Le dernier terme de cette expression, étant analogue au terme $\mathsf{S}\,\mathrm{F}\,\delta ds$, sera susceptible de réductions semblables; à l'égard des deux autres, il n'y aura qu'à y substituer pour $d\delta s$ sa valeur $\frac{dx\,d\delta x + dy\,d\delta y + dz\,d\delta z}{ds}$, en marquant toutes les lettres d'un trait ou de deux.

De là il est facile de conclure qu'on aura, pour la solution du cas présent, les mêmes formules que dans le cas où le fil élastique est supposé inextensible, en y mettant seulement $\mathrm{F} + d\frac{\mathrm{E}\,d^2s}{e\,ds^2} - \frac{\mathrm{E}e}{ds}$ à la place de λ et ajoutant aux termes hors du signe S les deux termes $\frac{\mathrm{E}'d^2s'}{e'ds'^2}d\delta s' - \frac{\mathrm{E}''d^2s''}{e''ds''^2}d\delta s''$.

Comme, dans l'équation de la courbe, la quantité λ doit être éliminée, il s'ensuit que l'équation de la lame élastique sera la même, soit qu'on la suppose extensible ou non. Mais la tension du fil, qui est exprimée par λ ou par F, lorsque le fil n'est pas élastique (art. 43), sera augmentée, par l'élasticité E, de la quantité $d\frac{\mathrm{E}\rho\,d^2s}{ds^3} - \frac{\mathrm{E}}{\rho}$, à cause de $e = \frac{ds}{\rho}$ (art. 49).

§ IV. — *De l'équilibre d'un fil raide et de figure donnée.*

53. Venons enfin au cas d'un fil inextensible et inflexible : on aura ici, pour la somme des moments des forces, la même formule intégrale que dans le cas de l'article 28, c'est-à-dire $\mathsf{S}(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z)\,dm$; ensuite la condition de l'inextensibilité du fil donnera, comme dans le même article, $\delta ds = 0$, et celle de l'inflexibilité donnera $\delta e = 0$, puisque l'angle de contingence doit être invariable; mais ces deux conditions ne suffisent pas encore dans le cas où la courbe est à double courbure, comme on va le voir.

Pour traiter la question de la manière la plus simple et la plus directe, je remarque que tout consiste à faire en sorte que les différents points de la courbe du fil conservent toujours entre eux les mêmes distances : or, en considérant plusieurs points successifs dont

les coordonnées soient

$$x,\quad y,\quad z,\quad x+dx,\quad y+dy,\quad z+dz,$$
$$x+2dx+d^2x,\qquad y+2dy+d^2y,\qquad z+2dz+d^2z,\qquad \ldots,$$

il est clair que les carrés des distances entre le premier de ces points et les suivants seront exprimés par les quantités

$$dx^2+dy^2+dz^2,\qquad (2dx+d^2x)^2+(2dy+d^2y)^2+(2dz+d^2z)^2,$$
$$(3dx+3d^2x+d^3x)^2+(3dy+3d^2y+d^3y)^2+(3dz+3d^2z+d^3z)^2,\qquad \ldots.$$

Supposons, pour abréger,

$$\begin{gathered} dx^2 + dy^2 + dz^2 = \alpha, \\ (d^2x)^2+(d^2y)^2+(d^2z)^2=\beta, \\ (d^3x)^2+(d^3y)^2+(d^3z)^2=\gamma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{gathered}$$

les quantités précédentes, étant développées, deviendront

$$\begin{gathered} \alpha, \\ 4\alpha+2d\alpha+\beta, \\ 9\alpha+9d\alpha+9\beta+3(d^2\alpha-2\beta)+3d\beta+\gamma, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Il faudra donc que les variations de ces quantités soient nulles dans toute l'étendue de la courbe, ce qui donnera ces équations indéfinies

$$\begin{gathered} \delta\alpha = 0, \\ 4\,\delta\alpha + 2\,\delta\,d\alpha + \delta\beta = 0, \\ 9\,\delta\alpha + 9\,\delta\,d\alpha + 3\,\delta\beta + 3\,\delta\,d^2\alpha + 3\,\delta\,d\beta + \delta\gamma = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{gathered}$$

mais, $\delta\alpha$ étant égal à o, on a aussi

$$d\,\delta\alpha = \delta\,d\alpha = 0;\qquad \text{donc}\qquad \delta\beta = 0;$$

de là on aura, de plus,

$$d^2\,\delta\alpha = \delta\,d^2\alpha = 0,\qquad d\,\delta\beta = \delta\,d\beta = 0;\qquad \text{donc}\qquad \delta\gamma = 0;$$

et ainsi de suite. De sorte que les équations de condition pour l'inextensibilité et l'inflexibilité du fil seront $\delta\alpha = 0$, $\delta\beta = 0$, $\delta\gamma = 0$, ..., c'est-à-dire, en différentiant et changeant δd en $d\delta$,

$$\begin{aligned}
&dx\,d\delta x \;+ dy\,d\delta y \;+ dz\,d\delta z \;= 0,\\
&d^2x\,d^2\delta x + d^2y\,d^2\delta y + d^2z\,d^2\delta z = 0,\\
&d^3x\,d^3\delta x + d^3y\,d^3\delta y + d^3z\,d^3\delta z = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Il est clair qu'il suffit de trois de ces équations pour déterminer les trois variations δx, δy, δz; d'où l'on peut d'abord conclure que, dès qu'on aura satisfait aux trois premières, toutes les autres, qu'on pourrait trouver à l'infini, auront lieu d'elles-mêmes : c'est aussi de quoi on peut se convaincre par le calcul même, comme on le verra plus bas (art. 60) (¹).

(¹) Ces équations expriment que α, β, γ conservent la même valeur pendant le déplacement de la courbe. Cette condition équivaut aux trois équations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,\\
&\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 = \varphi(s),\\
&\left(\frac{d^3x}{ds^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3y}{ds^3}\right)^2 + \left(\frac{d^3z}{ds^3}\right)^2 = \psi(s).
\end{aligned}$$

La première est évidente; la deuxième exprime que la courbure de la ligne considérée est une fonction déterminée de l'arc s; la troisième, enfin, combinée avec les deux autres, exprime que la seconde courbure est une fonction déterminée de s. En écrivant les équations de condition sous cette forme, qui ne diffère de celle de Lagrange que par les diviseurs ds^2, ds^4, ds^6, que nous avons introduits, les calculs resteraient absolument les mêmes; seulement les multiplicateurs désignés plus loin par λ, μ, ν seraient finis, tandis qu'il faut, dans la notation de Lagrange, leur supposer des valeurs infinies de différents ordres. Cette circonstance a été signalée comme un inconvénient de la méthode. En adoptant, en effet, la locution si souvent employée par Lagrange, les multiplicateurs λ, μ, ν représenteraient les forces qui tendent à faire varier les fonctions α, β, γ, et il doit sembler extraordinaire que ces forces soient infinies et surtout qu'une transformation tout algébrique suffise pour leur faire prendre des valeurs finies; mais on se rend compte de cette singularité en remarquant que les coefficients λ, μ, ν ne sont nommés *forces* que par une locution figurée, familière à Lagrange. Nous avons averti plusieurs fois qu'il ne fallait pas prendre cette locution à la lettre. (*Voir* la Note relative à l'art. 9, Sect. II.) (*J. Bertrand.*)

54. On aura donc par notre méthode cette équation générale de l'équilibre

$$\begin{aligned}
0 = &+ \mathrm{S}(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dm\\
&+ \mathrm{S}\lambda(dx\,d\delta x \;+ dy\,d\delta y \;+ dz\,d\delta z)\\
&+ \mathrm{S}\mu(d^2x\,d^2\delta x + d^2y\,d^2\delta y + d^2z\,d^2\delta z)\\
&+ \mathrm{S}\nu(d^3x\,d^3\delta x + d^3y\,d^3\delta y + d^3z\,d^3\delta z),
\end{aligned}$$

laquelle, par les transformations enseignées, se réduira à la forme suivante :

$$\begin{aligned}
0 = &+ \mathrm{S}[X\,dm - d(\lambda\,dx) + d^2(\mu\,d^2x) - d^3(\nu\,d^3x)]\,\delta x\\
&+ \mathrm{S}[Y\,dm - d(\lambda\,dy) + d^2(\mu\,d^2y) - d^3(\nu\,d^3y)]\,\delta y\\
&+ \mathrm{S}[Z\,dm - d(\lambda\,dz) + d^2(\mu\,d^2z) - d^3(\nu\,d^3z)]\,\delta z\\
&+ [\lambda''\,dx'' \;- d(\mu''\,d^2x'') + d^2(\nu''\,d^3x'')]\,\delta x''\\
&+ [\mu''\,d^2x'' - d(\nu''\,d^3x'')]\,d\,\delta x'' + \nu''\,d^3x''\,d^2\,\delta x''\\
&+ [\lambda''\,dy'' \;- d(\mu''\,d^2y'') + d^2(\nu''\,d^3y'')]\,\delta y''\\
&+ [\mu''\,d^2y'' - d(\nu''\,d^3y'')]\,d\,\delta y'' + \nu''\,d^3y''\,d^2\,\delta y''\\
&+ [\lambda''\,dz'' \;- d(\mu''\,d^2z'') + d^2(\nu''\,d^3z'')]\,\delta z''\\
&+ [\mu''\,d^2z'' - d(\nu''\,d^3z'')]\,d\,\delta z'' + \nu''\,d^3z''\,d^2\,\delta z''\\
&- [\lambda'\,dx' \;- d(\mu'\,d^2x') + d^2(\nu'\,d^3x')]\,\delta x'\\
&- [\mu'\,d^2x' - d(\nu'\,d^3x')]\,d\,\delta x' - \nu'\,d^3x'\,d^2\,\delta x'\\
&- [\lambda'\,dy' \;- d(\mu'\,d^2y') + d^2(\nu'\,d^3y')]\,\delta y'\\
&- [\mu'\,d^2y' - d(\nu'\,d^3y')]\,d\,\delta y' - \nu'\,d^3y'\,d^2\,\delta y'\\
&- [\lambda'\,dz' \;- d(\mu'\,d^2z') + d^2(\nu'\,d^3z')]\,\delta z'\\
&- [\mu'\,d^2z' - d(\nu'\,d^3z')]\,d\,\delta z' - \nu'\,d^3z'\,d^2\,\delta z'.
\end{aligned}$$

55. Égalant d'abord à zéro les coefficients de δx, δy, δz sous le signe S, on aura ces trois équations indéfinies

$$\begin{aligned}
&X\,dm - d(\lambda\,dx) + d^2(\mu\,d^2x) - d^3(\nu\,d^3x) = 0,\\
&Y\,dm - d(\lambda\,dy) + d^2(\mu\,d^2y) - d^3(\nu\,d^3y) = 0,\\
&Z\,dm - d(\lambda\,dz) + d^2(\mu\,d^2z) - d^3(\nu\,d^3z) = 0,
\end{aligned}$$

lesquelles, renfermant trois variables indéterminées λ, μ, ν, ne serviront qu'à déterminer ces trois quantités; en sorte qu'il n'y aura aucune équation indéfinie entre les différentes forces X, Y, Z qu'on suppose appliquées à tous les points de la verge; et les conditions de l'équilibre dépendront uniquement des termes qui sont hors du signe S. Mais, comme ces termes contiennent les inconnues λ, μ, ν, il faudra commencer par déterminer ces inconnues.

Pour cela, il faut intégrer les équations précédentes, ce qui est facile, et l'on aura ces trois-ci

$$\int X\,dm - \lambda\,dx + d(\mu\,d^2x) - d^2(\nu\,d^3x) = A,$$
$$\int Y\,dm - \lambda\,dy + d(\mu\,d^2y) - d^2(\lambda\,d^3y) = B,$$
$$\int Z\,dm - \lambda\,dz + d(\mu\,d^2z) - d^2(\nu\,d^3z) = C,$$

A, B, C étant trois constantes arbitraires.

Ces équations donnent, par l'élimination de λ, ces trois autres-ci

$$\begin{aligned}dy\int X\,dm - dx\int Y\,dm + dy\,d(\mu\,d^2x) - dx\,d(\mu\,d^2y)&\\ - dy\,d^2(\nu\,d^3x) + dx\,d^2(\nu\,d^3y) &= A\,dy - B\,dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dz\int X\,dm - dx\int Z\,dm + dz\,d(\mu\,d^2x) - dx\,d(\mu\,d^2z)&\\ - dz\,d^2(\nu\,d^3x) + dx\,d^2(\nu\,d^3z) &= A\,dz - C\,dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}dz\int Y\,dm - dy\int Z\,dm + dz\,d(\mu\,d^2y) - dy\,d(\mu\,d^2z)&\\ - dz\,d^2(\nu\,d^3y) + dy\,d^2(\nu\,d^3z) &= B\,dz - C\,dy,\end{aligned}$$

lesquelles sont aussi intégrables, et dont les intégrales sont

$$\begin{aligned}y\int X\,dm - x\int Y\,dm - \int(Xy - Yx)\,dm&\\ + \mu(dy\,d^2x - dx\,d^2y) - dy\,d(\nu\,d^3x) + dx\,d(\nu\,d^3y)&\\ + \nu(d^2y\,d^3x - d^2x\,d^3y) &= Ay - Bx + F,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z\int X\,dm - x\int Z\,dm - \int(Xz - Zx)\,dm&\\ + \mu(dz\,d^2x - dx\,d^2z) - dz\,d(\nu\,d^3x) + dx\,d(\nu\,d^3z)&\\ + \nu(d^2z\,d^3x - d^2x\,d^3z) &= Az - Cx + G,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z\int Y\,dm - y\int Z\,dm - \int(Yz - Zy)\,dm&\\ + \mu(dz\,d^2y - dy\,d^2z) - dz\,d(\nu\,d^3y) + dy\,d(\nu\,d^3z)&\\ + \nu(d^2z\,d^3y - d^2y\,d^3z) &= Bz - Cy + H,\end{aligned}$$

F, G, H étant de nouvelles constantes arbitraires.

Ces trois dernières équations serviront à déterminer les trois quantités μ, ν et $d\nu$, et les trois premières équations intégrales donneront les valeurs de λ, $d\mu$, $d^2\nu$. Ainsi l'on aura toutes les inconnues qui entrent dans les termes qui sont hors du signe S; il suffira pour cela de marquer, dans les six équations qu'on vient de trouver, toutes les lettres d'un trait ou de deux, à l'exception des constantes arbitraires, de supposer nulles, dans le premier cas, les quantités affectées du signe $\int$, lesquelles sont censées commencer au premier point du fil, et de changer, dans le second cas, $\int$ en S dans les mêmes quantités, pour les rapporter au dernier point du fil.

56. Cela posé, voyons maintenant les conditions qui peuvent résulter de l'anéantissement des termes hors du signe S dans l'équation générale de l'équilibre (art. 54).

Et d'abord, si l'on suppose la verge entièrement libre, les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $d\,\delta x'$, $d\,\delta y'$, $d\,\delta z'$, $d^2\delta x'$, $d^2\delta y'$, $d^2\delta z'$ et $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\,\delta x''$, ... seront toutes indéterminées; par conséquent, il faudra égaler à zéro chacun de leurs coefficients, et il est visible qu'il faudra pour cela que les quantités λ', μ', ν', $d\mu'$, $d\nu'$, $d^2\nu'$, ainsi que λ'', μ'', ν'', $d\mu''$, $d\nu''$, $d^2\nu''$, soient nulles.

Donc les trois premières équations intégrales de l'article précédent, étant rapportées au premier et au dernier point du fil, donneront ces six conditions

$$A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0,\quad \mathsf{S}\,X\,dm = A,\quad \mathsf{S}\,Y\,dm = B,\quad \mathsf{S}\,Z\,dm = C;$$

et les trois dernières intégrales donneront de même les six suivantes :

$$Ay' - Bx' + F = 0,$$
$$Az' - Cx' + G = 0,$$
$$Bz' - Cy' + H = 0;$$

$$y''\,\mathsf{S}\,X\,dm - x''\,\mathsf{S}\,Y\,dm - \mathsf{S}(Xy - Yx)\,dm = Ay'' - Bx'' + F,$$
$$z''\,\mathsf{S}\,X\,dm - x''\,\mathsf{S}\,Z\,dm - \mathsf{S}(Xz - Zx)\,dm = Az'' - Cx'' + G,$$
$$z''\,\mathsf{S}\,Y\,dm - y''\,\mathsf{S}\,Z\,dm - \mathsf{S}(Yz - Zy)\,dm = Bz'' - Cy'' + H.$$

Donc

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{S}\,X\,dm = 0, \qquad \mathrm{S}\,Y\,dm = 0, \qquad \mathrm{S}\,Z\,dm = 0,$$
$$\mathrm{S}(Xy - Yx)\,dm = 0, \qquad \mathrm{S}(Xz - Zx)\,dm = 0, \qquad \mathrm{S}(Yz - Zy)\,dm = 0.$$

Ces six équations sont donc les seules qui soient nécessaires pour l'équilibre d'une verge inflexible, lorsqu'il n'y a pas de point fixe ; c'est ce qui s'accorde avec ce que nous avons remarqué plus haut (art. 25), et c'est aussi ce qu'on aurait pu déduire immédiatement de la théorie donnée dans la Section III, ainsi que nous l'avons observé dans l'article cité.

57. Supposons maintenant qu'il y ait dans la verge un point fixe et que ce point soit la première extrémité de la verge ; dans ce cas, on aura

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta z' = 0;$$

en sorte que les termes affectés de ces variations disparaîtront d'eux-mêmes ; il suffira donc d'égaler à zéro les coefficients de $d\,\delta x'$, $d\,\delta y'$, $d\,\delta z'$, $d^2\,\delta x'$, $d^2\,\delta y'$, $d^2\,\delta z'$, ainsi que les coefficients de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\,\delta x''$, $d\,\delta y''$, ...

Or il est aisé de voir que, pour cela, il suffira que l'on ait

$$\mu' = 0, \quad \nu' = 0, \quad d\nu' = 0,$$

et ensuite

$$\lambda'' = 0, \quad \mu'' = 0, \quad \nu'' = 0, \quad d\mu'' = 0, \quad d\nu'' = 0, \quad d^2\nu'' = 0,$$

comme dans le cas précédent ; et l'on trouvera les mêmes conditions que dans l'article précédent, à l'exception de ce que A, B, C ne seront pas nulles.

On aura donc

$$A = \mathrm{S}\,X\,dm, \quad B = \mathrm{S}\,Y\,dm, \quad C = \mathrm{S}\,Z\,dm,$$

ensuite

$$F = Bx' - Ay', \quad G = Cx' - Az', \quad H = Cy' - Bz';$$

et les trois autres équations se réduiront à celles-ci

$$-\mathrm{S}(Xy - Yx)\,dm = Bx' - Ay',$$
$$-\mathrm{S}(Xz - Zx)\,dm = Cx' - Az',$$
$$-\mathrm{S}(Yz - Zy)\,dm = Cy' - Bz',$$

c'est-à-dire à

$$\mathrm{S}(Xy - Yx)\,dm + x'\,\mathrm{S}\,Y\,dm - y'\,\mathrm{S}\,X\,dm = 0,$$
$$\mathrm{S}(Xz - Zx)\,dm + x'\,\mathrm{S}\,Z\,dm - z'\,\mathrm{S}\,X\,dm = 0,$$
$$\mathrm{S}(Yz - Zy)\,dm + y'\,\mathrm{S}\,Z\,dm - z'\,\mathrm{S}\,Y\,dm = 0,$$

ou, ce qui est la même chose, à

$$\mathrm{S}[X(y - y') - Y(x - x')]\,dm = 0,$$
$$\mathrm{S}[X(z - z') - Z(x - x')]\,dm = 0,$$
$$\mathrm{S}[Y(z - z') - Z(y - y')]\,dm = 0.$$

Ce sont les seules conditions nécessaires pour l'équilibre, et il est clair qu'elles répondent à celles que l'on a trouvées dans l'article 24.

58. Si la verge était fixement attachée par sa première extrémité, en sorte que non seulement le premier point de la courbe fût fixe, mais aussi la tangente à ce premier point, alors on aurait non seulement

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta z' = 0,$$

mais aussi

$$\delta\,dx' = d\,\delta x' = 0, \quad \delta\,dy' = d\,\delta y' = 0, \quad \delta\,dz' = d\,\delta z' = 0;$$

par conséquent, tous les termes affectés de ces quantités disparaîtraient d'eux-mêmes et il ne resterait qu'à faire évanouir les termes affectés de $d^2\,\delta x'$, $d^2\,\delta y'$, $d^2\,\delta z'$ et de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\,\delta x''$, $d\,\delta y''$, ...

On n'aura donc, dans ce cas, que ces conditions

$$\nu' = 0, \quad \lambda'' = 0, \quad \mu'' = 0, \quad \nu'' = 0, \quad d\mu'' = 0, \quad d\nu'' = 0, \quad d^2\nu'' = 0.$$

Donc les constantes A, B, C auront encore les valeurs

$$A = \mathsf{S}\, X\, dm, \qquad B = \mathsf{S}\, Y\, dm, \qquad C = \mathsf{S}\, Z\, dm;$$

ensuite les trois dernières intégrales de l'article 55, étant appliquées au dernier point de la verge, donneront

$$F = \mathsf{S}\,(Yx - Xy)\, dm, \qquad G = \mathsf{S}\,(Zx - Xz)\, dm, \qquad H = \mathsf{S}\,(Zy - Yz)\, dm.$$

Et, si l'on applique ces mêmes équations au premier point, on aura

$$\begin{aligned}
\mu'(dy'\, d^2x' - dx'\, d^2y') - d\nu'(dy'\, d^3x' - dx'\, d^3y') &= Ay' - Bx' + F,\\
\mu'(dz'\, d^2x' - dx'\, d^2z') - d\nu'(dz'\, d^3x' - dx'\, d^3z') &= Az' - Cx' + G,\\
\mu'(dz'\, d^2y' - dy'\, d^2z') - d\nu'(dz'\, d^3y' - dy'\, d^3z') &= Bz' - Cy' + H,
\end{aligned}$$

d'où, éliminant μ' et $d\nu'$, résulte l'équation

$$\begin{aligned}
A(y'\, dz' - z'\, dy') + B(z'\, dx' - x'\, dz') + C(x'\, dy' - y'\, dx')&\\
+ F\, dz' - G\, dy' + H\, dx' &= 0.
\end{aligned}$$

Cette équation est nécessaire pour empêcher que la verge ne tourne autour de sa première tangente, qui est supposée fixe, et il est facile de voir que son premier membre devient nul lorsque la verge est une ligne droite.

59. On pourrait regarder comme un défaut de notre méthode la longueur de cette solution, qui est, en effet, plus longue que celle de l'équilibre d'un fil flexible; tandis que, par les méthodes ordinaires, ce dernier problème est beaucoup plus difficile que celui de l'équilibre d'une verge raide tirée par des puissances quelconques, parce qu'il faut déterminer, par la composition des forces, la courbe que le fil doit prendre pour être en équilibre, au lieu que, dans le cas de la verge, cette courbe est donnée et que l'équilibre ne demande que la destruction des moments des forces. Mais, lorsqu'on veut suivre pour tous ces problèmes une marche uniforme et passer de l'un à l'autre graduellement, à mesure qu'on y ajoute de nouvelles conditions, il est évident que le cas d'un fil inflexible est moins simple que celui d'un fil flexible,

parce que l'inflexibilité exprimée analytiquement consiste dans l'invariabilité des distances mutuelles des points du fil. Et si, dans ce cas, la courbe étant donnée, elle ne doit plus être un résultat du calcul comme dans le cas d'un fil flexible, c'est une circonstance que l'analyse doit indiquer et qu'elle indique, en effet, par les trois indéterminées λ, μ, ν qui restent dans les trois équations indéfinies entre x, y, z de l'article 55, et qui font que ces équations peuvent s'adapter à une courbe quelconque donnée. Ainsi l'on ne doit pas regarder ces équations comme une superfluité inutile; outre qu'elles servent à déterminer les trois inconnues λ, μ, ν, d'où dépendent les conditions de l'équilibre, et qui expriment (¹) en même temps les forces qui s'opposent à ce que les valeurs des trois fonctions α, β, γ varient par l'effet des forces qui agissent sur le fil.

Il est vrai que les trois indéterminées λ, μ, ν doivent être remplacées par les trois équations de condition qui consistent en ce que les fonctions différentielles α, β, γ doivent être censées données. Mais, comme, par la nature du Calcul différentiel, la valeur absolue des différentielles reste indéterminée et qu'il n'y a que leur rapport qui puisse être donné, ces trois conditions ne peuvent équivaloir qu'à deux, qui renferment les rapports des trois quantités α, β, γ; et ces deux rapports suffisent pour déterminer la courbe.

En effet, par ce qu'on a démontré plus haut (art. 46), on voit que l'angle de contingence formé par deux côtés successifs de la courbe se trouve exprimé par $\frac{\sqrt{4\alpha\beta - d\alpha^2}}{2\alpha}$, en conservant les valeurs de α, β, γ de l'article 53; de sorte que le rayon osculateur sera exprimé par $\frac{2\alpha\sqrt{\alpha}}{\sqrt{4\alpha\beta - d\alpha^2}}$. Ce rayon étant donc supposé donné, la courbe sera donnée si elle est à simple courbure, et, pour les courbes à double courbure, il ne sera pas difficile de prouver que la seconde courbure, provenant de l'angle de contingence formé par les plans qui passent successivement par deux éléments contigus de la courbe, dépendra du rapport des

(¹) *Voir* la note relative à l'article 53. (*J. Bertrand.*)

trois quantités α, β, γ (1). Ainsi les trois conditions dont il s'agit, rapportées à la courbe, se réduisent à ce qu'elle soit donnée, comme le problème le suppose (2).

On pourrait étendre l'analyse de ce problème au cas d'une surface ou d'un solide dont tous les points seraient tirés par des forces quelconques; mais nous allons faire voir comment on peut la simplifier en partant des mêmes équations de condition et en déterminant d'avance par ces équations la forme des variations des coordonnées.

CHAPITRE IV.

DE L'ÉQUILIBRE D'UN CORPS SOLIDE DE GRANDEUR SENSIBLE ET DE FIGURE QUELCONQUE, DONT TOUS LES POINTS SONT TIRÉS PAR DES FORCES QUELCONQUES.

60. Puisque la condition de la solidité du corps consiste en ce que tous ses points conservent constamment entre eux la même position et les mêmes distances, on aura entre les variations δx, δy, δz les mêmes équations de condition qu'on a trouvées dans l'article 53; car il est visible qu'en imaginant dans l'intérieur du corps une courbe quelconque, il suffira que tous ses points gardent les mêmes distances entre eux, quelque mouvement que le corps reçoive; ainsi l'on pourra, par leur moyen, déterminer immédiatement les valeurs de ces variations.

Pour cela, je remarque que, comme en passant aux différences secondes il est toujours permis de prendre une des différences premières pour constante, on peut supposer dx constante et, par conséquent, $d^2x = 0$, $d^3x = 0$, ..., moyennant quoi la deuxième et la troi-

(1) Cette seconde courbure dépend aussi de d^3. (*J. Bertrand.*)

(2) On voit, d'après les résultats précédents, que deux courbes sont superposables lorsque les rayons de première et de seconde courbure s'expriment, dans l'une et dans l'autre, par une même fonction de l'arc. Si donc deux courbes ont l'une et l'autre leurs rayons de courbure constants et égaux chacun à chacun, ces courbes sont identiques; et, comme on peut toujours déterminer une hélice dont les rayons de courbure soient donnés, toute courbe qui a ses rayons de courbure constants est une hélice. Plusieurs géomètres ont donné des démonstrations élégantes de ce théorème. *Voir* deux Notes, l'une de M. Puiseux, l'autre de M. Serret, *Journal de Mathématiques* de Liouville, 1re série, t. VII, p. 65, et t. XVI, p. 193. (*J. Bertrand.*)

sième équation de l'article cité deviendront

$$d^2y\, d^2\delta y + d^2z\, d^2\delta z = 0 \quad \text{et} \quad d^3y\, d^3\delta y + d^3z\, d^3\delta z = 0.$$

La première de ces équations donne d'abord $d^2\delta y = -\frac{d^2z}{d^2y} d^2\delta z$ et, différentiant,

$$d^3\delta y = -\frac{d^2z}{d^2y} d^3\delta z - \left[\frac{d^3z}{d^2y} - \frac{d^2z\, d^3y}{(d^2y)^2}\right] d^2\delta z;$$

cette valeur étant substituée dans la seconde équation, elle se trouvera toute divisible par $d^3z - \frac{d^3y\, d^2z}{d^2y}$, et l'on aura, après la division,

$$d^3\delta z - \frac{d^3y}{d^2y} d^2\delta z = 0;$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$d^2\delta z = \delta L\, d^2y,$$

δL étant une constante. Ayant $d^2\delta z$, on trouvera

$$d^2\delta y = -\delta L\, d^2z;$$

donc, intégrant de nouveau et ajoutant les constantes $-\delta M\, dx$, $\delta N\, dx$, on aura

$$d\delta z = \delta L\, dy - \delta M\, dx, \qquad d\delta y = -\delta L\, dz + \delta N\, dx;$$

et, ces valeurs étant substituées dans la première équation de condition, savoir

$$dx\, d\delta x + dy\, d\delta y + dz\, d\delta z = 0,$$

il viendra

$$d\delta x = -\delta N\, dy + \delta M\, dz.$$

Enfin on aura, par une troisième intégration et par l'addition des nouvelles constantes δl, δm, δn,

$$\begin{aligned}
\delta x &= \delta l - y\,\delta N + z\,\delta M,\\
\delta y &= \delta m + x\,\delta N - z\,\delta L,\\
\delta z &= \delta n - x\,\delta M + y\,\delta L.
\end{aligned}$$

Et il est facile de se convaincre que ces expressions ne satisfont pas seulement aux trois premières équations de condition de l'article 53, mais aussi à toutes les autres qu'on pourrait trouver à l'infini, et qui sont toutes renfermées dans cette équation générale

$$d^n x\, d^n \delta x + d^n y\, d^n \delta y + d^n z\, d^n \delta z = 0.$$

Telles sont donc les valeurs de δx, δy, δz pour un système quelconque de points unis ensemble de manière qu'ils conservent toujours entre eux les mêmes distances; ainsi ces valeurs serviront non seulement pour le cas d'une courbe quelconque mobile et invariable dans sa figure, mais aussi pour le cas d'un corps solide de figure quelconque.

Euler a trouvé le premier ces formules simples et élégantes pour exprimer les variations des coordonnées de tous les points d'un corps solide mobile dans l'espace. Il y est parvenu par des considérations tirées du Calcul différentiel, mais différentes de celles qui nous y ont conduit, et, ce me semble, moins rigoureuses [1]. *Voir*, dans le Volume de l'Académie de Berlin pour 1750, le Mémoire intitulé : *Découverte d'un nouveau principe de Mécanique*.

61. Puis donc que les valeurs précédentes de δx, δy, δz satisfont déjà aux équations de condition du problème, il est clair qu'il suffira de les substituer dans la formule

$$\mathrm{S}(\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z)\,dm$$

et de faire en sorte qu'elle devienne nulle, indépendamment des quantités δl, δm, δn, $\delta \mathrm{L}$, $\delta \mathrm{M}$, $\delta \mathrm{N}$, qui sont les seules indéterminées qui restent.

Or, comme ces quantités sont les mêmes pour tous les points du corps, il faudra dans la substitution les faire sortir hors du signe S; et l'on aura conséquemment cette équation générale de l'équilibre d'un

[1] La démonstration d'Euler est, il est vrai, moins directe que celle de Lagrange; mais il m'a été impossible de découvrir le point de vue sous lequel on peut l'accuser de manquer de rigueur. (*J. Bertrand.*)

corps solide de figure quelconque

$$\begin{aligned}&\delta l\,\mathrm{S}\,\mathrm{X}\,dm + \delta m\,\mathrm{S}\,\mathrm{Y}\,dm + \delta n\,\mathrm{S}\,\mathrm{Z}\,dm\\ &\quad + \delta \mathrm{N}\,\mathrm{S}(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\,dm + \delta \mathrm{M}\,\mathrm{S}(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x)\,dm + \delta \mathrm{L}\,\mathrm{S}(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z)\,dm = 0,\end{aligned}$$

d'où l'on tirera les équations particulières de l'équilibre, en ayant égard aux différentes circonstances du problème.

62. Et d'abord, si le corps est supposé entièrement libre, les six variations δl, δm, δn, $\delta \mathrm{L}$, $\delta \mathrm{M}$, $\delta \mathrm{N}$ seront toutes indéterminées, et il faudra égaler séparément à zéro les quantités par lesquelles elles se trouvent multipliées; ce qui donnera ces six équations déjà connues

$$\mathrm{S}\,\mathrm{X}\,dm = 0, \qquad \mathrm{S}\,\mathrm{Y}\,dm = 0, \qquad \mathrm{S}\,\mathrm{Z}\,dm = 0,$$

$$\mathrm{S}(\mathrm{Y}x - \mathrm{X}y)\,dm = 0, \qquad \mathrm{S}(\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x)\,dm = 0, \qquad \mathrm{S}(\mathrm{Z}y - \mathrm{Y}z)\,dm = 0.$$

En second lieu, s'il y a dans le corps un point fixe autour duquel il ait simplement la liberté de pouvoir pirouetter en tous sens et qu'on nomme a, b, c les valeurs des coordonnées x, y, z pour ce point, il faudra que l'on ait

$$\delta a = 0, \qquad \delta b = 0, \qquad \delta c = 0;$$

donc

$$\delta l - b\,\delta \mathrm{N} + c\,\delta \mathrm{M} = 0, \qquad \delta m - c\,\delta \mathrm{L} + a\,\delta \mathrm{N} = 0, \qquad \delta n - a\,\delta \mathrm{M} + b\,\delta \mathrm{L} = 0;$$

d'où l'on tire

$$\delta l = b\,\delta \mathrm{N} - c\,\delta \mathrm{M}, \qquad \delta m = c\,\delta \mathrm{L} - a\,\delta \mathrm{N}, \qquad \delta n = a\,\delta \mathrm{M} - b\,\delta \mathrm{L}.$$

On substituera ces valeurs dans l'équation générale de l'article précédent et, mettant sous le signe S les quantités a, b, c, qui sont constantes par rapport aux différents points du corps, on aura cette transformée

$$\begin{aligned}&+ \delta \mathrm{N}\,\mathrm{S}[\mathrm{Y}(x - a) - \mathrm{X}(y - b)]\,dm\\ &+ \delta \mathrm{M}\,\mathrm{S}[\mathrm{X}(z - c) - \mathrm{Z}(x - a)]\,dm\\ &+ \delta \mathrm{L}\,\mathrm{S}[\mathrm{Z}(y - b) - \mathrm{Y}(z - c)]\,dm = 0,\end{aligned}$$

laquelle ne fournira plus que trois équations, savoir

$$\mathrm{S}[\mathrm{Y}(x-a)-\mathrm{X}(y-b)]\,dm=0,$$
$$\mathrm{S}[\mathrm{X}(z-c)-\mathrm{Z}(x-a)]\,dm=0,$$
$$\mathrm{S}[\mathrm{Z}(y-b)-\mathrm{Y}(z-c)]\,dm=0.$$

En troisième lieu, s'il y a dans le corps deux points fixes et que f, g, h soient les valeurs de x, y, z pour le second de ces points, on aura, de plus,

$$\begin{aligned}\delta l &= g\,\delta\mathrm{N}-h\,\delta\mathrm{M},\\ \delta m &= h\,\delta\mathrm{L}-f\,\delta\mathrm{N},\\ \delta n &= f\,\delta\mathrm{M}-g\,\delta\mathrm{L};\end{aligned}$$

donc, comparant ces valeurs de δl, δm, δn avec les précédentes, on aura

$$\begin{aligned}(g-b)\,\delta\mathrm{N}-(h-c)\,\delta\mathrm{M}&=0,\\ (f-a)\,\delta\mathrm{N}-(h-c)\,\delta\mathrm{L}&=0,\\ (f-a)\,\delta\mathrm{M}-(g-b)\,\delta\mathrm{L}&=0.\end{aligned}$$

Les deux premières de ces équations donnent

$$\delta\mathrm{L}=\frac{f-a}{h-c}\,\delta\mathrm{N},\qquad \delta\mathrm{M}=\frac{g-b}{h-c}\,\delta\mathrm{N},$$

et, comme ces valeurs satisfont aussi à la troisième équation, il s'ensuit que la variation $\delta\mathrm{N}$ demeure indéterminée.

Faisant donc ces substitutions dans la transformée trouvée ci-dessus, on aura

$$\delta\mathrm{N}\left\{\begin{aligned}&+(h-c)\,\mathrm{S}[\mathrm{Y}(x-a)-\mathrm{X}(y-b)]\,dm\\ &+(g-b)\,\mathrm{S}[\mathrm{X}(z-c)-\mathrm{Z}(x-a)]\,dm\\ &+(f-a)\,\mathrm{S}[\mathrm{Z}(y-b)-\mathrm{Y}(z-c)]\,dm\end{aligned}\right\}=0;$$

ainsi les conditions de l'équilibre seront renfermées dans cette seule équation

$$\begin{aligned}&+(h-c)\,\mathrm{S}[\mathrm{Y}(x-a)-\mathrm{X}(y-b)]\,dm\\ &+(g-b)\,\mathrm{S}[\mathrm{X}(z-c)-\mathrm{Z}(x-a)]\,dm\\ &+(f-a)\,\mathrm{S}[\mathrm{Z}(y-b)-\mathrm{Y}(z-c)]\,dm=0.\end{aligned}$$

63. Ces différentes équations répondent à celles que nous avons données dans la Section III, pour l'équilibre d'un système de points isolés de forme invariable; et nous aurions pu appliquer immédiatement les conditions de cet équilibre à celui d'un corps solide de figure quelconque, dont tous les points sont tirés par des forces données. Mais nous avons cru qu'il n'était pas inutile, pour montrer la fécondité de nos méthodes, de traiter cette dernière question en particulier et sans rien emprunter des problèmes déjà résolus.

Au reste, si les deux points du corps que nous venons de supposer fixes étaient mobiles sur des lignes ou des surfaces données, ou même joints entre eux d'une manière quelconque, on aurait alors une ou plusieurs équations différentielles entre les variations des coordonnées a, b, c, f, g, h qui répondent à ces points; et, substituant à la place de ces variations leurs valeurs en δl, δm, δn, $\delta\mathrm{L}$, $\delta\mathrm{M}$, $\delta\mathrm{N}$, d'après les formules générales de l'article 60, on aurait autant d'équations entre ces dernières variations, au moyen desquelles on déterminerait quelques-unes de ces variations par les autres; on substituerait ensuite ces valeurs dans l'équation générale, et l'on égalerait à zéro chacun des coefficients des variations restantes, ce qui fournirait toutes les équations nécessaires pour l'équilibre.

La marche du calcul est, comme l'on voit, toujours la même, et c'est ce qu'on doit regarder comme un des principaux avantages de cette méthode.

64. Les expressions trouvées plus haut (art. 60) pour les variations δx, δy, δz font voir que ces variations ne sont que les résultats des mouvements de translation et de rotation que nous avons considérés en particulier dans la Section III.

En effet, il est visible que les termes δl, δm, δn, qui sont communs à tous les points du corps, représentent les petits espaces parcourus par le corps, suivant les directions des coordonnées x, y, z, en vertu d'un mouvement quelconque de translation; et l'on voit, par les formules de l'article 8 de la même Section, que les termes $z\,\delta\mathrm{M}-y\,\delta\mathrm{N}$,

$x\,\delta N - z\,\delta L$, $y\,\delta L - x\,\delta M$ représentent les petits espaces parcourus par chaque point du corps, suivant les mêmes directions, en vertu de trois mouvements de rotation δL, δM, δN autour des trois axes des x, y, z, ces quantités δL, δM, δN répondant aux quantités $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ de l'article cité. Ainsi l'on aurait pu déduire immédiatement les expressions dont il s'agit de la seule considération de ces mouvements, ce qui aurait été plus simple, mais non pas si direct. L'analyse précédente conduit naturellement à ces expressions et prouve par là, d'une manière encore plus directe et plus générale que celle de l'article 10 de la Section III, que, lorsque les différents points d'un système conservent leur position relative, le système ne peut avoir à chaque instant que des mouvements de translation dans l'espace et de rotation autour de trois axes perpendiculaires entre eux.

SECTION SIXIÈME.

SUR LES PRINCIPES DE L'HYDROSTATIQUE.

Quoique nous ignorions la constitution intérieure des fluides, nous ne pouvons douter que les particules qui les composent ne soient matérielles, et que par cette raison les lois générales de l'équilibre ne leur conviennent comme aux corps solides. En effet, la propriété principale des fluides, et la seule qui les distingue des corps solides, consiste en ce que toutes leurs parties cèdent à la moindre force et peuvent se mouvoir entre elles avec toute la facilité possible, quelles que soient d'ailleurs la liaison et l'action mutuelle de ces parties. Or, cette propriété pouvant aisément être traduite en calcul, il s'ensuit que les lois de l'équilibre des fluides ne demandent pas une théorie particulière, mais qu'elles ne doivent être qu'un cas particulier de la théorie générale de la Statique. C'est sous ce point de vue que nous allons les considérer; mais nous croyons devoir commencer par exposer les différents principes qui ont été employés jusqu'ici dans cette partie de la Statique qu'on nomme communément *Hydrostatique*, pour compléter l'analyse des principes de la Statique que nous avons donnée dans la Section I.

1. C'est encore à Archimède que nous devons les premiers principes de l'équilibre des fluides. Son Traité *De insidentibus humido* ne nous est pas parvenu en grec; il y en avait seulement une traduction latine assez défectueuse, donnée par Tartalea, lorsque Commendin entreprit de le restituer et de l'éclaircir par des notes; il parut, par les soins de ce savant commentateur, en 1565, sous le titre *De iis quæ vehuntur in aqua*.

Cet Ouvrage, qu'on peut regarder comme un des plus précieux restes de l'Antiquité, est divisé en deux Livres. Dans le premier, Archimède pose ces deux principes, qu'il regarde comme des principes d'expérience, et sur lesquels il fonde toute sa théorie : 1° que la nature des fluides est telle, que les parties moins pressées sont chassées par celles qui le sont davantage, et que chaque partie est toujours pressée par tout le poids de la colonne qui lui répond verticalement; 2° que tout ce qui est poussé en haut par un fluide est toujours poussé suivant la perpendiculaire qui passe par son centre de gravité.

Du premier principe, Archimède conclut d'abord que la surface d'un fluide, dont toutes les parties sont supposées peser vers le centre de la Terre, doit être sphérique pour que le fluide soit en équilibre. Ensuite il démontre qu'un corps aussi pesant qu'un égal volume du fluide doit s'y enfoncer tout à fait, parce qu'en considérant deux pyramides égales du fluide supposé en équilibre autour du centre de la Terre, celle où le corps ne serait plongé qu'en partie exercerait une plus grande pression que l'autre sur le centre de la Terre ou, en général, sur une surface sphérique quelconque qu'on imaginerait autour de ce centre. Il prouve, de la même manière, que les corps plus légers qu'un égal volume du fluide ne peuvent s'y enfoncer que jusqu'à ce que la partie submergée occupe la place d'un volume de fluide aussi pesant que le corps entier; d'où il déduit ces deux théorèmes hydrostatiques, que les corps plus légers que des volumes égaux d'un fluide, y étant plongés, en sont repoussés de bas en haut avec une force égale à l'excès du poids du fluide déplacé sur celui du corps plongé, et que les corps plus pesants y perdent une partie de leur poids égale à celui du fluide déplacé.

Archimède se sert ensuite de son second principe pour établir les lois de l'équilibre des corps qui flottent sur un fluide; il démontre que toute section de sphère plus légère qu'un volume égal du fluide, y étant plongée, doit nécessairement se disposer de manière que la base en soit horizontale; et sa démonstration consiste à faire voir que, si la base était inclinée, le poids total du corps, considéré comme concentré dans son centre de gravité, et la poussée verticale du fluide, considérée aussi comme concentrée dans le centre de gravité de la partie submergée, tendraient toujours à faire tourner le corps jusqu'à ce que sa base fût redevenue horizontale.

Tels sont les objets du premier Livre. Dans le second, Archimède donne, d'après les mêmes principes, les lois de l'équilibre de différents solides formés par la révolution des sections coniques, et plongés dans des fluides plus pesants que ces corps; il examine les cas où ces conoïdes peuvent y demeurer inclinés, ceux où ils doivent s'y tenir debout et ceux où ils doivent culbuter ou se redresser. Ce Livre est un des plus beaux monuments du génie d'Archimède et renferme une théorie de la stabilité des corps flottants à laquelle les modernes ont peu ajouté.

2. Quoique, d'après ce qu'Archimède avait démontré, il ne fût pas difficile de déterminer la pression d'un fluide sur le fond ou sur les parois du vase dans lequel il est renfermé, Stevin est néanmoins le premier qui ait entrepris cette recherche et qui ait découvert le paradoxe hydrostatique, qu'un fluide peut exercer une pression beaucoup plus grande que son propre poids. C'est dans le tome III des *Hypomnemata mathematica*, traduits du hollandais par Snellius et publiés à Leyde en 1608, que se trouve la théorie hydrostatique de Stevin. Après avoir prouvé qu'un corps solide de figure quelconque et de même gravité que l'eau peut y rester dans une situation quelconque, par la raison qu'il occupe la même place et pèse autant que si c'était de l'eau, Stevin imagine un vase rectangulaire rempli d'eau et il fait voir aisément que son fond doit supporter tout le poids de l'eau qui remplit le vase. Il suppose ensuite qu'on plonge dans ce vase un solide de figure quelconque et de même gravité que l'eau; il est clair que la pression restera la même; de sorte que, si l'on donne au solide plongé une figure telle qu'il ne reste plus qu'un canal de fluide d'une figure quelconque, la pression du canal sur la base sera encore la même et, par conséquent, égale au poids d'une colonne verticale d'eau qui aurait cette

même base. Or Stevin observe qu'en supposant ce solide fixement arrêté à sa place, il n'en peut résulter aucun changement dans l'action de l'eau sur le fond du vase; donc la pression sur ce fond sera toujours égale au poids de la même colonne d'eau, quelle que soit la figure du vase.

Stevin passe de là à déterminer la pression de l'eau sur les parois verticales ou inclinées; il divise leur surface en plusieurs petites parties par des lignes horizontales et il fait voir que chaque partie est plus pressée que si elle était horizontale et à la hauteur de son bord supérieur, mais qu'en même temps elle est moins pressée que si elle était placée horizontalement à la hauteur de son bord inférieur. D'où, en diminuant la largeur des parties et augmentant leur nombre à l'infini, il prouve par la méthode des limites que la pression sur une paroi plane inclinée est égale au poids d'une colonne dont cette paroi serait la base et dont la hauteur serait la moitié de la hauteur du vase.

Il détermine ensuite la pression sur une partie quelconque d'une paroi plane inclinée, et il la trouve égale au poids d'une colonne d'eau qui serait formée en appliquant perpendiculairement à chaque point de cette partie des droites égales à la profondeur de ce point sous l'eau. Ce théorème étant ainsi démontré pour des surfaces planes situées comme l'on voudra, il est facile de l'étendre à des surfaces courbes et d'en conclure que la pression exercée par un fluide pesant contre une surface quelconque a pour mesure le poids d'une colonne de ce même fluide, laquelle aurait pour base cette même surface, convertie en une surface plane s'il est nécessaire, et dont les hauteurs répondantes aux différents points de la base seraient les mêmes que les distances des points correspondants de la surface à la ligne de niveau du fluide; ou, ce qui revient au même, cette pression sera mesurée par le poids d'une colonne qui aurait pour base la surface pressée et pour hauteur la distance verticale du centre de gravité de cette même surface à la surface supérieure du fluide [1].

[1] Cette proposition relative à la pression sur une surface courbe est inexacte. L'auteur ne l'énonce ici que par inadvertance. (*J. Bertrand.*)

3. Les théories précédentes de l'équilibre et de la pression des fluides sont, comme l'on voit, entièrement indépendantes des principes généraux de la Statique, n'étant fondées que sur des principes d'expérience particuliers aux fluides; et cette manière de démontrer les lois de l'Hydrostatique, en déduisant de la connaissance expérimentale de quelques-unes de ces lois celle de toutes les autres, a été adoptée par la plupart des auteurs modernes et a fait de l'Hydrostatique une science tout à fait différente et indépendante de la Statique.

Cependant il était naturel de chercher à lier ces deux sciences ensemble et à les faire dépendre d'un seul et même principe. Or, parmi les différents principes qui peuvent servir de base à la Statique et dont nous avons donné une exposition succincte dans la Section I, il est visible qu'il n'y a que celui des vitesses virtuelles qui s'applique naturellement à l'équilibre des fluides. Aussi Galilée, auteur de ce principe, s'en est servi également pour démontrer les principaux théorèmes de Statique et d'Hydrostatique.

Dans son *Discorso intorno alle cose che stanno su l'acqua, o che in quella si muovono*, il déduit immédiatement de ce principe l'équilibre de l'eau dans un siphon, en faisant voir que, si l'on suppose le fluide à la même hauteur dans les deux branches, il ne saurait descendre dans l'une et monter dans l'autre sans que les moments soient égaux dans la partie du fluide qui descend et dans celle qui monte. Galilée démontre d'une manière semblable l'équilibre des fluides avec les solides qui y sont plongés; il est vrai que ses démonstrations ne sont pas bien rigoureuses, et, quoiqu'on ait cherché à y suppléer dans les notes ajoutées à l'édition de Florence de 1728, on peut dire qu'elles laissent encore beaucoup à désirer. Descartes et Pascal ont également employé le principe des vitesses virtuelles dans l'Hydrostatique; ce dernier surtout en a fait un grand usage dans son *Traité de l'équilibre des liqueurs* et s'en est servi pour démontrer la propriété principale des fluides, qu'une pression quelconque appliquée à un point de leur surface se répand également dans tous les autres points.

4. Mais ces applications du principe des vitesses virtuelles étaient encore trop hypothétiques et, pour ainsi dire, trop lâches pour pouvoir servir à établir une théorie rigoureuse sur l'équilibre des fluides. Aussi ce principe a-t-il été abandonné depuis par la plupart des auteurs qui ont traité de l'Hydrostatique, et surtout par ceux qui ont entrepris de reculer les limites de cette science en cherchant les lois de l'équilibre des fluides hétérogènes, dont toutes les parties sont animées par des forces quelconques; recherche très importante par le rapport qu'elle a avec la fameuse question de la figure de la Terre.

Huygens [1] a pris dans cette recherche, pour principe d'équilibre, la perpendicularité de la pesanteur à la surface. Newton [2] est parti du principe de l'égalité des poids des colonnes centrales. Bouguer [3] a remarqué ensuite que, souvent, ces deux principes ne donnaient pas le même résultat, et en a conclu que, pour qu'il y eût équilibre dans une masse fluide, il fallait que les deux principes y eussent lieu à la fois et s'accordassent à donner la même figure à la surface du fluide. Mais Clairaut [4] a démontré de plus qu'il peut y avoir des cas où cet accord ait lieu, et où cependant il n'y aurait point d'équilibre. Maclaurin [5] a généralisé le principe de Newton, en établissant que, dans une masse fluide en équilibre, chaque particule doit être comprimée également par toutes les colonnes rectilignes du fluide, lesquelles appuient sur cette particule et se terminent à la surface; et Clairaut [6] l'a rendu plus général encore, en faisant voir que l'équilibre d'une masse fluide demande que les efforts de toutes les parties du fluide, renfermées dans un canal quelconque, aboutissant à la surface ou rentrant en lui-même, se détruisent mutuellement. Enfin il a déduit le premier de ce principe les vraies lois fondamentales de l'équilibre d'une masse fluide dont toutes les parties sont animées par des forces quelconques, et il a

(1) Voir *Dissertatio de causa gravitatis, additamentum; Opera posthuma*, t. II, p. 116.
(2) Dans le livre des *Principes*, livre III, proposition 19.
(3) *Mémoires de l'Académie des Sciences*; 1734.
(4) *Théorie de la figure de la Terre*, p. 28, 2e édition; Paris, 1808.
(5) *Traité des fluxions*, t. II, p. 110. Traduction de Pezenas; Paris, 1749.
(6) *Théorie de la figure de la Terre*. (*Notes de M. J. Bertrand.*)

trouvé les équations aux différences partielles par lesquelles on peut exprimer ces lois; découverte qui a changé la face de l'Hydrostatique et en a fait comme une science nouvelle.

5. Le principe de Clairaut n'est qu'une conséquence naturelle du principe de l'égalité de pression en tous sens, et l'on peut déduire immédiatement de celui-ci les mêmes équations qui résultent de l'équilibre des canaux. Car, en considérant la pression comme une force qui agit sur chaque particule, et qui peut s'exprimer par une fonction des coordonnées qui déterminent le lieu de la particule dans la masse fluide, la différence des pressions qu'elle souffre sur deux faces opposées et parallèles donne la force qui tend à la mouvoir perpendiculairement à ces faces, et qui doit être détruite par les forces accélératrices dont cette particule est animée; de sorte qu'en rapportant toutes ces forces aux directions des trois coordonnées rectangles, et supposant la masse fluide partagée en petits parallélogrammes rectangles ayant pour côtés les éléments de ces coordonnées, on a directement trois équations aux différences partielles entre la pression et les forces accélératrices données, lesquelles servent à déterminer la valeur même de la pression et la relation qui doit avoir lieu entre ces forces. Ce moyen simple de trouver les lois générales de l'Hydrostatique est dû à Euler (*Mémoires de Berlin de* 1755) et il est maintenant adopté dans presque tous les Traités de cette science.

6. Le principe de l'égalité de pression en tous sens est donc jusqu'ici le fondement de la théorie de l'équilibre des fluides, et il faut avouer que ce principe renferme, en effet, la propriété la plus simple et la plus générale que l'expérience ait fait découvrir dans les fluides en équilibre. Mais la connaissance de cette propriété est-elle indispensable dans la recherche des lois de l'équilibre des fluides? Et ne peut-on pas dériver ces lois directement de la nature même des fluides considérés comme des amas de molécules très déliées, indépendantes les unes des autres et parfaitement mobiles en tout sens? C'est ce que

je vais tâcher de faire dans les Sections suivantes, en n'employant que le principe général de l'équilibre dont j'ai fait usage jusqu'ici pour les corps solides; et cette partie de mon travail fournira non seulement une des plus belles applications du principe dont il s'agit, mais servira aussi à simplifier à quelques égards la théorie même de l'Hydrostatique.

On sait que les fluides en général se divisent en deux espèces : en fluides incompressibles dont les parties peuvent changer de figure, mais sans changer de volume, et en fluides compressibles et élastiques dont les parties peuvent changer à la fois de figure et de volume et tendent toujours à se dilater avec une force connue qu'on suppose ordinairement proportionnelle à une fonction de la densité.

L'eau, le mercure, etc., appartiennent à la première espèce; et l'air, la vapeur de l'eau bouillante, etc., appartiennent à la seconde.

Nous traiterons d'abord de l'équilibre des fluides incompressibles, et ensuite de celui des fluides compressibles et élastiques.

SECTION SEPTIÈME.

DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES.

1. Soit une masse fluide m, dont tous les points soient animés par des pesanteurs ou forces quelconques P, Q, R, ..., dirigées suivant les lignes $p, q, r, \ldots$; on aura, suivant les dénominations de l'article 12 de la Section IV, pour la somme des moments de toutes ces forces, la formule intégrale

$$\mathsf{S}(\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots)\,dm,$$

laquelle devra être nulle en général pour qu'il y ait équilibre dans le fluide.

§ I. — *De l'équilibre d'un fluide dans un tuyau très étroit.*

2. Supposons d'abord le fluide renfermé dans un canal ou tuyau infiniment étroit et de figure donnée et imaginons ce fluide divisé en tranches ou portions infiniment petites, dont la hauteur soit ds et la largeur ω; on pourra prendre $dm = \omega\,ds$, à cause que la largeur ω du tuyau est supposée infiniment petite, ds étant l'élément de la courbe du tuyau. Or, en imaginant que le fluide reçoive un petit mouvement, et change infiniment peu de place dans le tuyau, soit δs le petit espace que la tranche ou particule dm parcourt dans le tuyau; il est clair que $\omega\,\delta s$ sera la quantité du fluide qui passera en même temps par chacune des sections ω du canal. Donc, à cause de l'incompressibilité du fluide, il faudra que cette quantité soit partout la même; de sorte que, faisant $\omega\,\delta s = \alpha$, la quantité α sera constante par rapport à la

courbe du tuyau. On aura ainsi $\omega = \frac{\alpha}{\delta s}$ et, par conséquent, $dm = \frac{\alpha\, ds}{\delta s}$; de sorte que la formule qui exprime la somme des moments des forces deviendra, en faisant sortir hors du signe intégral la quantité constante α,

$$\alpha \mathrm{S}(\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots)\frac{ds}{\delta s}.$$

Maintenant il est visible que, puisque δp, δq, δr, ... sont les variations des lignes p, q, r, ... résultantes de la variation δs, ces variations doivent avoir entre elles les mêmes rapports que les différentielles dp, dq, dr, ..., ds, à cause de la figure du canal donnée; ainsi l'on aura

$$\frac{\delta p}{\delta s} = \frac{dp}{ds}, \quad \frac{\delta q}{\delta s} = \frac{dq}{ds}, \quad \frac{\delta r}{\delta s} = \frac{dr}{ds}, \quad \ldots,$$

ce qui réduira la formule précédente à cette forme

$$\alpha \mathrm{S}(\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots),$$

où les différentielles dp, dq, dr, ... se rapportent à la courbe du canal, et le signe S indique une intégrale prise par toute l'étendue du canal.

Faisant donc cette quantité égale à zéro, on aura l'équation

$$\mathrm{S}(\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots) = 0,$$

laquelle contient la loi générale de l'équilibre d'un fluide renfermé dans un canal de figure quelconque.

3. Si, outre les forces P, Q, R, ... qui animent chaque point du fluide, il y avait de plus à l'une des extrémités du canal une force extérieure Π' qui agît par le moyen d'un piston sur la surface du fluide et perpendiculairement aux parois du canal; alors, dénotant par $\delta s'$ le petit espace parcouru par la tranche du fluide qu'on suppose pressée par la force Π', tandis que les autres tranches parcourent les différents espaces δs, il faudra ajouter à la somme des moments des

forces P, Q, R, ... le moment de la force Π', lequel sera représenté par $\Pi'\,\delta s'$. Or, si l'on nomme ω' la section du canal à l'endroit où agit la force Π', on aura $\omega'\,\delta s'$ pour la quantité de fluide qui passe par la section ω', tandis que, par une autre section quelconque ω, il passe la quantité de fluide $\omega\,\delta s$.

Mais l'incompressibilité du fluide demande que ces quantités soient partout les mêmes; donc, ayant déjà supposé $\omega\,\delta s = \alpha$, on aura aussi $\omega'\,\delta s' = \alpha$, par conséquent $\delta s' = \frac{\alpha}{\omega'}$. Donc la somme totale des moments des forces qui agissent sur le fluide sera représentée par la formule

$$\alpha\left[\frac{\Pi'}{\omega'} + \mathrm{S}(\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots)\right];$$

de sorte que l'équation de l'équilibre sera

$$\frac{\Pi'}{\omega'} + \mathrm{S}(\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots) = 0.$$

4. Il est évident que, dans l'état d'équilibre, la force Π' doit être contre-balancée par la pression du fluide sur le piston dont la largeur est ω'; d'où il s'ensuit que cette pression sera égale à $-\Pi'$ et, par conséquent, égale à

$$\omega'\,\mathrm{S}(\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots).$$

Donc, en général, la pression du fluide sur chaque point du piston sera exprimée par la formule intégrale

$$\mathrm{S}(\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots),$$

en prenant cette intégrale par toute la longueur du canal. Et cette pression sera aussi la même si, au lieu d'un piston mobile, on suppose un fond immobile qui ferme le canal d'un côté.

5. Si, à l'autre extrémité du canal, il y avait une autre force Π'' agissante de même par le moyen d'un piston, on trouverait pareillement,

en nommant ω'' la section du canal dans cet endroit, l'équation

$$\frac{\Pi'}{\omega'}+\frac{\Pi''}{\omega''}+\mathrm{S}(\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq+\mathrm{R}\,dr+\ldots)=0$$

pour l'équilibre du fluide.

6. Donc, si le fluide n'est pressé que par les deux forces extérieures Π' et Π'' appliquées aux surfaces ω' et ω'', il faudra, pour l'équilibre, que l'on ait $\frac{\Pi'}{\omega'}+\frac{\Pi''}{\omega''}=0$; d'où l'on voit que les deux forces Π' et Π'' doivent être de directions contraires, et en même temps réciproquement proportionnelles aux surfaces ω', ω'' sur lesquelles ces forces agissent, proposition qu'on regarde communément comme un principe d'expérience, ou du moins comme une suite du principe de l'égalité de pression en tout sens, dans lequel la plupart des auteurs d'Hydrostatique font consister la nature des fluides.

7. La connaissance des lois de l'équilibre d'un fluide renfermé dans un canal très étroit et de figure quelconque peut conduire à celle des lois de l'équilibre d'une masse quelconque de fluide renfermée dans un vase ou non.

Car il est évident que, si une masse fluide est en équilibre et qu'on imagine un canal quelconque qui la traverse, le fluide contenu dans ce canal sera aussi en équilibre de lui-même, c'est-à-dire indépendamment de tout le reste du fluide. On aura donc pour l'équilibre de ce canal, en faisant abstraction des forces extérieures (art. 2),

$$\mathrm{S}(\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq+\mathrm{R}\,dr+\ldots)=0.$$

Et, comme la figure du canal doit être indéterminée, l'équation précédente devra être indépendante de cette figure; d'où l'on pourrait conclure tout de suite, comme Clairaut l'a fait dans sa *Théorie de la figure de la Terre*, que la quantité $\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq+\mathrm{R}\,dr+\ldots$ doit être une différentielle exacte. Mais on peut arriver à cette conclusion par

l'analyse même et trouver en même temps les relations qui doivent avoir lieu entre les quantités P, Q, R, ... Pour cela, il n'y a qu'à faire varier l'intégrale

$$\mathrm{S}(\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq+\mathrm{R}\,dr+\ldots)$$

par la *méthode des variations* et supposer sa variation nulle.

8. Dénotons en général par Ψ la valeur de l'intégrale

$$\mathrm{S}(\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq+\mathrm{R}\,dr+\ldots),$$

prise par toute la longueur du canal; il faudra que l'on ait

$$\delta\Psi=0.$$

Or on a, par la différentiation,

$$\begin{aligned}\delta\Psi&=\delta\,\mathrm{S}(\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq+\mathrm{R}\,dr+\ldots)\\&=\mathrm{S}\,\delta(\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq+\mathrm{R}\,dr+\ldots)\\&=\mathrm{S}(\mathrm{P}\,\delta dp+\mathrm{Q}\,\delta dq+\mathrm{R}\,\delta dr+\ldots+\delta\mathrm{P}\,dp+\delta\mathrm{Q}\,dq+\delta\mathrm{R}\,dr+\ldots).\end{aligned}$$

Changeant δd en $d\delta$ et faisant ensuite disparaître le double signe $d\delta$ par des intégrations par parties, on aura

$$\begin{aligned}\delta\Psi=\;&\mathrm{P}\,\delta p+\mathrm{Q}\,\delta q+\mathrm{R}\,\delta r+\ldots\\&+\mathrm{S}(\delta\mathrm{P}\,dp-d\mathrm{P}\,\delta p+\delta\mathrm{Q}\,dq-d\mathrm{Q}\,\delta q+\delta\mathrm{R}\,dr-d\mathrm{R}\,\delta r+\ldots),\end{aligned}$$

où les termes qui sont hors du signe S se rapportent aux extrémités de l'intégrale représentée par ce signe et répondent, par conséquent, aux bouts du canal; de sorte qu'en supposant ces bouts fixes, les variations δp, δq, δr, ... qui y répondent seront nulles, et les termes dont il s'agit s'évanouiront d'eux-mêmes.

Maintenant, comme les quantités P, Q, R, ... qui représentent les forces sont ou peuvent toujours être supposées des fonctions de p, q, r, ..., il est clair que la partie de $\delta\Psi$ qui est affectée du signe S n'est plus susceptible de réduction; donc, pour que l'on ait en général

$\delta\Psi = 0$, il faudra que cette partie soit nulle d'elle-même et que, par conséquent, on ait pour chaque point de la masse fluide l'équation identique

$$\delta P\, dp - dP\, \delta p + \delta Q\, dq - dQ\, \delta q + \delta R\, dr - dR\, \delta r + \ldots = 0.$$

En regardant les expressions des forces P, Q, R, ... comme des fonctions quelconques de $p, q, r, \ldots$, on aura, suivant la notation reçue,

$$dP = \frac{\partial P}{\partial p} dp + \frac{\partial P}{\partial q} dq + \frac{\partial P}{\partial r} dr + \ldots;$$

de même

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial p} \delta p + \frac{\partial P}{\partial q} \delta q + \frac{\partial P}{\partial r} \delta r + \ldots,$$

et ainsi des autres différences. Substituant ces valeurs dans l'équation précédente et ordonnant les termes, elle deviendra de cette forme

$$\begin{aligned} 0 = &+ \left(\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p}\right)(\delta q\, dp - dq\, \delta p) \\ &+ \left(\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial p}\right)(\delta r\, dp - dr\, \delta p) \\ &+ \left(\frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial q}\right)(\delta r\, dq - dr\, \delta q) \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et devra avoir lieu indépendamment des différences $dp, dq, dr, \ldots$; $\delta p, \delta q, \delta r, \ldots$.

Donc, s'il n'y a aucune relation donnée entre les variables $p, q, r, \ldots$, il faudra faire séparément

$$\begin{gathered} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial p} = 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial q} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Ce sont les équations de condition connues pour l'intégrabilité de la formule

$$P\, dp + Q\, dq + R\, dr + \ldots.$$

9. Lorsque les lignes $p, q, r, \ldots$ se rapportent à un point dans l'espace, comme dans le cas présent, elles ne peuvent dépendre que des trois coordonnées de ce point et les forces P, Q, R, ... peuvent toujours se réduire à trois, suivant ces coordonnées (Sect. V, art. 7). Ainsi, en prenant p, q, r pour ces coordonnées, soit rectangles ou non [1], et P, Q, R, ... pour les forces qui agissent sur chaque particule du fluide, dans la direction des mêmes coordonnées, il faudra que les quantités P, Q, R, regardées comme des fonctions de p, q, r, satisfassent à ces trois équations

$$\frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\partial Q}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial q} = 0.$$

Ce sont les conditions nécessaires pour que la masse fluide puisse être en équilibre, en vertu des forces P, Q, R qui agissent sur tous ses points.

Au reste, on a fait abstraction jusqu'ici de la densité du fluide, ou plutôt on l'a regardée comme constante et égale à l'unité; mais, si l'on voulait la supposer variable, alors, en nommant Γ la densité d'une particule quelconque dm, on aurait (art. 2)

$$dm = \Gamma \omega\, ds;$$

et les quantités P, Q, R, ... se trouveraient toutes multipliées par Γ. Ainsi, l'on aura pour l'équilibre des fluides de densité variable les mêmes lois que pour l'équilibre des fluides de densité uniforme, en multipliant seulement les différentes forces par la densité du point sur lequel elles agissent, c'est-à-dire en écrivant simplement ΓP, ΓQ, ΓR, ... à la place de P, Q, R, ...

[1] Cette assertion n'est pas exacte. Si P, Q, R désignaient les composantes parallèles à trois axes obliques et p, q, r les coordonnées relatives à ces axes, la somme des moments virtuels ne serait pas $P\,dp + Q\,dq + R\,dr$ et les raisonnements qui précèdent ne pourraient pas s'appliquer. (*J. Bertrand.*)

§ II. — *Où l'on déduit les lois générales de l'équilibre des fluides incompressibles de la nature des particules qui les composent.*

10. Nous allons maintenant chercher les lois de l'équilibre des fluides incompressibles, directement par notre formule générale, en regardant ces sortes de fluides comme formés d'un amas de particules mobiles en tout sens, et qui peuvent changer de figure, mais sans changer de volume.

Supposons, pour plus de simplicité, que toutes les forces qui agissent sur les particules du fluide soient réduites à trois, représentées par X, Y, Z et dirigées suivant les coordonnées rectangles x, y, z, c'est-à-dire tendantes à diminuer ces coordonnées. Nous avons donné, dans le Chapitre I de la Section V, les formules générales de cette réduction.

Nommant dm la masse d'une particule quelconque, on aura, pour la somme des moments des forces X, Y, Z, la formule intégrale

$$\mathrm{S}(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dm;$$

or le volume de la particule dm peut être représenté par $dx\,dy\,dz$; ainsi, en exprimant par Γ la densité, il est clair qu'on aura

$$dm = \Gamma\,dx\,dy\,dz;$$

et le signe d'intégration S appartiendra à la fois aux trois variables x, y, z.

Il faudra, de plus, avoir égard à l'équation de condition résultante de l'incompressibilité du fluide, laquelle, étant supposée représentée par

$$L = 0,$$

donnera, en différentiant selon δ, multipliant par un coefficient indéterminé λ et intégrant, la formule $\mathrm{S}\lambda\,\delta L$ à ajouter à la précédente.

S'il n'y a point de forces extérieures qui agissent sur la surface du fluide, ni de conditions particulières à cette surface, on aura simplement, pour l'équation générale de l'équilibre (Sect. IV, art. 13),

$$\mathrm{S}(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dm + \mathrm{S}\lambda\,\delta L = 0,$$

dans laquelle il faudra prendre les intégrales relativement à toute la masse du fluide.

11. La condition de l'incompressibilité consiste en ce que le volume de chaque particule soit invariable; ainsi, ayant exprimé ce volume par $dx\,dy\,dz$, on aura $dx\,dy\,dz = \text{const.}$ pour l'équation de condition; par conséquent, on aura

$$L = dx\,dy\,dz - \text{const.}, \qquad \delta L = \delta(dx\,dy\,dz).$$

Pour avoir la variation $\delta(dx\,dy\,dz)$, il semble qu'il n'y aurait qu'à différentier simplement $dx\,dy\,dz$ selon δ; mais il y a ici une considération particulière à faire, et sans laquelle le calcul ne serait pas rigoureux. La quantité $dx\,dy\,dz$ n'exprime le volume d'une particule qu'autant qu'on suppose la figure de cette particule un parallélépipède rectangulaire dont les côtés sont parallèles aux axes des x, y, z; cette supposition est très permise, puisqu'on peut imaginer le fluide partagé en éléments infiniment petits d'une figure quelconque. Or $\delta(dx\,dy\,dz)$ doit exprimer la variation que souffre ce volume lorsque la particule change infiniment peu de situation, ses coordonnées x, y, z devenant $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$; et il est clair que si, dans ce changement, la particule conservait la figure d'un parallélépipède rectangle, on aurait

$$\delta(dx\,dy\,dz) = dy\,dz\,\delta dx + dx\,dz\,\delta dy + dx\,dy\,\delta dz.$$

Par les principes du calcul des variations, on peut changer les δdx, δdy, δdz en $d\,\delta x$, $d\,\delta y$, $d\,\delta z$; mais il est nécessaire de remarquer que les variations δx, δy, δz pouvant être regardées comme des fonctions indéterminées et infiniment petites de x, y, z, pour que $d\,\delta x$ représente la variation du côté dx de la particule rectangulaire $dx\,dy\,dz$, lequel est formé par l'accroissement dx que la coordonnée x reçoit tandis que les deux autres, y et z, ne varient pas, il faut que, dans la différentiation de δx, la seule x soit censée variable : ainsi, suivant la notation des différences partielles, au lieu d'écrire simplement $d\,\delta x$, il faudra écrire $\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}dx$; de même, et par un raisonnement semblable, on écrira $\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}dy$ et $\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}dz$ au lieu de $d\,\delta y$ et $d\,\delta z$. De cette manière, dans l'hypothèse que la particule $dx\,dy\,dz$ demeure rectangulaire après la variation, on aura

$$\delta(dx\,dy\,dz) = dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right).$$

Il en serait encore de même si l'on supposait que la particule $dx\,dy\,dz$ devînt, par la variation, un parallélépipède dont les angles différassent infiniment peu de l'angle droit; car on sait, par la Géométrie, que, si a, b, c sont les trois côtés d'un parallélépipède qui forment un angle solide, et α, β, γ les trois angles que ces côtés forment entre eux, la solidité, ou le contenu du parallélépipède, est exprimée par la formule

$$abc\sqrt{(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}.$$

Or les côtés deviennent, par la variation,

$$dx\left(1+\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}\right),\quad dy\left(1+\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}\right),\quad dz\left(1+\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right),$$

et les cosinus de α, β, γ deviennent infiniment petits; ainsi, en substituant ces valeurs au lieu de a, b, c, et négligeant les infiniment petits des ordres supérieurs au premier, on aura, pour la variation de $dx\,dy\,dz$, la même expression qu'on vient de trouver.

Mais, quoique cette dernière hypothèse soit légitime, nous ne voulons pas l'adopter sans démonstration, pour ne rien laisser à désirer sur l'exactitude de nos formules. Nous allons donc chercher, d'une manière rigoureuse, la variation de $dx\,dy\,dz$, en ayant égard à la fois au changement de position et de longueur de chacun des côtés d'un parallélépipède rectangulaire, et en supposant seulement, ce qui est exact dans l'infiniment petit, que ces côtés demeurent rectilignes.

12. Pour simplifier cette recherche, nous commencerons par ne considérer qu'une des faces du parallélépipède $dx\,dy\,dz$, par exemple la face $dx\,dy$, dont les quatre angles répondent à ces quatre systèmes de coordonnées,

$$\begin{array}{ll}(1) & x,\quad y,\quad z,\\ (2) & x+dx,\quad y,\quad z,\\ (3) & x,\quad y+dy,\quad z,\\ (4) & x+dx,\quad y+dy,\quad z.\end{array}$$

Supposons que les coordonnées x, y, z du premier système deviennent $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z$, et regardons les variations δx, δy, δz comme des fonctions infiniment petites de x, y, z; en faisant croître successivement les x, y de leurs différentielles dx, dy, on trouvera ce que doivent devenir simultanément les coordonnées des trois autres systèmes. Ainsi, en marquant par les mêmes numéros les systèmes variés, on aura

$$\begin{array}{ll}(1) & x+\delta x,\quad y+\delta y,\quad z+\delta z,\\[4pt] (2) & x+dx+\delta x+\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}dx,\quad y+\delta y+\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}dx,\quad z+\delta z+\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}dx,\\[4pt] (3) & x+\delta x+\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}dy,\quad y+dy+\delta y+\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}dy,\quad z+\delta z+\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}dy,\\[4pt] (4) & \left\{\begin{array}{l} x+dx+\delta x+\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}dx+\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}dy,\\ y+dy+\delta y+\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}dx+\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}dy,\\ z+\delta z+\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}dx+\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}dy.\end{array}\right.\end{array}$$

Comme ces quatre systèmes de coordonnées répondent aux quatre angles du nouveau quadrilatère dans lequel s'est changé le rectangle $dx\,dy$, il est clair qu'on aura les côtés de ce quadrilatère en prenant la racine carrée de la somme des carrés des différences des coordonnées pour les deux angles adjacents à chaque côté. Ainsi, en marquant la droite qui joint deux angles par la réunion des deux numéros qui répondent à ces angles, on aura

$$(1,2) = dx\sqrt{\left(1+\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)^2},$$

$$(1,3) = dy\sqrt{\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}\right)^2+\left(1+\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)^2},$$

$$(3,4) = dx\sqrt{\left(1+\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right)^2},$$

$$(2,4) = dy\sqrt{\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}\right)^2+\left(1+\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right)^2};$$

d'où l'on voit que les côtés opposés $(1,2)$, $(3,4)$ sont égaux entre eux, ainsi que les côtés opposés $(1,3)$, $(2,4)$, et que, par conséquent, le quadrilatère est un parallélogramme dont les deux côtés contigus $(1,2)$, $(1,3)$ seront, en négligeant sous le signe les quantités du second ordre vis-à-vis de celles du premier,

$$(1,2) = dx\left(1+\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}\right),\qquad (1,3) = dy\left(1+\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}\right).$$

13. A l'égard de l'angle compris par ces deux côtés, on le trouvera par le moyen de la diagonale $(2,3)$, laquelle, en prenant de même la racine carrée de la somme des carrés des différences des coordonnées respectives des systèmes (2) et (3), devient

$$(2,3) = \sqrt{\left(dx+\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}dx-\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}dy\right)^2+\left(dy+\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}dy-\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}dx\right)^2+\left(\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}dx-\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}dy\right)^2}.$$

Or, en nommant α l'angle dont il s'agit, le triangle formé par les trois côtés $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$ donne

$$\cos\alpha = \frac{(1,2)^2+(1,3)^2-(2,3)^2}{2(1,2)\times(1,3)}.$$

Substituant dans cette expression les valeurs trouvées de $(1,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, effaçant les termes qui se détruisent et négligeant les infini-

ment petits du second ordre et des ordres supérieurs, on aura

$$\cos\alpha = \frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\frac{\partial\,\delta y}{\partial x},$$

où l'on voit que l'angle α ne diffère d'un angle droit que par des quantités infiniment petites, puisque son cosinus est infiniment petit.

14. Si l'on applique la même analyse aux deux autres faces $dx\,dz$, $dy\,dz$ du rectangle $dx\,dy\,dz$, on trouvera que ces faces se changent aussi en parallélogrammes; de sorte que les trois faces opposées seront aussi des parallélogrammes, comme on peut le démontrer facilement par la Géométrie. Par conséquent, le nouveau solide sera un parallélépipède dont les côtés qui forment un angle solide seront

$$dx\left(1+\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}\right),\qquad dy\left(1+\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}\right),\qquad dz\left(1+\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right),$$

et nommant α, β, γ les angles compris entre ces côtés, on aura

$$\cos\alpha = \frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+\frac{\partial\,\delta y}{\partial x},$$

$$\cos\beta = \frac{\partial\,\delta x}{\partial z}+\frac{\partial\,\delta z}{\partial x},$$

$$\cos\gamma = \frac{\partial\,\delta y}{\partial z}+\frac{\partial\,\delta z}{\partial y};$$

d'où l'on peut conclure que la variation du parallélépipède rectangulaire $dx\,dy\,dz$ est rigoureusement exprimée par la formule donnée plus haut (art. 11).

15. On voit aussi par là que, si les variations δx, δy, δz n'étaient fonctions respectivement que de x, y, z, on aurait rigoureusement

$$\cos\alpha = 0,\qquad \cos\beta = 0,\qquad \cos\gamma = 0;$$

de sorte que le parallélépipède rectangle $dx\,dy\,dz$ demeurerait rectangle après la variation. Or, comme le changement de forme de ce parallélépipède n'est qu'infiniment petit et n'influe point dans la valeur de sa solidité, il s'ensuit que, sans rien ôter à la généralité du résultat, on peut supposer que les variations δx, δy, δz soient simplement fonctions de x, de y et de z, comme nous l'avons fait dans l'article 31 de la Section IV.

16. Ayant ainsi la vraie valeur de $\delta(dx\,dy\,dz)$, on la prendra pour celle de δL et l'on aura

$$\delta L = dx\,dy\,dz\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right).$$

On substituera donc cette valeur dans l'équation générale de l'article 10, et mettant en même temps pour dm sa valeur $\Gamma\,dx\,dy\,dz$, on aura l'équation

$$\mathrm{S}\left[\Gamma(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z) + \lambda\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\right)\right]dx\,dy\,dz = 0,$$

et il ne s'agira plus que d'y faire disparaitre les doubles signes $d\delta$ par la méthode exposée dans le § II de la Section IV.

17. Considérons d'abord la quantité

$$\mathrm{S}\lambda\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}\,dx\,dy\,dz,$$

où le signe S dénote une triple intégrale relative à x, y, z; il est clair que, comme la différence de δx n'est relative qu'à la variation de x, il ne faudra aussi pour la faire disparaitre qu'avoir égard à l'intégration relative à x; c'est pourquoi on donnera d'abord à cette quantité la forme

$$\mathrm{S}\,dy\,dz\,\mathrm{S}\lambda\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}\,dx,$$

ensuite on transformera l'intégrale simple

$$\mathrm{S}\lambda\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}\,dx \quad \text{en} \quad \lambda''\,\delta x'' - \lambda'\,\delta x' - \mathrm{S}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\,\delta x\,dx;$$

les quantités marquées d'un trait se rapportent au commencement de l'intégration, et celles qui en ont deux se rapportent aux points où elle finit, suivant la notation adoptée dans l'endroit cité. Ainsi la quantité dont il s'agit se trouvera changée en celle-ci

$$\mathrm{S}\,dy\,dz(\lambda''\,\delta x'' - \lambda'\,\delta x') - \mathrm{S}\,dy\,dz\,\mathrm{S}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\,\delta x\,dx,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\mathrm{S}(\lambda''\,\delta x'' - \lambda'\,\delta x')\,dy\,dz - \mathrm{S}\frac{\partial\lambda}{\partial x}\,\delta x\,dx\,dy\,dz.$$

De la même manière et par un raisonnement semblable, on changera les quantités

$$\mathrm{S}\lambda\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}\,dx\,dy\,dz \quad \text{et} \quad \mathrm{S}\lambda\frac{\partial\,\delta z}{\partial z}\,dx\,dy\,dz$$

en celles-ci

$$\mathrm{S}(\lambda''\,\delta y'' - \lambda'\,\delta y')\,dx\,dz - \mathrm{S}\frac{\partial\lambda}{\partial y}\,\delta y\,dx\,dy\,dz$$

et

$$\mathrm{S}(\lambda''\,\delta z'' - \lambda'\,\delta z')\,dx\,dy - \mathrm{S}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\,\delta z\,dx\,dy\,dz.$$

Faisant ces substitutions, on aura donc, pour l'équilibre de la masse fluide, cette équation générale

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\left[\left(\Gamma X - \frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)\delta x + \left(\Gamma Y - \frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)\delta y + \left(\Gamma Z - \frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)\delta z\right]dx\,dy\,dz \\ + \mathrm{S}(\lambda''\,\delta x'' - \lambda'\,\delta x')\,dy\,dz \\ + \mathrm{S}(\lambda''\,\delta y'' - \lambda'\,\delta y')\,dx\,dz + \mathrm{S}(\lambda''\,\delta z'' - \lambda'\,\delta z')\,dx\,dy = 0,\end{aligned}$$

dans laquelle il n'y aura plus qu'à égaler séparément à zéro les coefficients des variations indéterminées δx, δy, δz (Sect. IV, art. 16).

18. On aura donc d'abord ces trois équations

$$\Gamma X - \frac{\partial\lambda}{\partial x} = 0, \qquad \Gamma Y - \frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0, \qquad \Gamma Z - \frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0,$$

lesquelles doivent avoir lieu pour tous les points de la masse fluide.

Ensuite, si le fluide est libre de tous côtés, les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, qui se rapportent aux points de la surface du fluide, seront aussi indéterminées, et, par conséquent, il faudra encore égaler séparément à zéro leurs coefficients, ce qui donnera $\lambda' = 0$, $\lambda'' = 0$, c'est-à-dire en général $\lambda = 0$, pour tous les points de la surface du fluide, et cette équation servira à déterminer la figure de cette surface.

Il en sera de même lorsque le fluide est renfermé dans un vase, pour la partie de la surface où le vase est ouvert; mais, à l'égard de la partie qui est appuyée contre les parois, les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ doivent avoir entre elles des rapports donnés par la figure de ces parois, puisque le fluide ne peut que couler le long des parois; et nous démontrerons plus bas que, quelle que puisse être leur figure, les termes qui renferment les variations en question seront toujours nuls d'eux-mêmes; de sorte qu'il n'y aura aucune condition relativement à cette partie de la surface du fluide.

19. Les trois équations qu'on vient de trouver pour les conditions de l'équilibre du fluide donnent

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x} = \Gamma X, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial y} = \Gamma Y, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial z} = \Gamma Z;$$

donc, puisque

$$d\lambda = \frac{\partial\lambda}{\partial x}dx + \frac{\partial\lambda}{\partial y}dy + \frac{\partial\lambda}{\partial z}dz,$$

on aura

$$d\lambda = \Gamma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz);$$

par conséquent, il faudra que la quantité

$$\Gamma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

soit une différentielle complète en x, y, z, et cette condition renferme seule les lois de l'équilibre des fluides.

Si l'on élimine la quantité λ des mêmes équations, on aura les suivantes :

$$\frac{\partial\Gamma X}{\partial y} = \frac{\partial\Gamma Y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\Gamma X}{\partial z} = \frac{\partial\Gamma Z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\Gamma Y}{\partial z} = \frac{\partial\Gamma Z}{\partial y},$$

équations qui s'accordent avec celles de l'article 9.

Ces conditions sont donc nécessaires pour que la masse fluide puisse être en équilibre en vertu des forces X, Y, Z. Lorsqu'elles ont lieu par la nature de ces forces, on est assuré que l'équilibre est possible, et il ne reste plus qu'à trouver la figure que la masse fluide doit prendre pour être en équilibre, c'est-à-dire l'équation de la surface extérieure du fluide.

Nous avons vu, dans l'article précédent, qu'on doit avoir dans chaque point de cette surface $\lambda = 0$. Donc, puisque $d\lambda = \Gamma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$, on aura, en intégrant,

$$\lambda = \int \Gamma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + \text{const.};$$

par conséquent, l'équation de la surface extérieure sera

$$\int \Gamma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = K,$$

K étant une constante quelconque; et cette équation sera toujours en termes finis, puisque la quantité $\Gamma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ est supposée une différentielle exacte.

20. La quantité $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est toujours d'elle-même une différentielle exacte lorsque les forces X, Y, Z sont le résultat d'une ou de plusieurs attractions proportionnelles à des fonctions quelconques des distances aux centres, puisqu'on a en général, par l'article 1 de la Section V,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots.$$

Nommant cette quantité $d\Pi$, on aura alors $d\lambda = \Gamma\,d\Pi$; donc, pour que

$d\lambda$ soit une différentielle complète, il faudra que Γ soit une fonction de Π. Par conséquent, $\lambda = \int \Gamma\, d\Pi$ sera aussi nécessairement une fonction de Π.

On aura donc dans ce cas, qui est celui de la nature, pour la figure de la surface, l'équation

$$\text{fonction de } \Pi = \text{K},$$

savoir Π égal à une constante, de même que si la densité du fluide était uniforme. De plus, puisque Π est constante à la surface et que Γ est fonction de Π, il s'ensuit que la densité Γ doit être la même dans tous les points de la surface extérieure d'une masse fluide en équilibre.

Dans l'intérieur du fluide, la densité peut varier d'une manière quelconque, pourvu qu'elle soit toujours une fonction de Π : elle devra donc être constante partout où la valeur de Π sera constante; de sorte que $\Pi = h$ sera en général l'équation des couches de même densité, h étant une constante. Donc, différentiant, on aura

$$d\Pi = 0 \quad \text{ou} \quad \text{X}\,dx + \text{Y}\,dy + \text{Z}\,dz = 0$$

pour l'équation générale de ces couches; et il est visible que cette équation est celle des surfaces auxquelles la résultante des forces X, Y, Z est perpendiculaire et que Clairaut appelle *surfaces de niveau*. D'où il s'ensuit que la densité doit être uniforme dans chaque couche de niveau formée par deux surfaces de niveau infiniment voisines.

Cette loi doit donc avoir lieu dans la Terre et dans les planètes, supposé que ces corps aient été originairement fluides et qu'ils aient conservé, en se durcissant, la forme qu'ils avaient prise en vertu de l'attraction de leurs parties, combinée avec la force centrifuge.

21. A l'égard de la quantité λ dont nous venons de déterminer la valeur, il est bon de remarquer que le terme $\mathsf{S}\lambda\,\delta\text{L}$ de l'équation générale de l'article 10 représente la somme des moments d'autant de forces λ qui tendent à diminuer la valeur de la fonction L (Sect. IV, art. 7); de sorte que, comme on a fait $\delta\text{L} = \delta(dx\,dy\,dz)$ (art. 11), on

peut dire que la force λ (¹) tend à comprimer chaque particule $dx\,dy\,dz$ du fluide; par conséquent, cette force n'est autre chose que la pression que cette particule du fluide souffre également de tous côtés et à laquelle elle résiste par son incompressibilité.

On a donc, en général, pour la pression dans chaque point de la masse fluide, l'expression

$$\mathsf{S}\,\Gamma(\text{P}\,dx + \text{Q}\,dy + \text{R}\,dz);$$

et, comme la quantité sous le signe doit toujours être intégrable pour que le fluide soit en équilibre, il s'ensuit que la pression pourra toujours être exprimée par une fonction finie des coordonnées relatives à la particule qui éprouve cette pression; proposition fondamentale de la théorie des fluides donnée par Euler (²).

22. Pour donner une application de l'équation $\Pi = \text{const.}$, que nous avons trouvée pour représenter la surface d'une masse fluide en équilibre (art. 20), nous allons considérer l'équilibre de la mer, en supposant qu'elle recouvre la terre regardée comme un solide de figure elliptique et peu différent de la sphère, et que chacune de ses particules soit attirée à la fois par toutes les particules de la terre et de la mer, et soit animée en même temps de la force centrifuge provenant de la rotation uniforme de la Terre autour de son axe.

C'est ici le lieu d'employer les formules que nous avons données dans l'article 10 de la Section V. Nous avons désigné par Σ la valeur de la fonction Π, lorsque les forces sont le résultat des attractions de toutes les particules d'un corps de figure donnée, et nous avons donné l'expression de Σ pour le cas où l'attraction est en raison inverse du carré des distances et où le corps attirant est un sphéroïde elliptique peu différent de la sphère. En conservant les dénominations employées

(¹) La conclusion est exacte, quoique la démonstration ne soit pas suffisante. Nous avons déjà remarqué plusieurs fois qu'on ne peut considérer λ comme une force que si l'on consent à étendre la signification habituelle du mot *force*. (*J. Bertrand.*)

(²) *Mémoires de l'Académie de Berlin*; 1755. (*J. Bertrand.*)

dans cet article et en s'arrêtant aux termes qui contiennent les secondes dimensions des excentricités e et i, on a trouvé

$$\Sigma = -\mathrm{m}\left(\frac{1}{r} - \frac{e^2+i^2}{2.5r^3} + 3\frac{e^2y^2+i^2z^2}{2.5r^5}\right),$$

où x, y, z sont les coordonnées rectangles du point attiré; $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ est la distance de ce point au centre du sphéroïde, et m est la masse du sphéroïde égale à $\frac{4\pi}{3}$ ABC, A, B, C étant les demi-axes du sphéroïde.

Si l'on dénote par Γ la densité du sphéroïde supposé homogène, il faudra multiplier cette expression de Σ par Γ; et si l'on suppose que le sphéroïde ait un autre sphéroïde pour noyau, dont la densité soit différente, il n'y aura qu'à y ajouter la valeur de Σ relative à ce nouveau sphéroïde, multipliée par la différence des densités. Ainsi, en marquant par un trait les quantités relatives au sphéroïde intérieur et supposant que sa densité soit $\Gamma+\Gamma'$, on aura, pour la valeur totale de Σ,

$$\begin{aligned}\Sigma = &-\frac{\Gamma\mathrm{m}+\Gamma'\mathrm{m}'}{r} + \frac{\Gamma\mathrm{m}(e^2+i^2)+\Gamma'\mathrm{m}'(e'^2+i'^2)}{2.5r^3}\\ &-3\frac{\Gamma\mathrm{m}e^2+\Gamma'\mathrm{m}'e'^2}{2.5r^5}y^2 - 3\frac{\Gamma\mathrm{m}i^2+\Gamma'\mathrm{m}'i'^2}{2.5r^5}z^2.\end{aligned}$$

23. Supposons que le point attiré par le sphéroïde soit en même temps sollicité par trois forces représentées par fx, gy et hz dirigées suivant les coordonnées x, y et z, et tendantes à les augmenter, on aura $-fx\,dx$, $-gy\,dy$ et $-hz\,dz$ pour leurs moments, et il en résultera les termes $-\frac{fx^2}{2} - \frac{gy^2}{2} - \frac{hz^2}{2}$ à ajouter à la quantité Σ pour avoir la valeur de Π due à toutes les forces qui agissent sur le même point. Ainsi l'équation de l'équilibre sera

$$\Sigma - \frac{fx^2+gy^2+hz^2}{2} = \text{const.}$$

24. Pour appliquer maintenant ces formules à la question dont il s'agit, on supposera que le sphéroïde extérieur est la mer, dont la

densité est Γ, et que le noyau intérieur est la terre, ayant la densité $\Gamma+\Gamma'$, et l'on placera le point attiré à la surface de la mer, en faisant coïncider les coordonnées x, y, z de ce point avec les coordonnées a, b, c de la surface du sphéroïde extérieur. On aura alors, pour que cette surface soit en équilibre, l'équation

$$\begin{aligned}&\frac{\Gamma\mathrm{m}+\Gamma'\mathrm{m}'}{r} - \frac{\Gamma\mathrm{m}(e^2+i^2)+\Gamma'\mathrm{m}'(e'^2+i'^2)}{2.5r^3} + \frac{fx^2}{2}\\ &\quad+\left(3\frac{\Gamma\mathrm{m}e^2+\Gamma'\mathrm{m}'e'^2}{2.5r^5}+\frac{g}{2}\right)y^2\\ &\quad+\left(3\frac{\Gamma\mathrm{m}i^2+\Gamma'\mathrm{m}'i'^2}{2.5r^5}+\frac{h}{2}\right)z^2\\ &=\text{const.}\end{aligned}$$

Cette équation, dans laquelle $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, donne la figure de la surface; mais nous avons supposé dans les formules de l'article 10 de la Section V que cette surface est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1,$$

en prenant ici x, y, z au lieu de a, b, c; donc il faudra que ces deux équations coïncident.

Tirons de celle-ci la valeur de r en y et z, et, pour cela, substituons dans $r^2=x^2+y^2+z^2$ pour x^2 sa valeur $A^2-\frac{A^2y^2}{B^2}-\frac{A^2z^2}{C^2}$; on aura, en mettant pour B^2 et C^2 les valeurs A^2+e^2, A^2+i^2 (article cité),

$$r^2=A^2+\frac{e^2y^2}{A^2+e^2}+\frac{i^2z^2}{A^2+i^2};$$

d'où l'on tire, en rejetant les puissances de e et i supérieures à e^2 et i^2, auxquelles nous n'avons point égard ici,

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{A}-\frac{e^2y^2+i^2z^2}{2A^3}.$$

On substituera donc cette valeur de $\frac{1}{r}$, ainsi que celle de x^2, dans la première équation, et rejetant toujours les termes qui contiendraient e^4, i^4, $e^2 i^2$, ..., on aura

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma \mathrm{m} + \Gamma' \mathrm{m}'}{\mathrm{A}} - \frac{\Gamma \mathrm{m}(e^2 + i^2) + \Gamma' \mathrm{m}'(e'^2 + i'^2)}{2.5\mathrm{A}^3} + \frac{f\mathrm{A}^2}{2} \\ &\quad + \left[3\frac{\Gamma \mathrm{m} e^2 + \Gamma' \mathrm{m}' e'^2}{2.5\mathrm{A}^5} + \frac{g}{2} - \frac{f\mathrm{A}^2}{2\mathrm{B}^2} - \frac{(\Gamma \mathrm{m} + \Gamma' \mathrm{m}')e^2}{2\mathrm{A}^5} \right] y^2 \\ &\quad + \left[3\frac{\Gamma \mathrm{m} i^2 + \Gamma' \mathrm{m}' i'^2}{2.5\mathrm{A}^5} + \frac{h}{2} - \frac{f\mathrm{A}^2}{2\mathrm{C}^2} - \frac{(\Gamma \mathrm{m} + \Gamma' \mathrm{m}')i^2}{2\mathrm{A}^5} \right] z^2 = \text{const.} \end{aligned}$$

Cette équation devant être identique, il faudra que les coefficients des quantités variables y^2 et z^2 soient nuls, ce qui donnera les deux équations

$$\frac{3\Gamma' m' e'^2}{2.5\mathrm{A}^5} - \frac{(2\Gamma \mathrm{m} + 5\Gamma' \mathrm{m}')e^2}{2.5\mathrm{A}^5} + \frac{g}{2} - \frac{f\mathrm{A}^2}{2\mathrm{B}^2} = 0,$$
$$\frac{3\Gamma' \mathrm{m}' i'^2}{2.5\mathrm{A}^5} - \frac{(2\Gamma \mathrm{m} + 5\Gamma' \mathrm{m}')i^2}{2.5\mathrm{A}^5} + \frac{h}{2} - \frac{f\mathrm{A}^2}{2\mathrm{C}^2} = 0,$$

qui serviront à déterminer les deux excentricités e et i de la surface elliptique de la mer.

25. On sait que la force centrifuge est proportionnelle à sa distance de l'axe de rotation et au carré de la vitesse angulaire de rotation. Donc, si l'on prend l'axe $2\mathrm{A}$, qui est aussi l'axe des coordonnées x, pour l'axe de rotation, et que f soit la force centrifuge à la distance A de l'axe, on aura $\frac{\mathrm{f}u}{\mathrm{A}}$ pour la force centrifuge d'un point quelconque du sphéroïde, en faisant $u = \sqrt{y^2 + z^2}$; cette force, étant dirigée suivant la ligne u et tendant à l'augmenter, donnera le moment $-\frac{\mathrm{f}u\,du}{\mathrm{A}}$, dont l'intégrale $-\frac{\mathrm{f}u^2}{2\mathrm{A}}$, savoir $-\frac{\mathrm{f}(y^2 + z^2)}{2\mathrm{A}}$, devra être ajoutée à la quantité Σ, pour avoir égard à l'effet de la force centrifuge. Ainsi on aura les conditions de l'équilibre de la mer, en vertu de l'attraction réciproque de toutes les particules de la mer et de la Terre, et de la force centrifuge due à la rotation de la Terre, en faisant dans les deux équations précédentes $f = 0$, $g = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{A}}$, $h = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{A}}$.

Puisque les deux constantes g et h sont égales, on voit, par ces équations, que, si les excentricités e' et i' de la Terre sont égales, on aura aussi les deux excentricités e et i de la figure de la mer égales entre elles; de sorte que, si la Terre est un sphéroïde de révolution, la mer ne le sera pas non plus, et les deux équations dont il s'agit donneront les valeurs de ses deux excentricités e, i, qui seront différentes des excentricités e' et i' de la Terre.

26. Au reste, cette solution n'est exacte qu'aux quantités e^2, i^2, e'^2, i'^2 près; et si l'on voulait avoir égard, dans les valeurs de Σ et de r, aux termes qui contiendraient des puissances supérieures de ces quantités, il ne serait plus possible de vérifier en général l'équation

$$\Sigma - \frac{\mathrm{f}(y^2 + z^2)}{2\mathrm{A}} = \text{const.}$$

pour la surface d'équilibre; d'où il faudrait conclure que cette surface n'a point rigoureusement la figure d'un sphéroïde elliptique.

Je dis *en général*, parce que, dans le cas où le sphéroïde est homogène et sans noyau intérieur d'une densité différente, on a trouvé que les attractions sur un point quelconque de la surface, suivant les trois coordonnées x, y, z, sont représentées exactement par les formules

$$\mathrm{mL}x, \quad \mathrm{mM}y, \quad \mathrm{mN}z,$$

où L, M, N sont des fonctions de A, B, C données par des intégrales définies; d'où l'on déduit pour Σ cette expression rigoureuse

$$\Sigma = \frac{\mathrm{m}}{2}(\mathrm{L}x^2 + \mathrm{M}y^2 + \mathrm{N}z^2).$$

Ainsi, l'équation de l'équilibre $\Sigma - \frac{\mathrm{f}(y^2 + z^2)}{2\mathrm{A}} = \text{const.}$ étant de la même forme que l'équation du sphéroïde $\frac{x^2}{\mathrm{A}^2} + \frac{y^2}{\mathrm{B}^2} + \frac{z^2}{\mathrm{C}^2} = 1$, on peut, à cause de la constante arbitraire, les rendre identiques par ces deux conditions

$$\frac{\mathrm{mM} - \mathrm{f}}{\mathrm{mL}} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{B}^2}, \qquad \frac{\mathrm{mN} - \mathrm{f}}{\mathrm{mL}} = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{C}^2},$$

lesquelles donnent $B = C$, parce que les quantités M et N sont (¹) des fonctions semblables de B, C et de C, B; elles se réduisent ainsi à une seule, qui sert à déterminer le rapport de A à B.

Ce cas est, jusqu'à présent, le seul pour lequel on ait trouvé une solution rigoureuse qu'on doit à Maclaurin; de sorte que le problème de la figure de la Terre, envisagé physiquement, n'est résolu exactement qu'en supposant le sphéroïde fluide et homogène. Dans ce cas, les deux équations approchées, trouvées plus haut (art. 24), donnent, en faisant

$$\Gamma = 1, \qquad \Gamma' = 0, \qquad g = h = \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{A}} \qquad \text{et} \qquad e = i,$$

celle-ci :

$$\frac{2\mathrm{m}e^2}{5\mathrm{A}^4} - \mathrm{f} = 0.$$

Si l'on compare la force centrifuge à la gravité prise pour l'unité, laquelle est, aux quantités e^2 près, $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{A}^2}$, il n'y aura qu'à faire $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{A}^2} = 1$, et l'on aura

$$\frac{2e^2}{5\mathrm{A}^2} = \mathrm{f} = 2\frac{\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2}{5\mathrm{A}^2};$$

d'où l'on tire

$$\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \sqrt{1 + \frac{5\mathrm{f}}{2}}.$$

Or on a $\mathrm{f} = \frac{1}{288}$; donc $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} = \frac{231}{230}$ à très peu près, comme on le sait depuis longtemps.

§ III. — *De l'équilibre d'une masse fluide avec un solide qu'elle recouvre.*

27. Les lois particulières de l'équilibre d'un fluide avec un solide qui y est plongé, ou dans lequel il est renfermé, lorsque tous les points du fluide et du solide sont sollicités par des forces quelconques, dé-

(¹) En examinant ces équations de plus près, on voit qu'elles admettent une autre solution, et qu'un ellipsoïde à trois axes inégaux peut y satisfaire. Cette remarque est de Jacobi; elle a été développée par M. Liouville (*Journal de l'École Polytechnique*, t. XIII). *Voir* une Note à la fin du volume. (*J. Bertrand.*)

pendent des termes de l'équation générale (art. 17) qui se rapportent aux limites, et qui ne contiennent que des intégrations doubles.

Ces termes donnent cette équation aux limites

$$\mathrm{S}\,\lambda''(\delta x''\,dy\,dz + \delta y''\,dx\,dz + \delta z''\,dx\,dy)$$
$$- \mathrm{S}\,\lambda'(\delta x'\,dy\,dz + \delta y'\,dx\,dz + \delta z'\,dx\,dy) = 0,$$

laquelle doit se vérifier dans tous les points où le fluide est contigu au solide.

28. Considérons d'abord le cas d'une masse fluide dont la surface extérieure est libre, et qui environne un noyau solide fixe de figure quelconque.

En prenant l'origine des coordonnées dans un point de l'intérieur du noyau, les quantités marquées d'un trait se rapporteront à la surface du noyau, et les quantités marquées de deux traits se rapporteront à la surface extérieure du fluide. Ainsi l'on aura d'abord, pour tous les points de cette surface, l'équation $\lambda'' = 0$, laquelle donne, comme on l'a déjà vu plus haut (art. 19),

$$\mathrm{S}\,\Gamma(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz) = \mathrm{K},$$

pour la figure de cette surface.

Il ne restera donc à vérifier que l'équation

$$\mathrm{S}\,\lambda'(\delta x'\,dy\,dz + \delta y'\,dx\,dz + \delta z'\,dx\,dy) = 0,$$

dont tous les termes se rapportent à la surface du noyau.

29. Comme l'intégration de ces termes est relative aux coordonnées dont les différentielles entrent dans l'expression des éléments superficiels $dx\,dy$, $dx\,dz$, $dy\,dz$, il faut commencer par réduire ces éléments à une même forme; ce qu'on peut obtenir en les rapportant à l'élément de la surface auquel ils répondent.

Désignons par ds^2 l'élément de la surface qui répond à l'élément

$dx\,dy$ du plan des xy et nommons γ' l'angle que le plan tangent fait avec le même plan des xy; on aura, par la propriété connue des plans, $dx\,dy = ds^2 \cos\gamma'$, et l'intégrale $\mathrm{S}\,\lambda'\,\delta z'\,dx\,dy$ deviendra $\mathrm{S}\,\lambda' \cos\gamma'\,\delta z\,ds^2$, laquelle devra s'étendre à tous les points de la surface du fluide.

De même, si $d\sigma^2$ est l'élément de la surface qui répond à l'élément $dx\,dz$ du plan des xz, et qu'on nomme β' l'angle que le plan tangent fait avec ce même plan des xz, on aura $dx\,dz = d\sigma^2 \cos\beta'$, et l'intégrale $\mathrm{S}\,\lambda'\,\delta y'\,dx\,dz$ deviendra $\mathrm{S}\,\lambda' \cos\beta'\,\delta y'\,d\sigma^2$, laquelle devra s'étendre également pour toute la surface du fluide.

30. Je remarque maintenant que, quoique les deux éléments ds^2 et $d\sigma^2$ de la surface puissent n'être pas égaux entre eux, néanmoins, comme les deux intégrales qui renferment ces éléments se rapportent à la même surface, rien n'empêche d'employer le même élément dans ces deux intégrales, puisque, par la nature du Calcul différentiel, la valeur absolue des éléments est arbitraire et n'influe point sur celle de l'intégrale. Ainsi l'on pourra changer l'intégrale $\mathrm{S}\,\lambda' \cos\beta'\,\delta y'\,d\sigma^2$ en $\mathrm{S}\,\lambda' \cos\beta'\,\delta y'\,ds^2$.

Par le même raisonnement, l'intégrale $\mathrm{S}\,\lambda'\,\delta x'\,dy\,dz$ pourra se mettre sous la forme $\mathrm{S}\,\lambda' \cos\alpha'\,\delta x'\,ds^2$, en nommant α' l'angle que le plan tangent fait avec le plan des xy.

D'ailleurs, il est évident qu'on peut toujours prendre les éléments dx, dy, dz tels qu'ils satisfassent aux conditions

$$dx\,dy = \cos\gamma'\,ds^2, \qquad dx\,dz = \cos\beta'\,ds^2, \qquad dy\,dz = \cos\alpha'\,ds^2,$$

lesquelles donnent

$$dx = ds\sqrt{\frac{\cos\beta'\cos\gamma'}{\cos\alpha'}},$$

$$dy = ds\sqrt{\frac{\cos\alpha'\cos\gamma'}{\cos\beta'}},$$

$$dz = ds\sqrt{\frac{\cos\alpha'\cos\beta'}{\cos\gamma'}}.$$

Par ces transformations, l'équation aux limites deviendra enfin

$$\mathrm{S}\,\lambda'(\cos\alpha'\,\delta x' + \cos\beta'\,\delta y' + \cos\gamma'\,\delta z')\,ds^2 = 0,$$

l'intégrale devant s'étendre sur toute la surface du fluide contigu au noyau.

31. Supposons que la figure de cette surface soit représentée par l'équation différentielle

$$A\,dx' + B\,dy' + C\,dz' = 0.$$

En nommant α', β', γ' les angles que le plan tangent fait avec les plans des xy, des xz et des yz, on a, par la théorie des surfaces,

$$\cos\alpha' = \frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$\cos\beta' = \frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}},$$

$$\cos\gamma' = \frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}.$$

Donc l'équation de l'article précédent, relative à la surface, deviendra

$$\mathrm{S}\left[\lambda'\,\frac{A\,\delta x' + B\,\delta y' + C\,\delta z'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right] ds^2 = 0.$$

Comme cette surface est donnée de figure et de position, les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ des coordonnées des particules qui y sont contiguës doivent avoir entre elles une relation dépendante de l'équation de la même surface; ainsi, ayant supposé cette équation

$$A\,dx' + B\,dy' + C\,dz' = 0,$$

on aura aussi nécessairement

$$A\,\delta x' + B\,\delta y' + C\,\delta z' = 0,$$

ce qui satisfait à l'équation aux limites de l'article précédent, sans qu'il en résulte aucune nouvelle équation.

32. Soit p' une ligne perpendiculaire à la surface dans le point auquel répondent les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, et terminée à un point fixe. Puisque α' est l'angle que le plan tangent fait avec le plan des yz, ce sera aussi l'angle que la perpendiculaire p' à ce plan fait avec l'axe des x, qui est perpendiculaire au même plan des yz. De même, β' sera l'angle de cette perpendiculaire avec l'axe des y et γ' sera l'angle de la même perpendiculaire avec l'axe des z. Donc, quelles que soient les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, on aura, en général, par l'article 7 de la Section II, en changeant d en δ,

$$\delta p' = \cos\alpha'\,\delta x' + \cos\beta'\,\delta y' + \cos\gamma'\,\delta z';$$

et l'équation de l'article 30, relative à la surface du fluide, pourra se mettre sous la forme

$$\mathrm{S}\,\lambda'\,\delta p'\,ds^2 = 0,$$

où l'on voit que chaque élément $\lambda' ds^2\,\delta p'$ de cette intégrale représente le moment d'une force $\lambda' ds^2$ appliquée à l'élément ds^2 de la surface et dirigée suivant la perpendiculaire p' à cette surface, de sorte que l'intégrale $\mathrm{S}\,\lambda'\,\delta p'\,ds^2$ représentera la somme des moments de toutes les forces λ' appliquées à chaque point de la surface et agissant perpendiculairement à cette surface.

Cette force égale à λ' est évidemment la pression exercée par le fluide sur la surface du noyau, et qui est détruite par la résistance du noyau. Mais on peut, en général, réduire à la forme $\mathrm{S}\,\lambda\,\delta p\,ds^2$ tous les termes de l'équation aux limites qui se rapportent à la surface du fluide, soit que cette surface soit libre ou non; et il est évident que la pression λ doit être nulle dans tous les points où la surface est libre; ce que nous avons déjà trouvé d'une autre manière (art. 18).

33. Si le noyau recouvert par le fluide était mobile, alors il faudrait augmenter les variations δx, δy, δz des variations dépendantes du changement de position du noyau.

Pour distinguer ces différentes variations, nous désignerons par $\delta\mathrm{x}$, $\delta\mathrm{y}$, $\delta\mathrm{z}$ les variations dues simplement au déplacement des particules

du fluide, relativement au noyau regardé comme fixe, et nous dénoterons par $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ les variations qui dépendent du déplacement du noyau. Celles-ci sont exprimées par les formules suivantes, que nous avons trouvées dans l'article 60 de la Section V :

$$\begin{aligned}
\delta\xi &= \delta l \;+ z\,\delta M - y\,\delta N,\\
\delta\eta &= \delta m - z\,\delta L + x\,\delta N,\\
\delta\zeta &= \delta n \;+ y\,\delta L - x\,\delta M.
\end{aligned}$$

Ainsi, dans l'équation générale de l'article 17, il faudra mettre $\delta\mathrm{x} + \delta\xi$, $\delta\mathrm{y} + \delta\eta$, $\delta\mathrm{z} + \delta\zeta$ à la place de δx, δy, δz, et ensuite égaler à zéro les termes affectés des variations $\delta\mathrm{x}$, $\delta\mathrm{y}$, $\delta\mathrm{z}$, ainsi que ceux qui se trouveront affectés des nouvelles variations δl, δm, δn, δL, δM, δN, après les avoir fait sortir hors des signes S, puisque ces variations sont les mêmes pour toutes les particules du fluide.

On voit d'abord que l'introduction des variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ n'apporte aucun changement aux équations qui doivent avoir lieu pour tous les points du fluide, et qui résultent des termes affectés d'une triple intégration, parce qu'en égalant à zéro les coefficients de $\delta\mathrm{x}$, $\delta\mathrm{y}$, $\delta\mathrm{z}$ dans ces termes, les variations $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ disparaissent en même temps. D'où il suit que les lois générales de l'équilibre contenues dans les formules de l'article 19 sont indépendantes de l'état comme de la figure du noyau.

34. Il n'y a donc à considérer que l'équation aux limites, que nous avons réduite, dans l'article 30, à la forme

$$\mathrm{S}\,\lambda'(\cos\alpha\,\delta x' + \cos\beta\,\delta y' + \cos\gamma\,\delta z')\,ds^2 = 0.$$

En y substituant pour $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ les valeurs $\delta\mathrm{x}' + \delta\xi'$, $\delta\mathrm{y}' + \delta\eta'$, $\delta\mathrm{z}' + \delta\zeta'$ marquées d'un trait, pour les rapporter à la surface du fluide contiguë au noyau, elle devient

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}\,\lambda'(\cos\alpha\,\delta\mathrm{x}' + \cos\beta\,\delta\mathrm{y}' + \cos\gamma\,\delta\mathrm{z}')\,ds^2\\
&+\mathrm{S}\,\lambda'(\cos\alpha\,\delta\xi' + \cos\beta\,\delta\eta' + \cos\gamma\,\delta\zeta')\,ds^2 = 0.
\end{aligned}$$

La partie qui contient les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ est nulle d'elle-même, comme nous l'avons démontré dans l'article 31. L'autre partie du premier membre de l'équation devra donc aussi être nulle. On y substituera les valeurs de $\delta\xi'$, $\delta\eta'$, $\delta\zeta'$, et l'on égalera ensuite séparément à zéro les quantités multipliées par δl, δm, δn, δL, δM, δN; on aura ces six équations

$$\mathrm{S}\,\lambda'\cos\alpha\,ds^2 = 0,\qquad \mathrm{S}\,\lambda'\cos\beta\,ds^2 = 0,\qquad \mathrm{S}\,\lambda'\cos\gamma\,ds^2 = 0,$$

$$\mathrm{S}\,\lambda'(y'\cos\gamma - z'\cos\beta)\,ds^2 = 0,$$

$$\mathrm{S}\,\lambda'(z'\cos\alpha - x'\cos\gamma)\,ds^2 = 0,$$

$$\mathrm{S}\,\lambda'(x'\cos\beta - y'\cos\alpha)\,ds^2 = 0,$$

qui seront nécessaires pour l'équilibre complet du fluide et du solide.

Ces équations répondent à celles de l'article 62 de la Section V, en substituant ds^2 pour dm et $\lambda'\cos\alpha$, $\lambda'\cos\beta$, $\lambda'\cos\gamma$ pour X, Y, Z. En effet, λ' étant la force de pression qui agit perpendiculairement sur la surface du noyau solide, $\lambda'\cos\alpha$, $\lambda'\cos\beta$, $\lambda'\cos\gamma$ seront les forces qui en résultent, suivant les directions des coordonnées x, y, z, et il faudra que le solide soit en équilibre, chacun des points de sa surface étant sollicité par ces mêmes forces.

35. Mais, lorsqu'un fluide est supporté par un solide de figure donnée, et que l'un et l'autre sont sollicités par des forces quelconques, il est plus simple de tirer directement la solution du problème de l'équation fondamentale de l'article 16, en y substituant immédiatement, pour δx, δy, δz, leurs valeurs complètes $\delta x + \delta\xi$, $\delta y + \delta\eta$, $\delta z + \delta\zeta$ (art. 33).

Les variations δx, δy, δz, étant indépendantes des autres variations δl, δm, ..., donneront une équation semblable à celle de l'article 17 et fourniront les mêmes résultats pour l'équilibre du fluide que dans le cas où le solide est supposé fixe.

A l'égard des autres variations, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$, il est d'abord aisé de voir

qu'elles ne donnent rien dans les valeurs des différences partielles $\frac{d\,\delta x}{dx}$, $\frac{d\,\delta y}{dy}$, $\frac{d\,\delta z}{dz}$, puisque les variations δl, δm, δn, δL, δM, δN sont censées indépendantes de x, y, z.

Ainsi il suffira de substituer $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ à la place de δx, δy, δz dans la formule

$$\mathrm{S}\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,\Gamma\,dx\,dy\,dz$$

et d'égaler séparément à zéro les quantités multipliées par chacune des six variations δl, δm, δn, δL, δM, δN, après les avoir fait sortir hors du signe S. Il est visible qu'on aura de cette manière les mêmes équations qu'on a trouvées dans la Section V (Chap. IV), pour l'équilibre d'un corps solide dont chaque particule dm, qui est ici $\Gamma\,dx\,dy\,dz$, est animée par des forces quelconques X, Y, Z; de sorte que l'on a, pour l'équilibre d'un fluide sur un noyau mobile, les mêmes équations que si le fluide devenait solide.

36. Il résulte de ces deux manières d'envisager les variations que la pression du fluide sur la surface du noyau équivaut à l'action de toutes les forces qui sollicitent chaque particule du fluide, en supposant que le fluide soit considéré comme solide et que le noyau soit augmenté de toute la masse du fluide devenu solide.

Comme ce théorème de Statique est important, nous croyons devoir montrer d'une manière plus directe comment il se déduit de nos formules.

Tout se réduit à démontrer que l'équation

$$\mathrm{S}\,(X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\,\delta\zeta)\,\Gamma\,dx\,dy\,dz = 0$$

donne les mêmes résultats que l'équation aux limites

$$\mathrm{S}\,\lambda'(\delta\xi'\,dy\,dz + \delta\eta'\,dx\,dz + \delta\zeta'\,dx\,dy) = 0.$$

Par les conditions de l'équilibre du fluide, on a (art. 19)

$$\Gamma X = \frac{\partial\lambda}{\partial x},\qquad \Gamma Y = \frac{\partial\lambda}{\partial y},\qquad \Gamma Z = \frac{\partial\lambda}{\partial z};$$

et, comme les valeurs de $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ (art. 33) sont respectivement indépendantes de x, y, z, on aura aussi

$$\Gamma X\,\delta\xi = \frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta\xi, \qquad \Gamma Y\,\delta\eta = \frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta\eta, \qquad \Gamma Z\,\delta\zeta = \frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta\zeta;$$

ainsi la première équation deviendra

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\delta\xi + \frac{\partial\lambda}{\partial y}\delta\eta + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\delta\zeta\right) dx\,dy\,dz = 0.$$

Le premier terme sous le signe est intégrable par rapport à x, le deuxième par rapport à y, le troisième par rapport à z; donc, si l'on exécute ces intégrations partielles, comme on l'a fait dans l'article 17, il en résulte l'équation aux limites

$$\begin{gathered}\mathrm{S}\lambda''(\delta\xi''\,dy\,dz + \delta\eta''\,dx\,dz + \delta\zeta''\,dx\,dy)\\ -\mathrm{S}\lambda'(\delta\xi'\,dy\,dz + \delta\eta'\,dx\,dz + \delta\zeta'\,dx\,dy) = 0.\end{gathered}$$

Mais on a (art. 23)

$$\lambda'' = 0$$

à cause que la surface extérieure du fluide est supposée libre; donc il ne restera que l'équation

$$\mathrm{S}\lambda'(\delta\xi'\,dy\,dz + \delta\eta'\,dx\,dz + \delta\zeta'\,dx\,dy) = 0.$$

Ainsi les deux équations reviennent exactement au même.

37. Puisque, relativement aux variations dépendantes du déplacement du noyau, on peut regarder le fluide qui le recouvre comme s'il ne faisait qu'une masse solide avec lui, lorsque tous les points du noyau seront aussi sollicités par des forces quelconques, il n'y aura qu'à tenir compte de ces forces, comme de celles qui sollicitent les particules du fluide, et appliquer à l'équilibre de la masse composée du fluide et du solide, comme si elle ne formait qu'un solide continu, les solutions données dans le Chapitre IV de la Section V.

§ IV. — *De l'équilibre des fluides incompressibles contenus dans des vases.*

38. L'équation générale aux limites de l'article 27 doit se vérifier pour tous les points des parois du vase dans lequel le fluide est renfermé.

Mettons cette équation sous la forme

$$\begin{gathered}\mathrm{S}(\lambda''\delta x'' - \lambda'\delta x')\,dy\,dz\\ +\mathrm{S}(\lambda''\delta y'' - \lambda'\delta y')\,dx\,dz\\ +\mathrm{S}(\lambda''\delta z'' - \lambda'\delta z')\,dx\,dy = 0,\end{gathered}$$

et considérons d'abord les termes $\mathrm{S}(\lambda''\delta z'' - \lambda'\delta z')\,dx\,dy$, dans lesquels $\delta z''$ et $\delta z'$ sont les variations de l'ordonnée z, en tant qu'elle se rapporte aux deux points de la surface du fluide qui répondent aux mêmes coordonnées x et y.

Il est évident que les variations $\delta z''$ tendent à faire sortir les particules de la surface hors de la masse fluide, et que les variations $\delta z'$, en les supposant toutes deux positives, tendent à faire rentrer dans cette masse les particules de la surface opposée; de sorte qu'en donnant à celle-ci le signe négatif, les variations $\delta z''$ et $-\delta z'$ tendront également à faire sortir hors de la masse fluide les particules de la surface; et la double intégrale

$$\mathrm{S}(\lambda''\delta z'' - \lambda'\delta z')\,dx\,dy$$

représentera la somme de toutes les quantités $\lambda\,\delta z\,dx\,dy$ qui répondent à tous les points de la surface du fluide et dans lesquelles les variations δz seront censées avoir la même tendance du dedans de la masse fluide au dehors : ainsi, avec cette condition, nous pouvons donner à cette intégrale cette forme plus simple $\mathrm{S}\lambda\,\delta z\,dx\,dy$.

De la même manière et avec les mêmes conditions, on pourra ramener les deux autres intégrales doubles

$$\mathrm{S}(\lambda''\delta y''-\lambda'\delta y')\,dx\,dz \quad \text{et} \quad \mathrm{S}(\lambda''\delta x''-\lambda'\delta x')\,dy\,dz$$

à la forme $\mathrm{S}\lambda\,\delta y\,dx\,dz$, $\mathrm{S}\lambda\,\delta x\,dy\,dz$.

Ainsi l'équation aux limites dont il s'agit pourra se mettre sous cette forme

$$\mathrm{S}\lambda\,\delta z\,dx\,dy+\mathrm{S}\lambda\,\delta y\,dx\,dz+\mathrm{S}\lambda\,\delta z\,dy\,dx,$$

qu'on peut encore réduire, par l'analyse de l'article 33, à celle-ci

$$\mathrm{S}\lambda(\cos\alpha\,\delta x+\cos\beta\,\delta y+\cos\gamma\,\delta z)\,ds^2=0,$$

dans laquelle α, β, γ sont les angles que le plan tangent à la surface, dans le point qui répond aux coordonnées x, y, z, fait avec les trois plans des yz, des xz et des xy. L'intégration de cette équation devra s'étendre à toute la surface du fluide; et les variations δx, δy, δz seront censées toutes dirigées du dedans de la masse fluide au dehors.

39. Dans les points où la surface est libre, les variations δx, δy, δz demeurant indéterminées, on ne peut satisfaire à l'équation qu'en faisant $\lambda=0$, ce qui donnera la figure de cette surface, comme nous l'avons vu dans l'article 18.

Pour tous les autres points de la surface où le fluide est contigu aux parois du vase, si l'on marque d'un trait les quantités qui s'y rapportent, on aura, relativement à ces parois, la même équation qu'on a trouvée par rapport à la surface du noyau recouvert d'un fluide (art. 30). Ainsi, toutes les conclusions qu'on a tirées de cette équation, depuis l'article qu'on vient de citer jusqu'à la fin du paragraphe précédent, peuvent s'appliquer aux parois du vase dans lequel le fluide est renfermé, quelle que soit sa figure, et soit qu'il demeure fixe, ou qu'il doive être en équilibre par la pression du fluide et par l'action des forces étrangères qui le tirent dans des directions quelconques.

SECTION HUITIÈME.

DE L'ÉQUILIBRE DES FLUIDES COMPRESSIBLES ET ÉLASTIQUES.

1. Soient, comme dans l'article 10 de la Section précédente, X, Y, Z les forces qui agissent sur chaque point de la masse fluide, réduites aux directions des coordonnées x, y, z et tendantes à diminuer ces coordonnées; on aura d'abord

$$\mathrm{S}(\mathrm{X}\,\delta x+\mathrm{Y}\,\delta y+\mathrm{Z}\,\delta z)\,dm$$

pour la somme de leurs moments.

Dans les fluides élastiques il y a, de plus, une force intérieure qu'on nomme *élasticité* ou *ressort* et qui tend à les dilater ou à augmenter leur volume. Soit donc ε l'élasticité d'une particule quelconque dm; cette force, tendant à augmenter le volume $dx\,dy\,dz$ de la même particule, aura ou pourra être censée avoir pour moment la quantité $-\varepsilon\,\delta(dx\,dy\,dz)$ par l'article 9 de la Section II. Je donne ici le signe $-$ au moment de cette force, parce que celle-ci tend à augmenter la variable $dx\,dy\,dz$, tandis que les forces X, Y, Z tendent à diminuer les variables x, y, z. Ainsi la somme des moments provenant de l'élasticité de toute la masse fluide sera exprimée par $-\mathrm{S}\varepsilon\,\delta(dx\,dy\,dz)$.

Donc la somme totale des moments des forces qui agissent sur le fluide sera

$$\mathrm{S}(\mathrm{X}\,\delta x+\mathrm{Y}\,\delta y+\mathrm{Z}\,\delta z)\,dm-\mathrm{S}\varepsilon\,\delta(dx\,dy\,dz);$$

et comme il n'y a ici aucune condition particulière à remplir, on aura l'équation générale de l'équilibre en égalant simplement cette somme à zéro.

2. On aura donc pour l'équilibre des fluides élastiques une équation de la même forme que celle que l'on a trouvée dans la Section précédente (art. 10) pour l'équilibre des fluides incompressibles, puisque l'on a, dans celle-ci (art. 11),

$$\delta L = \delta(dx\,dy\,dz),$$

ce qui rend le terme $\mathsf{S}\lambda\,\delta L$, provenant de la condition de l'incompressibilité, entièrement semblable au terme $\mathsf{S}\varepsilon\,\delta(dx\,dy\,dz)$ dû au moment des forces élastiques.

Il s'ensuit de là que les formules trouvées pour l'équilibre des fluides incompressibles s'appliquent immédiatement et sans aucune restriction à l'équilibre des fluides élastiques, en y changeant simplement le coefficient λ en $-\varepsilon$, c'est-à-dire en supposant que la quantité λ qui exprimait la pression dans les fluides incompressibles, étant prise négativement, exprime la force d'élasticité de chaque élément d'un fluide élastique.

3. L'élasticité ε dépend de la densité et de la température de chaque particule du fluide, et l'on doit la regarder comme une fonction connue de ces deux quantités; mais la densité de chaque particule est inconnue, parce qu'elle dépend du rapport de la masse dm de la particule à son volume $dx\,dy\,dz$; et le Calcul différentiel ne peut déterminer ce rapport, qui dépend du nombre de particules élémentaires contenues dans l'élément différentiel $dx\,dy\,dz$ de la masse fluide.

On ne peut donc connaître la valeur de l'élasticité qu'*a posteriori*, par le moyen des forces qui tiennent le fluide en équilibre. Ainsi il faudra déterminer la valeur de ε comme on a déterminé celle de λ dans l'article 19 de la Section précédente.

4. En changeant λ en $-\varepsilon$, on aura par cet article les équations

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial x} + \Gamma X = 0, \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial y} + \Gamma Y = 0, \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial z} + \Gamma Z = 0,$$

lesquelles donnent

$$d\varepsilon + \Gamma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0$$

et, par conséquent,

$$\varepsilon = -\mathsf{S}\Gamma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + \text{const.}$$

Ainsi la quantité $\Gamma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ doit être une différentielle complète pour l'équilibre des fluides élastiques, comme pour celui des fluides incompressibles.

De là on conclura aussi, comme dans l'article 20 de la Section précédente, que, lorsque la quantité $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ est elle-même une différentielle complète, la densité Γ devra être uniforme dans chaque surface de niveau.

5. En désignant par θ la chaleur qui a lieu dans chaque endroit de la masse fluide, on suppose ordinairement, pour l'air, ε proportionnelle à $\Gamma\theta$, en faisant abstraction des autres causes, telles que les vapeurs, l'électricité, qui peuvent influer sur son élasticité.

Substituons dans l'équation

$$d\varepsilon + \Gamma(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = 0$$

pour Γ sa valeur $\frac{\varepsilon}{m\theta}$, elle deviendra

$$m\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{\theta} = 0.$$

La chaleur étant produite par des causes locales, la quantité θ sera une fonction donnée de x, y, z, et il faudra, pour que l'équation précédente puisse subsister, que la quantité

$$\frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{\theta}$$

soit une différentielle exacte.

6. Donc, dans le cas de la nature où

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = d\Pi$$

(Sect. VII, art. 20), il faudra que θ soit une fonction de Π; par conséquent, on aura $d\theta = 0$ lorsque $d\Pi = 0$; d'où il suit que la chaleur doit être constante dans chaque surface de niveau à laquelle la pesanteur est perpendiculaire, autrement il sera impossible que l'atmosphère puisse être en équilibre. Ainsi il faudrait, pour que l'air pût être en repos, que la température fût égale sur toute la surface de la Terre, et qu'elle ne variât, en s'élevant dans l'atmosphère, que d'une couche de niveau à l'autre.

7. A l'égard de l'équation aux limites pour la surface du fluide, en employant la réduction de l'article 32 de la Section précédente, elle devient

$$\mathrm{S}\,\varepsilon\,\delta p\,ds^2 = 0,$$

et, sous cette forme, elle est évidente par elle-même, car à la surface il n'y a à considérer que la force d'élasticité ε qui agit suivant la ligne p perpendiculaire à la même surface; et si le fluide est contenu dans un vase, les variations δp sont nulles, et l'équation a lieu d'elle-même; mais, si une partie de la surface était libre, il faudrait que l'élasticité ε y fût nulle; autrement le fluide, n'étant pas contenu, se dissiperait.

8. L'élasticité ε, dans l'atmosphère, est proportionnelle à la hauteur du baromètre, que nous désignerons par h. Soit Z la force de la pesanteur; prenons l'ordonnée z perpendiculaire à la surface de la Terre et dirigée de bas en haut; l'équation de l'article 5 deviendra

$$m\frac{dh}{h} + \frac{Z\,dz}{\theta} = 0,$$

laquelle donne par l'intégration, en prenant H pour la hauteur du baromètre lorsque $z = 0$,

$$m\log\frac{H}{h} = \int\frac{Z\,dz}{\theta},$$

l'intégrale étant supposée commencer au point où $z = 0$.

On voit par là que le logarithme du rapport des hauteurs du baro-

mètre ne donne rigoureusement qu'une quantité proportionnelle à la valeur de l'intégrale $\int\frac{Z\,dz}{\theta}$ comprise entre les hauteurs des deux stations, et que, pour en déduire la différence de hauteur des stations, il faut supposer connue la loi de la chaleur θ en fonction de z.

9. On sait que la pesanteur décroît en raison inverse du carré de la distance au centre de la Terre. Donc, prenant r pour le rayon de la Terre et supposant que z soient les hauteurs verticales au-dessus de la surface de la Terre, on a

$$Z = \frac{g}{\left(1+\frac{z}{r}\right)^2},$$

g étant la gravité à la surface de la Terre; et, de là,

$$Z\,dz = g\frac{dz}{\left(1+\frac{z}{r}\right)^2} = g\,dx,$$

en faisant $x = \dfrac{z}{1+\frac{z}{r}}$, de sorte qu'on aura

$$m\log\frac{H}{h} = g\int\frac{dx}{\theta};$$

et la difficulté se réduit à avoir θ en fonction de x.

10. En supposant θ constante et faisant, pour abréger, $\frac{m\theta}{g} = K$, on trouvera

$$x = K\log\frac{H}{h} = K(\log H - \log h),$$

et l'on aura la valeur de z par la formule $z = \dfrac{x}{1-\frac{x}{r}}$.

Si l'on néglige le terme $\frac{x}{r}$, qui est toujours insensible pour les hauteurs z qui ne sont pas très grandes, on a simplement $z = x$, ce qui donne la règle ordinaire pour la mesure des hauteurs par le baromètre.

Le coefficient K doit être déterminé par l'observation. M. Deluc avait trouvé, pour la température uniforme de $16°,75$ du thermomètre de Réaumur, ce coefficient égal à 10000, en prenant les logarithmes des Tables et les hauteurs en toises. Pour les autres températures, il l'augmentait ou le diminuait de sa 215^e partie, pour chaque degré au-dessus ou au-dessous de $16°,75$, et, pour les températures variables d'une station à l'autre, il se contentait de prendre la moyenne arithmétique entre les températures des deux stations. Depuis, on a perfectionné cette règle par des données plus exactes et par de nouvelles corrections appliquées au coefficient K.

11. Au reste, en prenant, pour la température uniforme, la moyenne arithmétique entre les températures extrêmes de la colonne d'air, on suppose que la chaleur diminue en progression arithmétique. Pour voir ce que cette hypothèse donne, on fera $\theta = \Theta(1 - nz)$, ou plutôt $\theta = \Theta(1 - nx)$, pour simplifier les calculs, Θ étant la température lorsque $x = 0$. Substituant cette valeur dans la formule $\frac{dx}{\theta}$, intégrant et remettant ensuite pour n sa valeur tirée de l'équation précédente, on aura

$$\int \frac{dx}{\theta} = x \times \frac{\log \Theta - \log \theta}{\Theta - \theta} = \frac{x}{k}\left(1 - \frac{T + t}{2k} + \frac{T + Tt + t^2}{3k^2} - \ldots\right),$$

en faisant $\Theta = k + T$, $\theta = k + t$, et prenant k pour une température fixe et T, t pour les degrés du thermomètre au-dessus de cette température.

La formule de l'article 9 donnera ainsi, en faisant $\frac{mk}{g} = K$ et ne poussant l'approximation que jusqu'aux secondes dimensions de T et t,

$$x = K\left[1 + \frac{T + t}{2k} - \frac{(T - t)^2}{12k^2}\right] \log \frac{H}{h}.$$

Les deux premiers termes répondent à la règle de Deluc et le troisième sera presque toujours insensible.

SECONDE PARTIE.

LA DYNAMIQUE.

SECTION PREMIÈRE.

SUR LES DIFFÉRENTS PRINCIPES DE LA DYNAMIQUE.

La Dynamique est la science des forces accélératrices ou retardatrices et des mouvements variés qu'elles doivent produire. Cette science est due entièrement aux modernes, et Galilée est celui qui en a jeté les premiers fondements. Avant lui on n'avait considéré les forces qui agissent sur les corps que dans l'état d'équilibre; et quoiqu'on ne pût attribuer l'accélération des corps pesants et le mouvement curviligne des projectiles qu'à l'action constante de la gravité, personne n'avait encore réussi à déterminer les lois de ces phénomènes journaliers, d'après une cause si simple. Galilée a fait le premier ce pas important et a ouvert par là une carrière nouvelle et immense à l'avancement de la Mécanique. Cette découverte est exposée et développée dans l'Ouvrage intitulé : *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, lequel parut, pour la première fois, à Leyde, en 1638. Elle ne procura pas à Galilée, de son vivant, autant de célébrité que celles qu'il avait faites dans le ciel; mais elle fait aujourd'hui la partie la plus solide et la plus réelle de la gloire de ce grand homme.

Les découvertes des satellites de Jupiter, des phases de Vénus, des taches du Soleil, etc., ne demandaient que des télescopes et de l'assiduité; mais il fallait un génie extraordinaire pour démêler les lois de la nature dans des phénomènes que l'on avait toujours eus sous les yeux, mais dont l'explication avait néanmoins toujours échappé aux recherches des philosophes.

Huygens, qui paraît avoir été destiné à perfectionner et compléter la plupart des découvertes de Galilée, ajouta à la théorie de l'accélération des graves celle du mouvement des pendules et des forces centrifuges [1], et prépara ainsi la route à la grande découverte de la gravitation universelle. La Mécanique devint une science nouvelle entre les mains de Newton, et ses *Principes mathématiques*, qui parurent, pour la première fois, en 1687, furent l'époque de cette révolution.

Enfin l'invention du Calcul infinitésimal mit les géomètres en état de réduire à des équations analytiques les lois du mouvement des corps; et la recherche des forces et des mouvements qui en résultent est devenue, depuis, le principal objet de leurs travaux.

Je me suis proposé ici de leur offrir un nouveau moyen de faciliter cette recherche; mais, auparavant, il ne sera pas inutile d'exposer les principes qui servent de fondement à la Dynamique, et de présenter la suite et la gradation des idées qui ont le plus contribué à étendre et à perfectionner cette science.

1. La théorie des mouvements variés et des forces accélératrices qui les produisent est fondée sur ces lois générales : que tout mouvement imprimé à un corps est, par sa nature, uniforme et rectiligne, et que différents mouvements imprimés à la fois ou successivement à un même corps se composent de manière que le corps se trouve à chaque

[1] Galilée avait certainement l'idée de la force centrifuge, et, dans un de ses dialogues, il explique clairement que la rotation de la Terre ferait prendre au corps une vitesse verticale apparente dirigée de bas en haut, s'ils n'étaient retenus par la pesanteur. Mais il se trompe en ajoutant que la pesanteur, quelque petite qu'on la supposât, suffirait pour empêcher un pareil mouvement. Malgré cette erreur grave, le passage des Dialogues me paraît renfermer la première idée de la grande découverte d'Huygens. Voir *Dialogo sopra le due massimi sistemi del mondo*..., p. 185 et suiv. (édition de Florence; 1710).

(*J. Bertrand.*)

instant dans le même point de l'espace où il devrait se trouver, en effet, par la combinaison de ces mouvements, s'ils existaient chacun réellement et séparément dans le corps. C'est dans ces deux lois que consistent les principes connus de la force d'inertie et du mouvement composé. Galilée a aperçu le premier ces deux principes et en a déduit les lois du mouvement des projectiles, en composant le mouvement oblique, effet de l'impulsion communiquée au corps, avec sa chute perpendiculaire due à l'action de la gravité.

A l'égard des lois de l'accélération des graves, elles se déduisent naturellement de la considération de l'action constante et uniforme de la gravité, en vertu de laquelle, les corps recevant dans des instants égaux des degrés égaux de vitesse suivant la même direction, la vitesse totale acquise au bout d'un temps quelconque doit être proportionnelle à ce temps; et il est clair que ce rapport constant des vitesses au temps doit être lui-même proportionnel à l'intensité de la force que la gravité exerce pour mouvoir le corps; de sorte que, dans le mouvement sur des plans inclinés, ce rapport ne doit pas être proportionnel à la force absolue de la gravité, comme dans le mouvement vertical, mais à sa force relative, laquelle dépend de l'inclinaison du plan et se détermine par les règles de la Statique; ce qui fournit un moyen facile de comparer entre eux les mouvements des corps qui descendent sur des plans différemment inclinés.

Cependant il ne paraît pas que Galilée ait découvert de cette manière les lois de la chute des corps pesants. Il a commencé, au contraire, par supposer la notion d'un mouvement uniformément accéléré, dans lequel les vitesses croissent comme les temps; il en a déduit géométriquement les principales propriétés de cette espèce de mouvement et surtout la loi de l'accroissement des espaces en raison des carrés des temps; ensuite il s'est assuré, par des expériences, que cette loi a lieu effectivement dans le mouvement des corps qui tombent verticalement ou sur des plans quelconques inclinés. Mais, pour pouvoir comparer entre eux les mouvements sur différents plans inclinés, il a été obligé d'abord d'admettre ce principe précaire, que les vitesses acquises en descendant de hauteurs verticales égales sont aussi toujours égales; et ce n'est que peu avant sa mort, et après la publication de ses Dialogues, qu'il a trouvé la démonstration de ce principe par la considération de l'action relative de la gravité sur les plans inclinés, démonstration qui a été ensuite insérée dans les autres éditions de cet Ouvrage.

2. Le rapport constant qui, dans les mouvements uniformément accélérés, doit subsister entre les vitesses et les temps, ou entre les espaces et les carrés des temps, peut donc être pris pour la mesure de la force accélératrice qui agit continuellement sur le mobile; parce que, en effet, cette force ne peut être estimée que par l'effet qu'elle produit dans le corps et qui consiste dans les vitesses engendrées ou dans les espaces parcourus dans des temps donnés.

Ainsi il suffit, pour cette estimation des forces, de considérer le mouvement produit dans un temps quelconque, fini ou infiniment petit, pourvu que la force soit regardée comme constante pendant ce temps; par conséquent, quels que soient le mouvement du corps et la loi de son accélération, comme, par la nature du Calcul différentiel, on peut regarder comme constante, pendant un temps infiniment petit, l'action de toute force accélératrice, on pourra toujours déterminer la valeur de la force qui agit sur le corps à chaque instant, en comparant la vitesse engendrée dans cet instant avec la durée du même instant, ou l'espace qu'elle fait parcourir pendant le même instant avec le carré de la durée de cet instant; et il n'est pas même nécessaire que cet espace ait été réellement parcouru par le corps, il suffit qu'il puisse être censé avoir été parcouru par un mouvement composé, puisque l'effet de la force est le même dans l'un et dans l'autre cas, par les principes du mouvement exposés plus haut.

C'est ainsi qu'Huygens a trouvé que les forces centrifuges des corps mus dans des cercles avec des vitesses constantes sont comme les carrés des vitesses divisés par les rayons des cercles, et qu'il a pu comparer ces forces avec la force de la pesanteur à la surface de la

Terre, comme on le voit par les démonstrations qu'il a laissées de ses théorèmes sur la force centrifuge, publiés en 1673 à la fin du Traité intitulé : *Horologium oscillatorium*.

En combinant cette théorie des forces centrifuges avec celle des développées, dont Huygens est aussi l'auteur, et qui réduit à des arcs de cercle chaque portion infiniment petite d'une courbe quelconque, il lui était facile de l'étendre à toutes les courbes. Mais il était réservé à Newton de faire ce nouveau pas et de compléter la science des mouvements variés et des forces accélératrices qui peuvent les engendrer. Cette science ne consiste maintenant que dans quelques formules différentielles très simples; mais Newton a constamment fait usage de la méthode géométrique simplifiée par la considération des premières et dernières raisons, et, s'il s'est quelquefois servi du calcul analytique, c'est uniquement la méthode des séries qu'il a employée, laquelle doit être distinguée de la méthode différentielle, quoiqu'il soit facile de les rapprocher et de les rappeler à un même principe.

Les géomètres qui ont traité, après Newton, la théorie des forces accélératrices se sont presque tous contentés de généraliser ses théorèmes et de les traduire en expressions différentielles. De là les différentes formules des forces centrales qu'on trouve dans plusieurs Ouvrages de Mécanique, mais dont on ne fait plus guère usage, parce qu'elles ne s'appliquent qu'aux courbes qu'on suppose décrites en vertu d'une force unique tendante vers un centre, et qu'on a maintenant des formules générales pour déterminer les mouvements produits par des forces quelconques.

3. Si l'on conçoit que le mouvement d'un corps et les forces qui le sollicitent soient décomposées suivant trois lignes droites perpendiculaires entre elles, on pourra considérer séparément les mouvements et les forces relatives à chacune de ces trois directions. Car, à cause de la perpendicularité des directions, il est visible que chacun de ces mouvements partiels peut être regardé comme indépendant des deux autres et qu'il ne peut recevoir d'altération que de la part de la force

qui agit dans la direction de ce mouvement; d'où l'on peut conclure que ces trois mouvements doivent suivre, chacun en particulier, les lois des mouvements rectilignes accélérés ou retardés par des forces données. Or, dans le mouvement rectiligne, l'effet de la force accélératrice ne consistant qu'à altérer la vitesse du corps, cette force doit être mesurée par le rapport entre l'accroissement ou le décroissement de la vitesse pendant un instant quelconque et la durée de cet instant, c'est-à-dire par la différentielle de la vitesse divisée par celle du temps; et, comme la vitesse elle-même est exprimée, dans les mouvements variés, par la différentielle de l'espace divisée par celle du temps, il s'ensuit que la force dont il s'agit sera mesurée par la différentielle seconde de l'espace divisée par le carré de la différentielle première du temps, supposée constante. Donc aussi la différentielle seconde de l'espace que le corps parcourt, ou est censé parcourir, suivant chacune des trois directions perpendiculaires, divisée par le carré de la différentielle constante du temps, exprimera la force accélératrice dont le corps doit être animé suivant cette même direction et devra, par conséquent, être égalée à la force actuelle qui est supposée agir dans cette direction. C'est ce qui constitue le principe si connu des forces accélératrices.

Il n'est pas nécessaire que les trois directions auxquelles on rapporte le mouvement instantané du corps soient absolument fixes, il suffit qu'elles le soient pendant la durée d'un instant. Ainsi, dans les mouvements en ligne courbe, on peut prendre à chaque instant ces directions, l'une dans la tangente et les deux autres dans les perpendiculaires à la courbe. Alors la force accélératrice qui agit suivant la tangente, et qu'on nomme *force tangentielle*, sera toute employée à altérer la vitesse absolue du corps et sera exprimée par l'élément de cette vitesse divisé par l'élément du temps.

Les forces normales, au contraire, ne feront que changer la direction du corps et dépendront de la courbure de la ligne qu'il décrit. En réduisant les forces normales à une seule, cette force composée doit se trouver dans le plan de la courbure et être exprimée par le carré de

la vitesse divisé par le rayon osculateur, puisqu'à chaque instant le corps peut être regardé comme mû dans le cercle osculateur.

C'est ainsi qu'on a trouvé les formules connues des forces tangentielles et des forces normales, dont on s'est servi longtemps pour résoudre les problèmes sur le mouvement des corps animés par des forces données. La *Mécanique* d'Euler, qui a paru en 1736, et qu'on doit regarder comme le premier grand Ouvrage où l'Analyse ait été appliquée à la science du mouvement, est encore toute fondée sur ces formules; mais on les a presque abandonnées depuis, parce qu'on a trouvé une manière plus simple d'exprimer l'effet des forces accélératrices sur le mouvement des corps.

Elle consiste à rapporter le mouvement du corps et les forces qui le sollicitent à des directions fixes dans l'espace. Alors, en employant, pour déterminer le lieu du corps dans l'espace, trois coordonnées rectangles qui aient ces mêmes directions, les variations de ces coordonnées représenteront évidemment les espaces parcourus par le corps suivant les directions de ces coordonnées; par conséquent, leurs différentielles secondes, divisées par le carré de la différentielle constante du temps, exprimeront les forces accélératrices qui doivent agir suivant ces mêmes coordonnées; ainsi, en égalant ces expressions à celles des forces données par la nature du problème, on aura trois équations semblables qui serviront à déterminer toutes les circonstances du mouvement. Cette manière d'établir les équations du mouvement d'un corps animé par des forces quelconques en le réduisant à des mouvements rectilignes est, par sa simplicité, préférable à toutes les autres; elle aurait dû se présenter d'abord, mais il paraît que Maclaurin est le premier qui l'ait employée dans son *Traité des fluxions*, qui a paru, en anglais, en 1742; elle est maintenant universellement adoptée.

4. Par les principes qui viennent d'être exposés, on peut donc déterminer les lois du mouvement d'un corps libre sollicité par des forces quelconques, pourvu que le corps soit regardé comme un point.

On peut aussi appliquer ces principes à la recherche du mouvement de plusieurs corps qui exercent les uns sur les autres une attraction mutuelle, suivant une loi qui soit une fonction connue des distances; enfin il n'est pas difficile de les étendre aux mouvements dans des milieux résistants, ainsi qu'à ceux qui se font sur des surfaces courbes données, car la résistance du milieu n'est autre chose qu'une force qui agit dans une direction opposée à celle du mobile; et lorsqu'un corps est forcé de se mouvoir sur une surface donnée, il y a nécessairement une force perpendiculaire à la surface qui l'y retient, et dont la valeur inconnue peut se déterminer d'après les conditions qui résultent de la nature même de la surface.

Mais, si l'on cherche le mouvement de plusieurs corps qui agissent les uns sur les autres par impulsion ou par pression, soit immédiatement comme dans le choc ordinaire, ou par le moyen de fils ou de leviers inflexibles auxquels ils soient attachés, ou en général par quelque autre moyen que ce soit, alors la question est d'un ordre plus élevé et les principes précédents sont insuffisants pour la résoudre. Car ici les forces qui agissent sur les corps sont inconnues, et il faut déduire ces forces de l'action que les corps doivent exercer entre eux, suivant leur disposition mutuelle. Il est donc nécessaire d'avoir recours à un nouveau principe qui serve à déterminer la force des corps en mouvement, eu égard à leur masse et à leur vitesse.

5. Ce principe consiste en ce que, pour imprimer à une masse donnée une certaine vitesse suivant une direction quelconque, soit que cette masse soit en repos ou en mouvement, il faut une force dont la valeur (¹) soit proportionnelle au produit de la masse par la vitesse

(¹) Il faut entendre ici par *valeur* d'une force le produit de cette force par le temps pendant lequel elle agit, ou, plus généralement, l'intégrale du produit de l'élément du temps par l'intensité de la force. Le mot *force* est pris par Lagrange dans le même sens que Descartes adoptait quand il écrivait à Mersenne : « J'ai parlé de la force qui sert pour lever un poids, *laquelle a deux dimensions*, non de celle qui sert en chaque point pour le soutenir, *laquelle n'a qu'une dimension.* » (Édition de M. Cousin, t. VI, p. 329.) On comprend quelle confusion doit apporter dans les raisonnements cette double signification du mot *force*. Les géomètres y ont heureusement renoncé et l'on n'entend plus aujourd'hui par force qu'un effort exprimable en kilogrammes. (*J. Bertrand.*)

et dont la direction soit la même que celle de cette vitesse. Ce produit de la masse d'un corps multipliée par sa vitesse s'appelle communément la *quantité de mouvement de ce corps*, parce qu'en effet c'est la somme des mouvements de toutes les parties matérielles du corps. Ainsi les forces se mesurent par les quantités de mouvement qu'elles sont capables de produire, et réciproquement la quantité de mouvement d'un corps est la mesure de la force que le corps est capable d'exercer contre un obstacle, et qui s'appelle la *percussion*. D'où il s'ensuit que, si deux corps non élastiques viennent à se choquer directement en sens contraire avec des quantités de mouvement égales, leurs forces doivent se contre-balancer et se détruire, par conséquent les corps doivent s'arrêter et demeurer en repos. Mais, si le choc se faisait par le moyen d'un levier, il faudrait, pour la destruction du mouvement des corps, que leurs forces suivissent la loi connue de l'équilibre du levier.

Il paraît que Descartes a aperçu le premier le principe que nous venons d'exposer; mais il s'est trompé dans son application au choc des corps, pour avoir cru que la même quantité de mouvement absolu devait toujours se conserver (¹).

Wallis est proprement le premier qui ait eu une idée nette de ce principe et qui s'en soit servi avec succès pour découvrir les lois de la communication du mouvement dans le choc des corps durs ou élastiques, comme on le voit dans les *Transactions philosophiques* de 1669 et dans la troisième Partie de son Traité *de Motu*, imprimé en 1671.

De même que le produit de la masse et de la vitesse exprime la force finie d'un corps en mouvement, ainsi le produit de la masse et de la

(¹) Dans aucun des nombreux écrits de Descartes, on ne trouve un énoncé net et compréhensible du principe. Quant aux applications, les erreurs qu'il commet sont bien plus graves que ne semble l'indiquer ici Lagrange. Il affirme, entre autres propositions erronées, qu'un corps qui en choque un autre ne peut lui imprimer de mouvement que s'il a une masse plus grande que la sienne; dans tout autre cas, le corps choquant sera réfléchi, et le corps choqué ne bougera pas. (Édition de M. Cousin, t. IX, p. 195.) (*J. Bertrand.*)

force accélératrice, que nous avons vue être représentée par l'élément de la vitesse divisé par l'élément du temps, exprimera la force élémentaire ou naissante; et cette quantité, si on la considère comme la mesure de l'effort que le corps peut faire en vertu de la vitesse élémentaire qu'il a prise ou qu'il tend à prendre, constitue ce qu'on nomme *pression*; mais, si on la regarde comme la mesure de la force ou puissance nécessaire pour imprimer cette même vitesse, elle est alors ce qu'on nomme *force motrice*. Ainsi, des pressions ou des forces motrices se détruiront ou se feront équilibre si elles sont égales et directement opposées, ou si, étant appliquées à une machine quelconque, elles suivent les lois de l'équilibre de cette machine.

6. Lorsque des corps sont joints ensemble, de manière qu'ils ne puissent obéir librement aux impulsions reçues et aux forces accélératrices dont ils sont animés, ces corps exercent nécessairement les uns sur les autres des pressions continuelles qui altèrent leurs mouvements et en rendent la détermination difficile.

Le premier problème et le plus simple de ce genre dont les géomètres se soient occupés est celui du centre d'oscillation. Ce problème a été fameux, au commencement du siècle dernier et même dès le milieu du précédent, par les efforts et les tentatives que les plus grands géomètres ont faits pour en venir à bout; et comme c'est principalement à ces tentatives qu'on doit les progrès immenses que la Dynamique a faits depuis, je crois devoir en donner ici une histoire succincte, pour montrer par quels degrés cette science s'est élevée à la perfection où elle paraît être parvenue dans ces derniers temps.

Les Lettres de Descartes offrent les premières traces des recherches sur le centre d'oscillation. On y voit que Mersenne avait proposé aux géomètres de déterminer la grandeur que doit avoir un corps de figure quelconque, pour que, étant suspendu par un point, il fasse ses oscillations dans le même temps qu'un fil de longueur donnée et chargé d'un seul poids à son extrémité. Descartes observe que cette question a quelque rapport avec celle du centre de gravité et que, de même que,

dans un corps pesant qui tombe librement, il y a un centre de gravité autour duquel les efforts de la pesanteur de toutes les parties du corps se font équilibre, en sorte que ce centre descend de la même manière que si le reste du corps était anéanti ou qu'il fût concentré dans le même centre; ainsi, dans les corps pesants qui tournent autour d'un axe fixe, il doit y avoir un centre, qu'il appelle *centre d'agitation*, autour duquel les forces d'*agitation* de toutes les parties du corps se contre-balancent, de manière que ce centre, étant libre de l'action de ces forces, puisse être mû comme il le serait si les autres parties du corps étaient anéanties ou concentrées dans ce même centre; que, par conséquent, tous les corps dans lesquels ce centre sera également éloigné de l'axe de rotation feront leur vibration dans le même temps.

D'après cette notion du centre d'agitation, Descartes donne une méthode générale de le déterminer dans les corps de figure quelconque; cette méthode consiste à chercher le centre de gravité des forces d'agitation de toutes les parties du corps, en estimant ces forces par les produits des masses multipliées par les vitesses, qui sont ici proportionnelles aux distances de l'axe de rotation, et en supposant que les parties du corps soient projetées sur le plan qui passe par son centre de gravité et par l'axe de rotation, de manière qu'elles conservent leurs distances à cet axe.

Cette solution de Descartes devint un sujet de contestations entre lui et Roberval. Celui-ci prétendait qu'elle n'était bonne que lorsque toutes les parties du corps sont réellement ou peuvent être censées placées dans un même plan passant par l'axe de rotation, que dans tous les autres cas il ne fallait considérer que les mouvements perpendiculaires au plan passant par l'axe de rotation et par le centre de gravité du corps, et qu'on devait rapporter chaque particule au point où ce plan est rencontré par la direction du mouvement de cette particule, direction qui est toujours perpendiculaire au plan mené par cette particule et par l'axe de rotation. Mais il est facile de prouver que, par rapport à l'axe de rotation, les moments des forces estimées de cette manière sont toujours égaux à ceux des forces estimées suivant la méthode de Descartes [1].

Roberval prétendit, avec plus de fondement, que Descartes n'avait cherché que le centre de percussion, autour duquel les chocs ou les moments de percussion sont égaux, et que, pour trouver le vrai centre d'oscillation d'un pendule pesant, il fallait aussi avoir égard à l'action de la gravité, en vertu de laquelle le pendule se meut. Mais, cette recherche étant supérieure à la Mécanique de ces temps-là [2], les géomètres continuèrent à supposer tacitement que le centre de percussion était le même que celui d'oscillation, et Huygens fut le premier qui envisagea ce dernier centre sous son vrai point de vue; aussi crut-il devoir regarder ce problème comme entièrement neuf [3] et, ne pouvant le résoudre par les lois connues du mouvement, il inventa un principe nouveau, mais indirect, lequel est devenu célèbre depuis sous le nom de *conservation des forces vives*.

7. Un fil, considéré comme une ligne inflexible sans pesanteur et sans masse, étant attaché par un bout à un point fixe et chargé, à l'autre bout, d'un petit poids qu'on puisse regarder comme réduit à un

(1) Cette observation prouve que l'objection de Roberval n'était pas fondée; mais il n'en a pas moins eu raison d'affirmer que la règle de Descartes est fautive quand il ne s'agit pas d'une figure plane tournant autour d'un axe situé dans son plan. On doit même ajouter que Roberval a indiqué sans démonstration la position exacte du centre d'agitation d'un secteur circulaire tournant autour d'une perpendiculaire à son plan menée par le centre du secteur. *Voir* les observations de Roberval sur une Lettre de Descartes (*Œuvres de Descartes*, t. IX, p. 521; édition de M. Cousin). (*J. Bertrand.*)

(2) On sait que le centre d'oscillation ne diffère pas du centre de percussion. Il semblerait donc résulter de l'appréciation de Lagrange que la règle de Descartes est exacte, quoique non suffisamment démontrée. Il est cependant facile de s'assurer qu'il n'en est rien, et qu'elle conduit à des résultats fautifs toutes les fois que le pendule ne se réduit pas à une figure plane tournant autour d'un axe situé dans son plan. (*J. Bertrand.*)

(3) Huygens rappelle, au contraire, en commençant la quatrième Partie de son Traité, que le problème du centre d'oscillation lui a été proposé autrefois par Mersenne, ainsi qu'à d'autres géomètres; mais alors il était presque un enfant et n'a pu trouver de solution satisfaisante. Il ajoute, en parlant de Descartes : « Qui vero rem sese confecisse sperabant viri insignes, Cartesius, Honoratus Fabrius, aliique, nequaquam scopum attigerunt, nisi in paucis quibusdam facilioribus, sed quorum demonstrationem nullam idoneam, ut mihi videtur, attulerunt. » (*Œuvres d'Huygens*, t. I, p. 118; édition de s'Gravesande; Lyon, 1724.) (*J. Bertrand.*)

point, forme ce qu'on appelle un *pendule simple*; et la loi des vibrations de ce pendule dépend uniquement de sa longueur, c'est-à-dire de la distance entre le poids et le point de suspension. Mais, si à ce fil on attache encore un ou plusieurs poids, à différentes distances du point de suspension, on aura alors un pendule composé dont le mouvement devra tenir une espèce de milieu entre ceux des différents pendules simples que l'on aurait si chacun de ces poids était suspendu seul au fil. Car, la force de la gravité tendant d'un côté à faire descendre tous les poids également dans le même temps, et de l'autre l'inflexibilité du fil les contraignant à décrire dans ce même temps des arcs inégaux et proportionnels à leur distance du point de suspension, il doit se faire entre ces poids une espèce de compensation et de répartition de leurs mouvements; en sorte que les poids qui sont les plus proches du point de suspension hâteront les vibrations des plus éloignés, et ceux-ci, au contraire, retarderont les vibrations des premiers. Ainsi il y aura dans le fil un point où, un corps étant placé, son mouvement ne serait ni accéléré ni retardé par les autres poids, mais serait le même que s'il était seul suspendu au fil. Ce point sera donc le vrai centre d'oscillation du pendule composé, et un tel centre doit se trouver aussi dans tout corps solide, de quelque figure que ce soit, qui oscille autour d'un axe horizontal.

Huygens vit qu'on ne pouvait déterminer ce centre d'une manière rigoureuse sans connaître la loi suivant laquelle les différents poids du pendule composé altèrent mutuellement les mouvements que la gravité tend à leur imprimer à chaque instant; mais, au lieu de chercher à déduire cette loi des principes fondamentaux de la Mécanique, il se contenta d'y suppléer par un principe indirect, lequel consiste à supposer que, si plusieurs poids, attachés comme l'on voudra à un pendule, descendent par la seule action de la gravité, et que, dans un instant quelconque, ils soient détachés et séparés les uns des autres, chacun d'eux, en vertu de la vitesse acquise pendant sa chute, pourra remonter à une telle hauteur que le centre commun de gravité se trouvera remonté à la même hauteur d'où il était descendu. A la vérité, Huygens n'établit pas ce principe immédiatement, mais il le déduit de deux hypothèses qu'il croit devoir être admises comme des demandes de Mécanique : l'une, c'est que le centre de gravité d'un système de corps pesants ne peut jamais remonter à une hauteur plus grande que celle d'où il est tombé, quelque changement qu'on fasse à la disposition mutuelle des corps, parce qu'autrement le mouvement perpétuel ne serait plus impossible; l'autre, c'est qu'un pendule composé peut toujours remonter de lui-même à la même hauteur d'où il est descendu librement. Au reste, Huygens remarque que le même principe a lieu dans le mouvement des corps pesants liés ensemble d'une manière quelconque, comme aussi dans le mouvement des fluides.

On ne saurait deviner ce qui a donné à cet auteur l'idée d'un tel principe; mais on peut conjecturer qu'il y a été conduit par le théorème que Galilée avait démontré sur la chute des corps pesants, lesquels, soit qu'ils descendent verticalement ou sur des plans inclinés, acquièrent toujours des vitesses capables de les faire remonter aux mêmes hauteurs d'où ils étaient tombés. Ce théorème, généralisé et appliqué au centre de gravité d'un système de corps pesants, donne le principe d'Huygens.

Quoi qu'il en soit, ce principe fournit une équation entre la hauteur verticale d'où le centre de gravité du système est descendu dans un temps quelconque et les différentes hauteurs verticales auxquelles les corps qui composent le système pourraient remonter avec leurs vitesses acquises, et qui, par les théorèmes de Galilée, sont comme les carrés de ces vitesses. Or, dans un pendule qui oscille autour d'un axe horizontal, les vitesses des différents points sont proportionnelles à leurs distances de l'axe; ainsi on peut réduire l'équation à deux seules inconnues, dont l'une soit la descente du centre de gravité du pendule dans un temps quelconque, et dont l'autre soit la hauteur à laquelle un point donné de ce pendule pourrait remonter par sa vitesse acquise. Mais la descente du centre de gravité détermine celle de tout autre point du pendule; donc on aura une équation entre la hauteur d'où un point quelconque du pendule est descendu et celle à laquelle il

pourrait remonter par sa vitesse, due à cette chute. Dans le centre d'oscillation, ces deux hauteurs doivent être égales, parce que les corps libres peuvent toujours remonter à la même hauteur d'où ils sont tombés; et l'équation fait voir que cette égalité ne peut avoir lieu que dans un point de la ligne perpendiculaire à l'axe de rotation et passant par le centre de gravité du pendule, lequel soit éloigné de cet axe de la quantité qui provient en multipliant tous les poids qui composent le pendule par les carrés de leurs distances à l'axe et divisant la somme de ces produits par la masse du pendule multipliée par la distance de son centre de gravité au même axe. Cette quantité exprimera donc la longueur d'un pendule simple dont le mouvement serait égal à celui du pendule composé.

Cette théorie d'Huygens est exposée dans l'*Horologium oscillatorium* et elle y est accompagnée d'un grand nombre de savantes applications. Elle n'aurait rien laissé à désirer si elle n'avait pas été appuyée sur un principe précaire; et il restait toujours à démontrer ce principe pour la mettre hors de toute atteinte.

En 1681 parurent, dans le *Journal des Savants de Paris*, quelques mauvaises objections contre cette théorie, auxquelles Huygens ne répondit que d'une manière vague et peu satisfaisante. Mais cette contestation, ayant excité l'attention de Jacques Bernoulli, lui donna occasion d'examiner à fond la théorie d'Huygens et de chercher à la rappeler aux premiers principes de la Dynamique. Il ne considère d'abord que deux poids égaux attachés à une ligne inflexible et droite, et il remarque que la vitesse que le premier poids, celui qui est le plus près du point de suspension, acquiert en décrivant un arc quelconque doit être moindre que celle qu'il aurait acquise en décrivant librement le même arc, et qu'en même temps la vitesse acquise par l'autre poids doit être plus grande que celle qu'il aurait acquise en parcourant le même arc librement. La vitesse perdue par le premier poids s'est donc communiquée au second, et comme cette communication se fait par le moyen d'un levier mobile autour d'un point fixe, elle doit suivre la loi de l'équilibre des puissances appliquées à ce levier; de manière que la perte de vitesse du premier poids soit au gain de vitesse du second dans la raison réciproque des bras de levier, c'est-à-dire des distances au point de suspension. De là, et de ce que les vitesses réelles des deux poids doivent être elles-mêmes dans la raison directe de ces distances, on détermine facilement ces vitesses et, par conséquent, le mouvement du pendule.

8. Tel est le premier pas qui ait été fait vers la solution directe de ce fameux problème. L'idée de rapporter au levier les forces résultantes des vitesses gagnées ou perdues par les poids est très fine et donne la clef de la vraie théorie; mais Jacques Bernoulli s'est trompé en considérant les vitesses acquises pendant un temps quelconque fini, au lieu qu'il n'aurait dû considérer que les vitesses élémentaires acquises pendant un instant, et les comparer avec celles que la gravité tend à imprimer pendant le même instant. C'est ce que L'Hôpital a fait depuis dans un Écrit inséré dans le *Journal de Rotterdam* de 1690. Il suppose deux poids quelconques attachés au fil inflexible qui fait le pendule composé, et il établit l'équilibre entre les quantités de mouvement perdues et gagnées par ces poids dans un instant quelconque, c'est-à-dire entre les différences des quantités de mouvement que les poids acquièrent réellement dans cet instant, et de celles que la gravité tend à leur imprimer. Il détermine, par ce moyen, le rapport de l'accélération instantanée de chaque poids à celle que la gravité seule tend à lui donner et il trouve le centre d'oscillation en cherchant le point du pendule pour lequel ces deux accélérations seraient égales. Il étend ensuite sa théorie à un plus grand nombre de poids; mais il regarde pour cela les premiers comme réunis successivement dans leur centre d'oscillation, ce qui n'est plus si direct, ni ne peut être admis sans démonstration (¹).

Cette analyse fit revenir Jacques Bernoulli sur la sienne et donna enfin lieu à la première solution directe et rigoureuse du problème des

(¹) On peut même ajouter que cette méthode conduit à des résultats inexacts. (*J. Bertrand.*)

centres d'oscillation, solution qui mérite d'autant plus l'attention des géomètres qu'elle contient le germe de ce principe de Dynamique qui est devenu si fécond entre les mains de d'Alembert.

L'auteur considère ensemble les mouvements que la gravité imprime à chaque instant aux corps qui composent le pendule, et, comme ces corps, à cause de leur liaison, ne peuvent les suivre, il conçoit les mouvements qu'ils doivent prendre comme composés des mouvements imprimés et d'autres mouvements, ajoutés ou retranchés, qui doivent se contre-balancer, et en vertu desquels le pendule doit demeurer en équilibre. Le problème se trouve ainsi ramené aux principes de la Statique et ne demande plus que le secours de l'Analyse. Jacques Bernoulli trouva, par ce moyen, des formules générales pour les centres d'oscillation des corps de figure quelconque, en fit voir l'accord avec le principe d'Huygens et démontra l'identité des centres d'oscillation et de percussion. Cette solution avait été ébauchée, dès 1691, dans les *Actes de Leipsick;* mais elle n'a été donnée d'une manière complète qu'en 1703, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris.*

9. Pour ne rien laisser à désirer sur cette histoire du problème du centre d'oscillation, je devrais rendre compte de la solution que Jean Bernoulli en a donnée ensuite dans les mêmes Mémoires et qui, ayant été donnée aussi à peu près en même temps par Taylor dans l'Ouvrage intitulé *Methodus incrementorum*, a été l'occasion d'une vive dispute entre ces deux géomètres; mais, quelque ingénieuse que soit l'idée sur laquelle est fondée cette nouvelle solution et qui consiste à réduire tout d'un coup le pendule composé en pendule simple, en substituant à ses différents poids d'autres poids réunis dans un seul point, avec des masses et des pesanteurs fictives, telles qu'elles produisent les mêmes accélérations angulaires et les mêmes moments par rapport à l'axe de rotation et que la pesanteur totale des poids réunis soit égale à leur pesanteur naturelle, on doit néanmoins avouer que cette idée n'est ni si naturelle ni si lumineuse que celle de l'équilibre entre les quantités de mouvement acquises et perdues.

On trouve encore dans la *Phoronomia* d'Herman, publiée en 1716, une nouvelle manière de résoudre le même problème, et qui est fondée sur cet autre principe, que les forces motrices dont les poids qui forment le pendule doivent être animés pour pouvoir être mus conjointement sont équivalentes à celles qui proviennent de l'action de la gravité; en sorte que les premières, étant supposées dirigées en sens contraire, doivent faire équilibre à ces dernières.

Ce principe n'est, dans le fond, que celui de Jacques Bernoulli, présenté d'une manière moins simple, et il est facile de les rappeler l'un à l'autre par les principes de la Statique. Euler l'a rendu ensuite plus général et s'en est servi pour déterminer les oscillations des corps flexibles, dans un Mémoire imprimé en 1740, dans le Tome VII des anciens *Commentaires de Pétersbourg*.

Il serait trop long de parler des autres problèmes de Dynamique qui ont exercé la sagacité des géomètres, après celui du centre d'oscillation et avant que l'art de les résoudre fût réduit à des règles fixes. Ces problèmes, que les Bernoulli, Clairaut, Euler se proposaient entre eux, se trouvent répandus dans les premiers Volumes des *Mémoires de Pétersbourg* et de *Berlin*, dans les *Mémoires de Paris* (années 1736 et 1742), dans les *Œuvres* de Jean Bernoulli et dans les *Opuscules* d'Euler. Ils consistent à déterminer les mouvements de plusieurs corps, pesants ou non, qui se poussent ou se tirent par des fils ou des leviers inflexibles où ils sont fixement attachés, ou le long desquels ils peuvent couler librement, et qui, ayant reçu des impulsions quelconques, sont ensuite abandonnés à eux-mêmes, ou contraints de se mouvoir sur des courbes ou des surfaces données.

Le principe d'Huygens était presque toujours employé dans la solution de ces problèmes; mais, comme ce principe ne donne qu'une seule équation, on cherchait les autres par la considération des forces inconnues avec lesquelles on concevait que les corps devaient se pousser ou se tirer, et qu'on regardait comme des forces élastiques agissant également en sens contraire. L'emploi de ces forces dispensait d'avoir égard à la liaison des corps et permettait de faire usage des lois du

mouvement des corps libres; ensuite les conditions qui, par la nature du problème, devaient avoir lieu entre les mouvements des différents corps servaient à déterminer les forces inconnues qu'on avait introduites dans le calcul. Mais il fallait toujours une adresse particulière pour démêler dans chaque problème toutes les forces auxquelles il était nécessaire d'avoir égard, ce qui rendait ces problèmes piquants et propres à exciter l'émulation.

10. Le *Traité de Dynamique* de d'Alembert, qui parut en 1743, mit fin à ces espèces de défis, en offrant une méthode directe et générale pour résoudre, ou du moins pour mettre en équations tous les problèmes de Dynamique que l'on peut imaginer. Cette méthode réduit toutes les lois du mouvement des corps à celles de leur équilibre et ramène ainsi la Dynamique à la Statique. Nous avons déjà remarqué que le principe employé par Jacques Bernoulli dans la recherche du centre d'oscillation avait l'avantage de faire dépendre cette recherche des conditions de l'équilibre du levier; mais il était réservé à d'Alembert d'envisager ce principe d'une manière générale et de lui donner toute la simplicité et la fécondité dont il pouvait être susceptible.

Si l'on imprime à plusieurs corps des mouvements qu'ils soient forcés de changer à cause de leur action mutuelle, il est clair qu'on peut regarder ces mouvements comme composés de ceux que les corps prendront réellement, et d'autres mouvements qui sont détruits; d'où il suit que ces derniers doivent être tels, que les corps animés de ces seuls mouvements se fassent équilibre.

Tel est le principe que d'Alembert a donné dans son *Traité de Dynamique* et dont il a fait un heureux usage dans plusieurs problèmes, et surtout dans celui de la précession des équinoxes. Ce principe ne fournit pas immédiatement les équations nécessaires pour la solution des problèmes de Dynamique, mais il apprend à les déduire des conditions de l'équilibre. Ainsi, en combinant ce principe avec les principes ordinaires de l'équilibre du levier ou de la composition des forces, on peut toujours trouver les équations de chaque problème;

mais la difficulté de déterminer les forces qui doivent être détruites, ainsi que les lois de l'équilibre entre ces forces, rend souvent l'application de ce principe embarrassante et pénible; et les solutions qui en résultent sont presque toujours plus compliquées que si elles étaient déduites de principes moins simples et moins directs, comme on peut s'en convaincre par la seconde Partie du même *Traité de Dynamique* ([1]).

11. Si l'on voulait éviter les décompositions de mouvements que ce principe exige, il n'y aurait qu'à établir tout de suite l'équilibre entre les forces et les mouvements engendrés, mais pris dans des directions contraires. Car, si l'on imagine qu'on imprime à chaque corps, en sens contraire, le mouvement qu'il doit prendre, il est clair que le système sera réduit au repos; par conséquent, il faudra que ces mouvements détruisent ceux que les corps avaient reçus et qu'ils auraient suivis sans leur action mutuelle; ainsi il doit y avoir équilibre entre tous ces mouvements, ou entre les forces qui peuvent les produire.

Cette manière de rappeler les lois de la Dynamique à celles de la Statique est à la vérité moins directe que celle qui résulte du principe de d'Alembert, mais elle offre plus de simplicité dans les applications; elle revient à celle d'Herman et d'Euler, qui l'a employée dans la solution de beaucoup de problèmes de Mécanique, et on la trouve dans quelques Traités de Mécanique sous le nom de *Principe de d'Alembert*.

12. Dans la première Partie de cet Ouvrage, nous avons réduit toute la Statique à une seule formule générale qui donne les lois de l'équilibre d'un système quelconque de corps tiré par tant de forces qu'on voudra. On pourra donc aussi réduire à une formule générale toute la Dynamique; car, pour appliquer au mouvement d'un système de corps la formule de son équilibre, il suffira d'y introduire les forces qui proviennent des variations du mouvement de chaque corps, et qui doivent

([1]) Ce qui contribue encore à compliquer ces solutions, c'est que l'auteur veut éviter de faire les dt, ou éléments du temps, constants, comme il en avertit lui-même (art. 94).
(*Note de Lagrange.*)

être détruites. Le développement de cette formule, en ayant égard aux conditions dépendantes de la nature du système, donnera toutes les équations nécessaires pour la détermination du mouvement de chaque corps, et il n'y aura plus qu'à intégrer ces équations, ce qui est l'affaire de l'Analyse.

13. Un des avantages de la formule dont il s'agit est d'offrir immédiatement les équations générales qui renferment les principes ou théorèmes connus sous les noms de *conservation des forces vives*, de *conservation du mouvement du centre de gravité*, de *conservation des moments de rotation* ou *Principe des aires*, et de *Principe de la moindre quantité d'action*. Ces principes doivent être regardés plutôt comme des résultats généraux des lois de la Dynamique que comme des principes primitifs de cette science; mais, étant souvent employés comme tels dans la solution des problèmes, nous croyons devoir en parler ici, en indiquant en quoi ils consistent et à quels auteurs ils sont dus, pour ne rien laisser à désirer dans cette exposition préliminaire des principes de la Dynamique.

14. Le premier de ces quatre principes, celui de la conservation des forces vives, a été trouvé par Huygens, mais sous une forme un peu différente de celle qu'on lui donne présentement; et nous en avons déjà fait mention à l'occasion du problème des centres d'oscillation. Le principe, tel qu'il a été employé dans la solution de ce problème, consiste dans l'égalité entre la descente et la montée du centre de gravité de plusieurs corps pesants qui descendent conjointement, et qui remontent ensuite séparément, étant réfléchis en haut chacun avec la vitesse qu'il avait acquise. Or, par les propriétés connues du centre de gravité, le chemin parcouru par ce centre, dans une direction quelconque, est exprimé par la somme des produits de la masse de chaque corps par le chemin qu'il a parcouru suivant la même direction, divisée par la somme des masses. D'un autre côté, par les théorèmes de Galilée, le chemin vertical parcouru par un corps grave est proportionnel au carré de la vitesse qu'il a acquise en descendant librement, et avec

laquelle il pourrait remonter à la même hauteur. Ainsi le principe de Huygens se réduit à ce que, dans le mouvement des corps pesants, la somme des produits des masses par les carrés des vitesses à chaque instant est la même, soit que les corps se meuvent conjointement d'une manière quelconque, ou qu'ils parcourent librement les mêmes hauteurs verticales. C'est aussi ce que Huygens lui-même a remarqué en peu de mots, dans un petit Écrit relatif aux méthodes de Jacques Bernoulli et de L'Hôpital pour les centres d'oscillation.

Jusque-là ce principe n'avait été regardé que comme un simple théorème de Mécanique; mais, lorsque Jean Bernoulli eut adopté la distinction établie par Leibnitz entre les forces mortes ou pressions qui agissent sans mouvement actuel et les forces vives qui accompagnent ce mouvement, ainsi que la mesure de ces dernières par les produits des masses et des carrés des vitesses, il ne vit plus dans le principe en question qu'une conséquence de la théorie des forces vives et une loi générale de la nature, suivant laquelle la somme des forces vives de plusieurs corps se conserve la même, pendant que ces corps agissent les uns sur les autres par de simples pressions, et est constamment égale à la simple force vive qui résulte de l'action des forces actuelles qui meuvent les corps. Il donna ainsi à ce principe le nom de *conservation des forces vives*, et il s'en servit avec succès pour résoudre quelques problèmes qui n'avaient pas encore été résolus et dont il paraissait difficile de venir à bout par des méthodes directes.

Daniel Bernoulli a donné ensuite plus d'extension à ce principe et il en a déduit les lois du mouvement des fluides dans des vases, matière qui n'avait été traitée avant lui que d'une manière vague et arbitraire. Enfin il l'a rendu très général, dans les *Mémoires de Berlin* pour l'année 1748, en faisant voir comment on peut l'appliquer au mouvement des corps animés par des attractions mutuelles quelconques ou attirés vers des centres fixes par des forces proportionnelles à quelques fonctions des distances que ce soit.

Le grand avantage de ce principe est de fournir immédiatement une équation finie entre les vitesses des corps et les variables qui déterminent leur position dans l'espace; de sorte que, lorsque par la nature du problème toutes ces variables se réduisent à une seule, cette équation suffit pour le résoudre complètement, et c'est le cas de celui des centres d'oscillation. En général, la conservation des forces vives donne toujours une intégrale première des différentes équations différentielles de chaque problème, ce qui est d'une grande utilité dans plusieurs occasions.

15. Le second principe est dû à Newton, qui, au commencement de ses *Principes mathématiques*, démontre que l'état de repos ou de mouvement du centre de gravité de plusieurs corps n'est point altéré par l'action réciproque de ces corps, quelle qu'elle soit; de sorte que le centre de gravité des corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque, soit par des fils ou des leviers, ou des lois d'attraction, etc., sans qu'il y ait aucune action ni aucun obstacle extérieur, est toujours en repos ou se meut uniformément en ligne droite.

D'Alembert a donné depuis à ce principe une plus grande étendue, en faisant voir que, si chaque corps est sollicité par une force accélératrice constante et qui agisse suivant des lignes parallèles, ou qui soit dirigée vers un point fixe et agisse en raison de la distance, le centre de gravité doit décrire la même courbe que si les corps étaient libres; à quoi l'on peut ajouter que le mouvement de ce centre est, en général, le même que si toutes les forces des corps, quelles qu'elles soient, y étaient appliquées, chacune suivant sa propre direction.

Il est visible que ce principe sert à déterminer le mouvement du centre de gravité indépendamment des mouvements respectifs des corps, et qu'ainsi il peut toujours fournir trois équations finies entre les coordonnées des corps et le temps, lesquelles seront des intégrales des équations différentielles du problème [1].

16. Le troisième principe est beaucoup moins ancien que les deux

[1] Il faut cependant mettre cette restriction, que les forces qui sollicitent ces corps ne dépendent pas de leur position inconnue. (*J. Bertrand.*)

précédents, et paraît avoir été découvert en même temps par Euler, Daniel Bernoulli et d'Arcy, mais sous des formes différentes.

Selon les deux premiers, ce principe consiste en ce que, dans le mouvement de plusieurs corps autour d'un centre fixe, la somme des produits de la masse de chaque corps par sa vitesse de circulation autour du centre et par sa distance au même centre est toujours indépendante de l'action mutuelle que les corps peuvent exercer les uns sur les autres, et se conserve la même tant qu'il n'y a aucune action ni aucun obstacle extérieur. Daniel Bernoulli a donné ce principe dans le premier Volume des *Mémoires de l'Académie de Berlin*, qui a paru en 1746, et Euler l'a donné la même année dans le tome I^{er} de ses *Opuscules*; et c'est aussi le même problème qui les y a conduits, savoir la recherche du mouvement de plusieurs corps mobiles dans un tube de figure donnée et qui ne peut que tourner autour d'un point ou centre fixe.

Le principe de d'Arcy, tel qu'il l'a donné à l'Académie des Sciences, dans les *Mémoires* de 1747, qui n'ont paru qu'en 1752, est que la somme des produits de la masse de chaque corps par l'aire que son rayon vecteur décrit autour d'un centre fixe sur un même plan de projection est toujours proportionnelle au temps. On voit que ce principe est une généralisation du beau théorème de Newton sur les aires décrites en vertu de forces centripètes quelconques; et pour en apercevoir l'analogie ou plutôt l'identité avec celui d'Euler et de Daniel Bernoulli, il n'y a qu'à considérer que la vitesse de circulation est exprimée par l'élément de l'arc circulaire divisé par l'élément du temps, et que le premier de ces éléments, multiplié par la distance au centre, donne l'élément de l'aire décrite autour de ce centre; d'où l'on voit que ce dernier principe n'est autre chose que l'expression différentielle de celui de d'Arcy.

Cet auteur a présenté ensuite son principe sous une autre forme qui le rapproche davantage du précédent, et qui consiste en ce que la somme des produits des masses par les vitesses et par les perpendiculaires tirées du centre sur les directions du corps est une quantité constante.

Sous ce point de vue, il en a fait même une espèce de principe métaphysique qu'il appelle la *conservation de l'action*, pour l'opposer ou plutôt pour le substituer à celui de *la moindre quantité d'action*; comme si des dénominations vagues et arbitraires faisaient l'essence des lois de la nature et pouvaient, par quelque vertu secrète, ériger en causes finales de simples résultats des lois connues de la Mécanique.

Quoi qu'il en soit, le principe dont il s'agit a lieu généralement pour tous les systèmes de corps qui agissent les uns sur les autres d'une façon quelconque, soit par des fils, des lignes inflexibles, des lois d'attraction, etc., et qui sont de plus sollicités par des forces quelconques dirigées à un centre fixe, soit que le système soit d'ailleurs entièrement libre, ou qu'il soit assujetti à se mouvoir autour de ce même centre. La somme des produits des masses par les aires décrites autour de ce centre et projetées sur un plan quelconque est toujours proportionnelle au temps; de sorte que, en rapportant ces aires à trois plans perpendiculaires entre eux, on a trois équations différentielles du premier ordre entre le temps et les coordonnées des courbes décrites par les corps; et c'est proprement dans ces équations que consiste la nature du principe dont nous venons de parler.

17. Je viens enfin au quatrième principe, que j'appelle de la *moindre action*, par analogie avec celui que Maupertuis avait donné sous cette dénomination et que les écrits de plusieurs auteurs illustres ont rendu ensuite si fameux. Ce principe, envisagé analytiquement, consiste en ce que, dans le mouvement des corps qui agissent les uns sur les autres, la somme des produits des masses par les vitesses et par les espaces parcourus est un minimum. L'auteur en a déduit les lois de la réflexion et de la réfraction de la lumière, ainsi que celles du choc des corps, dans deux Mémoires lus, l'un à l'Académie des Sciences de Paris, en 1744, et l'autre, deux ans après, à celle de Berlin.

Mais ces applications sont trop particulières pour servir à établir la vérité d'un principe général; elles ont d'ailleurs quelque chose de vague et d'arbitraire, qui ne peut que rendre incertaines les conséquences qu'on en pourrait tirer pour l'exactitude même du principe. Aussi l'on aurait tort, ce me semble, de mettre ce principe, présenté ainsi, sur la même ligne que ceux que nous venons d'exposer. Mais il y a une autre manière de l'envisager, plus générale et plus rigoureuse, et qui mérite seule l'attention des géomètres. Euler en a donné la première idée à la fin de son *Traité des isopérimètres*, imprimé à Lausanne en 1744, en y faisant voir que, dans les trajectoires décrites par des forces centrales, l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe fait toujours un maximum ou un minimum.

Cette propriété, qu'Euler avait trouvée dans le mouvement des corps isolés, et qui paraissait bornée à ces corps, je l'ai étendue, par le moyen de la conservation des forces vives, au mouvement de tout système de corps qui agissent les uns sur les autres d'une manière quelconque; et il en est résulté ce nouveau principe général, que la somme des produits des masses par les intégrales des vitesses multipliées par les éléments des espaces parcourus est constamment un maximum ou un minimum.

Tel est le principe auquel je donne ici, quoique improprement, le nom de *moindre action*, et que je regarde, non comme un principe métaphysique, mais comme un résultat simple et général des lois de la Mécanique. On peut voir dans le tome II des *Mémoires de Turin* (1) l'usage que j'en ai fait pour résoudre plusieurs problèmes difficiles de Dynamique. Ce principe, combiné avec celui des forces vives et développé suivant les règles du calcul des variations, donne directement toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème; et de là naît une méthode également simple et générale pour traiter les questions qui concernent le mouvement des corps; mais cette méthode n'est elle-même qu'un corollaire de celle qui fait l'objet de la seconde Partie de cet Ouvrage et qui a, en même temps, l'avantage d'être tirée des premiers principes de la Mécanique.

(1) *Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 365.

SECTION DEUXIÈME.

FORMULE GÉNÉRALE DE LA DYNAMIQUE POUR LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME DE CORPS ANIMÉS PAR DES FORCES QUELCONQUES.

1. Lorsque les forces qui agissent sur un système de corps sont disposées conformément aux lois exposées dans la première Partie de ce Traité, ces forces se détruisent mutuellement et le système demeure en équilibre. Mais, quand l'équilibre n'a pas lieu, les corps doivent nécessairement se mouvoir, en obéissant en tout ou en partie à l'action des forces qui les sollicitent. La détermination des mouvements produits par des forces données est l'objet de cette seconde Partie.

Nous y considérerons principalement les forces accélératrices et retardatrices dont l'action est continue, comme celle de la gravité, et qui tendent à imprimer à chaque instant une vitesse infiniment petite et égale à toutes les particules de matière.

Quand ces forces agissent librement et uniformément, elles produisent nécessairement des vitesses qui augmentent comme le temps; et l'on peut regarder les vitesses ainsi engendrées dans un temps donné comme les effets les plus simples de ces sortes de forces et, par conséquent, comme les plus propres à leur servir de mesure. Il faut, dans la Mécanique, prendre les effets simples des forces pour connus, et l'art de cette science consiste uniquement à en déduire les effets composés qui doivent résulter de l'action combinée et modifiée des mêmes forces.

2. Nous supposerons donc que l'on connaisse, pour chaque force accélératrice, la vitesse qu'elle est capable d'imprimer à un mobile en agissant toujours de la même manière, pendant un certain temps que

nous prendrons pour l'unité des temps, et nous mesurerons la *force accélératrice* par cette même vitesse, qui doit s'estimer par l'espace que le mobile parcourrait dans le même temps si elle était continuée uniformément; or on sait, par les théorèmes de Galilée, que cet espace est toujours double de celui que le corps a parcouru réellement par l'action constante de la force accélératrice.

On peut d'ailleurs prendre une force accélératrice connue pour l'unité et y rapporter toutes les autres. Alors il faudra prendre pour l'unité des espaces le double de l'espace que la même force continuée également ferait parcourir dans le temps qu'on veut prendre pour l'unité des temps, et la vitesse acquise dans ce temps par l'action continue de la même force sera l'unité des vitesses. De cette manière, les forces, les espaces, les temps et les vitesses ne seront que de simples rapports, des quantités mathématiques ordinaires.

Par exemple, si l'on prend la gravité sous la latitude de Paris pour l'unité des forces accélératrices, et que l'on compte le temps par secondes, on devra prendre alors 30,196 pieds de Paris pour l'unité des espaces parcourus, parce que 15,098 pieds est la hauteur d'où un corps abandonné à lui-même tombe dans une seconde sous cette latitude; et l'unité des vitesses sera celle qu'un corps pesant acquiert en tombant de cette hauteur.

3. Ces notions préliminaires supposées, considérons un système de corps, disposés les uns par rapport aux autres comme on voudra et animés par des forces accélératrices quelconques.

Soit m la masse de l'un quelconque de ces corps, regardé comme un point; rapportons, pour la plus grande simplicité, à trois coordonnées rectangles x, y, z la position absolue du même corps au bout d'un temps quelconque t. Ces coordonnées sont supposées toujours parallèles à trois axes fixes dans l'espace, et qui se coupent perpendiculairement dans un point nommé l'*origine des coordonnées;* elles expriment, par conséquent, les distances rectilignes du corps à trois plans passant par les mêmes axes.

Ainsi, à cause de la perpendicularité de ces plans, les coordonnées x, y, z représentent les espaces par lesquels le corps en mouvement s'éloigne des mêmes plans; par conséquent,

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

représenteront les vitesses que ce corps a dans un instant quelconque pour s'éloigner de chacun de ces plans-là et se mouvoir suivant le prolongement des coordonnées x, y, z; et ces vitesses, si le corps était ensuite abandonné à lui-même, demeureraient constantes dans les instants suivants, par les principes fondamentaux de la théorie du mouvement.

Mais, par la liaison des corps et par l'action des forces accélératrices qui les sollicitent, ces vitesses prennent, pendant l'instant dt, les accroissements

$$d\frac{dx}{dt}, \quad d\frac{dy}{dt}, \quad d\frac{dz}{dt}$$

qu'il s'agit de déterminer. On peut regarder ces accroissements comme de nouvelles vitesses imprimées à chaque corps, et, en les divisant par dt, on aura la mesure des forces accélératrices employées immédiatement à les produire; car, quelque variable que puisse être l'action d'une force, on peut toujours, par la nature du Calcul différentiel, la regarder comme constante pendant un temps infiniment petit, et la vitesse engendrée par cette force est alors proportionnelle à la force multipliée par le temps; par conséquent, la force elle-même sera exprimée par la vitesse divisée par le temps.

En prenant l'élément dt du temps pour constant, les forces accélératrices dont il s'agit seront exprimées par

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

et, en multipliant ces forces par la masse m du corps sur lequel elles agissent, on aura

$$\mathrm{m}\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \mathrm{m}\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \mathrm{m}\frac{d^2z}{dt^2}$$

pour les forces employées immédiatement à mouvoir le corps m pendant le temps dt, parallèlement aux axes des coordonnées x, y, z. On regardera donc chaque corps m du système comme poussé par de pareilles forces; par conséquent, toutes ces forces devront être équivalentes à celles dont on suppose que le système est sollicité, et dont l'action est modifiée par la nature même du système; et il faudra que la somme de leurs *moments* soit toujours égale à la somme des *moments* de celles-ci, par le théorème donné dans la première Partie (Sect. II, art. 15).

4. Nous emploierons dans la suite la caractéristique ordinaire d pour représenter les différentielles relatives au temps, et nous dénoterons les variations qui expriment les vitesses virtuelles par la caractéristique δ, comme nous l'avons déjà fait dans quelques problèmes de la première Partie.

Ainsi l'on aura

$$\mathrm{m}\frac{d^2x}{dt^2}\delta x,\quad \mathrm{m}\frac{d^2y}{dt^2}\delta y,\quad \mathrm{m}\frac{d^2z}{dt^2}\delta z$$

pour les moments des forces

$$\mathrm{m}\frac{d^2x}{dt^2},\quad \mathrm{m}\frac{d^2y}{dt^2},\quad \mathrm{m}\frac{d^2z}{dt^2}$$

qui agissent suivant les coordonnées x, y, z et tendent à les augmenter; la somme de leurs moments pourra donc être représentée par la formule

$$S\,\mathrm{m}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right),$$

en supposant que le signe d'intégration S s'étende à tous les corps du système.

5. Soient maintenant P, Q, R, ... les forces accélératrices données, qui sollicitent chaque corps m du système vers les centres auxquels ces forces sont supposées tendre; et soient p, q, r, ... les distances rectilignes de chacun de ces corps aux mêmes centres. Les différen-

tielles δp, δq, δr, ... représenteront les variations des lignes p, q, r, ... provenantes des variations δx, δy, δz des coordonnées x, y, z du corps m; mais, comme les forces P, Q, R, ... sont censées tendre à diminuer ces lignes, leurs vitesses virtuelles doivent être représentées par $-\delta p$, $-\delta q$, $-\delta r$, ... (Part. I, Sect. II, art. 3); donc les moments des forces mP, mQ, mR, ... seront exprimés par $-\mathrm{m}P\delta p$, $-\mathrm{m}Q\delta q$, $-\mathrm{m}R\delta r$, ..., et la somme des moments de toutes ces forces sera représentée par

$$-S\,\mathrm{m}(P\,\delta p+Q\,\delta q+R\,\delta r+\ldots).$$

Égalant donc cette somme à celle de l'article précédent, on aura

$$S\,\mathrm{m}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=-S\,\mathrm{m}(P\,\delta p+Q\,\delta q+R\,\delta r+\ldots)$$

et, transposant le second membre,

$$S\,\mathrm{m}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)+S\,\mathrm{m}(P\,\delta p+Q\,\delta q+R\,\delta r+\ldots)=0.$$

C'est la formule générale de la Dynamique pour le mouvement d'un système quelconque de corps.

6. Il est visible que cette formule ne diffère de la formule générale de la Statique, donnée dans la première Partie (Sect. II), que par les termes dus aux forces $\mathrm{m}\frac{d^2x}{dt^2}$, $\mathrm{m}\frac{d^2y}{dt^2}$, $\mathrm{m}\frac{d^2z}{dt^2}$ qui produisent l'accélération du corps m suivant les prolongements des trois coordonnées x, y, z. En effet, nous avons vu dans la Section précédente (art. 11) que ces forces, étant prises en sens contraire, c'est-à-dire étant regardées comme tendantes à diminuer les lignes x, y, z, doivent faire équilibre aux forces actuelles P, Q, R, ..., qui sont supposées agir pour diminuer les lignes p, q, r, ...; de sorte qu'il n'y a qu'à ajouter aux *moments* de ces dernières forces ceux des forces $\mathrm{m}\frac{d^2x}{dt^2}$, $\mathrm{m}\frac{d^2y}{dt^2}$, $\mathrm{m}\frac{d^2z}{dt^2}$, pour chacun des corps m, pour passer tout d'un coup des conditions de l'équilibre aux propriétés du mouvement (Part. I, Sect. II, art. 4).

7. Les mêmes règles que nous avons données dans la première Partie (Sect. II), pour le développement de la formule générale de la Statique, s'appliqueront donc aussi à la formule générale de la Dynamique.

Il faudra seulement observer :

1° Que les différences que nous avions marquées par la caractéristique ordinaire d, pour représenter les variations, seront toujours marquées dorénavant par la caractéristique δ;

2° Que la caractéristique d sera toujours relative au temps t, ainsi que la caractéristique correspondante $\int$ pour les intégrations, excepté dans les différences partielles, où il est indifférent quelle caractéristique on y emploie;

3° Que, pour représenter les éléments d'une courbe ou d'une surface, ou, en général, d'un système composé d'une infinité de particules, on emploiera la caractéristique D, qui répond à la caractéristique intégrale S. Ainsi, lorsqu'on voudra étendre au mouvement les formules que nous avons données pour l'équilibre, dans la première Partie (Sect. V, Chap. III et IV), il faudra changer partout la caractéristique d en D, pour avoir l'expression de la somme des moments de toutes les forces.

8. Lorsque le mouvement se fait dans un milieu résistant, on peut regarder la résistance du milieu comme une force qui agit en sens contraire de la direction du corps et qui peut, par conséquent, être supposée tendante à un point de la tangente.

Supposons que la résistance soit R; pour avoir son moment $-\mathrm{R}\,\delta r$, il n'y a qu'à considérer qu'on a, en général,

$$r=\sqrt{(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2},$$

l, m, n étant les coordonnées du centre de la force R; donc

$$\delta r=\frac{x-l}{r}\,\delta x+\frac{y-m}{r}\,\delta y+\frac{z-n}{r}\,\delta z.$$

Prenons le centre de la force R dans la tangente de la courbe décrite

par le corps et très près de lui; on fera, pour cela,

$$x-l=dx,\qquad y-m=dy,\qquad z-n=dz,$$

ce qui donnera, en prenant ds pour l'élément de la courbe,

$$\frac{x-l}{r}=\frac{dx}{ds},\qquad \frac{y-m}{r}=\frac{dy}{ds},\qquad \frac{z-n}{r}=\frac{dz}{ds}$$

et, par conséquent,

$$\delta r=\frac{dx}{ds}\,\delta x+\frac{dy}{ds}\,\delta y+\frac{dz}{ds}\,\delta z.$$

Si le milieu résistant était en mouvement, il faudrait composer ce mouvement avec celui du corps pour avoir la direction de la force de résistance. Nommons $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ les petits espaces que le milieu parcourt parallèlement aux axes des coordonnées x, y, z, pendant que le corps décrit l'espace ds; il n'y aura qu'à retrancher ces quantités de dx, dy, dz pour avoir les mouvements relatifs; et, comme

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2},$$

si l'on fait

$$d\sigma=\sqrt{(dx-d\alpha)^2+(dy-d\beta)^2+(dz-d\gamma)^2},$$

on aura, dans ce cas,

$$\delta r=\frac{dx-d\alpha}{d\sigma}\,\delta x+\frac{dy-d\beta}{d\sigma}\,\delta y+\frac{dz-d\gamma}{d\sigma}\,\delta z.$$

A l'égard de la résistance R, elle est ordinairement une fonction de la vitesse $\frac{ds}{dt}$; mais, dans le cas où le milieu est en mouvement, elle sera fonction de la vitesse relative $\frac{d\sigma}{dt}$.

De cette manière, on pourra appliquer nos formules générales aux mouvements qui se font dans des milieux résistants, sans avoir besoin d'aucune considération particulière à ces sortes de mouvements.

9. Il est important de remarquer que l'expression

$$d^2x\,\delta x+d^2y\,\delta y+d^2z\,\delta z,$$

par laquelle la formule générale de la Dynamique diffère de celle de la Statique (art. 5), est indépendante de la position des axes des coordonnées x, y, z.

Car, supposons qu'à la place de ces coordonnées on substitue d'autres coordonnées rectangles x', y', z' qui aient la même origine, mais qui se rapportent à d'autres axes. Par les formules de la transformation des coordonnées, données dans la première Partie (Sect. III, art. 10), on a

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'. \end{aligned}$$

Différentions ces expressions de x, y, z, en y regardant tous les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots$ comme constants et les nouvelles coordonnées x', y', z' comme seules variables, on aura

$$\begin{aligned} d^2x &= \alpha\, d^2x' + \beta\, d^2y' + \gamma\, d^2z', \\ d^2y &= \alpha'\, d^2x' + \beta'\, d^2y' + \gamma'\, d^2z', \\ d^2z &= \alpha''\, d^2x' + \beta''\, d^2y' + \gamma''\, d^2z'. \end{aligned}$$

On aura de même

$$\begin{aligned} \delta x &= \alpha\, \delta x' + \beta\, \delta y' + \gamma\, \delta z', \\ \delta y &= \alpha'\, \delta x' + \beta'\, \delta y' + \gamma'\, \delta z', \\ \delta z &= \alpha''\, \delta x' + \beta''\, \delta y' + \gamma''\, \delta z'. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs et ayant égard aux équations de condition données dans l'article cité, entre les coefficients α, β, γ, α', ..., on aura

$$d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z = d^2x'\,\delta x' + d^2y'\,\delta y' + d^2z'\,\delta z'.$$

Si l'on fait les mêmes substitutions dans l'expression des distances rectilignes entre les différents corps du système, représentées par p, q, ..., il est facile de voir que les quantités α, β, γ, α', ... disparaîtront également et que les transformées conserveront la même forme. En effet, on a

$$\mathrm{p} = \sqrt{(x-\mathrm{x})^2 + (y-\mathrm{y})^2 + (z-\mathrm{z})^2},$$

x, y, z étant les coordonnées d'un corps m et x, y, z celles d'un autre

corps m rapportées aux mêmes axes. Par le changement des axes, les premières deviennent x', y', z', et, si l'on désigne par x′, y′, z′ ce que les dernières deviennent, on aura aussi

$$\begin{aligned} \mathrm{x} &= \alpha \mathrm{x}' + \beta \mathrm{y}' + \gamma \mathrm{z}', \\ \mathrm{y} &= \alpha' \mathrm{x}' + \beta' \mathrm{y}' + \gamma' \mathrm{z}', \\ \mathrm{z} &= \alpha'' \mathrm{x}' + \beta'' \mathrm{y}' + \gamma'' \mathrm{z}'. \end{aligned}$$

Substituant et ayant égard aux mêmes équations de condition, on aura

$$\mathrm{p} = \sqrt{(x'-\mathrm{x}')^2 + (y'-\mathrm{y}')^2 + (z'-\mathrm{z}')^2},$$

et ainsi des quantités analogues q, r, ...

10. Il s'ensuit de là que, si le système n'est animé que par des forces intérieures P, Q, ... proportionnelles à des fonctions quelconques des distances p, q, ... entre les corps, et que les conditions du système ne dépendent que de la disposition mutuelle des corps, de manière que les équations de condition ne soient qu'entre les différentes lignes p, q, ..., la formule générale de la Dynamique (art. 5) sera la même pour les coordonnées transformées x', y', z' que pour les coordonnées primitives x, y, z. Donc, après avoir trouvé, par l'intégration des différentes équations déduites de cette formule, les valeurs des coordonnées x, y, z de chaque corps m, exprimées en temps, si l'on prend ces valeurs pour x', y', z', on aura, pour les coordonnées x, y, z, ces valeurs plus générales

$$\begin{aligned} x &= \alpha\, x' + \beta\, y' + \gamma\, z', \\ y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z', \end{aligned}$$

dans lesquelles les neuf coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ renferment trois quantités indéterminées, puisqu'il n'y a entre elles que six équations de condition.

Si les valeurs de x', y', z' renferment toutes les constantes arbitraires nécessaires pour compléter les différentes intégrales, les trois indéterminées dont il s'agit se fondront dans ces mêmes constantes arbitraires; mais elles pourront suppléer celles qui manqueraient, et dont le défaut rendrait la solution incomplète. Ainsi, au moyen de ces trois nouvelles arbitraires qu'on peut introduire à la fin du calcul, on sera libre de supposer nulles ou égales à des quantités déterminées autant d'autres constantes arbitraires, ce qui servira souvent à faciliter et simplifier le calcul.

11. Quoiqu'on puisse toujours calculer les effets de l'impulsion et de la percussion comme ceux des forces accélératrices, cependant, lorsqu'on ne demande que la vitesse totale imprimée, on peut se dispenser de considérer ses accroissements successifs; et l'on peut, tout de suite, regarder les forces d'impulsion comme équivalentes aux mouvements imprimés.

Soient donc P, Q, R, ... les forces d'impulsion appliquées à un corps quelconque m du système, suivant les lignes $p, q, r, \ldots$; supposons que la vitesse imprimée à ce corps soit décomposée en trois vitesses représentées par $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, suivant les directions des axes des coordonnées x, y, z, on aura, comme dans l'article 5, en changeant les forces accélératrices $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$ dans les vitesses $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, l'équation générale

$$\mathrm{S}\,m(\dot{x}\,\delta x + \dot{y}\,\delta y + \dot{z}\,\delta z) + \mathrm{S}(\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots) = 0.$$

Cette équation donnera autant d'équations particulières qu'il y restera de variations indépendantes après avoir réduit toutes les variations marquées par δ au plus petit nombre possible, d'après les conditions du système.

SECTION TROISIÈME.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT DÉDUITES DE LA FORMULE PRÉCÉDENTE.

1. Considérons un système de corps disposés les uns par rapport aux autres et liés ensemble comme l'on voudra, mais sans qu'il y ait aucun point ou obstacle fixe qui gêne leur mouvement; il est évident que, dans ce cas, les conditions du système ne peuvent dépendre que de la position respective des corps entre eux; par conséquent, les équations de condition ne pourront contenir d'autres fonctions des coordonnées que les expressions des distances mutuelles des corps. Cette considération fournit, pour le mouvement d'un système, des équations générales indépendantes de la nature du système et analogues à celles que nous avons trouvées pour l'équilibre dans la première Partie (Sect. III, § I).

§ I. — *Propriétés relatives au centre de gravité.*

2. Soient x', y', z' les coordonnées d'un corps quelconque déterminé du système, tandis que x, y, z représentent, en général, les coordonnées d'un autre corps quelconque. Faisons, ce qui est toujours permis,

$$x = x' + \xi, \qquad y = y' + \eta, \qquad z = z' + \zeta;$$

il est visible que les quantités x', y', z' n'entreront point dans les expressions des distances mutuelles des corps, mais que ces distances ne dépendront que des différentes quantités ξ, η, ζ qui expriment proprement les coordonnées des différents corps, rapportés à celui qui répond à x', y', z'; par conséquent, les équations de condition du système seront entre les seules variables ξ, η, ζ et ne renfermeront point x', y', z'.

Donc, si dans la formule générale de la Dynamique (Sect. II, art. 5) on réduit toutes les variations à δx, δy, δz et qu'on substitue, pour δx, δy, δz, leurs valeurs $\delta x' + \delta\xi$, $\delta y' + \delta\eta$, $\delta z' + \delta\zeta$, les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ seront indépendantes de toutes les autres et arbitraires en elles-mêmes; ainsi, il faudra égaler séparément à zéro la totalité des termes affectés de chacune de ces variations, ce qui donnera trois équations générales et indépendantes de la constitution particulière du système.

Les forces intérieures par lesquelles les corps pourraient agir les uns sur les autres, et que nous dénotons par $\overline{\mathrm{P}}$, $\overline{\mathrm{Q}}$, ..., comme dans la première Partie (Sect. II, art. 2), n'entreront point dans ces équations, parce que, les distances mutuelles $\overline{p}$, $\overline{q}$, ... étant indépendantes de x', y', z', les variations $\delta\overline{p}$, $\delta\overline{q}$, ..., relatives à ces variables, seront nulles.

A l'égard des forces extérieures P, Q, R, ..., si on les réduit aux trois forces X, Y, Z, dirigées suivant les coordonnées x, y, z et tendantes à les diminuer, d'après les formules données dans la première Partie (Sect. V, Chap. I), on a

$$\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots = \mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z,$$

et la formule générale devient

$$\mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{X}\right)\delta x + \mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{Y}\right)\delta y + \mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \mathrm{Z}\right)\delta z = 0,$$

laquelle, en n'ayant égard qu'aux variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, qui sont indépendantes de toutes les autres, donnera

$$\delta x'\,\mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{X}\right) + \delta y'\,\mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{Y}\right) + \delta z'\,\mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \mathrm{Z}\right) = 0;$$

d'où l'on tire sur-le-champ ces trois équations

$$\mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2x}{dt^2} + \mathrm{X}\right) = 0,$$

$$\mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2y}{dt^2} + \mathrm{Y}\right) = 0,$$

$$\mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2z}{dt^2} + \mathrm{Z}\right) = 0,$$

lesquelles auront toujours lieu dans le mouvement d'un système quelconque de corps, lorsque le système est entièrement libre.

3. Supposons maintenant que le corps auquel répondent les coordonnées x', y', z' soit placé dans le centre de gravité de tout le système. On aura, par les propriétés connues de ce centre (Part. I, Sect. III, § IV), les équations

$$\mathrm{S}\,m\xi = 0, \quad \mathrm{S}\,m\eta = 0, \quad \mathrm{S}\,m\zeta = 0,$$

lesquelles, en différentiant par rapport à t, donneront celles-ci :

$$\mathrm{S}\,m\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \mathrm{S}\,m\frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad \mathrm{S}\,m\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0.$$

Donc on aura

$$\mathrm{S}\,m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{S}\,m\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\mathrm{S}\,m,$$

parce que x', ayant la même valeur pour tous les corps, est indépendante du signe S; on aura pareillement

$$\mathrm{S}\,m\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2}\mathrm{S}\,m, \quad \mathrm{S}\,m\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2}\mathrm{S}\,m.$$

Ainsi les trois équations de l'article précédent prendront cette forme plus simple :

$$\frac{d^2x'}{dt^2}\mathrm{S}\,m + \mathrm{S}\,m\mathrm{X} = 0,$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2}\mathrm{S}\,m + \mathrm{S}\,m\mathrm{Y} = 0,$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2}\mathrm{S}\,m + \mathrm{S}\,m\mathrm{Z} = 0.$$

Ces équations serviront à déterminer le mouvement du centre de gravité de tous les corps, indépendamment du mouvement particulier de chacun d'eux; et, comme les valeurs de $S\,\mathrm{m}X$, $S\,\mathrm{m}Y$, $S\,\mathrm{m}Z$ ne renferment point les forces intérieures du système, le mouvement de ce centre ne dépendra point de l'action mutuelle que les corps peuvent exercer les uns sur les autres, mais seulement des forces accélératrices qui sollicitent chaque corps. C'est en quoi consiste le principe général de la *conservation du mouvement du centre de gravité*.

Ce principe subsiste aussi dans le cas où les corps, dans leurs mouvements, viendraient à se choquer; car, de quelque nature que soient les corps, on peut toujours imaginer que leur action dans le choc se fasse par le moyen d'un ressort interposé entre les corps et qui, après la compression, tende à se rétablir ou non suivant que les corps seront élastiques ou non. De cette manière, l'effet du choc sera le produit de forces de la nature de celles que nous avons désignées par $\overline{P}$, $\overline{Q}$, ..., et qui disparaissent dans la formule générale (art. 2).

4. On voit, au reste, que les équations du mouvement du centre de gravité sont les mêmes que celles du mouvement d'un seul corps qui serait animé à la fois par toutes les forces accélératrices qui agissent sur les différents corps du système. En effet, si l'on conçoit que tous ces corps soient réunis en un point qui réponde aux coordonnées x', y', z', on a alors, dans la formule générale,

$$x = x', \qquad y = y', \qquad z = z';$$

et, égalant à zéro la totalité des termes affectés de chacune des trois variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, on aura les mêmes équations que ci-dessus.

De là résulte ce théorème général :

Le mouvement du centre de gravité d'un système libre de corps, disposés, les uns par rapport aux autres, comme l'on voudra, est toujours le même que si les corps étaient tous réunis dans un seul point et qu'en même temps chacun d'eux fût animé des mêmes forces accélératrices que dans leur état naturel.

5. Ce théorème a encore lieu lorsque les corps qui composent un système libre ne reçoivent que des impulsions quelconques; car, en substituant, dans l'équation de l'article 11 de la Section précédente, $\delta x' + \delta\xi$, $\delta y' + \delta\eta$, $\delta z' + \delta\zeta$ à la place de δx, δy, δz, et réduisant les forces P, Q, R, ... aux forces X, Y, Z, on prouvera, comme dans l'article 2, que les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ doivent demeurer arbitraires, ce qui donnera les trois équations

$$S(\mathrm{m}\dot{x} + X) = 0, \qquad S(\mathrm{m}\dot{y} + Y) = 0, \qquad S(\mathrm{m}\dot{z} + Z) = 0.$$

Or, si l'on rapporte les coordonnées x', y', z' au centre de gravité du système, on a, par les propriétés de ce centre,

$$x' S\,\mathrm{m} = S\,\mathrm{m}x, \qquad y' S\,\mathrm{m} = S\,\mathrm{m}y, \qquad z' S\,\mathrm{m} = S\,\mathrm{m}z.$$

Donc aussi, en différentiant relativement à t, et faisant

$$dx = \dot{x}\,dt, \qquad dy = \dot{y}\,dt, \qquad dz = \dot{z}\,dt,$$
$$dx' = \dot{x}'\,dt, \qquad dy' = \dot{y}'\,dt, \qquad dz' = \dot{z}'\,dt,$$

on aura

$$\dot{x}' S\,\mathrm{m} = S\,\mathrm{m}\dot{x}, \qquad \dot{y}' S\,\mathrm{m} = S\,\mathrm{m}\dot{y}, \qquad \dot{z}' S\,\mathrm{m} = S\,\mathrm{m}\dot{z}$$

et, par conséquent,

$$\dot{x}' S\,\mathrm{m} + S X = 0, \qquad \dot{y}' S\,\mathrm{m} + S Y = 0, \qquad \dot{z}' S\,\mathrm{m} + S Z = 0,$$

ce qui fait voir que les vitesses $\dot{x}'$, $\dot{y}'$, $\dot{z}'$ imprimées au centre de gravité sont les mêmes que si tous les corps, étant réunis dans ce centre, recevaient à la fois les impulsions X, Y, Z.

6. La formule générale (art. 2), après la substitution $\delta x' + \delta\xi$, $\delta y' + \delta\eta$, $\delta z' + \delta\zeta$ à la place de δx, δy, δz et l'évanouissement des termes affectés de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, se réduira à

$$S\,\mathrm{m}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta\xi + \frac{d^2y}{dt^2}\delta\eta + \frac{d^2z}{dt^2}\delta\zeta + X\,\delta\xi + Y\,\delta\eta + Z\,\delta\zeta\right) = 0.$$

Substituant $x'+\xi$, $y'+\eta$, $z'+\zeta$ pour x, y, z dans les différentielles d^2x, d^2y, d^2z, et faisant sortir hors du signe S les différentielles d^2x', d^2y', d^2z', les termes affectés de ces différentielles seront

$$\frac{d^2x'}{dt^2}\,\mathrm{S}\,\mathrm{m}\,\delta\xi+\frac{d^2y'}{dt^2}\,\mathrm{S}\,\mathrm{m}\,\delta\eta+\frac{d^2z'}{dt^2}\,\mathrm{S}\,\mathrm{m}\,\delta\zeta.$$

Mais, en rapportant au centre de gravité les coordonnées x', y', z', on a (art. 3)

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\xi=0,\qquad \mathrm{S}\,\mathrm{m}\eta=0,\qquad \mathrm{S}\,\mathrm{m}\zeta=0;$$

donc aussi, en différentiant par δ, on aura

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\,\delta\xi=0,\qquad \mathrm{S}\,\mathrm{m}\,\delta\eta=0,\qquad \mathrm{S}\,\mathrm{m}\,\delta\zeta=0,$$

ce qui fait évanouir les termes dont il s'agit.

Ainsi la formule générale se réduira à

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\,\delta\xi+\frac{d^2\eta}{dt^2}\,\delta\eta+\frac{d^2\zeta}{dt^2}\,\delta\zeta+\mathrm{X}\,\delta\xi+\mathrm{Y}\,\delta\eta+\mathrm{Z}\,\delta\zeta\right)=0,$$

qui est tout à fait semblable à la première formule, les coordonnées x, y, z, dont l'origine est fixe dans l'espace, étant changées en ξ, η, ζ, dont l'origine est au centre de gravité.

On peut conclure de là [1], en général, que, dans un système libre, on aura, par rapport au centre de gravité, les mêmes équations et les mêmes propriétés que par rapport à un point fixe hors du système.

§ II. — *Propriétés relatives aux aires.*

7. Considérons maintenant le mouvement du système autour d'un point fixe, et supposons qu'il soit entièrement libre de tourner en tout

[1] Cette conclusion est trop absolue. L'équation différentielle qui lie ξ, η, ζ est, en effet, de même forme que celle qui lie x, y, z; mais les forces X, Y, Z n'auront pas des expressions de même forme par rapport aux deux systèmes de variables. Ainsi, par exemple, si l'on considère deux points qui s'attirent mutuellement avec une force réciproquement proportionnelle au carré de la distance, ils décriront des ellipses par rapport aux axes mobiles passant par le centre de gravité. Par rapport à des axes fixes, les trajectoires seraient beaucoup plus compliquées. (*J. Bertrand.*)

sens autour de ce point. En faisant abstraction des mouvements respectifs des corps du système les uns à l'égard des autres, la rotation autour de chacun des trois axes des x, y, z fournira, comme on l'a vu dans la première Partie (Sect. III, art. 8), les expressions suivantes des variations δx, δy, δz,

$$\delta x=z\,\delta\omega-y\,\delta\varphi,\qquad \delta y=x\,\delta\varphi-z\,\delta\psi,\qquad \delta z=y\,\delta\psi-x\,\delta\omega,$$

dans lesquelles $\delta\varphi$, $\delta\omega$, $\delta\psi$ sont les rotations élémentaires par rapport aux trois axes des z, y, x, qui doivent demeurer arbitraires.

Ces expressions sont générales pour les variations des coordonnées de tous les corps du système, et il ne s'agira que de les substituer dans la formule de l'article 5 de la Section précédente, après avoir réduit toutes les variations à δx, δy, δz, et d'égaler ensuite à zéro séparément les quantités affectées des trois indéterminées $\delta\varphi$, $\delta\omega$, $\delta\psi$.

On trouvera d'abord, comme dans l'article cité de la première Partie, que la variation $\delta\bar{p}$ devient nulle, et qu'ainsi les termes dus aux forces intérieures $\overline{\mathrm{P}}$ du système, ne renfermant point les variations $\delta\varphi$, $\delta\omega$, $\delta\psi$, ne donneront rien dans les équations dont il s'agit. On trouve aussi, comme on l'a vu dans le même article, que la variation δp est nulle lorsque la force P tend vers l'origine des coordonnées, et qu'ainsi cette force n'entrera point dans les mêmes équations.

En faisant donc simplement pour δx, δy, δz les substitutions indiquées, après avoir changé les forces P, Q, R, ... en X, Y, Z, comme ci-dessus (art. 2), on aura, relativement aux variations $\delta\varphi$, $\delta\omega$, $\delta\psi$, l'équation

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\left\{\begin{aligned}&\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}+\mathrm{Y}x-\mathrm{X}y\right)\delta\varphi\\&+\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}+\mathrm{X}z-\mathrm{Z}x\right)\delta\omega\\&+\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}+\mathrm{Z}y-\mathrm{Y}z\right)\delta\psi\end{aligned}\right\}=0;$$

et, comme les variations $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\omega$ sont les mêmes pour tous les corps du système, elles n'entreront pas sous le signe d'intégration S; de sorte qu'on aura les trois équations relatives à chacune de ces variations

$$\mathbf{S}\,m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}+xY-yX\right)=0,$$
$$\mathbf{S}\,m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}+zX-xZ\right)=0,$$
$$\mathbf{S}\,m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}+yZ-zY\right)=0.$$

Ces équations auront lieu à la fois, lorsque le système aura la liberté de tourner autour de chacun des trois axes, c'est-à-dire toutes les fois que le système sera disposé de manière à pouvoir pirouetter librement en tout sens autour du point fixe qui est l'origine des coordonnées.

Et il est bon de remarquer que ces équations ont toujours lieu indépendamment de l'action mutuelle des corps, de quelque manière que cette action puisse s'exercer, même par le choc mutuel des corps du système, comme dans l'article 3 et par la même raison; elles sont, de plus, indépendantes des forces qui tendraient vers le point fixe où est l'origine des coordonnées.

8. Pour se former une idée plus nette de ces équations, on remarquera :

1° Que les quantités

$$x\,d^2y-y\,d^2x,\qquad z\,d^2x-x\,d^2z,\qquad y\,d^2z-z\,d^2y$$

sont les différentielles de celles-ci

$$x\,dy-y\,dx,\qquad z\,dx-x\,dz,\qquad y\,dz-z\,dy,$$

lesquelles représentent le double des secteurs élémentaires décrits par le corps m sur le plan des xy, des xz et des yz, c'est-à-dire sur les plans perpendiculaires aux axes des z, des y et des x. En effet, si dans

$$x\,dy-y\,dx$$

on substitue pour x et y les valeurs $\rho\cos\varphi$, $\rho\sin\varphi$, on a

$$\rho^2\,d\varphi$$

double de l'aire comprise entre le rayon vecteur ρ et le rayon consécutif qui fait avec lui l'angle $d\varphi$;

2° Que les quantités X, Y, Z représentent les forces qui sollicitent chaque corps m suivant les coordonnées x, y, z et vers leur origine, et qui résultent de toutes les forces P, Q, R, ... agissantes sur ce corps suivant des directions quelconques (Sect. II, art. 5), et qu'ainsi les quantités

$$yX-xY,\qquad xZ-zX,\qquad zY-yZ$$

expriment les moments des forces qui tendent à faire tourner les corps autour de chacun des trois axes des coordonnées z, y, x, en prenant le mot *moment*, dans le sens ordinaire, pour le produit de la force et de la perpendiculaire menée sur sa direction.

9. Si le système n'était animé par aucune force extérieure, ou s'il l'était seulement par des forces tendantes au point que nous avons pris pour l'origine des coordonnées, les trois équations précédentes se réduiraient à celles-ci

$$\mathbf{S}\,m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0,$$
$$\mathbf{S}\,m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0,$$
$$\mathbf{S}\,m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0,$$

lesquelles, étant intégrées par rapport à la variable t, donneront, en prenant trois constantes arbitraires A, B, C,

$$\mathbf{S}\,m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=C,$$
$$\mathbf{S}\,m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=B,$$
$$\mathbf{S}\,m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=A.$$

Ces dernières équations renferment évidemment le *principe des aires*, dont nous avons parlé dans la première Section.

10. Il est à propos de remarquer que ces équations sont dans le cas de l'article 10 de la Section précédente; de sorte qu'on y peut introduire trois nouvelles constantes arbitraires, par le changement des axes des coordonnées.

Soient x', y', z' les nouvelles coordonnées; on aura également

$$\mathrm{S}\,m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) = C',$$
$$\mathrm{S}\,m\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) = B',$$
$$\mathrm{S}\,m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) = A',$$

les quantités A′, B′, C′ étant aussi des constantes arbitraires, mais différentes de A, B, C.

Substituons maintenant dans l'expression $x\,dy - y\,dx$ les valeurs de x, y en x', y', z' données dans l'article cité de la même Section; on aura

$$\begin{aligned} x\,dy - y\,dx = &+ (\alpha\beta' - \beta\alpha')(x'\,dy' - y'\,dx') + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')(z'\,dx' - x'\,dz') \\ &+ (\beta\gamma' - \gamma\beta')(y'\,dz' - z'\,dy'). \end{aligned}$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned} z\,dx - x\,dz = &+ (\beta\alpha'' - \alpha\beta'')(x'\,dy' - y'\,dx') + (\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'')(z'\,dx' - x'\,dz') \\ &+ (\gamma\beta'' - \beta\gamma'')(y'\,dz' - z'\,dy'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y\,dz - z\,dy = &+ (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')(x'\,dy' - y'\,dx') + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')(z'\,dx' - x'\,dz') \\ &+ (\gamma'\beta'' - \beta'\gamma'')(y'\,dz' - z'\,dy'). \end{aligned}$$

Si l'on affecte tous les termes de ces équations du signe S, après les avoir multipliées par m et divisées par dt, et qu'on y substitue, à la place des intégrales affectées de S, leurs valeurs A, B, C, A′, B′, C′, on aura

$$\begin{aligned} C &= (\alpha\beta' - \beta\alpha')C' + (\gamma\alpha' - \alpha\gamma')B' + (\beta\gamma' - \gamma\beta')A', \\ B &= (\beta\alpha'' - \alpha\beta'')C' + (\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'')B' + (\gamma\beta'' - \beta\gamma'')A', \\ A &= (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')C' + (\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'')B' + (\gamma'\beta'' - \beta'\gamma'')A'. \end{aligned}$$

On peut réduire ces formules à une expression plus simple, en observant que l'on a identiquement

$$\begin{aligned} &(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 + (\beta\alpha'' - \alpha\beta'')^2 + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')^2 \\ &\quad = (\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2)(\beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2) - (\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'')^2, \end{aligned}$$

quantité qui se réduit à l'unité, en vertu des équations de condition de la première Partie (Sect. III, art. 10). On a, de plus, ces équations identiques

$$\alpha(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') + \alpha'(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') + \alpha''(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 0,$$
$$\beta(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'') + \beta'(\beta\alpha'' - \alpha\beta'') + \beta''(\alpha\beta' - \beta\alpha') = 0.$$

Si donc on compare ces équations avec les trois équations de condition

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \quad \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0, \quad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0,$$

il est facile de conclure de cette comparaison qu'on aura

$$\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' = \gamma, \quad \beta\alpha'' - \alpha\beta'' = \gamma', \quad \alpha\beta' - \beta\alpha' = \gamma''.$$

Les quantités γ, γ', γ'' pourraient avoir également le signe $-$; mais comme, dans la coïncidence des axes des x', y', z' avec ceux des x, y, z, on doit avoir (Part. I, Sect. III, art. 11)

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \alpha' = 0, \quad \beta' = 1, \quad \gamma' = 0, \quad \alpha'' = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = 1,$$

cette condition ne peut avoir lieu qu'en prenant γ'' positivement, et par conséquent aussi γ' et γ.

On trouvera, de la même manière,

$$\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'' = \beta, \quad \alpha\gamma'' - \gamma\alpha'' = \beta', \quad \gamma\alpha' - \alpha\gamma' = \beta'',$$
$$\gamma'\beta'' - \beta'\gamma'' = \alpha, \quad \gamma\beta'' - \beta\gamma'' = \alpha', \quad \beta\gamma' - \gamma\beta' = \alpha'';$$

de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned} A &= \alpha A' + \beta B' + \gamma C', \\ B &= \alpha' A' + \beta' B' + \gamma' C', \\ C &= \alpha'' A' + \beta'' B' + \gamma'' C'; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, par les équations de condition de l'article 10 (Part. I, Sect. III),

$$\begin{aligned} A' &= A\alpha + B\alpha' + C\alpha'', \\ B' &= A\beta + B\beta' + C\beta'', \\ C' &= A\gamma + B\gamma' + C\gamma'' \end{aligned}$$

et

$$A^2 + B^2 + C^2 = A'^2 + B'^2 + C'^2.$$

Il résulte de cette dernière équation qu'on a, en général,

$$\begin{aligned} &\left[S\,m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right]^2 + \left[S\,m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\right]^2 + \left[S\,m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right]^2 \\ = &\left[S\,m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right)\right]^2 + \left[S\,m\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right)\right]^2 + \left[S\,m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right)\right]^2; \end{aligned}$$

d'où l'on peut conclure que la fonction

$$\left[S\,m\left(x\frac{dz}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right]^2 + \left[S\,m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\right]^2 + \left[S\,m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\right]^2$$

a toujours une valeur indépendante du plan de projection et de la position des axes des coordonnées x, y, z dans l'espace, pourvu que ces coordonnées soient rectangulaires entre elles.

11. Ces expressions de A, B, C en A', B', C' qu'on vient de trouver sont semblables à celles de x, y, z en x', y', z' de l'article 9 de la Section précédente; par conséquent, si l'on prend

$$x' = A', \qquad y' = B', \qquad z' = C',$$

on aura

$$A = x, \qquad B = y, \qquad C = z,$$

et réciproquement

$$x = A, \qquad y = B, \qquad z = C$$

donnera

$$A' = x', \qquad B' = y', \qquad C' = z';$$

c'est-à-dire que A, B, C et A', B', C' seront deux systèmes de coordonnées qui répondent à un même point, le premier étant relatif aux axes des x, y, z et le second aux axes des x', y', z'.

On voit tout de suite par là qu'on peut faire

$$A' = 0, \qquad B' = 0,$$

en faisant passer l'axe des C' ou z' par le point auquel répondent les coordonnées A, B, C, et qu'alors la coordonnée C' aura sa plus grande valeur égale à $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$. On aura, dans ce cas,

$$A = \gamma C', \qquad B = \gamma' C', \qquad C = \gamma'' C',$$

et il est facile de voir que les coefficients γ, γ', γ'' ne seront autre chose que les cosinus des angles que la ligne C' fait avec les axes des A, B, C.

Ainsi la résolution des équations

$$\begin{aligned} S\,m\left(x'\frac{dy'}{dt} - y'\frac{dx'}{dt}\right) &= C', \\ S\,m\left(z'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dz'}{dt}\right) &= 0, \\ S\,m\left(y'\frac{dz'}{dt} - z'\frac{dy'}{dt}\right) &= 0 \end{aligned}$$

donnera celle des équations

$$\begin{aligned} S\,m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= \gamma'' C', \\ S\,m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= \gamma' C', \\ S\,m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= \gamma C', \end{aligned}$$

les quantités γ, γ', γ'' étant trois constantes telles que

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

et dont deux sont arbitraires.

Le plan perpendiculaire à l'axe des C', lorsque C' devient un maximum, est celui que M. Laplace nomme *plan invariable*, et dont il a le premier démontré l'existence et la position.

Cette position est facile à déterminer par les équations

$$\mathrm{A} = \gamma \mathrm{C}', \qquad \mathrm{B} = \gamma' \mathrm{C}', \qquad \mathrm{C} = \gamma'' \mathrm{C}';$$

car, puisque les quantités γ, γ', γ'' sont les cosinus des angles que l'axe des C' ou z', qui est perpendiculaire au plan variable, fait avec les axes des x, y, z du système, en nommant ces angles l, m, n, on aura, à cause de

$$\mathrm{C}' = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2},$$

$$\cos l = \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}, \qquad \cos m = \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}, \qquad \cos n = \frac{\mathrm{C}}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2}}.$$

12. Si le système est libre, c'est-à-dire s'il n'y a aucun des points du système qui doive être fixe, on peut prendre l'origine, supposée fixe, des coordonnées x, y, z partout où l'on voudra; par conséquent, les propriétés des aires et des moments que nous venons de démontrer auront lieu par rapport à un point fixe quelconque pris à volonté dans l'espace.

Mais, par ce que nous avons démontré dans l'article 6, ces mêmes propriétés auront lieu également par rapport au centre de gravité de tout le système, soit que ce centre soit fixe ou non. En effet, si, dans les trois équations de l'article 7, on substitue pour x, y, z les quantités $x' + \xi$, $y' + \eta$, $z' + \zeta$, en rapportant, comme dans l'article 3, les coordonnées x', y', z' au centre de gravité du système, et qu'on ait égard aux trois équations de ce dernier article, on aura ces transformées

$$\mathrm{S}\, m\left(\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2} + \xi \mathrm{Y} - \eta \mathrm{X}\right) = 0,$$

$$\mathrm{S}\, m\left(\zeta \frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \zeta \mathrm{X} - \xi \mathrm{Z}\right) = 0,$$

$$\mathrm{S}\, m\left(\eta \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta \mathrm{Z} - \zeta \mathrm{Y}\right) = 0,$$

qui sont, comme l'on voit, semblables à celles de l'article 7, et dont toute la différence consiste en ce que, à la place des coordonnées x,

y, z partant d'un point fixe, il y a les coordonnées ξ, η, ζ dont l'origine est dans le centre de gravité du système.

Ainsi, lorsque les forces accélératrices sont nulles, on aura les intégrales

$$\mathrm{S}\, m\left(\xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt}\right) = \mathrm{C},$$

$$\mathrm{S}\, m\left(\zeta \frac{d\xi}{dt} - \xi \frac{d\zeta}{dt}\right) = \mathrm{B},$$

$$\mathrm{S}\, m\left(\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt}\right) = \mathrm{A},$$

sur lesquelles on pourra faire des remarques analogues à celles que nous avons faites sur les équations de l'article 9.

13. Quand un des corps du système est retenu fixement par un obstacle quelconque, en plaçant dans ce corps l'origine des coordonnées, on a le cas de l'article 7. Mais, si deux corps du système sont supposés fixes, on regardera la ligne qui passe par ces deux corps comme un axe fixe autour duquel le système peut tourner librement, et, prenant cet axe pour celui des coordonnées z, on aura simplement, par le même article,

$$\delta x = -y\,\delta\varphi, \qquad \delta y = x\,\delta\varphi,$$

$\delta\varphi$ étant la rotation élémentaire autour de cet axe, laquelle doit demeurer indéterminée. On n'aura ainsi qu'une seule équation relative à cette variation $\delta\varphi$, laquelle sera

$$\mathrm{S}\, m\left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} + x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}\right) = 0;$$

et lorsque le moment $x\mathrm{Y} - y\mathrm{X}$ des forces extérieures par rapport à l'axe de rotation est nul, on aura par l'intégration, comme dans l'article 9,

$$\mathrm{S}\, m\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right) = \mathrm{C},$$

équation qui donne le principe des aires par rapport au plan des xy

perpendiculaire à l'axe de rotation, et sur lequel les aires décrites par les corps doivent être projetées.

Si trois corps du système étaient supposés fixes, alors la position de chacun des autres corps dans l'espace serait déterminée par ses distances à ces trois corps, et il n'y aurait plus de variations indépendantes de la nature du système et de la disposition respective des corps entre eux, d'où l'on pût déduire des équations générales pour le mouvement d'un système quelconque.

§ III. — *Propriétés relatives aux rotations produites par des forces d'impulsion.*

14. Quand un système libre de tourner en tout sens autour d'un point fixe reçoit des impulsions quelconques, on peut aussi employer, dans l'équation de l'article 11 de la Section précédente, les expressions de δx, δy, δz de l'article 7, après avoir réduit à X, Y, Z les forces d'impulsion P, Q, R, ...; et, en égalant séparément à zéro les termes multipliés par les variations $\delta\varphi$, $\delta\omega$, $\delta\psi$, on aura les trois équations

$$\mathrm{S}[\mathrm{m}(x\dot{y}-y\dot{x})+x\mathrm{Y}-y\mathrm{X}]=0,$$
$$\mathrm{S}[\mathrm{m}(z\dot{x}-x\dot{z})+z\mathrm{X}-x\mathrm{Z}]=0,$$
$$\mathrm{S}[\mathrm{m}(y\dot{z}-z\dot{y})+y\mathrm{Z}-z\mathrm{Y}]=0,$$

pour le premier instant du mouvement produit par les impulsions X, Y, Z.

Dans les systèmes qui sont tout à fait libres, on peut prendre le point fixe partout où l'on veut dans l'espace, et les équations précédentes auront toujours lieu par rapport à ce point.

15. Dans ces systèmes, on peut aussi rapporter leurs rotations à trois axes qui passent par le centre de gravité; car, en faisant, comme dans l'article 5,

$$\delta x=\delta x'+\delta\xi,\qquad \delta y=\delta y'+\delta\eta,\qquad \delta z=\delta z'+\delta\zeta,$$

les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ donneront d'abord les trois équations relatives au mouvement du centre de gravité trouvées dans ce même article.

Il restera ensuite l'équation

$$\mathrm{S}[(\mathrm{m}\dot{x}+\mathrm{X})\,\delta\xi+(\mathrm{m}\dot{y}+\mathrm{Y})\,\delta\eta+(\mathrm{m}\dot{z}+\mathrm{Z})\,\delta\zeta]=0.$$

Or, en rapportant les rotations $\delta\psi$, $\delta\omega$, $\delta\varphi$ aux axes des coordonnées ξ, η, ζ, et n'ayant égard qu'à ces rotations, on a, comme dans l'article 7,

$$\delta\xi=\zeta\,\delta\omega-\eta\,\delta\varphi,\qquad \delta\eta=\xi\,\delta\varphi-\zeta\,\delta\psi,\qquad \delta\zeta=\eta\,\delta\psi-\xi\,\delta\omega,$$

et les trois variations indéterminées $\delta\psi$, $\delta\omega$, $\delta\varphi$ donneront les trois équations

$$\mathrm{S}[\mathrm{m}(\xi\dot{y}-\eta\dot{x})+\xi\mathrm{Y}-\eta\mathrm{X}]=0,$$
$$\mathrm{S}[\mathrm{m}(\zeta\dot{x}-\xi\dot{z})+\zeta\mathrm{X}-\xi\mathrm{Z}]=0,$$
$$\mathrm{S}[\mathrm{m}(\eta\dot{z}-\zeta\dot{y})+\eta\mathrm{Z}-\zeta\mathrm{Y}]=0.$$

Mais

$$\dot{x}=\dot{x}'+\dot{\xi},\qquad \dot{y}=\dot{y}'+\dot{\eta},\qquad \dot{z}=\dot{z}'+\dot{\zeta};$$

donc, substituant ces valeurs, faisant sortir hors du signe S les quantités $\dot{x}'$, $\dot{y}'$, $\dot{z}'$, qui ne se rapportent qu'au centre de gravité, et observant que, par les propriétés de ce centre, on a

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\xi=0,\qquad \mathrm{S}\,\mathrm{m}\eta=0,\qquad \mathrm{S}\,\mathrm{m}\zeta=0,$$

les trois équations précédentes deviendront

$$\mathrm{S}[\mathrm{m}(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})+\xi\mathrm{Y}-\eta\mathrm{X}]=0,$$
$$\mathrm{S}[\mathrm{m}(\zeta\dot{\xi}-\xi\dot{\zeta})+\zeta\mathrm{X}-\xi\mathrm{Z}]=0,$$
$$\mathrm{S}[\mathrm{m}(\eta\dot{\zeta}-\zeta\dot{\eta})+\eta\mathrm{Z}-\zeta\mathrm{Y}]=0,$$

qui sont tout à fait semblables à celles de l'article précédent, et dans lesquelles les coordonnées ξ, η, ζ ont leur origine au centre de gravité, et les vitesses $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$ sont relatives à ce centre.

Ainsi les équations relatives à un point fixe subsistent aussi, lorsque le système est libre, par rapport à son centre de gravité.

16. Les équations que nous venons de trouver, pour l'effet des impulsions dans le premier instant, ont lieu aussi dans les instants suivants, s'il n'y a point de forces accélératrices, en regardant comme constants les termes qui dépendent des impulsions X, Y, Z; car, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ étant les vitesses parallèlement aux axes des x, y, z, on a

$$dx = \dot{x}\,dt, \qquad dy = \dot{y}\,dt, \qquad dz = \dot{z}\,dt,$$

et les équations de l'article 9 deviennent

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\,(x\dot{y} - y\dot{x}) = \mathrm{C},$$
$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\,(z\dot{x} - x\dot{z}) = \mathrm{B},$$
$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\,(y\dot{z} - z\dot{y}) = \mathrm{A},$$

lesquelles, étant comparées à celles de l'article 14, donnent

$$\mathrm{C} = \mathrm{S}(y\mathrm{X} - x\mathrm{Y}),$$
$$\mathrm{B} = \mathrm{S}(x\mathrm{Z} - z\mathrm{X}),$$
$$\mathrm{A} = \mathrm{S}(z\mathrm{Y} - y\mathrm{Z}).$$

Ainsi on a les valeurs des constantes A, B, C exprimées par les impulsions primitives données à chaque corps; et l'on voit que ces valeurs ne sont autre chose que les sommes des moments de ces impulsions par rapport aux axes des x, des y et des z.

Il en sera de même des équations relatives au centre de gravité, en comparant les équations de l'article 12 avec celles de l'article 15.

17. Si l'on ne considère que les mouvements de rotation par rapport aux trois axes des coordonnées x, y, z, et qu'on désigne par $\dot{\psi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\varphi}$ les vitesses de ces rotations, les variations δx, δy, δz seront proportionnelles aux vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, et les variations $\delta\psi$, $\delta\omega$, $\delta\varphi$ seront en

même temps proportionnelles aux vitesses $\dot{\psi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\varphi}$; les formules de l'article 7 donneront ainsi

$$\dot{x} = z\dot{\omega} - y\dot{\varphi}, \qquad \dot{y} = x\dot{\varphi} - z\dot{\psi}, \qquad \dot{z} = y\dot{\psi} - x\dot{\omega}.$$

Ces valeurs de x, y, z ne sont que les parties qui dépendent des trois rotations; pour avoir les valeurs complètes des vraies vitesses $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, il faut y ajouter les parties qui dépendent du changement de situation des corps du système entre eux, et qui sont indépendantes des rotations.

Mais lorsque le système est invariable, ce qui a lieu dans tous les corps solides d'une figure quelconque, ces parties des vitesses sont nulles et les valeurs de x, y, z se réduisent simplement à celles que nous venons de donner. On pourra donc substituer ces valeurs dans les équations précédentes et, faisant sortir hors du signe S les quantités $\dot{\psi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\varphi}$, on aura, pour un solide de figure quelconque, en mettant l'élément Dm à la place de m (Sect. II, art. 7), les équations

$$\dot{\varphi}\,\mathrm{S}\,(x^2 + y^2)\,\mathrm{Dm} - \dot{\psi}\,\mathrm{S}\,xz\,\mathrm{Dm} - \dot{\omega}\,\mathrm{S}\,yz\,\mathrm{Dm} = \mathrm{C},$$
$$\dot{\omega}\,\mathrm{S}\,(x^2 + z^2)\,\mathrm{Dm} - \dot{\psi}\,\mathrm{S}\,xy\,\mathrm{Dm} - \dot{\varphi}\,\mathrm{S}\,yz\,\mathrm{Dm} = \mathrm{B},$$
$$\dot{\psi}\,\mathrm{S}\,(y^2 + z^2)\,\mathrm{Dm} - \dot{\omega}\,\mathrm{S}\,xy\,\mathrm{Dm} - \dot{\varphi}\,\mathrm{S}\,xz\,\mathrm{Dm} = \mathrm{A},$$

par lesquelles on pourra déterminer les vitesses des rotations initiales $\dot{\psi}$, ω, φ, produites par les impulsions X, Y, Z appliquées à des points quelconques du corps et dont les moments par rapport aux axes des x, y, z sont A, B, C.

Comme les vitesses de rotation sont proportionnelles aux angles infiniment petits décrits en même temps par les rotations respectives, il s'ensuit de ce qu'on a démontré dans la première Partie (Sect. III, art. 11) que les trois vitesses $\dot{\psi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\varphi}$ se composent en une seule vitesse $\dot{\theta}$ telle que

$$\dot{\theta} = \sqrt{\dot{\psi}^2 + \dot{\omega}^2 + \dot{\varphi}^2},$$

avec laquelle le corps tournera réellement autour d'un axe *instantane*.

faisant, avec les axes des x, y, z, des angles λ, μ, ν, tels que

$$\cos\lambda = \frac{\dot\psi}{\theta}, \qquad \cos\mu = \frac{\dot\omega}{\theta}, \qquad \cos\nu = \frac{\dot\varphi}{\theta}.$$

Ainsi les trois équations précédentes donneront la position de l'axe autour duquel le corps tournera dans le premier instant, et la vitesse de rotation autour de cet axe. C'est celui qu'on appelle *axe spontané de rotation*.

18. Dans les instants suivants, le corps continuera à tourner par sa force d'inertie, et les trois équations qu'on vient de trouver auront encore lieu, en regardant comme constants les termes qui contiennent les forces d'impulsion X, Y, Z, comme on l'a vu dans l'article 16; mais les quantités $\mathrm{S}(x^2+y^2)\,\mathrm{D}m$, $\mathrm{S}xy\,\mathrm{D}m$, ... deviendront variables à raison de la variation des coordonnées x, y, z pendant la rotation.

Mais une conséquence remarquable qu'on tire de ces équations, c'est que, dans un instant quelconque, le corps a le même mouvement de rotation qu'il recevrait dans cet instant par l'impulsion des mêmes forces qui l'ont mis d'abord en mouvement, si ces forces lui étaient appliquées de manière à produire les mêmes moments autour des axes des x, y, z.

Et comme ces équations ne sont que les équations générales de l'article 16 pour un système quelconque de corps, appliquées à un corps solide de figure quelconque, il s'ensuit que, si le système qui a reçu des impulsions primitives devient, par l'action mutuelle et successive des corps, un système invariable ou un solide quelconque, les mêmes équations auront encore lieu; de sorte que le solide aura à chaque instant le même mouvement de rotation qu'il recevrait par les mêmes impulsions primitives, si elles lui étaient appliquées immédiatement de manière à produire les mêmes moments.

Donc aussi une masse fluide, agitée primitivement par des forces quelconques, abandonnée ensuite à elle-même et devenue solide par l'attraction mutuelle de ses parties, aura, à chaque instant, le même

mouvement de rotation que les forces primitives lui imprimeraient si elles agissaient de la même manière sur la masse solide.

19. Les trois équations de l'article 17 donneront les valeurs des moments A, B, C de toutes les forces primitives, en connaissant la position instantanée du corps et ses trois vitesses de rotation $\dot\psi$, $\dot\omega$, $\dot\varphi$ par rapport aux axes fixes des x, y, z, ou la vitesse composée θ autour de l'axe instantané, avec les angles λ, μ, ν de cet axe avec les axes fixes des x, y, z; et réciproquement, ayant ces moments, on peut en déduire les valeurs des vitesses de rotation.

On voit aussi par ces équations que les moments seront nuls si les vitesses sont nulles; mais, les moments étant supposés nuls, il ne s'ensuit pas évidemment que les vitesses de rotation doivent être nulles. Car, en faisant

$$\mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{B} = 0, \qquad \mathrm{C} = 0,$$

on a trois équations linéaires entre $\dot\psi$, $\dot\omega$, $\dot\varphi$; et il faudrait prouver que ces trois équations ne peuvent pas subsister ensemble, à moins de supposer $\dot\psi = 0$, $\dot\omega = 0$, $\dot\varphi = 0$.

En éliminant deux de ces inconnues, on a une équation qui donne la troisième inconnue nulle ou arbitraire, mais avec la condition

$$\begin{aligned}
&\mathrm{S}(x^2+y^2)\,\mathrm{D}m \times \mathrm{S}(x^2+z^2)\,\mathrm{D}m \times \mathrm{S}(y^2+z^2)\,\mathrm{D}m \\
= +&\mathrm{S}(x^2+y^2)\,\mathrm{D}m \times (\mathrm{S}xy\,\mathrm{D}m)^2 + \mathrm{S}(x^2+z^2)\,\mathrm{D}m \times (\mathrm{S}xz\,\mathrm{D}m)^2 \\
+&\mathrm{S}(y^2+z^2)\,\mathrm{D}m \times (\mathrm{S}yz\,\mathrm{D}m)^2 + 2\,\mathrm{S}xy\,\mathrm{D}m \times \mathrm{S}xz\,\mathrm{D}m \times \mathrm{S}yz\,\mathrm{D}m;
\end{aligned}$$

et il faudrait prouver que cette condition est impossible à remplir, ce qui paraît très difficile [1]. Mais nous démontrerons plus bas (art. 31) que, lorsque les moments sont nuls, toute rotation s'évanouit aussi.

D'où nous pouvons d'abord conclure qu'il est impossible qu'un sys-

(1) On trouvera à la fin du Volume la démonstration de ce théorème, qui n'offre pas, à beaucoup près, la difficulté que Lagrange semble lui attribuer. M. Binet en a publié une depuis longtemps dans le *Bulletin de la Société philomathique*. (*J. Bertrand.*)

tème de points isolés ou une masse fluide quelconque puisse former un corps solide qui ait un mouvement de rotation, à moins que les impulsions primitives n'aient été telles qu'il en soit résulté un moment par rapport à l'axe de cette rotation.

20. Par les transformations exposées dans l'article 10, on peut changer les trois équations de l'article 17 en des équations semblables dans lesquelles les quantités x, y, z, A, B, C soient remplacées par les quantités analogues x', y', z', A′, B′, C′.

Désignons par $\dot{\psi}'$, $\dot{\omega}'$, $\dot{\varphi}'$ les vitesses de rotation par rapport aux nouveaux axes des x', y', z'; on aura aussi

$$\begin{aligned}
dx' &= \dot{x}'\,dt = (z'\dot{\omega}' - y'\dot{\varphi}')\,dt,\\
dy' &= \dot{y}'\,dt = (x'\dot{\varphi}' - z'\dot{\psi}')\,dt,\\
dz' &= \dot{z}'\,dt = (y'\dot{\psi}' - x'\dot{\omega}')\,dt;
\end{aligned}$$

et les trois premières équations de l'article 10 deviendront, par ces substitutions, en changeant m en Dm,

$$\begin{aligned}
&\dot{\varphi}' \mathrm{S}(x'^2 + y'^2)\,\mathrm{Dm} - \dot{\psi}' \mathrm{S}\,x'z'\,\mathrm{Dm} - \dot{\omega}' \mathrm{S}\,y'z'\,\mathrm{Dm} = \mathrm{C}',\\
&\dot{\omega}' \mathrm{S}(z'^2 + x'^2)\,\mathrm{Dm} - \dot{\psi}' \mathrm{S}\,x'y'\,\mathrm{Dm} - \dot{\varphi}' \mathrm{S}\,y'z'\,\mathrm{Dm} = \mathrm{B}',\\
&\dot{\psi}' \mathrm{S}(y'^2 + z'^2)\,\mathrm{Dm} - \dot{\omega}' \mathrm{S}\,x'y'\,\mathrm{Dm} - \dot{\varphi}' \mathrm{S}\,x'z'\,\mathrm{Dm} = \mathrm{A}',
\end{aligned}$$

dans lesquelles on aura, par le même article,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}' &= \mathrm{A}\alpha + \mathrm{B}\alpha' + \mathrm{C}\alpha'',\\
\mathrm{B}' &= \mathrm{A}\beta + \mathrm{B}\beta' + \mathrm{C}\beta'',\\
\mathrm{C}' &= \mathrm{A}\gamma + \mathrm{B}\gamma' + \mathrm{C}\gamma''.
\end{aligned}$$

Ces équations ont l'avantage que la position des axes de rotation y est entièrement arbitraire, puisqu'elle ne dépend que des quantités α, β, γ, α', ...; et, comme elles ne sont que du premier ordre, rien n'empêche de donner à ces axes une position différente d'un instant à l'autre et de les prendre de manière qu'ils soient fixes dans l'intérieur

du corps et, par conséquent, mobiles avec lui dans l'espace. Alors les quantités $\mathrm{S}(x'^2 + y'^2)\,\mathrm{Dm}$, $\mathrm{S}\,x'y'\,\mathrm{Dm}$, ... deviendront constantes; mais les quantités A′, B′, C′ seront variables, à cause de la variabilité des quantités α, β, γ, α', ... Nous donnerons dans la suite des moyens directs de parvenir à ces équations, qui sont d'une grande utilité dans le problème de la rotation des corps.

21. On a vu dans l'article 16 que les constantes A, B, C expriment les sommes des moments des impulsions primitives données aux corps, relativement aux axes des x, y, z. Or il est facile de prouver que les quantités α, α', α'' représentent les cosinus des angles que l'axe des x' fait avec les axes des x, y, z; que les quantités β, β', β'' représentent les cosinus des angles que l'axe des y' fait avec les mêmes axes des x, y, z, et que les quantités γ, γ', γ'' représentent les cosinus des angles que l'axe des z' fait avec ces mêmes axes. Donc, par ce qu'on a démontré dans la première Partie sur la composition des moments (Sect. III, art. 16), les trois quantités A′, B′, C′ seront les moments des mêmes impulsions rapportés aux axes des x', y', z', c'est-à-dire aux axes de rotation fixes dans le corps et mobiles dans l'espace. Ainsi l'on pourra appliquer à ces axes les mêmes conclusions qu'on a trouvées dans l'article 19.

§ IV. — *Propriétés des axes fixes de rotation d'un corps libre de figure quelconque.*

22. Nous réservons pour un Chapitre particulier la solution complète du problème général de la rotation d'un corps solide de figure quelconque; nous allons seulement examiner ici le cas où l'axe instantané de rotation demeure immobile dans l'espace, ou au moins toujours parallèle à lui-même lorsque le corps a un mouvement progressif, parce que ce cas se résout facilement par les formules du paragraphe précédent et qu'il conduit aux belles propriétés des axes qu'on nomme *principaux*, ou *axes naturels de rotation*.

Reprenons les équations fondamentales de l'article 17; faisons, pour abréger,

$$l = \mathrm{S}\, x^2\, \mathrm{D}m, \qquad m = \mathrm{S}\, y^2\, \mathrm{D}m, \qquad n = \mathrm{S}\, z^2\, \mathrm{D}m,$$

$$f = \mathrm{S}\, yz\, \mathrm{D}m, \qquad g = \mathrm{S}\, xz\, \mathrm{D}m, \qquad h = \mathrm{S}\, xy\, \mathrm{D}m,$$

et substituons pour $\dot\psi$, $\dot\omega$, $\dot\varphi$ leurs valeurs $\dot\theta\cos\lambda$, $\dot\theta\cos\mu$, $\dot\theta\cos\nu$, $\dot\theta$ étant la vitesse de rotation autour de l'axe instantané qui fait les angles λ, μ, ν avec les axes fixes des x, y, z; ces équations deviendront ainsi, en les divisant par $\dot\theta$,

$$(m+n)\cos\lambda - h\cos\mu - g\cos\nu = \frac{\mathrm{A}}{\dot\theta},$$

$$(l+n)\cos\mu - h\cos\lambda - f\cos\nu = \frac{\mathrm{B}}{\dot\theta},$$

$$(l+m)\cos\nu - g\cos\lambda - f\cos\mu = \frac{\mathrm{C}}{\dot\theta}.$$

23. Les six quantités l, m, n, f, g, h sont variables; en les différentiant, substituant pour dx, dy, dz les quantités $\dot x\, dt$, $\dot y\, dt$, $\dot z\, dt$, et ensuite pour $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$ leurs valeurs (article cité), on aura

$$\begin{aligned}
dl &= 2(g\cos\mu - h\cos\nu)\dot\theta\, dt,\\
dm &= 2(h\cos\nu - f\cos\lambda)\dot\theta\, dt,\\
dn &= 2(f\cos\lambda - g\cos\mu)\dot\theta\, dt,\\
df &= [(m-n)\cos\lambda + g\cos\nu - h\cos\mu]\dot\theta\, dt,\\
dg &= [(n-l)\cos\mu + h\cos\lambda - f\cos\nu]\dot\theta\, dt,\\
dh &= [(l-m)\cos\nu + f\cos\mu - g\cos\lambda]\dot\theta\, dt.
\end{aligned}$$

Ces six équations, jointes aux trois de l'article précédent, renferment la solution générale; mais nous ne considérons ici que le cas où les angles λ, μ, ν demeurent invariables, et il s'agit de voir sous quelles conditions ces quantités peuvent être constantes.

24. Pour cela, il n'y a qu'à différentier les trois premières équations dans cette supposition, et y substituer les valeurs des différentielles dl, dm, ...; on aura, après avoir divisé par $\dot\theta\, dt$, ces trois-ci :

$$\begin{aligned}
&f(\cos^2\nu - \cos^2\mu) - g\cos\lambda\cos\mu + h\cos\lambda\cos\nu\\
&\qquad\qquad + (m-n)\cos\mu\cos\nu = -\frac{\mathrm{A}}{\dot\theta^2}\frac{d\dot\theta}{dt},\\
&f\cos\lambda\cos\mu + g(\cos^2\lambda - \cos^2\nu) - h\cos\mu\cos\nu\\
&\qquad\qquad + (n-l)\cos\lambda\cos\nu = -\frac{\mathrm{B}}{\dot\theta^2}\frac{d\dot\theta}{dt},\\
&-f\cos\lambda\cos\nu + g\cos\mu\cos\nu + h(\cos^2\mu - \cos^2\lambda)\\
&\qquad\qquad + (l-m)\cos\lambda\cos\mu = -\frac{\mathrm{C}}{\dot\theta^2}\frac{d\dot\theta}{dt}.
\end{aligned}$$

Si l'on ajoute ces trois équations ensemble, après avoir multiplié la première par $\cos\lambda$, la deuxième par $\cos\mu$, la troisième par $\cos\nu$, on a l'équation

$$\frac{\mathrm{A}\cos\lambda + \mathrm{B}\cos\mu + \mathrm{C}\cos\nu}{\dot\theta^2}\frac{d\dot\theta}{dt} = 0,$$

laquelle donne

$$d\dot\theta = 0,$$

ou bien

$$\mathrm{A}\cos\lambda + \mathrm{B}\cos\mu + \mathrm{C}\cos\nu = 0.$$

Nous verrons plus bas (art. 38) que la quantité

$$\mathrm{A}\dot\psi + \mathrm{B}\dot\omega + \mathrm{C}\dot\varphi,$$

qui est la même chose que

$$(\mathrm{A}\cos\lambda + \mathrm{B}\cos\mu + \mathrm{C}\cos\nu)\dot\theta,$$

exprime la force vive du corps, laquelle ne peut jamais être nulle tant que le corps est en mouvement.

Il faut donc supposer en général

$$d\dot\theta = 0,$$

et, par conséquent, la vitesse de rotation $\dot\theta$ constante. Alors les trois équations ci-dessus se réduisent à deux, qui donnent les rapports des $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$; et, comme on a

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

ces rapports suffiront pour déterminer les trois cosinus.

25. Supposons

$$s = \frac{\cos\mu}{\cos\lambda}, \qquad u = \frac{\cos\nu}{\cos\lambda};$$

les trois équations précédentes deviendront, à cause de $d\theta = 0$,

$$\begin{aligned}
&f(u^2 - s^2) - gs + hu + (m-n)su = 0,\\
&g(1 - u^2) - hsu + fs + (n-l)u = 0,\\
&h(s^2 - 1) + gsu - fu + (l-m)s = 0.
\end{aligned}$$

La dernière donne

$$u = \frac{h(s^2-1) + (l-m)s}{f - gs};$$

cette valeur étant substituée dans la première ou dans la seconde, ou plutôt dans la somme de ces deux, après avoir multiplié l'une par g et l'autre par f, pour en chasser le terme en u^2, on a

$$\begin{aligned}
&[gh(m-n) + f(g^2-h^2)]s^3\\
&\quad + [g(l-m)(m-n) + fh(n-2l+m) + g(g^2+h^2-2f^2)]s^2\\
&\quad + [f(l-m)(m-n) + gh(n-2m+l) + f(f^2+h^2-2g^2)]s\\
&\qquad\qquad + fh(l-n) + g(f^2-h^2) = 0.
\end{aligned}$$

Cette équation, étant du troisième degré, aura nécessairement une racine réelle; ainsi l'on aura une valeur de s et une valeur correspondante de u, par le moyen desquelles on pourra déterminer la position d'un axe invariable et de rotation uniforme. Mais, comme cette détermination dépend des quantités l, m, n, f, g, h qui varient avec le temps t, il faut encore prouver que la variabilité de ces quantités n'influe point sur la valeur des deux quantités s et u.

26. Pour y parvenir, nommons P, Q, R les premiers membres des trois équations de l'article 22; les premiers membres des équations de l'article 24 seront $\frac{dP}{\theta\,dt}$, $\frac{dQ}{\theta\,dt}$, $\frac{dR}{\theta\,dt}$, en y mettant pour dl, dm, ... leurs valeurs. Or il est facile de voir qu'on a, par la substitution de ces

mêmes valeurs,

$$\begin{aligned}
dP &= (R\cos\mu - Q\cos\nu)\theta\,dt,\\
dQ &= (P\cos\nu - R\cos\lambda)\theta\,dt,\\
dR &= (Q\cos\lambda - P\cos\mu)\theta\,dt.
\end{aligned}$$

D'après ces équations, dans lesquelles λ, μ, ν et θ sont des quantités constantes, il est facile de voir que, si les valeurs de $\frac{dP}{dt}$, $\frac{dQ}{dt}$, $\frac{dR}{dt}$ sont nulles lorsque t est nul ou égal à une quantité quelconque donnée, celles de $\frac{d^2P}{dt^2}$, $\frac{d^2Q}{dt^2}$, $\frac{d^2R}{dt^2}$, de $\frac{d^3P}{dt^3}$, $\frac{d^3Q}{dt^3}$, $\frac{d^3R}{dt^3}$, et ainsi de suite à l'infini, seront aussi nulles pour la même valeur de t.

Or on sait, par le théorème de Taylor, que la valeur d'une fonction $\frac{dP}{dt}$ de t, lorsque t devient $t + t'$, devient en même temps

$$\frac{dP}{dt} + \frac{d^2P}{dt^2}t' + \frac{1}{2}\frac{d^3P}{dt^3}t'^2 + \frac{1}{2.3}\frac{d^4P}{dt^4}t'^3 + \ldots.$$

Donc, si $\frac{dP}{dt}$ est nul lorsque l'on a $t' = 0$, on aura toujours

$$\frac{dP}{dt} = 0,$$

quel que soit t'. Et la même chose aura lieu pour les valeurs de $\frac{dQ}{dt}$ et $\frac{dR}{dt}$.

Il s'ensuit de là que, si les équations de l'article 25, qui ne sont que les transformées des équations $\frac{dP}{dt} = 0$, $\frac{dQ}{dt} = 0$, $\frac{dR}{dt} = 0$, ont lieu dans un instant quelconque, elles auront lieu, quel que soit le temps t, dans l'hypothèse des quantités s et u constantes. Par conséquent, les valeurs de ces quantités seront indépendantes de la variabilité des quantités l, m, n, f, g, h; de sorte qu'il suffira de déterminer les valeurs de ces dernières quantités pour une position quelconque du corps à l'égard des axes fixes des x, y, z, pour avoir celles des quantités s et u qui déterminent la position de l'axe de rotation, lequel doit demeurer immobile dans l'espace ou du moins toujours parallèle à lui-même si le corps a un mouvement progressif.

Et comme cet axe, par sa nature, est fixe dans l'intérieur du corps pendant un instant, puisque le corps est censé tourner autour de lui, il s'ensuit qu'il y doit toujours demeurer fixe; car il est évident que si, dans l'instant suivant, il changeait de place dans le corps, il changerait nécessairement de place dans l'espace, ce qui est contre l'hypothèse.

27. Ayant trouvé la position de cet axe dans l'espace, rien n'empêche de supposer qu'il coïncide avec l'axe des x, dont la position est arbitraire.

On pourra ainsi supposer $\lambda = 0$ et, par conséquent, $\cos\lambda = 1$, ce qui donnera

$$s = 0, \qquad u = 0.$$

De là on trouve, par les équations de l'article 25,

$$g = 0, \qquad h = 0.$$

Ainsi cet axe a la propriété qu'en le prenant pour l'axe des x, les valeurs des deux intégrales $\mathsf{S}\, xy\,\mathrm{D}m$, $\mathsf{S}\, xz\,\mathrm{D}m$ (art. 22) deviennent nulles.

Supposons maintenant dans nos formules

$$g = 0, \qquad h = 0,$$

et désignons par f', l', m', n' ce que deviennent les quantités f, l, m, n dans ce cas. Cette supposition donne d'abord

$$s = 0, \qquad u = 0;$$

c'est le cas précédent. Ensuite elle donne aussi s et u infinis et, par conséquent,

$$\cos\lambda = 0, \qquad \lambda = 90^\circ;$$

cette valeur répond aux deux autres racines de l'équation en s du troisième degré et, par conséquent, à la position des deux autres axes. Or la première des équations en s et u (art. 25) devient, lorsque g et h sont nuls,

$$f'(u^2 - s^2) + (m' - n')su = 0,$$

et, substituant pour s et u leurs valeurs,

$$f'(\cos^2\nu - \cos^2\mu) + (m' - n')\cos\mu\cos\nu = 0;$$

mais, en faisant $\cos\lambda = 0$ dans

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

on a

$$\cos\nu = \sqrt{1 - \cos^2\mu} = \sin\mu;$$

et l'équation précédente se réduit à celle-ci

$$\operatorname{tang} 2\mu = \frac{2f'}{m' - n'},$$

laquelle donne pour l'angle μ deux valeurs dont l'une surpasse l'autre de 90°.

Ainsi, ayant pris l'axe des x dans le premier axe de rotation, les deux autres axes de rotation uniforme seront dans le plan des yz et feront avec l'axe des y les angles μ et $\mu + 90^\circ$, de manière que les trois axes de rotation seront rectangulaires entre eux, comme ceux des coordonnées. On pourra donc prendre aussi ces deux derniers axes pour ceux des y et des z; on aura alors

$$\mu = 0$$

et, par conséquent,

$$f' = 0;$$

de sorte que la valeur de l'intégrale $\mathsf{S}\, yz\,\mathrm{D}m$ sera aussi nulle.

28. Il existe donc, pour chaque corps solide, quelles que soient sa figure et sa constitution, et par rapport à un point quelconque du corps, trois axes rectangulaires, qui se coupent dans ce point, autour desquels le corps peut tourner librement et uniformément; et ces trois axes sont déterminés par les conditions suivantes

$$\mathsf{S}\, xy\,\mathrm{D}m = 0, \qquad \mathsf{S}\, xz\,\mathrm{D}m = 0, \qquad \mathsf{S}\, yz\,\mathrm{D}m = 0,$$

en prenant ces axes pour ceux des coordonnées x, y, z.

Lorsque ces axes passent par le centre de gravité, on les nomme *axes* *principaux*, d'après Euler, à qui on en doit la connaissance; on les nomme aussi *axes naturels de rotation* ou, en général, *axes principaux*, soit qu'ils passent par le centre de gravité ou non.

29. En faisant

$$f = 0, \quad g = 0, \quad h = 0,$$

ce qui a lieu par rapport aux trois axes principaux, on a aussi, par les équations de l'article 23,

$$\frac{dl}{dt} = 0, \quad \frac{dm}{dt} = 0, \quad \frac{dn}{dt} = 0,$$

ce qui fait voir que les quantités l, m, n sont alors les plus grandes ou les plus petites. Pour pouvoir distinguer les maxima et les minima, il n'y aura qu'à chercher les valeurs de $\frac{d^2 l}{dt^2}$, $\frac{d^2 m}{dt^2}$, $\frac{d^2 n}{dt^2}$; et l'on trouvera, à cause de $\dot{\theta}$ constante,

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = 2[(n - l)\cos^2\mu - (l - m)\cos^2\nu]\dot{\theta}^2,$$

$$\frac{d^2 m}{dt^2} = 2[(l - m)\cos^2\nu - (m - n)\cos^2\lambda]\dot{\theta}^2,$$

$$\frac{d^2 n}{dt^2} = 2[(m - n)\cos^2\lambda - (n - l)\cos^2\mu]\dot{\theta}^2.$$

Donc, si $l > m$, $m > n$, la valeur de $\frac{d^2 l}{dt^2}$ sera toujours négative, celle de $\frac{d^2 n}{dt^2}$ toujours positive, et celle de $\frac{d^2 m}{dt^2}$ pourra être positive ou négative; par conséquent, l sera toujours un maximum, n un minimum, et m ne sera ni l'un ni l'autre. On voit aussi que $\frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{d^2 m}{dt^2}$ aura toujours une valeur négative, et $\frac{d^2 m}{dt^2} + \frac{d^2 n}{dt^2}$ aura toujours une valeur positive; de sorte que la quantité $l + m$ sera toujours un maximum, et $m + n$ un minimum.

Les quantités $l + m$, $l + n$, $m + n$, qui expriment les sommes des produits de chaque molécule du corps par le carré de sa distance aux trois axes des z, y, x, se nomment, d'après Euler, *moments d'inertie*

du corps relativement à ces axes; ils sont pour le mouvement de rotation ce que les simples masses sont pour le mouvement progressif, puisque c'est par ces moments qu'il faut diviser les moments des forces d'impulsion pour avoir les vitesses de rotation autour des mêmes axes.

C'est par la considération des plus grands et des plus petits moments d'inertie qu'Euler a trouvé les axes principaux; maintenant, on les détermine ordinairement par les trois conditions

$$S\, xy\, Dm = 0, \quad S\, xz\, Dm = 0, \quad S\, yz\, Dm = 0.$$

30. Puisqu'on est assuré, par l'analyse de l'article 27, que l'équation en s (art. 25) a ses trois racines réelles, il sera toujours facile de les trouver en comparant cette équation, dégagée de son second terme, avec l'équation connue

$$x^3 - 3r^2 x - 2r^3 \cos\varphi = 0,$$

dont les trois racines sont

$$2r\cos\frac{\varphi}{3}, \quad -2r\cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right), \quad -2r\cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right).$$

On aura ainsi les trois valeurs de s, que nous désignerons par s, s', s'', et les valeurs correspondantes u, u', u''. Et, si l'on désigne de même par λ, λ', λ'' les angles que les trois axes principaux font avec l'axe des x, par μ, μ', μ'' les angles qu'ils font avec l'axe des y, et par ν, ν', ν'' ceux que ces mêmes axes font avec l'axe des z, on aura, par les articles 24 et 25,

$$\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + s^2 + u^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{s}{\sqrt{1 + s^2 + u^2}},$$

$$\cos\nu = \frac{u}{\sqrt{1 + s^2 + u^2}},$$

et l'on aura des expressions semblables en marquant les lettres λ, μ, ν, s, u d'un trait ou de deux. Ainsi la détermination des trois axes principaux pourra toujours s'effectuer par ces formules dans tout corps solide de figure quelconque, homogène ou non, pourvu que l'on connaisse les valeurs des quantités f, g, h, l, m, n pour une position quelconque donnée du corps, relativement aux axes fixes des x, y, z.

En substituant ces valeurs de $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ dans les trois équations de l'article 22, on aura les valeurs des moments A, B, C qui seront nécessaires pour faire tourner le corps, avec une vitesse constante donnée θ, autour d'un axe fixe dans l'espace, dont la position sera donnée par les mêmes angles λ, μ, ν et qui sera en même temps un des trois axes principaux du corps, selon qu'on prendra pour s et u l'une des trois racines de l'équation en s.

31. Comme ces trois axes sont toujours perpendiculaires entre eux, on pourra les prendre pour les axes des x', y', z' dans les formules de l'article 20. On aura ainsi, par la nature de ces axes,

$$\mathrm{S}x'y'\,\mathrm{D}m = 0, \qquad \mathrm{S}x'z'\,\mathrm{D}m = 0, \qquad \mathrm{S}y'z'\,\mathrm{D}m = 0;$$

et si l'on fait

$$l' = \mathrm{S}x'^2\,\mathrm{D}m, \qquad m' = \mathrm{S}y'^2\,\mathrm{D}m, \qquad n' = \mathrm{S}z'^2\,\mathrm{D}m,$$

les trois équations de l'article cité prendront cette forme très simple

$$\begin{aligned}(m' + n')\dot{\psi}' &= \mathrm{A}',\\ (l' + m')\dot{\omega}' &= \mathrm{B}',\\ (l' + n')\dot{\varphi}' &= \mathrm{C}',\end{aligned}$$

par lesquelles on a tout de suite les vitesses de rotation $\dot{\psi}'$, $\dot{\omega}'$, $\dot{\varphi}'$ autour des trois axes principaux.

C'est ici le lieu de démontrer la proposition que nous avons indiquée dans l'article 19. En effet, en faisant

$$\mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{B} = 0, \qquad \mathrm{C} = 0,$$

on aura aussi (art. 20)

$$\mathrm{A}' = 0, \qquad \mathrm{B}' = 0, \qquad \mathrm{C}' = 0;$$

donc les équations précédentes donneront

$$\dot{\psi}' = 0, \qquad \dot{\omega}' = 0, \qquad \dot{\varphi}' = 0,$$

puisque les quantités l, m, n ne peuvent jamais être nulles pour un corps de trois dimensions. D'où l'on doit conclure qu'il ne peut y avoir de mouvement de rotation si les moments primitifs sont nuls.

Quand, parmi les trois moments A', B', C', deux sont nuls, comme B' et C', ce qui a lieu lorsque l'impulsion se fait dans le plan des $y'z'$, les deux vitesses de rotation $\dot{\omega}$, $\dot{\varphi}$ seront aussi nulles et le corps tournera autour de l'axe principal des x' avec la vitesse $\dot{\psi}'$. Or, par les formules de l'article 20, on a

$$\mathrm{A}'^2 + \mathrm{B}'^2 + \mathrm{C}'^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2,$$

à cause des équations de condition entre les quantités α, β, γ, α', ...; donc, faisant

$$\mathrm{B}' = 0, \qquad \mathrm{C}' = 0,$$

on aura

$$\mathrm{A}' = \sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2},$$

et, par conséquent, A' sera constant; donc, par la première équation, la vitesse $\dot{\psi}'$ sera aussi constante.

32. A l'égard des valeurs de l', m', n', il sera facile de les déduire de celles de l, m, n, f, g, h; car les expressions de x, y, z en x', y', z', en vertu des équations de condition (Part. I, Sect. III, art. 10), donnent réciproquement

$$\begin{aligned}x' &= \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,\\ y' &= \beta x + \beta' y + \beta'' z,\\ z' &= \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z.\end{aligned}$$

Or, en prenant les axes des x', y', z' pour les axes principaux, on voit par l'article 21 que les quantités α, α', α'' sont identiques avec $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, que, pareillement, β, β', β'' seront identiques avec $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$, et γ, γ', γ'' avec $\cos\lambda''$, $\cos\mu''$, $\cos\nu''$. Ainsi, en substituant les valeurs de ces cosinus données ci-dessus (art. 20), on aura

$$x' = \frac{x + sy + uz}{\sqrt{1 + s^2 + u^2}},$$

$$y' = \frac{x + s'y + u'z}{\sqrt{1 + s'^2 + u'^2}},$$

$$z' = \frac{x + s''y + u''z}{\sqrt{1 + s''^2 + u''^2}};$$

d'où l'on tirera, en carrant et intégrant après avoir multiplié par Dm,

$$l' = \frac{l + s^2 m + u^2 n + 2sh + 2ug + 2suf}{1 + s^2 + u^2},$$

$$m' = \frac{l + s'^2 m + u'^2 n + 2s'h + 2u'g + 2s'u'f}{1 + s'^2 + u'^2},$$

$$n' = \frac{l + s''^2 m + u''^2 n + 2s''h + 2u''g + 2s''u''f}{1 + s''^2 + u''^2}.$$

On trouve, dans la plupart des Traités de Mécanique, la détermination des axes principaux dans différents corps; dans ceux dont la forme est symétrique, l'axe de figure est toujours un des axes principaux : on peut trouver ensuite les deux autres par la formule de l'article 27.

§ V. — *Propriétés relatives aux forces vives.*

33. En général, de quelque manière que les différents corps qui composent un système soient disposés ou liés entre eux, pourvu que cette disposition soit indépendante du temps, c'est-à-dire que les équations de condition entre les coordonnées des différents corps ne renferment point la variable t, il est clair qu'on pourra toujours, dans la formule générale de la Dynamique, supposer les variations δx, δy, δz égales aux différentielles dx, dy, dz qui représentent les espaces effectifs parcourus par les corps dans l'instant dt, tandis que les variations dont nous parlons doivent représenter les espaces quelconques que les corps pourraient parcourir dans le même instant, eu égard à leur disposition mutuelle.

Cette supposition n'est que particulière et ne peut fournir, par conséquent, qu'une seule équation; mais, étant indépendante de la forme du système, elle a l'avantage de donner une équation générale pour le mouvement de quelque système que ce soit.

Substituant donc dans la formule de l'article 5 (Section précédente), à la place des variations δx, δy, δz, les différentielles dx, dy, dz, et, par conséquent aussi, les différentielles dp, dq, dr, ... au lieu des variations δp, δq, δr, ..., qui dépendent de δx, δy, δz, on aura cette équation générale, pour quelque système de corps que ce soit,

$$\mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz + \mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots\right) = 0.$$

34. Dans le cas où la quantité

$$\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots$$

est intégrable, lequel a lieu lorsque les forces P, Q, R, ... tendent à des centres fixes ou à des corps du même système et sont fonctions des distances p, q, r, ..., en faisant

$$\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots = d\Pi,$$

l'équation précédente devient

$$\mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2x}{dt^2}dx + \frac{d^2y}{dt^2}dy + \frac{d^2z}{dt^2}dz + d\Pi\right) = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\mathrm{S}\,m\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) + \Pi\right] = \mathrm{H},$$

dans laquelle H désigne une constante arbitraire, égale à la valeur du premier membre de l'équation dans un instant donné.

Cette dernière équation renferme le principe connu sous le nom de *conservation des forces vives*. En effet, $dx^2 + dy^2 + dz^2$ étant le carré de l'espace que le corps parcourt dans l'instant dt,

$$\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}$$

sera le carré de sa vitesse, et

$$\mathrm{m}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)$$

sa force vive. Donc

$$\mathbf{S}\,\mathrm{m}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)$$

sera la somme des forces vives de tous les corps, ou la force vive de tout le système; et l'on voit, par l'équation dont il s'agit, que cette force vive est égale à la quantité

$$2\mathrm{H}-2\,\mathbf{S}\,\Pi\mathrm{m},$$

laquelle dépend simplement des forces accélératrices qui agissent sur les corps, et nullement de leur liaison mutuelle, de sorte que la force vive du système est à chaque instant la même que les corps auraient acquise si, étant animés par les mêmes puissances, ils s'étaient mus librement chacun sur la ligne qu'il a décrite. C'est ce qui a fait donner le nom de *conservation des forces vives* à cette propriété du mouvement.

35. Ce principe a lieu aussi lorsqu'on rapporte les mouvements des corps à leur centre de gravité; car, en nommant, comme ci-dessus, (art. 3) x', y', z' les trois coordonnées du centre de gravité, et faisant

$$x=x'+\xi,\qquad y=y'+\eta,\qquad z=z'+\zeta,$$

les coordonnées ξ, η, ζ auront leur origine dans le centre de gravité. On aura ainsi

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\mathbf{S}\,\mathrm{m}\left(\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}+\frac{dz^2}{dt^2}\right)\\ &\quad=\tfrac{1}{2}\left(\frac{dx'^2}{dt^2}+\frac{dy'^2}{dt^2}+\frac{dz'^2}{dt^2}\right)\mathbf{S}\,\mathrm{m}+\tfrac{1}{2}\mathbf{S}\,\mathrm{m}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)\\ &\qquad+\frac{dx'}{dt}\mathbf{S}\,\mathrm{m}\frac{d\xi}{dt}+\frac{dy'}{dt}\mathbf{S}\,\mathrm{m}\frac{d\eta}{dt}+\frac{dz'}{dt}\mathbf{S}\,\mathrm{m}\frac{d\zeta}{dt}.\end{aligned}$$

Par la nature du centre de gravité, on a (article cité)

$$\mathbf{S}\,\mathrm{m}\frac{d\xi}{dt}=0,\qquad \mathbf{S}\,\mathrm{m}\frac{d\eta}{dt}=0,\qquad \mathbf{S}\,\mathrm{m}\frac{d\zeta}{dt}=0.$$

Donc, l'équation précédente étant différentiée et retranchée de celle de l'article 33, on aura

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x'}{dt^2}dx'+\frac{d^2y'}{dt^2}dy'+\frac{d^2z'}{dt^2}dz'\,\mathbf{S}\,\mathrm{m}+\mathbf{S}\,\mathrm{m}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}d\xi+\frac{d^2\eta}{dt^2}d\eta+\frac{d^2\zeta}{dt^2}d\zeta\right)\\ &\qquad+\mathbf{S}\,\mathrm{m}(\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq+\mathrm{R}\,dr+\ldots)=0.\end{aligned}$$

Mettons à la place de

$$\mathrm{P}\,dp+\mathrm{Q}\,dq+\mathrm{R}\,dr+\ldots$$

la quantité équivalente

$$\mathrm{X}\,dx+\mathrm{Y}\,dy+\mathrm{Z}\,dz,$$

et substituons pour dx, dy, dz les valeurs $dx'+d\xi$, $dy'+d\eta$, $dz'+d\zeta$; la dernière équation se réduira, en vertu des équations différentielles de l'article 3, à celle-ci

$$\mathbf{S}\,\mathrm{m}\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}d\xi+\frac{d^2\eta}{dt^2}d\eta+\frac{d^2\zeta}{dt^2}d\zeta\right)+\mathbf{S}\,\mathrm{m}(\mathrm{X}\,d\xi+\mathrm{Y}\,d\eta+\mathrm{Z}\,d\zeta)=0,$$

qui est analogue à celle de l'article 33, mais où la quantité

$$\mathrm{X}\,d\xi+\mathrm{Y}\,d\eta+\mathrm{Z}\,d\zeta$$

ne sera intégrable qu'*autant que* les forces seront dirigées vers les corps mêmes du système et proportionnelles à des fonctions des distances. Dans ce cas, on aura

$$\tfrac{1}{2}\mathbf{S}\,\mathrm{m}\left(\frac{d\xi^2}{dt^2}+\frac{d\eta^2}{dt^2}+\frac{d\zeta^2}{dt^2}\right)=\mathrm{H},$$

équation qui renferme la *conservation des forces vives* par rapport au centre de gravité.

36. Au reste, il n'en est pas du principe des *forces vives* comme de ceux du *centre de gravité* et *des aires*, qui ont lieu, quelle que soit l'action que les corps du système puissent exercer les uns sur les autres.

même en se choquant, parce que toutes les forces intérieures disparaissent des équations qui renferment ces deux principes.

L'équation de la conservation des forces vives contient tous les termes dus aux forces tant extérieures qu'intérieures et n'est indépendante que de l'action des corps provenant de leur liaison mutuelle. Aussi ce principe a-t-il lieu dans le mouvement des fluides non élastiques, tant qu'ils forment une masse continue et qu'il n'y a point de choc entre leurs parties; et, si la quantité de *forces vives* est la même avant et après le choc des corps élastiques, c'est qu'on suppose que les corps se sont rétablis après le choc dans le même état où ils étaient auparavant; de sorte que les termes $\int P\,dp$ de l'expression Π, qui proviennent des forces P dues au ressort des corps, et dont la valeur est la plus grande lorsque la compression est à son terme, décroissent ensuite par degrés égaux pendant la restitution et redeviennent nuls à la fin du choc. C'est uniquement dans cette hypothèse que la conservation des forces vives peut avoir lieu dans le choc des corps élastiques.

Dans tout autre cas, lorsqu'il y a des changements brusques dans les vitesses de quelques corps du système, la force vive totale se trouve diminuée de la quantité des forces vives dues aux forces accélératrices qui ont pu produire ces changements; et cette quantité peut toujours s'estimer par la somme des masses multipliées par les carrés des vitesses que ces masses ont perdues, ou sont censées avoir perdues dans les changements brusques des vitesses réelles des corps. C'est le théorème que M. Carnot avait trouvé dans le choc des corps durs.

37. On peut aussi, dans l'équation de l'article 11 de la Section précédente, supposer les variations δx, δy, δz proportionnelles aux vitesses $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$ que les corps reçoivent par l'impulsion. On aura ainsi l'équation

$$S[m(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)+X\dot x+Y\dot y+Z\dot z]=0,$$

dans laquelle la partie $Sm(\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2)$ représente la *force vive* de tout le système.

Cette équation, étant combinée avec les trois équations de l'article 14, donne lieu à une propriété *de maximis et minimis* relative à la ligne autour de laquelle le système tourne au premier instant, lorsqu'il a reçu une impulsion quelconque, ligne qu'on peut aussi nommer *axe de rotation spontané*.

Si l'on nomme α, β, γ les parties des vitesses $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$ qui dépendent du changement de position respective des corps du système [1], et qu'on les ajoute à celles qui résultent des rotations (art. 17), on aura les valeurs complètes de $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$, exprimées ainsi :

$$\dot x = z\dot\omega - y\dot\varphi + \alpha, \qquad \dot y = x\dot\varphi - z\dot\psi + \beta, \qquad \dot z = y\dot\psi - x\dot\omega + \gamma.$$

Supposons maintenant qu'on différentie ces valeurs, en ne regardant que $\dot\psi$, $\dot\omega$, $\dot\varphi$ comme variables, et qu'on dénote ces différentielles

[1] Ces quantités α, β, γ ne sont pas suffisamment définies. Quel que soit, en effet, le déplacement d'un système variable de forme, on peut le regarder comme résultant d'un mouvement *arbitraire* imprimé au système solidifié, puis d'un second mouvement produisant le changement de position respective des points considérés. L'indétermination des quantités α, β, γ rend cet article 37 extrêmement obscur. Je dois avouer qu'il m'a été impossible de comprendre le raisonnement de Lagrange et d'attacher même aucun sens précis au théorème qui termine le paragraphe. Les notes qui suivent se rapportent donc au seul cas d'un système solide. (*J. Bertrand.*)

Tout en souscrivant aux remarques précédentes, nous proposerons l'interprétation suivante du résultat obtenu par Lagrange : si, dans les formules qui donnent $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$, on considère α, β, γ comme des fonctions données de x, y, z et $\dot\omega$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$ comme des arbitraires variables, cela revient à considérer tous les mouvements du système dans lesquels la déformation est la même au bout d'un instant infiniment petit; car, si l'on cherche, par exemple, la dérivée de la distance de deux points du système par rapport au temps, on reconnaît aisément que cette dérivée ne dépend nullement des arbitraires $\dot\omega$, $\dot\varphi$, $\dot\psi$ et demeure, par conséquent, la même quand ces arbitraires prennent toutes les valeurs possibles. Le théorème de Lagrange peut donc s'énoncer comme il suit :

Si l'on compare le mouvement que prend le système sous les impulsions données à tous ceux dans lesquels la déformation serait la même au bout d'un instant infiniment petit, la force vive acquise par le système dans le mouvement naturel sera toujours un maximum ou un minimum.

Il résulte d'ailleurs de la démonstration donnée par M. Bertrand dans la note suivante que *cette force vive sera toujours un maximum.*

Au reste, la proposition de Lagrange est comprise comme cas particulier dans un théorème très général que l'on doit à Sturm, et que l'on trouvera énoncé dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XIII, page 1045, et démontré dans un Mémoire posthume de Sturm publié par M. Prouhet. (*Voir* Sturm, *Leçons de Mécanique*, t. II.) G. D.

par la caractéristique δ (1), on aura

$$\delta\dot{x} = z\,\delta\dot{\omega} - y\,\delta\dot{\varphi}, \qquad \delta\dot{y} = x\,\delta\dot{\varphi} - z\,\delta\dot{\psi}, \qquad \delta\dot{z} = y\,\delta\dot{\psi} - x\,\delta\dot{\omega}.$$

Or les trois équations de l'article 14, étant multipliées respectivement par $\delta\dot{\varphi}$, $\delta\dot{\omega}$, $\delta\dot{\psi}$ et ajoutées ensemble, en faisant passer sous le signe S les différentielles $\delta\dot{\varphi}$, $\delta\dot{\omega}$, $\delta\dot{\psi}$, qui sont les mêmes pour tous les corps, donnent, par la substitution des valeurs précédentes,

$$\mathrm{S}[\mathrm{m}(\dot{x}\,\delta\dot{x} + \dot{y}\,\delta\dot{y} + \dot{z}\,\delta\dot{z}) + \mathrm{X}\,\delta\dot{x} + \mathrm{Y}\,\delta\dot{y} + \mathrm{Z}\,\delta\dot{z}] = 0.$$

Mais l'équation de la force vive trouvée ci-dessus, étant différentiée relativement à δ (2), donne

$$\mathrm{S}[2\mathrm{m}(\dot{x}\,\delta\dot{x} + \dot{y}\,\delta\dot{y} + \dot{z}\,\delta\dot{z}) + \mathrm{X}\,\delta\dot{x} + \mathrm{Y}\,\delta\dot{y} + \mathrm{Z}\,\delta\dot{z}] = 0.$$

Donc on a, par la comparaison de ces deux équations,

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}(\dot{x}\,\delta\dot{x} + \dot{y}\,\delta\dot{y} + \dot{z}\,\delta\dot{z}) = 0$$

et, par conséquent,

$$\delta\,\mathrm{S}\,\mathrm{m}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 0,$$

ce qui fait voir que la force vive que le système acquiert par l'impulsion est toujours un maximum ou un minimum (3), par rapport aux

(1) Ces variations, représentées par la caractéristique δ, se rapportent aux changements qu'éprouvent les vitesses par suite de l'introduction de liaisons nouvelles, les forces motrices restant les mêmes. Ainsi, par exemple, dans le cas d'un corps solide, les variations δ peuvent résulter de l'introduction d'un axe fixe dans le système. (*J. Bertrand.*)

(2) Si l'on suppose que les variations désignées par δ soient finies, on aura, en différentiant l'équation des forces vives,

$$\mathrm{S}\left\{2\mathrm{m}(\dot{x}\,\delta\dot{x} + \dot{y}\,\delta\dot{y} + \dot{z}\,\delta\dot{z}) + \mathrm{m}[(\delta\dot{x})^2 + (\delta\dot{y})^2 + (\delta\dot{z})^2] + \mathrm{X}\,\delta\dot{x} + \mathrm{Y}\,\delta\dot{y} + \mathrm{Z}\,\delta\dot{z}\right\} = 0;$$

et si l'on continue le raisonnement en ayant égard aux nouveaux termes introduits par cette hypothèse, on trouvera

$$\delta\,\mathrm{S}\,\mathrm{m}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -\mathrm{S}\,\mathrm{m}[(\delta\dot{x})^2 + (\delta\dot{y})^2 + (\delta\dot{z})^2],$$

ce qui montre que l'accroissement des forces vives est négatif et égal à la somme des forces vives dues aux vitesses perdues par les différents points. (*J. Bertrand.*)

(3) Il résulte de la note précédente qu'elle est toujours un maximum. Cette remarque a été faite pour la première fois par M. Delaunay, qui la justifie d'une manière très différente. (*Journal de Liouville*, 1re série, t. V, p. 255.) (*J. Bertrand.*)

rotations relatives aux trois axes; et, comme ces trois rotations se composent en une rotation unique autour de l'axe spontané, il s'ensuit que la position de cet axe est toujours telle que la force vive de tout le système est la plus petite ou la plus grande, par rapport à ce même axe.

Euler avait démontré cette propriété de l'axe spontané de rotation pour les corps solides d'une figure quelconque; on voit par l'analyse précédente qu'elle est générale pour un système de corps unis entre eux d'une manière invariable ou non, lorsque ces corps reçoivent des impulsions quelconques.

38. Lorsque le système est un corps solide qui peut tourner librement autour d'un point et qui n'est animé par aucune force accélératrice, on peut tirer de la combinaison de l'équation des *forces vives* avec celle des *aires* une relation digne d'être remarquée par sa simplicité, et qui ne l'avait pas encore été, que je sache, entre les vitesses de rotation $\dot{\psi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\varphi}$ par rapport aux trois axes fixes des coordonnées x, y, z. Dans ce cas, on a simplement (art. 17)

$$\begin{aligned} dx &= \dot{x}\,dt = (z\dot{\omega} - y\dot{\varphi})\,dt, \\ dy &= \dot{y}\,dt = (x\dot{\varphi} - z\dot{\psi})\,dt, \\ dz &= \dot{z}\,dt = (y\dot{\psi} - x\dot{\omega})\,dt. \end{aligned}$$

Donc, si l'on ajoute ensemble les trois dernières équations de l'article 9, après les avoir multipliées par $\dot{\varphi}$, $\dot{\omega}$, $\dot{\psi}$, qu'on fasse passer ces quantités sous le signe S et qu'on substitue $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ à la place de leurs valeurs, on aura

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) = \mathrm{A}\dot{\psi} + \mathrm{B}\dot{\omega} + \mathrm{C}\dot{\varphi};$$

mais l'équation de l'article 34 donne, lorsque $\mathrm{H} = 0$,

$$\frac{1}{2}\mathrm{S}\,\mathrm{m}\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right) = \mathrm{H}.$$

Donc on aura

$$\mathrm{A}\dot{\psi} + \mathrm{B}\dot{\omega} + \mathrm{C}\dot{\varphi} = 2\mathrm{H},$$

A, B, C étant les moments des forces primitives d'impulsion et H étant une constante arbitraire, qui doit être nécessairement positive.

Si, dans cette équation, on substitue pour A, B, C les expressions de l'article 11,

$$\gamma C', \quad \gamma' C', \quad \gamma'' C',$$

ou

$$C' \cos l, \quad C' \cos m, \quad C' \cos n,$$

et pour $\dot\psi$, $\dot\omega$, $\dot\varphi$ celles de l'article 17,

$$\dot\theta \cos\lambda, \quad \dot\theta \cos\mu, \quad \dot\theta \cos\nu,$$

on aura

$$\dot\theta(\cos l \cos\lambda + \cos m \cos\mu + \cos n \cos\nu) = \frac{2H}{C'}.$$

Dans cette formule, l, m, n sont les angles que l'axe perpendiculaire au *plan invariable* fait avec les axes fixes des x, y, z, et λ, μ, ν sont les angles que l'axe instantané de la rotation composée, dont $\dot\theta$ est la vitesse, fait avec les mêmes axes; donc, si l'on nomme σ l'angle que l'axe instantané de rotation fait avec l'axe perpendiculaire au plan invariable, on aura, par une formule connue,

$$\cos\sigma = \cos l \cos\lambda + \cos m \cos\mu + \cos n \cos\nu$$

et, par conséquent,

$$\dot\theta \cos\sigma = \frac{2H}{C'},$$

où la quantité $\frac{2H}{C'}$ est une constante qui dépend de l'état initial; ce qui donne un rapport, indépendant de la figure du corps, entre la vitesse réelle de rotation à chaque instant et la position de l'axe de rotation relativement au plan invariable.

Au reste, si l'on prend le plan des xy de manière qu'il passe par le centre du corps et par la droite suivant laquelle se fait l'impulsion, les constantes A et B deviendront nulles (art. 16), et l'équation générale trouvée ci-dessus se réduira à

$$C\dot\varphi = 2H,$$

laquelle fait voir que la vitesse de rotation par rapport à l'axe des z, c'est-à-dire parallèlement au plan de l'impulsion, demeure toujours la même.

§ VI. — *Propriétés relatives à la moindre action.*

39. Nous allons maintenant considérer le quatrième principe, celui de la *moindre action*.

En nommant u la vitesse de chaque corps m du système, on a

$$u^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2},$$

et l'équation des forces vives (art. 34) devient

$$\mathrm{S}\,m\left(\frac{u^2}{2} + \Pi\right) = H,$$

laquelle, étant différentiée par rapport à la caractéristique δ, donne

$$\mathrm{S}\,m(u\,\delta u + \delta\Pi) = 0.$$

Or, Π étant une fonction de p, q, r, ..., on a

$$\delta\Pi = P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots.$$

Donc

$$\mathrm{S}\,m(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots) = -\mathrm{S}\,m\,u\,\delta u.$$

Et cette équation aura toujours lieu, pourvu que

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots$$

soit une quantité intégrable et que la liaison des corps soit indépendante du temps; elle cesserait d'être vraie si l'une de ces conditions n'avait pas lieu.

Qu'on substitue maintenant l'expression précédente dans la formule générale de la Dynamique (Sect. II, art. 5), elle deviendra

$$\mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z - u\,\delta u\right) = 0.$$

Or

$$\begin{aligned} d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z &= d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) \\ &\quad - dx\,d\delta x - dy\,d\delta y - dz\,d\delta z. \end{aligned}$$

Mais, parce que les caractéristiques d et δ représentent des différences ou variations tout à fait indépendantes les unes des autres, les quantités $d\delta x$, $d\delta y$, $d\delta z$ doivent être la même chose que δdx, δdy, δdz. D'ailleurs, il est visible que

$$dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz = \tfrac{1}{2}\delta(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Donc on aura

$$d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z = d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) - \tfrac{1}{2}\delta(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Soit s l'espace ou l'arc décrit par le corps m dans le temps t; on aura

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \qquad dt = \frac{ds}{u}.$$

Donc

$$d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z = d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) - ds\,\delta ds;$$

et, de là,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z = \frac{d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt^2} - u^2\frac{\delta ds}{ds}.$$

Ainsi la formule générale dont il s'agit deviendra

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\left[\frac{d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt^2} - u^2\frac{\delta ds}{ds} - u\,\delta u\right] = 0,$$

ou, en multipliant tous les termes par l'élément constant $dt = \frac{ds}{u}$ et remarquant que $u\delta ds + ds\,\delta u = \delta(u\,ds)$,

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\left[\frac{d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)}{dt} - \delta(u\,ds)\right] = 0.$$

Comme le signe intégral S n'a aucun rapport aux signes différentiels d et δ, on peut faire sortir ceux-ci hors de celui-là; et l'équation

précédente prendra cette forme

$$d\,\mathrm{S}\,\mathrm{m}\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) - \delta\,\mathrm{S}\,\mathrm{m}\,u\,ds = 0.$$

Intégrons par rapport au signe différentiel d, et dénotons cette intégration par le signe intégral ordinaire $\int$; nous aurons

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right) - \int\delta\,\mathrm{S}\,\mathrm{m}\,u\,ds = \text{const.}$$

Or le signe $\int$, dans l'expression

$$\int\delta\,\mathrm{S}\,\mathrm{m}\,u\,ds,$$

ne pouvant regarder que les variables u et s et n'ayant aucune relation avec les signes S et δ, il est clair que cette expression est la même chose que celle-ci

$$\delta\,\mathrm{S}\,\mathrm{m}\int u\,ds;$$

et, si l'on suppose que, dans les points où commencent les intégrales $\int u\,ds$, on ait

$$\delta x = 0, \qquad \delta y = 0, \qquad \delta z = 0,$$

il faudra que la constante arbitraire soit nulle, parce que le premier membre de l'équation devient nul dans ces points. Ainsi on aura, dans ce cas,

$$\delta\,\mathrm{S}\,\mathrm{m}\int u\,ds = \mathrm{S}\,\mathrm{m}\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right).$$

Donc, si l'on suppose de plus que les variations δx, δy, δz soient aussi nulles pour les points où les intégrales $\int u\,ds$ finissent, on aura simplement

$$\delta\,\mathrm{S}\,\mathrm{m}\int u\,ds = 0,$$

c'est-à-dire que la variation de la quantité $\mathrm{S}\,\mathrm{m}\int u\,ds$ sera nulle; par conséquent, cette quantité sera un maximum ou un minimum.

De là résulte donc ce théorème général :

Dans le mouvement d'un système quelconque de corps animés par des forces mutuelles d'attraction, ou tendantes à des centres fixes, et proportionnelles à des fonctions quelconques des distances, les courbes décrites par les différents corps, et leurs vitesses, sont nécessairement telles que la somme des produits de chaque masse par l'intégrale de la vitesse multipliée par l'élément de la courbe est un maximum ou un minimum, pourvu que l'on regarde les premiers et les derniers points de chaque courbe comme donnés, en sorte que les variations des coordonnées répondantes à ces points soient nulles.

C'est le théorème dont nous avons parlé à la fin de la première Section, sous le nom de *Principe de la moindre action* [1].

40. Mais ce théorème ne contient pas seulement une propriété très remarquable du mouvement des corps, il peut encore servir à déterminer ce mouvement. En effet, puisque la formule $\mathsf{S}\,\mathrm{m}\int u\,ds$ doit être un maximum ou un minimum, il n'y a qu'à chercher, par la méthode des *variations*, les conditions qui peuvent la rendre telle; et, en employant l'équation générale de la conservation des forces vives, on trouvera toujours toutes les équations nécessaires pour déterminer le mouvement de chaque corps. Car, pour le maximum ou minimum, il faut que la variation soit nulle et que, par conséquent, on ait

$$\delta\,\mathsf{S}\,\mathrm{m}\int u\,ds = 0;$$

et de là, en pratiquant dans un ordre rétrograde les opérations expo-

(1) L'intégrale $\mathsf{S}\,\mathrm{m}\int u\,ds$ est un maximum ou un minimum, si on la compare aux intégrales analogues relatives à tout autre mouvement du système qui serait produit par les mêmes forces et dans lequel, malgré l'introduction de liaisons nouvelles laissant subsister le principe des forces vives, les positions initiales et finales resteraient les mêmes. Peut-être cet énoncé, qui résulte évidemment de la démonstration, n'est-il pas rendu assez explicite dans le texte. (*J. Bertrand.*)

On pourra consulter, au sujet de ce principe, un article d'Olinde Rodrigues inséré dans la *Correspondance de l'École Polytechnique*, t. III, p. 159, et les *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi. G. D.

sées ci-dessus, on trouvera la même formule générale d'où l'on était parti.

Pour rendre cette méthode plus sensible, nous allons l'exposer ici en peu de mots. La condition du maximum ou minimum donne, en général,

$$\delta\,\mathsf{S}\,\mathrm{m}\int u\,ds = 0,$$

et, faisant passer le signe différentiel δ sous les signes S et $\int$ (ce qui est évidemment permis par la nature de ces différents signes), on aura l'équation

$$\mathsf{S}\,\mathrm{m}\int \delta(u\,ds) = 0,$$

ou bien, en exécutant la différentiation par δ,

$$\mathsf{S}\,\mathrm{m}\int (ds\,\delta u + u\,\delta ds) = 0:$$

Je considère d'abord la partie

$$\mathsf{S}\,\mathrm{m}\int ds\,\delta u;$$

en mettant pour ds sa valeur $u\,dt$, elle devient

$$\mathsf{S}\,\mathrm{m}\int u\,\delta u\,dt,$$

ou, changeant l'ordre des signes S et $\int$, qui sont absolument indépendants l'un de l'autre,

$$\int dt\,\mathsf{S}\,\mathrm{m}\,u\,\delta u.$$

Or l'équation générale du principe des forces vives donne (art. 34)

$$\mathsf{S}\,\mathrm{m}\,u^2 = 2\mathrm{H} - 2\,\mathsf{S}\,\mathrm{m}\Pi,$$

$d\Pi$ étant égal à

$$\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots;$$

donc, différentiant suivant δ, on aura

$$\mathsf{S}\,\mathrm{m}\,u\,\delta u = -\,\mathsf{S}\,\mathrm{m}\,\delta\Pi = -\,\mathsf{S}\,\mathrm{m}(\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots).$$

parce que, Π étant supposée une fonction algébrique de $p, q, r, \ldots$, la différentielle $\delta\Pi$ est la même que $d\Pi$, en changeant seulement d en δ. Ainsi la quantité

$$\mathbf{S}\,\mathrm{m}\int ds\,\delta u$$

se réduira à cette forme

$$-\int dt\,\mathbf{S}\,\mathrm{m}(\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots).$$

Je considère ensuite l'autre partie

$$\mathbf{S}\,\mathrm{m}\int u\,\delta ds,$$

et j'y substitue, à la place de ds, sa valeur exprimée par des coordonnées rectangles, ou par d'autres variables quelconques. En employant les coordonnées rectangles x, y, z, on a

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2};$$

donc, différentiant suivant δ,

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}\delta dx + \frac{dy}{ds}\delta dy + \frac{dz}{ds}\delta dz,$$

ou bien, en transposant les signes d, δ et écrivant $d\delta$ au lieu de δd, ce qui est toujours permis à cause de l'indépendance de ces signes,

$$\delta ds = \frac{dx}{ds}d\delta x + \frac{dy}{ds}d\delta y + \frac{dz}{ds}d\delta z;$$

on aura ainsi, en substituant cette valeur et mettant dt à la place de $\frac{ds}{u}$,

$$\int u\,\delta ds = \int\left(\frac{dx}{dt}d\delta x + \frac{dy}{dt}d\delta y + \frac{dz}{dt}d\delta z\right).$$

Comme il se trouve ici, sous le signe intégral $\int$, des différentielles des variations δx, δy, δz, il faut les faire disparaître par l'opération connue des intégrations par parties, suivant les principes de la méthode des variations. On transformera donc la quantité $\int \frac{dx}{dt}d\delta x$ en celle-ci, qui lui est équivalente,

$$\frac{dx}{dt}\delta x - \int \delta x\, d\frac{dx}{dt};$$

et, supposant que les deux termes de la courbe soient donnés, en sorte que les coordonnées qui répondent au commencement et à la fin de l'intégrale ne varient point, on aura simplement

$$\int \frac{dx}{dt}d\delta x = -\int \delta x\, d\frac{dx}{dt}.$$

On trouvera de même

$$\int \frac{dy}{dt}d\delta y = -\int \delta y\, d\frac{dy}{dt}$$

et, pareillement,

$$\int \frac{dz}{dt}d\delta z = -\int \delta z\, d\frac{dz}{dt};$$

de sorte qu'on aura cette transformée

$$\int u\,\delta ds = -\int\left(\delta x\, d\frac{dx}{dt} + \delta y\, d\frac{dy}{dt} + \delta z\, d\frac{dz}{dt}\right).$$

Donc la quantité

$$\mathbf{S}\,\mathrm{m}\int u\,\delta ds$$

deviendra, en transposant les signes $\mathbf{S}$ et $\int$ et supposant dt constant,

$$-\int dt\,\mathbf{S}\,\mathrm{m}\left(\delta x\, d\frac{d^2x}{dt^2} + \delta y\, d\frac{d^2y}{dt^2} + \delta z\, d\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

L'équation du maximum ou minimum sera donc

$$\int dt\,\mathbf{S}\,\mathrm{m}\left(\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots + \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = 0,$$

laquelle devant avoir lieu, en général, pour toutes les variations possibles, il faudra que la quantité sous le signe $\int$ soit nulle à chaque instant; on aura ainsi l'équation indéfinie

$$\mathbf{S}\,\mathrm{m}\left(\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots + \frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) = 0,$$

équation qui est la même chose que la formule générale de la Dynamique (Sect. II, art. 5), et qui donnera par conséquent, comme celle-ci, toutes les équations nécessaires pour la solution du problème.

41. Au lieu des coordonnées x, y, z, on peut employer d'autres indéterminées quelconques, et tout se réduit à exprimer l'élément de l'arc ds en fonction de ces indéterminées. Qu'on prenne, par exemple, le rayon ou la distance rectiligne à l'origine des coordonnées, qu'on nommera ρ, avec deux angles, dont l'un ψ soit l'inclinaison de ce rayon sur le plan des xy et l'autre φ soit l'angle de la projection du même rayon sur ce plan avec l'axe des x; on aura

$$z = \rho \sin\psi, \qquad y = \rho\cos\psi\sin\varphi, \qquad x = \rho\cos\psi\cos\varphi,$$

et, de là, on trouvera

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2(d\psi^2 + \cos^2\psi\, d\varphi^2),$$

expression qu'on pourrait aussi trouver directement par la Géométrie. Différentiant donc par δ et changeant δd en $d\delta$, on aura

$$\begin{aligned} ds\,\delta\,ds &= d\rho\, d\,\delta\rho + \rho(d\psi^2 + \cos^2\psi\, d\varphi^2)\,\delta\rho \\ &\quad + \rho^2(d\psi\, d\,\delta\psi - \sin\psi\cos\psi\, d\varphi^2\,\delta\psi + \cos^2\psi\, d\varphi\, d\,\delta\varphi); \end{aligned}$$

d'où, en divisant par $dt = \dfrac{ds}{u}$ et en intégrant, on aura

$$\begin{aligned} \int u\,\delta\,ds &= \int dt\left[\frac{d\rho}{dt}\frac{d\,\delta\rho}{dt} + \rho\left(\frac{d\psi^2}{dt^2} + \cos^2\psi\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right)\delta\rho\right] \\ &\quad + \int dt\left(\rho^2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\,\delta\psi}{dt} - \rho^2\sin\psi\cos\psi\frac{d\varphi^2}{dt^2}\,\delta\psi + \rho^2\cos^2\psi\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\,\delta\varphi}{dt}\right). \end{aligned}$$

On fera disparaître de dessous le signe $\int$ les doubles signes $d\delta$ par des intégrations par parties et l'on rejettera d'abord les termes qui contiendraient des variations hors du signe $\int$, parce que ces variations, devant alors se rapporter aux extrémités de l'intégrale, deviennent nulles par la supposition que les premiers et derniers points des courbes décrites par les corps soient donnés et invariables. On aura ainsi cette transformée

$$\begin{aligned} \int u\,\delta\,ds = -\int du\,\delta s = -\int dt \Big\{ & \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\frac{d\psi^2}{dt^2} - \rho\cos^2\psi\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right)\delta\rho \\ & + \left[\rho^2\sin\psi\cos\psi\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{d\left(\rho^2\frac{d\psi}{dt}\right)}{dt}\right]\delta\psi + \frac{d\left(\cos^2\psi\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}\delta\varphi\Big\}; \end{aligned}$$

par conséquent, l'équation du maximum ou minimum sera

$$\begin{aligned} \int dt\, \mathrm{S}\,m \Big\{ & P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots + \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\frac{d\psi^2}{dt^2} - \rho\cos^2\psi\frac{d\varphi^2}{dt^2}\right)\delta\rho \\ & + \left[\rho^2\sin\psi\cos\psi\frac{d\varphi^2}{dt^2} + \frac{d\left(\rho^2\frac{d\psi}{dt}\right)}{dt}\right]\delta\psi + \frac{d\left(\cos^2\psi\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}\delta\varphi\Big\} = 0. \end{aligned}$$

Égalant à zéro la quantité qui est sous le signe $\int$, on aura une équation indéfinie, analogue à celle de l'article précédent, mais qui, au lieu de variations δx, δy, δz, contiendra les $\delta\rho$, $\delta\varphi$, $\delta\psi$; et l'on en tirera les équations nécessaires pour la solution du problème, en réduisant d'abord toutes les variations au plus petit nombre possible et faisant ensuite des équations séparées des termes affectés de chacune des variations restantes.

En employant d'autres indéterminées, on aura des formules différentes, et l'on sera assuré d'avoir toujours, dans chaque cas, les formules les plus simples que la nature des indéterminées puisse comporter. *Voir* le second Volume des *Mémoires de l'Académie de Turin*, où l'on a employé cette méthode pour résoudre différents problèmes de Mécanique [1].

42. Au reste, puisque $ds = u\,dt$, la formule

$$\mathrm{S}\,m \int u\,ds,$$

qui est un maximum ou un minimum, peut aussi se mettre sous la forme $\mathrm{S}\,m\int u^2\,dt$, ou

$$\int dt\,\mathrm{S}\,m u^2,$$

dans laquelle $\mathrm{S}\,mu^2$ exprime la force vive de tout le système dans un instant quelconque. Ainsi le principe dont il s'agit se réduit proprement à ce que la somme des forces vives instantanées de tous les corps,

(1) *Voir* aussi une Note remarquable d'Olinde Rodrigues, *Correspondance sur l'École Polytechnique*, tome III, page 159. (*J. Bertrand.*)

depuis le moment où ils partent des points donnés jusqu'à celui où ils arrivent à d'autres points donnés, soit un maximum ou un minimum. On pourrait donc l'appeler, avec plus de fondement, le *principe de la plus grande* ou *plus petite force vive*; et cette manière de l'envisager aurait l'avantage d'être générale, tant pour le mouvement que pour l'équilibre, puisque nous avons vu, dans la troisième Section de la Ire Partie (art. 22), que la force vive d'un système est toujours la plus grande ou la plus petite dans la situation d'équilibre.

SECTION QUATRIÈME.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES POUR LA SOLUTION DE TOUS LES PROBLÈMES DE DYNAMIQUE.

1. La formule à laquelle nous avons réduit, dans la deuxième Section, toute la théorie de la Dynamique n'a besoin que d'être développée pour donner toutes les équations nécessaires à la solution de quelque problème de cette science que ce soit; mais ce développement, qui n'est qu'une affaire de pur calcul, peut encore être simplifié à plusieurs égards par les moyens que nous allons employer dans cette Section.

Comme tout consiste à réduire les différentes variables qui entrent dans la formule dont il s'agit au plus petit nombre possible, par le moyen des équations de condition données par la nature de chaque problème, une des principales opérations est de substituer à la place de ces variables des fonctions d'autres variables. Cet objet est toujours facile à remplir par les méthodes ordinaires; mais il y a une manière particulière d'y satisfaire relativement à la formule proposée, qui a l'avantage de conduire toujours directement à la transformée la plus simple.

2. Cette formule est composée de deux parties différentes qu'il faut considérer séparément.

La première contient les termes

$$\mathrm{S}\,m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right),$$

qui proviennent uniquement des forces résultantes de l'inertie des corps.

La seconde est composée des termes

$$\mathrm{S}\,m\,(\mathrm{P}\,\delta p+\mathrm{Q}\,\delta q+\mathrm{R}\,\delta r+\ldots),$$

dus aux forces accélératrices P, Q, R, ... qu'on suppose agir effectivement sur chaque corps suivant les lignes $p, q, r, \ldots$, et qui tendent à diminuer ces lignes. La somme de ces deux quantités, étant égalée à zéro, constitue la formule générale de la Dynamique (Sect. II, art. 5).

3. Considérons d'abord la quantité

$$d^2x\,\delta x+d^2y\,\delta y+d^2z\,\delta z;$$

il est clair que, si l'on y ajoute celle-ci

$$dx\,d\delta x+dy\,d\delta y+dz\,d\delta z,$$

la somme sera intégrable et aura pour intégrale

$$dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z.$$

D'où il suit que l'on a

$$\begin{aligned}d^2x\,\delta x+d^2y\,\delta y+d^2z\,\delta z&=d(dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z)\\&\quad-dx\,d\delta x-dy\,d\delta y-dz\,d\delta z.\end{aligned}$$

Or, le double signe $d\delta$ étant équivalent à δd par les principes connus, la quantité $dx\,d\delta x+dy\,d\delta y+dz\,d\delta z$ peut se réduire à la forme

$$dx\,\delta dx+dy\,\delta dy+dz\,\delta dz,$$

c'est-à-dire à

$$\tfrac{1}{2}\delta(dx^2+dy^2+dz^2).$$

Ainsi l'on aura cette réduction

$$d^2x\,\delta x+d^2y\,\delta y+d^2z\,\delta z=d(dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z)-\tfrac{1}{2}\delta(dx^2+dy^2+dz^2),$$

par laquelle on voit que, pour calculer la quantité proposée

$$d^2x\,\delta x+d^2y\,\delta y+d^2z\,\delta z,$$

il suffit de calculer ces deux-ci, qui ne contiennent que des différences premières,

$$dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z,\quad dx^2+dy^2+dz^2,$$

et de différentier ensuite l'une par rapport à d et l'autre par rapport à δ.

4. Supposons donc qu'il s'agisse de substituer à la place des variables x, y, z des fonctions données d'autres variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots$; différentiant ces fonctions, on aura des expressions de la forme

$$\begin{aligned}dx&=\mathrm{A}\ d\xi+\mathrm{B}\ d\psi+\mathrm{C}\ d\varphi+\ldots,\\dy&=\mathrm{A}'\,d\xi+\mathrm{B}'\,d\psi+\mathrm{C}'\,d\varphi+\ldots,\\dz&=\mathrm{A}''\,d\xi+\mathrm{B}''\,d\psi+\mathrm{C}''\,d\varphi+\ldots,\end{aligned}$$

dans lesquelles A, A', A'', B, B', ... seront des fonctions connues des mêmes variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots$; et les valeurs de $\delta x, \delta y, \delta z$ seront exprimées aussi de la même manière, en changeant seulement d en δ.

Faisant ces substitutions dans la quantité $dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z$, elle deviendra de cette forme

$$\mathrm{F}\,d\xi\,\delta\xi+\mathrm{G}(d\xi\,\delta\psi+d\psi\,\delta\xi)+\mathrm{H}\,d\psi\,\delta\psi+\mathrm{I}(d\xi\,\delta\varphi+d\varphi\,\delta\xi)+\ldots,$$

où F, G, H, I, ... seront des fonctions finies de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$.

Donc, changeant δ en d, on aura aussi la valeur de

$$dx^2+dy^2+dz^2,$$

laquelle sera

$$\mathrm{F}\,d\xi^2+2\mathrm{G}\,d\xi\,d\psi+\mathrm{H}\,d\psi^2+2\mathrm{I}\,d\xi\,d\varphi+\ldots.$$

Qu'on différentie par d la première de ces deux quantités, on aura la différentielle

$$\begin{aligned}&d(\mathrm{F}\,d\xi)\,\delta\xi+\mathrm{F}\,d\xi\,d\delta\xi\\&+d(\mathrm{G}\,d\xi)\,\delta\psi+d(\mathrm{G}\,d\psi)\,\delta\xi+\mathrm{G}\,d\xi\,d\delta\psi+\mathrm{G}\,d\psi\,d\delta\xi\\&+d(\mathrm{H}\,d\psi)\,\delta\psi+\mathrm{H}\,d\psi\,d\delta\psi\quad+\ldots;\end{aligned}$$

différentiant ensuite la seconde par δ, on aura celle-ci :

$$\begin{aligned}&\delta F\, d\xi^2 + 2F\, d\xi\, \delta d\xi\\ &\quad + 2\,\delta G\, d\xi\, d\psi + 2G\, d\psi\, \delta d\xi + 2G\, d\xi\, \delta d\psi\\ &\quad + \delta H\, d\psi^2 + 2H\, d\psi\, \delta d\psi + \ldots.\end{aligned}$$

Si donc l'on retranche la moitié de cette dernière différentielle de la première, et qu'on observe que $d\delta$ et δd sont la même chose, on aura

$$\begin{aligned}&d(F\, d\xi)\,\delta\xi - \tfrac{1}{2}\delta F\, d\xi^2\\ &\quad + d(G\, d\xi)\,\delta\psi + d(G\, d\psi)\,\delta\xi - \delta G\, d\xi\, d\psi\\ &\quad + d(H\, d\psi)\,\delta\psi - \tfrac{1}{2}\delta H\, d\psi^2 + \ldots,\end{aligned}$$

pour la valeur transformée de la quantité

$$d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z.$$

Or il est visible que cette valeur peut se déduire immédiatement de la dernière différentielle, en divisant tous les termes par 2, en changeant les signes de ceux qui ne contiennent point la double caractéristique δd, et en effaçant dans les autres le d après le δ, pour l'appliquer aux quantités qui multiplient les doubles différences affectées de δd. Ainsi le terme $\delta F\, d\xi^2$ donne $-\frac{1}{2}\delta F\, d\xi^2$, le terme $2F\, d\xi\, \delta d\xi$ donnera $d(F\, d\xi)\,\delta\xi$, le terme $2\,\delta G\, d\xi\, d\psi$ donnera $-\delta G\, d\xi\, d\psi$, le terme $2G\, d\psi\, \delta d\xi$ donnera $d(G\, d\psi)\,\delta\xi$, et ainsi des autres.

5. D'où il s'ensuit que, si l'on désigne par Φ la fonction de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ et de $d\xi, d\psi, d\varphi, \ldots$ dans laquelle se transforme la quantité

$$\tfrac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

par la substitution des valeurs de x, y, z en $\xi, \psi, \varphi, \ldots$, on aura, en général, cette transformée

$$\begin{aligned}d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z = &+\left(-\frac{\delta\Phi}{\delta\xi} + d\frac{\delta\Phi}{\delta d\xi}\right)\delta\xi\\ &+\left(-\frac{\delta\Phi}{\delta\psi} + d\frac{\delta\Phi}{\delta d\psi}\right)\delta\psi + \left(-\frac{\delta\Phi}{\delta\varphi} + d\frac{\delta\Phi}{\delta d\varphi}\right)\delta\varphi + \ldots,\end{aligned}$$

en dénotant, suivant l'usage, par $\frac{\delta\Phi}{\delta\xi}$ le coefficient de $\delta\xi$ dans la différence $\delta\Phi$, par $\frac{\delta\Phi}{\delta d\xi}$ le coefficient de $\delta d\xi$ dans la même différence, et ainsi des autres.

6. Ce qu'on vient de trouver d'une manière particulière aurait pu l'être plus simplement et plus généralement par les principes de la méthode des variations.

Soit, en effet, Φ une fonction quelconque de $x, y, z, \ldots, dx, dy, dz, \ldots, d^2x, d^2y, d^2z, \ldots$, laquelle devienne une fonction de $\xi, \psi, \varphi, \ldots, d\xi, d\psi, d\varphi, \ldots, d^2\xi, d^2\psi, d^2\varphi, \ldots$, par la substitution des valeurs de $x, y, z, \ldots$ exprimées en $\xi, \psi, \varphi, \ldots$; en différentiant par rapport à δ, on aura cette équation identique

$$\begin{aligned}\delta\Phi = &+\frac{\delta\Phi}{\delta x}\delta x + \frac{\delta\Phi}{\delta dx}\delta dx + \frac{\delta\Phi}{\delta d^2x}\delta d^2x + \ldots\\ &+\frac{\delta\Phi}{\delta y}\delta y + \frac{\delta\Phi}{\delta dy}\delta dy + \frac{\delta\Phi}{\delta d^2y}\delta d^2y + \ldots\\ &+\frac{\delta\Phi}{\delta z}\delta z + \frac{\delta\Phi}{\delta dz}\delta dz + \frac{\delta\Phi}{\delta d^2z}\delta d^2z + \ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ = &+\frac{\delta\Phi}{\delta\xi}\delta\xi + \frac{\delta\Phi}{\delta\psi}\delta\psi + \frac{\delta\Phi}{\delta\varphi}\delta\varphi + \ldots\\ &+\frac{\delta\Phi}{\delta d\xi}\delta d\xi + \frac{\delta\Phi}{\delta d\psi}\delta d\psi + \frac{\delta\Phi}{\delta d\varphi}\delta d\varphi + \ldots\\ &+\frac{\delta\Phi}{\delta d^2\xi}\delta d^2\xi + \frac{\delta\Phi}{\delta d^2\psi}\delta d^2\psi + \frac{\delta\Phi}{\delta d^2\varphi}\delta d^2\varphi + \ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Qu'on y change les doubles signes $\delta d, \delta d^2, \ldots$ en leurs équivalents $d\delta, d^2\delta, \ldots$; qu'ensuite on intègre par rapport à d et qu'on fasse disparaître, par des intégrations par parties, tous les doubles signes $d\delta, d^2\delta, \ldots$ sous le signe intégral $\int$ qui se rapporte au signe différentiel d; on aura une équation de cette forme

$$\begin{aligned}&\int(A\,\delta x + B\,\delta y + C\,\delta z + \ldots) + Z\\ &= \int(A'\,\delta\xi + B'\,\delta\psi + C'\,\delta\varphi + \ldots) + Z',\end{aligned}$$

dans laquelle

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} - d\frac{\partial\Phi}{\partial dx} + d^2\frac{\partial\Phi}{\partial d^2x} - \ldots,\\
\mathrm{B} &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} - d\frac{\partial\Phi}{\partial dy} + d^2\frac{\partial\Phi}{\partial d^2y} - \ldots,\\
\mathrm{C} &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} - d\frac{\partial\Phi}{\partial dz} + d^2\frac{\partial\Phi}{\partial d^2z} - \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}' &= \frac{\partial\Phi}{\partial \xi} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d\xi} + d^2\frac{\partial\Phi}{\partial d^2\xi} - \ldots,\\
\mathrm{B}' &= \frac{\partial\Phi}{\partial \psi} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d\psi} + d^2\frac{\partial\Phi}{\partial d^2\psi} - \ldots,\\
\mathrm{C}' &= \frac{\partial\Phi}{\partial \varphi} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d\varphi} + d^2\frac{\partial\Phi}{\partial d^2\varphi} - \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z} = &+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial dx} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d^2x} + \ldots\right)\partial x + \frac{\partial\Phi}{\partial d^2x}d\partial x + \ldots\\
&+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial dy} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d^2y} + \ldots\right)\partial y + \frac{\partial\Phi}{\partial d^2y}d\partial y + \ldots\\
&+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial dz} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d^2z} + \ldots\right)\partial z + \frac{\partial\Phi}{\partial d^2z}d\partial z + \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Z}' = &+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial d\xi} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d^2\xi} + \ldots\right)\partial \xi + \frac{\partial\Phi}{\partial d^2\xi}d\partial \xi + \ldots\\
&+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial d\psi} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d^2\psi} + \ldots\right)\partial \psi + \frac{\partial\Phi}{\partial d^2\psi}d\partial \psi + \ldots\\
&+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial d\varphi} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d^2\varphi} + \ldots\right)\partial \varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial d^2\varphi}d\partial \varphi + \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc, redifférentiant et transposant, on aura l'équation

$$\mathrm{A}\,\partial x + \mathrm{B}\,\partial y + \mathrm{C}\,\partial z + \ldots - \mathrm{A}'\,\partial\xi - \mathrm{B}'\,\partial\psi - \mathrm{C}'\,\partial\varphi - \ldots = d\mathrm{Z}' - d\mathrm{Z},$$

laquelle doit être identique et avoir lieu quelles que soient les variations ou différences marquées par la lettre δ.

Ainsi, puisque le second membre de cette équation est une différentielle exacte par rapport à la caractéristique d, il faudra que le pre-

mier membre en soit une aussi par rapport à la même caractéristique, et indépendamment de la caractéristique δ; or c'est ce qui ne se peut, parce que les termes de ce premier membre contiennent simplement les variations δx, δy, δz, ..., $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$, ..., et nullement les différentielles de ces variations.

D'où il suit que, pour que l'équation puisse subsister, il faudra nécessairement que les deux membres soient nuls chacun en particulier; ce qui donnera ces deux équations identiques

$$\mathrm{A}\,\partial x + \mathrm{B}\,\partial y + \mathrm{C}\,\partial z + \ldots = \mathrm{A}'\,\partial\xi + \mathrm{B}'\,\partial\psi + \mathrm{C}'\,\partial\varphi + \ldots,$$
$$d\mathrm{Z} = d\mathrm{Z}',$$

lesquelles peuvent être utiles dans différentes occasions.

Soit, par exemple,

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

on aura

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial dx} = dx, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial d^2x} = 0, \qquad \ldots,$$

et ainsi des autres quantités semblables; donc

$$\mathrm{A} = -d^2x, \qquad \mathrm{B} = -d^2y, \qquad \mathrm{C} = -d^2z;$$

ensuite, comme Φ ne contient que des différences du premier ordre, on aura simplement

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}' &= \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d\xi},\\
\mathrm{B}' &= \frac{\partial\Phi}{\partial\psi} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d\psi},\\
\mathrm{C}' &= \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d\varphi},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc on aura l'équation identique

$$\begin{aligned}
-d^2x\,\partial x - d^2y\,\partial y - d^2z\,\partial z = &+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\xi} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d\xi}\right)\partial\xi\\
&+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\psi} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d\psi}\right)\partial\psi + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} - d\frac{\partial\Phi}{\partial d\varphi}\right)\partial\varphi + \ldots,
\end{aligned}$$

qui s'accorde avec celle de l'article 5.

7. Il résulte de là que, pour avoir la valeur de la quantité

$$\mathsf{S}\,m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$

en fonction de ξ, ψ, φ, …, il suffira de chercher la valeur de la quantité

$$\frac{1}{2}\mathsf{S}\,m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)$$

en fonction de ξ, ψ, φ, … et de leurs différentielles ; car, nommant T cette fonction, on aura sur-le-champ la transformée

$$\left(d\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi}\right)\delta\xi + \left(d\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi}\right)\delta\psi + \left(d\frac{\delta T}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta \varphi}\right)\delta\varphi + \ldots.$$

Et cette transformation aura lieu également quand même, parmi les nouvelles variables, il se trouverait le temps t, pourvu qu'on le regarde comme constant, c'est-à-dire qu'on fasse $\delta t = 0$.

De plus, il est facile de voir qu'une pareille transformation aura lieu aussi dans le cas où les variations $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$, … ne seraient pas des différentielles exactes, pourvu qu'elles représentent des quantités indéterminées et que la variation δT soit de la forme

$$\delta T = \frac{\delta T}{\delta \xi}\delta\xi + \frac{\delta T}{d\delta\xi}d\delta\xi + \frac{\delta T}{\delta\psi}\delta\psi + \frac{\delta T}{d\delta\psi}d\delta\psi + \ldots,$$

quelles que soient d'ailleurs les coefficients $\frac{\delta T}{\delta \xi}$, $\frac{\delta T}{d\delta\xi}$, $\frac{\delta T}{\delta\psi}$, ….

8. Au reste, il est bon de remarquer que, si l'expression de T renferme un terme dA, qui soit la différentielle complète d'une fonction A dans laquelle une des variables, comme ξ, n'entre que sous la forme finie, ce terme ne donnera rien dans la transformée précédente, relativement à cette variable. Car, faisant

$$T = dA = \frac{\partial A}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial A}{\partial \psi}d\psi + \ldots,$$

on a

$$\frac{\delta T}{\delta d\xi} = \frac{\partial A}{\partial \xi},$$

$$\frac{\delta T}{\delta \xi} = \frac{\delta\frac{\partial A}{\partial \xi}}{\delta\xi}d\xi + \frac{\delta\frac{\partial A}{\partial \psi}}{\delta\xi}d\psi + \ldots = \frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2}d\xi + \frac{\partial^2 A}{\partial\xi\,\partial\psi}d\psi + \ldots = d\frac{\partial A}{\partial \xi}.$$

Donc $d\frac{\delta T}{\delta d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi}$, coefficient de $\delta\xi$, deviendra

$$d\frac{\partial A}{\partial \xi} - d\frac{\partial A}{\partial \xi} = 0.$$

Il s'ensuit de là que, si l'expression de T contenait un terme de la forme $B\,dA$, A étant fonction de ξ, ψ, …, sans $d\xi$, et B une fonction quelconque sans ξ, ce terme donnerait simplement, relativement à la variation de ξ, le terme $\frac{\partial A}{\partial \xi}dB$.

Car, donnant au terme $B\,dA$ la forme $d(BA) - A\,dB$, on voit d'abord que le terme $d(BA)$ ne donnerait rien relativement à la variation de ξ, puisque AB contient ξ sans $d\xi$; ensuite, comme dB ne contient point ξ ni $d\xi$ et que A contient ξ sans $d\xi$, on voit qu'en faisant $T = -A\,dB$, on aura

$$\frac{\delta T}{\delta d\xi} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta T}{\delta \xi} = -\frac{\partial A}{\partial \xi}dB ;$$

de sorte que le coefficient de $\delta\xi$ se réduira à $\frac{\partial A}{\partial \xi}dB$.

9. A l'égard de la quantité $P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots$, elle est toujours facile à réduire en fonction de ξ, ψ, φ, …, puisqu'il ne s'agit que d'y réduire séparément les expressions des distances p, q, r, … et des forces P, Q, R, …. Mais cette opération devient encore plus facile, lorsque les forces sont telles que la somme des moments, c'est-à-dire la quantité

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots,$$

est intégrable, ce qui, comme nous l'avons déjà observé, est proprement le cas de la nature.

Car supposant, comme dans l'article 34 de la Section III,

$$d\Pi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots,$$

on aura Π exprimé par une fonction finie de $p, q, r, \ldots$; par conséquent, on aura aussi

$$\delta\Pi = P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots.$$

Multipliant par m et prenant la somme pour tous les corps du système, on aura

$$\mathrm{S}\,m(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots) = \mathrm{S}\,m\,\delta\Pi = \delta\,\mathrm{S}\,m\Pi,$$

puisque le signe S est indépendant du signe δ.

Il n'y aura ainsi qu'à chercher la valeur de la quantité $\mathrm{S}\,m\Pi$ en fonction de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$; ce qui ne demande que la substitution des valeurs de $x, y, z, \ldots$ en $\xi, \psi, \varphi, \ldots$, dans les expressions de $p, q, \ldots$ (Ire Partie, Sect. II, art. 1); et cette valeur de $\mathrm{S}\,m\Pi$ étant nommée V, on aura immédiatement

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \xi}\delta\xi + \frac{\partial V}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial V}{\partial \varphi}\delta\varphi + \ldots.$$

10. De cette manière, la formule générale de la Dynamique (art. 2) sera transformée en celle-ci

$$\Xi\,\delta\xi + \Psi\,\delta\psi + \Phi\,\delta\varphi + \ldots = 0,$$

dans laquelle on aura

$$\Xi = d\frac{\delta T}{\delta\, d\xi} - \frac{\delta T}{\delta \xi} + \frac{\delta V}{\delta \xi},$$

$$\Psi = d\frac{\delta T}{\delta\, d\psi} - \frac{\delta T}{\delta \psi} + \frac{\delta V}{\delta \psi},$$

$$\Phi = d\frac{\delta T}{\delta\, d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta \varphi} + \frac{\delta V}{\delta \varphi},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

en supposant

$$T = \frac{1}{2}\mathrm{S}\,m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right), \qquad V = \mathrm{S}\,m\Pi$$

et

$$d\Pi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots.$$

Si les corps m et m' du système, regardés comme des points dont la distance mutuelle est p, s'attiraient avec une force accélératrice représentée par P fonction de p, il est facile de voir que le moment de cette force serait exprimé par $mm'P\,dp$, et il faudrait ajouter à la valeur de V la quantité $mm'\int P\,dp$; et ainsi s'il y avait dans le système d'autres forces d'attraction mutuelle.

En général, si le système renfermait des forces quelconques F, G, ..., tendantes à diminuer la valeur des quantités $f, g, \ldots$, on aurait $F\,\delta f$, $G\,\delta g$, ..., pour les moments de ces forces (Ire Partie, Sect. II, art. 9); et en regardant F comme fonction de f, G comme fonction de g, etc., il faudrait ajouter à la valeur de V autant de termes de la forme $\int F\,df$, $\int G\,dg$, ... qu'il y aurait de pareilles forces.

Or, si dans le choix des nouvelles variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ on a eu égard aux équations de condition données par la nature du système proposé, en sorte que ces variables soient maintenant tout à fait indépendantes les unes des autres, et que, par conséquent, leurs variations $\delta\xi, \delta\psi, \delta\varphi, \ldots$ demeurent absolument indéterminées, on aura sur-le-champ les équations particulières

$$\Xi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Phi = 0, \quad \ldots,$$

lesquelles serviront à déterminer le mouvement du système, puisque ces équations sont en même nombre que les variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ d'où dépend la position du système à chaque instant.

11. Mais, quoiqu'on puisse toujours ramener la question à cet état, puisqu'il ne s'agit que d'éliminer, par les équations de condition, autant de variables qu'elles permettent de le faire, et de prendre ensuite pour $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ les variables restantes, il peut néanmoins y avoir des cas où cette voie soit trop pénible et où il soit à propos, pour ne pas trop compliquer le calcul, de conserver un plus grand nombre de variables. Alors les équations de condition auxquelles on n'aura pas encore satisfait devront être employées à éliminer, dans la formule générale, quelques-unes des variations $\delta\xi, \delta\psi, \ldots$; mais, au lieu de

l'élimination actuelle, on pourra aussi faire usage de la méthode des multiplicateurs, exposée dans la Ire Partie (Sect. IV).

Soient

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0, \qquad \ldots$$

les équations dont il s'agit, réduites en fonctions de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$, en sorte que $L, M, N, \ldots$ soient des fonctions données de ces variables. On ajoutera au premier membre de la formule générale (article précédent) la quantité

$$\lambda\,\delta L + \mu\,\delta M + \nu\,\delta N + \ldots,$$

dans laquelle $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ sont des coefficients indéterminés; et l'on pourra regarder alors les variations $\delta\xi, \delta\psi, \delta\varphi, \ldots$ comme indépendantes et arbitraires.

On aura ainsi l'équation générale

$$\Xi\,\delta\xi + \Psi\,\delta\psi + \Phi\,\delta\varphi + \ldots + \lambda\,\delta L + \mu\,\delta M + \nu\,\delta N + \ldots = 0,$$

laquelle, devant être vérifiée indépendamment des variations $\delta\xi, \delta\psi, \delta\varphi, \ldots$, donnera ces équations particulières pour le mouvement du système

$$\Xi + \lambda\frac{\delta L}{\delta\xi} + \mu\frac{\delta M}{\delta\xi} + \nu\frac{\delta N}{\delta\xi} + \ldots = 0,$$

$$\Psi + \lambda\frac{\delta L}{\delta\psi} + \mu\frac{\delta M}{\delta\psi} + \nu\frac{\delta N}{\delta\psi} + \ldots = 0,$$

$$\Phi + \lambda\frac{\delta L}{\delta\varphi} + \mu\frac{\delta M}{\delta\varphi} + \nu\frac{\delta N}{\delta\varphi} + \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où il faudra ensuite éliminer les inconnues $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, ce qui diminuera d'autant le nombre des équations; mais, en y ajoutant les équations de condition qui doivent nécessairement avoir lieu, on aura toujours autant d'équations que de variables.

12. Comme ces équations peuvent avoir différentes formes plus ou moins simples, et surtout plus ou moins propres pour l'intégration, il n'est pas indifférent sous quelle forme elles se présentent d'abord; et c'est peut-être un des principaux avantages de notre méthode, de

fournir toujours les équations de chaque problème, sous la forme la plus simple relativement aux variables qu'on y emploie, et de mettre en état de juger d'avance quelles sont les variables dont l'emploi peut en faciliter le plus l'intégration. Voici, pour cet objet, quelques principes généraux, dont on verra ensuite l'application dans la solution de différents problèmes.

Il est clair, par les formules que nous venons de donner, que les termes différentiels des équations pour le mouvement d'un système quelconque de corps viennent uniquement de la quantité T qui exprime la somme de toutes les quantités $\frac{1}{2}m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right)$ relativement aux différents corps; chaque variable finie, comme ξ, qui entrera dans l'expression de T donnant le terme $-\frac{\delta T}{\delta\xi}$, et chaque variable différentielle, comme $d\xi$, donnant le terme $d\frac{\delta T}{\delta\, d\xi}$. D'où l'on voit d'abord que les termes dont il s'agit ne pourront contenir d'autres fonctions des variables que celles qui se trouveront dans l'expression même de T; par conséquent, si, en employant des sinus et cosinus d'angles, ce qui se présente naturellement dans la solution de plusieurs problèmes, il arrive que les sinus et cosinus disparaissent de la fonction T, elle ne contiendra alors que les différentielles de ces angles, et les termes en question ne contiendront aussi que ces mêmes différentielles. Ainsi il y aura toujours à gagner, pour la simplicité des équations du problème, à employer ces sortes de substitutions.

Par exemple, si, à la place des deux coordonnées x, y, on emploie le rayon vecteur r, mené du centre des mêmes coordonnées et faisant avec l'axe des x l'angle φ, on aura

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

et, différentiant,

$$dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi, \qquad dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi;$$

donc

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2\,d\varphi^2,$$

expression fort simple, qui ne contient ni sinus ni cosinus de φ, mais seulement sa différentielle $d\varphi$. De cette manière, la quantité $dx^2 + dy^2 + dz^2$ se trouvera changée en $r^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2$.

On pourrait encore substituer, au lieu de r et z, un nouveau rayon vecteur ρ avec l'angle ψ que ce rayon fait avec r, qui en est la projection; ce qui donnerait

$$r = \rho \cos\psi, \qquad z = \rho \sin\psi$$

et, par conséquent,

$$dr^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2;$$

de sorte que la quantité

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

serait transformée en celle-ci :

$$\rho^2(\cos^2\psi\, d\varphi^2 + d\psi^2) + d\rho^2.$$

Ici il est clair que ρ sera le rayon mené du centre des coordonnées au point de l'espace où est le corps m, ψ sera l'inclinaison de ce rayon sur le plan des xy, et φ l'angle de la projection de ce rayon sur le même plan avec l'axe des x; et l'on aura, comme dans l'article 4 de la Section II, I^{re} Partie,

$$x = \rho \cos\psi \cos\varphi, \qquad y = \rho \cos\psi \sin\varphi, \qquad z = \rho \sin\psi.$$

Enfin, on pourra employer à volonté d'autres substitutions, et, lorsque le système est composé de plusieurs corps, on pourra les rapporter immédiatement les uns aux autres par des coordonnées relatives; les circonstances de chaque problème indiqueront toujours celles qui seront le plus propres. On pourra même, après avoir trouvé, d'après une substitution, une ou quelques-unes des équations du problème, déduire les autres d'autres substitutions; ce qui fournira de nouveaux moyens de diversifier ces équations, et de trouver les plus simples et les plus faciles à intégrer.

13. Les autres termes des équations dont il s'agit dépendent des forces accélératrices qu'on suppose agir sur les corps et des équations

de condition qui doivent subsister entre les variables relatives à la position des corps dans l'espace.

Lorsque les forces P, Q, R, ... tendent à des centres fixes ou à des corps du même système et sont proportionnelles à des fonctions quelconques des distances, comme cela a lieu dans la nature, la quantité V, qui exprime la somme des quantités

$$m\int(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots)$$

pour tous les corps m du système, sera une fonction algébrique des distances et fournira, pour chaque variable ξ dont elle se trouvera composée, un terme fini de la forme $\frac{\partial V}{\partial \xi}$.

De même, les équations de condition

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad \ldots$$

fourniront pour la même variable ξ les termes $\lambda \frac{\partial L}{\partial \xi}$, $\frac{\partial M}{\partial \xi}$, ..., et ainsi des autres; de sorte qu'il n'y aura qu'à ajouter à la valeur de V les quantités λL, μM, ..., en regardant ensuite λ, μ, ... comme constantes dans les différentiations en δ.

Si donc quelques-unes des variables qui entrent dans la fonction T n'entrent point dans V, ni dans L, M, ..., les équations relatives à ces variables ne contiendront que des termes différentiels, et l'intégration n'en sera que plus facile, surtout si ces variables ne se trouvent dans T que sous la forme différentielle. C'est ce qui aura lieu lorsque, les corps étant attirés vers des centres, on prendra, pour coordonnées, les distances à ces centres et les angles décrits autour d'eux.

14. Une intégration qui a toujours lieu, lorsque les forces sont des fonctions de distances et que les fonctions T, V, L, M, ... ne contiennent point la variable finie t, est celle qui donne le principe de la conservation des forces vives. Quoique nous ayons déjà montré comment ce principe résulte de notre formule générale de la Dynamique (Sect. III, art. 34), il ne sera pas inutile de faire voir que les équa-

tions particulières déduites de cette formule fournissent toujours une équation intégrable, qui est celle de la conservation des forces vives.

Ces équations, considérées dans toute leur généralité, étant chacune de la forme (art. 11)

$$d\frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \xi} + \lambda\frac{\partial L}{\partial \xi} + \mu\frac{\partial M}{\partial \xi} + \ldots = 0,$$

si on les ajoute ensemble après les avoir multipliées par les différentielles respectives $d\xi, d\psi, \ldots$ et qu'on fasse attention que les quantités V, L, M, ... sont par l'hypothèse des fonctions algébriques des variables ξ, ψ, ... sans t, il est clair qu'on aura l'équation

$$\left(d\frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi}\right)d\xi + \left(d\frac{\partial T}{\partial d\psi} - \frac{\partial T}{\partial \psi}\right)d\psi + \ldots + dV + \lambda\, dL + \mu\, dM + \ldots = 0;$$

mais,

$$L = 0, \quad M = 0, \quad \ldots$$

étant les équations de condition, on aura généralement

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad \ldots;$$

par conséquent, l'équation précédente se réduira à

$$\left(d\frac{\partial T}{\partial d\xi} - \frac{\partial T}{\partial \xi}\right)d\xi + \ldots + dV = 0.$$

Or on a

$$d\xi\, d\frac{\partial T}{\partial d\xi} = d\left(\frac{\partial T}{\partial d\xi}d\xi\right) - \frac{\partial T}{\partial d\xi}d^2\xi;$$

et comme T est une fonction algébrique des variables ξ, ψ, ... et de leurs différentielles $d\xi$, $d\psi$, ... sans t, on aura

$$dT = \frac{\partial T}{\partial \xi}d\xi + \frac{\partial T}{\partial d\xi}d^2\xi + \frac{\partial T}{\partial \psi}d\psi + \frac{\partial T}{\partial d\psi}d^2\psi + \ldots;$$

donc l'équation deviendra

$$d\left(\frac{\partial T}{\partial d\xi}d\xi + \frac{\partial T}{\partial d\psi}d\psi + \ldots\right) - dT + dV = 0,$$

laquelle est évidemment intégrable et dont l'intégrale est

$$\frac{\partial T}{\partial d\xi}d\xi + \frac{\partial T}{\partial d\psi}d\psi + \ldots - T + V = \text{const.}$$

Maintenant, puisque

$$T = \mathbf{S}\frac{1}{2}m\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right),$$

il est évident que, quelques variables qu'on substitue pour x, y, z, la fonction résultante sera nécessairement homogène et de deux dimensions relativement aux différences de ces variables; donc, par le théorème connu, on aura

$$\frac{\partial T}{\partial d\xi}d\xi + \frac{\partial T}{\partial d\psi}d\psi + \ldots = 2T.$$

Donc l'intégrale trouvée sera simplement

$$T + V = \text{const.},$$

laquelle contient le principe de la conservation des forces vives (Sect. III, art. 34).

Si la quantité V n'était pas une fonction algébrique [1], on n'aurait pas

$$\frac{\partial V}{\partial \xi}d\xi + \ldots = dV,$$

et si les quantités T, L, M, ... contenaient aussi la variable t, alors

[1] Il faut, pour comprendre ce passage, se rappeler la définition de la fonction V. On a posé (art. 9)

$$d\Pi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots,$$

puis ensuite

$$V = \mathbf{S}m\Pi.$$

Pour que V soit, suivant l'expression de Lagrange, une fonction algébrique, il faut et il suffit que Π en soit une, c'est-à-dire que

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots$$

soit une différentielle exacte; si cela n'a pas lieu, la fonction Π n'existe plus, et il en est de même de V : fonction algébrique signifie simplement ici fonction, et cette expression ne doit, en aucune façon, être regardée comme opposée à celle de fonction non algébrique.

(*J. Bertrand.*)

leurs différentielles $d\mathrm{T}$, $d\mathrm{L}$, $d\mathrm{M}$, ... contiendraient aussi les termes $\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t}dt$, $\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t}dt$, $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial t}dt$, ...; donc les réductions qui ont rendu l'équation intégrable n'auraient plus lieu, ni par conséquent le principe de la conservation des forces vives.

15. Quoique le théorème sur les fonctions homogènes dont nous venons de parler soit démontré dans différents ouvrages, et qu'on puisse, par conséquent, le supposer comme connu, la démonstration que voici est si simple que je ne crois pas devoir la supprimer. Si F est une fonction homogène de différentes variables x, y, ..., et qu'elle soit de la dimension n, il est clair qu'en y mettant ax, ay, ... à la place de x, y, ..., elle deviendra nécessairement $a^n\mathrm{F}$, quelle que soit la quantité a. Donc, faisant $a = 1 + \alpha$, et regardant α comme une quantité infiniment petite, l'accroissement infiniment petit de F, dû aux accroissements infiniment petits αx, αy, ... de x, y, ..., sera $n\alpha\mathrm{F}$. Mais, en faisant varier x, y, ... de αx, αy, ..., on a, en général, pour la variation de F,

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}\alpha x + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}\alpha y + \ldots.$$

Donc, égalant ces deux expressions de l'accroissement de F et divisant par α, on aura

$$n\mathrm{F} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}x + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}y + \ldots.$$

16. L'intégrale relative à la *conservation des forces vives* est d'une grande utilité dans la solution des problèmes de Mécanique, surtout lorsque la fonction T ne contient que la différentielle d'une variable qui ne se trouve point dans la fonction V; car cette intégrale servira alors à déterminer cette même variable et à éliminer des équations différentielles.

A l'égard des intégrales qui se rapportent à la *conservation du mouvement du centre de gravité* et au *principe des aires*, et que nous avons déjà trouvées d'une manière générale dans la Section III, elles se présenteront d'elles-mêmes dans la solution de chaque problème, pourvu

qu'on ait soin, dans le choix des variables, de séparer le mouvement absolu du système des mouvements relatifs des corps entre eux, ainsi que nous l'avons fait dans la Section citée.

Les autres intégrales dépendront de la nature des équations différentielles de chaque problème, et l'on ne saurait donner de règle générale pour les trouver. Il y a cependant un cas très étendu qui est toujours susceptible d'une solution complète en termes finis : c'est celui où le système ne fait que de très petites oscillations autour de sa situation d'équilibre. Nous destinons une Section particulière à ce problème, à cause de son importance.

17. Lorsque le système dont on cherche le mouvement est composé d'une infinité de particules ou éléments dont l'assemblage forme une masse finie de figure variable, il faut employer une analyse semblable à celle que nous avons exposée dans le § II de la Section IV de la Ire Partie; mais à la place de la caractéristique d, que nous y avons employée (art. 11 et suiv.) pour désigner les différences des variables relatives aux différents éléments du système, il faudra substituer la caractéristique D, qui répond à la caractéristique intégrale S, relative à tout le système, afin de pouvoir conserver l'autre caractéristique d pour les différences relatives au temps, auxquelles nous l'avons destinée dans la Section II de la IIe Partie, article 7.

Ainsi, en nommant m la masse entière et Dm un de ses éléments, il faudra mettre Dm au lieu de m dans les expressions de T et de V de l'article 10.

S'il y a pour chaque élément du corps des forces F, G, ... qui tendent à diminuer les quantités f, g, ... dont ces forces sont fonctions, il faudra ajouter à la valeur de V les expressions $\mathrm{S}\int \mathrm{F}\,df$, $\mathrm{S}\int \mathrm{G}\,dg$, ...

Et s'il y a des équations de condition

$$\mathrm{L} = 0, \qquad \mathrm{M} = 0, \qquad \ldots$$

qui doivent avoir lieu à chaque point de la masse m, il faudra mettre

$S\lambda\delta L$, $S\mu\delta M$, ... à la place de $\lambda\delta L$, $\mu\delta M$, ..., dans les formules de l'article 11.

Les quantités f, g, ..., ainsi que L, M, ..., pouvant renfermer des différences des variables relatives à la caractéristique D, il faudra alors faire disparaître les doubles signes δD, δD^2, ... par l'opération connue des intégrations par parties, de manière qu'il ne reste sous le signe S que les variations simples marquées par δ; et les termes hors du signe S se rapporteront uniquement aux extrémités des intégrales.

Il faudra enfin avoir égard aussi aux forces et aux équations de condition relatives à des points déterminés de la masse m, et en tenir compte dans la formule générale; mais elles ne donneront que des termes indépendants du signe S.

Les variations qui resteront sous le signe S donneront, en égalant leurs coefficients à zéro, autant d'équations indéfinies pour le mouvement de chaque élément du système; et les variations hors du signe donneront des équations déterminées pour certains points du système.

SECTION CINQUIÈME.

MÉTHODE GÉNÉRALE D'APPROXIMATION POUR LES PROBLÈMES DE DYNAMIQUE, FONDÉE SUR LA VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES.

Les équations générales que nous avons données dans la Section précédente, étant du second ordre, demandent encore des intégrations qui surpassent souvent les forces de l'analyse connue; on est obligé alors d'avoir recours aux approximations, et nos formules fournissent aussi les moyens les plus propres à remplir cet objet.

1. Toute approximation suppose la solution exacte d'un cas de la question proposée dans lequel on a négligé des éléments ou des quantités qu'on regarde comme très petites. Cette solution forme le premier degré d'approximation, et on la corrige ensuite en tenant compte successivement des quantités négligées.

Dans les problèmes de Mécanique qu'on ne peut résoudre que par approximation, on trouve ordinairement la première solution en n'ayant égard qu'aux forces principales qui agissent sur les corps; et, pour étendre cette solution aux autres forces qu'on peut appeler *perturbatrices*, ce qu'il y a de plus simple, c'est de conserver la forme de la première solution, mais en rendant variables les constantes arbitraires qu'elle renferme; car, si les quantités qu'on avait négligées et dont on veut tenir compte sont très petites, les nouvelles variables seront à peu près constantes, et l'on pourra y appliquer les méthodes ordinaires d'approximation. Ainsi la difficulté se réduit à trouver les équations entre ces variables.

On connaît la méthode générale de faire varier les constantes arbitraires des intégrales des équations différentielles, pour que ces intégrales conviennent aussi aux mêmes équations augmentées de certains termes; mais la forme que nous avons donnée, dans la Section précédente (art. 10), aux équations générales de la Dynamique a l'avantage de fournir une relation entre les variations des constantes arbitraires que l'intégration doit y introduire, laquelle simplifie singulièrement les formules de ces variations, dans les problèmes où elles expriment l'effet des forces perturbatrices. Nous allons d'abord démontrer cette relation; nous donnerons ensuite les équations les plus simples pour déterminer les variations des constantes arbitraires dans les problèmes dont il s'agit.

§ I. — *Où l'on déduit des équations données dans la Section précédente une relation générale entre les variations des constantes arbitraires.*

2. Soit un système quelconque de corps m, animés par des forces accélératrices P, Q, R, ... qui tendent à des centres quelconques, fixes ou non, et qui soient proportionnelles à des fonctions quelconques de leurs distances p, q, r, ... à ces centres.

Supposons que, en ayant égard aux équations de condition du système, on ait exprimé les coordonnées x, y, z de chacun des corps en fonctions d'autres variables ξ, ψ, φ, ... qui soient tout à fait indépendantes entre elles et qui suffisent pour déterminer la position du système à chaque instant.

On aura, pour le mouvement de tout le système, les équations de l'article 10 de la Section précédente, et il est facile de voir que ces équations seront du second ordre par rapport aux variables ξ, ψ, φ, ...; de sorte que les valeurs complètes de ces variables, qu'on trouvera par l'intégration et qui seront exprimées en fonctions du temps t, contiendront deux fois autant de constantes arbitraires qu'il y a de variables. Comme ces constantes doivent demeurer arbitraires, on peut les faire varier à volonté; ainsi l'on pourra différentier les équations dont il s'agit relativement à ces constantes, qui sont supposées contenues dans les expressions des variables ξ, ψ, φ, ...

3. Faisons, pour plus de simplicité,

$$d\xi = \xi' \, dt, \qquad d\psi = \psi' \, dt, \qquad d\varphi = \varphi' \, dt, \qquad \ldots;$$

la quantité T deviendra une fonction de ξ, ψ, φ, ... et de ξ', ψ', φ', ...; et si les forces tendent à des centres fixes ou à des corps du même système, la quantité V sera une simple fonction de ξ, ψ, φ, ... Dans ce cas, en faisant $Z = T - V$, on aura

$$\frac{\delta T}{\delta\, d\xi} = \frac{1}{dt}\frac{\partial Z}{\partial \psi'}, \qquad \frac{\delta T}{\delta\, d\psi} = \frac{1}{dt}\frac{\partial Z}{\partial \xi'}, \qquad \frac{\delta T}{\delta\, d\varphi} = \frac{1}{dt}\frac{\partial Z}{\partial \varphi'}, \qquad \ldots,$$

où l'on pourra changer la caractéristique δ en ∂, puisqu'elle ne sert qu'à représenter des différences partielles.

Ainsi les équations différentielles du mouvement du système (art. 10, Sect. IV), étant multipliées par dt, se réduiront à cette forme plus simple

$$d\frac{\partial Z}{\partial \xi'} - \frac{\partial Z}{\partial \xi} dt = 0,$$

$$d\frac{\partial Z}{\partial \psi'} - \frac{\partial Z}{\partial \psi} dt = 0,$$

$$d\frac{\partial Z}{\partial \varphi'} - \frac{\partial Z}{\partial \varphi} dt = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

4. Différentions ces équations par rapport à la caractéristique δ [1], que nous regarderons comme relative uniquement aux variations des constantes arbitraires qui sont censées contenues dans les expressions des variables ξ, ψ, φ, ... dont Z est fonction; et comme la caractéristique d, qui affecte les termes $d\frac{\partial Z}{\partial \xi'}$, $d\frac{\partial Z}{\partial \psi'}$, ..., n'est relative qu'à la variable t qui représente le temps, on pourra, par les principes du calcul des variations, changer la double caractéristique δd en $d\delta$; de

[1] On suppose ici que, ces équations ayant été intégrées, on ait substitué aux variables ξ, ψ, ... leurs expressions générales fournies par cette intégration. Les équations deviennent alors identiques et l'on peut les différentier par rapport aux diverses lettres qui y figurent.
(*J. Bertrand.*)

sorte qu'on aura les équations

$$
\begin{gathered}
d\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}-\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi}\,dt=0,\\
d\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'}-\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi}\,dt=0,\\
d\delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'}-\delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi}\,dt=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

De même, si, pour représenter des variations différentes des mêmes constantes arbitraires, on emploie la caractéristique Δ, on aura

$$
\begin{gathered}
d\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}-\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi}\,dt=0,\\
d\Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'}-\Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi}\,dt=0,\\
d\Delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'}-\Delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi}\,dt=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered}
$$

5. Multiplions maintenant les premières équations respectivement par $\Delta\xi$, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$, ..., et retranchons de leur somme celle des dernières équations multipliées respectivement par $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$, ...: on aura

$$
\begin{aligned}
&\Delta\xi\,d\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}+\Delta\psi\,d\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'}+\Delta\varphi\,d\delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'}+\ldots\\
&-\delta\xi\,d\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}-\delta\psi\,d\Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'}-\delta\varphi\,d\Delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'}+\ldots\\
&-\left(\Delta\xi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi}+\Delta\psi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi}+\Delta\varphi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi}+\ldots\right)dt\\
&+\left(\delta\xi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi}+\delta\psi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi}+\delta\varphi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi}+\ldots\right)dt=0.
\end{aligned}
$$

Or $\Delta\xi\,d\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}=d\left(\Delta\xi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}\right)-d\Delta\xi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}$; mais $d\Delta\xi=\Delta d\xi=\Delta\xi'\,dt$, à cause de $d\xi=\xi'\,dt$; donc

$$\Delta\xi\,d\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}=d\left(\Delta\xi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}\right)-\Delta\xi'\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}\,dt.$$

On aura pareillement

$$\delta\xi\,d\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}=d\left(\delta\xi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}\right)-\delta\xi'\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}\,dt,$$

et ainsi des autres formules semblables.

Par le moyen de ces transformations, l'équation précédente deviendra de cette forme

$$
\begin{aligned}
&d\left\{\begin{aligned}&\Delta\xi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}+\Delta\psi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'}+\Delta\varphi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'}+\ldots\\&-\delta\xi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}-\delta\psi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'}-\delta\varphi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'}-\ldots\end{aligned}\right\}\\
&-\left\{\begin{aligned}&\Delta\xi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi}+\Delta\psi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi}+\Delta\varphi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi}+\ldots\\&+\Delta\xi'\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}+\Delta\psi'\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'}+\Delta\varphi'\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'}+\ldots\end{aligned}\right\}dt\\
&+\left\{\begin{aligned}&\delta\xi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi}+\delta\psi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi}+\delta\varphi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi}+\ldots\\&+\delta\xi'\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}+\delta\psi'\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'}+\delta\varphi'\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'}+\ldots\end{aligned}\right\}dt=0.
\end{aligned}
$$

6. Or, si l'on développe les expressions $\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi}$, $\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}$, ..., ainsi que les expressions semblables $\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi}$, $\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}$, ..., en regardant Z comme fonction de ξ, ψ, φ, ... et de ξ' ψ', φ', ..., il est facile de voir que les termes multipliés par dt dans l'équation précédente se détruisent mutuellement. En effet, on a

$$
\begin{aligned}
\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi}&=\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi^2}\delta\xi+\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\,\partial\psi}\delta\psi+\ldots+\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\,\partial\xi'}\delta\xi'+\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\,\partial\psi'}\delta\psi'+\ldots,\\
\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi}&=\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\,\partial\psi}\delta\xi+\frac{\partial^2 Z}{\partial\psi^2}\delta\psi+\ldots+\frac{\partial^2 Z}{\partial\psi\,\partial\xi'}\delta\xi'+\frac{\partial^2 Z}{\partial\psi\,\partial\psi'}\delta\psi'+\ldots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\\
\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}&=\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\,\partial\xi'}\delta\xi+\frac{\partial^2 Z}{\partial\psi\,\partial\xi'}\delta\psi+\ldots+\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi'^2}\delta\xi'+\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi'\,\partial\psi'}\delta\psi'+\ldots,\\
\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'}&=\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\,\partial\psi'}\delta\xi+\frac{\partial^2 Z}{\partial\psi\,\partial\psi'}\delta\psi+\ldots+\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi'\,\partial\psi'}\delta\xi'+\frac{\partial^2 Z}{\partial\psi'^2}\delta\psi'+\ldots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}
$$

ce qui donne, en ordonnant les termes par rapport aux différences partielles de Z, ce développement

$$
\begin{aligned}
&\Delta\xi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi}+\Delta\psi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi}+\ldots+\Delta\xi'\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}+\Delta\psi'\,\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'}+\ldots\\
&\quad=+\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi^2}\Delta\xi\,\delta\xi+\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\,\partial\psi}(\Delta\xi\,\delta\psi+\Delta\psi\,\delta\xi)+\frac{\partial^2 Z}{\partial\psi^2}\Delta\psi\,\delta\psi+\ldots\\
&\quad+\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\,\partial\xi'}(\Delta\xi\,\delta\xi'+\Delta\xi'\,\delta\xi)+\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi\,\partial\psi'}(\Delta\xi\,\delta\psi'+\Delta\psi'\,\delta\xi)+\ldots\\
&\quad+\frac{\partial^2 Z}{\partial\psi\,\partial\xi'}(\Delta\psi\,\delta\xi'+\Delta\xi'\,\delta\psi)+\frac{\partial^2 Z}{\partial\psi\,\partial\psi'}(\Delta\psi\,\delta\psi'+\Delta\psi'\,\delta\psi)+\ldots\\
&\quad+\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi'^2}\Delta\xi'\,\delta\xi'+\frac{\partial^2 Z}{\partial\xi'\,\partial\psi'}(\Delta\xi'\,\delta\psi'+\Delta\psi'\,\delta\xi')+\frac{\partial^2 Z}{\partial\psi'^2}\Delta\psi'\,\delta\psi'+\ldots\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

En changeant les caractéristiques δ, Δ l'une dans l'autre, on aura le développement de l'expression semblable

$$\delta\xi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi}+\delta\psi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi}+\ldots+\delta\xi'\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'}+\delta\psi'\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'}+\ldots.$$

Mais on voit que ce changement n'en produit aucun dans le développement précédent; d'où il suit que les deux expressions sont identiques : de sorte que, comme elles se trouvent dans l'équation ci-dessus avec des signes différents, elles doivent s'y détruire.

7. Ainsi l'on aura simplement l'équation

$$d\left\{\begin{array}{l}\quad\Delta\xi\,\delta\dfrac{\partial Z}{\partial\xi'}+\Delta\psi\,\delta\dfrac{\partial Z}{\partial\psi'}+\Delta\varphi\,\delta\dfrac{\partial Z}{\partial\varphi'}+\ldots\\ -\delta\xi\,\Delta\dfrac{\partial Z}{\partial\xi'}-\delta\psi\,\Delta\dfrac{\partial Z}{\partial\psi'}-\delta\varphi\,\Delta\dfrac{\partial Z}{\partial\varphi'}-\ldots\end{array}\right\}=0,$$

dans laquelle on peut changer Z en T, puisque $Z=T-V$ et que V ne doit point contenir les variables ξ', ψ', φ', ... (art. 3).

On voit par cette équation que la quantité

$$
\begin{aligned}
&\Delta\xi\,\delta\frac{\partial T}{\partial\xi'}+\Delta\psi\,\delta\frac{\partial T}{\partial\psi'}+\Delta\varphi\,\delta\frac{\partial T}{\partial\varphi'}+\ldots\\
&-\delta\xi\,\Delta\frac{\partial T}{\partial\xi'}-\delta\psi\,\Delta\frac{\partial T}{\partial\psi'}-\delta\varphi\,\Delta\frac{\partial T}{\partial\varphi'}-\ldots
\end{aligned}
$$

est toujours nécessairement constante relativement au temps t auquel se rapportent les différentielles marquées par la caractéristique d; que, par conséquent, si l'on y substitue les valeurs des variables ξ, ψ, φ, ..., exprimées en fonctions de t et des constantes arbitraires déduites des équations d'un problème quelconque de Mécanique, la variable t s'évanouira d'elle-même, quelles que soient les variations qu'on fera subir à ces constantes dans les quantités affectées des caractéristiques δ et Δ; ce qui est une nouvelle propriété très remarquable de la fonction T, qui représente la force vive de tout le système, et ce qui peut fournir un critère général pour juger de l'exactitude d'une solution trouvée par quelque méthode que ce soit. Mais l'usage principal de cette formule est pour la variation des constantes arbitraires dans les questions de Mécanique, comme nous allons le montrer.

§ II. — *Où l'on donne les équations différentielles les plus simples pour déterminer les variations des constantes arbitraires, dues à des forces perturbatrices.*

8. Supposons maintenant qu'après avoir résolu le problème contenu dans les équations différentielles de l'article 3 par l'intégration complète de ces équations, il s'agisse de résoudre le même problème, mais avec l'addition de nouvelles forces appliquées au même système, tendantes à des centres fixes ou mobiles d'une manière quelconque, et proportionnelles à des fonctions des distances aux centres. Ces nouvelles forces, qu'on peut regarder comme des forces perturbatrices du mouvement du système, étant d'une nature semblable aux forces P, Q, R, ... d'où dépend la fonction V, ajouteront à cette fonction une fonction analogue que nous désignerons par $-\Omega$. De sorte qu'il n'y a qu'à mettre $V-\Omega$ à la place de V, dans les équations de l'article 10 de la Section précédente, et, par conséquent, $Z-\Omega$ à la place de Z, dans les termes de celles de l'article 3 qui contiennent les différences partielles de Z relatives à ξ, ψ, φ, ..., pour avoir les équations du nou-

veau problème, lesquelles seront ainsi

$$d\frac{\partial Z}{\partial \xi'} - \frac{\partial Z}{\partial \xi}dt = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}dt,$$

$$d\frac{\partial Z}{\partial \psi'} - \frac{\partial Z}{\partial \psi}dt = \frac{\partial \Omega}{\partial \psi}dt,$$

$$d\frac{\partial Z}{\partial \varphi'} - \frac{\partial Z}{\partial \varphi}dt = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}dt,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

9. Si l'on suppose connues les expressions des variables ξ, ψ, φ, ... en t et en constantes arbitraires dans le cas où les seconds membres de ces équations sont nuls, on peut, en conservant ces mêmes expressions mais en rendant variables leurs constantes arbitraires, faire en sorte qu'elles satisfassent aussi à la totalité de ces équations; et l'objet de l'analyse que nous allons exposer est de donner les formules les plus simples pour la détermination de ces constantes devenues variables.

Nous remarquerons d'abord que, puisque ces constantes sont en nombre double de celui des variables ξ, ψ, φ, ..., comme nous l'avons déjà observé (art. 2), et, par conséquent, en nombre double de celui des équations auxquelles il faut satisfaire, on pourra encore les assujettir à un nombre de conditions arbitraires égal à celui de ces variables.

Les conditions les plus simples et en même temps les plus appropriées à la chose sont que les valeurs de $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\varphi}{dt}$, ... conservent aussi la même forme que si les constantes n'y variaient point. De cette manière, non seulement les espaces parcourus par les corps, mais encore leurs vitesses seront déterminés par des formules semblables, soit que les constantes arbitraires demeurent invariables, comme lorsqu'il n'y a point de forces perturbatrices, soit qu'elles deviennent variables par l'effet de ces forces.

Ces conditions auront de plus l'avantage de réduire au premier ordre les équations différentielles entre les nouvelles variables, de sorte

qu'on aura un nombre double d'équations, mais du premier ordre seulement.

10. En employant, comme dans l'article 4, la caractéristique δ pour désigner les différentielles dues uniquement à la variation des constantes arbitraires, tandis que la caractéristique d ne se rapporte qu'aux différentielles relatives au temps t, les conditions dont nous venons de parler seront exprimées par les équations

$$\delta\xi = 0, \quad \delta\psi = 0, \quad \delta\varphi = 0, \quad \dots,$$

dans lesquelles il faut remarquer que toutes les constantes arbitraires doivent devenir variables à la fois, de sorte que la caractéristique δ indiquera dans la suite la variation simultanée (¹) de toutes les constantes arbitraires, au lieu que, dans les formules de l'article 4 et suivants, la même caractéristique dénotait en général les différentielles relatives à la variation de toutes les constantes, ou seulement de quelques-unes d'entre elles à volonté, ainsi que l'autre caractéristique Δ.

Donc, en faisant tout varier, les différentielles de ξ, ψ, φ, ... seront simplement $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$, ..., ou bien $\xi' dt$, $\psi' dt$, $\varphi' dt$, ..., comme si le temps seul variait.

Ainsi, dans les équations de l'article 8, la fonction Z sera la même, soit que les constantes arbitraires soient censées variables ou non; mais, en regardant ces constantes comme variables, les différences $d\frac{\partial Z}{\partial \xi'}$, $d\frac{\partial Z}{\partial \psi'}$, $d\frac{\partial Z}{\partial \varphi'}$, ... devront être augmentées des termes $\delta\frac{\partial Z}{\partial \xi'}$, $\delta\frac{\partial Z}{\partial \psi'}$, $\delta\frac{\partial Z}{\partial \varphi'}$, ..., dus à la variation des constantes.

D'un autre côté, comme, par l'hypothèse, les fonctions de t et des constantes qui représentent les valeurs de ξ, ψ, φ, ... satisfont identiquement aux mêmes équations, sans leurs seconds membres, dans le cas où ces constantes ne varient pas, quelles que soient d'ailleurs leurs

(¹) C'est-à-dire la variation des fonctions qui remplacent ces constantes et qui, dans chaque problème, sont parfaitement déterminées, de telle sorte que leur valeur soit une fonction du temps dont la variation n'a rien d'arbitraire. (*J. Bertrand.*)

valeurs, il est clair que les termes

$$d\frac{\partial Z}{\partial \xi'} - \frac{\partial Z}{\partial \xi}dt, \quad d\frac{\partial Z}{\partial \psi'} - \frac{\partial Z}{\partial \psi}dt, \quad d\frac{\partial Z}{\partial \varphi'} - \frac{\partial Z}{\partial \varphi}dt, \quad \ldots$$

se détruiront d'eux-mêmes et pourront, par conséquent, être effacés.

On aura donc simplement, pour la variation des constantes arbitraires, les équations

$$\delta\frac{\partial Z}{\partial \xi'} = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}dt, \quad \delta\frac{\partial Z}{\partial \psi'} = \frac{\partial \Omega}{\partial \psi}dt, \quad \delta\frac{\partial Z}{\partial \varphi'} = \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}dt, \quad \ldots,$$

qu'il faudra combiner avec les équations données ci-dessus

$$\delta\xi = 0, \quad \delta\psi = 0, \quad \delta\varphi = 0, \quad \ldots.$$

Ces équations, étant en nombre double de celui des variables ξ, ψ, φ, ... et, par conséquent, en même nombre que les constantes arbitraires (art. 2), serviront à déterminer toutes ces constantes devenues variables.

11. Les équations qu'on vient de trouver, étant multipliées respectivement par $\Delta\xi$, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$, ... et ensuite ajoutées ensemble, donnent

$$\begin{aligned}\Delta\xi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \Delta\psi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \Delta\varphi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \ldots \\ = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\Delta\xi + \frac{\partial \Omega}{\partial \psi}\Delta\psi + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \ldots\right)dt.\end{aligned}$$

Ici $\Delta\xi$, $\Delta\psi$, $\Delta\varphi$, ... indiquent, comme dans l'article 4, des différentielles des fonctions ξ, ψ, φ, ... prises en faisant varier seulement les constantes arbitraires d'une manière quelconque, soit qu'elles varient toutes en même temps, ou quelques-unes seulement à volonté.

Or, en regardant Ω comme une fonction de ξ, ψ, φ, ..., on aura, en différentiant par rapport à Δ,

$$\Delta\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\Delta\xi + \frac{\partial \Omega}{\partial \psi}\Delta\psi + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \ldots.$$

Donc on aura

$$\Delta\Omega\,dt = \Delta\xi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \Delta\psi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \Delta\varphi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \ldots.$$

Retranchons du second membre de cette équation la quantité

$$\delta\xi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \delta\psi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \delta\varphi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \ldots,$$

qui est nulle en vertu des équations de condition

$$\delta\xi = 0, \quad \delta\psi = 0, \quad \delta\varphi = 0, \quad \ldots;$$

on aura cette formule générale

$$\begin{aligned}\Delta\Omega\,dt &= \Delta\xi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial \xi'} + \Delta\psi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial \psi'} + \Delta\varphi\,\delta\frac{\partial Z}{\partial \varphi'} + \ldots - \delta\xi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial \xi'} - \delta\psi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial \psi'} - \delta\varphi\,\Delta\frac{\partial Z}{\partial \varphi'} - \ldots \\ &= \Delta\xi\,\delta\frac{\partial T}{\partial \xi'} + \Delta\psi\,\delta\frac{\partial T}{\partial \psi'} + \Delta\varphi\,\delta\frac{\partial T}{\partial \varphi'} + \ldots - \delta\xi\,\Delta\frac{\partial T}{\partial \xi'} - \delta\psi\,\Delta\frac{\partial T}{\partial \psi'} - \delta\varphi\,\Delta\frac{\partial T}{\partial \varphi'} - \ldots,\end{aligned}$$

en changeant Z en T, comme dans l'article 7.

On voit que le second membre de l'équation précédente est la même fonction que nous avons vue devoir être indépendante du temps t (art. 7): d'où il suit qu'après y avoir substitué les valeurs de ξ, ψ, φ, ... en fonctions de t et des constantes arbitraires, on pourra y faire t nul ou égal à une valeur quelconque.

12. Donc, si l'on suppose, ce qui est toujours permis, que ces fonctions, ainsi que celles qui représentent les valeurs de $\frac{\partial T}{\partial \xi'}$, $\frac{\partial T}{\partial \psi'}$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi'}$, ..., soient développées en séries de puissances ascendantes de t, de cette manière

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha + \alpha' t + \alpha'' t^2 + \alpha''' t^3 + \ldots, \\ \psi &= \beta + \beta' t + \beta'' t^2 + \beta''' t^3 + \ldots, \\ \varphi &= \gamma + \gamma' t + \gamma'' t^2 + \gamma''' t^3 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \xi'} &= \lambda + \lambda' t + \lambda'' t^2 + \lambda''' t^3 + \ldots, \\ \frac{\partial T}{\partial \psi'} &= \mu + \mu' t + \mu'' t^2 + \mu''' t^3 + \ldots, \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi'} &= \nu + \nu' t + \nu'' t^2 + \nu''' t^3 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

et qu'on substitue ces valeurs dans le second membre de l'équation de l'article précédent, on pourra y faire $t=0$, ce qui les réduira aux seuls premiers termes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$.

Cette équation se réduira ainsi à la forme

$$\Delta\Omega\, dt = \Delta\alpha\,\delta\lambda + \Delta\beta\,\delta\mu + \Delta\gamma\,\delta\nu + \ldots - \Delta\lambda\,\delta\alpha - \Delta\mu\,\delta\beta - \Delta\nu\,\delta\gamma - \ldots.$$

13. Les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ ne peuvent être que fonctions des constantes arbitraires que la double intégration introduit dans les expressions finies des variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots$, et l'on peut aussi les prendre pour ces mêmes constantes.

En effet, les constantes arbitraires qui donnent à la solution d'un problème de Mécanique toute l'étendue qu'elle peut avoir sont les valeurs initiales des variables, ainsi que celles de leurs différences premières, c'est-à-dire les valeurs de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ et de $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \ldots$, lorsque $t=0$; ces valeurs sont donc, dans les expressions de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ que nous avons adoptées, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha', \beta', \gamma', \ldots$. Or, T étant une fonction donnée de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ et de $\xi' = \frac{d\xi}{dt}, \psi' = \frac{d\psi}{dt}, \varphi' = \frac{d\varphi}{dt}, \ldots$, il est clair qu'en faisant $t=0$ dans les fonctions $\frac{\partial T}{\partial \xi'}, \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \ldots$, ce qui les réduit à $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, ces constantes $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ seront les mêmes fonctions des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \alpha', \beta', \gamma', \ldots$ que les fonctions $\frac{\partial T}{\partial \xi'}, \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \ldots$ le sont des variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots, \xi', \psi', \varphi', \ldots$. Par conséquent, au lieu de prendre immédiatement $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ pour constantes arbitraires, on peut prendre celles-ci, $\lambda, \mu, \nu, \ldots$, qui en dépendent. Ainsi l'on aura $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$, pour les constantes arbitraires des expressions de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$; et l'on voit que le nombre de ces constantes sera précisément double de celui des variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots$.

De cette manière, la différentielle $\Delta\Omega$, dans laquelle la caractéristique Δ ne doit affecter que les constantes arbitraires contenues dans Ω, à raison des valeurs de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ qui renferment ces con-

stantes, deviendra

$$\Delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}\Delta\beta + \frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}\Delta\gamma + \ldots + \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial\Omega}{\partial\mu}\Delta\mu + \frac{\partial\Omega}{\partial\nu}\Delta\nu + \ldots.$$

En la substituant dans le premier membre de l'équation de l'article précédent et ordonnant les termes par rapport aux différences marquées par Δ, on aura

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}dt - \delta\lambda\right)\Delta\alpha + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}dt - \delta\mu\right)\Delta\beta + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}dt - \delta\nu\right)\Delta\gamma + \ldots\\ &+ \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt + \delta\alpha\right)\Delta\lambda + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}dt + \delta\beta\right)\Delta\mu + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}dt + \delta\gamma\right)\Delta\nu + \ldots = 0.\end{aligned}$$

Comme on peut donner aux différences $\Delta\alpha, \Delta\beta, \ldots$ marquées par la caractéristique Δ une valeur quelconque, il faudra que l'équation soit vérifiée indépendamment de ces différences, ce qui donnera autant d'équations particulières, telles que

$$\begin{array}{llll}\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}dt = \delta\lambda, & \frac{\partial\Omega}{\partial\beta}dt = \delta\mu, & \frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}dt = \delta\nu, & \ldots,\\ \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}dt = -\delta\alpha, & \frac{\partial\Omega}{\partial\mu}dt = -\delta\beta, & \frac{\partial\Omega}{\partial\nu}dt = -\delta\gamma, & \ldots.\end{array}$$

14. Les différences marquées par la caractéristique δ sont proprement les différentielles des constantes arbitraires devenues variables (art. 10); ainsi, comme ces différentielles peuvent maintenant être rapportées également au temps t, il est permis et même convenable de changer les δ en d, et l'on aura, pour la détermination des nouvelles variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$, les équations

$$\begin{array}{llll}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}, & \frac{d\beta}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}, & \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\nu}, & \ldots,\\ \frac{d\lambda}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}, & \frac{d\mu}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial\beta}, & \frac{d\nu}{dt} = +\frac{\partial\Omega}{\partial\gamma}, & \ldots,\end{array}$$

qui sont, comme l'on voit, sous une forme très simple, et qui fournissent ainsi la solution la plus simple du problème de la variation des constantes arbitraires.

15. Comme la fonction Ω renferme les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots; \lambda, \mu, \nu, \ldots$, il faudra les regarder aussi comme variables dans les différences partielles de cette fonction; mais, lorsque la valeur de Ω, qui dépend des forces perturbatrices, est supposée fort petite, il est clair que les variations de ces quantités seront aussi fort petites, et qu'on pourra, dans la première approximation, les regarder comme constantes dans les différences partielles de Ω et n'avoir égard à leur variabilité que dans les approximations suivantes.

Dénotons par $a, b, c, \ldots; l, m, n, \ldots$ les parties constantes de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots; \lambda, \mu, \nu, \ldots$, et par $\alpha', \beta', \gamma'; \lambda', \mu', \nu', \ldots$ leurs parties variables, qui, étant de l'ordre de la quantité Ω, seront nécessairement très petites, et soit O la valeur de Ω en y changeant $\alpha, \beta, \gamma, \ldots; \lambda, \mu, \nu, \ldots$ en $a, b, c, \ldots; l, m, n, \ldots$.

On aura ainsi

$$\alpha = a + \alpha', \qquad \beta = b + \beta', \qquad \gamma = c + \gamma', \qquad \ldots,$$
$$\lambda = l + \lambda', \qquad \mu = m + \mu', \qquad \nu = n + \nu', \qquad \ldots,$$

et l'on aura, par le développement,

$$\begin{aligned}\Omega = \mathrm{O} &+ \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial a}\alpha' + \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial b}\beta' + \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial c}\gamma' + \ldots\\ &+ \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial l}\lambda' + \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial m}\mu' + \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial n}\nu' + \ldots\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Les équations différentielles de l'article précédent donneront

$$d\alpha' = -\frac{\partial \Omega}{\partial l}dt, \qquad d\beta' = -\frac{\partial \Omega}{\partial m}dt, \qquad d\gamma' = -\frac{\partial \Omega}{\partial n}dt, \qquad \ldots,$$
$$d\lambda' = +\frac{\partial \Omega}{\partial a}dt, \qquad d\mu' = +\frac{\partial \Omega}{\partial b}dt, \qquad d\nu' = +\frac{\partial \Omega}{\partial c}dt, \qquad \ldots;$$

car il est évident que les différences partielles relatives à $\alpha, \beta, \gamma, \ldots; \lambda, \mu, \nu, \ldots$ peuvent être rapportées aux quantités analogues $a, b, c, \ldots; l, m, n, \ldots$.

Pour la première approximation, on aura

$$\Omega = \mathrm{O},$$

O étant une simple fonction de t; donc on aura par l'intégration

$$\alpha' = -\int \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial l}dt, \qquad \beta' = -\int \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial m}dt, \qquad \gamma' = -\int \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial n}dt, \qquad \ldots,$$
$$\lambda' = +\int \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial a}dt, \qquad \mu' = +\int \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial b}dt, \qquad \nu' = +\int \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial c}dt, \qquad \ldots.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de Ω, on aura, pour la seconde approximation,

$$\begin{aligned}\Omega = \mathrm{O} &+ \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial l}\int \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial a}dt - \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial a}\int \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial l}dt\\ &+ \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial m}\int \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial b}dt - \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial b}\int \frac{\partial \mathrm{O}}{\partial m}dt\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

16. Il y a ici une remarque importante à faire. Si la fonction O ne contient le temps que sous les signes de sinus et cosinus, il est clair que la valeur de Ω ne contiendra, dans la première approximation, que les mêmes sinus et cosinus. Mais on pourrait douter si, dans l'approximation suivante, elle ne contiendrait pas des termes où le temps t serait hors des signes de sinus et de cosinus, et qui, croissant continuellement, augmenteraient à l'infini la valeur de Ω et rendraient, par conséquent, l'approximation fautive.

Pour lever ce doute, nous remarquerons que de pareils termes ne pourraient venir que d'une partie constante de Ω, c'est-à-dire dégagée de tout sinus ou cosinus renfermant le temps t.

Soit donc A cette partie qui sera fonction des constantes arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \ldots; \lambda, \mu, \nu, \ldots$. Ainsi O contiendra une pareille fonction de $a, b, c, \ldots; l, m, n, \ldots$, que nous dénoterons encore par A.

En substituant A au lieu de O dans l'expression de Ω de l'article précédent, on aura la partie de Ω due à la constante A dans la seconde approximation, et cette partie sera

$$A + \frac{\partial A}{\partial l}\frac{\partial A}{\partial a}t - \frac{\partial A}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial l}t + \frac{\partial A}{\partial m}\frac{\partial A}{\partial b}t - \frac{\partial A}{\partial b}\frac{\partial A}{\partial m}t$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où l'on voit que les termes affectés de t se détruisent mutuellement.

Ainsi l'on est assuré que la seconde approximation ne donne dans Ω aucun terme qui croisse avec le temps t; mais il resterait à voir s'il en pourrait naître dans les approximations suivantes.

Au reste, le même terme constant A pourrait donner encore dans Ω des termes multipliés par t, étant combiné avec des termes non constants de la même fonction Ω; mais alors le t qui se trouverait dégagé des sinus et cosinus serait en même temps multiplié par des sinus ou cosinus d'angles proportionnels au temps. La même chose aurait lieu si le coefficient de t sous les signes de sinus et cosinus était fonction des constantes arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, parce qu'alors les différentiations partielles de Ω, relatives à ces constantes, feront sortir t hors des sinus ou cosinus. Mais on peut remarquer, en général, que, lorsque les approximations successives font paraître des termes de la forme dont il s'agit, dans lesquels des sinus ou cosinus se trouvent multipliés par l'angle qui est sous ces sinus ou cosinus, ces sortes de termes sont presque toujours le résultat du développement d'autres sinus ou cosinus, et l'on peut les éviter en intégrant directement les équations différentielles entre les constantes arbitraires devenues variables.

17. Quoique les constantes arbitraires que nous avons employées soient celles qui se présentent le plus naturellement et qui donnent les résultats les plus simples, il arrive souvent que les différentes intégrations introduisent à leur place d'autres constantes, mais qui ne peuvent être que des fonctions de celles-là.

Nous désignerons, en général, les constantes arbitraires qui sont censées entrer dans les expressions des variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ par a, b, c, ..., dont le nombre doit être également double de celui des variables; et, pour avoir les relations entre ces nouvelles constantes et

les premières, il suffira de supposer $t = 0$ dans les valeurs des fonctions $\xi, \psi, \varphi, \ldots; \frac{\partial T}{\partial \xi'}, \frac{\partial T}{\partial \psi'}, \frac{\partial T}{\partial \varphi'}, \cdots$ et d'égaler les résultats aux quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots; \lambda, \mu, \nu, \ldots$. De cette manière on aura autant d'équations entre ces différentes constantes, par lesquelles on pourra déterminer les valeurs de $a, b, c, \ldots$, en fonctions de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots; \lambda, \mu, \nu, \ldots$.

Nous supposerons donc ces fonctions connues, et la différentiation nous donnera tout de suite

$$da = + \frac{\partial a}{\partial \alpha}d\alpha + \frac{\partial a}{\partial \beta}d\beta + \frac{\partial a}{\partial \gamma}d\gamma + \ldots$$
$$+ \frac{\partial a}{\partial \lambda}d\lambda + \frac{\partial a}{\partial \mu}d\mu + \frac{\partial a}{\partial \nu}d\nu + \ldots.$$

Donc, substituant les valeurs trouvées ci-dessus (art. 14) de $d\alpha$, $d\beta$, ..., et divisant par dt, on aura

$$\frac{da}{dt} = + \frac{\partial a}{\partial \lambda}\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial a}{\partial \mu}\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} + \frac{\partial a}{\partial \nu}\frac{\partial \Omega}{\partial \gamma} + \ldots$$
$$- \frac{\partial a}{\partial \alpha}\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda} - \frac{\partial a}{\partial \beta}\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} - \frac{\partial a}{\partial \gamma}\frac{\partial \Omega}{\partial \nu} + \ldots.$$

Il en est de même des valeurs de $\frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}, \cdots$, pour lesquelles il n'y aura qu'à changer dans l'équation précédente a en b, en c, ...

18. Mais ces formules contiennent encore les différences partielles de Ω relatives aux constantes $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, et il s'agit de les changer en différences partielles relatives à $a, b, c, \ldots$, ce qui est facile par les opérations connues.

En effet, comme Ω est censée maintenant fonction de $a, b, c, \ldots$ et que ces quantités sont elles-mêmes fonctions de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots; \lambda, \mu, \nu, \ldots$, on a tout de suite, par l'algorithme des différences partielles,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha} = \frac{\partial \Omega}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Omega}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{\partial \Omega}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial \alpha} + \ldots,$$
$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta} = \frac{\partial \Omega}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \beta} + \frac{\partial \Omega}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \beta} + \frac{\partial \Omega}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial \beta} + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et il n'y aura plus qu'à substituer ces valeurs dans celles de $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \cdots$ de l'article précédent.

En faisant ces substitutions et ordonnant les termes par rapport aux différences partielles de Ω, on voit d'abord que le coefficient de $\frac{\partial\Omega}{\partial a}$ est nul dans la valeur de $\frac{da}{dt}$, que celui de $\frac{\partial\Omega}{\partial b}$ est nul dans la valeur de $\frac{db}{dt}$, ...

Ensuite, si, pour représenter la valeur de $\frac{da}{dt}$, on emploie la formule

$$\frac{da}{dt} = (a, b)\frac{\partial\Omega}{\partial b} + (a, c)\frac{\partial\Omega}{\partial c} + \ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned}(a, b) = &+ \frac{\partial a}{\partial\lambda}\frac{\partial b}{\partial\alpha} + \frac{\partial a}{\partial\mu}\frac{\partial b}{\partial\beta} + \frac{\partial a}{\partial\nu}\frac{\partial b}{\partial\gamma} + \ldots \\ &- \frac{\partial a}{\partial\alpha}\frac{\partial b}{\partial\lambda} - \frac{\partial a}{\partial\beta}\frac{\partial b}{\partial\mu} - \frac{\partial a}{\partial\gamma}\frac{\partial b}{\partial\nu} - \ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a, c) = &+ \frac{\partial a}{\partial\lambda}\frac{\partial c}{\partial\alpha} + \frac{\partial a}{\partial\mu}\frac{\partial c}{\partial\beta} + \frac{\partial a}{\partial\nu}\frac{\partial c}{\partial\gamma} + \ldots \\ &- \frac{\partial a}{\partial\alpha}\frac{\partial c}{\partial\lambda} - \frac{\partial a}{\partial\beta}\frac{\partial c}{\partial\mu} - \frac{\partial a}{\partial\gamma}\frac{\partial c}{\partial\nu} - \ldots,\end{aligned}$$

....

Et, pour avoir la valeur de $\frac{db}{dt}$, il n'y aura qu'à changer dans ces formules a en b et b en a, en remarquant que l'on a

$$(b, a) = -(a, b);$$

on aura ainsi

$$\frac{db}{dt} = -(a, b)\frac{\partial\Omega}{\partial a} + (b, c)\frac{\partial\Omega}{\partial c} + \ldots,$$

..................................,

$$\begin{aligned}(b, c) = &+ \frac{\partial b}{\partial\lambda}\frac{\partial c}{\partial\alpha} + \frac{\partial b}{\partial\mu}\frac{\partial c}{\partial\beta} + \frac{\partial b}{\partial\nu}\frac{\partial c}{\partial\gamma} + \ldots \\ &- \frac{\partial b}{\partial\alpha}\frac{\partial c}{\partial\lambda} - \frac{\partial b}{\partial\beta}\frac{\partial c}{\partial\mu} - \frac{\partial b}{\partial\gamma}\frac{\partial c}{\partial\nu} - \ldots,\end{aligned}$$

....

En général, si k représente une quelconque des constantes arbitraires $a, b, c, \ldots$, et qu'on observe que la valeur des symboles représentés par deux crochets devient nulle lorsque les deux lettres renfermées entre les crochets sont identiques, et qu'elle change simplement de signe lorsqu'on change l'ordre de ces lettres, on aura ces formules générales

$$\frac{dk}{dt} = (k, a)\frac{\partial\Omega}{\partial a} + (k, b)\frac{\partial\Omega}{\partial b} + (k, c)\frac{\partial\Omega}{\partial c} + \ldots,$$

$$\begin{aligned}(k, a) = &+ \frac{\partial k}{\partial\lambda}\frac{\partial a}{\partial\alpha} + \frac{\partial k}{\partial\mu}\frac{\partial a}{\partial\beta} + \frac{\partial k}{\partial\nu}\frac{\partial a}{\partial\gamma} + \ldots \\ &- \frac{\partial k}{\partial\alpha}\frac{\partial a}{\partial\lambda} - \frac{\partial k}{\partial\beta}\frac{\partial a}{\partial\mu} - \frac{\partial k}{\partial\gamma}\frac{\partial a}{\partial\nu} - \ldots,\end{aligned}$$

....

19. Le principal usage de ces formules est dans la théorie des planètes, pour calculer l'effet de leurs perturbations en le réduisant à la variation des constantes arbitraires qui sont les éléments du mouvement primitif. Elles sont surtout utiles pour déterminer les variations que les astronomes appellent *séculaires*, parce qu'elles ont des périodes très longues et indépendantes de celles qui ont lieu dans les variables primitives.

Comme les équations de l'article 18 ne contiennent d'autres fonctions du temps que les différences partielles de la fonction Ω, si l'on cherche, par la résolution en séries ou autrement, la partie A de la fonction Ω qui est indépendante du temps t et ne contient que les constantes arbitraires $a, b, c, \ldots$, il suffira de substituer dans ces équations A au lieu de Ω, et l'on aura directement les équations entre les quantités $a, b, c, \ldots$, devenues variables, et le temps t, lesquelles serviront à déterminer leurs variations séculaires, parce qu'elles sont débarrassées de tout sinus ou cosinus.

§ III. — *Où l'on démontre une propriété importante de la quantité qui exprime la force vive dans un système troublé par des forces perturbatrices.*

20. Les constantes arbitraires dont nous venons de donner les variations dépendent de la nature de chaque problème et ne peuvent être déterminées que dans les cas particuliers. Il y en a cependant une qui a lieu, en général, pour tous les problèmes où V n'est fonction que de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$, c'est celle que l'intégration doit ajouter à t; car, comme les équations différentielles ne renferment alors que l'élément dt, il est clair que, dans les expressions finies des variables en fonction de t, on peut toujours mettre t plus une constante arbitraire à la place de t.

Désignons cette constante par K et rapportons-y les différences marquées par la caractéristique Δ dans la formule générale de l'article 11. On aura ainsi

$$\Delta\Omega = \frac{\partial\Omega}{\partial K}\Delta K, \qquad \Delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial K}\Delta K, \qquad \Delta\psi = \frac{\partial\psi}{\partial K}\Delta K, \qquad \ldots.$$

Mais, puisque $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ sont fonctions de $t + K$, il est clair qu'on aura

$$\frac{\partial\xi}{\partial K} = \frac{d\xi}{dt} = \xi'$$

et, de même,

$$\frac{\partial\psi}{\partial K} = \frac{d\psi}{dt} = \psi', \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial K} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi', \qquad \ldots.$$

Donc

$$\Delta\xi = \xi'\Delta K, \qquad \Delta\psi = \psi'\Delta K, \qquad \Delta\varphi = \varphi'\Delta K, \qquad \ldots.$$

Par la même raison, on aura

$$\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'} = \frac{d\frac{\partial Z}{\partial\xi'}}{dt}\Delta K, \qquad \Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'} = \frac{d\frac{\partial Z}{\partial\psi'}}{dt}\Delta K, \qquad \ldots.$$

Mais les équations différentielles de l'article 3 donnent

$$\frac{d\frac{\partial Z}{\partial\xi'}}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial\xi}, \qquad \frac{d\frac{\partial Z}{\partial\psi'}}{dt} = \frac{\partial Z}{\partial\psi}, \qquad \ldots.$$

Donc on aura

$$\Delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'} = \frac{\partial Z}{\partial\xi}\Delta K, \qquad \Delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'} = \frac{\partial Z}{\partial\psi}\Delta K, \qquad \ldots.$$

Ainsi la formule générale de l'article 11 deviendra par ces substitutions, et après la division par ΔK,

$$\frac{\partial\Omega}{\partial K}dt = \xi'\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'} + \psi'\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'} + \varphi'\delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'} + \ldots - \frac{\partial Z}{\partial\xi}\delta\xi - \frac{\partial Z}{\partial\psi}\delta\psi - \frac{\partial Z}{\partial\varphi}\delta\varphi - \ldots.$$

Or on a

$$\begin{aligned}&\xi'\delta\frac{\partial Z}{\partial\xi'} + \psi'\delta\frac{\partial Z}{\partial\psi'} + \varphi'\delta\frac{\partial Z}{\partial\varphi'} + \ldots \\ &\quad = \delta\left(\xi'\frac{\partial Z}{\partial\xi'} + \psi'\frac{\partial Z}{\partial\psi'} + \varphi'\frac{\partial Z}{\partial\varphi'} + \ldots\right) - \frac{\partial Z}{\partial\xi'}\delta\xi' - \frac{\partial Z}{\partial\psi'}\delta\psi' - \frac{\partial Z}{\partial\varphi'}\delta\varphi' - \ldots;\end{aligned}$$

et comme Z est censée fonction de $\xi, \psi, \varphi, \ldots$ et de $\xi', \psi', \varphi', \ldots$, on aura

$$\begin{aligned}\delta Z = &+ \frac{\partial Z}{\partial\xi}\delta\xi + \frac{\partial Z}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial Z}{\partial\varphi}\delta\varphi + \ldots \\ &+ \frac{\partial Z}{\partial\xi'}\delta\xi' + \frac{\partial Z}{\partial\psi'}\delta\psi' + \frac{\partial Z}{\partial\varphi'}\delta\varphi' + \ldots.\end{aligned}$$

Donc l'équation précédente deviendra

$$\frac{\partial\Omega}{\partial K}dt = \delta\left(\xi'\frac{\partial Z}{\partial\xi'} + \psi'\frac{\partial Z}{\partial\psi'} + \varphi'\frac{\partial Z}{\partial\varphi'} + \ldots - Z\right),$$

dont le second membre doit être une fonction des constantes arbitraires, indépendante de t.

21. En effet, si l'on change Z en T — V et $\xi', \psi', \varphi', \ldots$ en $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \ldots$ (art. 3), il est facile de voir que la quantité

$$\xi'\frac{\partial Z}{\partial\xi'} + \psi'\frac{\partial Z}{\partial\psi'} + \varphi'\frac{\partial Z}{\partial\varphi'} + \ldots - Z$$

sera la même chose que la quantité

$$\frac{\delta T}{\delta d\xi} d\xi + \frac{\delta T}{\delta d\psi} d\psi + \frac{\delta T}{\delta d\varphi} d\varphi + \ldots - T + V,$$

que nous avons vue être toujours égale à une constante et qui se réduit à $T+V$ (Sect. IV, art. 14), d'où résulte l'équation $T+V=H$, laquelle exprime la conservation des forces vives du système.

Ainsi, en prenant H pour une des constantes arbitraires, on aura, pour sa variation due aux forces perturbatrices contenues dans la fonction Ω, cette formule très simple

$$dH = \frac{\partial\Omega}{\partial K} dt.$$

22. On pourrait aussi arriver à cette formule par un chemin plus court. En effet, si l'on reprend les équations de l'article 8, qu'on les ajoute ensemble après les avoir multipliées respectivement par $d\xi, d\psi, d\varphi, \ldots$, et qu'on intègre en employant les mêmes réductions que nous avons pratiquées dans l'article 14 de la Section précédente, on parviendra directement à l'équation

$$T + V = H \int \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} d\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial\psi} d\psi + \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi} d\varphi + \ldots \right),$$

dans laquelle la quantité qui est sous le signe n'est pas intégrable en général, parce que la fonction Ω, à cause de la mobilité qu'on peut supposer aux centres des forces perturbatrices, est censée contenir, outre les variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots$, encore d'autres variables indépendantes de celles-là.

Dans le cas où il n'y a point de forces perturbatrices, on a simplement

$$T + V = H.$$

Or il est évident qu'on peut conserver cette forme à l'intégrale qu'on vient de trouver, en rendant variable la constante H et en faisant

$$dH = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi} d\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial\psi} d\psi + \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi} d\varphi + \ldots;$$

mais il est visible que la quantité

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} d\xi + \frac{\partial\Omega}{\partial\psi} d\psi + \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi} d\varphi + \ldots$$

n'est autre chose que la différentielle de Ω, en ne faisant varier que les quantités $\xi, \psi, \varphi, \ldots$, qui dépendent des équations différentielles primitives et qui sont supposées connues en fonctions de $t+K$, en nommant K, comme dans l'article 20, la constante qui peut toujours s'ajouter à la variable t. Ainsi, comme les variables ξ, ψ, φ ne varient qu'avec le temps t, il est facile de voir que la quantité dont il s'agit sera la même chose que $\frac{\partial\Omega}{\partial K} dt$; par conséquent, on aura, comme plus haut, l'équation

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial K}.$$

23. Cette équation peut donc aussi se mettre sous la forme

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial t},$$

pourvu que, dans la différence partielle de Ω, on ne fasse varier le t qu'autant qu'il est contenu dans les expressions des variables $\xi, \psi, \varphi, \ldots$; et il résulte de cette formule que, si la fonction Ω ne contient le temps t que sous les signes de sinus et cosinus, comme cela a lieu dans la théorie des planètes, l'expression de $\frac{\partial\Omega}{\partial t}$ ne pourra contenir que des termes périodiques, parce que tout terme constant de Ω s'en ira par la différentiation relative à t. Ainsi, dans la première approximation, où l'on regarde comme absolument constantes les constantes arbitraires qui entrent dans la fonction Ω, l'intégrale de $\frac{\partial\Omega}{\partial t} dt$, c'est-à-dire la valeur de H, ne pourra pas contenir des termes tels que Nt qui croissent avec le temps t. Nous avons vu plus haut (art. 16) que la seconde approximation ne peut donner à Ω aucun terme qui ne soit périodique; donc la même conclusion relative à la valeur de H aura lieu encore dans le seconde approximation.

24. La quantité T exprime la force vive du système, et elle est égale à H — V. Lorsque le système n'est troublé par aucune force perturbatrice, la quantité H est constante, et la force vive ne dépend que des forces accélératrices contenues dans l'expression de V, comme on l'a vu (Sect. III, art. 34). Cette quantité devient variable quand il y a des forces perturbatrices, par conséquent la force vive sera altérée par l'action de ces forces; mais, par ce que nous venons de démontrer, on voit que ses altérations ne pourront être que périodiques si l'expression des forces perturbatrices est périodique, du moins dans les deux premières approximations. Ce résultat est d'une grande importance dans le calcul des perturbations.

SECTION SIXIÈME.

SUR LES OSCILLATIONS TRÈS PETITES D'UN SYSTÈME QUELCONQUE DE CORPS.

Les équations différentielles du mouvement d'un système quelconque de corps sont toujours intégrables dans le cas où les corps ne s'écartent que très peu de leurs points d'équilibre; et l'on peut alors déterminer les lois des oscillations de tout le système. L'analyse générale de ce cas, qui est très étendu, et la solution de quelques-uns des principaux problèmes qui s'y rapportent sont l'objet de cette Section.

§ I. — *Solution générale du problème des oscillations très petites d'un système de corps autour de leurs points d'équilibre.*

1. Soient a, b, c les valeurs des coordonnées rectangles x, y, z de chaque corps m du système proposé dans le lieu de son équilibre. Comme on suppose que le système, dans son mouvement, s'éloigne très peu de sa situation d'équilibre, on aura, en général,

$$x = a + \alpha, \qquad y = b + \beta, \qquad z = c + \gamma,$$

les variables α, β, γ étant toujours très petites; il suffira, par conséquent, d'avoir égard à la première dimension de ces quantités dans les équations différentielles du mouvement. La même chose aura lieu pour les autres quantités analogues, qu'on distingue par un, deux, ... traits, relativement aux différents corps m′, m″, ... du même système.

Considérons d'abord les équations de condition qui doivent avoir lieu par la nature du système, et qu'on peut représenter par

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad \ldots,$$

L, M, ... étant des fonctions algébriques données des coordonnées x,