ŒUVRES

DE LAGRANGE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES DE LAGRANGE,

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE M. J.-A. SERRET

(t. I-X et XIII)

ET

DE M. GASTON DARBOUX,

SOUS LES AUSPICES DE

M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME ONZIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

MDCCCLXXXVIII

ŒUVRES

DE LAGRANGE.

CINQUIÈME SECTION.

(SUITE.)

OUVRAGES DIDACTIQUES.

MÉCANIQUE
ANALYTIQUE.

QUATRIÈME ÉDITION,

D'APRÈS LA TROISIÈME ÉDITION DE 1853 PUBLIÉE PAR M. BERTRAND.

TOME PREMIER.

MÉCHANIQUE
ANALITIQUE;

Par M. DE LA GRANGE, de l'Académie des Sciences de Paris, de celles de Berlin, de Pétersbourg, de Turin, &c.

A PARIS,

Chez LA VEUVE DESAINT, Libraire, rue du Foin S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

AVERTISSEMENT

DE LA PREMIÈRE ÉDITION.

On a déjà plusieurs Traités de Méchanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème. J'espère que la manière dont j'ai tâché de remplir cet objet ne laissera rien à désirer.

Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité : il réunira et présentera sous un même point de vue les différents principes trouvés jusqu'ici pour faciliter la solution des questions de Méchanique, en montrera la liaison et la dépendance mutuelle, et mettra à portée de juger de leur justesse et de leur étendue.

Je le divise en deux Parties : la Statique ou la Théorie de l'Équilibre, et la Dynamique ou la Théorie du Mouvement; et chacune de ces Parties traitera séparément des corps solides et des fluides.

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou méchaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse verront avec plaisir la Méchanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine.

EXTRAIT DES REGISTRES
DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Du vingt-sept février mil sept cent quatre-vingt-huit.

Messieurs DE LA PLACE, COUSIN, LE GENDRE et moi, ayant rendu compte d'un Ouvrage intitulé : *Méchanique analitique*, par M. DE LA GRANGE, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de son approbation, et d'être imprimé sous son Privilège.

Je certifie cet Extrait conforme aux registres de l'Académie. A Paris, ce 27 février 1788.

LE MARQUIS DE CONDORCET.

AVERTISSEMENT
DE LA DEUXIÈME ÉDITION.

On a déjà plusieurs Traités de Mécanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette Science, et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales, dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème.

Cet Ouvrage aura d'ailleurs une autre utilité : il réunira et présentera sous un même point de vue les différents principes trouvés jusqu'ici pour faciliter la solution des questions de Mécanique, en montrera la liaison et la dépendance mutuelle, et mettra à portée de juger de leur justesse et de leur étendue.

Je le divise en deux Parties : la Statique ou la Théorie de l'Équilibre, et la Dynamique ou la Théorie du Mouvement; et, dans chacune de ces Parties, je traite séparément des corps solides et des fluides.

On ne trouvera point de Figures dans cet Ouvrage. Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques, mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'Analyse verront avec plaisir la Mécanique en devenir une nouvelle branche, et me sauront gré d'en avoir étendu ainsi le domaine.

Tel est le plan que j'avais tâché de remplir dans la première édition de ce Traité, publiée en 1788. Celle-ci est, à plusieurs égards, un Ouvrage nouveau, sur le même plan, mais plus ample. On a donné plus de développement aux principes et aux formules générales, et plus d'étendue aux applications, dans lesquelles on trouvera la solution des principaux problèmes qui sont du ressort de la Mécanique.

On a conservé la notation ordinaire du Calcul différentiel, parce qu'elle répond au système des infiniment petits, adopté dans ce Traité. Lorsqu'on a bien conçu l'esprit de ce système, et qu'on s'est convaincu de l'exactitude de ses résultats par la méthode géométrique des premières et dernières raisons, ou par la méthode analytique des fonctions dérivées, on peut employer les infiniment petits comme un instrument sûr et commode pour abréger et simplifier les démonstrations. C'est ainsi qu'on abrège les démonstrations des Anciens par la méthode des indivisibles.

Nous allons indiquer les principales augmentations qui distinguent cette édition de la précédente.

La première Section de la première Partie contient une analyse plus complète des trois principes de la Statique, avec des remarques nouvelles sur la nature et la liaison de ces principes; elle est terminée par une démonstration directe du principe des vitesses virtuelles, et tout à fait indépendante des deux autres principes.

Dans la deuxième Section, on démontre d'une manière plus rigoureuse que le principe des vitesses virtuelles, pour un nombre quelconque de forces en équilibre, peut se déduire du cas où il n'y a que deux forces, ce qui ramène directement ce principe à celui du levier; on réduit à une forme plus générale les équations qui résultent de ce principe, et l'on donne les conditions nécessaires pour qu'un système de forces soit équivalent à un autre système de forces et puisse le remplacer.

Dans la troisième Section, on établit d'une manière plus directe les formules des mouvements instantanés de rotation et de la composition de ces mouvements, et l'on en déduit la théorie des moments et de leur composition; on y expose une propriété peu connue du centre de gravité, et l'on donne une nouvelle démonstration des maxima et minima qui ont lieu dans l'état d'équilibre.

La quatrième Section contient des formules plus générales et plus simples pour la solution des problèmes qui dépendent de la méthode des variations; et, par la comparaison de ces formules avec celles de l'équilibre des corps de figure variable, on y montre comment les questions relatives à leur équilibre rentrent dans la classe de celles qui sont connues sous le nom de *problème général des isopérimètres*, et se résolvent de la même manière.

La cinquième Section offre quelques problèmes nouveaux et des remarques importantes sur quelques-unes des solutions déjà données dans la première édition.

Dans la sixième Section, on a ajouté quelques détails à l'analyse historique des principes de l'Hydrostatique.

On a donné, dans la septième Section, plus de rigueur et de généralité au calcul des variations des molécules d'un fluide, et l'on a rendu beaucoup plus simple l'analyse des termes qui se rapportent aux limites de la masse fluide; on a déduit de ces termes la théorie de l'action des fluides sur les solides qu'ils recouvrent ou sur les parois des vases qui les renferment, et l'on en a tiré une démonstration directe de ce théorème que, dans l'équilibre d'un solide avec un fluide, les forces qui agissent sur le solide sont les mêmes que si le fluide ne formait qu'une seule masse avec le solide. On a ajouté aussi, tant dans cette Section que dans la suivante, qui traite de l'équilibre des fluides élastiques, quelques applications des formules générales de l'équilibre des fluides.

La deuxième Partie, qui contient la Dynamique, offre un plus grand nombre d'augmentations.

Dans la première Section, on a rendu plus complète et plus exacte dans quelques points l'analyse historique des principes de la Dynamique.

Il y a dans la deuxième Section une addition importante, où l'on montre dans quels cas la formule générale de la Dynamique et, par conséquent aussi, les équations qui en résultent pour le mouvement d'un système de corps sont indépendantes de la position des axes des coordonnées dans l'espace, ce qui donne le moyen de compléter une solution où l'on aurait supposé nulles quelques constantes, par l'introduction de trois nouvelles constantes arbitraires.

Dans la troisième Section, on a donné plus d'extension aux propriétés relatives au mouvement du centre de gravité et aux aires décrites par un système de corps; on y a ajouté la théorie des axes principaux ou de rotation uniforme, déduite de la considération des mouvements instantanés de rotation par une analyse différente de celle qu'on y avait employée jusqu'ici; et l'on y démontre quelques théorèmes nouveaux sur la rotation d'un corps solide ou d'un système de corps, lorsqu'elle dépend d'une impulsion primitive.

La quatrième Section est, à peu de chose près, la même que dans la première édition.

Mais la cinquième Section est entièrement nouvelle; elle renferme la théorie de la variation des constantes arbitraires, qui a fait l'objet

de trois Mémoires imprimés parmi ceux de la première Classe de l'Institut pour l'année 1808, mais présentée d'une manière plus simple et comme une méthode générale d'approximation pour tous les problèmes de Mécanique où il y a des forces perturbatrices peu considérables par rapport aux forces principales.

Nous observerons ici, pour donner à cette théorie toute l'étendue dont elle est susceptible, que la fonction V, qui dépend des forces principales, ne peut être qu'une fonction exacte des seules variables indépendantes ξ, ψ, φ, ... et du temps t, mais qu'il n'est pas nécessaire que la fonction désignée par Ω, et qui dépend des forces perturbatrices, soit aussi de la même nature. Quelles que soient ces forces, si on les décompose, pour chaque corps m du système, en trois X, Y, Z, suivant les coordonnées x, y, z, et tendantes à les augmenter, il n'y aura qu'à réduire ces coordonnées en fonctions des variables indépendantes ξ, ψ, φ, ..., et l'on pourra substituer à la place des différences partielles $\frac{\partial\Omega}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial\psi}$, ... les sommes respectives

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\left(X\frac{\partial x}{\partial\xi}+Y\frac{\partial y}{\partial\xi}+Z\frac{\partial z}{\partial\xi}\right),\qquad \mathrm{S}\,\mathrm{m}\left(X\frac{\partial x}{\partial\psi}+Y\frac{\partial y}{\partial\psi}+Z\frac{\partial z}{\partial\psi}\right),\qquad \ldots,$$

et, par conséquent, à la place de $\Delta\Omega$, la quantité

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\,(X\,\Delta x+Y\,\Delta y+Z\,\Delta z),$$

où la caractéristique Δ se rapporte aux constantes arbitraires; de sorte qu'on pourra changer $\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha}$ en

$$\mathrm{S}\,\mathrm{m}\left(X\frac{\partial x}{\partial\alpha}+Y\frac{\partial y}{\partial\alpha}+Z\frac{\partial z}{\partial\alpha}\right),$$

et ainsi des autres différences partielles de Ω. De cette manière, la méthode sera applicable à des forces perturbatrices représentées par des variables quelconques.

Enfin la sixième Section, qui est la dernière de ce Volume, et qui répond au paragraphe premier de la cinquième Section de l'édition précédente, est augmentée de différentes remarques, et surtout de la solution de quelques problèmes sur les oscillations très petites des corps; elle est terminée par la théorie des cordes vibrantes, que j'avais donnée dans le premier Volume des *Mémoires de Turin*, et qui est présentée ici d'une manière plus simple et à l'abri des objections que d'Alembert avait faites contre cette théorie, dans le premier Volume de ses *Opuscules*.

AVERTISSEMENT

DE LA TROISIÈME ÉDITION.

La *Mécanique analytique* est un Ouvrage de premier ordre dont nous n'avons pas besoin de faire ici l'éloge. Il nous suffira de rappeler que les géomètres le regardent, d'un commun accord, comme le chef-d'œuvre de son illustre auteur.

La netteté et l'élégance du style, non moins que l'enchaînement méthodique des diverses parties, témoignent assez que Lagrange ne s'est pas contenté de mettre au jour des idées neuves et fécondes, et que la rédaction même et la revision des détails ont été pour lui l'objet d'un soin minutieux.

En lisant les notes très courtes placées au bas des pages, on verra cependant qu'un assez grand nombre d'inadvertances subsistaient dans la deuxième édition. J'ai cru devoir les signaler. Mais cette critique minutieuse, qui porte parfois sur le sens d'un mot ou sur quelques termes d'une formule, n'implique dans aucun cas l'idée d'une *opinion* opposée à celle de Lagrange, et que j'aurais la hardiesse de proposer au lecteur. Toutes mes notes ont pour but de développer le sens du texte lorsqu'il ne me semble pas assez clair, ou de le rectifier dans des cas où l'incorrection n'est pas douteuse.

Lorsque les progrès de la Science ont exigé des développements plus considérables, les Notes ont été renvoyées à la fin du Volume. Les lecteurs me sauront gré d'y avoir placé, tout d'abord, deux dissertations remarquables publiées déjà dans le *Journal de M. Liouville* par M. Poinsot et M. Dirichlet, qui critiquent l'un et l'autre, avec beaucoup de justesse, des passages importants de la première Partie, et indiquent en même temps de quelle manière il convient de les modifier.

En reproduisant ces écrits, dans lesquels une partie de la tâche que je m'étais imposée se trouve accomplie avec tant de supériorité, je suis heureux de penser que cette nouvelle édition se trouve, en quelque sorte, placée sous le patronage de deux noms illustres.

Paris, le 15 juin 1853.

J. BERTRAND.

AVERTISSEMENT

DE LA QUATRIÈME ÉDITION.

Au moment de publier cette nouvelle édition de la *Mécanique analytique*, nous avons pour premier devoir de rendre hommage au géomètre éminent qui avait entrepris en 1867 la publication des *Œuvres de Lagrange* et qui n'aura pas eu la joie de la voir complètement terminée. Par les tendances et les affinités de son esprit, M. Serret était admirablement préparé à remplir la tâche qui lui avait été confiée. Recherchant avant tout la précision et l'élégance de l'analyse, il avait cultivé ces qualités précieuses qu'il possédait comme un don naturel, et les avait encore augmentées par l'étude attentive, longtemps poursuivie, d'un maître incomparable. Si, plus tard, comme nous aimons à l'espérer, nos descendants lisent encore les meilleurs travaux de notre époque, plus d'un sans doute, confondant un peu les dates, sera tenté de considérer M. Serret comme un continuateur et comme un élève de Lagrange. Toutes les obligations que le devoir et l'affection imposent à un disciple pieux et fidèle, M. Serret les a en effet remplies vis-à-vis de notre grand géomètre. S'inspirant de son esprit, il a développé ou continué plusieurs de ses recherches; et surtout il lui a élevé le plus beau monument en publiant, avec l'appui du Gouvernement, cette magistrale édition des *Œuvres de Lagrange*, pour laquelle il n'a épargné aucun soin, aucun travail, aucun sacrifice.

Chargé de terminer son œuvre, nous nous sommes conformé à ses intentions, et au vœu unanime des géomètres, en reproduisant la belle édition que M. Joseph Bertrand a donnée, en 1853, de la *Mécanique analytique*. Les notes dont M. Bertrand a accompagné le texte, celles qu'il a placées à la fin des deux Volumes, ont été lues et étudiées par tous les géomètres; on nous aurait reproché de ne pas conserver cet admirable commentaire, digne d'un Ouvrage qui méritera toujours d'être regardé comme une des plus belles productions de la Science française.

Un jeune géomètre, M. G. Robin, qui s'est déjà fait connaître avantageusement par plusieurs travaux de Physique mathématique, a bien voulu nous aider dans la correction des épreuves. Nous nous empressons de le remercier ici du concours dévoué qu'il nous a prêté et qui nous a été très utile.

Paris, le 24 juin 1888.

GASTON DARBOUX.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

LA STATIQUE.

SECTION PREMIÈRE.

SUR LES DIFFÉRENTS PRINCIPES DE LA STATIQUE.

La Statique est la science de l'équilibre des forces. On entend, en général, par *force* ou *puissance* la cause, quelle qu'elle soit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps auquel on la suppose appliquée; et c'est aussi par la quantité du mouvement imprimé, ou prêt à imprimer, que la force ou puissance doit s'estimer. Dans l'état d'équilibre, la force n'a pas d'exercice actuel; elle ne produit qu'une simple tendance au mouvement; mais on doit toujours la mesurer par l'effet qu'elle produirait si elle n'était pas arrêtée. En prenant une force quelconque ou son effet pour l'unité, l'expression de toute autre force n'est plus qu'un rapport, une quantité mathématique, qui peut être représentée par des nombres ou des lignes; c'est sous ce point de vue que l'on doit considérer les forces dans la Mécanique.

L'équilibre résulte de la destruction de plusieurs forces qui se combattent et qui anéantissent réciproquement l'action qu'elles exercent les unes sur les autres; et le but de la Statique est de donner les lois suivant lesquelles cette destruction s'opère. Ces lois sont fondées sur des principes généraux qu'on peut réduire à trois : celui du *levier*, celui de la *composition des forces*, et celui des *vitesses virtuelles*.

1. Archimède, le seul parmi les anciens qui nous ait laissé une théorie de l'équilibre, dans ses deux Livres *de Æquiponderantibus*, ou *de Planorum æquilibriis*, est l'auteur du principe du levier, lequel consiste, comme le savent tous les mécaniciens, en ce que si un levier droit est chargé de deux poids quelconques placés, de part et d'autre du point d'appui, à des distances de ce point réciproquement proportionnelles aux mêmes poids, ce levier sera en équilibre, et son appui sera chargé de la somme des deux poids. Archimède prend ce principe, dans le cas des poids égaux placés à des distances égales du point d'appui, pour un axiome de Mécanique évident de soi-même, ou du moins pour un principe d'expérience; et il ramène à ce cas simple et primitif celui des poids inégaux, en imaginant ces poids, lorsqu'ils sont commensurables, divisés en plusieurs parties toutes égales entre elles, et en supposant que les parties de chaque poids soient séparées et transportées, de part et d'autre, sur le même levier, à des distances égales, en sorte que le levier se trouve chargé de plusieurs petits poids égaux et placés à distances égales autour du point d'appui. Ensuite il démontre la vérité du même théorème pour les poids incommensurables, à l'aide de la méthode d'exhaustion, en faisant voir qu'il ne saurait y avoir équilibre entre ces poids, à moins qu'ils ne soient en raison inverse de leurs distances au point d'appui.

Quelques auteurs modernes, comme Stevin dans sa Statique, et Galilée dans ses Dialogues sur le mouvement, ont rendu la démonstration d'Archimède plus simple, en supposant que les poids attachés au levier soient deux parallélépipèdes horizontaux pendus par leur milieu, et dont les largeurs et les hauteurs soient égales, mais dont les longueurs soient doubles des bras de levier qui leur répondent inversement. Car, de cette manière, les deux parallélépipèdes sont en raison inverse de

leurs bras de levier, et en même temps ils se trouvent placés bout à bout, en sorte qu'ils n'en forment plus qu'un seul, dont le point du milieu répond précisément au point d'appui du levier. Archimède avait déjà employé une considération semblable pour déterminer le centre de gravité d'une grandeur composée de deux surfaces paraboliques, dans la première proposition du second Livre de l'Équilibre des plans.

D'autres auteurs, au contraire, ont cru trouver des défauts dans la démonstration d'Archimède, et ils l'ont tournée de différentes façons pour la rendre plus rigoureuse; mais il faut convenir qu'en altérant la simplicité de cette démonstration, ils n'y ont presque rien ajouté du côté de l'exactitude.

Cependant, parmi ceux qui ont cherché à suppléer à la démonstration d'Archimède, sur l'équilibre du levier, on doit distinguer Huygens, dont on a un petit écrit intitulé : *Demonstratio æquilibrii bilancis* [1], et imprimé en 1693 dans le Recueil des anciens *Mémoires de l'Académie des Sciences*.

Huygens observe qu'Archimède suppose tacitement que, si plusieurs poids égaux sont appliqués à un levier horizontal, à distances égales les uns des autres, ils exercent la même force pour incliner le levier, soit qu'ils se trouvent tous du même côté du point d'appui, soit qu'ils soient les uns d'un côté et les autres de l'autre côté du point d'appui; et, pour éviter cette supposition précaire, au lieu de distribuer, comme Archimède, les parties aliquotes des deux poids commensurables sur le même levier, de part et d'autre des points où les poids entiers sont censés appliqués, il les distribue de la même manière, mais sur deux autres leviers horizontaux, et placés perpendiculairement aux extrémités du levier principal, en forme de T : de cette manière, on a un plan horizontal chargé de plusieurs poids égaux, et qui est évidemment en équilibre sur la ligne du premier levier, parce que les poids se trouvent distribués également et symétriquement des deux côtés de cette

[1] Cet écrit d'Huygens fait partie de ses *Œuvres* publiées par S'Gravesande en 1724 (Lyon), t. Ier, p. 282. (*J. Bertrand.*)

ligne. Mais Huygens démontre que ce plan est aussi en équilibre sur une droite inclinée à celle-là, et passant par le point qui divise le levier primitif en parties réciproquement proportionnelles aux poids dont il est supposé chargé, parce qu'il fait voir que les petits poids se trouvent aussi placés à distances égales de part et d'autre de la même droite : d'où il conclut que le plan et par conséquent le levier proposé doivent être en équilibre sur le même point.

Cette démonstration est ingénieuse, mais elle ne supplée pas entièrement à ce qu'on peut, en effet, désirer dans celle d'Archimède.

2. L'équilibre d'un levier droit et horizontal, dont les extrémités sont chargées de poids égaux, et dont le point d'appui est au milieu du levier, est une vérité évidente par elle-même, parce qu'il n'y a pas de raison pour que l'un des poids l'emporte sur l'autre, tout étant égal de part et d'autre du point d'appui. Il n'en est pas de même de la supposition que la charge de l'appui soit égale à la somme des deux poids. Il paraît que tous les mécaniciens l'ont prise comme un résultat de l'expérience journalière, qui apprend que le poids d'un corps ne dépend que de sa masse totale, et nullement de sa figure (¹). On peut néanmoins déduire cette vérité de la première, en considérant, comme Huygens, l'équilibre d'un plan sur une ligne.

Pour cela, il n'y a qu'à imaginer un plan triangulaire chargé de deux poids égaux aux deux extrémités de sa base, et d'un poids double à son sommet. Ce plan sera évidemment en équilibre, étant appuyé sur une ligne droite ou axe fixe, qui passe par le milieu des deux côtés du triangle; car on peut regarder chacun de ces côtés comme un levier chargé dans ses deux extrémités de deux poids égaux, et qui a son point d'appui sur l'axe qui passe par son milieu. Maintenant on peut envisager cet équilibre d'une autre manière, en regardant la base

(¹) D'Alembert est, je crois, le premier qui ait cherché à démontrer cette proposition; mais la démonstration qu'il en a donnée dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1769 n'est pas entièrement satisfaisante. Celle que M. Fourier a donnée depuis dans le Vᵉ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* est rigoureuse et très ingénieuse; mais elle n'est pas tirée de la nature du levier. (*Note de Lagrange.*)

même du triangle comme un levier dont les extrémités sont chargées de deux poids égaux, et en imaginant un levier transversal qui joigne le sommet du triangle et le milieu de sa base en forme de T, dont une des extrémités soit chargée du poids double placé au sommet, et l'autre serve de point d'appui au levier qui forme la base. Il est évident que ce dernier levier sera en équilibre sur le levier transversal qui le soutient dans son milieu, et que celui-ci sera, par conséquent, en équilibre sur l'axe sur lequel le plan est déjà en équilibre. Or, comme l'axe passe par le milieu des deux côtés du triangle, il passera aussi nécessairement par le milieu de la droite menée du sommet du triangle au milieu de sa base; donc le levier transversal aura son point d'appui dans le point de milieu et devra, par conséquent, être chargé également aux deux bouts : donc la charge que supporte le point d'appui du levier qui fait la base du triangle, et qui est chargé à ses deux extrémités de poids égaux, sera égale au poids double du sommet et, par conséquent, égale à la somme des deux poids.

Si, au lieu d'un triangle, on considérait un trapèze chargé à ses quatre angles de quatre poids égaux, on trouverait de la même manière que les deux leviers de longueurs inégales, formant les côtés parallèles du trapèze, exercent sur leurs points d'appui des forces égales.

3. Cette proposition une fois établie, il est clair qu'on peut, ainsi qu'Archimède le fait, substituer à un poids en équilibre sur un levier deux poids égaux chacun à la moitié de ce poids et placés sur le même levier, à distances égales de part et d'autre du point où le poids est attaché; car l'action de ce poids est la même que celle d'un levier suspendu par son milieu au même point et chargé, à ses deux bouts, de deux poids égaux chacun à la moitié du même poids; et il est évident que rien n'empêche d'approcher ce dernier levier du premier, de manière qu'il en fasse partie. Ou bien, ce qui est peut-être plus rigoureux, il n'y a qu'à regarder ce dernier levier comme étant tenu en équilibre par une force appliquée à son point de milieu, dirigée de bas en haut, et égale au poids dont les deux moitiés sont censées appliquées à ses

extrémités; alors, en appliquant ce levier en équilibre sur le premier levier qui est supposé en équilibre sur son point d'appui, l'équilibre total subsistera toujours, et, si l'application se fait de manière que le milieu du second levier coïncide avec l'extrémité d'un des bras du premier levier, la force qui soutient le second levier pourra être censée appliquée au poids même dont ce bras est chargé, et qui, étant soutenu, n'aura plus d'action sur le levier, mais se trouvera ainsi remplacé par deux poids égaux chacun à sa moitié et placés de part et d'autre de ce poids sur le premier levier prolongé. Cette superposition d'équilibres est, en Mécanique, un principe aussi fécond que l'est, en Géométrie, la superposition des figures.

4. On peut donc regarder l'équilibre d'un levier droit et horizontal, chargé de deux poids en raison inverse de leurs distances au point d'appui du levier, comme une vérité rigoureusement démontrée; et, par le principe de la superposition, il est facile de l'étendre à un levier angulaire quelconque, dont le point d'appui serait dans l'angle et dont les bras seraient tirés en sens contraire par des forces perpendiculaires à leurs directions. En effet, il est évident qu'un levier angulaire à bras égaux, et mobile autour du sommet de l'angle, sera tenu en équilibre par deux forces égales appliquées perpendiculairement aux extrémités des deux bras, et tendant à les faire tourner en sens contraire. Si donc on a un levier droit en équilibre, dont l'un des bras soit égal à ceux du levier angulaire et soit chargé à son extrémité d'un poids équivalent à chacune des puissances appliquées au levier angulaire, l'autre bras étant chargé du poids nécessaire pour l'équilibre, et qu'on superpose ces leviers de manière que le sommet de l'angle de l'un tombe sur le point d'appui de l'autre, et que les bras égaux de l'un et de l'autre coïncident et n'en forment plus qu'un, la puissance appliquée au bras du levier angulaire soutiendra le poids suspendu au bras égal du levier droit, de manière qu'on pourra faire abstraction de l'un et de l'autre, et supposer le bras formé de la réunion de ces deux-ci anéanti. L'équilibre subsistera donc encore entre les deux autres bras formant un levier angulaire tiré à ses extrémités par des forces perpendiculaires et en raison inverse de la longueur des bras, comme dans le levier droit.

Or une force peut être censée appliquée à tel point que l'on veut de sa direction. Donc deux forces, appliquées à des points quelconques d'un plan retenu par un point fixe et dirigées comme on voudra dans ce plan, sont en équilibre lorsqu'elles sont entre elles en raison inverse des perpendiculaires abaissées de ce point sur leurs directions; car on peut regarder ces perpendiculaires comme formant un levier angulaire dont le point d'appui est le point fixe du plan : c'est ce qu'on appelle maintenant le *principe des moments*, en entendant par moment le produit d'une force par le bras du levier par lequel elle agit.

Ce principe général suffit pour résoudre tous les problèmes de la Statique. La considération du treuil l'avait fait apercevoir dès les premiers pas que l'on a faits après Archimède, dans la théorie des machines simples, comme on le voit par l'Ouvrage de Guido Ubaldo, intitulé : *Mecanicorum liber*, qui a paru à Pesaro, en 1577; mais cet auteur n'a pas su l'appliquer au plan incliné, ni aux autres machines qui en dépendent, comme le coin et la vis dont il n'a donné qu'une théorie peu exacte.

5. Le rapport de la puissance au poids sur un plan incliné a été longtemps un problème parmi les mécaniciens modernes. Stevin l'a résolu le premier; mais sa solution est fondée sur une considération indirecte et indépendante de la théorie du levier.

Stevin considère un triangle solide posé sur sa base horizontale, en sorte que ses deux côtés forment deux plans inclinés; et il imagine qu'un chapelet formé de plusieurs poids égaux, enfilés à des distances égales, ou plutôt une chaîne d'égale grosseur, soit placé sur les deux côtés de ce triangle, de manière que toute la partie supérieure se trouve appliquée aux deux côtés du triangle, et que la partie inférieure pende librement au-dessous de la base, comme si elle était attachée aux deux extrémités de cette base.

Or Stevin remarque qu'en supposant que la chaîne puisse glisser librement sur le triangle, elle doit cependant demeurer en repos; car, si elle commençait à glisser d'elle-même dans un sens, elle devrait continuer à glisser toujours, puisque la même cause de mouvement subsisterait, la chaîne se trouvant, à cause de l'uniformité de ses parties, placée toujours de la même manière sur le triangle; d'où résulterait un mouvement perpétuel, ce qui est absurde.

Il y a donc nécessairement équilibre entre toutes les parties de la chaîne; or on peut regarder la portion qui pend au-dessous de la base comme étant déjà en équilibre d'elle-même. Donc il faut que l'effort de tous les poids appuyés sur l'un des côtés contrebalance l'effort des poids appuyés sur l'autre côté; mais la somme des uns est à la somme des autres dans le même rapport que les longueurs des côtés sur lesquels ils sont appuyés. Donc il faudra toujours la même puissance pour soutenir un ou plusieurs poids placés sur un plan incliné, lorsque le poids total sera proportionnel à la longueur du plan, en supposant la hauteur la même : mais, quand le plan est vertical, la puissance est égale au poids; donc, dans tout plan incliné, la puissance est au poids comme la hauteur du plan à sa longueur.

J'ai rapporté cette démonstration de Stevin, parce qu'elle est très ingénieuse et qu'elle est d'ailleurs peu connue. Au reste, Stevin déduit de cette théorie celle de l'équilibre entre trois puissances qui agissent sur un même point, et il trouve que cet équilibre a lieu lorsque les puissances sont parallèles et proportionnelles aux trois côtés d'un triangle rectiligne quelconque. (*Voir* les *Éléments de Statique* et les *Additions à la Statique* de cet auteur, dans les *Hypomnemata mathematica*, imprimés à Leyde en 1605, et dans les *Œuvres* de Stevin, traduites en français, et imprimées en 1634 par les Elzevirs.) Mais on doit observer que ce théorème fondamental de la Statique, quoiqu'il soit communément attribué à Stevin, n'a cependant été démontré par cet auteur que dans le cas où les directions de deux des puissances font entre elles un angle droit.

Stevin remarque avec raison qu'un poids appuyé sur un plan incliné,

et retenu par une puissance parallèle au plan, est dans le même cas que s'il était soutenu par deux fils, l'un perpendiculaire, et l'autre parallèle au plan; et, par sa théorie du plan incliné, il trouve que le rapport du poids à la puissance parallèle au plan est comme l'hypoténuse à la base d'un triangle rectangle formé sur le plan par deux droites, l'une verticale et l'autre perpendiculaire au plan. Stevin se contente ensuite d'étendre cette proportion au cas où le fil qui retient le poids sur le plan incliné serait aussi incliné à ce plan, en construisant un triangle analogue avec les mêmes lignes, l'une verticale, l'autre perpendiculaire au plan, et en prenant la base dans la direction du fil; mais il faudrait pour cela qu'il eût démontré que la même proportion a lieu dans l'équilibre d'un poids soutenu sur un plan incliné par une puissance oblique au plan, ce qui ne peut pas se déduire de la considération de la chaîne imaginée par Stevin.

6. Dans les *Mécaniques* de Galilée, publiées d'abord en français par le P. Mersenne en 1634, l'équilibre sur un plan incliné est réduit à celui d'un levier angulaire à deux bras égaux, dont l'un est supposé perpendiculaire au plan et chargé d'un poids appuyé sur le plan, et dont l'autre est horizontal et chargé d'un poids équivalent à la puissance nécessaire pour retenir le poids sur le plan; cet équilibre est ensuite réduit à celui d'un levier droit et horizontal, en regardant le poids attaché au bras incliné comme suspendu à un bras horizontal formant un levier droit avec le bras horizontal du levier angulaire. Ainsi le poids est à la puissance qui le soutient sur le plan incliné, en raison inverse de ces deux bras du levier droit, et il est facile de prouver que ces bras sont entre eux comme la hauteur du plan à sa longueur.

On peut dire que c'est là la première démonstration directe qu'on ait eue de l'équilibre sur un plan incliné. Galilée s'en est servi depuis pour démontrer rigoureusement l'égalité des vitesses acquises par les corps pesants, en descendant d'une même hauteur sur des plans diversement inclinés, égalité qu'il s'était contenté de supposer dans la première édition de ses Dialogues.

Il eût été facile à Galilée de résoudre aussi le cas où la puissance qui retient le poids a une direction oblique au plan; mais ce nouveau pas n'a été fait que quelque temps après, par Roberval, dans un *Traité de Mécanique* imprimé, en 1636, dans l'*Harmonie universelle* de Mersenne.

7. Roberval regarde aussi le poids appuyé sur le plan incliné comme attaché au bras d'un levier perpendiculaire au plan, et il considère la puissance comme une force appliquée au même bras, suivant une direction donnée; il a ainsi un levier à un seul bras, dont une extrémité est fixe, et dont l'autre extrémité est tirée par deux forces, celle du poids et celle de la puissance qui le retient. Il substitue ensuite à ce levier un levier angulaire à deux bras perpendiculaires aux directions des deux forces et ayant le même point fixe pour point d'appui, et il suppose les deux forces appliquées aux bras de ce levier suivant leurs propres directions, ce qui lui donne pour l'équilibre le rapport du poids à la puissance, en raison inverse des deux bras du levier angulaire, c'est-à-dire des perpendiculaires menées du point fixe sur les directions du poids et de la puissance.

De là, Roberval déduit l'équilibre d'un poids soutenu par deux cordes qui font entre elles un angle quelconque, en substituant au levier perpendiculaire au plan une corde attachée au point d'appui du levier, et à la puissance une autre corde tirée par une force dans la direction de cette puissance; et, par différentes constructions et analogies un peu compliquées, il parvient à cette conclusion : que, si de quelque point pris dans la verticale du poids, on mène une parallèle à l'une des cordes, jusqu'à la rencontre de l'autre corde, le triangle formé ainsi aura ses côtés proportionnels au poids et aux puissances qui agissent dans la direction des mêmes côtés, ce qui est, comme on voit, le théorème donné par Stevin.

J'ai cru devoir faire mention de cette démonstration de Roberval, non seulement parce que c'est la première démonstration rigoureuse qu'on ait eue du théorème de Stevin, mais encore parce qu'elle est

restée dans l'oubli dans un Traité d'Harmonie, assez rare aujourd'hui, où personne ne s'avise de la chercher. Au reste, je ne suis entré dans ce détail sur ce qui regarde la théorie du levier, que pour faire plaisir à ceux qui aiment à suivre la marche de l'esprit dans les sciences, et à connaître les routes que les inventeurs ont tenues et les routes plus directes qu'ils auraient pu tenir.

8. Les Traités de Statique qui ont paru après celui de Roberval, jusqu'à l'époque de la découverte de la composition des forces, n'ont rien ajouté à cette partie de la Mécanique; on n'y trouve que les propriétés déjà connues du levier et du plan incliné, et leur application aux autres machines simples : encore y en a-t-il quelques-uns qui renferment des théories peu exactes, comme celui de Lami sur l'équilibre des solides, où il donne une proportion fausse du poids à la puissance qui le retient sur un plan incliné. Je ne parle pas ici de Descartes, de Torricelli et de Wallis, parce qu'ils ont adopté pour l'équilibre un principe qui se rapporte à celui des vitesses virtuelles, et dont ils n'avaient pas la démonstration.

9. Le second principe fondamental de la Statique est celui de la composition des forces. Il est fondé sur cette supposition : que, si deux forces agissent à la fois sur un corps ([1]) suivant différentes directions, ces forces équivalent alors à une force unique, capable d'imprimer au corps le même mouvement que lui donneraient les deux forces agissant séparément. Or un corps, qu'on fait mouvoir uniformément suivant deux directions différentes à la fois, parcourt nécessairement la diagonale du parallélogramme dont il eût parcouru séparément les côtés en vertu de chacun des deux mouvements. D'où l'on conclut que deux puissances quelconques, qui agissent ensemble sur un même corps, sont équivalentes à une seule représentée, dans sa quantité et sa direction, par la diagonale du parallélogramme dont les côtés repré-

([1]) Le mot *corps* désigne ici un point matériel. (*J. Bertrand.*)

sentent en particulier les quantités et les directions des deux puissances données. C'est en quoi consiste le principe qu'on nomme la *composition des forces*.

Ce principe [1] suffit seul pour déterminer les lois de l'équilibre dans tous les cas; car, en composant ainsi successivement toutes les forces deux à deux, on doit parvenir à une force unique qui sera équivalente à toutes ces forces, et qui, par conséquent, devra être nulle dans le cas d'équilibre s'il n'y a dans le système aucun point fixe; mais, s'il y en a un, il faudra que la direction de cette force unique passe par le point fixe. C'est ce qu'on peut voir dans tous les livres de Statique, et particulièrement dans la *Nouvelle Mécanique* de Varignon, où la théorie des machines est déduite uniquement du principe dont nous venons de parler.

Il est évident que le théorème de Stevin sur l'équilibre de trois forces parallèles et proportionnelles aux trois côtés d'un triangle quelconque est une conséquence immédiate et nécessaire du principe de la composition des forces, ou plutôt qu'il n'est que ce même principe présenté sous une autre forme. Mais celui-ci a l'avantage d'être fondé sur des notions simples et naturelles, au lieu que le théorème de Stevin ne l'est que sur des considérations indirectes.

10. Les anciens ont connu la composition des mouvements, comme on le voit par quelques passages d'Aristote, dans ses Questions mécaniques. Les géomètres surtout l'ont employée pour la description des courbes, comme Archimède pour la spirale, Nicomède pour la conchoïde, etc.; et, parmi les modernes, Roberval en a déduit une méthode ingénieuse de tirer les tangentes aux courbes qui peuvent être censées décrites par deux mouvements dont la loi est donnée; mais Galilée est le premier qui ait employé la considération du mouvement composé dans la Mécanique, pour déterminer la courbe décrite par un corps pesant, en vertu de l'action de la gravité et de la force de projection.

[1] Ce paragraphe manque d'exactitude : deux forces qui ne sont pas dans le même plan n'ayant pas de résultante, la remarque de Lagrange ne peut même pas être appliquée, d'une manière générale, au cas d'un système solide. (*J. Bertrand.*)

Dans la seconde proposition de la quatrième Journée de ses Dialogues, Galilée démontre qu'un corps mû avec deux vitesses uniformes, l'une horizontale, l'autre verticale, doit prendre une vitesse représentée par l'hypoténuse du triangle dont les côtés représentent ces deux vitesses; mais il paraît en même temps que Galilée n'a pas connu toute l'importance de ce théorème dans la théorie de l'équilibre; car, dans le Dialogue troisième, où il traite du mouvement des corps pesants sur des plans inclinés, au lieu d'employer le principe de la composition du mouvement pour déterminer directement la gravité relative d'un corps sur un plan incliné, il déduit plutôt cette détermination de la théorie de l'équilibre sur les plans inclinés, d'après ce qu'il avait établi auparavant dans son Traité *Della Scienza mecanica*, dans lequel il ramène le plan incliné au levier.

On trouve ensuite la théorie des mouvements composés dans les écrits de Descartes, de Roberval, de Mersenne, de Wallis, etc.; mais, jusqu'à l'année 1687, dans laquelle ont paru les *Principes mathématiques* de Newton et le *Projet de la Nouvelle Mécanique* de Varignon, on n'avait point pensé à substituer, dans la composition des mouvements, les forces aux mouvements qu'elles peuvent produire, et à déterminer la force composée résultante de deux forces données, comme on détermine le mouvement composé de deux mouvements rectilignes et uniformes donnés.

Dans le second corollaire de la troisième loi du mouvement, Newton montre en peu de mots comment les lois de l'équilibre se déduisent facilement de la composition et décomposition des forces, en prenant la diagonale d'un parallélogramme pour la force composée de deux forces représentées par ses côtés; mais cet objet est traité plus en détail dans l'Ouvrage de Varignon, et la *Nouvelle Mécanique* qui a paru après sa mort, en 1725, renferme une théorie complète sur l'équilibre des forces dans les différentes machines, déduite de la seule considération de la composition ou décomposition des forces.

11. Le principe de la composition des forces donne tout de suite les

conditions de l'équilibre entre trois puissances qui agissent sur un point, qu'on n'avait pu déduire de l'équilibre du levier que par une suite de raisonnements. Mais, d'un autre côté, lorsqu'on veut, par ce principe, trouver les conditions de l'équilibre entre deux puissances parallèles appliquées aux extrémités d'un levier droit, on est obligé d'employer des considérations indirectes, en substituant un levier angulaire au levier droit, comme Newton et d'Alembert l'ont fait, ou en ajoutant deux forces étrangères qui se détruisent mutuellement, mais qui, étant composées avec les puissances données, rendent leurs directions concourantes, ou enfin en imaginant que les directions des puissances prolongées concourent à l'infini, et en prouvant que la puissance composée doit passer par le point d'appui : c'est la manière dont s'y est pris Varignon dans sa Mécanique. Ainsi, quoique, à la rigueur, les deux principes du levier et de la composition des forces conduisent toujours aux mêmes résultats, il est remarquable que le cas le plus simple pour l'un de ces principes devient le plus compliqué pour l'autre.

12. Mais on peut établir une liaison immédiate entre ces deux principes, par le théorème que Varignon a donné dans sa *Nouvelle Mécanique* (Section I, Lemme XVI), et qui consiste en ce que si, d'un point quelconque pris dans le plan d'un parallélogramme, on abaisse des perpendiculaires sur la diagonale et sur les deux côtés qui comprennent cette diagonale, le produit de la diagonale par sa perpendiculaire est égal à la somme des produits des deux côtés par leurs perpendiculaires respectives si le point tombe hors du parallélogramme, ou à leur différence s'il tombe dans le parallélogramme. Varignon fait voir, par une construction très simple, qu'en formant des triangles qui aient la diagonale et les deux côtés pour bases, et le point donné pour sommet commun, le triangle formé sur la diagonale est, dans le premier cas, égal à la somme et, dans le second cas, à la différence des deux triangles formés sur les côtés; ce qui est en soi-même un beau théorème de Géométrie, indépendamment de son application à la Mécanique.

Ce théorème aurait lieu également et la démonstration serait la même si, sur le prolongement de la diagonale et des côtés, on prenait partout où l'on voudrait des parties égales à ces lignes; de sorte que, comme toute puissance peut être supposée appliquée à un point quelconque de sa direction, on peut conclure, en général, que deux puissances, représentées en quantité et en direction par deux droites placées dans un plan, ont une composée ou résultante représentée en quantité et en direction par une droite placée dans le même plan, qui étant prolongée passe par le point de concours des deux droites, et qui soit telle, qu'ayant pris dans ce plan un point quelconque, et abaissé de ce point des perpendiculaires sur ces trois droites, prolongées s'il est nécessaire, le produit de la résultante par sa perpendiculaire soit égal à la somme ou à la différence des produits respectifs des deux puissances composantes par leurs perpendiculaires, selon que le point d'où partent les trois perpendiculaires sera pris au dehors ou au dedans des droites qui représentent les puissances composantes.

Lorsque ce point est supposé tomber sur la direction de la résultante, cette puissance n'entre plus dans l'équation, et l'on a l'égalité entre les deux produits des composantes par leurs perpendiculaires; c'est le cas de tout levier droit et angulaire, dont le point d'appui est le même que le point dont il s'agit, parce qu'alors l'action de la résultante est détruite par la résistance de l'appui.

Ce théorème, dû à Varignon, est le fondement de presque toutes les Statiques modernes, où il constitue le principe général appelé des *moments*. Son grand avantage consiste en ce que la composition et la résolution des forces y sont réduites à des additions et des soustractions; de sorte que, quel que soit le nombre des puissances à composer, on trouve facilement la puissance résultante, laquelle doit être nulle dans le cas d'équilibre.

13. J'ai rapporté l'époque de la découverte de Varignon à celle de la publication de son Projet, quoique dans l'Avertissement, qui est à

la tête de la *Nouvelle Mécanique*, on ait avancé qu'il avait donné deux ans auparavant, dans l'*Histoire de la République des Lettres*, un Mémoire sur les poulies à moufle, dans lequel il se servait des mouvements composés pour déterminer tout ce qui regarde cette machine; mais je dois observer que cet article manque d'exactitude. Le Mémoire dont il s'agit, sur les poulies, ne se trouve que dans les Nouvelles de la République des Lettres du mois de mai 1687, sous le titre de *Nouvelle démonstration générale de l'usage des poulies à moufle*. L'auteur y considère l'équilibre d'un poids soutenu par une corde qui passe sur une poulie, et dont les deux parties ne sont pas parallèles. Il n'y fait point usage ni même mention du principe de la composition des forces, mais il emploie les théorèmes déjà connus sur les poids soutenus par des cordes, et il cite les *Statiques* de Pardis et de Dechales. Dans une seconde démonstration, il réduit la question au levier, en regardant la droite qui joint les deux points où la corde abandonne la poulie, comme un levier chargé du poids appliqué à la poulie, et dont les extrémités sont tirées par les deux portions de la corde qui soutient la poulie.

Pour ne rien omettre de ce qui regarde l'histoire de la découverte de la composition des forces, je dois dire un mot d'un petit écrit publié par Lami en 1687, sous le titre de *Nouvelle manière de démontrer les principaux théorèmes des éléments des mécaniques*. L'auteur observe que, si un corps est poussé par deux forces suivant deux directions différentes, il suivra nécessairement une direction moyenne; de sorte que, si le chemin suivant cette direction lui était fermé, il demeurerait en repos, et les deux forces se feraient équilibre. Or il détermine la direction moyenne par la composition des deux mouvements que le corps prendrait dans le premier instant en vertu de chacune des deux forces, si elles agissaient séparément, ce qui lui donne la diagonale du parallélogramme dont les deux côtés seraient les espaces parcourus en même temps par l'action des deux forces et, par conséquent, proportionnels aux forces. De là il tire tout de suite le théorème que les deux forces sont entre elles en raison réciproque des sinus des angles que

leurs directions font avec la direction moyenne que le corps prendrait s'il n'était pas arrêté, et il en fait l'application au plan incliné et au levier lorsque ses extrémités sont tirées par des puissances dont les directions font un angle; mais, pour le cas où ces directions sont parallèles, il emploie un raisonnement vague et peu concluant.

La conformité du principe employé par Lami avec celui de Varignon avait fait dire à l'auteur de l'*Histoire des Ouvrages des Savants* (avril 1688) qu'il y avait apparence que le premier devait au dernier la découverte de son principe. Lami s'est justifié de cette imputation, dans une Lettre publiée dans le *Journal des Savants* du 13 septembre 1688, à laquelle le journaliste a répondu au mois de décembre de la même année; mais cette contestation, à laquelle Varignon n'a point pris part, n'a pas été plus loin, et l'écrit de Lami paraît être tombé dans l'oubli.

Au reste, la simplicité du principe de la composition des forces et la facilité de l'appliquer à tous les problèmes sur l'équilibre l'ont fait adopter des mécaniciens aussitôt après sa découverte, et l'on peut dire qu'il sert de base à presque tous les Traités de Statique qui ont paru depuis.

14. On ne peut cependant s'empêcher de reconnaître que le principe du levier a seul l'avantage d'être fondé sur la nature de l'équilibre considéré en lui-même, et comme un état indépendant du mouvement; d'ailleurs il y a une différence essentielle dans la manière d'estimer les puissances qui se font équilibre dans ces deux principes; de sorte que, si l'on n'était pas parvenu à les lier par les résultats, on aurait pu douter avec raison s'il était permis de substituer au principe fondamental du levier celui qui résulte de la considération étrangère des mouvements composés.

En effet, dans l'équilibre du levier, les puissances sont des poids ou peuvent être regardées comme tels, et une puissance n'est censée double ou triple d'une autre qu'autant qu'elle est formée par la réunion de deux ou trois puissances égales chacune à l'autre puissance. Mais la tendance à se mouvoir est supposée la même dans chaque puissance, quelle que soit son intensité; au lieu que, dans le principe de la composition des forces, on estime la valeur des forces par le degré de vitesse qu'elles communiqueraient au corps auquel elles sont appliquées, si chacune était libre d'agir séparément, et c'est peut-être cette différence dans la manière de concevoir les forces qui a empêché longtemps les mécaniciens d'employer les lois connues de la composition des mouvements dans la théorie de l'équilibre, dont le cas le plus simple est celui de l'équilibre des corps pesants.

15. On a cherché depuis à rendre le principe de la composition des forces indépendant de la considération du mouvement, et à l'établir uniquement sur des vérités évidentes par elles-mêmes. Daniel Bernoulli [1] a donné le premier, dans les *Commentaires de l'Académie de Pétersbourg*, tome I^{er}, une démonstration très ingénieuse du parallélogramme des forces, mais longue et compliquée, que d'Alembert a ensuite rendue un peu plus simple dans le premier Volume de ses Opuscules.

Cette démonstration est fondée sur ces deux principes :

1° Que, si deux forces agissent sur un même point dans des directions différentes, elles ont pour résultante une force unique qui divise en deux également l'angle compris entre leurs directions lorsque les deux forces sont égales, et qui est égale à leur somme lorsque cet angle est nul, ou à leur différence lorsque l'angle est de deux droits; 2° que des équi-multiples des mêmes forces, ou des forces quelconques qui leur soient proportionnelles, ont une résultante équi-multiple de leur résultante ou proportionnelle à cette résultante, les angles demeurant les mêmes.

Ce second principe est évident en regardant les forces comme des quantités qui peuvent s'ajouter ou se soustraire.

A l'égard du premier, on le démontre en considérant le mouvement qu'un corps, poussé par deux forces qui ne se font pas équilibre, doit

(1) La même démonstration a été reproduite et simplifiée par M. Aimé, *Journal de Mathématiques* de Liouville, 1re série, t. I^{er}, p. 335. (*J. Bertrand.*)

prendre, et qui, étant nécessairement unique, peut être attribué à une force unique agissant sur lui dans la direction de son mouvement. Ainsi l'on peut dire que ce principe n'est pas tout à fait exempt de la considération du mouvement.

Quant à la direction de la résultante dans le cas de l'égalité des deux forces, il est clair qu'il n'y a pas plus de raison pour qu'elle soit plus inclinée à l'une qu'à l'autre de ces deux forces, et que, par conséquent, elle doit couper l'angle de leurs directions en deux parties égales.

On a ensuite traduit en Analyse le fond de cette démonstration, et on lui a donné différentes formes plus ou moins simples, en considérant la résultante comme fonction des forces composantes et de l'angle compris entre leurs directions. (*Voir* le second tome des *Mélanges de la Société de Turin*, les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, de 1769, le sixième Volume des *Opuscules* de d'Alembert, etc.) Mais il faut avouer qu'en séparant ainsi le principe de la composition des forces de celui de la composition des mouvements, on lui fait perdre ses principaux avantages, l'évidence et la simplicité, et on le réduit à n'être qu'un résultat de constructions géométriques ou d'Analyse.

16. Je viens enfin au troisième principe, celui des vitesses virtuelles. On doit entendre par *vitesse virtuelle* celle qu'un corps en équilibre est disposé à recevoir, en cas que l'équilibre vienne à être rompu, c'est-à-dire la vitesse que ce corps prendrait réellement dans le premier instant de son mouvement; et le principe dont il s'agit consiste en ce que des puissances sont en équilibre quand elles sont en raison inverse de leurs vitesses virtuelles, estimées suivant les directions de ces puissances.

Pour peu qu'on examine les conditions de l'équilibre dans le levier et dans les autres machines, il est facile de reconnaître cette loi, que le poids et la puissance sont toujours en raison inverse des espaces que l'un et l'autre peuvent parcourir en même temps : cependant il ne paraît pas que les anciens en aient eu connaissance. Guido Ubaldi est peut-être le premier qui l'ait aperçue dans le levier et dans les poulies mobiles ou moufles. Galilée l'a reconnue ensuite dans les plans inclinés et dans les machines qui en dépendent, et il l'a regardée comme une propriété générale de l'équilibre des machines. (*Voir* son *Traité de Mécanique* et le scolie de la seconde proposition du troisième Dialogue, dans l'édition de Bologne de 1655.)

Galilée entend par *moment* d'un poids ou d'une puissance appliquée à une machine l'effort, l'action, l'énergie, l'*impetus* de cette puissance pour mouvoir la machine, de manière qu'il y ait équilibre entre deux puissances, lorsque leurs moments pour mouvoir la machine en sens contraires sont égaux; et il fait voir que le moment est toujours proportionnel à la puissance multipliée par la vitesse virtuelle, dépendante de la manière dont la puissance agit.

Cette notion des moments a aussi été adoptée par Wallis, dans sa *Mécanique* publiée en 1669. L'auteur y pose le principe de l'égalité des moments pour fondement de la Statique, et il en déduit au long la théorie de l'équilibre dans les principales machines.

Aujourd'hui on n'entend plus communément par *moment* que le produit d'une puissance par la distance de sa direction à un point, ou à une ligne, ou à un plan, c'est-à-dire par le bras de levier par lequel elle agit; mais il me semble que la notion du *moment* donnée par Galilée et par Wallis est bien plus naturelle et plus générale, et je ne vois pas pourquoi on l'a abandonnée pour y en substituer une autre qui exprime seulement la valeur du moment dans certains cas, comme dans le levier, etc.

Descartes a réduit pareillement toute la Statique à un principe unique qui revient, pour le fond, à celui de Galilée, mais qui est présenté d'une manière moins générale. Ce principe est, qu'il ne faut ni plus ni moins de force pour élever un poids à une certaine hauteur, qu'il en faudrait pour élever un poids plus pesant à une hauteur d'autant moindre, ou un poids moindre à une hauteur d'autant plus grande (*voir* la Lettre 73 du tome Ier publié en 1657, et le *Traité de Mécanique* imprimé dans les Ouvrages posthumes). D'où il résulte qu'il y aura

équilibre entre deux poids, lorsqu'ils seront disposés de manière que les chemins perpendiculaires qu'ils peuvent parcourir ensemble soient en raison réciproque des poids. Mais, dans l'application de ce principe aux différentes machines, il ne faut considérer que les espaces parcourus dans le premier instant du mouvement, et qui sont proportionnels aux vitesses virtuelles, autrement on n'aurait pas les véritables lois de l'équilibre.

Au reste, soit qu'on regarde le principe des vitesses virtuelles comme une propriété générale de l'équilibre, ainsi que l'a fait Galilée, soit qu'on veuille le prendre avec Descartes et Wallis pour la vraie cause de l'équilibre, il faut avouer qu'il a toute la simplicité qu'on peut désirer dans un principe fondamental; et nous verrons plus bas combien ce principe est encore recommandable par sa généralité.

Torricelli, fameux disciple de Galilée, est l'auteur d'un autre principe, qui dépend aussi de celui des vitesses virtuelles; c'est que, lorsque deux poids sont liés ensemble et placés de manière que leur centre de gravité ne puisse pas descendre, ils sont en équilibre dans cette situation. Torricelli ne l'applique qu'au plan incliné, mais il est facile de se convaincre qu'il n'a pas moins lieu dans les autres machines. (*Voir* son Traité *De motu gravium naturaliter descendentium*, qui a paru en 1664.)

Le principe de Torricelli en a fait naître un autre, dont quelques auteurs ont fait usage pour résoudre avec plus de facilité différentes questions de Statique; c'est celui-ci : que dans un système de corps pesants en équilibre, le centre de gravité est le plus bas qu'il est possible. En effet, on sait, par la théorie *de maximis et minimis*, que le centre de gravité est le plus bas lorsque la différentielle de sa descente est nulle, ou, ce qui revient au même, lorsque ce centre ne monte ni ne descend, tandis que le système change infiniment peu de place.

17. Le principe des vitesses virtuelles peut être rendu très général de cette manière :

Si un système quelconque de tant de corps ou points que l'on veut, tirés *chacun par des puissances quelconques, est en équilibre, et qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque, en vertu duquel chaque point parcoure un espace infiniment petit qui exprimera sa vitesse virtuelle, la somme des puissances, multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette même puissance, sera toujours égale à zéro, en regardant comme positifs les petits espaces parcourus dans le sens des puissances, et comme négatifs les espaces parcourus dans un sens opposé.*

Jean Bernoulli est le premier, que je sache, qui ait aperçu cette grande généralité du principe des vitesses virtuelles, et son utilité pour résoudre les problèmes de Statique. C'est ce qu'on voit dans une de ses Lettres à Varignon, datée de 1717, que ce dernier a placée à la tête de la Section neuvième de sa Nouvelle Mécanique, Section employée tout entière à montrer par différentes applications la vérité et l'usage du principe dont il s'agit.

Ce même principe a donné lieu ensuite à celui que Maupertuis a proposé dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour l'année 1740, sous le nom de *Loi de repos*, et qu'Euler a développé davantage et rendu plus général dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour l'année 1751. Enfin c'est encore le même principe qui sert de base à celui que Courtivron a donné dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1748 et 1749.

Et, en général, je crois pouvoir avancer que tous les principes généraux qu'on pourrait peut-être encore découvrir dans la science de l'équilibre ne seront que le même principe des vitesses virtuelles, envisagé différemment, et dont ils ne différeront que dans l'expression.

Mais ce principe est non seulement en lui-même très simple et très général; il a, de plus, l'avantage précieux et unique de pouvoir se traduire en une formule générale qui renferme tous les problèmes qu'on peut proposer sur l'équilibre des corps. Nous exposerons cette formule dans toute son étendue; nous tâcherons même de la présenter d'une manière encore plus générale qu'on ne l'a fait jusqu'à présent, et d'en donner des applications nouvelles.

18. Quant à la nature du principe des vitesses virtuelles, il faut convenir qu'il n'est pas assez évident par lui-même pour pouvoir être érigé en principe primitif; mais on peut le regarder comme l'expression générale des lois de l'équilibre, déduites des deux principes que nous venons d'exposer. Aussi, dans les démonstrations qu'on a données de ce principe, on l'a toujours fait dépendre de ceux-ci par des moyens plus ou moins directs. Mais il y a, en Statique, un autre principe général et indépendant du levier et de la composition des forces, quoique les mécaniciens l'y rapportent communément, lequel paraît être le fondement naturel du principe des vitesses virtuelles : on peut l'appeler le *principe des poulies*.

Si plusieurs poulies sont jointes ensemble sur une même chape, on appelle cet assemblage *polispaste* ou *moufle*, et la combinaison de deux moufles, l'une fixe et l'autre mobile, embrassées par une même corde dont l'une des extrémités est fixement attachée, et l'autre est attirée par une puissance, forme une machine dans laquelle la puissance est au poids porté par la moufle mobile comme l'unité est au nombre des cordons qui aboutissent à cette moufle, en les supposant tous parallèles et faisant abstraction du frottement et de la roideur de la corde; car il est évident qu'à cause de la tension uniforme de la corde dans toute sa longueur, le poids est soutenu par autant de puissances égales à celle qui tend la corde qu'il y a de cordons qui soutiennent la moufle mobile, puisque ces cordons sont parallèles et qu'ils peuvent même être regardés comme n'en faisant qu'un, en diminuant, si l'on veut, à l'infini le diamètre des poulies.

En multipliant ainsi les moufles fixes et mobiles, et les faisant toutes embrasser par la même corde au moyen de différentes poulies fixes de renvoi, la même puissance, appliquée à son extrémité mobile, pourra soutenir autant de poids qu'il y a de moufles mobiles, et dont chacun sera à cette puissance comme le nombre des cordons de la moufle qui le soutient est à l'unité.

Substituons, pour plus de simplicité, un poids à la place de la puissance, après avoir fait passer sur une poulie fixe le dernier cordon qui soutient ce poids, que nous prendrons pour l'unité; et imaginons que les différentes moufles mobiles, au lieu de soutenir des poids, soient attachées à des corps regardés comme des points, et disposés entre eux en sorte qu'ils forment un système quelconque donné. De cette manière, le même poids produira, par le moyen de la corde qui embrasse toutes les moufles, différentes puissances qui agiront sur les différents points du système, suivant la direction des cordons qui aboutissent aux moufles attachées à ces points, et qui seront au poids comme le nombre des cordons est à l'unité; en sorte que ces puissances seront représentées elles-mêmes par le nombre des cordons qui concourent à les produire par leur tension.

Or il est évident que, pour que le système tiré par ces différentes puissances demeure en équilibre, il faut que le poids ne puisse pas descendre par un déplacement quelconque infiniment petit des points du système (1); car, le poids tendant toujours à descendre, s'il y a un déplacement du système qui lui permette de descendre, il descendra nécessairement et produira ce déplacement dans le système.

Désignons par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les espaces infiniment petits que ce déplacement ferait parcourir aux différents points du système suivant la direction des puissances qui les tirent, et par P, Q, R, ... le nombre des cordons des moufles appliquées à ces points pour produire ces mêmes puissances; il est visible que les espaces $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seraient aussi ceux par lesquels les moufles mobiles se rapprocheraient des moufles fixes qui leur répondent, et que ces rapprochements diminueraient la longueur de la corde qui les embrasse des quantités $P\alpha$, $Q\beta$, $R\gamma, \ldots$; de sorte qu'à cause de la longueur invariable de la corde, le poids descendrait de l'espace

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots.$$

(1) On a objecté, avec raison, à cette assertion de Lagrange l'exemple d'un point pesant en équilibre au sommet le plus élevé d'une courbe; il est évident qu'un déplacement infiniment petit le ferait descendre, et, pourtant, ce déplacement ne se produit pas. La première démonstration rigoureuse du principe des vitesses virtuelles est due à Fourier (*Journal de l'École Polytechnique*, tome II, an VII). Le même Cahier du Journal contient la démonstration que Lagrange reproduit ici. (*J. Bertrand.*)

Donc il faudra, pour l'équilibre des puissances représentées par les nombres P, Q, R, ..., que l'on ait l'équation

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots = 0,$$

ce qui est l'expression analytique du principe général des vitesses virtuelles.

19. Si la quantité $P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots$, au lieu d'être nulle, était négative, il semble que cette condition suffirait pour établir l'équilibre, parce qu'il est impossible que le poids monte de lui-même; mais il faut considérer que, quelle que puisse être la liaison des points qui forment le système donné, les relations qui en résultent entre les quantités infiniment petites $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ne peuvent être exprimées que par des équations différentielles, et, par conséquent, linéaires entre ces quantités; de sorte qu'il y en aura nécessairement une ou plusieurs d'entre elles qui resteront indéterminées, et qui pourront être prises en plus ou en moins; par conséquent, les valeurs de toutes ces quantités seront toujours telles, qu'elles pourront changer de signe à la fois. D'où il s'ensuit que, si dans un certain déplacement du système la valeur de la quantité $P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots$ est négative, elle deviendra positive en prenant les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ avec des signes contraires; ainsi le déplacement opposé étant également possible ferait descendre le poids et détruirait l'équilibre.

20. Réciproquement, on peut prouver que, si l'équation

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma + \ldots = 0$$

a lieu pour tous les déplacements possibles infiniment petits du système, il sera nécessairement en équilibre; car, le poids demeurant immobile dans ces déplacements, les puissances qui agissent sur le système restent dans le même état, et il n'y a pas plus de raison pour qu'elles produisent l'un plutôt que l'autre des deux déplacements dans lesquels les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ont des signes contraires. C'est le cas de la balance qui demeure en équilibre, parce qu'il n'y a pas de raison pour qu'elle s'incline d'un côté plutôt que de l'autre.

Le principe des vitesses virtuelles, étant ainsi démontré pour des puissances commensurables entre elles, le sera aussi pour des puissances quelconques incommensurables, puisqu'on sait que toute proposition qu'on démontre pour des quantités commensurables peut se démontrer également par la *réduction à l'absurde*, lorsque ces quantités sont incommensurables.

SECTION DEUXIÈME.

FORMULE GÉNÉRALE DE LA STATIQUE POUR L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME QUELCONQUE DE FORCES, AVEC LA MANIÈRE DE FAIRE USAGE DE CETTE FORMULE.

1. La loi générale de l'équilibre dans les machines est que les forces ou puissances soient entre elles réciproquement comme les vitesses des points où elles sont appliquées, estimées suivant la direction de ces puissances.

C'est dans cette loi que consiste ce qu'on appelle communément le *principe des vitesses virtuelles*, principe reconnu depuis longtemps pour le principe fondamental de l'équilibre, ainsi que nous l'avons montré dans la Section précédente, et qu'on peut, par conséquent, regarder comme une espèce d'axiome de Mécanique.

Pour réduire ce principe en formule, supposons que des puissances P, Q, R, ..., dirigées suivant des lignes données, se fassent équilibre. Concevons que, des points où ces puissances sont appliquées, on mène des lignes droites égales à $p, q, r, \ldots$, et placées dans les directions de ces puissances; et désignons, en général, par $dp, dq, dr, \ldots$ les variations ou différences de ces lignes, en tant qu'elles peuvent résulter d'un changement quelconque infiniment petit dans la position des différents corps ou points du système.

Il est clair que ces différences exprimeront les espaces parcourus dans un même instant par les puissances P, Q, R, ..., suivant leurs propres directions, en supposant que ces puissances tendent à augmenter les lignes respectives $p, q, r, \ldots$. Les différences $dp, dq, dr, \ldots$ seront ainsi proportionnelles aux vitesses virtuelles des puissances P, Q, R, ..., et pourront, pour plus de simplicité, être prises pour ces vitesses.

Cela posé, ne considérons d'abord que deux puissances P et Q en équilibre. Par la loi de l'équilibre entre deux puissances, il faudra que les quantités P et Q soient entre elles en raison inverse des différentielles dp, dq; mais il est aisé de concevoir qu'il ne saurait y avoir équilibre entre deux puissances, à moins qu'elles ne soient disposées de manière que, quand l'une d'elles se meut suivant sa propre direction, l'autre ne soit contrainte de se mouvoir dans un sens contraire à la sienne; d'où il s'ensuit que les valeurs des différences dp et dq doivent être de signes contraires : donc les valeurs des forces P et Q étant supposées toutes deux positives, on aura, pour l'équilibre,

$$\frac{P}{Q} = -\frac{dq}{dp} \quad \text{ou bien} \quad P\,dp + Q\,dq = 0;$$

c'est la formule générale de l'équilibre de deux puissances.

Considérons maintenant l'équilibre de trois puissances P, Q, R, dont les vitesses virtuelles soient représentées par les différentielles dp, dq, dr. Faisons $Q = Q' + Q''$, et supposons, ce qui est permis, que la partie Q' (¹) de la force Q soit telle, qu'on ait

$$P\,dp + Q'\,dq = 0;$$

elle fera alors équilibre à la force P, et il faudra, pour l'équilibre entier, que l'autre partie Q'' de la même force Q fasse seule équilibre à la troisième force R, ce qui donnera l'équation

$$Q''\,dq + R\,dr = 0,$$

laquelle étant jointe à l'équation précédente, on aura, à cause de

(¹) Ce raisonnement n'est exact qu'autant que l'on considère un déplacement déterminé du système. Si l'on ne fait pas cette restriction, le rapport $\frac{dp}{dq}$ peut recevoir toutes les valeurs possibles, et l'équation $P\,dp + Q'dq = 0$ ne peut être satisfaite pour aucune valeur déterminée de Q'. Il faudrait, par conséquent, pour compléter la démonstration de Lagrange, l'appliquer successivement à tous les déplacements possibles du système, en introduisant, à chaque fois, des liaisons nouvelles qui empêchent les autres déplacements de se produire. Lagrange, du reste, fait lui-même cette remarque (Sect. II, n° 13). (*J. Bertrand.*)

$Q' + Q'' = Q$, celle-ci :

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr = 0.$$

S'il y a une quatrième puissance S dont la vitesse virtuelle soit représentée par la différentielle ds, on fera

$$Q = Q' + Q'' \quad \text{et} \quad P\,dp + Q'\,dq = 0,$$

ensuite

$$R = R' + R'' \quad \text{et} \quad Q''\,dq + R'\,dr = 0.$$

Alors la partie Q' de la force Q fera seule équilibre à la force P; la partie R' de la force R fera de même équilibre à l'autre partie Q'' de la même force Q, et, pour l'équilibre total des quatre forces P, Q, R, S, il faudra que la partie restante R'' de la force R fasse équilibre à la dernière force S, et que, par conséquent, on ait

$$R''\,dr + S\,ds = 0.$$

Ces trois équations étant jointes ensemble donneront

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + S\,ds = 0.$$

Ainsi de suite, quel que soit le nombre des puissances en équilibre.

2. On a donc, en général, pour l'équilibre d'un nombre quelconque de puissances P, Q, R, ..., dirigées suivant les lignes p, q, r, ..., et appliquées à un système quelconque de corps ou points disposés entre eux d'une manière quelconque, une équation de cette forme

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots = 0.$$

C'est la formule générale de la Statique pour l'équilibre d'un système quelconque de puissances.

Nous nommerons chaque terme de cette formule, tel que $P\,dp$, le *moment* de la force P, en prenant le mot de *moment* dans le sens que Galilée lui a donné, c'est-à-dire pour le produit de la force par sa vitesse virtuelle; de sorte que la formule générale de la Statique consistera dans l'égalité à zéro de la somme des moments de toutes les forces.

Pour faire usage de cette formule, la difficulté se réduira à déterminer, conformément à la nature du système donné, les valeurs des différentielles dp, dq, dr, ...

On considérera donc le système dans deux positions différentes et infiniment voisines, et l'on cherchera les expressions les plus générales des différences dont il s'agit, en introduisant dans ces expressions autant de quantités indéterminées qu'il y aura d'éléments arbitraires dans la variation de position du système. On substituera ensuite ces expressions de dp, dq, dr, ... dans l'équation proposée, et il faudra que cette équation ait lieu, indépendamment de toutes les indéterminées, afin que l'équilibre du système subsiste en général et dans tous les sens. On égalera donc séparément à zéro la somme des termes affectés de chacune des mêmes indéterminées, et l'on aura, par ce moyen, autant d'équations particulières qu'il y aura de ces indéterminées; or il n'est pas difficile de se convaincre que leur nombre doit toujours être égal à celui des quantités inconnues dans la position du système; donc on aura, par cette méthode, autant d'équations qu'il en faudra pour déterminer l'état d'équilibre du système.

C'est ainsi qu'en ont usé tous les auteurs qui ont appliqué jusqu'ici le principe des vitesses virtuelles à la solution des problèmes de Statique; mais cette manière d'employer ce principe exige souvent des constructions et des considérations géométriques qui rendent les solutions aussi longues que si on les déduisait des principes ordinaires de la Statique : c'est peut-être la raison qui a empêché qu'on n'ait fait de ce principe tout le cas et l'usage qu'il semble qu'on en aurait dû faire, vu sa simplicité et sa généralité.

3. L'objet de cet Ouvrage étant de réduire la Mécanique à des opérations purement analytiques, la formule que nous venons de trouver est très propre à le remplir. Il ne s'agit que d'exprimer analytiquement, et de la manière la plus générale, les valeurs des lignes p, q, r, ..., prises dans les directions des forces P, Q, R, ..., et l'on aura, par la simple différentiation, les valeurs des vitesses virtuelles dp, dq, dr, ...

Il faudra seulement faire attention que, dans le Calcul différentiel, lorsque plusieurs quantités varient ensemble, on suppose qu'elles augmentent toutes en même temps de leurs différentielles; et, si par la nature de la question quelques-unes d'entre elles doivent diminuer, tandis que les autres augmentent, on donne alors le signe *moins* aux différentielles de celles qui doivent diminuer.

Les différentielles dp, dq, dr, ..., qui représentent les vitesses virtuelles des forces P, Q, R, ..., devront donc être prises positivement ou négativement, selon que ces forces tendront à augmenter ou à diminuer les lignes p, q, r, ... qui déterminent leur direction; mais, comme la formule générale de l'équilibre ne change pas en changeant les signes de tous ses termes, il sera permis de regarder indifféremment comme positives les différentielles des lignes qui augmentent ou diminuent ensemble, et comme négatives les différentielles de celles qui varient en sens contraire. Ainsi, en regardant les forces comme positives, leurs *moments* Pdp, Qdq, ... seront positifs ou négatifs, selon que les vitesses virtuelles dp, dq, ... seront positives ou négatives, et lorsqu'on voudra faire agir les forces en sens contraire, il n'y aura qu'à donner le signe *moins* aux quantités qui représentent ces forces, ou à changer les signes de leurs *moments*.

Il résulte de là cette propriété générale de l'équilibre, qu'un système quelconque de forces en équilibre y demeure encore si chacune des forces vient à agir en sens contraire, pourvu que la constitution du système ne souffre aucun changement par un changement de direction de toutes les forces.

4. Quelles que soient les forces qui agissent sur un système donné de corps ou de points, on peut toujours les regarder comme tendantes vers des points placés dans les lignes de leur direction.

Nous nommerons ces points les *centres des forces*, et l'on pourra prendre pour les lignes p, q, r, ... les distances respectives de ces centres aux points du système auquel les forces P, Q, R, ... sont appliquées. Dans ce cas, il est clair que ces forces tendront à diminuer les lignes p, q, r, ...; il faudrait, par conséquent, donner le signe *moins* à leurs différentielles; mais, en changeant tous les signes, la formule générale sera également

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots = 0.$$

Or les centres des forces peuvent être hors du système, ou bien dans le système et en faire partie, ce qui distingue les forces en *extérieures* et *intérieures*.

Dans le premier cas, il est visible que les différences dp, dq, dr, ... expriment les variations entières des lignes p, q, r, ..., dues au changement de situation du système; elles sont, par conséquent, les différentielles complètes des quantités p, q, r, ..., en y regardant comme variables toutes les quantités relatives à la situation du système, et comme constantes celles qui se rapportent à la position des différents centres des forces.

Dans le second cas, quelques-uns des corps du système seront eux-mêmes les centres des forces qui agissent sur d'autres corps du même système, et, à cause de l'égalité entre l'action et la réaction, ces derniers corps seront en même temps les centres des forces qui agissent sur les premiers.

Considérons donc deux corps (¹) qui agissent l'un sur l'autre avec une force quelconque P, soit que cette force vienne de l'attraction ou de la répulsion de ces corps, ou d'un ressort placé entre eux, ou d'une autre manière quelconque. Soient p la distance entre ces deux corps, et dp' la variation de cette distance en tant qu'elle dépend du changement de situation de l'un des corps; il est clair qu'on aura, relativement à ce corps, $P\,dp'$ pour le moment virtuel de la force P. De même, si l'on désigne par dp'' la variation de la même distance p, résultante

(¹) Le mot *corps*, ici comme plus haut, désigne un point matériel. (*J. Bertrand.*)

du changement de situation de l'autre corps, on aura, relativement à ce second corps, le moment $P\,dp''$ de la même force P; donc le moment total dû à cette force sera représenté par $P(dp' + dp'')$; mais il est visible que $dp' + dp''$ est la différentielle complète de p, que nous désignerons par dp, puisque la distance p ne peut varier que par le déplacement des deux corps : donc le moment dont il s'agit sera exprimé simplement par $P\,dp$. On peut étendre ce raisonnement à tant de corps qu'on voudra.

5. Il suit de là que, pour avoir la somme des *moments* de toutes les forces d'un système donné, soit que ces forces soient extérieures ou intérieures, il n'y aura qu'à considérer en particulier chacune des forces qui agissent sur les différents corps ou points du système, et prendre la somme des produits de ces différentes forces multipliées chacune par la différentielle de la distance respective entre les deux termes de chaque force, c'est-à-dire entre le point sur lequel agit cette force et celui où elle tend, en regardant, dans ces différentielles, comme variables toutes les quantités qui dépendent de la situation du système, et comme constantes celles qui se rapportent aux points ou centres extérieurs, c'est-à-dire en considérant ces points comme fixes, tandis qu'on fait varier la situation du système.

Cette somme, étant égalée à zéro, donnera la formule générale de la Statique.

6. Pour donner à l'expression analytique de cette formule toute la généralité ainsi que la simplicité dont elle est susceptible, on rapportera la position de tous les corps ou points du système donné, ainsi que celle des centres, à des coordonnées rectangles et parallèles à trois axes fixes dans l'espace.

Nous nommerons, en général, x, y, z les coordonnées des points auxquels les forces sont appliquées, et nous les distinguerons ensuite par un ou plusieurs traits, relativement aux différents points du système.

Nous désignerons de même par a, b, c les coordonnées pour les centres des forces.

Il est visible que les distances p, q, r, ... entre les points d'application et les centres des forces seront exprimées, en général, par la formule

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

dans laquelle les quantités a, b, c seront constantes ou du moins devront être regardées comme telles, pendant que x, y, z varient, dans le cas où elles se rapportent à des points placés hors du système et où les forces sont extérieures; mais, dans le cas où les forces sont intérieures et partent de quelques-uns des corps du système même, ces quantités a, b, c deviendront x'', y'', z'', ..., et seront, par conséquent, variables.

Ayant ainsi les expressions des quantités finies p, q, r, ... en fonctions connues des coordonnées des différents corps du système, il n'y aura plus qu'à différentier à l'ordinaire, en regardant ces coordonnées comme seules variables, pour avoir les valeurs cherchées des différences dp, dq, dr, ... qui entrent dans la formule générale de l'équilibre.

7. Mais, quoiqu'on puisse toujours regarder les forces P, Q, R, ... comme tendantes à des centres donnés, cependant, comme la considération de ces centres est étrangère à la question, dans laquelle on ne considère ordinairement comme données que la quantité et la direction de chaque force, voici des manières plus générales d'exprimer les différences dp, dq, dr, ...

Et d'abord, en supposant, ce qui est toujours permis, que la force P tend à un centre fixe, on a

$$p=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

et de là, en différentiant sans que a, b, c varient, si la force P est extérieure,

$$dp=\frac{x-a}{p}dx+\frac{y-b}{p}dy+\frac{z-c}{p}dz.$$

Or il est facile de voir que $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ sont les cosinus des angles que la ligne p fait avec les lignes $x-a$, $y-b$, $z-c$. Donc, en général, si l'on nomme α, β, γ les angles que la direction de la force P fait avec les axes des x, y, z, ou avec des parallèles à ces axes, on aura

$$\frac{x-a}{p}=\cos\alpha,\qquad \frac{y-b}{p}=\cos\beta,\qquad \frac{z-c}{p}=\cos\gamma;$$

par conséquent,

$$dp=\cos\alpha\,dx+\cos\beta\,dy+\cos\gamma\,dz,$$

et ainsi des autres différences dq, dr, ...

Mais, si la même force P, étant intérieure, agit sur les deux points qui répondent aux coordonnées x, y, z et x', y', z' pour les rapprocher ou éloigner l'un de l'autre, on aura alors, dans l'expression de p,

$$a=x',\qquad b=y',\qquad c=z',$$

et, par conséquent,

$$dp=\cos\alpha(dx-dx')+\cos\beta(dy-dy')+\cos\gamma(dz-dz').$$

On remarquera, par rapport aux angles α, β, γ, premièrement, que

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

ce qui est évident par les formules précédentes; en second lieu que, si l'on nomme ε l'angle que la projection de la ligne p sur le plan des x et y fait avec l'axe des x, on aura

$$\frac{x-a}{\pi}=\cos\varepsilon,\qquad \frac{y-b}{\pi}=\sin\varepsilon,$$

en supposant

$$\pi=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2};$$

donc, mettant pour $x-a$, $y-b$ leurs valeurs $p\cos\alpha$, $p\cos\beta$, on aura aussi

$$\pi=p\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}=p\sqrt{1-\cos^2\gamma}=p\sin\gamma;$$

donc

$$\frac{x-a}{p}=\sin\gamma\cos\varepsilon,\qquad \frac{y-b}{p}=\sin\gamma\sin\varepsilon,$$

et, par conséquent,

$$\cos\alpha = \sin\gamma\cos\varepsilon, \qquad \cos\beta = \sin\gamma\sin\varepsilon.$$

8. Je considère ensuite que, puisque dp représente le petit espace que le corps ou point auquel est appliquée la force P peut parcourir suivant la direction de cette force, si l'on fait $dp = 0$, ce point ne pourra plus se mouvoir que dans des directions perpendiculaires à celle de la même force. Donc $dp = 0$ sera l'équation différentielle d'une surface à laquelle la direction de la force P sera perpendiculaire.

Cette surface sera une sphère si les quantités a, b, c sont constantes; mais elle pourra être une surface quelconque, en supposant ces quantités variables.

Supposons maintenant, en général, que la force P agisse perpendiculairement à une surface représentée par l'équation

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0.$$

Pour faire coïncider cette équation avec l'équation

$$(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz = 0$$

qui résulte de la supposition $dp = 0$, il n'y aura qu'à faire

$$\frac{A}{C} = \frac{x-a}{z-c}, \qquad \frac{B}{C} = \frac{y-b}{z-c},$$

ce qui donne

$$x - a = \frac{A}{C}(z-c), \qquad y - b = \frac{B}{C}(z-c);$$

substituant ces valeurs dans l'expression de dp, on aura

$$dp = \frac{A\,dx + B\,dy + C\,dz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ainsi, ayant l'équation différentielle de la surface à laquelle la force P est perpendiculaire, on aura l'expression de sa vitesse virtuelle dp.

On peut supposer

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = du,$$

u étant une fonction de x, y, z; car on sait qu'une équation différentielle du premier ordre à trois variables ne peut représenter une surface, à moins qu'elle ne soit intégrable ou ne le devienne par un multiplicateur. On aura ainsi, par l'algorithme des différences partielles,

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad B = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad C = \frac{\partial u}{\partial z},$$

et l'expression de dp deviendra

$$dp = \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}.$$

Donc le moment d'une force P perpendiculaire à une surface donnée par l'équation $du = 0$ sera

$$\frac{P\,du}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}.$$

On déterminera de la même manière les valeurs des autres différences dq, dr, ..., d'après les équations différentielles des surfaces auxquelles les directions des forces Q, R, ... sont perpendiculaires.

9. Mais, sans considérer la surface à laquelle une force est perpendiculaire, comme on peut représenter une quantité quelconque par une ligne, on pourra regarder p comme une fonction quelconque des coordonnées, et la force P comme tendante à faire varier la valeur de p. Alors $P\,dp$ sera également le moment virtuel de la force P; et de même $Q\,dq$, $R\,dr$, ... seront les moments des forces Q, R, ..., en les regardant comme tendantes à faire varier les valeurs des quantités $q, r, \ldots$, supposées des fonctions quelconques des mêmes coordonnées. Cette manière d'envisager les moments donne à la formule générale de l'é-

quilibre une étendue beaucoup plus grande et la rend susceptible d'un plus grand nombre d'applications ([1]).

10. Les valeurs des différences dp, dq, dr, ... étant connues en fonction des différentielles des coordonnées des différents corps du système, il n'y aura qu'à les substituer dans la formule générale

$$\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots = 0,$$

et vérifier ensuite cette équation d'une manière indépendante des différentielles qu'elle renfermera.

Donc, si le système est entièrement libre, en sorte qu'il n'y ait aucune relation donnée entre les coordonnées des différents corps ni, par conséquent, entre leurs différentielles, il faudra satisfaire à l'équation précédente indépendamment de ces différentielles et, pour cet effet, égaler séparément à zéro la somme de tous les termes qui se trouveront multipliés par chacune d'elles; ce qui donnera autant d'équations qu'il y aura de coordonnées variables et, par conséquent, autant qu'il en faudra pour déterminer toutes ces variables et connaître par leur moyen la position de tout le système dans l'état d'équilibre.

Mais, si la nature du système est telle que les corps soient assujettis dans leurs mouvements à des conditions particulières, il faudra commencer par exprimer ces conditions par des équations analytiques que nous nommerons *équations de condition*; ce qui est toujours facile. Par exemple, si quelques-uns des corps étaient assujettis à se mouvoir sur des lignes ou des surfaces données, on aurait, entre les coordonnées de ces corps, les équations mêmes des lignes ou des surfaces données; si deux corps étaient tellement joints ensemble qu'ils dussent toujours se trouver à une même distance k l'un de l'autre, on aurait évidemment l'équation

([1]) En rapprochant cet article 9 des articles 6 et 18 (Sect. IV), on est conduit à l'entendre de la manière suivante : Lorsque des forces auront pour la somme de leurs moments virtuels un produit de la forme $\mathrm{P}\,dp$, p étant une fonction quelconque des coordonnées, on dira que le système des forces proposées équivaut à une force P, qui tend à faire varier la fonction p. C'est là une locution toute conventionnelle. Le mot *force* s'y trouve complètement détourné de sa signification habituelle. Cette locution, du reste, n'a pas été adoptée par les géomètres.
(*J. Bertrand.*)

$$k^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2,$$

et ainsi du reste.

Ayant trouvé les équations de condition, il faudra, par leur moyen, éliminer autant de différentielles qu'on pourra dans les expressions dp, dq, dr, ..., en sorte que les différentielles restantes soient absolument indépendantes les unes des autres et n'expriment plus que ce qu'il y a d'arbitraire dans le changement de situation du système. Alors, comme la formule générale de la Statique doit avoir lieu quel que puisse être ce changement, il faudra y égaler séparément à zéro la somme de tous les termes qui se trouveront affectés de chacune des différentielles indéterminées; d'où il viendra autant d'équations particulières qu'il y aura de ces mêmes différentielles, et ces équations, étant jointes aux équations de condition données, renfermeront toutes les conditions nécessaires pour la détermination de l'état d'équilibre du système; car il est aisé de concevoir que toutes ces équations ensemble seront toujours en même nombre que les différentes variables qui servent de coordonnées à tous les corps du système, et suffiront, par conséquent, toujours pour déterminer chacune de ces variables.

11. Au reste, si nous avons toujours déterminé les lieux des corps par des coordonnées rectangles, c'est que cette manière a l'avantage de la simplicité et de la facilité du calcul; mais ce n'est pas qu'on ne puisse en employer d'autres dans l'usage de la méthode précédente, car il est clair que rien n'oblige dans cette méthode à se servir de coordonnées rectangles plutôt que d'autres lignes ou quantités relatives aux lieux des corps. Ainsi, au lieu des deux coordonnées x, y, on pourra employer, lorsque les circonstances paraîtront l'exiger, un rayon vecteur $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ et un angle φ dont la tangente soit $\frac{y}{x}$, ce qui donnera

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi,$$

en laissant subsister la troisième coordonnée z; ou bien on emploiera un rayon vecteur $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ avec deux angles φ et ψ, tels que

$$\tang\varphi = \frac{y}{x}, \qquad \tang\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

ce qui donnera

$$x = \rho\cos\psi\cos\varphi, \qquad y = \rho\cos\psi\sin\varphi, \qquad z = \rho\sin\psi,$$

ou d'autres angles ou lignes quelconques.

Remarquons encore que, comme il n'y a proprement que la considération des différences dx, dy, dz qui entre dans la méthode dont il s'agit, il est permis de placer l'origine des coordonnées où l'on voudra; ce qui peut servir à simplifier l'expression de ces différences.

Ainsi, en substituant $\rho\cos\varphi$ et $\rho\sin\varphi$ au lieu de x et y, on aura, en général,

$$dx = \cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi,$$
$$dy = \sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi;$$

mais, en faisant $\varphi = 0$, ce qui revient à placer l'origine de l'angle φ dans le rayon ρ, on aura plus simplement $dx = d\rho$ et $dy = \rho\, d\varphi$. Et ainsi des autres cas semblables.

12. En général, quel que soit le système de puissances dont on cherche l'équilibre et de quelque manière que les points où elles sont appliquées soient liés entre eux, on peut toujours réduire les variables qui déterminent la position de ces points dans l'espace à un petit nombre de variables indépendantes en éliminant, au moyen des équations de condition données par la nature du système, autant de variables qu'il y a de conditions, c'est-à-dire en exprimant toutes les variables, qui sont au nombre de trois pour chaque point, par un petit nombre d'entre elles ou par d'autres variables quelconques qui, n'étant plus assujetties à aucune condition, seront indépendantes et indéterminées. Il faudra alors que l'équilibre ait lieu par rapport à chacune

de ces variables indépendantes [1], parce qu'elles donnent lieu à autant de changements différents dans la position du système.

13. En effet, si l'on dénote par ξ, ψ, φ, ... ces variables indépendantes, en regardant les valeurs de p, q, r, ... comme fonctions de ces variables, on aura

$$dp = \frac{\partial p}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial p}{\partial\psi}d\psi + \frac{\partial p}{\partial\varphi}d\varphi + \ldots,$$
$$dq = \frac{\partial q}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial q}{\partial\psi}d\psi + \frac{\partial q}{\partial\varphi}d\varphi + \ldots,$$
$$dr = \frac{\partial r}{\partial\xi}d\xi + \frac{\partial r}{\partial\psi}d\psi + \frac{\partial r}{\partial\varphi}d\varphi + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et l'équation de l'équilibre $P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots = 0$ deviendra

$$\begin{aligned}&\left(P\frac{\partial p}{\partial\xi} + Q\frac{\partial q}{\partial\xi} + R\frac{\partial r}{\partial\xi} + \ldots\right)d\xi\\ &+\left(P\frac{\partial p}{\partial\psi} + Q\frac{\partial q}{\partial\psi} + R\frac{\partial r}{\partial\psi} + \ldots\right)d\psi\\ &+\left(P\frac{\partial p}{\partial\varphi} + Q\frac{\partial q}{\partial\varphi} + R\frac{\partial r}{\partial\varphi} + \ldots\right)d\varphi\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,\end{aligned}$$

dans laquelle, les valeurs de $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$, ... devant demeurer indéterminées, il faudra que l'on ait séparément les équations

$$P\frac{\partial p}{\partial\xi} + Q\frac{\partial q}{\partial\xi} + R\frac{\partial r}{\partial\xi} + \ldots = 0,$$
$$P\frac{\partial p}{\partial\psi} + Q\frac{\partial q}{\partial\psi} + R\frac{\partial r}{\partial\psi} + \ldots = 0,$$
$$P\frac{\partial p}{\partial\varphi} + Q\frac{\partial q}{\partial\varphi} + R\frac{\partial r}{\partial\varphi} + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

[1] C'est-à-dire, il faudra que les coefficients des variations de chacune de ces variables soient nuls séparément. (*J. Bertrand.*)

dont le nombre sera égal à celui des variables ξ, ψ, φ, ..., et qui serviront, par conséquent, à déterminer toutes ces variables.

Chacune de ces équations représente, comme l'on voit, un équilibre particulier dans lequel les vitesses virtuelles ont entre elles des rapports déterminés; et c'est de la réunion de tous ces équilibres partiels que se forme l'équilibre général du système.

On peut même remarquer que c'est proprement à ces équilibres partiels et déterminés que s'applique, sans exception, le raisonnement de l'article 1 de cette Section; et, comme dans le cas de deux puissances on peut toujours réduire leur équilibre à celui d'un levier droit dont les bras soient en raison des vitesses virtuelles, on peut, par ce moyen, faire dépendre le principe général des vitesses virtuelles du seul principe du levier.

14. Lorsque la quantité $P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots$ ne sera pas nulle par rapport à toutes les variables indépendantes, les forces P, Q, R, ... ne se feront pas équilibre, et les corps sollicités par ces forces prendront des mouvements dépendant des mêmes forces et de leur action mutuelle.

Supposons que d'autres forces représentées par P′, Q′, R′, ... et dirigées suivant les lignes p', q', r', ..., agissant sur les corps du même système, leur impriment aussi les mêmes mouvements; ces forces seront équivalentes aux premières et pourront, dans tous les cas, être substituées à leur place, puisque leur effet est supposé exactement le même. Or, si ces mêmes forces P′, Q′, R′, ..., en conservant leurs valeurs, changeaient leurs directions et en prenaient de directement opposées, il est clair qu'elles imprimeraient aussi aux mêmes corps des mouvements égaux, mais directement contraires. Par conséquent, si, dans ce nouvel état, elles agissaient sur les corps du même système en même temps que les forces P, Q, R, ..., ces corps demeureraient en repos, les mouvements imprimés dans un sens étant détruits par des mouvements égaux et contraires. Il y aurait donc nécessairement équilibre entre toutes ces forces, ce qui donnerait l'équation

(art. 2)

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots - P'\,dp' - Q'\,dq' - R'\,dr' - \ldots = 0;$$

d'où l'on tire

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots = P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' + \ldots.$$

C'est la condition nécessaire pour que les forces P′, Q′, R′, ... agissant suivant les lignes p', q', r', ... soient équivalentes aux forces P, Q, R, ... agissant suivant les lignes p, q, r, ...; et, comme deux systèmes de forces ne peuvent être entièrement équivalents (¹) que d'une seule manière, puisque le mouvement d'un corps est toujours unique et déterminé, il s'ensuit que, si deux systèmes de forces P, Q, R, ..., P′, Q′, R′, ... sont tels que l'on ait, généralement et par rapport à toutes les variables indépendantes, l'équation

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots = P'\,dp' + Q'\,dq' + R'\,dr' + \ldots$$

ces deux systèmes seront équivalents et pourront, dans tous les cas, être substitués l'un à l'autre.

15. Il résulte de là ce théorème important de Statique, que deux systèmes de forces sont équivalents et peuvent être substitués l'un à l'autre, dans un même système de corps liés entre eux d'une manière quelconque, lorsque les sommes des moments des forces sont toujours égales dans les deux systèmes; et, réciproquement, lorsque la somme des moments des forces d'un système est toujours égale à la somme des moments des forces d'un autre système, ces deux systèmes de forces sont équivalents et peuvent être substitués l'un à l'autre dans le même système de corps.

Si l'on fait dépendre les lignes p, q, r, ... des lignes ξ, ψ, φ, ..., la formule

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots$$

(¹) C'est-à-dire que deux systèmes qui sont équivalents, en ce sens qu'ils font équilibre à un même troisième, peuvent être, par cela même, considérés comme complètement équivalents. (*J. Bertrand.*)

se transforme, comme dans l'article 13, en celle-ci,

$$\Xi\, d\xi + \Psi\, d\psi + \Phi\, d\varphi + \ldots,$$

dans laquelle

$$\Xi = \mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial \xi} + \mathrm{Q}\frac{\partial q}{\partial \xi} + \mathrm{R}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \ldots,$$

$$\Psi = \mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial \psi} + \mathrm{Q}\frac{\partial q}{\partial \psi} + \mathrm{R}\frac{\partial r}{\partial \psi} + \ldots,$$

$$\Phi = \mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mathrm{Q}\frac{\partial q}{\partial \varphi} + \mathrm{R}\frac{\partial r}{\partial \varphi} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a donc également

$$\mathrm{P}\, dp + \mathrm{Q}\, dq + \mathrm{R}\, dr + \ldots = \Xi\, d\xi + \Psi\, d\psi + \Phi\, d\varphi + \ldots.$$

Ainsi le système des forces P, Q, R, ... dirigées suivant les lignes p, q, r, ... est équivalent au système des forces Ξ, Ψ, Φ, ... agissant suivant les lignes ξ, ψ, φ, ... et peut être changé en celui-ci, dans le même système de corps tirés par ces forces (¹).

(¹) Il faut, pour qu'il en soit ainsi, que les lignes ξ, ψ, φ, ... soient de telle nature, que leurs différentielles $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$, ... expriment les vitesses virtuelles des points d'application des forces Ξ, Ψ, Φ, ..., c'est-à-dire que chacune d'elles soit la projection orthogonale du déplacement du point sur la direction de la force. *Voir* à ce sujet une Note de M. Poinsot, insérée dans le Journal de M. Liouville (1re série, t. XI, p. 241), et que nous reproduisons à la fin du Volume. (*J. Bertrand.*)

SECTION TROISIÈME.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE CORPS, DÉDUITES DE LA FORMULE PRÉCÉDENTE.

1. Considérons un système ou assemblage quelconque de corps ou points qui, étant tirés par des puissances quelconques, se fassent mutuellement équilibre. Si dans un instant l'action de ces puissances cessait d'être détruite, le système commencerait à se mouvoir et, quel que pût être son mouvement, on pourrait toujours le concevoir comme composé : 1° d'un mouvement de translation commun à tous les corps; 2° d'un mouvement de rotation autour d'un point quelconque; 3° des mouvements relatifs des corps entre eux, par lesquels ils changeraient leur position et leurs distances mutuelles. Il faut donc, pour l'équilibre, que les corps ne puissent prendre aucun de ces différents mouvements. Or il est clair que les mouvements relatifs dépendent de la manière dont les corps sont disposés les uns par rapport aux autres; par conséquent, les conditions nécessaires pour empêcher ces mouvements doivent être particulières à chaque système. Mais les mouvements de translation et de rotation peuvent être indépendants de la forme du système et s'exécuter sans que la disposition et la liaison mutuelle des corps en soient dérangées.

Ainsi la considération de ces deux espèces de mouvements doit fournir des conditions ou propriétés générales de l'équilibre. C'est ce que nous allons examiner.

§ I. — *Propriétés de l'équilibre d'un système libre relatives au mouvement de translation.*

2. Soit un nombre quelconque de corps regardés comme des points et disposés ou liés entre eux comme on voudra, lesquels soient tirés par les puissances P, P′, P″, ... suivant les directions des lignes p, p', p'', ... On aura (Section précédente), pour l'équilibre de ces corps, la formule générale

$$\mathrm{P}\,dp + \mathrm{P}'\,dp' + \mathrm{P}''\,dp'' + \ldots = 0.$$

En rapportant à des coordonnées rectangles les différents points tirés par les forces P, P′, ..., ainsi que les centres de ces forces, comme dans l'article 6 de la Section précédente, on aura, pour les forces extérieures,

$$p = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$
$$p' = \sqrt{(x'-a')^2 + (y'-b')^2 + (z'-c')^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais, si les corps qui répondent, par exemple, aux coordonnées x, y, z et aux $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, agissent l'un sur l'autre par une force mutuelle que nous désignerons par $\overline{\mathrm{P}}$, en nommant $\bar{p}$ la distance rectiligne de ces deux corps, on aurait

$$\bar{p} = \sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + (z-\bar{z})^2},$$

et il faudrait ajouter à la formule générale le terme $\overline{\mathrm{P}}\,d\bar{p}$, provenant de la force intérieure $\overline{\mathrm{P}}$; et ainsi de suite, si plusieurs forces agissent sur les mêmes corps.

3. Faisons, ce qui est permis,

$$\begin{array}{lll}
x' = x + \xi, & y' = y + \eta, & z' = z + \zeta, \\
x'' = x + \xi', & y'' = y + \eta', & z'' = z + \zeta', \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
\bar{x} = x + \bar{\xi}, & \bar{y} = y + \bar{\eta}, & \bar{z} = z + \bar{\zeta}, \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots,
\end{array}$$

et supposons qu'on ait substitué ces valeurs dans la formule précédente.

Puisque x, y, z sont les coordonnées absolues du corps tiré par la force P, il est clair que ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', ... ne seront autre chose que les coordonnées relatives des autres corps par rapport à celui-ci, pris pour leur origine commune; de sorte que la position mutuelle des corps ne dépendra que de ces dernières coordonnées, et nullement des premières. Donc, si l'on suppose le système entièrement libre, c'est-à-dire les corps simplement liés entre eux d'une manière quelconque, mais sans qu'ils soient retenus ou empêchés par des appuis fixes, ou des obstacles extérieurs quelconques, il est aisé de concevoir que les conditions résultantes de la nature du système ne pourront regarder que les quantités ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', ..., et nullement les quantités x, y, z, dont les différentielles demeureront, par conséquent, indépendantes et indéterminées.

Ainsi, après les substitutions dont il s'agit, il faudra égaler séparément à zéro chacun des membres affectés de dx, dy, dz, ce qui donnera ces trois équations (art. 2) :

$$\mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial x} + \mathrm{P}'\frac{\partial p'}{\partial x} + \mathrm{P}''\frac{\partial p''}{\partial x} + \ldots + \overline{\mathrm{P}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \ldots = 0,$$
$$\mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial y} + \mathrm{P}'\frac{\partial p'}{\partial y} + \mathrm{P}''\frac{\partial p''}{\partial y} + \ldots + \overline{\mathrm{P}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \ldots = 0,$$
$$\mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial z} + \mathrm{P}'\frac{\partial p'}{\partial z} + \mathrm{P}''\frac{\partial p''}{\partial z} + \ldots + \overline{\mathrm{P}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \ldots = 0.$$

On voit d'abord que les variables x, y, z n'entreront point dans l'expression de $\bar{p}$; ainsi l'on aura

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = 0, \qquad \ldots,$$

ce qui fera disparaître les termes qui contiendront les forces intérieures $\overline{\mathrm{P}}$, ...

On voit ensuite que les valeurs de

$$\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad \frac{\partial p'}{\partial y}, \quad \frac{\partial p'}{\partial z}, \quad \frac{\partial p''}{\partial x}, \quad \frac{\partial p''}{\partial y}, \quad \frac{\partial p''}{\partial z}, \quad \ldots$$

seront les mêmes que celles de

$$\frac{\partial p'}{\partial x'}, \quad \frac{\partial p'}{\partial y'}, \quad \frac{\partial p'}{\partial z'}, \quad \frac{\partial p''}{\partial x''}, \quad \frac{\partial p''}{\partial y''}, \quad \frac{\partial p''}{\partial z''}, \quad \ldots.$$

Or, si l'on nomme α, β, γ les angles que la ligne p fait avec les axes des x, y, z, ou avec des parallèles à ces axes, α', β', γ' les angles que la ligne p' fait avec les mêmes axes, ..., on a, comme on l'a vu plus haut (art. 7, Section précédente),

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \cos\alpha, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \cos\beta, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = \cos\gamma;$$

et, de même,

$$\frac{\partial p'}{\partial x'} = \cos\alpha', \qquad \frac{\partial p'}{\partial y'} = \cos\beta', \qquad \frac{\partial p'}{\partial z'} = \cos\gamma', \qquad \ldots.$$

Donc les trois équations ci-dessus deviendront

$$\begin{aligned}
&P\cos\alpha + P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + \ldots = 0,\\
&P\cos\beta + P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + \ldots = 0,\\
&P\cos\gamma + P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + \ldots = 0,
\end{aligned}$$

lesquelles devront nécessairement avoir lieu dans l'équilibre d'un système libre. Ce sont les équations nécessaires pour empêcher le mouvement de translation.

4. Si les puissances P, P′, P″, ... étaient parallèles, on aurait

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots, \qquad \beta = \beta' = \beta'' = \ldots, \qquad \gamma = \gamma' = \gamma'' = \ldots,$$

et les trois équations précédentes se réduiraient à celle-ci

$$P + P' + P'' + \ldots = 0,$$

laquelle montre que la somme des forces parallèles doit être nulle.

En général, il est facile de concevoir que, P représentant l'action totale de la puissance P suivant sa propre direction, $P\cos\alpha$ représentera son action relative, estimée suivant la direction de l'axe des x, lequel fait l'angle α avec la direction de la force P; de même, $P\cos\beta$ et $P\cos\gamma$ seront les actions relatives de la même force, estimées suivant la direction des axes des y et des z, et ainsi des autres forces P′, P″, ...

De là résulte ce théorème de Statique, que *la somme des puissances estimées suivant la direction de trois axes perpendiculaires entre eux doit être nulle par rapport à chacun de ces axes, dans l'équilibre d'un système libre.*

§ II. — *Propriétés de l'équilibre relatives au mouvement de rotation.*

5. Prenons maintenant, ce qui est permis, à la place des coordonnées x, y, x', y', x'', y'', ..., $\bar{x}$, $\bar{y}$, ..., les rayons vecteurs ρ, ρ', ρ'', ..., $\bar{\rho}$, ..., avec les angles φ, φ', φ'', ..., $\bar{\varphi}$, ..., que ces rayons font avec l'axe des x; on aura, comme l'on sait,

$$x = \rho\cos\varphi, \qquad y = \rho\sin\varphi,$$

et, de même,

$$x' = \rho'\cos\varphi', \qquad y' = \rho'\sin\varphi', \qquad \ldots, \qquad \bar{x} = \bar{\rho}\cos\bar{\varphi}, \qquad \bar{y} = \bar{\rho}\sin\bar{\varphi}, \qquad \ldots.$$

Faisons ces substitutions dans la formule générale de l'article 2 et supposons

$$\varphi' = \varphi + \sigma, \qquad \varphi'' = \varphi + \sigma', \qquad \ldots, \qquad \bar{\varphi} = \varphi + \bar{\sigma}, \qquad \ldots;$$

il est visible que σ, σ', ..., $\bar{\sigma}$, ... seront les angles que les rayons ρ', ρ'', ..., $\bar{\rho}$, ... forment avec le rayon ρ; par conséquent, les distances des corps, tant entre eux que par rapport au plan des xy et au point qui est pris pour l'origine des coordonnées, dépendront uniquement des quantités ρ, ρ', ρ'', ..., $\bar{\rho}$, ..., σ, σ', ..., $\bar{\sigma}$, ..., z, z', z'', ..., $\bar{z}$, ...

Donc, si le système a la liberté de tourner autour de ce point parallèlement au plan des xy, c'est-à-dire autour de l'axe des z qui est perpendiculaire à ce plan, l'angle φ sera indépendant des conditions du système, et sa différence $d\varphi$ demeurera, par conséquent, arbitraire. D'où il suit que les termes affectés de $d\varphi$ dans l'équation générale de l'équilibre devront être ensemble égaux à zéro.

Il est facile de voir que tous ces termes seront représentés par $\mathrm{N}\,d\varphi$, en faisant

$$\mathrm{N} = \mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mathrm{P}'\frac{\partial p'}{\partial \varphi} + \mathrm{P}''\frac{\partial p''}{\partial \varphi} + \ldots + \overline{\mathrm{P}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \varphi} + \ldots,$$

de sorte que l'on aura pour l'équilibre l'équation

$$\mathrm{N} = 0.$$

En substituant les valeurs de $x, y, x', y', \ldots, \overline{x}, \overline{y}, \ldots$ dans les expressions de $p, p', \ldots, \overline{p}, \ldots$ (art. 2), et faisant de plus

$$a = \mathrm{R}\cos\mathrm{A}, \qquad b = \mathrm{R}\sin\mathrm{A}, \qquad a' = \mathrm{R}'\cos\mathrm{A}', \qquad b' = \mathrm{R}'\sin\mathrm{B}', \qquad \ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned}
p &= \sqrt{\rho^2 - 2\rho\mathrm{R}\cos(\varphi - \mathrm{A}) + \mathrm{R}^2 + (z - c)^2},\\
p' &= \sqrt{\rho'^2 - 2\rho'\mathrm{R}\cos(\varphi' - \mathrm{A}') + \mathrm{R}'^2 + (z' - c')^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\overline{p} &= \sqrt{\rho^2 - 2\rho\overline{\rho}\cos(\varphi - \overline{\varphi}) + \overline{\rho}^2 + (z - \overline{z})^2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

où il faudra encore mettre $\varphi + \sigma, \varphi + \sigma', \ldots, \varphi + \overline{\sigma}, \ldots$ à la place de $\varphi', \varphi'', \ldots, \overline{\varphi}, \ldots$.

Par ces dernières substitutions, on voit d'abord que les quantités $\overline{p}, \ldots$ ne contiendront plus l'angle φ; ainsi l'on aura $\frac{\partial \overline{p}}{\partial \varphi} = 0, \ldots$: par conséquent, les forces intérieures $\overline{\mathrm{P}}, \ldots$ disparaîtront de l'équation, et il n'y restera que les forces extérieures $\mathrm{P}, \mathrm{P}', \ldots$.

Ensuite on aura

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\rho\mathrm{R}\sin(\varphi - \mathrm{A})}{p}, \qquad \frac{\partial p'}{\partial \varphi} = \frac{\rho'\mathrm{R}'\sin(\varphi' - \mathrm{A}')}{p'}, \qquad \ldots,$$

et la quantité N deviendra

$$\mathrm{N} = \frac{\mathrm{P}\mathrm{R}\rho\sin(\varphi - \mathrm{A})}{p} + \frac{\mathrm{P}'\mathrm{R}'\rho'\sin(\varphi' - \mathrm{A}')}{p'} + \ldots.$$

Comme on peut prendre les centres des forces $\mathrm{P}, \mathrm{P}', \ldots$ partout où l'on veut dans la direction de ces forces, on peut supposer que ces forces soient représentées par les lignes mêmes $p, p', \ldots$, qui sont les distances rectilignes de leurs points d'application aux centres respectifs. De cette manière, on aura plus simplement

$$\mathrm{N} = \mathrm{R}\rho\sin(\varphi - \mathrm{A}) + \mathrm{R}'\rho'\sin(\varphi' - \mathrm{A}') + \ldots.$$

Dans cette formule, les rayons R et ρ, qui partent de l'origine des coordonnées et qui renferment l'angle $\varphi - \mathrm{A}$, sont les côtés d'un triangle qui a pour base la projection de la ligne p sur le plan des xy; par conséquent, la quantité $\mathrm{R}\rho\sin(\varphi - \mathrm{A})$ exprime le double de l'aire de ce triangle, et ainsi des autres quantités semblables.

Or, ayant nommé ci-dessus (art. 3) $\gamma, \gamma', \ldots$ les angles que les directions des forces $\mathrm{P}, \mathrm{P}', \ldots$ font avec l'axe des z ou avec des parallèles à cet axe, il est clair que les compléments de ces angles seront les inclinaisons des lignes $p, p', \ldots$ au plan des xy : donc $p\sin\gamma$, $p'\sin\gamma', \ldots$ seront les projections de ces lignes; et, si de l'origine des coordonnées on abaisse sur ces projections des perpendiculaires que nous nommerons $\Pi, \Pi', \ldots$, on aura

$$\mathrm{R}\rho\sin(\varphi - \mathrm{A}) = \Pi p\sin\gamma, \qquad \mathrm{R}'\rho'\sin(\varphi' - \mathrm{A}') = \Pi' p'\sin\gamma', \qquad \ldots,$$

et la quantité N se réduira à la forme

$$\mathrm{N} = \Pi\mathrm{P}\sin\gamma + \Pi'\mathrm{P}'\sin\gamma' + \Pi''\mathrm{P}''\sin\gamma'' + \ldots,$$

en remettant $\mathrm{P}, \mathrm{P}', \mathrm{P}'', \ldots$ à la place de $p, p', p'', \ldots$.

6. L'équation $\mathrm{N} = 0$ donnera ainsi le théorème suivant :

Dans l'équilibre d'un système qui a la liberté de tourner autour d'un axe et qui est composé de corps qui agissent les uns sur les autres d'une *manière quelconque et sont en même temps tirés par des forces extérieures, la somme de ces forces, estimées parallèlement à un plan perpendiculaire à l'axe et multipliées chacune par la perpendiculaire menée de l'axe à la direction de la force projetée sur le même plan, doit être nulle, en donnant des signes contraires aux forces dont les directions tendent à faire tourner le système dans des sens contraires.*

On énonce ordinairement ce théorème d'une manière plus simple, en disant que *les moments des forces, par rapport à un axe, doivent se détruire pour qu'il y ait équilibre autour de cet axe*. Car on entend aujourd'hui, en Mécanique, par *moment* d'une force ou puissance par rapport à une ligne, le produit de cette force estimée parallèlement à un plan perpendiculaire à cette ligne, et multipliée par son bras de levier, qui est la perpendiculaire menée de cette ligne sur la direction de la puissance rapportée au même plan. En effet, c'est uniquement de ce moment que dépend l'action de la force pour faire tourner le système autour de l'axe, puisque, si on la décompose en deux, l'une parallèle à l'axe, l'autre dans un plan perpendiculaire à l'axe, il n'y aura évidemment que cette dernière qui puisse produire une rotation. Nous donnerons, en conséquence, à ce moment le nom particulier de *moment relatif à un axe de rotation*.

7. Le coefficient N du terme $N\,d\varphi$ (art. 5) exprime, comme on le voit, la somme des moments de toutes les forces du système relativement à l'axe de la rotation instantanée $d\varphi$. Ainsi, pour trouver la somme de ces moments relatifs à un axe quelconque, il n'y aura qu'à transformer la formule générale

$$P\,dp + P'\,dp' + P''\,dp'' + \ldots,$$

qui exprime la somme des *moments virtuels* de toutes les forces, en y introduisant, pour une des variables indépendantes, l'angle de rotation autour de l'axe donné; le coefficient de la différentielle de cet angle sera la somme de tous les moments relatifs à cet axe, ce qui peut être utile dans plusieurs occasions.

8. Lorsque le système peut tourner en tout sens autour du point que nous prenons pour l'origine des coordonnées, il faut considérer à la fois les rotations instantanées autour des trois axes des x, des y, des z, et l'on aura, par rapport à chacun de ces axes, une équation semblable à celle que nous venons de trouver et qui renferme la propriété des moments; mais il ne sera pas inutile de résoudre le même problème par une analyse plus simple et plus générale.

Pour cela soit, comme dans l'article 5,

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad x' = \rho'\cos\varphi', \quad y' = \rho'\sin\varphi', \quad \ldots;$$

en faisant varier simplement les angles φ, φ', ..., de la même différence $d\varphi$, on aura

$$dx = -y\,d\varphi, \quad dy = x\,d\varphi, \quad dx' = -y'\,d\varphi, \quad dy' = x'\,d\varphi, \quad \ldots.$$

Ce sont les variations de x, y, x', y', ..., dues à la rotation élémentaire $d\varphi$ du système autour de l'axe des z.

On aura de même les variations de y, z, y', z', ..., dues à une rotation élémentaire $d\psi$ autour de l'axe des x, en changeant simplement dans les formules précédentes x, y, x', y', ... en y, z, y', z', ..., et $d\varphi$ en $d\psi$, ce qui donnera

$$dy = -z\,d\psi, \quad dz = y\,d\psi, \quad dy' = -z'\,d\psi \quad dz' = y'\,d\psi, \quad \ldots.$$

En changeant, dans ces dernières formules, y, z, y', z', ... respectivement en z, x, z', x', ..., et $d\psi$ en $d\omega$, on aura les variations provenant de la rotation élémentaire $d\omega$ autour de l'axe des y, lesquelles seront

$$dz = -x\,d\omega, \quad dx = z\,d\omega, \quad dz' = -x'\,d\omega, \quad dx' = z'\,d\omega, \quad \ldots.$$

Si donc on suppose que les trois rotations aient lieu à la fois [1], les

[1] En réalité, les trois rotations ne peuvent avoir lieu à la fois, mais successivement. Il n'y a cependant aucun inconvénient à les considérer, dans le calcul, comme simultanées, car chacune d'elles, changeant infiniment peu la position du corps, ne peut exercer, sur les déplacements que les autres produisent, qu'une influence infiniment petite, et ne modifie le mouvement dû à ces autres rotations que d'une quantité infiniment petite par rapport à sa propre valeur. (*J. Bertrand.*)

variations totales des coordonnées $x, y, z, x', y', z', \ldots$ seront, d'après les principes du Calcul différentiel, égales aux sommes des variations partielles dues à chacune de ces rotations, de sorte qu'on aura alors ces expressions complètes

$$dx = z\,d\omega - y\,d\varphi, \qquad dy = x\,d\varphi - z\,d\psi, \qquad dz = y\,d\psi - x\,d\omega,$$
$$dx' = z'\,d\omega - y'\,d\varphi, \qquad dy' = x'\,d\varphi - z'\,d\psi, \qquad dz' = y'\,d\psi - x'\,d\omega,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

En substituant ces valeurs dans la formule générale de l'équilibre (art. 2), on aura les termes dus seulement aux rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ autour des trois axes des x, des y, des z, lesquels devront être séparément égaux à zéro lorsque le système a la liberté de tourner en tout sens autour du point qui fait l'origine des coordonnées.

Or on a, par la différentiation,

$$dp = \frac{(x-a)\,dx + (y-b)\,dy + (z-c)\,dz}{p},$$
$$dp' = \frac{(x'-a')\,dx' + (y'-b')\,dy' + (z'-c')\,dz'}{p'},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$d\bar{p} = \frac{(x-\bar{x})(dx-d\bar{x}) + (y-\bar{y})(dy-d\bar{y}) + (z-\bar{z})(dz-d\bar{z})}{\bar{p}},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

On aura donc, par les substitutions dont il s'agit,

$$dp = \frac{(ay-bx)\,d\varphi + (bz-cy)\,d\psi + (cx-az)\,d\omega}{p},$$
$$dp' = \frac{(a'y'-b'x')\,d\varphi + (b'z'-c'y')\,d\psi + (c'x'-a'z')\,d\omega}{p'},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Et l'on trouvera $d\bar{p} = 0$, $d\bar{p}' = 0$, $\ldots$, en mettant pour $d\bar{x}$, $d\bar{y}$, $d\bar{z}$, $\ldots$ les valeurs analogues $\bar{z}\,d\omega - \bar{y}\,d\varphi$, $\bar{x}\,d\varphi - \bar{z}\,d\psi$, $\bar{y}\,d\psi - \bar{x}\,d\omega$, $\ldots$; d'où l'on peut tout de suite conclure que les termes $\bar{P}\,d\bar{p}$, $\bar{P}'\,d\bar{p}'$, $\ldots$ de la

même équation, qui résulteraient des forces intérieures du système, disparaitront par ces substitutions.

On aura aussi $dp = 0$ si l'on fait $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, c'est-à-dire si le centre des forces P tombe dans l'origine des coordonnées, ce qui fera aussi disparaitre cette force.

9. Faisant donc abstraction des forces intérieures, s'il y en a, ainsi que de toute force qui serait dirigée vers le centre des coordonnées, on aura, en général, pour toutes les forces P, P′, …, dirigées suivant les lignes $p, p', \ldots$, l'équation

$$L\,d\psi + M\,d\omega + N\,d\varphi = 0,$$

en faisant

$$L = \frac{P(bz-cy)}{p} + \frac{P'(b'z'-c'y')}{p'} + \ldots,$$
$$M = \frac{P(cx-az)}{p} + \frac{P'(c'x'-a'z')}{p'} + \ldots,$$
$$N = \frac{P(ay-bx)}{p} + \frac{P'(a'y'-b'x')}{p'} + \ldots,$$

et l'on aura, pour tout système libre de tourner en tout sens autour de l'origine des coordonnées, les trois équations

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0,$$

lesquelles répondent à celle de l'article 5, rapportée aux trois axes des coordonnées.

Car, en employant, à la place des coordonnées $a, b, c, a', \ldots$ des centres de forces, les angles $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \ldots$ que les directions de ces forces font avec les trois axes des coordonnées, et faisant par conséquent, comme dans l'article 7 de la Section précédente,

$$a = x - p\cos\alpha, \qquad b = y - p\cos\beta, \qquad c = z - p\cos\gamma,$$

et ainsi des autres quantités semblables, on a

$$L = P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + P'(y'\cos\gamma' - z'\cos\beta') + \ldots,$$
$$M = P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + P'(z'\cos\alpha' - x'\cos\gamma') + \ldots,$$
$$N = P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + P'(x'\cos\beta' - y'\cos\alpha') + \ldots.$$

Or, $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ étant les valeurs de la force P, estimée suivant les directions des trois axes des x, y, z, on voit tout de suite que $xP\cos\beta - yP\cos\alpha\ldots$ est le moment relatif à l'axe des z, le terme $yP\cos\alpha$ ayant le signe négatif à cause que la force $P\cos\alpha$ tend à faire tourner le système en sens contraire de la force $P\cos\beta$. De même, $zP\cos\alpha - xP\cos\gamma, \ldots$ sera le moment relatif à l'axe des y, et $yP\cos\gamma - zP\cos\beta, \ldots$ le moment relatif à l'axe des x; et ainsi des autres expressions semblables. De sorte que les trois équations $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ expriment que la somme de ces moments est nulle par rapport à chacun des trois axes.

On voit aussi que les coefficients L, M, N des rotations instantanées $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ ne sont autre chose que les sommes des moments relatifs aux axes des rotations instantanées $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ (art. 7).

10. On pourrait douter si les rotations autour des trois axes des coordonnées suffisent pour représenter tous les petits mouvements qu'un système de points peut avoir autour d'un point fixe, sans que leur disposition mutuelle en soit altérée. Pour lever ce doute, nous allons chercher tous ces mouvements d'une manière plus directe.

Par le point donné, qui sert d'origine aux coordonnées x, y, z, et par un autre point du système, imaginons une ligne droite, et par cette ligne et par un troisième point du système, un plan; rapportons à cette ligne et à ce plan les autres points du système, par de nouvelles coordonnées rectangles x', y', z' ayant la même origine que les premières x, y, z. Il est clair que ces nouvelles coordonnées ne dépendront que de la situation mutuelle des points du système, et seront, par conséquent, constantes lorsque le système change de place, tandis que les premières varient seules par ce changement.

La théorie connue de la transformation des coordonnées donne d'abord ces relations, entre les trois premières et les trois dernières,

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' + \beta y' + \gamma z', \\ y &= \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z', \\ z &= \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'. \end{aligned}$$

Les neuf coefficients α, β, γ, α', ... ne dépendent que de la position respective des axes des deux systèmes de coordonnées et doivent être tels que les coordonnées x, y, z se rapportent aux mêmes points que les coordonnées x', y', z' et que, par conséquent, les deux expressions

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad \text{et} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2$$

soient identiques; ce qui donne ces six équations de condition,

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 &= 1, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' &= 0, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 &= 1, & \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' &= 0, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 &= 1, & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' &= 0; \end{aligned}$$

de sorte que, parmi les neuf quantités α, β, γ, α', ..., il en restera trois d'indéterminées.

Lorsque les axes des x', y', z' coïncident avec ceux des x, y, z, on a

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z',$$

et, par conséquent,

$$\alpha = 1, \ \beta = 0, \ \gamma = 0, \quad \alpha' = 0, \ \beta' = 1, \ \gamma' = 0, \quad \alpha'' = 0, \ \beta'' = 0, \ \gamma'' = 1.$$

Ainsi, en différentiant les formules précédentes et y faisant ensuite ces substitutions, on aura le résultat d'un déplacement quelconque infiniment petit du système dans l'espace autour du point donné.

On aura d'abord, en différentiant les expressions de x, y, z dans l'hypothèse de x', y', z' constantes et substituant, après la différentiation, x, y, z à la place de ces quantités,

$$\begin{aligned} dx &= x\,d\alpha + y\,d\beta + z\,d\gamma, \\ dy &= x\,d\alpha' + y\,d\beta' + z\,d\gamma', \\ dz &= x\,d\alpha'' + y\,d\beta'' + z\,d\gamma''. \end{aligned}$$

Mais les six équations de condition étant différentiées donnent, par la substitution des valeurs $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, ... trouvées ci-dessus,

$$\begin{aligned} d\alpha &= 0, & d\beta + d\alpha' &= 0, \\ d\beta' &= 0, & d\gamma + d\alpha'' &= 0, \\ d\gamma'' &= 0, & d\gamma' + d\beta'' &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$d\alpha' = -d\beta,$$
$$d\alpha'' = -d\gamma,$$
$$d\beta'' = -d\gamma'.$$

Ces valeurs étant substituées dans les expressions de dx, dy, dz, on aura celles-ci

$$\begin{aligned} dx &= -y\,d\alpha' + z\,d\gamma, \\ dy &= x\,d\alpha' - z\,d\beta'', \\ dz &= -x\,d\gamma + y\,d\beta'', \end{aligned}$$

qui coïncident avec celles de l'article 8, en faisant

$$d\alpha' = d\varphi, \qquad d\gamma = d\omega, \qquad d\beta'' = d\psi.$$

Ces formules des variations de x, y, z ont donc toute la généralité que l'état de la question peut comporter; et les trois équations $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{M} = 0$, $\mathrm{N} = 0$, qui résultent de l'évanouissement des termes affectés de $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, dans l'équation générale de l'équilibre, sont, par conséquent, les seules nécessaires pour maintenir le système en équilibre autour du point donné, abstraction faite de ce qui dépend de la disposition mutuelle des points entre eux; de sorte que, lorsque cette disposition est invariable, l'équilibre du système ne dépendra que des trois équations dont il s'agit.

D'Alembert est le premier qui ait trouvé les lois de l'équilibre de plusieurs forces appliquées à un système de points de forme invariable, dans ses *Recherches sur la précession des équinoxes*. Il y est parvenu d'une manière très compliquée par la composition et la décomposition des forces. Depuis, elles ont été démontrées plus simplement par divers auteurs; mais nos formules ont l'avantage d'y conduire directement.

§ III. — *De la composition des mouvements de rotation autour de différents axes, et des moments relatifs à ces axes.*

11. Si l'on prend dans le système un point pour lequel les coordonnées x, y, z soient proportionnelles à $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, les différentielles

correspondantes dx, dy, dz seront nulles, comme on le voit par les formules de l'article 8. Ce point, et tous ceux qui auront la même propriété, seront donc immobiles pendant l'instant que le système décrit les trois angles $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, en tournant à la fois autour des axes des x, y, z. Et il est facile de voir que tous ces points seront dans une ligne droite passant par l'origine des coordonnées [1] et faisant avec les axes des x, y, z des angles λ, μ, ν, tels que

$$\cos\lambda = \frac{d\psi}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}},$$
$$\cos\mu = \frac{d\omega}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}},$$
$$\cos\nu = \frac{d\varphi}{\sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2}}.$$

Cette droite sera l'*axe instantané* de la rotation composée.

En employant les angles λ, μ, ν et faisant, pour abréger,

$$d\theta = \sqrt{d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2},$$

on aura

$$d\psi = d\theta\cos\lambda, \qquad d\omega = d\theta\cos\mu, \qquad d\varphi = d\theta\cos\nu,$$

et les expressions générales de dx, dy, dz (art. 8) deviendront

$$dx = (z\cos\mu - y\cos\nu)\,d\theta,$$
$$dy = (x\cos\nu - z\cos\lambda)\,d\theta,$$
$$dz = (y\cos\lambda - x\cos\mu)\,d\theta.$$

[1] En rapprochant ces résultats de ceux qui ont été obtenus dans le paragraphe précédent, on voit qu'un mouvement quelconque infiniment petit d'un corps solide qui a un point fixe peut être considéré comme une rotation autour d'un axe. Ce beau théorème est dû à Euler, qui en a donné une démonstration géométrique très simple. Euler avait aussi traité la question analytiquement. (*Voir* les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1750.) Vingt-cinq ans plus tard, Euler reprend ce théorème dans les *Commentaires de Saint-Pétersbourg* pour 1775, et, après en avoir donné une démonstration géométrique qui s'applique aux mouvements finis, il avoue que la preuve analytique exige des calculs si prolixes, qu'il a renoncé à les exécuter. Son Mémoire se termine ainsi : « Nemo vero stupendum hunc laborem in se suscipere volet..... quamobrem egregia ista proprietas geometris pulcherrimam occasionem præbere potest vires suas in ista proprietate penitus enucleanda exercendi. » (*Novi Commentarii*, p. 207; 1775.) Dans le *Journal de Liouville* (1re série, t. V, p. 406), Olinde Rodrigues a donné, d'une manière très élégante, cette démonstration désirée par Euler.
(*J. Bertrand.*)

Le carré du petit espace parcouru par un point quelconque étant

$$dx^2+dy^2+dz^2,$$

il sera exprimé par

$$\begin{aligned}&[(z\cos\mu-y\cos\nu)^2+(x\cos\nu-z\cos\lambda)^2+(y\cos\lambda-x\cos\mu)^2]\,d\theta^2\\&=[x^2+y^2+z^2-(x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu)^2]\,d\theta^2,\end{aligned}$$

à cause de

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu=1.$$

Or il est facile de prouver que

$$x\cos\lambda+y\cos\mu+z\cos\nu=0$$

est l'équation d'un plan passant par l'origine des coordonnées et perpendiculaire à la droite qui fait les angles λ, μ, ν avec les axes des x, y, z; donc le petit espace décrit par un point quelconque de ce plan sera

$$d\theta\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

et, comme l'axe instantané de rotation est perpendiculaire à ce même plan, il s'ensuit que $d\theta$ sera l'angle de la rotation autour de cet axe, composée des trois rotations partielles $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ autour des trois axes des coordonnées.

12. Il suit de là que des rotations quelconques instantanées $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, autour de trois axes qui se coupent à angles droits dans un même point, se composent en une seule $d\theta=\sqrt{d\psi^2+d\omega^2+d\varphi^2}$, autour d'un axe passant par le même point d'intersection et faisant avec ceux-là des angles λ, μ, ν, tels que

$$\cos\lambda=\frac{d\psi}{d\theta},\qquad \cos\mu=\frac{d\omega}{d\theta},\qquad \cos\nu=\frac{d\varphi}{d\theta};$$

et, réciproquement, qu'une rotation quelconque $d\theta$ autour d'un axe donné peut se décomposer en trois rotations partielles, exprimées par $\cos\lambda\,d\theta$, $\cos\mu\,d\theta$, $\cos\nu\,d\theta$, autour de trois axes qui se coupent perpendiculairement dans un point de l'axe donné et qui fassent avec cet axe les angles λ, μ, ν; ce qui fournit un moyen bien simple de composer et de décomposer les mouvements instantanés ou les vitesses de rotation.

Ainsi, si l'on prend trois autres axes rectangulaires entre eux, qui fassent, avec l'axe de la rotation $d\psi$ les angles λ', λ'', λ''', avec l'axe de la rotation $d\omega$ les angles μ', μ'', μ''', et avec l'axe de la rotation $d\varphi$ les angles ν', ν'', ν''', la rotation $d\psi$ pourra se résoudre en trois rotations $\cos\lambda'\,d\psi$, $\cos\lambda''\,d\psi$, $\cos\lambda'''\,d\psi$ autour de ces nouveaux axes; la rotation $d\omega$ se résoudra de même en trois rotations $\cos\mu'\,d\omega$, $\cos\mu''\,d\omega$, $\cos\mu'''\,d\omega$, et la rotation $d\varphi$ en trois rotations $\cos\nu'\,d\varphi$, $\cos\nu''\,d\varphi$, $\cos\nu'''\,d\varphi$ autour des mêmes axes; de sorte qu'en ajoutant ensemble les rotations autour d'un même axe, si l'on nomme $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$ les rotations totales autour des trois nouveaux axes, on aura

$$\begin{aligned}d\theta'&=\cos\lambda'\,d\psi+\cos\mu'\,d\omega+\cos\nu'\,d\varphi,\\d\theta''&=\cos\lambda''\,d\psi+\cos\mu''\,d\omega+\cos\nu''\,d\varphi,\\d\theta'''&=\cos\lambda'''\,d\psi+\cos\mu'''\,d\omega+\cos\nu'''\,d\varphi.\end{aligned}$$

13. Les rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ sont donc réduites de cette manière à trois rotations $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$ autour de trois autres axes rectangulaires, lesquelles doivent par conséquent donner, par la composition, la même rotation $d\theta$ qui résulte des rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, de sorte qu'on aura (art. 11)

$$d\theta^2=d\theta'^2+d\theta''^2+d\theta'''^2=d\psi^2+d\omega^2+d\varphi^2;$$

et, comme cette dernière équation doit être identique, il s'ensuit qu'on aura ces relations :

$$\begin{aligned}\cos^2\lambda'+\cos^2\lambda''+\cos^2\lambda'''&=1,\\\cos^2\mu'+\cos^2\mu''+\cos^2\mu'''&=1,\\\cos^2\nu'+\cos^2\nu''+\cos^2\nu'''&=1;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\lambda'\cos\mu'+\cos\lambda''\cos\mu''+\cos\lambda'''\cos\nu'''&=0,\\\cos\lambda'\cos\nu'+\cos\lambda''\cos\nu''+\cos\lambda'''\cos\nu'''&=0,\\\cos\mu'\cos\nu'+\cos\mu''\cos\nu''+\cos\mu'''\cos\nu'''&=0,\end{aligned}$$

qu'on peut aussi trouver par la Géométrie.

Par ces relations on peut avoir tout de suite les valeurs de $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ en $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$, en ajoutant ensemble les valeurs de $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$, multipliées successivement par $\cos\lambda'$, $\cos\lambda''$, $\cos\lambda'''$; $\cos\mu'$, $\cos\mu''$, ...; on trouvera de cette manière

$$d\psi = \cos\lambda'\, d\theta' + \cos\lambda''\, d\theta'' + \cos\lambda'''\, d\theta''',$$
$$d\omega = \cos\mu'\, d\theta' + \cos\mu''\, d\theta'' + \cos\mu'''\, d\theta''',$$
$$d\varphi = \cos\nu'\, d\theta' + \cos\nu''\, d\theta'' + \cos\nu'''\, d\theta'''.$$

14. Si l'on nomme, de plus, ϖ', ϖ'', ϖ''' les angles que l'axe de la rotation composée $d\theta$ fait avec les axes des trois rotations partielles $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$, on aura, comme dans l'article 11,

$$d\theta' = \cos\varpi'\, d\theta, \qquad d\theta'' = \cos\varpi''\, d\theta, \qquad d\theta''' = \cos\varpi'''\, d\theta;$$

et si, dans les expressions données ci-dessus (art. 12) de $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$, on met pour $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ leurs valeurs en $d\theta$ de l'article 11, $\cos\lambda\, d\theta$, $\cos\mu\, d\theta$, $\cos\nu\, d\theta$, la comparaison de ces différentes expressions de $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$ donnera, en divisant par $d\theta$ ces nouvelles relations,

$$\cos\varpi' = \cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu',$$
$$\cos\varpi'' = \cos\lambda\cos\lambda'' + \cos\mu\cos\mu'' + \cos\nu\cos\nu'',$$
$$\cos\varpi''' = \cos\lambda\cos\lambda''' + \cos\mu\cos\mu''' + \cos\nu\cos\nu''',$$

qu'on peut aussi vérifier par la Géométrie.

15. On voit par là que ces compositions et décompositions des mouvements de rotation sont entièrement analogues à celles des mouvements rectilignes.

En effet si, sur les trois axes des rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, on prend, depuis leur point d'intersection, des lignes proportionnelles respectivement à $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, et que l'on construise sur ces trois lignes un parallélépipède rectangle, il est facile de voir que la diagonale de ce parallélépipède sera l'axe de la rotation composée $d\theta$ et sera en même temps proportionnelle à cette rotation $d\theta$. De là, et de ce que les rotations autour d'un même axe s'ajoutent ou se retranchent suivant qu'elles sont dans le même sens ou dans des sens opposés, comme les mouvements qui ont la même direction ou des directions opposées, on doit conclure en général que la composition et la décomposition des mouvements de rotation se fait de la même manière et suit les mêmes lois que la composition ou décomposition des mouvements rectilignes, en substituant aux mouvements de rotation des mouvements rectilignes, suivant la direction des axes de rotation.

16. Maintenant, si dans la formule de l'article 9,

$$\mathrm{L}\, d\psi + \mathrm{M}\, d\omega + \mathrm{N}\, d\varphi,$$

laquelle contient les termes dus aux rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ dans la formule générale $\mathrm{P}\, dp + \mathrm{P}'\, dp' + \mathrm{P}''\, dp'' + \ldots$, on substitue pour $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ les expressions trouvées dans l'article 13, elle devient

$$\begin{aligned}&(\mathrm{L}\cos\lambda' + \mathrm{M}\cos\mu' + \mathrm{N}\cos\nu')\, d\theta'\\ +&(\mathrm{L}\cos\lambda'' + \mathrm{M}\cos\mu'' + \mathrm{N}\cos\nu'')\, d\theta''\\ +&(\mathrm{L}\cos\lambda''' + \mathrm{M}\cos\mu''' + \mathrm{N}\cos\nu''')\, d\theta'''.\end{aligned}$$

Donc, par l'article 7, les coefficients des angles élémentaires $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$ exprimeront les sommes des moments relatifs aux axes des rotations $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta'''$. Ainsi, des moments égaux à L, M, N, et relatifs à trois axes rectangulaires, donnent les moments

$$\mathrm{L}\cos\lambda' + \mathrm{M}\cos\mu' + \mathrm{N}\cos\nu',$$
$$\mathrm{L}\cos\lambda'' + \mathrm{M}\cos\mu'' + \mathrm{N}\cos\nu'',$$
$$\mathrm{L}\cos\lambda''' + \mathrm{M}\cos\mu''' + \mathrm{N}\cos\nu''',$$

relatifs à trois autres axes rectangulaires qui font respectivement avec ceux-là les angles λ', μ', ν'; λ'', μ'', ν''; λ''', μ''', ν'''.

On trouve une démonstration géométrique de ce théorème dans le Tome VII des *Nova Acta* de l'Académie de Pétersbourg (1).

(1) Cette démonstration est d'Euler. (*J. Bertrand.*)

17. Si l'on suppose les rotations $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ proportionnelles à L, M, N, et qu'on fasse

$$H = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

on aura, par l'article 11,

$$L = H \cos\lambda, \quad M = H \cos\mu, \quad N = H \cos\nu,$$

et les trois moments qu'on vient de trouver se réduiront, par les relations de l'article 14, à cette forme simple

$$H \cos\varpi', \quad H \cos\varpi'', \quad H \cos\varpi''.$$

Or ϖ', ϖ'', ϖ'' sont les angles que les axes des rotations $d\theta'$, $d\theta''$, $d\theta''$ font avec l'axe de la rotation composée $d\theta$. Donc, si l'on fait coïncider l'axe de la rotation $d\theta'$ avec l'axe de la rotation $d\theta$, on a $\varpi' = 0$ et ϖ'', ϖ''' chacun égal à un angle droit; par conséquent, le moment autour de cet axe sera simplement H, et les deux autres moments autour des axes perpendiculaires à celui-ci deviendront nuls.

D'où l'on conclut que des moments égaux à L, M, N, et relatifs à trois axes rectangulaires, se composent en un moment unique H égal à $\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$, et relatif à un axe qui fait avec ceux-là les angles λ, μ, ν, tels que

$$\cos\lambda = \frac{L}{H}, \quad \cos\mu = \frac{M}{H}, \quad \cos\nu = \frac{N}{H}.$$

Ce sont les théorèmes connus sur la composition des moments; et il est évident que cette composition suit aussi les mêmes règles que celle des mouvements rectilignes. On aurait pu la déduire immédiatement de la composition des rotations instantanées, en substituant les moments aux rotations qu'ils produisent, comme Varignon a substitué les forces aux mouvements rectilignes (1).

(1) Cette assimilation n'est pas permise. Une force qui agit sur un corps solide mobile autour d'un axe donné produit une rotation proportionnelle à son moment; mais, pour deux axes différents, les moments d'inertie jouent un rôle, et l'on n'a pas le droit de substituer les moments aux rotations qu'ils produisent. (*Voir*, à ce sujet, un Mémoire de Poinsot, *Mémoires de l'Institut*, t. VII, p. 564.) (*J. Bertrand.*)

§ IV. — *Propriétés de l'équilibre, relatives au centre de gravité.*

18. Si, dans les formules de l'article 9, on suppose que toutes les forces P, P', P'', ... agissent dans des directions parallèles entre elles, on aura

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = \ldots, \quad \beta = \beta' = \beta'' = \ldots, \quad \gamma = \gamma' = \gamma'' = \ldots;$$

par conséquent, si l'on fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} X &= Px + P'x' + P''x'' + \ldots,\\ Y &= Py + P'y' + P''y'' + \ldots,\\ Z &= Pz + P'z' + P''z'' + \ldots, \end{aligned}$$

les quantités L, M, N deviendront

$$\begin{aligned} L &= Y \cos\gamma - Z \cos\beta,\\ M &= Z \cos\alpha - X \cos\gamma,\\ N &= X \cos\beta - Y \cos\alpha, \end{aligned}$$

et les équations de l'équilibre seront

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0,$$

dont la troisième est ici une suite des deux premières. Mais, comme on a d'ailleurs (Sect. II, art. 7) l'équation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

on pourra déterminer par ces équations les angles α, β, γ, et l'on trouvera

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Donc, la position des corps étant donnée par rapport à trois axes, il faudra, pour que tout mouvement de rotation du système soit détruit, que le système soit placé, relativement à la direction des forces, de manière que cette direction fasse avec les mêmes axes les angles α, β, γ qu'on vient de déterminer.

19. Si les quantités X, Y, Z étaient nulles, les angles α, β, γ demeureraient indéterminés, et la position du système, relativement à la direction des forces, pourrait être quelconque; d'où résulte ce théorème : *Si la somme des produits des forces parallèles par leurs distances à trois plans perpendiculaires entre eux est nulle par rapport à chacun de ces trois plans, l'effet des forces pour faire tourner le système autour du point commun d'intersection des mêmes plans se trouvera détruit.*

On sait que la gravité agit verticalement et proportionnellement à la masse; ainsi, dans un système de corps pesants, si l'on cherche un point tel, que la somme des masses multipliées par leurs distances à un plan passant par ce point soit nulle relativement à trois plans perpendiculaires, ce point aura la propriété que la gravité ne pourra imprimer au système aucun mouvement de rotation autour du même point. C'est ce point qu'on appelle *centre de gravité*, et qui est d'un usage si étendu dans toute la Mécanique.

Pour le déterminer, il n'y a qu'à chercher sa distance à trois plans perpendiculaires donnés. Or, puisque la somme des produits des masses par leurs distances à un plan passant par le centre de gravité est nulle, la somme des produits des mêmes masses par leurs distances à un autre plan parallèle à celui-ci sera nécessairement égale au produit de toutes les masses par la distance du centre de gravité au même plan, de sorte qu'on aura cette distance en divisant la somme des produits des masses et de leurs distances par la somme même des masses; et de là résultent les formules connues pour les centres de gravité des lignes, des surfaces et des solides.

20. Mais il y a une propriété du centre de gravité qui est moins connue et qui peut être utile dans quelques occasions, parce qu'elle est indépendante de la considération étrangère des plans auxquels on

rapporte les différents corps du système, et qu'elle sert à déterminer leur centre de gravité par la simple position respective des corps. Voici en quoi elle consiste.

Soit A la somme des produits des masses prises deux à deux et multipliées de plus par le carré de leur distance respective, cette somme étant en même temps divisée par le carré de la somme des masses.

Soit B la somme des produits de chaque masse par le carré de sa distance à un point quelconque donné, cette somme étant divisée par la somme des masses.

On aura $\sqrt{B - A}$ pour la distance du centre de gravité de toutes les masses au point donné. Ainsi, comme la quantité A est indépendante de ce point, si l'on détermine les valeurs de B par rapport à trois points différents pris dans le système ou hors du système, à volonté, on aura les distances du centre de gravité à ces trois points et, par conséquent, sa position par rapport à ces points. Si les corps étaient tous dans le même plan, il suffirait de considérer deux points, et il n'en faudrait qu'un seul si tous les corps étaient sur une ligne droite donnée.

En prenant les points donnés dans les corps mêmes du système, la position de son centre de gravité sera donnée uniquement par les masses et par leurs distances respectives. C'est en quoi consiste le principal avantage de cette manière de déterminer le centre de gravité.

Pour la démontrer, je reprends les expressions de X, Y, Z de l'article 18, et, prenant de plus trois quantités arbitraires f, g, h, je forme ces trois équations identiques, faciles à vérifier :

$$\begin{aligned}
&[X - (P + P' + P'' + \ldots)f]^2 \\
&\quad = (P + P' + P'' + \ldots)[P(x - f)^2 + P'(x' - f)^2 + P''(x'' - f)^2 + \ldots] \\
&\qquad - PP'(x - x')^2 - PP''(x - x'')^2 - P'P''(x' - x'')^2 - \ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[Y - (P + P' + P'' + \ldots)g]^2 \\
&\quad = (P + P' + P'' + \ldots)[P(y - g)^2 + P'(y' - g)^2 + P''(y'' - g)^2 + \ldots] \\
&\qquad - PP'(y - y')^2 - PP''(y - y'')^2 - P'P''(y' - y'') - \ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&[Z - (P + P' + P'' + \ldots)h]^2 \\
&\quad = (P + P' + P'' + \ldots)[P(z - h)^2 + P'(z' - h)^2 + P''(z'' - h)^2 + \ldots] \\
&\qquad - PP'(z - z')^2 - PP''(z - z'')^2 - P'P''(z' - z'')^2 - \ldots.
\end{aligned}$$

Les quantités P, P′, P″, … représentent les poids ou les masses des corps qui leur sont proportionnels, et les quantités x, y, z, x', y', z', x'', … sont les coordonnées rectangles de ces corps. Or nous avons vu (art. 19) que, lorsque l'origine des coordonnées est dans le centre de gravité, les trois quantités X, Y, Z sont nulles. Si donc on fait dans les trois équations précédentes $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, qu'on les ajoute ensemble, et qu'on suppose, pour abréger,

$$f^2 + g^2 + h^2 = r^2,$$
$$(x - f)^2 + (y - g)^2 + (z - h)^2 = (0)^2,$$
$$(x' - f)^2 + (y' - g)^2 + (z' - h)^2 = (1)^2,$$
$$(x'' - f)^2 + (y'' - g)^2 + (z'' - h)^2 = (2)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = (0,1)^2,$$
$$(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2 = (0,2)^2,$$
$$(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2 = (1,2)^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on aura, après avoir divisé par $(P + P' + P'' + \ldots)^2$,

$$r^2 = \frac{P(0)^2 + P'(1)^2 + P''(2)^2 + \ldots}{P + P' + P'' + \ldots} - \frac{PP'(0,1)^2 + PP''(0,2)^2 + P'P''(1,2)^2 + \ldots}{(P + P' + P'' + \ldots)^2}.$$

Si l'on prend maintenant les trois quantités f, g, h pour les coordonnées rectangles d'un point donné, il est visible que r sera la distance de ce point au centre de gravité qui est supposé dans l'origine des coordonnées, que (0), (1), (2), … seront les distances des poids P, P′, P″, … à ce même point, et que (0,1), (0,2), (1,2), … seront les distances entre les corps ou poids P et P′, P et P″, P′ et P″, …. Donc l'équation ci-dessus deviendra

$$r^2 = B - A,$$

d'où l'on tire [1]

$$r = \sqrt{B - A}.$$

[1] On pourra consulter au sujet de ce théorème le Mémoire de Lagrange *Sur une nouvelle propriété du centre de gravité*, inséré au tome V des *Œuvres de Lagrange*, p. 535,

§ V. — *Propriétés de l'équilibre, relatives aux maxima et minima.*

21. Nous allons considérer maintenant les maxima et minima qui peuvent avoir lieu dans l'équilibre; et, pour cela, nous reprendrons la formule générale

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots = 0$$

de l'équilibre entre les forces P, Q, R, …, dirigées suivant les lignes p, q, r, … qui aboutissent aux centres de ces forces (Sect. II, art. 4).

On peut supposer [1] que ces forces soient exprimées de manière que la quantité $P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots$ soit une différentielle exacte d'une fonction de p, q, r, …, laquelle soit représentée par Π, en sorte que l'on ait

$$d\Pi = P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots.$$

Alors on aura pour l'équilibre cette équation $d\Pi = 0$, laquelle fait voir que le système doit être disposé de manière que la fonction Π y soit, généralement parlant, un maximum ou un minimum.

Je dis *généralement parlant*, car on sait que l'égalité d'une différentielle à zéro n'indique pas toujours un maximum ou un minimum, comme on le voit par la théorie des courbes.

La supposition précédente a lieu, en général, lorsque les forces P, Q, R, … tendent réellement ou à des points fixes, ou à des corps du même système, et sont proportionnelles à des fonctions quelconques des distances, ce qui est proprement le cas de la nature.

Ainsi, dans cette hypothèse de forces, le système sera en équilibre lorsque la fonction Π sera un maximum ou un minimum; c'est en quoi consiste le principe que Maupertuis avait proposé sous le nom de *loi de repos*.

Dans un système de corps pesants en équilibre, les forces P, Q, R, …,

le Chapitre III de la *Statique* de Poinsot, la quatrième Leçon des *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi et enfin divers Mémoires insérés aux tomes VI et VII du *Bulletin de la Société mathématique de France*. (*G. D.*)

[1] Lagrange ne veut pas dire qu'il en soit toujours ainsi; il prévient seulement que les développements qui suivent se rapportent au cas où cela a lieu. (*J. Bertrand.*)

provenant de la gravité, sont, comme l'on sait, proportionnelles aux masses des corps et, par conséquent, constantes; et les distances p, q, r, ... concourent au centre de la Terre. On aura donc, dans ce cas,

$$\Pi = Pp + Qq + Rr + \ldots;$$

par conséquent, puisque les lignes p, q, r, ... sont censées parallèles, la quantité $\frac{\Pi}{P+Q+R+\ldots}$ exprimera la distance du centre de gravité de tout le système au centre de la Terre, laquelle sera donc un minimum ou un maximum, lorsque le système sera en équilibre; elle sera, par exemple, un minimum dans le cas de la chaînette, et un maximum dans le cas de plusieurs globules qui se soutiendraient en forme de voûte. Ce principe est connu depuis longtemps.

22. Si, maintenant, on considère le même système en mouvement, et que u', u'', u''', ... soient les vitesses, et m', m'', m''', ... les masses respectives des différents corps qui le composent, le principe si connu de la *conservation des forces vives*, dont nous donnerons une démonstration directe et générale dans la seconde Partie, fournira cette équation

$$m'u'^2 + m''u''^2 + m'''u'''^2 + \ldots = \text{const.} - 2\Pi.$$

Donc, puisque, dans l'état d'équilibre, la quantité Π est un minimum ou un maximum, il s'ensuit que la quantité $m'u'^2 + m''u''^2 + m'''u'''^2 + \ldots$, qui exprime la force vive de tout le système, sera en même temps un maximum ou un minimum; ce qui donne cet autre principe de Statique, que, *de toutes les situations que prend successivement le système, celle où il a la plus grande ou la plus petite force vive est aussi celle où il le faudrait placer d'abord pour qu'il restât en équilibre*. [Voir les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1748 et 1749 (¹).]

23. On vient de voir que la fonction Π est un minimum ou un maxi-

(¹) Ce principe y est énoncé, sans démonstration suffisante, par un géomètre peu connu, de Courtivron. Lagrange le citait dans la première édition de son Ouvrage; dans la seconde, il a fait disparaître son nom pour y substituer la date du Mémoire.

(*J. Bertrand.*)

mum, lorsque la position du système est celle de l'équilibre; nous allons maintenant démontrer que, si cette fonction est un minimum, l'équilibre aura de la stabilité, en sorte que, le système étant d'abord supposé dans l'état d'équilibre et venant ensuite à être tant soit peu déplacé de cet état, il tendra de lui-même à s'y remettre en faisant des oscillations infiniment petites : qu'au contraire, dans le cas où la même fonction sera un maximum, l'équilibre n'aura pas de stabilité, et qu'étant une fois troublé, le système pourra faire des oscillations qui ne seront pas très petites, et qui pourront l'écarter de plus en plus de son premier état.

Pour démontrer cette proposition d'une manière générale, je considère que, quelle que puisse être la forme du système, sa position, c'est-à-dire celle des différents corps qui le composent, sera toujours déterminée par un certain nombre de variables, et que la quantité Π sera une fonction donnée de ces mêmes variables. Supposons que, dans la situation d'équilibre, les variables dont il s'agit soient égales à a, b, c, ..., et que, dans une situation très proche de celle-ci, elles soient $a+x$, $b+y$, $c+z$, ..., les quantités x, y, z, ... étant très petites; substituant ces dernières valeurs dans la fonction Π et réduisant en série suivant les dimensions des quantités très petites x, y, z, ..., la fonction Π (¹) deviendra de cette forme

$$\begin{aligned}\Pi = {} & A + Bx + Cy + Dz + \ldots \\ & + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \ldots,\end{aligned}$$

les quantités A, B, C, ... étant données en a, b, c, ... Mais, dans l'état d'équilibre, la valeur de $d\Pi$ doit être nulle, de quelque manière qu'on fasse varier la position du système; donc il faudra que la différentielle de Π soit nulle en général, lorsque x, y, z, ... sont égales à zéro; donc

$$B = 0, \quad C = 0, \quad D = 0, \quad \ldots.$$

(¹) M. Lejeune-Dirichlet a simplifié cette démonstration en la rendant plus rigoureuse. (Voir *Journal de Crelle*, t. 32, et *Journal de Liouville*, 1re série, t. XII, p. 474.)

(*J. Bertrand.*)

On aura donc, pour une situation quelconque très proche de celle de l'équilibre, cette expression de Π

$$\Pi = A + Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \ldots,$$

dans laquelle, tant que les variables $x, y, z, \ldots$ sont très petites, il suffira de tenir compte des secondes dimensions de ces variables.

24. Maintenant il est clair que, pour que la quantité Π soit un minimum, lorsque $x, y, z, \ldots$ sont nulles, il faut que la fonction

$$Fx^2 + Gxy + Hy^2 + Kxz + Lyz + Mz^2 + \ldots,$$

que je nommerai X, soit constamment positive, quelles que soient les valeurs des variables $x, y, z, \ldots$.

Or cette fonction est réductible à la forme

$$X = f\xi^2 + g\eta^2 + h\zeta^2 + \ldots,$$

en faisant

$$\begin{aligned}
f &= F,\\
\xi &= x + \frac{Gy}{2f} + \frac{Kz}{2f} + \ldots,\\
g &= H - \frac{G^2}{4f},\\
\eta &= y + \left(L - \frac{GK}{2f}\right)\frac{z}{2g} + \ldots,\\
h &= M - \frac{K^2}{4f} - \frac{L^2}{4g},\\
\zeta &= z + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc, pour qu'elle soit toujours positive, il faudra que les coefficients $f, g, h, \ldots$ soient positifs; et l'on voit en même temps que, si ces coefficients sont positifs, la valeur de X sera nécessairement positive, puisque les quantités $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ sont réelles lorsque les variables $x, y, z, \ldots$ le sont.

Si, au contraire, la quantité Π devait être un maximum lorsque $x, y, z, \ldots$ sont nuls, il faudrait que la fonction X fût constamment négative, et, par conséquent, que les coefficients $f, g, h, \ldots$ fussent négatifs; et réciproquement, si ces coefficients sont négatifs, il s'ensuivra que la valeur de X sera nécessairement négative.

25. On aura donc, en ne tenant compte que des secondes dimensions des quantités très petites $x, y, z, \ldots$,

$$\Pi = A + f\xi^2 + g\eta^2 + h\zeta^2 + \ldots,$$

et l'équation de la conservation des forces vives (art. 22) deviendra

$$M'u'^2 + M''u''^2 + M'''u'''^2 + \ldots = \text{const.} - 2A - 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 - \ldots.$$

Or, dans l'état d'équilibre, on a, par hypothèse,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad \ldots;$$

donc aussi (art. 19)

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad \ldots;$$

donc, si l'on suppose qu'on dérange le système de cet état, en imprimant aux corps $M', M'', M''', \ldots$ les vitesses très petites $V', V'', V''', \ldots$, il faudra que l'on ait $u' = V'$, $u'' = V''$, $u''' = V'''$, ... lorsque $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$. On aura donc

$$M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \ldots = \text{const.} - 2A;$$

ce qui servira à déterminer la constante arbitraire.

Ainsi l'équation précédente deviendra

$$\begin{aligned}
&M'u'^2 + M''u''^2 + M'''u'''^2 + \ldots\\
&\quad = M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \ldots - 2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 - \ldots;
\end{aligned}$$

d'où il est aisé de tirer ces deux conclusions :

1° Que, dans le cas du minimum de Π, dans lequel les coefficients $f, g, h, \ldots$ sont tous positifs, la quantité toujours positive

$$2f\xi^2 + 2g\eta^2 + 2h\zeta^2 + \ldots$$

devra nécessairement être moindre, ou du moins ne pourra pas être plus grande que la quantité donnée $M'V'^2 + M''V''^2 + M'''V'''^2 + \ldots$, qui est elle-même très petite; par conséquent, si l'on nomme cette quantité T, on aura, pour chacune des variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, ces limites

$$\pm\sqrt{\frac{T}{2f}},\quad \pm\sqrt{\frac{T}{2g}},\quad \pm\sqrt{\frac{T}{2h}},\quad \ldots,$$

entre lesquelles elles seront nécessairement renfermées; d'où il suit que, dans ce cas, le système ne pourra que s'écarter très peu de son état d'équilibre et ne pourra faire que des oscillations très petites et d'une étendue déterminée;

2° Que dans le cas du maximum de Π, dans lequel les coefficients $f, g, h, \ldots$ sont tous négatifs, la quantité toujours positive

$$-2f\xi^2 - 2g\eta^2 - 2h\zeta^2 - \ldots$$

pourra croître à l'infini, et qu'ainsi le système pourra s'écarter de plus en plus de son état d'équilibre. Du moins l'équation ci-dessus fait voir que, dans ce cas, rien n'empêche que les variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ n'aillent toujours en augmentant, mais il ne s'ensuit pas encore qu'elles doivent, en effet, aller en augmentant; nous démontrerons cette dernière proposition dans la sixième Section de la Dynamique.

Si tous les coefficients $f, g, h, \ldots$ étaient nuls, on sait, par les méthodes *de maximis et minimis*, qu'il faudrait, pour l'existence d'un minimum ou d'un maximum, que les termes de trois dimensions disparussent et que ceux de quatre dimensions fussent constamment positifs ou négatifs; et c'est aussi de cette manière qu'on pourra juger de la stabilité de l'équilibre donné par l'évanouissement des termes de la première dimension, lorsque ceux de deux dimensions s'évanouissent en même temps.

26. Au reste, ces propriétés des maxima et minima, qui ont lieu dans l'équilibre d'un système quelconque de forces, ne sont qu'une conséquence immédiate de la démonstration que nous avons donnée du principe des vitesses virtuelles à la fin de la première Section.

En effet, soit p la distance entre les deux premières moufles, l'une fixe, l'autre mobile, jointes par P cordons qui produisent une force

proportionnelle à P, et qu'on peut représenter simplement par P, en prenant le poids qui tend la corde pour l'unité; soient de même q la distance entre les deux moufles qui produisent la force Q, r la distance entre les moufles qui produisent la force R, ... Il est évident que Pp sera la longueur de la portion de la corde qui embrasse les deux premières moufles; pareillement, Qq, Rr, ... seront les longueurs des portions de la corde qui embrasse les autres moufles, de sorte que la longueur totale de la corde embrassée par les moufles fixes et mobiles sera $Pp + Qq + Rr + \ldots$.

Ajoutons à cette longueur celle des différentes portions de la corde qui se trouveront entre des poulies fixes pour faire les renvois nécessaires au changement de direction, et que nous désignerons par a; ajoutons-y encore la portion de la corde qui se trouvera entre la dernière poulie de renvoi et le poids attaché à l'extrémité de la corde, et que nous désignerons par u; enfin soit l la longueur totale de la corde, dont la première extrémité est fixement attachée à un point immobile dans l'espace, et dont l'autre extrémité porte le poids; on aura évidemment l'équation

$$l = Pp + Qq + Rr + \ldots + a + u,$$

d'où l'on tire

$$u = l - a - Pp - Qq - Rr - \ldots.$$

Or, en supposant les forces P, Q, R, ... constantes, c'est-à-dire indépendantes de $p, q, r, \ldots$, ce qui est toujours permis dans l'équilibre où l'on ne considère que des déplacements infiniment petits, il est visible [1] que la quantité $Pp + Qq + Rr + \ldots$ sera la même que nous

[1] Cette substitution de forces constantes à des forces variables changerait, au contraire, complètement la nature de la fonction Π. Si l'on considère, par exemple, une attraction inversement proportionnelle à la distance et égale à $\frac{\mu}{p}$, on aura

$$\int P\,dp = \int \frac{\mu}{p}\,dp = \mu \log p;$$

en remplaçant, au contraire, P par une constante, on aurait pour intégrale Pp, ce qui diffère beaucoup du résultat précédent. On peut dire seulement que, pour la valeur des variables qui correspond à l'équilibre, les deux fonctions, quoique très différentes, ont la même variation. (*J. Bertrand.*)

avons désignée par Π dans l'article 21; ainsi l'on aura, en général,

$$u = l - a - \Pi,$$

où l et a sont des quantités constantes.

27. Maintenant il est clair que, comme le poids tend à descendre le plus qu'il est possible, l'équilibre n'aura lieu, en général, que lorsque la valeur de u qui exprime la descente du poids depuis la poulie fixe sera un maximum et que, par conséquent, celle de Π sera un minimum; et l'on voit en même temps que, dans ce cas, l'équilibre sera *stable*, parce qu'un petit changement quelconque dans la position du système ne pourra que faire remonter le poids, lequel tendra à redescendre et à remettre le système dans l'état d'équilibre.

Mais nous avons vu que, pour l'équilibre, il suffit que l'on ait $d\Pi = 0$ et, par conséquent, $du = 0$, ce qui a lieu aussi lorsque la valeur de u est un minimum, auquel cas le poids, au lieu d'être le plus bas, sera, au contraire, le plus haut. Dans ce cas, il est visible qu'un petit changement dans la position du système ne pourra que faire descendre le poids, qui alors ne tendra plus à remonter, mais à descendre davantage et à éloigner de plus en plus le système du premier état d'équilibre; d'où il suit que cet équilibre n'aura point de *stabilité* et qu'étant une fois troublé, il ne tendra pas à se rétablir.

SECTION QUATRIÈME.

MANIÈRE PLUS SIMPLE ET PLUS GÉNÉRALE DE FAIRE USAGE DE LA FORMULE DE L'ÉQUILIBRE DONNÉE DANS LA SECTION DEUXIÈME.

1. Ceux qui jusqu'à présent ont écrit sur le principe des vitesses virtuelles se sont plutôt attachés à prouver la vérité de ce principe par la conformité de ses résultats avec ceux des principes ordinaires de la Statique, qu'à montrer l'usage qu'on en peut faire pour résoudre directement les problèmes de cette science. Nous nous sommes proposé de remplir ce dernier objet avec toute la généralité dont il est susceptible, et de déduire du principe dont il s'agit des formules analytiques qui renferment la solution de tous les problèmes sur l'équilibre des corps; à peu près de la même manière que les formules des sous-tangentes, des rayons osculateurs, etc., renferment la détermination de ces lignes dans toutes les courbes.

La méthode exposée dans la deuxième Section peut être employée dans tous les cas, et ne demande, comme on l'a vu, que des opérations purement analytiques; mais, comme l'élimination immédiate des variables ou de leurs différences par le moyen des équations de condition peut conduire à des calculs trop compliqués, nous allons présenter la même méthode sous une forme plus simple, en réduisant en quelque manière tous les cas à celui d'un système entièrement libre.

§ I. — *Méthode des multiplicateurs.*

2. Soient

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0, \quad \ldots$$

les différentes équations de condition données par la nature du système, les quantités L, M, N, ... étant des fonctions finies des variables $x, y, z, x', y', z', \ldots$; en différentiant ces équations, on aura celles-ci :

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0, \quad \ldots,$$

lesquelles donneront la relation qui doit avoir lieu entre les différentielles des mêmes variables. En général, nous représenterons par

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0, \quad \ldots$$

les équations de condition entre ces différentielles, soit que ces équations soient elles-mêmes des différences exactes ou non, pourvu que les différentielles n'y soient que linéaires.

Maintenant, comme ces équations ne doivent servir qu'à éliminer un pareil nombre de différentielles dans la formule générale de l'équilibre, après quoi les coefficients des différentielles restantes doivent être égalés chacun à zéro, il n'est pas difficile de prouver, par la théorie de l'élimination des équations linéaires, qu'on aura les mêmes résultats si l'on ajoute simplement à la formule dont il s'agit les différentes équations de condition

$$dL = 0, \quad dM = 0, \quad dN = 0, \quad \ldots,$$

multipliées chacune par un coefficient indéterminé; qu'ensuite on égale à zéro la somme de tous les termes qui se trouvent multipliés par une même différentielle, ce qui donnera autant d'équations particulières qu'il y a de différentielles; qu'enfin on élimine de ces dernières équations les coefficients indéterminés par lesquels on a multiplié les équations de condition.

3. De là résulte donc cette règle extrêmement simple pour trouver les conditions de l'équilibre d'un système quelconque proposé.

On prendra la somme des *moments* de toutes les puissances qui doivent être en équilibre (Sect. II, art. 5), et l'on y ajoutera les différentes fonctions différentielles qui doivent être nulles par les conditions du problème, après avoir multiplié chacune de ces fonctions par un

coefficient indéterminé; on égalera le tout à zéro, et l'on aura ainsi une équation différentielle qu'on traitera comme une équation ordinaire *de maximis et minimis*, et d'où l'on tirera autant d'équations particulières finies qu'il y aura de variables. Ces équations étant ensuite débarrassées, par l'élimination, des coefficients indéterminés, donneront toutes les conditions nécessaires pour l'équilibre.

L'équation différentielle dont il s'agit sera donc de cette forme,

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots + \lambda\,dL + \mu\,dM + \nu\,dN + \ldots = 0,$$

dans laquelle $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ sont des quantités indéterminées; nous la nommerons dans la suite *équation générale de l'équilibre*.

Cette équation donnera, relativement à chaque coordonnée, telle que x, de chacun des corps du système, une équation de la forme suivante

$$P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} + R\frac{\partial r}{\partial x} + \ldots + \lambda\frac{\partial L}{\partial x} + \mu\frac{\partial M}{\partial x} + \nu\frac{\partial N}{\partial x} + \ldots = 0;$$

en sorte que le nombre de ces équations sera égal à celui de toutes les coordonnées des corps. Nous les appellerons *équations particulières de l'équilibre*.

4. Toute la difficulté consistera donc à éliminer de ces dernières équations les indéterminées $\lambda, \mu, \nu, \ldots$; or c'est ce qu'on pourra toujours exécuter par les moyens connus, mais il conviendra, dans chaque cas, de choisir ceux qui pourront conduire aux résultats les plus simples. Les équations finales renfermeront toutes les conditions nécessaires pour l'équilibre proposé; et, comme le nombre de ces équations sera égal à celui de toutes les coordonnées des corps du système moins celui des indéterminées $\lambda, \mu, \nu, \ldots$ qu'il a fallu éliminer, que d'ailleurs ces mêmes indéterminées sont en même nombre que les équations de condition finies $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, ..., il s'ensuit que les équations dont il s'agit, jointes à ces dernières, seront toujours en même nombre que les coordonnées de tous les corps; par conséquent, elles

suffiront pour déterminer ces coordonnées et faire connaître la position que chaque corps doit prendre pour être en équilibre.

5. Je remarque maintenant que les termes $\lambda\, dL$, $\mu\, dM$, ... de l'équation générale de l'équilibre peuvent être aussi regardés comme représentant les moments de différentes forces appliquées au même système.

En effet, supposant dL une fonction différentielle des variables x', y', z', x'', y'', ... qui servent de coordonnées à différents corps du système, cette fonction sera composée de différentes parties que je désignerai par dL', dL'', ..., en sorte que

$$dL = dL' + dL'' + \ldots;$$

dL' ne renfermant que les termes affectés de dx', dy', dz'; dL'' ne renfermant que ceux qui contiennent dx'', dy'', dz'', et ainsi de suite.

De cette manière, le terme $\lambda\, dL$ de l'équation générale sera composé des termes $\lambda\, dL'$, $\lambda\, dL''$, ... Or, si l'on donne au terme $\lambda\, dL'$ la forme suivante

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial L'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial L'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial L'}{\partial z'}\right)^2}\times\frac{dL'}{\sqrt{\left(\frac{\partial L'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial L'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial L'}{\partial z'}\right)^2}},$$

il est clair, par ce qu'on a dit dans l'article 8, Sect. II, que cette quantité peut représenter le moment d'une force

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial L'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial L'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial L'}{\partial z'}\right)^2},$$

appliquée au corps dont les coordonnées sont x', y', z' et dirigée perpendiculairement à la surface qui aura pour équation $dL' = 0$, en n'y regardant que x', y', z' comme variables. De même, le terme $\lambda\, dL''$ pourra représenter le moment d'une force

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial L''}{\partial x''}\right)^2+\left(\frac{\partial L''}{\partial y''}\right)^2+\left(\frac{\partial L''}{\partial z''}\right)^2},$$

appliquée au corps qui a pour coordonnées x'', y'', z'' et dirigée perpendiculairement à la surface courbe dont l'équation sera $dL'' = 0$, en n'y regardant que x'', y'', z'' comme variables, et ainsi de suite.

Donc, en général, le terme $\lambda\, dL$ sera équivalent à l'effet de différentes forces exprimées par

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z'}\right)^2},\quad \lambda\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x''}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)^2+\left(\frac{\partial L}{\partial z''}\right)^2},\quad \ldots,$$

et appliquées respectivement aux corps qui répondent aux coordonnées x', y', z', x'', y'', z'', ... suivant des directions perpendiculaires aux différentes surfaces courbes représentées par l'équation $dL = 0$, en y faisant varier premièrement x', y', z', ensuite x'', y'', z'', et ainsi du reste.

6. En général, on pourra regarder le terme $\lambda\, dL$ comme le moment d'une force (¹) λ tendante à faire varier la valeur de la fonction L, et, comme $dL = dL' + dL'' + \ldots$, le terme $\lambda\, dL$ exprimera les moments de plusieurs forces égales à λ et tendantes à faire varier la fonction L, en ayant égard séparément à la variabilité des différentes coordonnées x', y', z', x'', y'', z'', ... Il en sera de même des termes $\mu\, dM$, $\nu\, dN$, ... (Sect. II, art. 9).

Comme, dans l'équation générale de l'équilibre (art. 3), les forces P, Q, R, ... sont supposées dirigées vers des centres auxquels aboutissent les lignes p, q, r, ... et, par conséquent, tendantes à diminuer ces lignes, il faudra également regarder les forces λ, μ, ... comme tendantes à diminuer les valeurs des fonctions L, M, ...

7. Il résulte de là que chaque équation de condition est équivalente à une ou plusieurs forces appliquées au système, suivant des directions données, ou, en général, tendantes à faire varier les valeurs de fonctions données (²); en sorte que l'état d'équilibre du système sera le

(¹) *Voir*, à ce sujet, la note de l'article 9, Sect. II. (*J. Bertrand.*)

(²) Cette proposition importante a la même généralité que le principe des vitesses virtuelles, et elle est souvent d'une application plus commode. Lagrange y a été conduit en même, soit qu'on emploie la considération de ces forces, ou qu'on ait égard aux équations de condition.

Réciproquement, ces forces peuvent tenir lieu des équations de condition résultantes de la nature du système donné; de manière qu'en employant ces forces on pourra regarder les corps comme entièrement libres et sans aucune liaison. Et de là on voit la raison métaphysique, pourquoi l'introduction des termes $\lambda\, dL + \mu\, dM + \ldots$ dans l'équation générale de l'équilibre fait qu'on peut ensuite traiter cette équation comme si tous les corps du système étaient entièrement libres : c'est en quoi consiste l'esprit de la méthode de cette Section.

A proprement parler, les forces en question tiennent lieu des résistances que les corps devraient éprouver en vertu de leur liaison mutuelle, ou de la part des obstacles qui, par la nature du système, pourraient s'opposer à leur mouvement; ou plutôt ces forces ne sont que les forces mêmes de ces résistances, lesquelles doivent être égales et directement opposées aux pressions exercées par les corps. Notre méthode donne, comme l'on voit, le moyen de déterminer ces forces et ces résistances; ce qui n'est pas un des moindres avantages de cette méthode.

8. Dans les cas où les forces P, Q, R, ... ne sont pas en équilibre et où l'on demande de les réduire à des forces équivalentes dont les directions soient données, il suffira d'ajouter à la somme des moments des forces P, Q, R, ... les moments résultant des équations de condition $L = 0$, $M = 0$, ..., et l'on aura la somme des moments des forces équivalentes aux forces P, Q, R, ... et à l'action que les corps exercent les uns sur les autres en vertu de ces mêmes équations de condition.

En employant ainsi toutes les équations de condition données par la nature du système proposé, on pourra regarder comme indépendantes les coordonnées de chaque corps du système et l'on aura pour chacune

suivant analytiquement les conséquences de sa formule d'équilibre; mais M. Poinsot en a donné depuis une démonstration directe et fondée sur les principes élémentaires de la Statique. (Voir *Journal de l'École Polytechnique*, XIII[e] Cahier, t. VI.) (*J. Bertrand.*)

de ces coordonnées, telles que x, une quantité de la forme

$$
\begin{aligned}
&P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} + R\frac{\partial r}{\partial x} + \ldots \\
&+ \lambda\frac{\partial L}{\partial x} + \mu\frac{\partial M}{\partial x} + \nu\frac{\partial N}{\partial x} + \ldots,
\end{aligned}
$$

qui exprimera la force résultante suivant la direction de la ligne x, laquelle devra être nulle dans le cas d'équilibre, comme on l'a vu dans l'article 3 (¹).

§ II. — *Application de la même méthode à la formule de l'équilibre des corps continus, dont tous les points sont tirés par des forces quelconques.*

9. Jusqu'ici nous avons considéré les corps comme des points, et nous avons vu comment on détermine les lois de l'équilibre de ces points, en quelque nombre qu'ils soient et quelques forces qui agissent sur eux. Or un corps d'un volume et d'une figure quelconques n'étant que l'assemblage d'une infinité de parties ou points matériels, il s'ensuit qu'on peut déterminer aussi les lois de l'équilibre des corps de figure quelconque par l'application des principes précédents.

En effet, la manière ordinaire de résoudre les questions de Mécanique qui concernent les corps de masse finie consiste à ne considérer d'abord qu'un certain nombre de points placés à des distances finies les uns des autres, et à chercher les lois de leur équilibre ou de leur mouvement; à étendre ensuite cette recherche à un nombre indéfini de points; enfin à supposer que le nombre des points devienne infini et qu'en même temps leurs distances deviennent infiniment petites, et à faire aux formules trouvées pour un nombre fini de points les réductions et les modifications que demande le passage du fini à l'infini.

Ce procédé est, comme l'on voit, analogue aux méthodes géomé-

(¹) Cette somme, calculée relativement aux points auxquels une des résultantes doit être appliquée, fournira les composantes de cette résultante. Il faudra, pour les autres points, l'égaler à zéro. On doit remarquer que le problème pourra être impossible ou indéterminé. (*J. Bertrand.*)

triques et analytiques qui ont précédé le Calcul infinitésimal; et si ce Calcul a l'avantage de faciliter et de simplifier d'une manière surprenante les solutions des questions qui ont rapport aux courbes, il ne le doit qu'à ce qu'il considère ces lignes en elles-mêmes, et comme courbes, sans avoir besoin de les regarder, premièrement comme polygones, et ensuite comme courbes. Il y aura donc, à peu près, le même avantage à traiter les problèmes de Mécanique dont il est question par des voies directes, et en considérant immédiatement les corps de masses finies comme des assemblages d'une infinité de points ou corpuscules animés chacun par des forces données. Or rien n'est plus facile que de modifier et simplifier par cette considération la méthode générale que nous venons de donner.

10. Mais il est nécessaire de remarquer, avant tout, que, dans l'application de cette méthode aux corps d'une masse finie dont tous les points sont animés par des forces quelconques, il se présente naturellement deux sortes de différentielles qu'il faut bien distinguer. Les unes se rapportent aux différents points qui composent le corps; les autres sont indépendantes de la position mutuelle de ces points et représentent seulement les espaces infiniment petits que chaque point peut parcourir, en supposant que la situation du corps varie infiniment peu. Comme jusqu'ici nous n'avons eu que des différences de cette dernière espèce à considérer, nous les avons désignées par la caractéristique ordinaire d; mais, puisque nous devons maintenant avoir égard aux deux espèces de différences à la fois, et qu'il est, par conséquent, nécessaire d'introduire une nouvelle caractéristique, il nous paraît à propos d'employer l'ancienne caractéristique d pour désigner les différences de la première espèce qui sont analogues à celles que l'on considère communément en Géométrie, et de dénoter les différences de la seconde espèce qui sont particulières à la matière que nous traitons par la caractéristique δ, employée dans le *Calcul des variations*, avec lequel celui dont il s'agit ici a une liaison intime et nécessaire.

Nous nommerons même, par cette raison, *variations* les différences

affectées de δ et nous conserverons le nom de *différentielles* à celles qui sont affectées de d. Du reste, les mêmes formules qui donnent les différentielles ordinaires donneront aussi les variations, en substituant δ à la place de d.

11. Je remarque ensuite qu'au lieu de considérer la masse donnée comme un assemblage d'une infinité de points contigus, il faudra, suivant l'esprit du Calcul infinitésimal, la considérer plutôt comme composée d'éléments infiniment petits qui soient du même ordre de dimension que la masse entière; qu'ainsi, pour avoir les forces qui animent chacun de ces éléments, il faudra multiplier par ces mêmes éléments les forces P, Q, R, ... qu'on suppose appliquées à chaque point de ces éléments et qu'on regardera comme des forces accélératrices analogues à celles qui proviennent de l'action de la gravité.

Si donc on nomme m la masse totale et dm un de ses éléments quelconque, on aura $P\,dm$, $Q\,dm$, $R\,dm$, ... pour les forces qui tirent l'élément dm suivant les directions des lignes p, q, r, ... Donc, multipliant respectivement ces forces par les variations δp, δq, δr, ..., on aura leurs moments, dont la somme, pour chaque élément dm, sera représentée par la formule

$$(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots)\,dm;$$

et, pour avoir la somme des moments de toutes les forces du système, il n'y aura qu'à prendre l'intégrale de cette formule par rapport à toute la masse donnée.

Nous dénoterons ces intégrales totales, c'est-à-dire relatives à l'étendue de toute la masse, par la caractéristique majuscule $\mathbf{S}$, en conservant la caractéristique ordinaire $\int$ pour désigner les intégrales partielles ou indéfinies.

12. On aura ainsi, pour la somme des moments de toutes les forces

du système, la formule intégrale

$$\mathsf{S}(P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots)\,dm;$$

et cette quantité devra être nulle, en général, dans l'état d'équilibre du système.

Comme, par la nature du système, il y a nécessairement des rapports donnés entre les différentes variations δp, δq, δr, ... relatives à chaque point de la masse, il faudra les réduire à un certain nombre de variations indépendantes et indéterminées, et les termes multipliés par ces dernières variations, étant égalés à zéro, donneront les équations particulières de l'équilibre. Mais, ces réductions pouvant être embarrassantes, il conviendra de les éviter par le moyen de la méthode des multiplicateurs que nous venons de donner dans le paragraphe précédent.

13. Pour appliquer cette méthode au cas dont il s'agit ici, nous supposerons que

$$L = 0, \quad M = 0, \quad \ldots$$

soient les équations de condition qui doivent avoir lieu par la nature du problème, par rapport à chaque point de la masse, et nous les nommerons *équations de condition indéterminées*.

Les quantités L, M, ... seront ici des fonctions des coordonnées finies x, y, z qui répondent à chaque point de la masse donnée, et de leurs différentielles d'un ordre quelconque.

Ces équations étant différentiées suivant δ, on aura celles-ci :

$$\delta L = 0, \quad \delta M = 0, \quad \ldots.$$

On multipliera les quantités δL, δM, ... par des quantités indéterminées λ, μ, ...; on en prendra l'intégrale totale qui sera, par conséquent, représentée par la formule

$$\mathsf{S}(\lambda\,\delta L + \mu\,\delta M + \ldots),$$

et, ajoutant cette intégrale à celle de l'article précédent, on aura l'équation générale de l'équilibre.

On observera qu'il n'est pas nécessaire que δL, δM, ... soient les variations exactes de fonctions de x, y, z, dx, dy, ..., mais qu'il suffit que $\delta L = 0$, $\delta M = 0$, ... soient les équations de condition indéterminées entre les variations de x, y, z, dx, dy, ... (art. 2).

Mais il faut remarquer qu'outre les forces qui agissent, en général, sur tous les points de la masse, il peut y en avoir qui n'agissent que sur des points déterminés de cette masse, lesquels points sont ordinairement ceux qui répondent aux extrémités de la masse donnée, c'est-à-dire au commencement et à la fin de l'intégrale désignée par S.

De même, il pourra y avoir des équations de condition particulières à ces points, et que nous nommerons équations de condition *déterminées*, pour les distinguer de celles qui ont lieu, en général, dans toute l'étendue de la masse; nous les représenterons par

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0, \quad \ldots$$

ou plutôt par

$$\delta A = 0, \quad \delta B = 0, \quad \delta C = 0, \quad \ldots\ (^1).$$

Nous marquerons d'un trait, de deux, de trois, etc., toutes les quantités qui se rapportent à des points déterminés de la masse, et en particulier nous marquerons d'un seul trait celles qui se rapportent au commencement de l'intégrale désignée par S, de deux traits celles qui se rapportent à la fin de cette intégrale, de trois ou davantage celles qui se rapportent à des points intermédiaires quelconques.

(1) L'analyse de Lagrange est évidemment incomplète; il semble que l'illustre Auteur ait eu en vue seulement les corps dont les éléments peuvent être disposés suivant une suite linéaire. Dans le cas d'un système à trois dimensions, par exemple, il peut y avoir des conditions relatives à chaque élément de la surface qui limite le système, ou même de toute autre surface située dans l'intérieur; il peut y en avoir d'autres se rapportant à tous les points de certaines lignes et non pas seulement à certains points isolés pris sur la surface ou dans l'intérieur du corps. (*G. D.*)

Ainsi il faudra ajouter à l'intégrale

$$\mathbf{S}(\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots)\,dm$$

la quantité

$$\mathrm{P}'\,\delta p' + \mathrm{Q}'\,\delta q' + \mathrm{R}'\,\delta r' + \ldots + \mathrm{P}''\,\delta p'' + \mathrm{Q}''\,\delta q'' + \mathrm{R}''\,\delta r'' + \ldots,$$

et à l'intégrale

$$\mathbf{S}(\lambda\,\delta\mathrm{L} + \mu\,\delta\mathrm{M} + \ldots)$$

la quantité

$$\alpha\,\delta\mathrm{A} + \beta\,\delta\mathrm{B} + \gamma\,\delta\mathrm{C} + \ldots,$$

de sorte que l'équation générale de l'équilibre sera de cette forme :

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \ldots)\,dm + \mathbf{S}(\lambda\,\delta\mathrm{L} + \mu\,\delta\mathrm{M} + \ldots)\\ + \mathrm{P}'\,\delta p' + \mathrm{Q}'\,\delta q' + \mathrm{R}'\,\delta r' + \ldots + \mathrm{P}''\,\delta p'' + \mathrm{Q}''\,\delta q'' + \mathrm{R}''\,\delta r'' + \ldots\\ + \alpha\,\delta\mathrm{A} + \beta\,\delta\mathrm{B} + \gamma\,\delta\mathrm{C} + \ldots = 0.\end{aligned}$$

14. Comme les fonctions L, M, ... peuvent contenir non seulement les variables finies x, y, z, mais encore leurs différentielles, les variations $\delta\mathrm{L}$, $\delta\mathrm{M}$, ... donneront des termes multipliés par δx, δy, δz, δdx, δdy, ..., et l'équation précédente, lorsqu'on y aura substitué les valeurs de δp, δq, δr, ..., $\delta\mathrm{L}$, $\delta\mathrm{M}$, ... en δx, δy, δz, δdx, δdy, δdz, ..., ainsi que celles de $\delta p'$, $\delta p''$, ..., $\delta q'$, $\delta q''$, ..., $\delta\mathrm{A}$, $\delta\mathrm{B}$, ... en $\delta x'$, $\delta x''$, ..., $\delta y'$, $\delta y''$, ..., $\delta dx'$, ..., déduites des circonstances particulières de chaque problème, aura toujours une forme analogue à celles que le *Calcul des variations* fournit par la détermination des maxima et minima des formules intégrales indéfinies; ainsi il n'y aura qu'à y appliquer les règles connues de ce calcul.

On considérera donc que, comme les caractéristiques d et δ marquent deux espèces de différences entièrement indépendantes entre elles, quand ces caractéristiques se trouvent ensemble, il doit être indifférent dans quel ordre elles soient placées, parce qu'en supposant qu'une quantité varie de deux manières différentes, on a toujours le même

résultat, quel que soit l'ordre dans lequel se font ces variations. Ainsi δdx sera la même chose que $d\delta x$, et pareillement δd^2x sera la même chose que $d^2\delta x$, et ainsi de suite. On pourra donc toujours changer à volonté l'ordre des caractéristiques sans altérer la valeur des différences, et pour notre objet il sera à propos de transporter la caractéristique d avant la δ, afin que l'équation proposée ne contienne que les variations des coordonnées et les différentielles de ces mêmes variations.

Il en est de même des signes d'intégration $\int$ ou $\mathbf{S}$, par rapport à la caractéristique des variations δ. Ainsi l'on pourra toujours changer les symboles $\delta\int$ ou $\delta\mathbf{S}$ en $\int\delta$ ou $\mathbf{S}\delta$.

C'est en quoi consiste le premier principe fondamental du *Calcul des variations*.

15. Or les différentielles $d\delta x$, $d\delta y$, $d\delta z$, $d^2\delta x$, ..., qui se trouvent sous le signe $\mathbf{S}$, peuvent être éliminées par l'opération connue des intégrations par parties; car, en général,

$$\int \Omega\,d\delta x = \Omega\,\delta x - \int \delta x\,d\Omega, \qquad \int \Omega\,d^2\delta x = \Omega\,d\delta x - d\Omega\,\delta x + \int \delta x\,d^2\Omega,$$

et ainsi des autres, où il faut observer que les quantités hors du signe $\int$ se rapportent naturellement aux derniers points des intégrales, mais que, pour rendre ces intégrales complètes, il faut nécessairement en retrancher les valeurs des mêmes quantités hors du signe, lesquelles répondent aux premiers points des intégrales, afin que tout s'évanouisse dans ces points; ce qui est évident par la théorie des intégrations.

Ainsi, en marquant par un trait les quantités qui se rapportent au commencement des intégrales totales désignées par $\mathbf{S}$, et par deux traits celles qui se rapportent à la fin de ces intégrales, on aura les réductions suivantes

$$\mathrm{S}\,\Omega\, d\delta x = \Omega''\delta x'' - \Omega'\delta x' - \mathrm{S}\,\delta x\, d\Omega,$$

$$\mathrm{S}\,\Omega\, d^2\delta x = \Omega'' d\delta x'' - d\Omega''\delta x'' - \Omega' d\delta x' + d\Omega'\delta x' + \mathrm{S}\,\delta x\, d^2\Omega,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

lesquelles serviront à faire disparaître toutes les différentielles des variations qui pourront se trouver sous le signe S. Ces réductions constituent le second principe fondamental du *Calcul des variations*.

16. De cette manière donc, l'équation générale de l'équilibre se réduira à la forme suivante

$$\mathrm{S}\,(\Xi\,\delta x + \Sigma\,\delta y + \Psi\,\delta z) + \Lambda = 0,$$

dans laquelle Ξ, Σ, Ψ seront des fonctions de x, y, z et de leurs différentielles, et Λ contiendra les termes affectés des variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$; $\delta x''$, $\delta y''$, ... et de leurs différentielles.

Donc, pour que cette équation ait lieu indépendamment des variations des différentes coordonnées, il faudra que l'on ait : 1° Ξ, Σ, Ψ nuls dans toute l'étendue de l'intégrale S, c'est-à-dire dans chaque point de la masse; 2° chaque terme de Λ aussi égal à zéro.

Les équations indéfinies

$$\Xi = 0, \qquad \Sigma = 0, \qquad \Psi = 0$$

donneront, en général, la relation qui doit se trouver entre les variables x, y, z; mais il faudra pour cela en éliminer les variables indéterminées $\lambda, \mu, \ldots$, lesquelles (art. 13) sont en même nombre que les équations de condition indéterminées

$$\mathrm{L} = 0, \qquad \mathrm{M} = 0, \qquad \ldots.$$

Or je remarque que ces équations ne sauraient être au delà de trois;

car, puisque ce sont des équations indéfinies entre les trois variables x, y, z et leurs différentielles, il est clair que, s'il y en avait plus de trois, on aurait plus d'équations que de variables, en sorte qu'il faudrait que la quatrième fût une suite nécessaire des trois premières, et ainsi des autres. Donc il n'y aura jamais plus de trois indéterminées λ, μ, ν à éliminer, en sorte qu'on pourra toujours trouver les valeurs de ces indéterminées en fonction de x, y, z. Mais les équations qui disparaîtront par ces éliminations seront remplacées par les équations mêmes de condition, de sorte qu'on pourra toujours connaître les valeurs de x, y, z qui doivent avoir lieu dans l'état d'équilibre de tout le système.

Au reste, les équations de condition $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{M} = 0$, ... pourraient contenir encore d'autres variables u, v, ... avec leurs différentielles, qui devraient être éliminées par le moyen d'autres équations telles que

$$\mathrm{U} = 0, \qquad \mathrm{V} = 0, \qquad \ldots;$$

dans ce cas, on pourrait traiter ces nouvelles équations de condition comme celles qui sont données par la nature du problème, et, prenant des coefficients indéterminés σ, υ, ..., il n'y aurait qu'à ajouter aux termes

$$\lambda\,\delta\mathrm{L} + \mu\,\delta\mathrm{M} + \ldots,$$

qui sont sous le signe d'intégration dans l'équation générale de l'article 13, les termes

$$\sigma\,\delta\mathrm{U} + \upsilon\,\delta\mathrm{V} + \ldots;$$

et, après avoir fait disparaître toutes les différentielles des variations δx, δy, δz, δu, δv, ..., l'équation finale de l'article 13 contiendra sous le signe des termes affectés des variations δu, δv, ..., qui devront, par conséquent, être égalés séparément à zéro. On aura ainsi autant de nouvelles équations que d'indéterminées σ, υ, ..., par lesquelles il faudra les éliminer; ensuite on éliminera les nouvelles variables u, v, ... par les équations données $\mathrm{U} = 0$, $\mathrm{V} = 0$, ... Cette méthode sera surtout utile lorsque, dans les fonctions L, M, ..., il se trouvera des quantités intégrales; car, en substituant à leur place de nouvelles indéterminées, on pourra faire disparaître tous les signes d'intégration, ce qui rendra le calcul plus facile.

17. A l'égard des autres équations résultantes des différents termes de la quantité A qui est hors du signe, ce ne seront que des équations particulières, qui ne devront avoir lieu que par rapport à des points déterminés de la masse, et qui serviront principalement à déterminer les constantes arbitraires que les expressions de x, y, z, déduites des équations précédentes, pourront contenir. Pour faire usage de ces équations, on y substituera donc les valeurs déjà trouvées de λ, μ, ..., ensuite on en éliminera les indéterminées α, β, ... et l'on y joindra les équations de condition $A = 0$, $B = 0$, ..., qui serviront à remplacer celles que l'élimination dont il s'agit fera disparaître.

18. Quoique les termes $P\delta p$, $Q\delta q$, ..., dus aux forces accélératrices P, Q, ..., ne demandent aucune réduction tant que ces forces agissent suivant les lignes p, q, ..., parce que les quantités p, q, ... ne sont fonctions que des variables finies x, y, z, il n'en sera pas de même lorsqu'on emploiera des forces dont l'action consistera à faire varier une fonction donnée (Sect. II, art. 9); il faudra alors, si cette fonction contient des différentielles, employer pour ces termes les mêmes réductions que pour les termes $\lambda\,\delta L$, ..., et l'on parviendra toujours à une équation finale de la même forme. Ce cas a lieu lorsque l'on considère des corps élastiques, soit solides ou fluides.

§ III. — *Analogie des problèmes de ce genre avec ceux* de maximis et minimis.

19. Non seulement le Calcul des variations s'applique de la même manière aux problèmes sur l'équilibre des corps continus et aux problèmes *de maximis et minimis* relatifs aux formules intégrales, mais il fait naître entre ces deux sortes de questions une analogie remarquable que nous allons développer.

Nous commencerons par donner une formule générale pour la variation d'une fonction différentielle quelconque à plusieurs variables.

On sait que, dans les fonctions de plusieurs variables et de leurs différentielles des ordres supérieurs au premier, on peut toujours prendre une des différentielles premières pour constante, ce qui simplifie la fonction sans rien ôter à sa généralité; mais alors, dans les différentiations par δ, il faut aussi regarder comme constante la variable dont la différentielle a été supposée constante; et, si l'on veut attribuer des variations à toutes les variables, il faudra rétablir la variabilité de la différentielle supposée constante.

20. Soit U une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., où dx est supposé constant; si l'on fait, comme dans la Théorie des fonctions,

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{dy'}{dx} = y'', \qquad \frac{dy''}{dx} = y''', \qquad \ldots,$$

la quantité U deviendra fonction de x, y, y', y'', ..., et la variation δU sera, en employant la notation des différentielles partielles, de la forme

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial U}{\partial y''}\delta y'' + \ldots.$$

Maintenant, en faisant tout varier, on aura

$$\delta y' = \delta\frac{dy}{dx} = \frac{\delta dy}{dx} - \frac{dy}{dx}\frac{\delta dx}{dx} = \frac{d\delta y}{dx} - y'\frac{d\delta x}{dx} = \frac{d(\delta y - y'\delta x)}{dx} + y''\delta x,$$

$$\delta y'' = \frac{d(\delta y' - y''\delta x)}{dx} + y'''\delta x = \frac{d^2(\delta y - y'\delta x)}{dx^2} + y'''\delta x,$$

$$\delta y''' = \frac{d^3(\delta y - y'\delta x)}{dx^3} + y^{\text{IV}}\delta x,$$

....

Substituant ces valeurs et faisant, pour abréger,

$$\delta y - y'\delta x = \delta u$$

et, par conséquent,

$$\delta y = \delta u + y'\delta x,$$

on aura

$$\delta U = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial y'} y'' + \frac{\partial U}{\partial y''} y''' + \ldots\right) \delta x$$

$$+ \frac{\partial U}{\partial y} \delta u + \frac{\partial U}{\partial y'} \frac{d\delta u}{dx} + \frac{\partial U}{\partial y''} \frac{d^2 \delta u}{dx^2} + \ldots.$$

Mais, en différentiant par d la fonction U et substituant $y' dx$ pour dy, $y'' dx$ pour dy', on a

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial y'} y'' + \frac{\partial U}{\partial y''} y''' + \ldots\right) dx,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial y'} y'' + \ldots = \frac{dU}{dx}.$$

Donc enfin

$$\delta U = \frac{dU}{dx} \delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \delta u + \frac{\partial U}{\partial y'} \frac{d\delta u}{dx} + \frac{\partial U}{\partial y''} \frac{d^2 \delta u}{dx^2} + \ldots.$$

Si la quantité U contenait une autre variable z avec ses différentielles $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots$, en faisant $\frac{dz}{dx} = z'$, $\frac{dz'}{dx} = z''$, ... et opérant de la même manière, on trouverait les termes suivants

$$\frac{\partial U}{\partial z} \delta v + \frac{\partial U}{\partial z'} \frac{d\delta v}{dx} + \frac{\partial U}{\partial z''} \frac{d^2 \delta v}{dx^2} + \ldots,$$

dans lesquels

$$\delta v = \delta z - z' \delta x$$

à ajouter à la valeur précédente de δU, et ainsi de suite.

21. Donc, si l'on a la fonction intégrale $\int U dx$ à rendre un maximum ou un minimum par les principes du Calcul des variations, on fera

$$\delta \int U\, dx = \int \delta (U\, dx) = \int (\delta U\, dx + U\, \delta dx) = 0.$$

Substituant la valeur de δU, changeant δdx en $d\delta x$ et faisant disparaître, par des intégrations par parties, les différences de δx, δu, δv, il

ne restera sous le signe que des termes de la forme

$$(\Xi\, \delta x + \Upsilon\, \delta u + \Psi\, \delta v)\, dx,$$

dans lesquels

$$\Xi = dU - dU = 0,$$

$$\Upsilon = \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial U}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial U}{\partial y''} - \ldots,$$

$$\Psi = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d}{dx} \frac{\partial U}{\partial z'} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial U}{\partial z''} - \ldots.$$

Ces termes doivent être nuls, quelles que soient les variations δx, δy, δz; or, en remettant pour δu et δv leurs valeurs $\delta y - y' \delta x$, $\delta z - z' \delta x$, les termes dont il s'agit deviennent, à cause de $\Xi = 0$,

$$[\Upsilon\, \delta y + \Psi\, \delta z - (\Upsilon y' + \Psi z')\, \delta x]\, dx,$$

d'où l'on ne tire que les deux équations

$$\Upsilon = 0, \qquad \Psi = 0,$$

la troisième, dépendante de δx, étant contenue dans ces deux-ci.

On voit par là qu'on peut se dispenser d'attribuer aussi une variation à la variable x, dont l'élément est supposé constant dans la fonction U, puisque les équations nécessaires à la solution du problème résultent uniquement des variations des autres variables. C'est une remarque qui a été faite dès la naissance du Calcul des variations et qui est une suite nécessaire de ce Calcul.

Cependant il peut être utile de considérer toutes les variations à la fois, par rapport aux limites de l'intégrale, parce qu'il peut résulter de chacune d'elles des conditions particulières dans les points qui répondent à ces limites, comme nous l'avons fait voir dans la dernière Leçon sur le Calcul des fonctions.

22. La fonction intégrale dont on demande le maximum ou le minimum peut contenir aussi d'autres intégrales; mais, quelle qu'elle soit, on peut toujours la réduire à ne contenir que des variables finies avec leurs différentielles et à dépendre d'une ou de plusieurs équations de

condition entre ces mêmes variables, auxquelles on pourra toujours satisfaire par la méthode des multiplicateurs.

Supposons, par exemple, que U soit une fonction de x, y, z et de leurs différentielles, et qu'en même temps la variable z dépende de l'équation de condition $L = 0$. Cette équation étant différentiée par δ donnera $\delta L = 0$; il n'y aura donc qu'à multiplier celle-ci par un coefficient indéterminé λ, ou par $\lambda\, dx$, pour l'homogénéité, lorsque L est une fonction finie, ajouter l'équation intégrale $\int \lambda\, \delta L\, dx = 0$ à l'équation du maximum ou minimum $\delta \int U\, dx = 0$, et considérer ensuite les variations δx, δy, δz comme indépendantes. Or on a, en regardant L comme fonction de $x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots$,

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \frac{\partial L}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial L}{\partial z'}\delta z' + \ldots.$$

Donc, si l'on fait les mêmes substitutions que ci-dessus pour $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta y''$, ..., on aura aussi

$$\delta L = \frac{dL}{dx}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta u + \frac{\partial L}{\partial z}\delta v + \frac{\partial L}{\partial y'}\frac{d\,\delta u}{dx} + \frac{\partial L}{\partial z'}\frac{d\,\delta v}{dx} + \ldots,$$

et les termes sous le signe provenant de l'équation

$$\int (\delta U\, dx + \lambda\, \delta L\, dx) = 0$$

seront de la forme

$$(\Xi\, \delta x + \Upsilon\, \delta u + \Psi\, \delta v)\, dx,$$

dans lesquels on aura

$$\Xi = \lambda\, dL,$$

$$\Upsilon = \left[\frac{\partial U}{\partial y} + \lambda \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial y'} + \lambda \frac{\partial L}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial U}{\partial y''} + \lambda \frac{\partial L}{\partial y''}\right) - \ldots\right] dx,$$

$$\Psi = \left[\frac{\partial U}{\partial z} + \lambda \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial U}{\partial z'} + \lambda \frac{\partial L}{\partial z'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial U}{\partial z''} + \lambda \frac{\partial L}{\partial z''}\right) - \ldots\right] dx.$$

Or, $L = 0$ étant l'équation de condition, on aura aussi $dL = 0$, ce qui donnera $\Xi = 0$. Ainsi, en égalant à zéro les coefficients des trois

variations δx, δy, δz, on n'aura que les deux équations

$$\Upsilon = 0, \qquad \Psi = 0,$$

dont l'une servira à éliminer l'indéterminée λ, de sorte qu'il ne restera, pour la solution du problème, qu'une seule équation en x, y, z, qu'il faudra combiner avec l'équation donnée $L = 0$.

23. Comme, en supposant dx constant, on a

$$y' = \frac{dy}{dx}, \qquad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \qquad \ldots, \qquad z' = \frac{dz}{dx}, \qquad z'' = \frac{d^2z}{dx^2}, \qquad \ldots,$$

on voit qu'il suffit de faire varier dans les fonctions U, L, ... les variables $y, z, \ldots$, avec leurs différentielles; on aura ainsi, en employant avec la caractéristique δ la notation des différences partielles,

$$\begin{aligned}\delta U = {}& \frac{\delta U}{\delta y}\delta y + \frac{\delta U}{\delta\, dy} d\delta y + \frac{\delta U}{\delta\, d^2y} d^2\delta y + \ldots \\ & + \frac{\delta U}{\delta z}\delta z + \frac{\delta U}{\delta\, dz} d\delta z + \frac{\delta U}{\delta\, d^2z} d^2\delta z + \ldots,\end{aligned}$$

et, si l'on veut avoir égard en même temps à la variation de x, il n'y aura qu'à ajouter à l'expression de δU le terme $\frac{dU}{dx}\delta x$ et changer δy en $\delta y - \frac{dy}{dx}\delta x$, δz en $\delta z - \frac{dz}{dx}\delta x$, ...

De cette manière, on aura d'abord, après les réductions,

$$\begin{aligned}\delta \int U\, dx = {}& \int (\Upsilon\, \delta y + \Psi\, \delta z + \ldots)\, dx \\ & + \Upsilon'\, \delta y + \Upsilon''\, d\delta y + \ldots + \Psi'\, \delta z + \Psi''\, d\delta z + \ldots,\end{aligned}$$

en faisant

$$\begin{aligned}\Upsilon &= \frac{\delta U}{\delta y} - d\frac{\delta U}{\delta\, dy} + d^2\frac{\delta U}{\delta\, d^2y} - \ldots, \\ \Upsilon' &= \frac{\delta U}{\delta\, dy} - d\frac{\delta U}{\delta\, d^2y} + \ldots, \\ \Upsilon'' &= \frac{\delta U}{\delta\, d^2y} - \ldots, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

$$\Psi = \frac{\partial U}{\delta z} - d\frac{\partial U}{\delta dz} + d^2\frac{\partial U}{\delta d^2 z} - \ldots,$$

$$\Psi' = \frac{\partial U}{\delta dz} - d\frac{\partial U}{d\delta^2 z} + \ldots,$$

$$\Psi'' = \frac{\partial U}{\delta d^2 z} - \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et, pour avoir égard ensuite à la variation de x, on ajoutera, dans tous les termes, $-\frac{dy}{dx}\delta x$ à δy et $-\frac{dz}{dx}\delta x$ à δz.

24. Telle est la méthode générale pour les problèmes *de maximis et minimis*, relatifs aux formules intégrales indéfinies auxquelles le Calcul des variations a été d'abord destiné; et l'on voit qu'en faisant même varier toutes les variables, elle ne donne cependant qu'autant d'équations moins une qu'il y a de variables, ce qui est d'ailleurs conforme à la nature de la chose, puisque ce n'est pas la valeur individuelle de chacune des variables qu'on cherche, comme dans les questions ordinaires *de maximis et minimis*, mais des relations indéfinies entre ces variables, par lesquelles elles deviennent fonctions les unes des autres et peuvent être représentées par des courbes à simple ou à double courbure.

25. Appliquons maintenant la même méthode aux problèmes de la Mécanique et supposons, pour plus de simplicité, que la formule

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots$$

soit intégrable et que son intégrale soit Π, comme dans l'article 21 de la Section III; on aura aussi

$$P\,\delta p + Q\,\delta q + R\,\delta r + \ldots = \delta\Pi,$$

et l'équation générale de l'équilibre (art. 13) deviendra

$$\mathsf{S}(\delta\Pi\,dm + \lambda\,\delta L + \mu\,\delta M + \ldots) = 0,$$

en faisant ici abstraction des équations de condition relatives à des points déterminés.

Comme la masse de chaque particule dm du système ne doit pas varier pendant que la position du système varie, il faudra supposer $\delta\,dm = 0$ et, par conséquent, $\delta L = \delta\,dm$ [1].

Lorsque le système est linéaire, on a, en général, $dm = U\,dx$, U étant une fonction comme dans l'article 20; on aura donc

$$\delta L = \delta U\,dx + U\,\delta\,dx,$$

et la formule $\mathsf{S}\lambda\,\delta L$ donnera sous le signe les termes

$$(\Xi\,\delta x + \Upsilon\,\delta u + \Psi\,\delta v)\,dx,$$

dans lesquels on aura (art. 22)

$$\Xi = \lambda\frac{dU}{dx} - \frac{d}{dx}(\lambda U),$$

$$\Upsilon = \lambda\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{\partial U}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\lambda\frac{\partial U}{\partial y''}\right) - \ldots,$$

$$\Psi = \lambda\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{\partial U}{\partial z'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\lambda\frac{\partial U}{\partial z''}\right) - \ldots.$$

26. Donc, s'il n'y a point d'autre condition, l'équation provenant des termes sous le signe S sera

$$\delta\Pi\,dm + (\Xi\,\delta x + \Upsilon\,\delta u + \Psi\,\delta v)\,dx = 0,$$

qu'on devra vérifier séparément par rapport à chacune des variations δx, δy, δz.

Or, Π étant une fonction de x, y, z, on a

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Pi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\delta z;$$

et, comme

$$\delta u = \delta y - \frac{dy}{dx}\delta x, \qquad \delta v = \delta z - \frac{dz}{dx}\delta x,$$

[1] En d'autres termes, la première des conditions relatives à un point quelconque du système est que la masse de chaque particule demeure invariable dans tous les déplacements virtuels. (*G. D.*)

l'équation précédente devient

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dm + \Xi\, dx - \Upsilon\, dy - \Psi\, dz\right) \delta x + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y} dm + \Upsilon\, dx\right) \delta y + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} dm + \Psi\, dx\right) \delta z = 0,$$

laquelle donne ces trois-ci :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} dm + \Xi\, dx - \Upsilon\, dy - \Psi\, dz = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y} dm + \Upsilon\, dx = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} dm + \Psi\, dx = 0.$$

Ainsi l'on a ici autant d'équations que de variables, ce qui parait mettre une différence entre les problèmes de ce genre relatifs à la Mécanique et les problèmes *de maximis et minimis*.

27. Mais j'observe d'abord qu'à cause de l'indéterminée λ, les trois équations se réduisent à deux, par l'élimination de cette indéterminée; et, quoiqu'en général les équations de condition remplacent toujours celles qui disparaissent par l'élimination des indéterminées, la condition introduite ici $\delta\, dm = 0$, c'est-à-dire dm constant, ne peut pas fournir une équation particulière pour la solution du problème, parce que, suivant l'esprit du Calcul différentiel, il est toujours permis de prendre un élément quelconque pour constant, puisqu'il n'y a, à proprement parler, que les rapports des différentielles entre elles, et non les différentielles elles-mêmes, qui entrent dans le calcul. Ainsi les trois équations seront réduites à deux et ne serviront qu'à déterminer la nature de la courbe, comme dans les problèmes *de maximis et minimis*.

28. J'observe ensuite qu'on peut aussi rappeler les problèmes de Statique dont il s'agit ici à de simples problèmes *de maximis et minimis*.

Car, si l'on ajoute ensemble les trois équations trouvées ci-dessus, après avoir multiplié la première par dx, la deuxième par dy et la troisième par dz, on aura, à cause de

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz = d\Pi,$$

l'équation

$$d\Pi\, dm + \Xi\, dx^2 = 0;$$

mais on a

$$\Xi\, dx = \lambda\, dU - d\lambda\, U = -U\, d\lambda,$$

et, comme $dm = U\, dx$, on aura, en divisant par dm, $d\Pi - d\lambda = 0$; d'où l'on tire

$$\lambda = \Pi + a,$$

a étant une constante arbitraire.

Ainsi, à cause de $\delta L = \delta\, dm$, le terme $\lambda\, \delta L$, dans l'équation de l'article 25, deviendra

$$\Pi\, \delta\, dm + a\, \delta\, dm,$$

et puisque $\delta\Pi\, dm + \Pi\, \delta\, dm = \delta(\Pi\, dm)$, cette équation deviendra

$$\int \delta(\Pi\, dm) + a \int \delta\, dm = 0,$$

c'est-à-dire

$$\delta \int \Pi\, dm + a\, \delta \int dm = 0;$$

c'est l'équation nécessaire pour que la formule intégrale $\int \Pi\, dm$ devienne un maximum ou un minimum parmi toutes celles où la formule $\int dm$ aura une même valeur.

De cette manière on pourra, comme dans les questions *de maximis et minimis*, regarder une des variables comme constante, relativement aux variations par δ, ce qui simplifie l'analyse; mais la méthode générale a l'avantage de donner la valeur du coefficient λ, qui, par la théorie exposée dans la présente Section, exprimera [1] la force avec

[1] *Voir*, à ce sujet, l'article 6, Section IV, et la note relative à l'article 9, Section II. (*J. Bertrand.*)

laquelle l'élément dm résiste à l'action des forces P, Q, R, ... qui agissent sur le système.

29. Nous avons supposé, pour plus de simplicité, qu'il n'y avait point d'autre équation de condition; mais, s'il y avait de plus l'équation $M = 0$, M étant une fonction de $x, y, z, y', y'', \ldots, z', z'', \ldots$, il faudrait ajouter au terme $\lambda\,\delta L$ sous le signe, dans l'équation de l'équilibre, le terme $\mu\,\delta M$, ou plutôt, pour l'homogénéité, le terme $\mu\,\delta M\,dx$, ce qui donnerait à ajouter aux valeurs de Ξ, Υ, Ψ de l'article 25 les quantités respectives

$$\mu\frac{dM}{dx},$$

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\mu\frac{\partial M}{\partial y'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\mu\frac{\partial M}{\partial y''}\right) - \ldots,$$

$$\mu\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{d}{dx}\left(\mu\frac{\partial M}{\partial z'}\right) + \frac{d^2}{dx^2}\left(\mu\frac{\partial M}{\partial z''}\right) - \ldots.$$

Ainsi l'on aurait trois équations de la même forme que celles de l'article 26, lesquelles, par l'élimination des deux indéterminées λ et μ, se réduiraient à une seule; mais, en y joignant l'équation de condition $M = 0$, on aurait, comme auparavant, deux équations entre les trois variables x, y, z.

Ces trois équations donnent, comme dans l'article 28, l'équation

$$d\Pi\,dm + \Xi\,dx^2 = 0.$$

Ici l'on a

$$\Xi\,dx = -U\,d\lambda + \mu\,dM;$$

mais l'équation $M = 0$ donne aussi $dM = 0$; donc on aura simplement, comme dans l'article cité,

$$\Xi\,dx = -U\,d\lambda,$$

et de là on trouvera le même résultat

$$\delta \int \Pi\,dm + a\,\delta\,dm = 0.$$

30. Donc, en général, le problème de l'équilibre d'un système de particules dm animées des forces P, Q, R, ..., qui agissent suivant les

directions des lignes $p, q, r, \ldots$, et qu'on suppose telles que l'on ait

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots = d\Pi,$$

se réduit simplement à rendre la formule intégrale $\int \Pi\,dm$ un maximum ou un minimum, en ayant d'ailleurs égard aux conditions particulières du système; ce qui, comme l'on voit, fait rentrer tous les problèmes de l'équilibre dans la classe des problèmes *de maximis et minimis* connus sous le nom de *problèmes des isopérimètres*.

Dans le cas de la chaînette, en prenant les ordonnées y verticales, on a $\Pi = gy$, g étant la force constante de la gravité. Donc il faut que la formule $\int y\,dm$ soit un maximum ou un minimum parmi toutes celles où la valeur de $\int dm$ est la même; mais $\dfrac{\int y\,dm}{\int dm}$ est la distance du centre de gravité à l'horizontale; donc, puisque la masse entière est supposée donnée, il faudra que cette distance soit la plus grande ou la plus petite : ce qu'on sait d'ailleurs.

31. Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des fonctions de variables regardées comme indépendantes; mais, si la variable z était censée fonction de x, y et que l'on eût une fonction U qui contînt x, y, z avec les différences partielles de z relatives à x et y, on pourrait demander la variation δU en ayant égard aux variations simultanées de x, y, z.

Soit, pour plus de simplicité,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = z_{,}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = z'_{,}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{,,},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = z''', \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = z''_{,}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = z'_{,,}, \quad \ldots;$$

la quantité U sera fonction de $x, y, z, z', z_{,}, z'', z'_{,}, z_{,,}, \ldots$, et l'on aura

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z + \frac{\partial U}{\partial z'}\delta z' + \frac{\partial U}{\partial z_{,}}\delta z_{,} + \frac{\partial U}{\partial z''}\delta z'' + \frac{\partial U}{\partial z'_{,}}\delta z'_{,} + \ldots,$$

et la difficulté se réduira à trouver les valeurs des variations $\delta z'$, $\delta z_{,}$, $\delta z''$, ..., en faisant varier à la fois les éléments dx, dy dans les différences partielles.

Nous pouvons supposer, pour rendre le calcul plus simple, que la variation δx est une fonction de x indépendante de y, et la variation δy une fonction de y indépendante de x. Nous verrons par la suite que cette supposition a toute la généralité que l'on peut désirer (¹).

(¹) Il y a ici un point qui appelle quelques explications. Dans le passage d'une surface à la surface infiniment voisine, on peut, à coup sûr, établir la correspondance de telle manière que δx, δy aient, en chaque point de la surface primitive, telles valeurs que l'on voudra. S'il s'agit d'étudier un problème de maximum et de minimum, il n'y a donc aucun inconvénient, même pour les conditions aux limites, comme on s'en assurera aisément, à supposer que δx ne dépende que de x et δy de y. Mais plus loin (Sect. V, art. 44) Lagrange applique les formules des articles 32 à 34, établies dans cette hypothèse, au cas où δx, δy définissent un déplacement virtuel quelconque et sont, par conséquent, des fonctions de x et de y tout à fait arbitraires. Il ne sera donc pas inutile de rétablir le calcul dans l'hypothèse où δx, δy sont quelconques.

Posons

(1) $$\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y = u;$$

on aura

(2) $$du = d\delta z - z'\,d\delta x - z_{,}\,d\delta y - dz'\,\delta x - dz_{,}\,\delta y.$$

Écrivons l'équation aux différentielles totales

$$dz = z'\,dx + z_{,}\,dy$$

et différentions-la par δ. Nous aurons

(3) $$\delta\,dz = z'\,\delta\,dx + z_{,}\,\delta\,dy + \delta z'\,dx + \delta z_{,}\,dy.$$

Ajoutons les équations (2) et (3) et remarquons que l'on peut intervertir l'ordre des caractéristiques d, δ, ce qui fait disparaître les termes en $d\delta$. Il viendra

(4) $$du = \delta z'\,dx + \delta z_{,}\,dy - dz'\,\delta x - dz_{,}\,\delta y.$$

Dans cette équation, dx, dy peuvent prendre toutes les valeurs possibles. Supposons d'abord

$$dy = 0;$$

on aura

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx, \qquad dz' = z''\,dx, \qquad dz_{,} = z'_{,}\,dx,$$

et, par conséquent, l'équation (4) nous donnera la formule

(5) $$\frac{\partial u}{\partial x} = \delta z' - z''\delta x - z'_{,}\delta y,$$

32. Cela posé, on aura, en différentiant,

$$\delta z' = \delta\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\delta\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\delta\partial x}{\partial x}.$$

qui fera connaître $\delta z'$. On trouvera de même, en faisant $dx = 0$,

(6) $$\frac{\partial u}{\partial y} = \delta z_{,} - z'_{,}\delta x - z_{,,}\delta y;$$

ce sont les deux premières formules de Lagrange. Comme elles s'appliquent à une fonction quelconque, on peut y remplacer z par z'. La valeur de u deviendra alors

$$\delta z' - z''\delta x - z'_{,}\delta y,$$

et les formules (5) et (6) nous donneront

$$\frac{\partial}{\partial x}(\delta z' - z''\delta x - z'_{,}\delta y) = \delta z'' - z'''\delta x - z''_{,}\delta y,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\delta z' - z''\delta x - z'_{,}\delta y) = \delta z'_{,} - z''_{,}\delta x - z'_{,,}\delta y.$$

On peut se servir encore des équations (5) et (6) pour simplifier les formules précédentes, et l'on trouvera alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \delta z'' - z'''\delta x - z''_{,}\delta y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = \delta z'_{,} - z''_{,}\delta x - z'_{,,}\delta y.$$

A ces relations on peut évidemment ajouter la suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \delta z_{,,} - z'_{,,}\delta x - z_{,,,}\delta y,$$

qui complète l'ensemble de celles que Lagrange démontre dans l'hypothèse particulière où il s'est placé et par l'emploi de différentiations qui sont légitimes, mais ne sont peut-être pas suffisamment expliquées.

L'affirmation de Lagrange, « nous verrons par la suite que cette supposition a toute la généralité que l'on peut désirer », paraît se rapporter à une autre partie du calcul, donnée à l'article 34, celle qui est relative à la variation de l'élément superficiel $dx\,dy$. Dans le cas où δx dépend de la seule variable x et δy de la seule variable y, la variation du rectangle $dx\,dy$ est en effet très facile à calculer; car ce rectangle se transforme en un rectangle de côtés $dx + \delta dx$, $dy + \delta dy$, et, par conséquent, sa variation s'obtient immédiatement et est égale à

$$dx\,\delta dy + dy\,\delta dx = dx\,dy\left(\frac{\delta dx}{dx} + \frac{\delta dy}{dy}\right).$$

Le calcul serait moins simple si δx, δy dépendaient à la fois des deux variables x et y. Mais ce calcul est complètement développé pour le cas de trois variables aux articles 12, 13 et 14 de la Section VII, auxquels Lagrange a eu sans doute l'intention de renvoyer le lecteur.

(*G. D.*)

Il est clair que

$$\frac{\delta\,\partial z}{\partial x} = \frac{\partial\,\delta z}{\partial x} \qquad \text{et} \qquad \frac{\delta\,\partial x}{\partial x} = \frac{\partial\,\delta x}{\partial x};$$

ainsi l'on aura

$$\delta z' = \frac{\partial\,\delta z}{\partial x} - z'\frac{\partial\,\delta x}{\partial x} = \frac{\partial(\delta z - z'\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial z'}{\partial x}\delta x,$$

ou bien

$$\delta z' = \frac{\partial(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{\partial x} + \frac{\partial z'}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z_{,}}{\partial x}\delta y.$$

On aura de même

$$\delta z_{,} = \frac{\partial(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{\partial y} + \frac{\partial z'}{\partial y}\delta x + \frac{\partial z_{,}}{\partial y}\delta y,$$

à cause de

$$\frac{\partial\,\delta x}{\partial y} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\,\delta y}{\partial x} = 0.$$

On aura ensuite

$$\delta z'' = \delta\frac{\partial z'}{\partial x} = \frac{\partial\,\delta z'}{\partial x} - \frac{\partial z'}{\partial x}\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}.$$

Substituant la valeur de $\delta z'$, on aura

$$\delta z'' = \frac{\partial^2(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2}\delta x + \frac{\partial^2 z_{,}}{\partial x^2}\delta y.$$

On aura de même

$$\delta z'_{,} = \delta\frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial\,\delta z'}{\partial y} - \frac{\partial z'}{\partial y}\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}.$$

Substituant aussi la valeur de $\delta z'$, on aura, à cause de $\frac{\partial z_{,}}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial y}$,

$$\delta z'_{,} = \frac{\partial^2(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 z'}{\partial x\,\partial y}\delta x + \frac{\partial^2 z_{,}}{\partial x\,\partial y}\delta y.$$

On trouvera pareillement

$$\delta z_{,,} = \frac{\partial^2(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2}\delta x + \frac{\partial^2 z_{,}}{\partial y^2}\delta y,$$

et ainsi de suite.

33. Donc, si l'on fait, pour abréger,

$$\delta z - \frac{\partial z}{\partial x}\delta x - \frac{\partial z}{\partial y}\delta y = \delta u,$$

et qu'on observe que

$$\frac{\partial z_{,}}{\partial x} = \frac{\partial z'}{\partial y}, \qquad \frac{\partial z'}{\partial y} = \frac{\partial z_{,}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 z'}{\partial x^2} = \frac{\partial z''}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 z_{,}}{\partial x^2} = \frac{\partial z''}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z'}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial z'_{,}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 z_{,}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial z'_{,}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z'}{\partial y^2} = \frac{\partial z_{,,}}{\partial x}, \qquad \ldots,$$

on aura plus simplement

$$\delta z' = \frac{\partial\,\delta u}{\partial x} + \frac{\partial z'}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z'}{\partial y}\delta y,$$

$$\delta z_{,} = \frac{\partial\,\delta u}{\partial y} + \frac{\partial z_{,}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z_{,}}{\partial y}\delta y,$$

$$\delta z'' = \frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2} + \frac{\partial z''}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z''}{\partial y}\delta y,$$

$$\delta z'_{,} = \frac{\partial^2\delta u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial z'_{,}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z'_{,}}{\partial y}\delta y,$$

$$\delta z_{,,} = \frac{\partial^2\delta u}{\partial y^2} + \frac{\partial z_{,,}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z_{,,}}{\partial y}\delta y,$$

....

Faisant ces substitutions dans l'expression de δU, mettant

$$\delta u + \frac{\partial z}{\partial x}\delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\delta y$$

à la place de δz et ordonnant les termes par rapport à δx, δy, δu, on aura

$$\begin{aligned}\delta U = {} & \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z_{,}}\frac{\partial z_{,}}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z''}\frac{\partial z''}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z'_{,}}\frac{\partial z'_{,}}{\partial x} + \ldots\right)\delta x \\ & + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z_{,}}\frac{\partial z_{,}}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z''}\frac{\partial z''}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z'_{,}}\frac{\partial z'_{,}}{\partial y} + \ldots\right)\delta y \\ & + \frac{\partial U}{\partial z}\delta u + \frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial\,\delta u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z_{,}}\frac{\partial\,\delta u}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z''}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial z'_{,}}\frac{\partial^2\delta u}{\partial x\,\partial y} + \ldots.\end{aligned}$$

Désignons par $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$, $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ les différences partielles de U, relatives à x et y, en regardant z comme fonction de ces deux variables; il est clair qu'on aura

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z_{,}}\frac{\partial z_{,}}{\partial x} + \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z_{,}}\frac{\partial z_{,}}{\partial y} + \ldots.$$

Ainsi la variation complète de U se réduira à cette forme simple

$$\begin{aligned}\delta U = {} & \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta u \\ & + \frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z_{,}}\frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z''}\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \frac{\partial U}{\partial z'_{,}}\frac{\partial^2 \delta u}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z_{,,}}\frac{\partial^2 \delta u}{\partial y^2} + \ldots.\end{aligned}$$

34. Donc, si l'on a une fonction intégrale double $\iint U\,dx\,dy$ à rendre un maximum ou un minimum, on aura l'équation

$$\delta \iint U\,dx\,dy = \iint \delta(U\,dx\,dy) = 0.$$

Or, en faisant tout varier, on a $\delta(U\,dx\,dy) = \delta U\,dx\,dy + U\,\delta(dx\,dy)$, où il faut remarquer que, $dx\,dy$ représentant un rectangle qui est l'élément du plan des xy, ce rectangle demeurera rectangle après les variations δx, δy des coordonnées x, y, dans la supposition adoptée que δx ne dépende point de y, ni δy de x; de sorte que la variation de $dx\,dy$ sera simplement $dy\,\delta dx + dx\,\delta dy$; donc, comme

$$\delta dx = d\delta x = \frac{d\delta x}{dx}dx, \qquad \delta dy = \delta dy = \frac{d\delta y}{dy}dy,$$

puisque δx et δy sont censés fonctions de x seul et de y seul, on aura

$$\delta(U\,dx\,dy) = \left(\delta U + U\frac{d\delta x}{dx} + U\frac{d\delta y}{dy}\right)dx\,dy.$$

Substituant la valeur de δU et faisant disparaître par des intégrations partielles les différentielles des variations δx, δy, δu, il restera sous le double signe $\iint$ les termes

$$(\Xi\,\delta x + \Upsilon\,\delta y + \Psi\,\delta u)\,dx\,dy,$$

dans lesquels

$$\Xi = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\Upsilon = \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\Psi = \frac{\partial U}{\partial z} - \left(\frac{\partial U'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial U_{,}}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 U''}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 U'_{,}}{\partial x\,\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2 U_{,,}}{\partial y^2}\right) - \ldots,$$

en faisant, pour abréger,

$$U' = \frac{\partial U}{\partial z'}, \qquad U_{,} = \frac{\partial U}{\partial z_{,}},$$

$$U'' = \frac{\partial U}{\partial z''}, \qquad U'_{,} = \frac{\partial U}{\partial z'_{,}}, \qquad U_{,,} = \frac{\partial U}{\partial z_{,,}}, \qquad \ldots,$$

et supposant que les différentielles partielles renfermées entre deux parenthèses représentent les valeurs complètes de ces différences, en y regardant z comme fonction de x, y.

35. Ainsi, à cause de $\delta u = \delta z - \frac{\partial z}{\partial x}\delta x - \frac{\partial z}{\partial y}\delta y$, les termes sous le double signe donneront simplement l'équation

$$\Psi\left(\delta z - \frac{\partial z}{\partial x}\delta x - \frac{\partial z}{\partial y}\delta y\right) = 0;$$

d'où, en égalant séparément à zéro les coefficients de δz, δx, δy, on n'aura que l'équation $\Psi = 0$, comme si l'on n'avait fait varier que la seule variable z.

On voit donc que, dans les questions *de maximis et minimis* relatives à des intégrales doubles, dans lesquelles une des trois variables est fonction des deux autres, il n'y a rigoureusement qu'une seule équation qu'on peut trouver directement, en ne faisant varier par δ que la seule variable qui est censée fonction des deux autres (¹); et cette

(¹) Il est évident *a priori* qu'il suffit de faire varier z; car, quelles que soient deux surfaces infiniment voisines, on peut toujours passer de l'une à l'autre en donnant à z un accroissement qui dépende d'une manière convenable des deux autres coordonnées x et y. Il pourra être plus ou moins commode de considérer celles-ci comme ayant ou n'ayant pas la même valeur aux points correspondants; mais il est évidemment permis de faire l'une ou l'autre hypothèse.

(*J. Bertrand.*)

équation est celle de la surface qui satisfait à la question. C'est ainsi qu'on a trouvé l'équation aux différences partielles de la moindre surface, en faisant $\mathrm{U}=\sqrt{1+(z')^2+(z_,)^2}$; et ce que nous venons de démontrer prouve que cette équation remplit complètement les conditions du problème, quelques variations qu'on attribue aux trois coordonnées de la surface.

36. On peut appliquer les formules des variations que nous venons de trouver à l'équilibre d'un système superficiel de particules dm tirées par des forces quelconques.

En n'ayant égard qu'à la condition de l'invariabilité de dm, on aura d'abord, comme dans l'article 25, l'équation générale de l'équilibre

$$\mathrm{SS}(\delta\Pi\, dm + \lambda\,\delta dm) = 0.$$

Ici la valeur de dm sera de la forme $\mathrm{U}\,dx\,dy$, et l'on aura, par conséquent (art. 34),

$$\delta dm = \left(\delta\mathrm{U} + \mathrm{U}\frac{d\delta x}{dx} + \mathrm{U}\frac{d\delta y}{dy}\right) dx\,dy.$$

Substituant cette valeur, ainsi que celle de $\delta\mathrm{U}$ de l'article 33, dans la formule intégrale $\mathrm{SS}\,\lambda\,\delta dm$, et faisant disparaître, par des intégrations par parties, les différences des variations δx, δy, δu, il ne restera sous le double signe que les termes

$$(\Xi\,\delta x + \Upsilon\,\delta y + \Psi\,\delta u)\,dx\,dy,$$

dans lesquels

$$\Xi = \lambda\left(\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\lambda\mathrm{U}}{\partial x}\right) = -\mathrm{U}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right),$$

$$\Upsilon = \lambda\left(\frac{\partial\mathrm{U}}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial\lambda\mathrm{U}}{\partial y}\right) = -\mathrm{U}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right),$$

$$\Psi = \frac{\partial\mathrm{U}}{\partial z} - \left(\frac{\partial\mathrm{U}'}{\partial x}\right) - \left(\frac{\partial\mathrm{U}_,}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2\mathrm{U}''}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2\mathrm{U}'_,}{\partial x\,\partial y}\right) + \left(\frac{\partial^2\mathrm{U}_{,,}}{\partial y^2}\right) - \ldots,$$

en conservant les valeurs de U', $\mathrm{U}_,$, U'', $\mathrm{U}'_,$, ... de l'article 34.

Ajoutons à ces termes ceux qui proviennent de l'intégrale $\mathrm{SS}\,\delta\Pi\,dm$, savoir, en substituant les valeurs de $\delta\Pi$ et dm,

$$\left(\frac{\partial\Pi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Pi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\delta z\right)\mathrm{U}\,dx\,dy,$$

et remettons pour δu sa valeur $\delta z - \frac{\partial z}{\partial x}\delta x - \frac{\partial z}{\partial y}\delta y$ (art. 33); l'équation générale de l'équilibre contiendra, sous le double signe SS, les termes suivants, ordonnés par rapport aux variations δx, δy, δz,

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\left[\frac{\partial\Pi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)\right]\mathrm{U} - \Psi\frac{\partial z}{\partial x}\right\}\delta x \\ + \left\{\left[\frac{\partial\Pi}{\partial y} - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)\right]\mathrm{U} - \Psi\frac{\partial z}{\partial y}\right\}\delta y \\ + \left(\frac{\partial\Pi}{\partial z}\mathrm{U} + \Psi\right)\delta z \end{array}\right\} dx\,dy;$$

d'où l'on tire les trois équations

$$\left[\frac{\partial\Pi}{\partial x} - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)\right]\mathrm{U} - \Psi\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\left[\frac{\partial\Pi}{\partial y} - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)\right]\mathrm{U} - \Psi\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial z}\mathrm{U} + \Psi = 0.$$

La dernière donne $\Psi = -\mathrm{U}\frac{\partial\Pi}{\partial z}$, et, cette valeur étant substituée dans les deux autres, on a, après avoir divisé par U,

$$\frac{\partial\Pi}{\partial x} + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial y} + \frac{\partial\Pi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} - \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) = 0.$$

La première donne $\lambda = \Pi + \text{fonct.}\,y$; la seconde donne $\lambda = \Pi + \text{fonct.}\,x$; donc on aura

$$\lambda = \Pi + a,$$

a étant une constante. Substituant cette valeur dans l'équation générale de l'équilibre, elle deviendra

$$\iint [\delta(\Pi\, dm) + a\,\delta dm] = 0,$$

savoir

$$\delta \iint \Pi\, dm + a\,\delta \iint dm = 0,$$

équation du maximum ou minimum de la formule intégrale $\iint \Pi\, dm$ parmi toutes celles dans lesquelles la valeur de la formule $\iint dm$ est la même.

Ainsi voilà le problème de Mécanique ([1]) réduit à une simple question *de maximis et minimis*, dont la solution ne dépend que de la variation de la seule coordonnée z, qui est supposée fonction de x, y (art. 35).

On pourra étendre cette théorie aux formules intégrales triples et en déduire des conclusions semblables.

([1]) Lagrange ne définit pas d'une manière complète le système superficiel de molécules auquel il applique son analyse. Si l'on a en vue une surface flexible et inextensible, non seulement les éléments superficiels restent invariables, mais aussi les éléments linéaires. Lagrange ne tient pas compte de l'invariabilité des éléments linéaires, et les équations qu'il obtient ne peuvent donner, par conséquent, la solution complète du problème. La question a été reprise dans ces derniers temps par M. Lecornu dans un Mémoire *Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles* (*Journal de l'École Polytechnique*, XLVIII^e Cahier) et par M. Beltrami. Voir le Mémoire *Sull' equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili* (*Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna*, 4^e série, t. III), où M. Beltrami résout la question, précisément par l'emploi du principe des vitesses virtuelles.

(*G. D.*)

SECTION CINQUIÈME.

SOLUTION DE DIFFÉRENTS PROBLÈMES DE STATIQUE.

Nous allons présentement montrer l'usage de nos méthodes dans différents problèmes sur l'équilibre des corps; on verra par l'uniformité et la rapidité des solutions combien ces méthodes sont supérieures à celles que l'on avait employées jusqu'ici dans la Statique.

CHAPITRE I.

DE L'ÉQUILIBRE DE PLUSIEURS FORCES APPLIQUÉES À UN MÊME POINT, DE LA COMPOSITION ET DE LA DÉCOMPOSITION DES FORCES.

1. Soit proposé de trouver les lois de l'équilibre d'autant de forces qu'on voudra, P, Q, R, ..., toutes appliquées à un même point et dirigées vers des points donnés.

Nommant p, q, r, ... les distances rectilignes entre le point commun d'application de ces forces et leurs points de tendance, on aura la formule

$$P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots$$

pour la somme des moments de toutes les forces, laquelle doit être nulle dans l'état d'équilibre.

Soient x, y, z les trois coordonnées rectangles du point auquel toutes les forces sont appliquées; et soient de même a, b, c les coordonnées rectangles du point auquel tend la force P; f, g, h celles du point auquel tend la force Q; l, m, n celles du point auquel tend la force R, et ainsi des autres; ces coordonnées étant toutes rapportées aux mêmes axes fixes dans l'espace. On aura évidemment

$$p=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$
$$q=\sqrt{(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2},$$
$$r=\sqrt{(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et la quantité $P\,dp+Q\,dq+R\,dr+\ldots$ se transformera en celle-ci

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz,$$

dans laquelle on aura

$$X=\frac{x-a}{p}P+\frac{x-f}{q}Q+\frac{x-l}{r}R+\ldots,$$
$$Y=\frac{y-b}{p}P+\frac{y-g}{q}Q+\frac{y-m}{r}R+\ldots,$$
$$Z=\frac{z-c}{p}P+\frac{z-h}{q}Q+\frac{z-n}{r}R+\ldots.$$

Il n'est pas inutile de remarquer que, dans ces expressions, les quantités $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ sont égales aux cosinus des angles que la ligne p, c'est-à-dire la direction de la force P, fait avec les axes des x, y, z; que, de même, $\frac{x-f}{q}$, $\frac{y-g}{q}$, $\frac{z-h}{q}$ sont les cosinus des angles que la direction de la force Q fait avec les mêmes axes; et ainsi de suite (Sect. II, art. 7).

§ I. — *De l'équilibre d'un corps ou point tiré par plusieurs forces.*

2. Cela posé, supposons en premier lieu que le corps ou point auquel les forces P, Q, R, ... sont appliquées soit entièrement libre; il n'y aura alors aucune équation de condition entre les coordonnées x, y, z, et la quantité $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$ devra être nulle indépendamment des valeurs de dx, dy, dz (Sect. II, art. 10); ce qui donnera sur-le-champ ces trois équations particulières

$$X=0,\qquad Y=0,\qquad Z=0.$$

Ce sont les équations qui renferment les lois de l'équilibre de tant de forces qu'on voudra, concourantes à un même point.

3. Si, dans les expressions de X, Y, Z, on fait $P=p$, $Q=q$, $R=r$, ..., ce qui est permis, puisqu'il est indifférent à quels points pris dans les directions des forces elles soient supposées tendre, on aura ces équations

$$x-a+x-f+x-l+\ldots=0,$$
$$y-b+y-g+y-m+\ldots=0,$$
$$z-c+z-h+z-n+\ldots=0;$$

d'où l'on tire, en supposant que le nombre des forces P, Q, R, ... soit μ,

$$x=\frac{a+f+l+\ldots}{\mu},$$
$$y=\frac{b+g+m+\ldots}{\mu},$$
$$z=\frac{c+h+n+\ldots}{\mu};$$

et ces expressions de x, y, z font voir que le point auquel sont appliquées les forces est dans le centre de gravité des points auxquels ces forces tendent.

De là résulte le théorème de Leibnitz, que, si tant de puissances qu'on voudra sont en équilibre sur un point et qu'on tire de ce point des droites qui représentent tant la quantité que la direction de chaque puissance, le point dont il s'agit sera le centre de gravité de tous les points auxquels ces lignes seront terminées.

Si donc il n'y a que quatre puissances et qu'on imagine une pyramide dont les quatre angles soient aux extrémités des droites qui représentent les puissances, il y aura équilibre entre ces quatre puissances lorsque le point sur lequel elles agissent sera dans le centre de gravité de la pyramide; car on sait, par la Géométrie, que le centre de gravité de toute la pyramide est le même que celui de quatre corps égaux qui seraient placés aux quatre coins de la pyramide. Ce dernier théorème est dû à Roberval.

4. Supposons, en second lieu, que le corps ou point sur lequel agissent les forces P, Q, R, ... ne soit pas tout à fait libre, mais qu'il soit contraint de se mouvoir sur une surface ou sur une ligne donnée; on aura alors, entre les coordonnées x, y, z, une ou deux équations de condition, qui ne seront autre chose que les équations mêmes de la surface ou de la ligne dont il s'agit.

Soit donc

$$L = 0$$

l'équation de la surface sur laquelle le corps ne peut que glisser; on ajoutera à la somme des moments des forces $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ le terme $\lambda\,dL$ (Sect. IV, art. 3), et l'on aura, pour l'équation générale de l'équilibre,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \lambda\,dL = 0,$$

λ étant une quantité indéterminée.

Or, L étant une fonction connue de x, y, z, on aura, par la différentiation,

$$dL = \frac{\partial L}{\partial x}dx + \frac{\partial L}{\partial y}dy + \frac{\partial L}{\partial z}dz;$$

donc, substituant et égalant ensuite séparément à zéro la somme des termes multipliés par chacune des différences dx, dy, dz, on aura ces trois équations particulières de l'équilibre

$$X + \lambda\frac{\partial L}{\partial x} = 0,$$

$$Y + \lambda\frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

$$Z + \lambda\frac{\partial L}{\partial z} = 0;$$

d'où, chassant l'indéterminée λ, on aura ces deux-ci

$$Y\frac{\partial L}{\partial x} - X\frac{\partial L}{\partial y} = 0, \qquad Z\frac{\partial L}{\partial x} - X\frac{\partial L}{\partial z} = 0,$$

lesquelles renferment, par conséquent, les conditions cherchées de l'équilibre du corps sur la surface proposée.

5. Si l'on applique maintenant ici la théorie donnée dans l'article 5 de la Section IV, on en conclura que la surface doit opposer au corps une résistance égale à

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z}\right)^2},$$

et dirigée suivant la perpendiculaire à la surface qui aurait pour équation $dL = 0$, c'est-à-dire perpendiculairement à la même surface sur laquelle le corps est posé; et, comme on a

$$\lambda\frac{\partial L}{\partial x} = -X, \qquad \lambda\frac{\partial L}{\partial y} = -Y, \qquad \lambda\frac{\partial L}{\partial z} = -Z,$$

il s'ensuit que la pression du corps sur la surface (pression qui doit être égale et directement contraire à la résistance de la surface) sera exprimée par $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ et agira perpendiculairement à la même surface; c'est uniquement à cette condition que se réduisent les deux équations trouvées ci-dessus pour l'équilibre du corps, comme on peut s'en assurer par la méthode de la composition des forces.

6. Au reste, dans le cas d'un seul corps tiré par des puissances données, on peut trouver encore plus simplement les conditions de l'équilibre, en substituant immédiatement dans l'équation

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0,$$

à la place de la différentielle dz, sa valeur

$$-\frac{\dfrac{\partial L}{\partial x}dx + \dfrac{\partial L}{\partial y}dy}{\dfrac{\partial L}{\partial z}}$$

tirée de l'équation différentielle de la surface donnée sur laquelle le corps peut glisser et égalant ensuite séparément à zéro les coefficients des différentielles dx et dy qui demeurent indéterminées, suivant la méthode générale de l'article 10 de la Section II.

On aura ainsi, sur-le-champ, les deux équations

$$\mathrm{X} - \mathrm{Z}\,\frac{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x}}{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z}} = 0, \qquad \mathrm{Y} - \mathrm{Z}\,\frac{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y}}{\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial z}} = 0,$$

qui reviennent à celles que l'on a trouvées plus haut.

Pareillement, si le corps était assujetti à se mouvoir sur une ligne de figure donnée et déterminée par les deux équations différentielles $dy = p\,dx$, $dz = q\,dx$, il n'y aurait qu'à substituer ces valeurs de dy et dz dans $\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = 0$, et l'on aurait, en divisant par dx,

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y}p + \mathrm{Z}q = 0,$$

pour la condition de l'équilibre.

Mais, dans tous les cas où il y aurait plusieurs corps en équilibre, la méthode des coefficients indéterminés, exposée dans la Section précédente, aura toujours l'avantage, tant du côté de la facilité que de celui de la simplicité et de l'uniformité du calcul.

§ II. — *De la composition et de la décomposition des forces.*

7. L'équation identique

$$\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \ldots = \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz,$$

trouvée dans l'article 1, montre que le système des forces P, Q, R, ... dirigées suivant les lignes $p, q, r, \ldots$ est équivalent au système des trois forces X, Y, Z dirigées suivant les lignes x, y, z (Sect. II, art. 15). Ainsi les quantités X, Y, Z donnent les valeurs des forces P, Q, R, ..., décomposées suivant les trois coordonnées rectangles x, y, z et tendantes à diminuer ces coordonnées, comme les forces P, Q, R, ... sont supposées tendre à diminuer les lignes $p, q, r, \ldots$.

8. En général, si des forces quelconques P, Q, R, ..., dirigées suivant les lignes $p, q, r, \ldots$, agissent sur un même point, on peut toujours réduire toutes ces forces à trois autres dirigées suivant les lignes ξ, ψ, φ, pourvu que ces trois lignes ne soient pas toutes dans le même plan. Car, comme trois lignes placées dans différents plans suffisent pour déterminer la position d'un point quelconque dans l'espace, on pourra toujours exprimer les valeurs des lignes $p, q, r, \ldots$ en fonctions des trois quantités ξ, ψ, φ, et, par le théorème de l'article 15 de la Section II, les forces P, Q, R, ... seront équivalentes [1] aux trois forces Ξ, Ψ, Φ exprimées par les formules

$$\Xi = \mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial \xi} + \mathrm{Q}\frac{\partial q}{\partial \xi} + \mathrm{R}\frac{\partial r}{\partial \xi} + \ldots,$$

$$\Psi = \mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial \psi} + \mathrm{Q}\frac{\partial q}{\partial \psi} + \mathrm{R}\frac{\partial r}{\partial \psi} + \ldots,$$

$$\Phi = \mathrm{P}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \mathrm{Q}\frac{\partial q}{\partial \varphi} + \mathrm{R}\frac{\partial r}{\partial \varphi} + \ldots,$$

et dirigées suivant les lignes ξ, ψ, φ, ou seulement suivant les éléments $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$, si quelques-unes de ces lignes étaient circulaires.

Ces formules peuvent être d'une grande utilité dans plusieurs occasions, et surtout lorsqu'il s'agit de trouver les résultantes d'une infinité de forces qui agissent sur un même point, comme l'attraction d'un corps de figure quelconque.

9. Soit m la masse d'un corps dont chacun des éléments dm soit regardé comme le centre d'une force P proportionnelle à dm et à une fonction $f(p)$ de la distance p; en faisant $\int f(p)\,dp = \mathrm{F}(p)$, l'élément dm donnera, dans l'expression de Ξ, le terme $\frac{\partial \mathrm{F}(p)}{\partial \xi}\,d\mathrm{m}$, dont l'intégrale relative à toute la masse m sera le résultat de l'attraction de cette masse; et, comme cette intégration est indépendante de la diffé-

(1) Nous avons remarqué plus haut que ce théorème est soumis à des restrictions. La même observation s'applique à la conclusion qu'on en déduit ici. *Voir* une Note de M. Poinsot à la fin du Volume. (*J. Bertrand.*)

rentiation relative à ξ, on pourra donner à l'intégrale dont il s'agit la forme $\frac{\partial}{\partial\xi}\mathsf{S}\,\mathrm{F}(p)\,d\mathrm{m}$, de sorte qu'en faisant

$$\mathsf{S}\,\mathrm{F}(p)\,d\mathrm{m}=\Sigma,$$

on aura

$$\Xi=\frac{\partial\Sigma}{\partial\xi},\qquad \Psi=\frac{\partial\Sigma}{\partial\psi},\qquad \Phi=\frac{\partial\Sigma}{\partial\varphi},$$

et il ne s'agira plus que de substituer au lieu de p, dans la fonction $\mathrm{F}(p)$, sa valeur exprimée en fonction des coordonnées qui déterminent la position de chaque particule $d\mathrm{m}$ dans l'espace et des coordonnées ξ, ψ, φ du point attiré, et d'exécuter ensuite séparément l'intégration relative aux premières et les différentiations relatives aux dernières.

Dans le cas de la nature, on a $f(p)=\frac{1}{p^2}$; donc $\mathrm{F}(p)=-\frac{1}{p}$, et, par conséquent, $\Sigma=-\mathsf{S}\frac{d\mathrm{m}}{p}$.

Soient a, b, c les coordonnées de chaque particule $d\mathrm{m}$ du corps; on aura, en supposant la densité de cette particule exprimée par Γ fonction de a, b, c,

$$d\mathrm{m}=\Gamma\,da\,db\,dc;$$

donc

$$\Sigma=-\mathsf{S}\frac{\Gamma\,da\,db\,dc}{p}.$$

Or, x, y, z étant les coordonnées du point attiré, on a (art. 1)

$$p=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2};$$

donc

$$\Sigma=-\mathsf{S}\frac{\Gamma\,da\,db\,dc}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}.$$

10. Le cas le plus simple est celui où le corps attirant est une sphère. Dans ce cas, en faisant $\Gamma=1$ et supposant le centre de la sphère dans l'origine des coordonnées x, y, z du point attiré, on a

$$\Sigma=-\frac{\mathrm{m}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

m étant la solidité de la sphère, qu'on sait être égale à $\frac{4\pi\alpha^3}{3}$, en prenant α pour le rayon et π pour le rapport de la circonférence au diamètre.

Si la densité Γ était variable dans l'intérieur de la sphère, en la supposant fonction de α, on ferait $\mathrm{m}=\mathsf{S}\,\Gamma\,d\frac{4\pi\alpha^3}{3}$.

On peut encore avoir la valeur de Σ lorsque le corps attirant est un sphéroïde elliptique, dont la surface est représentée par l'équation

$$\frac{a^2}{\mathrm{A}^2}+\frac{b^2}{\mathrm{B}^2}+\frac{c^2}{\mathrm{C}^2}=1,$$

A, B, C étant les demi-axes des trois sections principales, et a, b, c les coordonnées rectangles de la surface prises sur les trois axes et ayant leur origine dans l'intersection commune des axes, qui est le centre du sphéroïde. Mais l'expression générale de cette valeur dépend d'une formule intégrale assez compliquée et par laquelle il est impossible d'avoir Σ en fonction de x, y, z.

Cependant, si l'on suppose que le sphéroïde soit peu différent de la sphère ou que la distance du point attiré au centre du sphéroïde soit fort grande par rapport à ses axes, on peut exprimer la valeur générale de Σ par une série convergente délivrée de toute intégration. M. Laplace a donné, dans sa *Théorie des attractions des sphéroïdes* (1), une très belle formule par laquelle on peut former successivement tous les termes de la série et qui montre en même temps que la valeur de $\frac{\Sigma}{\mathrm{m}}$, m étant la solidité du sphéroïde, ne dépend que des quantités $\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2$ et $\mathrm{C}^2-\mathrm{A}^2$, qui sont les carrés des excentricités des deux sections qui passent par le même demi-axe A.

J'ai trouvé qu'en partant de ce résultat et faisant usage du théorème que j'ai donné dans les *Mémoires de Berlin* de 1792-93 (2), on pouvait

(1) Voir *Mécanique céleste*, t. II, Livre III, Chap. I et II. (*J. Bertrand.*)
(2) *Œuvres de Lagrange*, t. V, p. 645.

construire tout d'un coup la série dont il s'agit, par le seul développement du radical

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2by-2cz+b^2+c^2}}$$

suivant les puissances de b et c, en ne conservant que les termes qui contiennent des puissances paires de b et c et transformant chacun de ces termes, comme $\mathrm{H}b^{2m}c^{2n}$, en

$$\frac{[1.3.5\ldots(2m-1)][1.3.5\ldots(2n-1)]\,\mathrm{H}(\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2)^m(\mathrm{C}^2-\mathrm{A}^2)^n}{5.7.9\ldots(2m+2n+3)}\,\mathrm{m},$$

m étant la solidité du sphéroïde, qui est exprimée par $\frac{4\pi}{3}$ ABC.

Ainsi, pour avoir tout de suite la série ordonnée suivant les puissances de y et z, on fera

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

et l'on développera d'abord le radical $(r^2-2by-2cz+b^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$ suivant les puissances de y, z; en ne retenant que les puissances paires, on aura

$$\frac{1}{(r^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{3}{2}\,\frac{b^2y^2+c^2z^2}{(r^2+b^2+c^2)^{\frac{5}{2}}}+\frac{5.7}{8}\,\frac{b^4y^4+6b^2c^2y^2z^2+c^4z^4}{(r^2+b^2+c^2)^{\frac{9}{2}}}+\ldots.$$

On développera ensuite les radicaux $(r^2+b^2+c^2)^{-\frac{1}{2}}$, ... suivant les puissances de b^2, c^2, et l'on transformera ces puissances en puissances de $\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2$, $\mathrm{C}^2-\mathrm{A}^2$ par la formule donnée ci-dessus. De cette manière, si l'on fait, pour plus de simplicité,

$$\mathrm{B}^2-\mathrm{A}^2=e^2,\qquad \mathrm{C}^2-\mathrm{A}^2=i^2,$$

e et i étant les excentricités des deux ellipses formées par les sections qui passent par les demi-axes A, B et A, C, on aura pour Σ une expression en série de cette forme

$$-\,\mathrm{m}(\mathrm{R}+\mathrm{T}y^2+\mathrm{V}z^2+\mathrm{X}y^4+\mathrm{Y}y^2z^2+\mathrm{Z}z^4+\ldots),$$

dans laquelle

$$\mathrm{R}=\frac{1}{r}-\frac{e^2+i^2}{2.5r^3}+\frac{9(e^4+i^4)+6e^2i^2}{8.5.7r^5}+\ldots,$$

$$\mathrm{T}=\frac{3e^2}{2.5r^5}-\frac{9e^4+3e^2i^2}{4.7r^7}+\ldots,$$

$$\mathrm{V}=\frac{3i^2}{2.5r^5}-\frac{9i^4+3e^2i^2}{4.7r^7}+\ldots,$$

$$\mathrm{X}=\frac{3e^4}{8r^9}+\ldots,$$

$$\mathrm{Y}=\frac{6e^2i^2}{8r^9}+\ldots,$$

$$\mathrm{Z}=\frac{3i^4}{8r^9}+\ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On n'a poussé l'approximation que jusqu'aux quatrièmes dimensions de e et de i; mais il est facile de la porter aussi loin qu'on voudra.

Si le sphéroïde était composé de couches elliptiques de différentes densités, alors, en faisant varier dans l'expression de Σ les quantités A, B, C et par conséquent aussi e et i, on aurait $\mathrm{S}\,\Gamma\, d\Sigma$ pour la valeur de Σ relative à ce sphéroïde.

Ayant ainsi la valeur de Σ en fonction des coordonnées rectangles x, y, z du point attiré, on aura immédiatement, par la différentiation, les forces $\frac{\partial\Sigma}{\partial x}$, $\frac{\partial\Sigma}{\partial y}$, $\frac{\partial\Sigma}{\partial z}$ suivant ces coordonnées, dues à l'attraction totale du sphéroïde.

Et si, au lieu des coordonnées x, y et z, on prend le rayon r avec deux angles μ et ν tels que l'on ait

$$x=r\cos\mu,\qquad y=r\sin\mu\sin\nu,\qquad z=r\sin\mu\cos\nu,$$

on aura l'attraction du sphéroïde décomposée, dans le sens du rayon r qui joint le point attiré et le centre du sphéroïde, perpendiculairement à ce rayon dans le plan qui passe par le demi-axe A, et perpendiculairement au même rayon dans un plan parallèle à celui qui passe par les demi-axes B et C, par les trois différentielles partielles

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial r}, \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial\Sigma}{\partial\mu}, \qquad \frac{1}{r\sin\mu}\frac{\partial\Sigma}{\partial\nu}.$$

Ces formules sont surtout utiles dans la théorie de la figure de la Terre.

CHAPITRE II.

DE L'ÉQUILIBRE DE PLUSIEURS FORCES APPLIQUÉES A UN SYSTÈME DE CORPS, CONSIDÉRÉS COMME DES POINTS ET LIÉS ENTRE EUX PAR DES FILS OU PAR DES VERGES.

11. Quelles que soient les forces qui agissent sur chaque corps, nous avons vu ci-dessus (art. 7) comment on peut toujours les réduire à trois, X, Y, Z, dirigées suivant les trois coordonnées rectangles x, y, z du même corps et tendantes à diminuer ces coordonnées.

Nous supposerons donc, pour plus de simplicité, ici et dans la suite, que toutes les forces extérieures qui agissent sur un même point soient réduites à ces trois, X, Y, Z. Ainsi la somme des moments de ces forces sera exprimée, en général, par la formule

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz;$$

par conséquent, la somme totale des moments de toutes les forces du système sera exprimée par la somme d'autant de formules semblables qu'il y aura de corps ou points mobiles, en marquant par un, deux, trois, ... traits les quantités qui se rapportent aux différents corps que nous nommerons premier, deuxième, troisième, ...

De cette manière, on aura donc, pour la somme des moments des forces qui agissent sur trois ou sur un plus grand nombre de corps, la quantité

$$\begin{gathered} X'\,dx' + Y'\,dy' + Z'\,dz' + X''\,dx'' + Y''\,dy'' + Z''\,dz'' \\ + X'''\,dx''' + Y'''\,dy''' + Z'''\,dz''' + \ldots; \end{gathered}$$

et il ne s'agira plus que de chercher les équations de condition

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad N = 0, \qquad \ldots,$$

résultantes de la nature du problème.

Ayant L, M, N, ... ou seulement leurs différentielles en fonctions de x', y', z', x'', ... et prenant des coefficients indéterminés λ, μ, ν, ..., on ajoutera à la quantité précédente les termes

$$\lambda\,dL + \mu\,dM + \nu\,dN + \ldots,$$

et l'on égalera ensuite séparément à zéro les membres affectés de chacune des différences dx', dy', dz', dx'', ... (Sect. IV, art. 5).

§ I. — *De l'équilibre de trois ou plusieurs corps attachés à un fil inextensible ou extensible et susceptible de contraction.*

12. Considérons premièrement trois corps attachés fixement à un fil inextensible; les conditions du problème sont que les distances entre le premier et le deuxième corps, et entre le deuxième et le troisième, soient invariables, ces distances étant les longueurs des portions de fil interceptées entre les corps.

Nommant f la première de ces distances et g la seconde, on aura

$$df = 0, \qquad dg = 0,$$

pour les équations de condition; donc

$$dL = df, \qquad dM = dg,$$

et l'équation générale de l'équilibre des trois corps sera

$$\begin{gathered} X'\,dx' + Y'\,dy' + Z'\,dz' + X''\,dx'' + Y''\,dy'' + Z''\,dz'' \\ + X'''\,dx''' + Y'''\,dy''' + Z'''\,dz''' + \lambda\,df + \mu\,dg = 0. \end{gathered}$$

Or il est visible qu'on aura

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}, \\ g &= \sqrt{(x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2 + (z''' - z'')^2}; \end{aligned}$$

donc, en différentiant,

$$df = \frac{(x'' - x')(dx'' - dx') + (y'' - y')(dy'' - dy') + (z'' - z')(dz'' - dz')}{f},$$

$$dg = \frac{(x''' - x'')(dx''' - dx'') + (y''' - y'')(dy''' - dy'') + (z''' - z'')(dz''' - dz'')}{g};$$

ces valeurs étant substituées, on aura les neuf équations suivantes pour les conditions de l'équilibre du fil

$$
\begin{aligned}
&X' - \lambda \frac{x'' - x'}{f} = 0,\\
&Y' - \lambda \frac{y'' - y'}{f} = 0,\\
&Z' - \lambda \frac{z'' - z'}{f} = 0;\\
&X'' + \lambda \frac{x'' - x'}{f} - \mu \frac{x''' - x''}{g} = 0,\\
&Y'' + \lambda \frac{y'' - y'}{f} - \mu \frac{y''' - y''}{g} = 0,\\
&Z'' + \lambda \frac{z'' - z'}{f} - \mu \frac{z''' - z''}{g} = 0;\\
&X''' + \mu \frac{x''' - x''}{g} = 0,\\
&Y''' + \mu \frac{y''' - y''}{g} = 0,\\
&Z''' + \mu \frac{z''' - z''}{g} = 0;
\end{aligned}
$$

et il n'y aura plus qu'à éliminer de ces équations les deux inconnues λ et μ; ce qui peut se faire de plusieurs manières, lesquelles fourniront aussi des équations différentes, ou présentées différemment, pour l'équilibre des trois corps attachés au fil : nous choisirons celle qui paraîtra la plus simple.

On voit d'abord que, si l'on ajoute respectivement les trois premières équations aux trois suivantes et aux trois dernières, on obtient ces trois-ci, délivrées des inconnues λ et μ,

$$
\begin{aligned}
&X' + X'' + X''' = 0,\\
&Y' + Y'' + Y''' = 0,\\
&Z' + Z'' + Z''' = 0,
\end{aligned}
$$

lesquelles montrent que la somme de toutes les forces parallèles à chacun des trois axes des coordonnées doit être nulle, et ne sont

qu'un cas particulier des équations générales trouvées dans la Section III, § I.

Il ne reste donc plus qu'à trouver quatre autres équations; pour cela, faisant abstraction des trois premières, j'ajoute respectivement les trois du milieu aux trois dernières; j'ai celles-ci, où μ ne se trouve plus,

$$
\begin{aligned}
&X'' + X''' + \lambda \frac{x'' - x'}{f} = 0,\\
&Y'' + Y''' + \lambda \frac{y'' - y'}{f} = 0,\\
&Z'' + Z''' + \lambda \frac{z'' - z'}{f} = 0,
\end{aligned}
$$

et qui, par l'élimination de λ, donnent les deux suivantes :

$$
\begin{aligned}
&Y'' + Y''' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(X'' + X''') = 0,\\
&Z'' + Z''' - \frac{z'' - z'}{x'' - x'}(X'' + X''') = 0.
\end{aligned}
$$

Enfin, considérant séparément les trois dernières équations qui contiennent μ seul et éliminant μ, on aura ces deux autres-ci

$$
\begin{aligned}
&Y''' - \frac{y''' - y''}{x''' - x''} X''' = 0,\\
&Z''' - \frac{z''' - z''}{x''' - x''} X''' = 0.
\end{aligned}
$$

Ces sept équations [1] renferment les conditions nécessaires pour l'équilibre des trois corps et, étant jointes aux équations de condition f et g égales à des quantités données, suffisent pour déterminer la position de chacun d'eux dans l'espace.

[1] Il est à peine besoin de faire observer que ces sept équations sont, en quelque sorte, évidentes *a priori*, et qu'on pourrait les écrire sans recourir au principe des vitesses virtuelles. Mais le but de Lagrange n'est pas de traiter chaque question particulière de la manière la plus simple : il veut seulement montrer comment on peut se dispenser d'un raisonnement spécial à chaque cas, et réduire la Statique à un simple mécanisme de calcul. Lagrange, du reste, n'a jamais dit ni prétendu dire qu'il fût convenable d'aborder ainsi l'étude de la Mécanique. (*J. Bertrand.*)

13. Si le fil, supposé toujours inextensible, était chargé de quatre corps, tirés respectivement par les forces $X', Y', Z'; X'', Y'', Z''; X''', \ldots$, suivant les directions des trois axes des coordonnées rectangles, on trouverait, par des procédés semblables qu'il me parait inutile de répéter, les neuf équations suivantes pour l'équilibre de ces quatre corps :

$$X' + X'' + X''' + X^{\text{iv}} = 0,$$
$$Y' + Y'' + Y''' + Y^{\text{iv}} = 0,$$
$$Z' + Z'' + Z''' + Z^{\text{iv}} = 0,$$
$$Y'' + Y''' + Y^{\text{iv}} - \frac{y'' - y'}{x'' - x'}(X'' + X''' + X^{\text{iv}}) = 0,$$
$$Z'' + Z''' + Z^{\text{iv}} - \frac{z'' - z'}{x'' - x'}(X'' + X''' + X^{\text{iv}}) = 0,$$
$$Y''' + Y^{\text{iv}} - \frac{y''' - y''}{x''' - x''}(X''' + X^{\text{iv}}) = 0,$$
$$Z''' + Z^{\text{iv}} - \frac{z''' - z''}{x''' - x''}(X''' + X^{\text{iv}}) = 0,$$
$$Y^{\text{iv}} - \frac{y^{\text{iv}} - y'''}{x^{\text{iv}} - x'''} X^{\text{iv}} = 0,$$
$$Z^{\text{iv}} - \frac{z^{\text{iv}} - z'''}{x^{\text{iv}} - x'''} X^{\text{iv}} = 0.$$

Il est facile maintenant d'étendre cette solution à tel nombre de corps qu'on voudra, et même au cas de la funiculaire ou chainette; mais nous traiterons ce cas en particulier, par la méthode exposée dans le § II de la Section précédente.

14. On aurait une solution plus simple à quelques égards, si l'on introduisait d'abord dans le calcul l'invariabilité des distances $f, g, \ldots$.

Ainsi, en se bornant au cas de trois corps et nommant ψ, ψ' les angles que les lignes f, g font avec le plan des x, y, et φ, φ' les angles que les projections de ces lignes sur le même plan font avec l'axe des x, on aura

$$x'' - x' = f\cos\varphi\cos\psi, \qquad y'' - y' = f\sin\varphi\cos\psi, \qquad z'' - z' = f\sin\psi,$$
$$x''' - x'' = g\cos\varphi'\cos\psi', \qquad y''' - y'' = g\sin\varphi'\cos\psi', \qquad z''' - z'' = g\sin\psi'.$$

Substituant les valeurs de $x'', y'', z'', x''', y''', z'''$ tirées de ces équations dans la formule générale de l'équilibre de trois corps

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' \\ + X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' = 0,$$

en faisant varier simplement les quantités $x', y', z', \varphi, \varphi', \psi, \psi'$, dont les variations demeurent indéterminées, et égalant séparément à zéro les quantités multipliées par chacune de ces variations, on aura les sept équations

$$X' + X'' + X''' = 0,$$
$$Y' + Y'' + Y''' = 0,$$
$$Z' + Z'' + Z''' = 0,$$
$$(X'' + X''')\sin\varphi - (Y'' + Y''')\cos\varphi = 0,$$
$$X'''\sin\varphi' - Y'''\cos\varphi' = 0,$$
$$(X'' + X''')\cos\varphi\sin\psi + (Y'' + Y''')\sin\varphi\sin\psi - (Z'' + Z''')\cos\psi = 0,$$
$$X'''\cos\varphi'\sin\psi' + Y'''\sin\varphi'\sin\psi' - Z'''\cos\psi' = 0,$$

dont les cinq premières coïncident immédiatement avec celles qu'on a trouvées dans l'article 12 par l'élimination des indéterminées λ et μ, et dont les deux dernières s'y réduisent facilement, en éliminant les Y'', Y''' par le moyen de la quatrième et de la cinquième.

Mais, si de cette manière on parvient plus directement aux équations finales, c'est qu'on a employé une transformation préliminaire des variables, laquelle renferme les équations de condition; au lieu qu'en employant immédiatement les équations avec des coefficients indéterminés, comme dans l'article 12, la solution du problème est réduite à un pur mécanisme de calcul. De plus, on a, par ces coefficients, la valeur des forces que les verges f et g doivent soutenir par leur résistance à s'allonger, comme on le verra ci-après.

15. Si l'on voulait que le premier corps fût fixe, alors les différences dx', dy', dz' seraient nulles et les termes affectés de ces diffé-

rences disparaîtraient d'eux-mêmes dans l'équation générale de l'équilibre. Ainsi les trois équations de l'article **12**, savoir

$$X' - \lambda \frac{x'' - x'}{f} = 0, \qquad Y' - \lambda \frac{y'' - y'}{f} = 0, \qquad Z' - \lambda \frac{z'' - z'}{f} = 0,$$

n'auraient point lieu; donc les équations

$$X' + X'' + X''' = 0, \qquad Y' + Y'' + Y''' = 0, \qquad Z' + Z'' + Z''' = 0$$

n'auraient pas lieu non plus, mais toutes les autres demeureraient les mêmes. Ce cas est, comme l'on voit, celui où le fil serait attaché fixement par une de ses extrémités.

Et, si le fil était attaché par ses deux extrémités, alors on aurait non seulement $dx' = 0$, $dy' = 0$, $dz' = 0$, mais aussi $dx''' = 0$, $dy''' = 0$, $dz''' = 0$; et les termes affectés de ces six différences dans l'équation générale de l'équilibre disparaîtraient et feraient, par conséquent, disparaître aussi les six équations particulières qui en dépendent.

En général, si les deux extrémités du fil n'étaient pas tout à fait libres, mais qu'elles fussent attachées à des points mobiles suivant une loi donnée, cette loi, exprimée analytiquement, donnerait une ou plusieurs équations entre les différences dx', dy', dz', qui se rapportent au premier corps, et les différences dx''', dy''', dz''', qui se rapportent au dernier; et il faudrait ajouter ces équations, multipliées chacune par un nouveau coefficient indéterminé, à l'équation générale de l'équilibre trouvée plus haut; ou bien on substituerait dans cette équation générale la valeur d'une ou de plusieurs de ces différences tirée des équations dont il s'agit, et l'on égalerait ensuite à zéro le coefficient de chacune de celles qui restent, ainsi qu'on l'a fait ci-dessus (art. 14). Comme cela n'a aucune difficulté, nous ne nous y arrêterons pas.

16. Pour connaître les forces qui proviennent de la réaction du fil sur les différents corps, il n'y aura qu'à faire usage de la méthode donnée pour cet objet dans la Section précédente (art. 5).

On considérera donc que l'on a, dans le cas présent,

$$dL = df = \frac{(x'' - x')(dx'' - dx') + (y'' - y')(dy'' - dy') + (z'' - z')(dz'' - dz')}{f},$$

$$dM = dg = \frac{(x''' - x'')(dx''' - dx'') + (y''' - y'')(dy''' - dy'') + (z''' - z'')(dz''' - dz'')}{g},$$

....

Donc :

1° On aura, par rapport au premier corps dont les coordonnées sont x', y', z',

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = -\frac{x'' - x'}{f}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y'} = -\frac{y'' - y'}{f}, \qquad \frac{\partial L}{\partial z'} = -\frac{z'' - z'}{f};$$

donc

$$\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z'}\right)^2} = \frac{\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}}{f} = 1.$$

Ainsi le premier corps recevra par l'action des autres une force égale à λ et dont la direction sera perpendiculaire à la surface représentée par l'équation $dL = df = 0$, en y faisant varier simplement x', y', z'; or il est visible que cette surface n'est autre chose qu'une sphère dont le rayon est f et dont le centre répond aux coordonnées x'', y'', z''; par conséquent, la force λ sera dirigée suivant ce même rayon, c'est-à-dire le long du fil qui joint le premier et le second corps.

2° On aura de même, par rapport au second corps dont les coordonnées sont x'', y'', z'',

$$\frac{\partial L}{\partial x''} = \frac{x'' - x'}{f}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y''} = \frac{y'' - y'}{f}, \qquad \frac{\partial L}{\partial z''} = \frac{z'' - z'}{f};$$

donc

$$\sqrt{\left(\frac{\partial L}{\partial x''}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial y''}\right)^2 + \left(\frac{\partial L}{\partial z''}\right)^2} = \frac{\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}}{f} = 1;$$

d'où il s'ensuit que le second corps recevra aussi une force λ dirigée perpendiculairement à la surface dont l'équation est $dL = df = 0$, en faisant varier x'', y'', z''; cette surface est de nouveau une sphère dont le rayon est f, mais dont le centre répondra aux coordonnées x', y', z' du premier corps; par conséquent, la force λ qui agit sur le second corps sera aussi dirigée suivant le fil f qui joint ce corps au premier.

3° On aura encore, par rapport au second corps,

$$\frac{\partial M}{\partial x''} = -\frac{x''' - x''}{g}, \qquad \frac{\partial M}{\partial y''} = -\frac{y''' - y''}{g}, \qquad \frac{\partial M}{\partial z''} = -\frac{z''' - z''}{g};$$

donc

$$\sqrt{\left(\frac{\partial M}{\partial x''}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial y''}\right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial z''}\right)^2} = 1.$$

De sorte que le second corps sera poussé de plus par une force égale à μ, dont la direction sera perpendiculaire à la surface représentée par l'équation $dg = 0$, en faisant varier x'', y'', z''; cette surface n'étant autre chose qu'une sphère dont le rayon est g, il s'ensuit que la direction de la force μ sera suivant ce rayon, c'est-à-dire suivant le fil qui joint le deuxième corps au troisième.

On fera le même raisonnement par rapport aux autres corps et l'on en tirera des conclusions semblables.

17. Il est évident que la force λ produite dans le premier corps, suivant la direction du fil qui joint ce corps au suivant, et la force égale à λ, mais directement contraire, qui agit sur le deuxième corps suivant la direction du même fil, ne peuvent être que les forces qui résultent de la réaction de ce fil sur les deux corps, c'est-à-dire de la tension que souffre la portion du fil interceptée entre le premier et le deuxième corps, de sorte que le coefficient λ exprimera la quantité de cette tension. De même le coefficient μ exprimera la tension de la portion du fil interceptée entre le deuxième et le troisième corps, et ainsi de suite.

Au reste, on a supposé tacitement, dans la solution du problème dont il s'agit, que chaque portion du fil était non seulement inextensible, mais aussi raide, en sorte qu'elle conservait toujours la même longueur; par conséquent, les forces λ, μ, ... n'exprimeront les tensions qu'autant qu'elles seront positives et tendront à rapprocher les corps; mais, si elles étaient négatives et tendaient à les éloigner l'un de l'autre, alors elles exprimeraient plutôt les résistances que le fil doit opposer au corps par le moyen de sa raideur ou incompressibilité.

18. Pour confirmer ce que nous venons de démontrer et pour donner en même temps une nouvelle application de nos méthodes, nous supposerons que le fil auquel les corps sont attachés soit élastique dans le sens de sa longueur et susceptible d'extension et de contraction, et que F, G, ... soient les forces de contraction des portions du fil f, g, ... interceptées entre le premier et le deuxième corps, entre le deuxième et le troisième, ...

Il est clair, par ce qu'on a dit dans l'article 9 (1) de la Section II, que les forces F, G, ... donneront les moments $F\,df + G\,dg + \ldots$.

Il faudra donc ajouter ces moments à ceux qui viennent de l'action des forces étrangères, et que nous avons vus plus haut (art. 11) être représentés par la formule

$$\begin{aligned} &X'\,dx' + Y'\,dy' + Z'\,dz' + X''\,dx'' + Y''\,dy'' + Z''\,dz'' \\ &\qquad + X'''\,dx''' + Y'''\,dy''' + Z'''\,dz''' + \ldots, \end{aligned}$$

pour avoir la somme totale des moments du système; et, comme il n'y a, d'ailleurs, aucune condition particulière à remplir relativement à la disposition des corps, on aura l'équation générale de l'équilibre en égalant simplement à zéro la somme dont il s'agit; cette équation sera donc

$$\begin{aligned} &X'\,dx' + Y'\,dy' + Z'\,dz' + X''\,dx'' + Y''\,dy'' + Z''\,dz'' \\ &\qquad + X'''\,dx''' + Y'''\,dy''' + Z'''\,dz''' + \ldots + F\,df + G\,dg + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Substituant les valeurs de df, dg, ... trouvées ci-dessus (art. 12)

(1) Il vaut mieux renvoyer, pour l'évaluation de ces moments, à l'article 4 de la Section II; on y trouvera la démonstration du résultat indiqué ici. Quant à l'article 9, nous avons fait remarquer qu'il suppose l'emploi d'une locution détournée qui n'est pas sans inconvénients. (*J. Bertrand.*)

et égalant à zéro la somme des termes affectés de chacune des différences dx', dy', ..., on aura les équations suivantes pour l'équilibre du fil dans le cas dont il s'agit

$$
\begin{aligned}
&X' - F\frac{x'' - x'}{f} = o,\\
&Y' - F\frac{y'' - y'}{f} = o,\\
&Z' - F\frac{z'' - z'}{f} = o,\\
&X'' + F\frac{x'' - x'}{f} - G\frac{x''' - x''}{g} = o,\\
&Y'' + F\frac{y'' - y'}{f} - G\frac{y''' - y''}{g} = o,\\
&Z'' + F\frac{z'' - z'}{f} - G\frac{z''' - z''}{g} = o,\\
&X''' + G\frac{x''' - x''}{g} = o,\\
&Y''' + G\frac{y''' - y''}{g} = o,\\
&Z''' + G\frac{z''' - z''}{g} = o,
\end{aligned}
$$

lesquelles sont analogues à celles du même article pour le cas où le fil est inextensible et donnent, par la comparaison, $\lambda = F$, $\mu = G$, ...

D'où l'on voit que les quantités F, G, ... ([1]), qui expriment ici les forces des fils supposés élastiques, sont les mêmes que celles que nous avons trouvées ci-dessus (art. 16), pour exprimer les forces des mêmes fils dans la supposition qu'ils soient inextensibles.

19. Reprenons encore le cas d'un fil inextensible chargé de trois corps, mais supposons en même temps que le corps du milieu puisse

([1]) Il est évident, *a priori*, qu'il doit en être ainsi; et, si Lagrange s'est abstenu de le faire remarquer, c'est pour la raison indiquée plus haut (art. 12). On comprend, en effet, qu'une fois l'équilibre établi, le fil ayant pris une certaine longueur qui ne varie plus, peu importe que cette longueur soit ou ne soit pas assujettie à demeurer constante.

(*J. Bertrand.*)

couler le long du fil; dans ce cas, la condition du problème sera que la somme des distances entre le premier et le deuxième corps, et entre le deuxième et le troisième, soit constante; ainsi, nommant, comme ci-dessus, f et g ces distances, on aura $f + g =$ const. et, par conséquent, $df + dg = o$.

On multipliera donc la quantité différentielle $df + dg$ par un coefficient indéterminé λ, et on l'ajoutera à la somme des moments des différentes forces qu'on suppose agir sur les corps, ce qui donnera cette équation générale de l'équilibre

$$
\begin{aligned}
&X'\,dx' + Y'\,dy' + Z'\,dz' + X''\,dx'' + Y''\,dy'' + Z''\,dx''\\
&\quad + X'''\,dx''' + Y'''\,dy''' + Z'''\,dz''' + \lambda(df + dg) = o;
\end{aligned}
$$

d'où (en substituant les valeurs de df et dg et égalant à zéro la somme des termes affectés de chacune des différences dx', dy', ...) on tirera les équations suivantes pour l'équilibre du fil

$$
\begin{aligned}
&X' - \lambda\frac{x'' - x'}{f} = o,\\
&Y' - \lambda\frac{y'' - y'}{f} = o,\\
&Z' - \lambda\frac{z'' - z'}{f} = o,\\
&X'' + \lambda\left(\frac{x'' - x'}{f} - \frac{x''' - x''}{g}\right) = o,\\
&Y'' + \lambda\left(\frac{y'' - y'}{f} - \frac{y''' - y''}{g}\right) = o,\\
&Z'' + \lambda\left(\frac{z'' - z'}{f} - \frac{z''' - z''}{g}\right) = o,\\
&X''' + \lambda\frac{x''' - x''}{g} = o,\\
&Y''' + \lambda\frac{y''' - y''}{g} = o,\\
&Z''' + \lambda\frac{z''' - z''}{g} = o,
\end{aligned}
$$

dans lesquelles il n'y aura plus qu'à éliminer l'inconnue λ.

On voit par là comment il faudrait s'y prendre, s'il y avait un plus grand nombre de corps dont les uns fussent attachés fixément au fil et dont les autres y pussent couler librement.

§ II. — *De l'équilibre de trois ou plusieurs corps attachés à une verge inflexible et raide.*

20. Supposons maintenant que les trois corps soient unis par une verge inflexible, en sorte qu'ils soient obligés de garder toujours entre eux les mêmes distances; il faudra, dans ce cas, que l'on ait non seulement $df=0$ et $dg=0$, mais que la différentielle de la distance entre le premier et le troisième corps, que nous désignerons par h, soit aussi nulle; par conséquent, en prenant trois coefficients indéterminés, λ, μ, ν, on aura cette équation générale de l'équilibre

$$\begin{aligned}X'\,dx' + Y'\,dy' + Z'\,dz' + X''\,dx'' + Y''\,dy'' + Z''\,dz''\\ + X'''\,dx''' + Y'''\,dy''' + Z'''\,dz''' + \lambda\,df + \mu\,dg + \nu\,dh = 0.\end{aligned}$$

Les valeurs de df et dg ont été déjà données ci-dessus; à l'égard de celle de dh, il est clair qu'on aura

$$h = \sqrt{(x'''-x')^2 + (y'''-y')^2 + (z'''-z')^2}$$

et, par conséquent,

$$dh = \frac{(x'''-x')(dx'''-dx') + (y'''-y')(dy'''-dy') + (z'''-z')(dz'''-dz')}{h}.$$

Faisant ces substitutions et égalant à zéro la somme des termes affectés de chacune des différences dx', dy', ..., on aura ces neuf équations particulières

$$X' - \lambda\frac{x''-x'}{f} - \nu\frac{x'''-x'}{h} = 0,$$

$$Y' - \lambda\frac{y''-y'}{f} - \nu\frac{y'''-y'}{h} = 0,$$

$$Z' - \lambda\frac{z''-z'}{f} - \nu\frac{z'''-z'}{h} = 0,$$

$$X'' + \lambda\frac{x''-x'}{f} - \mu\frac{x'''-x''}{g} = 0,$$

$$Y'' + \lambda\frac{y''-y'}{f} - \mu\frac{y'''-y''}{g} = 0,$$

$$Z'' + \lambda\frac{z''-z'}{f} - \mu\frac{z'''-z''}{g} = 0,$$

$$X''' + \mu\frac{x'''-x''}{g} + \nu\frac{x'''-x'}{h} = 0,$$

$$Y''' + \mu\frac{y'''-y''}{g} + \nu\frac{y'''-y'}{h} = 0,$$

$$Z''' + \mu\frac{z'''-z''}{g} + \nu\frac{z'''-z'}{h} = 0,$$

d'où il faudra éliminer les trois inconnues indéterminées λ, μ, ν, en sorte qu'il ne restera que six équations pour les conditions de l'équilibre.

21. D'abord il est clair, par la forme même de ces équations, qu'en ajoutant respectivement les trois premières aux trois suivantes et ensuite aux trois dernières, on obtient sur-le-champ ces trois équations, délivrées de λ, μ, ν,

$$X' + X'' + X''' = 0,$$

$$Y' + Y'' + Y''' = 0,$$

$$Z' + Z'' + Z''' = 0.$$

Rien n'est plus facile que de trouver encore trois autres équations par l'élimination de λ, μ, ν; mais, pour y parvenir de la manière la plus simple et la plus générale, je commence par déduire des équations de l'article précédent ces neuf transformées

$$X'y' - Y'x' - \lambda\frac{y'x''-x'y''}{f} - \nu\frac{y'x'''-x'y'''}{h} = 0,$$

$$X'z' - Z'x' - \lambda\frac{z'x''-x'z''}{f} - \nu\frac{z'x'''-x'z'''}{h} = 0,$$

$$Y'z' - Z'y' - \lambda\frac{z'y''-y'z''}{f} - \nu\frac{z'y'''-y'z'''}{h} = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&X''y'' - Y''x'' + \lambda\,\frac{y'x'' - x'y''}{f} - \mu\,\frac{y''x''' - x''y'''}{g} = 0,\\
&X''z'' - Z''x'' + \lambda\,\frac{z'x'' - x'z''}{f} - \mu\,\frac{z''x''' - x''z'''}{g} = 0,\\
&Y''z'' - Z''y'' + \lambda\,\frac{z'y'' - y'z''}{f} - \mu\,\frac{z''y''' - y''z'''}{g} = 0,\\
&X'''y''' - Y'''x''' + \mu\,\frac{y''x''' - x''y'''}{g} + \nu\,\frac{y'x''' - x'y'''}{h} = 0,\\
&X'''z''' - Z'''x''' + \mu\,\frac{z''x''' - x''z'''}{g} + \nu\,\frac{z'x''' - x'z'''}{h} = 0,\\
&Y'''z''' - Z'''y''' + \mu\,\frac{z''y''' - y''z'''}{g} + \nu\,\frac{z'y''' - y'z'''}{h} = 0,
\end{aligned}
$$

lesquelles étant, comme l'on voit, analogues aux équations primitives, donneront de la même manière, par la simple addition, ces trois-ci :

$$
\begin{aligned}
&X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' = 0,\\
&X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' + X'''z''' - Z'''x''' = 0,\\
&Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + Y'''z''' - Z'''y''' = 0.
\end{aligned}
$$

Les trois équations trouvées ci-dessus montrent que la somme des forces parallèles à chacun des trois axes des coordonnées doit être nulle; les trois que nous venons de trouver renferment le principe connu des moments (en entendant par moment le produit de la puissance par son bras de levier), par lequel il faut que la somme des moments de toutes les forces, pour faire tourner le système autour de chacun des trois axes, soit aussi nulle. Ainsi ces six équations ne sont que des cas particuliers des équations générales données dans la Section III, §§ I et II.

22. Si le premier corps était fixe, alors les différences dx', dy', dz' seraient nulles, et les trois premières des neuf équations de l'article 20 n'existeraient pas; il n'y aurait donc alors que six équations, qui, par l'élimination des trois inconnues λ, μ, ν, se réduiraient à trois.

Pour arriver à ces trois équations, on peut s'y prendre d'une manière analogue à celle dont on s'est servi pour trouver les trois dernières équations de l'article précédent, pourvu qu'on ait soin de faire en sorte que les transformées ne renferment point les indéterminées λ et ν qui entrent dans les trois premières dont il faut maintenant faire abstraction; or c'est ce que l'on obtiendra par ces combinaisons

$$
\begin{aligned}
&X''(y''-y') - Y''(x''-x') - \mu\,\frac{(y''-y')(x'''-x'') - (x''-x')(y'''-y'')}{g} = 0,\\
&X''(z''-z') - Z''(x''-x') - \mu\,\frac{(z''-z')(x'''-x'') - (x''-x')(z'''-z'')}{g} = 0,\\
&Y''(z''-z') - Z''(y''-y') - \mu\,\frac{(z''-z')(y'''-y'') - (y''-y')(z'''-z'')}{g} = 0,\\
&X'''(y'''-y') - Y'''(x'''-x') + \mu\,\frac{(y'''-y')(x'''-x'') - (x'''-x')(y'''-y'')}{g} = 0,\\
&X'''(z'''-z') - Z'''(x'''-x') + \mu\,\frac{(z'''-z')(x'''-x'') - (x'''-x')(z'''-z'')}{g} = 0,\\
&Y'''(z'''-z') - Z'''(y'''-y') + \mu\,\frac{(z'''-z')(y'''-y'') - (y'''-y')(z'''-z'')}{g} = 0;
\end{aligned}
$$

et, si l'on ajoute maintenant les trois premières de ces transformées aux trois dernières, on aura sur-le-champ ces trois-ci

$$
\begin{aligned}
&X''(y''-y') - Y''(x''-x') + X'''(y'''-y') - Y'''(x'''-x') = 0,\\
&X''(z''-z') - Z''(x''-x') + X'''(z'''-z') - Z'''(x'''-x') = 0,\\
&Y''(z''-z') - Z''(y''-y') + Y'''(z'''-z') - Z'''(y'''-y') = 0,
\end{aligned}
$$

lesquelles auront toujours lieu, quel que soit l'état du premier corps, puisqu'elles sont indépendantes des équations relatives à ce corps. Ces équations renferment, comme l'on voit, le même principe des moments, mais par rapport à des axes qui passeraient par le premier corps.

23. Supposons qu'il y ait un quatrième corps attaché à la même verge inflexible, pour lequel les coordonnées rectangles soient x^{iv}, y^{iv}, z^{iv} et les forces parallèles à ces coordonnées X^{iv}, Y^{iv}, Z^{iv}.

Il faudra donc ajouter à la somme des moments des forces la quantité

$$X^{\text{iv}}\,dx^{\text{iv}} + Y^{\text{iv}}\,dy^{\text{iv}} + Z^{\text{iv}}\,dz^{\text{iv}};$$

ensuite, comme les distances entre tous les corps doivent demeurer constantes, on aura, par les conditions du problème, non seulement $df=0$, $dg=0$, $dh=0$, comme dans le cas précédent, mais aussi $dl=0$, $dm=0$, $dn=0$, en nommant l, m, n les distances du quatrième corps aux trois précédents. Ainsi l'équation générale de l'équilibre sera, dans ce cas,

$$\begin{aligned}X' dx' + Y' dy' + Z' dz' + X'' dx'' + Y'' dy'' + Z'' dz''\\ + X''' dx''' + Y''' dy''' + Z''' dz''' + X^{\text{IV}} dx^{\text{IV}} + Y^{\text{IV}} dy^{\text{IV}} + Z^{\text{IV}} dz^{\text{IV}}\\ + \lambda\, df + \mu\, dg + \nu\, dh + \varpi\, dl + \rho\, dm + \sigma\, dm = 0.\end{aligned}$$

Les valeurs de df, dg, dh sont les mêmes que ci-dessus; quant à celles de dl, dm, dn, il est visible qu'on aura

$$\begin{aligned}l &= \sqrt{(x^{\text{IV}}-x')^2+(y^{\text{IV}}-y')^2+(z^{\text{IV}}-z')^2},\\ m &= \sqrt{(x^{\text{IV}}-x'')^2+(y^{\text{IV}}-y'')^2+(z^{\text{IV}}-z'')^2},\\ n &= \sqrt{(x^{\text{IV}}-x''')^2+(y^{\text{IV}}-y''')^2+(z^{\text{IV}}-z''')^2},\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned}dl &= \frac{(x^{\text{IV}}-x')(dx^{\text{IV}}-dx')+(y^{\text{IV}}-y')(dy^{\text{IV}}-dy')+(z^{\text{IV}}-z')(dz^{\text{IV}}-dz')}{l},\\ dm &= \frac{(x^{\text{IV}}-x'')(dx^{\text{IV}}-dx'')+(y^{\text{IV}}-y'')(dy^{\text{IV}}-dy'')+(z^{\text{IV}}-z'')(dz^{\text{IV}}-dz'')}{m},\\ dn &= \frac{(x^{\text{IV}}-x''')(dx^{\text{IV}}-dx''')+(y^{\text{IV}}-y''')(dy^{\text{IV}}-dy''')+(z^{\text{IV}}-z''')(dz^{\text{IV}}-dz''')}{n}.\end{aligned}$$

Faisant ces substitutions et égalant à zéro la somme des termes affectés de chacune des différences dx', dy', ..., on trouvera douze équations particulières, dont les neuf premières seront les mêmes que celles de l'article 20, en ajoutant respectivement à leurs premiers membres les quantités suivantes

$$\begin{array}{lll}-\varpi\dfrac{x^{\text{IV}}-x'}{l}, & -\varpi\dfrac{y^{\text{IV}}-y'}{l}, & -\varpi\dfrac{z^{\text{IV}}-z'}{l},\\[2ex] -\rho\dfrac{x^{\text{IV}}-x''}{m}, & -\rho\dfrac{y^{\text{IV}}-y''}{m}, & -\rho\dfrac{z^{\text{IV}}-z''}{m},\\[2ex] -\sigma\dfrac{x^{\text{IV}}-x'''}{n}, & -\sigma\dfrac{y^{\text{IV}}-y'''}{n}, & -\sigma\dfrac{z^{\text{IV}}-z'''}{n},\end{array}$$

et dont les trois dernières seront

$$\begin{aligned}X^{\text{IV}} + \varpi\frac{x^{\text{IV}}-x'}{l} + \rho\frac{x^{\text{IV}}-x''}{m} + \sigma\frac{x^{\text{IV}}-x'''}{n} &= 0,\\ Y^{\text{IV}} + \varpi\frac{y^{\text{IV}}-y'}{l} + \rho\frac{y^{\text{IV}}-y''}{m} + \sigma\frac{y^{\text{IV}}-y'''}{n} &= 0,\\ Z^{\text{IV}} + \varpi\frac{z^{\text{IV}}-z'}{l} + \rho\frac{z^{\text{IV}}-z''}{m} + \sigma\frac{z^{\text{IV}}-z'''}{n} &= 0.\end{aligned}$$

24. Comme il y a en tout douze équations et qu'il y a six indéterminées, λ, μ, ν, ϖ, ρ, σ, à éliminer, il ne restera, pour les conditions de l'équilibre, que six équations finales, comme dans le cas de trois corps; et l'on trouvera, par une méthode semblable à celle de l'article 21, ces six équations, analogues à celles de cet article,

$$\begin{aligned}X' + X'' + X''' + X^{\text{IV}} &= 0,\\ Y' + Y'' + Y''' + Y^{\text{IV}} &= 0,\\ Z' + Z'' + Z''' + Z^{\text{IV}} &= 0,\\ X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + X'''y''' - Y'''x''' + X^{\text{IV}}y^{\text{IV}} - Y^{\text{IV}}x^{\text{IV}} &= 0,\\ X'z' - Z'x' + X''z'' - Z''x'' + X'''z''' - Z'''x''' + X^{\text{IV}}z^{\text{IV}} - Z^{\text{IV}}x^{\text{IV}} &= 0,\\ Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + Y'''z''' - Z'''y''' + Y^{\text{IV}}z^{\text{IV}} - Z^{\text{IV}}y^{\text{IV}} &= 0.\end{aligned}$$

Au lieu des trois dernières, on pourra aussi substituer les trois suivantes, qu'on trouvera par la méthode de l'article 22, et qui, étant indépendantes des équations relatives au premier corps, ont l'avantage d'avoir toujours lieu, quel que soit l'état de ce corps :

$$\begin{aligned}&X''(y''-y') - Y''(x''-x') + X'''(y'''-y') - Y'''(x'''-x')\\ &\qquad + X^{\text{IV}}(y^{\text{IV}}-y') - Y^{\text{IV}}(x^{\text{IV}}-x') = 0,\\ &X''(z''-z') - Z''(x''-x') + X'''(z'''-z') - Z'''(x'''-x')\\ &\qquad + X^{\text{IV}}(z^{\text{IV}}-z') - Z^{\text{IV}}(x^{\text{IV}}-x') = 0,\\ &Y''(z''-z') - Z''(y''-y') + Y'''(z'''-z') - Z'''(y'''-y')\\ &\qquad + Y^{\text{IV}}(z^{\text{IV}}-z') - Z^{\text{IV}}(y^{\text{IV}}-y') = 0.\end{aligned}$$

25. On voit maintenant comment il faudrait s'y prendre pour trouver les conditions de l'équilibre d'un nombre quelconque de

corps attachés à une verge ou à un levier inflexible. En général, il est visible que, pour que la position respective des corps demeure la même, il suffit que les distances des trois premiers corps entre eux soient constantes et que les distances de chacun des autres corps à ces trois-ci le soient aussi, puisque la position d'un point quelconque est toujours déterminée par les distances de ce point à trois points donnés. On fera donc, pour chaque nouveau corps qu'on ajoutera au levier, les mêmes raisonnements et les mêmes opérations qu'on a faites dans l'article 23 relativement au quatrième corps, et chacun d'eux fournira trois nouvelles équations particulières avec trois nouvelles indéterminées à éliminer; en sorte que les équations finales seront toujours en même nombre que dans le cas de trois corps, et elles seront de la même forme que celles que nous venons de trouver dans l'article précédent.

Au reste, il est visible que ces équations rentrent dans celles que nous avons trouvées en général, pour l'équilibre d'un système libre quelconque, dans les articles 3 et 9 de la Section III. En effet, puisque, à cause de l'inflexibilité de la verge, les distances des corps entre eux sont inaltérables, il s'ensuit que l'équilibre doit avoir lieu si les mouvements de translation et de rotation sont détruits : on aurait donc pu, par cette seule considération, résoudre le problème précédent d'après les formules des articles cités; mais nous avons cru qu'il n'était pas inutile d'en donner une solution directe et tirée des conditions particulières de la question.

§ III. — *De l'équilibre de trois ou plusieurs corps attachés à une verge à ressort.*

26. Considérons de nouveau le cas de trois corps joints par une verge, et supposons de plus que la verge soit élastique dans le point où est le second corps, en sorte que les distances de celui-ci au premier et au dernier soient constantes, mais que l'angle formé par les lignes de ces distances soit variable, et que l'effet de l'élasticité con-

siste à augmenter cet angle et, par conséquent, à diminuer l'angle extérieur formé par un des côtés et par le prolongement de l'autre.

Nommons E la force de l'élasticité [1] et e l'angle extérieur qu'elle tend à diminuer; le moment de cette force sera exprimé par $\mathrm{E}\,de$ (Sect. II, art. 9), de sorte que la somme des moments de toutes les forces du système sera

$$\begin{aligned}&\mathrm{X}'\,dx' + \mathrm{Y}'\,dy' + \mathrm{Z}'\,dz' + \mathrm{X}''\,dx'' + \mathrm{Y}''\,dy'' + \mathrm{Z}''\,dz''\\ &\quad + \mathrm{X}'''\,dx''' + \mathrm{Y}'''\,dy''' + \mathrm{Z}'''\,dz''' + \mathrm{E}\,de.\end{aligned}$$

Or les conditions du problème sont les mêmes ici que dans l'article 12, c'est-à-dire $df = 0$ et $dg = 0$. Donc on aura cette équation générale de l'équilibre

$$\begin{aligned}&\mathrm{X}'\,dx' + \mathrm{Y}'\,dy' + \mathrm{Z}'\,dz' + \mathrm{X}''\,dx'' + \mathrm{Y}''\,dy'' + \mathrm{Z}''\,dz''\\ &\quad + \mathrm{X}'''\,dx''' + \mathrm{Y}'''\,dy''' + \mathrm{Z}'''\,dz''' + \mathrm{E}\,de + \lambda\,df + \mu\,dg = 0;\end{aligned}$$

et il ne s'agira que d'y substituer les valeurs de de, df, dg; celles de df et dg sont les mêmes que dans l'article cité.

Pour trouver la valeur de de, on remarquera qu'en nommant, comme dans l'article 20, h la distance rectiligne entre le premier corps et le troisième, dans le triangle dont les trois côtés sont f, g, h, l'angle opposé au côté h est $180^\circ - e$; en sorte que, par le théorème connu, on aura

$$-\cos e = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg};$$

d'où l'on tirera par la différentiation la valeur de de; et comme, par les conditions du problème, on a

$$df = 0 \quad \text{et} \quad dg = 0,$$

(1) Le mot *force* est ici détourné de sa signification habituelle. Lagrange regarde comme évident que, l'ensemble des forces qui sont produites par l'élasticité ayant une somme de moments égale à zéro lorsque l'angle e est invariable, cette somme peut être considérée, en général, comme proportionnelle à de, et il la représente alors par $\mathrm{E}\,de$, E n'exprimant une force que si l'on adopte la convention de l'article 9, Section II. *Voir* la Note relative à cet article.
(*J. Bertrand.*)

il suffira de faire varier e et h, ce qui donnera

$$de = -\frac{h\,dh}{fg\sin e};$$

cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, il est facile de voir qu'elle deviendra de la même forme que l'équation générale de l'équilibre dans le cas de l'article 20, en supposant dans celle-ci $\nu = -\frac{\mathrm{E}h}{fg\sin e}$; par conséquent, les équations particulières seront encore les mêmes dans les deux cas, avec cette seule différence que, dans celui de l'article cité, la quantité ν est indéterminée et doit, par conséquent, être éliminée, au lieu que, dans le cas présent, cette quantité est toute connue ([1]) et qu'il n'y a que les deux indéterminées λ, μ à éliminer; en sorte qu'il doit rester une équation finale de plus que dans le cas cité, c'est-à-dire sept équations finales au lieu de six. Or, comme, soit que la quantité ν soit connue ou non, rien n'empêche de l'éliminer avec les deux autres λ, μ, il est clair qu'on aura aussi, dans le cas présent, les mêmes équations qu'on a trouvées dans les articles 21 et 22; et, pour trouver la septième équation, il n'y aura qu'à éliminer λ dans les trois premières, ou μ dans les trois dernières des neuf équations particulières de l'article 20, et substituer pour ν sa valeur $-\frac{\mathrm{E}h}{fg\sin e}$.

27. Au reste, si dans la valeur de de on n'avait pas voulu supposer df et dg nuls, on aurait eu une expression de cette forme

$$de = -\frac{h\,dh}{fg\sin e} + \mathrm{A}\,df + \mathrm{B}\,dg,$$

A et B étant des fonctions de f, g, h, $\sin e$; alors les trois termes

$$\mathrm{E}\,de + \lambda\,df + \mu\,dg$$

([1]) Il faudrait, pour que ν fût considéré comme quantité connue, que E et e le fussent eux-mêmes; or il n'en est pas ainsi : E est une fonction inconnue de e et ne paraît pas susceptible d'une détermination directe. (*J. Bertrand.*)

de l'équation générale seraient devenus

$$-\frac{\mathrm{E}h}{fg\sin e}\,dh + (\mathrm{EA} + \lambda)\,df + (\mathrm{EB} + \mu)\,dg.$$

Mais, λ et μ étant deux quantités indéterminées, il est visible qu'on peut mettre à leur place $\lambda - \mathrm{EA}$, $\mu - \mathrm{EB}$, moyennant quoi la quantité dont il s'agit deviendra

$$-\frac{\mathrm{E}h}{fg\sin e}\,dh + \lambda\,df + \mu\,dg,$$

comme si f et g n'eussent point varié dans l'expression de de.

Si plusieurs corps étaient joints ensemble par des verges élastiques, on trouverait de la même manière les équations nécessaires pour l'équilibre de ces corps; et, en général, notre méthode donnera toujours, avec la même facilité, les conditions de l'équilibre d'un système de corps liés entre eux d'une manière quelconque et animés de telles forces extérieures qu'on voudra. La marche du calcul est, comme l'on voit, toujours uniforme, ce qu'on doit regarder comme un des principaux avantages de cette méthode.

CHAPITRE III.

DE L'ÉQUILIBRE D'UN FIL DONT TOUS LES POINTS SONT TIRÉS PAR DES FORCES QUELCONQUES, ET QUI EST SUPPOSÉ FLEXIBLE, OU INFLEXIBLE, OU ÉLASTIQUE, ET EN MÊME TEMPS EXTENSIBLE OU NON.

28. C'est ici le lieu d'employer la méthode que nous avons exposée dans le § II de la Section IV.

Nous supposerons toujours, pour plus de simplicité, que toutes les forces extérieures qui agissent sur chaque point du fil soient réduites à trois, X, Y, Z, dirigées suivant les coordonnées rectangles x, y, z de ce point. Ainsi, en nommant dm l'élément du fil, lequel est proportionnel à l'élément ds de la courbe multiplié par l'épaisseur du fil, on aura, pour la somme des moments de toutes ces forces, relativement à la longueur totale du fil, cette formule intégrale (Sect. IV, art. 12)

$$\mathsf{S}(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dm;$$

et, comme la quantité $X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z$ n'est qu'une transformée de $P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots$ (art. 1), si les forces P, Q, R, ... sont telles que cette quantité soit intégrable, en nommant Π son intégrale, on aura, comme dans l'article 25 de la Section IV,

$$X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z = \delta\Pi,$$

et la somme des moments sera exprimée par $\mathsf{S}\,\delta\Pi\,dm$.

§ I. — *De l'équilibre d'un fil flexible et inextensible.*

29. Considérons d'abord le cas d'un fil parfaitement flexible et inextensible; l'élément ds de la courbe de ce fil étant exprimé par

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

il faudra, par la condition de l'inextensibilité, que ds soit une quantité invariable et qu'ainsi l'on ait, par rapport à chaque élément du fil, cette équation de condition indéfinie $\delta\,ds = 0$. Multipliant donc $\delta\,ds$ par une quantité indéterminée λ et prenant l'intégrale totale, on aura $\mathsf{S}\,\lambda\,\delta ds$; et, si l'on n'a point d'autre équation de condition, on aura l'équation générale de l'équilibre en égalant à zéro la somme des deux intégrales $\mathsf{S}\,\delta\Pi\,dm$ et $\mathsf{S}\,\lambda\,\delta ds$.

Or, ayant $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, on aura, en différentiant suivant δ,

$$\delta\,ds = \frac{dx\,\delta dx + dy\,\delta dy + dz\,\delta dz}{ds};$$

donc

$$\mathsf{S}\lambda\,\delta\,ds = \mathsf{S}\lambda\frac{dx}{ds}\,\delta\,dx + \mathsf{S}\lambda\frac{dy}{ds}\,\delta\,dy + \mathsf{S}\lambda\frac{dz}{ds}\,\delta\,dz;$$

changeant δd en $d\delta$ et intégrant par parties pour faire disparaître le d

avant δ, suivant les règles données dans l'article 15 de la Section IV, on aura ces transformées

$$\mathsf{S}\lambda\frac{dx}{ds}\,\delta\,dx = \lambda''\frac{dx''}{ds''}\,\delta x'' - \lambda'\frac{dx'}{ds'}\,\delta x' - \mathsf{S}\,d\frac{\lambda\,dx}{ds}\,\delta x,$$

$$\mathsf{S}\lambda\frac{dy}{ds}\,\delta\,dy = \lambda''\frac{dy''}{ds''}\,\delta y'' - \lambda'\frac{dy'}{ds'}\,\delta y' - \mathsf{S}\,d\frac{\lambda\,dy}{ds}\,\delta y,$$

$$\mathsf{S}\lambda\frac{dz}{ds}\,\delta\,dz = \lambda''\frac{dz''}{ds''}\,\delta z'' - \lambda'\frac{dz'}{ds'}\,\delta z' - \mathsf{S}\,d\frac{\lambda\,dz}{ds}\,\delta z.$$

Ainsi l'équation générale de l'équilibre deviendra

$$\mathsf{S}\left[\left(X\,dm - d\frac{\lambda\,dx}{ds}\right)\delta x + \left(Y\,dm - d\frac{\lambda\,dy}{ds}\right)\delta y + \left(Z\,dm - d\frac{\lambda\,dz}{ds}\right)\delta z\right]$$
$$+ \lambda''\frac{dx''}{ds''}\,\delta x'' + \lambda''\frac{dy''}{ds''}\,\delta y'' + \lambda''\frac{dz''}{ds''}\,\delta z'' - \lambda'\frac{dx'}{ds'}\,\delta x' - \lambda'\frac{dy'}{ds'}\,\delta y' - \lambda'\frac{dz'}{ds'}\,\delta z' = 0.$$

30. On égalera d'abord à zéro (Sect. IV, art. 16) les coefficients de δx, δy, δz sous le signe S, et l'on aura ces trois équations particulières et indéfinies

$$X\,dm - d\frac{\lambda\,dx}{ds} = 0,$$

$$Y\,dm - d\frac{\lambda\,dy}{ds} = 0,$$

$$Z\,dm - d\frac{\lambda\,dz}{ds} = 0;$$

d'où, éliminant l'indéterminée λ, il restera deux équations qui serviront à déterminer la courbe du fil.

Cette élimination est très facile, car on n'a qu'à intégrer les équations précédentes, ce qui donnera celles-ci

$$\lambda\frac{dx}{ds} = A + \int X\,dm,$$

$$\lambda\frac{dy}{ds} = B + \int Y\,dm,$$

$$\lambda\frac{dz}{ds} = C + \int Z\,dm,$$

A, B, C étant les constantes arbitraires; ensuite on aura, en chassant λ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \int Y\,dm}{A + \int X\,dm},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{C + \int Z\,dm}{A + \int X\,dm},$$

équations qui s'accordent avec les formules connues de la chainette.

Si l'on veut parvenir directement à des équations purement différentielles et sans signe $\int$, on mettra les équations trouvées sous cette forme

$$X\,dm - \lambda\,d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d\lambda = 0,$$

$$Y\,dm - \lambda\,d\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\,d\lambda = 0,$$

$$Z\,dm - \lambda\,d\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\,d\lambda = 0;$$

d'où, éliminant $d\lambda$, on aura d'abord ces deux-ci :

$$\frac{X\,dy - Y\,dx}{ds}\,dm = \lambda\left(\frac{dy}{ds}\,d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d\frac{dy}{ds}\right),$$

$$\frac{X\,dz - Z\,dx}{ds}\,dm = \lambda\left(\frac{dz}{ds}\,d\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d\frac{dz}{ds}\right).$$

Ensuite, si l'on multiplie les mêmes équations respectivement par $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, on aura, à cause de

$$\frac{dx}{ds}\,d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\frac{dz}{ds} = \frac{1}{2}\,d\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} = 0,$$

l'équation

$$\left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds}\right)dm = d\lambda;$$

et il n'y aura plus qu'à substituer successivement dans cette dernière équation les valeurs de λ tirées des deux précédentes.

31. Comme la quantité $\lambda\,\delta ds$ peut représenter le moment d'une force λ tendante à diminuer la longueur de l'élément ds (Sect. IV,

art. 6), le terme $S\lambda\,\delta ds$ de l'équation générale de l'équilibre du fil (art. 29) représentera la somme des moments de toutes ces forces λ qu'on peut supposer agir sur tous les éléments du fil; en effet, chaque élément résiste par son inextensibilité à l'action des forces extérieures, et l'on regarde communément cette résistance comme une force active qu'on nomme *tension*. Ainsi la quantité λ exprimera la tension du fil.

32. A l'égard de la condition de l'inextensibilité du fil, représentée par l'invariabilité de chaque élément de la courbe ds, on ne peut pas l'introduire dans l'équation de la courbe, en remplacement de l'indéterminée λ, comme dans le cas où le fil forme un polygone, parce que, par la nature du Calcul différentiel, la valeur absolue des éléments de la courbe et, en général, de tous les éléments infiniment petits demeure indéterminée; mais aussi, par la même raison, il n'est pas nécessaire qu'il y ait autant d'équations que de variables, et il suffit d'une équation de moins pour déterminer une ligne, soit à simple ou à double courbure. Ainsi la solution que nous venons de trouver par notre méthode est complète à l'égard des équations différentielles et ne demande plus que des intégrations qui dépendent des expressions des forces X, Y, Z.

33. Considérons maintenant les termes de l'équation générale de l'article 29 qui sont hors du signe S; et supposons premièrement que le fil soit entièrement libre. Dans ce cas, les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ et $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, qui répondent aux deux points extrêmes du fil, seront toutes indéterminées et arbitraires; par conséquent, il faudra que chaque terme affecté de ces variations soit nul de lui-même. Donc il faudra que l'on ait $\lambda' = 0$ et $\lambda'' = 0$, c'est-à-dire que la valeur de λ devra être nulle au commencement et à la fin du fil. On remplira cette condition par le moyen des constantes. Ainsi, comme les trois premières équations intégrales de l'article 30 donnent pour le premier point du fil, où les quantités affectées de $\int$ deviennent alors nulles,

$$\lambda'\frac{dx'}{ds'} = A, \qquad \lambda'\frac{dy'}{ds'} = B, \qquad \lambda'\frac{dz'}{ds'} = C,$$

et pour le dernier point du fil, où $\int$ se change en $\mathbf{S}$,

$$\lambda''\frac{dx''}{ds''} = \mathrm{A} + \mathbf{S}\,\mathrm{X}\,dm, \qquad \lambda''\frac{dy''}{ds''} = \mathrm{B} + \mathbf{S}\,\mathrm{Y}\,dm, \qquad \lambda''\frac{dz''}{ds''} = \mathrm{C} + \mathbf{S}\,\mathrm{Z}\,dm,$$

on aura, dans le cas dont il s'agit,

$$\mathrm{A} = 0, \qquad \mathrm{B} = 0, \qquad \mathrm{C} = 0$$

et

$$\mathbf{S}\,\mathrm{X}\,dm = 0, \qquad \mathbf{S}\,\mathrm{Y}\,dm = 0, \qquad \mathbf{S}\,\mathrm{Z}\,dm = 0.$$

Ces trois équations répondent, comme l'on voit, à celles de l'article 12 de la Section présente.

34. Supposons, en second lieu, que le fil soit attaché par un de ses bouts ou par tous les deux; et, si c'est le premier bout qui est fixe, les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ seront nulles, et il suffira d'égaler à zéro les coefficients de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, c'est-à-dire de faire $\lambda'' = 0$.

Par la même raison, lorsque le second bout sera fixe, il suffira de faire $\lambda' = 0$. Mais, si les deux bouts étaient fixes à la fois, alors il n'y aurait aucune condition particulière à remplir, puisque les variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ seraient toutes nulles.

35. Supposons, en troisième lieu, que les extrémités du fil soient attachées à des lignes ou surfaces courbes, le long desquelles elles puissent glisser librement; et soient, par exemple,

$$dz' = a'\,dx' + b'\,dy', \qquad dz'' = a''\,dx'' + b''\,dy''$$

les équations différentielles des surfaces auxquelles le premier et le dernier point du fil sont attachés. On aura pareillement, en changeant d en δ,

$$\delta z' = a'\,\delta x' + b'\,\delta y', \qquad \delta z'' = a''\,\delta x'' + b''\,\delta y'';$$

on substituera donc ces valeurs dans les termes dont il s'agit, et l'on égalera ensuite à zéro les coefficients de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$.

En général, on traitera la partie qui est hors du signe dans l'équation générale de l'équilibre comme si elle était seule et qu'elle représentât l'équation de l'équilibre de deux corps séparés et placés aux extrémités du fil.

36. Supposons, par exemple, que le fil soit attaché par ses deux bouts aux extrémités d'un levier mobile autour d'un point fixe. Soient a, b, c les trois coordonnées rectangles qui déterminent dans l'espace la position de ce point fixe, c'est-à-dire du point d'appui du levier; et soient, de plus, f la distance entre ce point d'appui et l'extrémité du levier à laquelle est attaché le premier bout du fil; g la distance entre le même point d'appui et l'autre extrémité du levier à laquelle est attaché le second bout du fil; h la distance entre les deux extrémités du levier, et, par conséquent, aussi entre les deux bouts du fil : il est clair que ces six quantités a, b, c, f, g, h sont données par la nature du problème, et il est visible en même temps que, x', y', z' étant les coordonnées pour le commencement de la courbe du fil et x'', y'', z'' les coordonnées pour la fin de la même courbe, on aura

$$f = \sqrt{(a - x')^2 + (b - y')^2 + (c - z')^2},$$
$$g = \sqrt{(a - x'')^2 + (b - y'')^2 + (c - z'')^2},$$
$$h = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}.$$

Or, ces quantités f, g, h étant invariables, en différentiant par δ ces trois équations de condition déterminées, on aura

$$(a - x')\,\delta x' + (b - y')\,\delta y' + (c - z')\,\delta z' = 0,$$
$$(a - x'')\,\delta x'' + (b - y'')\,\delta y'' + (c - z'')\,\delta z'' = 0,$$
$$(x'' - x')(\delta x'' - \delta x') + (y'' - y')(\delta y'' - \delta y') + (z'' - z')(\delta z'' - \delta z') = 0,$$

lesquelles, étant multipliées chacune par un coefficient indéterminé, devront être ainsi ajoutées à l'équation générale de l'équilibre. Ainsi, prenant α, β, γ pour les trois coefficients dont il s'agit et égalant à zéro les coefficients des six variations $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, on aura autant d'équations particulières déterminées, qui seront

$$\alpha(a-x')-\gamma(x''-x')-\lambda'\frac{dx'}{ds'}=0,$$

$$\alpha(b-y')-\gamma(y''-y')-\lambda'\frac{dy'}{ds'}=0,$$

$$\alpha(c-z')-\gamma(z''-z')-\lambda'\frac{dz'}{ds'}=0,$$

$$\beta(a-x'')+\gamma(x''-x')+\lambda''\frac{dx''}{ds''}=0,$$

$$\beta(b-y'')+\gamma(y''-y')+\lambda''\frac{dy''}{ds''}=0,$$

$$\beta(c-z'')+\gamma(z''-z')+\lambda''\frac{dz''}{ds''}=0,$$

et qui, par l'élimination de α, β, γ, se réduiront à trois.

Ces trois équations, étant ensuite combinées avec les trois équations de condition ci-dessus, serviront à déterminer la position des deux extrémités du fil.

On voit par là comment il faudra s'y prendre dans d'autres cas semblables.

37. Enfin, si, outre les forces qui animent chaque point du fil, il y en avait de particulières appliquées aux deux extrémités du fil, et représentées par X', Y', Z' pour le premier bout du fil, et par X'', Y'', Z'' pour le dernier bout, ces forces donneraient les moments

$$X'\delta x'+Y'\delta y'+Z'\delta z'+X''\delta x''+Y''\delta y''+Z''\delta z'',$$

et il faudrait ajouter encore cette quantité au premier membre de l'équation générale de l'équilibre, c'est-à-dire à la partie qui est hors du signe, laquelle deviendrait alors

$$\begin{aligned}&\left(X''+\lambda''\frac{dx''}{ds''}\right)\delta x''+\left(Y''+\lambda''\frac{dy''}{ds''}\right)\delta y''+\left(Z''+\lambda''\frac{dz''}{ds''}\right)\delta z''\\ +&\left(X'-\lambda'\frac{dx'}{ds'}\right)\delta x'+\left(Y'-\lambda'\frac{dy'}{ds'}\right)\delta y'+\left(Z'-\lambda'\frac{dz'}{ds'}\right)\delta z',\end{aligned}$$

et sur laquelle on opérerait, dans les différents cas, comme on vient de le voir dans les articles précédents.

38. Supposons maintenant que le fil, animé dans tous ses points par les mêmes forces X, Y, Z et tiré de plus, dans ses deux extrémités, par les forces X', Y', Z', X'', Y'', Z'', doive être couché sur une surface courbe donnée, dont l'équation soit

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

et que l'on demande la figure et la position de ce fil sur la même surface pour qu'il soit en équilibre.

Ce problème, qui serait peut-être difficile (1) à traiter par les principes ordinaires de la Mécanique, se résout très facilement par notre méthode et par nos formules; en effet, par l'équation de la surface donnée, on a, en changeant d en δ,

$$\delta z=p\,\delta x+q\,\delta y;$$

ainsi il n'y aura qu'à substituer cette valeur de δz dans les termes sous le signe de l'équation générale de l'équilibre du fil (art. 29), et ensuite égaler séparément à zéro les quantités affectées de δx et de δy. On aura par ce moyen ces deux équations indéfinies

$$X\,dm-d\frac{\lambda\,dx}{ds}+p\left(Z\,dm-d\frac{\lambda\,dz}{ds}\right)=0,$$

$$Y\,dm-d\frac{\lambda\,dy}{ds}+q\left(Z\,dm-d\frac{\lambda\,dz}{ds}\right)=0,$$

lesquelles serviront à déterminer la courbe du fil, étant combinées avec l'équation $dz=p\,dx+q\,dy$ de la surface et étant débarrassées, par l'élimination, de l'indéterminée λ.

(1) On ne comprend pas comment Lagrange a pu considérer ce problème comme difficile à traiter directement. Les équations auxquelles il parvient expriment simplement que les deux tensions aux extrémités d'un élément, étant combinées avec les forces qui sollicitent cet élément, donnent une résultante normale à la surface. Cette condition est évidente *a priori*.

(*J. Bertrand.*)

39. De plus, comme on suppose le fil appliqué dans toute sa longueur à la même surface, on aura aussi, pour ses deux points extrêmes,

$$\delta z' = p'\delta x' + q'\delta y' \qquad \text{et} \qquad \delta z'' = p''\delta x'' + q''\delta y''.$$

On fera donc encore ces substitutions dans les termes hors du signe de l'équation générale, ou plutôt dans la formule donnée dans l'article 37, dans laquelle on a eu égard aux forces X′, Y′, Z′, ...; on égalera ensuite séparément à zéro les quantités affectées de chacune des quatre variations restantes $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta x''$, $\delta y''$; on aura ces quatre nouvelles équations déterminées

$$\mathrm{X}' - \lambda' \frac{dx'}{ds'} + p'\left(\mathrm{Z}' - \lambda' \frac{dz'}{ds'}\right) = 0,$$

$$\mathrm{Y}' - \lambda' \frac{dy'}{ds'} + q'\left(\mathrm{Z}' - \lambda' \frac{dz'}{ds'}\right) = 0,$$

$$\mathrm{X}'' + \lambda'' \frac{dx''}{ds''} + p''\left(\mathrm{Z}'' + \lambda'' \frac{dz''}{ds''}\right) = 0,$$

$$\mathrm{Y}'' + \lambda'' \frac{dy''}{ds''} + q''\left(\mathrm{Z}'' + \lambda'' \frac{dz''}{ds''}\right) = 0,$$

auxquelles il faudra satisfaire par le moyen des constantes.

40. Mais, au lieu de substituer, ainsi que nous venons de le faire, la valeur de δz en δx et δy tirée de l'équation $\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y = 0$, on pourrait regarder cette même équation comme une nouvelle équation de condition indéterminée; il faudrait alors multiplier cette équation par un autre coefficient indéterminé μ, en prendre l'intégrale totale et l'ajouter à l'équation générale de l'équilibre (art. 29). De cette manière la partie sous le signe deviendrait

$$\mathrm{S}\Big[\left(\mathrm{X}\,dm - d\frac{\lambda\,dx}{ds} - \mu p\right)\delta x + \left(\mathrm{Y}\,dm - d\frac{\lambda\,dy}{ds} - \mu q\right)\delta y$$
$$+ \left(\mathrm{Z}\,dm - d\frac{\lambda\,dz}{ds} + \mu\right)\delta z\Big],$$

et l'on aurait immédiatement ces trois équations indéfinies

$$\mathrm{X}\,dm - d\frac{\lambda\,dx}{ds} - \mu p = 0,$$

$$\mathrm{Y}\,dm - d\frac{\lambda\,dy}{ds} - \mu q = 0,$$

$$\mathrm{Z}\,dm - d\frac{\lambda\,dz}{ds} + \mu \;\; = 0,$$

lesquelles, par l'élimination de μ, redonneront les mêmes équations déjà trouvées (art. 38). Mais ces dernières ont de plus l'avantage de faire connaître en même temps la pression que chaque élément du fil exerce sur la surface, d'après la théorie donnée dans l'article 5 de la Section IV.

En effet, il est facile de déduire de cette théorie que les termes

$$\mu(\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y),$$

provenant de l'équation de condition

$$\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y = 0,$$

peuvent représenter l'effet d'une force égale à $\mu\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ et appliquée à chaque élément ds du fil dans une direction perpendiculaire à la surface qui a pour équation

$$\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y = 0, \qquad \text{ou bien} \qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$

c'est-à-dire à la surface même sur laquelle le fil est supposé couché. Cette surface, par sa résistance, produit la force $\mu\sqrt{1 + p^2 + q^2}$, laquelle sera, par conséquent, égale et directement contraire à la pression exercée par le fil sur la même surface (Sect. IV, art. 7); de sorte que la pression de chaque point du fil sera égale à $\frac{\mu\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{ds}$, ou bien, en substituant les valeurs de μ, μp, μq tirées des équations ci-dessus,

$$\frac{\sqrt{\left(\mathrm{X}\,dm - d\frac{\lambda\,dx}{ds}\right)^2 + \left(\mathrm{Y}\,dm - d\frac{\lambda\,dy}{ds}\right)^2 + \left(\mathrm{Z}\,dm - d\frac{\lambda\,dz}{ds}\right)^2}}{ds}.$$

On appliquera ensuite les mêmes raisonnements à la partie de l'équation générale qui est hors du signe $\mathbf{S}$ et l'on en tirera des conclusions analogues.

41. Si le fil couché sur la surface donnée n'était tendu que par des forces appliquées à ses extrémités, on aurait $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, et, par conséquent, $d\lambda = 0$ (art. 30); donc λ est égal à une constante. Ainsi la tension du fil serait partout la même (art. 31), ce qui s'accorde avec ce qu'on sait d'ailleurs. Dans ce cas, la formule générale de l'équilibre du fil se réduirait à

$$\lambda \mathbf{S}\,\delta\,ds + \mathbf{S}\,\mu(\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y) = 0,$$

dont le premier terme est la même chose que $\lambda\,\delta \mathbf{S}\,ds$ ou $\lambda\,\delta s$. Ainsi cette équation exprime que la longueur de la courbe formée par le fil sur la surface représentée par l'équation $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ doit être un maximum ou un minimum; et la pression exercée par le fil sur chaque point de cette surface sera alors

$$\lambda \frac{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}}{ds}.$$

Or on sait que $\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}$ exprime l'angle de contingence de la courbe, lequel est égal à $\frac{ds}{\rho}$, en nommant ρ le rayon osculateur. Ainsi la pression sera égale à $\frac{\lambda}{\rho}$ et, par conséquent, en raison inverse du rayon osculateur.

§ II. — *De l'équilibre d'un fil, ou d'une surface flexible et en même temps extensible et contractible.*

42. Jusqu'ici nous avons supposé que le fil était inextensible; regardons-le maintenant comme un ressort capable d'extension et de contraction, et soit F la force avec laquelle chaque élément ds de la courbe du fil tend à se contracter; on aura, comme dans l'article 18 (en mettant ds à la place de f et en changeant d en δ), $F\,\delta\,ds$ pour le moment de cette force, et $\mathbf{S}\,F\,\delta\,ds$ pour la somme des moments de toutes les forces de contraction qui agissent sur toute la longueur du fil. On ajoutera donc cette intégrale $\mathbf{S}\,F\,\delta\,ds$ à l'intégrale

$$\mathbf{S}\,(X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,dm,$$

qui exprime la somme des moments de toutes les forces extérieures qui agissent sur le fil (art. 28), et, égalant le tout à zéro, on aura l'équation générale de l'équilibre du fil à ressort.

Or il est visible que cette équation sera de la même forme que celle de l'article 29 pour le cas d'un fil inextensible, et qu'en y changeant F en λ les deux équations deviendront identiques. On aura donc, dans le cas présent, les mêmes équations particulières pour l'équilibre du fil qu'on a trouvées dans l'article 30, en mettant seulement dans celles-ci F à la place de λ; et, si l'on élimine la quantité F comme on a éliminé la quantité λ, on aura, pour la courbe formée par un fil extensible, deux équations qui seront identiquement les mêmes que celles qui ont lieu pour un fil inextensible.

43. A l'égard de la quantité F qui représente l'élasticité ou la force de contraction de chaque élément ds, il est naturel de l'exprimer par une fonction de l'extension que cet élément subit par l'action des forces X, Y, Z. Ainsi, en supposant que $d\sigma$ soit la longueur primitive de ds, on pourra regarder F comme une fonction donnée de $\frac{ds}{d\sigma}$; mais, comme par la nature du Calcul différentiel la valeur absolue des éléments ds demeure indéterminée, la valeur de F sera aussi indéterminée et ne pourra être connue que par le moyen d'une des trois équations de l'équilibre du fil. Ainsi, quoique dans le cas présent notre analyse paraisse donner une équation de trop, elle ne donne néanmoins

que les équations nécessaires pour déterminer la courbe du fil et la résistance de chacun de ses éléments.

Puisque la quantité λ de la solution de l'article 30 répond exactement à la quantité F qui exprime la force réelle avec laquelle chaque élément du fil est tendu par l'action des forces extérieures, il s'ensuit qu'on peut aussi regarder cette quantité λ comme représentant la tension du fil inextensible. C'est ce que nous avons déjà trouvé *a priori* dans l'article 31.

44. Appliquons les mêmes principes à la détermination de l'équilibre d'une surface dont tous les éléments dm soient extensibles et contractibles. L'élément d'une surface dont les coordonnées sont x, y, z, et où l'on regarde z comme fonction de x, y, est exprimé par la formule

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Ainsi, en appelant F [1] la force d'élasticité avec laquelle cet élément tend à se contracter, la somme des moments de toutes ces forces sera exprimée par l'intégrale double

$$SS\,F\,\delta\left[\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy\right],$$

qui, étant ajoutée à l'intégrale double

$$SS(X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z)\,dm,$$

(1) Cette manière d'évaluer l'ensemble des forces que développe l'élasticité sur un point n'est pas suffisamment justifiée. Il est vrai qu'ici, comme dans plusieurs passages précédents, Lagrange détourne le mot *force* de sa signification habituelle; mais il n'est nullement évident que la somme des moments des forces qui agissent sur un élément soit proportionnelle à la contraction de l'élément. Nous pouvons même ajouter que cela n'est pas exact. Poisson en a fait la remarque dans les *Mémoires de l'Institut* pour l'année 1812; du reste, la solution qu'il donne manque elle-même de généralité : elle suppose les tensions d'un élément rectangulaire perpendiculaires aux côtés de cet élément, ce qui n'a pas lieu en général.

(*J. Bertrand.*)

où dm est l'élément de la surface, donnera la somme des moments de toutes les forces, laquelle doit être nulle dans l'équilibre.

En faisant, comme dans l'article 31 de la Section IV,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z',\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=z_{,}\qquad \text{et}\qquad \sqrt{1+z'^2+z_{,}^2}=\mathrm{U},$$

on aura

$$dm=\mathrm{U}\,dx\,dy\qquad \text{et}\qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z'}=\frac{z'}{\mathrm{U}},\qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial z_{,}}=\frac{z_{,}}{\mathrm{U}};$$

donc (Sect. IV, art. 33, 34)

$$\delta\mathrm{U}=\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}\delta x+\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}\delta y+\frac{1}{\mathrm{U}}\left(z'\frac{\partial\,\delta u}{\partial x}+z_{,}\frac{\partial\,\delta u}{\partial y}\right),$$

$$\delta(\mathrm{U}\,dx\,dy)=\left[\delta\mathrm{U}+\mathrm{U}\left(\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}\right)\right]dx\,dy.$$

Substituant ces valeurs dans l'intégrale double $SS\,F\,\delta(\mathrm{U}\,dx\,dy)$ et faisant disparaître par des intégrations par parties les différences partielles des variations marquées par δ, on aura

$$S\left(\mathrm{U}\,\delta y+\frac{z_{,}}{\mathrm{U}}\delta u\right)F\,dx+S\left(\mathrm{U}\,\delta x+\frac{z'}{\mathrm{U}}\delta u\right)F\,dy$$
$$+SS\left[\left(F\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x}-\frac{\partial F\mathrm{U}}{\partial x}\right)\delta x+\left(F\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y}-\frac{\partial F\mathrm{U}}{\partial y}\right)\delta y-\mathrm{V}\,\delta u\right]dx\,dy,$$

où

$$\mathrm{V}=\frac{\partial\frac{Fz'}{\mathrm{U}}}{\partial x}+\frac{\partial\frac{Fz_{,}}{\mathrm{U}}}{\partial y}\qquad \text{et}\qquad \delta u=\delta z-z'\,\delta x-z_{,}\,\delta y\quad \text{(art. cités).}$$

Les intégrales simples relatives à x et à y se rapportent aux limites et disparaissent d'elles-mêmes, dans le cas où l'on suppose que les bords de la surface sont fixes, parce qu'alors les variations δx, δy, δz sont nulles dans tous les points du contour de la surface.

Les termes sous le double signe SS étant ajoutés à ceux de l'intégrale double $SS(X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z)\mathrm{U}\,dx\,dy$, on égalera séparément à zéro les coefficients des variations δx, δy, δz, et l'on aura les trois équations (¹)

$$\mathrm{XU} + \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{UF}}{\partial x} + \mathrm{V}z' = 0,$$

$$\mathrm{YU} + \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{UF}}{\partial y} + \mathrm{V}z_{,} = 0,$$

$$\mathrm{ZU} - \mathrm{V} = 0.$$

Les deux premières donneront la valeur de la force F qu'il faudra substituer dans l'expression de V de la troisième, de sorte qu'on n'aura, en dernière analyse, qu'une seule équation à différences partielles pour déterminer la surface d'équilibre.

En effet, quoique la force F doive être supposée une fonction connue de l'élément dm de la surface dans son état de contraction ou d'extension, elle n'en demeure pas moins indéterminée, parce que la grandeur absolue des éléments de la surface ne peut entrer dans le calcul; de sorte que la valeur de F ne peut être déterminée que par les conditions mêmes de l'équilibre : c'est ici un cas semblable à celui de l'article 43.

45. Pour éliminer la quantité F, on substituera dans les deux premières équations la valeur de V tirée de la dernière; elles deviendront

$$\mathrm{U}\left(\mathrm{X} + \mathrm{Z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} - \frac{\partial \mathrm{UF}}{\partial x} = 0,$$

$$\mathrm{U}\left(\mathrm{X} + \mathrm{Z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathrm{UF}}{\partial y} = 0.$$

Soit, comme dans l'article 28,

$$\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz = d\Pi;$$

on aura, puisque z est censée fonction de x, y,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \mathrm{X} + \mathrm{Z}\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \mathrm{Y} + \mathrm{Z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

et les deux équations deviendront, en divisant par U,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y},$$

lesquelles donnent simplement celle-ci

$$d\Pi = d\mathrm{F},$$

d'où

$$\mathrm{F} = \Pi + a,$$

résultat conforme à celui de l'article 36 de la Section IV. Ensuite la troisième équation donnera, en regardant Π comme fonction de x, y, z,

$$\mathrm{U}\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial \frac{\mathrm{F}z'}{\mathrm{U}}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{\mathrm{F}z_{,}}{\mathrm{U}}}{\partial y} = 0;$$

ce sera l'équation de la surface.

Si la surface différait très peu d'un plan, en sorte que l'ordonnée z fût très petite, alors, en négligeant les quantités très petites du second ordre, on aurait

$$\mathrm{U} = 1;$$

or

$$\mathrm{F} = \Pi + a,$$

(¹) Il importe de remarquer ici que les conclusions de Lagrange ne subsisteraient plus si l'on supposait δx fonction de la seule variable x et δy fonction de la seule variable y, comme on serait tenté de le faire en se rappelant les hypothèses dans lesquelles ont été établies (Sect. IV, art. 33, 34) les formules que Lagrange applique ici. En effet, pour qu'une intégrale

$$\mathrm{SS}(\mathrm{A}\,\delta x + \mathrm{B}\,\delta y + \mathrm{C}\,\delta z)\,dx\,dy$$

soit nulle dans ces hypothèses, il n'est plus nécessaire que l'on ait en chaque point

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} = 0;$$

mais il suffit que l'on ait

$$\mathrm{S}\,\mathrm{A}\,dy = 0$$

pour toutes les valeurs de x,

$$\mathrm{S}\,\mathrm{B}\,dx = 0$$

pour toutes les valeurs de y et

$$\mathrm{C} = 0$$

pour toutes les valeurs de x et de y. Rapprocher cette remarque de la Note relative à l'article 32 de la Section IV. (*G. D.*)

a étant une constante, et l'équation de la surface serait

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} - \frac{\partial (\Pi + a)\frac{\partial z}{\partial x}}{\partial x} - \frac{\partial (\Pi + a)\frac{\partial z}{\partial y}}{\partial y} = 0.$$

En supposant qu'il n'y ait d'autres forces que la gravité g qui agisse suivant l'ordonnée z pour l'augmenter, on aura $\Pi = -gz$; par conséquent, en négligeant toujours les secondes dimensions de z,

$$a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = -g,$$

équation intégrable en général, mais avec des fonctions imaginaires qui rendent cette solution peu susceptible d'application.

§ III. — *De l'équilibre d'un fil ou lame élastique.*

46. Reprenons le cas d'un fil inextensible; mais, au lieu de le supposer en même temps parfaitement flexible, comme on l'a fait jusqu'ici, supposons-le élastique, en sorte qu'il y ait dans chaque point une force, que j'appellerai E, qui s'oppose à l'inflexion du fil et qui tende, par conséquent, à diminuer l'angle de contingence [1]. Nommant cet angle e, on aura, comme dans l'article 26 (en changeant seulement d en δ), $\mathrm{E}\,\delta e$ pour le moment de chaque force E; donc $\mathrm{S}\,\mathrm{E}\,\delta e$ sera la somme des moments de toutes les forces d'élasticité qui agissent dans toute la longueur du fil, laquelle devra donc être ajoutée au premier membre de l'équation générale de l'équilibre dans le cas d'un fil inextensible et parfaitement flexible (art. 29).

Toute la difficulté consiste à ramener l'intégrale $\mathrm{S}\,\mathrm{E}\,\delta e$ à la forme

(1) L'expression adoptée par Lagrange pour l'évaluation de la somme des moments des forces d'élasticité n'est pas admissible pour les courbes à double courbure. Binet en a fait la remarque dans le tome X du *Journal de l'École Polytechnique*. *Voir* aussi un Mémoire de Poisson qui fait partie du tome III de la *Correspondance sur l'École Polytechnique*. Ces géomètres remarquent avec raison qu'il doit entrer, dans l'expression de la somme des moments, un terme proportionnel à la variation de l'angle de deux plans osculateurs consécutifs. (*Voir* une Note à la fin du Volume.) (*J. Bertrand.*)

convenable; pour cela, il faut commencer par chercher la valeur de e; or nous avons trouvé plus haut (art. 26)

$$-\cos e = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg},$$

d'où l'on tire

$$\sin^2 e = \frac{4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2}{4f^2g^2}.$$

Pour appliquer cette formule au cas présent, il suffit de remarquer que les coordonnées x', y', z', x'', y'', z'', x''', y''', z''', par lesquelles nous avons exprimé les quantités f, g, h (art. 12 et 20), deviennent ici x, y, z; $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$; $x + 2\,dx + d^2x$, $y + 2\,dy + d^2y$, $z + 2\,dz + d^2z$; en sorte qu'on aura

$$f^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2,$$

$$\begin{aligned} g^2 &= (dx + d^2x)^2 + (dy + d^2y)^2 + (dz + d^2z)^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2(dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z) + (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 \\ &= ds^2 + 2\,ds\,d^2s + (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^2 &= (2\,dx + d^2x)^2 + (2\,dy + d^2y)^2 + (2\,dz + d^2z)^2 \\ &= 4\,ds^2 + 4\,ds\,d^2s + (d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2; \end{aligned}$$

donc

$$f^2 + g^2 - h^2 = -2\,ds^2 - 2\,ds\,d^2s$$

et

$$\begin{aligned} &4f^2g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2 \\ &\quad = 4\,ds^4 + 8\,ds^3\,d^2s + 4\,ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - 4(ds^2 + ds\,d^2s)^2 \\ &\quad = 4\,ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]. \end{aligned}$$

Donc enfin on aura, en négligeant les infiniment petits du troisième ordre,

$$\sin^2 e = \frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}{ds^2}.$$

Comme cette valeur de $\sin^2 e$ est infiniment petite du deuxième ordre, il s'ensuit que $\sin e$, et par conséquent aussi l'angle e, sera infiniment petit du premier ordre; de sorte qu'on aura

$$e = \frac{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}{ds};$$

c'est l'expression de l'angle de contingence dans une courbe quelconque à double courbure, et qui revient à celle de l'article 41.

47. On différentiera maintenant suivant δ, pour avoir la valeur de δe, et comme, par la condition de l'inextensibilité du fil, on a déjà $\delta\, ds = 0$ (art. 29) et, par conséquent aussi, $d\,\delta\, ds = \delta\, d^2 s = 0$, on pourra traiter, dans la différentiation dont il s'agit, ds et $d^2 s$ comme constantes; ainsi l'on aura

$$\delta e = \frac{d^2x\,\delta d^2x + d^2y\,\delta d^2y + d^2z\,\delta d^2z}{ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Substituant dans $\mathsf{S}\,\mathrm{E}\,\delta e$ et faisant, pour abréger,

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{E}}{ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}},$$

on aura

$$\mathsf{S}\,\mathrm{E}\,de = \mathsf{S}\,\mathrm{I}\,d^2x\,\delta d^2x + \mathsf{S}\,\mathrm{I}\,d^2y\,\delta d^2y + \mathsf{S}\,\mathrm{I}\,d^2z\,\delta d^2z.$$

Ces expressions étant traitées suivant les règles données dans l'article 15 de la Section IV, en y changeant d'abord δd en $d\delta$ et intégrant ensuite par parties pour faire disparaître le d avant δ, on aura les transformées suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathsf{S}\,\mathrm{I}\,d^2x\,\delta d^2x &= +\mathrm{I}''\,d^2x''\,d\delta x'' - d(\mathrm{I}''\,d^2x'')\,\delta x'' \\
&\quad - \mathrm{I}'\,d^2x'\,d\delta x' + d(\mathrm{I}'\,d^2x')\,\delta x' + \mathsf{S}\,d^2(\mathrm{I}\,d^2x)\,\delta x, \\
\mathsf{S}\,\mathrm{I}\,d^2y\,\delta d^2y &= +\mathrm{I}''\,d^2y''\,d\delta y'' - d(\mathrm{I}''\,d^2y'')\,\delta y'' \\
&\quad - \mathrm{I}'\,d^2y'\,d\delta y' + d(\mathrm{I}'\,d^2y')\,\delta y' + \mathsf{S}\,d^2(\mathrm{I}\,d^2y)\,\delta y, \\
\mathsf{S}\,\mathrm{I}\,d^2z\,\delta d^2z &= +\mathrm{I}''\,d^2z''\,d\delta z'' - d(\mathrm{I}''\,d^2z'')\,\delta z'' \\
&\quad - \mathrm{I}'\,d^2z'\,d\delta z' + d(\mathrm{I}'\,d^2z')\,\delta z' + \mathsf{S}\,d^2(\mathrm{I}\,d^2z)\,\delta z.
\end{aligned}$$

On ajoutera donc ces différents termes à ceux qui forment le pre-

mier membre de l'équation générale de l'équilibre de l'article 29, et l'on aura l'équation de l'équilibre d'un fil inextensible et élastique.

48. Égalant d'abord à zéro les coefficients des variations δx, δy, δz qui se trouvent sous le signe S, on aura ces trois équations indéfinies

$$\begin{aligned}
&\mathrm{X}\,dm - d\frac{\lambda\,dx}{ds} + d^2(\mathrm{I}\,d^2x) = 0, \\
&\mathrm{Y}\,dm - d\frac{\lambda\,dy}{ds} + d^2(\mathrm{I}\,d^2y) = 0, \\
&\mathrm{Z}\,dm - d\frac{\lambda\,dz}{ds} + d^2(\mathrm{I}\,d^2z) = 0;
\end{aligned}$$

d'où il faudra éliminer l'indéterminée λ, ce qui les réduira à deux, qui suffiront pour déterminer la courbe du fil.

Une première intégration donne

$$\begin{aligned}
&\lambda\frac{dx}{ds} - d(\mathrm{I}\,d^2x) = \mathrm{A} + \int \mathrm{X}\,dm, \\
&\lambda\frac{dy}{ds} - d(\mathrm{I}\,d^2y) = \mathrm{B} + \int \mathrm{Y}\,dm, \\
&\lambda\frac{dz}{ds} - d(\mathrm{I}\,d^2z) = \mathrm{C} + \int \mathrm{Z}\,dm,
\end{aligned}$$

A, B, C étant des constantes arbitraires, et l'élimination de λ donnera

$$\begin{aligned}
&dx\,d(\mathrm{I}\,d^2y) - dy\,d(\mathrm{I}\,d^2x) = \left(\mathrm{A} + \int \mathrm{X}\,dm\right)dy - \left(\mathrm{B} + \int \mathrm{Y}\,dm\right)dx, \\
&dx\,d(\mathrm{I}\,d^2z) - dz\,d(\mathrm{I}\,d^2x) = \left(\mathrm{A} + \int \mathrm{X}\,dm\right)dz - \left(\mathrm{C} + \int \mathrm{Z}\,dm\right)dx, \\
&dy\,d(\mathrm{I}\,d^2z) - dz\,d(\mathrm{I}\,d^2y) = \left(\mathrm{B} + \int \mathrm{Y}\,dm\right)dz - \left(\mathrm{C} + \int \mathrm{Z}\,dm\right)dy,
\end{aligned}$$

dont la dernière est déjà contenue dans les deux autres.

Ces équations sont de nouveau intégrables, et l'on aura

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I}(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = \mathrm{F} + \int\left(\mathrm{A} + \int \mathrm{X}\,dm\right)dy - \int\left(\mathrm{B} + \int \mathrm{Y}\,dm\right)dx, \\
&\mathrm{I}(dx\,d^2z - dz\,d^2x) = \mathrm{G} + \int\left(\mathrm{A} + \int \mathrm{X}\,dm\right)dz - \int\left(\mathrm{C} + \int \mathrm{Z}\,dm\right)dx, \\
&\mathrm{I}(dy\,d^2z - dz\,d^2y) = \mathrm{H} + \int\left(\mathrm{B} + \int \mathrm{Y}\,dm\right)dz - \int\left(\mathrm{C} + \int \mathrm{Z}\,dm\right)dy,
\end{aligned}$$

F, G, H étant de nouvelles constantes.

Or nous avons supposé plus haut (art. 47)

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{E}}{ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}};$$

le carré du dénominateur de cette quantité est

$$\begin{aligned} &ds^2[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - ds^2(d^2s)^2 \\ &\quad = (dx^2 + dy^2 + dz^2)[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2] - (dx\,d^2x + dy\,d^2y + dz\,d^2z)^2 \\ &\quad = (dx\,d^2y - dy\,d^2x)^2 + (dx\,d^2z - dz\,d^2x)^2 + (dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2. \end{aligned}$$

Donc, si l'on ajoute ensemble les carrés des trois équations précédentes, on aura celle-ci, sans différentielles,

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^2 = &+ \left[\mathrm{F} + \int\left(\mathrm{A} + \int \mathrm{X}\,dm\right)dy - \int\left(\mathrm{B} + \int \mathrm{Y}\,dm\right)dx\right]^2 \\ &+ \left[\mathrm{G} + \int\left(\mathrm{A} + \int \mathrm{X}\,dm\right)dz - \int\left(\mathrm{C} + \int \mathrm{Z}\,dm\right)dx\right]^2 \\ &+ \left[\mathrm{H} + \int\left(\mathrm{B} + \int \mathrm{Y}\,dm\right)dz - \int\left(\mathrm{C} + \int \mathrm{Z}\,dm\right)dx\right]^2; \end{aligned}$$

et si l'on divise ensemble deux des mêmes équations, on aura celle-ci, où l'élasticité n'entre pas,

$$\frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{\mathrm{G} + \int\left(\mathrm{A} + \int \mathrm{X}\,dm\right)dz - \int\left(\mathrm{C} + \int \mathrm{Z}\,dm\right)dx}{\mathrm{F} + \int\left(\mathrm{A} + \int \mathrm{X}\,dm\right)dy - \int\left(\mathrm{B} + \int \mathrm{Y}\,dm\right)dx}.$$

Ces deux équations sont ce qu'il y a de plus simple pour déterminer la courbe élastique, en ayant égard à la double courbure.

49. On suppose communément que la force élastique qui s'oppose à l'inflexion est en raison inverse du rayon osculateur. Ainsi, en nommant ρ ce rayon, on aura $\mathrm{E} = \frac{\mathrm{K}}{\rho}$, K étant un coefficient constant.

Mais on sait que $\rho = \frac{ds}{e}$; donc $\mathrm{E} = \frac{\mathrm{K}e}{ds}$: ainsi la quantité I, que nous avons supposée égale à $\frac{\mathrm{E}}{e\,ds^2}$ (art. 47), deviendra $\frac{\mathrm{K}}{ds^3}$ et, par conséquent, constante, en supposant, ce qui est permis, ds constante.

Ainsi les trois premières équations (art. 48) seront

$$\mathrm{X}\,dm - d\frac{\lambda\,dx}{ds} + \mathrm{K}\frac{d^4x}{ds^3} = 0,$$

$$\mathrm{Y}\,dm - d\frac{\lambda\,dy}{ds} + \mathrm{K}\frac{d^4y}{ds^3} = 0,$$

$$\mathrm{Z}\,dm - d\frac{\lambda\,dz}{ds} + \mathrm{K}\frac{d^4z}{ds^3} = 0.$$

Si l'on ajoute ensemble ces trois équations, après avoir multiplié la première par $\frac{dx}{ds}$, la deuxième par $\frac{dy}{ds}$ et la troisième par $\frac{dz}{ds}$, on aura, à cause de

$$\frac{dx}{ds}\,d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d\frac{dz}{ds} = \frac{1}{2}\,d\left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2}\right) = 0,$$

l'équation

$$(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz)\frac{dm}{ds} + \mathrm{K}\frac{dx\,d^4x + dy\,d^4y + dz\,d^4z}{ds^4} = d\lambda.$$

Soit Γ l'épaisseur du fil; on aura $dm = \Gamma\,ds$. L'équation précédente étant intégrée, en supposant ds constant, donnera

$$\begin{aligned} \lambda = &\int \Gamma(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz) \\ &+ \mathrm{K}\left[\frac{dx\,d^3x + dy\,d^3y + dz\,d^3z}{ds^4} - \frac{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2}{2\,ds^4}\right]. \end{aligned}$$

Cette valeur de λ exprime la tension de la lame élastique, c'est-à-dire la résistance avec laquelle elle s'oppose à la force qui tend à l'allonger, comme dans l'article 31.

50. Le cas le plus simple et le plus ordinaire est celui dans lequel les forces X, Y, Z qu'on suppose agir sur tous les points de la lame élastique sont nulles, et où la courbure de la lame vient uniquement des forces appliquées à ses deux extrémités. Dans ce cas, les équa-

tions intégrales de l'article 48 donnent, en mettant pour I sa valeur $\frac{K}{ds^3}$,

$$K\frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{ds^3} = F + Ay - Bx,$$

$$K\frac{dx\,d^2z - dz\,d^2x}{ds^3} = G + Az - Cx,$$

$$K\frac{dy\,d^2z - dz\,d^2y}{ds^3} = H + Bz - Cy;$$

mais l'intégration ultérieure de celles-ci est peut-être impossible en général [1].

Lorsque la courbure de la lame est toute dans un même plan, en prenant pour ce plan celui des x et y et faisant $dy = ds\sin\varphi$, $dx = ds\cos\varphi$, la première équation, qui est alors la seule nécessaire, devient

$$\frac{d\varphi}{ds} = F + A\int\sin\varphi\,ds - B\int\cos\varphi\,ds,$$

laquelle, étant différentiée, donne

$$\frac{d^2\varphi}{d^2s} = A\sin\varphi - B\cos\varphi;$$

multipliant par $d\varphi$ et intégrant derechef,

$$\frac{1}{2}\frac{d\varphi^2}{ds^2} = A\cos\varphi + B\sin\varphi + D,$$

d'où l'on tire

$$ds = \frac{d\varphi}{\sqrt{2D + 2A\cos\varphi + 2B\sin\varphi}}$$

et, de là,

$$dx = \frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{2D + 2A\cos\varphi + 2B\sin\varphi}};$$

[1] Cette intégration a été effectuée par Binet, qui a même considéré les équations plus générales auxquelles on est conduit en rétablissant dans la somme des moments des forces d'élasticité le terme proportionnel à la variation de l'angle de deux plans osculateurs consécutifs. (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1844, 1er semestre, p. 1115.)
(*J. Bertrand.*)

et, comme on a par la première équation $F + Ay - Bx = \frac{d\varphi}{ds}$, on aura

$$y = \frac{Bx - F}{A} - \frac{1}{A}\sqrt{2D + 2A\cos\varphi + 2B\sin\varphi}.$$

Ainsi tout se réduit à intégrer les valeurs de ds et dx; mais ces intégrations dépendent de la rectification des sections coniques. Jusqu'à présent, il ne paraît pas qu'on ait été plus loin dans la solution générale du problème de la courbe élastique.

51. Considérons maintenant les termes de l'équation générale qui sont hors du signe S; ces termes sont

$$\begin{aligned}
&\left[\lambda''\frac{dx''}{ds''} - d(\mathrm{I}''d^2x'')\right]\delta x'' + \mathrm{I}''d^2x''\,d\delta x''\\
+&\left[\lambda''\frac{dy''}{ds''} - d(\mathrm{I}''d^2y'')\right]\delta y'' + \mathrm{I}''d^2y''\,d\delta y''\\
+&\left[\lambda''\frac{dz''}{ds''} - d(\mathrm{I}''d^2z'')\right]\delta z'' + \mathrm{I}''d^2z''\,d\delta z''\\
-&\left[\lambda'\frac{dx'}{ds'} - d(\mathrm{I}'d^2x')\right]\delta x' - \mathrm{I}'d^2x'\,d\delta x'\\
-&\left[\lambda'\frac{dy'}{ds'} - d(\mathrm{I}'d^2y')\right]\delta y' - \mathrm{I}'d^2y'\,d\delta y'\\
-&\left[\lambda'\frac{dz'}{ds'} - d(\mathrm{I}'d^2z')\right]\delta z' - \mathrm{I}'d^2z'\,d\delta z';
\end{aligned}$$

et il faudra les faire disparaître indépendamment des valeurs de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\delta x''$, ...

Donc : 1° si le fil est entièrement libre, il faudra que les coefficients des douze quantités $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$, $d\delta x''$, $d\delta y''$, $d\delta z''$, $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, $d\delta x'$, $d\delta y'$, $d\delta z'$ soient nuls, chacun en particulier.

Or, d'après les premières équations intégrales de l'article 48, on voit qu'en faisant commencer les intégrations au premier point du fil, les coefficients de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ sont égaux à A, B, C, et ceux de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ deviennent $A + \mathsf{S}X\,dm$, $B + \mathsf{S}Y\,dm$, $C + \mathsf{S}Z\,dm$. Ainsi il faudra que l'on ait, dans le cas dont il s'agit,

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0$$

et

$$\mathsf{S}\, X\, dm = 0, \quad \mathsf{S}\, Y\, dm = 0, \quad \mathsf{S}\, Z\, dm = 0.$$

Ensuite il faudra que l'on ait aussi

$$\Gamma'' d^2 x'' = 0, \quad \Gamma'' d^2 y'' = 0, \quad \Gamma'' d^2 z'' = 0$$

et

$$\Gamma' d^2 x' = 0, \quad \Gamma' d^2 y' = 0, \quad \Gamma' d^2 z' = 0,$$

pour faire disparaître les termes affectés de $d\delta x''$, $d\delta y''$, ...; et il est clair que les secondes équations intégrales du même article donneront

$$F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0$$

et

$$\mathsf{S}\left(dy \int X\, dm - dx \int Y\, dm\right) = 0, \quad \mathsf{S}\left(dz \int X\, dm - dx \int Z\, dm\right) = 0,$$
$$\mathsf{S}\left(dz \int Y\, dm - dy \int Z\, dm\right) = 0.$$

2° Si la première extrémité du fil est fixe, alors

$$\delta x' = 0, \quad \delta y' = 0, \quad \delta z' = 0;$$

par conséquent, A, B, C ne seront pas nuls; mais la condition que les coefficients de $\delta x''$, $\delta y''$, $\delta z''$ soient nuls donnera

$$A = -\mathsf{S}\, X\, dm, \quad B = -\mathsf{S}\, Y\, dm, \quad C = -\mathsf{S}\, Z\, dm;$$

et, si la position de la tangente à cette extrémité était donnée aussi, on aurait, de plus,

$$d\delta x' = 0, \quad d\delta y' = 0, \quad d\delta z' = 0;$$

par conséquent, F, G, H ne seraient pas nuls, mais la nullité des coefficients de $d\delta x''$, $d\delta y''$, $d\delta z''$ donnerait

$$F = \mathsf{S}\left[\left(B + \int Y\, dm\right) dx - \left(A + \int X\, dm\right) dy\right],$$
$$G = \mathsf{S}\left[\left(C + \int Z\, dm\right) dx - \left(A + \int X\, dm\right) dz\right],$$
$$H = \mathsf{S}\left[\left(C + \int Z\, dm\right) dy - \left(B + \int Y\, dm\right) dz\right].$$

On raisonnera de la même manière par rapport à l'état de la seconde extrémité du fil.

3° Enfin, si, outre les forces qui agissent sur tous les points du fil, il y en avait de particulières X', Y', Z', X'', Y'', Z'', appliquées à l'une et à l'autre extrémité, il n'y aurait qu'à ajouter aux termes ci-dessus les suivants

$$X'\delta x' + Y'\delta y' + Z'\delta z' + X''\delta x'' + Y''\delta y'' + Z''\delta z'',$$

et s'il y avait, de plus, d'autres conditions relatives à l'état de ces extrémités, on opérerait toujours de la même façon et d'après les mêmes principes.

52. Si l'on voulait que le fil fût doublement élastique, tant à l'égard de l'extensibilité qu'à l'égard de la flexibilité, alors on aurait, dans l'équation générale de l'équilibre, à la place du terme $\mathsf{S}\, \lambda\, d\delta s$, celui-ci $\mathsf{S}\, F\, d\delta s$, c'est-à-dire simplement F à la place de λ, en nommant F la force d'élasticité qui résiste à l'extension du fil (art. 42). Mais il faudrait, de plus, dans ce cas, regarder ds comme variable dans l'expression de δe; par conséquent, il faudrait ajouter à la valeur de δe de l'article 47 ces deux termes

$$-\frac{e\,\delta ds}{ds} - \frac{d^2 s\, \delta d^2 s}{e\, ds^2}.$$

On aurait donc à ajouter à la valeur de $\mathsf{S}\, E\, \delta e$ du même article les termes

$$-\mathsf{S}\frac{Ee}{ds}\delta ds - \mathsf{S}\frac{E\, d^2 s}{e\, ds^2}\delta d^2 s.$$

Le dernier se réduit d'abord à

$$-\frac{E'' d^2 s''}{e'' ds''^2} d\delta s'' + \frac{E' d^2 s'}{e' ds'^2} d\delta s' + \mathsf{S}\, d\frac{E\, d^2 s}{e\, ds^2}\delta ds;$$

donc il faudra ajouter à la valeur de $\mathsf{S}\, E\, \delta e$ les termes

$$-\frac{E'' d^2 s''}{e'' ds''^2} d\delta s'' + \frac{E' d^2 s'}{e' ds'^2} d\delta s' + \mathsf{S}\left(d\frac{E\, d^2 s}{e\, ds^2} - \frac{Ee}{ds}\right)\delta ds.$$