LEÇON VINGTIÈME.

ÉQUATIONS DÉRIVÉES A PLUSIEURS VARIABLES. THÉORIE DE CES ÉQUATIONS. MÉTHODES GÉNÉRALES POUR TROUVER LES ÉQUATIONS PRIMITIVES DES ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE A PLUSIEURS VARIABLES.

Considérons d'abord une équation quelconque entre les trois variables x, y et z, par laquelle z soit une fonction déterminée de x et y.

Représentons cette équation par

$$F(x, y, z) = 0,$$

et supposons, pour un moment, que x et y soient des fonctions données d'une même variable t; alors z sera aussi une fonction de t dépendante de l'équation proposée, et, par la théorie des équations dérivées exposées dans les Leçons précédentes, non seulement la fonction $F(x, y, z)$ sera nulle, mais encore ses dérivées $F'(x, y, z)$, $F''(x, y, z)$, ..., prises relativement à t, seront nulles.

Or, en conservant la notation de la Leçon VI, on a

$$F'(x, y, z) = x' F'(x) + y' F'(y) + z' F'(z);$$

dans cette formule, x', y', z' sont les fonctions dérivées de x, y, z par rapport à t, et $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ sont les fonctions dérivées de $F(x, y, z)$, prises par rapport à chacune des variables x, y, z en particulier.

Ainsi l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

donnera celle-ci

$$x' F'(x) + y' F'(y) + z' F'(z) = 0.$$

Mais, en considérant z comme fonction de x et y, on a

$$z' = x' z'' + y' z'';$$

donc, substituant, on aura

$$x' [F'(x) + z'' F'(z)] + y' [F'(y) + z'' F'(z)] = 0.$$

Pour que les fonctions x et y de t demeurent indéterminées, il faudra que leurs fonctions dérivées x' et y' disparaissent de l'équation précédente, ce qui ne peut avoir lieu qu'en faisant les deux équations séparées

$$F'(x) + z' F'(z) = 0, \qquad F'(y) + z' F'(z) = 0.$$

Il est visible que ces deux équations ne sont autre chose que les dérivées de l'équation primitive

$$F(x, y, z) = 0,$$

prises séparément par rapport à x et par rapport à y.

En effet, puisque dans cette équation les deux variables x et y sont essentiellement indépendantes entre elles, ses dérivées par rapport à x et par rapport à y auront lieu chacune en particulier. Or, la variable z étant, par cette équation, une fonction de x et y, dont les fonctions dérivées sont z' par rapport à x seul, et z' par rapport à y seul, il est clair que la dérivée de $F(x, y, z)$ sera $F'(x) + z' F'(z)$ par rapport à x, et qu'elle sera $F'(y) + z' F'(z)$ par rapport à y; de sorte que l'équation primitive

$$F(x, y, z) = 0$$

donnera ces deux dérivées indépendantes

$$F'(x) + z' F'(z) = 0, \qquad F'(y) + z' F'(z) = 0,$$

lesquelles serviront à trouver les valeurs des fonctions z' et z', et l'on aura

$$z' = -\frac{F'(x)}{F'(z)}, \qquad z' = -\frac{F'(y)}{F'(z)}.$$

Ayant ainsi les valeurs des deux premières fonctions dérivées de z, on en déduira celles des fonctions secondes z'', z'', z'', en prenant les dérivées de z' et z' par rapport à x et y, et ainsi de suite.

Il suit de là que, l'équation primitive

$$F(x, y, z) = 0$$

ayant lieu, ses deux dérivées

$$F'(x) + z'' F'(z) = 0, \qquad F'(y) + z'' F'(z) = 0$$

auront lieu aussi en même temps; par conséquent une combinaison quelconque de ces trois équations aura lieu aussi, et pourra tenir lieu de l'équation dérivée.

Ainsi une équation entre x, y, z et les deux dérivées z', z'', ou $\left(\frac{z'}{x'}\right)$, $\left(\frac{z'}{y'}\right)$, par rapport à x et y, sera une équation du premier ordre à trois variables, à laquelle répondra nécessairement une équation primitive en x, y, z.

Soit, par exemple, l'équation

$$z'' + M z' = N,$$

M et N étant des quantités constantes.

Son équation primitive sera

$$z - Nx = \varphi(y - Mx),$$

la caractéristique φ dénotant une fonction quelconque.

En effet, si l'on prend les fonctions dérivées par rapport à x, on a

$$z' - N = -M \varphi'(y - Mx)$$

et, si l'on prend ces fonctions par rapport à y, on a

$$z' = \varphi'(y - Mx);$$

de sorte qu'en éliminant la fonction dérivée φ', on a l'équation dérivée proposée

$$z'' + M z' - N = 0.$$

Considérons l'équation générale de la même forme, dans laquelle M et N soient des fonctions quelconques données de x, y, z.

Supposons que

$$F(x, y, z) = 0$$

soit son équation primitive; on aura, par ce qu'on a vu ci-dessus,

$$z' = -\frac{F'(x)}{F'(z)}, \qquad z'' = -\frac{F'(y)}{F'(z)};$$

donc, substituant ces valeurs dans l'équation proposée, et multipliant tous les termes par $F'(z)$, on aura, en changeant les signes,

$$F'(x) + M F'(y) + N F'(z) = 0.$$

Or on a, en général, comme on l'a vu,

$$F'(x, y, z) = x' F'(x) + y' F'(y) + z' F'(z),$$

en regardant x, y, z comme des fonctions quelconques d'une autre variable t; donc, substituant dans cette formule, à la place de $F'(x)$, sa valeur tirée de l'équation précédente, savoir, $-M F'(y) - N F'(z)$, on aura

$$F'(x, y, z) = (y' - x' M) F'(y) + (z' - x' N) F'(z).$$

On voit, par cette expression de la fonction dérivée $F'(x, y, z)$, que cette fonction deviendra nulle si l'on établit entre les trois variables x, y, z des relations telles, que l'on ait ces deux équations particulières

$$y' - M x' = 0, \qquad z' - N x' = 0.$$

Ces équations, étant entre les trois variables x, y, z, serviront à déterminer les valeurs de ces variables en fonctions de la troisième; de sorte que, par la substitution de ces valeurs, la fonction $F(x, y, z)$ deviendra aussi une fonction de cette troisième variable. Donc, puisque sa fonction dérivée doit alors devenir nulle, il s'ensuit que la variable doit disparaître d'elle-même, et que la fonction $F(x, y, z)$ ne pourra contenir, après cette substitution, que des constantes.

Or, les deux équations

$$y' - M x' = 0, \qquad z' - N x' = 0$$

étant du premier ordre, leurs équations primitives contiendront deux

constantes arbitraires que nous désignerons par a et b. En effet, si de ces deux équations on veut éliminer, par exemple, la variable z, on tombera dans une équation du second ordre en x et y, dans laquelle on pourra faire

$$x' = 1 \quad \text{ou} \quad y' = 1,$$

suivant qu'on voudra regarder y comme fonction de x, ou x comme fonction de y, et cette équation aura pour équation primitive une équation en x et y, avec deux constantes arbitraires.

Ensuite on aura aussi z en fonction de x et y par l'une des deux équations proposées.

Il suit de là qu'après la substitution des valeurs de y et z en x, tirées des deux équations du premier ordre dont il s'agit, la fonction $F(x, y, z)$ ne contiendra plus que les constantes a et b avec celles qui se trouvent dans les quantités M et N; de sorte qu'elle deviendra simplement une fonction de a et b, que nous désignerons par $\Phi(a, b)$.

Par conséquent l'équation primitive

$$F(x, y, z) = 0$$

se réduira à

$$\Phi(a, b) = 0,$$

par laquelle on voit que l'une des constantes a et b sera fonction de l'autre.

Mais, à la place des constantes a et b, on peut mettre leurs valeurs en x, y, z, tirées des deux équations primitives, où elles entrent comme arbitraires. Donc, si l'on désigne par P et Q ces valeurs de a et b, l'équation primitive de la proposée deviendra

$$\Phi(P, Q) = 0,$$

la fonction désignée par Φ étant arbitraire.

Il résulte de là une méthode générale pour trouver l'équation primitive d'une équation quelconque du premier ordre, à trois variables x, y, z, dans laquelle les deux fonctions dérivées de la variable, qui est censée fonction des deux autres, ne se trouvent qu'à la première dimension, telle que

$$z' + Mz' + N,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N,$$

M et N étant des fonctions quelconques de x, y, z. On fera ces deux équations

$$y' - Mx' = 0, \qquad z' - Nx' = 0,$$

dans lesquelles on peut supposer l'une des trois fonctions dérivées x', y', z' égales à l'unité, suivant la variable qu'on voudra regarder comme principale, et dont les deux autres seront censées des fonctions; et, ayant trouvé, s'il est possible, les deux équations primitives de ces équations, on en déduira les valeurs P et Q des deux constantes arbitraires a et b qu'elles doivent renfermer; on aura alors

$$\Phi(P, Q) = 0$$

pour l'équation primitive cherchée, d'où résulte

$$Q = \varphi(P),$$

la caractéristique φ désignant une fonction quelconque de Q.

L'analyse précédente est plus simple et plus directe que celle que j'ai donnée dans la *Théorie des fonctions* [1]; c'est ce qui m'a engagé à la mettre ici, d'autant qu'elle s'applique avec la même facilité aux équations semblables entre un plus grand nombre de variables. Dans les *Mémoires de Berlin* de 1779 [2], je m'étais contenté de prouver, *a posteriori*, la légitimité et la généralité de cette méthode.

Considérons de la même manière l'équation à quatre variables t, x, y, z de la forme

$$\left(\frac{z'}{t'}\right) + L\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N,$$

L, M, N étant des fonctions quelconques de t, x, y, z.

[1] *Œuvres de Lagrange*, t. IX.
[2] *Ibid.*, t. IV, p. 585.

Si l'on représente son équation par

$$F(t, x, y, z) = 0,$$

sa fonction dérivée $F'(t, x, y, z)$ sera, en général,

$$t' F'(t) + x' F'(x) + y' F'(y) + z' F'(z),$$

et l'on aura, relativement à chacune des variables t, x, y en particulier, les équations

$$F'(t) + \left(\frac{z'}{t'}\right) F'(z) = 0,$$

$$F'(x) + \left(\frac{z'}{x'}\right) F'(z) = 0,$$

$$F'(y) + \left(\frac{z'}{y'}\right) F'(z) = 0.$$

Tirant de ces équations les valeurs des fonctions $\left(\frac{z'}{t'}\right)$, $\left(\frac{z'}{x'}\right)$, $\left(\frac{z'}{y'}\right)$, et les substituant dans l'équation proposée, elle deviendra, après la multiplication par $F'(z)$ et le changement des signes,

$$F'(t) + L F'(x) + M F'(y) + N F'(z) = 0,$$

d'où l'on tire

$$F'(t) = -L F'(x) - M F'(y) - N F'(z).$$

Cette valeur de $F'(t)$ étant substituée dans celle de $F'(t, x, y, z)$, on aura

$$F'(t, x, y, z) = (x' - t'L) F'(x) + (y' - t'M) F'(y) + (z' - t'N) F'(z).$$

Si donc on introduit entre les quatre variables t, x, y, z les relations déterminées par les trois équations

$$x' - t'L = 0, \qquad y' - t'M = 0, \qquad z' - t'N = 0,$$

la fonction dérivée $F'(t, x, y, z)$ deviendra nulle; par conséquent la fonction primitive $F(t, x, y, z)$ ne pourra contenir que des constantes.

Or les trois équations dont il s'agit, étant du premier ordre, auront trois équations primitives qui contiendront trois constantes arbitraires a, b, c, et par lesquelles trois des variables t, x, y, z pourront être

déterminées en fonction de la quatrième. Donc, si dans la fonction $F(t, x, y, z)$ on substitue les valeurs de ces variables, il faudra que la variable restante disparaisse d'elle-même, et la fonction ne pourra plus contenir que les mêmes constantes a, b, c, avec celles qui entreront dans les expressions de L, M, N. De sorte qu'après cette substitution la fonction $F(t, x, y, z)$ deviendra nécessairement de la forme $\Phi(a, b, c)$.

Or les trois équations primitives dont il s'agit déterminent les valeurs de a, b, c en fonctions des variables t, x, y, z; de sorte qu'en désignant ces fonctions par P, Q, R, on peut mettre ces équations sous la forme

$$a = P, \qquad b = Q, \qquad c = R.$$

Donc la fonction $F(t, x, y, z)$ devra être de la forme $\Phi(P, Q, R)$, puisqu'il n'y a que cette forme qui puisse devenir fonction de a, b, c, en vertu des trois équations primitives

$$P = a, \qquad Q = b, \qquad R = c.$$

Donc l'équation primitive

$$F(t, x, y, z) = 0$$

deviendra

$$\Phi(P, Q, R) = 0,$$

par laquelle on aura

$$R = \varphi(P, Q),$$

la caractéristique φ désignant une fonction quelconque de P et Q.

Ainsi :

1° L'équation du premier ordre à trois variables

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N$$

dépend des deux équations du premier ordre entre les mêmes variables

$$y' - Mx' = 0, \qquad z' - Nx' = 0,$$

et, si

$$P = a, \qquad Q = b$$

sont les équations primitives de celles-ci, a et b étant les constantes

arbitraires, l'équation primitive de la proposée sera

$$Q = \varphi(P),$$

$\varphi(P)$ étant une fonction quelconque de P.

2° L'équation du premier ordre à quatre variables

$$\left(\frac{z'}{t'}\right) + L\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N$$

dépend de ces trois équations entre les mêmes variables

$$x' - t'L = 0, \qquad y' - t'M = 0, \qquad z' - t'N = 0.$$

Et, si

$$P = a, \qquad Q = b, \qquad R = c$$

sont les trois équations primitives de celles-ci, a, b, c étant les constantes arbitraires, l'équation primitive de la proposée sera

$$R = \varphi(P, Q),$$

$\varphi(P, Q)$ désignant une fonction quelconque de P et Q, et ainsi de suite.

De cette manière, la recherche des équations primitives des équations du premier ordre, par lesquelles une variable est fonction de deux ou de plusieurs autres, est réduite à la recherche des équations primitives d'équations du même ordre, dans lesquelles toutes les variables sont fonctions d'une seule et même variable. Or, en Analyse, on regarde la solution d'un problème comme connue, lorsqu'elle est réduite à celle d'un problème d'un genre inférieur, quoique celle-ci puisse être sujette encore à beaucoup de difficultés.

Supposons, pour donner des exemples très simples, que les quantités L, M, N soient constantes; les deux équations

$$y' - x'M = 0, \qquad z' - x'N = 0$$

auront ces primitives

$$y - Mx = a, \qquad z - Nx = b;$$

donc l'équation

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N$$

aura cette primitive

$$z - Nx = \varphi(y - Mx),$$

comme nous l'avons déjà vu plus haut.

Les trois équations

$$x' - t'L = 0, \qquad y' - t'M = 0, \qquad z' - t'N = 0$$

auront ces primitives

$$x - Lt = a, \qquad y - Mt = b, \qquad z - Nt = c,$$

et l'équation

$$\left(\frac{z'}{t'}\right) + L\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N$$

aura cette primitive

$$z - Nt = \varphi(x - Lt, y - Mt).$$

Il est bon de remarquer que les équations

$$P = a, \qquad Q = b, \qquad R = c, \qquad \ldots,$$

où a, b, c, ... sont des constantes arbitraires, donnent chacune une solution particulière de l'équation proposée, ce qui est évident par la forme même de la solution générale

$$\Phi(P, Q) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Phi(P, Q, R) = 0;$$

car, puisque la fonction désignée par Φ est arbitraire, on peut toujours réduire ces équations à

$$P - a = 0, \qquad \text{ou} \qquad Q - b = 0, \qquad \text{ou} \qquad R - c = 0, \qquad \ldots$$

Ainsi il est facile de voir que l'équation

$$z - Nx = b$$

satisfait à l'équation dérivée

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) + M\left(\frac{z'}{y'}\right) = N,$$

car elle donne

$$z = Nx + b;$$

donc

$$\left(\frac{z'}{x'}\right)=\mathrm{N}, \qquad \left(\frac{z'}{y'}\right)=0.$$

Mais, si l'on prenait l'autre équation

$$y-\mathrm{M}x=a,$$

on ne verrait pas d'abord comment elle y peut satisfaire, puisque la variable z n'y entre pas. Comme cette équation ne donne qu'un rapport entre x et y, par lequel x est fonction de y, ou y fonction de x, il faudra changer l'équation dérivée de manière qu'au lieu des fonctions dérivées de z, par rapport à x et y, elles contiennent les fonctions dérivées de x par rapport à y et z, ou de y par rapport à x et z, ce qu'on obtiendra par les substitutions que nous avons indiquées plus haut.

Nous allons donner ici cette transformation pour servir d'exemple dans les cas semblables.

On mettra donc à la place de $\left(\frac{z'}{x'}\right)$ et $\left(\frac{z'}{y'}\right)$ les quantités

$$\frac{1}{\left(\frac{x'}{z'}\right)}, \qquad -\frac{\left(\frac{x'}{y'}\right)}{\left(\frac{x'}{z'}\right)},$$

et l'équation dérivée ci-dessus deviendra, en multipliant tous les termes par $\left(\frac{x'}{z'}\right)$,

$$1-\mathrm{M}\left(\frac{x'}{y'}\right)=\mathrm{N}\left(\frac{x'}{z'}\right),$$

dans laquelle x est maintenant censée fonction de y et z.

Or l'équation

$$y-\mathrm{M}x=a$$

donne

$$x=\frac{y-a}{\mathrm{M}},$$

d'où l'on tire

$$\left(\frac{x'}{y'}\right)=\frac{1}{\mathrm{M}}, \qquad \left(\frac{x'}{z'}\right)=0,$$

valeurs qui satisfont évidemment à l'équation précédente.

Nous venons de voir, dans les exemples précédents, que l'équation primitive renferme, dans le cas de trois variables, une fonction arbitraire d'une quantité composée de ces variables, et, dans le cas de quatre variables, une fonction arbitraire de deux quantités composées de ces variables.

Nous allons démontrer que cette proposition est générale, quelle que soit la forme de l'équation dérivée du premier ordre.

En appliquant aux équations à trois variables la théorie que nous avons donnée, dans la Leçon XII, sur les équations dérivées à deux variables, il est aisé de voir que, puisqu'une équation à trois variables a deux équations dérivées, on pourra, par le moyen de ces trois équations, qui ont lieu simultanément, éliminer deux constantes à volonté, et parvenir ainsi à une équation du premier ordre, qui contiendra deux constantes de moins que l'équation primitive.

D'où il suit réciproquement que l'équation primitive d'une équation du premier ordre à trois variables doit contenir deux constantes de plus que l'équation du premier ordre, et que ces constantes seront nécessairement arbitraires.

Prenons pour équation primitive l'équation à trois variables

$$z=ax+by;$$

en regardant z comme fonction de x et y, on aura ces deux dérivées, l'une relative à x et l'autre relative à y,

$$\left(\frac{z'}{x'}\right)=a, \qquad \left(\frac{z'}{y'}\right)=b.$$

Éliminant, par le moyen de ces trois équations, les constantes a et b, on aura l'équation du premier ordre

$$z=x\left(\frac{z'}{x'}\right)+y\left(\frac{z'}{y'}\right),$$

à laquelle répondra l'équation primitive

$$z=ax+by,$$

les constantes a et b demeurant arbitraires.

Mais il n'en est pas ici comme dans les équations à deux variables, où, dès qu'on a trouvé une équation primitive avec une constante arbitraire, on est assuré qu'elle a toute la généralité que l'équation du premier ordre peut comporter; car on peut trouver une infinité d'équations à trois variables qui, par l'élimination de deux constantes au moyen de leurs dérivées, donnent la même équation du premier ordre.

Par exemple, l'équation

$$z = ay + \frac{bx^2}{y}$$

donne ces deux dérivées

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = \frac{2bx}{y}, \qquad \left(\frac{z'}{y'}\right) = a - \frac{bx^2}{y^2},$$

d'où l'on tire, par l'élimination de a et b, la même équation

$$z = x\left(\frac{z'}{x'}\right) + y\left(\frac{z'}{y'}\right).$$

On pourra trouver autant d'autres équations primitives qu'on voudra qui redonneront la même équation du premier ordre; mais, dès qu'on en a une avec deux constantes arbitraires, on peut en déduire la formule générale de toutes les autres par des principes analogues à ceux qui nous ont conduits aux équations primitives singulières, et que nous avons exposés dans la Leçon XV.

En effet, si l'on considère une équation primitive à trois variables, telle que

$$\mathrm{F}(x, y, z, a, b) = 0,$$

dans laquelle il y a deux constantes a et b, qu'on se propose de faire disparaître au moyen de ses deux dérivées, il est visible que le résultat de l'élimination de ces constantes sera toujours le même, soit que les constantes a et b soient constantes ou non, pourvu que les deux dérivées soient les mêmes, ce qui aura nécessairement lieu lorsqu'en regardant les quantités a et b comme variables, les termes provenant de leur variation, dans les deux équations dérivées, seront nuls.

Or, tant que a et b sont constants, l'équation

$$\mathrm{F}(x, y, z, a, b) = 0$$

donne, comme on l'a vu plus haut, ces deux dérivées, l'une par rapport à x et l'autre par rapport à y,

$$\mathrm{F}'(x) + \left(\frac{z'}{x'}\right)\mathrm{F}'(z) = 0,$$

$$\mathrm{F}'(y) + \left(\frac{z'}{y'}\right)\mathrm{F}'(z) = 0.$$

Mais, en regardant a et b comme fonctions de x et y, ces dérivées deviendront

$$\mathrm{F}'(x) + \left(\frac{z'}{x'}\right)\mathrm{F}'(z) + \left(\frac{a'}{x'}\right)\mathrm{F}'(a) + \left(\frac{b'}{x'}\right)\mathrm{F}'(b) = 0,$$

$$\mathrm{F}'(y) + \left(\frac{z'}{y'}\right)\mathrm{F}'(z) + \left(\frac{a'}{y'}\right)\mathrm{F}'(a) + \left(\frac{b'}{y'}\right)\mathrm{F}'(b) = 0.$$

Et il est clair qu'elles se réduiront aux précédentes, en déterminant a et b de manière que l'on ait les deux équations

$$\left(\frac{a'}{x'}\right)\mathrm{F}'(a) + \left(\frac{b'}{x'}\right)\mathrm{F}'(b) = 0,$$

$$\left(\frac{a'}{y'}\right)\mathrm{F}'(a) + \left(\frac{b'}{y'}\right)\mathrm{F}'(b) = 0.$$

Il est d'abord visible qu'on peut satisfaire à ces deux conditions, en faisant

$$\mathrm{F}'(a) = 0, \qquad \mathrm{F}'(b) = 0,$$

ce qui donne deux équations par lesquelles on pourra déterminer a et b en fonctions de x, y, z.

Cette solution répond évidemment à celle qui donne les équations primitives singulières des équations à deux variables, comme nous l'avons vu dans la Leçon XV.

Ainsi on pourra appeler aussi *équation primitive singulière* l'équation

$$\mathrm{F}(x, y, z, a, b) = 0,$$

dans laquelle on aura substitué pour a et b les valeurs tirées des deux équations

$$F'(a) = 0, \qquad F'(b) = 0.$$

Mais il y a une manière plus générale de satisfaire aux mêmes conditions.

Supposons que b soit une fonction quelconque de a, que nous désignerons par $\varphi(a)$, alors b' deviendra $\varphi'(a).a'$; par conséquent $\left(\frac{b'}{x'}\right)$ deviendra $\varphi'(a).\left(\frac{a'}{x'}\right)$, et $\left(\frac{b'}{y'}\right)$ deviendra $\varphi'(a).\left(\frac{a'}{y'}\right)$.

Faisant ces substitutions dans les deux équations de condition, elles deviendront

$$[F'(a) + F'(b).\varphi'(a)]\left(\frac{a'}{x'}\right) = 0,$$

$$[F'(a) + F'(b).\varphi'(a)]\left(\frac{a'}{y'}\right) = 0,$$

et l'on y satisfera par cette équation unique

$$F'(a) + F'(b).\varphi'(a) = 0,$$

laquelle servira à déterminer la valeur de a, et la fonction $\varphi(a)$ demeurera arbitraire.

En effet, si dans l'équation primitive

$$F(x, y, z, a, b) = 0$$

on fait

$$b = \varphi(a),$$

elle deviendra

$$F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0,$$

et, si l'on désigne par $F'[a, \varphi(a)]$ la fonction dérivée de $F[x, y, z, a, \varphi(a)]$, prise relativement à a seul, il est facile de voir qu'en faisant

$$F'[a, \varphi(a)] = 0,$$

les équations dérivées de la proposée, prises relativement à x et à y, seront les mêmes, a étant variable, que si elle ne variait pas; que, par conséquent, l'équation du premier ordre, déduite de celle-ci par l'élimination de a et $\varphi(a)$, sera encore la même.

Il est visible que l'équation

$$F'[a, \varphi(a)] = 0$$

n'est autre chose que l'équation ci-dessus

$$F'(a) + F'(b).\varphi'(a) = 0,$$

en faisant

$$b = \varphi(a).$$

De cette manière, on aura donc aussi une espèce d'équations primitives singulières, mais plus générales que l'équation primitive proposée, à raison de la fonction arbitraire qu'elles contiendront.

Si donc on a une équation du premier ordre à trois variables, telle que

$$f\left(x, y, z, \left(\frac{z'}{x'}\right), \left(\frac{z'}{y'}\right)\right) = 0,$$

on peut supposer qu'elle ait pour équation primitive

$$F(x, y, z, a, b) = 0,$$

où a et b soient deux constantes arbitraires.

Nous appellerons celle-ci *équation primitive complète*, à raison des deux constantes arbitraires qu'elle contient, et qui ne peuvent disparaître que par le moyen de ses deux dérivées. S'il arrivait que les deux constantes s'en allassent à la fois au moyen d'une seule de ces dérivées, elles ne pourraient alors tenir lieu que d'une seule constante, et l'équation primitive ne serait pas complète.

Dès qu'on aura trouvé une équation primitive complète, on en pourra déduire une autre plus générale, et qui contiendra une fonction arbitraire.

Car il n'y aura qu'à faire

$$b = \varphi(a)$$

et à déterminer ensuite a par la condition

$$F'[a, \varphi(a)] = 0.$$

Nous nommerons celle-ci *équation primitive générale*, pour la distinguer de la précédente.

Enfin, la même équation primitive complète donnera encore l'*équation primitive singulière*, en déterminant a et b en fonction de x, y, z par les deux conditions

$$F(a) = 0, \qquad F'(b) = 0.$$

Par exemple, nous avons vu plus haut que l'équation du premier ordre

$$z = x\left(\frac{z'}{x'}\right) + y\left(\frac{z'}{y'}\right)$$

a pour équation primitive complète

$$z = ax + by.$$

Pour en déduire l'équation primitive générale, on fera

$$b = \varphi(a),$$

et l'on prendra les fonctions dérivées par rapport à a seul; on aura les deux équations

$$z = ax + y\,\varphi(a), \qquad x + y\,\varphi'(a) = 0,$$

d'où il faudra éliminer a; comme la fonction $\varphi(a)$ est arbitraire, on peut, en lui donnant différentes formes, en déduire une infinité d'équations primitives complètes différentes, avec deux constantes arbitraires.

Soit, par exemple,

$$\varphi(a) = A - \frac{a^2}{4B},$$

les deux équations deviendront

$$z = ax + y\left(A - \frac{a^2}{4B}\right), \qquad x - \frac{ya}{2B} = 0;$$

la seconde donne

$$a = \frac{2Bx}{y},$$

et cette valeur, substituée dans la première, la réduit à

$$z = Ay + \frac{Bx^2}{y},$$

qui est l'autre forme d'équation primitive que nous avions trouvée.

On pourra, de la même manière, en trouver tant d'autres qu'on voudra; mais il est remarquable que la première équation primitive complète, d'où l'équation primitive générale a été déduite, n'y est jamais comprise.

Ainsi, il est impossible de déterminer la fonction $\varphi(a)$ de manière que les deux équations

$$z = ax + y\,\varphi(a), \qquad x + y\,\varphi'(a) = 0$$

donnent celle-ci

$$z = Ax + By,$$

A et B étant des constantes arbitraires.

Car supposons la chose possible; en substituant dans la première la valeur de z, on aura à satisfaire à ces deux équations

$$Ax + By = ax + y\,\varphi(a), \qquad x + y\,\varphi'(a) = 0.$$

La seconde donne

$$x = -y\,\varphi'(a);$$

cette valeur, substituée dans la première, la rend divisible par y, et il en résulte

$$B - A\,\varphi'(a) = \varphi(a) - a\,\varphi'(a),$$

d'où l'on tire

$$\varphi'(a) = \frac{\varphi(a) - B}{a - A};$$

divisant par $\varphi(a) - B$, on a l'équation

$$\frac{\varphi'(a)}{\varphi(a) - B} = \frac{1}{a - A},$$

dont chaque membre est une fonction dérivée exacte.

La fonction primitive du premier membre est $l[\varphi(a) - B]$, et celle du second membre est $l(a - A)$, la caractéristique l dénotant le logarithme hyperbolique (Leçon IV); donc, prenant les fonctions primitives et ajoutant la constante arbitraire lk, on aura

$$l[\varphi(a) - B] = l(a - A) + lk,$$

d'où l'on tire

$$\varphi(a) - \mathrm{B} = k(a - \mathrm{A})$$

et, par conséquent,

$$\varphi(a) = \mathrm{B} + k(a - \mathrm{A}).$$

Telle devrait donc être la forme de la fonction $\varphi(a)$; d'où l'on déduit

$$\varphi'(a) = k.$$

Ces valeurs étant maintenant substituées dans les deux équations ci-dessus, elles deviendront

$$(a - \mathrm{A})(x + ky) = 0, \qquad x + ky = 0,$$

auxquelles on ne peut satisfaire qu'en faisant

$$x + ky = 0,$$

ce qui ne donne rien.

Jusqu'à présent on avait cru que toute équation primitive qui satisfait à une équation du premier ordre à trois variables, avec une fonction arbitraire, est aussi générale que celle-ci peut le comporter. L'exemple précédent met cette proposition en défaut, et nous prouverons plus bas la même chose d'une manière générale et directe.

Il est vrai que, dans le cas que nous venons d'examiner, on peut donner à l'équation primitive une forme plus simple et plus générale.

Car, en considérant les deux équations

$$z = ax + y\,\varphi(a), \qquad x + y\,\varphi'(a) = 0,$$

on voit que la seconde donne

$$\varphi'(a) = -\frac{x}{y};$$

d'où il résulte que a est une fonction de $\frac{x}{y}$.

Faisons donc

$$a = \psi\left(\frac{x}{y}\right),$$

nous aurons

$$\varphi(a) = \Phi\left(\frac{x}{y}\right);$$

mais il faudra qu'il y ait entre les fonctions $\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ et $\Phi\left(\frac{x}{y}\right)$ une relation dépendante de l'équation

$$\varphi'(a) = -\frac{x}{y}.$$

En effet, si, en regardant a comme une variable, on prend les fonctions dérivées relativement à la quantité $\frac{x}{y}$, les équations

$$a = \psi\left(\frac{x}{y}\right), \qquad \varphi(a) = \Phi\left(\frac{x}{y}\right)$$

donneront

$$a' = \psi'\left(\frac{x}{y}\right), \qquad a'\,\varphi'(a) = \Phi'\left(\frac{x}{y}\right);$$

donc, substituant dans la seconde, pour a' et pour $\varphi'(a)$, leurs valeurs, on aura l'équation de condition

$$\frac{x}{y}\,\psi'\left(\frac{x}{y}\right) + \Phi'\left(\frac{x}{y}\right) = 0.$$

Maintenant la première équation devient, par la substitution des valeurs de a et de $\varphi(a)$,

$$z = x\,\psi\left(\frac{x}{y}\right) + y\,\Phi\left(\frac{x}{y}\right);$$

et, si l'on met cette équation sous la forme

$$z = x\left[\psi\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y}{x}\,\Phi\left(\frac{x}{y}\right)\right],$$

il est visible qu'elle se réduit à celle-ci

$$z = x\,\Psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

La fonction $\Psi\left(\frac{y}{x}\right)$ demeure absolument arbitraire, puisque les deux fonctions $\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ et $\frac{y}{x}\,\Phi\left(\frac{x}{y}\right)$ ne forment qu'une fonction de $\frac{y}{x}$; en sorte que la relation trouvée entre ces fonctions devient ici inutile.

Et il est bon de remarquer que cette dernière solution est précisément celle que l'on trouve directement par la méthode générale exposée plus haut pour les équations du premier ordre de la forme

$$\left(\frac{z'}{x'}\right)+\mathrm{M}\left(\frac{z'}{y'}\right)=\mathrm{N}.$$

Car l'équation proposée

$$z=x\left(\frac{z'}{x'}\right)+y\left(\frac{z'}{y'}\right),$$

étant divisée par x et comparée à la formule précédente, donne

$$\mathrm{M}=\frac{y}{x}, \qquad \mathrm{N}=\frac{z}{x},$$

de sorte que les deux équations particulières

$$y'-\mathrm{M}x'=0, \qquad z'-\mathrm{N}x'=0$$

deviennent

$$y'-\frac{yx'}{x}=0, \qquad z'-\frac{zx'}{x}=0.$$

Chacune de ces deux équations, étant divisée par x, devient une dérivée exacte, et l'on a les deux primitives

$$\frac{y}{x}=a, \qquad \frac{z}{x}=b.$$

On a ainsi

$$\mathrm{P}=\frac{y}{x}, \qquad \mathrm{Q}=\frac{z}{x};$$

d'où résulte l'équation primitive

$$\frac{z}{x}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

qui s'accorde avec celle que nous venons de trouver.

On voit aussi que cette forme renferme l'équation complète

$$z=ax+by;$$

car il n'y a qu'à supposer

$$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)=a+b\frac{y}{x}.$$

Si l'on avait l'équation du premier ordre

$$z=x\left(\frac{z'}{x'}\right)+y\left(\frac{z'}{y'}\right)+f\left[\left(\frac{z'}{x'}\right),\left(\frac{z'}{y'}\right)\right],$$

la caractéristique f dénotant une fonction quelconque donnée des deux fonctions dérivées $\left(\frac{z'}{x'}\right)$, $\left(\frac{z'}{y'}\right)$, on trouverait aisément pour son équation primitive complète l'équation

$$z=ax+by+f(a,b),$$

a et b étant deux constantes arbitraires.

En effet, en prenant les deux dérivées de cette équation par rapport à x et à y, on a

$$\left(\frac{z'}{x'}\right)=a, \qquad \left(\frac{z'}{y'}\right)=b,$$

et, substituant ces valeurs de a et b, il vient l'équation proposée.

Maintenant, pour trouver l'équation primitive générale, il n'y aura qu'à faire

$$b=\varphi(a),$$

et déterminer ensuite a par la dérivée, prise relativement à a seul.

Ainsi on aura le système des deux équations

$$z=ax+y\varphi(a)+f[a,\varphi(a)], \qquad x+y\varphi'(a)+f'[a,\varphi(a)]=0.$$

Enfin, pour avoir l'équation primitive singulière, on éliminera a et b au moyen des deux dérivées, l'une par rapport à a, et l'autre par rapport à b. Ces dérivées sont

$$x+f'(a)=0, \qquad y+f'(b)=0.$$

Comme l'élimination de a et b est impossible tant qu'on ne particularise pas la fonction $f(a,b)$, si à la place des variables x et y on

introduit les deux variables a et b, on aura

$$x = -f'(a), \qquad y = -f'(b),$$

et de là

$$z = f(a, b) - a f'(a) - b f'(b)$$

pour l'équation primitive singulière.

Si l'on considère ces trois espèces d'équations primitives, il est facile de voir qu'elles sont essentiellement distinctes l'une de l'autre, et que chacune d'elles ne peut être renfermée dans aucune des deux autres, ni les renfermer; car, dans la première, les quantités a et b sont constantes, au lieu qu'elles deviennent, dans la seconde et dans la troisième, des fonctions différentes des variables x, y, z.

Mais on peut s'en convaincre d'une manière plus sensible, par la considération des surfaces représentées par ces différentes équations primitives. Pour cela, je considère d'abord l'équation générale du plan

$$z = ax + by + c,$$

dont la position par rapport aux trois plans rectangulaires des x, y, des x, z et des y, z est déterminée par les constantes a, b, c.

Car il est facile de prouver que a est la tangente de l'angle que l'intersection de ce plan avec le plan des x et z fait avec l'axe des x; que b est la tangente de l'angle que l'intersection du même plan avec l'autre plan des y et z fait avec l'axe de y; enfin que ce plan passe par le point de l'axe des z, qui est éloigné de l'origine commune des trois axes de la quantité c. Ainsi on peut regarder a, b, c comme les éléments du plan, puisque sa position par rapport aux axes des x, y, z en dépend entièrement.

Si l'on combine l'équation du plan avec ses deux dérivées, prises séparément par rapport à x et y, on peut déterminer les valeurs des trois éléments a, b, c en fonctions de x, y, z, et l'on trouve

$$a = \left(\frac{z'}{x'}\right), \qquad b = \left(\frac{z'}{y'}\right), \qquad c = z - x\left(\frac{z'}{x'}\right) - y\left(\frac{z'}{y'}\right).$$

Or nous avons démontré rigoureusement, dans la *Théorie des fonc-*

tions analytiques (¹), que, par rapport à une surface quelconque dont on a l'équation en x, y, z, les expressions précédentes des quantités a, b, c donnent également les éléments du plan tangent de la surface au point qui répond aux coordonnées x, y, z; d'où il suit que deux surfaces qui, pour les mêmes coordonnées, auront aussi les mêmes valeurs des fonctions dérivées $\left(\frac{z'}{x'}\right)$ et $\left(\frac{z'}{y'}\right)$ se toucheront nécessairement au point qui répond à ces coordonnées, puisqu'elles auront l'une et l'autre le même plan tangent.

Cela posé, l'équation primitive complète

$$F(x, y, z, a, b) = 0,$$

dans laquelle a et b sont des constantes arbitraires, représente une surface dont la nature et la position dépendent de ces constantes; en sorte qu'en faisant varier ces constantes la surface variera aussi successivement.

Or, si l'on fait

$$b = \varphi(a)$$

et qu'on détermine a en fonction de x, y, z, de manière que les deux équations dérivées restent les mêmes que si a ne variait pas, ce qui donne l'équation primitive générale, il est visible que cette équation représentera une surface tout à fait différente, mais qui aura, en chaque point, le même plan tangent que si la quantité a demeurait constante, puisque les expressions des quantités $\left(\frac{z'}{x'}\right)$ et $\left(\frac{z'}{y'}\right)$ restent les mêmes. Donc cette surface sera touchée en chaque point par la surface de l'équation primitive complète qui répond à

$$b = \varphi(a),$$

et où a aura une valeur constante déterminée par l'équation

$$F'[a, \varphi(a)] = 0,$$

qui est la condition de l'équation primitive générale, les valeurs de x,

(¹) *Œuvres de Lagrange*, t. IX.

y, z, dont a devient fonction, répondant au point de contact des deux surfaces, et étant censées constantes par rapport aux surfaces touchantes.

Mais, en regardant a comme constante, l'équation

$$F'[a, \varphi(a)] = 0$$

représente aussi une surface; et son intersection avec la surface représentée par

$$F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0$$

sera une ligne tracée sur cette même surface, dont chaque point sera, par conséquent, un point de contact des deux surfaces dont il s'agit.

D'où l'on peut conclure que la surface représentée par l'équation primitive générale sera touchée, dans toute l'étendue d'une ligne, par une des surfaces représentées par l'équation primitive complète, dans laquelle on supposera l'une des constantes

$$b = \varphi(a);$$

de manière que l'équation primitive complète

$$F[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0,$$

où a est constante, donnera, en faisant varier successivement la valeur de a, une infinité de surfaces successives dont chacune aura une ligne d'attouchement avec la surface représentée par l'équation primitive générale, et il est aisé de concevoir que ces lignes ne pourront être que les intersections mutuelles des mêmes surfaces; que, par conséquent, la surface représentée par l'équation primitive générale ne sera formée elle-même que par toutes ses intersections successives.

Maintenant il est évident que la nature de cette surface est subordonnée à la fonction $\varphi(a)$, et qu'elle n'a de contact qu'avec celles des surfaces de l'équation primitive complète

$$F(x, y, z, a, b) = 0$$

pour lesquelles

$$b = \varphi(a).$$

Mais, si, en regardant a et b comme variables, on les détermine par les

deux équations

$$F'(a) = 0, \qquad F'(b) = 0,$$

ce qui donne alors l'équation primitive singulière, la surface représentée par cette dernière équation sera aussi touchée par la surface de l'équation primitive complète, dans laquelle a et b auront des valeurs constantes, puisque les valeurs des expressions $\left(\frac{z'}{x'}\right)$ et $\left(\frac{z'}{y'}\right)$ sont encore les mêmes, soit que a et b soient constantes ou variables, et les points d'attouchement pour des valeurs données de a et b seront déterminés par les deux équations

$$F'(a) = 0, \qquad F'(b) = 0,$$

combinées avec l'équation primitive

$$F(x, y, z, a, b) = 0;$$

de sorte que, pour chaque valeur de a et b, il n'y aura qu'un point de contact déterminé; d'où il est aisé de conclure que la surface représentée par l'équation primitive singulière ne sera touchée en chacun de ses points que par une des surfaces de l'équation primitive complète

$$F(x, y, z, a, b) = 0,$$

mais qu'elle sera touchée par toutes celles qui peuvent être représentées par cette équation, en donnant à a et b des valeurs constantes quelconques; de sorte qu'on pourra regarder cette même surface comme formée par l'intersection mutuelle et continuelle de toutes les surfaces dont nous parlons, en faisant varier successivement les valeurs des constantes a et b.

Cette théorie n'est, comme l'on voit, qu'une généralisation de celle que nous avons donnée dans la Leçon XVIII, sur les courbes représentées par les équations primitives ordinaires ou singulières des équations du premier ordre à deux variables.

L'équation primitive complète

$$z = ax + by + f(a, b),$$

que nous avons traitée plus haut, représente, comme l'on voit, un plan dont la position dépend des deux constantes a et b.

Si l'on fait

$$b = \varphi(a)$$

et qu'on détermine a par l'équation

$$x + y\,\varphi'(a) + f'[a, \varphi(a)] = 0$$

pour avoir l'équation primitive générale, la surface représentée par cette équation sera touchée et formée par l'intersection mutuelle et successive de tous les plans représentés par l'équation

$$z = ax + y\,\varphi(a) + f[a, \varphi(a)],$$

en donnant successivement à a toutes les valeurs possibles, et cette surface sera développable dans le sens le plus étendu.

Mais, si l'on détermine a et b par les deux équations

$$x + f'(a) = 0, \qquad y + f'(b) = 0,$$

ce qui donne l'équation primitive singulière, la surface représentée par cette dernière équation sera formée et touchée par tous les plans qui peuvent être représentés par l'équation

$$z = ax + by + f(a, b),$$

en donnant successivement à a et b toutes les valeurs successives possibles.

Et toutes ces différentes surfaces seront représentées à la fois par l'équation du premier ordre

$$z = x\left(\frac{z'}{x'}\right) + y\left(\frac{z'}{y'}\right) + f\left[\left(\frac{z'}{x'}\right), \left(\frac{z'}{y'}\right)\right].$$

On peut voir, dans les écrits de Monge, la théorie de la génération des surfaces et des équations qui peuvent les représenter, développée dans toute son étendue, et avec des considérations particulières et ingénieuses qui lui appartiennent.

Lorsque l'équation du premier ordre renfermera plus de trois variables, on pourra aussi la supposer déduite d'une équation entre ces mêmes variables, et autant de constantes arbitraires qu'il y aura de variables moins une; car alors cette équation fournira autant d'équations dérivées qu'il y aura de constantes, par lesquelles on pourra, en éliminant ces constantes, parvenir à l'équation du premier ordre.

L'équation avec les constantes arbitraires sera donc l'équation primitive complète de l'équation du premier ordre; et l'on en pourra déduire des équations primitives plus ou moins générales par la variation de ces constantes, en supposant l'une, ou quelques-unes d'entre elles, fonctions de toutes les autres, et les déterminant par les équations dérivées prises par rapport à chacune de celles-ci.

Enfin si, sans établir aucun rapport entre ces constantes, on les détermine toutes par les équations dérivées prises par rapport à chacune d'elles en particulier, on aura l'équation primitive singulière; car, par ces déterminations, les équations dérivées resteront les mêmes, et le résultat de l'élimination sera, par conséquent, le même que si les variables étaient demeurées constantes.

Ainsi l'équation entre quatre variables t, x, y, z et trois constantes a, b, c,

$$F(t, x, y, z, a, b, c) = 0,$$

sera la primitive complète de l'équation du premier ordre entre t, x, y, z et les trois fonctions dérivées $\left(\frac{z'}{t'}\right)$, $\left(\frac{z'}{x'}\right)$, $\left(\frac{z'}{y'}\right)$, déduites des trois dérivées prises par rapport à t, x, y,

$$F'(t) + \left(\frac{z'}{t'}\right) F'(z) = 0, \qquad F'(x) + \left(\frac{z'}{x'}\right) F'(z) = 0, \qquad F'(y) + \left(\frac{z'}{y'}\right) F'(z) = 0,$$

en éliminant, par leur moyen, les trois constantes a, b, c.

De là, en regardant a, b, c comme variables, et faisant

$$c = \varphi(a, b),$$

on aura l'équation primitive générale par les deux équations dérivées

relatives à a et b,

$$F'(a)+\varphi'(a)\,F'(c)=0, \qquad F'(b)+\varphi'(b)\,F'(c)=0,$$

et, si l'on fait à la fois

$$c=\varphi(a), \qquad b=\psi(a),$$

on aura une autre équation primitive moins générale, en déterminant a par l'équation relative à a

$$F'(a)+\psi'(a)\,F'(b)+\varphi'(a)\,F'(c)=0.$$

Enfin on aura l'équation primitive singulière par les trois équations dérivées relatives à a, b, c,

$$F'(a)=0, \qquad F'(b)=0, \qquad F'(c)=0.$$

On voit par là qu'en général toute équation du premier ordre entre trois variables, dont une est censée fonction des deux autres, peut avoir pour équation primitive une équation entre ces mêmes variables, contenant une fonction arbitraire; que toute équation du premier ordre entre quatre variables, dont une sera censée fonction des trois autres, pourra avoir pour équation primitive une équation entre ces quatre variables, contenant une fonction arbitraire de deux quantités formées de ces variables, et ainsi de suite : l'introduction de ces fonctions arbitraires dans les équations primitives et leur évanouissement dans les équations dérivées sont le vrai caractère qui distingue les équations dérivées à plusieurs variables de celles qui n'ont que deux variables, et où l'équation primitive n'admet que des constantes arbitraires.

Nous avons donné plus haut une méthode directe pour trouver l'équation primitive de toute équation du premier ordre à un nombre quelconque de variables, lorsque les fonctions dérivées n'y passent pas le premier degré. On peut, par une considération fort simple, que j'ai proposée il y a longtemps [*Mémoires de Berlin* de 1772 (¹)], rendre toute équation du premier ordre à trois variables susceptible de cette méthode. Mais il se présente alors, dans l'application de la même méthode, des difficultés qui ont échappé à ceux qui ont déjà fait cette application, et que je n'ai pas cherché à résoudre dans la *Théorie des fonctions* (¹), en traitant le même sujet, parce que je n'avais encore rien trouvé de satisfaisant. C'est ce qui m'engage à revenir sur cet objet pour n'y plus rien laisser à désirer.

(¹) *OEuvres de Lagrange*, t. III, p. 549.

Faisons, pour plus de simplicité,

$$\left(\frac{z'}{x'}\right)=p, \qquad \left(\frac{z'}{y'}\right)=q;$$

toute équation du premier ordre à trois variables sera représentée par

$$F(x,y,z,p,q)=0,$$

et l'on aura la formule

$$z'=px'+qy',$$

à laquelle il faudra satisfaire par le moyen de l'une des indéterminées p et q, l'autre étant donnée par l'équation du premier ordre.

Comme les quantités p et q ne peuvent être que des fonctions de x, y, z, si l'on suppose

$$p=\psi(x,y,z), \qquad q=\varphi(x,y,z),$$

on aura l'équation

$$z'=x'\,\psi(x,y,z)+y'\,\varphi(x,y,z),$$

qui ne peut avoir une équation primitive qu'autant que les fonctions désignées par ψ et φ satisferont à la condition

$$\psi'(y)+\psi'(z)\,\varphi(x,y,z)=\varphi'(x)+\varphi'(z)\,\psi(x,y,z),$$

comme nous l'avons vu dans la Leçon précédente.

Or, puisque

$$\psi(x,y,z)=p \qquad \text{et} \qquad \varphi(x,y,z)=q,$$

on aura

$$\psi'(y)=\left(\frac{p'}{y'}\right), \qquad \psi'(z)=\left(\frac{p'}{z'}\right),$$

$$\varphi'(x)=\left(\frac{q'}{x'}\right), \qquad \varphi'(z)=\left(\frac{q'}{z'}\right);$$

(¹) *OEuvres de Lagrange*, t. IX.

donc, faisant ces substitutions, on aura, pour l'équation de condition, celle-ci du premier ordre

$$\left(\frac{p'}{y'}\right)+\left(\frac{p'}{z'}\right)q=\left(\frac{q'}{x'}\right)+\left(\frac{q'}{z'}\right)p$$

ou bien

$$\left(\frac{q'}{x'}\right)-\left(\frac{p'}{y'}\right)+\left(\frac{q'}{z'}\right)p-\left(\frac{p'}{z'}\right)q=0.$$

L'équation donnée

$$F(x,y,z,p,q)=0$$

fournit ces trois dérivées, relatives à x, y, z,

$$F'(x)+F'(p)\left(\frac{p'}{x'}\right)+F'(q)\left(\frac{q'}{x'}\right)=0,$$

$$F'(y)+F'(p)\left(\frac{p'}{y'}\right)+F'(q)\left(\frac{q'}{y'}\right)=0,$$

$$F'(z)+F'(p)\left(\frac{p'}{z'}\right)+F'(q)\left(\frac{q'}{z'}\right)=0,$$

par le moyen desquelles on pourra éliminer les fonctions dérivées de p ou de q.

Éliminons celles de q; on aura, par la première et la troisième,

$$\left(\frac{q'}{x'}\right)=-\frac{F'(x)}{F'(q)}-\frac{F'(p)}{F'(q)}\left(\frac{p'}{x'}\right),$$

$$\left(\frac{q'}{z'}\right)=-\frac{F'(z)}{F'(q)}-\frac{F'(p)}{F'(q)}\left(\frac{p'}{z'}\right),$$

et, substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus du premier ordre, elle deviendra

$$F'(x)+pF'(z)+F'(p)\left(\frac{p'}{x'}\right)+F'(q)\left(\frac{p'}{y'}\right)+[pF'(p)+qF'(q)]\left(\frac{p'}{z'}\right)=0,$$

où l'on voit que les fonctions dérivées de l'inconnue p ne sont qu'à la première dimension, la quantité q étant d'ailleurs une fonction de p, x, y, z, donnée par l'équation

$$F(x,y,z,p,q)=0.$$

Lorsqu'on aura déterminé, par ces équations, les fonctions p et q, l'équation

$$z'=px'+qy'$$

aura nécessairement une équation primitive, qui sera en même temps l'équation primitive de la proposée du premier ordre

$$F\left[x,y,z,\left(\frac{z'}{x'}\right),\left(\frac{z'}{y'}\right)\right]=0.$$

Comparons maintenant l'équation ci-dessus, qui contient les fonctions dérivées de p relativement aux trois variables x, y, z, avec la formule

$$\left(\frac{z'}{t'}\right)+L\left(\frac{z'}{x'}\right)+M\left(\frac{z'}{y'}\right)=N,$$

que nous avons déjà traitée dans cette Leçon, et dont nous avons vu que l'équation primitive dépend des trois équations particulières

$$x'-t'L=0,\qquad y'-t'M=0,\qquad z'-t'N=0;$$

nous aurons, en prenant respectivement les variables x, y, z, p à la place des variables t, x, y, z, les valeurs

$$L=\frac{F'(q)}{F'(p)},\qquad M=\frac{pF'(p)+qF'(q)}{F'(p)},\qquad N=-\frac{F'(x)+pF'(z)}{F'(p)},$$

de sorte que les trois équations particulières deviendront

$$y'F'(p)-x'F'(q)=0,$$

$$z'F'(p)-x'[pF'(p)+qF'(q)]=0,$$

$$p'F'(p)+x'[F'(x)+pF'(z)]=0.$$

Comme ces trois équations ne renferment que quatre variables x, y, z, p, on pourra les réduire à une seule entre deux variables; ainsi la difficulté est rabaissée aux équations de ce genre.

Supposons donc qu'on ait trouvé leurs équations primitives qui renfermeront nécessairement trois constantes arbitraires a, b, c; on pourra en tirer les valeurs de ces trois constantes en x, y, z et p; et, si l'on

dénote ces valeurs par P, Q, R, on aura sur-le-champ, comme nous l'avons démontré, l'équation

$$R = \varphi(P, Q)$$

pour l'équation primitive de l'équation du premier ordre en x, y, z et p, la fonction $\varphi(P, Q)$ étant une fonction arbitraire quelconque de P et de Q.

Cette équation, combinée avec l'équation donnée

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

donnera les valeurs de p et q en x, y, z, qui, étant substituées dans l'équation

$$z' = px' + qy',$$

la rendront susceptible d'une équation en x, y, z, qui sera l'équation cherchée.

Comme jusqu'ici rien ne limite la fonction $\varphi(P, Q)$, il s'ensuivrait que l'équation primitive d'une équation du premier ordre à trois variables pourrait renfermer une fonction arbitraire de deux quantités, tandis que, dans les cas que nous avons examinés, nous n'avons jamais trouvé que des fonctions arbitraires d'une seule quantité; il est d'ailleurs facile de se convaincre qu'il est impossible de faire disparaître d'une équation à trois variables une fonction arbitraire de deux quantités, par le moyen de ses deux équations dérivées.

Cette difficulté, je l'avoue, m'a longtemps tourmenté; enfin je suis parvenu à la résoudre par les considérations suivantes.

Je remarque d'abord que, comme les trois équations

$$P = a, \qquad Q = b, \qquad R = c$$

satisfont, par l'hypothèse, aux trois équations du premier ordre

$$\begin{aligned} y' F'(p) - x' F'(q) &= 0, \\ z' F'(p) - x'[p F'(p) + q F'(q)] &= 0, \\ p' F'(p) + x'[\ F'(x) + p F'(z)] &= 0, \end{aligned}$$

avec les constantes arbitraires a, b, c, si l'on tire de ces mêmes équations

$$P = a, \qquad Q = b, \qquad R = c$$

les valeurs de x, y, z en fonction de p, et qu'on les substitue dans les équations précédentes, elles deviendront nécessairement identiques; de sorte que, par ces substitutions, les premiers membres des équations dont il s'agit deviendront identiquement nuls, quelles que soient les valeurs de p, a, b, c. En général, comme les variables x, y, z, p sont regardées comme indépendantes, il sera indifférent de substituer les valeurs de trois de ces variables exprimées en fonctions de a, b, c et de la quatrième variable.

Or le premier membre de la première, étant multiplié par q et retranché du premier membre de la seconde des mêmes équations, donne

$$F(p).(z' - px' - qy').$$

Donc, si dans la formule $z' - px' - qy'$ on fait les mêmes substitutions des valeurs de x, y, z en p, le résultat sera encore identiquement nul.

A la place des variables x, y, z on peut, sans nuire à la généralité, introduire les quantités a, b, c, regardées comme variables, en conservant les mêmes expressions de x, y, z en a, b, c. Alors, dans la formule $z' - px' - qy'$, les termes provenant de la variabilité de p se détruiront mutuellement, puisque ces mêmes expressions rendent cette formule nulle dans le cas où a, b, c sont constantes; elle deviendra donc de la forme $Aa' + Bb' + Cc'$, dans laquelle A, B, C seront des fonctions de p, a, b, c.

Donc l'équation

$$z' - px' - qy' = 0$$

deviendra

$$Aa' + Bb' + Cc' = 0;$$

et la condition qui doit la rendre susceptible d'une équation primitive sera, par ce que nous avons trouvé,

$$c = \varphi(a, b),$$

puisque la substitution des valeurs de x, y, z en p, a, b, c donne

$$P = a, \qquad Q = b, \qquad R = c,$$

d'où ces valeurs sont supposées tirées.

Or, en prenant les fonctions dérivées, on a

$$c' = a'\,\varphi'(a) + b'\,\varphi'(b).$$

Donc, faisant ces substitutions, l'équation

$$[A + C\,\varphi'(a)]\,a' + [B + C\,\varphi'(b)]\,b' = 0$$

aura nécessairement une équation primitive, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que la variable p disparaîtra d'elle-même de l'équation, puisque sa fonction dérivée p' a déjà disparu.

Alors l'équation sera entre les deux seules variables a et b, et aura toujours une équation primitive, par laquelle b deviendra fonction de a seul; et cette fonction sera arbitraire, à cause de la fonction arbitraire $\varphi(a, b)$.

Ainsi les deux quantités b et c seront nécessairement, l'une et l'autre, fonctions de a seul; mais il faudra qu'elles satisfassent à l'équation

$$Aa' + Bb' + Cc' = 0.$$

Soient donc

$$b = \psi(a), \qquad c = \varphi(a);$$

en les substituant dans cette équation, on aura

$$A + B\,\psi'(a) + C\,\varphi'(a) = 0;$$

ce qui donne une relation entre les deux fonctions $\varphi(a)$ et $\psi(a)$, et il en restera une d'arbitraire.

Maintenant, si l'on remet pour a, b, c leurs valeurs P, Q, R, on aura, pour l'équation primitive cherchée, le système des deux équations

$$Q = \psi(P), \qquad R = \varphi(P);$$

d'où, en éliminant p, on aura une équation en x, y, z, avec une fonction arbitraire.

Telle est la solution directe et complète du problème; mais nous verrons qu'on peut la simplifier dans plusieurs cas.

Prenons pour exemple l'équation du premier ordre

$$z = \left(\frac{z'}{x'}\right)\left(\frac{z'}{y'}\right).$$

On aura ici

$$F(x, y, z, p, q) = z - pq = 0;$$

donc

$$F'(x) = 0, \qquad F'(y) = 0, \qquad F'(z) = 1, \qquad F'(p) = -q, \qquad F'(q) = -p;$$

et les trois équations du premier ordre en x, y, z, p deviendront

$$-qy' + px' = 0, \qquad -qz' + 2pqx' = 0, \qquad -qp' + px' = 0.$$

Or l'équation

$$z = pq$$

donne

$$q = \frac{z}{p};$$

donc les trois équations dont il s'agit deviendront

$$zy' - p^2x' = 0, \qquad z' - 2px' = 0, \qquad zp' - p^2x' = 0,$$

et l'on pourrait faire l'une des fonctions dérivées x', y', z', p' égale à l'unité.

La première et la dernière donnent

$$y' = p';$$

d'où l'on tire l'équation primitive

$$y = p + a,$$

a étant une constante arbitraire.

Ensuite la seconde et la troisième donnent

$$pz' = 2zp',$$

savoir,

$$\frac{z'}{z} = \frac{2p'}{p};$$

les fonctions primitives logarithmiques sont

$$lz = lp^2 + lb,$$

d'où l'on tire

$$z = bp^2,$$

b étant une constante arbitraire.

Enfin, si dans la première on substitue p' pour y' et bp^2 pour z, on a, en divisant par p^2,

$$bp' - x' = 0;$$

d'où l'on déduit, en prenant les fonctions primitives,

$$x = bp + c,$$

c étant la troisième constante arbitraire.

Ainsi on aura, en dégageant les valeurs de ces constantes,

$$a = y - p = \mathrm{P}, \qquad b = \frac{z}{p^2} = \mathrm{Q}, \qquad c = x - \frac{z}{p} = \mathrm{R}.$$

Maintenant, si dans l'équation

$$z' - px' - qy' = 0$$

on substitue pour q la valeur $\frac{z}{p}$, elle devient

$$z' - px' - \frac{zy'}{p} = 0.$$

Et si, à la place de x, y, z, on y met les expressions trouvées ci-dessus en p, a, b, c, en regardant les quantités a, b, c comme variables, on a la transformée

$$p^2b' + 2bpp' - p^2b' - bpp' - pc' - bpp' - bpa' = 0,$$

qui, en effaçant ce qui se détruit et divisant ensuite par p, se réduit à

$$c' + ba' = 0.$$

Donc, faisant

$$b = \psi(a), \qquad c = \varphi(a),$$

on aura

$$\varphi'(a) + \psi(a) = 0;$$

ce qui donne

$$\psi(a) = -\varphi'(a).$$

Ainsi on aura le système de ces deux équations

$$\mathrm{R} = \varphi(\mathrm{P}), \qquad \mathrm{Q} = -\varphi'(\mathrm{P}),$$

savoir,

$$x - \frac{z}{p} = \varphi(y - p), \qquad \frac{z}{p^2} = -\varphi'(y - p),$$

d'où il faudra éliminer p, et la fonction $\varphi(y - p)$ demeurera arbitraire.

Nous ferons ici une remarque importante : lorsqu'on a trouvé deux équations primitives renfermant deux constantes arbitraires, comme

$$y = p + a \qquad \text{et} \qquad z = bp^2,$$

on pourrait croire qu'en éliminant p on aurait une équation primitive avec deux constantes arbitraires, qui serait, par conséquent, l'équation primitive complète de la proposée, et d'où l'on pourrait ensuite tirer l'équation primitive générale avec une fonction arbitraire.

On aurait, de cette manière, l'équation

$$z = b(y - a)^2.$$

Mais il est facile de se convaincre qu'elle ne satisfait pas à la proposée

$$z = \left(\frac{z'}{x'}\right)\left(\frac{z'}{y'}\right);$$

car elle donne

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = 0.$$

Il en serait de même si l'on employait, pour chasser p, la seconde et la troisième équation; on aurait alors

$$c = x - \sqrt{bz},$$

savoir,

$$z = \frac{(x - c)^2}{b},$$

ce qui donnerait

$$\left(\frac{z'}{y'}\right) = 0.$$

Mais, si l'on employait la première et la dernière, on aurait, par l'élimination de p,

$$c = x - \frac{z}{y-a},$$

d'où l'on tire

$$z = (x-c)(y-a);$$

cette expression donne

$$\left(\frac{z'}{y'}\right) = y-a, \qquad \left(\frac{z'}{x'}\right) = x-c,$$

valeurs qui satisfont à la proposée.

La raison de cette espèce de bizarrerie se trouve dans l'équation donnée plus haut

$$c' + ba' = 0.$$

Elle fait voir que les deux quantités a et c peuvent être constantes ensemble; que, par conséquent, les deux équations

$$\mathrm{P} = a \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R} = c$$

ont lieu à la fois, de sorte qu'en éliminant p on a une équation en x, y, z et les deux constantes arbitraires a, c, qui sera, par conséquent, l'équation primitive complète de la proposée. Mais l'équation ne serait pas satisfaite par la simple supposition de a et b, ou de b et c, constantes ensemble; d'où il suit que les deux équations

$$\mathrm{P} = a \quad \text{et} \quad \mathrm{Q} = b, \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Q} = b \quad \text{et} \quad \mathrm{R} = c,$$

prises ensemble, ne satisfont pas à la proposée.

Au reste, on peut trouver l'équation primitive complète, au moyen d'une seule de ces équations; car elle donne une valeur de p en x, y, z et une constante arbitraire; et, comme cette valeur satisfait à l'équation du premier ordre en x, y, z et p, elle rendra l'équation

$$z' - px' - qy' = 0$$

susceptible d'une équation primitive : ainsi il n'y aura qu'à chercher cette équation en y ajoutant une constante arbitraire, et l'on aura l'équation primitive complète avec les deux constantes.

Ou bien on tirera de l'équation trouvée la valeur de p en x, y, z; et, comme

$$p = \left(\frac{z'}{x'}\right),$$

on cherchera l'équation primitive, en ne regardant que z et x comme variables. Cette équation pourra alors renfermer une fonction arbitraire de y, qu'on déterminera aisément par l'équation proposée; et, comme celle-ci est du premier ordre, la fonction de y renfermera au moins une constante arbitraire, de sorte qu'on aura de nouveau une équation primitive complète avec les deux constantes.

Prenons dans l'exemple précédent la première équation $\mathrm{P} = a$, savoir,

$$y - p = a.$$

Elle donne

$$p = y - a;$$

et, comme on a

$$q = \frac{z}{p},$$

on aura

$$q = \frac{z}{y-a}.$$

Ces deux valeurs, étant substituées dans l'équation

$$z' - px' - qy' = 0,$$

donnent

$$z' - (y-a)x' - \frac{zy'}{y-a} = 0,$$

équation qui, étant divisée par $y-a$, a pour primitive

$$\frac{z}{y-a} - x + c = 0,$$

où c est la nouvelle constante arbitraire.

Or cette équation est la même que nous avons trouvée ci-dessus par l'élimination de p.

La même équation

$$p = y - a$$

devient, en substituant pour p sa valeur $\left(\frac{z'}{x'}\right)$,

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = y - a.$$

Comme il n'y a ici que la fonction dérivée de z relativement à x, on peut ôter les parenthèses et mettre l'équation sous la forme

$$z' = (y - a)\,x',$$

dont l'équation primitive, en regardant y comme constante, est

$$z = (y - a)(x - \mathrm{Y}),$$

Y étant une fonction quelconque de y.

Cette valeur donne, en prenant les fonctions dérivées par rapport à x et y,

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = y - a, \qquad \left(\frac{z'}{y'}\right) = x - \mathrm{Y} - (y - a)\,\mathrm{Y}'.$$

Substituant ces expressions dans la proposée

$$z = \left(\frac{z'}{x'}\right)\left(\frac{z'}{y'}\right),$$

on a

$$(y - a)(x - \mathrm{Y}) = (y - a)(x - \mathrm{Y}) - (y - a)^2\,\mathrm{Y}',$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{Y}' = 0$$

et, par conséquent,

$$\mathrm{Y} = c,$$

en prenant c pour une constante arbitraire.

Ainsi l'équation primitive devient, comme ci-dessus,

$$z = (y - a)(x - c).$$

Ayant cette équation primitive complète, pour en tirer l'équation primitive générale, on fera

$$c = \varphi(a),$$

et l'on prendra la dérivée par rapport à a seul; on aura ainsi le système

des deux équations

$$z = (y - a)[x - \varphi(a)], \qquad x - \varphi(a) + (y - a)\,\varphi'(a) = 0,$$

d'où il faudra éliminer a.

Pour les comparer aux équations trouvées ci-dessus par la méthode générale, il n'y a qu'à les mettre sous la forme

$$x - \frac{z}{y - a} = \varphi(a), \qquad \frac{z}{(y - a)^2} = \varphi'(a).$$

Comme la quantité a doit être éliminée, on peut mettre à sa place une quantité quelconque. Si l'on y met sa valeur $y - p$, on a les mêmes équations déjà trouvées, d'où il faut ensuite éliminer p.

La théorie des équations à plusieurs variables des ordres supérieurs au premier est encore très imparfaite.

Lorsque ces équations admettent une équation primitive de l'ordre immédiatement inférieur, on peut les regarder comme provenant d'une équation primitive complète de ce dernier ordre avec deux constantes arbitraires, ainsi que nous l'avons démontré pour les équations du premier ordre; et, lorsqu'on connaît, d'une manière quelconque, cette équation primitive, on peut, par les mêmes principes, en tirer les équations primitives générales et singulières; mais on sait que, dès le second ordre, il y a une infinité d'équations qui ne sont point susceptibles d'une équation primitive du premier ordre, et qui admettent néanmoins une équation primitive absolue sans fonctions dérivées. Nous n'entrerons point ici dans ce détail qui nous mènerait trop loin, et nous renvoyons, pour ce qui regarde les équations de ce genre, aux Traités connus de Calcul différentiel.

LEÇON VINGT ET UNIÈME.

DES ÉQUATIONS DE CONDITION PAR LESQUELLES ON PEUT RECONNAITRE SI UNE FONCTION D'UN ORDRE QUELCONQUE DE PLUSIEURS VARIABLES EST UNE FONCTION DÉRIVÉE EXACTE. ANALOGIE DE CES ÉQUATIONS AVEC CELLES DU PROBLÈME DES ISOPÉRIMÈTRES. HISTOIRE DE CE PROBLÈME. MÉTHODE DES VARIATIONS.

Toute fonction d'une seule variable peut toujours être regardée comme une dérivée exacte; car, si elle n'a pas naturellement une fonction primitive, on peut toujours en trouver une par les séries, soit en résolvant la fonction donnée en série de puissances de la variable, et prenant ensuite la fonction primitive de chaque terme, soit en employant la série générale donnée dans la Leçon XII.

Il n'en est pas de même pour les fonctions de plus d'une variable; et quoiqu'on puisse toujours s'assurer, par les règles de la dérivation des fonctions, si une fonction composée de différentes fonctions dérivées résulte d'une fonction primitive donnée, comme nous l'avons vu dans la Leçon XIX, il est souvent difficile de juger si elle est une dérivée exacte d'une fonction quelconque inconnue. Cet objet a occupé les géomètres presque dès la naissance du Calcul différentiel; ils ont cherché des caractères généraux pour reconnaître si une fonction d'un ordre quelconque peut être la dérivée exacte d'une fonction de l'ordre immédiatement inférieur, ou même d'un ordre inférieur quelconque. Ce sont ces caractères qu'on connaît dans le Calcul différentiel, sous les noms de *conditions d'intégrabilité*, et qu'Euler et Condorcet ont réduits à des formules générales et élégantes, qui méritent d'être connues.

Pour trouver ces formules de la manière la plus simple, je commence par considérer une fonction V de différentes variables x, y, z, ... et de leurs dérivées, dans laquelle une de ces variables z et ses dérivées z', z'', ... ne se trouvent partout qu'à la première dimension; il est clair que la fonction V sera de cette forme

$$V = Nz + Pz' + Qz'' + Rz''' + \dots,$$

N, P, Q, ... étant des fonctions de x, y, ... et de leurs dérivées sans z.

Rien n'est plus facile que de trouver les conditions nécessaires pour qu'une fonction de cette forme soit une dérivée exacte, indépendamment d'aucune relation entre la variable z et les autres.

En effet, si l'on considère les fonctions dérivées du produit de deux quantités quelconques, et qu'on dénote, comme nous l'avons proposé à la fin de la Leçon II, par des traits appliqués aux parenthèses, les fonctions dérivées des quantités renfermées dans ces parenthèses, on a

$$(Pz)' = Pz' + P'z;$$

donc

$$Pz' = (Pz)' - P'z.$$

On a de la même manière

$$Qz'' = (Q'z')' - Q'z', \qquad Q'z' = (Q'z)' - Q''z;$$

donc

$$Qz'' = (Qz')' - (Q'z)' + Q''z.$$

On trouvera pareillement

$$Rz''' = (Rz'')' - (R'z')' + (R''z)' - R'''z,$$

et ainsi de suite.

Faisant ces substitutions dans l'expression de V, elle devient, en ordonnant les termes,

$$\begin{aligned} V = {} & (N - P' + Q'' - R''' + \dots)z \\ & + (Pz)' - (Q'z)' + (R''z')' - \dots \\ & + (Qz')' - (R'z')' + \dots \\ & + (Rz'')' - \dots \\ & + \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Comme tous les termes de cette formule, à l'exception de ceux de la première ligne qui se trouvent multipliés par z, sont déjà des fonctions dérivées exactes, il faudra, pour que la fonction V soit une dérivée exacte, que les termes multipliés par z, savoir :

$$(N - P' + Q'' - R''' + \ldots)z$$

forment ensemble une fonction dérivée exacte.

Or il est facile de se convaincre que cela est impossible tant qu'on n'établit aucune relation entre z et les autres variables. Donc il faudra que ces termes disparaissent d'eux-mêmes de l'expression de V, ce qui donnera l'équation de condition

$$N - P' + Q'' - R''' + \ldots = 0,$$

laquelle devra par conséquent être identique pour que la fonction V puisse avoir en général une fonction primitive. Lorsque cette condition aura lieu, la fonction primitive de V sera évidemment

$$(P - Q' + R'' - \ldots)z + (Q - R' + \ldots)z' + (R - \ldots)z'' + \ldots.$$

En général, quel que soit le nombre des variables contenues dans la fonction V, si l'une d'elles ainsi que ses dérivées sont linéaires, on aura toujours, relativement à cette variable, la même équation de condition, pour que la fonction V devienne une fonction dérivée exacte, indépendamment d'aucune relation entre ces variables.

Après avoir résolu le cas des fonctions linéaires par rapport à l'une des variables, nous allons réduire à ce cas très simple la recherche des équations de condition pour les fonctions d'une forme quelconque.

Supposons qu'une fonction V de x, y, y', y'', ... d'un ordre quelconque soit la fonction dérivée exacte de la fonction U de l'ordre immédiatement inférieur, indépendamment d'aucune relation particulière entre x et y; il est clair que, si dans ces deux fonctions on substitue à la fois $y + \omega$ à la place de y, et conséquemment $y' + \omega'$, $y'' + \omega''$, ... à la place de y', y'', ..., en supposant ω une fonction indéterminée de x, ces fonctions continueront à être l'une la fonction dérivée exacte de l'autre, puisque cette dérivation ne dépend point

de la valeur de y. Donc elles le seront encore si, après ces substitutions, on les développe suivant les puissances et les produits de ω, ω', ω'', ...

Dénotons par $\overset{1}{U}$ la totalité des termes du développement de U, où les quantités ω, ω', ω'', ... ne se trouveront qu'à la première dimension; par $\overset{2}{U}$ la totalité des termes où ces quantités formeront deux dimensions, etc.

Dénotons de même par $\overset{1}{V}$ la totalité des termes du développement de V, où les mêmes quantités ω, ω', ω'', ... se trouveront à la première dimension; par $\overset{2}{V}$ la totalité des termes où ces quantités formeront deux dimensions, etc.

On aura $U + \overset{1}{U} + \overset{2}{U} + \overset{3}{U}$, ... pour le développement de U, et $V + \overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V}$, ... pour le développement de V.

Cette dernière série sera donc la fonction dérivée exacte de la première; et il est facile de voir que chaque terme de l'une devra être la fonction dérivée de l'autre, tant que les quantités ω, ω', ω'', ... demeureront indéterminées; car, ces quantités n'étant qu'à la première dimension dans la fonction de $\overset{1}{V}$, sa fonction primitive ne pourra contenir aussi que les premières dimensions des mêmes quantités; par conséquent il n'y aura que le terme $\overset{1}{U}$ qui puisse être sa fonction primitive. Il en est de même des termes correspondants $\overset{2}{V}$ et $\overset{2}{U}$, où ces quantités montent à la seconde dimension; et ainsi de suite.

Il faut donc d'abord que la fonction $\overset{1}{V}$ soit une dérivée exacte, indépendamment d'aucune relation entre x, y et ω.

Or, puisque $\overset{1}{V}$ est la partie du développement de V qui ne contient que les premières dimensions de ω, ω', ω'', ..., il est clair que cette fonction ne peut être que de la forme

$$\overset{1}{V} = N\omega + P\omega' + Q\omega'' + R\omega''' + \ldots,$$

les coefficients N, P, Q, ... étant des fonctions de x, y, y', y'', ..., sans ω. Ainsi tout se réduit à trouver les conditions nécessaires pour

qu'une fonction de cette forme soit, généralement parlant, une dérivée exacte.

On a donc ici le cas que nous venons de résoudre, et il est visible qu'en prenant la variable ω à la place de z, et conservant les autres dénominations, on aura l'équation de condition

$$N - P' + Q'' - R''' + \ldots = 0,$$

laquelle, devant avoir lieu d'elle-même indépendamment d'aucune relation particulière entre x et y, devra être entièrement identique.

Cette équation ayant lieu, on aura pour la fonction primitive de $\overset{1}{V}$,

$$(P - Q' + R'' - \ldots)\omega + (Q - R' + \ldots)\omega' + (R - \ldots)\omega'' + \ldots.$$

C'est par conséquent la valeur de la fonction $\overset{1}{U}$.

Ayant ainsi la valeur du premier terme $\overset{1}{U}$ du développement de la fonction primitive U, on pourra en déduire les valeurs de tous les termes suivants $\overset{2}{U}$, $\overset{3}{U}$, ... par les principes exposés dans la Leçon XIX, en regardant les quantités $y, y', y'', \ldots$ comme autant de variables indépendantes; car, si l'on représente la quantité U par la fonction

$$F(x, y, y', y'', \ldots),$$

la fonction

$$F(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \ldots),$$

développée suivant les puissances et les produits des quantités ω, ω', ω'', ..., deviendra

$$\begin{aligned} &F(x, y, y', y'', \ldots) + \omega F'(y) + \omega' F'(y') + \omega'' F'(y'') + \ldots \\ &+ \tfrac{1}{2}\omega^2 F''(y) + \omega\omega' F''(y, y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2 F''(y') + \ldots \\ &+ \tfrac{1}{2.3}\omega^3 F'''(y) + \tfrac{1}{2}\omega^2\omega' F'''(y, y') + \ldots \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Je ne renferme ici entre les crochets, pour plus de simplicité, que les quantités par rapport auxquelles il faut prendre les fonctions dérivées indiquées par les accents.

On aura donc ainsi

$$\begin{aligned} \overset{1}{U} &= \omega F'(y) + \omega' F'(y') + \omega'' F'(y'') + \ldots, \\ \overset{2}{U} &= \tfrac{1}{2}\omega^2 F''(y) + \omega\omega' F''(y, y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2 F''(y') + \ldots, \\ \overset{3}{U} &= \tfrac{1}{2.3}\omega^3 F'''(y) + \tfrac{1}{2}\omega^2\omega' F'''(y, y') + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Or, ayant trouvé ci-dessus la valeur de $\overset{1}{U}$, la comparaison des termes multipliés par ω, ω', ω'', ... donnera

$$\begin{aligned} F'(y) &= P - Q' + R'' - \ldots, \\ F'(y') &= Q - R' + \ldots, \\ F'(y'') &= R - \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ayant ainsi les fonctions dérivées du premier ordre par rapport à chacune des quantités $y, y', y'', \ldots$, on en déduira, par les règles données, les fonctions dérivées du second ordre et des suivants, par rapport à chacune des mêmes quantités; on aura par conséquent les valeurs des termes suivants $\overset{2}{U}$, $\overset{3}{U}$, ... du développement de U. Or on suppose

$$F(x, y, y', y'', \ldots) = U,$$

et

$$F(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \ldots) = U + \overset{1}{U} + \overset{2}{U} + \overset{3}{U} + \ldots.$$

Ainsi on aura

$$F(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \ldots) - F(x, y, y', y'', \ldots) = \overset{1}{U} + \overset{2}{U} + \overset{3}{U} + \ldots.$$

Par conséquent la différence des deux fonctions

$$F(x, y+\omega, y'+\omega', \ldots) \quad \text{et} \quad F(x, y, y', \ldots)$$

sera donnée au moins par les séries.

Représentons par

$$f(x, y, y', y'', \ldots)$$

la fonction proposée V dont on a supposé que U ou $F(x, y, y', y'', \ldots)$

est la fonction primitive; on aura $F(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \ldots)$ pour la fonction primitive de $f(x, y+\omega, y'+\omega, y''+\omega'', \ldots)$; donc la fonction primitive de $f(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \ldots) - f(x, y, y', y'', \ldots)$ sera donnée.

De ce que nous venons de démontrer, il suit :

1° Qu'une fonction quelconque de la forme $f(x, y, y', y'', \ldots)$ ne peut avoir une fonction primitive, indépendamment d'aucune relation entre x et y, à moins que l'équation de condition

$$N - P' + Q'' - R''' + \ldots = 0,$$

trouvée ci-dessus, n'ait lieu d'elle-même;

2° Que, toutes les fois que cette équation aura lieu, la fonction

$$f(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \ldots) - f(x, y, y', y'', \ldots)$$

aura nécessairement une fonction primitive, quelle que soit la valeur de ω.

Faisons maintenant $\omega = -y$; la fonction $f(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \ldots)$ se réduira à $f(x)$ et aura par conséquent toujours une fonction primitive, puisqu'elle ne contiendra plus qu'une variable. Donc aussi la fonction $f(x, y, y', y'', \ldots)$ aura nécessairement une fonction primitive.

Or, ayant supposé que

$$N\omega + P\omega' + Q\omega'' + R\omega''' + \ldots$$

sont les premiers termes du développement de la fonction proposée V, lorsqu'on y augmente y de ω, y' de ω', y'' de ω'', ..., c'est-à-dire de la fonction $f(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \ldots)$, il est visible qu'on aura, en conservant la notation adoptée,

$$N = f'(y), \quad P = f'(y'), \quad Q = f'(y''), \quad R = f'(y'''), \quad \ldots;$$

de sorte que l'équation de condition deviendra

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - [f'(y''')]''' + \ldots = 0.$$

Cette formule est la même, à la notation près, que celle qu'Euler avait trouvée d'abord par une méthode indirecte, tirée de la considération *de maximis et minimis*, et que Condorcet a ensuite démontrée dans son *Calcul intégral*. Nous venons de prouver non seulement que la fonction proposée ne peut être une fonction dérivée exacte, à moins que l'équation de condition n'ait lieu, comme Euler et Condorcet l'avaient trouvée, mais encore que, si cette équation a lieu, la fonction sera nécessairement une dérivée exacte, ce qui restait, ce me semble, à démontrer; car la démonstration qu'on en trouve dans le tome XV des *Novi Commentarii* de Pétersbourg est si compliquée, qu'il est difficile de juger de sa justesse et de sa généralité.

Si la fonction proposée contenait non seulement les variables x, y avec les dérivées y', y'', ..., mais de plus une autre variable z, fonction indéterminée de x avec ses dérivées z', z'', ..., on ferait, par rapport à cette dernière variable, des raisonnements et des opérations semblables à celles qu'on a faites relativement à la variable y, et l'on parviendrait à une équation de condition pour z, entièrement analogue à celle qu'on a trouvée pour y.

Ainsi, pour qu'une fonction quelconque de la forme

$$f(x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots)$$

soit une fonction dérivée exacte d'une fonction de l'ordre inférieur, indépendamment d'aucune relation particulière entre y et z, on aura les deux équations de condition

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - [f'(y''')]''' + \ldots = 0,$$
$$f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - [f'(z''')]''' + \ldots = 0.$$

Et réciproquement, ces deux équations ayant lieu d'elles-mêmes, on sera assuré que la fonction proposée est une dérivée exacte, quelles que soient les fonctions y et z.

Il se présente ici, avant d'aller plus loin, une remarque importante à faire.

Lorsqu'on a cherché les conditions nécessaires pour qu'une fonction donnée de x, y, y', y'', ... soit d'elle-même une fonction dérivée exacte, on a regardé y comme une fonction de x, mais inconnue; c'est pour-

quoi on a supposé que la fonction donnée ne contenait point les dérivées x', x'', ... de la variable x; car, suivant les principes de la Leçon VII, lorsque x est la variable principale dont les autres sont fonctions, on peut faire $x' = 1$, et par conséquent $x'' = 0$, $x''' = 0$, ...

Cependant si, pour plus de généralité, on veut regarder (ce qui est toujours permis et ce qui a lieu surtout dans les problèmes de Mécanique) les variables x et y comme fonctions d'une troisième variable t, alors toute fonction dérivée d'un ordre quelconque de deux variables x, y devra contenir également les dérivées de ces deux variables; et nous avons donné, dans la Leçon citée, les transformations nécessaires pour introduire les dérivées de x dans une fonction où l'on a supposé $x' = 1$. Il faut seulement observer que, lorsque la fonction est censée être une fonction dérivée d'une autre fonction des mêmes variables, il faut de plus la multiplier par x'. Car, si V est une fonction de $x, y, y', y'', \ldots$, où l'on a fait $x' = 1$, laquelle doive être une fonction dérivée d'une autre fonction U, on aura par l'hypothèse $U' = V$; et, pour détruire la supposition de $x' = 1$, il faudra substituer à la place des fonctions primes y', U' les valeurs $\frac{y'}{x'}$, $\frac{U'}{x'}$; à la place de la fonction seconde y'' la quantité $\frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'}$, et ainsi des fonctions des ordres supérieurs, comme on l'a vu dans la Leçon VII; ainsi l'on aura

$$\frac{U'}{x'} = V, \qquad \text{et de là} \qquad U' = V x'.$$

Maintenant, si l'on considère une fonction quelconque de $x, y, x', y', x'', y'', \ldots$, et qu'on demande les conditions nécessaires pour que cette fonction soit une fonction dérivée exacte; en représentant cette fonction par

$$f(x, x', x'', \ldots, y, y', y'', \ldots),$$

et faisant, pour abréger,

$$X = f'(x) - [f'(x')]' + [f'(x'')]'' - \ldots,$$
$$Y = f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \ldots,$$

on aura, par ce qu'on a démontré plus haut, si les deux variables x et y sont regardées comme indépendantes, les deux équations $X = 0$ et $Y = 0$, qui devront avoir lieu à la fois.

Mais, si y doit être une fonction de x, alors en substituant $\varphi(x)$ pour y et les dérivées de $\varphi(x)$, savoir : $x'\varphi'(x)$, $x''\varphi'(x) + x'^2\varphi''(x)$, ... pour y', y'', ..., il faudra que la fonction proposée devienne simplement de la forme $x' F(x)$, comme si l'on y faisait $x' = 1$. Ainsi, si l'on met dans cette fonction $x + \xi$ à la place de x, et qu'on développe, en ne tenant compte que des premières dimensions de ξ, elle deviendra

$$x' F(x) + \xi' F(x) + x'\xi F'(x),$$

où l'on voit que les termes qui contiennent ξ forment ensemble une fonction dérivée, dont la primitive est $\xi F(x)$, quelle que soit la valeur de ξ.

Je conclus de là que, si dans la fonction proposée, où y est censé fonction de x, on substitue aussi $x + \xi$ à la place de x, et qu'on développe suivant ξ, les termes qui ne contiendront que la première dimension de ξ et de ses dérivées devront former ensemble une fonction dérivée exacte, quelle que soit la valeur de ξ. Or, y étant $\varphi(x)$, il deviendra, par la substitution de $x + \xi$ à la place de x, $\varphi(x) + \xi\varphi'(x)$, en ne tenant compte que de la première dimension de ξ; donc, si l'on fait, pour abréger, $\xi\varphi'(x) = \omega$, il faudra mettre $y + \omega$ à la place de y, tandis qu'on met $x + \xi$ à la place de x.

Par ces substitutions et ces développements, les termes de la fonction proposée, qui ne contiendront que les premières dimensions de ξ, se trouveront représentées par

$$\xi f'(x) + \xi' f'(x') + \xi'' f'(x'') + \ldots$$
$$+ \omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \ldots,$$

et, par ce que nous avons démontré dans cette Leçon, pour que ces termes forment une dérivée exacte, il faudra que la quantité

$$\{f'(x) - [f'(x')]' + [f'(x'')]'' - \ldots\}\xi + \{f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \ldots\}\omega$$

soit elle-même une dérivée exacte.

Cette quantité est la même chose que $X\xi + Y\omega$; donc, en mettant pour ω sa valeur $\xi\varphi'(x)$, elle devient $[X + Y\varphi'(x)]\xi$; et il est visible qu'elle ne peut être une dérivée exacte, indépendamment de la valeur de ξ, qui doit demeurer arbitraire; donc il faudra que cette quantité s'évanouisse d'elle-même, et par conséquent qu'on ait l'équation identique $X + Y\varphi'(x) = 0$. Mais, y étant $\varphi(x)$, on a en général $y' = x'\varphi'(x)$. Donc, substituant cette valeur de $\varphi'(x)$, on aura nécessairement l'équation identique

$$Xx' + Yy' = 0.$$

Il suit de là que l'équation de condition $X = 0$, qu'on aurait par la considération de la variable x et de ses dérivées, sera identique avec l'équation de condition $Y = 0$, qui se rapporte à la variable y; car, faisant $X = 0$ dans l'équation précédente, on a nécessairement $Y = 0$.

On prouvera de la même manière que, pour une fonction composée des trois variables x, y, z et de leurs dérivées, on aurait l'équation identique

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0,$$

en supposant

$$Z = f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - [f'(z''')]''' + \ldots.$$

De sorte que, dans ce cas, l'équation de condition $X = 0$ serait comprise dans les deux équations $Y = 0$ et $Z = 0$.

Ainsi on pourra toujours, dans la question présente, se dispenser d'avoir égard aux dérivées de la variable principale et à l'équation de condition qui en résulterait.

Si l'on voulait que la fonction V fût une dérivée exacte du second ordre, il faudrait de plus que la fonction primitive de $\dot{V}$, c'est-à-dire la fonction $\dot{U}$, fût elle-même une dérivée exacte. Or on a

$$\dot{U} = p\omega + q\omega' + r\omega'' + \ldots,$$

en supposant, pour abréger,

$$p = P - Q' + R'' - \ldots, \qquad q = Q - R' + \ldots, \qquad r = R - \ldots, \qquad \ldots,$$

et il est facile de trouver, par les mêmes procédés qu'on a employés pour la fonction $\dot{V}$, que la condition nécessaire pour que la fonction $\dot{U}$ soit considérée exacte, indépendamment de la valeur de ω, est renfermée dans l'équation

$$p - q' + r'' - \ldots = 0,$$

laquelle, en remettant pour p, q, r, ... leurs valeurs, devient

$$P - 2Q' + 3R'' - \ldots = 0.$$

Donc, pour qu'une fonction de la forme $f(x, y, y', y'', \ldots)$ soit une fonction dérivée exacte du second ordre, c'est-à-dire une fonction dérivée d'une fonction dérivée, indépendamment d'aucune relation particulière entre x et y, on aura, relativement à y, outre la première équation de condition, celle-ci :

$$f'(y') - 2[f'(y'')]' + 3[f'(y''')]'' - \ldots = 0.$$

Et l'on aurait une pareille équation relativement à z, si la fonction proposée contenait aussi z, z', z'', ...

On trouverait de même, pour que la proposée fût une fonction dérivée du troisième ordre, cette troisième équation de condition, relativement à y,

$$f'(y'') - 3[f'(y''')]' + 6[f'(y^{IV})]'' - \ldots = 0;$$

et ainsi de suite.

Enfin si l'on suppose qu'on n'ait, pour la détermination d'une fonction u, qu'une équation d'un ordre quelconque entre u, x et y et les fonctions dérivées u', u'', ..., y', y'', ... de u et de y, et qu'on demande les conditions nécessaires pour que u soit une fonction de x, y, y', y'', ..., indépendamment d'aucune relation entre x et y, le problème pourra encore se résoudre par les mêmes principes et en suivant la même méthode.

Soit $V = 0$ l'équation donnée, dans laquelle on suppose que u est une fonction de x, y', y'', ...; si l'on met partout $y + \omega$ à la place de y, et par conséquent $y' + \omega'$, $y'' + \omega''$, ... à la place de y', y'', ..., la quantité

ω étant supposée, comme ci-dessus, une fonction indéterminée de x, et qu'on développe suivant les puissances et les produits de $\omega, \omega', \omega'', \ldots$, la fonction V deviendra, comme plus haut,

$$V + \overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V} + \ldots,$$

et l'on aura les équations particulières

$$V = 0, \qquad \overset{1}{V} = 0, \qquad \overset{2}{V} = 0, \qquad \ldots,$$

Car, si l'on imagine qu'on mette dans V, à la place de u, sa valeur en x, y, y', y'', ..., l'équation $V = 0$ deviendra identique; donc l'identité subsistera aussi après la substitution de $y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \ldots$, pour $y, y', y'', \ldots$, et le développement suivant $\omega, \omega', \omega'', \ldots$; et, comme ces dernières quantités sont supposées indépendantes de x et y, il est visible que chaque terme $\overset{1}{V}, \overset{2}{V}, \ldots$ qui contient les mêmes dimensions de $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ devra être identiquement nul dans l'équation développée

$$V + \overset{1}{V} + \overset{2}{V} + \overset{3}{V} + \ldots = 0.$$

Représentons la fonction V par

$$f(u, u', u'', \ldots, x, y, y', y'', \ldots),$$

et dénotons par $\overset{1}{u}, \overset{2}{u}, \ldots$ les différents termes du développement de la fonction u, dans lesquels les quantités $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ forment ensemble une dimension, ou deux, etc. Nous aurons, suivant la notation adoptée,

$$\overset{1}{V} = \overset{1}{u} f'(u) + \overset{1}{u'} f'(u') + \overset{1}{u''} f'(u'') + \ldots$$
$$+ \omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \ldots.$$

Or il est visible que la fonction $\overset{1}{u}$ ne peut être que de la forme

$$\overset{1}{u} = N\omega + P\omega' + Q\omega'' + \ldots,$$

N, P, Q, ... étant des fonctions de $x, y, y', \ldots$. De là, en prenant les fonctions dérivées relatives à x, on aura les valeurs de $\overset{1}{u'}, \overset{1}{u''}, \ldots$;

savoir :

$$\overset{1}{u'} = N'\omega + (N + P')\omega' + (P + Q')\omega'' + \ldots,$$
$$\overset{1}{u''} = N''\omega + (2N' + P'')\omega' + (N + 2P' + Q'')\omega'' + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces valeurs étant substituées dans l'expression de $\overset{1}{V}$, l'équation $\overset{1}{V} = 0$ devra avoir lieu indépendamment des quantités $\omega, \omega', \omega'', \ldots$, qui doivent demeurer indéterminées; donc, égalant à zéro les multiplicateurs de chacune de ces quantités, on aura les équations

$$f'(y) + N f'(u) + N' f'(u') + N'' f'(u'') + \ldots = 0,$$
$$f'(y') + P f'(u) + (N + P') f'(u') + (2N + P'') f'(u'') + \ldots = 0,$$
$$f'(y'') + Q f'(u) + (P + Q') f'(u') + (N + 2P' + Q'') f'(u'') + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où il faudra éliminer les quantités inconnues N, P, Q, ...; il restera nécessairement une ou plusieurs équations qui seront les équations de condition cherchées. Car il est facile de voir que le nombre de ces quantités ne doit jamais surpasser celui des quantités $y, y', y'', \ldots$ diminué du nombre des quantités $u', u'', \ldots$, puisque dans l'équation proposée la plus haute fonction dérivée de u ne peut contenir de fonctions dérivées de y, plus hautes que celles qui se trouvent dans la même équation.

Supposons, par exemple, que l'équation soit de la forme

$$f(u, u', x, y, y', y'') = 0;$$

on fera ici simplement

$$\overset{1}{u} = N\omega + P\omega',$$

et l'on aura les trois équations

$$f'(y) + N f'(u) + N' f'(u') = 0,$$
$$f'(y') + P f'(u) + (N + P') f'(u') = 0,$$
$$f'(y'') + P f'(u') = 0.$$

La dernière donnera P, la seconde donnera N, et la première don-

nera, par la substitution de N et de N′, l'équation de condition nécessaire pour que la quantité u dans l'équation proposée puisse être une fonction de x, y, y', indépendamment d'aucune relation entre x et y.

On peut étendre la méthode de ce problème à un nombre quelconque de variables et d'équations.

Montrons maintenant, par quelques exemples, l'usage des équations de condition dont nous venons de donner la théorie, et d'abord ne considérons qu'une fonction du premier ordre de la forme $f(x, y, y')$; l'équation de condition pour qu'elle soit une dérivée exacte sera

$$f'(y) - [f'(y')]' = 0.$$

Pour que cette équation puisse être identique, il faut que le second terme ne contienne pas de fonctions dérivées de y plus hautes que le premier terme $f'(y)$; or celui-ci ne peut contenir que la fonction y': donc il faudra que l'expression $f'(y')$, dont la fonction dérivée forme le second terme, ne contienne pas y', autrement il entrerait y'' dans le second terme. Il suit de là que la fonction proposée ne peut être que de la forme

$$\Psi(x, y) + y' \varphi(x, y).$$

En la représentant par $f(x, y, y')$, et prenant les dérivées relatives à y et à y', on aura

$$f'(y) = \Psi'(y) + y' \varphi'(y), \qquad f'(y') = \varphi(x, y).$$

Ainsi l'équation de condition sera

$$\Psi'(y) + y' \varphi'(y) - \varphi'(x, y) = 0;$$

mais

$$\varphi'(x, y) = \varphi'(x) + y' \varphi'(y);$$

donc l'équation se réduit à

$$\Psi'(y) - \varphi'(x) = 0,$$

comme nous l'avons trouvé, par une autre voie, dans la Leçon XIX.

La fonction proposée, en n'y faisant plus $x' = 1$, aurait eu la forme

$$x' \Psi(x, y) + y' \varphi(x, y),$$

et l'on aurait eu, relativement à x, l'équation de condition

$$f'(x) - [f'(x')]' = 0,$$

laquelle devient

$$x' \Psi'(x) + y' \varphi'(x) - \Psi'(x, y) = 0;$$

mais

$$\Psi'(x, y) = x' \Psi'(x) + y' \Psi'(y);$$

donc

$$y' \varphi'(x) - y' \Psi'(y) = 0,$$

savoir

$$\varphi'(x) - \Psi'(y) = 0,$$

comme auparavant.

Supposons que la fonction proposée soit du second ordre et de la forme $f(x, y, y', y'')$; l'équation de condition pour qu'elle soit une dérivée exacte sera

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' = 0.$$

Il est d'abord évident que, pour que cette équation puisse être identique, il faut que la valeur de $f'(y'')$ ne contienne point y''; autrement la valeur de $[f'(y'')]''$ contiendrait y^{IV}; et, comme les termes précédents ne peuvent contenir que y, y', y'', y''', le terme contenant y^{IV} ne serait pas détruit.

La fonction proposée ne pourra donc être que de la forme

$$\Psi(x, y, y') + y'' \varphi(x, y, y').$$

On aura ainsi, en la comparant à la forme générale $f(x, y, y', y'')$,

$$f'(y) = \Psi'(y) + y'' \varphi'(y),$$
$$f'(y') = \Psi'(y') + y'' \varphi'(y'),$$
$$f'(y'') = \varphi(x, y, y');$$

et l'équation de condition deviendra

$$\Psi'(y) + y'' \varphi'(y) - [\Psi'(y')]' - [y'' \varphi'(y')]' + \varphi''(x, y, y') = 0.$$

Or

$$\varphi'(x,y,y') = \varphi'(x) + y'\,\varphi'(y) + y''\,\varphi'(y');$$

donc

$$\varphi''(x,y,y') = [\varphi'(x)]' + [y'\,\varphi'(y)]' + [y''\,\varphi'(y')]'.$$

Par cette substitution, l'équation de condition deviendra

$$\Psi'(y) + y''\,\varphi'(y) - [\Psi'(y')]' + [\varphi'(x)]' + [y'\,\varphi'(y)]' = 0.$$

Supposons, pour abréger,

$$\varphi'(x) + y'\,\varphi'(y) - \Psi'(y') = \Phi(x,y,y'),$$

la caractéristique Φ dénotant une fonction connue de x, y, y', puisqu'en effet cette expression ne contient que les trois quantités x, y, y'; on aura l'équation

$$\Psi'(y) + y''\,\varphi'(y) + \Phi'(x,y,y') = 0;$$

mais

$$\Phi'(x,y,y') = \Phi'(x) + y'\,\Phi'(y) + y''\,\Phi'(y');$$

donc l'équation de condition se réduira à

$$\Psi'(y) + \Phi'(x) + y'\,\Phi'(y) + y''[\varphi'(y) + \Phi'(y')] = 0.$$

Or il est visible que la quantité y'' n'entre point dans les fonctions dérivées suivant x et y, puisqu'elle n'entre point dans les fonctions primitives représentées par les caractéristiques Ψ, φ et Φ; donc, pour que l'équation puisse être identique, il faudra que les termes multipliés par y'' disparaissent; par conséquent l'équation de condition se partagera en ces deux-ci :

$$\varphi'(y) + \Phi'(y) = 0,$$
$$\Psi'(y) + \Phi'(x) + y'\,\Phi'(y) = 0,$$

qui devront avoir lieu séparément pour que la fonction proposée soit une dérivée exacte.

Supposons, pour donner un exemple particulier, que cette fonction soit

$$\frac{y'}{y} - \frac{xy'^2}{y^2} + \frac{y''x}{y};$$

on aura ici

$$\Psi(x,y,y') = \frac{y'}{y} - \frac{xy'^2}{y^2} \quad \text{et} \quad \varphi(x,y,y') = \frac{x}{y}.$$

De là on tirera

$$\Psi'(y) = -\frac{y'}{y^2} + \frac{2xy'^2}{y^3}, \qquad \Psi'(y') = \frac{1}{y} - \frac{2xy'}{y^2},$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{y}, \qquad \varphi'(y) = -\frac{x}{y^2},$$

$$\Phi(x,y,y') = \frac{1}{y} - \frac{xy'}{y^2} - \frac{1}{y} + \frac{2xy'}{y^2} = \frac{xy'}{y^2},$$

$$\Phi'(x) = \frac{y'}{y^2}, \qquad \Phi'(y) = -\frac{2xy'}{y^3}, \qquad \Phi'(y') = \frac{x}{y^2}.$$

Ainsi les deux équations de condition deviendront

$$-\frac{x}{y^2} + \frac{x}{y^2} = 0, \qquad -\frac{y'}{y^2} + \frac{2xy'^2}{y^3} + \frac{y'}{y^2} - \frac{2xy'^2}{y^3} = 0,$$

qui se vérifient, comme l'on voit, d'elles-mêmes. En effet, la fonction proposée est la dérivée de $\frac{xy'}{y}$.

En général, il est facile de prouver que l'équation de condition

$$f'(y) - [f'(y)]' + [f'(y'')]'' - \ldots = 0$$

ne saurait être identique, à moins que la plus haute des fonctions dérivées y', y'', ..., qui entrera dans la fonction proposée $f(x,y,y',y'',\ldots)$ n'y soit qu'à la première dimension, afin qu'elle puisse disparaître dans la fonction dérivée qu'on prendra relativement à cette même dérivée de y. D'où il suit que, si la fonction proposée est de l'ordre n, elle ne pourra être une fonction dérivée exacte, à moins qu'elle ne soit de la forme

$$\Psi[x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}] + y^{(n)}\,\Phi[x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)}],$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons vu dans la Leçon XIII.

Ensuite on peut aussi prouver que, de même que pour les fonctions du second ordre, l'équation de condition se décompose en deux, qui

doivent avoir lieu à la fois; pour les fonctions du troisième ordre, elle se décomposera en trois; et, pour les fonctions du quatrième ordre, elle se décomposera en quatre; et ainsi de suite.

Enfin, pour donner aussi un exemple d'une fonction dépendante d'une équation, nous prendrons l'équation

$$u' - \Psi(u, x, y) - y' \varphi(u, x, y) = 0,$$

et nous chercherons les conditions nécessaires pour que la fonction u soit une fonction de x et y.

En comparant cette équation à la forme générale

$$f(u, u', x, y, y') = 0,$$

on aura

$$f(u, u', x, y, y') = u' - \Psi(u, x, y) - y' \varphi(u, x, y);$$

et de là on tirera ces valeurs

$$f'(u) = -\Psi'(u) - y' \varphi'(u), \qquad f'(u') = 1,$$
$$f'(y) = -\Psi'(y) - y' \varphi'(y), \qquad f'(y') = -\varphi(u, x, y).$$

Comme la fonction ne contient point y'', on aura

$$f'(y'') = 0;$$

et la dernière des trois équations de condition trouvées ci-dessus pour le cas dont il s'agit donnera sur-le-champ $P = 0$; ce qui réduira les deux premières à

$$-\Psi'(y) - y' \varphi'(y) - N[\Psi'(u) + y' \varphi'(u)] + N' = 0, \qquad -\varphi(u, x, y) + N = 0,$$

La dernière donne

$$N = \varphi(u, x, y);$$

donc, substituant dans la première et changeant les signes, on aura

$$\Psi'(y) + y' \varphi'(y) + [\Psi'(u) + y' \varphi'(u)] + \varphi(u, x, y) - \varphi'(u, x, y) = 0.$$

Mais

$$\varphi'(u, x, y) = u' \varphi'(u) + \varphi'(x) + y' \varphi'(y),$$

et la proposée donne

$$u' = \Psi(u, x, y) + y' \varphi(u, x, y);$$

donc, faisant ces substitutions et effaçant ce qui se détruit, on aura cette équation de condition

$$\Psi'(y) + \Psi'(u) \varphi(u, x, y) - \varphi'(x) - \varphi'(u) \Psi(u, x, y) = 0,$$

qui est la même, en changeant u en z, que celle que nous avons trouvée directement dans la Leçon XIX, pour que l'équation dérivée à trois variables puisse admettre une équation primitive entre ces variables.

Le problème que nous venons de résoudre, sur les équations de condition qui doivent avoir lieu pour qu'une fonction donnée de plusieurs variables et de leurs dérivées ait une fonction primitive indépendamment d'aucune relation entre ces variables, a une connexion intime avec un autre problème plus important, qui a exercé les géomètres pendant près d'un siècle. C'est le fameux problème des isopérimètres, qui, pris dans toute son extension, consiste à trouver les équations qui doivent avoir lieu entre les variables, pour que la fonction primitive inconnue d'une fonction donnée de ces variables et de leurs dérivées devienne un maximum ou un minimum.

Les mêmes formules d'équations résolvent les deux problèmes, mais avec cette différence que, pour le premier, les équations doivent être identiques et se vérifier d'elles-mêmes; au lieu que, dans le dernier problème, elles deviennent les équations nécessaires entre les variables pour l'existence du maximum ou du minimum.

On verra la raison de cette identité des résultats par l'analyse que nous allons donner du problème des isopérimètres. Mais nous commencerons par une histoire succincte des différentes tentatives que les géomètres du dernier siècle ont faites pour parvenir à une solution générale de ce problème, et qui ont conduit par degrés à la méthode connue sous le nom de *Calcul des variations*.

Les questions *de maximis et minimis* n'ont pas été inconnues aux anciens géomètres; car on a un livre entier d'Apollonius, qui traite presque uniquement des plus grandes et des plus petites lignes droites

qui peuvent être menées de points donnés aux arcs des sections coniques.

La méthode d'Apollonius se réduit simplement à prouver que toute autre droite, menée du même point à la section conique, serait plus petite dans le cas du maximum, et plus grande dans le cas du minimum, que celle qu'il a déterminée; et cette méthode a été suivie par tous ceux qui, après lui, ont cherché à résoudre, par la simple Géométrie, des problèmes relatifs aux maxima et aux minima.

Fermat est le premier, comme nous l'avons vu dans la Leçon XVIII, qui ait donné, pour la solution des problèmes de ce genre, une méthode directe et analytique, que l'algorithme du Calcul différentiel a ensuite simplifiée et généralisée; elle se réduit, comme l'on sait, à égaler à zéro la différentielle ou la fonction prime de la fonction qui doit être un maximum ou un minimum, en regardant comme variable l'inconnue par rapport à laquelle la fonction donnée doit devenir la plus grande ou la plus petite; et nous avons exposé ailleurs (*Théorie des Fonctions*) les principes et la marche de cette méthode considérée dans toute sa généralité (1).

On peut dire que c'est à la considération des courbes qu'on doit les principales méthodes de l'Analyse. La détermination des plus grandes et des plus petites ordonnées dans les lignes et dans les surfaces courbes avait donné naissance aux questions *de maximis et minimis*, dont nous venons de parler; mais on s'éleva bientôt à des problèmes d'un genre nouveau et beaucoup plus difficile. Il s'agissait de trouver les courbes mêmes dans lesquelles des quantités dépendantes de toute l'étendue de la courbe cherchée, prise entre des limites données, fussent un maximum ou un minimum par rapport à toutes les autres courbes possibles; comme, par exemple, la courbe qui renferme le plus grand espace suivant des conditions données, ou qui produit, par sa révolution, le plus grand solide entre des limites données, etc.; mais c'est la Mécanique qui a fourni les premiers problèmes de ce nouveau genre. Newton a cherché le premier la courbe qui, en tournant autour de son axe, produit le solide qui, étant mû dans un fluide suivant la direction de son axe, éprouve la moindre résistance possible, et il a donné, sans démonstration, une proportion qui suffit pour construire la courbe par les tangentes, et qui en est comme l'équation différentielle.

(1) *Œuvres de Lagrange*, t. IX.

Mais c'est proprement du fameux problème de la brachistochrone, ou ligne de la plus vite descente, proposé en 1693 par Jean Bernoulli, que date la découverte d'une analyse propre à ces sortes de recherches.

Suivant l'esprit du Calcul différentiel qui suppose les courbes formées d'une infinité de droites infiniment petites, on considère deux côtés contigus de la courbe cherchée, et l'on détermine leur position respective de manière que la quantité proposée devienne un maximum ou un minimum, en ne faisant varier que l'ordonnée qui répond à l'angle formé par ces deux côtés. De cette manière, le problème rentre dans l'ancien genre, et la difficulté ne consiste plus qu'à ramener le résultat de la solution à la forme différentielle. C'est ainsi qu'on a trouvé d'abord que la courbe de la plus vite descente doit être telle que le sinus de l'angle, qu'un de ses côtés quelconques infiniment petits fait avec la verticale, soit proportionnel à la vitesse, laquelle est comme la racine carrée de la hauteur d'où le corps est parti; et cette proportion, réduite en équation différentielle, donne la cycloïde. On a trouvé de la même manière que le solide rond de la moindre résistance est formé par une courbe qui a la propriété énoncée par Newton dans le scolie de la Proposition XXXV de la seconde Partie de ses *Principes*. On a appliqué ensuite la même méthode à des problèmes plus compliqués, tels que celui des isopérimètres, où il s'agissait de trouver, entre toutes les courbes possibles qui ont le même périmètre ou la même longueur, celles qui, entre des limites données, renfermaient les plus grands ou les plus petits espaces, ou, en faisant une révolution autour de leurs axes, produisaient les plus grandes ou les plus petites superficies, ou les plus grands ou les plus petits solides, ou enfin une courbe telle qu'en construisant sur son axe une seconde courbe dont les ordonnées soient des fonctions quelconques des ordon-

nées et des arcs de celle-là, l'aire de la seconde courbe forme un maximum ou un minimum; et les difficultés de ce problème, jointes à la célébrité que les recherches des deux frères Bernoulli, de Taylor et d'Euler lui acquirent, ont fait donner en général le nom d'*isopérimètres* à tous les problèmes dans lesquels il s'agit de trouver des courbes qui jouissent de quelque propriété de maximum ou minimum, avec ou sans la condition de l'égalité des longueurs de la courbe.

Lorsqu'on veut avoir égard à cette condition, il ne suffit pas de faire varier une seule ordonnée, comme dans les problèmes où l'on demande un maximum ou un minimum absolu; il faut alors faire varier à la fois deux indéterminées, tant dans l'expression qui doit être un maximum ou minimum que dans celle qui doit demeurer constante, et égaler séparément à zéro les résultats de ces variations, ou les différentielles de ces deux expressions, comme dans les problèmes ordinaires *de maximis et minimis*, lorsqu'il y a quelque condition particulière à remplir entre les variables.

Jean Bernoulli, dans un Mémoire destiné à résoudre les problèmes sur les isopérimètres proposés par son frère Jacques, et qui se trouve dans le *Recueil de l'Académie des Sciences* de 1706, avait cru pouvoir satisfaire à la fois à la condition du maximum ou minimum et à celle de l'isopérimétrisme, en ne considérant que deux éléments ou côtés de la courbe, et en faisant varier à la fois l'abscisse et l'ordonnée qui répondent à l'angle de ces deux lignes droites, de manière que leur somme demeurât constante. En effet, si la question roulait sur des quantités finies, elle pourrait se résoudre de cette manière; mais il arrive ici, par la nature des infiniment petits, que l'équation finale devient purement identique, et ne fait par conséquent rien connaître. Jean Bernoulli parvint à un autre résultat, et crut avoir ainsi résolu les problèmes; mais son analyse est erronée et pèche contre les principes du Calcul infinitésimal.

Jacques Bernoulli est le premier qui ait reconnu, dans ces sortes de questions, la nécessité de considérer trois côtés consécutifs de la courbe, et de faire varier à la fois les deux ordonnées consécutives qui répondent aux angles formés par ces côtés. C'est sur ce principe qu'il a fondé son Analyse du problème des isopérimètres, intitulée *Analysis magni problematis isoperimetrici*, et publiée à Bâle en 1701 et dans les *Actes de Leipzig* de la même année; et le même principe a servi de base ensuite aux solutions données par Taylor, dans son *Methodus incrementorum;* par Jean Bernoulli, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1718; et par Euler dans les Tomes VI et VII des anciens *Commentaires de Pétersbourg*.

Par la considération d'une partie infiniment petite de la courbe regardée comme composée de deux ou trois lignes droites, les problèmes se réduisent à l'Analyse ordinaire; et la difficulté ne consiste plus qu'à traduire les solutions en équations différentielles, par les substitutions des valeurs des ordonnées et des abscisses successives exprimées en différences, en ayant soin de ne conserver que les termes du même ordre, suivant la loi de l'homogénéité des quantités infiniment petites. Mais les résultats obtenus de cette manière se présentent rarement sous une forme générale et applicable à tous les problèmes du même genre. De plus, il y a des cas où il ne suffit pas de considérer une portion infiniment petite de la courbe, parce que la propriété du maximum ou minimum peut avoir lieu dans la courbe entière, sans avoir lieu dans chacune de ses portions infiniment petites; ce sont ceux où la fonction différentielle dont l'intégrale doit être un maximum ou un minimum contient elle-même une autre fonction intégrale, à moins que, par les conditions du problème, cette intégrale doive avoir une valeur constante : par exemple, lorsque la fonction dont l'intégrale doit être un maximum ou un minimum dépend non seulement des abscisses et des ordonnées et de leurs différences, mais encore de l'arc même de la courbe, lequel n'est donné, comme l'on sait, que par une expression intégrale; dans ce cas, les solutions qu'on trouverait par la simple considération d'une portion infiniment petite de la courbe seraient inexactes, à moins que la longueur de la courbe ne fût supposée constante, comme dans les problèmes des isopérimètres.

A plus forte raison, il ne sera pas permis de n'avoir égard, dans le

calcul, à une petite portion de la courbe, lorsque la fonction différentielle dépendra d'une quantité donnée, simplement par une équation différentielle non intégrable en général; c'est pourquoi on doit regarder comme fausse la solution qu'Euler lui-même a donnée du problème de la brachistochrone dans un milieu résistant comme une fonction de la vitesse, dans le Tome VII des anciens *Commentaires de Pétersbourg*, et dans le second Volume de sa *Mécanique*, et l'on peut s'en convaincre en la comparant à celle qu'on trouve dans son Ouvrage de 1744, intitulé *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimique proprietate gaudentes* (Art. 46).

C'est proprement dans ce dernier Ouvrage qu'Euler a donné une solution générale et complète du problème des isopérimètres. Pour trouver les conditions du maximum ou minimum, il se contente de faire varier une seule ordonnée de la courbe, et il en déduit la valeur différentielle de la formule, qui doit être un maximum ou un minimum, en substituant à la place des différentielles de l'ordonnée les différences successives des données consécutives, et à la place des expressions intégrales les sommes des éléments répondant à toute l'étendue de la courbe. Son calcul devient ainsi très long, surtout par les suites infinies qui s'y mêlent, lorsque la fonction proposée contient différentes intégrales, et dont il faut déterminer la somme pour parvenir à des résultats nets et précis; et l'on ne peut trop admirer l'adresse avec laquelle l'auteur surmonte ces difficultés, et obtient, en dernière analyse, des formules simples, générales et élégantes. Son Ouvrage est d'ailleurs très précieux par le nombre et la beauté des exemples qu'il contient, et il n'y en a peut-être aucun qui puisse être plus utile à ceux qui désirent s'exercer sur le Calcul intégral.

Jusqu'alors on avait traité séparément, et par des procédés différents, les problèmes où il suffit de varier une ordonnée, et ceux qui demandent la variation de deux ou de plusieurs ordonnées consécutives.

Euler a remarqué le premier que tous les problèmes de ce genre pouvaient être rappelés à une même analyse, parce que l'uniformité qui doit régner dans les opérations relatives aux différents points d'une

même courbe fait que, dès qu'on a trouvé le résultat de la variation d'une ordonnée, la même expression, rapportée à l'ordonnée qui suit immédiatement, donnera aussi le résultat de la variation de cette ordonnée, et ainsi des autres.

Cette remarque a conduit Euler à un beau théorème et de la plus grande utilité dans cette matière : c'est que, pour trouver une courbe qui ne jouisse d'une propriété de maximum ou minimum que parmi toutes les courbes qui ont une ou plusieurs propriétés connues, il suffit d'ajouter à l'expression de la propriété qui doit être un maximum ou un minimum celles des autres propriétés connues, multipliées chacune par un coefficient constant et arbitraire, et chercher ensuite la courbe dans laquelle cette expression composée sera un maximum ou un minimum entre toutes les courbes possibles.

En effet, si l'on désigne, comme Euler, par $n\nu$ ou simplement par ν l'incrément infiniment petit de l'ordonnée y, et par $\mathrm{P}.\nu$ la valeur différentielle de la formule intégrale indéfinie $\int Z\,dx$, qui doit être un maximum ou un minimum, on aura $\acute{\mathrm{P}}.\omega$ pour la valeur différentielle de la même formule, provenant de l'incrément ω de l'ordonnée suivante $\acute{y}$, en supposant que $\acute{\mathrm{P}}$ soit ce que P devient lorsque y devient $\acute{y}$, et que toutes les autres variables sont rapportées à l'ordonnée $\acute{y}$.

Et l'on aurait de même $\acute{\acute{\mathrm{P}}}.\pi$ pour la valeur différentielle de la même formule, provenant de l'incrément π de l'ordonnée suivante $\acute{\acute{y}}$, où $\acute{\acute{\mathrm{P}}}$ est ce que devient P lorsque y devient $\acute{\acute{y}}$; et ainsi de suite.

Or, en regardant, suivant les principes du Calcul différentiel, les ordonnées y, $\acute{y}$, $\acute{\acute{y}}$, ... comme infiniment proches, on a

$$\acute{y} = y + dy, \qquad \acute{\acute{y}} = y + 2\,dy + d^2y, \qquad \ldots;$$

par conséquent on aura aussi

$$\acute{\mathrm{P}} = \mathrm{P} + d\mathrm{P}, \qquad \acute{\acute{\mathrm{P}}} = \mathrm{P} + 2\,d\mathrm{P} + d^2\mathrm{P}, \qquad \ldots.$$

Ainsi, en faisant varier à la fois les deux ordonnées voisines y et $\acute{y}$,

la valeur différentielle de $\int Z\,dx$ sera

$$P.\nu + (P + dP)\omega;$$

et, en faisant varier les trois ordonnées voisines y, y', y'', sa valeur différentielle sera

$$P.\nu + (P + dP)\omega + (P + 2\,dP + d^2P)\pi,$$

et ainsi de suite.

Il en sera de même de toutes les autres formules semblables.

Donc, pour les courbes où la formule $\int Z\,dx$ doit être un maximum ou un minimum absolu, on aura, en ne faisant varier qu'une ordonnée, l'équation $P.\nu = 0$, laquelle donne $P = 0$.

Pour les courbes où $\int Z\,dx$ ne doit être qu'un maximum ou un minimum relatif parmi toutes les courbes qui ont une propriété commune exprimée par la formule $\int Y\,dx$, si l'on représente par $Q.\nu$ la valeur différentielle de $\int Y\,dx$ due à l'incrément ν de y, on aura, en faisant varier deux ordonnées et égalant à zéro les valeurs différentielles des formules $\int Z\,dx$ et $\int Y\,dx$, les équations

$$P.\nu + (P + dP)\omega = 0,$$
$$Q.\nu + (Q + dQ)\omega = 0,$$

lesquelles donnent celle-ci

$$\frac{dP}{P} - \frac{dQ}{Q} = 0,$$

dont l'intégrale est

$$P + aQ = 0,$$

a étant une constante arbitraire.

Cette équation est, comme l'on voit, la même que celle qu'on trouverait pour le maximum ou minimum absolu de la formule $\int Z\,dx + a\int Y\,dx$, en ne faisant varier qu'une seule ordonnée.

Si la même formule $\int Z\,dx$ ne devait être un maximum ou un minimum que dans une des courbes dans lesquelles deux autres formules $\int Y\,dx$ et $\int X\,dx$ conservent les mêmes valeurs, on aurait alors le cas où il faut faire varier trois ordonnées successives, et où il faudra égaler

séparément à zéro les valeurs différentielles des trois formules dont il s'agit.

Ainsi, en dénotant par $R.\nu$ la valeur différentielle de $\int X\,dx$ provenant de l'incrément ν, on aurait ces trois équations

$$P.\nu + (P + dP)\omega + (P + 2\,dP + d^2P)\pi = 0,$$
$$Q.\nu + (Q + dQ)\omega + (Q + 2\,dQ + d^2Q)\pi = 0,$$
$$R.\nu + (R + dR)\omega + (R + 2\,dR + d^2R)\pi = 0,$$

savoir,

$$P(\nu + \omega + \pi) + dP(\omega + 2\pi) + d^2P.\pi = 0,$$
$$Q(\nu + \omega + \pi) + dQ(\omega + 2\pi) + d^2Q.\pi = 0,$$
$$R(\nu + \omega + \pi) + dR(\omega + 2\pi) + d^2R.\pi = 0.$$

Éliminant deux des quantités ν, ω, π, la troisième s'évanouit d'elle-même, et l'on obtient une équation différentielle du second ordre entre les trois variables P, Q, R, dont par conséquent l'intégrale complète renfermera trois constantes arbitraires. Mais, sans chercher cette équation différentielle, il est facile de s'assurer que l'équation

$$P + aQ + bR = 0$$

satisfait aux trois équations ci-dessus, quelles que soient les valeurs des coefficients a, b, pourvu qu'ils soient constants; car, en multipliant la seconde équation par a, la troisième par b, et les ajoutant à la première, on aura une équation identique, en vertu de l'équation supposée; et, comme cette équation contient deux constantes arbitraires a et b, il s'ensuit qu'elle sera nécessairement l'intégrale complète de l'équation du second ordre dont il s'agit; et l'on voit en même temps qu'elle n'est autre chose que celle qui donne le maximum ou minimum absolu de la formule

$$\int Z\,dx + a\int Y\,dx + b\int X\,dx.$$

Au reste, je dois observer que, dans les premières solutions qui ont été données du problème des isopérimètres par les Bernoulli, Taylor et Euler lui-même, la valeur différentielle de la formule $\int Z\,dx$, qui doit

être un maximum ou un minimum parmi toutes les courbes isopérimètres, n'est pas de la forme

$$P.\nu + \acute{P}.\omega,$$

lorsque la fonction Z contient l'arc s de la courbe, ce qui est contraire à la théorie d'Euler, qu'on vient d'exposer.

Par exemple, dans la solution de Taylor, qui est une des plus simples, si l'on y substitue les dénominations précédentes, qu'on suppose

$$dZ = L\,ds + M\,dx + N\,dy,$$

et qu'on fasse, pour abréger, $\frac{dy}{ds} = q$, on a cette valeur différentielle

$$(N + Lq)\,dx.\nu + (\acute{N} + \acute{L}\acute{q})\,dx.\omega,$$

provenant des variations ν et ω des ordonnées y et $\acute{y}$ dans les trois éléments $Z\,dx + \acute{Z}\,dx + \acute{\acute{Z}}\,dx$, qui sont les seuls que Taylor considère.

Mais je remarque que cette valeur n'est pas la valeur différentielle complète de la formule intégrale $\int Z\,dx$; car, par les formules exactes de l'ouvrage cité d'Euler, la seule variation ν de l'ordonnée y, dans la formule $\int Z\,dx$, donne la valeur différentielle

$$[N - dx - d.(H - \int L\,dx)q]\nu,$$

où H est la valeur de $\int L\,dx$, correspondante à une abscisse donnée a, pour laquelle $\int Z\,dx$ doit être un maximum ou un minimum. De sorte que, pour les deux variations simultanées ν et ω, la vraie valeur différentielle sera

$$[N\,dx - d.(H - \int L\,dx)q]\nu + [\acute{N}\,dx - d.(H - \int \acute{L}\,dx)\acute{q}]\omega.$$

On voit d'abord par là que la valeur différentielle de Taylor donnerait une solution fausse, si on voulait l'employer à trouver la courbe dans laquelle $\int Z\,dx$ serait un maximum ou un minimum entre toutes les courbes possibles, dans lequel cas il suffit d'avoir égard à la variation d'une seule ordonnée; car, en égalant à zéro cette valeur différentielle, et supposant ω nul, on aurait l'équation

$$N + Lq = 0;$$

tandis que la solution d'Euler donnerait

$$N\,dx - d.(H - \int L\,dx)q = 0,$$

qui est la véritable équation du problème.

Dans le cas des isopérimètres, il arrive néanmoins que les deux solutions s'accordent; car alors la propriété commune des courbes est l'arc s, c'est-à-dire la formule $\int\sqrt{dx^2 + dy^2}$, ou $\int\sqrt{1 + p^2}\,dx$, en faisant $p = \frac{dy}{dx}$; ainsi on a de plus la formule

$$\int Y\,dx, \quad \text{où} \quad Y = \sqrt{1 + p^2},$$

dont la valeur différentielle doit être nulle, en même temps que celle de $\int Z\,dx$.

Or, par la construction et l'analyse de Taylor, on a pour cette formule la valeur différentielle

$$-dq.\nu - d\acute{q}.\omega;$$

et, par les formules de l'Ouvrage d'Euler, on a de même $-dq.\nu$ pour la valeur différentielle due à la seule variation ν; de sorte que, pour les deux variations ν et ω, on aura également

$$-dq.\nu - d\acute{q}.\omega.$$

Ainsi, suivant Taylor, on doit avoir, dans ce cas, les deux équations

$$(N + Lq)\nu + (\acute{N} + \acute{L}\acute{q})\omega = 0, \qquad dq.\nu + d\acute{q}.\omega = 0,$$

lesquelles donnent, par l'élimination de ν et ω, celle-ci :

$$(N + Lq)\,d\acute{q} = (\acute{N} + \acute{L}\acute{q})\,dq;$$

savoir, en substituant $N + dN$ pour N, $L + dL$ pour $\acute{L}$, $dq + d^2q$ pour $d\acute{q}$ et $q + 2\,dq + d^2q$ pour $\acute{q}$, et effaçant ce qui se détruit,

$$N d^2q + Lq\,d^2q - dN\,dq - dL\,q\,dq - 2L\,d^2q - 2\,dL\,d^2q - L\,dq\,d^2q - dL\,dq\,d^2q = 0.$$

Mais les trois derniers termes sont du troisième ordre, tandis que les premiers ne sont que du second; ainsi, en rejetant les trois derniers comme infiniment petits vis-à-vis des autres, on a simplement l'équation du second ordre

$$N\,d^2q + Lq\,d^2q - dN\,dq - dL\,q\,dq - aL\,d^2q = 0,$$

comme Taylor le trouve.

Suivant Euler, les deux équations seraient

$$[N\,dx - d.(H - \int L\,dx)q]\nu + [\dot{N}\,dx - d.(H - \int \dot{L}\,dx)\dot{q}]\omega = 0,$$

$$dq.\nu + d\dot{q}.\omega = 0.$$

Mais

$$d.(H - \int L\,dx)q = -Lq\,dx + (H - \int L\,dx)\,dq,$$

et

$$d.(H - \int \dot{L}\,dx)\dot{q} = -\dot{L}\dot{q}\,dx + (H - \int \dot{L}\,dx)\,d\dot{q}$$
$$= -\dot{L}\dot{q}\,dx + (H - \int L\,dx)\,d\dot{q} - \dot{L}\,dx\,d\dot{q}$$

à cause de

$$\int \dot{L}\,dx = \int L\,dx + \dot{L}\,dx.$$

Donc, en observant que $\dot{q} + d\dot{q} = \ddot{q}$, la première équation devient

$$[(N + Lq)\,dx - (H - \int L\,dx)\,dq]\nu + [(\dot{N} + \dot{L}q)\,dx - (H - \int L\,dx)\,d\dot{q}]\omega = 0;$$

laquelle, en vertu de la seconde, se réduit à celle-ci :

$$(N + Lq)\nu + (\dot{N} + \dot{L}\ddot{q})\omega = 0,$$

qui est la même que celle de Taylor. Ainsi, comme les deux autres équations s'accordent aussi, le résultat doit être nécessairement le même.

En effet, suivant le théorème d'Euler, en ne considérant que la seule variation ν, on a tout de suite l'équation

$$N\,dx - d.(H - \int L\,dx)q - a\,dq = 0,$$

a étant une constante arbitraire.

Cette équation est l'intégrale première de celle de Taylor; car, si on la réduit à la forme

$$N\,dx - (H + a - \int L\,dx)\,dq + Lq\,dx = 0,$$

qu'on la différentie après l'avoir divisée par dq, et qu'on fasse ensuite disparaître les dénominateurs, on trouvera l'équation de Taylor.

On pourrait faire des remarques semblables sur les solutions de Bernoulli et sur celles d'Euler, dans les tomes VI et VIII des *Anciens Commentaires de Pétersbourg*. Mais, dans l'état actuel de l'Analyse, on peut regarder ces discussions comme inutiles, parce qu'elles regardent des méthodes oubliées, comme ayant fait place à d'autres plus simples et plus générales. Cependant elles peuvent avoir encore quelque intérêt pour ceux qui aiment à suivre pas à pas les progrès de l'Analyse, et à voir comment les méthodes simples et générales naissent des questions particulières et des procédés indirects et compliqués.

L'Ouvrage d'Euler, que nous avons cité, n'aurait rien laissé à désirer sur les problèmes relatifs aux courbes qui jouissent de quelque propriété de maximum ou minimum, s'il avait pour base une analyse plus conforme à l'esprit du Calcul différentiel. Mais la décomposition que l'auteur y fait des différentielles et des intégrales dans leurs éléments primitifs détruit le mécanisme de ce calcul, et lui fait perdre ses principaux avantages, la simplicité et la généralité de son algorithme.

Il restait donc à trouver la manière de plier le Calcul différentiel à ce genre de problèmes qui sont essentiellement de son ressort, et de les résoudre sans s'écarter de la marche simple et uniforme de ce Calcul. Cet objet a été rempli par la méthode des variations, publiée dans le tome II des *Mémoires de l'Académie de Turin* [1]. Comme cette méthode est exposée dans la plupart des Traités de Calcul différentiel qui ont paru depuis, nous nous contenterons d'en donner ici les principes.

Elle consiste à faire varier les y dans la formule intégrale en x et y, qui doit être un maximum ou un minimum, par des différentiations

(1) *OEuvres de Lagrange*, t. I, p. 335, et t. II, p. 37.

ordinaires, mais relatives à une autre caractéristique δ, différente de la caractéristique ordinaire d, et à déterminer la valeur différentielle de la formule par rapport à cette nouvelle caractéristique, en transposant le signe δ après les signes d et $\int$, lorsqu'il se trouve placé avant, et en faisant ensuite disparaître par des intégrations par parties les différentielles de δy sous les signes $\int$.

Soit la formule $\int Z$ qui doive être un maximum ou un minimum entre des limites données, la quantité Z étant une fonction donnée de x, y, dy, d^2y, ... En supposant dx constant, on aura $\delta \int Z$ pour la valeur différentielle qui doit être nulle dans le maximum ou minimum; donc

$$\delta \int Z = 0,$$

équation qui se transforme tout de suite en

$$\int \delta Z = 0.$$

Supposons qu'en différentiant à la manière ordinaire, mais suivant la caractéristique δ, et ne faisant varier que les y, dy, ..., on ait

$$\delta Z = N\,\delta y + P\,\delta\, dy + Q\,\delta\, d^2y + \ldots;$$

on aura l'équation

$$\int N\,\delta y + \int P\,\delta\, dy + \int Q\,\delta\, d^2y + \ldots = 0.$$

Or $\int P\,\delta dy$ se transforme d'abord en $\int P\,d\,\delta y$, et ensuite, en intégrant par parties, en $P\,\delta y - \int dP\,\delta y$.

De même $\int Q\,\delta\, d^2y$ se transforme d'abord en $\int Q\,d^2\,\delta y$, ensuite en $Q\,d\,\delta y - dQ\,\delta y + \int d^2Q\,\delta y$, et ainsi des autres.

Donc, en ajoutant une constante quelconque K à ces intégrations, l'équation deviendra

$$P\,\delta y + Q\,d\,\delta y - dQ\,\delta y + \ldots + K + \int (N - dP + d^2Q - \ldots)\,\delta y = 0.$$

Comme toutes les différentielles de δy ont disparu de dessous le signe $\int$, cette partie n'est plus susceptible d'aucune réduction. Ainsi, pour vérifier l'équation indépendamment des variations δy, il faudra

d'abord égaler à zéro le coefficient des δy sous le signe, ce qui donnera l'équation

$$N - dP + d^2Q - \ldots = 0,$$

laquelle devra avoir lieu indéfiniment pour toutes les valeurs de x et y comprises entre les limites données.

Cette équation est, en d'autres termes, celle qu'Euler a trouvée le premier pour le maximum ou le minimum de la formule intégrale $\int Z dx$. Euler fait $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, ..., et il suppose Z fonction de x, y, p, q, ..., telle qu'on ait par la différentiation

$$dZ = M\,dx + N\,dy + P\,dp + Q\,dq + \ldots.$$

Il fait ensuite varier l'ordonnée y de la ligne infiniment petite nv; et, en regardant la formule $\int Z\,dx$ comme l'aire d'une nouvelle courbe dont Z serait l'ordonnée, il trouve pour la valeur différentielle de cette aire, la formule

$$\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots\right) nv,$$

d'où il tire l'équation

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0,$$

qui coïncide avec la précédente.

Notre méthode donne de plus l'équation déterminée

$$(P - dQ + \ldots)\,\delta y + Q\,d\,\delta y + \ldots + K = 0,$$

laquelle doit avoir lieu dans les deux limites entre lesquelles la formule $\int Z\,dx$ doit être un maximum ou un minimum.

Désignons par y_0, P_0, Q_0, ... les valeurs de y, P, Q, ... à la première limite où x est par exemple égal à a, et par y_1, P_1, Q_1, ... leurs valeurs à l'autre limite où x serait égal à b; on aura ainsi les deux équations

$$(P_0 - dQ_0 + \ldots)\,\delta y_0 + Q_0\,d\,\delta y_0 + \ldots + K = 0,$$
$$(P_1 - dQ_1 + \ldots)\,\delta y_1 + Q_1\,d\,\delta y_1 + \ldots + K = 0.$$

La première donnera la valeur de la constante K, laquelle étant substituée dans la seconde, donne

$$(P_1 - dQ_1 + \ldots)\,\delta y_1 + Q_1\,d\,\delta y_1 + \ldots$$
$$-(P_0 - dQ_0 - \ldots)\,\delta y_0 - Q_0\,d\,\delta y_0 - \ldots = 0,$$

équation qui reste encore à vérifier pour la solution complète du problème.

Si les valeurs de y_0 et y_1, ainsi que celles de $\frac{dy_0}{dx}$, $\frac{dy_1}{dx}$, ..., sont censées données, leurs variations seront nulles, et tous les termes de l'équation s'en iront d'eux-mêmes; c'est le cas de l'Analyse d'Euler.

Si toutes ces valeurs ou seulement quelques-unes sont indéterminées, ou s'il y a entre elles des relations données par la nature du problème, alors, après avoir effacé les variations qui doivent être nulles et réduit les autres au plus petit nombre possible, il faudra faire disparaître les variations restantes en égalant leurs coefficients à zéro; ce qui donnera autant d'équations auxquelles on satisfera par le moyen des constantes arbitraires que les différentes intégrations introduiront dans l'équation du problème. [*Voir* là-dessus le deuxième et le quatrième Volume des *Mémoires de Turin* (1), et les différents Ouvrages de Calcul intégral où cette théorie est exposée.]

(1) *Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 335, et t. II, p. 37.

LEÇON VINGT-DEUXIÈME.

(Continuation de la Leçon précédente.)

MÉTHODE DES VARIATIONS, DÉDUITE DE LA CONSIDÉRATION DES FONCTIONS.

La méthode des variations, fondée sur l'emploi et la combinaison des caractéristiques d et δ qui répondent à des différentiations différentes, ne laissait rien à désirer; mais cette méthode ayant, comme le Calcul différentiel, la supposition des infiniment petits pour base, il était nécessaire de la présenter sous un autre point de vue pour la lier au Calcul des fonctions : c'est ce que j'ai déjà fait dans la *Théorie des Fonctions;* mais je vais reprendre ici cet objet, pour le traiter d'une manière plus directe et plus complète.

Lorsqu'une fonction donnée de plusieurs variables et de leurs dérivées ne satisfait pas aux conditions que nous avons trouvées dans la Leçon précédente, elle ne peut pas avoir une fonction primitive, à moins qu'il n'y ait des relations établies entre ces variables, de manière qu'il n'y reste qu'une seule variable indéterminée; et les questions *de maximis et de minimis* dont il s'agit ici consistent à trouver des relations telles que la fonction primitive qui en résultera soit un maximum ou un minimum entre des limites données, c'est-à-dire entre des valeurs données de la variable qui demeurera indéterminée.

On voit d'abord que cette question dépend nécessairement de ce que la fonction primitive ne puisse avoir lieu sans une relation entre les variables; car si elle pouvait être une fonction déterminée des différentes variables et de leurs dérivées, elle ne serait plus susceptible que des maxima ou minima du genre ordinaire, relativement à cha-

cune des variables et de leurs dérivées considérées comme des variables particulières.

Considérons donc une fonction quelconque de $x, y, y', y'', \ldots$, que nous désignerons par V et que nous supposerons n'avoir point de fonction primitive dans l'état où elle est; pour qu'elle en ait une, il faudra supposer $y = \varphi(x)$; et, pour que la fonction primitive qui en résulte, et que nous dénoterons par U, soit un maximum ou un minimum entre des limites données qui répondent à des valeurs données de x, il faudra qu'en faisant varier tant soit peu la fonction $\varphi(x)$, la valeur de la fonction U prise entre ces limites diminue dans le cas du maximum, et augmente dans le cas du minimum.

Supposons que l'expression de y soit, en général, une fonction de x et i, que nous représenterons par $\varphi(x, i)$, et qui soit telle qu'elle devienne $\varphi(x)$ lorsque $i = 0$.

La fonction U deviendra aussi une fonction de x et i, et, pour qu'elle soit un maximum ou un minimum, il faudra qu'en donnant à i une valeur quelconque très petite, et supposant d'ailleurs la composition de la fonction $\varphi(x, i)$ arbitraire par rapport à i, elle ait une valeur moindre dans le cas du maximum, et plus grande dans le cas du minimum que lorsque $i = 0$. Si l'on développe cette fonction suivant les puissances de i, elle deviendra

$$U + i\dot{U} + \frac{i^2}{2}\ddot{U} + \frac{i^3}{2.3}\dot{\ddot{U}} + \ldots,$$

en indiquant par des points les fonctions dérivées par rapport à i, dans lesquelles il faut faire, après la dérivation, $i = 0$, comme on l'a vu dans la Leçon IX.

Ainsi l'accroissement de U, à raison de la quantité i, sera exprimé par les termes

$$i\dot{U} + \frac{i^2}{2}\ddot{U} + \frac{i^3}{2.3}\dot{\ddot{U}} + \ldots,$$

et il faudra pour le maximum que la somme de ces termes ait une valeur négative, et pour le minimum que sa valeur soit positive, i étant une quantité quelconque très petite et indépendante de x.

On a prouvé dans la Leçon citée qu'on peut toujours donner à i une valeur assez petite pour que le premier terme $i\dot{U}$ surpasse la somme de tous les suivants; d'où il suit qu'alors l'accroissement de U aura le même signe que le terme $i\dot{U}$; mais il est visible que ce terme change de signe avec la quantité i qui n'y est qu'à la première dimension; donc il est impossible que l'accroissement de U soit constamment positif ou négatif en donnant à i des valeurs quelconques très petites, à moins que le premier terme $i\dot{U}$ du développement de U ne disparaisse, ce qui donne d'abord la condition $\dot{U} = 0$, qui est, comme l'on voit, commune aux maxima et aux minima.

Cette condition étant remplie, l'accroissement de U se réduira à

$$\frac{i^2}{2}\ddot{U} + \frac{i^3}{2.3}\dot{\ddot{U}} + \ldots,$$

et, par un raisonnement semblable à celui que nous venons de faire, on pourra prouver aussi que le premier terme $\frac{i^2}{2}\ddot{U}$ devra être positif ou négatif pour que la variation soit positive ou négative; mais, ce terme étant multiplié par le carré de i, il est clair que son signe sera indépendant de i et ne dépendra que de celui de la quantité $\ddot{U}$, laquelle devra donc être toujours négative dans le cas du maximum, et positive dans le cas du minimum; ce qui contient le caractère qui distingue les maxima des minima.

Telle est la théorie générale des maxima et minima que nous avons cru devoir rappeler ici pour ne rien laisser à désirer.

Dans les questions ordinaires, la quantité U, qui doit être un maximum ou un minimum, est une fonction donnée de x, et les dérivées $\dot{U}, \ddot{U}, \ldots$ sont prises par rapport à x; alors l'équation $\dot{U} = 0$ devient $U' = 0$, et donne la valeur de x; ensuite le signe de U'' distingue le maximum du minimum.

Dans les questions dont il s'agit ici, la fonction U n'est donnée que par sa fonction dérivée V; la fonction $\varphi(x)$ est l'inconnue, et les dérivées $\dot{U}, \ddot{U}, \ldots$ sont censées prises par rapport à la quantité i qu'on sup-

pose contenue dans la fonction $\varphi(x, i)$. Ainsi la difficulté consiste à déduire ces dérivées de la fonction donnée V.

Or, y étant $\varphi(x)$, lorsque $\varphi(x)$ devient $\varphi(x, i)$, y deviendra

$$y + i\dot{y} + \frac{i^2}{2}\ddot{y} + \frac{i^3}{2.3}\dddot{y} + \ldots,$$

en dénotant, comme plus haut, par des points les fonctions dérivées par rapport à i, dans lesquelles on fait ensuite $i = 0$, de sorte que ces fonctions deviennent de simples fonctions de x, qui peuvent même avoir une valeur quelconque, parce que la composition de la fonction $\varphi(x, i)$ est supposée arbitraire par rapport à i.

Ainsi, en prenant les fonctions dérivées par rapport à x, il est clair que y' deviendra pareillement

$$y' + i\dot{y}' + \frac{i^2}{2}\ddot{y}' + \ldots,$$

et y'' deviendra de même

$$y'' + i\dot{y}'' + \frac{i^2}{2}\ddot{y}'' + \ldots,$$

et ainsi de suite.

Faisant ces substitutions à la place des quantités $y, y', y'', \ldots$ dans la fonction donnée V et développant ensuite les puissances de i, cette fonction deviendra

$$\mathrm{V} + i\dot{\mathrm{V}} + \frac{i^2}{2}\ddot{\mathrm{V}} + \frac{i^3}{2.3}\dddot{\mathrm{V}} + \ldots;$$

et, par la théorie des fonctions dérivées exposée dans les premières Leçons, il est facile de conclure que la quantité $\dot{\mathrm{V}}$, qui, étant multipliée par i, forme le premier terme du développement, sera la fonction dérivée de V, en supposant x constant et $y, y', y'', \ldots$ des variables indépendantes, dont les fonctions dérivées soient respectivement $\dot{y}, \dot{y}', \dot{y}'', \ldots$. De même $\ddot{\mathrm{V}}$ sera sa fonction dérivée du second ordre, prise relativement aux mêmes variables, et en supposant que $\ddot{y}, \ddot{y}', \ddot{y}'', \ldots$ soient les fonctions secondes de $y, y', y'', \ldots$, et ainsi de suite.

Nous appellerons en général *variations* du premier ordre, du second, etc., ces dérivées marquées par des points et relatives à la quantité i, dans lesquelles cette quantité est supposée nulle. Ainsi $\dot{y}$ sera la variation du premier ordre de y, $\dot{y}'$ sera la dérivée ordinaire de cette variation, $\ddot{y}$ sera la variation du second ordre de y, et ainsi de suite. De même, $\dot{\mathrm{V}}, \ddot{\mathrm{V}}, \ldots$ seront les variations du premier ordre, du second ordre, etc., de V; et $\dot{\mathrm{U}}, \ddot{\mathrm{U}}, \ldots$ seront aussi les variations du premier ordre, du second ordre, etc., de U. Et pour former ces variations, on suivra les mêmes règles que pour les fonctions dérivées ordinaires.

Ainsi, en faisant

$$\mathrm{V} = f(x, y, y', y'', \ldots),$$

on aura, suivant la notation employée dans ces Leçons,

$$\dot{\mathrm{V}} = \dot{y} f'(y) + \dot{y}' f'(y') + \dot{y}'' f'(y'') + \ldots.$$

Il est visible que cette fonction $\dot{\mathrm{V}}$ est la même chose que celle que nous avons désignée par $\dot{\mathrm{V}}$ au commencement de la Leçon précédente, en changeant seulement $\dot{y}$ en ω, parce que nous avons supposé alors que l'accroissement de y était représenté simplement par $i\omega$.

Maintenant, puisque U est supposé la fonction primitive de V en y faisant $y = \varphi(x)$, quelle que soit la fonction $\varphi(x)$, elle le sera aussi en faisant $y = \varphi(x, i)$. Dans ce cas, nous avons vu que U devient

$$\mathrm{U} + i\dot{\mathrm{U}} + \frac{i^2}{2}\ddot{\mathrm{U}} + \ldots,$$

et V devient

$$\mathrm{V} + i\dot{\mathrm{V}} + \frac{i^2}{2}\ddot{\mathrm{V}} + \ldots,$$

de sorte que, comme i peut être une quantité quelconque, il faudra que les variations $\dot{\mathrm{U}}, \ddot{\mathrm{U}}, \ldots$ soient respectivement aussi les fonctions primitives des variations $\dot{\mathrm{V}}, \ddot{\mathrm{V}}, \ldots$; ainsi on aura

$$\dot{\mathrm{U}}' = \dot{\mathrm{V}}, \quad \ddot{\mathrm{U}}' = \ddot{\mathrm{V}}, \quad \ldots.$$

La condition du maximum ou minimum consiste donc en ce que la fonction primitive de V soit nulle, quelle que soit la valeur de $\dot{y}$. Or si, pour plus de simplicité, on représente la valeur de $\dot{\mathrm{V}}$ par la formule

$$\mathrm{N}\dot{y} + \mathrm{P}\dot{y}' + \mathrm{Q}\dot{y}'' + \mathrm{R}\dot{y}''' + \ldots,$$

et qu'on emploie relativement aux dérivées de $\dot{y}$ les transformations qu'on a enseignées au commencement de la Leçon précédente, relativement aux dérivées de ω dans l'expression de $\dot{V}$, et dont l'objet est de réduire à des fonctions dérivées exactes tous les termes qui contiennent des dérivées de $\dot{y}$, on aura cette transformée

$$\begin{aligned}\dot{V} = &(N - P' + Q'' - R''' + \ldots)\dot{y}\\ &+ (P\dot{y})' - (Q'\dot{y})' + (R''\dot{y})' - \ldots\\ &+ (Q\dot{y}')' - (R'\dot{y}')' + \ldots\\ &+ (R\dot{y}'')' - \ldots\\ &\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

où l'on voit que tous les termes, à l'exception de ceux qui forment la première ligne, sont des fonctions dérivées exactes, de sorte que leurs fonctions primitives sont connues et déterminées, quelle que soit la quantité $\dot{y}$; au contraire, les termes de la première ligne étant tous multipliés par $\dot{y}$ ne peuvent avoir de fonction primitive, à moins qu'on ne donne à la variation $\dot{y}$ des valeurs particulières. Donc, comme cette variation doit demeurer indéterminée, il sera impossible que la fonction primitive de $\dot{V}$ devienne nulle, à moins que la première ligne de l'expression de $\dot{V}$ ne disparaisse, ce qui donnera l'équation indépendante de $\dot{y}$,

$$N - P' + Q'' - R''' + \ldots = 0.$$

C'est l'équation qui contient la relation nécessaire entre les variables x et y pour l'existence du maximum ou minimum, et que nous appellerons *équation générale* du maximum ou minimum. En Géométrie, c'est l'équation de la courbe qui jouit de la propriété de maximum ou minimum. Il est facile de voir que cette équation sera en général de l'ordre $2n$, si la fonction proposée V est de l'ordre n, c'est-à-dire si elle contient la dérivée $y^{(n)}$; de sorte que son équation primitive en x et y contiendra $2n$ constantes arbitraires.

La première ligne de la valeur de $\dot{V}$ ayant disparu, on aura, en prenant la fonction primitive de $\dot{V}$,

$$\begin{aligned}\dot{U} = &(P - Q' + R'' - \ldots)\dot{y}\\ &+ (Q - R' + \ldots)\dot{y}'\\ &+ (R - \ldots)\dot{y}''\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &+ K,\end{aligned}$$

la quantité K étant une constante arbitraire.

Cette fonction ayant maintenant une valeur déterminée, pour que cette valeur soit nulle entre les limites données, il faudra que la différence des valeurs qui répondent à ces limites soit nulle.

Désignons par $\dot{U}_0$ et $\dot{U}_1$ les valeurs de $\dot{U}$ qui répondent à la première et à la seconde limite, dans lesquelles x aura des valeurs données, et représentons de la même manière les valeurs des autres quantités dans ces limites; on aura cette équation particulière aux limites $\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0$, savoir :

$$\left.\begin{aligned}&(P_1 - Q_1' + R_1'' - \ldots)\dot{y}_1\\ &+ (Q_1 - R_1' + \ldots)\dot{y}_1'\\ &+ (R_1 - \ldots)\dot{y}_1''\\ &\ldots\ldots\ldots\\ &- (P_0 - Q_0' + R_0'' - \ldots)\dot{y}_0\\ &- (Q_0 - R_0' + \ldots)\dot{y}_0'\\ &- (R_0 - \ldots)\dot{y}_0''\\ &\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} = 0,$$

à laquelle on devra satisfaire comme aux équations pour les maxima et minima du genre ordinaire; et les conditions qui en résulteront serviront à déterminer les constantes arbitraires que la valeur de y en x pourra admettre.

Si les valeurs de y, y', y'', ... étaient supposées données aux deux limites, alors il est visible que les variations $\dot{y}_0$, $\dot{y}_0'$, $\dot{y}_0''$, ... et $\dot{y}_1$, $\dot{y}_1'$, $\dot{y}_1''$, ... seraient nulles à la fois; par conséquent l'équation, ayant lieu d'elle-même, ne donnerait aucune condition à remplir.

Si au contraire aucune de ces valeurs n'était donnée, alors il fau-

drait égaler séparément à zéro tous les coefficients de ces mêmes variations, ce qui donnerait autant d'équations relatives à chacune des deux limites.

Mais il arrive le plus souvent que les valeurs de y et de ses dérivées aux deux limites ne sont ni toutes données ni toutes arbitraires, mais qu'il y a entre elles des relations données par la nature du problème. Alors il faudra, par le moyen de ces relations, réduire les variations $\dot{y}$, $\dot{y}'$, $\dot{y}''$, ... dans les deux limites au plus petit nombre possible, et égaler à zéro les coefficients de celles qui demeureront indéterminées.

L'équation générale

$$N - P' + Q'' - \ldots = 0,$$

que nous venons de trouver pour le maximum ou minimum de la fonction primitive de V, est, comme l'on voit, la même que celle que nous avons trouvée dans la Leçon précédente pour l'existence de cette fonction, indépendamment d'aucune relation entre les variables.

On voit maintenant la raison de cette identité des formules par la conformité des opérations analytiques dans les deux cas.

Il est d'ailleurs évident que, lorsque la fonction V est d'elle-même une dérivée exacte, sa fonction primitive est une fonction déterminée de x, y, y', y'', ..., qui doit alors être rapportée aux deux limites, de manière que l'équation

$$N - P' + Q'' - \ldots = 0$$

ne doit plus donner de relation entre x et y, et par conséquent doit se vérifier d'elle-même.

C'est par cette considération qu'Euler a trouvé le premier cette même équation, ou plutôt l'équation équivalente

$$N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \ldots = 0$$

pour la condition de l'intégrabilité de la formule $Z\,dx$. Condorcet a observé ensuite que, si la formule $\int Z\,dx$ était intégrable, il fallait que la variation $\delta \int Z\,dx$ le fût aussi; et de là il a conclu que les équations

de condition pour l'intégrabilité devaient être les mêmes que les équations entre les variables pour les maxima et minima. Notre analyse ne doit rien laisser à désirer sur cet objet.

Nous avons supposé jusqu'ici que la variation de x était nulle; c'est ce qui a toujours lieu lorsque les limites sont fixes; mais, comme dans la plupart des cas les limites sont variables, il est bon de voir ce que doit donner la variation de x.

Pour cela, il suffit de considérer que, la fonction U étant censée une fonction de x, si l'on fait croître x de $i\dot{x}$, l'accroissement de U sera, comme on l'a vu dans les premières Leçons,

$$i\dot{x}U' + \frac{i^2\dot{x}^2}{2}U'' + \ldots.$$

Or $U' = V$ par l'hypothèse; donc

$$U'' = V', \quad U''' = V'',$$

et ainsi de suite.

Donc, pour avoir l'accroissement de U dans ce cas, il suffira d'ajouter respectivement aux variations $\dot{U}$, $\ddot{U}$, ... les termes $\dot{x}V$, $\dot{x}^2V'$, ... Ainsi, comme $\dot{V} = \dot{U}'$, il faudra ajouter à la valeur de $\dot{V}$ trouvée dans l'hypothèse où x ne varie pas le terme $(V\dot{x})'$.

Mais, comme la variation de x influe aussi sur celle de y en tant que cette quantité est fonction de x, il faudra, dans ce cas, retrancher de celle-ci ce qui est dû à la variation de x, dont nous venons de déterminer l'effet total sur les variations de U.

En effet, on a vu ci-dessus que, y étant $\varphi(x)$, lorsque $\varphi(x)$ devient $\varphi(x, i)$, y devient $y + i\dot{y} + \frac{i^2}{2}\ddot{y} + \ldots$. Or, x devenant en même temps $x + i\dot{x}$, y devient par là

$$y + i\dot{x}y' + \frac{i^2\dot{x}^2}{2}y'' + \ldots.$$

De la même manière, y, qui est aussi fonction de x, deviendra

$$\dot{y} + i\dot{x}\dot{y}' + \frac{i^2\dot{x}^2}{2}\dot{y}'' + \ldots,$$

et $\ddot{y}$ deviendra

$$\ddot{y} + i\dot{x}\ddot{y}' + \frac{i^2\dot{x}^2}{2}\ddot{y}'' + \dots .$$

Donc l'accroissement total de y sera exprimé par

$$i(\dot{y} + \dot{x}y') + \frac{i^2}{2}(\ddot{y} + 2\dot{x}\dot{y}' + \dot{x}^2y'') + \dots ,$$

où l'on voit que $\dot{y} + \dot{x}y'$, $\ddot{y} + 2\dot{x}\dot{y}' + \dot{x}^2y''$, ... sont les variations totales de y, dans le cas où l'on a égard à la variation $\dot{x}$ de x.

Désignant, pour un moment, ces variations par $(\dot{y})$, $(\ddot{y})$, ..., pour les distinguer des variations $\ddot{y}$, $\dot{y}$, ... qui ont lieu lorsque $\dot{x}$ est nul, on aura

$$\dot{y} + \dot{x}y' = (\dot{y}), \quad \ddot{y} + 2\dot{x}\dot{y}' + \dot{x}^2y'' = (\ddot{y}), \quad \dots ;$$

donc

$$\dot{y} = (\dot{y}) - \dot{x}y',$$

et, prenant les dérivées par rapport à x,

$$\dot{y}' = [(\dot{y}) - \dot{x}y']', \quad \dot{y}'' = [(\dot{y}) - \dot{x}y']'', \quad \dots .$$

Ce sont les valeurs qu'il faudra substituer à la place de $\dot{y}$, $\dot{y}'$, $\dot{y}''$, ... dans la variation $\dot{\mathrm{V}}$ prise en regardant x comme invariable. Donc, si l'on a égard à la variation de x, l'expression de $\dot{\mathrm{V}}$ trouvée ci-dessus deviendra, en mettant simplement $\dot{y}$ au lieu de $(\dot{y})$,

$$\mathrm{N}(\dot{y} - y'\dot{x}) + \mathrm{P}(\dot{y} - y'\dot{x})' + \mathrm{Q}(\dot{y} - y'\dot{x})'' + \mathrm{R}(\dot{y} - y'\dot{x})''' + \dots + (\mathrm{V}\dot{x})'.$$

Ainsi les termes de la transformée, qui seront multipliés par les variations $\dot{y}$ et $\dot{x}$, sans être des dérivées exactes, seront simplement

$$(\mathrm{N} - \mathrm{P}' + \mathrm{Q}'' - \mathrm{R}''' + \dots)(\dot{y} - y'\dot{x}),$$

d'où l'on voit que l'équation générale

$$\mathrm{N} - \mathrm{P}' + \mathrm{Q}'' - \mathrm{R}''' + \dots = 0,$$

trouvée d'après la seule variation de y, satisfait en même temps à la variation de x. Donc cette variation n'influera que sur l'équation aux

limites $\mathrm{U}_1 - \mathrm{U}_0 = 0$, dans laquelle il faudra ajouter à la valeur de U le terme $\mathrm{V}\dot{x}$, et y changer $\dot{y}$ en $\dot{y} - y'\dot{x}$.

On peut parvenir au même résultat d'une manière moins simple, mais plus directe, en considérant immédiatement les variations de x et de ses dérivées.

Pour cela, il faut d'abord dépouiller la fonction V de la supposition de $x' = 1$, pour pouvoir tenir compte des variations de x', x'', ..., ce qui se fait en substituant, comme on l'a vu dans les Leçons précédentes, $\frac{y'}{x'}$ au lieu de y', $\frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'}$ au lieu de y'', et ainsi de suite, en multipliant la fonction V par x' pour qu'elle puisse être la fonction dérivée de U.

Soit, pour abréger,

$$\frac{y'}{x'} = p, \quad \frac{p'}{x'} = q, \quad \frac{q'}{x'} = r, \quad \dots ;$$

il faudra dans V substituer p, q, r, ... à la place de y', y'', y''', ...; moyennant quoi cette quantité deviendra fonction de y, p, q, ..., et l'on aura la dérivée

$$\mathrm{V}' = \mathrm{M}x' + \mathrm{N}y' + \mathrm{P}p' + \mathrm{Q}q' + \mathrm{R}r' + \dots ,$$

qui se réduit à

$$\mathrm{V}' = (\mathrm{M} + \mathrm{N}p + \mathrm{P}q + \mathrm{Q}r + \mathrm{R}s + \dots)x',$$

et la variation

$$\dot{\mathrm{V}} = \mathrm{M}\dot{x} + \mathrm{N}\dot{y} + \mathrm{P}\dot{p} + \mathrm{Q}\dot{q} + \mathrm{R}\dot{r} + \dots .$$

Ainsi tout consiste à trouver les valeurs des variations p, q, r, ...

Or, p étant $= \frac{y'}{x'}$, on aura

$$\dot{p} = \frac{\dot{y}'}{x'} - \frac{y'\dot{x}'}{x'^2} = \frac{\dot{y}' - p\dot{x}'}{x'} = \frac{(\dot{y} - p\dot{x})' + p'\dot{x}}{x'} = \frac{(\dot{y} - p\dot{x})'}{x'} + q\dot{x},$$

à cause de $\frac{p'}{x'} = q$.

On peut faire ici $x' = 1$, et l'on aura simplement

$$\dot{p} = (\dot{y} - p\dot{x})' + q\dot{x}.$$

De même, q étant $= \frac{p'}{x'}$, on aura

$$\dot{q} = \frac{\dot{p}'}{x'} - \frac{p'\dot{x}'}{x'^2} = \frac{\dot{p}' - q\dot{x}'}{x'} = \frac{(\dot{p} - q\dot{x})' + q'\dot{x}}{x'} = \frac{(\dot{p} - q\dot{x})'}{x'} + r\dot{x}.$$

Mais la valeur de $\dot{p}$ donne

$$\dot{p} - q\dot{x} = (\dot{y} - p\dot{x})';$$

donc, faisant cette substitution, et supposant $x' = 1$, ce qui est permis ici, il viendra

$$\dot{q} = (\dot{y} - p\dot{x})'' + r\dot{x}.$$

On trouvera de la même manière

$$\dot{r} = (\dot{y} - p\dot{x})''' + s\dot{x},$$

et ainsi de suite.

Par ces substitutions, la variation $\dot{V}$ deviendra

$$\begin{aligned}&(M + Pq + Qr + Rs + \ldots)\dot{x} + N\dot{y} + P(\dot{y} - p\dot{x})' + Q(\dot{y} - p\dot{x})'' + R(\dot{y} - p\dot{x})''' + \ldots \\ &= (M + Np + Pq + Qr + Rs + \ldots)\dot{x} \\ &\quad + N(\dot{y} - p\dot{x}) + P(\dot{y} - p\dot{x})' + Q(\dot{y} - p\dot{x})'' + R(\dot{y} - p\dot{x})''' + \ldots.\end{aligned}$$

Or on a trouvé ci-dessus

$$M + Np + Pq + Qr + \ldots = \frac{V'}{x'};$$

d'ailleurs $p = \frac{y'}{x'}$; donc, faisant ces substitutions et supposant ici $x' = 1$, on aura simplement

$$\dot{V} = V'\dot{x} + N(\dot{y} - y'\dot{x}) + P(\dot{y} - y'\dot{x})' + Q(\dot{y} - y'\dot{x})'' + R(\dot{y} - y'\dot{x})''' + \ldots.$$

C'est la valeur complète de la variation de V, déduite des variations de x et de y et de leurs dérivées.

Mais on a vu qu'il faut mettre $V\dot{x}'$ à la place de V; donc on aura $\dot{V}\dot{x}' + V\dot{x}'$ à substituer à la place de $\dot{V}$ dans les formules données plus

haut; donc, mettant ici la valeur de V qu'on vient de trouver, et observant que

$$V'\dot{x} + V\dot{x}' = (V\dot{x})',$$

on aura, en faisant $x' = 1$, le même résultat auquel on est parvenu ci-dessus par une autre voie.

Au reste, en regardant la quantité V comme une fonction de x, y et de leurs dérivées x', x'', ..., y', y'', ..., on pourra traiter les variations de x comme on a fait celles de y.

Dans ce cas, la fonction V étant représentée par

$$f(x, x', x'', \ldots, y, y', y'', \ldots),$$

on trouverait les termes

$$\dot{x}f'(x) + \dot{x}'f'(x') + \dot{x}''f'(x'') + \ldots$$

à ajouter à la variation $\dot{V}$; et, en désignant ces termes par la formule

$$n\dot{x} + p\dot{x}' + q\dot{x}'' + r\dot{x}''' + \ldots,$$

on parviendrait, par des opérations relatives à la variation $\dot{x}$ et analogues à celles qu'on a employées pour la variation $\dot{y}$, à la transformée

$$(n - p' + q'' - r''' + \ldots)\dot{x}.$$

De sorte que la partie de la valeur de $\dot{V}$ qui ne serait pas une dérivée exacte serait

$$(N - P' + Q'' - R''' + \ldots)\dot{y} + (n - p' + q'' - r''' + \ldots)\dot{x}.$$

Lorsque y est censée une fonction de x, et qu'on peut par conséquent faire $x' = 1$, nous venons de voir que la variation simultanée de x et de y donne, pour la partie de $\dot{V}$ qui n'est pas une dérivée exacte, la formule

$$(N - P' + Q'' - R''' + \ldots)(\dot{y} - y'\dot{x}).$$

Il faut donc alors que la formule précédente coïncide avec celle-ci, et que l'on ait par conséquent

$$n - p' + q'' - r''' + \ldots = -y'(N - P' + Q'' - R''' + \ldots).$$

D'où l'on voit que l'équation

$$n - p' + q'' - r''' + \ldots = 0,$$

que donnerait la variation de x, est toujours équivalente à l'équation

$$N - P' + Q'' - R''' + \ldots = 0$$

qui provient de la variation de y.

En effet, nous avons déjà trouvé par une autre voie, dans la Leçon précédente, que ces équations ont toujours lieu à la fois.

Un des avantages du calcul des variations est de pouvoir faire varier indistinctement les indéterminées x ou y et leurs différentielles; et l'identité des équations du maximum ou minimum, déduites de l'une et de l'autre de ces variations, a été un des premiers résultats de ce calcul auquel les anciennes méthodes n'auraient pu conduire. Mais les démonstrations qu'on en a données dans le second et le quatrième Volume des *Mémoires de Turin* (1) sont moins directes que celle qui se déduit des formules qui représentent cette double variation, et que nous venons d'exposer d'après Euler. *Voyez* le Tome III de son *Calcul intégral*.

Considérons maintenant le problème dans toute sa généralité, et d'abord, soit, comme ci-dessus,

$$V = f(x, y, y', y'', y''', \ldots);$$

on aura

$$N = f'(y), \quad P = f'(y'), \quad Q = f'(y''), \quad R = f'(y'''), \quad \ldots$$

Soit, de plus, pour abréger,

$$\begin{aligned}
Y &= f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - [f'(y''')]'' + \ldots,\\
\overset{\text{I}}{Y} &= f'(y') - [f'(y'')]' + [f'(y''')]'' - \ldots,\\
\overset{\text{II}}{Y} &= f'(y'') - [f'(y''')]' + \ldots\\
\overset{\text{III}}{Y} &= f'(y''') - \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

(1) *Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 335, et t. II, p. 37.

La variation $\dot{V}$, dans le cas où x ne varie pas, sera

$$\dot{V} = Y\dot{y} + (\overset{\text{I}}{Y}\dot{y})' + (\overset{\text{II}}{Y}\dot{y}')' + (\overset{\text{III}}{Y}\dot{y}'')' + \ldots,$$

où les termes qui ne sont pas sous la forme de fonctions dérivées doivent s'évanouir, ce qui donne d'abord, comme on l'a vu, l'équation générale $Y = 0$.

Ensuite, à cause de $\dot{V} = \dot{U}'$, on aura la variation de U,

$$\dot{U} = \overset{\text{I}}{Y}\dot{y} + \overset{\text{II}}{Y}\dot{y}' + \overset{\text{III}}{Y}\dot{y}'' + \ldots,$$

et l'équation aux limites sera

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0.$$

Si l'on veut que x varie en même temps que y, on changera y en $\dot{y} - y'\dot{x}$, et l'on ajoutera à $\dot{U}$ le terme $V\dot{x}$.

Supposons, en second lieu, que la fonction proposée contienne une troisième variable z, avec ses fonctions dérivées z', z'', ...; on fera, relativement à cette variable, des opérations analogues à celles qu'on a employées pour la variable y, et la valeur de V, en supposant x invariable, se trouvera composée de deux parties semblables, l'une relative à $\dot{y}$, l'autre relative à $\dot{z}$.

Ainsi, en supposant

$$V = f(x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots),$$

et conservant les expressions de Y, $\overset{\text{I}}{Y}$, $\overset{\text{II}}{Y}$, ..., on fera, de plus,

$$\begin{aligned}
Z &= f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - [f'(z''')]'' + \ldots,\\
\overset{\text{I}}{Z} &= f'(z') - [f'(z'')]' + [f'(z''')]'' - \ldots,\\
\overset{\text{II}}{Z} &= f'(z'') - [f'(z''')]' + \ldots,\\
\overset{\text{III}}{Z} &= f'(z''') - \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et l'on aura sur-le-champ

$$\dot{V} = Y\dot{y} + Z\dot{z} + (\overset{\text{I}}{Y}\dot{y})' + (\overset{\text{I}}{Y}\dot{y}')' + (\overset{\text{II}}{Y}\dot{y}'')' + \ldots + (\overset{\text{I}}{Z}\dot{z})' + (\overset{\text{II}}{Z}\dot{z}')' + (\overset{\text{III}}{Z}\dot{z}'')' + \ldots$$

Les termes $Y\dot{y} + Z\dot{z}$, qui ne sauraient être des fonctions dérivées exactes, tant que y et z ont des valeurs arbitraires, doivent être détruits, ce qui donnera d'abord l'équation générale

$$Y\dot{y} + Z\dot{z} = 0,$$

à laquelle on satisfera de différentes manières, suivant que les variables y et z seront indépendantes l'une de l'autre, ou qu'elles seront liées entre elles par des relations données.

On aura ensuite, en prenant les fonctions primitives, à cause de $\dot{V} = \dot{U}'$, l'équation

$$U = {}^{1}Y\dot{y} + {}^{11}Y\dot{y}' + {}^{111}Y\dot{y}'' + \ldots + {}^{1}Z\dot{z} + {}^{11}Z\dot{z}' + {}^{111}Z\dot{z}'' + \ldots;$$

c'est la valeur qu'il faudra substituer dans l'équation aux limites

$$U_1 - U_0 = 0.$$

Si l'on veut que x varie aussi, on changera $\dot{y}$ et $\dot{z}$ en $\dot{y} - y'\dot{x}$, $\dot{z} - z'\dot{x}$, et l'on ajoutera à $\dot{U}$ le terme $V\dot{x}$.

Reprenons l'équation $Y\dot{y} + Z\dot{z} = 0$. S'il n'y a aucune relation donnée par les conditions du problème entre x et y, leurs variations seront indépendantes l'une de l'autre, et l'on ne pourra vérifier l'équation dont il s'agit qu'en faisant séparément

$$Y = 0, \qquad Z = 0,$$

deux équations qui serviront à déterminer y et z en fonctions de x.

Mais, si les variables y et z étaient liées par une équation de condition entre x, y, z, que nous représenterons par

$$F(x, y, z) = 0,$$

il faudrait tirer de cette équation la valeur de z en x et y, et la substituer dans l'expression de V; mais, pour faire usage de l'équation $Y\dot{y} + Z\dot{z} = 0$, il suffit d'avoir le rapport entre les variations $\dot{y}$ et $\dot{z}$; et pour cela, il n'y a qu'à considérer que, la relation entre les quantités x, y, z devant subsister aussi dans l'état varié, l'équation

$F(x, y, z) = 0$ devra avoir lieu aussi en y mettant $x + i\dot{x}$ au lieu de x, et $y + i\dot{y} + \frac{i^2}{2}\ddot{y} + \ldots$, $z + i\dot{z} + \frac{i^2}{2}\ddot{z} + \ldots$ au lieu de y et z, quelle que soit la quantité i. D'où et de ce qui a été démontré dans les premières Leçons, il est facile de conclure que les dérivées de cette équation, relatives aux variations de x, y, z, devront avoir lieu aussi. De sorte que l'équation de condition $F(x, y, z) = 0$ donnera les équations variées

$$\dot{F}(x, y, z) = 0, \qquad \ddot{F}(x, y, z) = 0, \qquad \ldots$$

Or, en regardant x comme invariable, on a

$$\dot{F}(x, y, z) = \dot{y}\,F'(y) + \dot{z}\,F'(z),$$

puisque l'algorithme des variations est le même que celui des dérivées. Ainsi on aura l'équation

$$\dot{y}\,F'(y) + \dot{z}\,F'(z) = 0,$$

d'où l'on tire le rapport de $\dot{y}$ à $\dot{z}$, lequel, étant ensuite substitué dans l'équation $Y\dot{y} + Z\dot{z} = 0$ du maximum ou minimum, donnera celle-ci

$$Y\,F'(z) - Z\,F'(y) = 0,$$

qui, étant combinée avec l'équation de condition $F(x, y, z) = 0$, servira à déterminer les valeurs de y et z en x.

Nous avons supposé dans le calcul précédent que x ne variait pas. Si l'on voulait tenir compte des variations de x, on aurait, à la place de l'équation $Y\dot{y} + Z\dot{z} = 0$, celle-ci

$$Y(\dot{y} - y'\dot{x}) + Z(\dot{z} - z'\dot{x}) = 0.$$

Or l'équation de condition $F(x, y, z) = 0$ donnerait d'un côté l'équation dérivée

$$F'(x) + y'\,F'(y) + z'\,F'(z) = 0,$$

et de l'autre l'équation variée

$$\dot{x}\,F'(x) + \dot{y}\,F'(y) + \dot{z}\,F'(z) = 0;$$

substituant dans celle-ci la valeur de $F'(x)$, tirée de la précédente, on aura

$$(\dot{y} - y'\dot{x})\,F'(y) + (\dot{z} - z'\dot{x})\,F'(z) = 0.$$

Et cette équation, combinée avec l'équation ci-dessus, donnera également l'équation

$$Y\,F'(z) - Z\,F'(y) = 0.$$

On voit par là, en général, que la variation de x, $\dot{x}$ n'influe que sur l'équation aux limites, et nullement sur l'équation générale du maximum ou minimum.

Supposons maintenant, pour embrasser le problème dans toute son étendue, que l'équation de condition entre x, y, z contienne aussi les dérivées de y et de z et soit en général de la forme

$$F(x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots) = 0;$$

on tirera de là l'équation variée

$$\dot{F}(x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots) = 0,$$

laquelle, en n'ayant égard qu'aux variations de y, z, se développera ainsi :

$$\dot{y}\,F'(y) + y'\,F'(y') + y''\,F''(y'') + \ldots + \dot{z}\,F(z) + \dot{z}'\,F'(z') + \dot{z}''\,F'(z'') + \ldots = 0.$$

Comme les dérivées de $\dot{z}$ ne paraissent dans cette équation que sous la forme linéaire, il est possible d'en déduire l'expression de $\dot{z}$, en employant la méthode des multiplicateurs et prenant successivement les fonctions primitives; mais de cette manière on entre dans des calculs longs et compliqués, et il est beaucoup plus simple d'employer les multiplicateurs, de la manière dont on a usé dans la *Mécanique analytique*, qui est toute fondée sur le calcul des variations.

On se contentera donc de multiplier le premier membre de cette équation par un coefficient indéterminé λ, et de l'ajouter à l'expression précédente de la variation $\dot{V}$, en ayant soin en même temps de transformer tous les nouveaux termes de manière que les fonctions dérivées des variations $\dot{y}$ et $\dot{z}$ ne se trouvent que dans des fonctions dérivées

exactes, comme on l'a pratiqué à l'égard des termes de la valeur de V. On aura ainsi une nouvelle expression de $\dot{V}$, dans laquelle on pourra maintenant traiter les variations de $\dot{y}$ et de $\dot{z}$ comme indépendantes, à raison de l'indéterminée λ.

Soient, pour abréger,

$$(Y) = \lambda\,F'(y) - [\lambda\,F'(y')]' + [\lambda\,F'(y'')]'' - \ldots,$$
$$(\dot{Y}) = \lambda\,F'(y') - [\lambda\,F'(y'')]' + \ldots,$$
$$(\ddot{Y}) = \lambda\,F'(y'') - \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$(Z) = \lambda\,F'(z) - [\lambda\,F'(z')]' + [\lambda\,F'(z'')]'' - \ldots,$$
$$(\dot{Z}) = \lambda\,F'(z') - [\lambda\,F'(z'')]' + \ldots,$$
$$(\ddot{Z}) = \lambda\,F'(z'') - \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les termes à ajouter à l'expression de la variation $\dot{V}$ seront

$$(Y)\dot{y} + (Z)\dot{z}$$
$$+ [(\dot{Y})\dot{y}]' + [(\ddot{Y})\dot{y}']' + \ldots$$
$$+ [(\dot{Z})\dot{z}]' + [(\ddot{Z})\dot{z}']' + \ldots.$$

Donc, puisqu'on peut maintenant regarder les variations $\dot{y}$ et $\dot{z}$ comme indépendantes, on aura d'abord, par les principes posés ci-dessus, les deux équations générales du maximum ou minimum

$$Y + (Y) = 0, \qquad Z + (Z) = 0,$$

entre lesquelles il faudrait éliminer l'indéterminée λ, et l'équation résultante, combinée avec l'équation de condition, donnera les valeurs de y et z en x.

Ensuite la variation $\dot{U}$ deviendra

$$\dot{U} = [\dot{Y} + (\dot{Y})]\dot{y} + [\ddot{Y} + (\ddot{Y})]\dot{y}' + \ldots$$
$$+ [\dot{Z} + (\dot{Z})]\dot{z} + [\ddot{Z} + (\ddot{Z})]\dot{z}' + \ldots,$$

valeur qu'on substituera dans l'équation aux limites

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0.$$

Si l'on veut avoir égard en même temps à la variation de x, on ajoutera à $\dot{U}$ le terme $V\dot{x}$, et l'on changera les quantités $\dot{y}$, $\dot{z}$ et leurs dérivées en $\dot{y} - y'\dot{x}$, $\dot{z} - z'\dot{x}$, et dans les dérivées de celles-ci.

Il faudrait, à la rigueur, dans ce cas, ajouter à la valeur de $\dot{V}$ le terme $\lambda[\dot{x}\,F(x, y, \ldots)]'$, d'après les formules trouvées plus haut pour la valeur complète de la variation de $x'\,F(x, y, \ldots)$. Ce terme se transforme en $[\lambda\dot{x}\,F(x, y, \ldots)]' - \lambda'\dot{x}\,F(x, y, \ldots)$; mais il disparaît ici en vertu de l'équation $F(x, y, \ldots) = 0$. Il faudrait néanmoins le conserver si l'équation de condition n'était donnée que par l'équation variée $\dot{F}(x, y, \ldots) = 0$.

Dans l'équation aux limites, on pourra regarder aussi les variations $\dot{x}$, $\dot{y}$ et $\dot{z}$, ainsi que leurs dérivées, comme indépendantes, à moins que la nature du problème ne donne aussi des conditions particulières aux limites.

Supposons, par exemple, que l'on ait une ou plusieurs équations de condition entre les quantités x, y, y', y'', ..., z, z', z'', ..., rapportées aux deux limites, c'est-à-dire entre les quantités x_0, y_0, y'_0, y''_0, ..., z_0, z'_0, z''_0, ..., x_1, y_1, y'_1, y''_1, ..., z_1, z'_1, z''_1, ..., et que le maximum ou minimum ne doive avoir lieu que parmi les fonctions qui, prises entre les limites données, satisfont à ces conditions; il faudra que les mêmes équations subsistent dans l'état varié, c'est-à-dire en y mettant $x + i\dot{x}$, $y + i\dot{y} + \frac{i^2}{2}\ddot{y} + \ldots$, $z + i\dot{z} + \frac{i^2}{2}\ddot{z} + \ldots$ à la place de x, y, z; par conséquent on aura aussi les variations de ces équations, comme nous l'avons déjà vu plus haut.

Désignons par

$$\Phi(x_0, y_0, y'_0, \ldots, z_0, z'_0, \ldots, x_1, y_1, y'_1, \ldots, z_1, z'_1, \ldots) = 0$$

une de ces équations de condition; elle donnera l'équation variée

$$\begin{aligned} &x_0\,\Phi'(x_0) + \dot{y}_0\,\Phi'(y_0) + \dot{z}_0\,\Phi'(z_0) + \dot{y}'_0\,\Phi'(y'_0) + \ldots \\ &+ \dot{x}_1\,\Phi'(x_1) + \dot{y}_1\,\Phi'(y_1) + \dot{z}_1\,\Phi'(z_1) + \dot{y}'_1\,\Phi'(y'_1) + \ldots = 0. \end{aligned}$$

On multipliera cette équation et les autres semblables par des coefficients indéterminés α, β, ..., et on les ajoutera à l'équation des limites données ci-dessus, après quoi on pourra traiter toutes les variations

$$\dot{x}_0, \dot{x}_1, \dot{y}_0, \dot{y}'_0, \dot{y}''_0, \ldots, \dot{y}_1, \dot{y}'_1, \dot{y}''_1, \ldots, \dot{z}_1, \dot{z}'_1, \dot{z}''_1, \ldots$$

comme indépendantes, et égaler à zéro chacun de leurs coefficients, ce qui donnera autant d'équations particulières aux limites qu'il y aura de ces variations. On satisfera ensuite à ces équations par le moyen des coefficients arbitraires α, β, ... et des constantes arbitraires qui entreront dans les expressions de y, z en x.

A l'égard des variations $\dot{z}_0, \dot{z}'_0, \ldots, \dot{z}_1, \dot{z}'_1, \ldots$, il est bon de remarquer que, la fonction z étant donnée par une équation dérivée, si cette équation est de l'ordre n par rapport à z, les valeurs de z, z', z'', ..., $z^{(n-1)}$, correspondantes à une valeur donnée de x, seront arbitraires et devront être déterminées par les conditions du problème. Ainsi, en rapportant ces valeurs à la première limite, il faudra regarder les quantités $z_0, z'_0, \ldots, z_0^{(n-1)}$ comme des fonctions données de $x_0, y_0, y'_0, \ldots$; donc les variations $\dot{z}_0, \dot{z}'_0, \ldots$ seront aussi données en fonctions de $x_0, y_0, y'_0, \ldots$, multipliées par les variations $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{y}'_0, \ldots$. Alors les variations $\dot{z}_1, \dot{z}'_1, \dot{z}''_1, \ldots$, qui se rapportent à la seconde limite, seront absolument indéterminées, et il faudra les faire évanouir en égalant leurs coefficients à zéro.

On pourrait demander que la fonction z donnée par l'équation de condition fût elle-même un maximum ou un minimum. Il n'y aurait alors qu'à supposer $U = z$, et par conséquent $V = z'$.

On aurait donc dans ce cas

$$f'(y) = 0, \quad f'(y') = 0, \quad \ldots, \quad f'(z) = 0, \quad f'(z') = 1, \quad f'(z'') = 0, \quad \ldots.$$

Donc

$$Y = 0, \quad \overset{1}{Y} = 0, \quad \ldots, \quad Z = 0, \quad \overset{1}{Z} = 1, \quad \overset{11}{Z} = 0, \quad \ldots,$$

Les équations générales du maximum ou minimum seraient donc simplement

$$(Y) = 0, \quad (Z) = 0,$$

On aurait ensuite

$$\dot{U} = (\dot{Y})\dot{y} + (\dot{Y}')\dot{y}' + \ldots + [1 + (\dot{Z})]\dot{z} + (\dot{Z}')\dot{z}' + \ldots.$$

L'équation $(Z) = 0$ servira à déterminer la variable λ, et l'équation $(Y) = 0$, combinée avec l'équation donnée $F(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots) = 0$, donnera la valeur de y en x. Soit $z^{(n)}$ la plus haute dérivée de z qui entre dans cette équation; l'équation $(Z) = 0$ sera linéaire et de l'ordre n, par rapport à λ; la valeur de λ contiendra donc autant de constantes arbitraires et linéaires aussi, qui serviront à faire évanouir les variations $\dot{z}_1$, $\dot{z}'_1$, ... dans l'équation des limites; les variations $\dot{z}_0$, $\dot{z}'_0$, ... étant censées données par la nature du problème, comme nous venons de le remarquer.

Il faudra donc déterminer ces constantes de manière que l'on ait

$$1 + (\dot{Z}_1) = 0, \qquad (\dot{Z}'_1) = 0, \qquad (\dot{Z}''_1) = 0, \qquad \ldots,$$

et l'on remplira ces conditions en faisant simplement

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda'_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad \lambda_1^{(n-1)} = 0,$$

et de plus

$$\lambda^{(n)} F^{(n)}(z^{(n)})_1 + 1 = 0.$$

Ceci revient à la solution donnée dans le Tome IV des *Mémoires de Turin* (1).

En général, soit V une fonction quelconque des variables x, y, z, t, ... et de leurs dérivées d'un ordre quelconque, à l'exception de x, dont la dérivée soit supposée l'unité; et soient $L = 0$, $M = 0$, ... des équations de condition entre ces variables et leurs dérivées, dont le nombre ne surpasse pas celui des variables diminué de deux unités, afin qu'il reste des relations indéterminées entre les mêmes variables.

Le problème *de maximis et minimis*, dont il s'agit ici, consiste à déterminer ces relations de manière que la fonction primitive de V devienne un maximum ou un minimum entre des limites données, correspondantes à des valeurs données de x.

(1) *Œuvres de Lagrange*, t. II, p. 37.

Pour le résoudre de la manière la plus générale, on cherchera les variations des fonctions V, L, M, ..., dues aux variations de y, z, t, ..., et désignant ces variations par $\dot{V}$, $\dot{L}$, $\dot{M}$, ..., on considérera la formule

$$\dot{V} + \lambda\dot{L} + \mu\dot{M} + \ldots,$$

dans laquelle λ, μ, ... sont supposées des variables indéterminées.

On fera sur cette formule les transformations enseignées plus haut, par lesquelles les fonctions dérivées des variations $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$, ... ne paraissent plus que dans des termes qui sont des fonctions dérivées exactes. Elle deviendra ainsi de la forme

$$\begin{aligned}
&Y\dot{y} + Z\dot{z} + T\dot{t} + \ldots \\
&+ (\dot{Y}\dot{y} + \dot{Y}'\dot{y}' + \dot{Y}''\dot{y}'' + \ldots)' \\
&+ (\dot{Z}\dot{z} + \dot{Z}'\dot{z}' + \dot{Z}''\dot{z}'' + \ldots)' \\
&+ (\dot{T}\dot{t} + \dot{T}'\dot{t}' + \dot{T}''\dot{t}'' + \ldots)' \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Et l'on aura d'abord les équations générales

$$Y = 0, \qquad Z = 0, \qquad T = 0, \qquad \ldots,$$

qui, étant combinées avec les équations de condition

$$L = 0, \qquad M = 0, \qquad \ldots,$$

serviront à déterminer les variables y, z, t, ..., λ, μ, ...

Ensuite, faisant

$$\begin{aligned}
(\dot{U}) = &\dot{Y}\dot{y} + \dot{Y}'\dot{y}' + \dot{Y}''\dot{y}'' + \ldots \\
&+ \dot{Z}\dot{z} + \dot{Z}'\dot{z}' + \dot{Z}''\dot{z}'' + \ldots \\
&+ \dot{T}\dot{t} + \dot{T}'\dot{t}' + \dot{T}''\dot{t}'' + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

on aura l'équation aux limites $(\dot{U}_1) - (\dot{U}_0) = 0$, à laquelle on devra satisfaire, indépendamment des variations $\dot{y}$, $\dot{y}'$, ..., $\dot{z}$, $\dot{z}'$, ...

Et, pour tenir compte de la variation de x, il n'y aura qu'à changer $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$ en $\dot{y} - y'\dot{x}$, $\dot{z} - z'\dot{x}$, $\dot{t} - t'\dot{x}$, et ajouter à la valeur de (U̇) le terme $\mathrm{V}\dot{x}$.

Comme la nature du problème peut fournir aussi des équations de condition entre les variables x, y, z, t, ..., rapportées à ces limites, désignons par $\mathrm{A} = 0$, $\mathrm{B} = 0$, ... ces équations de condition, de manière que A, B, ... soient des fonctions données de x_0, x_1, y_0, y_1, y'_0, y'_1, ...

On formera les équations variées $\dot{\mathrm{A}} = 0$, $\dot{\mathrm{B}} = 0$, ..., dues aux variations de chacune des quantités x_0, x_1, y_0, y_1, y'_0, y'_1, ..., on ajoutera ces équations multipliées par les coefficients indéterminés α, β, ... à l'équation aux limites.

On aura ainsi l'équation

$$(\dot{\mathrm{U}}_1) - (\dot{\mathrm{U}}_0) + \alpha\dot{\mathrm{A}} + \beta\dot{\mathrm{B}} + \ldots = 0,$$

dans laquelle on égalera séparément à zéro le coefficient de chacune des variations dont il s'agit.

Ces formules servent à répondre à toutes les questions où l'on cherche des maxima ou minima absolus. Voyons aussi comment on y peut rappeler les questions où l'on ne demande que des maxima ou minima relatifs, c'est-à-dire dans lesquelles la fonction primitive d'une fonction donnée ne doit être un maximum ou un minimum entre des limites assignées, qu'autant que les fonctions primitives d'autres fonctions données auront des valeurs données entre les mêmes limites.

Soit u la fonction donnée dont la fonction primitive doit avoir une valeur déterminée entre les limites assignées. Supposons que s soit cette fonction primitive, en sorte que l'on ait l'équation $s' - u = 0$. La condition dont il s'agit consiste en ce que la quantité $s_1 - s_0$ doit avoir une valeur donnée; par conséquent, sa variation devra être nulle, ce qui donne l'équation aux limites $\dot{s}_1 - \dot{s}_0 = 0$.

Pour introduire cette condition dans la solution générale du problème *de maximis et minimis*, je regarde l'équation $s' - u = 0$ comme une équation de condition, et je la traite comme les équations de condition $\mathrm{L} = 0$, $\mathrm{M} = 0$, ... Je multiplie par un coefficient variable et indéterminé σ la variation $\dot{s}' - \dot{u}$, et j'ajoute à la formule générale $\dot{\mathrm{V}} + \lambda\dot{\mathrm{L}} + \ldots$; j'ai

$$\dot{\mathrm{V}} + \sigma(\dot{s}' - \dot{u}) + \lambda\dot{\mathrm{L}} + \mu\dot{\mathrm{M}} + \ldots.$$

Le terme $\sigma\dot{s}'$ se transforme en ceux-ci : $(\sigma\dot{s})' - \sigma'\dot{s}$; et, comme ces termes sont les seuls qui contiennent la variable s, la variation $\dot{s}$ donnera d'abord l'équation $\sigma' = 0$, d'où l'on tire $\sigma = a$, a étant une constante arbitraire.

Ensuite l'autre partie $(\sigma\dot{s})'$, qui est une dérivée exacte, donnera dans l'expression de (U) le terme $\sigma\dot{s}$, et dans l'équation aux limites les termes $a(\dot{s}_1 - \dot{s}_0)$, à cause de $\sigma = a$. Mais on a, par les conditions du maximum ou minimum relatif, $\dot{s}_1 - \dot{s}_0 = 0$. Donc la valeur de (U) ne recevra aucun changement.

Il n'y aura donc que la variation $-a\dot{u}$ qui devra être ajoutée à la formule générale, ce qui revient à substituer à la place de la fonction V la fonction $\mathrm{V} - au$, et à chercher les conditions du maximum ou minimum absolu de la fonction primitive de $\mathrm{V} - au$, a étant une constante quelconque arbitraire.

On trouverait de la même manière que si la fonction primitive de V ne devait être qu'un maximum ou minimum relatif, en supposant que les fonctions primitives de u et de v aient des valeurs déterminées, la question se réduirait au maximum ou minimum absolu de la fonction primitive de $\mathrm{V} - au - bv$, a et b étant des constantes arbitraires.

Ce résultat s'accorde, comme l'on voit, avec celui qu'Euler avait trouvé par la considération des variations des ordonnées successives dans les courbes.

Telles sont les formules générales pour la solution des problèmes *de maximis et minimis* qui dépendent de la méthode des variations, et l'on voit que ces formules s'étendent à tous les cas; mais dans chaque cas particulier, au lieu d'y appliquer ces formules, il sera quelquefois préférable d'opérer directement sur les fonctions proposées, en suivant la marche que nous venons de tracer.

Quant à la manière de distinguer les maxima des minima, et même de s'assurer de leur existence, nous avons vu qu'elle dépend des variations du second ordre; mais nous n'entrerons pas dans un détail qui nous mènerait trop loin; on peut voir d'ailleurs ce que nous avons dit là-dessus dans la *Théorie des fonctions* (1). Nous remarquerons seulement qu'en prenant la variation du second ordre de la fonction V, il sera inutile d'avoir égard aux variations du second ordre de la variable y, parce que, les termes affectés de $\ddot{y}$, $\ddot{y}'$, ... dans l'expression de $\ddot{V}$ étant les mêmes que ceux affectés de $\dot{y}$, $\dot{y}'$ dans $\dot{V}$, ces termes doivent disparaître par les conditions du maximum ou minimum, quelle que soit la valeur de $\dot{y}$ ou de $\ddot{y}$. Ainsi on aura, pour la variation du second ordre, les mêmes formules que dans l'endroit cité, en changeant seulement aussi $\dot{y}$ en ω, et par conséquent les mêmes résultats.

Pour ne rien laisser à désirer sur cette matière, nous dirons encore un mot des *maxima* et *minima* qui dépendent des fonctions de plusieurs variables. La première question de ce genre a été résolue par la méthode des variations, dans le second Volume des *Mémoires de Turin* (2). Il s'agissait de trouver, parmi toutes les surfaces courbes qui sont terminées par le même périmètre, celle qui est la plus petite possible; problème qui est, par rapport aux surfaces, ce que les problèmes dont on vient de traiter sont par rapport aux lignes.

En nommant z l'ordonnée perpendiculaire aux deux abscisses x et y, et qui est censée fonction de ces deux-ci, et désignant par des traits séparés par une virgule fonctions dérivées de z, prises par rapport à x et y, comme on l'a fait dans la Leçon XIX, la grandeur ou la quadrature de la surface est exprimée par la double fonction primitive de la formule

$$\sqrt{1+(z')^2+z''^2},$$

prise d'abord par rapport à une seule des variables x, y, et ensuite par rapport à l'autre, en substituant pour la première sa valeur donnée par l'équation du contour de la surface. Ainsi le problème consiste à trouver la fonction z de x et y, qui rendra cette double fonction primitive un maximum ou un minimum.

(1) *Œuvres de Lagrange*, t. IX.
(2) *Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 335.

Pour le rendre plus général, nous supposerons qu'on demande de rendre un maximum ou un minimum la double fonction primitive d'une fonction donnée de $x, y, z, z', z'', z''', z'''', z''''', \ldots$.

Désignons cette fonction par V, de manière que l'on ait

$$V = f(x, y, z, z', z'', z''', z'''', z''''', \ldots),$$

et soit U la double fonction primitive de V, qui doit devenir un maximum ou un minimum. Il faudra, par les principes établis ci-dessus, que sa variation $\dot{U}$ soit nulle. Or, $U''' = V$; donc, prenant les variations, $\dot{U}''' = \dot{V}$. Si l'on dénote de même par des traits placés au bas les fonctions primitives, ainsi qu'on l'a indiqué dans la Leçon XIII, on pourra passer de l'équation précédente à celle-ci qui est inverse, $\dot{U} = \dot{V}_{,,,}$, par laquelle on voit que le problème consiste à rendre nulle la double fonction primitive de la variation $\dot{V}$.

Or on a, en prenant les variations de z et de ses dérivées,

$$\dot{V} = \dot{z} f'(z) + \dot{z}' f'(z') + \dot{z}'' f'(z'') + \dot{z}''' f'(z''') + \dot{z}'''' f'(z'''') + \dot{z}''''' f'(z''''') + \ldots,$$

formule que nous représenterons, pour plus de simplicité, par

$$\dot{V} = L\dot{z} + M\dot{z}' + N\dot{z}'' + P\dot{z}''' + Q\dot{z}'''' + R\dot{z}''''' + \ldots.$$

On fera dans cette formule les transformations employées plus haut, par lesquelles les dérivées de la variation $\dot{z}$ ne se trouvent que dans des termes qui sont des dérivées exactes.

Ainsi le terme $M\dot{z}''$ se changera en $(M\dot{z})' - M'\dot{z}$, le terme $N\dot{z}'''$ se changera en $(N\dot{z})'' - N''\dot{z}$, et ainsi des autres, en conservant la position des virgules qui séparent les traits relatifs aux variables x et y.

De cette manière on aura la transformée

$$\begin{aligned}\dot{V} = {} & (L - M' - N'' + P''' + Q'''' + R''''' + \ldots)\dot{z} \\ & + (M\dot{z} + P\dot{z}'' - P'\dot{z} + Q\dot{z}''' + \ldots)' \\ & + (N\dot{z} + R\dot{z}''' - R'\dot{z} - Q''\dot{z} + \ldots)'', \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

On voit d'abord ici qu'il est impossible que la double fonction primitive de $\dot{V}$ devienne nulle, quelle que soit la variation $\dot{z}$, à moins que les termes affectés simplement de $\dot{z}$ ne disparaissent; ce qui donne d'abord l'équation générale du maximum ou minimum

$$L - M' + N'' + P''' + Q'''' + R''''' + \ldots = 0.$$

La première ligne de l'expression de $\dot{V}$ étant effacée, si l'on prend maintenant les doubles fonctions primitives de part et d'autre, on aura

$$\begin{aligned} U = &(M\dot{z} + P\dot{z}' - P'\dot{z} + Q\dot{z}')' \\ &+ (N\dot{z} + R\dot{z}' - R'\dot{z} - Q'\dot{z})'. \end{aligned}$$

Comme il n'y a plus ici que des fonctions primitives simples, chacune d'elles se rapporte uniquement à une des variables x, y, en regardant l'autre de ces variables comme déterminée par l'équation qui donne la courbe des limites entre lesquelles le maximum ou minimum doit avoir lieu.

Le cas le plus simple est lorsque le contour de la surface représentée par l'équation en x, y, z est supposé tout à fait donné et invariable. Alors les variations de z et de ses dérivées sont nulles relativement à la courbe de ce contour, et par conséquent aussi dans toute l'étendue des fonctions primitives simples de la variation $\dot{U}$, et la condition de $U = 0$ se trouve remplie d'elle-même.

L'équation du maximum ou minimum sera donc, en substituant les valeurs de L, M, ...,

$$f'(z) - [f'(z')]' - [f'(z'')]'' + [f'(z''')]''' + [f'(z'''')]'''' + \ldots = 0,$$

qu'on voit être du genre de celles que nous avons considérées dans les Leçons XIX et XX, et dont les équations primitives contiennent des fonctions arbitraires.

Les cas plus compliqués se résoudront par des considérations analogues à celles que nous avons faites sur les problèmes où l'on ne cherche que des fonctions d'une variable.

Pour donner maintenant quelques applications des méthodes et des

formules que nous venons d'exposer, nous prendrons d'abord le problème le plus simple de ce genre, qui consiste à trouver la ligne la plus courte entre des termes donnés. En supposant que la ligne cherchée soit toute dans un même plan, et prenant x, y pour ses coordonnées, la longueur de la ligne sera exprimée en général par la fonction primitive de l'expression $\sqrt{1 + y'^2}$, qui, étant représentée par V ou $f(x, y, y')$, donnera

$$f'(y) = 0, \quad f'(y') = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Ainsi l'équation générale du maximum ou minimum sera

$$-\left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right)' = 0.$$

Ensuite on aura

$$\dot{U} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\dot{y},$$

et l'équation aux limites sera

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0.$$

L'équation générale donne tout de suite

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \text{const.};$$

d'où l'on tire

$$y' = b, \quad \text{et de là} \quad y = bx + c,$$

b et c étant deux constantes arbitraires; ce qui est l'équation générale de la ligne droite.

Si les deux extrémités de la ligne étaient données, on aurait $\dot{y}_0 = 0$ et $\dot{y}_1 = 0$; par conséquent l'équation aux limites aurait lieu sans aucune condition.

En général, l'équation aux limites se réduira à

$$a(\dot{y}_1 - \dot{y}_0) = 0,$$

où $a = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2}}$; de sorte que, si la ligne cherchée devait être terminée

des deux côtés ou d'un seul par des lignes perpendiculaires à l'axe des x, les variations $\dot{y}_0$, $\dot{y}_1$ seraient toutes les deux, ou une seulement, arbitraires : dans l'un et l'autre cas, l'équation aux limites donnerait $a = 0$, et par conséquent $b = 0$; ce qui réduit la ligne la plus courte à une droite parallèle à l'axe.

Si la ligne la plus courte devait être terminée de part et d'autre par deux lignes données droites ou courbes, il faudrait alors tenir compte dans l'équation aux limites des variations de x et y à la fois. Il faudra donc mettre dans l'expression de $\dot{U}$, $\dot{y} - y'\dot{x}$ à la place de $\dot{y}$, et y ajouter le terme $V\dot{x}$. On aura ainsi

$$\dot{U} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}(\dot{y} - y'\dot{x}) + \dot{x}\sqrt{1+y'^2}$$

et, réduisant,

$$\dot{U} = \frac{y'\dot{y} + \dot{x}}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

L'équation aux limites étant $\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0$, si l'on suppose que les deux limites soient indépendantes l'une de l'autre, on aura séparément $\dot{U}_0 = 0$ et $\dot{U}_1 = 0$; et par conséquent

$$y'_0\dot{y}_0 + \dot{x}_0 = 0, \quad y'_1\dot{y}_1 + \dot{x}_1 = 0.$$

Soit maintenant

$$\Phi(x, y) = 0$$

l'équation de la ligne qui forme la première limite ; elle donnera l'équation variée

$$\dot{x}\,\Phi'(x) + \dot{y}\,\Phi'(y) = 0 ;$$

mais elle donne aussi l'équation dérivée

$$\Phi'(x) + y'\,\Phi'(y) = 0 ;$$

de sorte que la combinaison de ces deux équations produira celle-ci

$$\dot{y} - y'\dot{x} = 0.$$

Il faut remarquer, à l'égard de cette équation, que les variations $\dot{x}$, $\dot{y}$

sont censées les mêmes que celles que nous avons désignées ci-dessus par $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, parce que ce sont les variations des coordonnées x, y à la première limite ; mais la dérivée y' n'est pas la même que la dérivée y'_0, quoiqu'elles se rapportent toutes les deux au même point ; car celle-ci se rapporte à la ligne la plus courte, et exprime la tangente de l'angle que la tangente à cette ligne fait avec l'axe ; au lieu que l'autre se rapporte à la ligne qui sert de limite, et exprime de même la tangente de l'angle que la tangente à cette ligne fait avec le même axe. Nous désignerons cette dérivée par (y'), et, appliquant le chiffre 0 au bas de chaque lettre pour la rapporter à la première limite, l'équation précédente deviendra

$$\dot{y}_0 - (y')_0\dot{x}_0 = 0.$$

Telle est l'équation de condition qui doit avoir lieu entre les variations $\dot{y}_0$ et $\dot{x}_0$; ainsi, substituant dans l'équation

$$y'_0\dot{y}_0 + \dot{x}_0 = 0$$

de la première limite la valeur de $\dot{y}_0$ tirée de l'équation précédente, on aura

$$[y'_0(y')_0 + 1]\dot{x} = 0,$$

et par conséquent

$$y'_0(y')_0 + 1 = 0.$$

Or, y'_0 et $(y')_0$ étant les tangentes de deux angles, on sait que la tangente de la différence de ces angles est exprimée par la formule $\frac{y'_0 - (y')_0}{1 + y'_0(y')_0}$; donc, puisque ici le dénominateur devient nul, et par conséquent la tangente infinie, il s'ensuit que la différence des deux angles dont il s'agit sera égale à un angle droit.

D'où il est aisé de conclure que les deux lignes, celle qui doit être la plus courte et celle qui forme sa première limite, doivent se couper à angles droits.

Et, comme l'équation à la seconde limite est tout à fait semblable à l'équation pour la première, on trouvera nécessairement le même résultat relativement à la seconde limite ; c'est-à-dire que la ligne la plus

courte devra aussi couper à angles droits la ligne qui formera la seconde limite.

On satisfera à ces conditions par le moyen des équations

$$y'_0(y')_0 + 1 = 0 \quad \text{et} \quad y'_1(y')_1 + 1 = 0$$

et des constantes arbitraires b, c, ce qui n'a aucune difficulté.

Supposons maintenant, pour donner plus de généralité au problème, qu'on demande la ligne la plus courte, sans la condition qu'elle doive être toute dans le même plan; en prenant x, y, z pour les trois coordonnées, dont deux y et z sont censées fonction de la troisième x, on aura la fonction $\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$, dont la primitive exprimera la longueur de la ligne cherchée et devra par conséquent être un minimum.

Faisant donc

$$V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

on aura

$$\dot{V} = \frac{y'\dot{y}' + z\dot{z}'}{V},$$

formule qui, par les principes établis, se transforme en celle-ci

$$\dot{V} = -\left(\frac{y'}{V}\right)'\dot{y} - \left(\frac{z'}{V}\right)'\dot{z} + \left(\frac{y'}{V}\dot{y}\right)' + \left(\frac{z'}{V}\dot{z}\right)',$$

d'où l'on tire, pour l'équation générale du minimum,

$$\left(\frac{y'}{V}\right)'\dot{y} + \left(\frac{z'}{V}\right)'\dot{z} = 0,$$

et ensuite, pour l'équation aux limites,

$$\dot{U} = \frac{y'\dot{y} + z'\dot{z}}{V} \quad \text{et} \quad \dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0.$$

Supposons d'abord que la ligne la plus courte ne soit assujettie à aucune condition dans toute son étendue; il faudra alors que les variations $\dot{y}$ et $\dot{z}$ demeurent indéterminées, ce qui donnera les deux équations

$$\left(\frac{y'}{V}\right)' = 0, \quad \left(\frac{z'}{V}\right)' = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{y'}{V} = a, \quad \frac{z'}{V} = b,$$

a et b étant des constantes arbitraires; et comme $V = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}$, il s'ensuit que y' et z' auront des valeurs constantes qui, étant désignées par c et d, donneront tout de suite

$$y = cx + m, \quad z = dx + n,$$

m et n étant aussi des constantes arbitraires.

Ces deux équations font voir que la ligne cherchée est une droite dont la position est arbitraire.

Il faut maintenant considérer l'équation aux limites, laquelle, si l'on suppose les deux limites indépendantes l'une de l'autre, se partage tout de suite en ces deux-ci

$$\dot{U}_0 = 0, \quad \dot{U}_1 = 0,$$

savoir,

$$y'_0\dot{y}_0 + z'_0\dot{z}_0 = 0, \quad y'_1\dot{y}_1 + z'_1\dot{z}_1 = 0,$$

équations qui auront lieu d'elles-mêmes, si les deux extrémités de la ligne sont supposées données de position, parce qu'alors les variations des ordonnées y et z seront nulles dans ces deux points.

Mais, si la ligne la plus courte doit être comprise entre deux lignes données, alors il faudra, comme nous l'avons fait plus haut, tenir compte des variations des coordonnées x, y, z à l'une et à l'autre de ses extrémités.

Pour cela, il faudra d'abord ajouter à la valeur de $\dot{U}$ le terme $\dot{V}x$, et y changer en même temps $\dot{y}$ et $\dot{z}$ en $\dot{y} - y'\dot{x}$, $\dot{z} - z'\dot{x}$. On aura ainsi, à cause de $V^2 = 1 + y'^2 + z'^2$, après les réductions,

$$\dot{U} = \frac{\dot{x} + y'\dot{y} + z'\dot{z}}{V},$$

et les deux équations aux limites $\dot{U}_0 = 0$, $\dot{U}_1 = 0$ deviendront

$$\dot{x}_0 + y'_0\dot{y}_0 + z'_0\dot{z}_0 = 0,$$
$$\dot{x}_1 + y'_1\dot{y}_1 + z'_1\dot{z}_1 = 0.$$

Supposons que la première limite soit une courbe dont les deux équations soient

$$\Phi(x,y)=0, \quad \Psi(x,z)=0;$$

la première de ces équations donnera, comme nous l'avons vu plus haut, l'équation variée

$$\dot{y}_0-(y')_0\dot{x}_0=0,$$

et la seconde donnera de même

$$\dot{z}_0-(z')_0\dot{x}_0=0.$$

Tirant de ces deux équations les valeurs de $\dot{y}_0$ et $\dot{z}_0$ et les substituant dans la première des deux équations ci-dessus, on aura

$$[1+y'_0(y')_0+z'_0(z')_0]\dot{x}_0=0,$$

et, comme la variation x_0 doit demeurer indéterminée, il en résultera cette équation de condition pour la première limite

$$1+y'_0(y')_0+z'_0(z')_0=0,$$

à laquelle on satisfera par le moyen d'une des constantes arbitraires c, d, l'autre devant être indéterminée par l'équation de condition de la seconde limite, laquelle sera de même

$$1+y'_1(y')_1+z'_1(z')_1=0.$$

Mais, si l'on veut savoir ce que ces équations représentent, il n'y a qu'à se rappeler que, dans la théorie du contact des courbes, on démontre qu'en regardant les dérivées de y'_0 et z'_0 comme constantes, les deux équations

$$y=y'_0x+\mu, \quad z=z'_0x+\nu,$$

où μ et ν sont aussi des constantes par rapport à x et y, représentent la ligne droite qui touche la courbe de la première limite; et que de la même manière les deux équations

$$y=(y')_0x+\pi, \quad z=(z')_0x+\rho$$

représentent la ligne droite qui touche au même point la ligne la plus courte, π et ρ étant aussi des constantes par rapport à x et y.

Or, dans l'application de l'Analyse à la Géométrie, on démontre que les deux droites représentées par ces équations, si elles se coupent, font entre elles un angle dont le cosinus est

$$\frac{1+y'_0(y')_0+z'_0(z')_0}{\sqrt{1+y'^2_0+z'^2_0}\sqrt{1+(y')^2_0+(z')^2_0}}$$

(*voyez* les feuilles de *l'Analyse* de Monge). Donc puisque, dans le cas présent, le numérateur de cette expression devient nul, il s'ensuit que l'angle des deux droites sera droit; par conséquent, il faudra que la ligne la plus courte coupe à angles droits la courbe qui forme la première limite.

On parviendra de la même manière à une conclusion semblable pour l'autre limite. D'où il résulte que la ligne la plus courte qu'on puisse mener entre deux courbes quelconques est toujours la droite qui coupera ces courbes à angle droit. Ce théorème est connu depuis longtemps et se démontre de différentes manières; mais aucune n'est aussi directe que celle que fournit l'analyse précédente.

Mais, si, au lieu d'une simple ligne, il y avait une surface pour servir de limite à la ligne la plus courte, désignant par

$$\Phi(x,y,z)=0,$$

la surface de la première limite, elle donnerait cette équation variée

$$\dot{x}_0\,\Phi'(x)+\dot{y}_0\,\Phi'(y)+\dot{z}_0\,\Phi'(z)=0,$$

qu'il faudrait combiner avec l'équation de la première limite trouvée ci-dessus,

$$\dot{x}_0+y'_0\dot{y}_0+z'_0\dot{z}_0=0.$$

Substituant dans l'équation précédente la valeur de $\dot{x}_0$ tirée de celle-ci, on aura

$$[\Phi'(y)-y'_0\,\Phi'(x)]\dot{y}_0+[\Phi'(z)-z'_0\,\Phi'(x)]\dot{z}_0=0,$$

d'où, à cause que les variations $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$ doivent demeurer indéterminées, on tire ces deux-ci :

$$\Phi'(y)-y'_0\,\Phi'(x)=0, \quad \Phi'(z)-z'_0\,\Phi'(x)=0,$$

auxquelles il faudra satisfaire par deux des constantes arbitraires de la ligne la plus courte.

On trouvera deux équations semblables pour la seconde limite, si elle est aussi formée par une surface donnée.

Pour voir maintenant ce que signifient ces équations, on remarquera que l'équation de la surface

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

donne la dérivée

$$x' \Phi'(x) + y' \Phi'(y) + z' \Phi'(z) = 0,$$

dont la primitive, en regardant les coefficients de x', y', z' comme constants, savoir

$$x \Phi'(x) + y \Phi'(y) + z \Phi'(z) + \alpha = 0,$$

représente le plan tangent à cette surface, comme on le sait par la théorie des courbes, α étant une constante arbitraire par rapport à x, y, z.

Substituons dans cette équation les valeurs de $\Phi'(y)$ et $\Phi'(z)$ tirées des deux équations trouvées ci-dessus; elle deviendra, en la divisant par $\Phi'(x)$ qui est regardée ici comme constante,

$$x + y'_0 y + z'_0 z + \frac{\alpha}{\Phi'(x)} = 0.$$

D'un autre côté, on sait que cette équation représente aussi un plan perpendiculaire à la droite dont les équations seraient

$$y = y'_0 x + \mu, \quad z = z'_0 x + \nu$$

(*voyez* les feuilles citées), les quantités y'_0 et z'_0 étant regardées ici comme constantes, ainsi que μ et ν. Donc, puisque ces équations sont celles de la tangente à l'extrémité de la ligne la plus courte, que nous regardons en général comme une courbe quelconque, il s'ensuit que les deux équations données plus haut expriment que la ligne la plus courte doit rencontrer la surface donnée à angles droits.

Et, comme la même conclusion aurait lieu aussi pour l'autre limite, si elle était formée par une surface, il en résulte que la ligne la plus

courte entre deux surfaces données sera encore la droite qui rencontre ces surfaces à angles droits.

Jusqu'ici nous n'avons cherché que la ligne la plus courte parmi toutes les lignes possibles qu'on peut mener entre des points, ou des lignes, ou des surfaces données; problème que la simple Géométrie peut résoudre, parce qu'on sait que dans un plan la ligne la plus courte est la ligne droite. Mais, si l'on demande en général la ligne la plus courte sur une surface quelconque donnée, le problème dépend alors essentiellement de la méthode des variations, et les formules trouvées ci-dessus s'y appliquent avec la même facilité.

Soit

$$F(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface donnée; elle donnera l'équation variée

$$\dot{y} F'(y) + \dot{z} F'(z) = 0,$$

laquelle étant combinée avec l'équation générale du maximum ou minimum trouvée plus haut,

$$\left(\frac{y'}{V}\right)' \dot{y} + \left(\frac{z'}{V}\right)' \dot{z} = 0,$$

produit celle-ci

$$\left(\frac{y'}{V}\right)' F'(z) - \left(\frac{z'}{V}\right)' F'(y) = 0$$

pour l'équation de la ligne la plus courte sur la surface donnée. Ensuite on aura l'équation aux limites

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0,$$

dans laquelle on a en général

$$\dot{U} = \frac{y' \dot{y} + z' \dot{z}}{V};$$

et, si l'on veut avoir égard aussi à la variation de x, on aura

$$\dot{U} = \frac{\dot{x} + y' \dot{y} + z' \dot{z}}{V},$$

comme on l'a trouvé plus haut.

Il faudrait ici substituer pour z sa valeur tirée de l'équation variée

$$\dot{x}\,F'(x)+\dot{y}\,F'(y)+\dot{z}\,F'(z)=0.$$

Mais, en faisant abstraction de la surface, l'expression précédente de Ù conduit directement aux mêmes conclusions qu'on a trouvées plus haut relativement aux limites, c'est-à-dire que la ligne la plus courte tracée sur la surface donnée devra aussi couper à angles droits les courbes qui lui serviront de limites.

A l'égard de la nature de la ligne la plus courte sur une surface, elle jouit d'une propriété particulière et caractéristique, par laquelle on peut la déterminer indépendamment de la considération du minimum ; c'est que ses rayons osculateurs sont tous perpendiculaires à la surface. En effet, il est clair que cette ligne doit être celle suivant laquelle se dirigera un fil tendu sur la surface donnée, et il est facile de concevoir, en même temps, que le fil tendu ne peut être en équilibre qu'autant que la pression résultante de la tension, et dont la direction est suivant le rayon osculateur, sera perpendiculaire à la surface. Pour voir comment la propriété dont il s'agit résulte de l'équation trouvée pour la ligne la plus courte, nous remarquerons d'abord que l'équation du plan tangent à la surface représentée par l'équation

$$F(x,y,z)=0$$

est, comme on l'a vu plus haut,

$$x\,F'(x)+y\,F'(y)+z\,F'(z)+\alpha=0,$$

les fonctions $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ étant regardées comme constantes, ainsi que la quantité α.

Nous remarquerons ensuite que, si l'on représente par

$$x+Ay+Bz+C=0$$

l'équation du plan du cercle osculateur d'une ligne à double courbure, il faut que cette équation et ses deux dérivées, prime et seconde, aient lieu en prenant les coordonnées x, y, z du plan pour celles de la courbe donnée, et en regardant dans la formation des dérivées les coefficients A, B, C comme constants ; c'est ce qui résulte de la théorie du contact des courbes exposée dans la *Théorie des Fonctions* (¹).

On aura donc ainsi les deux équations dérivées, dans lesquelles $x'=1$,

$$1+Ay'+Bz'=0,\quad Ay''+Bz''=0.$$

La dernière donne $B=-\frac{Ay''}{z''}$, et, cette valeur étant substituée dans la précédente, on aura

$$A=\frac{z''}{z'y''-y'z''},\quad B=-\frac{y''}{z'y''-y'z''}.$$

Nous remarquerons de plus qu'il suffit que le plan du cercle osculateur soit perpendiculaire au plan tangent à la surface, pour que le rayon osculateur soit perpendiculaire à la surface, parce que ce rayon est nécessairement perpendiculaire à la courbe tracée sur la surface.

Or on démontre encore dans l'application de l'Analyse à la Géométrie (*voyez* les feuilles déjà citées) que la condition pour que deux plans représentés par les équations

$$x\,F'(x)+y\,F'(y)+z\,F'(z)+\alpha=0,$$
$$x+Ay+Bz+C=0$$

se coupent à angles droits, est renfermée simplement dans l'équation

$$F'(x)+A\,F'(y)+B\,F'(z)=0.$$

L'équation de la surface

$$F(x,y,z)=0$$

donne aussi l'équation dérivée

$$F'(x)+y'\,F'(y)+z'\,F'(z)=0,$$

d'où l'on tire

$$F'(x)=-y'\,F'(y)-z'\,F'(z).$$

Cette valeur, substituée dans l'équation précédente, donnera celle-ci

$$(A-y')\,F'(y)+(B-z')\,F'(z)=0,$$

(¹) *OEuvres de Lagrange*, t. IX.

laquelle, en substituant les valeurs de A et B trouvées ci-dessus, devient

$$[z''-y'(z'y''-y'z'')]\,F'(y)-[y''+z'(z'y''-y'z'')]\,F'(z)=0.$$

Or, si l'on divise le coefficient de $F'(y)$ dans cette équation par $V^{\frac{3}{2}}$, V étant $\sqrt{1+y'^2+z'^2}$, on a la dérivée de $\frac{z'}{V}$, et de même le coefficient de $F'(z)$ divisé par $V^{\frac{3}{2}}$ devient la dérivée de $\frac{y'}{V}$, comme il est facile de s'en assurer par le calcul. Donc, en divisant toute l'équation par $V^{\frac{3}{2}}$, elle pourra se mettre sous la forme

$$\left(\frac{z'}{V}\right)'F'(y)-\left(\frac{y'}{V}\right)'F'(z)=0,$$

qui est la même que celle de l'équation que nous avons trouvée pour la ligne la plus courte.

Clairaut a remarqué le premier, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1733, que, quelle que soit la figure de la Terre, la ligne qu'on y tracerait en plantant continuellement des piquets perpendiculaires à l'horizon, de manière qu'ils soient effacés les uns par les autres, comme on l'a pratiqué dans la description de la perpendiculaire à la méridienne de Paris, aurait la propriété d'être la ligne la plus courte entre tous ses points. Ainsi la détermination de cette ligne dépend de l'équation générale qu'on vient de trouver.

En supposant que la Terre soit un sphéroïde de révolution, si l'on prend l'axe des x pour l'axe de la Terre, dont le centre soit l'origine des coordonnées, et qu'on nomme r l'ordonnée de la courbe des méridiens, on aura

$$r=\sqrt{y^2+z^2}.$$

Donc, si

$$F(x,r)=0$$

est l'équation de cette courbe, elle deviendra celle de la surface du sphéroïde, en y substituant $\sqrt{y^2+z^2}$ pour r; et, à cause de $r'=\frac{yy'+zz'}{r}$,

on aura

$$F'(y)=\frac{y}{r}F'(r),\quad F'(z)=\frac{z}{r}F'(r),$$

de sorte que l'équation de la ligne la plus courte sur le sphéroïde deviendra

$$\left(\frac{y'}{V}\right)'z-\left(\frac{z'}{V}\right)'y=0,$$

laquelle est du second ordre, mais dont la primitive du premier ordre est

$$\frac{zy'-yz'}{V}=a,$$

a étant une constante quelconque. Cette équation, combinée avec l'équation $F(x,r)=0$, suffira pour construire la courbe.

Ce problème est traité avec beaucoup de détails dans le quatrième Volume des Ouvrages de Jean Bernoulli.

Le problème de la ligne la plus courte conduit naturellement à celui de la surface de la moindre étendue. Nous avons déjà vu plus haut que l'on a alors

$$V=\sqrt{1+(z')^2+(z'')^2},$$

d'où l'on tire la variation

$$\dot{V}=\frac{z'\dot{z}'+z''\dot{z}''}{V},$$

laquelle étant comparée à la formule

$$L\dot{z}+M\dot{z}'+N\dot{z}''$$

donne

$$L=0,\quad M=\frac{z'}{V},\quad N=\frac{z''}{V};$$

et de là résulte l'équation générale

$$\left(\frac{z'}{V}\right)'+\left(\frac{z''}{V}\right)''=0.$$

Cette équation, en effectuant les dérivations indiquées, se réduit à

$$V(z''+z'')-(z'V'+z''V'')=0;$$

or, en prenant successivement les dérivées par rapport à x et à y, on trouve

$$VV' = z'z'' + z'z'',$$
$$VV'' = z'z''' + z''z'';$$

de sorte qu'en multipliant l'équation précédente par V, et substituant les valeurs de V^2, VV', VV'', on aura après les réductions

$$[1+(z')^2]z''' - 2z'z''z''' + [1+(z'')^2]z''' = 0.$$

Et, si l'on aime mieux employer la notation proposée à la fin de la Leçon XIX, on aura, pour l'équation de la moindre surface,

$$\left[1+\left(\frac{z'}{x'}\right)^2\right]\left(\frac{z''}{y'^2}\right) - 2\left(\frac{z'}{x'}\right)\left(\frac{z'}{y'}\right)\left(\frac{z''}{x'y'}\right) + \left[1+\left(\frac{z'}{y'}\right)^2\right]\left(\frac{z''}{x'^2}\right) = 0.$$

Monge et Legendre ont trouvé, par des méthodes ingénieuses, l'équation primitive de cette équation du second ordre; mais la forme sous laquelle elle se présente la rend peu susceptible d'applications utiles. (*Voyez* les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1787.)

Pour donner encore un autre exemple, nous reprendrons le problème si connu de la brachistochrone, ou ligne de la plus vite descente; mais nous la considérerons dans un milieu résistant comme une fonction quelconque de la vitesse.

Soient les abscisses x dirigées verticalement de haut en bas, et par conséquent les ordonnées y horizontales. Si l'on nomme g la force constante de la gravité, z le carré de la vitesse et $\varphi(z)$ la fonction de la vitesse qui est proportionnelle à la résistance, les principes de la Mécanique donnent l'équation

$$z' - 2g + 2\varphi(z)\sqrt{1+y'^2} = 0$$

pour la détermination de z; et le temps, qui doit être un maximum ou un minimum, est exprimé par la fonction primitive de l'expression $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{z}}$.

En comparant ces formules aux formules générales, on aura

$$V = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{z}} = f(x, y, y', z);$$

et la fonction $F(x, y, y', z, z', \ldots)$, qui, étant égalée à zéro, donne l'équation de condition, sera

$$z' - 2g + 2\varphi(z)\sqrt{1+y'^2}.$$

On aura donc

$$\dot{V} = \frac{y'\dot{y}'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{z}} - \frac{\dot{z}\sqrt{1+y'^2}}{2z^{\frac{3}{2}}}.$$

Et de là

$$f'(y') = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{z}}, \quad f'(z) = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2z^{\frac{3}{2}}}.$$

Ensuite on aura l'équation variée

$$\dot{z}' + 2\dot{z}\,\varphi'(z)\sqrt{1+y'^2} + 2\varphi(z)\frac{y'\dot{y}'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0,$$

et par conséquent

$$F'(y') = 2\varphi(z)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$
$$F'(z) = 2\varphi'(z)\sqrt{1+y'^2}, \quad F'(z') = 1.$$

De là on aura

$$Y = -\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{z}}\right)', \qquad \dot{Y} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{z}},$$
$$Z = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2z^{\frac{3}{2}}}, \qquad \dot{Z} = 0,$$
$$(Y) = -\left[2\lambda\varphi(z)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]', \quad (\dot{Y}) = 2\lambda\varphi(z)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}},$$
$$(Z) = 2\lambda\varphi'(z)\sqrt{1+y'^2} - \lambda', \quad (\dot{Z}) = \lambda.$$

D'après ces valeurs, on aura les équations générales

$$Y + (Y) = 0, \quad Z + (Z) = 0,$$

et l'équation aux limites

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0,$$

en faisant

$$\dot{U} = [\dot{Y} + (\dot{Y})]\dot{y} + [\dot{Z} + (\dot{Z})]z;$$

et, si l'on veut tenir compte de la variation de x, on aura

$$\dot{U} = [\dot{Y} + (\dot{Y})](\dot{y} - y'\dot{x}) + [\dot{Z} + (\dot{Z})](\dot{z} - z'\dot{x}) + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{z}}\dot{x}.$$

Les deux équations générales se réduisent à celles-ci :

$$\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{z}}\right)' + \left[2\lambda\varphi(z)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]' = 0,$$

$$-\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2z^{\frac{3}{2}}} + 2\lambda\varphi'(z)\sqrt{1+y'^2} - \lambda' = 0,$$

dont la première a pour primitive

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{z}} + 2\lambda\varphi(z)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

a étant une constante arbitraire.

Il faudra substituer dans celle-ci la valeur de λ tirée de la seconde; ensuite il faudra éliminer z par le moyen de l'équation de condition

$$z' - 2g + 2\varphi(z)\sqrt{1+y'^2} = 0,$$

et l'équation résultante en y et x sera celle de la courbe cherchée.

Comme z représente le carré de la vitesse et que l'équation en z est du premier ordre, la valeur de z, tirée de l'équation primitive de celle-ci, contiendra une constante arbitraire qui dépendra de la vitesse initiale imprimée au mobile.

On peut donc regarder la valeur de z, à la première limite, comme une fonction donnée des coordonnées initiales x et y. Ainsi, dénotant cette fonction par la caractéristique Δ, on aura la condition

$$z_0 = \Delta(x_0, y_0).$$

Le cas du vide n'a aucune difficulté; car, en faisant $\varphi(z) = 0$, on aura l'équation

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}\sqrt{z}} = \text{const.} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

où λ n'entre pas.

Ensuite on a

$$z' - 2g = 0, \quad \text{d'où l'on tire} \quad z = 2gx + b.$$

En rapportant cette équation à la première limite, on a

$$z_0 = 2gx_0 + b, \quad \text{d'où} \quad b = z_0 - 2gx_0.$$

Ainsi la valeur complète de z sera

$$z = 2g(x - x_0) + z_0.$$

Or l'équation en y' donne

$$y' = \sqrt{\frac{z}{a-z}},$$

équation qui, par la substitution de la valeur de z, devient celle de la cycloïde ordinaire.

Soit, pour abréger,

$$t = \frac{1}{\sqrt{z}} + 2\lambda\varphi(z);$$

le problème général dépendra de ces trois équations du premier ordre,

$$\frac{ty'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}},$$

$$\lambda' - \left[2\lambda\varphi'(z) - \frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}}\right]\sqrt{1+y'^2} = 0,$$

$$z' - 2g + 2\varphi(z)\sqrt{1+y'^2} = 0.$$

Si l'on prend la dérivée de t, on a

$$t' = -z'\left[\frac{1}{2z^{\frac{3}{2}}} - 2\lambda\varphi'(z)\right] + 2\lambda'\varphi(z),$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{2z^{\frac{1}{2}}} - 2\lambda\varphi'(z) = \frac{2\lambda'\varphi(z) - t'}{z'};$$

cette valeur étant substituée dans la seconde équation ci-dessus, on aura

$$\lambda' + \frac{2\lambda'\varphi(z) - t'}{z'}\sqrt{1+y'^2} = 0;$$

mais la troisième donne

$$z' = 2g - 2\varphi(z)\sqrt{1+y'^2};$$

substituant cette valeur dans la dernière équation après l'avoir multipliée par z', elle se réduira à

$$2g\lambda' - t'\sqrt{1+y'^2} = 0.$$

Or on a

$$t'\sqrt{1+y'^2} = (t\sqrt{1+y'^2})' - \frac{ty'y''}{\sqrt{1+y'^2}},$$

et la première équation donne

$$\frac{ty'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}};$$

donc l'équation qu'on vient de trouver deviendra

$$2g\lambda' - (t\sqrt{1+y'^2})' + \frac{y''}{\sqrt{a}} = 0,$$

dont la primitive est

$$2g\lambda - t\sqrt{1+y'^2} + \frac{y'}{\sqrt{a}} = b;$$

et, si l'on substitue encore ici pour t sa valeur $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y'\sqrt{a}}$ tirée de la première équation, on aura

$$2g\lambda = \frac{1}{y'\sqrt{a}} + b.$$

Ainsi l'on a la valeur de λ qu'on substituera dans l'expression de t de la première équation; et il ne s'agira plus que de combiner cette équation avec la troisième pour en éliminer z.

Considérons maintenant l'équation aux limites

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_0 = 0;$$

supposons, ce qui est le cas le plus ordinaire, que les deux limites soient indépendantes l'une de l'autre; on aura séparément

$$\dot{U}_0 = 0, \quad \dot{U}_1 = 0.$$

Or, en faisant dans l'expression de $\dot{U}$ donnée plus haut les substitutions nécessaires, on a

$$\dot{U} = \left[\frac{1}{\sqrt{z}} + 2\lambda\varphi(z)\right]\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}(\dot{y} - y'\dot{x}) + \lambda(\dot{z} - z'\dot{x}) + \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{z}}\dot{x}.$$

Cette expression, en mettant pour z' sa valeur $2g - 2\varphi(z)\sqrt{1+y'^2}$ et réduisant, devient

$$\dot{U} = \left(\frac{t}{\sqrt{1+y'^2}} - 2g\lambda\right)\dot{x} + \frac{ty'}{\sqrt{1+y'^2}}\dot{y} + \lambda\dot{z},$$

où t est mis pour $\frac{1}{\sqrt{z}} + 2\lambda\varphi(z)$, comme on l'a employé ci-dessus, de sorte qu'en substituant encore à la place de t sa valeur donnée par la première équation, on aura plus simplement

$$\dot{U} = \left(\frac{1}{y'\sqrt{a}} - 2g\lambda\right)\dot{x} + \frac{\dot{y}}{\sqrt{a}} + \lambda\dot{z}.$$

Cette valeur de $\dot{U}$ devra donc être nulle aux deux limites.

Pour la première limite, nous avons vu ci-dessus que l'on a en général $z_0 = \Delta(x_0, y_0)$; donc, prenant les variations, on aura

$$\dot{z}_0 = \dot{x}_0\Delta'(x_0) + \dot{y}_0\Delta'(y_0),$$

de sorte que l'équation $\dot{U}_0 = 0$ donnera celle-ci :

$$\left[\frac{1}{y'_0\sqrt{a}} - 2g\lambda_0 + \Delta'(x_0)\lambda_0\right]\dot{x}_0 + \left[\frac{1}{\sqrt{a}} + \Delta'(y_0)\lambda_0\right]\dot{y}_0 = 0.$$

Pour la seconde limite, on aura aussi $\dot{U}_1 = 0$, équation dans laquelle, la variation $\dot{z}$ demeurant indéterminée, il faudra la faire évanouir en

égalant à zéro son coefficient λ_1. Ainsi l'on aura la condition $\lambda_1 = 0$, qui servira à déterminer la constante arbitraire b de la valeur de λ trouvée plus haut. Cette condition donne

$$\frac{1}{y'_1\sqrt{a}} + b = 0,$$

d'où l'on tire

$$b = -\frac{1}{y'_1\sqrt{a}};$$

de sorte que l'expression complète de λ sera

$$2g\lambda = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{y'} - \frac{1}{y'_1}\right),$$

d'où l'on aura

$$2g\lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{y'_0} - \frac{1}{y'_1}\right),$$

valeur qu'il faudra substituer dans l'équation à la première limite.

A l'égard de l'équation de la seconde limite, elle sera simplement, à cause de $\lambda_1 = 0$,

$$\frac{\dot{x}_1}{y'_1} + \dot{y}_1 = 0, \quad \text{savoir} \quad \dot{x}_1 + y'_1\dot{y}_1 = 0.$$

Cette équation est tout à fait semblable à celle que nous avons trouvée dans le premier exemple, et d'où nous avons conclu que la ligne la plus courte devait couper à angles droits la ligne qui forme la seconde limite. Ainsi la même conclusion doit avoir lieu pour la ligne de la plus vite descente, quelle que soit la loi de la résistance du milieu.

Revenons à la première limite. En substituant dans l'équation de cette limite pour λ_0 sa valeur, elle devient

$$\left[\frac{1}{y'_1} + \frac{\Delta'(x_0)}{2g}\left(\frac{1}{y'_0} - \frac{1}{y'_1}\right)\right]\dot{x}_0 + \left[1 + \frac{\Delta'(y_0)}{2g}\left(\frac{1}{y'_0} - \frac{1}{y'_1}\right)\right]\dot{y}_0 = 0.$$

Maintenant, si l'on désigne par (y'_0) la dérivée de l'ordonnée y de la courbe qui forme la première limite, on aura, comme on l'a vu dans le premier exemple, l'équation $\dot{y}_0 - (y'_0)\dot{x}_0 = 0$. Donc, si l'on substitue

dans l'équation précédente, au lieu de $\dot{y}_0$, sa valeur $(y'_0)\dot{x}_0$, la variation $\dot{x}_0$ demeurera arbitraire, et il faudra vérifier l'équation en égalant à zéro le coefficient de $\dot{x}_0$, ce qui donnera

$$\frac{1}{y'_1} + \frac{\Delta'(x_0)}{2g}\left(\frac{1}{y'_0} - \frac{1}{y'_1}\right) + \left[1 + \frac{\Delta'(y_0)}{2g}\left(\frac{1}{y'_0} - \frac{1}{y'_1}\right)\right](y'_0) = 0,$$

équation à laquelle on satisfera par le moyen d'une des constantes arbitraires.

Supposons, ce qui est le cas le plus simple, que la vitesse initiale $\sqrt{z_0}$ soit donnée indépendamment du lieu de départ; on aura alors $z_0 =$ à une constante; donc

$$\Delta(x_0, y_0) = \text{const.},$$

et par conséquent

$$\Delta'(x_0) = 0, \quad \Delta'(y'_0) = 0,$$

et l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{y'_1} + (y'_0) = 0, \quad \text{savoir} \quad 1 + y'_1(y'_0) = 0.$$

Dans cette équation, (y'_0) exprime la tangente de l'angle que fait avec l'axe des x la tangente à la courbe de la première limite, dans le point où elle est rencontrée par la ligne de la plus vite descente, et y'_1 exprime la tangente de l'angle que fait avec le même axe la tangente à cette même ligne au point de la seconde limite; et il suit de cette équation, comme nous l'avons vu dans le premier exemple, que la différence de ces deux angles doit être égale à un angle droit. Donc il faudra que la tangente à la courbe de la première limite soit perpendiculaire à la tangente à la ligne de la plus vite descente au point de la seconde limite; et, comme nous avons déjà vu que cette tangente doit être perpendiculaire à celle de la courbe de la seconde limite, on en conclura que, dans le cas dont il s'agit, la courbe de la plus vite descente devra rencontrer les deux courbes des limites dans des points où les tangentes soient parallèles entre elles.

Mais, si l'on veut que la vitesse initiale soit toujours celle que le corps acquerrait en tombant d'un même point donné, nommant h la hauteur de ce point au-dessus de l'axe horizontal des ordonnées y, on aura $h+x_0$ pour la hauteur due à la vitesse initiale dont z_0 est le carré; et les principes de la Mécanique donneront

$$z_0 = 2g(h+x_0).$$

Donc

$$\Delta(x_0, y_0) = 2g(h+x_0),$$

et de là

$$\Delta'(x_0) = 2g, \quad \Delta'(y_0) = 0,$$

ce qui réduira l'équation de la première limite à celle-ci :

$$\frac{1}{y'_0} + (y'_0) = 0, \quad \text{savoir} \quad 1 + y'_0 (y')_0 = 0,$$

laquelle montre, comme on l'a vu dans le premier exemple, que la ligne de la plus vite descente doit couper aussi à angles droits la ligne qui forme la première limite.

On avait trouvé ces mêmes résultats pour la ligne de la plus vite descente dans le vide. (*Voyez* le quatrième Volume des *Mémoires de Turin* [1] et les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour les années 1767 et 1768. L'analyse précédente fait voir que les conditions relatives aux limites sont indépendantes de la résistance.

Si, au lieu de la courbe de la plus vite descente, on demandait celle où la vitesse acquise serait un maximum, il faudrait rendre la quantité z un maximum, et l'on aurait le cas où nous avons vu que les équations générales se réduisent simplement à $(Y) = 0$, $(Z) = 0$, savoir

$$\left[2\lambda\varphi(z)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right]' = 0,$$

$$2\lambda\varphi'(z)\sqrt{1+y'^2} - \lambda' = 0,$$

(1) *OEuvres de Lagrange*, t. II, p. 37.

équations qu'il faut combiner avec l'équation en z

$$z' - 2g - 2\varphi(z)\sqrt{1+y'^2} = 0.$$

La première a pour primitive

$$2\lambda\varphi(z)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}};$$

et, si l'on opère sur ces trois équations comme on l'a fait dans le cas précédent, on parviendra de la même manière à l'équation

$$2g\lambda = \frac{1}{y'\sqrt{a}} + b,$$

qui donne la valeur de λ; ensuite les deux dernières équations ci-dessus donneront la vitesse $\sqrt{z}$, et la fonction y en x, d'où dépend la fonction cherchée.

A l'égard des limites, on aura dans le cas dont il s'agit, en faisant varier à la fois x, y, z,

$$U = (\dot{Y})(\dot{y} - y'\dot{x}) + (\dot{Z})(\dot{z} - z'\dot{x}) + z'\dot{x},$$

formule qui, en substituant les valeurs de $(\dot{Y})$, $(\dot{Z})$ et de z', et réduisant, devient

$$\dot{U} = \left[\frac{2\lambda\varphi(z)}{\sqrt{1+y'^2}} - 2g\lambda\right]\dot{x} + 2\lambda\varphi(z)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\dot{y} + (\lambda+1)\dot{z}.$$

Et, si l'on substitue encore dans celle-ci les valeurs de $2g\lambda$ et de $2\lambda\varphi(z)$ tirées des deux dernières équations primitives, on aura enfin

$$\dot{U} = -b\dot{x} + \frac{1}{\sqrt{a}}\dot{y} + (\lambda+1)\dot{z}_0;$$

de sorte que les deux équations aux limites $\dot{U}_0 = 0$ et $\dot{U}_1 = 0$ deviendront

$$-b\dot{x}_0 + \frac{1}{\sqrt{a}}\dot{y}_0 + (\lambda_0+1)\dot{z}_0 = 0,$$

$$-b\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{a}}\dot{y}_1 + (\lambda_1+1)\dot{z}_1 = 0.$$

La vitesse initiale, dont z_0 est le carré, doit être donnée; si on la suppose indépendante du lieu du départ, z_0 sera une quantité constante dont la variation sera par conséquent nulle; donc $\dot{z}_0 = 0$. Alors la première équation se réduira à

$$-b\dot{x}_0 + \frac{1}{\sqrt{a}}\dot{y}_0 = 0.$$

Pour la seconde, comme rien ne détermine la valeur de z_1, il faudra que son coefficient soit nul, et qu'il donne $\lambda_1 + 1 = 0$ et $\lambda_1 = -1$, condition par laquelle on déterminera la valeur de la constante arbitraire b.

Cette équation deviendra ainsi

$$-b\dot{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{a}}\dot{y}_1 = 0$$

Si les deux points extrêmes de la courbe étaient donnés, les variations de x_0, y_0, x_1, y_1 seraient nulles, et les deux équations seraient satisfaites d'elles-mêmes.

Mais, si la question est de trouver la ligne par laquelle le corps partant d'une courbe donnée, et arrivant à une autre courbe donnée, acquiert la plus grande vitesse, nommant, comme plus haut, (y'_0) et (y'_1) les tangentes des angles que les tangentes à ces courbes font avec l'axe aux deux extrémités de la ligne cherchée, on aura, ainsi qu'on l'a vu dans le premier exemple,

$$\dot{y}_0 - (y'_0)\dot{x}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \dot{y}_1 - (y'_1)\dot{x}_1 = 0;$$

et ces équations, étant combinées avec les deux précédentes, donneront

$$(y'_0) = b\sqrt{a} \quad \text{et} \quad (y'_1) = b\sqrt{a};$$

d'où l'on peut conclure que les tangentes aux deux courbes des limites doivent être parallèles entre elles, comme dans la courbe de la plus vite descente.

Ces exemples peuvent suffire pour montrer l'usage de nos formules générales, et surtout des équations aux limites qui n'étaient pas connues avant le Calcul des variations, et sans lesquelles on n'aurait que des solutions incomplètes.

FIN DU TOME DIXIÈME.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME DIXIEME.

Pages

AVERTISSEMENT 5

LEÇON PREMIÈRE.

Sur l'objet du Calcul des Fonctions et sur les Fonctions en général 7

LEÇON DEUXIÈME.

Sur le développement d'une Fonction d'une variable, lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable. Loi générale de ce développement. Origine des Fonctions dérivées. Différents ordres de ces Fonctions. Leur notation 13

LEÇON TROISIÈME.

Fonctions dérivées des puissances. Développement d'une puissance quelconque d'un binôme 20

LEÇON QUATRIÈME.

Fonctions dérivées des quantités exponentielles et logarithmiques. Développement de ces quantités en séries 28

LEÇON CINQUIÈME.

Fonctions dérivées des sinus et cosinus d'angles, et des angles exprimés par les sinus et cosinus. Développement de ces quantités en séries 40

LEÇON SIXIÈME.

Fonctions dérivées des quantités composées de différentes fonctions d'une même variable ou dépendantes de ces fonctions par des équations données 48

LEÇON SEPTIÈME.

Sur la manière de rapporter les Fonctions dérivées à différentes variables 62

LEÇON HUITIÈME.

Du développement des Fonctions lorsqu'on donne à la variable une valeur déterminée. Cas dans lesquels la règle générale est en défaut. Analyse de ces cas. Des valeurs des fractions dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent à la fois 68

LEÇON NEUVIÈME.

Pages

De la manière d'avoir les limites du développement d'une fonction, lorsqu'on n'a égard qu'à un nombre déterminé de termes. Cas dans lesquels les principes du Calcul différentiel sont en défaut. Théorème fondamental. Limites de plusieurs séries. Manière rigoureuse d'introduire les Fonctions dérivées dans la théorie des courbes et dans celle des mouvements variés 85

LEÇON DIXIÈME.

Des équations dérivées et de leur usage pour la transformation des Fonctions. Analyse des sections angulaires 106

LEÇON ONZIÈME.

Suite de l'analyse des sections angulaires, où l'on démontre les formules générales données dans la Leçon précédente 125

LEÇON DOUZIÈME.

Théorie générale des équations dérivées et des constantes arbitraires 142

LEÇON TREIZIÈME.

Théorie des multiplicateurs des équations dérivées 157

LEÇON QUATORZIÈME.

Des valeurs singulières qui satisfont aux équations dérivées, et qui ne sont pas comprises dans les équations primitives. Théorie des équations primitives singulières .. 166

LEÇON QUINZIÈME.

Comment l'équation primitive singulière résulte de l'équation dérivée 192

LEÇON SEIZIÈME.

Équations dérivées qui ont des équations primitives singulières données. Analyse d'une classe d'équations de tous les ordres, qui ont toujours nécessairement des équations primitives singulières 220

LEÇON DIX-SEPTIÈME.

Sur différents problèmes relatifs à la théorie des équations primitives singulières 243

LEÇON DIX-HUITIÈME.

Digression sur les équations aux différences finies, sur le passage de ces différences aux différentielles et sur l'invention du Calcul différentiel 268

LEÇON DIX-NEUVIÈME.

Des fonctions de deux ou plusieurs variables; de leurs fonctions dérivées. Notation et formation de ces fonctions 299

LEÇON VINGTIÈME.

Pages

Équations dérivées à plusieurs variables. Théorie de ces équations. Méthodes générales pour trouver les équations primitives des équations du premier ordre à plusieurs variables 322

LEÇON VINGT ET UNIÈME.

Des équations de condition par lesquelles on peut reconnaître si une fonction d'un ordre quelconque de plusieurs variables est une fonction dérivée exacte. Analogie de ces équations avec celles du problème des isopérimètres. Histoire de ce problème. Méthode des variations 364

LEÇON VINGT-DEUXIÈME.

Méthode des variations, déduite de la considération des fonctions 399

Paris — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.