$y, z, x', y', \ldots$. Comme la position d'équilibre est une de celles que le système peut avoir, il s'ensuit que les mêmes équations $L = 0$, $M = 0$, ... devront subsister en supposant que $x, y, z, x', \ldots$ deviennent $a, b, c, a', \ldots$; d'où il est facile de conclure que ces équations ne sauraient renfermer le temps t.

Soient A, B, ... ce que deviennent L, M, ... lorsque $x, y, z, x', \ldots$ deviennent $a, b, c, a', \ldots$; il est clair qu'en substituant pour $x, y, z, x', \ldots$ leurs valeurs $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$, $a' + \alpha'$, ..., on aura, à cause de la petitesse de $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots$,

$$L = A + \frac{\partial A}{\partial a}\alpha + \frac{\partial A}{\partial b}\beta + \frac{\partial A}{\partial c}\gamma + \frac{\partial A}{\partial a'}\alpha' + \ldots,$$
$$M = B + \frac{\partial B}{\partial a}\alpha + \frac{\partial B}{\partial b}\beta + \frac{\partial B}{\partial c}\gamma + \frac{\partial B}{\partial a'}\alpha' + \ldots,$$

et ainsi de suite. Donc :

1° On aura

$$A = 0, \qquad B = 0, \qquad \ldots,$$

relativement à l'équilibre ;

2° On aura les équations

$$\frac{\partial A}{\partial a}\alpha + \frac{\partial A}{\partial b}\beta + \frac{\partial A}{\partial c}\gamma + \frac{\partial A}{\partial a'}\alpha' + \ldots = 0,$$
$$\frac{\partial B}{\partial a}\alpha + \frac{\partial B}{\partial b}\beta + \frac{\partial B}{\partial c}\gamma + \frac{\partial B}{\partial a'}\alpha' + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

lesquelles donneront la relation qui doit subsister entre les variables $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots$.

En négligeant d'abord les quantités très petites du second ordre et des ordres supérieurs, on aura des équations linéaires par lesquelles on déterminera les valeurs de quelques-unes de ces variables par les autres ; ensuite, par ces premières valeurs, on en trouvera de plus exactes en tenant compte des secondes puissances et des puissances plus hautes, comme on voudra. On aura ainsi les valeurs de quelques-unes des variables $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots$, exprimées par des fonctions en série des autres variables ; et ces variables restantes seront alors absolument indépendantes entre elles.

On pourra aussi, dans la plupart des cas, en ayant égard aux conditions du problème, réduire les coordonnées, immédiatement par des substitutions, en fonctions rationnelles et entières d'autres variables indépendantes entre elles et très petites, dont la valeur soit nulle dans l'état d'équilibre.

Nous supposerons donc, en général, que l'on ait

$$x = a + a_1\xi + a_2\psi + a_3\varphi + \ldots + a'_1\xi^2 + \ldots,$$
$$y = b + b_1\xi + b_2\psi + b_3\varphi + \ldots + b'_1\xi^2 + \ldots,$$
$$z = c + c_1\xi + c_2\psi + c_3\varphi + \ldots + c'_1\xi^2 + \ldots,$$

et ainsi des autres coordonnées $x', y', \ldots$; les quantités $a, b, c, a_1, b_1, \ldots$ sont constantes, et les quantités $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ sont variables, très petites, et nulles dans l'équilibre.

2. Il ne s'agira que de faire ces substitutions dans les valeurs de T et V de l'article 10 de la Section IV ; et il suffira de tenir compte des secondes dimensions pour avoir des équations différentielles linéaires. Et d'abord il est clair que la valeur de T sera de cette forme

$$T = \frac{1}{2}\left[(1)\frac{d\xi^2}{dt^2} + (2)\frac{d\psi^2}{dt^2} + (3)\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \ldots\right]$$
$$+ (1,2)\frac{d\xi}{dt}\frac{d\psi}{dt} + (1,3)\frac{d\xi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + (2,3)\frac{d\psi}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + \ldots,$$

en supposant, pour abréger,

$$(1) = \mathrm{S}\,m\,(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2),$$
$$(2) = \mathrm{S}\,m\,(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2),$$
$$(3) = \mathrm{S}\,m\,(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$(1,2) = \mathrm{S}\,m\,(a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2),$$
$$(1,3) = \mathrm{S}\,m\,(a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3),$$
$$(2,3) = \mathrm{S}\,m\,(a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où le signe S dénote des intégrations ou sommations relatives à tous les différents corps m du système, et en même temps indépendantes des variations ξ, ψ, φ, ..., ainsi que du temps t.

Ensuite, si l'on dénote par F la fonction algébrique Π, en y mettant a, b, c à la place de x, y, z, il est clair que la valeur générale de Π sera représentée ainsi

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F} + (a_1\xi + a_2\psi + a_3\varphi + \ldots)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a}\\
&\quad + (b_1\xi + b_2\psi + b_3\varphi + \ldots)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b}\\
&\quad + (c_1\xi + c_2\psi + c_3\varphi + \ldots)\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial c}\\
&\quad + \frac{(a_1\xi + a_2\psi + a_3\varphi + \ldots)^2}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a^2}\\
&\quad + (a_1\xi + a_2\psi + a_3\varphi + \ldots)(b_1\xi + b_2\psi + b_3\varphi + \ldots)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial b}\\
&\quad + \frac{(b_1\xi + b_2\psi + b_3\varphi + \ldots)^2}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b^2},\\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

où il suffit d'avoir égard aux secondes dimensions ξ, ψ, φ, ...

Multipliant donc cette fonction par m et intégrant avec le signe S, on aura, en général,

$$\begin{aligned}
\mathrm{V} = \mathrm{H} + \mathrm{H}_1\xi + \mathrm{H}_2\psi + \mathrm{H}_3\varphi + \ldots + \frac{[1]\xi^2 + [2]\psi^2 + [3]\varphi^2 + \ldots}{2}\\
+ [1,2]\xi\psi + [1,3]\xi\varphi + [2,3]\psi\varphi + \ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{H} &= \mathsf{S}\,\mathrm{mF},\\
\mathrm{H}_1 &= \mathsf{S}\,\mathrm{m}\left(a_1\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} + b_1\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b} + c_1\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial c}\right),\\
\mathrm{H}_2 &= \mathsf{S}\,\mathrm{m}\left(a_2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} + b_2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b} + c_2\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial c}\right),\\
\mathrm{H}_3 &= \mathsf{S}\,\mathrm{m}\left(a_3\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} + b_3\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b} + c_3\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial c}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$[1] = \mathsf{S}\,\mathrm{m}\left\{\begin{aligned}&a_1^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a^2} + b_1^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b^2} + c_1^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial c^2}\\ &+ 2a_1b_1\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial b} + 2a_1c_1\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial c} + 2b_1c_1\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b\,\partial c}\end{aligned}\right\},$$

$$[2] = \mathsf{S}\,\mathrm{m}\left\{\begin{aligned}&a_2^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a^2} + b_2^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b^2} + c_2^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial c^2}\\ &+ 2a_2b_2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial b} + 2a_2c_2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial c} + 2b_2c_2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b\,\partial c}\end{aligned}\right\},$$

$$[3] = \mathsf{S}\,\mathrm{m}\left\{\begin{aligned}&a_3^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a^2} + b_3^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b^2} + c_3^2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial c^2}\\ &+ 2a_3b_3\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial b} + 2a_3c_3\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial c} + 2b_3c_3\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b\,\partial c}\end{aligned}\right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$[1,2] = \mathsf{S}\,\mathrm{m}\left\{\begin{aligned}&a_1a_2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a^2} + b_1b_2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b^2} + c_1c_2\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial c^2}\\ &+ (a_1b_2 + a_2b_1)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial b} + (a_1c_2 + a_2c_1)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial c}\\ &+ (b_1c_2 + b_2c_1)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b\,\partial c}\end{aligned}\right\},$$

$$[1,3] = \mathsf{S}\,\mathrm{m}\left\{\begin{aligned}&a_1a_3\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a^2} + b_1b_3\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b^2} + c_1c_3\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial c^2}\\ &+ (a_1b_3 + a_3b_1)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial b} + (a_1c_3 + a_3c_1)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial c}\\ &+ (b_1c_3 + b_3c_1)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b\,\partial c}\end{aligned}\right\},$$

$$[2,3] = \mathsf{S}\,\mathrm{m}\left\{\begin{aligned}&a_2a_3\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a^2} + b_2b_3\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b^2} + c_2c_3\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial c^2}\\ &+ (a_2b_3 + a_3b_2)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial b} + (a_2c_3 + a_3c_2)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial a\,\partial c}\\ &+ (b_2c_3 + b_3c_2)\frac{\partial^2 \mathrm{F}}{\partial b\,\partial c}\end{aligned}\right\},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

3. Ayant ainsi les valeurs de T et V exprimées en fonctions des variables ξ, ψ, φ, ..., indépendantes entre elles, on n'aura plus aucune équation de condition à employer; et comme la quantité T ne contient

que les différentielles des variables, on aura sur-le-champ, pour le mouvement du système, les équations suivantes :

$$d\frac{\partial T}{\partial d\xi}+\frac{\partial V}{\partial \xi}=0,$$
$$d\frac{\partial T}{\partial d\psi}+\frac{\partial V}{\partial \psi}=0,$$
$$d\frac{\partial T}{\partial d\varphi}+\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont le nombre sera, comme l'on voit, égal à celui des variables.

Ces équations doivent avoir lieu aussi dans l'état d'équilibre, puisque le système, y étant une fois, y resterait toujours de lui-même; or, dans l'équilibre, on a constamment $x=a$, $y=b$, $z=c$; $x'=a'$, ..., par l'hypothèse, donc

$$\xi=0,\quad \psi=0,\quad \varphi=0,\quad \ldots,$$

ainsi que

$$\frac{d\xi}{dt}=0,\quad \frac{d\psi}{dt}=0,\quad \ldots;\quad \frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\quad \ldots.$$

Donc les termes $d\frac{\partial T}{\partial d\xi}$, $d\frac{\partial T}{\partial d\psi}$, $\cdots$ seront nuls, et les termes $\frac{\partial V}{\partial \xi}$, $\frac{\partial V}{\partial \psi}$, $\frac{\partial V}{\partial \varphi}$, $\cdots$ se réduiront à H_1, H_2, H_3, ... Par conséquent, on aura

$$H_1=0,\quad H_2=0,\quad H_3=0,\quad \ldots.$$

Ce sont les conditions nécessaires pour que a, b, c, a', ... soient les valeurs de x, y, z, x', ... pour l'état d'équilibre, comme on le suppose.

En effet, il est visible que

$$dV=\mathbf{S}\,m(P\,dp+Q\,dq+R\,dr+\ldots)$$

exprime la somme des moments de toutes les forces mP, mQ, mR, ... appliquées à tous les corps m du système et qui doivent se détruire mutuellement dans l'état d'équilibre; donc, par la formule générale

donnée (Part. I, Sect. II), il faudra que l'on ait

$$dV=0,$$

par rapport à chacune des variables indépendantes; par conséquent,

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial \psi}=0,\quad \frac{\partial V}{\partial \varphi}=0,\quad \ldots$$

seront les conditions de l'équilibre, lequel étant supposé répondre à

$$\xi=0,\quad \psi=0,\quad \varphi=0,\quad \ldots,$$

on aura

$$H_1=0,\quad H_2=0,\quad H_3=0,\quad \ldots,$$

de sorte que les premières dimensions des variables ξ, ψ, φ, ... dans l'expression de V disparaîtront toujours.

Substituant donc dans les équations générales les valeurs de T et de V, et faisant H_1, H_2, H_3, ... nuls, on aura, pour le mouvement du système,

$$0=(1)\frac{d^2\xi}{dt^2}+(1,2)\frac{d^2\psi}{dt^2}+(1,3)\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\ldots+[1]\xi+[1,2]\psi+[1,3]\varphi+\ldots,$$
$$0=(2)\frac{d^2\psi}{dt^2}+(1,2)\frac{d^2\xi}{dt^2}+(2,3)\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\ldots+[2]\psi+[1,2]\xi+[2,3]\varphi+\ldots,$$
$$0=(3)\frac{d^2\varphi}{dt^2}+(1,3)\frac{d^2\xi}{dt^2}+(2,3)\frac{d^2\psi}{dt^2}+\ldots+[3]\varphi+[1,3]\xi+[2,3]\psi+\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

équations qui, étant sous une forme linéaire avec des coefficients constants, peuvent être intégrées rigoureusement et généralement par les méthodes connues.

4. On peut supposer d'abord que les variables, dans ces sortes d'équations, aient entre elles des rapports constants, c'est-à-dire que l'on ait

$$\psi=f\xi,\quad \varphi=g\xi,\quad \ldots;$$

par ces substitutions, elles deviendront

$$[(1)+(1,2)f+(1,3)g+\ldots]\frac{d^2\xi}{dt^2}+([1]+[1,2]f+[1,3]g+\ldots)\xi=0,$$

$$[(2)f+(1,2)+(2,3)g+\ldots]\frac{d^2\xi}{dt^2}+([2]f+[1,2]+[2,3]g+\ldots)\xi=0,$$

$$[(3)g+(1,3)+(2,3)f+\ldots]\frac{d^2\xi}{dt^2}+([3]g+[1,3]+[2,3]f+\ldots)\xi=0,$$

. . . . ,

lesquelles donnent

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+k\xi=0,$$

en faisant

$$\begin{aligned} k &= \frac{[1]+[1,2]f+[1,3]g+\ldots}{(1)+(1,2)f+(1,3)g+\ldots} \\ &= \frac{[2]f+[1,2]+[2,3]g+\ldots}{(2)f+(1,2)+(2,3)g+\ldots} \\ &= \frac{[3]g+[1,3]+[2,3]f+\ldots}{(3)g+(2,3)+(2,3)f+\ldots}. \end{aligned}$$

Le nombre de ces équations est, comme l'on voit, égal à celui des inconnues $f, g, \ldots, k$; par conséquent, elles déterminent exactement ces inconnues; et comme, en retenant pour premier membre le terme k et le multipliant respectivement par le dénominateur du second, on a des équations linéaires en $f, g, \ldots$, on pourra les éliminer par les méthodes connues, et il n'est pas difficile de voir, par les formules générales d'élimination, que la résultante en k sera d'un degré égal à celui des équations, et, par conséquent, égal à celui des équations différentielles proposées; de sorte que l'on aura pour k un pareil nombre de différentes valeurs, dont chacune, étant substituée dans les expressions de $f, g, \ldots$, donnera les valeurs correspondantes de ces quantités.

Maintenant l'équation

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+k\xi=0$$

donne par l'intégration

$$\xi=\mathrm{E}\sin(t\sqrt{k}+\varepsilon),$$

E, ε étant des constantes arbitraires; ainsi, comme on a supposé $\psi=f\xi$, $\varphi=g\xi$, ..., on aura aussi les valeurs de ψ, φ, ...

Cette solution n'est que particulière, mais elle est en même temps double, triple, etc., selon le nombre des valeurs de k; par conséquent, en les joignant ensemble, on aura la solution générale, puisque d'un côté la somme des valeurs particulières de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ satisfera également aux équations différentielles, à cause de leur forme linéaire, et que de l'autre cette somme contiendra deux fois autant de constantes arbitraires qu'il y a d'équations et, par conséquent, autant que les intégrales complètes peuvent en admettre.

Dénotant par $k', k'', k''', \ldots$ les différentes valeurs de k, c'est-à-dire les racines de l'équation en k, et par $f', g', \ldots; f'', g'', \ldots; f''', g''', \ldots; \ldots$ les valeurs correspondantes de $f, g, \ldots$, et prenant un pareil nombre de coefficients arbitraires $\mathrm{E}', \mathrm{E}'', \mathrm{E}''', \ldots$ et d'angles aussi arbitraires $\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots$, on aura ces valeurs complètes de ξ, ψ, φ, ...

$$\begin{aligned} \xi &= \mathrm{E}'\sin(t\sqrt{k'}+\varepsilon')+\mathrm{E}''\sin(t\sqrt{k''}+\varepsilon'')+\mathrm{E}'''\sin(t\sqrt{k'''}+\varepsilon''')+\ldots, \\ \psi &= f'\mathrm{E}'\sin(t\sqrt{k'}+\varepsilon')+f''\mathrm{E}''\sin(t\sqrt{k''}+\varepsilon'')+f'''\mathrm{E}'''\sin(t\sqrt{k'''}+\varepsilon''')+\ldots, \\ \varphi &= g'\mathrm{E}'\sin(t\sqrt{k'}+\varepsilon')+g''\mathrm{E}''\sin(t\sqrt{k''}+\varepsilon'')+g'''\mathrm{E}'''\sin(t\sqrt{k'''}+\varepsilon''')+\ldots, \end{aligned}$$

. . . . ,

dans lesquelles les arbitraires $\mathrm{E}', \mathrm{E}'', \mathrm{E}''', \ldots; \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''', \ldots$ dépendront des valeurs de $\xi, \psi, \varphi, \ldots; \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \cdots$ lorsque t est égal à 0, et, par conséquent, de l'état initial du système.

En effet, si, dans les expressions trouvées de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$, on fait $t=0$, et qu'on suppose données les valeurs de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$, on aura des équations linéaires entre les inconnues $\mathrm{E}'\sin\varepsilon'$, $\mathrm{E}''\sin\varepsilon''$, ..., par lesquelles on pourra déterminer chacune de ces inconnues. De même, si l'on fait $t=0$ dans les différentielles des mêmes expressions, et qu'on regarde aussi comme données les valeurs de $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \ldots$, on aura un second système d'équations linéaires entre $\mathrm{E}'\cos\varepsilon'$, $\mathrm{E}''\cos\varepsilon''$, ..., lesquelles serviront à leur détermination. De là on tirera aisément les valeurs de E', E'', ... ainsi que de $\tang\varepsilon'$, $\tang\varepsilon''$, ... et enfin celles des angles mêmes ε', ε'', ...

Mais voici un moyen plus simple de déterminer ces inconnues directement et sans les embarras de l'élimination.

5. Je remarque qu'en ajoutant ensemble les équations différentielles de l'article 3, après avoir multiplié la deuxième par f, la troisième par g, et ainsi de suite, et faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned}
p &= (1) + (1,2)f + (1,3)g + \ldots,\\
P &= [1] + [1,2]f + [1,3]g + \ldots,\\
q &= (2)f + (1,2) + (2,3)g + \ldots,\\
Q &= [2]f + [1,2] + [2,3]g + \ldots,\\
r &= (3)g + (1,3) + (2,3)f + \ldots,\\
R &= [3]g + [1,3] + [2,3]f + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

on a l'équation

$$p\frac{d^2\xi}{dt^2} + q\frac{d^2\psi}{dt^2} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \ldots + P\xi + Q\psi + R\varphi + \ldots = 0.$$

Mais les équations de l'article 4 donnent

$$P = kp, \qquad Q = kq, \qquad R = kr, \qquad \ldots.$$

Donc l'équation précédente deviendra de la forme

$$\frac{d^2(p\xi + q\psi + r\varphi + \ldots)}{dt^2} + k(p\xi + q\psi + r\varphi + \ldots) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$p\xi + q\psi + r\varphi + \ldots = L\sin(t\sqrt{k} + \lambda),$$

L et λ étant deux constantes arbitraires.

Cette équation doit avoir lieu également pour toutes les différentes valeurs de k qui résultent des mêmes équations de condition et que nous avons dénotées par k', k'', ... Ainsi, désignant de même par p', p'', ..., q', q'', ... les valeurs correspondantes de p, q, ..., et prenant

différentes constantes arbitraires L', L'', ..., λ', λ'', ..., on aura les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
p'\xi + q'\psi + r'\varphi + \ldots &= L'\sin(t\sqrt{k'} + \lambda'),\\
p''\xi + q''\psi + r''\varphi + \ldots &= L''\sin(t\sqrt{k''} + \lambda''),\\
p'''\xi + q'''\psi + r'''\varphi + \ldots &= L'''\sin(t\sqrt{k'''} + \lambda'''),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ces équations serviraient généralement à déterminer les valeurs de ξ, ψ, φ, ..., et il est clair que ces valeurs devraient coïncider avec celles qu'on a trouvées ci-dessus (art. 4), puisqu'elles résultent les unes et les autres des mêmes équations différentielles. Ainsi, en substituant les valeurs de l'article cité dans les équations précédentes, elles devront devenir entièrement identiques.

D'où il est facile de conclure que, pour la première équation, on aura

$$\lambda' = \varepsilon', \qquad L' = (p' + f'q' + g'r' + \ldots)E',$$

ensuite

$$p' + f''q' + g''r' + \ldots = 0, \qquad p' + f'''q' + g'''r' + \ldots = 0, \qquad \ldots;$$

que l'on aura de même, pour la seconde équation,

$$\lambda'' = \varepsilon'', \qquad L'' = (p'' + f''q'' + g''r'' + \ldots)E'',$$

ensuite

$$p'' + f'q'' + g'r'' + \ldots = 0, \qquad p'' + f'''q'' + g'''r'' + \ldots = 0, \qquad \ldots,$$

et ainsi des autres.

Donc, substituant dans les équations ci-dessus, pour λ', L', λ'', L'', λ''', L''', ..., les valeurs qu'on vient de trouver, on aura celles-ci

$$\begin{aligned}
E'\sin(t\sqrt{k'} + \varepsilon') &= \frac{p'\xi + q'\psi + r'\varphi + \ldots}{p' + q'f' + r'g' + \ldots},\\
E''\sin(t\sqrt{k''} + \varepsilon'') &= \frac{p''\xi + q''\psi + r''\varphi + \ldots}{p'' + q''f'' + r''g'' + \ldots},\\
E'''\sin(t\sqrt{k'''} + \varepsilon''') &= \frac{p'''\xi + q'''\psi + r'''\varphi + \ldots}{p''' + q'''f''' + r'''g''' + \ldots},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

qui sont les réciproques de celles de l'article 4.

Maintenant, la détermination des arbitraires E', E'', ..., ε', ε'', ... n'a plus de difficulté; car :

1° En supposant $t = 0$, les premiers membres des équations précédentes deviennent $E'\sin\varepsilon'$, $E''\sin\varepsilon''$, ..., et les seconds sont tous connus, en supposant les valeurs de ξ, ψ, φ, ... données dans le premier instant;

2° En différentiant les mêmes équations et supposant ensuite $t = 0$, les premiers membres seront

$$\sqrt{k'}E'\cos\varepsilon', \quad \sqrt{k''}E''\cos\varepsilon'', \quad \ldots,$$

et les seconds seront aussi tous connus, en regardant comme données les quantités $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, ... lorsque $t = 0$. Donc, etc.

6. La solution du problème est donc réduite uniquement à la détermination des quantités $k, f, g, h, \ldots$; et nous avons vu dans l'article 4 que cette détermination dépend de la résolution des équations

$$pk - P = 0, \quad qk - Q = 0, \quad rk - R = 0, \quad \ldots,$$

en conservant les expressions de $p, q, r, \ldots$, P, Q, R, ... de l'article 5.

Or, si l'on représente par A ce que devient la quantité T en y changeant $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, ... en $e, f, g, \ldots$, et par B ce que devient la partie de la quantité V où les variables ξ, ψ, φ, ... forment ensemble deux dimensions, en changeant de même ces variables en $e, f, g, \ldots$, il est aisé de voir, et l'on pourrait même s'en convaincre *a priori*, que l'on aura

$$p = \frac{\partial A}{\partial e}, \quad q = \frac{\partial A}{\partial f}, \quad r = \frac{\partial A}{\partial g}, \quad \ldots,$$

$$P = \frac{\partial B}{\partial e}, \quad Q = \frac{\partial B}{\partial f}, \quad R = \frac{\partial B}{\partial g}, \quad \ldots,$$

en faisant ensuite $e = 1$.

Donc, en général, si l'on fait

$$Ak - B = K,$$

les équations pour la détermination des inconnues $k, f, g, \ldots$ seront

$$\frac{\partial K}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial g} = 0, \quad \ldots,$$

en supposant $e = 1$. Ainsi, comme la quantité K se forme immédiatement des quantités T et V, on pourra aussi trouver directement les équations dont il s'agit, sans avoir besoin de les déduire des équations différentielles du mouvement du système.

Je remarque maintenant que, puisque K est une fonction homogène de deux dimensions de $e, f, g, \ldots$, on aura, par la propriété de ces sortes de fonctions démontrée (Sect. IV, art. 15),

$$2K = e\frac{\partial K}{\partial e} + f\frac{\partial K}{\partial f} + g\frac{\partial K}{\partial g} + \ldots.$$

Donc on aura aussi

$$K = 0;$$

par conséquent, les inconnues $f, g, h, \ldots$ doivent être telles que non seulement la quantité K soit nulle, mais que chacune de ses différentielles relatives à ces inconnues le soit aussi; d'où il s'ensuit que la quantité k, regardée comme une fonction de ces inconnues dépendante de l'équation $K = 0$, devra être un maximum ou un minimum.

Si l'on fait d'abord $e = 1$, et qu'on remplace par $K = 0$ l'équation $\frac{\partial K}{\partial e} = 0$, on aura, pour la détermination des inconnues $f, g, h, \ldots$, les équations

$$K = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial K}{\partial g} = 0, \quad \ldots.$$

Si donc on tire d'abord la valeur de f de l'équation $\frac{\partial K}{\partial f} = 0$, et qu'en la substituant dans $K = 0$ on change cette équation en

$$K' = 0,$$

il n'y aura qu'à faire ensuite

$$\frac{\partial K'}{\partial g} = 0$$

et substituer de même la valeur de g tirée de cette dernière équation dans $K' = 0$; alors, nommant

$$K'' = 0$$

l'équation résultante, on fera de nouveau

$$\frac{\partial K''}{\partial h} = 0,$$

et ainsi de suite. Par ce moyen, on parviendra à une équation finale qui ne contiendra plus les inconnues $f, g, h, \ldots$, mais seulement la quantité k, et qui sera l'équation cherchée en k dont les racines ont été nommées $k', k'', k''', \ldots$.

On peut même réduire cette équation en une formule générale, en considérant que, puisque les quantités $f, g, h, \ldots$ ne forment ensemble dans la valeur de K que deux dimensions, la quantité $2K\frac{\partial^2 K}{\partial f^2} - \frac{\partial K^2}{\partial f^2}$ sera nécessairement sans f, sa différentielle relative à f étant $2K\frac{\partial^3 K}{\partial f^3}df$, et par conséquent nulle. De sorte qu'on pourra faire

$$K' = 2K\frac{\partial^2 K}{\partial f^2} - \frac{\partial K^2}{\partial f^2};$$

et comme, dans cette quantité K′, les inconnues restantes $g, h, \ldots$ ne montent aussi qu'à la seconde dimension, on pourra faire de même

$$K'' = 2K'\frac{\partial^2 K'}{\partial g^2} - \frac{\partial K'^2}{\partial g^2},$$

et ainsi de suite. La dernière des quantités $K, K', K'', \ldots$, étant égalée à zéro, sera l'équation cherchée en k. Il est vrai que cette équation pourra monter à un degré plus haut qu'il ne faut, à cause des facteurs étrangers introduits dans les équations $K'' = 0$, $K''' = 0$, ...; mais si, en développant ces équations, on a soin de les débarrasser successivement de ces mêmes facteurs et de ne prendre ensuite pour les valeurs de $K'', K''', \ldots$ que leurs premiers membres ainsi simplifiés, l'équation finale se trouvera rabaissée d'elle-même à la forme et au degré dont elle doit être.

Quant aux valeurs de $f, g, \ldots$, on les déterminera ensuite par les équations

$$\frac{\partial K}{\partial f} = 0, \qquad \frac{\partial K'}{\partial g} = 0, \qquad \ldots,$$

en commençant par la dernière, et remontant à la première par la substitution successive des valeurs trouvées.

7. Comme la solution précédente est fondée sur la supposition que les variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ soient très petites, il faut, pour qu'elle soit légitime, que cette supposition ait lieu en effet; ce qui demande que les racines $k', k'', \ldots$ soient toutes réelles, positives et inégales, afin que le temps t, qui croît à l'infini, soit toujours renfermé sous les signes de sinus ou cosinus. Si quelques-unes de ces racines devenaient négatives ou imaginaires, elles introduiraient dans les sinus ou cosinus correspondants des exponentielles réelles, et si elles devenaient simplement égales, elles y introduiraient des puissances algébriques de l'arc; c'est de quoi on peut s'assurer, par les méthodes connues, en mettant dans le premier cas, à la place des sinus ou cosinus, leurs expressions exponentielles imaginaires, et en supposant, dans le second, que les racines égales diffèrent entre elles de quantités infiniment petites indéterminées; mais, comme le développement de ces cas est inutile pour l'objet présent, nous ne nous y arrêterons point.

Si la condition de la réalité et de l'inégalité des coefficients de t a lieu, il est visible que les plus grandes valeurs de $\xi, \varphi, \ldots$ seront moindres que les sommes des quantités $E', E'', E''', \ldots, f'E', f''E'', f'''E''', \ldots$, en prenant toutes ces quantités positivement; par conséquent, si ces différentes sommes sont fort petites, on sera assuré que les valeurs des variables le seront toujours aussi.

Mais, comme les coefficients $E', E'', E''', \ldots$ sont arbitraires et dépendent uniquement du déplacement initial du système, il est possible que les variables $\xi, \psi, \ldots$ restent fort petites, quand même, parmi les quantités $\sqrt{k'}, \sqrt{k''}, \ldots$, il y en aurait d'imaginaires ou d'égales; car il suffit pour cela que les quantités correspondantes E′,

E'', ... soient nulles, ce qui fera disparaître les termes qui croîtraient avec le temps t. Alors la solution, sans être exacte en général, le sera néanmoins dans le cas particulier où la condition précédente aura lieu.

8. On a des méthodes pour reconnaître si une équation donnée, de quelque degré qu'elle soit, a toutes ses racines réelles ou non, et pour juger, dans le cas de la réalité, de leur signe et de leur inégalité; mais, l'application de ces méthodes étant toujours un peu pénible, voici quelques caractères simples et généraux qui serviront à juger de la forme des racines dont il s'agit, dans un grand nombre de cas.

En prenant l'équation $K = 0$ ou $Ak - B = 0$ (art. 6), on a $k = \frac{B}{A}$; or il est facile de se convaincre que la quantité A a toujours nécessairement une valeur positive, tant que $f, g, \ldots$ sont des quantités réelles; car la fonction T, d'où elle résulte en changeant $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \ldots$ en $1, f, g, \ldots$ (art. cité), est composée de la somme de plusieurs carrés multipliés par des coefficients nécessairement positifs. Donc, si la quantité B est aussi toujours positive, ce qui a lieu lorsque la partie de la fonction V où les variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ forment ensemble deux dimensions est réductible à la même forme que la fonction T, parce que la quantité B résulte aussi de cette partie de V en changeant $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ en $1, f, g, \ldots$, on est assuré que les valeurs de k, c'est-à-dire les racines de l'équation en k, seront toujours positives toutes les fois qu'elles seront réelles.

Au contraire, si la quantité B est toujours négative, ce qui arrivera quand elle sera composée de plusieurs carrés multipliés par des coefficients négatifs, les valeurs réelles de k seront toutes négatives. Dans ce dernier cas, la solution ne pourra pas être bonne, parce que, les racines de l'équation en k ne pouvant être qu'imaginaires ou réelles négatives, les expressions des variables $\xi, \psi, \ldots$ contiendront nécessairement le temps t hors des signes de sinus et cosinus.

Dans le premier cas où B est positive, on voit seulement que, si les racines sont réelles, elles sont nécessairement positives; et il serait

peut-être difficile de démontrer directement qu'elles doivent être toutes réelles; mais on peut se convaincre, d'une autre manière, que cela doit être ainsi.

Car le principe de la conservation des forces vives, que nous avons démontré dans le § V de la Section III, donne l'équation $T + V = \text{const.}$ (Sect. IV, art. 14), laquelle a toujours lieu puisque T et V sont fonctions sans t (Sect. V, art. 21). Or, si l'on désigne par V' la partie de V qui contient les termes de deux dimensions, en sorte que

$$V = H + V',$$

à cause de

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0, \quad \ldots,$$

on aura (art. 3)

$$T + H + V' = \text{const.} = (T) + H + (V'),$$

en dénotant par (T) et (V') les valeurs de T et V' au premier instant; donc

$$T + V' = (T) + (V').$$

Donc, puisque T est, par sa forme, une quantité toujours positive, si V' l'est aussi, on aura nécessairement

$$V' > 0, \qquad V' < (T) + (V');$$

de sorte que la valeur de V' et, conséquemment aussi, celles des variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ seront renfermées dans des limites données et dépendantes uniquement de l'état initial. Ces variables ne pourront donc pas contenir le temps t hors des signes de sinus et cosinus, parce qu'alors elles pourraient aller en croissant à l'infini. Or, lorsque la valeur de B est constamment positive, celle de V' l'est aussi; par conséquent, les racines de l'équation en k seront nécessairement toutes réelles, positives et inégales (art. 7), et la solution sera toujours bonne.

Dans ce cas, l'état d'équilibre d'où le système a été déplacé sera stable, puisque le système y reviendra, ou tendra toujours à y revenir, par des oscillations très petites; du moins il ne pourra jamais s'en écarter que très peu.

9. C'est de cette manière que nous avons démontré (Part. I, Sect. III, art. 23 et suivants) que, lorsque la fonction Π est un minimum dans l'état d'équilibre, cet état est stable; car il est facile de voir que la fonction nommée Π, dans l'article 21 de la Section citée, est la même que nous représentons ici par V, puisque l'une et l'autre est l'intégrale de la totalité des moments des forces agissantes sur les différents corps du système, totalité qui doit être nulle dans l'équilibre. Or, comme l'on a $V = H + V'$, et que V' ne contient les variables ξ, ψ, φ, ... qu'à la seconde dimension, il s'ensuit que V sera un minimum ou un maximum, selon que la valeur de V' sera positive ou négative, en donnant à ces variables des valeurs quelconques. Donc l'équilibre sera nécessairement stable dans le cas du minimum de V (art. 8).

Au contraire, dans le cas du maximum de V, la quantité V' étant toujours négative, la quantité B le sera aussi, puisqu'en faisant

$$\psi = f\xi, \quad \varphi = g\xi, \quad \ldots,$$

la valeur de V' devient $\xi^2 B$ (art. 6); et, par ce que nous avons démontré dans l'article précédent, les expressions des variables contiendront nécessairement des termes où t sera hors des signes de sinus et cosinus; l'équilibre ne pourra donc pas être stable, car le système, en étant tant soit peu déplacé, s'en éloignera toujours davantage. Cette seconde partie du théorème énoncé dans l'endroit cité de la Statique n'avait pu y être démontrée faute des principes nécessaires; nous en avions remis la démonstration à la Dynamique, et celle que nous venons de donner ne laisse plus rien à désirer.

10. Au reste, entre ces deux états de stabilité et de non-stabilité absolue, dans lesquels l'équilibre, étant tant soit peu dérangé d'une manière quelconque, tend à se rétablir de lui-même ou à se déranger de plus en plus, il peut y avoir des états de stabilité conditionnelle

et relative, dans lesquels le rétablissement de l'équilibre dépendra du déplacement initial du système. Car, si quelques-unes des valeurs de $\sqrt{k}$ sont imaginaires, les termes correspondants dans les valeurs des variables contiendront des arcs de cercle, et l'équilibre ne sera pas stable en général; mais, si les coefficients de ces termes deviennent nuls, ce qui dépend de l'état initial du système, les arcs de cercle disparaîtront, et l'équilibre pourra encore être regardé comme stable, du moins par rapport à cet état particulier.

11. Lorsque toutes les valeurs de $\sqrt{k}$ sont réelles et inégales et que, par conséquent, l'équilibre est stable, les expressions de toutes les variables seront composées d'autant de termes de la forme

$$E \sin(t\sqrt{k} + \varepsilon)$$

qu'il y a de variables.

Or ce terme représente les oscillations très petites et isochrones d'un pendule simple dont la longueur est $\frac{g}{k}$, en prenant g pour la force de la gravité. Donc les oscillations des différents corps du système pourront être regardées comme composées d'oscillations simples analogues à celles des pendules dont les longueurs seraient $\frac{g}{k'}, \frac{g}{k''}, \frac{g}{k'''}, \ldots$.

Mais, les coefficients E', E'', ... étant arbitraires et dépendant uniquement de l'état initial du système, on peut toujours supposer cet état tel que tous ces coefficients, hors un quelconque, soient nuls; alors tous les corps du système feront des oscillations simples, analogues à celles d'un même pendule; et l'on voit qu'un même système est susceptible d'autant de différentes oscillations simples qu'il y a de corps mobiles (¹). Donc, en général, les oscillations quelconques d'un système ne seront composées que de toutes les oscillations simples qui pourront y avoir lieu par la nature du système.

(¹) Le nombre des oscillations simples n'est pas égal au nombre des corps mobiles, mais au nombre des variables indépendantes. C'est, du reste, ce que Lagrange dit lui-même au commencement du paragraphe. (*J. Bertrand.*)

Daniel Bernoulli avait remarqué cette composition d'oscillations simples et isochrones dans le mouvement d'une corde vibrante chargée de plusieurs petits poids, et il l'avait regardée comme une loi générale de tous les petits mouvements réciproques qui peuvent avoir lieu dans un système quelconque de corps. Un seul cas, comme celui des cordes vibrantes, ne suffisait pas pour établir une telle loi; mais l'analyse que nous venons de donner établit cette loi d'une manière certaine et générale et fait voir que, quelque irrégulières que puissent paraître les petites oscillations qui s'observent dans la nature, elles peuvent toujours se réduire à des oscillations simples, dont le nombre sera égal à celui des corps oscillants dans le même système.

C'est une suite de la nature des équations linéaires auxquelles se réduisent les mouvements des corps qui composent un système quelconque, lorsque ces mouvements sont très petits.

12. Si les valeurs des quantités $\sqrt{k'}$, $\sqrt{k''}$, $\sqrt{k'''}$, ... sont incommensurables, il est clair que les temps de ces oscillations seront aussi incommensurables et que, par conséquent, le système ne pourra jamais reprendre sa première position.

Mais, si ces quantités sont entre elles comme nombre à nombre et que leur plus grande commune mesure soit μ, on verra facilement que le système reviendra toujours à la même position au bout d'un temps $\theta = \frac{2\pi}{\mu}$, π étant l'angle de $180°$. Ainsi θ sera le temps de l'oscillation composée de tout le système.

13. La solution que nous venons de donner demande que les coordonnées puissent être exprimées par des fonctions en série de variables très petites, et qui soient nulles dans l'état d'équilibre, ainsi que nous l'avons supposé dans l'article 3.

Or c'est ce qui est toujours possible, comme nous l'avons vu, lorsque les équations de condition, réduites en série, contiennent les premières puissances des variables supposées très petites, parce que ces termes donnent d'abord des équations résolubles rationnellement, et qu'ensuite on peut toujours, par la méthode des séries, avoir des solutions rationnelles de plus en plus exactes.

Il peut néanmoins arriver que les termes de la première dimension manquent dans une ou plusieurs des équations de condition, ce qui aura lieu, par exemple, si, dans l'équation $L = 0$, les valeurs des coordonnées pour l'équilibre sont telles, qu'elles rendent non seulement L nulle, mais aussi chacune de ses différences premières; car on aura alors

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial b} = 0, \qquad \ldots,$$

et l'équation $L = 0$ ne contiendra que les secondes puissances et les puissances ultérieures de α, β, γ, α', ... (art. 1). Dans ce cas, si l'on réduit les coordonnées en fonctions de variables indépendantes, ces fonctions ne pourront plus être rationnelles, et les équations différentielles ne seront ni linéaires, ni même rationnelles. Ainsi la supposition des mouvements très petits du système ne servira pas alors à simplifier la solution du problème, ou du moins ne la rendra pas susceptible de la méthode générale que nous avons exposée.

Pour résoudre ces sortes de questions de la manière la plus simple, on fera d'abord abstraction des équations de condition où les premières dimensions des variables ne se trouveraient pas; on parviendra ainsi à des expressions de T et de V de la forme de celles de l'article 2. Ensuite on ajoutera à cette valeur de V les premiers membres des équations de condition auxquelles on n'aura pas encore eu égard, multipliés chacun par un coefficient indéterminé et qu'on supposera constant dans les différentiations par δ; et il suffira, dans ces termes dus aux équations de condition, de tenir compte des plus basses dimensions des variables très petites. De là on trouvera les équations différentielles à l'ordinaire, et il s'agira d'en éliminer les coefficients indéterminés.

Si les équations de condition étaient du second degré et que les coefficients indéterminés pussent être supposés constants, la valeur de V serait encore de la même forme que dans la solution générale; par conséquent, on pourrait l'appliquer aussi à ce cas; on déterminerait ensuite les coefficients, en sorte que les équations de condition fussent satisfaites. On pourra donc toujours commencer par adopter cette supposition, on verra ensuite si les valeurs qui en résultent pour les variables peuvent satisfaire aux équations de condition, auquel cas la supposition sera légitime et la solution exacte; sinon il faudra chercher à intégrer les équations différentielles par des méthodes particulières.

§ II. — *Des oscillations d'un système linéaire de corps.*

14. Lorsque les corps qui composent le système proposé sont disposés, les uns par rapport aux autres, d'une manière uniforme et régulière, on peut simplifier le calcul et parvenir à des formules générales et symétriques, en employant la notation et l'algorithme des différences finies. Nous allons en donner un exemple, en examinant le cas où un nombre quelconque de corps, rangés sur une ligne droite ou courbe, oscillent en vertu de forces quelconques combinées avec leur action réciproque.

Soient x, y, z les coordonnées rectangles d'un quelconque des corps du système, que nous dénoterons par Dm, en employant la lettre majuscule D pour dénoter les différences finies (Sect. IV, art. 17). On aura d'abord

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \mathsf{S} \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right) \mathrm{Dm},$$

la caractéristique S représentant les sommes relatives à tout le système.

La fonction V doit contenir la somme $\mathsf{S}\,\Pi\,\mathrm{Dm}$ provenant des forces accélératrices P, Q, R, ..., qu'on suppose telles que l'on ait

$$\Pi = \int (\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots).$$

Cette fonction doit contenir aussi la somme $\mathsf{S}\int \Phi\,\mathrm{D}s$, en supposant que Φ soit la force avec laquelle deux corps voisins qui sont à la distance Ds l'un de l'autre s'attirent, et que cette force soit une fonction de la même distance Ds, en sorte que $\int \Phi\, d\,\mathrm{D}s$ soit une quantité inté-

grable dont la différentielle par δ soit $\Phi\,\delta\mathrm{D}s$. Cette force Φ, que nous supposons fonction de Ds, pourra varier d'un corps à l'autre et sera, par conséquent, aussi fonction du nombre ou de la quantité qui représente la place de chaque corps dans la série de tous les corps, et à laquelle se rapporte le signe sommatoire S. Si les corps, au lieu de s'attirer, se repoussaient, il faudrait prendre Φ négativement.

On aura ainsi

$$\mathrm{V} = \mathsf{S}\,\Pi\,\mathrm{Dm} + \mathsf{S}\int \Phi\, d\,\mathrm{D}s$$

et, par conséquent,

$$\delta\mathrm{V} = \mathsf{S}\,\delta\Pi\,\mathrm{Dm} + \mathsf{S}\,\Phi\,\delta\mathrm{D}s.$$

Et il est bon de remarquer que cette expression de δV serait la même si les corps étaient liés entre eux de manière que leurs distances mutuelles fussent invariables; car on aurait dans ce cas l'équation de condition $\delta\mathrm{D}s = 0$, laquelle donnerait dans l'expression de δV le terme $\mathsf{S}\,\lambda\,\delta\mathrm{D}s$ (article cité).

15. En exprimant l'élément Ds par les différences finies de x, y, z, il est clair qu'on aura

$$\mathrm{D}s = \sqrt{\mathrm{D}x^2 + \mathrm{D}y^2 + \mathrm{D}z^2};$$

donc, différentiant par δ,

$$\delta\mathrm{D}s = \frac{\mathrm{D}x\,\delta\mathrm{D}x + \mathrm{D}y\,\delta\mathrm{D}y + \mathrm{D}z\,\delta\mathrm{D}z}{\mathrm{D}s}.$$

Substituant cette valeur, et faisant, pour abréger, $\frac{\Phi}{\mathrm{D}s} = \Psi$, fonction de D$s$, on aura

$$\delta\mathrm{V} - \mathsf{S}\,\delta\Pi\,\mathrm{Dm} + \mathsf{S}\,\Psi(\mathrm{D}x\,\delta\mathrm{D}x + \mathrm{D}y\,\delta\mathrm{D}y + \mathrm{D}z\,\delta\mathrm{D}z).$$

Comme les caractéristiques D et δ sont indépendantes entre elles, on peut changer δD en Dδ, et l'on aura

$$\delta\mathrm{V} = \mathsf{S}\,\delta\Pi\,\mathrm{Dm} + \mathsf{S}\,\Psi(\mathrm{D}x\,\mathrm{D}\delta x + \mathrm{D}y\,\mathrm{D}\delta y + \mathrm{D}z\,\mathrm{D}\delta z).$$

On peut aussi faire disparaître le D avant le δ, par l'intégration par parties appliquée aux différences finies.

16. En effet, on a, en général,

$$\mathrm{D}xy = x\,\mathrm{D}y + y\,\mathrm{D}x + \mathrm{D}x\,\mathrm{D}y = (x + \mathrm{D}x)\,\mathrm{D}y + y\,\mathrm{D}x = x_{,}\,\mathrm{D}y + y\,\mathrm{D}x,$$

en dénotant par $x_{,}$ le terme qui suit x dans la série des termes consécutifs x, $x + \mathrm{D}x$, ... Donc, en passant des différences aux sommes, on aura

$$\mathsf{S}\, y\,\mathrm{D}x = xy - \mathsf{S}\, x_{,}\,\mathrm{D}y.$$

On trouverait de la même manière

$$\mathsf{S}\, y\,\mathrm{D}^2 x = y\,\mathrm{D}x - x_{,}\,\mathrm{D}y + \mathsf{S}\, x_{,,}\,\mathrm{D}^2 y,$$

et ainsi de suite, x, $x_{,}$, $x_{,,}$, ... étant les termes qui se suivent dans la même série.

Pour compléter ces sommations, il faudra rapporter les termes hors du signe S au dernier point de l'intégrale finie $\mathsf{S}\, y\,\mathrm{D}x$ et en retrancher les mêmes termes rapportés au premier point. Ainsi, en marquant par un zéro et par un i placés au bas des lettres les termes qui se rapportent au premier et au dernier point, on aura ces sommations complètes

$$\mathsf{S}\, y\,\mathrm{D}x = x_i y_i - x_0 y_0 - \mathsf{S}\, x_{,}\,\mathrm{D}y,$$

$$\mathsf{S}\, y\,\mathrm{D}^2 x = y_i\,\mathrm{D}x_i - x_{i+1}\,\mathrm{D}y_i - y_0\,\mathrm{D}x_0 + x_{,}\,\mathrm{D}y_0 + \mathsf{S}\, x_{,,}\,\mathrm{D}y,$$

....

Lorsque la caractéristique S indique des sommes totales d'un nombre de termes donné, il est clair qu'on peut, à la place des termes $x_{,}\,\mathrm{D}y$, $x_{,,}\,\mathrm{D}y$, ... sous le signe S, prendre les termes précédents, que nous dénoterons par $x\,\mathrm{D}_{,}y$, $x\,\mathrm{D}_{,,}y$, ..., en marquant d'un trait, de deux, ..., placés à gauche, les termes ${}_{,,}y$, ${}_{,}y$ qui précèdent y dans la série indéfinie ..., ${}_{,,}y$, ${}_{,}y$, y, $y_{,}$, $y_{,,}$, ...

17. Cela posé, mettons dans les formules précédentes δx à la place de x et $\Psi\,\mathrm{D}x$ à la place de y, on aura ces transformations

$$\mathsf{S}\, \Psi\,\mathrm{D}x\,\mathrm{D}\delta x = (\Psi\,\mathrm{D}x\,\delta x)_i - (\Psi\,\mathrm{D}x\,\delta x)_0 - \mathsf{S}\, \delta x\,\mathrm{D}_{,}(\Psi\,\mathrm{D}x);$$

et, de même,

$$\mathsf{S}\, \Psi\,\mathrm{D}y\,\mathrm{D}\delta y = (\Psi\,\mathrm{D}y\,\delta y)_i - (\Psi\,\mathrm{D}y\,\delta y)_0 - \mathsf{S}\, \delta y\,\mathrm{D}_{,}(\Psi\,\mathrm{D}y),$$

$$\mathsf{S}\, \Psi\,\mathrm{D}z\,\mathrm{D}\delta z = (\Psi\,\mathrm{D}z\,\delta z)_i - (\Psi\,\mathrm{D}z\,\delta z)_0 - \mathsf{S}\, \delta z\,\mathrm{D}_{,}(\Psi\,\mathrm{D}z),$$

et l'on fera ces substitutions dans l'expression de $\delta\mathrm{V}$.

Si le premier corps et le dernier sont supposés fixes, les variations δx_0, δy_0, δz_0 et δx_i, δy_i, δz_i, qui s'y rapportent, seront nulles. Nous adopterons d'abord cette hypothèse, qui simplifie les formules, et nous aurons, en conséquence,

$$\delta\mathrm{V} = \mathsf{S}\, \delta\Pi\,\mathrm{D}m - \mathsf{S}\, \delta x\,\mathrm{D}_{,}(\Psi\,\mathrm{D}x) - \mathsf{S}\, \delta y\,\mathrm{D}_{,}(\Psi\,\mathrm{D}y) - \mathsf{S}\, \delta z\,\mathrm{D}_{,}(\Psi\,\mathrm{D}z).$$

En général, comme il faut que les variations disparaissent toujours, si le premier ou le dernier corps, ou tous les deux, n'étaient pas fixes, il faudrait supposer la valeur de Ψ nulle au commencement ou à la fin. On aurait ainsi, à cause de $\Psi = \frac{\Phi}{\mathrm{D}s}$, la condition à remplir $\Phi_0 = 0$ ou $\Phi_i = 0$, si le premier ou le dernier corps est supposé mobile; et si tous les deux étaient mobiles, on aurait les deux conditions $\Phi_0 = 0$ et $\Phi_i = 0$.

18. La variation $\delta\mathrm{V}$ étant réduite à cette forme simple, les équations générales de la Section IV (art. 10), étant rapportées aux variables x, y, z de chacun des corps du système, donneront pour ces variables les trois équations suivantes, dans lesquelles je remets Φ au lieu de $\Psi\,\mathrm{D}s$:

$$\frac{d^2 x}{dt^2}\,\mathrm{D}m + \frac{\delta\Pi}{\delta x}\,\mathrm{D}m - \mathrm{D}_{,}\left(\frac{\Phi\,\mathrm{D}x}{\mathrm{D}s}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2}\,\mathrm{D}m + \frac{\delta\Pi}{\delta y}\,\mathrm{D}m - \mathrm{D}_{,}\left(\frac{\Phi\,\mathrm{D}y}{\mathrm{D}s}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2}\,\mathrm{D}m + \frac{\delta\Pi}{\delta z}\,\mathrm{D}m - \mathrm{D}_{,}\left(\frac{\Phi\,\mathrm{D}z}{\mathrm{D}s}\right) = 0.$$

Ces équations sont rigoureuses, quel que soit le mouvement des corps; mais, lorsque ces mouvements sont très petits, les équations se simplifient et deviennent linéaires, comme nous l'avons vu plus haut (§ I).

19. Supposons que, dans l'état d'équilibre du système, les coordonnées x, y, z deviennent a, b, c, et qu'elles soient, dans le mouvement, $a+\xi$, $b+\eta$, $c+\zeta$, les quantités ξ, η, ζ étant très petites. La fonction Π deviendra $\Pi + \frac{\partial\Pi}{\partial a}\xi + \frac{\partial\Pi}{\partial b}\eta + \frac{\partial\Pi}{\partial c}\zeta$. Ainsi, en regardant dorénavant Π comme une simple fonction de a, b, c, les trois différences partielles $\frac{\partial\Pi}{\partial x}$, $\frac{\partial\Pi}{\partial y}$, $\frac{\partial\Pi}{\partial z}$ pourront s'exprimer ainsi :

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a} + \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial a^2}\xi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial b}\eta + \frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial c}\zeta\right),$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial b} + \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial b}\xi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial b^2}\eta + \frac{\partial^2\Pi}{\partial b\,\partial c}\zeta\right),$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial c} + \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial c}\xi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial b\,\partial c}\eta + \frac{\partial^2\Pi}{\partial c^2}\zeta\right).$$

Par les mêmes substitutions de $a+\xi$, $b+\eta$, $c+\zeta$, au lieu de x, y, z, les différences Dx, Dy, Dz deviendront

$$Da + D\xi,\quad Db + D\eta,\quad Dc + D\zeta.$$

A l'égard de la quantité Φ, qui est supposée fonction de Ds, si l'on fait, pour abréger,

$$Df = \sqrt{Da^2 + Db^2 + Dc^2},$$

on aura d'abord

$$Ds = Df + \frac{Da}{Df}D\xi + \frac{Db}{Df}D\eta + \frac{Dc}{Df}D\zeta;$$

ensuite, si l'on nomme F ce que devient la fonction Φ lorsqu'on y change Ds en Df, et qu'on fasse $\frac{dF}{dDf} = \frac{F'}{Df}$, on aura, par le développement,

$$\Phi = F + F'\left(\frac{Da}{Df}\frac{D\xi}{Df} + \frac{Db}{Df}\frac{D\eta}{Df} + \frac{Dc}{Df}\frac{D\zeta}{Df}\right)$$

et, par conséquent,

$$\frac{\Phi}{Ds} = \frac{F}{Df} + \frac{F' - F}{Df}\left(\frac{Da}{Df}\frac{D\xi}{Df} + \frac{Db}{Df}\frac{D\eta}{Df} + \frac{Dc}{Df}\frac{D\zeta}{Df}\right).$$

20. On fera ces substitutions dans les trois équations trouvées ci-dessus, et comme, dans l'état d'équilibre, les variables ξ, η, ζ sont

supposées nulles, il faudra que ces équations se vérifient dans cette hypothèse. Ainsi les termes constants devront se détruire, ce qui donnera d'abord les trois équations de condition

$$\frac{\partial\Pi}{\partial a}Dm - D_{\prime}\left(F\frac{Da}{Df}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial b}Dm - D_{\prime}\left(F\frac{Db}{Df}\right) = 0,$$
$$\frac{\partial\Pi}{\partial c}Dm - D_{\prime}\left(F\frac{Dc}{Df}\right) = 0.$$

Ces équations donneront les valeurs que les coordonnées a, b, c doivent avoir dans la situation de l'équilibre; et il est facile de voir qu'elles représentent d'une manière générale celles que nous avons trouvées dans la Section V de la I[re] Partie, pour l'équilibre de plusieurs corps liés par un fil extensible ou non.

21. On aura ensuite, en faisant, pour abréger,

$$G = F - F',$$

$$a' = \frac{Da}{Df},\qquad b' = \frac{Db}{Df},\qquad c' = \frac{Dc}{Df},$$

les trois équations suivantes entre les variables ξ, η, ζ et t :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}Dm + \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial a^2}\xi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial b}\eta + \frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial c}\zeta\right)Dm$$
$$- D_{\prime}\left[F\frac{D\xi}{Df} - Ga'\left(a'\frac{D\xi}{Df} + b'\frac{D\eta}{Df} + c'\frac{D\zeta}{Df}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}Dm + \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial b}\xi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial b^2}\eta + \frac{\partial^2\Pi}{\partial b\,\partial c}\zeta\right)Dm$$
$$- D_{\prime}\left[F\frac{D\eta}{Df} - Gb'\left(a'\frac{D\xi}{Df} + b'\frac{D\eta}{Df} + c'\frac{D\zeta}{Df}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}Dm + \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial c}\xi + \frac{\partial^2\Pi}{\partial b\,\partial c}\eta + \frac{\partial^2\Pi}{\partial c^2}\zeta\right)Dm$$
$$- D_{\prime}\left[F\frac{D\zeta}{Df} - Gc'\left(a'\frac{D\xi}{Df} + b'\frac{D\eta}{Df} + c'\frac{D\zeta}{Df}\right)\right] = 0.$$

Ce sont ces équations qui serviront à déterminer les oscillations du système supposées très petites; elles sont du genre de celles qu'on nomme *à différences finies et infiniment petites*, et comme elles sont à coefficients constants, elles sont susceptibles de la méthode générale exposée dans le paragraphe précédent.

22. Les équations de l'article 20, qui renferment les conditions de l'équilibre, donnent, en passant des différences aux sommes,

$$\mathrm{F}\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{D}f} = \mathrm{S}\frac{\partial\Pi}{\partial a}\mathrm{Dm} + \mathrm{A},$$
$$\mathrm{F}\frac{\mathrm{D}b}{\mathrm{D}f} = \mathrm{S}\frac{\partial\Pi}{\partial b}\mathrm{Dm} + \mathrm{B},$$
$$\mathrm{F}\frac{\mathrm{D}c}{\mathrm{D}f} = \mathrm{S}\frac{\partial\Pi}{\partial c}\mathrm{Dm} + \mathrm{C},$$

A, B, C étant trois constantes arbitraires; d'où l'on tire tout de suite

$$\mathrm{F} = \sqrt{\left(\mathrm{S}\frac{\partial\Pi}{\partial a}\mathrm{Dm} + \mathrm{A}\right)^2 + \left(\mathrm{S}\frac{\partial\Pi}{\partial b}\mathrm{Dm} + \mathrm{B}\right)^2 + \left(\mathrm{S}\frac{\partial\Pi}{\partial c}\mathrm{Dm} + \mathrm{C}\right)^2}.$$

Lorsque la quantité F est une fonction donnée de $\mathrm{D}f$, ce qui a lieu quand on suppose que les corps s'attirent ou se repoussent par une force Φ fonction de leurs distances $\mathrm{D}s$, la valeur précédente de F donnera la valeur de $\mathrm{D}f$ qui doit avoir lieu dans l'état d'équilibre.

Mais, lorsque les distances $\mathrm{D}s$ sont supposées données et invariables, alors la quantité Φ, qui tient lieu du multiplicateur λ (art. 14), est inconnue et doit se déterminer par la formule précédente; mais, dans ce cas, on a

$$\mathrm{D}s = \mathrm{D}f$$

et, par conséquent (art. 19),

$$\frac{\mathrm{D}a}{\mathrm{D}f}\mathrm{D}\xi + \frac{\mathrm{D}b}{\mathrm{D}f}\mathrm{D}\eta + \frac{\mathrm{D}c}{\mathrm{D}f}\mathrm{D}\zeta = 0,$$

ce qui simplifie les équations de l'article précédent.

23. L'esprit de la méthode de l'article 4 consiste à supposer que

chaque variable soit exprimée par une même fonction de t, multipliée par une quantité différente pour chaque variable.

Si l'on désigne par θ cette fonction, on fera

$$\xi = \theta\mathrm{X}, \qquad \eta = \theta\mathrm{Y}, \qquad \zeta = \theta\mathrm{Z},$$

et, après avoir substitué ces valeurs dans les équations de l'article 21, on verra aisément que, pour vérifier ces équations, il est nécessaire que la variable θ soit déterminée par une équation de la forme

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0;$$

car alors, en mettant pour $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ sa valeur $-k\theta$, et divisant tous les termes par θ, on aura ces trois équations aux différences finies

$$k\mathrm{X}\,\mathrm{Dm} = \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial a^2}\mathrm{X} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial b}\mathrm{Y} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial c}\mathrm{Z}\right)\mathrm{Dm}$$
$$- \mathrm{D}_{\prime}\left[\mathrm{F}\frac{\mathrm{DX}}{\mathrm{D}f} - \mathrm{G}a'\left(a'\frac{\mathrm{DX}}{\mathrm{D}f} + b'\frac{\mathrm{DY}}{\mathrm{D}f} + c'\frac{\mathrm{DZ}}{\mathrm{D}f}\right)\right],$$

$$k\mathrm{Y}\,\mathrm{Dm} = \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial b}\mathrm{X} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial b^2}\mathrm{Y} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial b\,\partial c}\mathrm{Z}\right)\mathrm{Dm}$$
$$- \mathrm{D}_{\prime}\left[\mathrm{F}\frac{\mathrm{DY}}{\mathrm{D}f} - \mathrm{G}b'\left(a'\frac{\mathrm{DX}}{\mathrm{D}f} + b'\frac{\mathrm{DY}}{\mathrm{D}f} + c'\frac{\mathrm{DZ}}{\mathrm{D}f}\right)\right],$$

$$k\mathrm{Z}\,\mathrm{Dm} = \left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial c}\mathrm{X} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial b\,\partial c}\mathrm{Y} + \frac{\partial^2\Pi}{\partial c^2}\mathrm{Z}\right)\mathrm{Dm}$$
$$- \mathrm{D}_{\prime}\left[\mathrm{F}\frac{\mathrm{DZ}}{\mathrm{D}f} - \mathrm{G}c'\left(a'\frac{\mathrm{DX}}{\mathrm{D}f} + b'\frac{\mathrm{DY}}{\mathrm{D}f} + c'\frac{\mathrm{DZ}}{\mathrm{D}f}\right)\right].$$

24. L'équation en θ s'intègre facilement; elle donne

$$\theta = \mathrm{E}\sin(t\sqrt{k} + \varepsilon),$$

E et ε étant deux constantes arbitraires.

A l'égard des équations en X, Y, Z, elles ne sont, en général, intégrables en termes finis, par les méthodes connues, que lorsqu'elles sont à coefficients constants; mais, si l'on développe les différences finies marquées par D, elles deviennent de la forme (art. 16)

$$AX_{\prime} + BY_{\prime} + CZ_{\prime} + A'X + B'Y + C'Z + A''_{\prime}X + B''_{\prime}Y + C''_{\prime}Z = 0;$$

les coefficients A, B, C, A′, B′, ... sont constants ou variables, mais indépendants de t, et la quantité k n'entre que dans les valeurs de A′, B′, C′, et seulement à la première dimension.

Si maintenant on désigne par X_0, X_1, X_2, X_3, ... les valeurs consécutives de X, en commençant par la première, qui répond au premier corps du système, et de même par Y_0, Y_1, Y_2, Y_3, ..., Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, ... les valeurs consécutives correspondantes de Y et Z, et qu'on substitue successivement ces valeurs dans les trois équations, réduites à la forme précédente, il est aisé de voir que les trois premières donneront les valeurs de X_2, Y_2, Z_2 en fonctions linéaires de X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1; que les trois suivantes donneront X_3, Y_3, Z_3 en fonctions linéaires de X_2, Y_2, Z_2, X_1, Y_1, Z_1, lesquelles, par la substitution des valeurs de X_2, Y_2, Z_2, deviendront aussi des fonctions linéaires de X_0, Y_0, Z_0, X_1, Y_1, Z_1, et ainsi de suite.

Donc, en général, les valeurs de X_{n+1}, Y_{n+1}, Z_{n+1} seront de la forme

$$AX_0 + BY_0 + CZ_0 + A'X_1 + B'Y_1 + C'Z_1,$$

et il est facile de s'assurer, par le calcul, que les quantités A, B, C seront des fonctions rationnelles et entières de k de la dimension $n - 2$, et que les quantités A′, B′, C′ sont de pareilles fonctions de la dimension $n - 1$.

Nous avons supposé (art. 17) que le premier et le dernier corps du système étaient fixes; le premier corps appartient à l'indice 0, et si l'on désigne par n le nombre des corps mobiles, le dernier corps, qui doit être fixe, appartiendra à l'indice $n + 1$. Il faudra donc que l'on ait

$$X_0 = 0, \qquad Y_0 = 0, \qquad Z_0 = 0, \qquad X_{n+1} = 0, \qquad Y_{n+1} = 0, \qquad Z_{n+1} = 0,$$

ce qui donnera entre X_1, Y_1, Z_1 trois équations linéaires de la forme $A'X_1 + B'Y_1 + C'Z_1 = 0$, dans lesquelles les coefficients A′, B′, C′ seront des fonctions rationnelles et entières de k de la dimension n.

En éliminant les quantités X_1, Y_1, Z_1, on aura une équation en k du degré $3n$, nombre des inconnues X, Y, Z, et qui aura, par conséquent, $3n$ racines.

Les mêmes équations donneront les rapports entre les trois quantités X_1, Y_1, Z_1; de sorte qu'on pourra prendre à volonté la valeur d'une de ces quantités. Comme ces rapports se trouveront exprimés par des fonctions rationnelles de k, on pourra exprimer les valeurs des trois quantités X_1, Y_1, Z_1 par des fonctions rationnelles et entières de k, et, par ce moyen, les inconnues X, Y, Z seront aussi exprimées, en général, par des fonctions connues, rationnelles et entières de k.

25. Nous dénoterons par k', k'', k''', ..., $k^{(3n)}$ les différentes racines de l'équation en k, dont la résolution doit être supposée connue; et nous dénoterons pareillement par X′, X″, X‴, ..., Y′, Y″, Y‴, ..., Z′, Z″, Z‴, ..., les valeurs correspondantes des quantités X, Y, Z, qui résultent de la substitution de ces différentes racines à la place de k.

Donc, puisqu'on a trouvé (art. 23 et 24)

$$\xi = XE\sin(t\sqrt{k} + \varepsilon),$$
$$\eta = YE\sin(t\sqrt{k} + \varepsilon),$$
$$\zeta = ZE\sin(t\sqrt{k} + \varepsilon),$$

en substituant successivement les différentes valeurs de k, et en prenant différentes constantes arbitraires E et ε, on aura autant de valeurs particulières de ξ, η, ζ, dont la somme donnera les valeurs complètes de ces variables, par la nature des équations linéaires.

Ces valeurs particulières de ξ, η, ζ sont analogues à celles qui représentent les petites oscillations d'un pendule dont la longueur serait $\frac{g}{k}$ (art. 11), pourvu que k soit une quantité réelle et positive; et le mouvement de chaque corps sera composé d'autant de pareilles oscillations qu'il y aura de valeurs différentes de k; de sorte que, si toutes ces valeurs sont incommensurables entre elles, il sera impossible que le système reprenne jamais sa première position, à moins que les valeurs de ξ, η, ζ ne se réduisent aux valeurs particulières qui répondent à une seule des racines k. Dans ce cas, en faisant $t=0$ dans les formules précédentes, on aura $\mathrm{XE}\sin\varepsilon$, $\mathrm{YE}\sin\varepsilon$, $\mathrm{ZE}\sin\varepsilon$ pour les valeurs de ξ, η, ζ, et $\mathrm{XE}\cos\varepsilon$, $\mathrm{YE}\cos\varepsilon$, $\mathrm{ZE}\cos\varepsilon$ pour celles de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$. Ainsi, pour que ce cas puisse avoir lieu, il faudra que les déplacements primitifs ξ, η, ζ, ainsi que les vitesses initiales $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$, soient proportionnels à X, Y, Z; et il y aura autant de manières de satisfaire à ces conditions qu'il y a de valeurs différentes de k.

26. Si l'on désigne, par des traits supérieurs, des constantes arbitraires différentes, on aura

$$\xi = \mathrm{X'E'}\sin(t\sqrt{k'}+\varepsilon') + \mathrm{X''E''}\sin(t\sqrt{k''}+\varepsilon'') + \mathrm{X'''E'''}\sin(t\sqrt{k'''}+\varepsilon''') + \ldots,$$
$$\eta = \mathrm{Y'E'}\sin(t\sqrt{k'}+\varepsilon') + \mathrm{Y''E''}\sin(t\sqrt{k''}+\varepsilon'') + \mathrm{Y'''E'''}\sin(t\sqrt{k'''}+\varepsilon''') + \ldots,$$
$$\zeta = \mathrm{Z'E'}\sin(t\sqrt{k'}+\varepsilon') + \mathrm{Z''E''}\sin(t\sqrt{k''}+\varepsilon'') + \mathrm{Z'''E'''}\sin(t\sqrt{k'''}+\varepsilon''') + \ldots,$$

pour les valeurs complètes des variables ξ, η, ζ qui représentent les oscillations de chacun des corps du système donné, quel que soit leur état initial.

On peut représenter ces valeurs d'une manière plus simple, en employant le signe $\sum$ pour exprimer la somme de toutes les valeurs correspondantes aux différentes valeurs de k; on aura ainsi

$$\xi = \sum[\mathrm{XE}\sin(t\sqrt{k}+\varepsilon)],$$
$$\eta = \sum[\mathrm{YE}\sin(t\sqrt{k}+\varepsilon)],$$
$$\zeta = \sum[\mathrm{ZE}\sin(t\sqrt{k}+\varepsilon)],$$

et l'on aura les expressions particulières des variables ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2, ..., pour chacun des corps du système, en changeant, dans les précédentes, X, Y, Z en X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, ..., et prenant pour E et ε différentes constantes arbitraires E_1, E_2, ..., ε_1, ε_2, ..., qui dépendent de l'état initial du système.

27. Pour déterminer ces constantes de la manière la plus simple, je reprends les équations en ξ, η, ζ de l'article 21, et je les ajoute ensemble, après avoir multiplié la première par X, la seconde par Y et la troisième par Z; je prends ensuite la somme de toutes ces équations ainsi composées, relativement à tous les corps du système, et je dénote cette somme par la caractéristique $\mathbf{S}$; si l'on fait attention que cette caractéristique est indépendante de la caractéristique d des différentielles relatives à t, on aura l'équation

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{S}(\mathrm{X}\xi+\mathrm{Y}\eta+\mathrm{Z}\zeta)\,\mathrm{D}m \\
&\quad+\mathbf{S}\frac{\partial^2\Pi}{\partial a^2}\mathrm{X}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial b}\mathrm{Y}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial c}\mathrm{Z}\Big)\xi\,\mathrm{D}m \\
&\quad+\mathbf{S}\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial b}\mathrm{X}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial b^2}\mathrm{Y}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial c}\mathrm{Z}\Big)\eta\,\mathrm{D}m \\
&\quad+\mathbf{S}\frac{\partial^2\Pi}{\partial a\,\partial c}\mathrm{X}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial b\,\partial c}\mathrm{Y}+\frac{\partial^2\Pi}{\partial c^2}\mathrm{Z}\Big)\zeta\,\mathrm{D}m \\
&\quad-\mathbf{S}\,\mathrm{X}\,\mathrm{D}_{,}\Big[\mathrm{F}\frac{\mathrm{D}\xi}{\mathrm{D}f}-\mathrm{G}a'\Big(a'\frac{\mathrm{D}\xi}{\mathrm{D}f}+b'\frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}f}+c'\frac{\mathrm{D}\zeta}{\mathrm{D}f}\Big)\Big] \\
&\quad-\mathbf{S}\,\mathrm{Y}\,\mathrm{D}_{,}\Big[\mathrm{F}\frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}f}-\mathrm{G}b'\Big(a'\frac{\mathrm{D}\xi}{\mathrm{D}f}+b'\frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}f}+c'\frac{\mathrm{D}\zeta}{\mathrm{D}f}\Big)\Big] \\
&\quad-\mathbf{S}\,\mathrm{Z}\,\mathrm{D}_{,}\Big[\mathrm{F}\frac{\mathrm{D}\zeta}{\mathrm{D}f}-\mathrm{G}c'\Big(a'\frac{\mathrm{D}\xi}{\mathrm{D}f}+b'\frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}f}+c'\frac{\mathrm{D}\zeta}{\mathrm{D}f}\Big)\Big]=0.
\end{aligned}$$

Dans cette équation, les termes qui contiennent des différences marquées par D sous le signe sommatoire $\mathbf{S}$ sont susceptibles de réductions analogues à celles des intégrations par parties, et dont nous avons donné le type dans l'article 16. Pour cela, considérons en général un terme quelconque de la forme $\mathbf{S}\,\mathrm{X}\,\mathrm{D}_{,}(\mathrm{V}\,\mathrm{D}\xi)$; nous aurons, par les réductions de l'article cité, en faisant attention que les quantités X et ξ sont nulles au commencement et à la fin des intégrations marquées par D (art. 24),

$$\mathbf{S}\,\mathrm{X}\,\mathrm{D}_{,}(\mathrm{V}\,\mathrm{D}\xi) = -\mathbf{S}\,\mathrm{V}\,\mathrm{D}\xi\,\mathrm{DX} = \mathbf{S}\,\xi_{,}\mathrm{D}(\mathrm{V}\,\mathrm{DX}).$$

Or $\mathbf{S}\,\xi_{,}\mathrm{D}(\mathrm{V}\,\mathrm{DX})$ est la même chose que $\mathbf{S}\,\xi\,\mathrm{D}_{,}(\mathrm{V}\,\mathrm{DX})$, en prenant à la place du terme $\xi_{,}\mathrm{D}(\mathrm{V}\,\mathrm{DX})$ celui qui le précède.

Donc, en général, on aura

$$\mathrm{S}\, \mathrm{X}\, \mathrm{D}_{\prime}(\mathrm{V}\,\mathrm{D}\xi) = \mathrm{S}\, \xi\, \mathrm{D}_{\prime}(\mathrm{V}\,\mathrm{DX}),$$

et il en sera de même des termes semblables. Ainsi l'équation précédente deviendra de la forme

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{S}(\mathrm{X}\xi + \mathrm{Y}\eta + \mathrm{Z}\zeta)\,\mathrm{Dm} + \mathrm{S}[(\mathrm{X})\xi + (\mathrm{Y})\eta + (\mathrm{Z})\zeta] = 0,$$

dans laquelle les quantités désignées par (X), (Y), (Z) contiendront les mêmes termes qui composent les seconds membres des équations de l'article 23, de manière que ces équations donneront

$$(\mathrm{X}) = k\mathrm{X}\,\mathrm{Dm}, \qquad (\mathrm{Y}) = k\mathrm{Y}\,\mathrm{Dm}, \qquad (\mathrm{Z}) = k\mathrm{Z}\,\mathrm{Dm};$$

d'où il suit que l'équation ci-dessus deviendra

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathrm{S}(\mathrm{X}\xi + \mathrm{Y}\eta + \mathrm{Z}\zeta)\,\mathrm{Dm} + k\,\mathrm{S}(\mathrm{X}\xi + \mathrm{Y}\eta + \mathrm{Z}\zeta)\,\mathrm{Dm} = 0,$$

laquelle donne tout de suite, par l'intégration,

$$\mathrm{S}(\mathrm{X}\xi + \mathrm{Y}\eta + \mathrm{Z}\zeta)\,\mathrm{Dm} = \mathrm{L}\sin(t\sqrt{k} + \lambda),$$

L et λ étant deux constantes arbitraires.

28. Il est facile de voir, par la nature du calcul, que, si l'on substitue dans cette équation pour k une des racines de l'équation en k que nous avons dénotées par $k', k'', k''', \ldots$ (art. 25), on devra avoir un résultat identique avec les expressions de ξ, η, ζ de l'article 26, de sorte qu'en substituant ces mêmes expressions dans l'équation précédente, elle devra devenir absolument identique pour toutes les valeurs de k.

On aura donc ainsi l'équation identique

$$\mathrm{S}\left\{\begin{aligned} &\mathrm{X}\textstyle\sum[\mathrm{XE}\sin(t\sqrt{k} + \varepsilon)] \\ +\,&\mathrm{Y}\textstyle\sum[\mathrm{YE}\sin(t\sqrt{k} + \varepsilon)] \\ +\,&\mathrm{Z}\textstyle\sum[\mathrm{ZE}\sin(t\sqrt{k} + \varepsilon)] \end{aligned}\right\}\mathrm{Dm} = \mathrm{L}\sin(t\sqrt{k} + \lambda),$$

pour chacune des valeurs $k', k'', k''', \ldots$ de k; et comme cette identité doit avoir lieu indépendamment de la valeur de t, il ne sera pas difficile de se convaincre que tous les termes qui contiendront le même arc $t\sqrt{k}$ devront être identiques dans le premier et dans le second membre de l'équation; d'où il suit d'abord qu'on aura nécessairement $\lambda = \varepsilon$ pour toutes les valeurs de λ et de ε.

Ensuite, si l'on fait attention à la valeur des signes sommatoires S et $\sum$, dont le premier S représente la somme des quantités sous le signe qui appartiennent à tous les corps du système, et que nous avons dénotées par des nombres placés en forme d'indices au bas des lettres (art. 24), et dont le second $\sum$ représente la somme des quantités semblables qui répondent à toutes les racines $k', k'', k''', \ldots, k^{(3n)}$, et que nous dénotons par des traits supérieurs (art. 25), on trouvera, par la comparaison des termes affectés des mêmes sinus, l'équation

$$\mathrm{E}\,\mathrm{S}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2)\,\mathrm{Dm} = \mathrm{L}.$$

Donc on aura, en général,

$$\mathrm{E}\sin(t\sqrt{k} + \varepsilon) = \frac{\mathrm{L}\sin(t\sqrt{k} + \lambda)}{\mathrm{S}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2)\,\mathrm{Dm}}$$

et, par conséquent, par l'article 27,

$$\mathrm{E}\sin(t\sqrt{k} + \varepsilon) = \frac{\mathrm{S}(\mathrm{X}\xi + \mathrm{Y}\eta + \mathrm{Z}\zeta)\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}(\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 + \mathrm{Z}^2)\,\mathrm{Dm}},$$

équation qui aura lieu pour toutes les valeurs de k.

29. Soient maintenant, lorsque $t = 0$,

$$\xi = \alpha, \qquad \eta = \beta, \qquad \zeta = \gamma,$$

et

$$\frac{d\xi}{dt} = \dot{\alpha}, \qquad \frac{d\eta}{dt} = \dot{\beta}, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \dot{\gamma};$$

ces six quantités seront données par l'état initial du système : si donc on les introduit dans l'équation précédente et dans sa différentielle relative à t, en y faisant $t=0$, on aura les valeurs suivantes des constantes arbitraires :

$$\mathrm{E}\sin\varepsilon = \frac{\mathrm{S}(\mathrm{X}\alpha+\mathrm{Y}\beta+\mathrm{Z}\gamma)\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)\,\mathrm{Dm}},$$

$$\mathrm{E}\cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{S}(\mathrm{X}\dot\alpha+\mathrm{Y}\dot\beta+\mathrm{Z}\dot\gamma)\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)\,\mathrm{Dm}}.$$

Donc enfin, si l'on substitue ces valeurs dans les expressions de ξ, η, ζ de l'article 26, on aura

$$\xi = +\Sigma\left(\mathrm{X}\,\frac{\mathrm{S}(\mathrm{X}\alpha+\mathrm{Y}\beta+\mathrm{Z}\gamma)\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)\,\mathrm{Dm}}\cos t\sqrt{k}\right)$$
$$+\Sigma\left(\frac{\mathrm{X}}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{S}(\mathrm{X}\dot\alpha+\mathrm{Y}\dot\beta+\mathrm{Z}\dot\gamma)\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)\,\mathrm{Dm}}\sin t\sqrt{k}\right),$$

$$\eta = +\Sigma\left(\mathrm{Y}\,\frac{\mathrm{S}(\mathrm{X}\alpha+\mathrm{Y}\beta+\mathrm{Z}\gamma)\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)\,\mathrm{Dm}}\cos t\sqrt{k}\right)$$
$$+\Sigma\left(\frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{S}(\mathrm{X}\dot\alpha+\mathrm{Y}\dot\beta+\mathrm{Z}\dot\gamma)\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)\,\mathrm{Dm}}\sin t\sqrt{k}\right),$$

$$\zeta = +\Sigma\left(\mathrm{Z}\,\frac{\mathrm{S}(\mathrm{X}\alpha+\mathrm{Y}\beta+\mathrm{Z}\gamma)\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)\,\mathrm{Dm}}\cos t\sqrt{k}\right)$$
$$+\Sigma\left(\frac{\mathrm{Z}}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{S}(\mathrm{X}\dot\alpha+\mathrm{Y}\dot\beta+\mathrm{Z}\dot\gamma)\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2)\,\mathrm{Dm}}\sin t\sqrt{k}\right).$$

Ces formules, remarquables par leur généralité autant que par leur simplicité, renferment la solution de plusieurs problèmes dont l'analyse serait fort difficile par d'autres méthodes. Nous allons en faire l'application à deux problèmes déjà résolus dans différents Ouvrages, mais d'une manière plus ou moins complète.

§ III. — *Où l'on applique les formules précédentes aux vibrations d'une corde tendue et chargée de plusieurs corps, et aux oscillations d'un fil inextensible, chargé d'un nombre quelconque de poids et suspendu par ses deux bouts ou par un seulement.*

30. Les expressions des variables ξ, η, ζ que nous venons de trouver se simplifient beaucoup lorsque, dans les équations différentielles de l'article 21, les variables dont il s'agit se trouvent séparées. Alors les variables X, Y, Z se trouvent aussi séparées dans les équations aux différences finies de l'article 23; et chacune de ces équations donne, par le procédé de l'article 24, une équation particulière en k du degré m. Si l'on dénote par k, k_1, k_2 les valeurs des k qui répondent aux quantités X, Y, Z données par ces trois équations, et que l'on conserve les dénominations de l'article précédent, les expressions de ξ, η, ζ se réduiront, dans le cas précédent, à celles-ci :

$$\xi = \Sigma\left(\mathrm{X}\,\frac{\mathrm{S}\,\mathrm{X}\alpha\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}\,\mathrm{X}^2\,\mathrm{Dm}}\cos t\sqrt{k}\right)+\Sigma\left(\frac{\mathrm{X}}{\sqrt{k}}\,\frac{\mathrm{S}\,\mathrm{X}\dot\alpha\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}\,\mathrm{X}^2\,\mathrm{Dm}}\sin t\sqrt{k}\right),$$

$$\eta = \Sigma\left(\mathrm{Y}\,\frac{\mathrm{S}\,\mathrm{Y}\beta\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}\,\mathrm{Y}^2\,\mathrm{Dm}}\cos t\sqrt{k_1}\right)+\Sigma\left(\frac{\mathrm{Y}}{\sqrt{k_1}}\,\frac{\mathrm{S}\,\mathrm{Y}\dot\beta\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}\,\mathrm{Y}^2\,\mathrm{Dm}}\sin t\sqrt{k_1}\right),$$

$$\zeta = \Sigma\left(\mathrm{Z}\,\frac{\mathrm{S}\,\mathrm{Z}\gamma\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}\,\mathrm{Z}^2\,\mathrm{Dm}}\cos t\sqrt{k_2}\right)+\Sigma\left(\frac{\mathrm{Z}}{\sqrt{k_2}}\,\frac{\mathrm{S}\,\mathrm{Z}\dot\gamma\,\mathrm{Dm}}{\mathrm{S}\,\mathrm{Z}^2\,\mathrm{Dm}}\sin t\sqrt{k_2}\right).$$

31. Ce cas a lieu premièrement lorsque les corps sont supposés placés en ligne droite dans l'état d'équilibre; car, si l'on prend cette ligne pour l'axe des x, les ordonnées b et c deviennent nulles ainsi que leurs différences Db, Dc; et les équations de condition de l'article 20 exigent que l'on ait

$$\frac{\partial\Pi}{\partial b}=0,\qquad \frac{\partial\Pi}{\partial c}=0,$$

c'est-à-dire que les forces perpendiculaires à l'axe soient nulles. On aura donc aussi

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial a\,\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a\,\partial c} = 0, \qquad \ldots,$$

et les équations de l'article 21 deviendront, à cause de $a' = 1$, $b' = 0$, $c' = 0$ et de $G = F - F'$,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}\,\mathrm{D}m + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2}\,\xi\,\mathrm{D}m - \mathrm{D}_{,}\left(F'\frac{\mathrm{D}\xi}{\mathrm{D}f}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}\,\mathrm{D}m - \mathrm{D}_{,}\left(F\frac{\mathrm{D}\eta}{\mathrm{D}f}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}\,\mathrm{D}m - \mathrm{D}_{,}\left(F\frac{\mathrm{D}\zeta}{\mathrm{D}f}\right) = 0;$$

par conséquent, les équations de l'article 23 se réduiront à celles-ci :

$$\left(k - \frac{\partial^2 \Pi}{\partial a^2}\right) X\,\mathrm{D}m + \mathrm{D}_{,}\left(F'\frac{\mathrm{D}X}{\mathrm{D}f}\right) = 0,$$

$$kY\,\mathrm{D}m + \mathrm{D}_{,}\left(F\frac{\mathrm{D}Y}{\mathrm{D}f}\right) = 0,$$

$$kZ\,\mathrm{D}m + \mathrm{D}_{,}\left(F\frac{\mathrm{D}Z}{\mathrm{D}f}\right) = 0,$$

dans lesquelles on voit que les variables sont séparées, de manière qu'on peut les déterminer chacune en particulier.

La constante indéterminée k pourra donc être différente dans ces trois équations, et chacune d'elles donnera une équation du $n^{\text{ième}}$ degré pour la détermination de cette constante. On aura ainsi les formules de l'article précédent.

32. Puisqu'on a, dans le cas dont il s'agit, $\mathrm{D}b = 0$, $\mathrm{D}c = 0$, on aura $\mathrm{D}f = \mathrm{D}a$ (art. 19), et les équations de l'équilibre (art. 22) donneront

$$F = \mathrm{S}\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}\,\mathrm{D}m + A.$$

Mais, pour avoir la valeur de la quantité F' (art. 19), il faudra connaître la valeur de F en fonction de $\mathrm{D}f$ ou $\mathrm{D}a$; et l'on déduira, par la différentiation, la valeur de F' en fonction de F.

Si, par exemple, on suppose $\Phi = K(\mathrm{D}s)^m$, on aura $F = K(\mathrm{D}f)^m$ et, de là,

$$F' = mK(\mathrm{D}f)^m = mF.$$

Dans le cas où l'on ferait abstraction de toute force étrangère, on aurait $\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0$, ce qui donne $F = A$ et, par conséquent, F constante pour tous les corps. Mais la valeur de F' pourra varier d'un corps à l'autre, à moins que l'intervalle $\mathrm{D}a$ entre les corps consécutifs ne soit aussi le même pour tous les corps. Dans ce dernier cas, les quantités F et F' seront deux constantes qu'on pourra déterminer *a posteriori*, sans connaître la loi de la fonction Φ.

Ce cas est celui d'un fil ou corde tendue, dont les deux extrémités sont fixes, et qui est chargée d'un nombre quelconque de corps placés à distances égales entre eux; la quantité F exprime alors la tension de la corde ou le poids qui peut la produire; mais, pour la quantité F', on ne peut la déduire de F sans connaître la loi de l'élasticité de la corde.

Ce problème, qui est connu sous le nom de *problème des cordes vibrantes*, mérite un examen particulier, tant parce qu'il est susceptible d'une solution générale, que parce qu'il est intimement lié avec le fameux problème des vibrations des cordes sonores.

33. Nous supposerons que tous les corps $\mathrm{D}m$ dont le fil est chargé soient égaux entre eux et sans pesanteur, et que les intervalles $\mathrm{D}f$ ou $\mathrm{D}a$ qui les séparent dans l'état d'équilibre soient aussi tous égaux.

Comme n est le nombre des corps mobiles, si l'on désigne par M la masse entière ou la somme de toutes les masses $\mathrm{D}m$, en y comprenant la dernière, qui est supposée fixe, et par l la longueur de la corde dans l'état d'équilibre, il est clair qu'on aura

$$\mathrm{D}m = \frac{M}{n+1} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{D}f = \mathrm{D}a = \frac{l}{n+1};$$

et les trois équations en X, Y, Z de l'article 31 deviendront

$$\frac{l\mathrm{M}k}{(n+1)^2\mathrm{F}'}\mathrm{X} + \mathrm{D}^2{}_{,}\mathrm{X} = 0,$$
$$\frac{l\mathrm{M}k}{(n+1)^2\mathrm{F}}\mathrm{Y} + \mathrm{D}^2{}_{,}\mathrm{Y} = 0,$$
$$\frac{l\mathrm{M}k}{(n+1)^2\mathrm{F}}\mathrm{Z} + \mathrm{D}^2{}_{,}\mathrm{Z} = 0,$$

lesquelles étant semblables entre elles, il suffira de résoudre la première, et il n'y aura plus qu'à changer F′ en F pour avoir aussi la résolution des deux autres.

34. Soit r l'exposant ou l'indice du rang qu'un terme quelconque X tient dans la série des X; nous désignerons en général ce terme par X_r, et le terme précédent ${}_{,}\mathrm{X}$ sera X_{r-1}; ainsi la première équation sera

$$\frac{l\mathrm{M}k}{(n+1)^2\mathrm{F}'}\mathrm{X}_r + \mathrm{D}^2\mathrm{X}_{r-1} = 0.$$

Supposons, pour résoudre cette équation,

$$\mathrm{X}_r = \mathrm{H}\sin(r\varphi + e),$$

H et e étant deux constantes arbitraires; on aura, par les formules connues de la multiplication des angles,

$$\mathrm{D}^2\mathrm{X}_{r-1} = \mathrm{X}_{r+1} - 2\mathrm{X}_r + \mathrm{X}_{r-1} = -4\mathrm{H}\sin(r\varphi + e)\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

et ces valeurs étant substituées dans l'équation précédente, elle deviendra, après la division par X_r,

$$\frac{l\mathrm{M}k}{(n+1)^2\mathrm{F}'} - 4\sin^2\frac{\varphi}{2} = 0,$$

laquelle donne

$$\sqrt{k} = 2(n+1)\sqrt{\frac{\mathrm{F}'}{l\mathrm{M}}}\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Or on a (art. 24) les deux conditions à remplir

$$\mathrm{X}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{X}_{n+1} = 0;$$

la première donne $e = 0$; la seconde donne $\sin(n+1)\varphi = 0$; d'où l'on tire $(n+1)\varphi = \rho\pi$, π étant l'angle de 180° et ρ un nombre quelconque entier. Donc on aura $\varphi = \frac{\rho\pi}{n+1}$; par conséquent, en faisant, ce qui est permis, $\mathrm{H} = 1$, on aura, en général,

$$\mathrm{X}_r = \sin\frac{r\rho\pi}{n+1}.$$

Et l'on aura la même expression pour Y_r et pour Z_r, qu'on substituera à la place de X, Y, Z, dans les expressions de ξ, η, ζ de l'article 30.

La même valeur de φ, étant substituée dans l'expression de $\sqrt{k}$ trouvée ci-dessus, donne

$$\sqrt{k} = 2(n+1)\sqrt{\frac{\mathrm{F}'}{l\mathrm{M}}}\sin\frac{\rho\pi}{2(n+1)},$$

où l'on peut mettre pour ρ tous les nombres entiers depuis 0 jusqu'à n inclusivement; car $\rho = n+1$ donne X, Y, Z nuls, et, au-dessus de $n+1$, les sinus de $\frac{\rho\pi}{2(n+1)}$ reviennent les mêmes.

Ainsi l'on aura autant de valeurs différentes de k qu'il y a de corps mobiles; ce seront les racines de l'équation en k.

En changeant F′ en F, on aura les valeurs des racines k_1 et k_2 des deux autres équations en k.

On fera donc ces substitutions dans les formules générales de l'article 30, et l'on observera que la caractéristique sommatoire S doit se rapporter uniquement aux exposants ou indices de rang r, depuis $r = 1$ jusqu'à $r = n$, et que la caractéristique sommatoire $\sum$ doit se rapporter aux indices ρ des différentes racines depuis $\rho = 1$ jusqu'à $\rho = n$.

A l'égard de la valeur de $\mathrm{S}\,\mathrm{X}^2\,\mathrm{D}m = \mathrm{D}m\,\mathrm{S}\,\mathrm{X}^2$, on aura, à cause de $\varphi = \frac{\rho\pi}{n+1}$, la sommation suivante :

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\,\mathrm{X}^2 &= \sin^2\varphi + \sin^2 2\varphi + \sin^2 3\varphi + \ldots + \sin^2 n\varphi \\ &= \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi + \ldots + \cos 2n) \\ &= \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos 2n\varphi - \cos 2(n+1)\varphi}{2(1-\cos 2\varphi)} - \frac{1}{2}\right] = \frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

On aura de même

$$\mathrm{S}\,Y^2 = \mathrm{S}\,Z^2 = \frac{n+1}{2}.$$

35. Comme les valeurs de k sont incommensurables entre elles, la corde ne pourra jamais reprendre sa première position, à moins que les expressions de ξ, η, ζ ne se réduisent à un seul terme (art. 25). Dans ce cas, en mettant dans les formules de l'article cité, pour X, Y, Z et k, les valeurs qu'on vient de trouver, et faisant, pour abréger,

$$h' = \sqrt{\frac{F'}{lM}}, \qquad h = \sqrt{\frac{F}{lM}},$$

on aura ces expressions, dans lesquelles j'ai conservé l'angle φ à la place de sa valeur $\frac{\rho\pi}{n+1}$,

$$\xi = E \sin r\varphi \sin\left(h't \sin\frac{\varphi}{2} + \varepsilon\right),$$

$$\eta = E \sin r\varphi \sin\left(ht \sin\frac{\varphi}{2} + \varepsilon\right),$$

$$\zeta = E \sin r\varphi \sin\left(ht \sin\frac{\varphi}{2} + \varepsilon\right);$$

mais il faudra que les valeurs initiales α, β, γ, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, qui répondent à $t = 0$, soient proportionnelles à $\sin r\varphi$. C'est la solution connue, dans laquelle on suppose que les corps ne font que des oscillations simples et isochrones.

36. Pour avoir des expériences générales applicables à un état initial quelconque, il faut employer les formules de l'article 30, en y substituant les valeurs trouvées ci-dessus (art. 34). Nous appliquerons, pour plus de clarté, aux variables ξ, η, ζ l'exposant ou indice r placé au bas de ces lettres, pour marquer le rang du corps auquel elles se rapportent, et à l'égard des quantités α, β, γ, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$ et X, Y, Z, qui sont sous le signe sommatoire S, nous emploierons l'exposant s au lieu de r, parce que cet exposant est uniquement relatif au signe S, lequel

indique qu'il faut prendre la somme de tous les termes qui répondent aux valeurs de s, depuis 0 jusqu'à n.

On aura ainsi cette formule générale

$$\xi_r = \sum \frac{2 \sin r\varphi}{n+1} \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{S}\,\alpha_s \sin s\varphi \cos\left[2(n+1)h't \sin\frac{\varphi}{2}\right] \\ + \mathrm{S}\,\dot{\alpha}_s \sin s\varphi \dfrac{\sin\left[2(n+1)h't \sin\frac{\varphi}{2}\right]}{2(n+1)h' \sin\frac{\varphi}{2}} \end{array} \right\},$$

et pour avoir les expressions de η_r et ζ_r, il n'y aura qu'à changer h' en h et α, $\dot{\alpha}$ en β, $\dot{\beta}$ et en γ, $\dot{\gamma}$.

Les variables ξ_r représentent les excursions longitudinales des corps dans la ligne droite ou axe qui passe par les deux extrémités fixes de la corde, et les variables η_r, ζ_r représentent leurs excursions transversales ou latérales dans la direction perpendiculaire à l'axe, les seules qu'on ait considérées jusqu'ici dans la solution du problème des cordes vibrantes.

A l'égard du signe $\sum$, on se souviendra qu'il exprime la somme de toutes les quantités, sous ce signe, qui répondent à $\rho = 1, 2, 3, \ldots, n$; d'où l'on voit que les excursions de chaque corps, tant longitudinales que transversales, seront composées en général d'autant d'excursions particulières, analogues à celles de différents pendules dont les longueurs seraient

$$\frac{g}{4(n+1)^2 h'^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}} \quad \text{ou} \quad \frac{g}{4(n+1)^2 h^2 \sin^2\frac{\varphi}{2}},$$

qu'il y a de corps mobiles, g étant la force de la gravité.

Pour que les valeurs de h et h' soient réelles, il faut que les quantités F et F′ soient positives (art. 35); donc, suivant l'hypothèse de l'article 32, il faudra que l'exposant m soit positif. Si les corps se repoussaient, F serait une quantité négative, et il faudrait alors que l'exposant m fût aussi négatif, et que, de plus, on eût $\beta = 0$, $\dot{\beta} = 0$, $\gamma = 0$, $\dot{\gamma} = 0$, pour rendre nulles les excursions transversales η et ζ.

37. Il y a une remarque importante à faire sur l'expression générale de ξ_r que nous venons de trouver. Quoique nous ayons supposé que le nombre n des corps mobiles est donné, et que la corde, dont la longueur est aussi donnée, est fixe par ses deux bouts, le calcul n'est pas arrêté par ces suppositions, et l'expression dont il s'agit donne la valeur de ξ_r pour tout corps placé sur la même ligne droite dont le rang serait exprimé par un nombre quelconque r entier, positif ou négatif.

En effet, puisque ce nombre r n'entre que dans $\sin r\varphi$, il est visible qu'on peut lui donner telle valeur que l'on veut, et l'on voit en même temps que, comme $\varphi = \frac{\rho\pi}{n+1}$, ce sinus ne changera pas de valeur si l'on y met $2\lambda(n+1)+r$ à la place de r, et deviendra simplement négatif si l'on y change r en $2\lambda(n+1)-r$, λ étant un nombre quelconque entier, positif ou négatif. D'où il s'ensuit qu'en imaginant, suivant l'esprit du calcul, que la corde s'étende indéfiniment de part et d'autre, et qu'elle soit chargée, dans toute sa longueur, de corps égaux et placés à distances égales entre eux, les mouvements de ces corps seront tels, qu'on aura toujours

$$\xi_{2\lambda(n+1)\pm r} = \pm\,\xi_r.$$

Or il est facile de voir que la formule $2\lambda(n+1)\pm r$ peut représenter tous les nombres entiers, positifs ou négatifs, en supposant r compris entre 0 et $n+1$; car, ayant un nombre entier quelconque, si on le divise par $2(n+1)$ jusqu'à ce que le reste, positif ou négatif, soit moindre que $n+1$, ce qui est toujours possible, et qu'on prenne λ pour le quotient et $\pm r$ pour le reste, ce nombre sera représenté par $2\lambda(n+1)\pm r$. Ainsi la valeur de ξ relative à un corps quelconque placé sur la même ligne, à telle distance qu'on voudra de l'origine de l'axe l, se réduira toujours à la valeur de ξ pour un des corps placés sur cet axe.

Comme la relation que nous venons de trouver entre les différentes valeurs de ξ est générale, quel que soit le nombre r, si l'on y met $\lambda(n+1)+r$ à la place de r, et qu'on prenne les signes inférieurs, elle devient

$$\xi_{\lambda(n+1)-r} = -\,\xi_{\lambda(n+1)+r}.$$

D'où il est facile de conclure que, si l'on imagine toute la longueur indéfinie de la corde divisée en parties égales à l'axe l de la corde donnée, les valeurs de ξ, dans chacune de ces parties, seront les mêmes à égale distance des points de division, mais de signes différents dans les parties contiguës. Si donc on représente les valeurs de ξ, pour tous les corps placés sur l'axe l, par les ordonnées des angles d'un polygone décrit sur cet axe, il n'y aura qu'à transporter ce polygone alternativement et symétriquement au-dessous et au-dessus de l'axe prolongé des deux côtés à l'infini, de manière que les côtés qui aboutissent aux points de division soient les mêmes, mais placés en sens contraire et dans la même direction; on aura ainsi à chaque instant les valeurs de ξ pour tous les corps qu'on supposera distribués sur la même ligne droite prolongée à l'infini par les coordonnées des angles de ce polygone composé d'une infinité de branches. Ces valeurs seront nulles dans chaque point de division, de sorte que les corps placés dans ces points seront d'eux-mêmes immobiles; et c'est ainsi que le calcul satisfait à la condition que les deux bouts de la corde donnée soient fixes.

Ce que nous venons de démontrer par rapport aux variables ξ a lieu également pour les différentielles $\frac{d\xi}{dt}$; car, en différentiant l'expression de ξ_r par rapport à t, on a une expression de $\frac{d\xi_r}{dt}$ à laquelle on peut appliquer les mêmes raisonnements.

Donc les valeurs de α et de $\dot{\alpha}$, qui représentent celles de ξ et de $\frac{d\xi}{dt}$ au premier instant, et qui sont arbitraires pour tous les corps placés sur l'axe l, seront représentées par une pareille construction dans l'étendue de la corde de longueur indéfinie.

Comme les expressions des deux autres variables η et ζ ne diffèrent de celle de ξ que par les valeurs initiales β, $\dot{\beta}$ et γ, $\dot{\gamma}$, qui sont à la place de α, $\dot{\alpha}$, les mêmes résultats auront lieu aussi par rapport à ces autres variables.

38. On conclura donc, en général, que, si une corde tendue, d'une longueur quelconque, est chargée de corps égaux et placés à distances égales entre eux, et qu'ayant divisé cette corde en plusieurs parties égales, comprises chacune entre deux corps, tous les corps, à l'exception de ceux qui sont dans les points de division, soient ébranlés à la fois, de manière que l'ébranlement soit le même, mais dans un sens opposé, pour ceux qui sont à distances égales de part et d'autre de chaque point de division, les corps placés dans ces points de division demeureront immobiles d'eux-mêmes, et chaque partie de la corde aura le même mouvement que si elle était isolée, et que ses deux extrémités fussent absolument fixes.

Il résulte de là qu'une corde tendue, de la longueur l, fixe par ses deux extrémités et chargée d'un nombre n de corps, étant divisée en ν parties égales, ν étant un diviseur de $n+1$, si l'état initial est tel que les corps placés dans les points de division n'aient reçu aucun ébranlement, et que ceux qui sont en deçà et en delà d'un point de division à distances égales aient reçu des ébranlements égaux, mais en sens contraire, la corde oscillera comme si les points de division étaient fixes et que la corde n'eût que la longueur $\frac{l}{\nu}$.

39. La séparation des variables dans les équations en ξ, η, ζ peut encore avoir lieu sans supposer que les corps soient disposés en ligne droite dans l'état d'équilibre, mais en supposant que leurs distances mutuelles ne varient pas dans le mouvement. Nous avons remarqué dans l'article 14 que ce cas dépend des mêmes formules générales, en y regardant la quantité Φ, et, par conséquent aussi, la quantité F, comme indéterminées; et nous avons vu, dans l'article 22, que l'on a alors l'équation de condition

$$\frac{Da}{Df}D\xi + \frac{Db}{Df}D\eta + \frac{Dc}{Df}D\zeta = 0,$$

laquelle fait disparaître, dans les équations générales de l'article 21, tous les termes multipliés par G.

En n'ayant égard qu'à la pesanteur des corps, et prenant l'axe des abscisses x et a, vertical et dirigé de bas en haut, on aura $\frac{\partial \Pi}{\partial a}$ égale à la force accélératrice de la gravité, que nous désignerons par g, et, de plus, $\frac{\partial \Pi}{\partial b} = 0$, $\frac{\partial \Pi}{\partial c} = 0$; et les équations de l'article cité deviendront

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}Dm - D_{,}\left(F\frac{D\xi}{Df}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}Dm - D_{,}\left(F\frac{D\eta}{Df}\right) = 0,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2}Dm - D_{,}\left(F\frac{D\zeta}{Df}\right) = 0,$$

où les variables sont séparées.

La valeur de F sera (art. 22)

$$F = \sqrt{(g\,\mathrm{S}\,Dm + A)^2 + B^2 + C^2}.$$

Les équations en X, Y, Z deviendront donc (art. 23)

$$kX\,Dm + D_{,}\left(F\frac{DX}{Df}\right) = 0,$$

$$kY\,Dm + D_{,}\left(F\frac{DY}{Df}\right) = 0,$$

$$kZ\,Dm + D_{,}\left(F\frac{DZ}{Df}\right) = 0,$$

qui sont, comme l'on voit, tout à fait semblables entre elles; de sorte qu'on pourra supposer $X = Y = Z$, parce que les constantes arbitraires par lesquelles ces quantités peuvent différer, devant être déterminées par les mêmes conditions, deviendront aussi les mêmes. Ainsi les valeurs ξ, η, ζ, données par les formules générales de l'article 30, ne seront différentes que par les valeurs initiales α, β, γ, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, qui peuvent être quelconques.

Toute la difficulté se réduit donc à trouver l'expression générale de X; mais c'est à quoi l'on ne saurait parvenir par les méthodes connues.

Ce cas est celui d'un fil inextensible chargé de plusieurs poids et fixement arrêté dans ses deux extrémités.

40. Lorsque le fil n'est arrêté que par une de ses extrémités, que nous prendrons pour l'extrémité supérieure, le corps le plus bas devant être libre, il faudra, par l'article 17, que la valeur de Φ ou de F soit nulle à l'extrémité inférieure. Or, en prenant cette extrémité pour l'origine des abscisses, que nous supposons dirigées de bas en haut, et y faisant commencer la somme $\mathrm{S}\,\mathrm{D}m$, la valeur de F y sera nulle, pourvu qu'on ait $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=0$, $\mathrm{C}=0$. On aura ainsi $\mathrm{F}=g\,\mathrm{S}\,\mathrm{D}m$.

Comme on a, dans ce cas,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a}=g,\qquad \frac{\partial \Pi}{\partial b}=0,\qquad \frac{\partial \Pi}{\partial c}=0,$$

les équations de l'article 22 donneront $\mathrm{D}a=\mathrm{D}f$, $\mathrm{D}b=0$, $\mathrm{D}c=0$, c'est-à-dire que les ordonnées b, c seront constantes; de sorte qu'on aura, pour l'état d'équilibre, une ligne droite parallèle à l'axe vertical des abscisses a. Ainsi l'on peut faire $b=0$, $c=0$, en prenant pour l'axe des a la verticale qui passe par le point de suspension du fil.

Ce cas, qui est celui des oscillations très petites d'un fil suspendu à un point fixe et chargé d'un nombre quelconque de poids, est aussi susceptible d'une solution générale lorsque les poids sont tous égaux entre eux et placés à distances égales les uns des autres.

41. Dans ce dernier cas, en nommant n le nombre des corps, M la somme de leurs masses Dm et l la longueur du fil, on a

$$\mathrm{D}m=\frac{\mathrm{M}}{n},\qquad \mathrm{D}f=\mathrm{D}a=\frac{l}{n};$$

et si l'on nomme, de plus, r le nombre des corps, à commencer du plus bas jusqu'à celui auquel répondent les variables ξ, η, ζ, on aura

$$\mathrm{S}\,\mathrm{D}m=(r-1)\,\mathrm{D}m=\frac{(r-1)\mathrm{M}}{n};$$

et, de là, on aura

$$\mathrm{F}=\frac{g(r-1)\mathrm{M}}{n}.$$

L'équation en X de l'article 39, étant multipliée par $\frac{l}{g\mathrm{M}}$, deviendra, en mettant X_r au lieu de X, et observant que $_{,}\mathrm{X}$ devient X_{r-1} et que $\mathrm{X}_{,}$ devient X_{r+1},

$$\frac{lk}{gn}\mathrm{X}_r+\mathrm{D}[(r-1)\,\mathrm{D}\mathrm{X}_{r-1}]=0,$$

savoir, en exécutant les différentiations indiquées par la caractéristique D, suivant la formule de l'article 16,

$$\frac{lk}{gn}\mathrm{X}_r+(\mathrm{X}_{r+1}-\mathrm{X}_r)+(r-1)(\mathrm{X}_{r-1}-2\mathrm{X}_r+\mathrm{X}_{r+1})=0.$$

Cette équation, à cause du coefficient variable r, ne peut pas être traitée comme celles qui donnent les suites récurrentes ordinaires; mais on peut en déduire successivement les valeurs de X_2, X_3, ...

Pour cela, il n'y a qu'à la mettre sous cette forme, où $h=\frac{lk}{gn}$,

$$\mathrm{X}_{r+1}=\frac{2r-h-1}{r}\mathrm{X}_r-\frac{r-1}{r}\mathrm{X}_{r-1}.$$

De là, en faisant successivement $r=1, 2, 3, \ldots$, on aura

$$\begin{aligned}
\mathrm{X}_2&=(1-h)\mathrm{X}_1,\\
\mathrm{X}_3&=\frac{3-h}{2}\mathrm{X}_2-\frac{1}{2}\mathrm{X}_1=\left(1-2h+\frac{h^2}{2}\right)\mathrm{X}_1,\\
\mathrm{X}_4&=\frac{5-h}{3}\mathrm{X}_3-\frac{2}{3}\mathrm{X}_2=\left(1-3h+\frac{3h^2}{2}-\frac{h^3}{2.3}\right)\mathrm{X}_1,\\
\mathrm{X}_5&=\left(1-4h+\frac{6h^2}{2}-\frac{4h^3}{2.3}+\frac{h^4}{2.3.4}\right)\mathrm{X}_1,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite; de sorte qu'on aura, en général,

$$\mathrm{X}_{r+1}=\left[1-rh+\frac{r(r-1)}{4}h^2-\frac{r(r-1)(r-2)}{4.9}h^3+\ldots\right]\mathrm{X}_1 \quad (^1).$$

(1) Le terme général est $(-1)^p\frac{r(r-1)\ldots(r-p+1)}{1^2.2^2.3^2\ldots p^2}h^p\mathrm{X}_1$. (*J. Bertrand.*)

L'extrémité supérieure du fil devant être fixe, on peut supposer qu'elle réponde au corps dont le rang serait $n+1$; ainsi il faudra que l'on ait $X_{n+1}=0$, ce qui donne l'équation suivante, en remettant pour h sa valeur $\frac{lk}{gn}$,

$$1-\frac{lk}{g}+\frac{(n-1)l^2k^2}{4ng^2}-\frac{(n-1)(n-2)l^3k^3}{4\cdot 9n^2g^3}+\ldots=0,$$

laquelle sera, par rapport à k, du degré n, et donnera, par conséquent, les n valeurs de k, que nous désignerons en général par $k^{(\rho)}$.

42. Il n'y aura donc qu'à substituer, dans les formules de l'article 30, l'expression précédente de X_r à la place de X, de Y et de Z, et celle de $k^{(\rho)}$ à la place de k, et ensuite exécuter les sommations indiquées par les signes S et $\sum$. Mais il faut observer que dans le cas présent, où l'on suppose $Db=0$, $Dc=0$ (art. 40), l'équation de condition de l'article 39 donne $D\xi=0$ et, par conséquent, ξ égale à une constante pour tous les corps, mais qui peut être une fonction de t; donc on aura, pour le commencement du mouvement, α et $\dot\alpha$ égales à des constantes; or, le premier corps étant supposé fixe, les valeurs initiales α et $\dot\alpha$ sont nulles pour ce corps; donc elles seront aussi nulles pour tous les autres. Par conséquent, l'expression générale de la variable ξ deviendra nulle. Cela a lieu en négligeant, comme nous l'avons fait, les carrés et les puissances supérieures des variables ξ, η, ζ, supposées très petites. En effet, l'équation $Ds=Df$ de l'article 19, à cause de

$$Ds^2=Dx^2+Dy^2+Dz^2$$

et de

$$Db=0,\qquad Dc=0,$$

donne

$$Da^2=(Da+D\xi)^2+D\eta^2+D\zeta^2,$$

d'où l'on tire

$$D\xi=-\frac{D\eta^2+D\zeta^2}{2Da};$$

de sorte que les variables ξ seront du second ordre par rapport à η et ζ.

Désignons maintenant par Φ_r cette fonction de r,

$$1-(r-1)\frac{lk^{(\rho)}}{gn}+\frac{(r-1)(r-2)}{4}\left(\frac{lk^{(\rho)}}{gn}\right)^2$$
$$-\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{4\cdot 9}\left(\frac{lk^{(\rho)}}{gn}\right)^3+\ldots,$$

et mettons dans l'expression générale de la variable η de l'article 30, à l'imitation de ce que nous avons fait dans l'article 36, η_r au lieu de η, et Φ_r au lieu de Y dans les termes qui sont hors du signe S; mais, dans ceux qui sont sous ce signe, nous changerons r en s, et nous mettrons β_s, $\dot\beta_s$ au lieu de β et $\dot\beta$. On aura ainsi, pour un corps quelconque dont le rang est r en montant,

$$\eta_r=\sum\left[\frac{\Phi_r\,\mathsf{S}(\alpha_s\Phi_s)}{\mathsf{S}(\Phi_s)^2}\cos t\sqrt{k^{(\rho)}}\right]+\sum\left[\frac{\Phi_r\,\mathsf{S}(\dot\alpha_s\Phi_s)}{\mathsf{S}(\Phi_s)^2\sqrt{k^{(\rho)}}}\sin t\sqrt{k^{(\rho)}}\right],$$

où le signe S exprime la somme des termes qui répondent à $s=1, 2, 3, \ldots, n$, et le signe $\sum$ représente la somme des termes qui répondent à $\rho=1, 2, 3, \ldots, n$, en supposant que $k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)}, \ldots, k^{(n)}$ soient les racines de l'équation en $k^{(\rho)}$, représentée par

$$\Phi_{n+1}=0.$$

On aura une expression tout à fait semblable pour la variable ζ_r en changeant simplement β_s, $\dot\beta_s$ en γ_s, $\dot\gamma_s$.

Le problème des oscillations infiniment petites d'un fil chargé d'un nombre quelconque de poids égaux est donc complètement résolu; il ne reste qu'à déterminer les racines de l'équation en $k^{(\rho)}$, ce qui ne paraît pas possible en général.

43. Au reste, quoiqu'on ne puisse pas déterminer ces racines, on peut néanmoins être assuré qu'elles doivent être toutes réelles, positives et inégales; autrement les valeurs de ξ, η, ζ contiendraient des termes qui iraient en augmentant avec le temps, ce qui ne peut être, puisqu'il est évident, par la nature du problème, que les oscillations

du fil doivent toujours être de peu d'étendue, si les valeurs initiales de ξ, η, ζ sont très petites.

Le contraire aurait lieu si l'on supposait la quantité g, qui exprime la gravité, négative, c'est-à-dire agissant en sens opposé; car ce serait le cas où, le point de suspension du fil vertical étant placé à son extrémité inférieure, le fil culbuterait, pour peu qu'il fût déplacé de la situation verticale. En effet, en faisant g négative dans l'équation en k, tous ses termes deviennent positifs, de sorte qu'elle ne peut avoir que des racines imaginaires ou réelles négatives.

On peut aussi trouver ces résultats *a priori*, par les principes établis dans l'article 8, ce qui peut servir à montrer la justesse de ces principes. En effet, si l'on a égard à la condition de l'inextensibilité du fil, laquelle donne (article précédent), en prenant les sommes comptées du corps le plus bas,

$$\xi = \xi_1 - \mathbf{S}\frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da},$$

la valeur de V sera simplement $\mathbf{S}\Pi\, Dm$, et l'on aura

$$\Pi = gx = ga + g\xi.$$

Mais, puisque le corps le plus haut, qui répond à $n+1$, est supposé fixe, la valeur de ξ y devra être nulle; ainsi l'on aura

$$\xi_1 = \left(\mathbf{S}\frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da}\right),$$

en supposant que la somme renfermée entre deux crochets soit la somme totale. Donc on aura

$$\xi = \mathbf{S}'\frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da},$$

où le signe $\mathbf{S}'$ dénote les sommes prises à rebours, à commencer par le corps le plus haut, et qui sont les différences de la somme totale et des sommes partielles dénotées par $\mathbf{S}$, lesquelles doivent commencer au corps le plus bas, où est l'origine des abscisses.

On aura donc ainsi

$$V = g\mathbf{S}a\,Dm + g\mathbf{S}Dm\,\mathbf{S}'\frac{D\eta^2 + D\zeta^2}{2Da},$$

où l'on voit que la partie de V qui contient les secondes dimensions des variables η et ζ, qui sont maintenant indépendantes, est nécessairement toujours positive, et que, par conséquent, les racines de l'équation en k seront toutes réelles, positives et inégales. Ce serait le contraire si l'on donnait à g une valeur négative.

§ IV. — *Sur les vibrations des cordes sonores, regardées comme des cordes tendues, chargées d'une infinité de petits poids infiniment proches l'un de l'autre; et sur la discontinuité des fonctions arbitraires.*

44. La solution générale que nous avons donnée du problème des cordes vibrantes a lieu, quel que soit le nombre n des corps mobiles, et quel que soit aussi leur état initial; par conséquent, elle doit s'appliquer aussi au cas où le nombre n deviendrait infiniment grand, et les intervalles entre les corps diminueraient à l'infini, de manière que la longueur de la corde restât la même : alors le mouvement de chaque corps se trouvera représenté par une série infinie de termes dont la somme sera équivalente à une fonction finie, différente de celle de chacun de ses termes. Ce cas est celui d'une corde sonore uniformément épaisse, et l'on a coutume de le résoudre directement par le Calcul différentiel; cependant il peut être intéressant pour l'Analyse de faire voir comment on peut le déduire de la solution générale, surtout parce que, de cette manière, on sera assuré d'avoir une solution applicable à quelque figure que la corde puisse avoir au commencement de son mouvement.

45. Nous remarquerons d'abord qu'en supposant n infini, la valeur de $\sqrt{k}$ (art. 34) devient $\sqrt{\frac{F}{lM}}\rho\pi$, parce que la dernière limite de $2(n+1)\sin\frac{\rho\pi}{2(n+1)}$ est $\rho\pi$, de sorte que les racines de l'équation en k.

qui étaient toutes incommensurables entre elles, tant que le nombre n des corps mobiles était fini, deviennent toutes commensurables lorsque n est infini, ayant pour commune mesure $\pi\sqrt{\frac{F'}{lM}}$ dans les excursions longitudinales ξ, et $\pi\sqrt{\frac{F}{lM}}$ dans les excursions transversales η et ζ; d'où il suit que la corde reprendra toujours sa première figure par rapport à l'axe, au bout d'un temps égal à $2\sqrt{\frac{lM}{F}}$, quel que puisse être son état initial.

Il est vrai que, le nombre ρ pouvant aussi devenir infini, il y aurait des cas où l'on ne pourrait plus supposer $2(n+1)\sin\frac{\rho\pi}{2(n+1)} = \rho\pi$; mais, comme cela ne peut avoir lieu qu'après un nombre infini de termes dans les séries infinies marquées par $\sum$, il s'ensuit de la théorie connue de ces séries que ces cas particuliers ne sont point une exception au résultat général.

On peut d'ailleurs s'en convaincre directement; car, dans le cas de n infini, les différences finies marquées par D deviennent infiniment petites; ainsi l'équation en X de l'article 33 devient, en changeant D en d, et mettant pour $n+1$ sa valeur $\frac{l}{da}$,

$$\frac{Mk}{lF'}X + \frac{d^2X}{da^2} = 0,$$

laquelle, étant intégrée, donne

$$X = H\sin\left(a\sqrt{\frac{Mk}{lF'}} + \varepsilon\right).$$

Il faut que X soit nul lorsque $a = 0$ et lorsque $a = l$, parce que les deux extrémités de la corde sont fixes; la première condition donne $\varepsilon = 0$, et la seconde donne $l\sqrt{\frac{Mk}{lF'}} = \rho\pi$, d'où l'on tire $\sqrt{k} = \rho\pi\sqrt{\frac{F'}{lM}}$, comme plus haut.

On n'a donc pas besoin, dans ce cas, pour que la corde revienne toujours à son premier état, de supposer qu'elle ne fasse que des oscillations simples et semblables à celles d'un pendule, comme dans l'article 35; car, quel que soit son état initial, on est assuré que ses vibrations seront toujours isochrones entre elles, et synchrones à celles d'un pendule simple de longueur égale à $\frac{g}{k}$; mais la loi de ces vibrations sera différente de celle des vibrations des pendules, et dépendra de l'état initial de la corde.

Pour connaître cette loi, il faut voir ce que deviennent les expressions générales de ξ, η, ζ dans le cas de n infini; c'est ce que nous allons examiner.

46. Faisons, dans la formule générale de l'article 36, les substitutions de $\frac{\rho\pi}{n+1}$ à la place de φ et de $\frac{\rho\pi}{2(n+1)}$ à la place de $\sin\frac{\varphi}{2}$, en supposant n infini; et au lieu des exposants ou indices r et s qui dénotent le rang des corps auxquels appartiennent les variables ξ et α, employons, ce qui est plus simple, les parties mêmes de l'axe ou les abscisses qui répondent à ces corps, en dénotant par x l'abscisse relative à ξ et par a l'abscisse relative à α et à $\dot{\alpha}$. Comme la longueur totale de la corde est supposée égale à l, on aura

$$\frac{r}{n+1} = \frac{x}{l}, \qquad \frac{s}{n+1} = \frac{a}{l}, \qquad n+1 = \frac{l}{Da};$$

et la formule dont il s'agit donnera cette expression générale des excursions longitudinales ξ

$$\xi = 2\sum \sin\frac{\rho\pi x}{l}\left[A^{(\rho)}\cos(\rho\pi h't) + \dot{A}^{(\rho)}\frac{\sin(\rho\pi h't)}{\rho\pi h'}\right],$$

en faisant

$$A^{(\rho)} = S\left(\sin\frac{\rho\pi a}{l}\,\frac{\alpha Da}{l}\right),$$

$$\dot{A}^{(\rho)} = S\left(\sin\frac{\rho\pi a}{l}\,\frac{\dot{\alpha} Da}{l}\right).$$

Le signe $\sum$ dénote ici une suite infinie de termes qui répondent à $\rho = 1, 2, 3, \ldots$, à l'infini; et le signe S dénote d'autres suites infinies de termes qui répondent à toutes les valeurs de a, Da, $2Da$, $3Da$, ..., à l'infini, à cause de Da infiniment petit.

On aura de pareilles expressions pour les excursions transversales η et ζ en changeant h' en h et α, $\dot{\alpha}$ en β, $\dot{\beta}$ et en γ, $\dot{\gamma}$.

47. Daniel Bernoulli, en généralisant la solution du problème des cordes vibrantes donnée par Taylor, était parvenu à une formule semblable à la précédente, mais dans laquelle les coefficients $\dot{A}^{(\rho)}$ étaient nuls et les coefficients $A^{(\rho)}$ dénotaient simplement des constantes arbitraires dépendantes de la figure initiale de la corde (*Mémoires de Berlin*, 1753); et il avait cru pouvoir expliquer, par les différents termes de sa formule, les sons harmoniques qu'une corde sonore fait entendre, avec le son principal. Notre formule, dans laquelle ces coefficients sont exprimés par les valeurs initiales α, $\dot{\alpha}$, nous met en état d'apprécier cette explication, qui a été adoptée par plusieurs auteurs après lui.

En effet, il est facile de voir que le son principal de la corde sera donné par le premier ou les deux premiers termes de la série, qui répondent à $\rho = 1$, et que les sons harmoniques successifs, c'est-à-dire l'octave, la douzième, la double octave, la dix-septième, etc., seront donnés par les termes suivants, qui répondent à $\rho = 2, 3, 4, 5, \ldots$. Donc, pour que le son principal domine parmi tous les autres, et qu'il n'y ait que les premiers des harmoniques qui se fassent entendre en même temps, il faut supposer que les coefficients $A^{(1)}$, $\dot{A}^{(1)}$ soient beaucoup plus grands que tous les autres pris ensemble, et que les coefficients suivants :

$$A^{(2)},\quad A^{(3)},\quad A^{(4)},\quad \ldots;\quad \dot{A}^{(2)},\quad \dot{A}^{(3)},\quad \dot{A}^{(4)},\quad \ldots,$$

forment des séries extrêmement convergentes. Mais, par la manière dont ces coefficients dépendent des valeurs initiales α et $\dot{\alpha}$, on voit que cette supposition est inadmissible, en regardant l'état initial de la corde comme arbitraire; on voit même que, dans la plupart des cas, ces coefficients formeront des séries divergentes, ce qui n'empêchera pas que la corde ne fasse des vibrations isochrones ou d'égale durée, seule condition nécessaire pour la formation d'un ton.

48. Quoique les formules de l'article 46 donnent rigoureusement le mouvement de la corde au bout d'un temps quelconque t, les séries infinies qui entrent dans ces formules empêchent néanmoins qu'elles ne représentent ce mouvement d'une manière nette et sensible; mais, en envisageant sous un autre point de vue la formule générale de l'article 36, on peut en tirer une construction simple et uniforme pour déterminer l'état de la corde à chaque instant, quel que puisse être son état initial.

Reprenons cette formule, et mettons-la sous la forme suivante, ce qui est permis à cause de l'indépendance des signes sommatoires S et $\sum$:

$$\begin{aligned}\xi_r = &+ \mathrm{S}\,\alpha_s \sum \left\{ \frac{2\sin r\varphi}{n+1} \sin s\varphi \cos\left[2(n+1)h't\sin\frac{\varphi}{2}\right]\right\}\\ &+ \mathrm{S}\,\dot{\alpha}_s \sum \left\{ \frac{2\sin r\varphi}{n+1} \sin s\varphi \, \frac{\sin\left[2(n+1)h't\sin\frac{\varphi}{2}\right]}{(n+1)h'\sin\frac{\varphi}{2}}\right\}.\end{aligned}$$

Nous tirerons d'abord de cette formule une conséquence qui nous sera fort utile. Comme on a supposé que α est la valeur initiale de ξ (art. 29), il faut qu'en faisant $t = 0$ dans l'expression précédent de ξ_r, elle se réduise à α_r, et qu'on ait, par conséquent, cette équation identique

$$\alpha_r = \mathrm{S}\,\alpha_s \sum \frac{2\sin r\varphi}{n+1} \sin s\varphi.$$

Il est évident que le second membre de cette équation ne peut se réduire à α_r, à moins que l'on n'ait, en général,

$$\sum \frac{2\sin r\varphi}{n+1} \sin s\varphi = 0,$$

tant que s est différent de r; et que, lorsque $s = r$, on ait

$$\sum \frac{2\sin r\varphi}{n+1} \sin r\varphi = 1,$$

φ étant égal à $\frac{n+1}{\rho\pi}$, et le signe $\sum$ étant rapporté aux valeurs successives $1, 2, 3, \ldots, n$ de ρ : ce qui donne une série formée des produits de sinus d'angles multiples de $\frac{r\pi}{n+1}$ et $\frac{s\pi}{n+1}$, dont la somme devra être toujours nulle dans le premier cas, et égale à $\frac{n+1}{2}$ dans le second. C'est aussi ce qu'on peut démontrer directement par les formules connues, pour la sommation de ces sortes de suites.

Dans ces formules, r et s sont supposés des nombres quelconques entiers compris entre 0 et $n+1$; mais, à cause de $\varphi = \frac{\rho\pi}{n+1}$, ρ étant aussi un nombre entier, si l'on met $2\lambda(n+1) \pm r$ à la place de r, λ étant un nombre quelconque entier positif ou négatif, on aura

$$\sin[2\lambda(n+1) \pm r]\varphi = \pm \sin r\varphi;$$

par conséquent, on aura, en général,

$$\sum \left\{ \frac{2\sin[2\lambda(n+1) \pm r]\varphi}{n+1} \sin s\varphi \right\} = \pm 1 \quad \text{ou} \quad = 0,$$

selon que s sera égal à r ou non.

La formule $2\lambda(n+1) \pm r$ peut représenter tous les nombres entiers positifs ou négatifs, comme nous l'avons vu dans l'article 37; ainsi, ayant un nombre quelconque entier N, on peut faire $N = 2\lambda(n+1) \pm r$, ce qui donnera

$$r = \pm [N - 2\lambda(n+1)],$$

et l'on aura, en général, quel que soit N,

$$\sum \frac{\sin N\varphi \sin s\varphi}{n+1} = \pm \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad = 0,$$

selon que s sera égal à $\pm [N - 2\lambda(n+1)]$ ou non, s étant un nombre entier entre 0 et $n+1$.

49. Cela posé, comme l'expression de ξ_r est composée de deux parties, dont la première contient les valeurs initiales α de la variable ξ, et dont la seconde contient les valeurs initiales $\dot{\alpha}$ des différentielles $\frac{d\xi}{dt}$, nous considérerons ces deux parties séparément, et nous désignerons

la première par ξ'_r et la seconde par ξ''_r, de manière que l'on ait $\xi_r = \xi'_r + \xi''_r$.

En supposant n infini, l'angle $\varphi = \frac{\rho\pi}{n+1}$ devient infiniment petit, et $\sin\frac{\varphi}{2}$ se réduit à $\frac{\varphi}{2}$ (art. 46). Faisant cette substitution dans l'expression de ξ'_r, on aura (art. 48)

$$\xi'_r = \mathbf{S}\alpha_s \sum \frac{2}{n+1} \sin r\varphi \sin s\varphi \cos(n+1)h't\varphi;$$

et développant le produit $\sin r\varphi \cos(n+1)h't\varphi$,

$$\xi'_r = \mathbf{S}\alpha_s \sum \left\{ \frac{\sin[r+(n+1)h't]\varphi}{n+1} \sin s\varphi \right\} + \mathbf{S}\alpha_s \sum \left\{ \frac{\sin[r-(n+1)h't]\varphi}{n+1} \sin s\varphi \right\}.$$

Comme n est supposé un nombre infiniment grand, on pourra toujours regarder comme un nombre entier le nombre $(n+1)h't$, quel que puisse être le nombre exprimé par $h't$.

Ainsi, en faisant, dans la dernière formule de l'article précédent,

$$N = r + (n+1)h't,$$

on aura

$$\mathbf{S}\alpha_s \sum \left\{ \frac{\sin[r+(n+1)h't]\varphi}{n+1} \sin s\varphi \right\} = \pm \tfrac{1}{2}\alpha_s,$$

où

$$s = \pm [r + (n+1)h't - 2\lambda(n+1)];$$

et faisant $N = r - (n+1)h't$, on aura pareillement

$$\mathbf{S}\alpha_{s'} \sum \left\{ \frac{\sin[r-(n+1)h't]\varphi}{n+1} \sin s\varphi \right\} = \pm \tfrac{1}{2}\alpha_{s'},$$

où

$$s' = \pm [r - (n+1)h't - 2\lambda'(n+1)],$$

λ et λ' étant des nombres entiers quelconques, ou zéro.

Donc, réunissant ces deux valeurs, on aura simplement

$$\xi_r = \tfrac{1}{2}(\pm \alpha_s \pm \alpha_{s'}),$$

où les signes ambigus de α_s et de $\alpha_{s'}$ répondent à ceux des valeurs de s et de s'.

50. Mais, à la place des exposants ou indices r et s qui dénotent le rang des corps auxquels appartiennent les variables ξ et α, il est plus commode d'employer les parties mêmes de la corde comprises entre la première extrémité fixe et ces mêmes corps.

Désignons, comme dans l'article 46, par x la partie de l'axe ou l'abscisse qui répond à ξ, et par a celle qui répond à α; la longueur de la corde étant l, on aura

$$\frac{r}{n+1} = \frac{x}{l}, \qquad \frac{s}{n+1} = \frac{a}{l};$$

et de même

$$\frac{s'}{n+1} = \frac{a'}{l},$$

ce qui donne

$$r = \frac{(n+1)x}{l}, \qquad s = \frac{(n+1)a}{l}, \qquad s' = \frac{(n+1)a'}{l};$$

et à la place de ξ'_r, α_s, $\alpha_{s'}$, on pourra écrire simplement ξ'_x, α_a, $\alpha_{a'}$.

Substituant ces valeurs de r, s, s' dans les formules de l'article précédent, multipliant par l et divisant par $n+1$, on aura

$$\begin{aligned} a &= \pm(x + lh't - 2\lambda l),\\ a' &= \pm(x - lh't - 2\lambda' l),\\ \xi'_x &= \tfrac{1}{2}(\pm\alpha_a \pm \alpha_{a'}), \end{aligned}$$

les signes ambigus de α_a et $\alpha_{a'}$ répondant à ceux de a et a'; et l'on déterminera ces signes, ainsi que les valeurs de a et de a', par la condition que ces valeurs soient positives et moindres que l.

51. Représentons par A et A' les valeurs de $\pm\alpha_a$ et $\pm\alpha_{a'}$, en sorte que l'on ait, en général,

$$\xi'_x = \frac{A + A'}{2}.$$

Donc :

1° Si $x + lh't$ est entre 0 et l, on prendra $a = x + lh't$ et $A = +\alpha_a$;

2° Si $x + lh't$ est entre l et $2l$, on prendra $a = -(x + lh't - 2l)$ et $A = -\alpha_a$;

3° Si $x + lh't$ est entre $2l$ et $3l$, on prendra $a = x + lh't - 2l$ et $A = +\alpha_a$. Et ainsi de suite.

De même :

1° Si $x - lh't$ est entre l et 0, on prendra $a' = x - lh't$ et $A' = \alpha_a$;

2° Si $x - lh't$ est entre 0 et $-l$, on prendra $a' = -(x - lh't)$ et $A' = -\alpha_{a'}$;

3° Si $x - lh't$ est entre $-l$ et $-2l$, on prendra $a' = x - lh't + 2l$ et $A' = \alpha_{a'}$. Et ainsi de suite.

On voit que ces différents cas se réduisent à déterminer les abscisses a ou a', en ajoutant ou en retranchant de l'abscisse x la ligne $lh't$, de manière que, lorsqu'elle passera l'une ou l'autre extrémité de l'axe l, elle soit repliée en arrière et comme réfléchie par des obstacles placés à ces deux extrémités, et à prendre l'ordonnée correspondante α_a ou $\alpha_{a'}$ positive, si le nombre des réflexions est pair, ou négative, si ce nombre est impair.

52. Mais il est encore plus simple de continuer la courbe des α sur le même axe l prolongé des deux côtés, de manière qu'on ait directement les ordonnées α_a et $\alpha_{a'}$ qui répondent aux abscisses $x + lh't$ et $x - lh't$.

Pour cela, ayant décrit sur l'axe l le polygone d'une infinité de côtés ou la courbe dont les coordonnées sont α_x, pour une abscisse quelconque x, et qui sera donnée par les valeurs initiales des excursions ξ_x de tous les points de la corde, il n'y aura qu'à transporter cette même courbe alternativement au-dessous et au-dessus du même axe prolongé indéfiniment des deux côtés, de manière qu'il en résulte une courbe continue formée de branches égales situées symétriquement autour de l'axe et se joignant par les mêmes extrémités, dans laquelle les ordonnées prises à distances égales, de part et d'autre de chacune des deux extrémités de l'axe l, soient toujours égales entre elles et de signe contraire.

En prenant dans cette courbe les ordonnées qui répondent aux abscisses $x + lh't$ et $x - lh't$, on aura les valeurs de A et de A', et la variable ξ'_x sera représentée, au bout d'un temps quelconque t, par la formule

$$\xi'_x = \tfrac{1}{2}(\alpha_{x+lh't} + \alpha_{x-lh't}).$$

On aurait pu déduire tout de suite cette continuation de la courbe qui représente les valeurs de α, de ce que nous avons démontré en général dans l'article 37, en supposant que la corde, au lieu d'être terminée aux deux points fixes, s'étende de part et d'autre à l'infini; le polygone que nous avons imaginé dans cet article deviendra ici une courbe continue, laquelle, étant appliquée au premier instant du mouvement, sera la courbe des valeurs de α prolongée à l'infini.

53. Considérons maintenant la seconde partie de ξ_r, que nous désignons par ξ''_r, et qui est représentée (art. 46) par la formule

$$\xi''_r = \mathrm{S}\dot{\alpha}_s \sum \left\{ \frac{2\sin r\varphi}{n+1} \sin s\varphi \, \frac{\sin\left[2(n+1)h't\sin\frac{\varphi}{2}\right]}{2(n+1)h'\sin\frac{\varphi}{2}} \right\}.$$

Il faut commencer par la délivrer du dénominateur $\sin\frac{\varphi}{2}$, pour la rendre semblable à celle de ξ'_r et susceptible des mêmes réductions.

Pour cela, je prends la différence $\mathrm{D}\xi''_r$, et comme l'exposant r n'entre que dans $\sin r\varphi$, il suffira d'affecter ce sinus de la caractéristique D.

Or, par les théorèmes connus, on a

$$\mathrm{D}\sin r\varphi = \sin(r+1)\varphi - \sin r\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos(r+\tfrac{1}{2})\varphi.$$

Substituant donc cette valeur dans l'expression de $\mathrm{D}\xi''_r$, on aura

$$\mathrm{D}\xi''_r = \frac{1}{(n+1)h'} \mathrm{S}\dot{\alpha}_s \sum \left\{ \frac{2\cos(r+\frac{1}{2})\varphi}{(n+1)} \sin s\varphi \sin\left[2(n+1)h't\sin\frac{\varphi}{2}\right] \right\}.$$

Faisant, pour le cas de n infini, $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\varphi}{2}$, et développant le produit $\cos(r+\frac{1}{2})\varphi\sin(n+1)h't\varphi$, on aura

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\xi''_r = &+ \frac{1}{(n+1)h'} \mathrm{S}\dot{\alpha}_s \sum \frac{\sin[r+(n+1)h't+\frac{1}{2}]\varphi}{n+1} \sin s\varphi \\ &- \frac{1}{(n+1)h'} \mathrm{S}\dot{\alpha}_s \sum \frac{\sin[r-(n+1)h't+\frac{1}{2}]\varphi}{n+1} \sin s\varphi.\end{aligned}$$

Cette expression de $\mathrm{D}\xi''_r$ est composée de deux parties semblables à celles de ξ'_r (art. 49); on peut donc y appliquer les mêmes raisonnements et la ramener à une construction semblable.

Ayant donc tracé sur l'axe l le polygone d'une infinité de côtés ou la courbe dont les ordonnées pour chaque abscisse x soient $\dot{\alpha}_x$, et qui sera donnée par les vitesses initiales $\dot{\alpha}$, on la transportera alternativement au-dessous et au-dessus du même axe prolongé indéfiniment des deux côtés, de manière que l'on ait une courbe continue semblable à celle de l'article précédent. Alors, en mettant $\frac{l}{\mathrm{D}a}$ ou $\frac{l}{\mathrm{D}x}$ à la place de $n+1$, et négligeant comme nul le terme $\frac{1}{2(n+1)}$ vis-à-vis de x, on trouvera

$$\mathrm{D}\xi''_x = \frac{\mathrm{D}x}{2lh'}(\dot{\alpha}_{x+lh't} - \dot{\alpha}_{x-lh't});$$

et passant des différences aux sommes,

$$\xi''_x = \frac{1}{2lh'} \mathrm{S}(\dot{\alpha}_{x+lh't} - \dot{\alpha}_{x-lh't})\,\mathrm{D}x.$$

54. Ces sommes ou ces intégrales représentent, comme l'on voit, des aires de la courbe dont les coordonnées sont $\dot{\alpha}$; et il faut que ces aires ne commencent qu'aux points où $x = 0$ et où les abscisses sont $lh't$ et $-lh't$; mais il est plus commode de les faire commencer à l'origine commune des abscisses, qui est l'extrémité antérieure de l'axe l. Pour cela, il faudra retrancher de l'aire qui commence à ce point, et qui répond à l'abscisse $x + lh't$, l'aire qui répond à l'abscisse $lh't$, pour que l'aire restante ne commence qu'au point où $x = 0$; et quant à

l'aire qui répondra à l'abscisse $x - lh't$, il faudra y ajouter l'aire relative à $-lh't$, pour en rapporter le commencement au même point de l'origine des abscisses.

Dénotons en général par $(\int \dot{\alpha}\,dx)_x$ toute aire qui commence à cette origine et qui répond à une abscisse quelconque x; d'après ce que nous venons de dire, on aura, dans l'expression de ξ''_x,

$$\mathrm{S}\dot{\alpha}_{x+lh't}\,\mathrm{D}x = (\int \dot{\alpha}\,dx)_{x+lh't} - (\int \dot{\alpha}\,dx)_{lh't},$$

$$\mathrm{S}\dot{\alpha}_{x-lh't}\,\mathrm{D}x = (\int \dot{\alpha}\,dx)_{x-lh't} + (\int \dot{\alpha}\,dx)_{-lh't}.$$

On substituera donc ces valeurs, et l'on remarquera qu'on a, en général,

$$(\int \dot{\alpha}\,dx)_{lh't} + (\int \dot{\alpha}\,dx)_{-lh't} = 0,$$

puisque, par la nature de la courbe des α, les ordonnées qui répondent à des abscisses égales, mais de signe différent, sont aussi égales et de signe différent; de sorte qu'on a constamment $\dot{\alpha}_{lh't} + \dot{\alpha}_{-lh't} = 0$.

Donc on aura simplement (article précédent)

$$\xi''_x = \frac{1}{2lh'}[(\int \dot{\alpha}\,dx)_{x+lh't} - (\int \dot{\alpha}\,dx)_{x-lh't}].$$

55. Donc enfin, réunissant les valeurs de ξ'_x et de ξ''_x, on aura cette expression générale de ξ_x, au bout d'un temps quelconque t,

$$\xi_x = \tfrac{1}{2}(\alpha_{x+lh't} + \alpha_{x-lh't}) + \frac{1}{2lh'}[(\int \dot{\alpha}\,dx)_{x+lh't} - (\int \dot{\alpha}\,dx)_{x-lh't}].$$

On aura des expressions semblables pour les variables η_x, ζ_x, en changeant seulement h' en h et α, $\dot{\alpha}$ en β, $\dot{\beta}$ et γ, $\dot{\gamma}$, et en supposant qu'on ait tracé de la même manière les courbes correspondantes aux valeurs initiales β, $\dot{\beta}$ et γ, $\dot{\gamma}$.

Ayant ainsi les excursions longitudinales ξ_x et les excursions latérales η_x, ζ_x de chaque point de la corde qui répond à l'abscisse x prise dans l'axe, on connaîtra l'état de la corde au bout d'un temps quelconque t écoulé depuis le commencement du mouvement, et comme

les valeurs initiales α, β, γ, ainsi que $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, $\dot{\gamma}$, sont absolument arbitraires, on voit que rien ne pourra limiter cette solution, tant que les courbes formées d'après ces valeurs auront une courbe continue et ne formeront point d'angles finis, ce qui produirait des sauts dans les expressions des vitesses et des forces accélératrices.

On a supposé (art. 35) $h = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{l\mathrm{M}}}$, $h' = \sqrt{\frac{\mathrm{F}'}{l\mathrm{M}}}$, l étant la longueur de la corde et M la masse de tous les poids dont elle est chargée (art. 33); ainsi M sera la masse ou le poids de toute la corde, qui est supposée uniformément épaisse; de sorte que, si l'on nomme P sa pesanteur spécifique, qui dépend de la densité et de la grosseur, on aura $\mathrm{M} = l\mathrm{P}$; par conséquent, on aura

$$h = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{P}}}, \qquad h' = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{P}}}.$$

A l'égard des quantités F et F′, nous avons vu que ce sont deux constantes, dont l'une, F, exprime la tension de la corde et est, par conséquent, proportionnelle au poids qui la tend; mais F′ dépend de la loi de cette tension relativement à l'extension de la corde (art. 32).

56. Pour peu qu'on examine la nature des courbes qui représentent les valeurs de α et $\dot{\alpha}$, il est facile de voir que les ordonnées éloignées entre elles de l'intervalle $2l$ seront toujours égales et de même signe, et que les aires qui se termineront à ces ordonnées seront aussi égales entre elles, parce que toute aire qui répond à un intervalle $2l$, pris dans un endroit quelconque de l'axe prolongé à l'infini, est toujours nulle, étant composée de deux parties égales entre elles, mais de signe contraire.

Il suit de là que la valeur de ξ_x demeurera la même si l'on augmente le temps t de la quantité $\frac{2}{h'}$ ou d'un multiple quelconque de cette quantité; donc les excursions longitudinales de la corde reviendront les mêmes au bout d'un intervalle de temps égal à $\frac{2}{h'}$ ou $2l\sqrt{\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{F}'}}$; c'est la durée des vibrations longitudinales.

Il en sera de même des valeurs de η_x et de ζ_x, en changeant h' en h, c'est-à-dire F' en F; ainsi la durée des vibrations transversales sera $2l\sqrt{\frac{P}{F}}$.

Tous les auteurs qui ont traité jusqu'à présent des vibrations des cordes sonores n'ont considéré que les vibrations transversales, et ils ont trouvé pour leur durée la même formule que nous venons de donner.

A l'égard des vibrations longitudinales, M. Chladni est le seul, que je sache, qui en ait fait mention dans son intéressant *Traité d'Acoustique*, § 43; il donne le moyen de les produire sur une corde de violon, et il remarque que le ton qu'elles rendent n'est pas le même que celui des oscillations transversales, d'où il suit que F' est différent de F; par conséquent, dans l'hypothèse très vraisemblable que la force élastique par laquelle chaque élément de la corde résiste à être allongé, ou tend à se raccourcir, soit proportionnelle à la puissance m de cet élément, c'est-à-dire qu'on ait $\Phi = K(Ds)^m$ (art. 14), il faudra que m soit différent de l'unité (art. 32); et si, comme M. Chladni paraît l'insinuer, le ton longitudinal est toujours plus élevé que le transversal, il faudra que $F' > F$ et, par conséquent, $m > 1$.

57. Nous avons vu (art. 36) qu'une corde tendue, de la longueur l et chargée de n corps, peut se mouvoir comme si elle n'avait qu'une longueur $\frac{l}{\nu}$, ν étant un diviseur de $n+1$. Lorsque n est un nombre infini, ν peut être un nombre entier quelconque; ainsi une corde sonore de la longueur l pourra osciller comme une corde dont la longueur serait $\frac{\nu}{l}$, c'est-à-dire une partie aliquote de l, et la durée de ses oscillations se réduira alors à $\frac{2l}{\nu}\sqrt{\frac{P}{F'}}$, pour les oscillations longitudinales, et à $\frac{2l}{\nu}\sqrt{\frac{P}{F}}$, pour les oscillations transversales.

En effet, si les valeurs initiales et arbitraires α et $\dot{\alpha}$ sont telles, que les courbes ou les lieux de ces valeurs sur l'axe l coupent cet axe en deux ou en ν parties égales, et que les branches qui répondent à ces parties soient les mêmes, mais situées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe, de manière qu'à distances égales de part et d'autre de chacun de ces points d'intersection les ordonnées soient égales et de signe contraire; ces courbes, étant ensuite prolongées à l'infini, suivant la construction de l'article 49, auront la même forme que si elles provenaient d'une corde dont la longueur ne serait que $\frac{l}{\nu}$, et l'expression générale de ξ_x (art. 52) fait voir que les valeurs de ξ qui répondent aux points d'intersection sont toujours nulles; de sorte que la corde, dans ses oscillations longitudinales, se partagera d'elle-même en autant de parties égales, qui oscilleront comme si leurs extrémités étaient fixes.

Il en sera de même par rapport aux oscillations transversales représentées par les variables η et ζ.

58. Comme le ton que donne une corde sonore ne dépend que de la durée de ses oscillations isochrones, laquelle, pour une même corde tendue, est proportionnelle à sa longueur, il s'ensuit qu'une corde, en se partageant ainsi d'elle-même en parties aliquotes, rendra des tons qui seront au ton principal, dans lequel l'oscillation est entière, comme les fractions qui expriment ces parties sont à l'unité. Ainsi, si la corde se partage en deux, trois, quatre, ... parties égales, ces tons seront exprimés par les fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, et seront, par conséquent, à l'octave, à la douzième, à la double octave, à la dix-septième, ... du ton fondamental.

On appelle ces tons qu'une même corde peut donner d'elle-même *tons harmoniques*, et l'on sait qu'on peut les produire à volonté en touchant légèrement la corde pendant sa vibration, dans un des points de division qu'on nomme *nœuds de vibration* d'après Sauveur, qui a expliqué le premier, par ces nœuds, les sons harmoniques de la trompette marine et des autres instruments, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1701. Wallis les avait déjà observés dans les cordes qui sont à l'octave, à la douzième, à la double octave, ... au-dessous d'une corde qu'on fait résonner, et qui frémissent en se divisant naturellement en deux, trois, quatre, ... parties égales, dont chacune donnerait le même ton que la corde qu'on fait résonner. (*Voir* le Chapitre 107 de son *Algèbre*.)

59. La théorie et l'expérience sont bien d'accord sur la production des sons harmoniques; mais il n'est pas aussi facile de rendre raison de ce qu'on appelle, d'après Rameau, qui en a fait la base de son Système, la *résonance du corps sonore*, et qui consiste dans la réunion des sons harmoniques avec le son principal de toute corde qu'on fait résonner d'une manière quelconque.

Si ces sons harmoniques sont, en effet, produits par la même corde, en même temps que le son principal, il faut supposer que la corde fait à la fois des vibrations entières et des vibrations partielles, et que ses vibrations effectives sont composées de ces différentes vibrations, comme tout mouvement peut être composé ou regardé comme composé de plusieurs autres mouvements.

Nous avons déjà vu plus haut (art. 47) qu'on ne peut expliquer d'une manière plausible la coexistence des sons harmoniques par la formule de Daniel Bernoulli; on peut ajouter que les séries qui pourraient donner ces différents sons disparaissent de la formule lorsqu'on suppose le nombre des corps infini, et qu'il en résulte, pour chaque point de la corde, une loi d'isochronisme simple et uniforme qui dépend immédiatement et simplement de l'état initial, comme nous venons de le démontrer.

Au reste, si l'on voulait à toute force expliquer la résonance multiple des cordes par les vibrations composées, il faudrait regarder la figure initiale, par exemple, comme formée de différentes courbes superposées l'une à l'autre, de manière que l'une serve d'axe à la suivante, et dont la première ne forme qu'une branche dans toute l'étendue de la corde; la seconde forme deux branches égales et placées symétriquement, qui divisent les axes en deux parties égales; la

troisième forme trois branches égales qui divisent l'axe en trois parties égales, et ainsi de suite.

Alors les vibrations de la corde pourront être regardées comme composées de vibrations entières dans toute la longueur de la corde, et de vibrations qui ne répondent qu'à la moitié de la corde, au tiers, au quart, ... Mais cette composition de courbes et de vibrations n'étant qu'hypothétique, les conséquences qu'on pourrait en déduire, relativement à la coexistence des sons harmoniques, seraient tout à fait précaires.

60. Revenons à la formule générale trouvée dans l'article 55. Comme les quantités $\alpha_{x+lh't}$ et $\alpha_{x-lh't}$ sont les coordonnées d'une courbe donnée, qui répondent aux abscisses $x+lh't$ et $x-lh't$, on peut les représenter par des fonctions de ces abscisses de la même forme. Ainsi, en désignant par la caractéristique F une fonction indéterminée, on aura

$$\alpha_{x+lh't} = \mathrm{F}(x+lh't), \qquad \alpha_{x-lh't} = \mathrm{F}(x-lh't).$$

Pareillement, en prenant une autre fonction désignée par la caractéristique f, on pourra faire

$$\left(\int \dot{\alpha}\, dx\right)_{x+lh't} = f(x+lh't), \qquad \left(\int \dot{\alpha}\, dx\right)_{x-lh't} = f(x-lh't).$$

Ainsi l'expression de ξ_x (art. 55) pourra se mettre sous cette forme

$$\xi_x = \frac{\mathrm{F}(x+lh't)+\mathrm{F}(x-lh't)}{2} + \frac{f(x+lh't)-f(x-lh't)}{2lh'},$$

dans lesquelles les fonctions marquées par les caractéristiques F et f sont arbitraires, puisqu'elles dépendent de l'état initial de la corde.

On peut même réduire cette expression à une forme plus simple, en observant que $\frac{\mathrm{F}(x+lh't)}{2} + \frac{f(x+lh't)}{2lh'}$ ne représente proprement qu'une fonction de $x+lh't$ qu'on peut marquer par la caractéristique Φ, et que $\frac{\mathrm{F}(x-lh't)}{2} - \frac{f(x-lh't)}{2lh'}$ ne représente aussi qu'une seule fonction de $x-lh't$, mais différente de la précédente, et qu'on peut marquer par une autre caractéristique Ψ.

De cette manière, l'expression générale de ξ deviendra simplement

$$\xi = \Phi(x + lh't) + \Psi(x - lh't).$$

61. On peut parvenir directement à cette expression par l'équation différentielle qui détermine la variable ξ (art. 31). Cette équation, en faisant $\frac{\partial \Pi}{\partial a} = 0$ et F′ constant, comme dans l'article 32, et changeant la caractéristique D des différences finies dans la caractéristique d des différences infiniment petites, devient

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dm - F' d\left(\frac{\partial \xi}{\partial f}\right) = 0.$$

Si maintenant on fait $df = dx$, $dm = \frac{M}{l} dx$ et $h' = \sqrt{\frac{F'}{lM}}$, cette équation devient

$$\frac{\partial^2 \xi}{dt^2} - l^2 h'^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0,$$

laquelle est aux différences partielles du second ordre, entre les trois variables ξ, x et t, et qui a pour intégrale complète

$$\xi = \Phi(x + lh't) + \Psi(x - lh't),$$

les signes Φ et Ψ dénotant deux fonctions arbitraires comme ci-dessus.

Ces fonctions doivent être déterminées par l'état initial de la corde et par les conditions que ses deux bouts soient fixes. Si on les décompose en deux autres fonctions marquées par les signes F et f, et telles que $\Phi = \frac{F}{2} + \frac{f}{2lh'}$ et $\Psi = \frac{F}{2} - \frac{f}{2lh'}$, de manière que l'on ait

$$\xi = \frac{F(x + lh't) + F(x - lh't)}{2} + \frac{f(x + lh't) - f(x - lh't)}{2lh'},$$

comme nous l'avons déduit de notre construction, la première condition donnera, en faisant $t = 0$,

$$\xi = F(x) = \alpha \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} = f'(x) = \dot{\alpha};$$

d'où l'on tire

$$f(x) = \int \dot{\alpha}\, dx;$$

ainsi on a tout de suite les valeurs des fonctions $F(x)$ et $f(x)$ dans toute l'étendue l de la corde, par le moyen des valeurs initiales α et $\dot{\alpha}$.

Les conditions de l'immobilité des extrémités de la corde donnent $\xi = 0$, lorsque $x = 0$ et lorsque $x = l$, quelle que soit la valeur de t. En assujettissant séparément, ce qui est permis, à ces deux conditions, les deux fonctions F et f, on a, pour la première,

$$F(-lh't) = -F(lh't), \qquad F(l + lh't) = -F(l - lh't),$$

et, pour la seconde,

$$f(-lh't) = f(lh't), \qquad f(l + lh't) = f(l - lh't);$$

ce qui donne par la différentiation

$$-f'(-lh't) = f'(lh't), \qquad f'(l + lh't) = -f'(l - lh't),$$

d'où l'on voit que les conditions de la fonction f' sont les mêmes que celles de la fonction F.

Ces conditions déterminent les valeurs des fonctions $F(x)$, $f'(x)$ pour les abscisses x négatives ou plus grandes que l, d'après les valeurs de ces fonctions pour les abscisses comprises entre 0 et l; et il est facile de voir qu'il en résulte les constructions données dans les articles 52 et 53.

Si, au lieu des excursions longitudinales ξ, on considère les excursions transversales η et ζ, on a la même équation différentielle et, par conséquent, aussi la même intégrale et les mêmes constructions, en changeant seulement h' en h, et $\dot{\alpha}$, α en $\dot{\beta}$, β ou en $\dot{\gamma}$, γ.

Ces constructions sont semblables à celle qu'Euler avait donnée pour déterminer la figure de la corde dans un instant quelconque, d'après sa figure initiale, en faisant abstraction des vitesses imprimées au commencement du mouvement. Mais il faut remarquer que, comme elles ne sont fondées ici que sur les fonctions qui représentent les intégrales des équations aux différences partielles, elles ne peuvent avoir plus d'étendue que ne comporte la nature des fonctions, soit algébriques ou transcendantes. Or, l'équation différentielle étant la même pour tous les points de la corde et pour tous les instants de son mouvement, la relation qu'elle représente doit régner constamment et uniformément entre les variables, quelque étendue qu'on leur donne; par conséquent, quoique les fonctions arbitraires soient en elles-mêmes d'une forme indéterminée, néanmoins, lorsque cette forme est donnée dans une certaine étendue par l'état initial de la corde, il est naturel d'en conclure qu'elle doit demeurer la même dans toute l'étendue de la fonction, et qu'il n'est pas permis de la changer pour la plier aux conditions qui dépendent de l'immobilité supposée des extrémités de la corde.

Aussi d'Alembert, à qui on doit la découverte de cette intégrale en fonctions arbitraires, a toujours soutenu que la construction qui en résulte n'est légitime que lorsque la courbe initiale est telle qu'elle ait par sa nature des branches alternatives égales et semblables, toutes renfermées dans une même équation, pour que la même fonction puisse représenter cette courbe avec toutes ses branches à l'infini. Euler, au contraire, en adoptant la solution analytique de d'Alembert, a cru qu'il suffisait de transporter la courbe initiale alternativement au-dessus ou au-dessous de l'axe à l'infini pour en former une courbe continue, sans s'embarrasser si ses différentes branches pouvaient être liées par une même équation et assujetties à la loi de continuité des fonctions analytiques. *Voir* les *Mémoires de Berlin* de 1747, 1748, et les Tomes I et IV des *Opuscules* de d'Alembert.

62. Comme les formules qui donnent le mouvement d'une corde tendue et chargée d'un nombre indéfini de corps égaux ne sont sujettes à aucune difficulté, parce que le mouvement de chaque corps est déterminé par une équation particulière, il est évident que, si l'on peut appliquer ces mêmes formules au mouvement d'une corde uniformément épaisse, en supposant le nombre des corps infini et leurs distances mutuelles infiniment petites, la loi qui en résultera pour les vibrations de la corde sera entièrement indépendante de son état initial; et, si cette loi se trouve la même que celle qui se déduit de la considé-

ration des fonctions arbitraires, il sera prouvé que ces fonctions peuvent être d'une forme quelconque, continue ou discontinue, pourvu qu'elles représentent l'état initial de la corde. C'est ainsi que je démontrai, dans le premier Volume des *Mémoires de Turin*, la construction d'Euler, qui n'était encore fondée que sur des preuves insuffisantes. L'analyse que j'y employai est, à quelques simplifications près que j'y ai apportées depuis, la même que je viens de donner, et j'ai cru qu'elle ne serait pas déplacée dans ce Traité, parce qu'elle conduit directement à la solution rigoureuse d'une des questions les plus intéressantes de la Mécanique.

La généralité des fonctions arbitraires et leur indépendance de la loi de continuité étant démontrées pour l'intégrale de l'équation relative aux vibrations des cordes sonores, on est fondé à admettre ces fonctions, de la même manière, dans les intégrales des autres équations aux différences partielles; j'ai même fait voir, dans le second Volume des *Mémoires* cités, comment on pouvait intégrer plusieurs de ces équations sans la considération des fonctions arbitraires, et parvenir aux mêmes solutions que l'on trouverait par le moyen de ces fonctions, envisagées dans toute leur étendue.

Maintenant, le principe de la discontinuité des fonctions est reçu généralement pour les intégrales de toutes les équations aux différences partielles; et les constructions que M. Monge a données d'un grand nombre de ces équations, jointes à sa théorie de la génération des surfaces par les fonctions arbitraires, ne laissent plus aucune incertitude sur l'emploi des fonctions discontinues dans les problèmes qui dépendent des équations de ce genre.

63. C'est une chose digne de remarque que la même formule

$$\xi = \Phi(x + kt) + \Psi(x - kt),$$

qui satisfait à l'équation en différences partielles

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - k^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0,$$

satisfait aussi à la même équation en différences finies, qu'on peut représenter par

$$\frac{D^2{}_t\xi}{Dt^2} - k^2\frac{D^2{}_x\xi}{Dx^2} = 0,$$

pourvu qu'on y suppose $Dx = k\,Dt$, et Dt constant. En effet, on a, en ne faisant varier que x,

$$D^2{}_x\Phi(x+kt) = \Phi(x+Dx+kt) - 2\Phi(x+kt) + \Phi(x-Dx+kt),$$

et, en ne faisant varier que le t,

$$D^2{}_t\Phi(x+kt) = \Phi(x+kt+k\,Dt) - 2\Phi(x+kt) + \Phi(x+kt-k\,Dt),$$

expressions qui deviennent égales en faisant $Dx = k\,Dt$; et l'on trouvera la même chose pour la fonction $\Psi(x-kt)$.

Dans l'infiniment petit, la condition $dx = k\,dt$ disparaît, et l'intégrale a toujours lieu; la raison en est qu'alors l'expression $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$, qui paraît représenter la différence seconde de ξ divisée par le carré de la différence de t, n'est plus qu'un symbole qui exprime une fonction simple de t, dérivée de la fonction primitive ξ et différente de cette fonction, laquelle est tout à fait indépendante de la valeur de dt. Il en est de même de l'expression $\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}$, par rapport à x; c'est dans ce changement de fonctions que consiste réellement le passage du fini à l'infiniment petit et l'essence du Calcul différentiel.

64. J'ajouterai encore ici une remarque qui peut être utile dans plusieurs occasions; elle a pour objet une nouvelle méthode d'interpolation qui résulte des formules de l'article 48.

Nous avons vu que la formule

$$\frac{2}{n+1}\sum\left[\sin\left(\frac{r\rho\pi}{n+1}\right)\mathsf{S}\,\alpha_s\sin\left(\frac{s\rho\pi}{n+1}\right)\right]$$

devient égale à α_r lorsque $r = 1, 2, 3, \ldots, n$. Donc, si l'on a une suite de quantités $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, dont le nombre soit n, on pourra représenter par la formule précédente un terme quelconque intermédiaire

dont le rang serait marqué par un nombre quelconque r, entier ou fractionnaire, puisqu'en faisant successivement $r = 1, 2, 3, \ldots, n$, la formule donne $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$.

Le signe S indique la somme de tous les termes qui répondent à $s = 1, 2, 3, \ldots, n$, et le signe $\sum$ la somme de tous les termes qui répondent à $\rho = 1, 2, 3, \ldots, n$, la quantité π étant l'angle de deux droits.

Supposons qu'il n'y ait qu'un terme α_1 donné, on fera $n = 1$, $s = 1$, $\rho = 1$, et l'on aura, pour l'expression générale de α_r,

$$\alpha_r = \alpha_1 \sin\frac{r\pi}{2}.$$

Soient $n = 2$, et les deux termes donnés α_1, α_2; on fera $s = 1, 2$, $\rho = 1, 2$, et l'on aura

$$\alpha_r = \frac{2}{3}\left(A'\sin\frac{r\pi}{3} + A''\sin\frac{2r\pi}{3}\right),$$

en supposant

$$A' = \alpha_1\sin\frac{\pi}{3} + \alpha_2\sin\frac{2\pi}{3},$$

$$A'' = \alpha_1\sin\frac{2\pi}{3} + \alpha_2\sin\frac{4\pi}{3}.$$

Soient $n = 3$, et les termes donnés $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; on fera $s = 1, 2, 3$, et $\rho = 1, 2, 3$, et l'on aura

$$\alpha_r = \frac{2}{4}\left(A'\sin\frac{r\pi}{4} + A''\sin\frac{2r\pi}{4} + A'''\sin\frac{3r\pi}{4}\right),$$

où les coefficients A', A'', A''' sont déterminés par ces formules

$$A' = \alpha_1\sin\frac{\pi}{4} + \alpha_2\sin\frac{2\pi}{4} + \alpha_3\sin\frac{3\pi}{4},$$

$$A'' = \alpha_1\sin\frac{2\pi}{4} + \alpha_2\sin\frac{4\pi}{4} + \alpha_3\sin\frac{6\pi}{4},$$

$$A''' = \alpha_1\sin\frac{3\pi}{4} + \alpha_2\sin\frac{6\pi}{4} + \alpha_3\sin\frac{9\pi}{4},$$

et ainsi de suite.

Dans la méthode ordinaire d'interpolation, on suppose qu'on fasse passer, par les extrémités des ordonnées qui représentent les termes donnés, une courbe parabolique de la forme

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots.$$

Dans la méthode précédente, au lieu d'une courbe parabolique, on suppose une courbe de la forme

$$y = \mathrm{A}' \sin \frac{\pi x}{a} + \mathrm{A}'' \sin \frac{2\pi x}{a} + \mathrm{A}''' \sin \frac{3\pi x}{a} + \dots,$$

et il y a bien des cas où cette supposition peut être préférable comme plus conforme à la nature de la question.

NOTES.

NOTE I.

Sur un point fondamental de la Mécanique analytique *de Lagrange;*
par M. Poinsot.

1. On sait que Lagrange, dans ce Livre célèbre qu'il a intitulé *Mécanique analytique,* a eu pour objet de réduire la Mécanique à des formules générales, toutes tirées du seul *principe des vitesses virtuelles,* ou plutôt de la formule différentielle qui est l'expression de ce principe. Pour la perfection même de son Ouvrage, l'auteur a soin de n'employer, dans aucune des questions qu'il traite, ni figures, ni aucun raisonnement tiré de considérations géométriques ou mécaniques; tout se fait par le calcul et de simples changements de coordonnées, et ce n'est même que sous une forme purement analytique qu'on y voit présentée la question si naturelle et si simple de la composition des forces appliquées sur un point.

« Si des forces quelconques P, Q, R, ..., dirigées suivant les lignes p, q, r, ..., agissent sur un même point, et qu'on veuille réduire toutes ces forces à trois autres Ξ, Π, Σ, dirigées suivant les lignes ξ, π, σ, il n'y aura, dit l'auteur, qu'à considérer l'équilibre des forces P, Q, R, ... et Ξ, Ψ, Φ, appliquées à ce même point et dirigées respectivement suivant les lignes p, q, r, ..., $-\xi$, $-\psi$, $-\varphi$, et former, en conséquence, l'équation

$$\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \dots - \Xi\,d\xi - \Psi\,d\psi - \Phi\,d\varphi = 0,$$

laquelle doit être vraie de quelque manière qu'on fasse varier la position du point de concours de toutes les forces. Or, quelles que soient les lignes ξ, π, σ, il est clair que, pourvu qu'elles ne soient pas toutes dans un même plan, elles suffisent pour déterminer la position de ce point; par conséquent, on pourra toujours exprimer les lignes p, q, r, ... par des fonctions de ξ, π, σ, et l'équation précédente devra avoir lieu par rapport aux variations de ces trois quantités en particulier; d'où il s'ensuit qu'on aura

$$\Xi = P\frac{\partial p}{\partial \xi} + Q\frac{\partial q}{\partial \xi} + R\frac{\partial r}{\partial \xi} + \ldots,$$

$$\Pi = P\frac{\partial p}{\partial \pi} + Q\frac{\partial q}{\partial \pi} + R\frac{\partial r}{\partial \pi} + \ldots,$$

$$\Sigma = P\frac{\partial p}{\partial \sigma} + Q\frac{\partial q}{\partial \sigma} + R\frac{\partial r}{\partial \sigma} + \ldots. \quad (^1)\text{ »}$$

Telles sont les formules données par Lagrange pour réduire des forces P, Q, R, ..., appliquées sur un même point et dirigées suivant des lignes p, q, r, ..., à trois autres forces Ξ, Π, Σ, dirigées suivant trois lignes quelconques données ξ, π, σ; expressions d'ailleurs toutes semblables à celles qu'on aurait pour transformer un système quelconque de forces qui agissent sur différents points liés entre eux, comme on voudra, en un autre système équivalent de forces Ξ, Π, Σ, ..., qui seraient appliquées aux mêmes points suivant d'autres directions ξ, π, σ, ...

2. Mais il y a, sur ce point de doctrine, une remarque essentielle à faire, et qui paraît avoir échappé à l'auteur de la *Mécanique analytique* : c'est que les formules dont il s'agit ne conviennent point, comme on pourrait le croire, à toute espèce de lignes ou coordonnées ξ, π, σ, ..., bien que ces lignes soient propres à déterminer les lieux des corps. Les formules ne sont bonnes qu'autant que ces lignes nouvelles seront (comme les premières p, q, r, ...) les distances de ces corps, soit à des *centres fixes*, soit à des *plans fixes*, comme il arrive dans le cas des coordonnées ordinaires x, y, z, lesquelles marquent les distances du point que l'on considère à trois plans fixes *rectangulaires entre eux*; et, en général, on peut dire que, pour l'exactitude de ces formules, il faut que les lignes ξ, π, σ, ... soient de telle nature, que leurs différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$, ... expriment les *vitesses virtuelles mêmes* du point d'application des forces Ξ, Π, Σ, ..., c'est-à-dire que chacune d'elles, $d\xi$, soit la projection *orthogonale*, sur la direction de la force Ξ, du déplacement quelconque infiniment petit qu'on suppose donné à ce point dans l'espace :

(1) Les lignes qui précèdent sont extraites de la 1re édition, page 62; elles ont été légèrement modifiées par Lagrange, dans la 2e édition publiée par lui (*voyez* p. 119 de ce Volume); mais les remarques de M. Poinsot s'appliquent à la rédaction nouvelle aussi bien qu'à l'ancienne. (*J. Bertrand.*)

sans quoi toutes ces transformations analytiques, quoique exactes en pure Analyse, seront en défaut dans la Mécanique et conduiront à de fausses conséquences.

3. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un seul point tiré par des forces quelconques P, Q, R, ..., dirigées suivant les lignes ou rayons vecteurs p, q, r, ..., et qu'on veuille réduire ces forces à trois autres, Ξ, Π, Σ, suivant les trois coordonnées ξ, π, σ, parallèles à trois axes fixes *obliques* entre eux : il semble, d'après l'auteur, qu'on aurait pour les forces cherchées

$$\Xi = P\frac{\partial p}{\partial \xi} + Q\frac{\partial q}{\partial \xi} + R\frac{\partial r}{\partial \xi} + \ldots,$$

$$\Pi = P\frac{\partial p}{\partial \pi} + Q\frac{\partial q}{\partial \pi} + R\frac{\partial r}{\partial \pi} + \ldots,$$

$$\Sigma = P\frac{\partial p}{\partial \sigma} + Q\frac{\partial q}{\partial \sigma} + R\frac{\partial r}{\partial \sigma} + \ldots;$$

ce qui n'est pas vrai, car on peut prouver que la résultante des forces P, Q, R, ... n'est pas la même que celle des trois forces Ξ, Π, Σ, déterminées par ces équations.

Soit, en effet, $f(p, q, r, \ldots)$ une fonction quelconque des rayons vecteurs p, q, r, ...; et désignons par $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, ... les fonctions *primes* de cette fonction prises relativement aux lignes p, q, r, ... J'ai démontré (1) que des forces P, Q, R, ..., proportionnelles à ces fonctions *primes* et dirigées suivant les lignes respectives p, q, r, ..., ont une résultante perpendiculaire à la surface courbe qui serait donnée par l'équation

$$f(p, q, r, \ldots) = \text{const.},$$

en y regardant p, q, r, ... comme variables.

Or supposons maintenant trois axes obliques, non situés dans le même plan, et soient ξ, π, σ les trois coordonnées du point d'application des forces par rapport à ces axes : on pourra toujours exprimer les lignes p, q, r, ... par les trois coordonnées ξ, π, σ; et si l'on met ces expressions au lieu de p, q, r, ... dans la fonction $f(p, q, r, \ldots)$, on aura

$$f(p, q, r, \ldots) = \varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{const.};$$

(1) *Voyez* la *Statique* de M. Poinsot et un Mémoire intitulé : *Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes* (*Journal de l'École Polytechnique*, XIIIe Cahier). (*J. Bertrand.*)

d'où l'on tire, en différentiant successivement par rapport à ξ, π, σ,

$$f'(p)\frac{\partial p}{\partial \xi}+f'(q)\frac{\partial q}{\partial \xi}+f'(r)\frac{\partial r}{\partial \xi}+\ldots=\varphi'(\xi),$$

$$f'(p)\frac{\partial p}{\partial \pi}+f'(q)\frac{\partial q}{\partial \pi}+f'(r)\frac{\partial r}{\partial \pi}+\ldots=\varphi'(\pi),$$

$$f'(p)\frac{\partial p}{\partial \sigma}+f'(q)\frac{\partial q}{\partial \sigma}+f'(r)\frac{\partial r}{\partial \sigma}+\ldots=\varphi'(\sigma).$$

Donc, suivant les formules de l'auteur, les trois forces Ξ, Π, Σ, auxquelles les forces $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, ... se trouveraient réduites, seraient exprimées par

$$\Xi=\varphi'(\xi), \qquad \Pi=\varphi'(\pi), \qquad \Sigma=\varphi'(\sigma).$$

Ainsi il faudrait que $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$ représentassent trois forces dont la résultante fût la même que celle des proposées $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, ... et, par conséquent, fût perpendiculaire à la surface donnée par l'équation

$$f(p, q, r, \ldots)=\text{const.}$$

Or cette surface est la même que celle qui serait donnée par l'équation

$$\varphi(\xi, \pi, \sigma)=\text{const.}$$

entre les coordonnées obliques ξ, π, σ. Donc, en considérant la surface représentée par l'équation

$$\varphi(\xi, \pi, \sigma)=\text{const.}$$

entre les trois coordonnées ξ, π, σ, relatives à trois axes obliques, on pourrait dire que trois forces dirigées suivant ces coordonnées et proportionnelles aux trois fonctions *primes* $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$ donnent une résultante perpendiculaire à la surface dont il s'agit, ou se font équilibre sur cette surface; ce qui est faux, comme on peut s'en assurer immédiatement par le principe même des vitesses virtuelles.

Et, en effet, pour l'équilibre du point auquel les trois forces $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$ sont appliquées, il faudrait que la somme des *moments virtuels* de ces forces fût nulle pour tout déplacement infiniment petit ds qu'on voudrait donner à ce point sur la surface. Si donc on désigne par $\delta\xi$, $\delta\pi$, $\delta\sigma$ les trois projections orthogonales de ds sur les trois axes obliques des ξ, π, σ, il faudrait, pour l'équilibre, qu'on eût toujours l'équation

$$\varphi'(\xi)\,\delta\xi+\varphi'(\pi)\,\delta\pi+\varphi'(\sigma)\,\delta\sigma=0;$$

ou bien, comme ds est la diagonale d'un rhomboïde dont les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ sont les arêtes, et que les trois projections de ds sur les directions de ces arêtes sont exprimées par

$$\delta\xi=d\xi+\lambda\,d\pi+\mu\,d\sigma,$$

$$\delta\pi=d\pi+\nu\,d\sigma+\lambda\,d\xi,$$

$$\delta\sigma=d\sigma+\mu\,d\xi+\nu\,d\pi$$

(λ, μ, ν étant les cosinus des angles $\widehat{\xi\pi}$, $\widehat{\xi\sigma}$, $\widehat{\pi\sigma}$, que les axes forment entre eux), il faudrait que, en mettant, au lieu de $\delta\xi$, $\delta\pi$, $\delta\sigma$, ces valeurs, on eût toujours, entre les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$, l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&[\varphi'(\xi)+\lambda\varphi'(\pi)+\mu\varphi'(\sigma)]\,d\xi+[\varphi'(\pi)+\nu\varphi'(\sigma)+\lambda\varphi'(\xi)]\,d\pi\\ &\qquad+[\varphi'(\sigma)+\mu\varphi'(\xi)+\nu\varphi'(\pi)]\,d\sigma=0.\end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, le point mobile restant toujours sur la surface, il faudrait qu'on eût en même temps l'équation

$$(2)\qquad \varphi'(\xi)\,d\xi+\varphi'(\pi)\,d\pi+\varphi'(\sigma)\,d\sigma=0.$$

Or il est clair que ces équations (1) et (2) ne peuvent subsister ensemble à moins que les coefficients de $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ dans l'une d'elles ne soient proportionnels aux coefficients des mêmes indéterminées dans l'autre, et, par conséquent, à moins qu'on n'ait les deux équations

$$\varphi'(\xi)[\nu\varphi'(\sigma)+\lambda\varphi'(\xi)]-\varphi'(\pi)[\lambda\varphi'(\pi)+\mu\varphi'(\sigma)]=0,$$

$$\varphi'(\xi)[\nu\varphi'(\pi)+\mu\varphi'(\xi)]-\varphi'(\sigma)[\lambda\varphi'(\pi)+\mu\varphi'(\sigma)]=0,$$

équations qui ne peuvent avoir lieu en général, c'est-à-dire indépendamment des variables ξ, π, σ et, par conséquent, de la position du point sur la surface que l'on considère.

Ainsi le point mobile, aux coordonnées quelconques ξ, π, σ, ne peut être tenu en équilibre sur la surface par les trois forces $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$: la résultante de ces forces n'est donc pas normale à cette surface, et, par conséquent, elle n'est pas la même que celle des forces proposées $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, ...; *ce qu'il fallait démontrer.*

4. Les formules de Lagrange pour la réduction des forces sont donc en défaut dans cette hypothèse de coordonnées obliques ξ, π, σ; il n'y a qu'un cas singulier où l'erreur pourrait s'évanouir : c'est le cas où les coordonnées ξ, π, σ

satisferaient aux deux équations précédentes, en même temps qu'à l'équation de la surface

$$\varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{const.},$$

ce qui ne répond, comme on voit, qu'à un certain point de cette surface, ou à une certaine proportion déterminée entre les trois forces $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$. Mais, dans ce cas singulier même, si la résultante des trois forces Ξ, Π, Σ a la même direction que la résultante des forces proposées $f'(p)$, $f'(q)$, ..., on trouverait qu'elle n'a pas la même grandeur, de sorte qu'il y aurait encore erreur de ce côté.

Lorsque les cosinus λ, μ, ν sont tous trois *nuls*, les deux conditions précédentes ont toujours lieu d'elles-mêmes, et les formules de Lagrange sont toujours exactes. C'est le cas des coordonnées ξ, π, σ relatives à trois axes *rectangulaires* entre eux. Et en effet, pour de telles coordonnées, les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ sont les expressions mêmes des vitesses virtuelles du point décrivant estimées suivant ces lignes, et l'équation différentielle

$$\varphi'(\xi)\,d\xi + \varphi'(\pi)\,d\pi + \varphi'(\sigma)\,d\sigma = 0,$$

tirée de l'équation de la surface, exprime l'égalité à zéro de la somme des moments virtuels des trois forces $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$ et, par conséquent, l'équilibre de ces forces sur le point qu'on suppose assujetti à décrire cette surface.

Mais, dans toute autre hypothèse que celle de λ, μ, ν tous les trois nuls, les deux conditions ne peuvent être remplies indépendamment de ξ, π, σ, et les formules sont toujours fautives.

5. Soit, par exemple, le cas très simple d'un point posé sur la circonférence d'un cercle fixe. Si l'on prend l'équation de ce cercle en coordonnées rectangles x et y, on aura

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = \text{const.},$$

d'où

$$f'(x)\,dx + f'(y)\,dy = 2x\,dx + 2y\,dy = 0;$$

et l'on pourra très bien dire ici que deux forces X et Y, étant prises le long des coordonnées dans le rapport des fonctions *primes* $f'(x)$, $f'(y)$, donnent leur résultante perpendiculaire à la circonférence du cercle et tiennent ainsi le point d'application en équilibre sur cette circonférence.

Mais si, au lieu de ces coordonnées rectangles x et y, on en prend deux autres ξ et π de même origine, et par exemple l'une, ξ, suivant les x, l'autre π, inclinée d'un angle α sur la première, ce qui donnera

$$x = \xi + \pi\cos\alpha, \qquad y = \pi\sin\alpha,$$

on aura, en substituant,

$$f(x, y) = \varphi(\xi, \pi) = \pi^2 + \xi^2 + 2\pi\xi\cos\alpha = \text{const.};$$

d'où

$$\varphi'(\xi)\,d\xi + \varphi'(\pi)\,d\pi = 2(\xi + \pi\cos\alpha)\,d\xi + 2(\pi + \xi\cos\alpha)\,d\pi = 0.$$

Or il est évident que deux forces proportionnelles à $\varphi'(\xi)$ et $\varphi'(\pi)$, c'est-à-dire, ici, à $(\xi + \pi\cos\alpha)$ et $(\pi + \xi\cos\alpha)$, ne donnent point leur résultante perpendiculaire à la circonférence du cercle dont il s'agit; car il faudrait pour cela que cette résultante allât passer par le centre, et que, par conséquent, ses deux composantes le long de ξ et π fussent simplement proportionnelles à ξ et π, et non pas à $(\xi + \pi\cos\alpha)$ et $(\pi + \xi\cos\alpha)$.

Donc, quoiqu'on ait ici, en faisant $\varphi'(\xi) = \Xi$, $\varphi'(\pi) = \Pi$, les équations

$$\Xi = X\frac{\partial x}{\partial \xi} + Y\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \Pi = X\frac{\partial x}{\partial \pi} + Y\frac{\partial y}{\partial \pi},$$

on ne peut pas dire que les deux forces X et Y, dirigées suivant les axes rectangles x et y, soient réductibles aux deux forces Ξ et Π, dirigées suivant les axes obliques ξ et π.

Pour que l'on eût

$$\xi + \pi\cos\alpha : \pi + \xi\cos\alpha :: \xi : \pi,$$

il faudrait que l'on eût

$$\cos\alpha = 0;$$

ce qui est le cas des coordonnées ξ et π rectangulaires entre elles.

Ou bien il faudrait $\xi = \pi$; ce qui ne serait qu'un cas particulier de la position du point proposé M sur la circonférence du cercle dont l'équation est

$$\varphi(\xi, \pi) = \text{const.}$$

Mais, dans ce cas singulier même, où la résultante des deux forces Ξ et Π aurait la même direction que celle des deux forces X et Y, on trouverait que ces deux résultantes

$$\sqrt{\Xi^2 + 2\Xi\Pi\cos\alpha + \Pi^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{X^2 + Y^2}$$

n'ont pas la même valeur, et que la première est à la seconde comme $1 + \cos\alpha$ est à l'unité.

Ainsi, tant que $\cos\alpha$ n'est pas nul, ou, ce qui est la même chose, tant que les coordonnées ξ et π seront obliques, les forces proposées X et Y ne seront jamais réductibles aux deux forces Ξ et Π données par les formules de Lagrange.

6. Dans l'analyse qui précède, j'ai pris simplement, pour représenter les forces P, Q, R, ..., qu'il s'agissait de réduire à d'autres, les fonctions *primes* d'une même fonction quelconque $f(p, q, r, \ldots)$ des rayons vecteurs p, q, r, ..., suivant lesquels ces forces sont dirigées : ce n'est qu'une manière de reconnaître tout d'un coup la direction de la résultante par la direction de la *normale* à la surface courbe qu'on aurait en posant l'équation

$$f(p, q, r, \ldots) = \text{const.}$$

Mais, comme on pourrait croire que cette hypothèse a quelque chose qui restreint notre démonstration au cas de certaines forces, il est bon de remarquer qu'elle convient à des forces P, Q, R, ... données comme on voudra. Et, en effet, quelle que soit la fonction f que l'on ait choisie, comme on est le maître de placer les centres des forces partout où l'on veut sur leurs directions $p, q, r, \ldots$, on peut toujours donner à ces lignes des longueurs qui rendent

$$f'(p) = \mathrm{P}, \qquad f'(q) = \mathrm{Q}, \qquad f'(r) = \mathrm{R}, \qquad \ldots.$$

Au reste, il est évident que, si l'on propose des forces de grandeurs quelconques A, B, C, ..., on peut toujours les regarder comme étant les fonctions *primes* de la fonction linéaire

$$\mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}r + \ldots,$$

prises relativement aux lignes $p, q, r, \ldots$, suivant lesquelles ces forces sont supposées dirigées. Ainsi notre hypothèse est toujours permise et notre démonstration a toute la généralité désirable.

7. On voit donc que, dans la *Mécanique céleste*, qui est uniquement fondée sur le principe des vitesses virtuelles, les seules coordonnées qu'il soit permis d'employer doivent être de telle nature, que leurs différentielles représentent, sur ces coordonnées, les projections *droites* de la petite ligne que le point d'application des forces est supposé avoir décrite dans l'espace. C'est ce qui a lieu pour les coordonnées $p, q, r, \ldots, x, y, z$ dont nous avons parlé, et encore pour celles qui consistent dans un rayon vecteur ρ, avec deux angles ou arcs de cercle φ, ψ perpendiculaires à ce rayon; etc. Mais il faut

exclure toutes les coordonnées ξ, π, σ, qui ne jouiraient pas de la même propriété. Ainsi il n'est pas exact de dire que, dans cette méthode analytique, *rien n'oblige à se servir de coordonnées rectangles, plutôt que d'autres lignes ou quantités relatives aux lieux des corps*, etc. (*Mécanique analytique*, 4ᵉ édition, p. 39); et l'on doit même remarquer, à ce sujet, que le principe des vitesses virtuelles ne donne pas une méthode aussi générale qu'on paraît le croire.

Et, par exemple, dans le cas de plusieurs forces P, Q, R, S, etc., en équilibre sur un point, le principe des vitesses virtuelles dit simplement que les forces, étant projetées *perpendiculairement* sur une droite quelconque menée par ce point, doivent faire une somme nulle. Car, en nommant du la ligne quelconque qui marque le déplacement du point d'application dans l'espace, les lignes dp, dq, dr, ... ne sont autre chose que les projections droites de du sur les lignes $p, q, r, \ldots$, qui marquent les directions des forces P, Q, R, ... En nommant donc i, i', i'', ... les inclinaisons de ces forces sur la ligne du, on a

$$dp = du\cos i, \qquad dq = du\cos i', \qquad dr = du\cos i'', \qquad \ldots,$$

et l'équation des vitesses virtuelles

$$\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots = 0$$

devient, en divisant tout par le facteur commun du,

$$\mathrm{P}\cos i + \mathrm{Q}\cos i' + \mathrm{R}\cos i'' + \ldots = 0;$$

ce qui signifie que les forces, projetées à angle droit sur un axe quelconque, doivent faire une somme nulle dans le cas de l'équilibre. Mais le principe de la composition des forces dit, plus généralement, que, les forces étant projetées sur un axe quelconque par des lignes parallèles à un même plan incliné comme on voudra sur cet axe, la somme de toutes ces projections obliques doit être nulle. Ce n'est pas qu'on ne puisse aisément démontrer cette seconde proposition par la première, mais l'expression du second principe est évidemment plus générale que celle du principe des *vitesses virtuelles*.

De même, on peut remarquer que les équations de l'équilibre d'un système solide ne sont démontrées, dans la *Mécanique analytique*, que par rapport à trois axes *rectangulaires* entre eux; et pourtant, comme je l'ai fait voir dans ma *Statique*, des équations toutes semblables ont lieu par rapport à trois axes *obliques* quelconques. Le principe des vitesses virtuelles n'est donc pas, dans ce nouvel exemple, aussi général que le principe de la *composition des forces*. Il n'est pas même aussi direct; car, s'il mène aux trois premières équations en employant les coordonnées rectangles x, y, z, il ne peut plus donner les trois dernières équations que par un changement de ces coordonnées en d'autres d'une espèce différente, et dont le choix paraît arbitraire, ou ne semble fait que pour obtenir des équations d'équilibre que l'on connaissait d'avance.

Au reste, quoique Lagrange nous laisse entendre que, dans sa méthode, on peut employer toute espèce de coordonnées, pourvu qu'elles soient propres à déterminer les lieux des corps, il est fort remarquable que ce géomètre n'en ait jamais employé d'autres que celles qui conviennent réellement au principe des vitesses virtuelles : du moins je n'en connais pas d'exemple, et je crois même qu'on n'en trouverait point dans ses écrits. Car si, pour la solution de quelque problème, il avait essayé l'emploi de certaines coordonnées non permises dans sa méthode, il est très probable que, par l'erreur sensible de quelque résultat, il eût été averti du défaut de ses formules; et alors il n'aurait pas manqué de faire lui-même, à ce sujet, une remarque expresse, au moins dans la 2e édition de son bel Ouvrage.

8. Quoi qu'il en soit, tout aurait pu se corriger d'une manière très simple, et qu'il me paraît bon d'indiquer avant de terminer cette Note, parce qu'on y voit sur-le-champ ce qui cause l'erreur, et, de plus, ce qu'il faudrait faire pour l'éviter, sans exclure l'emploi de ces coordonnées qui y donnent lieu.

Et, en effet, quelle que soit la nature de ces coordonnées ξ, π, σ, $\ldots$, dans lesquelles on veuille transformer les lignes ou rayons vecteurs p, q, r, $\ldots$, il est certain qu'on peut toujours, avec Lagrange, poser l'équation parfaitement exacte

$$\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots = \Xi\,d\xi + \Pi\,d\pi + \Sigma\,d\sigma + \ldots,$$

où Ξ, Π, Σ, $\ldots$ ont les valeurs exprimées par les équations du n° 1.

Or, maintenant, j'observe que, dans le premier membre, les différentielles dp, dq, dr, $\ldots$ marquent bien les vitesses virtuelles du point d'application des forces suivant les lignes p, q, r, $\ldots$, et qu'ainsi chaque terme $\mathrm{P}\,dp$ est le *moment virtuel* de la force P. Si, dans le second membre, les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$, $\ldots$ ont la même propriété, c'est-à-dire si chacune, $d\xi$, marque la vitesse virtuelle du point suivant ξ, chaque terme $\Xi\,d\xi$ sera aussi le moment virtuel d'une force représentée par Ξ; et alors, de cette équation, qui présente deux sommes de moments virtuels, toujours égales de part et d'autre, on peut très bien conclure que le système des forces Ξ, Π, Σ, $\ldots$ est capable de remplacer le système des forces proposées P, Q, R, ...

Mais si les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$, $\ldots$ n'ont pas la propriété dont il s'agit, chaque terme $\Xi\,d\xi$ ne sera pas le moment virtuel d'une force telle que Ξ, et, d'après le principe même des vitesses virtuelles, on ne pourra pas conclure, comme ci-dessus, que l'ensemble des forces Ξ, Π, Σ, $\ldots$ soit équivalent à l'ensemble des forces proposées. C'est là précisément qu'on tomberait dans cette erreur singulière, de tirer d'un principe vrai et d'une équation exacte une conséquence fausse, parce qu'on aurait oublié d'observer que cette équation n'est pas actuellement sous une forme qui convienne à l'expression du principe. Et, en même temps, c'est là qu'on voit le moyen d'éviter cette erreur sans changer les coordonnées ξ, π, σ, $\ldots$, qui pourraient y donner lieu.

Car, si l'on voulait avoir les vraies forces Ξ', Π', Σ', $\ldots$, qui, dirigées suivant les coordonnées ξ, π, σ, $\ldots$, sont capables de remplacer les forces P, Q, R, S, $\ldots$, il faudrait commencer par mettre dans l'équation, au lieu des différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$, $\ldots$, leurs valeurs en fonction des vitesses virtuelles mêmes, que je désignerai, comme au n° 3, par $\partial\xi$, $\partial\pi$, $\partial\sigma$, $\ldots$, ensuite rassembler en un seul terme tous ceux qui seraient affectés de $\partial\xi$, de même en un seul tous les termes affectés de $\partial\pi$, $\ldots$; et alors, notre même équation étant mise sous la forme nouvelle

$$\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots = \Xi'\,\partial\xi + \Pi'\,\partial\pi + \Sigma'\,\partial\sigma + \ldots,$$

on pourrait rigoureusement conclure que l'ensemble des forces Ξ', Π', Σ' équivaut parfaitement à l'ensemble des forces P, Q, R, $\ldots$, puisque la somme des moments virtuels est toujours égale de part et d'autre.

9. Si l'on veut faire ce calcul pour le cas des coordonnées ξ, π, σ parallèles à trois axes obliques, on trouvera, en conservant les dénominations du n° 3, les valeurs suivantes :

$$\Xi' = \frac{\Xi(1-\nu^2) + \Pi(\mu\nu - \lambda) + \Sigma(\lambda\nu - \mu)}{1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\lambda\mu\nu},$$

$$\Pi' = \frac{\Pi(1-\mu^2) + \Sigma(\lambda\mu - \nu) + \Xi(\mu\nu - \lambda)}{1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\lambda\mu\nu},$$

$$\Sigma' = \frac{\Sigma(1-\nu^2) + \Xi(\lambda\mu - \nu) + \Pi(\lambda\nu - \mu)}{1 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\lambda\mu\nu},$$

valeurs qui ne sont pas, comme on voit, les mêmes que celles de Ξ, Π, Σ, et qui n'y pourraient revenir que dans le cas des cosinus λ, μ, ν tous trois nuls, c'est-à-dire dans le cas de trois axes rectangulaires entre eux; ce qui éclaire et confirme notre précédente analyse.

10. On voit aussi, par ces mêmes expressions, que les équations

$$\Xi' = 0, \qquad \Pi' = 0, \qquad \Sigma' = 0$$

entraînent les suivantes :

$$\Xi = 0, \qquad \Pi = 0, \qquad \Sigma = 0,$$

et réciproquement. Si donc on ne demandait que les conditions de l'équilibre entre les forces P, Q, R, ..., on pourrait, sans avoir d'erreur à craindre, se contenter de poser les trois équations

$$0 = \Xi = P\frac{\partial p}{\partial \xi} + Q\frac{\partial q}{\partial \xi} + \ldots,$$

$$0 = \Pi = P\frac{\partial p}{\partial \pi} + Q\frac{\partial q}{\partial \pi} + \ldots,$$

$$0 = \Sigma = P\frac{\partial p}{\partial \sigma} + Q\frac{\partial q}{\partial \sigma} + \ldots.$$

Mais si, les forces P, Q, R, ... n'étant point en équilibre entre elles, on demande de les réduire à d'autres dirigées suivant ξ, π, σ, il faudra nécessairement prendre pour les forces équivalentes, non pas Ξ, Π, Σ, mais bien les valeurs de Ξ', Π', Σ'.

Et ce que je viens de dire s'applique sans difficulté à un système quelconque de puissances qui agissent sur différents points liés entre eux comme on voudra. Ainsi les équations de l'équilibre données par Lagrange (p. 40 de la 4e édition, art. 12 et suiv.) sont toujours bonnes; mais les formules données, à la fin de l'article 15, pour l'équivalence de deux systèmes de forces, ne sont exactes que dans le cas de certaines coordonnées.

Nous aurions encore plusieurs choses à dire sur ce point de doctrine; mais cette discussion est déjà longue, et nous pourrions d'ailleurs, s'il était nécessaire, y revenir dans une autre occasion.

NOTE II.

Sur la stabilité de l'équilibre; par M. Lejeune-Dirichlet.

Si un système de points matériels est sollicité par des forces attractives ou répulsives qui ne dépendent que de la distance, et qui sont dirigées vers des centres fixes ou qui proviennent des actions mutuelles entre deux masses, l'action et la réaction étant égales; si, en outre, les équations de condition qui lient les coordonnées des différents points ne contiennent pas le temps, l'équation des forces vives aura lieu. Cette équation est

$$\sum mv^2 = f(x, y, z, x', \ldots) + C.$$

Le signe $\sum$ s'étend à toutes les masses du système, chaque masse étant représentée par m et sa vitesse par v; C est une constante arbitraire. La fonction des coordonnées ne dépend que de la nature des forces et peut s'exprimer par un nombre déterminé de variables indépendantes λ, μ, ν, ..., de sorte que l'équation des forces vives s'écrira

$$\sum mv^2 = \varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots) + C.$$

La fonction φ est liée d'une manière intime aux positions d'équilibre du système; car la condition qui exprime que, pour certaines valeurs déterminées de λ, μ, ν, ..., le système est dans une position d'équilibre, coïncide avec celle qui exprime que, pour ces mêmes valeurs, la différentielle totale de φ est nulle; de sorte qu'en général, pour chaque position d'équilibre, la fonction sera un maximum ou un minimum. Si le maximum a lieu réellement, l'équilibre est stable, c'est-à-dire que, si l'on déplace infiniment peu les points du système de leurs positions d'équilibre, et qu'on donne à chacun une petite vitesse initiale, dans tout le cours du mouvement les déplacements des différents points du système, par rapport à la position d'équilibre, resteront toujours compris entre certaines limites déterminées et très petites.

Ce théorème est un des plus importants de la Mécanique. Il est la base de la théorie des petites oscillations, qui conduit à tant d'applications intéressantes relatives à la Physique. On doit donc s'étonner qu'on n'en ait donné jusqu'ici qu'une démonstration peu rigoureuse et insuffisante.

Supposons, comme il est permis de le faire sans nuire à la généralité, que la position d'équilibre du système, ou le maximum de la fonction φ, corresponde aux valeurs $\lambda = 0$, $\mu = 0$, ... La démonstration donnée par Lagrange (*Mécanique analytique*, Ire Partie, Sect. III) se ramène à ceci : le développement de la fonction suivant les puissances de λ, μ, ν, ..., qui commence par les termes du second ordre, est réduit à ces termes; puis, d'après la condition connue du maximum, que les termes du second ordre peuvent être considérés comme une somme de carrés négatifs, on déduit, pour λ, μ, ν, ..., des limites que ces quantités ne peuvent pas franchir. Ce genre de démonstration, employé encore dans d'autres questions de stabilité, et surtout dans l'Astronomie physique, manque de rigueur. En effet, on peut douter avec raison que des grandeurs pour lesquelles on trouve, avec l'hypothèse qu'elles seront toujours petites (car ce n'est que dans ce cas que l'on peut négliger les termes d'un ordre supérieur), de petites limites, resteront toujours renfermées réellement, au bout d'un temps quelconque, dans ces limites, et même, en général, dans des limites petites.

La démonstration que nous venons de citer a été reproduite, sans modification importante que je sache, par tous les auteurs qui se sont occupés de cette matière; et tout ce que Poisson (*Traité de Mécanique*, t. II, p. 492) y a ajouté pour faire entrer en considération les termes d'un ordre supérieur repose sur cette hypothèse inadmissible, que *chaque* terme du second ordre surpasse la somme de tous les termes d'ordre supérieur.

Même en complétant les considérations de Lagrange, pour le cas auquel elles s'appliquent et où le maximum se reconnaît par les termes du second ordre, le théorème en question ne serait point prouvé dans toute son étendue. On sait que l'existence d'un maximum est compatible avec l'évanouissement des termes du second ordre; il suffit, en général, que les premiers termes différents de zéro soient d'ordre pair, et que la somme de ces termes soit toujours négative. Les formules relatives à cette dernière condition n'ont pas encore été données, même dans le cas où il s'agit des termes du quatrième ordre. Il faudrait donc les rechercher d'abord. Cela introduirait nécessairement dans la démonstration du théorème de Mécanique dont nous parlons une grande complication. Heureusement, on peut démontrer le principe de la stabilité de l'équilibre indépendamment de ces formules, par une considération très simple qui se rattache d'une manière immédiate à l'idée du maximum.

Outre la supposition déjà faite, que la position d'équilibre réponde aux valeurs $\lambda = 0$, $\mu = 0$, ..., nous supposerons encore que $\varphi(0, 0, 0, \ldots) = 0$; ce

qui est permis, à cause de la constante arbitraire. Déterminons la constante en ayant égard à l'état initial donné, pour lequel nous désignerons par v_0, λ_0, μ_0, ν_0, ... les valeurs de v, λ, μ, ν, ... On a ainsi

$$\sum mv^2 = \varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots) - \varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \sum mv_0^2.$$

Puisque par hypothèse $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$, pour $\lambda = 0$, $\mu = 0$, ..., est nul et maximum, on pourra déterminer des grandeurs positives l, m, n, ..., assez petites pour que $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ soit toujours négatif pour tout système λ, μ, ν, ... où les valeurs absolues des variables sont respectivement assujetties à ne pas dépasser les limites l, m, n, ..., excepté, toutefois, le seul cas où λ, μ, ν, ... sont nuls à la fois. Ce cas est exclu si nous ne considérons que des systèmes tels, qu'au moins une des variables λ, μ, ν, ... soit égale en valeur absolue à sa limite l, m, n, ... Supposons que, de toutes les valeurs négatives de la fonction pour de tels systèmes, $-p$, abstraction faite du signe, soit la plus petite : alors on peut facilement montrer que, si l'on prend λ_0, μ_0, ν_0, ... numériquement plus petits que l, m, n, ..., et que l'on satisfasse en même temps à l'inégalité

$$-\varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots) + \sum mv_0^2 < p,$$

chacune des variables λ, μ, ν, ... restera pendant toute la durée du mouvement au-dessous des limites l, m, n, ... En effet, si le contraire avait lieu, comme les valeurs initiales λ_0, μ_0, ν_0, ... remplissent la condition que nous venons d'énoncer, et à cause de la continuité des variables λ, μ, ν, ..., il faudrait d'abord qu'à un certain instant il y eût égalité entre une ou plusieurs valeurs numériques de λ, μ, ν, ... et leurs limites respectives l, m, n, ..., sans qu'aucune des autres valeurs eût dépassé sa limite. A cet instant, la valeur absolue de $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \ldots)$ serait supérieure ou au moins égale à p. Par conséquent, le second membre de l'équation des forces vives serait négatif, à cause de l'inégalité écrite plus haut, et qui se rapporte à l'état initial; ce qui n'est pas possible, $\sum mv^2$ étant toujours positif.

Il suit encore de là, évidemment, que les vitesses v seront toujours comprises entre des limites déterminées, puisque l'on a toujours

$$\sum mv^2 \leqq \sum mv_0^2 - \varphi(\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \ldots).$$

Il est évident aussi que les limites pour chaque vitesse, ainsi que celles de chaque variable λ, μ, ν, ..., peuvent être aussi petites que l'on voudra, puisque les quantités l, m, n, ... peuvent devenir aussi petites que l'on voudra.

NOTE III.

Sur l'équilibre d'une ligne élastique.

Les formules données par Lagrange (p. 162) supposent que la force d'élasticité s'exerce, en chaque point, dans le plan osculateur de la ligne en équilibre dont elle tend à rétablir le rayon de courbure primitif; mais une pareille hypothèse est loin de représenter les phénomènes, et M. Binet a remarqué qu'à la force d'élasticité considérée par Lagrange il est essentiel d'en adjoindre une autre dont l'effet est de s'opposer aux variations de la seconde courbure. La complication des formules qui expriment cette seconde courbure nous empêche de conserver, en développant les conséquences de cette remarque, la notation et la marche suivie par Lagrange. Nous nous bornerons à former directement les équations de l'équilibre en imitant la méthode exposée par Poisson dans un Article de la *Correspondance sur l'École Polytechnique* (t. III, p. 355).

Considérons une ligne élastique en équilibre AMB, dont tous les points soient sollicités par des forces données. Si nous supposons que la partie MB comprise entre un point quelconque M et l'extrémité B devienne inflexible et fixe, et que l'autre partie MA devienne seulement inflexible en conservant la liberté de tourner autour du point M, l'équilibre ne sera pas détruit, et, par conséquent, la force d'élasticité développée en M doit détruire le *couple* auquel équivalent, à cause de la fixité du point M, les forces agissant sur la portion MA de la courbe. Or nous admettrons que la force d'élasticité peut produire deux couples, l'un, auquel Lagrange a eu égard, agissant dans le plan osculateur et tendant à restituer à la courbure sa valeur primitive; l'autre, ayant pour axe la tangente à la courbe élastique, et tendant à détruire la *torsion*, en restituant à la seconde courbure sa valeur primitive. Nommons ces deux couples θ et E. Nous allons prouver d'abord que θ est constant, *quelles que soient les formes données et la forme primitive de la courbe.*

Pour déterminer, en effet, les deux couples θ et E, il faut réduire les forces qui agissent sur la portion MA de la courbe à une force F, passant par le point M, et à un couple G. Ce couple G doit être équivalent aux deux couples $-\theta$ et $-$E ayant respectivement pour axes la tangente à la courbe proposée et une perpendiculaire à son plan osculateur. Si nous recommençons les

mêmes décompositions, en substituant au point M un point infiniment voisin M′, la force F et le couple G varieront, d'une part, à cause du changement dans le point d'application de la force, et, en outre, par l'influence de forces nouvelles agissant sur l'arc MM′. Remarquons d'abord que ces dernières forces ne peuvent exercer aucune influence sur la valeur du couple θ, car leur point d'application est à une distance infiniment petite du second ordre de la tangente au point M′, qui est l'axe de ce couple. Il suffit donc d'avoir égard au changement de position du point fixe, et ce changement a évidemment pour effet d'adjoindre au couple G un second couple produit par la force F et par une force égale et contraire appliquée en M′. Or la force F a, comme celles qui sont appliquées à l'arc MM′, son point d'application situé à une distance infiniment petite du second ordre de la tangente en M′; en sorte qu'elle ne modifie que d'une quantité de cet ordre le couple cherché, dont cette tangente est l'axe. D'après ces remarques, on peut calculer la valeur θ' du couple de torsion qui correspond au point M′, comme si le couple G ne changeait ni de grandeur ni de direction; il faut seulement le décomposer maintenant en deux autres, dont l'un soit perpendiculaire à la tangente en M′. Pour calculer ce couple composant, qui représente le moment de torsion cherché, substituons au couple G les deux couples $-\theta$ et $-$E, qui lui sont équivalents. Chacun de ces couples devra être multiplié par le cosinus de l'angle formé par son axe avec celui du couple θ', qui n'est autre que la tangente de la courbe considérée au point M′. Les axes des couples θ et θ' forment un angle infiniment petit dont le cosinus est égal à l'unité, si nous négligeons, comme plus haut, les infiniment petits du second ordre; quant à l'axe du couple $-$E, l'angle qu'il forme avec la tangente en M′ est droit, si l'on néglige encore les infiniment petits du second ordre, car le plan osculateur en M est parallèle à la tangente en M′; le cosinus de cet angle peut donc être considéré comme nul, et l'on a, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\theta' = \theta;$$

d'où l'on conclut que le moment de torsion est rigoureusement constant tout le long de la courbe élastique.

D'après cette remarque, on formera les équations d'équilibre en écrivant que les forces appliquées à une portion quelconque MA de la courbe, supposée rigide, sont détruites par la fixité du point M, et par deux couples $-\theta$ et $-$E, ayant respectivement pour axes la tangente à la courbe et l'axe du plan osculateur; θ étant constant, et E proportionnel à la différence entre la courbure actuelle en M et la courbure primitive au même point.

Nous considérerons en particulier le cas où, la courbe étant primitivement droite, la seule force appliquée agit sur son extrémité A, l'extrémité B étant fixe. En supposant que l'on fixe un point M dont les coordonnées sont x, y, z, les moments des forces données par rapport à ce point auront leurs composantes de la forme

$$\begin{gathered} cy - bz + a_1, \\ az - cx + b_1, \\ bx - ay + c_1, \end{gathered}$$

a, b, c, a_1, b_1, c_1 étant des constantes qui dépendent de la direction de la force et de la position de son point d'application. En égalant ces moments aux couples d'élasticité décomposés perpendiculairement aux trois mêmes axes, nous aurons les équations

$$\begin{aligned} p\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3} &= \theta\frac{dx}{ds} + cy - bz + a_1, \\ p\frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{ds^3} &= \theta\frac{dy}{ds} + az - cx + b_1, \\ p\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3} &= \theta\frac{dz}{ds} + bx - ay + c_1, \end{aligned}$$

qui ne diffèrent de celles de Lagrange (p. 168) que par la notation et par l'introduction des termes en θ.

Après avoir obtenu ces équations, Lagrange ajoute : *Leur intégration est peut-être impossible en général.* Nous allons montrer qu'elle est, au contraire, toujours possible, et nous suivrons, pour cela, la marche indiquée par M. Binet [1] et simplifiée, peu de temps après, par Wantzell.

Si l'on prend pour axe des z la direction même de la force donnée, les formules précédentes deviennent, comme on le voit facilement, de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} p\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3} &= \theta\frac{dx}{ds} + gy, \\ p\frac{dz\,d^2x - dx\,d^2z}{ds^3} &= \theta\frac{dy}{ds} - gx, \\ p\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3} &= \theta\frac{dz}{ds}, \end{aligned}\right.$$

g étant une constante.

[1] *Voir* les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* pour 1844, pages 1115 et 1197.

La dernière équation montre que, si l'on néglige θ, comme Lagrange l'a fait, la courbe sera nécessairement plane. En multipliant ces équations par dx, dy, dz, et les ajoutant, il vient

$$(2)\qquad 0 = \theta\,ds + g(y\,dx - x\,dy) \quad [1];$$

on trouve aussi, en ajoutant les deux premières, multipliées respectivement par x et y,

$$(3)\qquad \frac{p}{ds^3}d^2z(x\,dy - y\,dx) - \frac{p\,dz(x\,d^2y - y\,d^2x)}{ds^3} = \theta\frac{x\,dx + y\,dy}{ds},$$

ou, en vertu de la précédente, si l'on prend s pour variable indépendante,

$$(4)\qquad \frac{p}{g}\frac{d^2z}{ds^2} = \frac{x\,dx + y\,dy}{ds},$$

et, en intégrant,

$$(5)\qquad \frac{2p}{g}\frac{dz}{ds} = x^2 + y^2 - \frac{c}{g}.$$

Si l'on substitue à x et y des coordonnées polaires, en posant

$$x^2 + y^2 = r^2, \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\omega,$$

les équations précédentes deviendront

$$r^2\,d\omega = \frac{\theta}{g}ds, \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{gr^2 - c}{2p};$$

d'où l'on déduira, en posant $\frac{dz}{ds} = \cos\varphi$, et se servant de la formule connue

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + r^2\,d\omega^2 + dz^2, \\ ds &= \frac{p\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{g\sin^2\varphi(2p\cos\varphi + c) - \theta^2}}, \\ d\omega &= \frac{\theta p\sin\varphi\,d\varphi}{(2p\cos\varphi + c)\sqrt{g\sin^2\varphi(2p\cos\varphi + c) - \theta^2}}; \end{aligned}$$

[1] On peut remarquer que si, dans cette formule (2), on pouvait supposer $x = 0$, $y = 0$, on en conclurait $\theta = 0$. Il faut donc, pour qu'il y ait torsion, que la force ne soit pas directement appliquée au point de la courbe sur lequel s'exerce son action.

(*J. Bertrand.*)

on aura ensuite

$$dz = \int \cos\varphi \, ds,$$

$$x = r\cos\omega,$$

$$y = r\sin\omega,$$

$$r^2 = \frac{\theta}{g}\frac{ds}{d\omega},$$

de sorte que x, y, z pourront, par des quadratures, s'exprimer en fonction de l'angle φ.

(Note de M. J. Bertrand.)

NOTE IV.

Sur la figure d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation.

Reprenons les équations

$$(1) \qquad \frac{\mathrm{m}M - \mathrm{f}}{\mathrm{m}L} = \frac{A^2}{B^2},$$

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{m}N - \mathrm{f}}{\mathrm{m}L} = \frac{A^2}{C^2},$$

qui ont été obtenues par Lagrange, à la page 219; on s'aperçoit, tout d'abord, que le raisonnement qu'il emploie n'établit pas avec rigueur l'égalité des axes B et C. M et N ne différant, en effet, que par le changement des lettres B et C l'une dans l'autre, on voit bien que l'hypothèse $B = C$ réduit les deux équations à une seule, mais il n'est pas évident que cette hypothèse soit nécessaire pour que les équations puissent avoir lieu en même temps. Nous allons montrer, en effet, qu'il existe des formes ellipsoïdales à axes inégaux pour lesquelles l'équilibre est possible.

Les expressions que Lagrange désigne par L, M, N sont développées dans la *Mécanique céleste* de Laplace et se trouvent aujourd'hui dans la plupart des

Traités de Mécanique. On a [1]

$$L = \frac{3\mu}{k^3}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{H},$$

$$M = \frac{3\mu}{k^3}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+\lambda^2x^2)H},$$

$$N = \frac{3\mu}{k^3}\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{(1+\lambda'^2x^2)H};$$

dans ces formules, μ désigne la masse de l'ellipsoïde, et l'on a posé

$$\frac{B^2 - A^2}{A^2} = \lambda^2, \qquad \frac{C^2 - A^2}{A^2} = \lambda'^2,$$

$$H = \sqrt{(1+\lambda^2x^2)(1+\lambda'^2x^2)}.$$

Cela posé, si l'on élimine f entre les équations (1) et (2), on obtient la relation

$$(3) \qquad (M - N)(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2) = L(\lambda^2 - \lambda'^2),$$

ou, d'après les expressions de L, M et N écrites plus haut,

$$(4) \qquad (\lambda^2 - \lambda'^2)\left[(1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{H^3} - \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{H}\right] = 0,$$

égalité à laquelle on peut satisfaire de deux manières :

1° En posant $\lambda' = \lambda$, ce qui donne un ellipsoïde de révolution et s'accorde avec l'indication de Maclaurin rapportée par Lagrange;

2° En posant

$$(5) \qquad (1+\lambda^2)(1+\lambda'^2)\int_0^1 \frac{x^4\,dx}{H^3} = \int_0^1 \frac{x^2\,dx}{H};$$

cette équation fournira λ en fonction de λ' et conduit à l'ellipsoïde à axes inégaux signalé par M. Jacobi.

On peut d'ailleurs démontrer que, pour chaque valeur de λ, l'équation (5) fournira une valeur correspondante de λ'.

Si, en effet, on la met sous la forme

$$(6) \qquad \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)(1-\lambda^2\lambda'^2x^2)\,dx}{H^3} = 0,$$

on voit que, en attribuant à λ une valeur déterminée, le premier membre est

[1] *Mécanique céleste*, t. II, p. 11.

positif lorsque λ' est nul, et négatif si λ' est très grand; il s'annule donc, nécessairement, pour une certaine valeur positive de λ'.

On peut consulter, pour plus de détails, la Note insérée par M. Liouville dans le tome XIV du *Journal de l'École Polytechnique* (XXIIIe Cahier). Nous indiquerons aussi un article inséré par M. Liouville au tome IV de son Journal, et qui contient quelques remarques intéressantes relatives à l'équation (6). Cet article est intitulé : *Observations sur un Mémoire de M. Yvory*. La question a enfin été traitée par un géomètre allemand, M. Meyer, de Kœnigsberg. M. Meyer s'est demandé [1] si, pour une vitesse de rotation donnée, plusieurs formes ellipsoïdales à trois axes inégaux peuvent assurer l'équilibre, et il parvient à démontrer qu'il n'en peut exister qu'une seule. M. Meyer démontre en même temps qu'à une vitesse de rotation donnée correspondent, en général, deux formes ellipsoïdales de révolution; c'est ce que l'on peut voir, du reste, dans la *Mécanique céleste* de Laplace, tome II, page 56.

(*Note de M. J. Bertrand.*)

NOTE V.

Sur une équation signalée par Lagrange comme impossible.

Lagrange a été conduit, page 293, à regarder comme impossible l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}(x^2+y^2)\,\mathrm{Dm}\times\mathrm{S}(x^2+z^2)\,\mathrm{Dm}\times\mathrm{S}(y^2+z^2)\,\mathrm{Dm}\\ &=\mathrm{S}(x^2+y^2)\,\mathrm{Dm}\times(\mathrm{S}xy\,\mathrm{Dm})^2+\mathrm{S}(x^2+z^2)\,\mathrm{Dm}\times(\mathrm{S}xz\,\mathrm{Dm})^2\\ &+\mathrm{S}(y^2+z^2)\,\mathrm{Dm}\times(\mathrm{S}yz\,\mathrm{Dm})^2+2\mathrm{S}xy\,\mathrm{Dm}\times\mathrm{S}xz\,\mathrm{Dm}+\mathrm{S}yz\,\mathrm{Dm};\end{aligned}\right.$$

mais il ne s'est pas arrêté à démontrer cette impossibilité, qu'un premier aperçu lui faisait regarder comme difficile à établir. Le but de cette Note est de remplir cette lacune qui, du reste, a été déjà l'objet d'un travail de M. Binet. Posons

$$a=\mathrm{S}x^2\,\mathrm{Dm},\qquad b=\mathrm{S}y^2\,\mathrm{Dm},\qquad c=\mathrm{S}z^2\,\mathrm{Dm},$$
$$d=\mathrm{S}xy\,\mathrm{Dm},\qquad e=\mathrm{S}xz\,\mathrm{Dm},\qquad f=\mathrm{S}yz\,\mathrm{Dm};$$

[1] *Journal de Crelle*, t. 24.

il faut prouver que l'égalité

$$(2)\quad (a+b)(a+c)(b+c)=d^2(a+b)+e^2(a+c)+f^2(b+c)+2def$$

ne peut avoir lieu dans aucun cas. Pour le faire voir, nous allons montrer que, en faisant passer tous les termes dans le premier membre, le résultat est essentiellement positif.

Or on obtient ainsi, pour premier membre,

$$\begin{aligned}&2abc+b^2c+ac^2+bc^2+ca^2+ba^2+ab^2\\ &\quad-(b+c)f^2-(a+c)e^2-(a+b)d^2-2def,\end{aligned}$$

ce que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&2(abc-def)+(ab-d^2)(a+b)\\ &\quad+(ac-e^2)(a+c)+(bc-f^2)(b+c).\end{aligned}\right.$$

Or on a

$$\begin{aligned} ab-d^2&=\mathrm{S}x^2\,\mathrm{Dm}\times\mathrm{S}y^2\,\mathrm{Dm}-(\mathrm{S}xy\,\mathrm{Dm})^2,\\ ac-e^2&=\mathrm{S}x^2\,\mathrm{Dm}\times\mathrm{S}z^2\,\mathrm{Dm}-(\mathrm{S}xz\,\mathrm{Dm})^2,\\ bc-f^2&=\mathrm{S}y^2\,\mathrm{Dm}\times\mathrm{S}z^2\,\mathrm{Dm}-(\mathrm{S}yz\,\mathrm{Dm})^2,\end{aligned}$$

et il est très facile de voir que ces trois différences sont positives; de plus, des inégalités

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}&ab>d^2,\\ &ac>e^2,\\ &bc>f^2,\end{aligned}\right.$$

on déduira

$$a^2b^2c^2>d^2e^2f^2,$$

et, par suite,

$$abc>def;$$

et l'on voit alors que tous les termes de l'expression (3) sont essentiellement positifs, et que, par conséquent, cette expression ne peut jamais s'annuler.

Nous avons admis les inégalités (4) comme évidentes. Si l'on suppose, en effet, que le nombre des points du système ait une valeur finie quelconque n, la première de ces inégalités, qui ne diffère des deux autres que par des changements de lettres, devient

$$\begin{aligned}&(m_1x_1^2+m_2x_2^2+\ldots+m_nx_n^2)(m_1y_1^2+m_2y_2^2+\ldots+m_ny_n^2)\\ &\quad>(m_1x_1y_1+\ldots+m_nx_ny_n)^2;\end{aligned}$$

or elle peut s'écrire

$$\sum\sum m_i m_{i'}(x_i y_{i'} - x_{i'} y_i)^2 > 0,$$

et, sous cette forme, elle devient complètement évidente. Le seul cas d'exception serait celui où tous les éléments de la somme seraient nuls. Cette condition ne pourrait être remplie pour les trois inégalités (4) à la fois que si tous les points du système se trouvaient sur une même ligne droite passant par l'origine.

(Note de M. J. Bertrand.)

NOTE VI.

Sur les équations différentielles des problèmes de Mécanique, et la forme que l'on peut donner à leurs intégrales.

Dans la Section IV de la seconde Partie, Lagrange fait connaître la forme très remarquable que prennent les équations de la Dynamique, lorsque l'on substitue aux coordonnées des divers points un système quelconque de variables. Nous allons revenir, dans cette Note, sur la formation de ces équations. Nous indiquerons ensuite une transformation très heureuse que leur a fait subir M. Hamilton, et dont on peut déduire plusieurs propriétés de leurs intégrales qui conviennent à tous les problèmes auxquels s'applique la transformation de M. Hamilton.

I.

Soient $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots, x_n, y_n, z_n$ les $3n$ coordonnées des points d'un système; $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, $\ldots$, $\Pi_{3n-k} = 0$, $3n-k$ équations de liaisons qui définissent le système. Dans ces équations, les $3n$ coordonnées peuvent figurer d'une manière quelconque avec le temps t; désignons par $q_1, q_2, \ldots, q_k$ k variables nouvelles, telles que l'on puisse exprimer les $3n$ coordonnées $x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n$ en fonction de ces variables et du temps t, les formules qui expriment les coordonnées étant telles, bien entendu, que les équations $\Pi_1 = 0$, $\Pi_2 = 0$, $\ldots$, $\Pi_{3n-k} = 0$ deviennent identiques lorsqu'on y substitue aux diverses coordonnées leur expression en fonction des variables nouvelles.

Les équations du mouvement ont, comme on sait, pour type général

$$(1)\qquad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i + \lambda_1 \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial x_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Pi_2}{\partial x_i} + \ldots + \lambda_{3n-k} \dfrac{\partial \Pi_{3n-k}}{\partial x_i}, \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i + \lambda_1 \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial y_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Pi_2}{\partial y_i} + \ldots + \lambda_{3n-k} \dfrac{\partial \Pi_{3n-k}}{\partial y_i}, \\ m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i + \lambda_1 \dfrac{\partial \Pi_1}{\partial z_i} + \lambda_2 \dfrac{\partial \Pi_2}{\partial z_i} + \ldots + \lambda_{3n-k} \dfrac{\partial \Pi_{3n-k}}{\partial z_i}, \end{cases}$$

la lettre i désignant un nombre entier quelconque au plus égal à n, m_i la masse du point dont les coordonnées sont x_i, y_i, z_i, et X_i, Y_i, Z_i les composantes de la force qui sollicite ce point.

Multiplions les équations (1), respectivement, par $\dfrac{\partial x_i}{\partial q_m}, \dfrac{\partial y_i}{\partial q_m}, \dfrac{\partial z_i}{\partial q_m}$, et ajoutons-les à toutes les équations analogues que l'on obtiendrait en attribuant à i les n valeurs dont il est susceptible; il viendra

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum m_i\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial q_m}\dfrac{d^2 x_i}{dt^2} + \dfrac{\partial y_i}{\partial q_m}\dfrac{d^2 y_i}{dt^2} + \dfrac{\partial z_i}{\partial q_m}\dfrac{d^2 z_i}{dt^2}\right) \\ = \sum\left(X_1 \dfrac{\partial x_i}{\partial q_m} + Y_1 \dfrac{\partial y_i}{\partial q_m} + Z_1 \dfrac{\partial z_i}{\partial q_m}\right); \end{cases}$$

les facteurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{3n-k}$ disparaissent dans l'addition à cause de la relation

$$(3)\qquad \sum\left(\frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial x_\beta}\frac{\partial x_\beta}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial y_\beta}\frac{\partial y_\beta}{\partial q_m} + \frac{\partial \Pi_\alpha}{\partial z_\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial q_m}\right) = 0,$$

qui résulte de ce que la fonction Π_α (α désignant un indice quelconque au plus égal à $3n-k$) s'annule identiquement lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont remplacés par leurs valeurs en $q_1, q_2, \ldots, q_k$ et t.

Le second membre de l'équation (2) doit être regardé comme une fonction connue des variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$ et t; car $X_i, Y_i, Z_i, x_i, y_i, z_i$ sont donnés par l'énoncé du problème en fonction de ces $k+1$ variables. Il n'y a donc pas lieu de transformer ce second membre, et nous le désignerons par une lettre Q_m.

Pour transformer le premier membre, écrivons-le de la manière suivante :

$$(4)\qquad m_i \sum\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m}\frac{dx'_i}{dt} + \frac{\partial y_i}{\partial q_m}\frac{dy'_i}{dt} + \frac{\partial z_i}{\partial q_m}\frac{dz'_i}{dt}\right),$$

en désignant par x'_i, y'_i, z'_i les composantes de la vitesse du point dont les coordonnées sont x_i, y_i, z_i. On a identiquement

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum m_i\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_m}\frac{dx'_i}{dt}+\frac{\partial y_i}{\partial q_m}\frac{dy'_i}{dt}+\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\frac{dz'_i}{dt}\right)\\
&=\frac{d}{dt}\sum m_i\left(x'_i\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+y'_i\frac{\partial y_i}{\partial q_m}+z'_i\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right)\\
&\quad-\sum m_i\left(x'_i\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}+y'_i\frac{d}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}+z'_i\frac{d}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

x_i, y_i, z_i sont donnés, par hypothèse, en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k$ et t; en différentiant les formules qui les expriment, on aura

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
x'_i&=\frac{\partial x_i}{\partial t}+\frac{\partial x_i}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial x_i}{\partial q_2}q'_2+\ldots+\frac{\partial x_i}{\partial q_k}q'_k,\\
y'_i&=\frac{\partial y_i}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial y_i}{\partial q_2}q'_2+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}q'_k,\\
z'_i&=\frac{\partial z_i}{\partial t}+\frac{\partial z_i}{\partial q_1}q'_1+\frac{\partial z_i}{\partial q_2}q'_2+\ldots+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}q'_k,
\end{aligned}
\right.
$$

d'où l'on conclut

$$
\frac{\partial x_i}{\partial q_m}=\frac{\partial x'_i}{\partial q'_m},\qquad \frac{\partial y_i}{\partial q_m}=\frac{\partial y'_i}{\partial q'_m},\qquad \frac{\partial z_i}{\partial q_m}=\frac{\partial z'_i}{\partial q'_m};
$$

on a, d'ailleurs,

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_m}=\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_m\,\partial t}+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_1\,\partial q_m}q'_1+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_2\,\partial q_m}q'_2+\ldots+\frac{\partial^2 x_i}{\partial q_k\,\partial q_m}q'_k,
$$

ce qui équivaut évidemment, d'après la valeur de x'_i fournie par l'équation (6), à $\dfrac{\partial x'}{\partial q_m}$. On obtiendrait de même

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial y_i}{\partial q_m}=\frac{\partial y'_i}{\partial q_m},\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial z_i}{\partial q_m}=\frac{\partial z'_i}{\partial q_m}.
$$

Si nous avons égard à ces relations et si, de plus, nous posons

$$
\mathrm{T}=\frac{1}{2}\sum m_i(x'^2_i+y'^2_i+z'^2_i),
$$

l'équation (4) deviendra

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_m}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_m}=\mathrm{Q}_m.
$$

On obtiendra k équations de même forme en attribuant successivement à

l'indice m chacune des valeurs 1, 2, ..., k, et l'on formera ainsi les k équations différentielles suivantes :

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1}=\mathrm{Q}_1,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2}=\mathrm{Q}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_k}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_k}=\mathrm{Q}_k,
\end{aligned}
$$

qui sont précisément les équations de Lagrange. Dans ces équations, les inconnues sont $q_1, q_2, \ldots, q_k$, et leurs dérivées $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$; $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \ldots, \mathrm{Q}_k$ sont des fonctions données de ces inconnues; il en est de même de T, car x_i, y_i, z_i étant donnés, par hypothèse, on peut former, par la différentiation, x'_i, y'_i, z'_i. Il est important de remarquer que, d'après les règles de la différentiation, x'_i, y'_i, z'_i seront des fonctions linéaires de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, et que, par suite, T sera une fonction algébrique entière et de degré 2 de ces diverses dérivées. Si les expressions de x_i, y_i, z_i ne contiennent pas explicitement la lettre t, et cela aura lieu toutes les fois que les liaisons seront indépendantes du temps, on voit facilement que x'_i, y'_i, z'_i seront des fonctions homogènes du premier degré, et, par suite, T une fonction homogène de degré 2 par rapport aux variables $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$. Cette remarque a une grande importance.

II.

Nous supposerons, dans les considérations qui vont suivre, un système dont les liaisons sont indépendantes du temps, sollicité par des forces ayant pour composantes les dérivées partielles d'une même fonction. Nous admettrons, en un mot, que le principe des forces vives soit applicable au problème dont nous nous occupons.

Reprenons les équations différentielles du mouvement

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_1}=\mathrm{Q}_1,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_2}=\mathrm{Q}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_k}-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_k}=\mathrm{Q}_k;
\end{aligned}
\right.
$$

ces équations sont du second ordre, mais on peut les ramener au premier ordre en considérant $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ comme k inconnues nouvelles définies par les équations

$$(2) \qquad \frac{dq_1}{dt} = q'_1, \qquad \frac{dq_2}{dt} = q'_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dq_k}{dt} = q'_k,$$

et nous aurons, de cette manière, un système de $2k$ équations du premier ordre.

Poisson a eu l'idée de transformer le système des équations (1) et (2) en substituant aux inconnues $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ les inconnues nouvelles $\frac{\partial T}{\partial q'_1}$, $\frac{\partial T}{\partial q'_2}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial q'_k}$, qui en sont des fonctions linéaires; mais il n'a pas développé complètement son calcul de transformation, et M. Hamilton a donné, le premier, les équations très simples auxquelles ces variables nouvelles vont nous conduire.

Posons

$$\frac{\partial T}{\partial q'_1} = p_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial q'_2} = p_2 \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial T}{\partial q'_k} = p_k,$$

les équations (1) deviendront

$$\frac{dp_1}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1, \qquad \frac{dp_2}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{dp_k}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k;$$

mais la substitution des variables $p_1, p_2, \ldots, p_k$ à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ exige que les seconds termes de ces équations soient transformés. Il est clair, en effet, que T étant exprimé en fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_k, q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, puis en fonction de $q, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k$, n'aura pas, sous les deux formes, la même dérivée par rapport à q_m.

T étant une fonction homogène de degré 2 des variables $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, on a, identiquement,

$$2T = q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + \ldots + q'_k \frac{\partial T}{\partial q'_k},$$

ce que l'on peut écrire

$$(3) \quad T = q'_1 \frac{\partial T}{\partial q'_1} + q'_2 \frac{\partial T}{\partial q'_2} + \ldots + q'_k \frac{\partial T}{\partial q'_k} - T = q'_1 p_1 + q'_2 p_2 + \ldots + q'_k p_k - T.$$

Prenons la variation des deux membres en faisant varier toutes les variables

à la fois; il vient

$$(4) \quad \delta T = q'_1 \delta p_1 + q'_2 \delta p_2 + \ldots + q'_k \delta p_k - \frac{\partial T}{\partial q_1} \delta q_1 - \frac{\partial T}{\partial q_2} \delta q_2 - \ldots - \frac{\partial T}{\partial q_k} \partial q_k.$$

(Nous supprimons, dans le second membre, les termes $p_m \delta q'_m$ et $- \frac{\partial T}{\partial q'_m} \delta q'_m$ qui se détruisent.)

Or, en considérant T comme fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k$, on conclut évidemment de l'équation (4)

$$(5) \qquad \frac{\partial T}{\partial p_1} = q'_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial p_2} = q'_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_k} = q'_k,$$

$$(6) \qquad \frac{\partial T}{\partial q_1} = -\frac{\partial T}{\partial q_1}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_2} = -\frac{\partial T}{\partial q_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial T}{\partial q_k}.$$

Les équations (6) donnent aux équations du mouvement la forme

$$(A) \quad \frac{dp_1}{dt} = Q_1 - \frac{\partial T}{\partial q_1}, \qquad \frac{dp_2}{dt} = Q_2 - \frac{\partial T}{\partial q_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{dp_k}{dt} = Q_k - \frac{\partial T}{\partial q_k};$$

et, si on leur adjoint les relations (5),

$$(B) \qquad \frac{\partial T}{\partial p_1} = \frac{dq_1}{dt}, \qquad \frac{\partial T}{\partial p_2} = \frac{dq_2}{dt}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial T}{\partial p_k} = \frac{dq_k}{dt},$$

on aura $2k$ équations différentielles du premier ordre entre les inconnues $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k$. Pour simplifier ces équations, rappelons-nous que X_i, Y_i, Z_i, composantes de la force qui sollicite le point x_i, y_i, z_i, sont, par hypothèse, les dérivées partielles d'une même fonction U, et que l'on a

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \qquad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i};$$

donc, en se reportant à la définition de la fonction Q_m,

$$Q_m = \sum X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_m} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_m} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_m},$$

on en conclut

$$Q_m = \frac{\partial U}{\partial q_m}.$$

Si l'on remet dans les équations (A), à la place de $Q_1, Q_2, \ldots, Q_k$, les valeurs fournies par cette formule, et que l'on pose, de plus, $U - T = H$, ces équations deviennent

$$(\mathrm{C})\qquad \frac{dp_1}{dt}=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1},\qquad \frac{dp_2}{dt}=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_2},\qquad \ldots,\qquad \frac{dp_k}{dt}=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_k};$$

si l'on remarque, en outre, que, U ne contenant pas $p_1, p_2, \ldots, p_k$, on a $\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_i}=-\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p_i}$, les équations (B) pourront s'écrire

$$(\mathrm{D})\qquad \frac{dq_1}{dt}=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1},\qquad \frac{dq_2}{dt}=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_2},\qquad \ldots,\qquad \frac{dq_k}{dt}=-\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k}.$$

Les systèmes (C) et (D) donnent, sous la forme la plus simple, les équations d'un problème de Mécanique auquel s'applique le principe des forces vives. On voit que deux problèmes de ce genre ne diffèrent l'un de l'autre que par le nombre des variables et la forme de la fonction H.

III.

Quoique l'on soit loin de savoir intégrer, en général, les équations (C) et (D) du paragraphe précédent, leur forme permet, néanmoins, d'établir plusieurs théorèmes fort importants, qui s'appliquent à toutes les questions représentées par ces équations.

Nous commencerons par établir le théorème suivant, qui est dû à Hamilton :

Théorème. — *Les intégrales d'un problème de Mécanique auquel s'applique le principe des forces vives peuvent toutes s'exprimer en égalant à des constantes les dérivées partielles d'une même fonction prises par rapport à d'autres constantes.*

Reprenons les équations différentielles d'un problème de Mécanique auquel s'applique le principe des forces vives :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt}=+\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1}, & \dfrac{dp_2}{dt}=+\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_2}, & \ldots, & \dfrac{dp_k}{dt}=+\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_k}, \\ \dfrac{dq_1}{dt}=-\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1}, & \dfrac{dq_2}{dt}=-\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_2}, & \ldots, & \dfrac{dq_k}{dt}=-\dfrac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k}. \end{cases}$$

Supposons que, ces équations ayant été intégrées, $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k$ soient connus en fonction de t et de $2k$ constantes arbitraires. Si nous remettons ces valeurs dans la fonction H, nous aurons, en différentiant le résultat par rapport à l'une des constantes α,

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \alpha}=\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}+\ldots+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial \alpha}+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial \alpha}+\ldots+\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \alpha},$$

c'est-à-dire, en ayant égard aux équations (1), qui sont, par hypothèse, satisfaites,

$$(2)\qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \alpha}=-\frac{dq_1}{dt}\frac{\partial p_1}{\partial \alpha}-\frac{dq_2}{dt}\frac{\partial p_2}{\partial \alpha}-\ldots-\frac{dq_k}{dt}\frac{\partial p_k}{\partial \alpha}+\frac{dp_1}{dt}\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}+\frac{dp_2}{dt}\frac{\partial q_2}{\partial \alpha}+\ldots+\frac{dp_k}{dt}\frac{\partial q_k}{\partial \alpha},$$

ce que l'on peut écrire de la manière suivante :

$$(3)\qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \alpha}=\frac{d}{dt}\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha}+\ldots+p_k\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}\right)-\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(p_1\frac{dq_1}{dt}+p_2\frac{dq_2}{dt}+\ldots+p_k\frac{dq_k}{dt}\right).$$

Mais, la fonction T étant homogène, de degré 2, par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, on a

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_1}q'_1+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_2}q'_2+\ldots+\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_k}q'_k=2\mathrm{T}.$$

Or cette expression ne diffère pas de celle dont la dérivée, par rapport à α, figure dans le second membre de l'équation (3), en sorte que cette équation devient

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \alpha}=\frac{d}{dt}\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha}+\ldots+p_k\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}\right)-2\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \alpha},$$

ou encore

$$(4)\qquad \frac{\partial(\mathrm{H}+2\mathrm{T})}{\partial \alpha}=\frac{d}{dt}\left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha}+p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha}+\ldots+p_k\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}\right),$$

ou, en intégrant les deux membres par rapport à t,

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\displaystyle\int_0^t(\mathrm{H}+2\mathrm{T})\,dt=+\left(p_1\dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha}+p_2\dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha}+\ldots+p_k\dfrac{\partial q_k}{\partial \alpha}\right)_t \\ \qquad\qquad -\left(p_1\dfrac{\partial q_1}{\partial \alpha}+p_2\dfrac{\partial q_2}{\partial \alpha}+\ldots+p_k\dfrac{\partial q_k}{\partial \alpha}\right)_0, \end{cases}$$

les indices o et t placés au-dessous des parenthèses indiquant qu'il faut y supposer le temps égal à zéro ou à t.

L'intégrale $\int_0^t(\mathrm{H}+2\mathrm{T})\,dt$ est une fonction de t et des $2k$ constantes arbitraires; désignons-la par S, l'équation précédente deviendra

$$(6)\quad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \ldots + p_k\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}\right)_t - \left(p_1\frac{\partial q_1}{\partial \alpha} + p_2\frac{\partial q_2}{\partial \alpha} + \ldots + p_k\frac{\partial q_k}{\partial \alpha}\right)_0;$$

si nous la multiplions par $d\alpha$, pour l'ajouter ensuite à toutes les équations analogues que l'on obtiendrait en remplaçant la constante α, successivement, par toutes celles qui figurent dans les intégrales du problème, on aura

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \delta S = {} & p_1\,\delta q_1 + p_2\,\delta q_2 + \ldots + p_k\,\delta q_k \\ & - (p_1)_0(\delta q_1)_0 - (p_2)_0(\delta q_2)_0 - \ldots - (p_k)_0(\delta q_k)_0, \end{aligned}\right.$$

en désignant par le signe δ la variation totale d'une fonction des diverses constantes, lorsque celles-ci varient toutes à la fois.

Remarquons, actuellement, que S, étant une fonction de t et des $2k$ constantes arbitraires, peut s'exprimer en fonction de t et de $q_1, q_2, \ldots, q_k, (q_1)_0, (q_2)_0, \ldots, (q_k)_0$. On a admis, en effet, que $q_1, q_2, \ldots, q_k$ sont des fonctions de t et de $2k$ constantes; si, dans les k équations qui les déterminent, on fait $t = 0$, on obtiendra k équations nouvelles, dans lesquelles $(q_1)_0, (q_2)_0, \ldots, (q_k)_0$ remplaceront $q_1, q_2, \ldots, q_k$, et qui, jointes aux précédentes, permettent d'exprimer les $2k$ constantes en fonction de t et de $q_1, q_2, \ldots, q_k, (q_1)_0, (q_2)_0, \ldots, (q_k)_0$.

Si nous supposons que le calcul indiqué soit effectué, l'équation (7) fournira la variation de S, lorsque toutes les variables dont cette fonction dépend, à l'exception de t seulement, reçoivent des accroissements infiniment petits. On en conclut, d'après les principes du Calcul différentiel,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\partial S}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial S}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial S}{\partial q_k} = p_k, \\ & \frac{\partial S}{\partial (q_1)_0} = -(p_1)_0, \quad \frac{\partial S}{\partial (q_2)_0} = -(p_2)_0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial S}{\partial (q_k)_0} = -(p_k)_0, \end{aligned}\right.$$

et ces équations ayant lieu entre $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_k$, le temps t et les $2k$ constantes $(p_1)_0, (p_2)_0, \ldots, (p_k)_0, (q_1)_0, (q_2)_0, \ldots, (q_k)_0$, elles sont, évidemment, les intégrales complètes du problème. On peut remarquer que les équations qui composent la deuxième ligne du groupe (8) forment un système à part, dans lequel ne figurent pas $p_1, p_2, \ldots, p_k$, et permettent, par conséquent, de calculer les inconnues $q_1, q_2, \ldots, q_k$ en fonction du temps et de toutes les valeurs initiales $(q_1)_0, (q_2)_0, \ldots, (q_k)_0, (p_1)_0, (p_2)_0, \ldots, (p_k)_0$.

IV.

D'après la manière dont la fonction S s'est introduite au paragraphe précédent, il semble que, pour la connaître, il soit nécessaire d'avoir préalablement résolu le problème dont on s'occupe. Mais nous allons montrer que cette fonction satisfait à une équation différentielle partielle du premier ordre, dont toute intégrale complète peut la remplacer dans la formation des équations intégrales du problème de Mécanique.

Nous avons posé

$$(1)\quad S = \int_0^t (H + 2T)\,dt;$$

en se reportant au paragraphe II, on a

$$H = U - T;$$

donc

$$S = \int_0^t (U + T)\,dt.$$

Différentions les deux membres par rapport à t, et remarquons que S contient t, explicitement, et aussi à cause de $q_1, q_2, \ldots, q_k$, qui en dépendent; nous aurons

$$(2)\quad U + T = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial S}{\partial q_2}\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial S}{\partial q_k}\frac{dq_k}{dt}.$$

Or $\frac{dq_1}{dt}, \frac{dq_2}{dt}, \ldots, \frac{dq_k}{dt}$ sont des fonctions linéaires de $p_1, p_2, \ldots, p_k$, c'est-à-dire (§ III) de $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$, de sorte que, par la substitution de ces valeurs, l'équation (2) deviendra une équation différentielle partielle du second degré par rapport aux dérivées de S. Pour former cette équation, il faudrait transformer, comme nous l'avons indiqué, la somme

$$\frac{\partial S}{\partial q_1}q'_1 + \frac{\partial S}{\partial q_2}q'_2 + \ldots + \frac{\partial S}{\partial q_k}q'_k,$$

qui figure dans le second membre; or le résultat de ce calcul sera évidemment le même si l'on substitue à cette somme l'expression

$$p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_k q'_k,$$

qui n'en diffère que par le changement de $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$ en $p_1, p_2, \ldots, p_k$, changement dont l'effet sera détruit par le changement inverse que l'on doit faire à la fin du calcul. Or, la fonction T étant homogène du second degré par rapport à $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, on a, identiquement,

$$2T = \frac{\partial T}{\partial q'_1} q'_1 + \frac{\partial T}{\partial q'_2} q'_2 + \ldots + \frac{\partial T}{\partial q'_k} q'_k = p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_k q'_k;$$

en sorte que l'équation (2), à laquelle satisfait la fonction S, peut s'écrire symboliquement

$$U + T = \frac{\partial S}{\partial t} + 2T,$$

c'est-à-dire

$$\text{(3)} \qquad U = \frac{\partial S}{\partial t} + (T),$$

les parenthèses qui entourent T indiquant que cette fonction doit être exprimée en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_k$, et que ces variables seront ensuite remplacées par $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$.

L'équation (3) admettra une infinité de solutions contenant chacune k constantes arbitraires, et que Lagrange nomme les *intégrales complètes*. L'une de ces intégrales sera la fonction S que nous avons définie dans le paragraphe précédent; mais nous allons montrer que toute autre intégrale complète peut remplacer celle-là et fournir la solution du problème de Mécanique dont on s'occupe.

Soit, en effet,

$$\text{(4)} \qquad S = F(t, q_1, q_2, \ldots, q_k, a_1, a_2, \ldots, a_k)$$

une telle intégrale, satisfaisant identiquement à l'équation (3) et contenant k constantes arbitraires; si l'on pose

$$\text{(5)} \qquad \frac{\partial S}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial S}{\partial a_k} = b_k,$$

je dis que l'on aura la solution complète du problème proposé, et que ces équations (5) fourniront les valeurs de $q_1, q_2, \ldots, q_k$ en fonction de t et de $2k$ constantes arbitraires. Pour le démontrer, rappelons-nous que les

équations différentielles du mouvement sont

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} \frac{dp_1}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial q_2}, & \ldots, & \frac{dp_k}{dt} = +\frac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \frac{dq_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_2}, & \ldots, & \frac{dq_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_k}, \end{cases}$$

dans lesquelles H désigne la différence $U - T$. U ne contenant pas $p_1, p_2, \ldots, p_k$, on a

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} = -\frac{\partial T}{\partial p_1},$$

en sorte que la seconde ligne des équations (6) peut s'écrire

$$\text{(7)} \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_1}, \quad \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_2}, \quad \ldots, \quad \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_k}.$$

Nous commencerons par montrer que ces équations (7) peuvent se déduire du système des équations (5).

En différentiant ces équations (5) par rapport à t, nous aurons

$$\text{(8)} \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial a_1 \partial t} + \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial a_1} q'_1 + \frac{\partial^2 S}{\partial q_2 \partial a_1} q'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_1} q'_k = 0,$$

à laquelle il faudra adjoindre $k - 1$ équations que l'on formera en changeant dans celle-ci a_1 en $a_2, a_3, \ldots, a_k$. Le système des k équations ainsi obtenues donnera les valeurs de $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, qui résultent des relations (5).

Or, en différentiant par rapport à a_1 l'équation (3), à laquelle S satisfait identiquement, il vient

$$\text{(9)} \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial t \, \partial a_1} + \frac{\partial (T)}{\partial a_1} = 0,$$

$\frac{\partial (T)}{\partial a_1}$ désignant ici la dérivée par rapport à a_1 de l'expression dans laquelle se transforme T, lorsque l'on y remplace $p_1, p_2, \ldots, p_k$ par $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$. On a évidemment, d'après cela,

$$\text{(10)} \qquad \frac{\partial (T)}{\partial a_1} = \frac{\partial T}{\partial p_1} \frac{\partial^2 S}{\partial q_1 \partial a_1} + \frac{\partial T}{\partial p_2} \frac{\partial^2 S}{\partial q_2 \partial a_1} + \ldots + \frac{\partial T}{\partial p_k} \frac{\partial^2 S}{\partial q_k \partial a_1};$$

et, dans le second membre de cette équation, il faudra encore transformer $\frac{\partial T}{\partial p_1}, \frac{\partial T}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial p_k}$, en y remplaçant $p_1, p_2, \ldots, p_k$ par $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$.

Pour indiquer cette transformation, nous placerons ces quantités entre des parenthèses. L'équation (9) deviendra alors

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial a_1}+\left(\frac{\partial T}{\partial p_1}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial q_1\,\partial a_1}+\left(\frac{\partial T}{\partial p_2}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial q_2\,\partial a_1}+\ldots+\left(\frac{\partial T}{\partial p_k}\right)\frac{\partial^2 S}{\partial q_k\,\partial a_1}=0,$$

à laquelle on pourra joindre $k-1$ équations que l'on formerait en changeant dans celle-ci a_1 en $a_2, a_3, \ldots, a_k$. Or, si l'on compare le système des équations ainsi obtenues avec celui dont l'équation (8) est le type, on en conclut que ce dernier sera satisfait par les valeurs suivantes des inconnues q'_1, $q'_2, \ldots, q'_k$:

$$(12)\qquad q'_1=\left(\frac{\partial T}{\partial p_1}\right),\qquad q'_2=\left(\frac{\partial T}{\partial p_2}\right),\qquad \ldots,\qquad q'_k=\left(\frac{\partial T}{\partial p_k}\right).$$

Or, on a démontré [§ II, équation (5)] les relations

$$\frac{\partial T}{\partial p_1}=q'_1,\qquad \frac{\partial T}{\partial p_2}=q'_2,\qquad \ldots,\qquad \frac{\partial T}{\partial p_k}=q'_k,$$

en sorte que les formules précédentes peuvent s'écrire

$$(13)\qquad q'_1=(q'_1),\qquad q'_2=(q'_2),\qquad \ldots,\qquad q'_k=(q'_k),$$

$(q'_1), (q'_2), \ldots, (q'_k)$ désignant ce que deviennent les expressions $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$, lorsque, après les avoir exprimées en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_k$, on remplace ces dernières variables par $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$. Supposons maintenant qu'en faisant subir cette transformation aux seconds membres des équations (12) on exprime en même temps, et par les formules mêmes dont on aura à faire usage, les premiers membres en fonction de $p_1, p_2, \ldots, p_k$; on formera un système d'équations dont les deux membres ne différeront que par le changement de $p_1, p_2, \ldots, p_k$ en $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$, et dont on déduira, par conséquent,

$$(14)\qquad p_1=\frac{\partial S}{\partial q_1},\qquad p_2=\frac{\partial S}{\partial q_2},\qquad \ldots,\qquad p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k}.$$

Si nous revenons actuellement aux équations (12), on peut les écrire

$$(15)\qquad q'_1=\frac{\partial T}{\partial p_1},\qquad q'_2=\frac{\partial T}{\partial p_2},\qquad \ldots,\qquad q'_k=\frac{\partial T}{\partial p_k},$$

en supprimant les parenthèses qui n'ont plus d'autre objet que d'indiquer la

substitution de $\frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_k}$ à des quantités qui leur sont égales en vertu des équations (14). Les formules (15) forment une moitié des équations différentielles du mouvement, qui sont, par conséquent, satisfaites.

Les équations qui, jointes au système (15), représentent les conditions complètes du problème sont les suivantes :

$$(16)\qquad \frac{dp_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_1},\qquad \frac{dp_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_2},\qquad \ldots,\qquad \frac{dp_k}{dt}=\frac{\partial H}{\partial q_k}.$$

Pour montrer qu'elles sont également satisfaites, différentions par rapport à t les équations (14); les résultats obtenus seront de la forme

$$(17)\qquad \frac{dp_1}{dt}=\frac{\partial^2 S}{\partial q_1\,\partial t}+\frac{\partial^2 S}{\partial q_1^2}q'_1+\frac{\partial^2 S}{\partial q_1\,\partial q_2}q'_2+\ldots+\frac{\partial^2 S}{\partial q_1\,\partial q_k}q'_k,$$

ou, en remplaçant $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$ par leurs valeurs $\frac{\partial T}{\partial p_1}, \frac{\partial T}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial T}{\partial p_k}$,

$$(18)\qquad \frac{dp_1}{dt}=\frac{\partial^2 S}{\partial q_1\,\partial t}+\frac{\partial^2 S}{\partial q_1^2}\frac{\partial T}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 S}{\partial q_1\,\partial q_2}\frac{\partial T}{\partial p_2}+\ldots+\frac{\partial^2 S}{\partial q_1\,\partial q_k}\frac{\partial T}{\partial p_k}.$$

Différentions actuellement par rapport à q_1 l'équation

$$(19)\qquad U=\frac{\partial S}{\partial t}+(T);$$

il viendra

$$(20)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial q_1}=\dfrac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial q_1}+\dfrac{\partial (T)}{\partial q_1} \\ \qquad =\dfrac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial q_1}+\left(\dfrac{\partial T}{\partial q_1}\right)+\left(\dfrac{\partial T}{\partial p_1}\right)\dfrac{\partial^2 S}{\partial q_1^2}+\left(\dfrac{\partial T}{\partial p_2}\right)\dfrac{\partial^2 S}{\partial q_2\,\partial q_1}+\ldots+\left(\dfrac{\partial T}{\partial p_k}\right)\dfrac{\partial^2 S}{\partial q_k\,\partial q_1}, \end{cases}$$

ou, en remplaçant $\left(\frac{\partial T}{\partial p_1}\right), \left(\frac{\partial T}{\partial p_2}\right), \cdots$ par leurs valeurs $q'_1, q'_2, \ldots, q'_k$,

$$(21)\qquad \frac{\partial U}{\partial q_1}=\frac{\partial^2 S}{\partial t\,\partial q_1}+\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right)+q'_1\frac{\partial^2 S}{\partial q_1^2}+q'_2\frac{\partial^2 S}{\partial q_2\,\partial q_1}+\ldots+q'_k\frac{\partial^2 S}{\partial q_k\,\partial q_1}.$$

En comparant les équations (17) et (21), on conclut

$$\frac{dp_1}{dt}=\frac{\partial U}{\partial q_1}-\left(\frac{\partial T}{\partial q_1}\right).$$

Or on peut, en vertu des relations (14), enlever les parenthèses qui entourent $\frac{\partial T}{\partial q_1}$, et l'on a enfin

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{\partial(U - T)}{\partial q_1} = \frac{\partial H}{\partial q_1}.$$

C'est précisément la relation que nous voulions établir; on obtiendrait des valeurs analogues pour $\frac{dp_2}{dt}, \ldots, \frac{dp_k}{dt}$, et il est prouvé, par conséquent, que toutes les équations du mouvement sont satisfaites par le système des relations (5).

L'idée de substituer à la fonction S de M. Hamilton l'une quelconque des intégrales de l'équation à laquelle elle satisfait est due à Jacobi [1]. La démonstration a été développée par lui dans le cas d'un système sans liaisons. Plusieurs géomètres ont traité depuis la même question, mais je crois la démonstration précédente plus simple que celles qui avaient été données jusqu'ici.

V.

M. Hamilton nomme la fonction S, à laquelle se rapportent les calculs précédents, la fonction *principale* du problème. Il a considéré, en outre, une autre fonction qu'il nomme *caractéristique*, et que nous désignerons par V. Nous croyons devoir placer ici la définition de cette fonction V et l'indication de sa propriété la plus importante. C'est elle qui s'est présentée d'abord à M. Hamilton, et c'est en l'étudiant qu'il est, je crois, le plus facile d'apercevoir les idées qui l'ont guidé.

La fonction V n'est autre chose que l'intégrale $\int_0^t dt \sum mv^2$ que l'on considère dans le principe de la moindre action, de telle sorte qu'en cherchant à démontrer ce principe on peut être conduit de la manière la plus naturelle, comme on va le voir, à la belle découverte de M. Hamilton.

D'après la notation adoptée dans cette Note, on a

$$V = \int_0^t 2T\,dt = \int_0^t (p_1 q'_1 + p_2 q'_2 + \ldots + p_n q'_n)\,dt;$$

[1] *Journal de Crelle*, t. 17.

on en déduit

$$\delta V = + \int_0^t (p_1\,\delta q'_1 + p_2\,\delta q'_2 + \ldots + p_n\,\delta q'_n)\,dt$$
$$+ \int_0^t (q'_1\,\delta p_1 + q'_2\,\delta p_2 + \ldots + q'_n\,\delta p_n)\,dt,$$

le signe δ se rapportant à la variation de toutes les constantes qui figurent dans $q_1, q_2, \ldots, q_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$.

En intégrant par parties les termes de la première intégrale, et remarquant que $\delta q'_1 = \frac{d\,\delta q_1}{dt}$, il vient

$$\delta V = \int_0^t \left(-\delta q_1 \frac{dp_1}{dt} - \delta q_2 \frac{dp_2}{dt} - \ldots - \delta q_n \frac{dp_n}{dt} + q'_1\,\delta p_1 + q'_2\,\delta p_2 + \ldots + q'_n\,\delta p_n\right) dt$$
$$+ (p_1\,\delta q_1 + p_2\,\delta q_2 + \ldots + p_n\,\delta q_n)_0^t,$$

les indices o et t placés après les parenthèses indiquant qu'il faut y remplacer successivement le temps par o et t, et faire la différence des deux résultats. Or, d'après les équations différentielles du mouvement, on a évidemment

$$-\delta H = -\delta q_1 \frac{dp_1}{dt} - \delta q_2 \frac{dp_2}{dt} - \ldots - \delta q_n \frac{dp_n}{dt} + q'_1\,\delta p_1 + q'_2\,\delta p_2 + \ldots + q'_n\,\delta p_n;$$

en sorte que, δH étant constant en vertu du principe des forces vives, l'équation précédente devient

$$\delta V = -t\,\delta H + p_1\,\delta q_1 + p_2\,\delta q_2 + \ldots + p_n\,\delta q_n - p_1^0\,\delta q_1^0 - p_2^0\,\delta q_2^0 - \ldots - p_n^0\,\delta q_n^0.$$

Si donc on considère V comme une fonction de $q_1, q_2, \ldots, q_n, q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0$ et de H, on aura

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_n} = p_n,$$
$$\frac{\partial V}{\partial q_1^0} = -p_1^0, \quad \frac{\partial V}{\partial q_2^0} = -p_2^0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V}{\partial q_n^0} = -p_n^0, \quad \frac{\partial V}{\partial H} = -t.$$

Ces équations peuvent être considérées comme la solution complète du problème proposé, qui sera, par conséquent, résolu si l'on parvient à déterminer la fonction caractéristique V; V satisfait comme S à une équation différentielle partielle dont une seule intégrale complète suffit pour résoudre le problème. Mais nous renverrons, pour l'étude de cette équation, au Mémoire de Jacobi, qui a traité avec développement le cas d'un système libre; le cas d'un système à liaisons quelconques ne présentera aucune difficulté aux personnes qui auront étudié les propositions analogues démontrées plus haut et relatives à la fonction S.

Nous ne pouvons indiquer ici aucune application particulière de la théorie qui fait l'objet de cette Note. On pourra consulter utilement plusieurs Mémoires de M. Liouville, insérés aux tomes XIV et XVI de son Journal et dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1850.

(*Note de M. J. Bertrand.*)

NOTE VII.

Sur un théorème de Poisson.

Poisson a fait connaître, dans l'un de ses Mémoires, un théorème très général sur lequel il avait fondé une manière nouvelle de présenter la théorie de la variation des constantes arbitraires. Quoique ce théorème semblât extrêmement remarquable en lui-même, Poisson se contenta de l'appliquer au but spécial qu'il se proposait, sans indiquer même qu'il fût possible d'en faire un autre usage. Plus de trente années après, au moment même de la mort de Poisson, l'attention des géomètres fut appelée de nouveau sur ce point par l'illustre Jacobi, qui signala le théorème de Poisson comme un résultat prodigieux, et le plus important à ses yeux de toute la science du mouvement. Jacobi n'ajoutait d'ailleurs aucun développement à cette assertion, sur laquelle ses œuvres posthumes nous donneront peut-être quelques détails. Le but de cette Note est de faire connaître le théorème de Poisson et d'indiquer le parti que l'on peut en tirer pour l'intégration des équations différentielles de la Mécanique.

I.

Considérons un problème quelconque de Mécanique auquel s'applique la transformation de M. Hamilton exposée dans la Note précédente. Soient

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{dp_1}{dt}=+\dfrac{\partial H}{\partial q_1}, & \dfrac{dp_2}{dt}=+\dfrac{\partial H}{\partial q_2}, & \ldots, & \dfrac{dp_k}{dt}=+\dfrac{\partial H}{\partial q_k}, \\ \dfrac{dq_1}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial p_1}, & \dfrac{dq_2}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial p_2}, & \ldots, & \dfrac{dq_k}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial p_k} \end{array}\right.$$

les équations différentielles de ce problème. Si l'on suppose connues deux intégrales de ce système d'équations, contenant chacune une constante arbitraire et résolues par rapport à ces constantes,

$$(2)\qquad \alpha=\varphi(q_1,q_2,\ldots,q_k,p_1,p_2,\ldots,p_k,t),$$

$$(3)\qquad \beta=\psi(q_1,q_2,\ldots,q_k,p_1,p_2,\ldots,p_k,t),$$

le théorème de Poisson consiste en ce que l'expression

$$(4)\quad \frac{\partial\alpha}{\partial q_1}\frac{\partial\beta}{\partial p_1}-\frac{\partial\alpha}{\partial p_1}\frac{\partial\beta}{\partial q_1}+\frac{\partial\alpha}{\partial q_2}\frac{\partial\beta}{\partial p_2}-\frac{\partial\alpha}{\partial p_2}\frac{\partial\beta}{\partial q_2}+\ldots+\frac{\partial\alpha}{\partial q_k}\frac{\partial\beta}{\partial p_k}-\frac{\partial\alpha}{\partial p_k}\frac{\partial\beta}{\partial q_k},$$

qu'il désigne par (α,β), conserve une valeur constante pendant la durée du mouvement; en sorte que, *si l'équation*

$$(\alpha,\beta)=\text{const.}$$

n'est pas une identité, elle sera une intégrale du système d'équations différentielles proposé.

Pour démontrer cette proposition, nous allons former la dérivée de l'expression (α,β) et vérifier qu'elle est nulle; on a

$$(5)\quad \frac{d(\alpha,\beta)}{dt}=\sum\left(\frac{\partial\alpha}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\beta}{\partial p_i}+\frac{\partial\beta}{\partial p_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial q_i}-\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\beta}{\partial q_i}-\frac{\partial\beta}{\partial q_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\right).$$

Or, α et β étant des intégrales du système (1), $\dfrac{d\alpha}{dt}$ et $\dfrac{d\beta}{dt}$ sont nuls identiquement lorsque l'on a égard à ces équations, et l'on a

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\sum\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}-\frac{\partial\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}=0,\qquad \frac{\partial\beta}{\partial t}+\sum\frac{\partial\beta}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}-\frac{\partial\beta}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}=0;$$

si l'on différentie ces deux équations par rapport à $p_{i'}$ et à $q_{i'}$, i' désignant un indice quelconque, on aura

$$(6)\quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial p_{i'}}+\sum\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial p_i\,\partial p_{i'}}\frac{\partial H}{\partial q_i}+\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial p_{i'}}-\frac{\partial^2\alpha}{\partial q_i\,\partial p_{i'}}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_{i'}}\right)=0,$$

$$(7)\quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial q_{i'}}+\sum\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial p_i\,\partial q_{i'}}\frac{\partial H}{\partial q_i}+\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial q_{i'}}-\frac{\partial^2\alpha}{\partial q_i\,\partial q_{i'}}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial q_{i'}}\right)=0,$$

et deux autres équations qui ne différeraient de celles-là que par le changement de α en β.

On a d'ailleurs

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial p_r}=\frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial p_r}+\sum\frac{\partial^2\alpha}{\partial p_i\,\partial p_r}\frac{dp_i}{dt}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial q_i\,\partial p_r}\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial p_r}+\sum\frac{\partial^2\alpha}{\partial p_i\,\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial q_i}-\frac{\partial^2\alpha}{\partial q_i\,\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial p_i},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial q_r}=\frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial q_r}+\sum\frac{\partial^2\alpha}{\partial p_r\,\partial q_i}\frac{dp_i}{dt}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial q_i\,\partial q_r}\frac{dq_i}{dt}=\frac{\partial^2\alpha}{\partial t\,\partial q_r}+\sum\frac{\partial^2\alpha}{\partial p_i\,\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial q_i}-\frac{\partial^2\alpha}{\partial q_i\,\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial p_i};$$

en vertu de ces relations, les équations (6) et (7) peuvent s'écrire

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial p_r}+\sum\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial p_r}-\frac{\partial\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_r}\right)=0, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial q_r}+\sum\left(\frac{\partial\alpha}{\partial p_i}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial q_r}-\frac{\partial\alpha}{\partial q_i}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial q_r}\right)=0, \tag{9}$$

et l'on aurait de même

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\beta}{\partial p_r}+\sum\frac{\partial\beta}{\partial p_i}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial p_r}-\frac{\partial\beta}{\partial q_i}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial p_r}=0, \tag{10}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\beta}{\partial q_r}+\sum\frac{\partial\beta}{\partial p_i}\frac{\partial^2 H}{\partial q_i\,\partial q_r}-\frac{\partial\beta}{\partial q_i}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\,\partial q_r}=0. \tag{11}$$

Si l'on déduit des équations (8), (9), (10), (11) les valeurs de $\frac{d}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial p_r}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial\alpha}{\partial q_r}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial\beta}{\partial p_r}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial\beta}{\partial q_r}$, pour toutes les valeurs de l'indice i, et qu'on les reporte dans l'équation (5) que nous voulons démontrer, on obtiendra une identité, comme on s'en assure bien simplement en remarquant qu'après cette substitution tous les termes du second membre contiennent en facteur une seconde dérivée de la fonction H; en réunissant les termes qui correspondent à la même dérivée, on verra qu'ils sont au nombre de quatre et se détruisent deux à deux. On en conclut

$$\frac{d(\alpha,\beta)}{dt}=0$$

et, par suite,

$$(\alpha,\beta)=\text{const.},$$

ce qui est précisément le théorème de Poisson.

Si (α,β) est une fonction des variables $q_1, q_2, \ldots, q_k, p_1, p_2, \ldots, p_k$ que l'on ne puisse pas considérer comme fonction de α et de β, cette équation $(\alpha,\beta)=\text{const.}$ sera une troisième intégrale que l'on pourra combiner avec les deux intégrales α et β, de manière à former une nouvelle expression constante qui, dans certains cas, pourra être une quatrième intégrale, et ainsi de suite. Malheureusement, les cas dans lesquels ce procédé ne conduit pas à des intégrales nouvelles sont excessivement nombreux. Nous allons donner quelques détails sur cette question importante.

II.

Soient

$$\alpha=\varphi_1,\quad \beta=\varphi_2,\quad \gamma=\varphi_3,\quad \ldots,\quad \lambda=\varphi_{2k}$$

les intégrales d'un problème de Mécanique, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k}$ représentant des fonctions des inconnues et de la lettre t qui conservent la même valeur pendant toute la durée du mouvement. Une fonction arbitraire de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2k}$ partagera évidemment la même propriété, et nous pourrons regarder

$$A=F_1(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{2k})=F_1(\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\eta,\lambda)$$

comme étant aussi une intégrale des équations différentielles du mouvement.

Si nous considérons une seconde intégrale

$$B=F_2(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{2k})=F_2(\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\eta,\lambda),$$

F_1 et F_2 désignant deux fonctions arbitraires, on vérifiera bien facilement, par les seules règles de la différentiation, qu'en combinant les deux intégrales A et B, comme il a été dit dans le paragraphe précédent, on obtiendra identiquement

$$\begin{aligned}(A,B)=&+(\alpha,\beta)\left(\frac{\partial F_1}{\partial\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial\beta}-\frac{\partial F_1}{\partial\beta}\frac{\partial F_2}{\partial\alpha}\right)+(\alpha,\gamma)\left(\frac{\partial F_1}{\partial\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial\gamma}-\frac{\partial F_1}{\partial\gamma}\frac{\partial F_2}{\partial\alpha}\right)+\ldots\\&+(\beta,\gamma)\left(\frac{\partial F_1}{\partial\beta}\frac{\partial F_2}{\partial\gamma}-\frac{\partial F_1}{\partial\gamma}\frac{\partial F_2}{\partial\beta}\right)+\ldots+(\eta,\lambda)\left(\frac{\partial F_1}{\partial\eta}\frac{\partial F_2}{\partial\lambda}-\frac{\partial F_1}{\partial\lambda}\frac{\partial F_2}{\partial\eta}\right).\end{aligned}$$

Cette formule fournit le résultat de la combinaison de deux intégrales A et B, en fonction des résultats obtenus par la combinaison des intégrales dont A et B dépendent; elle nous sera fort utile.

III.

Lorsque l'on connaît deux intégrales, que nous désignerons, pour abréger, par le nom des constantes α et β qui y figurent, il peut arriver, de deux manières différentes, que le résultat de leur combinaison ne fournisse pas une intégrale nouvelle. Cela aura lieu, en effet, si l'expression (α,β) est identiquement constante, et si, sans être identiquement constante, elle est fonction de α et de β, de manière à pouvoir résulter de la combinaison de ces deux intégrales. Il est important d'examiner ces deux cas et de reconnaître s'ils doivent fréquemment se présenter. Nous démontrerons d'abord un théorème qui permet de les rattacher l'un à l'autre.

Si

$$\alpha = \varphi, \qquad \beta = \psi$$

sont deux intégrales d'un même problème, telles que (α, β) *soit une fonction de* α *et de* β, *il existe toujours une fonction de* α *et de* β *qui, égalée à une constante* γ, *fournira une intégrale telle que* (α, γ) *soit identiquement l'unité.*

On a, en effet, d'après la formule du paragraphe précédent,

$$(\alpha, \gamma) = (\alpha, \beta) \frac{\partial \gamma}{\partial \beta};$$

si donc (α, β) est, comme on l'a supposé, fonction de α et de β, on pourra toujours déterminer γ par la condition

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \beta} = \frac{1}{(\alpha, \beta)}$$

et faire en sorte que (α, γ) soit égal à l'unité.

IV.

Après avoir montré que les deux cas dans lesquels le théorème de Poisson donne des résultats illusoires sont liés intimement l'un à l'autre, nous allons nous borner à étudier les intégrales qui, combinées avec une intégrale donnée, donnent à l'expression de Poisson une valeur *identiquement* constante.

Nous démontrerons le théorème suivant :

Quelle que soit une intégrale donnée α, *on peut toujours compléter la solution du problème en lui adjoignant d'autres intégrales* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2k-1}$ *qui, combinées avec* α, *donnent à l'équation de Poisson une forme identique, de telle sorte que l'on ait*

$$(\alpha, \beta_1) = 1, \qquad (\alpha, \beta_2) = 0, \qquad (\alpha, \beta_3) = 0, \qquad \ldots, \qquad (\alpha, \beta_{2k-1}) = 0.$$

Nous commencerons par remarquer que, quelle que soit l'intégrale α, il est impossible qu'il n'en existe pas moins une autre β, telle que (α, β) soit différent de zéro.

Si, en effet, il en était autrement, l'équation

$$\sum \frac{\partial \alpha}{\partial p_1} \frac{\partial \beta}{\partial q_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial q_1} \frac{\partial \beta}{\partial p_1} = 0,$$

dans laquelle la fonction β est regardée comme inconnue, admettrait toutes les solutions de l'équation

$$\sum \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_1} \frac{\partial \beta}{\partial q_1} - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_1} \frac{\partial \beta}{\partial p_1} = 0,$$

qui exprime que β est une intégrale. Or, ces deux équations étant linéaires et contenant le même nombre de variables indépendantes, ne peuvent avoir la même intégrale générale sans être identiques, ce qui exige, évidemment, que α soit une fonction de H, c'est-à-dire que l'intégrale donnée soit celle des forces vives. Mais, dans ce cas-là même, il existe une intégrale qui, combinée avec α, donne pour résultat l'unité; c'est celle dont la constante est ajoutée au temps. Notre assertion est donc démontrée dans tous les cas.

Nous montrerons, en second lieu, *qu'à une intégrale donnée* α *il en correspond toujours au moins une autre* β, *telle que*

$$(\alpha, \beta) = 1.$$

Soit, en effet, γ une intégrale, telle que (α, γ) soit différent de zéro. Posons

$$(\alpha, \gamma) = \delta,$$
$$(\alpha, \delta) = \varepsilon,$$
$$(\alpha, \varepsilon) = \eta,$$

et arrêtons-nous lorsque l'une des intégrales δ, ε, η sera identiquement constante ou fonction des précédentes. Il est impossible que l'un de ces cas ne finisse pas par se présenter, car le nombre des intégrales distinctes est nécessairement limité. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$\eta = \mathrm{F}(\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon),$$

la fonction F pouvant se réduire à une simple constante. Soit $\varpi(\alpha, \gamma, \delta, \varepsilon)$ une nouvelle intégrale que je nomme ζ, on aura

$$(\alpha, \zeta) = \delta \frac{\partial \varpi}{\partial \gamma} + \varepsilon \frac{\partial \varpi}{\partial \delta} + \eta \frac{\partial \varpi}{\partial \varepsilon};$$

et, en posant $(\alpha, \zeta) = 1$, on obtiendra une équation différentielle de laquelle on déduira ϖ.

Nous pouvons actuellement donner la démonstration du théorème qui fait l'objet de ce paragraphe.

Une intégrale α étant donnée, on peut toujours compléter la solution du problème par des intégrales $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2k-1}$, telles que

$$(\alpha, \beta_1) = 1, \quad (\alpha, \beta_2) = 0, \quad \ldots, \quad (\alpha, \beta_{2k-1}) = 0.$$

L'existence de l'intégrale β_1, telle que $(\alpha, \beta_1) = 1$, a été démontrée plus haut. Il reste donc à prouver qu'il existe $2k-2$ intégrales distinctes de α et de β_1 qui, combinées avec α, donnent à l'équation de Poisson la forme $0 = 0$. Nommons, en effet, μ le nombre des intégrales qui remplissent cette condition, et désignons-les par $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{\mu+1}$. Si $\mu + 1$ est moindre que $2k-2$, il existera des intégrales indépendantes de celles-là, ainsi que de α et de β_1. Soit $\beta_{\mu+2}$ une de ces intégrales, posons

$$(\alpha, \beta_{\mu+2}) = \beta_{\mu+3}.$$

$\beta_{\mu+3}$ sera, par hypothèse, différent de zéro. Il le sera également de l'unité, car on aurait sans cela

$$(\alpha, \beta_{\mu+2} - \beta_1) = 0,$$

et $\beta_{\mu+2} - \beta_1$ serait alors, d'après ce que nous avons supposé, fonction de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\mu+1}$, en sorte que $\beta_{\mu+2}$ ne serait pas une intégrale nouvelle.

Posons

$$(\alpha, \beta_{\mu+3}) = \beta_{\mu+4},$$
$$(\alpha, \beta_{\mu+4}) = \beta_{\mu+5},$$

et ainsi de suite, jusqu'à ce que nous arrivions à une intégrale identiquement constante ou fonction des précédentes. Soit

$$\beta_{\mu+i} = F(\beta_{\mu+i-1}, \beta_{\mu+i-2}, \beta_{\mu+i-3}, \ldots, \beta_1, \alpha)$$

cette intégrale, et posons

$$\gamma = \varpi(\beta_{\mu+i-1}, \beta_{\mu+i-2}, \beta_{\mu+i-3}, \ldots, \beta_1, \alpha),$$

nous aurons

$$(\alpha, \gamma) = \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+i-1}} F + \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_{\mu+i-2}} \beta_{\mu+i-1} + \ldots + \frac{\partial\varpi}{\partial\beta_1};$$

et, en égalant (α, γ) à zéro, on obtiendra évidemment une équation en ϖ, dont l'intégrale fournira des solutions fonctions de $\beta_1, \beta_{\mu+2}, \beta_{\mu+3}, \ldots, \beta_{\mu+i-1}$, et distinctes de $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_{\mu+1}$; car, sans cela, il existerait, contrairement à ce que l'on a supposé, une relation entre les intégrales obtenues avant $\beta_{\mu+1}$.

Nous avions donc fait une hypothèse impossible en limitant à μ le nombre des intégrales qui, combinées avec α, donnent un résultat identiquement nul, et il est impossible que μ soit différent de $2k-2$.

Le théorème énoncé est, par conséquent, démontré.

V.

D'après ce qui précède, une intégrale α étant donnée, *on peut* compléter la solution du problème par des intégrales $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2k-1}$, qui, combinées avec α, donnent toutes à la formule de Poisson une formule identique. Il ne faut pas croire cependant que toutes les intégrales du problème soient pour cela dans le même cas.

Considérons, en effet, l'intégrale la plus générale

$$\varpi(\alpha, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2k-1}) = \eta;$$

on aura, d'après la formule du paragraphe II,

$$(\alpha, \eta) = (\alpha, \beta_1) \frac{\partial\eta}{\partial\beta_1} = \frac{\partial\eta}{\partial\beta_1},$$

et, par conséquent, l'expression (α, η) ne sera identiquement constante que si $\frac{\partial\eta}{\partial\beta_1}$ est constant lui-même; mais on voit que toutes les intégrales, en nombre infini, qui résultent de la combinaison de $\alpha, \beta_2, \ldots, \beta_{2k-1}$, donneront un résultat identiquement nul, si on les combine avec α. Celles-là seules, qui contiennent β_1, peuvent conduire à des résultats non identiques. Les deux intégrales α et β_1 se trouvent, d'après cela, liées l'une à l'autre d'une manière toute spéciale, et je proposerai de les désigner sous le nom d'*intégrales conjuguées*. Les propriétés de ces intégrales conjuguées formeraient une étude intéressante, dont les développements ne doivent pas trouver place ici. Pour l'application que l'on peut faire du théorème de Poisson à l'intégration des équations différentielles de la Mécanique, je renverrai à un Mémoire publié dans le tome XVII du *Journal de M. Liouville*, page 393.

(*Note de M. J. Bertrand.*)

NOTE VIII.

Sur les oscillations infiniment petites d'un système de corps;
par M. G. Darboux.

Au début de la *Section sixième* (p. 369), Lagrange étudie d'une manière approfondie les oscillations très petites qu'exécutent les différents corps d'un système lorsqu'on les écarte très peu de leur position d'équilibre. L'emploi des admirables résultats que lui doit la Mécanique analytique permettait seul d'aborder avec succès cette question, une des plus importantes et des plus générales qui se présentent dans la théorie du mouvement. Quelques-uns des résultats que Lagrange énonce ne sont pas suffisamment établis. La solution du problème dépend de la résolution d'une équation algébrique que Lagrange apprend à former; cette équation n'a jamais de racines imaginaires, mais, contrairement aux affirmations de l'illustre géomètre, elle peut très bien avoir des racines égales. C'est ce que nous mettrons en évidence en suivant une méthode de réduction des formes quadratiques qui est due à M. Kronecker.

Considérons deux formes quadratiques homogènes

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} f &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots = \sum\sum a_{ik}x_ix_k,\\ \varphi &= b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1x_2 + \ldots = \sum\sum b_{ik}x_ix_k,\end{aligned}\right.$$

qui dépendent de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La formule

$$\lambda f - \varphi = \sum\sum(\lambda a_{ik} - b_{ik})x_ix_k,$$

où λ désigne une constante qui peut prendre toutes les valeurs possibles, définira ce que nous appellerons, avec M. Kronecker, un *faisceau de formes quadratiques*. L'équation algébrique

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} \lambda a_{11} - b_{11} & \lambda a_{12} - b_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} - b_{1n}\\ \lambda a_{21} - b_{21} & \lambda a_{22} - b_{22} & \ldots & \lambda a_{2n} - b_{2n}\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ \lambda a_{n1} - b_{n1} & \lambda a_{n2} - b_{n2} & \ldots & \lambda a_{nn} - b_{nn}\end{vmatrix} = 0$$

détermine, comme on sait, les valeurs de λ pour lesquelles la forme quadratique $\lambda f - \varphi$ se réduit à une somme composée de moins de n carrés; cette équation ne sera jamais vérifiée identiquement si la forme f, par exemple, a son déterminant différent de zéro.

Cela posé, nous commencerons par établir le lemme suivant :

Appelons, suivant l'usage, *forme définie* toute fonction quadratique de n variables qui est réductible à une somme de n carrés tous de même signe, et qui, par suite, ne peut s'annuler que si l'on attribue des valeurs nulles à toutes les variables dont elle dépend. Nous allons montrer que, si l'équation (2) a une seule racine imaginaire, il est impossible que la forme quadratique f, ou toute autre forme du faisceau, soit une *forme définie*.

Soit, en effet, $\lambda_0 = \alpha + \beta i$ cette racine imaginaire de l'équation (2); la forme quadratique

$$(\alpha + \beta i)f - \varphi$$

sera une somme composée de moins de n carrés. On pourra donc écrire

$$(3)\qquad (\alpha + \beta i)f - \varphi = (y_1 + iz_1)^2 + (y_2 + iz_2)^2 + \ldots + (y_{n-p} + iz_{n-p})^2,$$

y_i, z_k désignant des fonctions linéaires réelles des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Si l'on égale les parties réelles et les parties imaginaires dans les deux membres, on aura

$$\begin{aligned} \beta f &= 2y_1z_1 \quad + 2y_2z_2 \quad + \ldots + 2y_{n-p}z_{n-p},\\ \alpha f - \varphi &= y_1^2 - z_1^2 + y_2^2 - z_2^2 + \ldots + y_{n-p}^2 - z_{n-p}^2\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\lambda f - \varphi = (\lambda - \alpha)f + \alpha f - \varphi = \sum\left(y_i^2 - z_i^2 + 2\frac{\lambda - \alpha}{\beta}y_iz_i\right).$$

On peut, évidemment, donner à cette équation la forme suivante

$$\lambda f - \varphi = \sum(y_i - m_iz_i)\left(y_i + \frac{1}{m_i}z_i\right),$$

les constantes m_i étant toutes réelles. La fonction $\lambda f - \varphi$ s'annulera donc si l'on pose, pour toutes les valeurs de l'indice i,

$$(4)\qquad y_i - m_iz_i = 0.$$

Les équations ainsi obtenues sont en nombre inférieur à n; elles sont linéaires par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_n$; et, de plus, tous leurs coefficients sont réels. Il sera donc possible d'y satisfaire par des valeurs réelles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui ne soient pas toutes nulles. Par suite, la forme $\lambda f - \varphi$, s'annulant par des valeurs réelles des variables indépendantes qui ne sont pas toutes nulles, ne pourra être une *forme définie*, quelle que soit d'ailleurs la valeur attribuée à λ.

Si l'on veut démontrer ce résultat pour la forme f seulement, on pourra répéter le raisonnement précédent en substituant au système (4) les équations suivantes :

$$y_i = 0.$$

On conclut immédiatement de la proposition précédente que, *si un faisceau de formes quadratiques contient une seule forme définie, l'équation en λ relative à ce faisceau a nécessairement toutes ses racines réelles.*

C'est ce qui aura lieu, en particulier, si, comme nous le supposerons dans la suite, f est une forme définie.

D'après cela, soit k une racine, nécessairement réelle, de l'équation (2). La fonction quadratique $kf - \varphi$ pourra être ramenée à la forme

$$(5) \qquad kf - \varphi = a_1 x_1'^2 + a_2 x_2'^2 + \ldots + a_p x_p'^2,$$

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ désignant des fonctions linéairement indépendantes de $x_1, \ldots, x_n$, et p étant au plus égal à $n-1$.

On peut adopter comme nouvelles variables indépendantes $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ et les substituer à un nombre égal des variables primitives. Si, par exemple, on peut déduire des formules qui expriment $x'_1, \ldots, x'_p$ les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, on choisira comme nouvelles variables indépendantes

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_p, \quad x_{p+1}, \quad \ldots, \quad x_n.$$

On aura alors

$$(6) \quad f = \mathrm{F}(x'_1, x'_2, \ldots, x'_p) + \mathrm{B}\left\{\begin{matrix} x'_1, & x'_2, & \ldots, & x'_p \\ x_{p+1} & \ldots, & x_n & \end{matrix}\right\} + \Phi(x_{p+1}, \ldots, x_n),$$

F désignant la partie qui contient les seules variables x'_i, B celle qui contient les produits des variables x'_i par les variables x_k et Φ celle qui ne renferme que les variables x_k. Pour réduire encore l'expression de f, nous nous appuierons sur la remarque suivante.

Étant donnée une forme définie de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, si l'on annule un certain nombre des variables, $x_{p+1}, \ldots, x_n$ par exemple, il reste une forme définie des variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

En effet, si cette forme n'était pas définie, elle s'annulerait pour des valeurs des variables $x_1, \ldots, x_p$ qui ne seraient pas toutes nulles; et l'un de ces

systèmes de valeurs, combiné avec les valeurs nulles des variables suivantes $x_{p+1}, \ldots, x_n$, annulerait la forme primitive, qui, contrairement à l'hypothèse, ne serait pas *définie*.

Il résulte de la remarque précédente que, dans l'expression (6) de f, les parties F et Φ sont des formes définies par rapport aux variables dont elles dépendent. On pourra donc réduire Φ à une somme de carrés

$$x_{p+1}'^2 + x_{p+2}'^2 + \ldots + x_n'^2,$$

tous de même signe, positifs par exemple si la forme f est positive, où les $x'_{p+1}, \ldots, x'_n$ désignent des fonctions indépendantes de $x_{p+1}, \ldots, x_n$ que nous substituerons à ces dernières variables.

Alors la partie B prendra la forme

$$2x'_{p+1}\mathrm{P}_{p+1} + 2x'_{p+2}\mathrm{P}_{p+2} + \ldots + 2x'_n\mathrm{P},$$

$\mathrm{P}_{p+1}, \ldots, \mathrm{P}_n$ étant des fonctions linéaires de $x'_1, \ldots, x'_p$; et f pourra s'écrire

$$f = (x'_{p+1} + \mathrm{P}_{p+1})^2 + \ldots + (x'_n + \mathrm{P}_n)^2 + f_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_p).$$

Si nous introduisons enfin les nouvelles variables

$$x''_{p+1} = x'_{p+1} + \mathrm{P}_{p+1}, \qquad \ldots, \qquad x''_n = x'_n + \mathrm{P},$$

nous obtiendrons cette expression définitive de f

$$(7) \qquad f = x_{p+1}''^2 + \ldots + x_n''^2 + f_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_p);$$

et, d'après une remarque déjà faite, f_1 *sera encore une forme définie des variables dont elle dépend.*

L'équation (5) nous permet de calculer φ et nous donne

$$(8) \qquad \varphi = k(x_{p+1}''^2 + \ldots + x_n''^2) + \varphi_1(x'_1, x'_2, \ldots, x'_p),$$

φ_1 désignant, pour abréger, la fonction quadratique

$$kf_1(x'_1, \ldots, x'_p) - a_1 x_1'^2 - \ldots - a_p x_p'^2,$$

qui dépend exclusivement des variables $x'_1, \ldots, x'_p$.

Toutes les hypothèses faites au début s'appliquent maintenant aux deux formes f_1 et φ_1, qui sont analogues à f et à φ, mais qui dépendent d'un moins grand nombre de variables. On pourra donc appliquer de nouveau à ces deux formes la méthode que nous avons suivie, et continuer de la même manière jusqu'à ce que l'on ait épuisé toutes les variables. Le résultat final est évidemment le suivant :

On peut toujours exprimer les deux formes quadratiques f et φ de la manière suivante

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} y_i^2,$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} a_i y_i^2,$$

les quantités y_i étant des fonctions linéaires, réelles et indépendantes des variables primitives, et les constantes a_i étant les racines nécessairement réelles, mais égales ou inégales, *de l'équation* (2).

La proposition précédente joue un rôle capital dans un grand nombre d'applications. Considérons, en particulier, le problème des oscillations infiniment petites; la méthode suivie par Lagrange revient à exprimer toutes les variables dont dépend la position du système en fonction de variables nouvelles

$$\xi_1, \ \xi_2, \ \ldots, \ \xi_n,$$

qui seront indépendantes et qui seront toutes nulles dans la position d'équilibre. D'après cela, si l'on suppose que tous les corps soient très voisins de leur position d'équilibre et que les vitesses imprimées à ces corps soient aussi infiniment petites, toutes les variables précédentes seront très petites, et il en sera de même de leurs dérivées

$$\xi'_1 = \frac{d\xi_1}{dt}, \quad \ldots, \quad \xi'_n = \frac{d\xi_n}{dt}.$$

Calculons la demi-force vive T et la fonction des forces V, en les réduisant à leurs termes de moindre dimension. On aura

$$T = f(\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_n),$$

f désignant une forme quadratique des dérivées $\xi'_1, \ldots, \xi'_n$ *qui, par sa nature, sera une forme définie.*

Quant à la fonction des forces, si l'on désigne par V_0 sa valeur dans la position d'équilibre, on aura

$$V = V_0 + \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

φ désignant une forme quadratique des variables $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Appliquons la méthode de M. Kronecker aux deux fonctions

$$f(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n);$$

nous pourrons, par une même substitution linéaire à coefficients constants, les réduire aux formes simples

$$f = \sum_{i=1}^{i=n} y_i^2,$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^{i=n} a_i y_i^2.$$

Les quantités a_i seront les racines de l'équation en λ relative au faisceau $\lambda f - \varphi$; elles seront toutes positives si la fonction des forces est un minimum dans la position d'équilibre.

Les variables ξ_i et ξ'_i se transformant de la même manière quand on applique une substitution linéaire, on aura nécessairement

$$T = \sum_{i=1}^{i=n} y_i'^2;$$

et, par suite, les équations de Lagrange (p. 374) deviendront ici

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} + a_i y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les quantités a_i, qui sont toujours réelles, *pourront cependant devenir égales,* comme nous l'avons établi plus haut. Néanmoins, le résultat essentiel indiqué par Lagrange subsistera encore : si la fonction des forces est un minimum dans la position d'équilibre, les constantes a_i seront toutes positives, et les intégrales des équations différentielles précédentes ne contiendront jamais le temps en dehors des signes sinus ou cosinus.

FIN DU TOME ONZIÈME.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME ONZIÈME.

PREMIÈRE PARTIE.

LA STATIQUE.

SECONDE PARTIE.

LA DYNAMIQUE.

NOTES.

10967 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.