1+\nu} y_2^{-\nu} y_3^{-1} = C, \tag{12.}$$

wo C eine Constante.

*) Acta math., S. 331, Gleichung (C.)[1].

1) Abh. XL, S. 308, Band II dieser Ausgabe. R. F.

Es kann nicht $f = \varphi_n$ sein, weil aus $\varphi_n = 0$ sich $\eta = \text{constans}$ ergeben würde. Es kann andererseits, da $\varphi_0 = 0$, nicht auch φ_n identisch verschwinden, demnach ist φ_n und wenigstens für noch einen Werth des Index λ φ_λ von Null verschieden. Aus (10a.) ergiebt sich daher, dass μ und ν folglich auch γ und M reale und rationale Zahlen sind.

Da die linke Seite von (12.) nach einem Umlaufe von z, wie leicht zu sehen, identisch in sich selbst übergeführt werden muss, so ist die Hessesche Determinante derselben

$$-(y_1^{1+\nu} y_2^{-\nu} y_3^{-1})^3 (y_1 y_2 y_3)^{-2},$$

also nach Gleichung (12.) die Function $y_1 y_2 y_3$ gleich der Wurzel einer rationalen Function. Es sei

$$y_1 y_2 y_3 = \psi, \tag{12a.}$$

wo ψ Wurzel einer rationalen Function.

Aus (12a.) ergiebt sich

$$u_1 + u_2 + u_3 = \frac{d \log \psi}{dz}. \tag{13.}$$

Aus den Gleichungen (5.) und (13.) folgt

$$u_2 = \frac{2-\gamma}{2\gamma-1} u_1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma-1} \frac{d \log \psi}{dz}. \tag{14.}$$

Die Function u_2 ist aus u_1 durch einen Umlauf U der Variablen z hervorgegangen. Da die Wiederholung des Umlaufes U nur eine endliche Anzahl verschiedener Zweige der algebraischen Function u_1 hervorbringen kann, so muss, da wegen der Irreductibilität der Gleichung (A.) u_1 nicht eine rationale Function ist, $\frac{2-\gamma}{2\gamma-1}$ eine ganzzahlige Wurzel der Einheit sein, d. h., da γ eine rationale Zahl,

$$\frac{2-\gamma}{2\gamma-1} = \pm 1. \tag{15.}$$

Da $\gamma = 1$ auszuschliessen ist, so müsste $\gamma = -1$ sein, demnach [475 Gleichung (14.) in

$$u_2 = -u_1 + \frac{2}{3} \frac{d \log \psi}{dz} \tag{14a.}$$

übergehen. Da u_1, u_2 beliebige Zweige der Function u_1 sind, so ergäbe sich ebenso für den Zweig u_3 der Function u_1

$$u_3 = -u_1 + \frac{2}{3}\frac{d\log\psi_1}{dz}, \tag{14b.}$$

wo ψ_1 Wurzel einer rationalen Function bedeutet. Aber da u_3 auch ein Zweig der Function u_2 ist, so müsste aus demselben Grunde

$$u_3 = -u_2 + \frac{2}{3}\frac{d\log\psi_2}{dz}, \tag{14c.}$$

wo ψ_2 Wurzel einer rationalen Function, sein. Aus den Gleichungen (14a.) bis (14c.) ergäbe sich aber, dass der Zweig u_3, also aus demselben Grunde alle Zweige der Function u_1, die logarithmischen Ableitungen von Wurzeln rationaler Functionen, und demnach die Integrale von (A.) Wurzeln rationaler Functionen wären, was ausgeschlossen ist.

Wenn es nur zwei Zweige der Function u_1 gäbe, so müsste

$$\frac{y_1'}{y_1} = a_0 + a_1\sqrt{R} \tag{16.}$$

sein, wo a_0, a_1, R rationale Functionen von z. Hieraus würde sich ergeben

$$\frac{y_1^{(2)}}{y_1} = b_0 + b_1\sqrt{R}, \tag{17.}$$

wo b_0, b_1 rationale Functionen. Aus (16.) und (17.) würde folgen, dass y_1 einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten genügte, was der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (A.) widerspricht.

Demnach kann Gleichung (6.) für einen von Null verschiedenen Werth von M nicht bestehen. Ebenso aber würden wir nachweisen, dass die Gleichung (6a.) für einen von Null verschiedenen Werth von M_1 auf einen Widerspruch führt. Da aber, wie oben gezeigt, M und M_1 nicht gleichzeitig verschwinden dürfen, so ergiebt sich, dass die Annahme, dass die Gleichung (2.) identisch für von einander unabhängige Werthe der Variablen z, η bestehe, mit den über die Gleichungen (A.) und (B.) gemachten Voraussetzungen
476] unverträglich ist. Die Gleichung (2.) setzt vielmehr die Variable η in Abhängigkeit von der Variablen z, und da diese Abhängigkeit eine algebraische ist, so folgt unter Berücksichtigung der Gleichung (β.) der Satz:

Wenn die Gleichung (A.) die Relation (B.) zulässt, und wenn ausserdem bekannt ist, dass die Zweige eines Integrals derselben, bis auf constante Factoren, von endlicher Anzahl sind, so ist die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar.

3.

Es sei

$$y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + \cdots + p_m y = 0 \tag{1.}$$

eine beliebige lineare, homogene Differentialgleichung, und es seien $a_1, a_2, \ldots, a_m$ gegebene constante Werthe. Ist S eine Substitution der zur Gleichung (1.) gehörigen Gruppe, und sind α_{ik} deren Elemente, so wollen wir von den Ausdrücken

$$a_k' = \alpha_{k1}a_1 + \alpha_{k2}a_2 + \cdots + \alpha_{km}a_m \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.}$$

sagen, sie seien durch Transformation aus $a_1, a_2, \ldots, a_m$ vermittelst der Substitution S entstanden. Nehmen wir an, dass die durch die Gesammtheit der Substitutionen der Gruppe entstandenen transformirten Werthsysteme, bis auf einen allen Elementen je eines Systems gemeinschaftlichen Factor, von endlicher Anzahl sind, nämlich übereinstimmend mit einem der Werthsysteme

$$(l_\lambda a_1^{(\lambda)}, l_\lambda a_2^{(\lambda)}, \ldots, l_\lambda a_m^{(\lambda)}). \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, r-1,\ a_k^{(0)} = a_k) \tag{3.}$$

Betrachten wir die Function

$$W = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + a_m w_m, \tag{4.}$$

wo $w_1, w_2, \ldots, w_m$ ein Fundamentalsystem von Integralen der zu (1.) adjungirten Differentialgleichung bilden.

Vollzieht z einen Umlauf, welcher der Substitution S entspricht, so verwandelt sich W in

$$W' = j\sum_1^m {}_\lambda\, a_\lambda(A_{\lambda 1}w_1 + A_{\lambda 2}w_2 + \cdots + A_{\lambda m}w_m), \tag{5.}$$

wo A_{kl} die Unterdeterminante erster Ordnung der Determinante $|\alpha_{kl}|$ bedeutet, welche zu α_{kl} gehört. Es ist übrigens

$$\mathrm{Det}\,|\alpha_{kl}| = j^{-1}. \tag{6.}$$

Unter den Systemen (3.) giebt es der Voraussetzung nach ein solches [477
$(l_\lambda a_1^{(\lambda)}, l_\lambda a_2^{(\lambda)}, \ldots, l_\lambda a_m^{(\lambda)})$, für welches

$$la_\varrho = l_\lambda[\alpha_{\varrho 1}a_1^{(\lambda)} + \alpha_{\varrho 2}a_2^{(\lambda)} + \cdots + \alpha_{\varrho m}a_m^{(\lambda)}] \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, m) \tag{7.}$$

nämlich dasjenige System, welches aus $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ durch die inverse Substitution von S hervorgegangen ist. — Substituiren wir (7.) in (5.), so folgt

$$W' = \mu[a_1^{(\lambda)} w_1 + a_2^{(\lambda)} w_2 + \cdots + a_m^{(\lambda)} w_m], \tag{8.}$$

wo μ von z unabhängig. Setzen wir allgemein

$$W_\lambda = a_1^{(\lambda)} w_1 + a_2^{(\lambda)} w_2 + \cdots + a_m^{(\lambda)} w_m, \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, r-1) \tag{4a.}$$

so ergiebt sich aus (8.), dass die Zweige der Function W, bis auf constante Factoren, mit $W_0, W_1, \ldots, W_{r-1}$ übereinstimmen. Wir erhalten also den Satz:

I. Ist $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ein System gegebener von z unabhängiger Grössen, und sind diejenigen Systeme, welche aus dem gegebenen durch Transformation vermittelst der Gesammtheit der zu einer homogenen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung gehörigen Gruppe entstehen, bis auf einen allen Elementen je eines Systems gemeinschaftlichen Factor, von endlicher Anzahl, so besitzt die zu der gegebenen adjungirte Differentialgleichung ein Integral, dessen Zweige, bis auf constante Factoren, von endlicher Anzahl sind.

Wenden wir dieses Theorem auf die Gleichung (A.) an unter der Voraussetzung, dass sie die Relation (B.) zulasse, und dass es eine von $(0, 0, 0)$ verschiedene Stelle der Riemannschen Fläche (B.) gebe, welche durch die Gesammtheit der Substitutionen der zu (A.) gehörigen Gruppe in eine nur **endliche** Anzahl von Stellen derselben Fläche transformirt wird, so ergiebt der Satz I., dass die zur Gleichung (A.) adjungirte Differentialgleichung ein Integral besitzt, dessen Zweige, bis auf constante Factoren, von endlicher Anzahl sind. Da nach Satz I., No. 1, zwischen w_1, w_2, w_3 eine homogene Relation stattfindet, so folgt aus dem Satze in No. 2, dass die adjungirte Differentialgleichung, folglich auch Gleichung (A.) algebraisch integrirbar ist. Wir erhalten also das Resultat:

II. Wenn die Gleichung (A.) die Relation (B.) zulässt, und es ist eine von $(0, 0, 0)$ verschiedene Stelle der Riemannschen Fläche (B.) vorhanden von der Beschaffenheit, dass sie durch die Ge-
478] sammtheit der Substitutionen der zur Gleichung (A.) gehörigen Gruppe nur in eine **endliche** Anzahl von Stellen derselben Fläche übergeführt wird, so ist Gleichung (A.) algebraisch integrirbar.

4.

Es sei a ein endlicher oder ein unendlich grosser Werth von z, in dessen Umgebung das Integral

$$J = \int \Omega dz$$

eine eindeutige Umkehrung nicht zulässt, und es sei $\eta = \alpha$, $\zeta = \beta$ eine Stelle der Riemannschen Fläche (B.), welche auf einem gewissen Wege der Variablen z für $z = a$ erreicht wird. Wenn durch alle möglichen Umläufe der Variablen z der Stelle (α, β) unzählig viele von einander verschiedene Stellen

$$(\alpha', \beta'), (\alpha'', \beta''), \ldots$$

derselben Fläche zugeordnet würden, so gäbe es unter diesen auch unzählig viele, für welche $K(\eta)$ weder unendlich noch Null würde, da $K(\eta)$ eine algebraische Function. In diesen Stellen würde sich aber z als Function von η verzweigen. Wir dürfen nun voraussetzen*), dass z eine einwerthige Function von (η, ζ) ist; eine solche Function kann sich aber nur in den Verzweigungspunkten der Fläche (B.), also nur in einer endlichen Anzahl von Stellen dieser Fläche verzweigen. Giebt es also Werthe $z = a$, in deren Umgebung J nicht eindeutig umkehrbar wäre, so könnte der Stelle (α, β) durch die Gesammtheit der Substitutionen der zur Gleichung (A.) gehörigen Gruppe nur eine endliche Anzahl von Stellen zugeordnet werden, und es wäre nach Satz II., No. 3 die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar.

Giebt es solche Werthe a nicht, alsdann ist**) z eine eindeutige Function von J, welche entweder rational oder einfach, oder endlich doppelt periodisch ist. Da z für ein gegebenes η nur eine endliche Anzahl von Werthen annimmt, so müsste in dem Falle, dass z eine rationale Function von J würde, das Integral

$$\mathrm{H} = \int \frac{d\eta}{K(\eta)}$$

eine algebraische Function von η, und demzufolge z eine algebraische Function von η sein. — Ist z eine einfach oder doppeltperiodische Function von

*) Acta math., S. 337, Satz VI[1]).

**) Briot et Bouquet im Journal de l'École Polytechnique, cah. 36, S. 217.

[1]) Abh. XL, S. 314, Band II dieser Ausgabe. R. F.

479] J, so müssen, damit z für ein gegebenes η nur eine endliche Anzahl von Werthen annehme, ganzzahlige Vielfache der Periodicitätsmoduln von H mit Periodicitätsmoduln von J übereinstimmen, und Stellen in der Fläche (B.), in welchen z unbestimmt würde, könnten nur unter denjenigen Werthen befindlich sein, für welche $K(\eta)$ verschwindet. Solche Stellen sind demnach in der Fläche (B.) nur in endlicher Anzahl vorhanden. Ist aber $\eta = \gamma$, $\zeta = \delta$ eine Stelle, wo z unbestimmt wird, so muss jede Stelle (γ', δ'), welche aus (γ, δ) durch Transformation vermittelst einer beliebigen Substitution der zur Gleichung (A.) gehörigen Gruppe hervorgegangen, eine solche sein, für welche z unbestimmt wird. Es müssen daher die durch Transformation vermittelst der Substitutionen der zur Gleichung (A.) gehörigen Gruppe aus (γ, δ) hervorgegangenen Stellen der Fläche (B.) nur in endlicher Anzahl vorhanden sein, woraus wieder nach Satz II., No. 3, die algebraische Integrirbarkeit der Gleichung (A.) folgen würde. — Sind überhaupt keine Werthe (γ, δ) vorhanden, für welche das Integral H unendlich wird, dann giebt es auch keine Stelle in der Fläche (B.), in welcher z unbestimmt wird, so dass z eine rationale Function von (η, ζ), also wiederum Gleichung (A.) algebraisch integrirbar ist.

Hiermit ist der Satz, dass für $n > 2$ die Gleichung (A.) algebraisch integrirbar ist, bewiesen.

In der folgenden Nummer wollen wir eine zweite, auf anderen Principien beruhende Methode angeben, um aus der Gleichung (α.) die algebraische Integrirbarkeit der Gleichung (A.) herzuleiten. Obgleich diese zweite Methode bei weitem schneller zum Ziele führt, so haben wir doch geglaubt, die in den Nummern 1 bis 4 entwickelte Methode nicht unterdrücken zu dürfen, da die Principien, auf welche sie sich stützt, auch weiterer Anwendungen fähig erscheinen.

5.

Wir wollen der Einfachheit wegen voraussetzen, dass in Gleichung (A.) $p = 0$ ist. Wenn dieses nicht stattfindet, so kann dasselbe durch die Substitution $y = e^{-\frac{1}{3}\int p\,dz} v$ erreicht werden, ohne dass hierdurch die Coefficienten der Relation zwischen dem Fundamentalsystem v_1, v_2, v_3, welches y_1, y_2, y_3 entspricht, von denen der Gleichung (B.) abweichend werden.

Wir haben alsdann

$$\Omega\Theta = 1. \tag{1.}$$

Bilden wir aus Gleichung (β.) unter Berücksichtigung von (α.) [480 $\frac{dy_1}{dz}, \frac{d^2y_1}{dz^2}, \frac{d^3y_1}{dz^3}$ und setzen diese Werthe sowie den Werth von y_1 aus (β.) in die Gleichung (A.), so erhalten wir

$$A_0 KD_\eta[KD_\eta(KD_\eta L)] + A_2 KD_\eta L + A_3 L = 0, \tag{2.}$$

wo

$$\left\{ \begin{aligned} A_0 &= \Omega^2 = \frac{1}{\Theta^2}, \\ A_2 &= 2\frac{\Theta^{(2)}}{\Theta} - \frac{\Theta'^2}{\Theta^2} + q, \\ A_3 &= \Theta^{(3)} + q\Theta' + r\Theta, \end{aligned} \right. \tag{3.}$$

wenn wir die Ableitungen von Θ nach z mit oberen Indices, und die Ableitungen von K und L nach η mit dem Zeichen D_η angeben.

Es können zwei Fälle eintreten:

I. Entweder wird die Gleichung (2.) **nicht identisch für die unabhängigen Variablen** z, η erfüllt; dann ist durch diese Gleichung eine Abhängigkeit zwischen diesen Variablen gegeben, und da diese Abhängigkeit eine algebraische ist, so folgt, dass die Gleichung (A.) **algebraisch** integrirbar ist.

II. Es könnte aber auch die Gleichung (2.) für die unabhängigen Variablen z, η identisch erfüllt sein. Dann sind aber auch diejenigen Gleichungen, welche aus (2.) durch Differentiation nach einer dieser Variablen erhalten werden, in demselben Sinne identisch erfüllt.

Dividiren wir demnach die Gleichung (2.) durch A_0 und differentiiren alsdann zweimal nach z, so wird identisch für z und η

$$\left\{ \begin{aligned} D_z\left(\frac{A_2}{A_0}\right) KD_\eta L + D_z\left(\frac{A_3}{A_0}\right) L &= 0, \\ D_z^2\left(\frac{A_2}{A_0}\right) KD_\eta L + D_z^2\left(\frac{A_3}{A_0}\right) L &= 0; \end{aligned} \right. \tag{4.}$$

demnach ist entweder

$$\frac{A_2}{A_0} = \gamma_1, \quad \frac{A_3}{A_0} = \gamma_2, \tag{5.}$$

wo γ_1, γ_2 von z unabhängig, oder es ist die Determinante der Functionen

$D_z\left(\frac{A_2}{A_0}\right)$, $D_z\left(\frac{A_3}{A_0}\right)$ gleich Null, d. h.*)

$$D_z\left(\frac{A_3}{A_0}\right) = \lambda D_z\left(\frac{A_2}{A_0}\right), \tag{6.}$$

481] wo λ von z unabhängig, und gemäss der ersten der Gleichungen (4.)

$$KD_{\eta} L = -\lambda L. \tag{6a.}$$

Multipliciren wir die Gleichung (6a.) mit Ω und berücksichtigen die Gleichung (α.), so folgt

$$D_z L = -\frac{\lambda L}{\Theta}, \tag{7.}$$

woraus sich ergiebt

$$L = e^{-\lambda \int \frac{dz}{\Theta}} \tag{8.}$$

und nach Gleichung (β.)

$$y_1 = \Theta e^{-\lambda \int \frac{dz}{\Theta}}. \tag{8a.}$$

Im Falle, dass die Gleichungen (5.) erfüllt sind, folgt aus (2.)

$$KD_{\eta}[KD_{\eta}(KD_{\eta} L)] + \gamma_1 KD_{\eta} L + \gamma_2 L = 0. \tag{9.}$$

Nach Gleichung (α.) und nach Gleichung (1.) ist (9.) gleichbedeutend mit

$$\Theta D_z[\Theta D_z(\Theta D_z L)] + \gamma_1 \Theta D_z L + \gamma_2 L = 0. \tag{9a.}$$

Dieselbe wird befriedigt durch

$$L = e^{\lambda \int \frac{dz}{\Theta}}, \tag{10.}$$

wo λ eine Constante ist, welche durch die Gleichung

$$\lambda^3 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 = 0 \tag{11.}$$

bestimmt wird.

Wenn wir in (9a.)

$$L = \frac{y_1}{\Theta}$$

substituiren, so erhalten wir für y_1

*) BORCHARDTS Journal, Bd. 66, S. 128[1]).

1) Abh. VI, S. 167, Band I dieser Ausgabe. R. F.

$$\begin{aligned} \frac{d^3 y_1}{dz^3} &+ \left[-2\frac{\Theta^{(2)}}{\Theta} + \frac{\Theta'^2}{\Theta^2} + \frac{\gamma_1}{\Theta^2}\right]\frac{dy_1}{dz} \\ &+ \left\{-\frac{\Theta^{(3)}}{\Theta} + 2\frac{\Theta'}{\Theta}\frac{\Theta^{(2)}}{\Theta} - \frac{\Theta'^3}{\Theta^3} - \gamma_1\frac{\Theta'}{\Theta^3} + \frac{\gamma_2}{\Theta^3}\right\} y_1 = 0. \end{aligned} \tag{12.}$$

Aus den Gleichungen (5.) folgt aber:

$$-2\frac{\Theta^{(2)}}{\Theta} + \frac{\Theta'^2}{\Theta^2} + \frac{\gamma_1}{\Theta^2} = q, \tag{13.}$$

$$-\frac{\Theta^{(3)}}{\Theta} + 2\frac{\Theta'}{\Theta}\frac{\Theta^{(2)}}{\Theta} - \frac{\Theta'^3}{\Theta^3} - \gamma_1\frac{\Theta'}{\Theta^3} + \frac{\gamma_2}{\Theta^3} = r. \tag{14.}$$

Demnach ist Gleichung (12.) gleichbedeutend mit Gleichung (A.) für $y = y_1$, also wird die Gleichung (A.) befriedigt durch

$$y_1 = \Theta e^{\lambda \int \frac{dz}{\Theta}}, \tag{15.}$$ [482

wo λ eine Wurzel der Gleichung (11.).

Aus den Gleichungen (8a.) und (15.) ergeben sich Integrale der Gleichung (A.), deren Zweige bis auf constante Factoren, von endlicher Anzahl sind, und wir könnten hieraus unmittelbar nach dem Satze in No. 2 folgern, dass Gleichung (A.) algebraisch integrirbar sei. Wir können aber dieses hier auch direct nachweisen.

Zunächst ergiebt sich für den Fall der Gleichung (6.) aus dieser Gleichung

$$\frac{\Theta^{(3)}}{\Theta} + q\frac{\Theta'}{\Theta} + r = \frac{\lambda}{\Theta}\left[2\frac{\Theta^{(2)}}{\Theta} - \frac{\Theta'^2}{\Theta^2} + q\right] + \frac{\mu}{\Theta^3}, \tag{16.}$$

wo μ eine neue Constante. Aus derselben ziehen wir den Schluss, dass Θ eine rationale Function, und dass daher die Gleichung (8a.) ein Integral der Gleichung (A.) liefert, dessen logarithmische Ableitung rational, was mit der vorausgesetzten Irreductibilität der Gleichung (A.) unverträglich ist.

Im Falle der Gleichungen (5.) ergeben die Gleichungen (13.), (14.), wenn γ_1, γ_2 beide von Null verschieden sind, dass Θ eine rationale Function von z, und die Gleichung (15.) liefert wiederum ein Integral der Gleichung (A.), dessen logarithmische Ableitung rational.

Die Grösse γ_2 kann nicht verschwinden, da sonst die Gleichung (A.) durch Θ, d. h. durch die Wurzel einer rationalen Function befriedigt würde. Es könnte aber $\gamma_1 = 0$ sein. Alsdann hat die Gleichung (A.) die Integrale

$$(17.)\qquad y_1 = \Theta e^{\lambda\int\frac{dz}{\Theta}},\quad y_2 = \Theta e^{\lambda\varepsilon\int\frac{dz}{\Theta}},\quad y_3 = \Theta e^{\lambda\varepsilon^2\int\frac{dz}{\Theta}},$$

wo λ der Gleichung

$$(11a.)\qquad \lambda^3+\gamma_2 = 0$$

genügt, und wo ε eine primitive dritte Wurzel der Einheit bedeutet. Die drei Integrale y_1, y_2, y_3 bilden ein Fundamentalsystem.

Aus der zweiten der Gleichungen (5.) oder aus

$$A_3 = \gamma_2 A_0$$

folgt

$$(18.)\qquad \frac{\Theta^{(3)}}{\Theta}+q\frac{\Theta'}{\Theta}+r = \frac{\gamma_2}{\Theta^3}.$$

Demnach ist Θ^3 eine rationale Function, woraus sich ergiebt, dass die Integrale y_1, y_2, y_3 für alle Umläufe der Variablen z, bis auf constante Factoren, sich nur unter einander vertauschen. In der That ist auch

$$(19.)\qquad y_1 y_2 y_3 = \Theta^3.$$

483] Wir sind also wieder auf die Gleichung (12a.) No. 2 gekommen, wenn wir $\psi = \Theta^3$ setzen. Sei

$$(20.)\qquad u_1 = \frac{\lambda}{\Theta}+\frac{\Theta'}{\Theta},\quad u_2 = \frac{\lambda\varepsilon}{\Theta}+\frac{\Theta'}{\Theta},$$

so ist nach Gleichung (14a.) No. 2

$$(21.)\qquad u_2+u_1 = \frac{d\log\Theta^3}{dz}.$$

Hieraus folgt

$$(22.)\qquad \lambda\frac{(1+\varepsilon)}{\Theta} = 0,$$

also $\lambda = 0$, d. h. nach Gleichung (11a.), $\gamma_2 = 0$, was nicht möglich ist.

Demnach ist der oben mit II. bezeichnete Fall, dass die Gleichung (2.) identisch für die unabhängigen Variablen z, η erfüllt sei, mit den über Gleichung (A.) gemachten Voraussetzungen unverträglich. Es ist demnach nur der mit I. bezeichnete Fall zulässig, d. h. die Gleichung (A.) ist algebraisch integrirbar.

ANMERKUNG.

Änderungen gegen das Original:

S. 89, Zeile 10 wurde »und sind« vor $\alpha_{i\lambda}$ hinzugefügt,
in Gl. (3.) wurde l_λ statt l_k gesetzt,
„ 10 v. u. »bilden« statt »ist«,
„ 90, „ 12 wurde »entstehen« hinzugefügt,
„ 92, „ 17 wurde »ist« am Ende hinzugefügt,
„ 94, „ 1 wurde »gleich Null« vor d. h. hinzugefügt. R. F.

LVII.

BEMERKUNG ZU VORSTEHENDER ABHANDLUNG DES HERRN HEFFTER ZUR THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN[1]).

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 106, 1890, S. 283—284.)

Es sei $g_0(x)$ eine ganze rationale Function des m^{ten} Grades, $g_\varkappa(x)$ eine [283
solche, deren Grad nicht grösser als $m-\varkappa$, und es seien die Integrale der Gleichung

$$(\alpha.)\qquad g_0(x)\,y^{(m)} + g_1(x)\,y^{(m-1)} + \cdots + g_m(x)\,y = 0$$

regulär, so beweist Herr Heffter (S. 275) den Satz, dass die Gleichung ($\alpha.$) durch eine ganze rationale Function vom Grade r befriedigt wird, wenn die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung die negative ganzzahlige Wurzel $-r$ besitzt, und wenn zu derselben wenigstens ein von Logarithmen freies Glied gehört.

Wir wollen voraussetzen, dass die von x unabhängige Grösse g_m von Null verschieden ist. Differentiiren wir die Gleichung ($\alpha.$) λ-mal, so erhalten wir

$$(\beta.)\qquad g_0(x)\,y^{(m+\lambda)} + h_{\lambda 1}(x)\,y^{(m+\lambda-1)} + \cdots + h_{\lambda m}(x)\,y^{(\lambda)} = 0,$$

wo $h_{\lambda\varkappa}(x)$ eine ganze rationale Function höchstens vom Grade $m-\varkappa$ bedeutet; insbesondere ist

$$(\gamma.)\qquad h_{\lambda m}(x) = g_m + \lambda_1 g'_{m-1} + \lambda_2 g^{(2)}_{m-2} + \cdots + \lambda_m g^{(m)}_0,$$

---

1) L. Heffter, Über Recursionsformeln der Integrale linearer homogener Differentialgleichungen; Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 106, S. 269—282. R. F.

wo $\lambda_\varkappa$ der $\varkappa^{\text{te}}$ Binomialcoefficient von λ und $g^{(\varkappa)} = \frac{d^\varkappa g}{dx^\varkappa}$, eine von x unabhängige Grösse.

Der Ausdruck $h_{\lambda m}$ wird übereinstimmend mit der linken Seite der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, wenn wir $\lambda = -s$ setzen und s als Unbekannte dieser Gleichung betrachten. Daher ist $h_{\lambda m} = 0$ für $\lambda = +r$, wenn diese Gleichung die negative ganzzahlige Wurzel $s = -r$ besitzt, und umgekehrt, wenn $h_{\lambda m} = 0$ für $\lambda = r$, so hat die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Gleichung die Wurzel $-r$.

284] Ist daher $-r$ diejenige negative ganzzahlige Wurzel dieser Gleichung, welche den absolut kleinsten Werth besitzt, so ist $h_{\lambda m} = 0$ für $\lambda = r$, aber nicht Null für $\lambda < r$. Dann aber ist die Gleichung (β.) für $\lambda = r$ diejenige Gleichung, welcher die r^{ten} Ableitungen der Integrale der Gleichung (α.), und nur diese genügen*). Da nun, wenn $h_{\lambda m} = 0$, die Gleichung (β.) für $\lambda = r$ durch $y^{(r)} = C$ befriedigt wird, wo C eine von Null verschiedene Constante, so folgt, dass der Gleichung (α.) durch eine ganze rationale Function des Grades r genügt werden kann. Wir erhalten also den Satz:

Besitzt die zu $x = \infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung ganzzahlige negative Wurzeln, und ist $-r$ diejenige unter ihnen, deren absoluter Betrag r den kleinsten Werth hat, so hat die Gleichung (α.) eine ganze rationale Function r^{ten} Grades als Integral.

Dieser Satz enthält eine Ergänzung des erwähnten Theorems des Herrn Heffter.

Für die Differentialgleichung der Gaussschen Reihe

$$(\alpha'.)\qquad (x^2-x)\,y^{(2)} - [\gamma - (\alpha+\beta+1)\,x]\,y' + \alpha\beta y = 0$$

geht die Gleichung (β.) über in

$$(\beta'.)\quad (x^2-x)\,y^{(\lambda+2)} - [\gamma+\lambda-(\alpha+\beta+2\lambda+1)\,x]\,y^{(\lambda+1)} + (\lambda+\alpha)(\lambda+\beta)\,y^{(\lambda)} = 0.$$

Die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Gleichung, welche für Gleichung (α'.) gebildet ist, lauten in diesem Falle α, β. Wenn nun α

*) Siehe dieses Journal, Bd. 68, S. 384[1]).

[1]) Abh. VII, S. 239, Band I dieser Ausgabe. R. F.

eine negative ganze Zahl, β entweder nicht eine negative ganze Zahl oder doch nur eine solche, deren absoluter Betrag nicht kleiner als der absolute Betrag von α, so ist für $\lambda < -\alpha$ der Coefficient von $y^{(\lambda)}$ in Gleichung (β'.) von Null verschieden; er verschwindet erst für $\lambda = -\alpha$, so dass Gleichung (α'.) durch eine ganze rationale Function des Grades $-\alpha$ befriedigt wird. Ist auch β eine negative ganze Zahl, aber $\beta = \alpha - \varkappa$, wo $\varkappa$ eine positive ganze Zahl, so genügt der Gleichung (β'.), d. h. jetzt der Gleichung

$$(\beta''.)\qquad (x^2-x)\,y^{(-\alpha+2)} - [\gamma-\alpha-(\beta-\alpha+1)\,x]\,y^{(-\alpha+1)} = 0$$

dann und nur dann eine ganze rationale Function, wenn γ gleich einer der Zahlen $\beta+1, \beta+2, \ldots, \beta+\varkappa$. Der Grad derselben ist $\varkappa-1$, woraus sich dann ergiebt, dass die Gleichung (α'.) durch eine ganze rationale Function des Grades $-\alpha+\varkappa = -\beta$ befriedigt wird. Diese Resultate stimmen mit denen des Herrn Heffter in No. IV seiner Arbeit überein.

ANMERKUNG.

Zu dem auf S. 98 ausgesprochenen Satze, der als »eine Ergänzung des erwähnten Theorems des Herrn Heffter« bezeichnet wird, ist zu bemerken, dass diese Ergänzung schon von Herrn Heffter selbst in der citirten Arbeit (S. 276, Satz II) gegeben worden ist.

R. F.

LVIII.

ÜBER EINE ABBILDUNG DURCH EINE RATIONALE FUNCTION.

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 108, 1891, S. 181–192.)

Im 75. Bande S. 177 und im 106. Bande S. 1 dieses Journals[1]) be- [181
trachtete ich eine Function

$$(\alpha.)\qquad z = F(w) = \frac{f(w)}{w\,g(w)},$$

wo $f(w), g(w)$ ganze rationale Functionen, und $f(0), g(0)$ von Null verschieden sind. Es werden in der w-Ebene die um den Nullpunkt beschriebenen concentrischen Kreise betrachtet, welche die Eigenschaft besitzen, dass jedem einem Punkte w des Kreisinnern zugehörigen Werthe z, innerhalb desselben Gebietes, nur ein einziger Werth w entspricht. Unter diesen Kreisen wird derjenige mit dem grössten Radius der Grenzkreis genannt. An den bezeichneten Stellen habe ich den folgenden Satz bewiesen: Der Radius des Grenzkreises wird durch den Modul derjenigen Wurzel der Gleichung

$$(\beta.)\qquad F'(w) = 0$$

bestimmt, wo $F'(w)$ die Ableitung von $F(w)$ bedeutet, welche unter allen Wurzeln derselben den kleinsten Modul besitzt, oder falls

$$(\gamma.)\qquad \psi(w, w_1) = \frac{F(w_1) - F(w)}{w_1 - w} = 0$$

und

$$(\delta.)\qquad w F'(w) + w_1 F'(w_1) = 0$$

Lösungen (w, w_1) besitzen, für welche die Moduln von w, w_1 einander gleich

[1]) Abh. XIV, S. 361 ff., Band I dieser Ausgabe und Abh. LV, S. 75 ff. dieses Bandes. R. F.

sind, und falls zu gleicher Zeit der kleinste dieser Moduln kleiner als die Moduln der Wurzeln der Gleichung (β.) ist, so giebt derselbe den Radius des Grenzkreises an. — Dieser Satz lässt sich kürzer folgendermassen ausdrücken: Setzen wir

$$(\varepsilon.)\qquad P(w, w_1) = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial w}\, w}{\dfrac{\partial\psi}{\partial w_1}\, w_1}$$

182] und suchen unter den gemeinschaftlichen Lösungen der beiden Gleichungen (γ.) und

$$(\zeta.)\qquad P(w, w_1) = 1$$

diejenigen aus, für welche die Moduln von w und w_1 einander gleich werden, so bestimmt der kleinste unter diesen Moduln den Radius des Grenzkreises. —

In einem Aufsatze*) hat Herr NEKRASSOFF in Moskau sich bemüht, nachzuweisen, dass der eben erwähnte Satz nicht richtig sei. Der Verfasser dieses Aufsatzes zeigt besonders durch den Schluss der No. 3 desselben, dass er den in diesem Journal, Bd. 106, S. 2—3[1]) von mir gegebenen Beweis nicht verstanden hat. Es erscheint daher nicht überflüssig, im Folgenden durch eine Erläuterung meine dortigen Schlüsse dem Verständnisse näher zu rücken.

Bei dieser Gelegenheit erlaube ich mir, hier einen Beweis desselben Satzes zu geben, welcher auf anderen Principien begründet ist, und an und für sich nicht ohne Interesse zu sein scheint.

Für die Zwecke meiner Untersuchungen in der Arbeit dieses Journals, Bd. 75, Abth. I, No. 5—10[2]) möge im Folgenden noch angegeben werden, wie auch in dem Falle, dass der Radius des Grenzkreises durch Vermittelung der Gleichung (δ.) zu bestimmen ist, die Grösse desselben den dortigen Anforderungen gemäss eingerichtet werden kann.

I.

Im Anschlusse an die Bezeichnungen meiner oben genannten Arbeiten seien $w = w''$, $w_1 = w'$ zwei auf dem Grenzkreise K einander entsprechende

*) Mathematische Annalen, Bd. 38, S. 82.

1) Abh. LV, S. 76—78 dieses Bandes. R. F.
2) Abh. XIV, S. 370—378, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Punkte. Bewegt sich w auf der Peripherie von K, so möge w_1 die Curven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots$ durchlaufen. Geht w längs K durch den Punkt $w = w''$ hindurch, so wird w_1 längs einer der Curven $\mathfrak{C}$ durch den Punkt $w_1 = w'$ hindurchgehen, welche K daselbst berührt. Es möge diese Curve $\mathfrak{C}_1$ sein. — Es handelt sich nämlich (siehe Bd. 75, S. 181[1])) um den Fall, dass $P(w'', w')$ real und endlich ist, in welchem Falle $\frac{dr_1}{d\varphi} = 0$ (siehe daselbst Gleichung (2.), S. 180[2])) und $P(w'', w') + \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = 0$, woraus sich ergiebt, dass die Tangente [183 der Curve $\mathfrak{C}_1$ in w' mit dem Radiusvector einen rechten Winkel bildet. Wegen der Symmetrie der Gleichung (γ.) in Bezug auf w und w_1 muss, wenn w auf der Peripherie von K sich bewegend durch $w = w'$ hindurchgeht, w_1 längs einer der Curven $\mathfrak{C}$ durch $w_1 = w''$ hindurchgehen, welche K daselbst berührt. Dieses möge die Curve $\mathfrak{C}_2$ sein. Es kann selbstverständlich $\mathfrak{C}_2$ mit $\mathfrak{C}_1$ übereinstimmen. — Beschreiben wir um $w = w''$ einen Kreis $\mathfrak{K}$ von hinlänglicher Kleinheit, so wird diejenige Wurzel w_1 der Gleichung (γ.), welche für $w = w''$ den Werth w' annimmt, um den Punkt $w_1 = w'$ herum eine geschlossene Fläche $\mathfrak{K}_1$ erfüllen, von der Art, dass die Punkte von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}_1$ sich gegenseitig eindeutig entsprechen, wenn wir voraussetzen, dass $F'(w')$ und $F'(w'')$ von Null verschieden sind. Bezeichnen wir die Bogen der Curven $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$, welche in $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_1$ hineinfallen und respective w', w'' enthalten, mit B_1, B_2, so werden demnach von den Punkten der Fläche $\mathfrak{K}$, die ausserhalb K sich befinden, diejenigen, welche Punkten von $\mathfrak{K}_1$ innerhalb K entsprechen, sämmtlich auf der e i n e n Seite β_2 von B_2 liegen, während die übrigen auf der anderen Seite β_2' sich befinden. Ebenso werden von den Punkten der Fläche $\mathfrak{K}_1$, die ausserhalb K sich befinden, diejenigen, welche Punkten von $\mathfrak{K}$ innerhalb K entsprechen, sämmtlich auf der e i n e n Seite β_1 von B_1 liegen, während die übrigen auf der anderen Seite β_1' von B_1 sich befinden. Die beiden Seiten β_2 und β_2' unterscheiden sich dadurch, dass man in der einen nach allen möglichen Richtungen dem w'' unendlich benachbarte Punkte angeben kann, während die dem w'' unendlich benachbarten Punkte der anderen Seite von B_2 auf der im Punkte w'' an die Curve $\mathfrak{C}_2$ und den Kreis K gelegten Tangente sich befinden müssen. In gleicher Weise unterscheiden sich die beiden Seiten β_1 und β_1' von B_1, indem nämlich auf der einen Seite nach allen mög-

1) S. 365, Band I dieser Ausgabe. R. F.
2) Ebenda S. 365. R. F.

lichen Richtungen, auf der anderen nur in der Richtung der Tangente an $\mathfrak{C}_1$ und K, dem w' unendlich benachbarte Punkte gefunden werden können. Da von den Punkten w von β_2 nach allen möglichen Richtungen zu w'' unendlich benachbarte gehören müssen, welche Punkten w_1 innerhalb $\mathfrak{K}_1$ und K entsprechen, so sind es die Punkte w auf β_2', zu welchen nur in der Richtung der Tangente von K dem w'' unendlich benachbarte Punkte gehören, die ihre entsprechenden innerhalb $\mathfrak{K}_1$ und ausserhalb K besitzen. Aus demselben Grunde haben auch die Punkte w_1 auf β_1' nur in der Richtung der Tangente, zu w_1 unendlich benachbarte Punkte, welche innerhalb $\mathfrak{K}$ und ausserhalb K
184] entsprechende Punkte w besitzen. Ist daher R der Radius des Grenzkreises K, $r = R + dr$ der Radius des unendlich benachbarten grösseren Kreises K', und sind $w = \overline{w}$, $w_1 = \overline{w}_1$ zusammengehörige auf K' gelegene Punkte, welche respective $w = w''$, $w_1 = w'$ unendlich benachbart sind, so muss $\overline{w}$ auf der Seite β_2', $\overline{w}_1$ auf der Seite β_1' sich befinden, d. h. es müssen die Punkte $\overline{w}$ und $\overline{w}_1$ der Peripherie K' respective auf den Tangenten in w'' und w' der Peripherie K gelegen sein. Hieraus folgt die Gleichung (4.) No. 1 der oben citirten Arbeit in Bd. 106[1])

$$d\varphi_1 = \pm d\varphi. \tag{4.}$$

Da

$$P(w, w_1) = -\frac{d\log w_1}{d\log w}$$

für alle Richtungen von dw und die entsprechenden dw_1 einen unabänderlichen Werth hat, wenn $F'(w)$ und $F'(w_1)$ weder Null noch Unendlich werden, so ergiebt die Gleichung

$$\frac{d\log w_1}{d\log w} = \frac{\partial r_1}{\partial r} + Ri\frac{\partial\varphi_1}{\partial r},$$

dass die reale endliche Grösse $P(w, w_1)$ in $w = w''$ positiv ist. Es ist nämlich $\frac{\partial r_1}{\partial r}$ negativ, wie es der Begriff des Grenzkreises erfordert. Die Gleichung

$$\frac{d\log w_1}{d\log w} = -\frac{i}{R}\frac{\partial r_1}{\partial\varphi} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}$$

zeigt alsdann, dass $\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}$ für $w = w''$ negativ ist. Da für $\frac{\partial r_1}{\partial\varphi} = 0$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi},$$

1) Abh. LV, S. 77 dieses Bandes. R. F.

so folgt aus Gleichung (4.)

$$\frac{d\varphi_1}{d\varphi} = -1.$$

In meiner Arbeit Bd. 75, S. 181—182[1]) ist nachgewiesen, dass für $r > R$ bis zu einer gewissen Grenze ein Continuum von Kreisen K_r existirt, auf deren Peripherien zusammengehörige Werthe w, w_1 liegen, wenn nicht eine der mit K zusammengehörigen Curven $\mathfrak{C}$ in ihrer ganzen Ausdehnung auf K fällt. Da von diesem Satz auch in Bd. 106[2]) Gebrauch gemacht ist, so möge derselbe hier noch mit einigen Worten erläutert werden. Aus der gemachten Voraussetzung ergiebt sich, dass erst, wenn $r - R$ einen endlichen Betrag erreicht hat, eine der mit K_r zusammengehörigen Curven $\mathfrak{C}_r$ ganz innerhalb K_r [185
befindlich sein kann. Es können aber auch nicht sämmtliche Curven $\mathfrak{C}_r$ ausserhalb K_r verlaufen. Denn wenn w von w'' ausgehend die Peripherie K_r in $w = \overline{\overline{w}}$ trifft, so wird w_1 von w' ausgehend in einem Punkte $w_1 = \overline{\overline{w}}_1$ anlangen, der entweder auf der Peripherie K_r oder ausserhalb oder innerhalb derselben gelegen ist. Liegt $\overline{\overline{w}}_1$ im Innern, so entspricht demnach einem Punkte $\overline{\overline{w}}$ der Peripherie K_r ein innerer Punkt $\overline{\overline{w}}_1$. Liegt $\overline{\overline{w}}_1$ im Äusseren von K_r, so hat w_1 die Peripherie K_r bereits in einem Punkte $w_1 = \mathfrak{w}_1$ überschritten, während w noch in einem Punkte $w = \mathfrak{w}$ des Innern sich befand. Der Symmetrie der Gleichung (γ.) wegen würde also in diesen beiden Fällen folgen, dass nicht sämmtliche Curven $\mathfrak{C}_r$ ausserhalb K_r verlaufen können. Es muss demnach die Peripherie K_r innerhalb des genannten Bereiches von r unter allen Umständen von einer der mit derselben zusammengehörigen Curven $\mathfrak{C}_r$ getroffen werden.

II.

Wir gehen nunmehr dazu über, einen einfacheren Beweis des in der Einleitung bezeichneten Satzes zu geben, welcher zugleich eine tiefere Einsicht in die algebraische Natur des hier behandelten Problems gewährt.

Wir setzen in der Gleichung

$$\psi(w, w_1) = 0, \tag{1.}$$

$$w = re^{\varphi i},\quad w_1 = r_1 e^{\varphi_1 i},$$

1) Abh. XIV, S. 365—367, Band I dieser Ausgabe. R. F.

2) Abh. LV, S. 75 ff. dieses Bandes. R. F.

wo r, r_1 die Moduln, φ, φ_1 die Argumente von w, w_1 bedeuten. Auf der Peripherie jedes mit dem Radius r um den Nullpunkt beschriebenen Kreises K_r suchen wir diejenigen Stellen auf, für welche

$$\frac{dr_1}{d\varphi} = 0. \tag{2.}$$

Aus (1.) ergiebt sich, wenn r constant und φ veränderlich angenommen wird, in der Bezeichnung der Gleichung (ε.),

$$P(w, w_1) - \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{d\varphi}i + \frac{d\varphi_1}{d\varphi} = 0. \tag{3.}$$

Es giebt nur eine endliche Anzahl von Kreisen K_r, auf deren Peripherie $P(w, w_1)$ unendlich wird. Demnach folgt aus Gleichung (3.), dass $\frac{dr_1}{d\varphi}$ längs der Peripherie K_r im Allgemeinen eine stetige Function von φ ist, und da 186] r_1 längs K_r Maximal- und Minimalwerthe annimmt, so folgt, dass im Allgemeinen auf jedem Kreise K_r Stellen vorhanden sind, welchen Wurzeln der Gleichung (2.) zugehören. Wir bezeichnen diese Stellen mit $m_r, m'_r, m''_r, \ldots$. Die Gleichung (3.) ergiebt, dass in allen diesen Stellen $P(w, w_1)$ reale Werthe erhält. Aus derselben Gleichung folgt umgekehrt, dass, wenn $P(w, w_1)$ in einem Punkte der Peripherie K_r real und endlich ist, dieser Punkt zu den Stellen $m_r, m'_r, m''_r, \ldots$ gehört.

Bezeichnen wir daher mit $\psi_1(w, w_1)$ diejenige Function von w, w_1, welche aus $\psi(w, w_1)$ hervorgeht, wenn die Coefficienten der letzteren durch ihre conjugirten Werthe ersetzt werden, und mit w', w'_1 die conjugirten Werthe resp. von w und w_1, so folgt aus den eben gemachten Schlüssen, dass die Werthe von r_1, φ_1, φ, welche den Stellen $m_r, m'_r, m''_r, \ldots$ entsprechen, durch die Gleichung (1.) und die Gleichungen

$$\psi_1(w', w'_1) = 0 \tag{1a.}$$

und

$$P(w, w_1) = P_1(w', w'_1) \tag{4.}$$

bestimmt werden, wenn wir unter $P_1(w, w_1)$ diejenige Function verstehen, welche aus $P(w, w_1)$ dadurch hervorgeht, dass die Coefficienten der letzteren durch ihre conjugirten Werthe ersetzt werden. Es ergeben sich hiernach $r_1, e^{\varphi_1 i}, e^{\varphi i}$ als algebraische Functionen von r. Hierdurch wird auch $P(w, w_1)$

eine bestimmte algebraische Function von r. Eliminiren wir zwischen den Gleichungen (1.), (1a.) und (4.) $e^{\varphi i}, e^{\varphi_1 i}$, so erhalten wir zwischen r, r_1 die algebraische Gleichung

$$G(r, r_1) = 0. \tag{5.}$$

Wenn wir für jeden Kreis K_{r_1} mit dem Radius r_1 diejenigen Stellen aufsuchen, für welche $\frac{dr}{d\varphi_1} = 0$, so wird aus demselben Grunde

$$\frac{\frac{\partial\psi}{\partial w_1} w_1}{\frac{\partial\psi}{\partial w} w}$$

daselbst real; das heisst aber nichts anderes, als dass $P(w, w_1)$ real wird. Es werden also die Werthe von $r, e^{\varphi i}, e^{\varphi_1 i}$, welche den Stellen auf K_{r_1} entsprechen, wo $\frac{dr}{d\varphi_1} = 0$ wird, aus denselben Gleichungen (1.), (1a.) und (4.) zu bestimmen sein. Das Eliminationsresultat von $e^{\varphi i}, e^{\varphi_1 i}$ aus diesen Gleichungen ist also wiederum die Gleichung (5.). Es haben aber r und r_1 jetzt ihre Rollen vertauscht; hieraus folgt:

Die Gleichung (5.) ist in Bezug auf r und r_1 symmetrisch.

III. [187

Die auf den verschiedenen Kreisen K_r gelegenen Punkte $m_r, m'_r, m''_r, \ldots$ bilden ein System von Curven, welches wir mit Γ bezeichnen wollen. Schreiten wir längs einer dieser Curven fort, so folgt aus der Gleichung

$$P(w, w_1)\left(\frac{1}{r} + i\frac{d\varphi}{dr}\right) + \frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dr} + i\frac{d\varphi_1}{dr} = 0 \tag{1.}$$

(welche durch Differentiation aus Gleichung (1.) voriger Nummer hervorgeht), weil $P(w, w_1)$ real ist, dass

$$P(w, w_1) = -\frac{r}{r_1}\frac{dr_1}{dr}. \tag{2.}$$

Hierbei ist der Werth von $\frac{dr_1}{dr}$ aus der Gleichung

$$\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{\partial G}{\partial r_1}\frac{dr_1}{dr} = 0 \tag{3.}$$

zu bestimmen.

Es folgt hieraus zunächst, dass $G(r, r_1)$ nicht durch eine Potenz von $r_1 - r$ theilbar sein darf.

Ist nämlich $w = p_r$ ein solcher Punkt der Peripherie K_r des Kreiscontinuums, von welchem in No. I die Rede war, zu dem ein auf derselben Peripherie gelegener Punkt $w_1 = q_r$ gehört, so würde die Voraussetzung, dass $G(r, r_1)$ durch eine Potenz von $r - r_1$ theilbar sei, zur Folge haben, dass die stetige Reihe der Punkte p_r eine Curve A bildete, welche zu den Curven des Systems Γ gehörte und für welche $\frac{dr_1}{dr} = 1$ wäre. Nach Gleichung (2.) müsste dann $P(w, w_1)$ für alle Werthe w der Curve A, also nach einem bekannten Satze überhaupt in der ganzen w-Ebene gleich der negativen Einheit sein. Es wäre also

$$\frac{\partial \psi}{\partial w} w + \frac{\partial \psi}{\partial w_1} w_1 = 0,$$

was zur Folge hätte, dass $\psi(w, w_1)$ durch einen Linearfactor $w_1 - cw$ mit constantem c theilbar wäre. Dieses ist aber nicht möglich, weil $\psi(w, w_1)$ nicht für $w = 0$, $w_1 = 0$ verschwindet.

Setzen wir daher in Gleichung (5.) voriger Nummer $r_1 = r$, so erhalten wir eine wohlbestimmte algebraische Gleichung

$$H(r) = 0. \tag{4.}$$

Ist r gleich einer realen Wurzel dieser Gleichung, so fallen die Punkte w_1, welche den Stellen $m_r, m'_r, m''_r, \ldots$ auf der Peripherie K_r zugehören, theilweise oder ganz auf dieselbe Peripherie.

188] Der Radius des Grenzkreises ist daher mit der kleinsten realen Wurzel der Gleichung (4.) übereinstimmend.

Ist $r = a$ eine reale Wurzel der Gleichung (4.) und $w = \mu$ eine derjenigen Stellen $m_a, m'_a, m''_a, \ldots$, denen auf der Peripherie K_a Werthe w_1 zugehören, und setzen wir zunächst voraus, dass nicht $\frac{\partial G}{\partial r}$ und $\frac{\partial G}{\partial r_1}$ für $r = r_1 = a$ verschwinden, so folgt aus den Gleichungen (2.) und (3.), dass $P(w, w_1)$ in μ gleich der positiven Einheit ist.

Ist $a = R$ der Radius des Grenzkreises, so bleibt dieses auch bestehen, wenn $\frac{\partial G}{\partial r}, \frac{\partial G}{\partial r_1}$ für $r = r_1 = R$ verschwinden würden. Es ist nämlich in diesem Falle, wenn $H'(r)$ die Ableitung von $H(r)$ bedeutet, wegen der Symmetrie von $G(r, r_1)$ in Bezug auf r und r_1 auch $H'(R) = 0$. Ist Δ die Discriminante

von $H(r)$, so müsste demnach Δ verschwinden. Die Discriminante Δ ist eine ganze rationale Function der realen und imaginären Bestandtheile von Coefficienten der Function $F(w)$. Es sei A einer dieser Coefficienten. Ferner sei $F_1(w)$ diejenige Function, in welche $F(w)$ übergeht, wenn wir A durch $A_1 = A + \varepsilon$ ersetzen, während wir die übrigen Coefficienten beibehalten; endlich sei $H_1(r)$ aus $F_1(w)$ ebenso hergeleitet wie $H(r)$ aus $F(w)$. Wir wollen ε real nehmen, wenn in Δ der reale Theil von A auftritt, und rein imaginär, wenn nur der imaginäre Theil von A in Δ enthalten ist. Alsdann wird die Discriminante Δ_1 von $H_1(r)$ ausser für $\varepsilon = 0$ erst für einen Werth von ε verschwinden, dessen absoluter Betrag eine gewisse Grenze g überschreitet.

Für die Werthe von ε innerhalb dieses Bereiches sind aber der Radius des Grenzkreises, sowie die zusammengehörigen Stellen w, w_1 auf seiner Peripherie stetige Functionen von ε. Demnach ist auch $P(w, w_1)$ für dasselbe Werthenpaar w, w_1 eine stetige Function von ε, so lange $\operatorname{mod} \varepsilon < g$, bis $\varepsilon = 0$ einschliesslich (wenn nicht auf dem zu $F(w)$ gehörigen Grenzkreise $F''(w)$ Null oder Unendlich wird). Da nun diese algebraische Function $P(w, w_1)$ in dem ganzen Bereich $0 < \operatorname{mod} \varepsilon < g$ den Werth Eins hat, so muss auch für $\varepsilon = 0$ derselbe Werth erhalten werden.

IV.

Die Gleichung (4.) voriger Nummer kann auch als das Resultat der Elimination von $e^{\varphi i}, e^{\varphi_1 i}$ aus den Gleichungen

$$\psi\left(re^{\varphi i}, re^{\varphi_1 i}\right) = 0, \tag{1.}$$ [189

$$\psi_1\left(re^{-\varphi i}, re^{-\varphi_1 i}\right) = 0, \tag{2.}$$

$$P\left(re^{\varphi i}, re^{\varphi_1 i}\right) - P_1\left(re^{-\varphi i}, re^{-\varphi_1 i}\right) = 0 \tag{3.}$$

erhalten werden (siehe No. II), und es ist $r = R$, der Radius des Grenzkreises, die kleinste reale Wurzel der Gleichung (4.) voriger Nummer.

Die Gleichungen (1.), (2.), (3.) können auch erhalten werden, wenn wir den realen und imaginären Theil von $\psi(w, w_1)$ und den imaginären Theil von $P(w, w_1)$ gleich Null setzen. Unser in der Einleitung erwähnter Satz besagt daher:

Wenn $r = R$ der kleinste reale Werth ist, für welchen diese drei Gleichungen reale Lösungen $\varphi = \varphi''$, $\varphi_1 = \varphi'$ zulassen, so ist von selbst der reale Theil von

$$P\left(Re^{\varphi''i},\, Re^{\varphi'i}\right)$$

bestimmt. Er erhält nämlich den Werth Eins*).

V.

Im 75. Bande dieses Journals, Abth. I, No. 5—10[1]) habe ich folgende Aufgabe behandelt.

Es seien $z_1, z_2, \ldots, z_{m+1}$ in der Ebene der complexen Variabeln z willkürlich gegebene Punkte, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m+1}$, $m+1$ verschiedene ganzzahlige Wurzeln der Einheit, welche durch eine Gleichung

$$(1.) \qquad w^n - 1 = 0$$

bestimmt werden, wo $n \geqq m+1$. — Es soll die rationale Function

$$(2.) \qquad z = F(w)$$

(von der Gestalt der Gleichung (α.) in der Einleitung) so gewählt werden, dass $w = \alpha_k$ werde für $z = z_k$, und dass der Radius des zu $F(w)$ gehörigen Grenzkreises grösser als Eins werde. —

Wir haben daselbst diese Bestimmung durchgeführt unter der Voraussetzung, dass der kleinste Modul der Wurzeln der Gleichung $F'(w) = 0$
190] den Radius des Grenzkreises liefert. Wir wollen hier dasselbe für den Fall thun, dass dieser Radius vermittelst der Gleichungen

$$\psi(w, w_1) = 0$$

und

$$F'(w)w + F'(w_1)w_1 = 0$$

erhalten wird.

Sei wie in Bd. 75, S. 186[2]), Gleichung (2.)

*) Hierdurch löst sich das Paradoxon des Herrn NEKRASSOFF in No. 3 seiner Arbeit von selbst, da seine Gleichung $\xi(a) = 0$ eine Identität darstellt. Aus dem Obigen erkennt man auch unmittelbar, warum in No. 4 seines Aufsatzes Herr NEKRASSOFF mit der blossen Gleichung $\frac{dr_1}{d\vartheta} = 0$ nicht zu meinen Resultaten gelangen konnte.

1) Abh. XIV, S. 370—378, Band I dieser Ausgabe. R. F.

2) Ebenda S. 371. R. F.

$$(3.) \qquad \varphi(w) = \sum_1^{m+1} \frac{\alpha_i z_i}{f'(\alpha_i)} f_i(w),$$
$$f(w) = (w-\alpha_1)\ldots(w-\alpha_{m+1}),$$
$$f_i(w) = \frac{f(w)}{w-\alpha_i}.$$

Wir setzen nunmehr

$$\frac{\varphi(w)}{w} = g(w),$$

$$\frac{w^n-1}{w(Aw^n+B)} = h(w)$$

und

$$(4.) \qquad z = F(w) = g(w) + a h(w),$$

wo a, A, B noch verfügbare Constanten bedeuten, von denen jedoch A, B real sein mögen. Ist der Radius des zu $g(w)$ gehörigen Grenzkreises grösser als Eins, so sei $a = 0$.

Im entgegengesetzten Falle wollen wir beweisen, dass wir a so wählen können, dass für die Function $F(w)$ in Gleichung (4.) diese Bedingung erfüllt ist.

Die Gleichung

$$F(w_1) = F(w)$$

geht für $a = \infty$ über in

$$(5.) \qquad h(w_1) - h(w) = 0;$$

hieraus folgt:

$$(6.) \qquad \frac{w_1}{w} = \frac{w_1^n - 1}{w^n - 1} \, \frac{Aw^n + B}{Aw_1^n + B}.$$

Befinden sich w und w_1 auf der Peripherie desselben um $w = 0$ beschriebenen Kreises, ist also $w = re^{\varphi i}$, $w_1 = re^{\varphi_1 i}$, so folgt:

$$\operatorname{mod} \frac{w_1}{w} = 1,$$

woraus sich ergiebt

$$(7.) \qquad \left[e^{n\varphi_1 i} + e^{-n\varphi_1 i} - \left(e^{n\varphi i} + e^{-n\varphi i}\right)\right](A-B)^2 = 0.$$

Sind A, B von einander verschieden, so erfordert diese Gleichung, dass [191

$$(8.) \qquad e^{n\varphi_1 i} = e^{n\varphi i}$$

oder

$$e^{n\varphi_1 i} = e^{-n\varphi i}. \tag{8a.}$$

Aus der Gleichung

$$F'(w)\,w + F'(w_1)\,w_1 = 0$$

folgt für $a = \infty$

$$\frac{-Aw^{2n}+[(n-1)B+(n+1)A]\,w^n+B}{w(Aw^n+B)^2}+\frac{-Aw_1^{2n}+[(n-1)B+(n+1)A]\,w_1^n+B}{w_1(Aw_1^n+B)^2}=0. \tag{9.}$$

Im Falle (8.) wäre für die gemeinschaftlichen Lösungen von (5.) und (9.)

$$w^n = w_1^n,$$

das heisst

$$-Aw^{2n}+[(n-1)B+(n+1)A]\,w^n+B = 0 \tag{10.}$$

oder

$$Aw^n+B = 0 \tag{10a.}$$

oder

$$\frac{1}{w}+\frac{1}{w_1} = 0. \tag{10b.}$$

Wenn wir n als ungerade Zahl wählen, so ist (10b.) auszuschliessen. – Es sei

$$\frac{B}{A} = -\frac{n+1}{n-1}, \tag{11.}$$

so liefern (10.) und (10a.) nur Werthe von w, deren Modul grösser als Eins ist. Die Gleichung (10.) stimmt übrigens mit der Gleichung

$$h'(w) = 0$$

überein.

Die Gleichung (9.) kann vermittelst (5.) auch in die Form

$$K(w^n, w_1^n) = \frac{-(n-1)\,w^{2n}+n+1}{(w^n-1)((n-1)\,w^n+n+1)}+\frac{-(n-1)\,w_1^{2n}+n+1}{(w_1^n-1)((n-1)\,w_1^n+n+1)} = 0 \tag{9a.}$$

gesetzt werden.

Sei $a = \alpha+\beta i$, so folgt aus

$$wF'(w)+w_1F'(w_1) = 0:$$

$$\alpha+\beta i = -\frac{g'(w)\,w+g'(w_1)\,w_1}{K(w^n, w_1^n)}. \tag{12.}$$

Setzen wir voraus, dass von den Grössen α, β die eine unendlich gross werde, während die andere endlich bleibt, und nehmen wir an, dass die [192 Gleichung (8a.) statt habe. Alsdann müssten auf dem Grenzkreise von $F(w)$ für diesen Werth von a zwei Werthe w, w_1 sich befinden, von der Beschaffenheit, dass

$$K(w^n, w_1^n) = 0$$

und dass w^n, w_1^n conjugirte Werthe sind. Da $K(w^n, w_1^n)$ reale Coefficienten hat und in Bezug auf die Argumente w^n, w_1^n symmetrisch ist, so würde der conjugirte Werth von $K(w^n, w_1^n)$ für dasselbe Werthenpaar verschwinden. Aus Gleichung (12.) ergiebt sich demnach, dass auch

$$\alpha-\beta i = -\frac{g_1'(w')\,w'+g_1'(w_1')\,w_1'}{K(w'^n, w_1'^n)},$$

wo $g_1(w)$ aus $g(w)$ erhalten wird, wenn in letzterer Function die Coefficienten durch ihre conjugirten Werthe ersetzt werden, für dasselbe Werthenpaar unendlich wird. Es müssten demnach α und β für dasselbe Werthenpaar gleichzeitig unendlich werden, gegen die Voraussetzung. Wenn demnach $a = \alpha+\beta i$ so gewählt wird, dass der absolute Werth nur einer der beiden Grössen α und β eine gewisse Grenze überschreitet, die andere aber einen beliebig gewählten endlichen Werth hat, so kann der Fall (8a.) nicht eintreten. Der Radius des Grenzkreises von $F(w)$ ist daher alsdann grösser als Eins. Die nähere Bestimmung von a erfolgt auf analoge Weise wie die der entsprechenden Grösse a in meiner Arbeit Bd. 75, Abth. I, No. 6—10[1]).

---

[1]) Abh. XIV, S. 372—378, Band I dieser Ausgabe. R. F.

ANMERKUNGEN.

1) Der handschriftliche Nachlass meines Vaters lässt erkennen, dass ihn die hier gegebenen Ausführungen über das Abbildungsproblem noch nicht befriedigt haben, dass er vielmehr wiederholt auf dasselbe zurückgekommen ist. Wie der Nachlass zeigt, hat er später darauf verzichtet, Methoden zur Bestimmung des Radius des Grenzkreises anzugeben, und hat versucht das Abbildungsproblem ohne Kenntniss der Grösse dieses Radius durchzuführen. Als Ergebniss dieser Untersuchungen ist dann schliesslich die Arbeit »Über eine besondere Gattung von rationalen Curven mit imaginären Doppelpunkten« (Sitzungsberichte 1900, S. 74 ff., Abh. LXXII dieses Bandes) anzusehen.

2) Zu dem S. 111 gemachten Grenzübergang $\varepsilon = 0$ ist Folgendes zu bemerken: Im Nachlass meines Vaters findet sich zu diesem Grenzübergang eine Anmerkung, die ich hier wörtlich zum Abdruck bringen möchte:

Bei dieser Gelegenheit muss ich ein Versehen berichtigen, welches sich p. 188, Bd. 108 eingeschlichen hat. Dasselbe betrifft den dort gemachten Grenzübergang $\varepsilon = 0$. Wenn nämlich ε beliebig klein, aber von Null verschieden angenommen wird, so ist es nicht nothwendig, dass die Gleichung $H_1(r) = 0$ eine reale Wurzel besitze, welche einer ebenfalls realen Wurzel der Gleichung $H(r) = 0$ hinlänglich nahe kommt. Aus diesem Grunde ist der bezeichnete Grenzübergang nicht immer zulässig.

3) Zu Gleichung (12.) S. 114 ist zu bemerken, dass der im Nenner der rechten Seite stehende Ausdruck $K(w^n, w_1^n)$ nicht, wie in Gleichung (9a.) angegeben, lautet, sondern

$$K(w^n, w_1^n) = \frac{w^n - 1}{w(Aw^n + B)} \left\{ \frac{(n-1)w^{2n} + n + 1}{(w^n - 1)[-(n-1)w^n + n + 1]} + \frac{(n-1)w_1^{2n} + n + 1}{(w_1^n - 1)[-(n-1)w_1^n + (n+1)]} \right\}.$$

R. F.

LIX.

ÜBER LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, WELCHE VON PARAMETERN UNABHÄNGIGE SUBSTITUTIONSGRUPPEN BESITZEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1892, XII, S. 157—176; vorgelegt am 25. Februar; ausgegeben am 3. März 1892.)

Die folgende Notiz enthält gewissermassen eine Fortsetzung der Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen, welche ich in den Sitzungsberichten*) veröffentlicht habe. Den Ausgangspunkt bildet diejenige Klasse von linearen homogenen Differentialgleichungen, welche ich in den Sitzungsberichten**) eingeführt und angewendet habe, und welche sich dadurch charakterisiren, dass die Substitutionen, welche ein geeignetes Fundamentalsystem von Integralen derselben durch die Umläufe der unabhängigen Variabeln erleidet, von einem in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parameter unabhängig sind. Es ergab sich daselbst, dass diese Eigenschaft sich mit dem Vorhandensein gemeinschaftlicher Lösungen eines gewissen Systems partieller linearer Differentialgleichungen deckt. [157

In der gegenwärtigen Notiz beschäftige ich mich damit, umgekehrt solche Systeme linearer homogener partieller Differentialgleichungen zu kennzeichnen, deren Untersuchung auf diejenige solcher gewöhnlicher

*) Jahrg. 1888, S. 1115 ff. und S. 1273 ff.; Jahrg. 1889, S. 713 ff.; Jahrg. 1890, S. 21 ff.[1]).

**) Jahrg. 1888, S. 1278 ff.[2]).

[1]) Abh. LIV, S. 1—63 dieses Bandes. R. F.

[2]) Ebenda S. 20 ff. R. F.

linearer homogener Differentialgleichungen zurückgeführt werden kann, deren Substitutionen von einer Anzahl in den Coefficienten auftretenden Parametern unabhängig sind. Diese partiellen Differentialgleichungen scheinen eine besondere Aufmerksamkeit zu verdienen. In dem Folgenden wird unter anderem gezeigt, dass zu ihnen auch diejenigen beiden Arten partieller Differentialgleichungen gehören, auf welche nach einem von Herrn PICARD*) für besondere Fälle gegebenen Verfahren das Studium derjenigen eindeutigen Functionen zweier Variabeln begründet werden kann, welche Substitutionen der Form:

158] $$\left(\xi,\ \eta,\ \frac{A\xi + A_1\eta + A_2}{C\xi + C_1\eta + C_2},\ \frac{B\xi + B_1\eta + B_2}{C\xi + C_1\eta + C_2}\right)$$

beziehungsweise

$$\left(\xi,\ \eta,\ \frac{a\xi + b}{c\xi + d},\ \frac{a'\eta + b'}{c'\eta + d'}\right)$$

zulassen.

Die erstere dieser beiden Arten partieller Differentialgleichungen hat neuerdings Herr JACOB HORN**) für den Fall rationaler Coefficienten daraufhin untersucht, unter welchen Umständen ihre Integrale sich in der Umgebung der singulären Stellen regulär verhalten, das heisst, in der von mir gebrauchten Terminologie, ob sie daselbst nicht unbestimmt***) werden. In dem Folgenden werden die hierzu erforderlichen Bedingungen, unter Benutzung des schon erwähnten Zusammenhanges der bezeichneten partiellen Differentialgleichungen mit der besonderen Klasse gewöhnlicher Differentialgleichungen, welche von Parametern unabhängige Substitutionsgruppen besitzen, aus der Untersuchung des Verhaltens der Integrale einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung in der Umgebung der singulären Punkte hergeleitet.

1.

Sind in der Differentialgleichung:

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + r_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + r_m y = 0$$

*) Acta Mathematica, T. 5, S. 176 ff.; LIOUVILLE Journal, IV. sér. (1885), p. 112 ff.

**) Acta Mathematica, T. 12, S. 113 ff. und in seiner Freiburger Habilitationsschrift 1890.

***) Vergl. Sitzungsberichte, Jahrg. 1886, S. 281 und Sitzungsberichte, Jahrg. 1888, S. 1279, No. 12[1].

1) Abh. XLVII, S. 394, Band II dieser Ausgabe und Abh. LIV, S. 22 dieses Bandes. R. F.

die Coefficienten r_k rationale Functionen von x, und ist:

$$(2.)\qquad w = A_0 y + A_1 y' + \cdots + A_{m-1} y^{(m-1)},$$

wo $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ rationale Functionen von x und $y^{(\lambda)} = \frac{d^\lambda y}{dx^\lambda}$, so haben wir nach dem Vorgange von RIEMANN*) die Differentialgleichung, welcher w genügt, als mit (1.) zu derselben Klasse gehörig bezeichnet.

Wir wollen diese Bezeichnungsweise auf den allgemeineren Fall ausdehnen, wo $r_1, r_2, \ldots, r_m$ eindeutige Functionen des Ortes (x, s) in der durch die algebraische Gleichung:

$$(3.)\qquad F(x, s) = 0$$

definirten RIEMANNschen Fläche bedeuten, und wollen von der linearen homogenen Differentialgleichung, welcher w genügt, sagen, dass sie mit [159 (1.) zu derselben Klasse gehöre, wenn die Grössen $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ ebenfalls eindeutige Functionen des Ortes (x, s) bedeuten.

Als Functionen des Ortes (x, s) lassen sich die Integrale der Differentialgleichung (1.) als lineare homogene Functionen eines Fundamentalsystems $y_1, y_2, \ldots, y_m$ mit von x unabhängigen Coefficienten darstellen. Ist G die Gruppe derjenigen Substitutionen von $y_1, y_2, \ldots, y_m$, welche den sämmtlichen geschlossenen Bahnen des Ortes (x, s) entsprechen, so ist G zugleich die Gruppe der denselben Bahnen entsprechenden Substitutionen für die Integrale $w_1, w_2, \ldots, w_m$, welche aus Gleichung (2.) für $y = y_1, y_2, \ldots, y_m$ hervorgehen.

Ist umgekehrt $w_1, w_2, \ldots, w_m$ ein System von Functionen des Ortes (x, s), welche für alle geschlossenen Bahnen dieses Ortes in solche lineare homogene Functionen von $w_1, w_2, \ldots, w_m$ mit von x unabhängigen Coefficienten sich verwandeln, wie sie die Gruppe G liefert, und setzen wir:

$$(4.)\qquad w_k = A_0 y_k + A_1 y_k' + \cdots + A_{m-1} y_k^{(m-1)},$$

für $k = 1, 2, \ldots, m$, so folgt:

$$(5.)\qquad A_\lambda = \frac{\Delta_\lambda}{\Delta}, \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, m-1)$$

wo Δ die Hauptdeterminante von $y_1, y_2, \ldots, y_m$, und Δ_λ aus Δ dadurch hervorgeht, dass die $\lambda+1^{\text{te}}$ Verticalreihe in Δ durch $w_1, w_2, \ldots, w_m$ ersetzt wird.

*) Vergl. Sitzungsberichte 1888, S. 1275[1]).

1) Abh. LIV, S. 17 dieses Bandes. R. F.

Ist einer der bezeichneten Bahnen entsprechend:

$$(6.)\qquad \overline{y}_k = \alpha_{k1}y_1 + \alpha_{k2}y_2 + \cdots + \alpha_{km}y_m, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

so ist auch, weil $\alpha_{k\lambda}$ von x unabhängig,

$$(7.)\qquad \left(\overline{\frac{d^\mu y_k}{dx^\mu}}\right) = \alpha_{k1}y_1^{(\mu)} + \alpha_{k2}y_2^{(\mu)} + \cdots + \alpha_{km}y_m^{(\mu)}.$$

Der Voraussetzung nach ist auch:

$$(8.)\qquad \overline{w}_k = \alpha_{k1}w_1 + \alpha_{k2}w_2 + \cdots + \alpha_{km}w_m.$$

Demnach erhalten Zähler und Nenner in Gleichung (5.) durch denselben Umlauf von (x, s) einen gemeinschaftlichen Factor, woraus sich ergiebt, dass A_λ eine *eindeutige* Function des Ortes (x, s) ist. Die Differentialgleichung welcher $w_1, w_2, \ldots, w_m$ genügen, gehört demnach mit (1.) zu derselben Klasse.

Wenn $y_1, y_2, \ldots, y_m$ sowie $w_1, w_2, \ldots, w_m$ überall in der Riemannschen Fläche bestimmt sind (in dem Sinne wie dieses für die Integrale derjenigen Klasse von Differentialgleichungen statt hat, welche in meiner Arbeit in Crelles Journal, Bd. 66, No. 4, Gl. (12.)[1]) definirt worden), so sind die Coefficienten A_λ *rationale* Functionen des Ortes (x, s).

160]

2.

In derselben oben bezeichneten Arbeit*) haben wir eine besondere Gattung linearer homogener Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten eingeführt, welche sich durch die Eigenschaft auszeichnet ein Fundamentalsystem von Integralen von der Beschaffenheit zu besitzen, dass die den Umläufen der unabhängigen Variabeln entsprechenden Substitutionen desselben *von einem in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parameter unabhängig sind.*

Es ist aber die Voraussetzung, dass die Coefficienten der Differentialgleichung rationale Functionen der unabhängigen Variabeln seien, eine unwesentliche. Sei wieder:

$$(1.)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} + r_1\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + r_m y = 0,$$

*) Sitzungsberichte 1888, S. 1278 ff.[2]).

[1]) Abh. VI, S. 186, Band I dieser Ausgabe. R. F.

[2]) Abh. LIV, S. 20 ff. dieses Bandes. R. F.

wo die Coefficienten *eindeutige* Functionen des Ortes (x, s) der Riemannschen Fläche:

$$(2.)\qquad F(x, s) = 0$$

bedeuten, die einen Parameter t enthalten. Es werde vorausgesetzt, dass ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ der Differentialgleichung, als Functionen des Ortes (x, s) existirt von der Beschaffenheit, dass in dem ganzen Verlaufe von (x, s) die Gleichungen:

$$(3.)\qquad \frac{\partial y_k}{\partial t} = A_0 y_k + A_1 y_k' + \cdots + A_{m-1}y_k^{(m-1)}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\frac{\partial^\lambda y}{\partial x^\lambda} = y^{(\lambda)},$$

erfüllt werden, worin $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ eindeutige Functionen von (x, s) bedeuten. Nach voriger Nummer*) genügen $\frac{\partial y_k}{\partial t}$ einer Differentialgleichung derselben Klasse mit (1.), und ist nach einem Umlaufe von (x, s):

$$(4.)\qquad \overline{y}_k = \alpha_{k1}y_1 + \alpha_{k2}y_2 + \cdots + \alpha_{km}y_m,$$

so ist auch:

$$(5.)\qquad \left(\overline{\frac{\partial y_k}{\partial t}}\right) = \alpha_{k1}\frac{\partial y_1}{\partial t} + \alpha_{k2}\frac{\partial y_2}{\partial t} + \cdots + \alpha_{km}\frac{\partial y_m}{\partial t}.$$

Es ergiebt sich dann auf dieselbe Weise, wie an der oben angeführten Stelle**), dass *die Coefficienten der Substitutionen von $y_1, y_2, \ldots, y_m$,* [161
die irgend welchen Umläufen von (x, s) entsprechen, von t unabhängig sind.

Es sei umgekehrt vorausgesetzt, dass ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ der Gleichung (1.) angebbar sei, von der Beschaffenheit, dass die Coefficienten der Substitutionen, welche allen Umläufen von (x, s) entsprechen, von einem in den Coefficienten der Differentialgleichung auftretenden Parameter t unabhängig sind. Alsdann genügen in dem ganzen Verlaufe von (x, s) die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_m$ einer Gleichung der Form

*) S. auch Sitzungsberichte a. a. O.

**) S. 1279, Gl. (8.)[1]).

[1]) Abh. LIV, S. 21 dieses Bandes. R. F.

(3.), deren Coefficienten A_λ eindeutige Functionen von (x, s) sind*).

Ist nämlich für irgend einen Umlauf von (x, s):

$$\bar{y}_k = \alpha_{k1} y_1 + \alpha_{k2} y_2 + \cdots + \alpha_{km} y_m, \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{6.}$$

so ist nach der Voraussetzung auch:

$$\overline{\left(\frac{\partial y_k}{\partial t}\right)} = \alpha_{k1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + \alpha_{k2} \frac{\partial y_2}{\partial t} + \cdots + \alpha_{km} \frac{\partial y_m}{\partial t} \text{**)}. \tag{7.}$$

Daher gehört die Differentialgleichung, welcher $\frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \ldots, \frac{\partial y_m}{\partial t}$ genügen, zu derselben Klasse mit (1.) (S. vorige Nummer), und es finden im ganzen Verlaufe von (x, s) die Gleichungen (3.) mit in (x, s) eindeutigen Coefficienten statt.

Wir wollen von den Differentialgleichungen (1.), welche ein Fundamentalsystem von Integralen besitzen, das zugleich einer Gleichung der Form (3.) genügt, kurz sagen, ihre Substitutionen seien von t unabhängig.

Sind die Coefficienten der Gleichung (1.) rationale Functionen von (x, s), und haben ihre Integrale keine Unbestimmtheitsstellen, so haben auch***) $\frac{\partial y_k}{\partial t}$ keine solche Stellen, und die Coefficienten

$$A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$$

sind rationale Functionen von (x, s).

3.

Durch Differentiation der Gleichung (1.) voriger Nummer nach t folgt:

$$\sum_0^m {}_\lambda\, r_\lambda \frac{\partial^{m-\lambda+1} y}{\partial t\, \partial x^{m-\lambda}} + \sum_1^m {}_\lambda \frac{\partial r_\lambda}{\partial t} \frac{\partial^{m-\lambda} y}{\partial x^{m-\lambda}} = 0. \qquad (r_0 = 1) \tag{1.}$$

162] Differentiiren wir Gleichung (3.) voriger Nummer wiederholt nach x und reduciren auf den rechten Seiten die Ableitungen nach x vermittelst der Gleichung (1.) derselben Nummer auf solche von der Ordnung $0, 1, \ldots, m-1$,

*) Vergl. Sitzungsberichte a. a. O., No. 12[1]).

**) Vergl. Sitzungsberichte a. a. O., S. 1280, Gl. (5.)[2]).

***) Vergl. Sitzungsberichte a. a. O., S. 1281[3]).

1) Abh. LIV, S. 22 dieses Bandes. R. F.

2) Ebenda S. 23. R. F.

3) Ebenda S. 24. R. F.

und substituiren die Resultate in dieselbe Gleichung (1.) voriger Nummer, so ergiebt sich eine Gleichung von der Form:

$$R_1 \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}} + R_2 \frac{\partial^{m-2} y}{\partial x^{m-2}} + \cdots + R_m y = 0, \tag{2.}$$

deren Coefficienten eindeutige Functionen von (x, s) sein sollen. Ist Gleichung (1.) voriger Nummer irreductibel, so ergiebt sich hieraus:

$$R_1 = 0, \quad R_2 = 0, \quad \ldots, \quad R_m = 0. \tag{3.}$$

Dieses ist ein System linearer Differentialgleichungen für die Functionen $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ mit Coefficienten, die von (x, s) eindeutig abhängen, und es ist zu entscheiden, ob dasselbe Particularintegrale besitze, welche ebenfalls eindeutige Functionen von (x, s) sind.

Wenn wir die beschränkende Voraussetzung wieder aufnehmen, dass die Coefficienten der Gleichung (1.) voriger Nummer rationale Functionen von (x, s) sind, und dass die Integrale derselben nicht Stellen der Unbestimmtheit besitzen, so gilt der Satz:

I. Die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen der Gleichung (1.) voriger Nummer sind von t unabhängig, wenn diese Gleichung von t unabhängige Substitutionen besitzt.

Es sind nämlich die Wurzeln einer determinirenden Fundamentalgleichung das $\frac{1}{2\pi i}$fache des Logarithmus der Wurzeln der Fundamentalgleichung*), einer Gleichung, deren Coefficienten der Voraussetzung nach von t unabhängig sind.

Ist unter derselben Voraussetzung $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein Fundamentalsystem der Gleichung (1.) voriger Nummer, dessen Substitutionen von t unabhängig sind, oder, was dasselbe besagt, ein solches Fundamentalsystem, welches auch der Gleichung (3.) voriger Nummer genügt, so wird hieraus das zu einer singulären Stelle $x = a$, $s = b$ gehörige Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots, u_m$ durch die Gleichungen:

$$u_k = x_{k1} y_1 + x_{k2} y_2 + \cdots + x_{km} y_m \qquad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.}$$

hergeleitet, in welchen $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{km}$ durch die Gleichungen:

*) Siehe Crelles Journal, Bd. 66, S. 132, Gl. (6.)[1]).

1) Abh. VI, S. 171, Band I dieser Ausgabe. R. F.

$$(5.)\quad \begin{cases} x_{k1}(\alpha_{11}-\omega_k)+x_{k2}\alpha_{21} + \cdots + x_{km}\alpha_{m1} = 0, \\ x_{k1}\alpha_{12} + x_{k2}(\alpha_{22}-\omega_k) + \cdots + x_{km}\alpha_{m2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{k1}\alpha_{1m} + x_{k2}\alpha_{2m} + \cdots + x_{km}(\alpha_{mm}-\omega_k) = 0 \end{cases}$$

163] bestimmt sind, wenn mit α_{rs} die Umlaufscoefficienten von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ für den singulären Punkt (a, b) und mit ω_k eine der m Wurzeln der Fundamentalgleichung bezeichnet werden*).

Da α_{rs} und ω_k von t unabhängig sind, so ergiebt sich für den Fall, dass die Fundamentalgleichung ungleiche Wurzeln besitzt, dass die Verhältnisse der Grössen $x_{kλ}$ von t unabhängig. Wir können demnach die unbestimmten Factoren von $u_1, u_2, \ldots, u_m$ so wählen, dass die letzteren ebenfalls gemeinschaftliche Lösungen von (1.) und (3.) voriger Nummer werden.

Es ist aber**) zu ersehen, dass auch für den Fall, dass die Fundamentalgleichung gleiche Wurzeln hat, durch solche lineare homogene Functionen der Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ein zu (a, b) gehöriges Fundamentalsystem abgeleitet werden kann, dessen Coefficienten nicht nur von x sondern auch von t unabhängig sind. Demnach können wir folgenden Satz aussprechen:

II. Man kann unter denselben Voraussetzungen, welche im Satze I. gemacht sind, das zu irgend einem singulären Punkte der Gleichung (1.) voriger Nummer gehörige Fundamentalsystem $u_1, u_2, \ldots, u_m$ so wählen, dass auch die letzteren Integrale gleichzeitig der Gleichung (3.) voriger Nummer genügen.

Im Falle, dass die Voraussetzungen des Satzes I. erfüllt sind, ergiebt sich aus demselben, dass, wenn in Gleichung (1.) voriger Nummer:

$$y = e^{-\frac{1}{m}\int r_1 dx} v$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung für v ebenfalls von t unabhängige Substitutionen hat, dass man demnach bei der Discussion der Gleichung (1.) voriger Nummer da, wo es zweckmässig ist, $r_1 = 0$ voraussetzen kann.

*) Siehe CRELLES Journal, Bd. 66, S. 132, Gl. (5.)[1]).

**) Siehe ebenda S. 134 ff.[2]).

1) Abh. VI, S. 171, Band I dieser Ausgabe. R. F.

2) Ebenda S. 174 ff. R. F.

Beispielsweise lauten die Gleichungen (3.)

$$\text{für } r_1 = 0$$

$$m = 2$$

$$(3a.)\quad \begin{cases} A_1^{(2)} + 2A_0^{(1)} = 0, \\ A_0^{(2)} - 2r_2 A_1^{(1)} - r_2^{(1)} A_1 + \dfrac{\partial r_2}{\partial t} = 0; \end{cases}$$

$$m = 3$$

$$(3b.)\quad \begin{cases} A_0^{(3)} + r_3 A_0^{(1)} - 3r_3 A_1^{(1)} - r_3^{(1)} A_1 - r_3^{(2)} A_2 - 3r_3^{(1)} A_2^{(1)} - 3r_3 A_2^{(2)} + \dfrac{\partial r_3}{\partial t} = 0, \\ A_1^{(3)} - 2r_2 A_1^{(1)} - r_2^{(1)} A_1 + 3A_0^{(2)} - 3r_2 A_2^{(2)} - 3(r_2^{(1)} + r_3) A_2^{(1)} - (r_2^{(2)} + 2r_3^{(1)}) A_2 + \dfrac{\partial r_2}{\partial t} = 0, \\ A_2^{(3)} - 2r_2 A_2^{(1)} - 2r_2^{(1)} A_2 + 3A_0^{(1)} + 3A_1^{(2)} = 0, \end{cases}$$ [164

wo die oberen Accente Ableitungen nach x bedeuten.

Wir behalten uns vor, bei anderer Gelegenheit auf eine Discussion dieser Differentialgleichungen für $A_0, A_1, \ldots, A_{m-1}$ zurückzukommen.

4.

Indem wir nunmehr dazu übergehen, Anwendungen der Theorie der Differentialgleichungen mit von Parametern unabhängigen Substitutionen auf eine gewisse Gattung von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen zu machen, wollen wir die Bezeichnungen in den Gleichungen (1.) und (3.) No. 2 abändern. Es sei demnach:

$$(A.)\quad \frac{\partial^m z}{\partial x^m} + r_1 \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}} + \cdots + r_m z = 0$$

eine Differentialgleichung, deren Coefficienten $r_1, r_2, \ldots, r_m$ eindeutige Functionen der von einander unabhängigen Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ und einer gewissen Anzahl von Grössen $y, y_1, y_2, \ldots, y_{\sigma-1}$, welche von den $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ algebraisch abhangen.

Machen wir die Voraussetzung, dass diejenigen Substitutionen der Gleichung (A.), welche solchen Umläufen von x entsprechen, für die zugleich $y, y_1, y_2, \ldots, y_{\sigma-1}$ ihre Anfangswerthe wieder erhalten, von $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ unabhängig seien, so folgt aus No. 2, dass ein Fundamentalsystem von Integralen $z_1, z_2, \ldots, z_m$ der Gleichung (A.) existirt, welches zugleich ein System:

$$(B.)\quad \frac{\partial z}{\partial x_\lambda} = A_{\lambda 0} z + A_{\lambda 1} \frac{\partial z}{\partial x} + \cdots + A_{\lambda, m-1} \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \varrho - 1)$$

befriedigt, wo $A_{\lambda r}$ eine eindeutige Function von

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\varrho-1},\quad y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{\sigma-1}$$

bedeutet.

Aus den Gleichungen (A.) und (B.) folgt, dass die sämmtlichen Ableitungen jeder gemeinschaftlichen Lösung derselben nach den Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ als lineare homogene Functionen der $m-1$ ersten Ab-
165] leitungen dieser Lösung nach x darstellbar sind, deren Coefficienten eindeutige Functionen von

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\varrho-1},\quad y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{\sigma-1}.$$

So ergiebt sich z. B.:

$$\text{(1.)}\qquad \frac{\partial^\mu z}{\partial x_\lambda^\mu} = B_{\mu 0}^{(\lambda)} z + B_{\mu 1}^{(\lambda)} \frac{\partial z}{\partial x} + \cdots + B_{\mu, m-1}^{(\lambda)} \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}}. \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir durch Elimination von

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}}$$

eine Gleichung

$$\text{(A}'.\text{)}\qquad \frac{\partial^m z}{\partial x_\lambda^m} + r_1' \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_\lambda^{m-1}} + \cdots + r_m' z = 0,$$

deren Coefficienten $r_1', r_2', \ldots, r_m'$ eindeutige Functionen von

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\varrho-1},\quad y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{\sigma-1}$$

sind.

Es genügt daher z auch als Function von x_λ einer gewöhnlichen linearen homogenen Differentialgleichung mit Coefficienten von derselben Natur, wie $r_1, r_2, \ldots, r_m$.

Selbstverständlich kann das System (1.) auch so beschaffen sein, dass die Ordnung der Differentialgleichung (A'.) niedriger als die m^{te} wird. Dieses würde geschehen, wenn die Determinante

$$|B_{\mu\nu}^{(\lambda)}| \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, m-1 \\ \mu = 1, 2, \ldots, m-1 \end{pmatrix}$$

verschwindet.

Im Allgemeinen also wird die Ordnung der Gleichung (A'.) die m^{te} sein, und es wird das System der Gleichungen (1.) für $\mu = 1, 2, \ldots, m-1$ die Auflösung nach $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}}$ gestatten, und namentlich:

$$\text{(B}'.\text{)}\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = C_{00} z + C_{01} \frac{\partial z}{\partial x_\lambda} + C_{02} \frac{\partial^2 z}{\partial x_\lambda^2} + \cdots + C_{0, m-1} \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_\lambda^{m-1}}$$

ergeben, wo C_{0r} eine eindeutige Function von

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\varrho-1},\quad y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{\sigma-1}$$

ist. Mit Hülfe von (B.) folgert man dann, dass allgemein:

$$\text{(B}^2.\text{)}\qquad \frac{\partial z}{\partial x_\mu} = C_{\mu 0} z + C_{\mu 1} \frac{\partial z}{\partial x_\lambda} + \cdots + C_{\mu, m-1} \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_\lambda^{m-1}}, \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, \varrho-1)$$

wo $C_{\mu r}$ wiederum eine eindeutige Function von [166

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\varrho-1},\quad y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{\sigma-1}$$

ist.

Im Allgemeinen geniesst also das Fundamentalsystem $z_1, z_2, \ldots, z_m$ die Eigenschaft, dass die Gruppe der Substitutionen desselben von $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ unabhängig ist, welche der Variabeln $x, x_1, \ldots, x_{\varrho-1}$ auch als allein veränderlich aufgefasst wird.

Zur Kategorie der Differentialgleichungen (A.) gehören z. B. diejenigen Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der Abelschen Integrale als Functionen der Klassenmoduln genügen*).

Wir werden bald noch andere Beispiele kennen lernen.

5.

Es sei jetzt umgekehrt ein System linearer homogener partieller Differentialgleichungen mit der abhängigen Variabeln z und den unabhängigen Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ vorgelegt, deren Coefficienten eindeutige Functionen von $x, x_1, \ldots, x_{\varrho-1}$ und den von diesen algebraisch abhangenden Grössen $y, y_1, \ldots, y_{\sigma-1}$ seien; und es werde die Voraussetzung gemacht, dass dieselben durch eine Function z befriedigt werden, deren Zweige (d. h. die durch solche Umläufe der Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ erzeugten Functionswerthe, für welche auch $y, y_1, y_2, \ldots, y_{\sigma-1}$ ihre Anfangswerthe wieder annehmen) sich sämmtlich durch m derselben $z_1, z_2, \ldots, z_m$ linear homogen und mit von $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ unabhängigen Coefficienten darstellen lassen.

*) Vergl. Crelles Journal, Bd. 71, S. 128 ff.; Bd. 73, S. 324 ff.; Sitzungsberichte 1888, S. 1285 ff. [1]).

[1]) Abh. IX, S. 283 ff., Band I und Abh. XIII, S. 343 ff., Band I dieser Ausgabe; Abh. LIV, S. 29 ff. dieses Bandes. R. F.

Zunächst ergiebt sich:

I. In Bezug auf jede der einzelnen Variabeln genügt z einer linearen homogenen Differentialgleichung höchstens m^{ter} Ordnung:

$$(\alpha.)\qquad \frac{\partial^m z}{\partial x_\lambda^m} + r_1^{(\lambda)} \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_\lambda^{m-1}} + \cdots + r_m^{(\lambda)} z = 0,$$

deren Coefficienten eindeutige Functionen der Grössen

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\varrho-1},\quad y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{\sigma-1}$$

sind.

Ist nämlich:

$$(1.)\qquad \Delta^{(\lambda)} = \left|\frac{\partial^k z_l}{\partial x_\lambda^k}\right| \qquad \begin{pmatrix} k = 0, 1, \ldots, m-1 \\ l = 1, 2, \ldots, m \end{pmatrix}$$

167] die Hauptdeterminante von $z_1, z_2, \ldots, z_m$ in Bezug auf die Variable x_λ und $\Delta_k^{(\lambda)}$ diejenige Determinante, welche aus $\Delta^{(\lambda)}$ hervorgeht, wenn die k^{te} Verticalreihe durch $\frac{\partial^m z_1}{\partial x_\lambda^m}, \frac{\partial^m z_2}{\partial x_\lambda^m}, \ldots, \frac{\partial^m z_m}{\partial x_\lambda^m}$ ersetzt wird, so ist:

$$(2.)\qquad r_k^{(\lambda)} = \frac{-\Delta_k^{(\lambda)}}{\Delta^{(\lambda)}}.$$

Wegen der vorausgesetzten Eigenschaft der Function z wird für einen Umlauf von x_λ, bei welchem $y, y_1, y_2, \ldots, y_{\varrho-1}$ unverändert bleiben, Zähler und Nenner in der rechten Seite der Gleichung (2.) mit demselben Factor multiplicirt, also $r_k^{(\lambda)}$ ungeändert bleiben.

Aus der über die Zweige der Function z gemachten Voraussetzung ergiebt sich ferner:

II. Lassen wir x_λ solche Umläufe machen, welche auch $y, y_1, y_2, \ldots, y_{\sigma-1}$ in ihre Anfangswerthe zurückführen, so sind die diesen Umläufen entsprechenden Substitutionen der Integrale der Gleichung (α.) von $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ unabhängig.

Wir sind hiernach auf die in No. 2 hervorgehobenen Differentialgleichungen wieder zurückgeführt worden.

6.

Wir betrachten wieder ein System (S) linearer homogener partieller Differentialgleichungen mit der abhängigen Variabeln z und den unabhängigen Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$, deren Coefficienten eindeutige Functionen der

letzteren Variabeln und der von denselben algebraisch abhangenden Grössen $y, y_1, y_2, \ldots, y_{\sigma-1}$ seien.

Das System (S) soll jetzt der folgenden Bedingung genügen: Dasselbe soll identisch befriedigt werden, wenn die sämmtlichen Ableitungen nach den Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ durch bestimmte lineare homogene Ausdrücke eines festen Systems von m Ableitungen ersetzt werden, deren Coefficienten eindeutige Functionen von $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}, y, y_1, y_2, \ldots, y_{\sigma-1}$ sind. Dieses feste System von Ableitungen lässt sich dann allemal so wählen, dass zwischen denselben eine lineare homogene Gleichung mit in

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\varrho-1},\quad y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{\sigma-1}$$

eindeutigen Coefficienten nicht stattfindet.

Für ein so charakterisirtes System (S) ergiebt sich zunächst:

I. Jede Lösung z desselben genügt in Bezug auf jede einzelne der Variabeln x_λ einer Differentialgleichung:

$$(1.)\qquad \frac{\partial^n z}{\partial x_\lambda^n} + r_1^{(\lambda)} \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x_\lambda^{n-1}} + \cdots + r_n^{(\lambda)} z = 0,$$

deren Coefficienten $r_k^{(\lambda)}$ eindeutige Functionen von [168

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\varrho-1},\quad y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{\sigma-1}$$

sind, und deren Ordnung

$$n \leqq m + 1.$$

Gleichzeitig ist:

$$(2.)\qquad \frac{\partial z}{\partial x_\mu} = A_0^{(\mu)} + A_1^{(\mu)} \frac{\partial z}{\partial x_\lambda} + \cdots + A_{n-1}^{(\mu)} \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x_\lambda^{n-1}},$$

wo die Grössen $A_k^{(\mu)}$ eindeutige Functionen von

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\varrho-1},\quad y,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{\sigma-1}$$

sind.

Nach den Auseinandersetzungen von No. 4 genügt es im Allgemeinen, um die Existenz gemeinschaftlicher Lösungen des Systems (S) nachzuweisen, die Gleichung (1.) für **eine** der Variabeln, z. B. x, aufzustellen

$$(\mathrm{A}^3.)\qquad \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + r_1 \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + \cdots + r_n z = 0,$$

und festzustellen, ob dieselbe mit den Gleichungen

$$\text{(B}^2.) \qquad \frac{\partial z}{\partial x_\lambda} = A_0^{(\lambda)} z + A_1^{(\lambda)} \frac{\partial z}{\partial x} + \cdots + A_{n-1}^{(\lambda)} \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \varrho - 1)$$

gemeinschaftliche Lösungen besitzt.

Nach No. 2 lässt sich dieses so ausdrücken:

II. Im Allgemeinen ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das System (S) gemeinschaftliche Lösungen besitzt, die, dass die Substitutionen eines geeigneten Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (A².) von $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ unabhängig werden, wenn x solche Umläufe vollzieht, die auch $y, y_1, y_2, \ldots, y_{\sigma-1}$ in ihre Anfangswerthe zurückführen.

Die Coefficienten r_k der Differentialgleichung (A².) und die Coefficienten $A_k^{(\lambda)}$ in (B².) müssen hierzu $\varrho - 1$ in No. 3 Gleichung (3.) charakterisirten Systemen von Gleichungen genügen, welche für die einzelnen Parameter $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ aufzustellen sind.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich auch:

III. Die Entscheidung darüber, ob die Lösungen des Systems partieller Differentialgleichungen (S) Unbestimmtheitsstellen zulassen, kann von der Untersuchung der gewöhnlichen Differentialgleichung (A².) abhängig gemacht werden.

Diesen Satz werden wir bald durch ein Beispiel zu erläutern Gelegenheit haben.

169]

7.

Ein besonders interessantes Beispiel zu den Systemen partieller Differentialgleichungen (S) der vorigen Nummer bietet sich in den folgenden in neuerer Zeit vielfach behandelten simultanen partiellen Differentialgleichungen dar:

$$\text{(1.)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a_0 z + a_1 \frac{\partial z}{\partial x} + a_2 \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\text{(2.)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = b_0 z + b_1 \frac{\partial z}{\partial x} + b_2 \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\text{(3.)} \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y},$$

wo $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$ eindeutige Functionen von x, y und einer von x, y algebraisch abhangenden Grösse ξ sind.

Auf einen besonderen Fall derselben, wo die Coefficienten $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$ rationale Functionen von x, y sind, wurden die Herren Appell*) und Picard**) bei der Verallgemeinerung der Gaussschen Reihe geführt. Auch lässt sich nach einem von Herrn Picard***) in besonderen Fällen angewendeten Verfahren zeigen, dass die eindeutigen Functionen x, y zweier Variabeln u, v, welche Substitutionen der Form:

$$\left(u, v, \frac{Au + A_1 v + A_2}{Cu + C_1 v + C_2}, \frac{Bu + B_1 v + B_2}{Cu + C_1 v + C_2}\right)$$

zulassen, und für ein gegebenes Werthsystem x, y nur eine endliche Anzahl incongruenter Werthe u, v liefern, auf die Umkehrung von Quotienten dreier Lösungen z_1, z_2, z_3 des Systems (1.), (2.), (3.)

$$\frac{z_2}{z_1} = u, \quad \frac{z_3}{z_1} = v$$

zurückgeführt werden können, wenn $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$ rationale Functionen von x, y, ξ bedeuten.

Aus den Gleichungen (1.) und (2.) ergiebt sich:

$$\text{(4.)} \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \left[\frac{a_2'}{a_2} + a_1 + b_2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \left[a_1' + a_0 - a_1 \frac{a_2'}{a_2} - a_1 b_2 + a_2 b_1\right] \frac{\partial z}{\partial x}$$
$$- \left[a_0' + a_2 b_0 - a_0 \frac{a_2'}{a_2} - a_0 b_2\right] z = 0,$$

wo die oberen Accente Ableitungen nach x bedeuten.

Die Gleichung (1.) schreiben wir in der Form: [170

$$\text{(5.)} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{a_0}{a_2} z - \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{a_2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

und erkennen durch Vergleichung der Gleichungen (4.) und (5.) mit den Gleichungen (A².), (B².), dass die Differentialgleichungen (1.), (2.), (3.) ein System (S) bilden.

*) Comptes Rendus de l'Acad. de Paris, 1880, 1ier Sem. und Liouville Journ. 1882.

**) Annales de l'École Norm. Sup. 1881.

***) Acta Mathem., T. 5, S. 176 ff.

Nach voriger Nummer Satz II. ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass das System (1.) bis (3.) gemeinschaftliche Lösungen hat, die, dass die Substitutionen, welche die Integrale der Gleichung (4.) erleiden, von y unabhängig sind, wenn x solche Umläufe vollzieht, für welche auch ξ seinen anfänglichen Werth wiedererhält.

Die Gleichung (3.) ist eine Folge der Gleichungen (1.) und (2.) oder (4.) und (5.). Differentiiren wir in der That die Gleichung (5.) nach y und Gleichung (2.) nach x und berücksichtigen (1.) und (2.), so ergiebt sich:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = c_0 z + c_1 \frac{\partial z}{\partial x} + c_2 \frac{\partial z}{\partial y}, \tag{3a.}$$

wo:

$$\left\{\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{a_2}\left[\frac{\partial b_0}{\partial x} - \frac{\partial a_0}{\partial y} + b_0 b_2 + a_0 b_1 - a_1 b_0\right], \\ c_1 &= \frac{1}{a_2}\left[\frac{\partial b_1}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial y} + b_1 b_2 + b_0\right], \\ c_2 &= \frac{1}{a_2}\left[\frac{\partial b_2}{\partial x} - \frac{\partial a_2}{\partial y} + a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_0 + b_2^2\right]. \end{aligned}\right. \tag{6.}$$

Aus der Differentiation von (3a.) nach y und nachheriger Elimination von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ mit Hülfe der Gleichungen (2.) und (3a.) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} - \left[\frac{\partial \log c_1}{\partial y} + b_1 + c_2\right]\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left[\frac{\partial c_2}{\partial y} + c_0 - c_2 \frac{\partial \log c_1}{\partial y} + c_1 b_2 - c_2 b_1\right]\frac{\partial z}{\partial y} & \\ - \left[\frac{\partial c_0}{\partial y} + c_1 b_0 - c_0 \frac{\partial \log c_1}{\partial y} - c_0 b_1\right] z = 0. & \end{aligned} \tag{4a.}$$

Schreiben wir Gleichung (3a.) in der Form:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c_0}{c_1} z - \frac{c_2}{c_1}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{c_1}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \tag{5a.}$$

so sind die Gleichungen (4a.) und (5a.) mit den Gleichungen (4.) und (5.) aequivalent. Das Vorhandensein gemeinschaftlicher Integrale der beiden ersteren ist mit der Unabhängigkeit von x derjenigen Substitutionen überein-
171] stimmend, welche ein geeignetes Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (4a.) erleidet, wenn y solche Umläufe vollzieht, die auch ξ in seinen Anfangswerth zurückführen. Übrigens fällt (in Übereinstimmung mit No. 6) dieses Fundamentalsystem mit dem oben erwähnten Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (4.) zusammen.

Die Grössen $a_0, a_1, a_2; b_0, b_1, b_2$ haben demnach den sechs Differentialgleichungen Genüge zu leisten, welche wir erhalten, wenn wir einerseits in den Gleichungen (3.) No. 3 an die Stelle von r_1, r_2, r_3 die Coefficienten der Gleichung (4.) und

$$A_0 = -\frac{a_0}{a_2}, \quad A_1 = -\frac{a_1}{a_2}, \quad A_2 = \frac{1}{a_2}$$

setzen, und andererseits in denselben Gleichungen r_1, r_2, r_3 durch die Coefficienten der Gleichung (4a.) und A_0, A_1, A_2 bezüglich durch

$$-\frac{c_0}{c_1}, \; -\frac{c_2}{c_1}, \; \frac{1}{c_1}$$

ersetzen.

8.

In verschiedenen Schriften*) hat Herr Horn die Frage behandelt, unter welchen Umständen das System der linearunabhängigen gemeinsamen Integrale z_1, z_2, z_3 der Gleichungen (1.), (2.), (3.) (seine Existenz vorausgesetzt) sich überall regulär verhalte, oder, wie wir im Anschluss an unsere in den Sitzungsberichten (1886, S. 281)**) angewendete Bezeichnungsweise lieber sagen wollen, keine Unbestimmtheitsstellen besitze***). Herr Horn setzt überdies voraus, dass $a_0, a_1, a_2; b_0, b_1, b_2$, folglich auch [nach No. 7 Gleichung (6.)] c_0, c_1, c_2 rationale Functionen von x, y sind.

Wir wollen zeigen, wie diese Frage mit Hülfe der vorhergehenden Erwägungen darauf zurückgeführt werden kann, zu entscheiden, ob die Differentialgleichung (4.) voriger Nummer mit der einen unabhängigen Variabeln x keine Unbestimmtheitsstellen besitze. Selbstverständlich kann ebenso die Gleichung (4a.) derselben Nummer mit der einen unabhängigen Variabeln y hierzu dienen.

Offenbar zieht die Voraussetzung, dass z_1, z_2, z_3 als Functionen der unabhängigen Variabeln x, y an gewissen Stellen keine Unbestimmtheiten dar-

*) Acta Mathematica, T. 12, S. 113 ff. Habilitationsschrift 1890.

**) Wir bemerken bei dieser Gelegenheit, dass in den Sitzungsberichten 1888, S. 1279, wo dieselbe Stelle citirt worden, in Folge eines Druckfehlers statt des Jahres 1886 das Jahr 1866 irrthümlich angegeben worden ist[1]).

***) S. auch oben No. 1 ff.

[1]) Abh. XLVII, S. 394, Band II dieser Ausgabe und Abh. LIV, S. 22 Fussnote dieses Bandes, wo der angegebene Druckfehler berichtigt ist. E. F.

bieten, die nach sich, dass dieselben Grössen z_1, z_2, z_3, auch keine Unbestimmtheiten zulassen dürfen, wenn wir x allein verändern, während y unverändert bleibt.

172] Sei $\psi(x,y)$ ein in den Nennern von $a_0, a_1, a_2;\ b_0, b_1, b_2$ auftretender irreductibler Factor, so lässt sich die Gleichung (4.) voriger Nummer in die Form setzen:

$$\psi(x,y)^\mu \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + P_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + P_2 \frac{\partial z}{\partial x} + P_3 z = 0, \tag{1.}$$

sodass P_1, P_2, P_3 für ein ψ annullirendes Werthsystem nicht unendlich werden.

Sei $y = b$ ein willkürlicher aber so beschaffener Werth, dass für ihn $\psi = 0$ weder mit $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ oder $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ noch mit $\psi_1 = 0$ eine Wurzel gemeinschaftlich habe, wenn ψ_1 irgend ein von ψ verschiedener irreductibler Factor der Nenner von $a_0, a_1, a_2;\ b_0, b_1, b_2$ ist.

Wir können alsdann um $y = b$ ein Gebiet Γ abgrenzen, von der Art, dass, wenn wir die Veränderlichkeit von y auf Γ beschränken, überhaupt $\psi = 0$ weder mit $\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$ oder $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$ noch mit $\psi_1 = 0$ gemeinschaftliche Lösungen besitzen kann.

Sei $x = a$ eine Lösung der Gleichung:

$$\psi(x,y) = 0; \tag{2.}$$

wenn die Variabilität von y auf Γ beschränkt wird, so muss in der Umgebung von $x = a$, wenn daselbst Unbestimmtheit nicht stattfinden soll*):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{P_1}{\psi^\mu} &= \frac{Q_1}{x-a}, \\ \frac{P_2}{\psi^\mu} &= \frac{Q_2}{(x-a)^2}, \\ \frac{P_3}{\psi^\mu} &= \frac{Q_3}{(x-a)^3} \end{aligned} \right. \tag{3.}$$

sein, wo Q_1, Q_2, Q_3 für $x = a$ nicht mehr unendlich werden.

Die zu $x = a$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Gleichung (1.) ist:

$$r(r-1)(r-2) + Q_1(a)\, r(r-1) + Q_2(a)\, r + Q_3(a) = 0. \tag{4.}$$

*) Siehe Crelles Journal, Bd. 66, S. 146, Gl. (12.)[1]).

1) Abh. VI, S. 186, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Da nach No. 7 die Substitutionen eines geeigneten Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (1.) von y unabhängig sind, so folgt aus Satz I. No. 3, dass die Wurzeln der Gleichung (4.) von y unabhängig sind.

Nun ist $Q_k(a)$ eine rationale Function des Ortes in der Riemann- [173 schen Fläche (2.) und hat einen von y unabhängigen Werth ε_k:

$$Q_k(a) = \varepsilon_k. \tag{5.}$$

Da aber $\psi(x,y)$ irreductibel ist, so folgt, dass die determinirende Fundamentalgleichung (4.) dieselbe bleibt, welche Wurzel x der Gleichung (2.) auch für a gewählt wird.

Sind daher r_1, r_2, r_3 die Wurzeln der Gleichung (2.), so folgt:

Es giebt ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.), $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ von der Beschaffenheit, dass

$$\zeta_1 \psi(x,y)^{-r_1}, \quad \zeta_2 \psi(x,y)^{-r_2}, \quad \zeta_3 \psi(x,y)^{-r_3}$$

ganze rationale Functionen von $\log \psi(x,y)$ darstellen, deren Coefficienten eindeutig, endlich und stetig sind, solange y dem Gebiete Γ angehört und x einem entsprechenden Gebiete G, welches sich aus Gleichung (2.) ergiebt*).

Dieses stimmt mit einem Satze des Herrn Horn**) überein, welchen derselbe aus anderen Principien und an den Differentialgleichungen (1.), (2.), (3.) No. 7 selbst herleitet.

Die Einschränkung, dass y in dem oben bezeichneten Gebiete Γ sich bewege, ist erforderlich, weil entweder die Integrale der Gleichung (1.) in der Umgebung von $x = a$ für solche Werthe von y, für welche

$$\psi = 0 \text{ mit } \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \text{ oder } \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \text{ oder mit } \psi_1 = 0$$

gemeinschaftliche Lösungen besitzt, unbestimmt werden können, oder die determinirende Fundamentalgleichung (4.) ihren Charakter ändern kann.

*) Siehe Crelles Journal, Bd. 66, S. 148 ff.[1]).

**) Acta Mathematica, T. 12, S. 152.

1) Abh. VI, S. 188 ff., Band I dieser Ausgabe. R. F.

Nach Satz II. No. 3 lässt sich das Fundamentalsystem $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ so wählen, dass dadurch auch Gleichung (5.) voriger Nummer, d. h. also das System (1.), (2.), (3.) derselben Nummer befriedigt wird.

Ist demnach $\psi(x, y)$ weder von x noch von y unabhängig, so genügt es, um festzustellen, ob das System (1.), (2.), (3.) voriger Nummer für $\psi = 0$ Unbestimmtheiten zulässt, die Bedingungen (3.) zu entwickeln.

Diese Entwickelung ergiebt folgendes Resultat:

Sei:

$$(6.)\qquad \left\{\begin{aligned} a_i &= \frac{A_i}{\psi^{h+1}}, \\ b_i &= \frac{B_i}{\psi^{h+1}}, \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3)$$

174] wo h so gewählt ist, dass A_i, B_i für $\psi = 0$ nicht mehr unendlich werden. Alsdann muss sein:

$$(7.)\qquad A_1 + B_2 \equiv 0, \text{ mod. } \psi^h,$$

$$(8.)\qquad \left[\frac{\partial A_1}{\partial x} + A_0 - A_1 \frac{\partial \log A_2}{\partial x}\right]\psi^{h+1} + A_2 B_1 - A_1 B_2 \equiv 0, \text{ mod. } \psi^{2h},$$

$$(9.)\qquad \left[\frac{\partial A_0}{\partial x} - A_0 \frac{\partial \log A_2}{\partial x}\right]\psi^{h+1} + A_2 B_0 - A_0 B_2 \equiv 0, \text{ mod. } \psi^{2h-1}.$$

Um diese Bedingungen mit den von Herrn Horn*) aufgestellten zu vergleichen, ist zweierlei zu beachten:

Erstlich brauchen wir nach den obigen Entwickelungen die Grössen c_0, c_1, c_2 nicht in unsere Bedingungsgleichung aufzunehmen.

Zweitens sind in unserer Darstellung die Bedingungen für die Existenz des den Gleichungen (1.), (2.), (3.) voriger Nummer gemeinsamen Fundamentalsystems z_1, z_2, z_3 nach den Vorschriften am Schlusse der vorigen Nummer getrennt zu behandeln, während von Herrn Horn in seine Regularitätsbedingungen theilweise jene Existenzbedingungen mit aufgenommen worden sind.

Ist $\psi(x, y)$ von x unabhängig, so ist das Verhalten von z in der Umgebung von $\psi = 0$ von den Coefficienten der Gleichung (4a.) No. 7 festzustellen, während für solche $\psi(x, y)$, die von y unabhängig sind, dieses Verhalten nach den Coefficienten der Gleichung (4.) zu beurtheilen ist.

*) A. a. O. Habilitationsschrift.

9.

Zu den Systemen (S) gehören auch die partiellen Differentialgleichungen:

$$(1.)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b\frac{\partial z}{\partial x} + c\frac{\partial z}{\partial y} + dz.$$

$$(2.)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a_1\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b_1\frac{\partial z}{\partial x} + c_1\frac{\partial z}{\partial y} + d_1 z.$$

Denn durch Differentiation von (1.) nach x ergiebt sich:

$$(3.)\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = a\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + a_2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b_2\frac{\partial z}{\partial x} + c_2\frac{\partial z}{\partial y} + d_2 z.$$

Differentiiren wir (1.) nach y, so folgt:

$$(4.)\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} - a\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = a_3\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b_3\frac{\partial z}{\partial x} + c_3\frac{\partial z}{\partial y} + d_3 z.$$

Differentiiren wir endlich (2.) nach x, so ergiebt sich: [175

$$(5.)\qquad -a_1\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = a_4\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b_4\frac{\partial z}{\partial x} + c_4\frac{\partial z}{\partial y} + d_4 z.$$

Die Grössen a_k, b_k, c_k, d_k in den Gleichungen (3.) bis (5.) setzen sich aus den Coefficienten der Gleichungen (1.) und (2.) und ihren Ableitungen rational zusammen.

Aus (4.) und (5.) folgern wir:

$$(6.)\qquad [1 - aa_1]\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = a_5\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b_5\frac{\partial z}{\partial x} + c_5\frac{\partial z}{\partial y} + d_5 z,$$

$$(7.)\qquad [1 - aa_1]\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = a_6\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b_6\frac{\partial z}{\partial x} + c_6\frac{\partial z}{\partial y} + d_6 z.$$

Substituiren wir (6.) in (3.), so folgt:

$$(8.)\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = a_7\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b_7\frac{\partial z}{\partial x} + c_7\frac{\partial z}{\partial y} + d_7 z.$$

Differentiiren wir (8.) nach x und setzen den Werth von $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$ aus (6.) ein, so folgt:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = a_8 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + b_8 \frac{\partial z}{\partial x} + c_8 \frac{\partial z}{\partial x} + d_8 z. \tag{9.}$$

Eliminiren wir zwischen (1.), (8.) und (9.) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, so erhalten wir für z die Differentialgleichung vierter Ordnung nach der Variabeln x:

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + p_1 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + p_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + p_3 \frac{\partial z}{\partial x} + p_4 z = 0. \tag{α.}$$

Eliminiren wir $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ zwischen (1.) und (8.), so folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = A_0 z + A_1 \frac{\partial z}{\partial x} + A_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + A_3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}. \tag{β.}$$

Die Coefficienten der Gleichungen (α.) und (β.) setzen sich aus den Coefficienten der Gleichungen (1.) und (2.) und aus ihren Ableitungen rational zusammen.

Demnach fallen die Gleichungen (1.) und (2.) in die Kategorie der in No. 6 discutirten Systeme (S). Die Gleichungen (α.) und (β.) sind besondere Fälle der Gleichungen (A^2.) und (B^2.).

Von den Ausnahmefällen heben wir hier nur den Fall hervor, dass:

$$1 - aa_1 = 0, \tag{10.}$$

176] welcher entweder auf das System (1.), (2.), (3.) No. 7 zurückführt oder, wenn wir:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - b \frac{\partial z}{\partial x} - c \frac{\partial z}{\partial y} - dz = P,$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - b_1 \frac{\partial z}{\partial x} - c_1 \frac{\partial z}{\partial y} - d_1 z = Q$$

setzen, erforderlich macht, dass identisch für jede Function z von x, y

$$\frac{\partial P}{\partial y} + a \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

sei.

Nach einem von Herrn Picard*) in besonderen Fällen angegebenen Verfahren lässt sich zeigen, dass die eindeutigen Functionen x und y zweier

*) Liouville, Journal, sér. IV, T. 1 (1885), p. 112–113.

Variabeln u, v, welche Substitutionen der Form

$$\left(u, v, \frac{au+b}{cu+d}, \frac{a'u+b'}{c'u+d'}\right)$$

zulassen und überdies so beschaffen sind, dass einem Werthenpaare (x, y) nur eine endliche Anzahl von incongruenten Werthen (u, v) entspricht, durch die Umkehrung von Quotienten der Lösungen eines Systems von partiellen Differentialgleichungen der Form (1.) und (2.) mit algebraischen Coefficienten erhalten werden können.

ANMERKUNGEN.

1) **Änderungen gegen das Original.**

Es wurde gesetzt:

S. 123, Gleichung (B.) $\frac{\partial^{m-1} z}{\partial x^{m-1}}$ statt $\frac{\partial^m z}{\partial x^m}$,
„ 135, Zeile 3 v. u. wurde »mit« vor ψ_1 hinzugefügt,
„ 2 v. u. wurde »gemeinschaftliche Lösungen besitzt« hinzugefügt,
„ 136, „ 13 wurde »sein« hinzugefügt,
„ 139, „ 4 v. u. »entspricht« statt »entsprechen«.

2) Zu Gleichung (B.) S. 125 sei bemerkt: Dass $A_{\lambda r}$ eindeutige Functionen von x sind, folgt aus No. 2. Die Thatsache aber, dass diese Grössen auch eindeutige Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_{\varrho-1}$ sind, bedarf noch des Beweises. Man vergleiche dazu:

L. Schlesinger, Sitzungsberichte der Königl. preuss. Akad. der Wiss. 1902, S. 288; Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 124, S. 311, 312.

R. Fuchs, Beilage zum Programm des Bismarck-Gymnasiums Dt. Wilmersdorf, Ostern 1902, No. V, S. 13 ff.

L. Schlesinger, Journal f. d. r. u. a. Mathematik, Bd. 129, S. 294, No. II, Gl. (6.). R. F.

LX.

ÜBER DIE RELATIONEN, WELCHE DIE ZWISCHEN JE ZWEI SINGULÄREN PUNKTEN ERSTRECKTEN INTEGRALE DER LÖSUNGEN LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN MIT DEN COEFFICIENTEN DER FUNDAMENTALSUBSTITUTIONEN DER GRUPPE DERSELBEN VERBINDEN.

(Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1892, LIV, S. 1113—1128; vorgelegt am 22. December 1892; ausgegeben am 12. Januar 1893.)

Die folgende Notiz nimmt auf meine Arbeit im 76. Bande des Crelle- [1113
schen Journals S. 177 ff. Bezug, welche den Titel führt: »Über Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden«[1]). In dieser Notiz soll auf die Rolle hingewiesen werden, welche die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Lösungen der Differentialgleichung in jenen Relationen spielen. Zu diesem Ende ist nur eine etwas veränderte Schreibweise der rechten Seite der in der citirten Arbeit mit (S.) bezeichneten Gleichung erforderlich. Durch diese Schreibweise tritt der Umstand besonders hervor, dass die rechte Seite der Gleichung (S.) lediglich von den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Gruppe der Differentialgleichung abhängt. Dieser Umstand aber bringt es mit sich, dass die Relationen (S.) und (T.) einen invarianten Charakter haben, in dem Sinne, dass sie für die gesammte Klasse von Differentialgleichungen, zu welcher eine vorgelegte Differentialgleichung gehört, die gleiche Form beibehalten. Diese Invarianz macht es möglich, gewisse beschränkende Voraussetzungen, welche in der oben citirten Arbeit über die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen ge-

1) Abh. XVI, S. 415, Band I dieser Ausgabe. R. F.

macht worden sind, aufzuheben. Indem wir dieses in gegenwärtiger Notiz nachweisen, haben wir, um Complicationen in der Darstellung zu vermeiden, hier noch vorausgesetzt, dass die Differenzen zweier jener Wurzeln, wenn sie nicht sämmtlich ganzzahlig sind, aber zum Auftreten von Logarithmen keine Veranlassung geben, nicht zum Theil ganzzahlig sein sollen, und behalten 1114] uns vor, an anderer Stelle diesen Punkt einer besonderen Erörterung zu unterwerfen. Ebenso haben wir die Anwendungen, welcher die Relationen (S.) und (T.) fähig sind, für eine andere Gelegenheit aufsparen müssen.

1.

Wir behalten hier, mit einigen unwesentlichen Abänderungen, die Bezeichnungen der Abhandlung in Bd. 76 des Crelleschen Journals, S. 177—213[1], die wir im Folgenden mit dem Zeichen Abh. citiren wollen, bei.

Es sei hiernach

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho)(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_\sigma)$$

$$\text{(B.)} \qquad [y]_1^{(x)} = \sum_0^n{}_{\mathfrak{a}} F_{(n-\mathfrak{a})(\tau-1)}(x)\, F(x)^{\mathfrak{a}}\, y^{(\mathfrak{a})} = 0,$$

wo $F_\varkappa(x)$ eine ganze rationale Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von x bedeutet, und wo

$$\text{(1.)} \qquad \tau = \varrho + \sigma$$

gesetzt ist.

Wir haben mit $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ diejenigen singulären Punkte bezeichnet, in welchen sich die Integrale so verzweigen, dass nicht ihre Quotienten sämmtlich ungeändert bleiben, mit $b_1, b_2, \dots, b_\sigma$ diejenigen, bei deren Umkreisung sämmtliche Integral-Quotienten ungeändert bleiben.

Die zu Gleichung (B.) adjungirte Differentialgleichung:

$$\text{(C.)} \qquad [z]_2^{(x)} = \sum_0^n{}_{\mathfrak{a}} (-1)^{\mathfrak{a}-1} \frac{d^{\mathfrak{a}}}{dx^{\mathfrak{a}}} [F_{(n-\mathfrak{a})(\tau-1)}(x)\, F(x)^{\mathfrak{a}}\, z] = 0$$

bringen wir ebenfalls in die Form:

$$\text{(2.)} \qquad [z]_2^{(x)} = \sum_0^n{}_{\mathfrak{a}} G_{(n-\mathfrak{a})(\tau-1)}(x)\, F(x)^{\mathfrak{a}}\, z^{(\mathfrak{a})} = 0,$$

$G_\varkappa(x)$ eine ganze rationale Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von x.

Wir setzen vorläufig noch wie in Abh. voraus, dass die Wurzeln der zu $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen in ihren realen Theilen negativ und grösser als die negative Einheit sind. Dann

[1] Abh. XVI, S. 415—455, Band I dieser Ausgabe. R. F.

haben*) auch bei der Gleichung (C.) die Wurzeln der zu $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen die gleiche Eigenschaft.

Setzen wir [1115

$$A_\varkappa = F_{(n-\varkappa)(\tau-1)}(x)\, F(x)^\varkappa,$$

und bezeichnen mit $\mathfrak{A}_\varkappa$ diejenige Function von α, welche aus $A_\varkappa$ durch Vertauschung von x mit α hervorgeht, sowie mit $P_\varkappa$ den Ausdruck $\frac{A_\varkappa - \mathfrak{A}_\varkappa}{x-\alpha}$, so hat der in Abh. S. 178[2]) eingeführte Werth U die Form

$$\text{(3.)} \qquad U = -P_0 + \frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \dots \pm \frac{\partial^n P_n}{\partial x^n} \; {}^{**}).$$

Es sei $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ das zu $x = \infty$ gehörige Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (B.), $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ das entsprechende Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (C.), und zwar derart, dass $\eta_\varkappa, \zeta_\varkappa$ adjungirte Integrale darstellen.

Ferner bedeute $\eta_{1\mu}, \eta_{2\mu}, \dots, \eta_{n\mu}$ das zum singulären Punkte $a_{\mu+1}$ gehörige Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (B.),

$$\zeta_{1\mu}, \zeta_{2\mu}, \dots, \zeta_{n\mu}$$

das zu demselben singulären Punkte gehörige Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (C.), derart, dass wieder $\eta_{\varkappa\mu}, \zeta_{\varkappa\mu}$ adjungirte Elemente sind. Wir setzen, wie in Abh. S. 190[4]):

$$\text{(4.)} \qquad \begin{cases} \eta_{\mathfrak{a}} = \sum_1^n{}_{\mathfrak{c}}\, b_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\, \eta_{\mathfrak{c}\mu}, \\ \zeta_{\mathfrak{a}} = \sum_1^n{}_{\mathfrak{c}}\, c_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\, \zeta_{\mathfrak{c}\mu}, \end{cases}$$

so ergiebt sich***):

$$\text{(5.)} \qquad \sum_1^n{}_i\, b_{\mathfrak{a}i}\, c_{\mathfrak{b}i} = 0, \qquad (\mathfrak{a} \lesseqgtr \mathfrak{b})$$

$$\text{(6.)} \qquad \sum_1^n{}_i\, b_{\mathfrak{a}i}\, c_{\mathfrak{a}i} = 1,$$

*) Siehe Abh. S. 180[1]).

**) Abh. S. 179[3]).

***) Cf. Abh. S. 194—195[5]).

[1] S. 419, Band I dieser Ausgabe. R. F.

[2] Ebenda S. 417. R. F.

[3] Ebenda S. 417. R. F.

[4] Ebenda S. 430. R. F.

[5] Ebenda S. 434—435. R. F.

wenn über die willkürlichen Factoren in $\eta_{l\alpha}, \zeta_\alpha$, sowie in $\eta_{l\alpha_\mu}, \zeta_{\alpha_\mu}$, auf dieselbe Weise wie in Abh. S. 193[1]) Gleichung (8.) und S. 195[2]) Gleichung (3.) disponirt wird.

Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung für Gleichung (B.), so fanden wir in Abh. S. 206[3]):

$$\text{(S.)} \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha U \eta_{l\varkappa} \mathfrak{z}_l = (-1)^n \pi \sum_1^n {}_\alpha b_{\varkappa\alpha} c_{l\alpha} \frac{e^{-\pi r_\alpha i}}{\sin \pi r_\alpha},$$

1116] $$\text{(T.)} \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha U \eta_{l\varkappa} \mathfrak{z}_l = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n;\ l = 1, 2, \ldots, n)$$

($a_\nu, a_{\nu+1}$ von jeder der Grössen $a_\mu, a_{\mu+1}$ verschieden).

In diesen Ausdrücken bedeutet $\mathfrak{z}_l$ diejenige Function von α, welche aus ζ_l durch Vertauschung von x mit α hervorgeht.

Bezeichnen wir die Substitution

$$\text{(7.)} \qquad \begin{pmatrix} b_{11}, \ldots, b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}, \ldots, b_{nn} \end{pmatrix} \text{ mit } B,$$

die Substitution

$$\text{(8.)} \qquad \begin{bmatrix} \lambda_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ mit } L$$

$$\lambda_\alpha = e^{2\pi r_\alpha i},$$

und endlich die Substitution, welche das Fundamentalsystem

$$\eta_{l1}, \eta_{l2}, \ldots, \eta_{ln}$$

durch einen Umlauf um $a_{\mu+1}$ erleidet, mit S_μ, so ist:

$$\text{(9.)} \qquad S_\mu = BLB^{-1}.$$

Wir wollen

$$\text{(10.)} \qquad S_\mu = \begin{pmatrix} g_{11}, \ldots, g_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_{n1}, \ldots, g_{nn} \end{pmatrix}$$

1) S. 432, Band I dieser Ausgabe. R. F.
2) Ebenda S. 435. R. F.
3) Ebenda S. 447. R. F.

setzen, und nunmehr um Complicationen zu vermeiden, zu den oben über die Wurzeln der zu $a_1, \ldots, a_\varrho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen gemachten Voraussetzungen noch die hinzufügen, dass nicht die Differenz zweier einer ganzen Zahl gleich ist.

Alsdann ergiebt sich*), dass die Verhältnisse der Coefficienten der Substitution B^{-1}, folglich auch die Verhältnisse der Coefficienten $b_{i\alpha}$ sich rational durch die Grössen $g_{i\alpha}$ und $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vollständig bestimmen lassen.

Aus den Gleichungen (5.) und (6.) folgt

$$\text{(11.)} \qquad c_{\varkappa l} = \frac{B_{\varkappa l}}{\Delta},$$

wo Δ die Determinante

$$\text{(12.)} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} b_{11}, \ldots, b_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}, \ldots, b_{nn} \end{vmatrix}$$

und

$$\text{(13.)} \qquad B_{\varkappa l} = \frac{\partial \Delta}{\partial b_{\varkappa l}}.$$ [1117

Wir setzen (11.) in Gleichung (S.) ein und erhalten

$$\text{(S'.)} \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha U \eta_{l\varkappa} \mathfrak{z}_l = (-1)^n 2\pi i \sum_1^n {}_\alpha \frac{A_\alpha^{(\varkappa, l)}}{\lambda_\alpha - 1}, \quad \begin{pmatrix} \varkappa = 1, 2, \ldots, n \\ l = 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$$

wo

$$\text{(14.)} \qquad A_\alpha^{(\varkappa, l)} = \frac{b_{\varkappa\alpha} B_{l\alpha}}{\Delta}.$$

Die Grössen $A_\alpha^{(\varkappa, l)}$ sind nur von den Verhältnissen der Grössen $b_{1\alpha}, b_{2\alpha}, \ldots, b_{n\alpha}$ abhängig. Es ergiebt sich also:

Die Grössen $A_\alpha^{(\varkappa, l)}$ sind wohlbestimmte rationale Functionen der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ und g_{ik}, sie sind daher lediglich durch die auf $a_{\mu+1}$ bezügliche Fundamentalsubstitution bestimmt.

Die Gleichungen (S'.) repräsentiren hiernach n^2 Gleichungen für die n^2 Coefficienten g_{ik} der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen Fundamentalsubstitution des Fundamentalsystemes

$$\eta_{l1}, \eta_{l2}, \ldots, \eta_{ln}.$$

*) Siehe meine Arbeit in CRELLEs Journal, Bd. 66, S. 133, woselbst g_{ik} mit α_{ik} und die Horizontalreihen von $(B)^{-1}$ typisch mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnet sind[1]).

1) Abh. VI, S. 172–173, Band I dieser Ausgabe. R. F.

2.

Betrachten wir nunmehr eine lineare Differentialgleichung

$$A_0 y + A_1 y' + \cdots + A_n y^{(n)} = 0, \tag{1.}$$

deren Coefficienten ganze rationale Functionen von x, und deren Integrale überall bestimmte Werthe haben. Wir wollen für dieselbe die einschränkenden Voraussetzungen, welche wir in Abh. S. 183—184[1]) über die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen gemacht haben, fallen lassen, und vorläufig, um Complicationen zu vermeiden, nur Folgendes festsetzen: Die singulären Punkte $b_1, b_2, \ldots, b_\sigma$ seien so beschaffen, dass die sämmtlichen Differenzen der Wurzeln der ihnen zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen ganze Zahlen sind, ohne dass sie zum Auftreten von Logarithmen in ihrer Umgebung Veranlassung geben. Dagegen seien $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ singuläre Punkte, in welchen sich sämmtliche Integrale verzweigen, und für welche nicht die Differenzen zweier Wurzeln einer determinirenden Fundamentalgleichung ganze Zahlen sind.

Ist nun

$$u = P_0 y + P_1 y' + \cdots + P_{n-1} y^{(n-1)}, \tag{2.}$$

1118] wo $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ rationale Functionen von x bedeuten, so genügt u einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$C_0 u + C_1 u' + \cdots + C_n u^{(n)} = 0 \tag{3.}$$

derselben Klasse mit (1.), welche ebenfalls die singulären Punkte

$$a_1, \ldots, a_\varrho, \quad b_1, \ldots, b_\sigma$$

besitzt, und deren Integrale d e n s e l b e n F u n d a m e n t a l s u b s t i t u t i o n e n zugehören, welchen die Integrale von (1.) unterworfen sind.

Wir wollen jetzt zeigen, dass wir die rationalen Functionen $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ so wählen können, dass die Gleichung (3.) überhaupt dieselben singulären Punkte wie (1.) besitzt, und dass die realen Theile der Wurzeln der auf $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichungen zwischen Null und der negativen Einheit enthalten sind.

1) S. 422, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Wir können zunächst durch eine Substitution der Form

$$y = (x-a_1)^{-\alpha_1}(x-a_2)^{-\alpha_2}\ldots(x-a_\varrho)^{-\alpha_\varrho} w, \tag{4.}$$

wo die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho$ Null oder positive ganze Zahlen sind, aus (1.) eine Differentialgleichung in w herstellen von der Beschaffenheit, dass die Wurzeln der zu $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen in ihren realen Theilen positiv sind. Wir setzen demnach voraus, dass schon die Gleichung (1.) diese Eigenschaft habe.

Sei nunmehr $m_a - 1$ die höchste ganze Zahl, welche in den realen Theilen der Wurzeln der zu a_a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen enthalten ist, alsdann werde

$$\Pi(x) = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\ldots(x-a_\varrho)^{m_\varrho} \tag{5.}$$

gesetzt.

Sei ferner

$$\psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\varrho) \tag{6.}$$

und

$$P_\varkappa(x) = \frac{\varphi_\varkappa(x)\,\psi(x)^\varkappa}{\Pi(x)}, \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n-1) \tag{7.}$$

wo $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ noch näher zu bestimmende ganze rationale Functionen bedeuten.

Wir wollen alsdann in Gleichung (2.) für $P_\varkappa(x)$ die durch die Gleichung (7.) bestimmten rationalen Functionen setzen.

Bezeichnen wir mit $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der zu einem Punkte a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, wo a aus der Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ entnommen ist, und mit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ das bezüglich zugehörige Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.). Sei ferner r_1 diejenige der [1119 Grössen $r_1, r_2, \ldots, r_n$, deren realer Theil die höchste ganze Zahl $m-1$ (die oben dem Punkte a zugeordnet worden) enthält. Wird $\varphi_0(a)$ von Null verschieden angenommen, so gehört u_1, welches aus (2.) durch die Substitution $y = y_1$ erhalten wird, zu einem Exponenten, dessen realer Theil zwischen Null und der negativen Einheit gelegen ist. Möge der reale Theil von r_a die grösste ganze Zahl $m-1-p_a$ enthalten (p_a eine positive ganze Zahl oder Null) und sei

$$y_a = c_0(x-a)^{r_a} + c_1(x-a)^{r_a+1} + \cdots, \tag{8.}$$

so wollen wir $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ so einrichten, dass

$$(9.)\quad \left\{\begin{aligned} & c_0\Big[\frac{1}{\lambda!}D_{\mathfrak{a}}^{\lambda}\varphi_0 + r_{\mathfrak{a}}\frac{1}{(\lambda+1)!}D_{\mathfrak{a}}^{\lambda+1}(\varphi_1\psi) + r_{\mathfrak{a}}(r_{\mathfrak{a}}-1)\frac{1}{(\lambda+2)!}D_{\mathfrak{a}}^{\lambda+2}(\varphi_2\psi^2)+\cdots \\ & \qquad + r_{\mathfrak{a}}(r_{\mathfrak{a}}-1)\dots(r_{\mathfrak{a}}-n+2)\frac{1}{(\lambda+n-1)!}D_{\mathfrak{a}}^{\lambda+n-1}(\varphi_{n-1}\psi^{n-1})\Big] \\ & + c_1\Big[\frac{1}{(\lambda-1)!}D_{\mathfrak{a}}^{\lambda-1}\varphi_0 + (r_{\mathfrak{a}}+1)\frac{1}{\lambda!}D_{\mathfrak{a}}^{\lambda}(\varphi_1\psi) + (r_{\mathfrak{a}}+1)r_{\mathfrak{a}}\frac{1}{(\lambda+1)!}D_{\mathfrak{a}}^{\lambda+1}(\varphi_2\psi^2)+\cdots \\ & \qquad + (r_{\mathfrak{a}}+1)r_{\mathfrak{a}}\dots(r_{\mathfrak{a}}-n+3)\frac{1}{(\lambda+n-2)!}D_{\mathfrak{a}}^{\lambda+n-2}(\varphi_{n-1}\psi^{n-1})+\cdots\Big]+\cdots \\ & + c_{\lambda}\Big[\varphi_0(a) + (r_{\mathfrak{a}}+\lambda)\frac{1}{1!}D_{\mathfrak{a}}(\varphi_1\psi) + (r_{\mathfrak{a}}+\lambda)(r_{\mathfrak{a}}+\lambda-1)\frac{1}{2!}D_{\mathfrak{a}}^{2}(\varphi_2\psi^2)+\cdots \\ & \qquad + (r_{\mathfrak{a}}+\lambda)(r_{\mathfrak{a}}+\lambda-1)\dots(r_{\mathfrak{a}}+\lambda-n+2)\frac{1}{(n-1)!}D_{\mathfrak{a}}^{n-1}(\varphi_{n-1}\psi^{n-1})\Big] = 0. \end{aligned}\right.$$

$$\left(\mathfrak{a}=2,3,\dots,n;\ \lambda=0,1,2,\dots,p_{\mathfrak{a}}-1;\ D_{\mathfrak{a}}^{p}(f(x))=\left[\frac{d^p f(x)}{dx^p}\right]_{x=a}\right)$$

Wenn in diesen Gleichungen successive $\mathfrak{a} = 2, 3, \dots, n$ gesetzt wird, so erhalten wir für $\lambda = 0$ $n-1$ Gleichungen für die Unbekannten $\varphi_0(a), \varphi_1(a), \dots, \varphi_{n-1}(a)$.

Ebenso erhalten wir für $\lambda = 1$ $n-1$ Gleichungen für die Unbekannten $\varphi_0(a), \varphi_1(a), \dots, \varphi_{n-1}(a)$; $\varphi_0'(a), \varphi_1'(a), \dots, \varphi_{n-1}'(a)$, ebenso für $\lambda = 2$ $n-1$ Gleichungen für die Unbekannten $\varphi_0(a), \varphi_1(a), \dots, \varphi_{n-1}(a)$; $\varphi_0'(a), \varphi_1'(a), \dots, \varphi_{n-1}'(a)$; $\varphi_0^{(2)}(a), \varphi_1^{(2)}(a), \dots, \varphi_{n-1}^{(2)}(a)$ u. s. w.

Denken wir uns die Grössen $r_2, r_3, \dots, r_n$ so geordnet, dass

$$p_2 \geqq p_3 \geqq \cdots \geqq p_n,$$

so liefern die Gleichungen (9.) demnach für die Unbekannten

$$\varphi_0^{(\lambda)}(a),\ \varphi_1^{(\lambda)}(a),\ \dots,\ \varphi_{n-1}^{(\lambda)}(a) \qquad (\lambda = 0, 1, \dots, p_2-1)$$

im Ganzen $p_2(n-1)$ Gleichungen. Da die Anzahl der Unbekannten gleich $p_2 n$ ist, so sind die Gleichungen immer erfüllbar.

Dieselbe Schlussweise bleibt für jeden der singulären Punkte $a_{\varkappa}$ gültig.

1120] Sei

$$(10.)\qquad \varphi_{\mathfrak{b}}(x) = (x-a_1)^{l_1+1}(x-a_2)^{l_2+1}\dots(x-a_\varrho)^{l_\varrho+1}\Sigma,$$

wo

$$\Sigma = \sum_{1}^{\varrho}{}_{\mathfrak{a}} \sum_{0}^{l_{\mathfrak{a}}+1}{}_{\lambda} \frac{C_{\mathfrak{b}\lambda}^{(\mathfrak{a})}}{(x-a_{\mathfrak{a}})^{\lambda}},$$

worin $C_{\mathfrak{b}\lambda}^{(\mathfrak{a})}$ willkürliche Grössen, $l_{\mathfrak{a}}$ positive ganze Zahlen bedeuten. Nach dem Zusammenhange, welcher aus der Theorie der Zerlegung einer rationalen Function in Partialbrüche zwischen den Grössen $C_{\mathfrak{b}\lambda}^{(\mathfrak{a})}$ und den Werthen $\varphi_{\mathfrak{b}}^{(\lambda)}(a_{\mathfrak{a}})$ sich ergiebt, folgt daher, dass auch $\varphi_{\mathfrak{b}}^{(\lambda)}(a_{\mathfrak{a}})$ für $\lambda = 0, 1, \dots, l_{\mathfrak{a}}$; $\mathfrak{b} = 0, 1, \dots, n-1$; $\mathfrak{a} = 1, 2, \dots, \varrho$ willkürlich vorgeschrieben werden dürfen. Ist daher $\lambda = l_{\mathfrak{a}}$ mindestens so gross als der höchste Index λ der im Gleichungssystem (9.) für $a = a_{\mathfrak{a}}$ auftretenden Grössen $\varphi_{\mathfrak{b}}^{(\lambda)}(a_{\mathfrak{a}})$, so ergiebt sich demnach, dass wir stets n ganze rationale Functionen $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ von der Beschaffenheit angeben können, dass $\varphi_{\mathfrak{b}}^{(\lambda)}(a_{\mathfrak{a}})$ den $(p_{12}+p_{22}+\cdots+p_{\varrho 2})(n-1)$ Gleichungen genügt, die sich aus (9.) für $a = a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ ergeben, wenn $p_{\mathfrak{a}2}$ für den singulären Punkt $a_{\mathfrak{a}}$ dieselbe Bedeutung hat wie oben allgemein p_2 für den singulären Punkt a.

Da die Wurzeln der zu $a_{\mathfrak{a}}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden, und da die höheren Ableitungen $\varphi_{\mathfrak{b}}^{(\lambda)}(a_{\mathfrak{a}})$, die noch nicht im Gleichungssystem (9.) (für $a = a_1, a_2, \dots, a_\varrho$) auftreten, ebenfalls willkürlich wählbar bleiben, so ergiebt sich, dass daher $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ noch so gewählt werden können, dass in $u_{\mathfrak{a}\varkappa}$ (dem Resultat der Substitution von $y_{\mathfrak{a}\varkappa}$ für y in (2.)) nicht höhere Potenzen von $x-a_{\mathfrak{a}}$ verschwinden, als es die Gleichungen (9.) erfordern, so dass die realen Theile der Wurzeln der sämmtlichen zu $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen bei der Gleichung (3.) zwischen Null und der negativen Einheit liegen.

Hiermit ist das am Eingange dieser Nummer ausgesprochene Theorem bewiesen.

Für den Fall, dass bei Gleichung (1.) unter den Wurzeln der zu $a_{\mathfrak{a}}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung eine solche sich befindet, deren realer Theil ganzzahlig, also unter den Wurzeln der entsprechenden Fundamentalgleichung bei (3.) eine solche, deren realer Theil Null, wenden wir auf Gleichung (3.) die Substitution

$$(11.)\qquad u = (x-a_1)^{\varepsilon_1}(x-a_2)^{\varepsilon_2}\dots(x-a_\varrho)^{\varepsilon_\varrho}w$$

an, wo $\varepsilon_{\mathfrak{a}}$ eine reale positive zwischen Null und Eins gelegene Grösse bedeutet, von der Beschaffenheit, dass $r_{\mathfrak{a}1}-\varepsilon_{\mathfrak{a}}, r_{\mathfrak{a}2}-\varepsilon_{\mathfrak{a}}, \dots, r_{\mathfrak{a}n}-\varepsilon_{\mathfrak{a}}$ noch immer [1121 zwischen Null und der negativen Einheit gelegene reale Theile haben, während

ε_a die Null ist, falls sich unter den Wurzeln der zu a_a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung bei (3.) nicht eine solche befindet, deren realer Theil Null*).

Sei wiederum die Fundamentalsubstitution der Integrale der Gleichung (1.), welche dem Umlaufe um $a_{\mu+1}$ entspricht

$$S_\mu = \begin{pmatrix} g_{11}, & \dots, & g_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ g_{n1}, & \dots, & g_{nn} \end{pmatrix},$$

so ist dieses auch die Fundamentalsubstitution der Integrale der Gleichung (3.), welche demselben Umlauf entspricht, während die Integrale der Gleichung in w (die aus (3.) durch die Substitution (11.) hervorgeht) für denselben Umlauf der Substitution

$$S'_\mu = \begin{pmatrix} jg_{11}, & \dots, & jg_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ jg_{n1}, & \dots, & jg_{nn} \end{pmatrix}$$

unterliegen, wo $j = e^{-2\varepsilon_{\mu+1}\pi i}$.

Es sind aber auf Gleichung (3.) oder die Differentialgleichung für w die Relationen (S.), (S'.) und (T.) unmittelbar anwendbar, aus welchen sich alsdann die Beziehungen für die Substitutionscoefficienten $g_{\varkappa\lambda}$ bei Gleichung (1.) ergeben.

3.

Die Gleichungen (S'.) und (T.) repräsentiren Relationen zwischen den Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Integrale $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ und den bestimmten Integralen der Form

$$(1.)\qquad J^{(\mu)}_{\varkappa a} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^a \eta_{1\varkappa}\, dx,$$

$$(2.)\qquad H^{(\mu)}_{\varkappa a} = \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^a \zeta_\varkappa\, dx.$$

*) Siehe Abh. S. 208[1]).

[1]) S. 449, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Man erkennt, dass diese Ausdrücke den Gleichungen

$$(3.)\qquad J^{(1)}_{\varkappa a} + J^{(2)}_{\varkappa a} + \dots + J^{(\varrho)}_{\varkappa a} = M_\varkappa\, 2\pi i \mu_{\varkappa a},$$

$$(4.)\qquad H^{(1)}_{\varkappa a} + H^{(2)}_{\varkappa a} + \dots + H^{(\varrho)}_{\varkappa a} = \frac{1}{M_\varkappa} 2\pi i \nu_{\varkappa a}$$

genügen, wo $M_\varkappa$ den Factor bedeutet, mit welchem $\eta_{1\varkappa}$ bei einem nur um die Punkte $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ vollzogenen Umlauf multiplicirt wird, und die Grössen [1122 $\mu_{\varkappa a}, \nu_{\varkappa a}$ ganze Zahlen oder Null bezeichnen. Die Ausdrücke $J^{(\varrho)}_{\varkappa a}$, $H^{(\varrho)}_{\varkappa a}$ bedeuten in den Gleichungen (3.) und (4.) bez. die Integrale

$$\int_{a_\varrho}^{a_1} x^a \eta_{1\varkappa}\, dx, \quad \int_{a_\varrho}^{a_1} x^a \zeta_\varkappa\, dx$$

erstreckt längs des von a_1 über $a_2, a_3, \dots, a_\varrho$ führenden Schnittes, und zwar auf demjenigen Ufer desselben, welches dem Ufer gegenüberliegt, längs dessen die Integrale $J^{(\mu)}_{\varkappa a}$, $H^{(\mu)}_{\varkappa a}$ für $\mu = 1, 2, \dots, \varrho - 1$ vollzogen sind.

Setzen wir in Gleichung (B.) $y = \eta_{1\varkappa}$, multipliciren dieselbe mit x^a, und integriren zwischen den Grenzen $a_\mu, a_{\mu+1}$, so erhalten wir mit Rücksicht darauf, dass die realen Theile der Wurzeln der zu $a_1, a_2, \dots, a_\varrho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen zwischen Null und der negativen Einheit gelegen sind, durch wiederholte Anwendung der theilweisen Integration

$$(5.)\qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} [x^a]_2\, \eta_{1\varkappa}\, dx = 0.$$

Ebenso ergiebt die Integration von (C.), nachdem wir $z = \zeta_\varkappa$ gesetzt und mit x^a multiplicirt haben,

$$(6.)\qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} [x^a]_1\, \zeta_\varkappa\, dx = 0.$$

Die Grössen $[x^a]_2$ und $[x^a]_1$ sind, wie aus No. 1 hervorgeht, ganze rationale Functionen von x vom Grade $n(\tau-1)+a$.

Wird successive $a = 0, 1, 2, \dots$ in (5.) und (6.) gesetzt, so ergiebt sich das Resultat: Sämmtliche Grössen $J^{(\mu)}_{\varkappa a}$ lassen sich durch

$$J^{(\mu)}_{\varkappa 0},\ J^{(\mu)}_{\varkappa 1},\ \dots,\ J^{(\mu)}_{\varkappa, n(\tau-1)-1},$$

und sämmtliche Grössen $H^{(\mu)}_{\varkappa a}$ durch

$$H^{(\mu)}_{\varkappa 0},\ H^{(\mu)}_{\varkappa 1},\ \dots,\ H^{(\mu)}_{\varkappa, n(\tau-1)-1}$$

linear und homogen darstellen.

4.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Integrale $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ vermittelst der Gleichungen (S'.) mit den Grössen $J_{\varkappa\mathfrak{a}}^{(\mu)}, H_{\varkappa\mathfrak{a}}^{(\mu)}$ für $\mathfrak{a} = 0, 1, 2, \ldots, n(\tau-1)-1$ und den Parametern der Differentialgleichung (B.) algebraisch verbunden sind. Zwischen den Grössen $J_{\varkappa\mathfrak{a}}^{(\mu)}, H_{\varkappa\mathfrak{a}}^{(\mu)}$ bestehen überdies die Gleichungen (3.) und (4.) voriger Nummer, deren Anzahl gleich $2n^2(\tau-1)$ (nämlich für $\mathfrak{a} = 0, 1, 2, \ldots, n(\tau-1)-1$, $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$), und die im Allgemeinen $2n^2\varrho(\varrho-3)$ Gleichungen repräsentirende Gleichung (T.).

1123] Indem wir uns vorbehalten, auf diese Relationen, ihre Reduction und ihre Anwendungen bei anderer Gelegenheit näher einzugehen, beschränken wir uns hier darauf, noch die Rechnungen für $n = 1$ und $n = 2$ auszuführen.

Es sei

I. $n = 1$.

$$[y]_1 = F(x)y' + F_{\tau-1}(x)y = 0, \tag{1.}$$

$$[z]_2 = [-F_{\tau-1}(x) + F'(x)]z + F(x)z' = 0. \tag{2.}$$

Sei

$$\frac{F_{(\tau-1)}(x)}{F(x)} = \frac{\alpha_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{\alpha_\varrho}{x-a_\varrho} + \frac{\beta_1}{x-b_1} + \cdots + \frac{\beta_\sigma}{x-b_\sigma}, \tag{3.}$$

wo die realen Theile von $\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho$ positiv und kleiner als Eins, und $\beta_1, \ldots, \beta_\sigma$ ganze Zahlen bedeuten. Dann ist

$$\eta = (x-a_1)^{-\alpha_1} \ldots (x-a_\varrho)^{-\alpha_\varrho} (x-b_1)^{-\beta_1} \ldots (x-b_\sigma)^{-\beta_\sigma}, \tag{4.}$$

$$\zeta = (x-a_1)^{\alpha_1-1} \ldots (x-a_\varrho)^{\alpha_\varrho-1} (x-b_1)^{\beta_1-1} \ldots (x-b_\sigma)^{\beta_\sigma-1}. \tag{5.}$$

Bezeichnen wir mit η_μ, ζ_μ das zu $a_{\mu+1}$ gehörige Integral bez. der Gleichungen (1.) und (2.), so ist

$$\eta = \eta_\mu, \quad \zeta = \zeta_\mu, \tag{6.}$$

und es wird nach einem Umlaufe von x um $a_{\mu+1}$, η und ζ bez. in $\eta e^{-2\alpha_{\mu+1}\pi i}$ und $\zeta e^{+2\alpha_{\mu+1}\pi i}$ übergehen. Auf der rechten Seite der Gleichung (S.) haben b und c den Werth Eins.

Es wird ferner

$$U = -\frac{F_{\tau-1}(x) - F_{\tau-1}(\alpha)}{x-\alpha} + \frac{d}{dx}\left[\frac{F(x)-F(\alpha)}{x-\alpha}\right], \tag{7.}$$

und (S'.) und (T'.) nehmen die Form an

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha\, U\eta\mathfrak{z} = -\frac{\pi e^{-\pi\alpha_{\mu+1}i}}{\sin\pi\alpha_{\mu+1}}, \tag{8.}$$

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha\, U\eta\mathfrak{z} = 0, \tag{9.}$$

wo $\mathfrak{z}$ aus ζ durch Vertauschung von x mit α hervorgeht.

Betrachten wir den besonderen Fall, dass die Gleichung (1.) mit ihrer adjungirten übereinstimmt. Hierzu ist nothwendig und hinreichend, dass

$$F_{\tau-1}(x) = \tfrac{1}{2}F'(x). \tag{10.}$$

Es fallen alsdann die Punkte $b_1, \ldots, b_\sigma$ weg, und es wird [1124

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_\varrho = \tfrac{1}{2}.$$

Die Gleichungen (1.) und (2.) werden:

$$F(x)y' + \tfrac{1}{2}F'(x)y = 0, \tag{1a.}$$

$$F(x)z' + \tfrac{1}{2}F'(x)z = 0. \tag{2a.}$$

Ferner ist

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{F(x)}}, \tag{4a.}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{F(x)}}, \tag{5a.}$$

$$U = -\frac{1}{2}\left[\frac{F'(x)-F'(\alpha)}{x-\alpha}\right] + \frac{d}{dx}\left[\frac{F(x)-F(\alpha)}{x-\alpha}\right], \tag{7a.}$$

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha \frac{U}{\sqrt{F(x)}\sqrt{F(\alpha)}} = \pi i, \tag{8a.}$$

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha \frac{U}{\sqrt{F(x)}\sqrt{F(\alpha)}} = 0. \tag{9a.}$$

Die Gleichungen (8a.), (9a.) sind unter Berücksichtigung der abweichenden Bezeichnungsweise vollkommen übereinstimmend mit den von Herrn Weierstrass*)

*) Programm des Braunsberger Gymnasiums, August 1849, No. 1, Glgn. (4.) und (3.)[1].

[1]) Mathematische Werke von Karl Weierstrass, Bd. I (1894), S. 114 und 117. R. F.

für die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale aufgestellten Relationen, wie ich schon in Abh. S. 177 [1]) angemerkt habe.

II. $n = 2$.

In diesem Falle ist

$$[y]_1 = F(x)^2 y^{(2)} + F_{\tau-1}(x) F(x) y' + F_{2(\tau-1)}(x) = 0, \tag{11.}$$

$$U = -\left[\frac{F_{2(\tau-1)}(x) - F_{2(\tau-1)}(\alpha)}{x-\alpha}\right] + \frac{d}{dx}\left[\frac{F_{\tau-1}(x)F(x) - F_{\tau-1}(\alpha)F(\alpha)}{x-\alpha}\right] - \frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{F(x)^2 - F(\alpha)^2}{x-\alpha}\right] \tag{12.}$$

in Bezug auf jede der Variablen x und α vom $(2\tau-3)^{\text{ten}}$ Grade.

1125] Aus No. 1 Gleichung (14.) folgt

$$\left\{\begin{aligned} A_1^{(11)} &= \frac{b_{11}b_{22}}{\Delta}, & A_2^{(11)} &= -\frac{b_{12}b_{21}}{\Delta}, \\ A_1^{(12)} &= -\frac{b_{11}b_{12}}{\Delta}, & A_2^{(12)} &= -A_1^{(12)}, \\ A_1^{(21)} &= \frac{b_{21}b_{22}}{\Delta}, & A_2^{(21)} &= -A_1^{(21)}, \\ A_1^{(22)} &= A_2^{(11)}, & A_2^{(22)} &= A_1^{(11)}, \end{aligned}\right. \tag{13.}$$

$$\Delta = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}. \tag{14.}$$

Daher ist

$$\left\{\begin{aligned} A_1^{(11)} &= \frac{\lambda_2 - g_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad A_2^{(11)} = -\frac{\lambda_1 - g_{11}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ A_1^{(12)} &= -A_2^{(12)} = -\frac{g_{12}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ A_1^{(21)} &= -A_2^{(21)} = -\frac{g_{21}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{aligned}\right. \tag{15.}$$

Bei dieser Rechnung ist zu berücksichtigen, dass λ_1, λ_2 der Gleichung

$$\lambda^2 - (g_{11} + g_{22})\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0 \tag{16.}$$

genügen, und dass

$$g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} = \lambda_1\lambda_2 \text{*)}. \tag{17.}$$

*) Vergl. meine Arbeit in Crelles Journal, Bd. 66, S. 133 [2]).

1) S. 415 und 416, Band I dieser Ausgabe. R. F.

2) Abh. VI, S. 172, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Die Gleichungen (S'.) werden daher, wenn wir

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha\, U \eta_{1\varkappa} \mathfrak{z}_{l} = P_{\varkappa l} \tag{18.}$$

setzen:

$$\left\{\begin{aligned} P_{11} &= \frac{2\pi i}{(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)}[g_{22}-1], \\ P_{12} &= \frac{-2\pi i}{(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)} g_{12}, \\ P_{21} &= \frac{-2\pi i}{(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)} g_{21}, \\ P_{22} &= \frac{2\pi i}{(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)}[g_{11}-1] \text{*)}. \end{aligned}\right. \tag{19.}$$

Sei z. B. [1126

$$[y]_1 = x(1-x)y^{(2)} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \beta\alpha y = 0. \tag{20.}$$

Wir setzen

$$1-\gamma = \varrho_0, \quad \gamma - \alpha - \beta = \varrho_1, \quad \alpha - \beta = \varrho_2, \tag{21.}$$

also

$$\gamma = 1 - \varrho_0, \quad \alpha = \tfrac{1}{2}(1 - \varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2), \quad \beta = \tfrac{1}{2}(1 - \varrho_0 - \varrho_1 - \varrho_2). \tag{22.}$$

Substituiren wir

$$y = x^{\frac{1}{2}(1+\varrho_0)}(1-x)^{\frac{1}{2}(1+\varrho_1)} u, \tag{23.}$$

so geht (20.) über in

$$F(x)^2 u^{(2)} + 2F(x)F'(x)u' + A_0 u = 0, \tag{20a.}$$

*) Bei dieser Gelegenheit möge ein Rechenfehler angemerkt werden, der sich in dem Beispiele Abh. S. 211 [1]) eingeschlichen hat. Aus den dortigen Gleichungen (15.) ergeben sich nicht die Gleichungen (16.) bis (16a.), da bei der dortigen Bestimmung von ζ_1, ζ_2 (S. 210) und $\zeta_{\mu 1}, \zeta_{\mu 2}$ (S. 211)

$$[w_{\mu 2}, \zeta_{\mu 2}] = -[w_{\mu 1}, \zeta_{\mu 1}]$$

und

$$[w_2, \zeta_2] = -[w_1, \zeta_1]$$

(cf. Abh. S. 192—194 [2]) sein muss, und demgemäss aus der für dieses Beispiel hiernach abzuändernden Gl. (J.) sich nur $b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 1$ ergiebt [3]).

1) S. 453, Band I dieser Ausgabe. R. F.

2) Ebenda S. 431—434. R. F.

3) Vgl. die Anmerkung 2), S. 456, Band I dieser Ausgabe. R. F.

wenn wir

$$F(x) = x(x-1), \tag{24.}$$

$$A_0 = \tfrac{1}{4}(1-\varrho_0^2)(x-1)^2 + \tfrac{1}{4}(1-\varrho_1^2)x^2 + \tfrac{1}{4}[7+\varrho_0^2+\varrho_1^2-\varrho_2^2]F(x) \tag{25.}$$

setzen.

Die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung bei (20a.) sind

$$\begin{aligned} \text{für } x = 0 &: r_{01} = -\tfrac{1}{2}(\varrho_0+1), \quad r_{02} = \tfrac{1}{2}(\varrho_0-1), \\ x = 1 &: r_{11} = -\tfrac{1}{2}(\varrho_1+1), \quad r_{12} = \tfrac{1}{2}(\varrho_1-1), \\ x = \infty &: r_{\infty 1} = \tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\varrho_2, \quad r_{\infty 2} = \tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\varrho_2. \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, dass $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2$ positive Grössen sind, kleiner als Eins, so liegen $r_{01}, r_{02}, r_{11}, r_{12}$ zwischen 0 und -1, dagegen $r_{\infty 1}, r_{\infty 2}$ zwischen 1 und 2.

In unserem Beispiele ist

$$U = \tfrac{1}{4}[17-\varrho_0^2+\varrho_1^2-\varrho_2^2] - \tfrac{1}{4}(1-\varrho_2^2)(x+\alpha). \tag{12a.}$$

1127] Die zu (20a.) adjungirte Differentialgleichung lautet

$$F(x)^2 w^{(2)} + 2F(x)F'(x)w' + A_0 w = 0, \tag{26.}$$

dieselbe ist also mit (20a.) identisch.

Es ist demnach

$$\zeta_1 = \eta_{12}, \quad \zeta_2 = \eta_{11}, \tag{27.}$$

wo η_1, η_2 bez. ζ_1, ζ_2 das zu $x = \infty$ zugehörige Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (20.) bez. (26.) bedeuten, und es ist

$$\begin{cases} H_{1\mathfrak{a}}^{(\mu)} = J_{2\mathfrak{a}}^{(\mu)}, \\ H_{2\mathfrak{a}}^{(\mu)} = J_{1\mathfrak{a}}^{(\mu)}. \end{cases} \tag{28.}$$

Die Gleichung (5.) No. 3 lautet in unserem Beispiele:

$$\int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} [\mathfrak{a}(\mathfrak{a}-1)(x-1)^2 + 2(x-1)(2x-1)\mathfrak{a} + A_0]x^{\mathfrak{a}}\eta_{\varkappa}\,dx = 0. \tag{29.}$$

Demnach ist in unserem Falle $J_{\varkappa\mathfrak{a}}^{(\mu)}$ folglich nach Gl. (28.) auch $H_{\varkappa\mathfrak{a}}^{(\mu)}$ linear durch $J_{\varkappa 0}^{(\mu)}, J_{\varkappa 1}^{(\mu)}$ ausdrückbar, wie es nach No. 3 erforderlich ist.

Bezeichnen wir mit

$$S_0 = \begin{pmatrix} g_{11}^{(0)} & g_{12}^{(0)} \\ g_{21}^{(0)} & g_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$$

und mit

$$S_1 = \begin{pmatrix} g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)} \\ g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$$

bez. die zu $x = 0$ und $x = 1$ gehörige Fundamentalsubstitution von η_1, η_2, so ergeben die Gleichungen (19.), wenn wir

$$\int_\infty^0 dx \int_0^1 d\alpha\, U \eta_{i\varkappa}\mathfrak{y}_l = P_{\varkappa l}^{(0)}, \tag{30.}$$

$$\int_0^1 dx \int_1^\infty d\alpha\, U \eta_{i\varkappa}\mathfrak{y}_l = P_{\varkappa l}^{(1)} \tag{31.}$$

und

$$\begin{cases} \dfrac{\pi i}{2\sin^2\frac{\pi\varrho_0}{2}} = -\alpha_0, \\[2ex] \dfrac{\pi i}{2\sin^2\frac{\pi\varrho_1}{2}} = -\alpha_1 \end{cases} \tag{32.}$$

setzen: [1128

$$\begin{cases} P_{11}^{(0)} = \alpha_0(g_{22}^{(0)}-1), \\ P_{12}^{(0)} = \alpha_0 g_{12}^{(0)}, \\ P_{21}^{(0)} = \alpha_0 g_{21}^{(0)}, \\ P_{22}^{(0)} = \alpha_0(g_{11}^{(0)}-1), \end{cases} \tag{33.}$$

$$\begin{cases} P_{11}^{(1)} = \alpha_1(g_{22}^{(1)}-1), \\ P_{12}^{(1)} = \alpha_1 g_{12}^{(1)}, \\ P_{21}^{(1)} = \alpha_1 g_{21}^{(1)}, \\ P_{22}^{(1)} = \alpha_1(g_{11}^{(1)}-1). \end{cases} \tag{34.}$$

In den Ausdrücken (30.) und (31.) bedeuten $\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2$ Functionen von α, die aus η_1, η_2 durch Vertauschung von x mit α hervorgehen.

Nach dem Obigen sind die linken Seiten der Gleichungen (33.) und (34.) homogene Functionen zweiten Grades der Grössen:

$$\int_\infty^0 \eta_1\,dx, \quad \int_\infty^0 x\eta_1\,dx, \quad \int_\infty^0 \eta_2\,dx, \quad \int_\infty^0 x\eta_2\,dx,$$

$$\int_0^1 \eta_1\,dx, \quad \int_0^1 x\eta_1\,dx, \quad \int_0^1 \eta_2\,dx, \quad \int_0^1 x\eta_2\,dx.$$

Man würde, wie wir nebenbei bemerken, wenn man in die Gleichungen (33.), (34.) die bekannten Ausdrücke von η_1, η_2 vermittelst bestimmter Integrale substituirt, aus diesen Gleichungen die Fundamentalsubstitutionen in der bekannten Form durch Eulersche Integrale (Gammafunctionen) darstellen können.

ANMERKUNGEN.

1) Änderungen gegen das Original.
Es wurde gesetzt:
S. 142, Gleichung (B.) $F(x)^a$ statt $F(x)$,
Zeile 4 v. u. wurde hinter ganze rationale Function »$\varkappa^{\text{ten}}$ Grades« eingeschoben,
„ 151, „ 10 v. u. ist »haben« hinzugefügt,
„ 155, „ 10 »Wir setzen« statt »Setzen wir«,
in den Gleichungen der Fussnote w statt ω.

2) Zu dem S. 146, Zeile 6 v. u. ff. angegebenen Satze ist zu bemerken, dass die Gleichung (3.) bei dem hier angegebenen Verfahren nicht in den Stellen $b_1, \ldots, b_5$ mit der Gleichung (1.) übereinzustimmen braucht, dass vielmehr durch die ganzen rationalen Functionen $\varphi_\varkappa(x)$ andere derartige Stellen hinzutreten können.
R. F.

LXI.

NOTE ZU DER IM BANDE 83, P. 13 sqq. DIESES JOURNALS ENTHALTENEN ARBEIT: SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS ETC.; EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE À M. HERMITE[1].

(Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 112, 1893, S. 156—164.)

Die folgende Notiz enthält einige Ausführungen der in meinem an [156
Herrn Hermite gerichteten Briefe (d. J., Bd. 83, p. 13 sqq.[1]) skizzirten Grundlage der Modulfunction, wie ich sie in meinen Vorlesungen zu geben pflege. Zur Mittheilung derselben werde ich nicht nur durch das allgemeine Interesse, welches gegenwärtig die Theorie der Modulfunctionen gefunden, veranlasst, sondern auch weil das von mir angewendete Verfahren einer Verallgemeinerung fähig ist zur Entscheidung der Frage, wann die durch Umkehrung von Quotienten von Integralen linearer Differentialgleichungen entstehenden Functionen eindeutig werden.

Die oben citirte Arbeit aus dem 83. Bande dieses Journals werde ich der Kürze halber mit dem Zeichen B. citiren.

1.

Wie in B. sei

$$(1.)\qquad \eta_1 = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(u-y)}}, \quad \eta_2 = \int_1^u \frac{dy}{\sqrt{y(y-1)(u-y)}},$$

und es werde

$$(2.)\qquad \mathsf{H} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

[1]) Abh. XXIV, S. 85 ff., Band II dieser Ausgabe. R. F.

gesetzt. Wir zerschneiden die Ebene T der complexen Variablen u durch einen längs der realen Axe von $u = 0$ über $u = 1$ ins Unendliche geführten Schnitt, und bezeichnen die so erhaltene u-Ebene mit T', sowie mit $\eta_{1}^{(0)}, \eta_{2}^{(0)}$ die in T' gültigen Zweige der Functionen η_1, η_2, wie sie in B. vermittelst
157] der Differentialgleichung

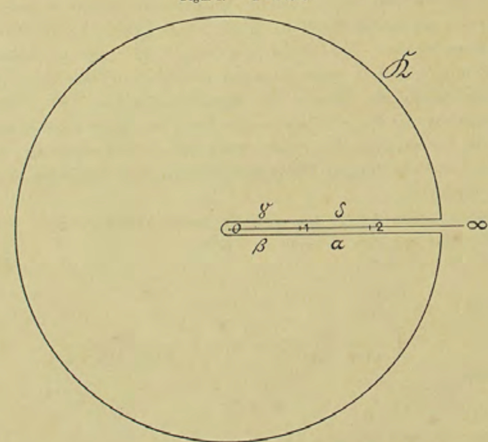
$$2u(u-1)\frac{d^2\eta}{du^2} + 2(2u-1)\frac{d\eta}{du} + \frac{1}{2}\eta = 0, \tag{3.}$$

welcher η_1, η_2 genügen, daselbst durch die Relationen (B.), (C.), (E.) definirt worden sind. Ferner sei

$$\mathsf{H}_0 = \frac{\eta_{2}^{(0)}}{\eta_{1}^{(0)}}. \tag{2a.}$$

Die Begrenzung Γ der T'-Ebene besteht aus den beiden Ufern des Schnittes $(0, 1, \infty)$ und aus einem um $u = 0$ beschriebenen unendlich grossen Kreise $\mathfrak{K}$. (Siehe Fig. 1.)

Figur 1. T'-Ebene.



Wir wollen diese Begrenzung mit Hülfe der Gleichung (2a.) auf die H-Ebene abbilden. (Siehe Fig. 2.)

In dem Theile $(\infty, \alpha, 1)$ von Γ gilt für H_0 die Gleichung

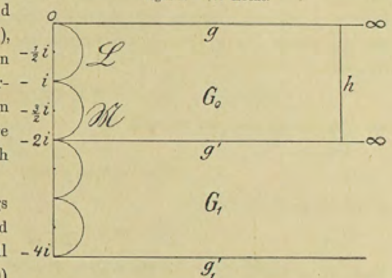
$$\mathsf{H}_0 = \frac{1}{\pi}A, \tag{4.}$$

wenn wir [158

$$A = -\left[H_\infty(u) + \log\frac{1}{u}\right] \tag{4a.}$$

setzen. (Siehe B. p. 24, Gl. (3.)[1].)

Figur 2. H-Ebene.



Von den mehrdeutigen Ausdrücken $\log\frac{1}{u}$, $\log(u-1)$ und $\log u$ in den Gleichungen (1.), (2.), (3.) von B. p. 24[1]) können wir einen, z. B. $\log\frac{1}{u}$, willkürlich fixiren, während die beiden anderen alsdann durch stetige Fortsetzung von H_0 in T' sich von selbst bestimmen.

Es sei daher $\log\frac{1}{u}$ längs $(\infty, \alpha, 1)$ real gewählt, so sind A und H_0 für dieses Intervall ebenfalls real, weil (s. B. p. 16[2]) $v_{\infty 1}^2$, folglich auch $\mathsf{H}_\infty(u)$ für reale Werthe von u real ist. Aus der Gleichung

$$\frac{dA}{du} = -\frac{d}{du}\left[\frac{v_{\infty 2}}{v_{\infty 1}}\right] = \frac{1}{v_{\infty 1}^2\, u(u-1)} \tag{5.}$$

(s. B. p. 18 Gl. (C.) und p. 20[3]) ergiebt sich, dass $\frac{dA}{du}$ längs $(\infty, \alpha, 1)$ stets positiv ist, weil nach B. p. 16 Gl. (3.)[2]) $v_{\infty 1}^2$ dieselbe Eigenschaft hat.

Während also u die Bahn $(\infty, \alpha, 1)$ durchwandert, nimmt H_0 fortwährend ab.

Für $u = \infty$ ist H_0 ein positiver unendlich grosser Werth, während H_0 für $u = 1$ verschwindet (s. B. p. 23 Gleichung $(\beta.)$[4]).

---

[1]) S. 97, Band II dieser Ausgabe. R. F.

[2]) Ebenda S. 88. R. F.

[3]) Ebenda S. 90 und S. 93 Gl. (D.). R. F.

[4]) Ebenda S. 96. R. F.

Es entsprechen sich also die Punkte der Bahnen $(\infty, \alpha, 1)$ von u und $(\infty, 0)$ (g in Fig. 2) im positiven Theile der realen H-Axe gegenseitig eindeutig.

Für den Theil $(2, \alpha, 1)$ der realen u-Axe gilt neben der Gleichung (4.) auch die Gleichung

$$(6.)\qquad \mathsf{H}_0 = \frac{\pi}{-H_1(u) - \log(u-1)},$$

(s. B. p. 24 Gl. (2.)[1]).

159] Da v_{11}^2 folglich auch $H_1(u)$ für reale Werthe von u real ist (s. B. p. 16[2]), und da H_0, wie oben gezeigt, in dem genannten Intervalle real ist, so ergiebt die Gleichung (6.), dass wir längs $(2, \alpha, 1)$ den Ausdruck $\log(u-1)$ real annehmen müssen. Setzen wir $\log(u-1)$ längs eines Halbkreises um $u=1$ von der Strecke $(2, \alpha, 1)$ nach der Strecke $(1, \beta, 0)$ fort, so wird in letzterer Strecke

$$(6a.)\qquad \log(u-1) = (\log(1-u)) - \pi i,$$

wo $(\log(1-u))$ real zu nehmen ist.

Sei

$$(7.)\qquad B = -[H_1(u) + (\log(1-u))],$$

so ist längs $(1, \beta, 0)$

$$(8.)\qquad \mathsf{H}_0 = \frac{\pi}{B + \pi i}.$$

Nach B. p. 23 Gl. $(\beta.)$[3]) ist für $u = 0$, $B = 0$, und für $u = 1$, $B = \infty$.

Nun ist

$$(5a.)\qquad \frac{dB}{du} = -\frac{d}{du}\left[\frac{v_{12}}{v_{11}}\right] = \frac{1}{u(1-u)\,v_{11}^2}$$

(s. B. p. 17 Gl. (B.), p. 20 Gl. (D.)[4]). Es wird also $\frac{dB}{du}$ zwischen 1 und 0 positiv bleiben und daher B ununterbrochen von ∞ bis 0 abnehmen, während u die Bahn $(1, \beta, 0)$ beschreibt.

Aus der Gleichung (8.) ergiebt sich daher, dass H_0 in der H-Ebene einen nach der positiven Seite gelegenen Halbkreis $\mathfrak{L}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $(0, -\frac{1}{2})$ beschreibt, während u die Bahn $(1, \beta, 0)$ durchläuft.

[1]) S. 97, Band II dieser Ausgabe. R. F.
[2]) Ebenda S. 88. R. F.
[3]) Ebenda S. 96. R. F.
[4]) Ebenda S. 89 und S. 93. R. F.

Die Punkte der Bahnen $(1, \beta, 0)$ und $\mathfrak{L}$ entsprechen sich gegenseitig eindeutig.

Für die Bahn $(1, \beta, 0)$ gilt neben (8.) noch die Gleichung

$$(9.)\qquad \mathsf{H}_0 = \frac{H_0(u) - \log u}{\pi + i\,[H_0(u) - \log u]},$$

(s. B. p. 24 Gl. (1.)[1]).

Sei

$$(10.)\qquad H_0(u) - \log u = \pi C,$$

so wird aus der Gleichung (9.):

$$(9a.)\qquad \mathsf{H}_0 = \frac{C}{1 + iC}.$$

Da im reciproken Werthe von H_0 nach Gleichung (8.) der Coefficient von i constant sein muss, so ist erforderlich, dass $\log u$ längs $(1, \beta, 0)$ real [160 gewählt werde. Den Werth von $\log u$ längs der Strecke $(0, \gamma, 1)$ erhalten wir, indem wir diese Function längs eines um $u = 0$ führenden Kreises von der Seite $(1, \beta, 0)$ nach der Seite $(0, \gamma, 1)$ fortsetzen, also $(\log u) - 2\pi i$, wo $(\log u)$ real ist. Demnach ist für die Bahn $(0, \gamma, 1)$

$$(11.)\qquad \mathsf{H}_0 = \frac{C + 2i}{-1 + iC}.$$

Nun ist

$$(5b.)\qquad \frac{dC}{du} = \frac{1}{\pi}\frac{d}{du}\left(\frac{v_{02}}{v_{01}}\right) = \frac{1}{\pi v_{01}^2\, u(u-1)},$$

(s. B. p. 20 Gl. (10.)[2]).

Da $\log u$ auf der Bahn $(1, \beta, 0)$ real ist, so ist C ebenso wie v_{01} auf derselben Strecke real, und es ist $\frac{dC}{du}$ zwischen 0 und 1 fortwährend negativ. Nach B. p. 23 Gl. $(\beta.)$[3]) ist für $\mathsf{H}_0 = 0$ $u = 1$, also nach Gleichung (9a.) $C = 0$. Ebenso folgt daraus, dass für $u = 0$ $\mathsf{H}_0 = -i$, für denselben Werth von u $C = \infty$. Es nimmt daher C ununterbrochen von ∞ bis 0 ab, während u die Strecke $(0, \gamma, 1)$ durchläuft. Die Gleichung (11.) lehrt daher, dass H_0 in der H-Ebene einen nach der positiven Seite der realen Axe gelegenen Halbkreis $\mathfrak{M}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Punkt $(0, -\frac{3}{2})$ beschreibt,

[1]) S. 97, Band II dieser Ausgabe. R. F.
[2]) Ebenda S. 93. R. F.
[3]) Ebenda S. 96. R. F.

während u die Bahn $(0, \gamma, 1)$ durchläuft. Die Punkte der Bahnen $(0, \gamma, 1)$ und $\mathfrak{M}$ entsprechen einander gegenseitig eindeutig. Wenn u die Strecke $(1, \delta, \infty)$ zurücklegt, so gilt für H_0 wieder die Gleichung

$$\mathsf{H}_0 = -\frac{1}{\pi}\left[H_\infty(u) + \log\frac{1}{u}\right]. \tag{4b.}$$

Während längs $(\infty, \alpha, 1)$, $\log\frac{1}{u}$ real war, liefert die Fortsetzung von $\log\frac{1}{u}$ längs eines um $u = \infty$ führenden Kreises von der Seite $(\infty, \alpha, 1)$ nach der Seite $(1, \delta, \infty)$ für diese Function längs $(1, \delta, \infty)$ zu dem Werthe $\left(\log\frac{1}{u}\right) + 2\pi i$, wo wiederum $\left(\log\frac{1}{u}\right)$ real ist. Die Gleichung (4b.) wird daher nach Gleichung (4a.)

$$\mathsf{H}_0 = \frac{1}{\pi}A - 2i. \tag{4c.}$$

Da nach dem Obigen A real ist und fortwährend wachsend von 0 bis ∞ sich bewegt, während u die Bahn $(1, \delta, \infty)$ beschreibt, so wird demnach H_0 die im Abstande -2 zur realen H-Axe parallele und nach der positiven 161] Seite derselben bis ins Unendliche verlaufende geradlinige Bahn g' durchwandern, während u den Weg $(1, \delta, \infty)$ beschreibt.

Die Punkte dieser Bahnen entsprechen sich wiederum gegenseitig eindeutig.

Beschreibt endlich v den Kreis $\mathfrak{K}$ mit dem unendlich grossen Radius R, so durchläuft H_0 nach Gleichung (4c.) eine Bahn, welche durch die Gleichung

$$\mathsf{H}_0 = -\frac{1}{\pi}\{-4\log 2 + 2\pi i - \log R - \varphi i\} \tag{12.}$$

dargestellt wird, wenn $u = Re^{\varphi i}$.

Wenn φ von 0 bis 2π geht, so beschreibt H_0 in unendlich grossem positiven Abstande von dem Nullpunkte der H-Ebene, nämlich $\frac{4\log 2 + \log R}{\pi}$ eine Parallele h zur lateralen H-Axe, von g' beginnend und in g endigend.

2.

Wir wollen das von den Linien $g, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, g', h$ abgegrenzte Gebiet der H-Ebene mit G_0 bezeichnen.

Den Werthen u der T'-Ebene, deren Modul sehr gross, entsprechen nach den Gleichungen (4b.) und (12.) Werthe H_0 innerhalb G_0 in kleinem Abstande von h, s. B. p. 24[1]), und es findet zwischen diesen Werthen die Gleichung

$$\frac{1}{u} = 16e^{-\pi\mathsf{H}_0} + \varphi\left(e^{-\pi\mathsf{H}_0}\right) \tag{1.}$$

statt, wo $\varphi(q)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von q fortschreitende Reihe bedeutet (s. B. p 25 Gl. (2.)[2]).

Setzen wir die durch die Gleichung (1.) definirte Function u von H in der nach der positiven Seite der realen Axe gelegenen Halbebene der Variablen H gemäss der Gleichung

$$\frac{du}{d\mathsf{H}} = \frac{u(u-1)\eta_1^2}{\pi} \tag{2.}$$

fort, so können wir für einen endlichen, ausserhalb der lateralen Axe gelegenen Werth von H nicht zu einem der Werthe $u = 0, 1, \infty$ gelangen, da gemäss der Gleichung

$$\mathsf{H} = \frac{\eta_2}{\eta_1}, \tag{3.}$$

welche sich mit der functionalen Beziehung (2.) deckt, für $u = 0$, $u = 1$ [162 der Punkt H auf die laterale Axe entfällt, und für $u = \infty$ der Punkt H entweder ebenfalls auf die laterale H-Axe entfällt oder nach der positiven Seite der realen Axe ins Unendliche rückt (s. B. p. 23[3]).

Wir können aber bei der Fortsetzung nach Gleichung (2.) für einen endlichen ausserhalb der lateralen Axe gelegenen Werth von H auch nicht zu einem von $u = 0, 1, \infty$ verschiedenen Werth $u = \alpha$ gelangen, für den $\eta_1 = 0$. Denn da für $u = \alpha$ bekanntlich nicht zugleich $\eta_2 = 0$ sein könnte, so müsste für $u = \alpha$, H unendlich werden.

Dem Fundamentaltheorem der Theorie der Differentialgleichungen zu Folge wird daher u eine eindeutige Function von H in dem ganzen Gebiete der letzteren Variablen sein, welches nach der positiven Seite der realen Axe gelegen ist (s. B. p. 26[4]).

Das Gebiet der Variablen u, welches durch die so definirte Function u von H als Abbildung des Gebietes G_0 hergeleitet wird, bedeckt die ganze T'-Ebene.

---

[1]) S. 97, Band II dieser Ausgabe. R. F.

[2]) Ebenda S. 99. R. F.

[3]) Ebenda S. 96 und 97. R. F.

[4]) Ebenda S. 100. R. F.

Denn wäre ein Theil U der T'-Ebene von dieser Abbildung ausgeschlossen, so könnte seine Begrenzung Γ nicht Punkten des Inneren von G_0 entsprechen, weil in der Umgebung jeder Stelle H_0' im Inneren von G_0 die Function u eindeutig, endlich und stetig ist, also der Umgebung von $\mathsf{H}_0 = \mathsf{H}_0'$ die volle Umgebung des entsprechenden Punktes $u = u'$ entsprechen würde.

Wegen der Eindeutigkeit der Function u von H in G_0 kann aber u für eine Stelle H' auf $g, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, g'$ nur zu dem einen Werthe u' resp. der Theile $(\infty, \alpha, 1), (1, \beta, 0), (0, \gamma, 1), (1, \delta, \infty)$ der realen Axe gelangen, welcher bei der obigen Construction des Gebietes G_0 den Werth H_0' lieferte. Für Punkte H_0 auf h müsste aber u unendlich gross sein. Demnach müsste die Begrenzung Γ von U, so weit sie sich im Endlichen befindet, aus Theilen der realen u-Axe bestehen. Da aber die Coefficienten der Reihen $H_0(u), H(u), H_2(u)$ real sind, so ergeben die Gleichungen (4.) und (4c.) voriger Nummer, dass in der Nähe des Theiles $(1, \infty)$ der realen u-Axe zu beiden Seiten die zugehörigen Werthe H_0 im Inneren von G_0, und zwar resp. von g und g' gelegen sind. Ebenso ergeben die Gleichungen (8.) und (11.) voriger Nummer, dass in der Nähe des Theiles $(0, 1)$ der realen u-Axe zu beiden Seiten die zugehörigen Werthe von H_0 im Inneren von G_0 resp. an $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ gelegen sind.

163] Demnach kann es kein Gebiet U der Variablen u geben, welches bei der Abbildung von G_0 vermittelst der eindeutigen Function u von H ausgeschlossen ist.

Die Abbildung des Gebietes G_0 vermittelst der Function u von H auf die u-Ebene bedeckt dieselbe nur einfach.

Dieses folgt daraus, dass nach den Grundsätzen der Theorie der linearen Differentialgleichungen die Integrale der Gleichung (3.) No. 1, folglich auch H_0 in der T-Ebene eindeutige Functionen von u sind.

Die Ebene T' und das Gebiet G_0 sind demnach conforme Abbildungen von einander.

3.

Irgend ein Zweig H hat die Form

$$(1.)\qquad \mathsf{H} = \frac{\nu i + \varrho \mathsf{H}_0}{\lambda + \mu i \mathsf{H}_0},$$

wo $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ reale ganze Zahlen sind, welche der Bedingung

$$(2.)\qquad \lambda\varrho + \mu\nu = 1$$

genügen, und wo überdies λ, ϱ ungerade Zahlen, μ, ν gerade Zahlen bedeuten. (B. p. 22[1].)

Da nach voriger Nummer allen Werthen u in T'' nur Werthe H_0 mit positivem realen Theile entsprechen, so ergiebt sich nach dem Satze (B. p. 24[2]), dass alle Werthe H nach der positiven Seite der realen H-Axe gelegen sind.

Da, wie schon oben bemerkt, die Gleichungen (2.) und (3.) voriger Nummer dieselbe functionale Beziehung ausdrücken, so ist eine Fortsetzung der für die Werthe H mit positivem realen Theile definirten Function u vermittelst der Differentialgleichung (2.) voriger Nummer über die laterale H-Axe hinaus nicht möglich.

Seien H und H' zwei verschiedene Zweige, und sei H durch die Gleichung (1.) gegeben, während H' durch

$$(1'.)\qquad \mathsf{H}' = \frac{\nu' i + \varrho' \mathsf{H}_0}{\lambda' + \mu' i \mathsf{H}_0}$$

definirt wird, wo wiederum $\lambda', \mu', \nu', \varrho'$ ganze Zahlen, welche der Gleichung

$$(2'.)\qquad \lambda'\varrho' + \mu'\nu' = 1$$

genügen, und wovon λ', ϱ' ungerade Zahlen, μ', ν' gerade Zahlen sind.

Für zwei verschiedene Werthe $u = u_0$ und $u = u_1$ kann wegen der [164
Eindeutigkeit der Function u von H nicht $\mathsf{H}'(u_0) = \mathsf{H}'(u_1)$ sein. Es kann aber auch nicht

$$(3.)\qquad \mathsf{H}'(u_0) = \mathsf{H}(u_0)$$

sein. Denn aus (1.) und (1'.) würde alsdann folgen

$$(4.)\qquad \mathsf{H}_0(u_0)^2 + \frac{\alpha - \delta}{\beta i}\mathsf{H}_0(u_0) - \frac{\gamma}{\beta} = 0,$$

wo

$$(5.)\qquad \begin{pmatrix} \alpha & \beta i \\ \gamma i & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda' & \mu' i \\ \nu' i & \varrho' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & \mu i \\ \nu i & \varrho \end{pmatrix}.$$

[1] S. 95 und 96, Band II dieser Ausgabe. R. F.
[2] Ebenda S. 97 und 98. R. F.

Aus (4.) ergiebt sich wegen

$$\alpha\delta + \beta\gamma = 1, \tag{6.}$$

$$\mathsf{H}_0 = \frac{\alpha - \delta}{2\beta} i \pm \frac{1}{2\beta}\sqrt{4-(\alpha+\delta)^2}. \tag{7.}$$

Nach B. p. 22[1]) sind α, δ ungerade Zahlen, β, γ gerade Zahlen. Es kann nicht $\alpha + \delta = 0$ sein, weil sonst nach (6.)

$$\beta\gamma - 2 = (\alpha - 1)(\alpha + 1), \tag{8.}$$

was nicht möglich ist, da die rechte Seite durch 4 theilbar wäre, die linke Seite aber nicht. Es hat also $(\alpha+\delta)^2$ mindestens den Werth 4, daher liefert die Gleichung (7.) einen Werth H_0 auf der lateralen Axe.

Die sämmtlichen Zweigwerthe H erfüllen daher in der H-Ebene Flächengebiete, welche nirgendwo ausserhalb der lateralen Axe Punkte gemeinschaftlich haben.

Da wir aber bewiesen haben, dass jedem Punkte H in der die positive Seite der realen Axe enthaltenden Halbebene Werthe u entsprechen, so erfüllt die Gesammtheit der Zweige diese Halbebene lückenlos.

Es müssen daher an der lateralen H-Axe über alle Grenzen abnehmende Flächentheile sich anhäufen, welche Zweigwerthe von H darstellen.

1) S. 95, Band II dieser Ausgabe. R. F.

ANMERKUNG.

Änderung gegen das Original.

Es wurde gesetzt:

S. 168, Gleichung (7.) rechter Hand $\frac{1}{2\beta}\sqrt{4-(\alpha+\delta)^2}$ statt $\sqrt{4-(\alpha+\delta)^2}$. R. F.

LXII.

ÜBER LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN, WELCHE VON PARAMETERN UNABHÄNGIGE SUBSTITUTIONSGRUPPEN BESITZEN.

(I. Theil, Einleitung und No. 1—4, Sitzungsberichte der Königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1893, XLV, S. 975—988; vorgetragen am 16. November; ausgegeben am 23. November 1893. II. Theil, No. 5—8, Sitzungsberichte, 1894, XLII, S. 1117—1127; vorgetragen am 1. November; ausgegeben am 8. November 1894.)

Die folgende Notiz schliesst sich der Reihe von Arbeiten über lineare [975 Differentialgleichungen an, welche ich in den Sitzungsberichten veröffentlicht habe, insbesondere an die Notizen vom Jahre 1888, S. 1273[1]); 1892, S. 157[2]) und 1113[3]), worin ich eine Kategorie von linearen Differentialgleichungen in die Untersuchung eingeführt habe, deren Integrale sich bei beliebigen Umläufen der unabhängigen Variabeln unabhängig von gewissen in den Coefficienten der Differentialgleichungen auftretenden Parametern ändern, und deren Zusammenhang mit einer Klasse simultaner partieller Differentialgleichungen ich insbesondere in der Notiz von 1892, S. 157[2]) untersucht habe. Die gegenwärtige Note dient zur Vorbereitung für weitere an die bezeichnete Kategorie von Differentialgleichungen sich anschliessende functionentheoretische Folgerungen.

In der Notiz von 1892, S. 1118—1120[4]) habe ich nachgewiesen, wie man jeder linearen Differentialgleichung, für welche die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung nicht um ganze Zahlen verschieden sind, eine

1) Abh. LIV, S. 15 ff. dieses Bandes. R. F.
2) Abh. LIX, S. 117 ff. dieses Bandes. R. F.
3) Abh. LX, S. 141 ff. dieses Bandes. R. F.
4) Ebenda S. 146—149. R. F.

Differentialgleichung derselben Klasse zuordnen kann, bei welcher der reale Theil dieser Wurzeln seinem absoluten Werthe nach die Einheit nicht überschreitet. Die gegenwärtige Note enthält eine Ergänzung zu diesem Satze, für den Fall, dass jene Wurzeln auch um ganze Zahlen verschieden sind. Ich habe dieselbe hier aufgenommen, weil sich davon bei der Untersuchung der Anzahl der singulären Stellen einer Differentialgleichung der in der Überschrift bezeichneten Kategorie mit Vortheil Gebrauch machen lässt.

1.

Zunächst wollen wir einige Sätze aufstellen, welche auf allgemeine lineare Differentialgleichungen Bezug haben.

Es seien die Coefficienten der Differentialgleichung:

976] (1.) $$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0$$

in der Umgebung eines singulären Punktes a von der Gestalt:

(2.) $$p_\lambda = \frac{P_\lambda}{(x-a)^\lambda}\ *),$$

wo P_λ eine nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihe bedeutet, und $r = \varrho$ eine μ-fache Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung:

(3.) $$r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1) + P_1(a)\,r(r-1)\dots(r-n+2) + \cdots + P_n(a) = 0,$$

ferner $\eta_{1}, \eta_{2}, \dots, \eta_{\mu}$ die entsprechenden Elemente eines zu a gehörigen Fundamentalsystems, so dass

(4.) $$\eta_k = (x-a)^\varrho [\varphi_{k0} + \varphi_{k1} t + \cdots + \varphi_{km} t^m],$$

wo t^m die höchste Potenz des in η_k auftretenden Logarithmus, φ_{kl} nach positiven ganzen Potenzen fortschreitende Reihen bedeuten, welche nicht sämmtlich für $x = a$ verschwinden, und:

(5.) $$t = \log(x-a)$$

gesetzt worden ist**).

*) Crelles Journal, Bd. 68, S. 360, Gl. (3.)[1].

**) Ebenda S. 364[2].

1) Abh. VII, S. 212, Band I dieser Ausgabe. R. F.

2) Ebenda S. 216. R. F.

Es seien nunmehr $Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_{n-1}(x)$ noch zu bestimmende ganze rationale Functionen von x, und sei:

(6.) $$u = Q_0(x)\,y + Q_1(x)\frac{dy}{dt} + \cdots + Q_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}.$$

Setzen wir:

(7.) $$\varphi_{k0} + \varphi_{k1} t + \cdots + \varphi_{km} t^m = f(t),$$

so ist:

(8.) $$\eta_k = (x-a)^\varrho f(t),$$

und es ergiebt sich:

(9.) $$\frac{d^\lambda \eta_k}{dt^\lambda} = [\varrho^\lambda f(t) + \lambda_1 \varrho^{\lambda-1} f'(t) + \lambda_2 \varrho^{\lambda-2} f^{(2)}(t) + \cdots + \lambda_\lambda f^{(\lambda)}(t)](x-a)^\varrho + f_\lambda(t)(x-a)^{\varrho+1}.$$

Hierin bedeutet $f^{(\alpha)}(t)$ die α^{te} Ableitug von $f(t)$ nach t und $f_\lambda(t)$ eine ganze rationale Function von t, deren Coefficienten nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen sind.

Setzen wir in (6.) $y = \eta_k$ und bezeichnen den zugehörigen Werth von u mit u_k, so wird demgemäss:

(10.) $$u_k = (x-a)^\varrho \Big[F(\varrho, x) f(t) + \frac{F'(\varrho, x)}{1!} f'(t) + \frac{F^{(2)}(\varrho, x)}{2!} f^{(2)}(t) + \cdots$$ [977
$$+ \frac{F^{(n-1)}(\varrho, x)}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t)\Big] + (x-a)^{\varrho+1} g(t),$$

wo:

(11.) $$\begin{cases} F(\varrho, x) = Q_0(x) + Q_1(x)\,\varrho + Q_2(x)\,\varrho^2 + \cdots + Q_{n-1}(x)\,\varrho^{n-1}, \\ F^{(\alpha)}(\varrho, x) = \dfrac{\partial^\alpha F(\varrho, x)}{\partial \varrho^\alpha} \end{cases}$$

und $g(t)$ eine wie $f_\lambda(t)$ beschaffene Function ist.

Es seien nunmehr die Coefficienten von $Q_0(x), Q_1(x), \dots, Q_{n-1}(x)$ so bestimmt, dass die ganze rationale Function von r:

(12.) $$F(r, a) = Q_0(a) + Q_1(a)\,r + Q_2(a)\,r^2 + \cdots + Q_{n-1}(a)\,r^{n-1}$$

den Linearfaktor $r-\varrho$ genau $(m+1)$-fach enthält, dagegen aber für keine andere Wurzel der Gleichung (3) verschwindet. Dann ist $f^{(m+1)}(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ identisch Null, während

(13.) $$F(\varrho, a) = 0, \ \dots, \ F^{(m)}(\varrho, a) = 0.$$

Es ist

$$m < n-1. \tag{14.}$$

Wir können die noch unbestimmten Coefficienten von

$$Q_0(x),\ Q_1(x),\ \ldots,\ Q_{n-1}(x)$$

stets so wählen, dass $\varrho+1$ auch genau der Exponent ist, zu welchem $u_1, u_2, \ldots, u_\mu$ gehören.

Ist $r = \sigma$ eine von ϱ verschiedene Wurzel der Gleichung (3.) und ζ ein entsprechendes Element des zu a gehörigen Fundamentalsystems, so ist unserer Voraussetzung nach nicht gleichzeitig

$$F(\sigma, a) = 0,\quad F'(\sigma, a) = 0,\quad \ldots,\quad F^{(n-1)}(\sigma, a) = 0.$$

Bezeichnen wir demnach mit v das Resultat der Substitution $y = \zeta$ in Gleichung (6.), so gehört v noch immer zum Exponenten σ.

Es seien diejenigen Wurzeln der Gleichung (3.), welche von einer bestimmten Wurzel r_1 derselben um ganze Zahlen verschieden sind, derart in Gruppen vertheilt, dass in jeder Gruppe gleiche Wurzeln sich befinden. Die Gruppe R_0 enthalte die Wurzel r_1 μ_0-fach, die Gruppe R_1 die Wurzel r_1-g_1 μ_1-fach u. s. w., die Gruppe R_ν die Wurzel r_1-g_ν μ_ν-fach, wo die Grössen g positive ganze Zahlen bedeuten, welche sämmtlich von Null verschieden sind und mit dem Index anwachsen. Dann giebt es ein der Gruppe R_λ entsprechendes System von Integralen:

$$y_{\lambda 1},\ y_{\lambda 2},\ \ldots,\ y_{\lambda \mu_\lambda}, \tag{α.}$$

978] welche zum Exponenten r_1-g_λ gehören und so beschaffen sind, dass nicht durch eine lineare Combination derselben mit Integralen höherer Exponenten ein anderes zu r_1-g_λ gehöriges System mit einer geringeren Anzahl von Elementen erhalten werden kann, während jedes andere Integral, welches zum Exponenten r_1-g_λ gehört, sich durch das System (α.) und Integrale höherer Exponenten linear ausdrücken lässt*).

Wenn umgekehrt:

$$w_1,\ w_2,\ \ldots,\ w_p \tag{β.}$$

*) Crelles Journal, Bd. 68, S. 355 [1]).

1) Abh. VII, S. 206—207, Band I dieser Ausgabe. R. F.

ein System von Integralen ist, welche zu einer Wurzel r_1-g_λ der Gleichung (3.) als Exponenten gehören, und wenn das System (β.) nicht durch eine lineare Combination seiner Elemente mit Integralen höherer Exponenten auf ein anderes ebenfalls zu r_1-g_λ gehöriges System mit einer geringeren Anzahl von Elementen zurückgeführt werden kann, während jedes andere Integral, welches zum Exponenten r_1-g_λ gehört, sich durch das System (β.) und Integrale höherer Exponenten linear ausdrücken lässt, so ist r_1-g_λ eine p-fache Wurzel der Gleichung (3.). Denn wäre r_1-g_λ eine q-fache Wurzel und $q < p$, so müsste nach dem eben citirten Satze das System (β.) sich durch eine geringere Anzahl von Elementen ausdrücken lassen.

Es möge nunmehr u aus Gleichung (6.) der Differentialgleichung:

$$\frac{d^n u}{dx^n} + q_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \cdots + q_n u = 0 \tag{15.}$$

genügen. Wir setzen in (6.) an die Stelle von y successive die Elemente des Systems (α.) und bezeichnen die Resultate mit:

$$u_{\lambda 1},\ u_{\lambda 2},\ \ldots,\ u_{\lambda \mu_\lambda}. \tag{γ.}$$

Möge die oben mit ϱ bezeichnete Wurzel der Gleichung (3.) jetzt:

$$\varrho = r_1 - g_1 \tag{16.}$$

sein, und $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ so bestimmt werden, dass $F(r, a)$ [Gleichung (12.)] den Linearfactor $r-(r_1-g_1)$ genau μ_1-fach enthält. Alsdann gehören die Integrale des Systems:

$$u_{11},\ u_{12},\ \ldots,\ u_{1\mu_1} \tag{δ.}$$

zum Exponenten r_1-g_1+1, während für $\lambda \gtrless 1$ das System (γ.) zum Exponenten r_1-g_λ gehört.

Die Elemente eines Systems (γ.) für $\lambda \neq 0$ stehen aber weder unter einander noch mit den Integralen eines anderen Systems in linearer Beziehung, wenn die Gleichung (1.) irreductibel ist. Dasselbe gilt für $\lambda = 0$, wenn $g_1 > 1$.

Die zu $x = a$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung für die Gleichung (15.) besitzt also die Wurzeln:

$$r_1,\ r_1-g_1+1,\ r_1-g_2,\ \ldots,\ r_1-g_\nu, \tag{ε.}$$ [979

resp. $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$-fach, wenn $g_1 > 1$.

Ist $g_1 - 1 > 1$, so sei:

$$v = R_0 u + R_1 \frac{du}{dt} + \cdots + R_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}}, \tag{6a.}$$

wo $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}$ ganze rationale Functionen sind, welche so bestimmt werden, dass:

$$F_1(r, a) = R_0(a) + R_1(a) r + \cdots + R_{n-1}(a) r^{n-1} \tag{12a.}$$

den Linearfactor $r - (r_1 - g_1 + 1)$ genau μ_1-mal enthält. Alsdann ergiebt sich, wie oben, dass die Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung für die Differentialgleichung:

$$\frac{d^n v}{dx^n} + s_1 \frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} + \cdots + s_n v = 0, \tag{15a.}$$

welcher v aus (6a.) genügt:

$$r_1,\ r_1 - g_1 + 2,\ r_1 - g_2,\ \ldots,\ r_1 - g_\nu, \tag{ε'.}$$

und zwar genau resp. $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$-fach sind.

Wiederholen wir den Process (6.), (6a.), …, so ergiebt sich:

Wir können eine mit (1.) zu derselben Klasse gehörige Differentialgleichung aufstellen, bei welcher die von r_1 um ganze Zahlen verschiedenen Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung:

$$r_1,\ r_1 - 1,\ r_1 - g_2,\ \ldots,\ r_1 - g_\nu, \tag{ζ.}$$

sind und resp. $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$-fach auftreten.

Wiederholen wir denselben Process an den Gruppen, deren Repräsentanten $r_1 - g_2, r_1 - g_3, \ldots, r_1 - g_\nu$ sind, so gelangen wir zu einer mit (1.) zu derselben Klasse gehörigen Differentialgleichung, deren zu a gehörige determinirende Fundamentalgleichung die Wurzeln:

$$r_1,\ r_1 - 1,\ r_1 - 2,\ \ldots,\ r_1 - \nu, \tag{η.}$$

resp. $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$-fach hat, während die übrigen Wurzeln dieser Gleichung mit denjenigen Wurzeln der Gleichung (3.) übereinstimmen, die nicht von r_1 um ganze Zahlen verschieden sind.

Der Process, durch welchen von einer Differentialgleichung zu einer anderen derselben Klasse übergegangen wird, ist so beschaffen, dass die Integrale der letzteren nicht an einer *endlichen* Stelle, welche von den singulären Punkten der ersteren verschieden ist, unendlich werden können. Da die Integrale der letzteren sich aber auch nicht an einer von den singulären Punkten der ersteren abweichenden Stelle verzweigen können, so können in der letzteren Differentialgleichung nur ausserwesentlich singuläre Stellen [980 hinzutreten (ausserwesentlich in dem Sinne, dass die Integrale in ihnen weder unendlich werden, noch sich verzweigen*)).

Die Functionsreihen $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{n-1}$; $R_0, R_1, \ldots, R_{n-1}$, u. s. w., die wir bei den auf den singulären Punkt a bezüglichen Transformationen anwenden, können wir nun so wählen, dass die zu allen von a verschiedenen wesentlich singulären Stellen der transformirten Differentialgleichung gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen dieselben bleiben, wie die zu denselben Stellen gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen für die Gleichung (3.).

Indem wir nun für alle wesentlich singulären Stellen den Transformationsprocess ausführen, gelangen wir zu folgendem Resultat:

Es giebt stets eine mit (1.) zu derselben Klasse gehörige Differentialgleichung von folgender Beschaffenheit:

(A.) *Es sei a irgend ein im Endlichen gelegener wesentlich singulärer Punkt, $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ diejenigen Wurzeln der zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, die sich nicht um ganze Zahlen von einander unterscheiden. Der Complex der von r_k um ganze Zahlen (Null) verschiedenen Wurzeln derselben Gleichung hat dann die Gestalt:*

$$r_k,\ r_k - 1,\ r_k - 2,\ \ldots,\ r_k - \nu,$$

worin ν höchstens den Werth $n-1$ erhalten kann.

Dieser Satz bildet eine Ergänzung zu einem Satze, welchen ich bei früherer Gelegenheit aufgestellt habe**).

---

*) Siehe CRELLES Journal, Bd. 68, S. 378[1]).

**) Siehe Sitzungsberichte 1892, S. 1118–1120[2]).

---

[1]) Abh. VII, S. 232, Band I dieser Ausgabe R. F.

[2]) Abh. LX, S. 146—149 dieses Bandes. R. F.

Sei die Differentialgleichung, welcher diese Eigenschaft zukommt:

$$\frac{d^n w}{dx^n} + e_1(x)\frac{d^{n-1} w}{dx^{n-1}} + e_2(x)\frac{d^{n-2} w}{dx^{n-2}} + \cdots + e_n(x)\, w = 0, \tag{17.}$$

und a einer der singulären Punkte derselben, und setzen wir:

$$x - a = \frac{1}{\xi}, \tag{18.}$$

wodurch die Gleichung (17.) in:

$$\frac{d^n w}{d\xi^n} + g_1(\xi)\frac{d^{n-1} w}{d\xi^{n-1}} + \cdots + g_n(\xi)\, w = 0 \tag{17a.}$$

übergeht. Wir können nach dem obigen Theorem durch die Transformation:

$$W = H_0(\xi) + H_1(\xi)\frac{dw}{dt} + \cdots + H_{n-1}(\xi)\frac{d^{n-1} w}{dt^{n-1}}, \tag{19.}$$

981] wo $t = \log \xi$; $H_0, H_1, \ldots, H_{n-1}$ ganze rationale Functionen von ξ, eine mit (17a.) zu derselben Klasse gehörige Differentialgleichung:

$$\frac{d^n W}{d\xi^n} + G_1(x)\frac{d^{n-1} W}{d\xi^{n-1}} + \cdots + G_n(\xi)\, W = 0 \tag{20.}$$

von der Art herstellen, dass die zu sämmtlichen wesentlich singulären Stellen gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen die im Satze (A.) angegebene Eigenschaft besitzen.

Wird in der Differentialgleichung (20.) wiederum die Substitution (18.) angewendet, so verwandelt sie sich in:

$$\frac{d^n W}{dx^n} + E_1(x)\frac{d^{n-1} W}{dx^{n-1}} + \cdots + E_n(x)\, W = 0. \tag{17b.}$$

Diese Gleichung gehört mit (17a.) also auch mit (17.) zu derselben Klasse und besitzt die im Theorem (A.) angegebene Eigenschaft für sämmtliche wesentlich singuläre Punkte den unendlich fernen Punkt eingeschlossen.

2.

Es habe:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n y = 0 \tag{1.}$$

die Eigenschaft, dass die Fundamentalsubstitutionen ihrer Integrale von einem

in den Coefficienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ auftretenden Parameter t unabhängig sind*). Alsdann giebt es ein Fundamentalsystem von Integralen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ derselben, welches der Gleichung:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A_0 y + A_1 y' + \cdots + A_{n-1} y^{(n-1)} \tag{2.}$$

genügt, wo $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ rationale Functionen von x und $y^{(k)} = \frac{\partial^k y}{\partial x^k}$ bedeuten**).

Ist a einer der singulären Punkte von (1.) und geht nach einem Umlaufe um a y_k über in:

$$\bar{y}_k = \alpha_{k1} y_1 + \alpha_{k2} y_2 + \cdots + \alpha_{kn} y_n, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3.}$$

so sind unserer Voraussetzung gemäss die Grössen α_{kl} von t unabhängig, daher auch die Wurzeln der Fundamentalgleichung***) [982

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \omega & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \omega & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0 \tag{4.}$$

von t unabhängig.

Sei $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ das zu a gehörige Fundamentalsystem, so ist:

$$\eta_k = c_{k1} y_1 + c_{k2} y_2 + \cdots + c_{kn} y_n. \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.}$$

Die Coefficienten c können von t unabhängig gewählt werden†).

Wir wollen nunmehr voraussetzen, dass die Integrale der Gleichung (1.) überall bestimmte Werthe haben, dass also:

$$p_k = \frac{F_{k(\varrho-1)}(x)}{\psi(x)^k}, \tag{6.}$$

*) Siehe Sitzungsberichte 1888, S. 1278 ff. und Sitzungsberichte 1892, S. 158 ff.[1]).
**) Sitzungsberichte 1888, S. 1278[2]).
***) Crelles Journal, Bd. 66, S. 132, Gl. (6.)[3]).
†) Siehe Sitzungsberichte 1892, S. 163[4]).

[1]) Abh. LIV, S. 20 ff. und Abh. LIX, S. 118 ff. dieses Bandes. R. F.
[2]) Abh. LIV, S. 20 dieses Bandes. R. F.
[3]) Abh. VI, S. 171, Band I dieser Ausgabe. R. F.
[4]) Abh. LIX, S. 124 dieses Bandes. R. F.

wo

$$\psi(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\varrho)$$

und $F_{k(\varrho-1)}(x)$ eine ganze rationale Function $k(\varrho-1)^{\text{ten}}$ Grades*).

Alsdann sind zwar die Wurzeln der Gleichung (4.) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ von t unabhängig, aber da $\frac{1}{2\pi i}\log\omega_k$ nur bis auf eine additive ganze Zahl bestimmt ist, so ist das System der Exponenten, zu welchen die durch die Gleichung (5.) bestimmten Integrale gehören, nicht nothwendig mit dem Systeme der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung**):

$$(7.)\quad r(r-1)(r-2)\dots(r-n+1)+F_{\varrho-1}(a)\,r(r-1)(r-2)\dots(r-n+2)+\dots+F_{n(\varrho-1)}(a)=0$$

übereinstimmend. Ist r_λ eine Wurzel der Gleichung (7.), welche sich nicht von einer anderen Wurzel um eine ganze Zahl unterscheidet, so ist unter den Integralen (5.) eines vorhanden, welches r_λ zum Exponenten hat. Wenn aber r_λ von einer anderen Wurzel der Gleichung (7.) um eine von Null verschiedene ganze Zahl abweicht, so ist es nicht erforderlich, dass r_λ einen Exponenten für ein Element von (5.) darstellt.

Wir wollen daher unter $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ stets das Fundamentalsystem verstehen, dessen Exponenten sich mit den Wurzeln der Gleichung (7.) decken (wie wir dasselbe***) beschrieben haben).

983] Setzen wir nun:

$$(8.)\qquad y_k = e_{k1}\eta_1 + e_{k2}\eta_2 + \dots + e_{kn}\eta_n, \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

so sind e_{kl} im Allgemeinen Functionen von t.

3.

Wir heben nunmehr aus den Differentialgleichungen

$$(1.)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n y = 0,$$

deren Integrale von einem Parameter t unabhängige Substitutionscoefficienten besitzen, folgende Kategorie hervor:

*) Crelles Journal, Bd. 66, S. 146, Gl. (12.)[1].

**) Ebenda S. 147, Gl. (15.)[2].

***) Ebenda Bd. 68, S. 355[3].

1) Abh. VI, S. 186, Band I dieser Ausgabe. R. F.

2) Ebenda S. 188. R. F.

3) Abh. VII, S. 206—207, Band I dieser Ausgabe. R. F.

(a) Es sollen die Integrale derselben überall bestimmte Werthe erhalten, die Coefficienten p_k demnach die in Gleichung (6.) voriger Nummer angeführte Form haben. Hierbei sollen $a_1, a_2, \dots, a_{\varrho-1}$ von t unabhängig sein, dagegen $a_\varrho = t$ werden.

(b) Sei a ein beliebiger singulärer Punkt, y ein Element des zugehörigen Fundamentalsystems von Integralen, r die entsprechende Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung, so dass:

$$y = (x-a)^r[\varphi_0 + \varphi_1\log(x-a) + \varphi_2(\log(x-a))^2 + \dots + \varphi_m(\log(x-a))^m].$$

Es sollen $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ in der Umgebung eines willkürlichen Werthes t_0 von t nach ganzen positiven Potenzen von $x-a$ und $t-t_0$ entwickelbar sein.

Dass es Differentialgleichungen giebt, welche den Forderungen (a) und (b) Genüge leisten, dafür bieten diejenigen Differentialgleichungen Beispiele dar, denen die Periodicitätsmoduln der Abelschen Integrale Genüge leisten*).

Sei für ein Integral der Gleichung (1.):

$$(2.)\quad y = (x-a)^r[\varphi_0 + \varphi_1\log(x-a) + \varphi_2(\log(x-a))^2 + \dots + \varphi_m(\log(x-a))^m],$$

wo a einer der Punkte $a_1, a_2, \dots, a_{\varrho-1}$ und $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_m$ nicht sämmtlich Null und nicht unendlich für einen willkürlichen Werth von t, so ist nach der Voraussetzung (b):

$$(3.)\quad \frac{\partial y}{\partial t} = (x-a)^r[\psi_0 + \psi_1\log(x-a) + \psi_2(\log(x-a))^2 + \dots + \psi_m(\log(x-a))^m],$$

wo $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_m$ für $x=a$ und einen willkürlichen Werth von t nicht unendlich werden.

4. [984

Wenn die Differentialgleichung (1.) No. 2 die Eigenschaft hat, dass die Fundamentalsubstitutionen ihrer Integrale von einem in ihren Coefficienten auftretenden Parameter unabhängig sind, so hat jede Differentialgleichung derselben Klasse die gleiche Eigenschaft. Hat die Differentialgleichung (1.) No. 2 überdies die Eigenschaft (b) No. 3, so behält die Differentialgleichung

*) Vergl. Crelles Journal, Bd. 71, S. 118 und Bd. 73, S. 329; Sitzungsberichte 1888, S. 1286; 1889, S. 713; 1890, S. 21[1].

1) Abh. VIII, S. 270 und Abh. XIII, S. 349, Band I dieser Ausgabe; Abh. LIV, S. 30, 35 und 49 dieses Bandes. R. F.

für u, welche durch eine Transformation der Form (6.) No. 1 erhalten wird, dieselbe Eigenschaft (b) No. 3.

Wir können daher voraussetzen, dass die Differentialgleichung (1.) No. 2:

$$\text{(1.)} \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + p_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n y = 0$$

sowohl in Bezug auf die im Endlichen gelegenen wirklich singulären Punkte, als auch in Bezug auf $x = \infty$ die im Theorem (A.) No. 1 angegebene Eigenschaft besitzt.

Seien $\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{1n}$ die Elemente des zu einem wirklich singulären Punkte a gehörigen Fundamentalsystems, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die entsprechenden Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung, und sei $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ein System von Fundamentalintegralen von (1.), welches der Gleichung (2.) No. 2:

$$\text{(2.)} \qquad \frac{\partial y}{\partial t} = A_0 y + A_1 y' + \cdots + A_{n-1} y^{(n-1)}$$

genügt. Setzen wir:

$$\text{(3.)} \qquad y_k = e_{k1} \eta_{11} + e_{k2} \eta_{12} + \cdots + e_{kn} \eta_{1n}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

in (2.) ein und bezeichnen mit e'_{kl} die Ableitung von e_{kl} nach t, sowie mit Δ die Hauptdeterminante von $\eta_{11}, \eta_{12}, \ldots, \eta_{1n}$, so erhalten wir aus (2.):

$$\text{(4.)} \qquad \Delta A_{n-1}$$
$$= \left[e'_{11}\eta_{11} + \cdots + e'_{1n}\eta_{1n} + e_{11}\frac{\partial \eta_{11}}{\partial t} + \cdots + e_{1n}\frac{\partial \eta_{1n}}{\partial t},\ e_{11}\eta_{11}^{(n-2)} + \cdots + e_{1n}\eta_{1n}^{(n-2)},\ \ldots,\ e_{11}\eta_{11} + \cdots + e_{1n}\eta_{1n}\right],$$

wenn wir eine Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

kurz durch ihre erste Zeile:

$$[a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n}]$$

darstellen.

985] Aus (4.) ergiebt sich:

$$\text{(5.)} \qquad \Delta A_{n-1} = [e'_{11}\eta_{11} + \cdots + e'_{1n}\eta_{1n},\ e_{11}\eta_{11}^{(n-2)} + \cdots + e_{1n}\eta_{1n}^{(n-2)},\ \ldots,\ e_{11}\eta_{11} + \cdots + e_{1n}\eta_{1n}]$$
$$+ \delta\left[\frac{\partial \eta_{11}}{\partial t}, \eta_{11}^{(n-2)}, \ldots, \eta_{11}\right],$$

wo

$$\text{(6.)} \qquad \delta = [e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n}].$$

Nun aber ist:

$$\text{(7.)} \qquad [e'_{11}\eta_{11} + \cdots + e'_{1n}\eta_{1n},\ e_{11}\eta_{11}^{(n-2)} + \cdots + e_{1n}\eta_{1n}^{(n-2)},\ \ldots,\ e_{11}\eta_{11} + \cdots + e_{1n}\eta_{1n}]$$
$$= \sum \left[e'_{1\lambda_1}, e_{1\lambda_2}, \ldots, e_{1\lambda_n}\right] \eta_{1\lambda_1} \eta_{1\lambda_2}^{(n-2)} \eta_{1\lambda_3}^{(n-3)} \cdots \eta_{1\lambda_n},$$

wo $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Werthe der Zahlenreihe $1, 2, 3, \ldots, n$ annehmen. Es sind jedoch $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ von einander verschieden anzunehmen, während λ_1 mit einer dieser Zahlen zusammenfallen kann. Bezeichnen wir daher mit $\sum r$ die Summe der Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so gehört das Product:

$$\eta_{1\lambda_1} \eta_{1\lambda_2}^{(n-2)} \eta_{1\lambda_3}^{(n-3)} \cdots \eta_{1\lambda_n}$$

zum Exponenten:

$$\text{(8.)} \qquad \sum r - \frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

oder

$$\text{(9.)} \qquad \sum r + r_{\lambda_1} - r_{\lambda_\alpha} - \frac{(n-2)(n-1)}{2},$$

je nachdem λ_1 von den Zahlen der Reihe $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ verschieden ist oder mit einer derselben zusammenfällt. Andrerseits gehört Δ zum Exponenten:

$$\sum r - \frac{n(n-1)}{2}\ {}^{*)}.$$

Demnach gehört:

$$\text{(10.)} \qquad P_{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} = \frac{\eta_{1\lambda_1} \eta_{1\lambda_2}^{(n-2)} \eta_{1\lambda_3}^{(n-3)} \cdots \eta_{1\lambda_n}}{\Delta}$$

zum Exponenten $n-1$ oder zum Exponenten $r_{\lambda_1} - r_{\lambda_\alpha} + n - 1$, je nachdem λ_1 von $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$ verschieden ist oder mit einer dieser Zahlen zusammenfällt.

Da wegen der Voraussetzung (b.) No. 3 $\frac{\partial \eta}{\partial t}$ für einen von t unabhängigen singulären Punkt a mindestens zum Exponenten r_λ gehört, so gehört der Ausdruck:

$$\text{(11.)} \qquad \mathrm{E} = \frac{\left[\frac{\partial \eta_{11}}{\partial t}, \eta_{11}^{(n-2)}, \ldots, \eta_{11}\right]}{\Delta}$$

*) Siehe CRELLES Journal, Bd. 66, S. 145 [1]).

[1]) Abh. VI, S. 165, Band I dieser Ausgabe. R. F.

986] mindestens zum Exponenten $n-1$ **und ist in der Umgebung von $x=a$ eindeutig.**

Aus der Gleichung (5.) oder:

$$A_{n-1} = \sum P_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}[e'_{1\lambda_1}, e_{1\lambda_2}, \ldots, e_{1\lambda_n}] + \delta E, \tag{5a.}$$

und aus der Erwägung, dass A_{n-1} eine rationale Function von x, also in der Umgebung von $x=a$ eindeutig sein soll, ergiebt sich, **dass diejenigen Coefficienten** $[e'_{1\lambda_1}, e_{1\lambda_2}, \ldots, e_{1\lambda_n}]$ **verschwinden müssen, für welche** $r_{\lambda_1}-r_{\lambda_\alpha}$ **keine ganze Zahl ist.**

In den übrig bleibenden Gliedern sind die Differenzen $r_{\lambda_1}-r_{n_1}$ ihrem absoluten Werthe nach nicht grösser als $n-1$, weil unsere Gleichung (1.) die im Theoreme (A.) vorausgesetzte Beschaffenheit hat. Daher gehören in den zurückbleibenden Gliedern die $P_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ im Allgemeinen zu **positiven** ganzzahligen Exponenten. Ausgenommen ist ein Glied, für welches:

$$r_{\lambda_1}-r_{\lambda_\alpha} = -(n-1). \tag{12.}$$

Dieser Fall kann nur eintreten, wenn die determinirende Fundamentalgleichung die Wurzeln $r_1, r_1-1, r_1-2, \ldots, r_1-(n-1)$ hat, und für die Combination:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_\alpha = n. \tag{13.}$$

Setzen wir in (1.):

$$y = (x-a)^{r_1-(n-1)}u, \tag{14.}$$

so würde die Differentialgleichung für u beim singulären Punkte a die Zahlen $n-1, n-2, \ldots, 1, 0$ als Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung besitzen. Die Hauptdeterminante der Differentialgleichung für u würde demnach für $x=a$ weder Null noch unendlich. Die Coefficienten der Differentialgleichung für u würden daher ebenfalls für $x=a$ endlich bleiben, und es würde a überhaupt nicht mehr singulärer Punkt sein, wenn nicht die Integrale in ihrer Entwickelung um $x=a$ Logarithmen enthielten.

Denken wir uns also aus (1.) solche Punkte, welche durch die Substitution der Form (14.) beseitigt werden können, entfernt — wodurch die Natur der Gleichung (1.) nicht geändert wird — so schliessen wir, dass der Fall (12.) nur eintreten kann, wenn $P_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n}$ logarithmische Glieder enthält. Da aber

A_{n-1} in der Umgebung von a eindeutig sein muss, so folgt, dass der Complex der bezüglichen Glieder in Gleichung (5a.) verschwinden muss.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich das Theorem:

(B.) **Die rationale Function A_{n-1} von x wird für die nicht von t abhängigen singulären Punkte Null mindestens erster Ordnung.**

Für den singulären Punkt $a=t$ gehört $\frac{\partial\eta_1}{\partial t}$ mindestens zum Exponenten r_1-1, daher E mindestens zum Exponenten $n-2$, es ist folglich, für $n>2$, A_{n-1} auch Null für $x=t$, und für $n=2$ jedenfalls nicht unendlich. [987

Für $x=\infty$ setzen wir:

$$x = \frac{1}{\xi}. \tag{15.}$$

Alsdann ergiebt dieselbe Rechnung wie die obige, dass $A_{n-1}\xi^{2(n-1)}$ für $\xi=0$ nicht unendlich wird.

Es ist daher A_{n-1} für $x=\infty$ höchstens von der $2(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich.

Anlangend die ausserwesentlich singulären Punkte, so kann die Transformation (6.) No. 1 so gewählt werden, dass die Hauptdeterminante der Integrale der transformirten Gleichung in den durch die Transformation entstandenen ausserwesentlich singulären Punkten β nur einfach verschwindet. Die auf einen solchen Punkt bezügliche determinirende Fundamentalgleichung hat dann die Wurzeln $0, 1, 2, \ldots, n-2, n$. Bei der Transformation (6a.) No. 1 bleiben die singulären Punkte β und die zugehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen erhalten, während neue ausserwesentlich singuläre Punkte γ eintreten, deren zugehörige determinirende Fundamentalgleichungen ebenfalls die Wurzeln $0, 1, 2, \ldots, n-2, n$ sind. So weiter schliessend folgern wir, dass wir bei unserer Gleichung (1.) voraussetzen dürfen, dass zu allen ausserwesentlich singulären Punkten derselben determinirende Fundamentalgleichungen mit den Wurzeln $0, 1, 2, \ldots, n-2, n$ gehören.

Setzen wir in Gleichung (2.) für y successive $y_1, y_2, \ldots, y_n$, so ergiebt sich aus dem entstehenden Gleichungssystem:

$$\Delta A_k = Z_k, \qquad (k=1,2,\ldots,n-1) \tag{16.}$$

worin Z_k eine ganze Function von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und ihren Ableitungen nach

x und von $\frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial t}$, und wo Δ die Hauptdeterminante von $y_1, y_2, \dots, y_n$ ist. Da Δ für einen ausserwesentlich singulären Punkt nur erster Ordnung verschwindet, und da $y_1, y_2, \dots, y_n$ und ihre Ableitungen nach x, sowie, wegen der Voraussetzung (b) No. 3, $\frac{\partial y_1}{\partial t}, \frac{\partial y_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial y_n}{\partial t}$ nicht unendlich werden, so ergiebt sich, dass

$$A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$$

für einen ausserwesentlich singulären Punkt höchstens erster Ordnung unendlich werden.

988] Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich, dass:

$$A_{n-1} = \frac{Z}{N}, \tag{17.}$$

wo der Zähler Z jedenfalls für die von t unabhängigen Werthe $a_1, a_2, \dots, a_{\varrho-1}$ mindestens erster Ordnung verschwindet, während der Nenner N nur für die ausserwesentlich singulären Punkte und zwar nicht höherer als erster Ordnung verschwinden kann. Da andererseits A_{n-1} für $x = \infty$ höchstens $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung unendlich ist, so ergiebt sich:

Ist die Anzahl der ausserwesentlich singulären Punkte der Gleichung (1.) $= m$, so ist:

$$\varrho \leqq 2n + m - 1. \tag{18.}$$

Wenn die aus (6.), (6a.), ... No. 1 resultirende Transformation so eingerichtet werden könnte, dass keine ausserwesentlich singuläre Stelle eingeführt würde, alsdann träte an die Stelle der Ungleichung (18.) eine Ungleichung der Form:

$$\varrho \leqq 2n - 1. \tag{18a.}$$

Würden die Grössen e_{kl} [Gleichung (3.)] von t unabhängig werden, so würde in Gleichung (5.) auf der rechten Seite nur das mit δ multiplicirte Glied verbleiben, und daher A_{n-1} für die $\varrho - 1$ von t unabhängigen singulären Punkte $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung verschwinden, und es müsste dann, da in diesem Falle die Transformationen (6.), (6a.) u. s. w. No. 1 überflüssig werden, und demnach $m = 0$ wäre, sein:

$$(n-1)(\varrho-1) \leqq 2n - 1$$

d. h.:

$$\varrho \leqq \frac{3n-2}{n-1}. \tag{18b.}$$

---

5. [1117

Aus den Entwickelungen der vorigen Nummer ergiebt sich der folgende Satz: Es seien in

$$P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n y = 0 \tag{1.}$$

die Coefficienten $p_1, p_2, \dots, p_n$ so beschaffene rationale Functionen von x, dass die Integrale der Differentialgleichung überall bestimmte Werthe haben. Es werde überdies vorausgesetzt, dass es ein Fundamentalsystem von Integralen derselben gebe, für welches zugleich die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A_0 y + A_1 y' + \dots + A_{n-1} y^{(n-1)} \tag{2.}$$

befriedigt werde, wo t ein in $p_1, p_2, \dots, p_n$ auftretender Parameter und $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ rationale Functionen von x sind, und wo $y^{(\lambda)} = \frac{\partial^\lambda y}{\partial x^\lambda}$ gesetzt ist. Sind alsdann die Differenzen der eine Gruppe bildenden Wurzeln einer zu einem singulären Punkte a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung nicht grösser als $n-2$, so verschwindet A_{n-1} für $x = a$ mindestens erster Ordnung. Hierbei ist es für $n > 2$ gleichgültig, ob a von t abhängig oder unabhängig ist. Für $n = 2$ wird a von t unabhängig vorausgesetzt.

Wir wollen von diesem Satze einen neuen Beweis geben, welcher zu gleicher Zeit erkennen lässt, dass für sein Bestehen die Voraussetzung (b) in Nummmer (3.) überflüssig ist.

Ist y irgend ein Integral der Gleichung (1.), so ist [1118

$$P\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial t} y^{(n-1)} + \frac{\partial p_2}{\partial t} y^{(n-2)} + \dots + \frac{\partial p_n}{\partial t} y = 0. \tag{3.}$$

Ist $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.), welches zugleich die Gleichung (2.) befriedigt, und

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \tag{4.}$$

also

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial c_1}{\partial t} y_1 + \frac{\partial c_2}{\partial t} y_2 + \dots + \frac{\partial c_n}{\partial t} y_n + c_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} + c_2 \frac{\partial y_2}{\partial t} + \dots + c_n \frac{\partial y_n}{\partial t}, \tag{5.}$$

so erhalten wir

$$P\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) = P\left(\sum_1^n{}_\lambda c_\lambda \frac{\partial y_\lambda}{\partial t}\right) = P\left(\sum_1^n{}_\lambda c_\lambda A(y_\lambda)\right) = P(A(y)), \tag{6.}$$

wo

$$A(y) = A_0 y + A_1 y' + \cdots + A_{n-1} y^{(n-1)} \tag{7.}$$

gesetzt ist.

Wir erhalten demnach für ein willkürliches Integral der Gleichung (1.) die Beziehung

$$P(A(y)) + \frac{\partial p_1}{\partial t} y^{(n-1)} + \frac{\partial p_2}{\partial t} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial t} y = 0. \tag{8.}$$

Seien nunmehr $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{in}$ die Elemente eines zum singulären Punkte a gehörigen Fundamentalsystems, $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die entsprechenden Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, so ist

$$P(A(\eta_{ik})) + \frac{\partial p_1}{\partial t} \eta_{ik}^{(n-1)} + \frac{\partial p_2}{\partial t} \eta_{ik}^{(n-2)} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial t} \eta_{ik} = 0. \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{9.}$$

Bezeichnen wir mit $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen der zu (1.) adjungirten Differentialgleichung und zwar so, dass

$$\zeta_k = (-1)^{n+k} \frac{D(\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{ik-1}, \eta_{ik+1}, \ldots, \eta_{in})}{D(\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{in})}, \tag{10.}$$

wo $D(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ die Hauptdeterminante der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_r$ nach der Variablen x bedeuten soll, alsdann gehören $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ zu den Exponenten $-r_1+n-1, -r_2+n-1, \ldots, -r_n+n-1$*).

Ist p irgend eine Function von x, so ist bekanntlich das allgemeine Integral der Gleichung

$$P(w) + p = 0 \tag{11.}$$

1119] in der Form

$$w = -\sum_1^n {}_i \eta_{ii} \int p \zeta_i dx + \sum_1^n {}_i \gamma_i \eta_{ii} \tag{12.}$$

enthalten, wo γ_i von x unabhängige Grössen sind**).

Setzen wir demnach

$$\sum_1^n {}_i \eta_{ii} \int \frac{\partial p_\lambda}{\partial t} \eta_{ik}^{(n-\lambda)} \zeta_i dx = P_{k\lambda}, \tag{13.}$$

*) Vergl. meine Arbeit, Crelles Journal, Bd. 76, S. 180 [1]).

**) Siehe meine Arbeit, Annali di Matematica, Ser. II, Bd. 4, p. 37, Mai 1870 [2]), und Frobenius, Crelles Journal, Bd. 77, S. 256.

[1]) Abh. XVI, S. 419, Band I dieser Ausgabe. R. F.

[2]) Abh. X, S. 296, Band I dieser Ausgabe. R. F.

so ergiebt die Gleichung (9.)

$$A(\eta_{ik}) = -\sum_1^n {}_\lambda P_{k\lambda} + \sum_1^n {}_\alpha c_{k\alpha} \eta_{i\alpha}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{14.}$$

wo $c_{k,\alpha}$ von x unabhängig.

Multipliciren wir die Gleichungen (14.) bez. mit $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ und addiren dieselben, so ergiebt sich aus den Beziehungen

$$\begin{cases} \sum_1^n {}_k \eta_{ik}^{(\lambda)} \zeta_k = 0, \quad \text{für } \lambda < n-1, \\ \sum_1^n {}_k \eta_{ik}^{(n-1)} \zeta_k = 1^{*}), \end{cases} \tag{15.}$$

$$A_{n-1} = -\sum_1^n {}_k \sum_1^n {}_\lambda P_{k\lambda} \zeta_k + \sum_1^n {}_k \sum_1^n {}_\alpha c_{k\alpha} \eta_{i\alpha} \zeta_k. \tag{16.}$$

Ehe wir aus dieser Gleichung unsere Folgerungen ziehen, schieben wir hier die folgende Bemerkung ein.

Substituiren wir in (1.) und (2.)

$$y = (x-a)^\varrho u, \tag{17.}$$

wo a einen der singulären Punkte, ϱ eine beliebige von t unabhängige Grösse bedeutet, so erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = B_0 u + B_1 u' + \cdots + B_{n-2} u^{(n-2)} + A_{n-1} u^{(n-1)}, \tag{18.}$$

worin $B_0, B_1, \ldots, B_{n-2}$ im allgemeinen von $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}$ verschiedene rationale Functionen von x sind.

Die Gruppe der durch die Substitution (17.) aus (1.) erhaltenen Differentialgleichung ist also ebenfalls von t unabhängig, und die Coefficienten der höchsten Ableitungen nach x in den Gleichungen (2.) und (18.) sind übereinstimmend.

Bilden die Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamental- [1120 gleichung für die Integrale y, eine Gruppe $r_1, r_2, \ldots, r_\lambda$, so bilden die entsprechenden Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung für die Integrale u, ebenfalls eine Gruppe $s_1, s_2, \ldots, s_\lambda$, und umgekehrt.

*) Siehe Frobenius, Crelles Journal, Bd. 77, S. 248.

Die Differenzen entsprechender Wurzeln dieser Gruppen haben gleiche Werthe.

Wir können demnach voraussetzen, dass die Wurzeln der sämmtlichen determinirenden Fundamentalgleichungen für unsere Gleichung (1.) keine ganzen Zahlen sind.

Weil die Integrale der Gleichung (1.) überall bestimmt sein sollen, ist

$$(19.)\qquad p_\lambda = \frac{\alpha_{\lambda\lambda}}{(x-a)^\lambda} + \frac{\alpha_{\lambda,\lambda-1}}{(x-a)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{\lambda 1}}{x-a} + R_\lambda,$$

wo R_λ eine rationale Function von x ist, die für $x = a$ nicht mehr unendlich wird.

Weil andererseits die Wurzeln sämmtlicher determinirender Fundamentalgleichungen von t unabhängig sein sollen*), so ist $\alpha_{\lambda\lambda}$ von t unabhängig. Daher ist für einen von t unabhängigen singulären Punkt a

$$(20.)\qquad \frac{\partial p_\lambda}{\partial t} = \frac{\frac{\partial \alpha_{\lambda,\lambda-1}}{\partial t}}{(x-a)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{\frac{\partial \alpha_{\lambda 1}}{\partial t}}{x-a} + \frac{\partial R_\lambda}{\partial t},$$

und für einen von t abhängigen singulären Punkt

$$(20a.)\qquad \frac{\partial p_\lambda}{\partial t} = \frac{\lambda \alpha_{\lambda\lambda}\frac{\partial a}{\partial t}}{(x-a)^{\lambda+1}} + \frac{\alpha_{\lambda,\lambda-1}(\lambda-1)\frac{\partial a}{\partial t}}{(x-a)^\lambda} + \frac{\frac{\partial \alpha_{\lambda,\lambda-1}}{\partial t}}{(x-a)^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{\frac{\partial \alpha_{\lambda 1}}{\partial t}}{x-a} + \frac{\partial R_\lambda}{\partial t}.$$

Demnach gehört $\frac{\partial p_\lambda}{\partial t}\eta_{lk}^{(n-\lambda)}\zeta_l$ mindestens entweder zum Exponenten $r_k - r_l$ oder $r_k - r_l - 2$, je nachdem a von t unabhängig oder abhängig ist, und $P_{k\lambda}$ mindestens zum Exponenten $r_k + 1$ im ersten und zu $r_k - 1$ im zweiten Falle**). Endlich gehört $P_{k\lambda}\zeta_k$ mindestens zum Exponenten n im ersten und zum Exponenten $n-2$ im zweiten Falle.

1121] Es ist demnach, wenn a von t unabhängig ist, der Ausdruck

$$\sum_1^n{}_k \sum_1^n{}_\lambda P_{k\lambda}\zeta_k$$

für $x = a$ gleich Null. Ist a von t abhängig, so verschwindet für $n > 2$ derselbe Ausdruck noch immer für $x = a$.

*) Vergl. Sitzungsberichte, 25. Februar 1892, S. 162 [1]).

**) Vergl. Crelles Journal, Bd. 66, S. 155 [2]).

[1]) Abh. LIX, S. 123 dieses Bandes. R. F.

[2]) Abh. VI, S. 197, Band I dieser Ausgabe. R. F.

Da A_{n-1} eine rationale Function von x sein soll, so können in (16.) von den Gliedern $c_{k\alpha}\eta_\alpha\zeta_k$ nur solche verbleiben, welche zu einem ganzzahligen Exponenten gehören, d. h. wo $r_\alpha - r_k$ ganze Zahlen bedeuten.

Da nun der Ausdruck $\eta_\alpha\zeta_k$ zum Exponenten $r_\alpha - r_k + n - 1$ gehört, so folgt demnach aus Gleichung (16.): A_{n-1} verschwindet stets für $x = a$, wenn a von t unabhängig und keine Differenz der eine Gruppe bildenden Wurzeln der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung ihrem absoluten Werthe nach die Grösse $n-2$ überschreitet. Für $n > 2$ verschwindet unter denselben Umständen A_{n-1} für $x = a$, auch wenn a von t abhängig ist.

Hiermit ist der Eingangs dieser Nummer erwähnte Satz bewiesen.

Wir erkennen zugleich, dass A_{n-1} für $x = a$ auch dann verschwinden muss, wenn auch die Differenzen $r_\alpha - r_k$ absolut genommen den Werth $n-2$ überschreiten, sobald die Glieder $c_{k\alpha}\eta_\alpha\zeta_k$ in Gleichung (16.), welche zu einem verschwindenden oder negativen Exponenten gehören, in dieser Gleichung sich wegheben.

Dieses tritt aber immer ein, wenn $\eta_\alpha\zeta_k$ mit $\log(x-a)$ behaftet ist, weil A_{n-1} eine rationale Function von x sein soll.

6.

Wenn die Differentialgleichung

$$(1.)\qquad P(y) = y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0$$

wieder die Eigenschaft hat, dass die Substitutionsgruppe derselben von einem in den Coefficienten p_k auftretenden Parameter t unabhängig ist, d. h. wenn ein Fundamentalsystem von Integralen derselben zugleich die Gleichung

$$(2.)\qquad \frac{\partial y}{\partial t} = A_0 y + A_1 y' + \cdots + A_{n-1} y^{(n-1)}$$

befriedigt, wo $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ rationale Functionen von x sind, so genügen*) $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ einem Systeme linearer Differentialgleichungen, deren [1122 Herleitung a. a. O. angedeutet worden ist. Wir wollen hier eine independente Darstellung dieser Differentialgleichungen entwickeln.

*) Siehe Sitzungsberichte, 25. Februar 1892, S. 162 [1]).

[1]) Abh. LIX, S. 123 dieses Bandes. R. F.

Wir bilden zu dem Ende $P(uv)$, wo u, v beliebige Functionen von x bedeuten, und erhalten

$$(3.)\quad P(uv) = \sum_{1}^{n-1}{}_{\lambda}\, u^{(n-\lambda)}[n_\lambda v^{(\lambda)} + (n-1)_{\lambda-1} p_1 v^{(\lambda-1)} + (n-2)_{\lambda-2} p_2 v^{(\lambda-2)} + \cdots + (n-\lambda)_0 p_\lambda v],$$

wenn wir mit den oberen Accenten die Ableitungen nach x und mit k_μ den μ^{ten} Binomialcoefficienten von k bezeichnen.

Setzen wir in (3.) $v = y^{(k)}$, $u = A_k$, so ergiebt sich

$$(4.)\quad \begin{aligned} P(A_k y^{(k)}) = \sum_{0}^{n}{}_{\lambda}\, A_k^{(n-\lambda)}[n_\lambda y^{(k+\lambda)} + (n-1)_{\lambda-1} p_1 y^{(k+\lambda-1)} \\ + (n-2)_{\lambda-2} p_2 y^{(k+\lambda-2)} + \cdots + (n-\lambda)_0 p_\lambda y^{(k)}]. \end{aligned}$$

Ist $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein beliebiges Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (1.), $z_1, z_2, \dots, z_n$ das adjungirte Functionssystem, welches durch die Gleichung

$$(5.)\quad z_k = (-1)^{n+k}\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_k)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

(s. vorige Nummer, Gleichung (10.)) definirt ist, so sind die Ausdrücke

$$(6.)\quad s_{\alpha\beta} = y_1^{(\alpha)} z_1^{(\beta)} + y_2^{(\alpha)} z_2^{(\beta)} + \cdots + y_n^{(\alpha)} z_n^{(\beta)}$$

ganze rationale Functionen der Grössen $p_1, p_2, \dots, p_n$ und ihrer Ableitungen.

Insbesondere ist $s_{\alpha\beta} = 0$, wenn $\alpha+\beta < n-1$, und $s_{\alpha\beta} = (-1)^\beta$, wenn $\alpha+\beta = n-1$*).

Substituiren wir nunmehr in (4.) successive $y_1, y_2, \dots, y_n$ für y, multipliciren die erhaltenen Gleichungen bez. mit $z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}, \dots, z_n^{(\mu)}$ und addiren dieselben, so folgt

$$(7.)\quad \begin{aligned} \sum_{1}^{n}{}_{l}\, z_l^{(\mu)} P(A_k y_l^{(k)}) = \sum_{0}^{n}{}_{\lambda}\, A_k^{(n-\lambda)}(n_\lambda s_{k+\lambda,\mu} + (n-1)_{\lambda-1} p_1 s_{k+\lambda-1,\mu} \\ + (n-2)_{\lambda-2} p_2 s_{k+\lambda-2,\mu} + \cdots + (n-\lambda)_0 p_\lambda s_{k\mu}) = Q_\mu(A_k). \end{aligned}$$

Aus (1.) folgt

$$(8.)\quad P\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + \frac{\partial p_1}{\partial t} y^{(n-1)} + \frac{\partial p_2}{\partial t} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial t} y = 0.$$

*) Vergl. Frobenius, Crelles Journal, Bd. 77, S. 248–249.

Nach voriger Nummer Gleichung (8.) ist also:

$$(9.)\quad \sum_{0}^{n-1}{}_{k}\, P(A_k y^{(k)}) + \frac{\partial p_1}{\partial t} y^{(n-1)} + \frac{\partial p_2}{\partial t} y^{(n-2)} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial t} y = 0.$$

Setzen wir in Gleichung (9.) für y successive $y_1, y_2, \dots, y_n$, multi- [1123
pliciren die entstehenden Gleichungen bez. mit $z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}, \dots, z_n^{(\mu)}$ und addiren die Resultate, so erhalten wir

$$(10.)\quad Q_\mu(A_0) + Q_\mu(A_1) + \cdots + Q_\mu(A_{n-1}) + \frac{\partial p_1}{\partial t} s_{n-1,\mu} + \frac{\partial p_2}{\partial t} s_{n-2,\mu} + \cdots + \frac{\partial p_n}{\partial t} s_{0\mu} = 0.$$

Für $\mu = 0, 1, 2, \dots, n-1$ repräsentirt die Gleichung (10.) die independente Gestalt des Systems von linearen Differentialgleichungen, welchen $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$ als Functionen von x genügen müssen.

7.

Um in eine Discussion dieser Differentialgleichungen einzutreten, beginnen wir mit dem Falle $n = 2$. Wir können ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, wie a. a. O.*) hervorgehoben worden ist, den Coefficienten der ersten Ableitung p_1 gleich Null voraussetzen, und haben daher, wenn p_2 mit $-p$ bezeichnet wird, die Differentialgleichung

$$(1.)\quad \frac{d^2 y}{dx^2} = py$$

zu betrachten.

Das System von Differentialgleichungen für A_0, A_1 lautet in unserem Falle**)

$$(2.)\quad \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial A_0}{\partial x} = 0,$$

$$(3.)\quad \frac{\partial^2 A_0}{\partial x^2} + 2p\frac{\partial A_1}{\partial x} + p' A_1 = \frac{\partial p}{\partial t},$$

wo $p' = \frac{\partial p}{\partial x}$ gesetzt ist.

Es sei a einer der singulären Punkte von (1.), so ist in unserem Falle $\zeta_1 = -\eta_1$, $\zeta_2 = \eta_1$, und es liefert die Gleichung (16.) (No. 5)

*) Sitzungsberichte, 25. Februar 1892, S. 163 [1]).

**) Ebenda S. 163 [2]).

[1]) Abh. LIX, S. 124 dieses Bandes. R. F.

[2]) Ebenda S. 125. R. F.

$$(4.)\quad A_1 = -\eta_{11}^2\int\frac{\partial p}{\partial t}\eta_{12}^2\,dx - \eta_{12}^2\int\frac{\partial p}{\partial t}\eta_{11}^2\,dx + 2\eta_{11}\eta_{12}\int\frac{\partial p}{\partial t}\eta_{11}\eta_{12}\,dx$$
$$+(c_{22}-c_{11})\eta_{11}\eta_{12} - c_{12}\eta_{12}^2 + c_{21}\eta_{11}^2.$$

Differentiiren wir die Gleichung (2.) nach x und subtrahiren von dem Resultate die mit 2 multiplicirte Gleichung (3.), so folgt

1124] $$(5.)\quad \frac{\partial^3 A_1}{\partial x^3} - 4p\frac{\partial A_1}{\partial x} - 2p'A_1 + 2\frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

Wir schliessen hieran die folgende Bemerkung:

Der Gleichung

$$(6.)\quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 4p\frac{\partial w}{\partial x} - 2p'w = 0$$

genügt das Fundamentalsystem $\frac{1}{2}\eta_{11}^2, \frac{1}{2}\eta_{12}^2, -\eta_{11}\eta_{12}$. Sie ist sich selbst adjungirt und zwar so, dass gemäss den Gleichungen (10.) (No. 5) $\frac{1}{2}\eta_{12}^2, -\eta_{11}\eta_{12}, \frac{1}{2}\eta_{11}^2$ und bez. $\frac{1}{2}\eta_{11}^2, -\eta_{11}\eta_{12}, \frac{1}{2}\eta_{12}^2$ einander zugeordnet sind.

Wir würden also aus der Gleichung (5.), nach dem in Gleichung (12.) (No. 5) enthaltenen Satze, den Ausdruck (4.) für A_1 unmittelbar erhalten können.

Wir behandeln nunmehr den folgenden Fall:

Von den singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\varrho$ der Gleichung (1.) seien $a_1, a_2, \ldots, a_{\varrho-1}$ von t unabhängig, dagegen $a_\varrho = t$. Ferner sei vorausgesetzt, dass A_1 für $x = a_1, a_2, \ldots, a_{\varrho-1}$ verschwinde und für $x = t$ nicht unendlich werde. Letzteres tritt allemal ein, wenn die Wurzeln der zu diesen singulären Punkten gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen nicht um ganze Zahlen differiren. Aber auch, wenn für einen dieser Punkte a die Wurzeln r_1, r_2 sich um ganze Zahlen unterscheiden, aber das zugehörige Fundamentalsystem nicht von $\log(x-a)$ frei ist, muss A_1 für $x = a$ verschwinden, wenn a von t unabhängig ist. Denn ist

$$(7.)\quad r_1 - r_2 = g,$$

wo g eine positive ganze Zahl, so folgt aus dieser Gleichung und aus der für jeden endlichen singulären Punkt der Gleichung (1.) bestehenden Beziehung

$$(8.)\quad r_1 + r_2 = 1,$$

$$(9.)\quad \begin{cases} 2r_1 = 1+g, \\ 2r_2 = 1-g. \end{cases}$$

Ist nun

$$(10.)\quad \begin{cases} \eta_{11} = (x-a)^{r_1}\mathfrak{P}_1(x-a), \\ \eta_{12} = (x-a)^{r_2}\mathfrak{P}_2(x-a) + \gamma\eta_{11}\log(x-a), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$ nach positiven ganzen Potenzen von $x-a$ fortschreitende Reihen sind, die für $x = a$ nicht verschwinden, und γ von Null verschieden, so müssen in Gleichung (4.) die Glieder mit $\eta_{11}\eta_{12}$ und mit η_{12}^2 sich wegheben, da sie mit $\log(x-a)$ behaftet sind. Das Glied mit η_{11}^2 aber verschwindet für $x = a$.

Aus Gleichung (4.) ergiebt sich, dass A_1 für einen nicht singulären [1125 Punkt der Differentialgleichung (1.) nicht unendlich wird. Es ist daher A_1 eine ganze rationale Function, welche für $x = a_1, a_2, \ldots, a_{\varrho-1}$ verschwindet.

Ist η_{11}, η_{12} das zu $x = \infty$ gehörige Fundamentalsystem und ist

$$(11.)\quad \begin{cases} \eta_{11} = x^{s_1}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right), \\ \eta_{12} = x^{s_2}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x}\right) + \gamma\eta_{11}\log\frac{1}{x}, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ nach ganzen positiven Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitende Reihen bedeuten, welche für $x = \infty$ nicht verschwinden, so ist

$$(12.)\quad s_1 + s_2 = 1.$$

In Gleichung (4.) werden die mit Integralen behafteten Bestandtheile für $x = \infty$ nicht unendlich, und die übrigen Glieder heben sich nur dann nicht heraus, wenn $2s_1, 2s_2$ ganze Zahlen sind. Findet dieses nicht statt, so ist A_1 für $x = \infty$ überhaupt nicht unendlich. Sind aber $2s_1$ und $2s_2$ ganze Zahlen, so muss

$$2s_2 = 1+g,$$
$$2s_1 = 1-g$$

sein, wo g eine positive ganze Zahl.

Ist γ in Gleichung (11.) nicht Null, so heben sich die Glieder mit $\eta_{11}\eta_{12}$ und mit η_{12}^2 heraus, und das Glied mit η_{11}^2 wird für $x = a$ nicht unendlich.

Nur wenn $\gamma = 0$, kann in Gleichung (4.) ein Glied vorkommen, welches für $x = \infty$ von der $(g+1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich wird. In diesem Falle ist A_1

eine ganze rationale Function vom Grade $g+1$. Da sie für $x = a_1, a_2, \dots, a_{\varrho-1}$ verschwinden muss, so ist

$$\varrho - 1 \leqq g+1$$

oder

$$\varrho \leqq g+2.$$

8.

Sei z. B. $g = 1$, so ist $\varrho \leqq 3$.

Wir wollen untersuchen, ob die Gleichung (5.) voriger Nummer durch eine ganze rationale Function

$$A_1 = m(x-a_1)(x-a_2) = m\varphi(x), \tag{1.}$$

wo m von x unabhängig, befriedigt werden kann.

1126] In diesem Falle ist

$$p = \frac{\alpha_1}{(x-a_1)^2} + \frac{\beta_1}{x-a_1} + \frac{\alpha_2}{(x-a_2)^2} + \frac{\beta_2}{x-a_2} + \frac{\alpha'}{(x-t)^2} + \frac{\beta'}{x-t}. \tag{2.}$$

Substituiren wir den Werth von A_1 aus Gleichung (1.) in die Gleichung

$$\frac{\partial^3 A_1}{\partial x^3} - 4p\frac{\partial A_1}{\partial x} - 2p'A_1 + 2\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{3.}$$

und erwägen, dass $\alpha_1, \alpha_2, \alpha'$ von t unabhängig sein müssen, da nach Voraussetzung die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen von t unabhängig sind, so ergeben sich die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} & m[2\alpha_1 + \beta_1(a_1-a_2)] - \frac{\partial \beta_1}{\partial t} = 0, \\ & m[2\alpha_2 + \beta_2(a_2-a_1)] - \frac{\partial \beta_2}{\partial t} = 0, \\ & \alpha'[m(t-a_1)(t-a_2)+1] = 0, \\ & \beta'[m(t-a_1)(t-a_2)+1] = 0, \\ & m[2\alpha' + \beta'(2t-a_1-a_2)] - \frac{\partial \beta'}{\partial t} = 0, \\ & \beta_1 + \beta_2 + \beta' = 0. \end{aligned}\right. \tag{4.}$$

Da nicht gleichzeitig α' und β' verschwinden, so ergiebt sich aus den fünf ersten Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} & m = -\frac{1}{\varphi(t)}, \\ & \frac{\partial \beta_1}{\partial t} + \frac{(a_1-a_2)\beta_1}{\varphi(t)} + \frac{2\alpha_1}{\varphi(t)} = 0, \\ & \frac{\partial \beta_2}{\partial t} + \frac{(a_2-a_1)\beta_2}{\varphi(t)} + \frac{2\alpha_2}{\varphi(t)} = 0, \\ & \frac{\partial \beta'}{\partial t} + \frac{(2t-a_1-a_2)}{\varphi(t)}\beta' + \frac{2\alpha'}{\varphi(t)} = 0. \end{aligned}\right. \tag{5.}$$

Durch Integration der drei letzten dieser Gleichungen erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{\gamma_1(t-a_2)}{t-a_1} + \frac{2\alpha_1}{t-a_1}, \\ \beta_2 &= \frac{\gamma_2(t-a_1)}{t-a_2} + \frac{2\alpha_2}{t-a_2}, \\ \beta' &= \frac{\gamma'}{\varphi(t)} - \frac{2\alpha' t}{\varphi(t)}, \end{aligned}\right. \tag{6.}$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma'$ von t unabhängige Grössen bedeuten.

Aus den Gleichungen (6.) und der letzten der Gleichungen (4.) folgt: [1127

$$\left\{\begin{aligned} (a_1-a_2)\gamma_1 &= -\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha', \\ (a_1-a_2)\gamma_2 &= -\alpha' + \alpha_1 + \alpha_2, \\ \gamma' &= (\alpha_1-\alpha_2)(a_2-a_1) + \alpha'(a_1+a_2). \end{aligned}\right. \tag{7.}$$

Wir können $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ voraussetzen, dann wird

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= -\alpha' + \alpha_1 + \alpha_2, \\ \gamma_2 &= -\gamma_1, \\ \gamma' &= \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha'. \end{aligned}$$

Es sind demnach

$$\left\{\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{(\alpha_1+\alpha_2-\alpha')(t-1) + 2\alpha_1}{t}, \\ \beta_2 &= \frac{(\alpha'-\alpha_1-\alpha_2)t + 2\alpha_2}{t-1}, \\ \beta' &= \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha' - 2\alpha' t}{t(t-1)} \end{aligned}\right. \tag{8.}$$

die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Substitutionsgruppe der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{\alpha_1}{x^2} + \frac{\beta_1}{x} + \frac{\alpha_2}{(x-1)^2} + \frac{\beta_2}{x-1} + \frac{\alpha'}{(x-t)^2} + \frac{\beta'}{x-t}\right] y \tag{9.}$$

von t unabhängig ist.

ANMERKUNGEN.

1) Die Änderungen gegen das Original sind ausgeführt entsprechend den von meinem Vater als Anhang zu der Arbeit in den Sitzungsberichten 1894, S. 1127 angegebenen »Errata in der Mittheilung vom 16. Nov. 1893 der Sitzungsberichte«. Im Anschluss an die letzte der dort gemachten Angaben ist dann noch gesetzt:

S. 184, Zeile 14 $2(n-1)^{\text{ter}}$ statt $2n^{\text{ter}}$,
„ 184, Gleichung (18.) $2n+m-1$ statt $2n+m+1$,
Zeile 3 v. u. $2n-1$ statt $2n+1$,
Gleichung (18b.) $\frac{3n-2}{n-1}$ statt $\frac{3n}{n-1}$.

Ferner wurde hinzugefügt:

S. 172, Zeile 3 v. u. und S. 173, Zeile 6 »und Integrale höherer Exponenten«.

2) Zu der am Schlusse der No. 4, S. 184 gegebenen Andeutung zur Aufstellung einer Ungleichung für die Anzahl der wesentlichen und ausserwesentlichen singulären Stellen sei bemerkt, dass die Betrachtung von A_{n-1} allein zu einer genauen Formulierung derselben nicht führen kann. Will man auf dem hier angegebenen Wege zu dieser Ungleichung, wie sie von anderen Gesichtspunkten aus (Riemann, Werke, II. Auflage, S. 389, 390; Poincaré, Acta Mathematica, Bd. IV, S. 217–219; L. Schlesinger, Crelles Journal, Bd. 123, S. 168 und Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen II_1, S. 383) aufgestellt worden ist, gelangen, so muss man noch $A_0, A_1, \ldots, A_{n-2}$ heranziehen. Im Allgemeinen verschwindet A_{n-i} für eine von t verschiedene wesentlich singuläre Stelle von der Ordnung $n-i$, für $x=t$ aber von der Ordnung $n-i-1$. Nimmt man nun, was durch eine einfache Transformation stets zu erreichen ist, an, dass $x=\infty$ eine wesentlich singuläre Stelle ist, so kann A_{n-i} für $x=\infty$ höchstens von $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung unendlich werden. Bedeutet also m_{n-i} die Anzahl der einfachen Unendlichkeitsstellen von A_{n-i}, so ist

$$-m_{n-i}+(n-i)(\varrho-1)+n-i-1 \leqq n-i,$$

also

$$m_{n-i} > (n-i)(\varrho-1)-1.$$

Es werden also im Allgemeinen für alle A_i zusammen mindestens

$$m = \sum_{i=1}^{n-1}\left\{(n-i)(\varrho-1)-1\right\} = (\varrho-1)\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)$$

Unendlichkeitsstellen, d. h. ausserwesentliche singuläre Stellen erforderlich sein. Die genaue Form der Ungleichung ist also

$$n(n-1)(\varrho-1) \leqq 2m+2n-2.$$

3) Zu dem in No. 7 und 8 behandelten Falle sei Folgendes bemerkt. Ist ξ ein Integral der Gleichung

$$\frac{\partial\xi}{\partial t} = A_1\frac{\partial\xi}{\partial x},$$

so ist

$$y = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial\xi}{\partial x}}}f(\xi),$$

$$p = \left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2\varphi(\xi)+\Delta\binom{\xi}{x},$$

wenn f und φ willkürliche Functionen ihres Arguments sind und

$$\Delta\binom{\xi}{x} = \frac{\frac{3}{4}\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^3\xi}{\partial x^3}\frac{\partial\xi}{\partial x}}{\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2}$$

die Schwarzsche Derivirte von ξ nach x bedeutet.

Wenn nun

$$A_1 = m\varphi(x) = m(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{\varrho-1}),$$

so ist

$$m = \frac{1}{\varphi(t)}.$$

Wird dann

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{\varepsilon_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{\varepsilon_{\varrho-1}}{x-a_{\varrho-1}}$$

gesetzt, so ist

$$\xi = \Phi\left\{\left(\frac{x-a_1}{t-a_1}\right)^{\varepsilon_1}\left(\frac{x-a_2}{t-a_2}\right)^{\varepsilon_2}\cdots\left(\frac{x-a_{\varrho-1}}{t-a_{\varrho-1}}\right)^{\varepsilon_{\varrho-1}}\right\},$$

wo Φ eine willkürliche Function ihres Arguments ist, das allgemeine Integral der Differentialgleichung für ξ. In dem Falle der No. 8 ist

$$\xi = \Phi\left(\frac{(x-a_1)(t-a_2)}{(x-a_2)(t-a_1)}\right).$$

In der That geht, wenn

$$u = \frac{(x-a_1)(t-a_2)}{(x-a_2)(t-a_1)} \text{ und } y = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial u}{\partial x}}}\eta(u)$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung für y (Gl. (9.), No. 8) über in

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} = \frac{\alpha_2 u^2+(\alpha'-\alpha_1-\alpha_2)u+\alpha_1}{u^2(u-1)^2}\eta.$$

4) Bemerkenswerth ist S. 180, Zeile 5 und 8 die Bezeichnung »wirklich singulärer Punkt« für eine singuläre Stelle, die sonst von meinem Vater immer, wie z. B. auch in Satz (A.) der No. 1 »wesentlich singulärer Punkt« genannt wird.

R. F.