LEÇON QUATORZIÈME.

DES VALEURS SINGULIÈRES QUI SATISFONT AUX ÉQUATIONS DÉRIVÉES ET QUI NE SONT PAS COMPRISES DANS LES ÉQUATIONS PRIMITIVES. THÉORIE DES ÉQUATIONS PRIMITIVES SINGULIÈRES.

La théorie des équations dérivées, exposée dans la Leçon XII, porte naturellement à conclure que toute valeur qui peut satisfaire à une équation dérivée donnée doit être renfermée dans son équation primitive, pourvu que celle-ci ait toute la généralité dont elle est susceptible par les constantes arbitraires qui doivent y entrer. Il y a néanmoins des équations dérivées auxquelles satisfont les valeurs que j'appelle *singulières*, parce qu'elles ne sont pas comprises dans leurs équations primitives. Ces sortes de valeurs se sont présentées aux géomètres presque dès la naissance du Calcul différentiel; mais, comme la théorie des constantes arbitraires n'était guère connue alors, on n'a pas d'abord regardé ces valeurs comme formant une exception aux règles générales du Calcul différentiel. Euler est le premier qui les ait envisagées sous ce point de vue et qui ait donné des règles pour les distinguer des intégrales ordinaires.

Depuis, on a reconnu qu'elles dépendent de la théorie générale des équations différentielles ou dérivées, et qu'elles servent à la compléter; c'est ce que nous allons développer avec toute l'étendue qu'exige l'importance de la matière.

Considérons une équation quelconque du premier ordre, représentée par

$$f(x,y,y')=0,$$

et supposons qu'elle soit dérivée de l'équation primitive

$$F(x,y,a)=0,$$

a étant la constante arbitraire.

Suivant la théorie générale, cette équation

$$F(x,y,a)=0$$

donnera l'équation dérivée

$$F'(x,y,a)=0,$$

qui se réduit à la forme

$$F'(x)+y'F'(y)=0,$$

conformément à la notation que nous avons employée jusqu'ici; et ces deux équations, étant combinées ensemble de manière que la constante a disparaisse, produiront la suivante

$$f(x,y,y')=0.$$

Maintenant il est clair que le résultat de l'élimination de a sera le même, quelle que soit la quantité a, soit constante ou variable, pourvu que les deux équations

$$F(x,y,a)=0, \quad F'(x)+y'F'(y)=0$$

soient les mêmes. Donc aussi la même équation

$$f(x,y,y')=0$$

pourra résulter de l'équation

$$F(x,y,a)=0,$$

en supposant a variable et fonction de x, pourvu que l'équation dérivée

$$F'(x,y,a)=0$$

soit également

$$F'(x)+y'F'(y)=0.$$

Mais, en regardant a comme une fonction de x, on a

$$F'(x,y,a)=F'(x)+y'F'(y)+a'F'(a);$$

ainsi la condition dont il s'agit aura lieu si le terme $a'\,F'(a)$ disparaît; d'où il suit que la valeur de y, tirée de l'équation primitive

$$F(x,y,a)=0,$$

satisfera également à l'équation du premier ordre

$$f(x,y,y')=0,$$

en prenant pour a une fonction de x déterminée par l'équation

$$a'\,F'(a)=0.$$

Cette équation donne ou

$$a'=0, \quad \text{ou} \quad F'(a)=0.$$

L'équation $a'=0$ donne a égal à une constante quelconque; c'est le cas de l'équation primitive ordinaire, dans lequel a est la constante arbitraire.

Mais l'autre équation

$$F'(a)=0,$$

dans laquelle $F'(a)$ est une fonction de x, y et a, donnera, par la résolution, la valeur de a en x et y; et, cette valeur étant substituée dans l'équation primitive

$$F(x,y,a)=0,$$

on aura une nouvelle équation en x et y, sans constante arbitraire, qui conduira également à la même équation dérivée, et qui sera nécessairement différente de l'équation primitive ordinaire, puisque dans celle-ci la quantité a est une constante arbitraire, et que dans l'autre elle devient une fonction de x et y.

Donc, en général, si l'on élimine a des deux équations

$$F(x,y,a)=0, \quad F'(a)=0,$$

on aura l'équation qui renfermera les valeurs singulières de y, qui peuvent satisfaire à l'équation dérivée

$$f(x,y,y')=0,$$

dont

$$F(x,y,a)=0$$

est l'équation primitive ordinaire.

Nous appellerons cette équation *équation primitive singulière*, pour la distinguer de l'équation primitive ordinaire, que nous appellerons aussi *équation primitive complète*.

Il faut seulement remarquer que, comme l'essence de cette équation consiste en ce que la valeur de a est une fonction variable, si l'équation

$$F'(a)=0,$$

par laquelle on doit déterminer a, donnait pour a une quantité constante, ou bien une telle fonction de x et y qui devint égale à une constante en vertu de l'équation

$$F(x,y,a)=0,$$

dans laquelle on doit substituer cette valeur de a, ou qui, dans cette substitution, donnât le même résultat qu'on aurait par une valeur constante de a, alors cette équation cesserait d'être une équation primitive singulière, et ne serait plus qu'un cas particulier de l'équation primitive ordinaire.

Nous avons trouvé (Leçon XII) que l'équation du premier ordre

$$y'\sqrt{x^2+y^2-b}-yy'-x=0$$

a pour équation primitive

$$x^2-2ay-a^2-b=0,$$

où a est la constante arbitraire. Faisant donc

$$F(x,y,a)=x^2-2ay-a^2-b,$$

et prenant les fonctions dérivées de tous les termes relativement à a seul, on aura

$$F'(a)=-2y-2a;$$

donc l'équation

$$F'(a) = 0 \quad \text{donnera} \quad a = -y,$$

valeur qui, étant substituée dans l'équation primitive, donne

$$x^2 + y^2 - b = 0,$$

équation qui satisfait également à l'équation du premier ordre.

En effet, cette équation donne

$$y^2 = b - x^2 \quad \text{et} \quad yy' = -x;$$

ces valeurs substituées dans l'équation

$$y'\sqrt{x^2 + y^2 - b} - yy' - x = 0$$

la rendent identique.

Comme on sait, par la théorie des équations, que l'équation dérivée

$$F'(a) = 0,$$

relative à a, contient la condition qui rend égales deux des racines de l'équation

$$F(x, y, a) = 0,$$

ordonnée par rapport à a, il s'ensuit que la valeur singulière de y, dans cette équation, a la propriété de donner à l'équation en a une racine double.

On voit, en effet, que l'équation

$$a^2 + 2ay - x^2 + b = 0$$

acquiert une racine double, en faisant

$$y^2 = b - x^2.$$

Si l'équation primitive était

$$(x^2 + y^2 - b)(y^2 - 2ay) + (x^2 - b)a^2 = 0,$$

a étant la constante arbitraire, l'équation dérivée relative à a serait

$$-y(x^2 + y^2 - b) + (x^2 - b)a = 0,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{y(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b},$$

valeur qui, étant substituée dans la proposée, donne

$$\frac{y^4(x^2 + y^2 - b)}{x^2 - b} = 0,$$

et, par conséquent,

$$x^2 + y^2 - b = 0$$

pour l'équation primitive singulière.

Mais, de ce que cette équation rend la valeur même de a nulle, il suit qu'elle ne sera qu'un cas particulier de l'équation primitive; en effet elle résulte de celle-ci, en y faisant $a = 0$.

On peut appliquer aux équations des ordres supérieurs au premier la théorie que nous venons de donner sur les équations dérivées de cet ordre.

En effet, si

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, a) = 0$$

est l'équation primitive de l'équation de l'ordre n

$$f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

a étant la constante arbitraire, celle-ci doit résulter de l'élimination de a entre l'équation primitive et son équation dérivée; et il est évident que le résultat de cette élimination sera le même, soit que la quantité a soit constante ou variable, pourvu que les deux équations soient de la même forme.

Or l'équation primitive

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, a) = 0$$

est la même dans l'un et dans l'autre cas : son équation dérivée est, dans le cas de a constante,

$$F'(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0;$$

et, dans le cas où a serait une fonction quelconque de x, elle sera

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})+a'F'(a)=0;$$

donc les deux équations deviendront identiques si l'on détermine a de manière que le terme $a'F'(a)$ disparaisse.

Faisant donc

$$a'F'(a)=0,$$

on a ou

$$a'=0,$$

et par conséquent a égal à une constante, ce qui est le cas ordinaire; ou

$$F'(a)=0,$$

ce qui donnera une valeur de a en x et y, laquelle, étant substituée dans l'équation primitive

$$F(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)},a)=0,$$

donnera une équation du même ordre, qui satisfera également à l'équation

$$f(x,y,y',\ldots,y^{(n)})=0;$$

elle pourra donc être regardée aussi comme une équation primitive singulière sans constante arbitraire.

L'équation du second ordre

$$y''^2-\frac{2y'y''}{x}+1=0$$

a pour équation primitive du premier ordre

$$x^2-2ay'+a^2=0,$$

comme on peut s'en assurer en éliminant a au moyen de son équation dérivée

$$x-ay''=0.$$

Si l'on prend l'équation dérivée relativement à a, on a

$$-y'+a=0;$$

d'où l'on tire

$$a=y',$$

valeur qui, étant substituée dans la même équation, donne celle-ci

$$x^2-y'^2=0, \quad \text{d'où} \quad y'=\pm x.$$

Cette valeur de y' satisfait aussi à l'équation proposée; mais c'est une valeur singulière, puisqu'elle n'est pas contenue dans l'équation primitive.

Si l'on cherche l'équation primitive de l'équation du premier ordre

$$x^2-2ay'+a^2=0,$$

il est facile de trouver celle-ci

$$\frac{x^3}{3}-2ay+a^2x+b=0,$$

où b est la nouvelle constante arbitraire.

Si maintenant on élimine a de ces deux équations, on aura la suivante

$$4x^2(y-xy')^2-4\left(b-\frac{2x^3}{3}\right)(y-xy')y'+\left(b-\frac{2x^3}{3}\right)^2=0,$$

qui sera par conséquent l'autre équation primitive du premier ordre de la proposée.

On peut donc aussi chercher une équation primitive singulière d'après cette équation-ci, en prenant son équation dérivée relativement à b, et l'on trouvera

$$-4(y-xy')y'+2\left(b-\frac{2x^3}{3}\right)=0,$$

d'où l'on tire

$$b=\frac{2x^3}{3}+2(y-xy')y'.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle devient

$$4(y-xy')^2(x^2-y'^2)=0.$$

Cette équation donne ces deux-ci

$$y - xy' = 0 \quad \text{et} \quad x^2 - y'^2 = 0.$$

La première ne satisfait pas à la proposée, car elle donne

$$y' = \frac{y}{x},$$

et, de là,

$$y'' = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{y}{x^2} - \frac{y}{x^2} = 0.$$

La seconde donne

$$y' = \pm x;$$

c'est la même que nous avons trouvée ci-dessus.

Ainsi les deux équations primitives du premier ordre ne donnent que la même équation singulière.

Il serait cependant naturel de penser que des équations primitives différentes devraient donner aussi différentes valeurs singulières; mais nous allons démontrer, *a priori*, que l'on a toujours la même équation primitive singulière, de quelque équation primitive qu'on la déduise; ce qu'on ne savait pas jusqu'ici.

Considérons une équation du second ordre, représentée en général par

$$f(x, y, y', y'') = 0,$$

et dont l'équation primitive entre x et y soit

$$\mathrm{F}(x, y, a, b) = 0,$$

a et b étant les deux constantes arbitraires.

Par la théorie générale, on aura ses deux équations primitives du premier ordre, en éliminant a ou b, par le moyen de cette même équation et de sa première équation dérivée

$$\mathrm{F}'(x, y) = 0,$$

a et b étant ici regardées comme constantes.

Comme la fonction dérivée $\mathrm{F}'(x, y)$ renferme, outre les constantes a et b, la fonction y', désignons-la par $\varphi(x, y, y', a, b)$.

Ainsi on aura les deux constantes primitives du premier ordre, en substituant alternativement, dans la même équation

$$\varphi(x, y, y', a, b) = 0,$$

la valeur de b en x, y, a, et la valeur de a en x, y et b, tirées de la même équation

$$\mathrm{F}(x, y, a, b) = 0.$$

Ensuite on aura les équations primitives singulières, en éliminant a de la première par le moyen de son équation dérivée, prise relativement à a, et en éliminant b de la seconde par le moyen de son équation dérivée, prise relativement à b.

Considérons d'abord, dans l'équation

$$\varphi(x, y, y', a, b) = 0,$$

la quantité b comme une fonction de x, y, a, déterminée par l'équation

$$\mathrm{F}(x, y, a, b) = 0;$$

son équation dérivée, prise relativement à a, sera

$$\varphi'(a) + b' \varphi'(b) = 0,$$

en supposant que b' soit la fonction dérivée de b, prise relativement à a; or, comme b est une fonction de a, déterminée par l'équation

$$\mathrm{F}(x, y, a, b) = 0,$$

on aura la valeur de b', en prenant la dérivée de cette équation par rapport à a, opération qui donne

$$\mathrm{F}'(a) + b' \mathrm{F}'(b) = 0.$$

Si maintenant on élimine b' de ces deux équations, on a

$$\varphi'(a) \mathrm{F}'(b) - \varphi'(b) \mathrm{F}'(a) = 0.$$

Cette équation, étant combinée avec les deux

$$\mathrm{F}(x, y, a, b) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x, y, y', a, b) = 0,$$

donnera, par l'élimination de a et b, l'équation singulière résultant de l'équation dérivée relative à a.

En regardant de même a comme fonction de b dans l'équation

$$\varphi(x, y, y', a, b) = 0,$$

on aura également l'équation dérivée relative à b

$$a'\,\varphi'(a) + \varphi'(b) = 0,$$

et la valeur de a' dépendra alors de l'équation dérivée relativement à b,

$$a'\,\mathrm{F}'(a) + \mathrm{F}'(b) = 0;$$

de sorte que, par l'élimination de a', on aura pareillement

$$\varphi'(a)\,\mathrm{F}'(b) - \varphi'(b)\,\mathrm{F}'(a) = 0.$$

Ainsi l'équation primitive singulière, déduite de l'équation dérivée relative à b, sera encore le résultat de l'élimination de a et b, par le moyen de l'équation précédente et des équations

$$\mathrm{F}(x, y, a, b) = 0, \quad \varphi(x, y, y', a, b) = 0.$$

Donc ce résultat sera le même dans les deux cas, puisque les équations sont les mêmes.

Il suit de là qu'on peut trouver directement l'équation primitive singulière d'une équation du second ordre, au moyen de son équation primitive complète, sans connaître en particulier les deux équations primitives du premier ordre; car, soit

$$\mathrm{F}(x, y, a, b) = 0$$

cette équation, où a et b sont les deux constantes arbitraires; il n'y aura qu'à éliminer a, b et b', au moyen des quatre équations

$$\mathrm{F}(x, y, a, b) = 0, \quad \varphi(x, y, y', a, b) = 0,$$
$$\mathrm{F}(a) + b'\,\mathrm{F}'(b) = 0, \quad \varphi'(a) + b'\,\varphi'(b) = 0,$$

en supposant

$$\varphi(x, y, y', a, b) = \mathrm{F}'(x, y).$$

On peut appliquer le même raisonnement aux équations des ordres supérieurs, et en tirer des conclusions semblables. Ainsi, si

$$\mathrm{F}(x, y, a, b, c) = 0$$

est supposée l'équation primitive entre x et y, et les trois constantes arbitraires a, b, c d'une équation dérivée du troisième ordre, les trois équations primitives du second ordre donneront une même équation primitive singulière de ce même ordre, qui ne sera que le résultat de l'élimination de a, b, c et de b', c', au moyen de ces six équations

$$\mathrm{F}(x, y, a, b, c) = 0,$$
$$\varphi(x, y, y', a, b, c) = 0,$$
$$\psi(x, y, y', y'', a, b, c) = 0,$$
$$\mathrm{F}'(a) + b'\,\mathrm{F}'(b) + c'\,\mathrm{F}'(c) = 0,$$
$$\varphi'(a) + b'\,\varphi'(b) + c'\,\varphi'(c) = 0,$$
$$\psi'(a) + b'\,\psi'(b) + c'\,\psi'(c) = 0,$$

en supposant

$$\varphi(x, y, y', a, b, c) = \mathrm{F}'(x, y),$$
$$\psi(x, y, y', y'', a, b, c) = \mathrm{F}''(x, y);$$

et ainsi de suite.

Ainsi l'équation du second ordre

$$y''^2 - \frac{2y'y''}{x} + 1 = 0$$

ayant, comme on l'a vu ci-dessus, pour équation primitive entre x et y, l'équation

$$\frac{x^3}{3} - 2ay + a^2x + b = 0,$$

où a et b sont les constantes arbitraires, on aura tout de suite l'équation primitive singulière du premier ordre, en combinant cette équation avec son équation dérivée ordinaire, et avec les deux dérivées de celles-ci, prises par rapport à a, et en regardant b comme fonction de x, y, y' et a, de manière que les quantités a, b et b' disparaissent.

Pour donner plus de généralité à cet exemple, en conservant la constante b dans l'équation dérivée, je donnerai d'abord à l'équation primitive la forme

$$x^2+3a^2+\frac{3b-6ay}{x}=0,$$

et j'aurai pour sa dérivée

$$2x-\frac{6ay'}{x}-\frac{3b-6ay}{x^2}=0.$$

Prenant maintenant les dérivées de l'une et de l'autre relativement à a, il viendra

$$6a-\frac{6y}{x}+\frac{3b'}{x}=0,$$

$$\frac{6y}{x^2}-\frac{6y'}{x}-\frac{3b'}{x^2}=0,$$

b étant supposé fonction de a.

En éliminant d'abord b', on a

$$\frac{6(a-y')}{x}=0, \quad \text{d'où} \quad a=y';$$

les deux premières donnent ensuite, en éliminant b,

$$3x+\frac{3a^2-6ay'}{x}=0;$$

substituant la valeur de a, il vient

$$3x-\frac{3y'^2}{x}=0, \quad \text{ou} \quad y'^2-x^2=0,$$

comme plus haut.

Soit encore l'équation du second ordre

$$y-xy'+\frac{x^2}{2}y''-(y'-xy'')^2-y''^2=0,$$

dont l'équation primitive en x et y est

$$y-\frac{a}{2}x^2-bx-a^2-b^2=0.$$

Si l'on élimine tour à tour a et b de cette équation, au moyen de son équation dérivée

$$y'-ax-b=0,$$

on a ces deux-ci

$$y+\left(\frac{a}{2}-a^2\right)x^2-(1-2a)xy'-a^2-y'^2=0,$$

$$y-\frac{(b+y')x}{2}-\frac{(b-y')^2}{x^2}-b^2=0.$$

En prenant l'équation dérivée de la première relativement à a, on trouve

$$\left(\frac{1}{2}-2a\right)x^2+2xy'-2a=0;$$

d'où résulte

$$a=\frac{x^2+4xy'}{4(1+x^2)},$$

valeur qui, étant substituée dans la même équation, donne

$$y-xy'-y'^2+\frac{(4xy'+x^2)^2}{16(1+x^2)}=0.$$

De même l'équation dérivée de la seconde, relativement à b, sera

$$\frac{x}{2}+\frac{2(b-y')}{x^2}+2b=0,$$

d'où l'on tire

$$b=\frac{4y'-x^3}{4(1+x^2)};$$

et la substitution de cette valeur donnera

$$y-\frac{xy'}{2}-\frac{y'^2}{x^2}+\frac{(4y'-x^3)^2}{16x^2(1+x^2)}=0;$$

ces deux équations reviennent au même, car elles se réduisent l'une et l'autre à celle-ci

$$(1+x^2)y-\left(x+\frac{x^3}{2}\right)y'-y'^2+\frac{x^4}{16}=0,$$

qui est, par conséquent, l'équation primitive singulière de la proposée du second ordre.

On aura le même résultat en éliminant immédiatement a, b et b', au moyen de l'équation primitive

$$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0,$$

de sa première dérivée

$$y' - ax - b = 0$$

et de leurs deux dérivées par rapport à a,

$$\frac{x^2}{2} + 2a + (x + 2b)b' = 0, \quad x + b' = 0.$$

Ces deux-ci donnent, en éliminant b',

$$\frac{x^2}{2} + 2a - (x + 2b)x = 0.$$

En combinant celle-ci avec la seconde, on trouve

$$a = \frac{x^2 + 4xy'}{4(1 + x^2)}, \quad b = \frac{4y' - x^3}{4(1 + x^2)};$$

et, ces valeurs étant substituées dans la première, il vient

$$y(1 + x^2) + \frac{x^4}{16} - \left(\frac{x^3}{2} + x\right)y' - y'^2 = 0,$$

comme ci-dessus.

Si de l'équation primitive

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, a) = 0$$

on tire la valeur de a en fonction de

$$x, y, y', \ldots, y^{(n-1)},$$

et qu'on la désigne par

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

il est clair qu'en substituant cette fonction à la place de a, dans la

même équation, elle deviendra nécessairement identique ; par conséquent ses équations dérivées, relatives à

$$x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$$

en particulier, auront lieu aussi.

On aura donc

$$F'(x) + F'(a)\,\Phi'(x) = 0,$$
$$F'(y) + F'(a)\,\Phi'(y) = 0,$$
$$F'(y') + F'(a)\,\Phi'(y') = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

où j'ai conservé, sous le signe F', la lettre a à la place de sa valeur

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

De là on déduira

$$\Phi'(x) = -\frac{F'(x)}{F'(a)},$$
$$\Phi'(y) = -\frac{F'(y)}{F'(a)},$$
$$\Phi'(y') = -\frac{F'(y')}{F'(a)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, puisque la quantité $F'(a)$ devient nulle dans le cas de l'équation primitive singulière, il s'ensuit que, dans ce même cas, les valeurs de

$$\Phi'(x),\ \Phi'(y),\ \Phi'(y'),\ \ldots,\ \Phi'(y^{(n-1)})$$

deviendront chacune infinie.

Ce caractère fournit aussi un moyen général de trouver l'équation primitive singulière; et ce moyen est surtout utile, lorsque l'équation primitive est sous la forme

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = a,$$

laquelle paraît échapper à la règle générale établie ci-dessus, car on aurait ici

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = \Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - a$$

et, de là,

$$F'(a) = -1,$$

d'où l'on ne pourrait rien conclure relativement à l'équation primitive singulière.

Il faut néanmoins observer que, quoiqu'il soit vrai que l'équation primitive singulière rend les fonctions

$$\Phi'(x),\ \Phi'(y),\ \Phi'(y'),\ \ldots$$

infinies, on n'en doit pas conclure que toute équation qui rendra ces quantités infinies sera une équation primitive singulière; il faudra, de plus, que cette équation ne rende pas la fonction

$$\Phi(x, y, y', \ldots)$$

égale à une constante, car on n'aurait alors qu'un cas particulier de l'équation primitive générale.

Par exemple, si

$$\Phi(x, y) = (y - x)^m,$$

on aura

$$\Phi'(x) = -m(y-x)^{m-1},\quad \Phi'(y) = m(y-x)^{m-1};$$

l'une et l'autre de ces quantités deviennent infinies, en faisant $y - x = 0$, pourvu que $m < 1$.

Mais cette équation

$$y - x = 0$$

rend la valeur de $\Phi(x, y)$ égale à zéro ou à l'infini, suivant que m est positif ou négatif; donc elle ne peut pas être une équation primitive singulière.

Prenons l'équation du premier exemple

$$x^2 - 2ay + a^2 - b = 0;$$

elle donne

$$a = -y + \sqrt{x^2 + y^2 - b},$$

donc

$$\Phi(x, y) = -y + \sqrt{x^2 + y^2 - b},$$

et, de là,

$$\Phi'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - b}},$$

$$\Phi'(y) = -1 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - b}},$$

où l'on voit que ces deux fonctions deviennent infinies par l'équation primitive singulière

$$x^2 + y^2 - b = 0.$$

Nous avons trouvé plus haut cette équation du premier ordre

$$y(1 + x^2) + \frac{x^4}{16} - \left(\frac{x^3}{2} + x\right)y' - y'^2 = 0,$$

pour l'équation primitive singulière de l'équation du second ordre

$$y' - xy' + \frac{x^2}{2}y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0;$$

en dégageant la fonction y', on a

$$y' + \frac{2x + x^3}{4} - \frac{\sqrt{1 + x^2}\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}}{4} = 0;$$

et, divisant par $\frac{1}{8}\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}$, on obtient

$$\frac{8y' + 4x + 2x^3}{\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}} = 2\sqrt{1 + x^2},$$

équation dont les deux membres sont des fonctions dérivées exactes.

En prenant leurs fonctions primitives, et ajoutant la constante arbitraire k, on aura l'équation primitive

$$\sqrt{16y + 4x^2 + x^4} = x\sqrt{1 + x^2} + l\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right) + k,$$

comme il est facile de s'en assurer en prenant les fonctions dérivées de ses deux membres.

Cette équation est, comme l'on voit, bien différente de l'équation primitive complète

$$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0;$$

mais elle satisfait également à l'équation proposée du second ordre, parce qu'elle satisfait, en général, à l'équation du premier ordre, qui satisfait à celle du second ordre, comme primitive singulière.

Mais cette équation du premier ordre peut avoir elle-même une primitive singulière qu'il est bon de chercher.

Comme la constante k est débarrassée des variables x et y, on a immédiatement

$$k = \sqrt{16y + 4x^2 + x^4} - x\sqrt{1+x^2} - l(\sqrt{1+x^2} + x),$$

de sorte que, en désignant cette fonction par $\Phi(x, y)$, et prenant les fonctions dérivées relatives à x ou y, on aura sur-le-champ

$$\Phi'(y) = \frac{8}{\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}};$$

donc, supposant cette quantité infinie, on aura l'équation

$$16y + 4x^2 + x^4 = 0$$

pour l'équation primitive singulière de l'équation du premier ordre, qui est déjà elle-même une primitive singulière de la proposée du second ordre.

Elle satisfait, en effet, comme on peut s'en assurer, à l'équation du premier ordre; mais elle ne satisfait plus à celle du second ordre.

On aurait pu aussi déduire immédiatement cette même équation singulière de l'équation primitive entre x et y

$$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0,$$

en déterminant a et b par ses deux équations dérivées relatives à a et b.

On aura ainsi

$$\frac{1}{2}x^2 + 2a = 0, \quad x + 2b = 0,$$

d'où l'on tire

$$a = -\frac{x^2}{4}, \quad b = -\frac{x}{2};$$

substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendrait

$$y + \frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{4} = 0.$$

Il n'est pas difficile, en effet, de démontrer, par la théorie générale des équations primitives singulières, que ces sortes d'équations primitives singulières doubles résultent de l'équation primitive

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

en éliminant les deux constantes a et b par les deux équations particulières

$$F'(a) = 0, \quad \text{et} \quad F'(b) = 0.$$

Et par là il est aisé de voir la raison pourquoi elles ne satisfont pas, en général, à l'équation du second ordre, dont

$$F(x, y, a, b) = 0$$

est l'équation primitive complète avec les deux constantes arbitraires a et b.

Car soit

$$f(x, y, y', y'') = 0$$

cette équation du second ordre; elle résulte, comme nous l'avons vu, de l'élimination de a et b regardées comme constantes, au moyen des trois équations

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad F'(x, y) = 0, \quad F''(x, y) = 0.$$

Mais, lorsqu'on regarde a et b comme des fonctions de x et y, l'équation dérivée de

$$F(x, y, a, b) = 0$$

n'est plus simplement

$$F'(x, y) = 0,$$

mais elle devient

$$F'(x, y) + a' F'(a) + b' F'(b) = 0,$$

laquelle se réduit cependant à

$$F'(x, y) = 0,$$

en déterminant a et b par les deux conditions

$$F'(a) = 0, \quad \text{et} \quad F'(b) = 0,$$

qui sont celles de l'équation primitive singulière double.

Comme la fonction dérivée $F'(x, y)$, étant développée, renferme les variables x, y, y' et les deux constantes a et b, désignons-la par $\varphi(x, y, y', a, b)$; il est clair que la troisième équation

$$F''(x, y) = 0,$$

où a et b sont regardées comme constantes, sera représentée par

$$\varphi'(x, y, y') = 0;$$

mais, dans le cas où ces quantités sont variables, elle deviendra

$$\varphi'(x, y, y') + a' \varphi'(a) + b' \varphi'(b) = 0,$$

qui ne se réduit plus à

$$\varphi'(x, y, y') = 0,$$

parce que les deux fonctions $\varphi'(a)$ et $\varphi'(b)$ ne sont pas nulles.

Ainsi il est impossible que l'équation

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

dans laquelle a et b sont des fonctions de x et y, déterminées par les conditions

$$F'(a) = 0, \quad F'(b) = 0,$$

satisfasse généralement à l'équation du second ordre qui résulte de la même équation par l'élimination des quantités a et b, au moyen de ses deux dérivées, première et seconde, prises en regardant a et b comme constantes.

On peut étendre cette théorie aux équations primitives des équations des ordres supérieurs.

Ainsi, si l'on a l'équation primitive

$$F(x, y, a, b, c) = 0,$$

où a, b, c sont trois constantes arbitraires, et qu'on détermine ces trois quantités par les trois conditions

$$F'(a) = 0, \quad F'(b) = 0, \quad F'(c) = 0,$$

on aura une équation primitive singulière triple, qui sera, par conséquent, la primitive singulière d'une équation du premier ordre, qui sera elle-même la primitive singulière d'une autre du second ordre, laquelle sera enfin la primitive singulière de l'équation du troisième ordre, dont la même équation

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

sera la primitive ordinaire complète avec les trois constantes arbitraires a, b, c; mais cette équation primitive singulière triple ne satisfera ni à l'équation du troisième ordre, ni même à sa primitive singulière du second ordre.

Nous avons démontré plus haut que les fonctions $\Phi'(x)$, $\Phi'(y)$, $\Phi'(y')$, ..., $\Phi'(y^{(n-1)})$ ont des valeurs infinies dans le cas de l'équation primitive singulière de la dérivée, dont

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = a$$

est la primitive ordinaire, avec la constante arbitraire a.

On peut conclure de là, tout de suite, que tout multiplicateur qui rendra une équation de l'ordre quelconque n, telle que

$$y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

une dérivée exacte d'une équation de l'ordre inférieur $n - 1$, deviendra nécessairement infini en vertu de l'équation primitive singulière de la même équation.

Car soit M ce multiplicateur : on aura donc, par l'hypothèse,

$$M[y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})] = \Phi'(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)});$$

et l'équation primitive sera

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = a.$$

Or,

$$\Phi'(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = y^{(n)}\,\Phi'(y^{(n-1)}) + \Phi'(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}).$$

Donc

$$M = \Phi'(y^{(n-1)});$$

par conséquent la quantité M deviendra infinie par la substitution de la valeur de $y^{(n-1)}$ donnée par l'équation primitive singulière.

Cette conclusion suit aussi directement de la forme même des multiplicateurs, que nous avons donnée dans la Leçon XIII. En effet, si l'équation est du premier ordre, comme

$$y' + f(x, y) = 0,$$

elle n'aura qu'une équation primitive, telle que

$$F(x, y, a) = 0;$$

et tous les multiplicateurs de cette équation sont nécessairement renfermés dans la formule $\frac{\Phi(a)\,F'(y)}{F'(a)}$, $\Phi(a)$ étant une fonction quelconque de a, en supposant qu'on substitue pour a sa valeur tirée de la même équation

$$F(x, y, a) = 0;$$

donc, puisque l'équation primitive singulière rend la fonction $F'(a)$ nulle, tous les multiplicateurs deviendront aussi infinis.

Si l'équation dérivée est du second ordre, comme

$$y'' + f(x, y, y') = 0,$$

elle peut avoir deux équations primitives différentes, chacune du premier ordre, telles que

$$F(x, y, y', a) = 0 \quad \text{et} \quad \overline{F}(x, y, y', b) = 0;$$

et la formule générale des multiplicateurs sera

$$\frac{\Phi'(a)\,F'(y')}{F'(a)} + \frac{\Phi'(b)\,\overline{F}'(y')}{\overline{F}'(b)},$$

$\Phi(a, b)$ étant une fonction quelconque de a et b, c'est-à-dire de leurs valeurs déterminées par les équations précédentes.

Or l'équation primitive singulière rend nulle chacune des deux fonctions dérivées $F'(a)$, $\overline{F}'(b)$; donc tous les multiplicateurs deviendront infinis dans le cas de cette équation, et ainsi de suite.

Par exemple, l'équation

$$y' - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - b} - y} = 0,$$

qui est la même que celle qu'on a considérée ci-dessus, a, pour l'un de ses multiplicateurs, la quantité

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 - b} - y}{\sqrt{x^2 + y^2 - b}}.$$

En supposant ce multiplicateur infini, on a

$$x^2 + y^2 - b = 0$$

pour son équation primitive singulière; ce qui s'accorde avec ce qu'on a déjà trouvé.

On a donc ainsi un nouveau moyen de trouver les équations primitives singulières par les multiplicateurs.

Mais, quoiqu'il soit prouvé que tout multiplicateur doit devenir infini par l'équation primitive singulière, on ne peut pas dire, réciproquement, que toute équation qui rendra un multiplicateur infini sera une équation singulière. En effet, la formule générale des multiplicateurs étant pour le premier ordre $\frac{\Phi(a)\,F'(y)}{F'(a)}$, il est évident que sa valeur peut devenir infinie sans que l'on ait

$$F'(a) = 0;$$

car pour cela il suffit que l'une ou l'autre des fonctions $\Phi(a)$, $F'(y)$ reçoive une valeur infinie.

Au reste, on peut se convaincre aussi, par ce raisonnement fort simple, que l'équation primitive singulière doit rendre infini tout

multiplicateur d'une équation d'un ordre quelconque n, de la forme

$$y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0.$$

Car, M étant un multiplicateur de cette équation, on aura

$$M[y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})] = \Phi'(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)});$$

et l'équation deviendra

$$\Phi'(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

dont la primitive sera

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = a,$$

a étant une constante arbitraire.

Maintenant l'équation primitive singulière doit satisfaire à la proposée

$$y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

et ne doit pas être comprise dans sa primitive complète

$$\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = a.$$

Donc la valeur de $y^{(n-1)}$, tirée de la primitive singulière, étant substituée dans la fonction $\Phi(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, ne doit pas la rendre égale à une constante; par conséquent elle ne devra pas rendre nulle sa dérivée $\Phi'(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Donc cette valeur doit rendre nulle la quantité

$$y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

et ne doit pas rendre nulle la quantité

$$M[y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})],$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'autant qu'elle rendra la quantité M infinie.

C'est à peu près de cette manière que Laplace a démontré le premier cette proposition importante, que d'autres géomètres avaient entrevue, mais dont on n'avait pas encore donné une démonstration rigoureuse. *Voir* son *Mémoire sur les Solutions particulières*, parmi ceux de l'Académie des Sciences de 1772.

LEÇON QUINZIÈME.

COMMENT L'ÉQUATION PRIMITIVE SINGULIÈRE RÉSULTE DE L'ÉQUATION DÉRIVÉE.

Par les principes que nous venons d'établir, on peut trouver l'équation primitive singulière de toute équation dérivée dont on connaît déjà l'équation primitive de l'ordre immédiatement inférieur, ou dont on est en état de trouver cette équation à l'aide d'un multiplicateur.

Nous allons voir maintenant comment on peut déduire l'équation primitive singulière de l'équation dérivée seule.

Pour cela, il faut examiner ce que l'équation dérivée devient dans le cas de l'équation primitive singulière.

Reprenons le principe fondamental des équations primitives singulières.

Si

$$F(x, y, a) = 0$$

est l'équation primitive d'une équation du premier ordre, celle-ci sera le résultat de l'élimination de la constante a, au moyen de son équation dérivée

$$F'(x, y) = 0,$$

relative à x et y; et l'équation primitive singulière sera le résultat de l'élimination de la même quantité a, au moyen de l'équation dérivée

$$F'(a) = 0,$$

relative à a.

Supposons que l'on tire de l'équation

$$F'(x, y) = 0$$

la valeur de a en fonction de x, y, y', que je représenterai par $\varphi(x, y, y')$, et qu'on substitue cette fonction au lieu de a, dans l'équation primitive

$$F(x, y, a) = 0,$$

on aura une équation en x, y, y' qui sera la dérivée de la proposée.

Ainsi, en désignant simplement par φ la fonction $\varphi(x, y, y')$, on aura

$$F(x, y, \varphi) = 0$$

pour l'équation dérivée.

Prenons maintenant la dérivée de celle-ci, et, comme φ est une fonction des variables x, y, y', on aura cette équation

$$F'(x, y) + \varphi' F'(\varphi) = 0,$$

où l'expression $F'(x, y)$ est la même chose que le premier membre de l'équation ci-dessus

$$F'(x, y) = 0,$$

si ce n'est qu'à la place de a il y a sa valeur φ, tirée de cette même équation; d'où il suit que l'expression dont il s'agit sera identiquement nulle, puisqu'elle est censée être le résultat de la substitution de la valeur de a, qui la rend nulle.

La dérivée de l'équation du premier ordre

$$F(x, y, \varphi) = 0$$

se réduira donc simplement à celle-ci

$$\varphi' F'(\varphi) = 0,$$

laquelle se décompose, comme l'on voit, en ces deux-ci,

$$\varphi' = 0 \quad \text{et} \quad F'(\varphi) = 0.$$

La première

$$\varphi' = 0, \quad \text{savoir,} \quad \varphi'(x, y, y') = 0,$$

est une équation du second ordre qui donne la valeur de y'' en x, y et y',

Cette équation a pour équation primitive φ égal à une constante arbitraire; ainsi

$$\varphi = a \quad \text{et} \quad F(x, y, \varphi) = 0$$

sont deux équations primitives du premier ordre de la même équation du second ordre

$$\varphi' F'(\varphi) = 0;$$

donc, par la théorie exposée dans la Leçon XII, éliminant y' de ces deux équations, on aura l'équation primitive de

$$F(x, y, \varphi) = 0,$$

dans laquelle a sera la constante arbitraire; mais, comme y' n'est contenue que dans la fonction φ, le résultat de cette élimination sera le même que celui de l'élimination de φ; par conséquent ce résultat sera

$$F(x, y, a) = 0,$$

ce qui redonne la même équation primitive d'où l'on était parti.

Considérons maintenant l'autre équation

$$F'(\varphi) = 0;$$

celle-ci satisfait aussi, comme l'on voit, à la même équation du second ordre; mais, comme elle ne contient que les fonctions y et y', elle peut être regardée comme une équation primitive du premier ordre de la même équation, mais sans constante arbitraire. Ainsi, en éliminant y' par le moyen de celle-ci et de l'équation du premier ordre

$$F(x, y, \varphi) = 0,$$

on aura une nouvelle équation primitive de cette même équation, qui sera nécessairement différente de l'équation primitive

$$F(x, y, a) = 0.$$

Or, comme la quantité y' n'est contenue que dans la fonction φ, le résultat de l'élimination de y', des deux équations

$$F'(\varphi) = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y, \varphi) = 0,$$

sera le même que celui de l'élimination de φ, comme nous l'avons déjà observé plus haut; et ce résultat sera évidemment le même que celui de l'élimination de la quantité a des deux équations

$$F'(a) = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y, a) = 0.$$

Donc, par ce qu'on a démontré dans la Leçon précédente, ce résultat donnera l'équation primitive singulière de l'équation dérivée dont

$$F(x, y, a) = 0$$

est l'équation primitive ordinaire, a étant la constante arbitraire.

D'où l'on doit conclure que l'équation

$$F'(\varphi) = 0$$

donnera, par l'élimination de y', la même équation primitive singulière de la proposée du premier ordre

$$F(x, y, \varphi) = 0,$$

qu'on eût trouvée d'après son équation primitive

$$F(x, y, a) = 0,$$

suivant les principes et la méthode exposés dans la Leçon précédente.

On voit par là qu'il est toujours possible de mettre l'équation dérivée sous une forme telle que sa dérivée donne elle-même immédiatement l'équation primitive singulière, s'il y en a une; et c'est une observation qui n'avait point encore été faite jusqu'ici.

Reprenons l'équation du premier exemple de la Leçon précédente :

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0,$$

en la regardant comme une équation primitive dont a est la constante arbitraire; pour avoir l'équation dérivée qui ait la propriété dont il s'agit, il faudra y substituer pour a sa valeur $\frac{x}{y'}$ tirée de la dérivée

$$x - ay' = 0.$$

Ainsi l'équation dérivée dont il s'agit sera

$$x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2} - b = 0.$$

En prenant la dérivée de celle-ci, on a

$$x - \frac{y}{y'} - x + \frac{xyy''}{y'^2} - \frac{x}{y'^2} + \frac{x^2y''}{y'^3} = 0,$$

équation qui se réduit à

$$\left(\frac{y}{y'} + \frac{x}{y'^2}\right)\left(\frac{xy''}{y'} - 1\right) = 0,$$

comme nous l'avons déjà observé dans la Leçon XII.

En la mettant sous la forme

$$\left(\frac{1}{y'} - \frac{xy''}{y'^2}\right)\left(y + \frac{x}{y'}\right) = 0,$$

on voit qu'elle revient à

$$\varphi' F'(\varphi) = 0,$$

en supposant

$$F(x, y, a) = x^2 - 2ay - a^2 - b$$

et prenant pour φ la valeur de a, tirée de l'équation prime

$$x - ay' = 0.$$

Le facteur du premier ordre donne l'équation

$$y + \frac{x}{y'} = 0, \quad \text{d'où} \quad y' = -\frac{x}{y},$$

valeur qui, étant substituée dans l'équation du premier ordre, la réduit à

$$x^2 - b + 2y^2 - y^2 = 0, \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 - b = 0,$$

équation primitive singulière, comme nous l'avons déjà trouvée; car l'équation dérivée, que nous considérons ici, est la même que l'équation

$$y'\sqrt{x^2 + y^2 - b} - yy' - x = 0,$$

que nous avons considérée dans le premier exemple de la Leçon précédente; mais, sous cette forme, elle n'aurait pas son équation prime décomposable en deux facteurs.

Le facteur du second ordre $\frac{1}{y'} - \frac{xy''}{y'^2}$, étant fait égal à zéro, donnera

$$y'' = \frac{y'}{x}.$$

On aurait aussi facilement par ce facteur l'équation primitive; car, étant la fonction dérivée exacte de $\frac{x}{y'}$, il donnera tout de suite l'équation primitive du premier ordre

$$\frac{x}{y'} = a;$$

multipliant par $2y'$, et prenant de nouveau les fonctions primitives, il vient

$$x^2 = 2ay + c,$$

a et c étant des constantes arbitraires; mais la proposée n'étant que du premier ordre ne peut avoir qu'une constante arbitraire; il faut donc qu'il y ait une relation entre ces deux arbitraires; pour la trouver il faut substituer dans la proposée les valeurs de y et y' tirées des équations primitives que nous venons de trouver. Ces valeurs sont $\frac{x^2 - c}{2a}$ et $\frac{x}{a}$, et l'on aura

$$x^2 - b - x^2 + c - a^2 = 0, \quad \text{et de là} \quad c = a^2 + b;$$

de sorte que l'équation primitive sera

$$x^2 = 2ay + a^2 + b,$$

comme ci-dessus.

Il n'est pas même nécessaire de passer à une seconde équation primitive; car ayant trouvé $\frac{x}{y'} = a$, il n'y a qu'à substituer tout de suite la valeur de $y' = \frac{x}{a}$ dans la proposée du premier ordre, et l'on aura aussi

$$x^2 - b - 2ay - a^2 = 0.$$

Considérons les équations du second ordre. Soit

$$F(x, y, y', a) = 0$$

l'équation primitive du premier ordre d'une équation dérivée du second.

En éliminant a au moyen de l'équation

$$F'(x, y, y') = 0,$$

on aura l'équation du second ordre; et, en l'éliminant au moyen de l'équation

$$F'(a) = 0,$$

on aura l'équation primitive singulière.

Soit $\varphi(x, y, y', y'')$, ou simplement φ, la valeur de a en fonction de x, y, y', y'', tirée de l'équation

$$F'(x, y, y') = 0;$$

en substituant cette valeur dans l'équation primitive, on aura une équation dérivée de la forme

$$F(x, y, y', \varphi) = 0;$$

et, si l'on prend l'équation dérivée de celle-ci, il est visible que la partie $F'(x, y, y')$, relative à la variation de x, y, y', sera identiquement nulle, puisque la quantité φ, qui y est regardée comme constante, est supposée déterminée par l'équation même

$$F'(x, y, y') = 0.$$

Il ne restera donc que l'équation

$$\varphi' F'(\varphi) = 0,$$

qui se décompose en

$$\varphi' = 0 \quad \text{et} \quad F'(\varphi) = 0.$$

L'équation

$$\varphi' = 0$$

sera du troisième ordre, et donnera la valeur de y'''. Son équation primitive sera évidemment

$$\varphi = a,$$

en prenant a pour une constante quelconque. Éliminant y'', qui est

contenu dans φ, au moyen de l'équation dérivée

$$F(x, y, y', \varphi) = 0,$$

on aura le même résultat que par l'élimination de φ; c'est-à-dire,

$$F(x, y, y', a) = 0,$$

équation primitive.

L'autre équation

$$F'(\varphi) = 0$$

donnera aussi, par l'élimination de y'', le même résultat que par l'élimination de φ, et, par conséquent, le même résultat que par l'élimination de a, au moyen des équations

$$F'(a) = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y, y', a) = 0,$$

qui sont les mêmes en y changeant a en φ.

Donc ce résultat sera l'équation primitive singulière de l'équation du second ordre dont

$$F(x, y, y', a) = 0$$

est l'équation primitive du premier ordre.

L'équation du second ordre

$$y''^2 - \frac{2y'y''}{x} + 1 = 0,$$

que nous avons considérée dans les Leçons précédentes, a pour dérivée

$$2\left(y'' - \frac{y'}{x}\right)y''' - \frac{2y''^2}{x} + \frac{2y'y''}{x^2} = 0,$$

qu'on peut mettre sous cette forme

$$2\left(y'' - \frac{y'}{x}\right)\left(y''' - \frac{y''}{x}\right) = 0.$$

Le facteur $y'' - \frac{y'}{x}$, n'étant que du même ordre que la proposée, donnera, par l'élimination de y'', une équation primitive singulière de celle-ci; car, en faisant $y'' - \frac{y'}{x} = 0$, on a

$$y'' = \frac{y'}{x},$$

valeur qui, étant substituée dans la proposée, donne

$$-\frac{y'^2}{x^2}+1=0, \quad \text{savoir,} \quad x^2-y'^2=0,$$

comme nous l'avons trouvé dans la Leçon précédente.

L'autre facteur donnera l'équation du troisième ordre

$$y''-\frac{y'}{x}=0,$$

qui, étant divisée par x, a pour primitive du second ordre

$$\frac{y''}{x}=\frac{1}{a},$$

a étant une constante arbitraire; celle-ci donne

$$y''=\frac{x}{a};$$

substituant cette valeur dans la proposée, on a

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2y'}{a}+1=0, \quad \text{ou} \quad x^2-2ay'+a^2=0,$$

équation primitive, comme on l'a vu dans la Leçon citée.

Le même procédé s'applique aux équations d'un ordre quelconque; et l'on en peut conclure, en général, que toute équation dérivée est susceptible d'une forme telle que sa dérivée ait deux facteurs, dont l'un réponde à l'équation primitive ordinaire, et dont l'autre donne immédiatement l'équation primitive singulière, s'il y en a une; ce qui jette un nouveau jour sur la nature des équations primitives singulières : car il est évident que les deux facteurs de l'équation dérivée, étant indépendants l'un de l'autre, doivent satisfaire chacun en particulier à cette équation, et par conséquent aussi à son équation primitive proposée.

En même temps on voit que le facteur qui donne l'équation primitive singulière, et qui est du même ordre que la proposée, ne pourra pas satisfaire aux équations des ordres supérieurs, puisqu'il ne satisfait pas à celle qui résulte de l'autre facteur, et qui contient seule les fonctions dérivées d'un ordre plus élevé que la proposée.

Je considère maintenant que, comme toute équation dérivée du premier ordre, telle que

$$f(x,y,y')=0,$$

ne peut être que le résultat de l'élimination de la constante arbitraire a, au moyen de l'équation primitive

$$F(x,y,a)=0,$$

et de sa dérivée

$$F'(x,y)=0,$$

ainsi que nous l'avons vu dans la Leçon XII, et que l'équation

$$F(x,y,\varphi)=0$$

est déjà le résultat de cette élimination par ce que nous avons démontré plus haut; il suit, de la théorie connue de l'élimination, que, si les deux équations

$$f(x,y,y')=0 \quad \text{et} \quad F(x,y,\varphi)=0$$

ne sont pas identiques, elles ne peuvent différer que par un facteur qui affectera l'une des deux, et qui ne pourra être qu'une fonction de x, y et y'.

Supposons donc que M soit un pareil facteur, en sorte qu'on ait l'équation identique

$$f(x,y,y')=M.F(x,y,\varphi).$$

On aura donc, en prenant les fonctions dérivées,

$$f'(x,y,y')=M.F'(x,y,\varphi)+M'.F(x,y,\varphi);$$

mais nous avons déjà vu que la dérivée de $F(x,y,\varphi)$ se réduit à $\varphi' F'(\varphi)$; donc, substituant $\varphi' F'(\varphi)$ pour $F'(x,y,\varphi)$, et mettant à la place de $F(x,y,\varphi)$ sa valeur $\frac{f(x,y,y')}{M}$, on aura

$$f'(x,y,y')=M.F'(\varphi).\varphi'+\frac{M'}{M}.f(x,y,y');$$

c'est la forme générale de la dérivée de la fonction $f(x,y,y')$ qui est le premier membre de l'équation proposée.

On voit par là qu'étant proposée l'équation du premier ordre

$$f(x,y,y')=0,$$

on pourra satisfaire à sa dérivée

$$f'(x,y,y')=0,$$

indépendamment de la valeur de y'', par le moyen de l'équation du même ordre

$$F'(\varphi)=0,$$

combinée avec la proposée; de sorte que ces deux équations pourront être regardées également comme des équations primitives du premier ordre de la même équation dérivée

$$f'(x,y,y')=0$$

du second ordre. Par conséquent il n'y aura qu'à éliminer y' entre elles pour avoir une équation primitive de la proposée, laquelle ne sera qu'une primitive singulière, comme nous l'avons démontré ci-dessus.

Maintenant, si dans la fonction dérivée $f'(x,y,y')$ on sépare la partie affectée de y'', elle devient $y''f'(y')+f'(x,y)$, suivant la notation que nous avons adoptée. Ainsi la dérivée de l'équation proposée

$$f(x,y,y')=0$$

sera

$$y''f'(y')+f'(x,y)=0;$$

et il est visible qu'on ne peut satisfaire à cette équation indépendamment de la valeur de y'', qu'en égalant séparément à zéro les deux fonctions $f'(y')$ et $f'(x,y)$; il est facile de voir, en effet, par la comparaison de l'expression précédente de $f'(x,y,y')$ avec la forme générale trouvée ci-dessus, que les deux équations

$$F'(\varphi)=0,\quad f(x,y,y')=0$$

emportent ces deux-ci

$$f'(y')=0,\quad f'(x,y)=0,$$

et réciproquement.

On aura donc l'équation primitive singulière de la proposée

$$f(x,y,y')=0,$$

en faisant, dans sa dérivée

$$y''f'(y')+f'(x,y)=0,$$

les deux équations séparées

$$f'(y')=0,\quad f'(x,y)=0,$$

et éliminant la fonction y' au moyen de la proposée.

Si les deux résultats donnent la même équation entre x et y, ce sera l'équation primitive singulière; sinon ce sera une marque que la proposée n'admet pas d'équation primitive de cette espèce.

Lorsque les deux fonctions $f'(y')$ et $f'(x,y)$ ont un facteur commun, ce facteur égalé à zéro remplit les deux conditions, et donne l'équation primitive singulière par l'élimination de y', au moyen de la proposée : c'est le cas où celle-ci est de la forme

$$F(x,y,\varphi)=0,$$

comme nous l'avons vu au commencement de cette Leçon. Il y a, au reste, une forme plus générale que celle-ci, où la dérivée est toujours décomposable en deux facteurs dont l'un donne l'équation primitive singulière; nous en parlerons plus bas.

L'équation du premier ordre

$$y'^2(x^2-b)-2xyy'-x^2=0,$$

qui est la même que nous avons considérée au commencement de cette Leçon, mais multipliée par y'^2, a pour dérivée

$$2[y'(x^2-b)-xy]y''-2(yy'+x)=0.$$

On voit ici que les deux fonctions $y'(x^2-b)-xy$ et $yy'+x$ n'ont aucun facteur commun; cependant, si on les fait chacune séparément égale à zéro, elles donnent ces deux valeurs de y', savoir,

$\frac{xy'}{x^2-b}$ et $-\frac{x}{y'}$, qui, étant substituées dans la proposée, donnent ces deux-ci

$$\frac{x^2y'^2}{x^2-b}+x^2=0, \quad \frac{x^2(x^2-b)}{y'^2}+x^2=0,$$

lesquelles se réduisent à la même, savoir,

$$x^2(x^2+y'^2-b)=0.$$

Ainsi cette équation est la primitive singulière de la proposée, comme nous l'avions déjà trouvé.

Je remarque maintenant que l'équation du premier ordre

$$f(x,y,y')=0,$$

ayant pour dérivée

$$y''f'(y')+f'(x,y)=0,$$

donne en général

$$y''=-\frac{f'(x,y)}{f'(y')}.$$

Mais nous venons de voir que, dans le cas de l'équation primitive singulière, on a séparément

$$f'(y')=0, \quad f'(x,y)=0;$$

donc on aura, dans ce cas,

$$y''=\frac{0}{0};$$

ce qui donne cette règle générale et fort simple pour trouver l'équation primitive singulière de toute équation du premier ordre lorsqu'il y en a une.

Cherchez, en prenant les fonctions dérivées, la valeur de la fonction seconde y'', et supposez-la égale à zéro divisé par zéro, vous aurez deux équations en x, y et y', qui, étant combinées avec la proposée, donneront, par l'élimination de y', deux autres équations en x et y. Si elles ont un facteur commun, ce sera l'équation primitive singulière de la proposée.

On peut appliquer ce procédé à l'exemple que nous avons traité ci-dessus.

Soit encore l'équation du premier ordre

$$(xy'-y)(xy'-2y)+x^3=0;$$

sa dérivée sera

$$x(2xy'-3y)y''-xy'^2+yy'+3x^2=0,$$

d'où l'on tire

$$y''=\frac{xy'^2-yy'-3x^2}{x(2xy'-3y)}.$$

Faisant cette expression $=\frac{0}{0}$, on aura les deux équations

$$xy'^2-yy'-3x^2=0, \quad 2xy'-3y=0,$$

d'où il faudra éliminer y' par le moyen de la proposée. La seconde donne

$$y'=\frac{3y}{2x};$$

cette valeur, substituée d'abord dans la première, donne celle-ci

$$\frac{3y^2}{4x}-3x^2=0,$$

et, substituée dans la proposée, elle donne

$$-\frac{y^2}{4}+x^3=0;$$

ces deux équations se réduisent, comme l'on voit, l'une et l'autre à celle-ci

$$y^2-4x^3=0,$$

qui sera, par conséquent, l'équation primitive singulière de la proposée.

On peut s'en assurer, en effet, par l'équation primitive qui est

$$y-ax-\frac{x^2}{a}=0,$$

où a est la constante arbitraire. Sa dérivée relative à a sera

$$-x+\frac{x^2}{a^2}=0,$$

laquelle donne

$$a^2=x \quad \text{et} \quad a=\sqrt{x};$$

et l'équation primitive devient, par la substitution de cette valeur,

$$y-2x\sqrt{x}=0, \quad \text{ou} \quad y^2-4x^3=0;$$

la même que nous venons de trouver.

Il est facile de voir, par l'expression générale de y'', que non seulement cette expression devient $\frac{0}{0}$ en vertu de l'équation primitive singulière, mais que les expressions des fonctions suivantes y''', y^{IV}, ... deviendront aussi $\frac{0}{0}$ en les réduisant d'abord en simples fonctions de y', y'', ..., tirées de l'équation proposée, et substituant ensuite la valeur de y en x, donnée par l'équation primitive singulière.

On peut regarder cette propriété de l'équation primitive singulière comme son vrai caractère distinctif; et l'on peut se convaincre d'ailleurs que son existence dépend, en effet, de ce que les valeurs des fonctions y''', y^{IV}, ... des ordres supérieurs à la proposée demeurent indéterminées.

Car, si ces valeurs ne devenaient pas indéterminées dans le cas de l'équation primitive singulière, on pourrait, dans ce cas même, employer la formule générale donnée dans la Leçon XII

$$y=y^0+y^{0'}x+y^{0''}\frac{x^2}{2}+y^{0''}\frac{x^3}{2.3}+\ldots,$$

dans laquelle y^0, $y^{0'}$, $y^{0''}$, ... sont les valeurs qui répondent à $x=0$; et la quantité y^0, qui est la constante arbitraire, recevrait alors une valeur particulière dépendante de cette équation; de sorte que la valeur de y en x, au lieu d'être une valeur singulière, ne serait plus, contre l'hypothèse, qu'un cas particulier de la valeur générale.

Il arrive donc ici ce qui a lieu dans les formules générales, lorsqu'il

y a des cas qu'elles ne peuvent pas représenter : elles donnent alors zéro divisé par zéro; c'est, pour ainsi dire, le moyen que l'analyse emploie pour échapper aux contradictions; les racines imaginaires n'indiquent pas, à proprement parler, une contradiction, mais une impossibilité.

Cette théorie s'applique également aux équations des ordres supérieurs au premier, et fournit des conclusions semblables.

En représentant par

$$F(x,y,y',a)=0$$

l'équation primitive du premier ordre d'une équation du second ordre, nous avons vu que celle-ci peut se réduire à

$$F(x,y,y',\varphi)=0,$$

et que sa dérivée sera alors

$$\varphi'\,F(\varphi)=0.$$

Or, quelle que puisse être la forme sous laquelle une équation proposée du second ordre pourra se présenter, comme, en dernière analyse, elle doit toujours être le résultat de la même élimination qui donne l'équation

$$F(x,y,y',\varphi)=0,$$

il s'ensuit qu'elle ne pourra être que celle-ci multipliée par une fonction quelconque du même ordre ou d'un ordre inférieur.

Ainsi, si l'équation proposée est

$$f(x,y,y',y'')=0,$$

on aura nécessairement

$$f(x,y,y',y'')=M.F(x,y,y',\varphi),$$

M étant une fonction de x, y, y', y''.

De là, en prenant les fonctions dérivées, et mettant $F'(\varphi).\varphi'$ pour $F'(x,y,y',\varphi)$, on aura, comme plus haut, l'équation

$$f'(x,y,y',y'')=M.F(\varphi).\varphi'+\frac{M'}{M}.f(x,y,y',y'').$$

D'où il est aisé de conclure que l'on pourra satisfaire à la dérivée

$$f'(x,y,y',y'')=0$$

de la proposée, indépendamment de la valeur de la fonction tierce y''', au moyen des deux équations du second ordre

$$F(\varphi)=0, \quad \text{et} \quad f(x,y,y',y'')=0,$$

dont la seconde est la proposée; et qu'on aura l'équation primitive singulière de celle-ci, en éliminant y'' des mêmes équations. Or, la dérivée de la proposée étant de la forme

$$y''' f'(y'')+f'(x,y,y')=0,$$

on n'y peut satisfaire, indépendamment de la valeur de y'', que par les deux équations séparées

$$f'(y'')=0, \quad \text{et} \quad f'(x,y,y')=0.$$

Il faudra donc éliminer y'' de chacune de ces deux équations, au moyen de la proposée

$$f(x,y,y',y'')=0;$$

et, si les deux résultats donnent une même équation, ce sera l'équation primitive singulière de la proposée.

On voit, en même temps, que puisqu'on a, en général,

$$y'''=-\frac{f'(x,y,y')}{f'(y'')},$$

les deux équations dont il s'agit rendent la valeur de y''' égale à $\frac{0}{0}$: de sorte que l'on peut regarder la condition de $y'''=\frac{0}{0}$ comme celle qui détermine l'équation primitive singulière de la proposée du second ordre.

En appliquant les mêmes principes aux équations d'un ordre quelconque $n^{\text{ième}}$, on en conclura que, pour trouver son équation primitive singulière, si elle en a une, il faudra tirer de sa dérivée la valeur de la

fonction $y^{(n+1)}$ de l'ordre suivant, et la faire $=\frac{0}{0}$, en égalant séparément le numérateur et le dénominateur à zéro, et éliminer ensuite de ces deux équations la fonction $y^{(n)}$ au moyen de la proposée.

Si ces deux éliminations donnent un même résultat, ce sera l'équation cherchée.

Nous avons vu plus haut que l'équation du second ordre

$$y''^2-\frac{2y'y''}{x}+1=0$$

a pour dérivée une équation résoluble en facteurs dont l'un, qui n'est que du second ordre, donne sur-le-champ l'équation primitive singulière par l'élimination de y''. Mais, si la même équation était proposée sous la forme

$$xy''^2-2y'y''+x=0,$$

sa dérivée

$$2(xy''-y')y'''-y''^2+1=0$$

ne présenterait plus de facteur.

Or elle donne

$$y'''=\frac{y''^2-1}{2(xy''-y')}.$$

Égalant à zéro séparément le numérateur et le dénominateur, on a ces deux équations

$$y''^2-1=0 \quad \text{et} \quad xy''-y'=0.$$

La première donne $y''=\pm 1$; ce qui, étant substitué dans la proposée, donne

$$2(x\pm y')=0 \quad \text{ou} \quad y'^2-x^2=0.$$

La deuxième donne

$$y''=\frac{y'}{x},$$

dont la substitution dans la proposée donne

$$-\frac{y'^2}{x}+x=0, \quad \text{savoir,} \quad y'^2-x^2=0.$$

Ainsi cette équation est la primitive singulière de la proposée, comme nous l'avons déjà trouvé.

Considérons encore l'équation du second ordre

$$y - xy' + \frac{x^2}{2}y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0.$$

Prenons les fonctions dérivées pour avoir la valeur de y'''; on trouvera

$$y' - y' + xy'' - xy''' + \frac{x^2}{2}y''' + 2(y' - xy'')xy''' - 2y''y''' = 0,$$

c'est-à-dire,

$$\left[\frac{x^2}{2} + 2(y' - xy'')x - 2y''\right]y''' = 0,$$

d'où l'on voit que y''' deviendra $\frac{0}{0}$ en égalant à zéro le facteur par lequel il est multiplié.

On aura ainsi cette seule condition

$$\frac{x^2}{2} + 2(y' - xy'')x - 2y'' = 0,$$

d'où l'on tire

$$y'' = \frac{4xy' + x^2}{4(1 + x^2)}.$$

Cette valeur, étant substituée dans la proposée, donnera l'équation singulière

$$y - xy' + \frac{x^2}{2}\cdot\frac{4xy' + x^2}{4(1 + x^2)} - \frac{(4y' - x^3)^2 + (4xy' + x^2)^2}{16(1 + x^2)^2} = 0,$$

laquelle se réduit tout de suite à celle-ci

$$y - \frac{2x + x^3}{2(1 + x^2)}y' + \frac{x^4 - 16y'^2}{16(1 + x^2)} = 0.$$

L'équation du troisième ordre

$$\left[\frac{x^2}{2} + 2(y' - xy'')x - 2y''\right]y''' = 0,$$

que nous venons de trouver pour la dérivée de la proposée du second ordre, donne naturellement

$$y''' = 0,$$

d'où l'on tire successivement, par les fonctions primitives,

$$y'' = a, \quad y' = ax + b$$

et

$$y = \frac{a}{2}x^2 + bx + c,$$

a, b, c étant des constantes arbitraires, relativement à l'équation

$$y''' = 0;$$

mais, comme la proposée n'est que du second ordre, elle aura une constante arbitraire de moins; et, en y substituant les valeurs précédentes de y, y', y'', elle devient

$$c - b^2 - a^2 = 0;$$

ce qui donne $c = a^2 + b^2$, de manière que l'équation primitive en x et y devient

$$y = \frac{a}{2}x^2 + bx + a^2 + b^2,$$

comme on l'a vu plus haut.

Ainsi, dans ce cas, les deux facteurs de la dérivée de l'équation proposée donnent directement, l'un, l'équation primitive singulière du premier ordre; l'autre, l'équation primitive en x et y, comme nous l'avons déjà vu ci-dessus dans un autre exemple.

Nous avons vu, au commencement de cette Leçon, que l'équation dérivée d'une équation primitive

$$F(x, y, a) = 0$$

peut être représentée par

$$F(x, y, \varphi) = 0,$$

où φ est mis pour $\varphi(x, y, y')$, cette fonction étant la valeur de a, tirée

de l'équation prime

$$F'(x,y)=0;$$

et nous avons vu en même temps que l'équation primitive singulière rend la fonction $F'(\varphi)$ nulle.

Supposons, ce qui est toujours possible, que l'équation dérivée proposée soit réduite à la forme

$$y'+f(x,y)=0;$$

donc, si, dans l'équation

$$F(x,y,\varphi)=0,$$

on substitue à la place de y' sa valeur $-f(x,y)$, elle deviendra nécessairement identique; par conséquent ses deux équations dérivées, relatives l'une à x et l'autre à y, auront lieu chacune en particulier.

On aura donc ainsi, puisque la quantité y' n'est contenue que dans la fonction φ, ces deux équations, dans lesquelles $F'(x)$, $F'(y)$ et $F'(\varphi)$ dénotent, comme à l'ordinaire, les fonctions dérivées de $F(x,y,\varphi)$, prises relativement à x, y et φ,

$$F'(x)-F'(\varphi)\,\varphi'(y')f'(x)=0,$$
$$F'(y)-F'(\varphi)\,\varphi'(y')f'(y)=0,$$

d'où l'on tire

$$f'(x)=\frac{F'(x)}{F'(\varphi)\,\varphi'(y')},\quad f'(y)=\frac{F'(y)}{F'(\varphi)\,\varphi'(y')}.$$

Or l'équation primitive singulière rend

$$F'(\varphi)=0;$$

donc elle rendra infinies les deux fonctions $f'(x)$ et $f'(y)$.

Ce qui fournit un caractère fort simple pour reconnaître si une valeur qui satisfait, sans constante arbitraire, à une équation dérivée donnée, est une valeur singulière ou simplement un cas particulier de la valeur générale.

Cette propriété peut servir aussi à trouver les valeurs singulières dont une équation dérivée est susceptible; car, si l'équation qui rend

$f'(x)$ et $f'(y)$ infinies satisfait en même temps à la proposée

$$y'+f(x,y)=0,$$

elle en sera l'équation primitive singulière.

L'équation

$$y'-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-b}-y}=0,$$

qu'on a déjà considérée plus haut, donne

$$f(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-b}-y},$$

d'où l'on tire

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-b}-y}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2-b}\,(\sqrt{x^2+y^2-b}-y)^2},$$
$$f'(y)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-b}\,(\sqrt{x^2+y^2-b}-y)}.$$

Ces deux quantités deviennent infinies par la supposition de

$$\sqrt{x^2+y^2-b}-y=0,$$

ainsi que par celle de

$$\sqrt{x^2+y^2-b}=0;$$

la première donne

$$x^2-b=0,$$

valeur qui ne peut satisfaire à la proposée qu'en faisant

$$b=0;$$

la seconde donne

$$x^2+y^2-b=0,$$

équation qui satisfait à la proposée, et qui en est, par conséquent, l'équation primitive singulière, comme on l'a déjà vu plus haut.

Appliquons la même théorie aux équations du second ordre; on a vu qu'elles peuvent être représentées par

$$F'(x,y,y',\varphi)=0,$$

en supposant que

$$F(x,y,y',a)=0$$

soit l'équation primitive du premier ordre, et que φ ou $\varphi(x, y, y')$ soit la valeur de a tirée de l'équation prime

$$F'(x, y, y') = 0.$$

On a vu, en même temps, que l'équation primitive singulière est donnée alors par l'équation

$$F'(\varphi) = 0.$$

Supposons maintenant que l'équation proposée soit réduite à la forme

$$y'' + f(x, y, y') = 0.$$

Donc, si dans l'équation

$$F'(x, y, y', \varphi) = 0$$

on substitue pour y'' sa valeur $-f(x, y, y')$, on aura une équation identique dont, par conséquent, la dérivée aura lieu par rapport à chacune des variables x, y, y' en particulier.

Ainsi, comme la fonction y'' n'est contenue que dans la fonction φ, on aura ces trois équations :

$$F'(x) - F'(\varphi)\,\varphi'(y')\,f'(x) = 0,$$
$$F'(y) - F'(\varphi)\,\varphi'(y')\,f'(y) = 0,$$
$$F'(y') - F'(\varphi)\,\varphi'(y')\,f'(y') = 0;$$

d'où l'on tire

$$f'(x) = \frac{F'(x)}{F'(\varphi)\,\varphi'(y')},$$
$$f'(y) = \frac{F'(y)}{F'(\varphi)\,\varphi'(y')},$$
$$f'(y') = \frac{F'(y')}{F'(\varphi)\,\varphi'(y')}.$$

L'équation primitive singulière étant donnée par l'équation

$$F'(\varphi) = 0,$$

il s'ensuit qu'elle rendra infinies les trois fonctions dérivées $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(y')$, ...

En général, on pourra prouver de la même manière que, si l'on a une équation de l'ordre $n^{\text{ième}}$, réduite à la forme

$$y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

son équation primitive singulière rendra infinies les fonctions dérivées $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(y')$, ..., jusqu'à la suivante inclusivement, $f'(y^{(n-1)})$.

Pour confirmer, *a posteriori*, ce que nous venons de démontrer, considérons une équation du premier ordre, telle que

$$y' + f(x, y) = 0,$$

à laquelle satisfasse une valeur singulière de y, que nous désignerons par X, fonction de x.

On aura donc, par l'hypothèse,

$$X' + f(x, X) = 0;$$

et, pour que la valeur X ne soit pas comprise parmi les valeurs de y, données par l'équation primitive, il faudra qu'en supposant, en général,

$$y = X + z,$$

z étant une nouvelle variable, la valeur de z, tirée de l'équation primitive ordinaire, ne puisse jamais être nulle.

Substituons donc $X + z$ au lieu de y dans l'équation proposée; on aura

$$X' + z' + f(x, X + z) = 0.$$

Développons la fonction $f(x, X + z)$ suivant les puissances de z : on aura généralement, en rapportant les fonctions dérivées à la seule variable X,

$$f(x, X + z) = f(x, X) + z f'(X) + \frac{z^2}{2} f''(X) + \ldots;$$

donc, faisant cette substitution, on aura, à cause de

$$X' + f(x, X) = 0,$$

l'équation

$$z' + z f'(X) + \frac{z^2}{2} f''(X) + \ldots = 0,$$

qui sert à déterminer z en x.

Or, si la quantité z pouvait devenir nulle, elle pourrait aussi être très petite.

Supposons-la d'abord très petite, et cherchons-en la valeur par approximation.

Pour cela, on négligera d'abord, vis-à-vis du terme qui contient z, les suivants qui contiennent z^2, z^3, ..., comme étant beaucoup plus petits, et l'on aura, pour la première approximation, l'équation

$$z' + z f'(X) = 0,$$

laquelle, étant divisée par z, a pour équation primitive

$$lz + \overline{X} = k,$$

en prenant $\overline{X}$ pour la fonction primitive de $f'(X)$, prise par rapport à la variable x, dont X est une fonction donnée, et k pour une constante arbitraire; de là on tire

$$z = e^{k-\overline{X}} = e^k . e^{-\overline{X}} = a e^{-\overline{X}},$$

en faisant $a = e^k$.

Ayant ainsi la première valeur approchée de z, on la substituera dans les termes négligés, et l'on pourra trouver une seconde valeur plus approchée, et ainsi de suite.

De cette manière, la valeur de z contiendra la constante arbitraire a, et elle deviendra nulle en faisant $a = 0$; par conséquent, X ne sera pas une valeur singulière, contre l'hypothèse.

On doit conclure de là que, pour que X soit une valeur singulière non comprise dans la valeur générale, il faut que le développement de $f(x, X + z)$ contienne d'autres puissances de z que les puissances entières et positives.

Supposons donc que ce développement donne, en général,

$$f(x, X + z) = f(x, X) + P z^m + Q z^n + \ldots,$$

m, n, ... étant des nombres quelconques qui vont en augmentant, et P, Q, ..., des fonctions de x; on aura l'équation en z

$$z' + P z^m + Q z^n + \ldots = 0.$$

On aura donc aussi, pour la première approximation,

$$z' + P z^m = 0,$$

équation qui, étant divisée par z^m, a pour équation primitive

$$\frac{z^{1-m}}{1-m} + V = k,$$

en prenant V pour la fonction primitive de P, et k pour la constante arbitraire.

Or, pour que X soit une valeur singulière de y, il faut que la valeur $z = 0$, qui y répond, ne puisse pas être contenue dans cette équation, en donnant à k une valeur quelconque constante.

Il faut donc que l'exposant $1 - m$ de z soit un nombre positif; car, s'il était négatif, z^{1-m} deviendrait infini lorsque $z = 0$, et répondrait à la supposition de k infini.

S'il était nul, on aurait le cas que nous venons d'examiner, où $m = 1$, et où $z = 0$ répond aussi à k infini.

Au contraire, lorsque $1 - m$ est positif, $z = 0$ donne aussi

$$z^{1-m} = 0,$$

et l'équation devient alors

$$V = k,$$

laquelle ne peut pas subsister, parce que la valeur de k ne serait plus constante.

Donc, pour que X puisse être une valeur singulière de y, il faut que le développement de $f(x, X + z)$ contienne une puissance z^m dans laquelle $m < 1$.

En considérant la fonction $f(x, y)$, son développement, lorsqu'on y met $y + z$ à la place de y, est, en général, $f(x, y) + z f'(y) + \ldots$; donc, suivant la théorie que nous avons exposée dans la Leçon hui-

tième, pour que ce développement donne, dans le cas de $y = X$, une puissance de z moindre que la première, il faudra que, dans ce cas, la valeur de $f'(y)$, c'est-à-dire de $f'(X)$, devienne infinie.

Or l'équation proposée donne

$$y' = -f(x, y),$$

et, prenant les fonctions dérivées,

$$y'' = -f'(x) - y' f'(y) = -f'(x) + f'(y) f(x, y);$$

donc

$$f'(x) = f'(y) f(x, y) - y''.$$

Par conséquent on aura, lorsque $y = X$,

$$f'(y) = \infty \quad \text{et} \quad f'(x) = \infty,$$

comme nous l'avons trouvé par la nature même des équations dérivées.

Dans l'exemple ci-dessus, où

$$f(x, y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - b} - y},$$

la valeur singulière de y est $\sqrt{b - x^2}$; ainsi

$$X = \sqrt{b - x^2};$$

et substituant $\sqrt{b - x^2} + z$ à la place de y, la fonction dont il s'agit devient

$$\frac{-x}{\sqrt{2z\sqrt{b - x^2} + z^2} - \sqrt{b - x^2} - z},$$

laquelle, étant développée suivant les puissances de z, donne

$$\frac{x}{\sqrt{b - x^2}} + \frac{\sqrt{2z}}{(b - x^2)^{\frac{1}{4}}} - \dots,$$

où l'on voit que le second terme du développement contient la puissance $\sqrt{z}$, dont l'exposant $\frac{1}{2}$ est moindre que l'unité.

D'ailleurs, nous avons déjà vu que les valeurs de $f'(y)$ et $f'(x)$ deviennent infinies lorsque

$$y^2 + x^2 - b = 0.$$

L'analyse par laquelle nous venons de prouver que le développement de $f(x, y + z)$ doit contenir une puissance de z moindre que la première, lorsqu'on donne à y une valeur singulière, est due à Euler, qui a donné ainsi le premier critère général pour reconnaître si une valeur, qui satisfait à une équation différentielle, est ou non une valeur singulière non comprise dans l'intégrale. (*Voyez* le premier Volume de son *Calcul intégral*, Problème 72.)

Il restait à déduire de là la règle que, dans ce cas, la valeur de $f'(y)$ devient nécessairement infinie; c'est ce que Laplace a fait depuis dans le Mémoire déjà cité sur les solutions particulières des équations différentielles, imprimé dans le *Recueil de l'Académie des Sciences*, pour l'année 1772.

LEÇON SEIZIÈME.

ÉQUATIONS DÉRIVÉES QUI ONT DES ÉQUATIONS PRIMITIVES SINGULIÈRES DONNÉES. ANALYSE D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS DE TOUS LES ORDRES QUI ONT TOUJOURS NÉCESSAIREMENT DES ÉQUATIONS PRIMITIVES SINGULIÈRES.

Si les équations primitives singulières ont moins d'étendue que les équations primitives proprement dites, parce qu'elles ne renferment aucune constante arbitraire, on peut les regarder, sous un autre point de vue, comme plus générales que celles-ci, parce qu'une même équation primitive singulière peut répondre à une infinité d'équations dérivées; et c'est un problème indéterminé de trouver une équation dérivée qui ait une équation primitive singulière donnée. Comme ce problème est curieux, et qu'il peut être utile dans plusieurs occasions, nous allons en donner ici une solution, pour servir de complément à notre théorie des équations primitives singulières.

Représentons par

$$F(x, y, a, b) = 0$$

une équation primitive entre x, y et deux constantes a et b, dont l'une soit une fonction quelconque de l'autre, ou qui dépendent, en général, l'une de l'autre par l'équation

$$\Phi(a, b) = 0.$$

On aura l'équation dérivée qui en résulte, en éliminant ces deux constantes au moyen des trois équations

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad F'(x, y') = 0, \quad \Phi(a, b) = 0.$$

Donc, si l'on tire des deux premières les valeurs de a et b en fonctions de x, y, y', et qu'on désigne ces valeurs par

$$\varphi(x, y, y') \quad \text{et} \quad \psi(x, y, y'),$$

on aura l'équation dérivée en substituant ces fonctions à la place de a et b dans l'équation de condition

$$\Phi(a, b) = 0.$$

Ainsi, en mettant simplement φ et ψ pour les fonctions dont il s'agit, l'équation dérivée sera

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0.$$

Donc, réciproquement, toute équation dérivée de cette forme aura pour équation primitive

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

les deux constantes a et b étant liées par l'équation

$$\Phi(a, b) = 0;$$

et l'on aura en même temps les deux équations

$$\varphi(x, y, y') = a, \quad \psi(x, y, y') = b.$$

Donc toute valeur de y en x qui satisfera à la même équation

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0,$$

et qui ne rendra pas les fonctions φ et ψ constantes, ne pourra pas être comprise dans l'équation primitive générale, et sera par conséquent une valeur singulière.

Soit

$$y = \Sigma(x)$$

cette valeur singulière, $\Sigma(x)$ étant une fonction donnée de x; en substituant $\Sigma(x)$ et $\Sigma'(x)$ au lieu de y et y' dans les fonctions φ et ψ, elles deviendront de simples fonctions de x; et, éliminant x entre elles, on aura une équation φ et ψ, qu'on prendra pour l'équation

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0;$$

ainsi l'équation

$$y = \Sigma(x)$$

satisfera à l'équation

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0;$$

mais, ne rendant pas les fonctions φ et ψ constantes, elle ne sera pas comprise dans l'équation primitive générale, et ne sera, par conséquent, qu'une équation primitive singulière.

La solution se réduit donc à ceci : soit

$$y = \Sigma(x)$$

la valeur singulière donnée de y, en fonction de x. Ayant pris une équation quelconque

$$F(x, y, a, b) = 0$$

en x, y et deux constantes a et b, de cette équation et de son équation dérivée

$$F'(x, y) = 0$$

on tirera les valeurs de a et b en fonctions de x, y, y'; on substituera dans ces valeurs $\Sigma(x)$ et $\Sigma'(x)$ à la place de y et y', on aura deux équations qui, par l'élimination de x, en donneront une en a et b, que je représente par

$$\Phi(a, b) = 0.$$

Si maintenant on substitue dans cette équation à la place de a et b leurs premières valeurs en fonctions de x, y, y', on aura l'équation dérivée dont

$$y = \Sigma(x)$$

sera l'équation primitive singulière, et dont

$$F(x, y, a, b) = 0$$

sera l'équation primitive ordinaire, les constantes a et b étant l'une fonction de l'autre déterminée par l'équation

$$\Phi(a, b) = 0.$$

Prenons, par exemple, l'équation

$$y^2 - ax^2 - b = 0;$$

son équation dérivée sera

$$yy' - ax = 0;$$

et l'on tire de ces deux équations

$$a = \frac{yy'}{x}, \quad b = y^2 - xyy'.$$

Supposons maintenant que l'on ait l'équation primitive singulière

$$y - Ax - B = 0;$$

elle donne

$$y = Ax + B,$$

donc

$$y^2 = A^2x^2 + 2ABx + B^2,$$

et

$$yy' = A^2x + AB;$$

de sorte que, par ces substitutions, les valeurs de a et b deviendront

$$a = A^2 + \frac{AB}{x}, \quad b = ABx + B^2;$$

d'où l'on tire, en éliminant x, cette équation en a et b,

$$(a - A^2)(b - B^2) - A^2B^2 = 0;$$

savoir,

$$ab - B^2a - A^2b = 0.$$

Donc, substituant ici les premières valeurs de a et b en x, y, y', on aura l'équation du premier ordre

$$\frac{yy'}{x}(y^2 - xyy') - B^2\frac{yy'}{x} - A^2(y^2 - xyy') = 0,$$

dont celle-ci

$$y - Ax - B = 0$$

sera l'équation primitive singulière.

Son équation primitive ordinaire sera

$$y^2 - ax^2 - b = 0,$$

en supposant entre a et b l'équation ci-dessus

$$ab - B^2a - A^2b = 0;$$

de sorte que, comme cette équation donne

$$b = \frac{B^2a}{a - A^2},$$

l'équation primitive sera

$$y^2 - ax^2 - \frac{B^2a}{a - A^2} = 0,$$

a étant la constante arbitraire.

En effet, si l'on cherche l'équation primitive singulière d'après celle-ci, on aura, en prenant les fonctions dérivées par rapport à a,

$$-x^2 + \frac{B^2A^2}{(a - A^2)^2} = 0;$$

d'où l'on tire

$$a = A^2 \pm \frac{BA}{x}.$$

Substituant cette valeur dans la même équation, on aura

$$y^2 - A^2x^2 \mp 2ABx - B^2 = 0,$$

ce qui donne

$$y = \pm Ax \pm B,$$

où les signes ambigus sont à volonté.

En général, il est facile de voir qu'on aura le même résultat

$$\Phi(a, b) = 0,$$

en substituant d'abord, dans l'équation supposée

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

la valeur donnée

$$y = \Sigma(x),$$

et éliminant ensuite x par le moyen de son équation prime, relative à x.

Or, si l'équation

$$\Phi(a, b) = 0$$

donne

$$b = \psi(a),$$

et qu'on substitue cette valeur à la place de b, il s'ensuivra que l'équation

$$F[x, \Sigma(x), a, \psi(a)] = 0$$

aura lieu en même temps que son équation prime relative à x. Mais, a étant alors une fonction de x, l'équation prime relative à x et a doit avoir lieu; donc la partie relative à a aura lieu aussi en particulier; ce qui est le caractère de l'équation primitive singulière.

Ainsi, ayant pris une équation primitive quelconque en x, y, a et b, il n'y aura qu'à éliminer y au moyen de l'équation primitive singulière donnée, ensuite éliminer x par celle-ci et par son équation prime relative à x; on aura sur-le-champ une équation en a et b qui sera l'équation de condition

$$\Phi(a, b) = 0,$$

par laquelle il faudra déterminer l'une des deux constantes a ou b par l'autre. Ensuite on pourra, d'après la même équation primitive, chercher, si l'on veut, l'équation dérivée par l'élimination de la constante arbitraire.

Dans l'exemple précédent, en substituant $Ax + B$ pour y dans l'équation

$$y^2 - ax^2 - b = 0,$$

on a

$$(A^2 - a)x^2 + 2ABx + B^2 - b = 0,$$

dont l'équation prime est

$$(A^2 - a)x + AB = 0;$$

celle-ci donne

$$x = -\frac{AB}{A^2 - a},$$

et cette valeur, substituée dans la première, donne sur-le-champ l'équation de condition

$$(A^2 - a)(B^2 - b) - A^2B^2 = 0,$$

comme plus haut.

En prenant d'autres équations en x, y, a et b, et opérant de la même manière, on trouvera autant d'équations du premier ordre qu'on voudra, dont la même équation

$$y - Ax - B = 0$$

sera l'équation primitive singulière.

On voit aussi que la même équation en x, y, a et b pourra donner telle équation primitive singulière qu'on voudra, suivant la relation qu'on établira entre les constantes a et b.

Enfin on voit que, par ce problème, on peut toujours trouver la relation entre deux constantes a, b d'une équation donnée en x, y, a et b, pour que cette équation soit l'équation primitive ordinaire et complète, répondant à une équation primitive singulière donnée.

On peut appliquer la même méthode à la recherche des équations du second ordre ou des ordres supérieurs dont l'équation primitive singulière sera donnée.

Supposons que cette équation soit du premier ordre et représentée par

$$y' + f(x, y) = 0.$$

On prendra une équation quelconque en x, y, et trois constantes arbitraires a, b, c.

On tirera de cette équation et de ses équations prime et seconde les valeurs de a, b, c en fonctions de x, y, y' et y''.

On substituera dans ces fonctions les valeurs de y' et y'' en x et y, tirées de l'équation primitive donnée, c'est-à-dire $-f(x, y)$ à la place de y', et $-f'(x) + f'(y) f(x, y)$ à la place de y''; on aura a, b, c exprimées en fonctions de x et y, ce qui donnera trois équations, d'où, éliminant x et y, il résultera une équation en a, b, c, que je représenterai par

$$\Phi(a, b, c) = 0.$$

Cette équation, en y substituant les premières valeurs de a, b, c en fonctions de x, y, y', y'', sera l'équation du second ordre dont la proposée

$$y' + f(x, y) = 0$$

sera l'équation primitive singulière, et l'équation en x, y, a, b, c en sera l'équation primitive en x et y, en supposant entre les trois constantes a, b, c la relation donnée par l'équation

$$\Phi(a, b, c) = 0.$$

Si l'équation singulière donnée était du second ordre, on prendrait une équation en x et y, et quatre constantes a, b, c, d, et ainsi de suite.

Supposons que l'équation primitive singulière soit

$$y' = Ay,$$

et prenons l'équation

$$y - \frac{a}{2} x^2 - bx - c = 0,$$

d'où l'on tire les deux dérivées, prime et seconde,

$$y' - ax - b = 0, \qquad y'' - a = 0;$$

ces trois équations donnent

$$a = y'', \qquad b = y' - xy'', \qquad c = y - xy' + \frac{x^2}{2} y''.$$

Mais la proposée donne

$$y' = Ay, \qquad y'' = Ay' = A^2 y;$$

donc, substituant ces valeurs, on aura

$$a = A^2 y, \qquad b = Ay(1 - Ax), \qquad c = y\left(1 - Ax + \frac{A^2}{2} x^2\right).$$

Éliminant x et y, on trouve l'équation

$$a^2 + A^2(b^2 - 2ac) = 0,$$

dans laquelle, en substituant les premières valeurs de a, b, c, il vient l'équation du second ordre

$$y'^2 - 2A^2 yy'' + A^2 y'^2 = 0,$$

dont la proposée $y' = Ay$ sera l'équation primitive singulière, et

l'équation supposée

$$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - c = 0$$

sera l'équation primitive en x et y, en supposant l'équation

$$a^2 + A^2(b^2 - 2ac) = 0;$$

de sorte que, comme cette équation donne

$$c = \frac{a^2 + A^2 b^2}{2A^2 a},$$

on aura

$$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - \frac{a^2 + A^2 b^2}{2A^2 a} = 0,$$

a et b étant les deux constantes arbitraires.

Les équations de la forme

$$\Phi(a, b, c, \ldots) = 0,$$

que nous venons de considérer, dans lesquelles les quantités $a, b, c, \ldots$ sont les valeurs en $x, y, y', \ldots$ des constantes $a, b, c, \ldots$, tirées d'une équation primitive

$$F(x, y, a, b, c, \ldots) = 0$$

et de ses dérivées

$$F'(x, y) = 0, \qquad F''(x, y) = 0, \qquad \ldots,$$

constituent une classe remarquable d'équations dérivées qui ont toujours une équation primitive singulière, parce que la dérivée d'une équation de cette classe a nécessairement un facteur du même ordre que l'équation.

Pour le démontrer, soit d'abord

$$F(x, y, a, b) = 0$$

une équation quelconque en x, y et deux constantes a et b.

En regardant ces constantes comme arbitraires, l'équation dont il s'agit sera la primitive d'une équation du second ordre en x, y, y' et y'', qui résultera de l'élimination de a et b au moyen des deux équations dérivées

$$F'(x, y) = 0, \qquad F''(x, y) = 0;$$

et cette équation pourra toujours, comme nous l'avons vu, se mettre sous la forme

$$y'' + f(x, y, y') = 0.$$

Maintenant, si l'on commence par tirer les valeurs de a et b des deux équations

$$F(x, y, a, b) = 0 \qquad \text{et} \qquad F'(x, y) = 0,$$

et que ces valeurs soient représentées par les fonctions

$$\varphi(x, y, y') \qquad \text{et} \qquad \psi(x, y, y'),$$

il est clair que les deux équations

$$a = \varphi(x, y, y') \qquad \text{et} \qquad b = \psi(x, y, y'),$$

où a et b sont des constantes arbitraires, seront les deux équations primitives du premier ordre de l'équation précédente

$$y'' + f(x, y, y') = 0;$$

par conséquent, leurs dérivées

$$\varphi'(x, y, y') = 0 \qquad \text{et} \qquad \psi'(x, y, y') = 0$$

devront coïncider avec cette même équation, en donnant la même valeur de y'' en x, y et y'.

Or

$$\varphi'(x, y, y') = \varphi'(x, y) + y'' \varphi'(y'),$$

et

$$\psi'(x, y, y') = \psi'(x, y) + y'' \psi'(y'),$$

suivant la notation abrégée que nous avons adoptée; donc on aura

$$y'' = -\frac{\varphi'(x, y)}{\varphi'(y')} = -\frac{\psi'(x, y)}{\psi'(y')} = -f(x, y, y'),$$

expressions de y'', qui seront nécessairement identiques.

On aura donc

$$\varphi'(x, y) = \varphi'(y') f(x, y, y'),$$
$$\psi'(x, y) = \psi'(y') f(x, y, y');$$

par conséquent, si l'on substitue ces valeurs dans les expressions précédentes des fonctions dérivées $\varphi'(x, y, y')$, $\psi'(x, y, y')$, c'est-à-dire de a' et b', et, regardant maintenant a et b comme fonctions de x, y, y', on aura

$$a' = \varphi'(y')[y'' + f(x, y, y')],$$
$$b' = \psi'(y')[y'' + f(x, y, y')].$$

Cela posé, soit $\Phi(a, b) = 0$ une équation du premier ordre; sa dérivée sera

$$a'\,\Phi'(a) + b'\,\Phi'(b) = 0,$$

et, par la substitution des valeurs de a', b' qu'on vient de trouver, elle deviendra

$$[\varphi'(y)\,\Phi'(a) + \psi'(y')\,\Phi'(b)][y'' + f(x, y, y')] = 0.$$

Cette équation a, comme l'on voit, deux facteurs, l'un qui n'est que du premier ordre, comme l'équation proposée; l'autre qui contient y'', et qui donne proprement l'équation dérivée du second ordre.

Celui-ci donne l'équation

$$y'' + f(x, y, y') = 0,$$

de laquelle résultent

$$a' = 0, \qquad b' = 0,$$

par les formules trouvées plus haut, de sorte que les fonctions a et b seront constantes.

Prenant donc a et b pour des constantes arbitraires, on aura ces deux équations primitives du premier ordre

$$\varphi(x, y, y') = a, \qquad \psi(x, y, y') = b,$$

d'où, éliminant la fonction dérivée y', on aura une équation en x, y, a et b, qui sera l'équation primitive de la proposée, et qui sera évidemment la même que l'équation

$$\mathrm{F}(x, y, a, b) = 0,$$

d'où l'on avait déduit les fonctions $\varphi(x, y, y')$ et $\psi(x, y, y')$.

Mais il faudra que les constantes a et b de cette équation satisfassent à la condition

$$\Phi(a, b) = 0$$

donnée par l'équation proposée; ce qui les réduira à une seule, qui sera par conséquent la constante arbitraire de l'équation primitive de la proposée.

Le facteur du premier ordre

$$\varphi'(y')\,\Phi'(a) + \psi'(y')\,\Phi'(b)$$

donnera, de son côté, l'équation en x, y et y',

$$\varphi'(y')\,\Phi'(a) + \psi'(y')\,\Phi'(b) = 0,$$

en supposant qu'on y mette pour a et b leurs valeurs $\varphi(x, y, y')$ et $\psi(x, y, y')$; et cette équation, d'après la théorie exposée dans la Leçon précédente, donnera sur-le-champ l'équation primitive singulière de la même équation proposée, en éliminant y' par le moyen de ces deux équations.

Or il est facile de voir que, si l'on représente par

$$\Psi(x, y, y') = 0$$

la fonction donnée $\Phi(a, b)$, dans laquelle

$$a = \varphi(x, y, y')$$

et

$$b = \psi(x, y, y'),$$

le facteur dont il s'agit se réduira simplement à $\Psi'(y)$, puisque les expressions $\varphi'(y')$ et $\psi'(y')$ ne sont que les fonctions dérivées de a et b, prises par rapport à y' seule.

Ainsi on aura la primitive singulière de l'équation

$$\Psi(x, y, y') = 0,$$

dans le cas où elle est réductible à la forme

$$\Phi(a, b) = 0,$$

en éliminant y' de cette équation au moyen de sa dérivée, prise relativement à y' seule.

En appliquant les mêmes principes aux équations des ordres supérieurs, on prouvera que, si l'on a une équation du second ordre, représentée par

$$\Psi(x, y, y', y'') = 0,$$

dont le premier membre puisse être une fonction quelconque $\Phi(a, b, c)$ de trois fonctions a, b, c, déterminées par une équation quelconque

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

entre x, y, a, b, c, et par ses deux équations dérivées

$$F'(x, y) = 0, \qquad F''(x, y) = 0,$$

prises en regardant a, b, c comme constantes, l'équation proposée aura nécessairement une primitive singulière du premier ordre, qui sera le résultat de l'élimination de y'', au moyen de son équation dérivée

$$\psi'(y'') = 0,$$

relative à y''.

Et l'on aura l'équation primitive en x et y, par l'équation même

$$F(x, y, a, b, c) = 0,$$

en prenant les constantes a, b, c de manière qu'elles satisfassent à l'équation donnée

$$\Phi(a, b, c) = 0,$$

de sorte qu'il en restera deux d'arbitraires.

Et de même pour les équations des ordres supérieurs.

Prenons l'équation

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0;$$

sa dérivée sera

$$x - ay' = 0;$$

de ces deux équations on tire

$$a = \frac{x}{y'}, \qquad b = x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2}.$$

Si maintenant on prend, pour l'équation $\Phi(a, b) = 0$, celle-ci, $b =$ à une constante, on aura l'équation du premier ordre

$$x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2} - b = 0,$$

où b est une constante quelconque.

Ainsi on aura tout de suite sa primitive singulière, en éliminant y' au moyen de l'équation dérivée prise relativement à y', laquelle sera

$$\frac{2xy'}{y'^2} + \frac{2x^2}{y'^3} = 0,$$

d'où l'on tire

$$y' = -\frac{x}{y};$$

en substituant cette valeur de y', on a

$$x^2 + y^2 - b = 0,$$

comme on l'a déjà trouvé par d'autres voies.

Prenons encore l'équation

$$y - \frac{a}{2}x^2 - bx - c = 0;$$

on aura les deux dérivées

$$y' - ax - b = 0, \qquad y'' - a = 0,$$

d'où l'on tire

$$a = y'', \quad b = y' - xy'', \qquad c = y - xy' + \frac{x^2}{2}y''.$$

Soit, par exemple,

$$\Phi(a, b, c) = c - b^2 - a^2;$$

on aura l'équation du second ordre

$$y - xy' + \frac{x^2}{2}y'' - (y' - xy'')^2 - y''^2 = 0,$$

dont la primitive singulière résultera de l'élimination de y'', au moyen

de sa dérivée relative à y'', savoir,

$$\frac{x^2}{2} + 2x(y' - xy'') - 2y'' = 0;$$

ce qui revient à ce que nous avons déjà trouvé.

Lorsqu'on connait l'équation primitive

$$F(x, y, a, b, \ldots) = 0,$$

avec l'équation

$$\Phi(a, b, \ldots) = 0,$$

qui donne la relation entre les quantités a, b, c, ..., on peut trouver directement l'équation primitive singulière sans connaitre les valeurs de ces quantités en fonctions de x, y, y', ...; car, ayant réduit les quantités a, b, ... à une de moins par le moyen de l'équation de condition

$$\Phi(a, b, \ldots) = 0,$$

il n'y aura qu'à appliquer à l'équation primitive

$$F(x, y, a, b, \ldots) = 0$$

la méthode générale exposée dans la Leçon quinzième.

Mais la difficulté consiste à reconnaitre *a posteriori* si des fonctions données, dont une équation proposée est composée, dépendent d'une même équation primitive, de manière qu'elles puissent représenter les valeurs des constantes tirées de cette équation et de ses dérivées.

Pour la résoudre, j'observe que la propriété caractéristique de ces sortes de fonctions est que leurs dérivées ont entre elles des rapports exprimés par des fonctions du même ordre que les fonctions dont il s'agit. En effet, relativement aux fonctions du premier ordre, nous avons déjà vu plus haut que les fonctions $\varphi(x, y, y')$ et $\psi(x, y, y')$, qui représentent les valeurs des constantes a et b tirées de l'équation générale

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

et de sa dérivée

$$F'(x, y) = 0,$$

sont telles que leurs dérivées $\varphi'(x, y, y')$ et $\psi'(x, y, y')$, que nous avons désignées par a' et b', ont la forme suivante :

$$\varphi'(x, y, y') = \varphi'(y')[y'' + f(x, y, y')],$$
$$\psi'(x, y, y') = \psi'(y')[y'' + f(x, y, y')];$$

de sorte que l'on a simplement

$$\frac{\varphi'(x, y, y')}{\psi'(x, y, y')} = \frac{\varphi'(y')}{\psi'(y')},$$

où l'on voit que les fonctions dont il s'agit ont la propriété que la fonction seconde y'' disparait du rapport de leurs dérivées, et que ce rapport est le même que si l'on prenait ces dérivées relativement à la variable y' seule.

Soit, par exemple, l'équation à la ligne droite

$$y + ax + b = 0;$$

sa dérivée sera

$$y' + a = 0;$$

ainsi on aura

$$a = -y', \qquad b = xy' - y.$$

On aura donc, en dénotant simplement par φ et ψ ces expressions de a et b,

$$\varphi = -y', \qquad \psi = xy' - y;$$

prenant les fonctions dérivées, il viendra

$$\varphi' = -y'', \qquad \psi' = xy'';$$

donc

$$\frac{\varphi'}{\psi'} = -\frac{1}{x}.$$

Si l'on ne prenait φ' et ψ' que relativement à y', on aurait

$$\varphi' = -1, \qquad \psi' = x \qquad \text{et} \qquad \frac{\varphi'}{\psi'} = -\frac{1}{x};$$

comme précédemment.

Soit encore l'équation

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0,$$

qui est à un cercle dont le rayon $= b$, et dont le centre est dans l'axe des abscisses à la distance a de leur origine.

La dérivée sera

$$yy' + x - a = 0,$$

d'où l'on tire

$$a = x + yy' = \varphi;$$

de là on aura, par les substitutions,

$$b = y\sqrt{1 + y'^2} = \psi.$$

Si maintenant on prend les dérivées de φ et ψ, on aura

$$\varphi' = 1 + y'^2 + yy'', \qquad \psi' = y'\sqrt{1 + y'^2} + \frac{yy'y''}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

et de là

$$\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'} = \frac{\psi}{\varphi - x}.$$

Si l'on ne prenait les dérivées φ' et ψ' que relativement à y', on aurait

$$\varphi' = y, \qquad \psi' = \frac{yy'}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

donc

$$\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y'},$$

comme ci-dessus.

On pourrait prouver, par une analyse semblable, que les fonctions de x, y, y' et y'', qui expriment les valeurs des quantités a, b, c, tirées d'une équation

$$\mathrm{F}(x, y, a, b, c) = 0$$

et de ses deux dérivées

$$\mathrm{F}'(x, y) = 0, \qquad \mathrm{F}''(x, y) = 0,$$

dans lesquelles ces quantités sont traitées comme constantes, ont des dérivées dont les rapports sont indépendants de la fonction tierce y''.

et qui sont les mêmes que si l'on ne prenait ces dérivées que relativement à la fonction seconde y'', parce qu'en désignant ces fonctions par

$$\varphi(x, y, y', y''), \qquad \psi(x, y, y', y''), \qquad \xi(x, y, y', y''),$$

les trois équations

$$\varphi(x, y, y', y'') = a, \qquad \psi(x, y, y', y'') = b, \qquad \xi(x, y, y', y'') = c,$$

où a, b, c seraient des constantes arbitraires, seront les trois primitives d'une même équation du troisième ordre, telle que

$$y''' + f(x, y, y', y'') = 0,$$

à laquelle les dérivées de ces équations devront par conséquent satisfaire; et de même pour les fonctions du même genre des ordres supérieurs. Mais on peut s'en convaincre encore d'une manière plus directe que voici :

En dénotant simplement par φ et ψ les fonctions $\varphi(x, y, y')$, $\psi(x, y, y')$, qui expriment les valeurs des constantes a et b tirées de l'équation

$$\mathrm{F}(x, y, a, b) = 0$$

et de sa dérivée

$$\mathrm{F}'(x, y) = 0,$$

il est clair que l'équation

$$\mathrm{F}(x, y, \varphi, \psi) = 0$$

sera identique; que, par conséquent, sa dérivée

$$\mathrm{F}'(x, y) + \varphi'\,\mathrm{F}'(\varphi) + \psi'\,\mathrm{F}'(\psi) = 0$$

aura lieu d'elle-même; mais on a déjà

$$\mathrm{F}'(x, y) = 0;$$

donc on aura séparément l'équation

$$\varphi'\,\mathrm{F}'(\varphi) + \psi'\,\mathrm{F}'(\psi) = 0,$$

laquelle donne

$$\frac{\varphi'}{\psi'} = -\frac{\mathrm{F}'(\psi)}{\mathrm{F}'(\varphi)}.$$

Or, comme φ et ψ ne contiennent que x, y et y', il est visible que la valeur de $\frac{\varphi'}{\psi'}$ ne sera qu'une fonction du premier ordre.

Ainsi, dans le dernier exemple, où

$$F(x, y, a, b) = y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2,$$

si l'on change a en φ, et b en ψ, on aura

$$F(x, y, \varphi, \psi) = y^2 + x^2 - 2x\varphi + \varphi^2 - \psi^2;$$

donc

$$F'(\varphi) = 2(\varphi - x), \quad F'(\psi) = -2\psi;$$

par conséquent

$$\frac{\varphi'}{\psi'} = \frac{\psi}{\varphi - x},$$

comme nous l'avons trouvé par une autre voie.

De même, si φ, ψ, ξ sont les fonctions de x, y, y' et y'' qui expriment les valeurs des constantes a, b, c, tirées de l'équation

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

et de ses deux dérivées

$$F'(x, y) = 0, \qquad F''(x, y) = 0,$$

en substituant ces fonctions à la place de a, b, c, on aura des équations identiques, dont, par conséquent, les dérivées auront lieu aussi.

On aura donc, en premier lieu,

$$F(x, y, \varphi, \psi, \xi) = 0,$$

et, par conséquent aussi,

$$F'(x, y) + \varphi' F'(\varphi) + \psi' F'(\psi) + \xi' F'(\xi) = 0,$$

mais on a déjà

$$F'(x, y) = 0;$$

donc on aura l'équation

$$\varphi' F'(\varphi) + \psi' F'(\psi) + \xi' F'(\xi) = 0.$$

Ensuite, comme l'équation

$$F'(x, y) = 0$$

contient, outre les quantités x, y, y', les trois fonctions φ, ψ, ξ, si on la dénote par $f(x, y, y', \varphi, \psi, \xi)$, on aura l'équation identique

$$f(x, y, y', \varphi, \psi, \xi) = 0,$$

et, par conséquent, la dérivée

$$f'(x, y, y') + \varphi' f'(\varphi) + \psi' f'(\psi) + \xi' f'(\xi) = 0;$$

mais on a déjà

$$f'(x, y, y') = 0,$$

puisqu'il est visible que $f'(x, y, y')$ est la même chose que $F''(x, y)$; donc on aura aussi l'équation

$$\varphi' f'(\varphi) + \psi' f'(\psi) + \xi' f'(\xi) = 0.$$

Si l'on combine cette équation avec la précédente, il est clair que, puisque les quantités φ', ψ', ξ' n'y sont qu'à la première dimension, et en multipliant tous les termes, il est clair, dis-je, qu'on en tirera les valeurs de $\frac{\varphi'}{\psi'}$ et de $\frac{\varphi'}{\xi}$ en fonctions des quantités x, y, y', φ, ψ et ξ; de sorte que ces fonctions ne passeront pas le second ordre, et ainsi de suite.

Si les fonctions φ et ψ exprimaient les valeurs des constantes a et b tirées de l'équation du premier ordre

$$F(x, y, y', a, b) = 0$$

et de sa dérivée

$$F'(x, y, y') = 0,$$

ces fonctions seraient alors du second ordre; et l'on trouverait, par le même raisonnement, que le rapport $\frac{\varphi'}{\psi'}$ de leurs dérivées serait exprimé également par $-\frac{F'(\psi)}{F'(\varphi)}$, de sorte que ce rapport serait une fonction du second ordre, et, par conséquent, du même ordre que les fonctions φ et ψ.

En général, il résulte de l'analyse précédente que, si φ, ψ, ξ, ... sont des fonctions d'un ordre quelconque, qui expriment les valeurs des constantes a, b, c, ..., tirées d'une équation en x, y, y', y'', ..., a, b, c, ..., et de ses dérivées successives, les dérivées de ces fonctions auront toujours entre elles des rapports du même ordre que les fonctions elles-mêmes.

Je dis maintenant que, si des fonctions quelconques de x, y, y', y'', ... sont telles que leurs dérivées aient entre elles des rapports du même ordre que les fonctions elles-mêmes, c'est-à-dire, dans lesquels il n'entre que des fonctions dérivées de y du même ordre, ces fonctions pourront toujours exprimer les valeurs d'autant de constantes tirées d'une équation primitive et de ses dérivées successives; et il sera alors facile de retrouver cette équation primitive génératrice.

Car, si l'on désigne par φ, ψ, ξ, ... les fonctions dont il s'agit, et que M, N, ..., soient les valeurs des rapports des dérivées ψ', ξ', ... à la dérivée φ', ces valeurs étant, par l'hypothèse, des fonctions du même ordre que les fonctions données φ, ψ, ξ, ..., on aura donc les équations

$$\psi' = M\varphi', \qquad \xi' = N\varphi', \qquad \ldots.$$

Supposons

$$\varphi' = 0,$$

on aura donc aussi

$$\psi' = 0, \qquad \xi' = 0, \qquad \ldots;$$

donc

$$\varphi = a, \qquad \psi = b, \qquad \xi = c, \qquad \ldots,$$

a, b, c, ... étant des constantes.

Ces différentes équations seront donc autant d'équations primitives de la même équation

$$\varphi' = 0,$$

puisqu'elles ont lieu en même temps qu'elle; par conséquent, en éliminant de ces mêmes équations

$$\varphi = a, \qquad \psi = b, \qquad \xi = c, \qquad \ldots.$$

les plus hautes fonctions dérivées de la variable y, on aura une équation primitive d'un ordre inférieur, qui contiendra les constantes a, b, c, ..., et qui sera l'équation primitive génératrice de la forme

$$F(x, y, y', y'', \ldots, a, b, c, \ldots) = 0,$$

d'où résultent les fonctions φ, ψ, ξ, ..., en les prenant pour les valeurs des constantes a, b, c, ..., tirées de cette équation et de ses dérivées successives

$$F'(x, y, y', y'', \ldots) = 0, \qquad F''(x, y, y', y'', \ldots) = 0, \qquad \ldots.$$

Ainsi, si l'on avait entre ces fonctions une équation quelconque

$$\Phi(\varphi, \psi, \xi, \ldots) = 0,$$

et que l'on reconnût que leurs dérivées φ', ψ', ξ', ... ont entre elles des rapports du même ordre que ces fonctions, on aurait tout de suite les équations primitives

$$\varphi = a, \qquad \psi = b, \qquad \xi = c, \qquad \ldots,$$

et de là l'équation primitive principale

$$F(x, y, y', y'', \ldots, a, b, c, \ldots) = 0,$$

dans laquelle les constantes a, b, c, ... seraient arbitraires, hors une, qui devrait être déterminée par l'équation donnée, laquelle se réduit alors à

$$\Phi(a, b, c, \ldots) = 0.$$

On aurait ensuite l'équation primitive singulière par les méthodes exposées plus haut.

Par exemple, si l'on proposait l'équation du premier ordre

$$\Phi(x + yy', y\sqrt{1 + y'^2}) = 0,$$

sans qu'on sût que les deux quantités qui sont sous la fonction peuvent exprimer les constantes tirées d'une équation primitive et de sa dérivée, on examinerait d'abord leurs dérivées, qui sont

$$1 + y'^2 + yy'' \quad \text{et} \quad y'\sqrt{1 + y'^2} + \frac{yy'y''}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

comme celle-ci se réduit à $\frac{y'+y'^3+yy'y''}{\sqrt{1+y'^2}}$, on voit d'abord que son rapport à la première sera exprimé simplement par $\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, sans que la fonction seconde y'' puisse y entrer. On est donc assuré par là que les deux fonctions $x+yy'$ et $y\sqrt{1+y'^2}$ peuvent provenir d'une équation primitive qu'on trouvera en faisant les deux équations

$$x+yy'=a, \qquad y\sqrt{1+y'^2}=b,$$

et éliminant y', ce qui donne celle-ci

$$y^2+(a-x)^2=b^2,$$

laquelle coïncide avec celle d'où nous avions déduit les expressions de a et b dans le dernier exemple.

Maintenant l'équation proposée deviendra simplement

$$\Phi(a,b)=0,$$

par laquelle on déterminera b en a; de sorte que l'équation précédente ne contiendra plus que la constante arbitraire a, et sera alors la primitive complète de la proposée.

On pourra tirer de là la primitive singulière, en éliminant a au moyen de la dérivée prise par rapport à a seul, suivant la méthode de la Leçon quinzième, ou bien il n'y aura qu'à éliminer y' de la proposée, au moyen de sa dérivée prise par rapport à y' seule, comme nous l'avons vu plus haut relativement aux équations de ce genre.

LEÇON DIX-SEPTIÈME.

SUR DIFFÉRENTS PROBLÈMES RELATIFS A LA THÉORIE DES ÉQUATIONS PRIMITIVES SINGULIÈRES.

Presque dès la naissance du Calcul différentiel, il s'est présenté aux géomètres des problèmes qui dépendent de cette théorie, et qu'ils ont résolus par des artifices particuliers.

Leibnitz, dans un Mémoire intitulé *Nova Calculi differentialis applicatio*, et inséré dans les *Actes* de Leipzig de 1694 (*voyez* le n° LXI des Œuvres de Jacques Bernoulli), donne la manière de trouver la courbe formée par l'intersection continuelle d'une infinité de courbes renfermées dans une même équation, en faisant varier dans cette équation le paramètre qui les différencie, ce qui produit une nouvelle équation par laquelle on a une valeur du paramètre en fonction des coordonnées, et cette valeur, étant substituée dans l'équation proposée, donne tout de suite une équation finie pour la courbe cherchée.

Il applique ensuite cette méthode à une question qu'on regardait alors comme très difficile, et qui consiste à trouver la courbe dont les normales ou perpendiculaires ont une relation donnée avec les parties de l'axe interceptées entre l'origine des abscisses et les normales.

Leibnitz considère cette courbe comme formée par l'intersection continuelle d'une infinité de cercles qui ont leurs centres sur l'axe; alors les rayons des cercles deviennent les normales à la courbe, et la relation donnée par le problème, entre les normales et les parties correspondantes de l'axe, a lieu entre les rayons et les abscisses qui répondent aux centres des cercles.

Nommant x, y les coordonnées du cercle, a l'abscisse qui répond au centre, et b le rayon, on aura

$$y^2+(a-x)^2=b^2,$$

savoir,

$$y^2+x^2-2ax+a^2-b^2=0,$$

pour l'équation du cercle.

Maintenant l'équation proposée entre b et a donnera b en fonction de a; il ne restera ainsi que le paramètre a, qu'on déterminera comme on vient de le dire, et l'équation en x et y deviendra alors celle de la courbe formée par l'intersection de tous les cercles, et aura, par conséquent, la propriété demandée.

Supposant, avec Leibnitz, que l'équation entre a et b soit celle de la parabole

$$b^2=ak,$$

k étant une constante, l'équation en x, y et a sera

$$y^2+x^2-2ax+a^2-ak=0.$$

Faisant varier a seul, suivant la notation du Calcul différentiel, on a

$$(-2x+2a-k)\,da=0,$$

d'où l'on tire

$$a=\frac{k+2x}{2};$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, on a

$$y^2-kx-\frac{k^2}{4}=0$$

pour la courbe cherchée, qu'on voit être aussi une parabole.

On peut s'assurer *a posteriori* que cette courbe résout le problème.

En effet, on sait que, y étant l'ordonnée qu'on regarde comme fonction de l'abscisse x, la fonction prime y' exprime le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente, lequel est le même que celui de la sous-normale à l'ordonnée; de sorte que yy' est l'expression de la sous-normale;

par conséquent $y\sqrt{1+y'^2}$ sera celle de la normale, et $x+yy'$ celle de la partie de l'axe comprise entre l'origine et la normale. [*Voyez* la seconde Partie de la *Théorie des fonctions analytiques* (¹).]

Or l'équation qu'on vient de trouver donne

$$y^2=kx+\frac{k^2}{4},$$

et, prenant la dérivée,

$$2yy'=k;$$

donc la normale sera

$$\sqrt{kx+\frac{k^2}{2}},$$

et la partie de l'axe sera

$$x+\frac{k}{2},$$

laquelle, étant multipliée par k, devient, comme l'on voit, égale au carré de la normale.

Le problème est donc résolu de cette manière; cependant on doit être surpris que Leibnitz n'ait pas remarqué que sa solution n'admet point de constante arbitraire dans l'équation de la courbe, tandis qu'il est évident que le problème conduit naturellement à une équation différentielle, dont l'intégrale ne peut être complète que par l'introduction d'une constante arbitraire.

En effet, nommant a la partie de l'axe qui répond à la normale, et b la normale, on a, comme on vient de le voir, les expressions

$$a=x+yy', \qquad b=y\sqrt{1+y'^2};$$

donc, si l'on veut que $b=\mathrm{F}(a)$, on aura l'équation dérivée

$$y\sqrt{1+y'^2}=\mathrm{F}(x+yy'),$$

dont il faudra chercher l'équation primitive.

Suivant la notation du Calcul différentiel, on aurait à intégrer à

(¹) *OEuvres de Lagrange*, t. IX.

l'équation différentielle

$$y\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}}=\mathrm{F}\left(x+y\frac{dy}{dx}\right).$$

Dans l'exemple proposé, on a

$$b=ak,$$

par conséquent

$$\mathrm{F}(a)=\sqrt{ak},$$

et l'équation dérivée devient

$$y\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{x+yy'}.k.$$

Si l'on tire de cette équation la valeur de yy', on a

$$yy'=\frac{k}{2}+\sqrt{\frac{k^2}{4}+kx-y^2},$$

ou bien

$$k-2yy'+2\sqrt{\frac{k^2}{4}+kx-y^2}=0.$$

Divisant toute l'équation par $2\sqrt{\frac{k^2}{4}+kx-y^2}$, on aura

$$\frac{k-2yy'}{2\sqrt{\frac{k^2}{4}+kx-y^2}}+1=0,$$

équation dont la primitive est visiblement

$$\sqrt{\frac{k^2}{4}+kx-y^2}+x=h,$$

h étant une constante arbitraire.

Cette équation devient, en faisant disparaître le radical,

$$\frac{k^2}{4}+kx-y^2=(h-x)^2,$$

équation au cercle.

Si l'on fait

$$h=a-\frac{k}{2},$$

a étant la constante arbitraire, on a celle-ci

$$y^2+x^2-2ax+a^2-ak=0.$$

Cette équation est, comme l'on voit, la même que l'équation au cercle dont Leibnitz a tiré sa solution par la variation de a; ainsi on peut dire que l'équation au cercle, dans laquelle a, abscisse qui répond au centre, est la constante arbitraire, et dont le rayon est $\sqrt{ak}$, est l'équation primitive qui résout le problème dans toute sa généralité; il est évident, en effet, que tout cercle dont le centre sera sur l'axe, et dont le rayon aura, avec la distance du centre à l'origine des abscisses, la relation qu'on suppose entre la normale et la partie de l'axe correspondante, satisfera à la question.

L'équation à la parabole, trouvée par Leibnitz, ne peut donc être qu'une équation primitive singulière; en effet, en prenant dans la même équation au cercle les fonctions dérivées relativement à la constante arbitraire a, comme on l'a enseigné au commencement de la Leçon quinzième, on a l'équation

$$-2x+2a-k=0,$$

laquelle donne

$$a=\frac{k+2x}{2},$$

valeur qui, étant substituée dans l'équation au cercle, donne

$$y^2-kx-\frac{k^2}{4}=0,$$

comme Leibnitz l'a trouvé; d'où l'on doit conclure que la solution de Leibnitz n'est donnée que par l'équation primitive singulière.

On a vu que Leibnitz avait déduit sa solution de la considération de la courbe formée par l'intersection continuelle de tous les cercles que l'on aurait en faisant varier continuellement la constante a; c'est, en

effet, une propriété générale des équations primitives singulières d'appartenir aux courbes formées par l'intersection continuelle des courbes représentées par l'équation primitive complète, en faisant varier continuellement la constante arbitraire qui différencie toutes ces courbes.

Comme cette propriété est, pour ainsi dire, la caractéristique de cette espèce d'équations primitives, il est intéressant d'en avoir une démonstration.

Pour cela, on remarquera que la courbe formée par l'intersection continuelle d'une série de courbes infiniment peu différentes l'une de l'autre n'est autre chose que la courbe qui embrasserait ou toucherait toutes ces courbes, et qui aurait, par conséquent, dans chacun de ses points, une tangente commune avec une de ces mêmes courbes.

Or, soit

$$F(x, y, a) = 0$$

l'équation générale des courbes dont il s'agit, a étant le paramètre, qui est constant dans chacune d'elles, mais qui varie de l'une à l'autre; comme la courbe qui doit les embrasser a un point commun avec chacune de ces courbes, elle aura aussi les mêmes coordonnées x et y et la même équation entre ces coordonnées, mais avec cette différence que le paramètre a sera variable dans l'équation

$$F(x, y, a) = 0,$$

tant qu'elle appartiendra à la courbe qui embrasse toutes les autres.

De plus, il faudra que la position de la tangente soit la même dans la courbe où a est constant et dans celle où a est variable.

Or on sait que cette position ne dépend que de la fonction prime y', puisque $\frac{y}{y'}$ est l'expression de la sous-tangente; donc il faudra que la valeur de y', tirée de la dérivée de l'équation

$$F(x, y, a) = 0,$$

soit la même, soit qu'on y regarde a comme constante, soit qu'on la regarde comme une variable fonction de x, ce qui ne peut avoir lieu, à moins que la partie de la fonction dérivée relative à a ne soit nulle.

Cette partie est, suivant la notation adoptée, $F'(a)$; donc on aura l'équation

$$F'(a) = 0,$$

laquelle servira à déterminer a en x et y. Or cette équation est, comme l'on voit, la même que celle qui donne l'équation primitive singulière, lorsque

$$F(x, y, a) = 0$$

est l'équation primitive ordinaire, dans laquelle a est la constante arbitraire, comme nous l'avons vu dans la Leçon citée.

Donc l'identité de l'équation primitive singulière et de l'équation de la courbe, qui embrasse toutes celles qui sont comprises dans l'équation primitive ordinaire, est démontrée et résulte des principes mêmes de la chose.

Cette considération géométrique est très importante pour la théorie des équations primitives singulières; elle sert à lier entre elles les courbes représentées par l'équation primitive ordinaire et par l'équation primitive singulière, comme le principe analytique qui sert de base à cette théorie sert à lier entre elles ces mêmes équations par la variation de la constante arbitraire.

Ainsi le problème analytique que nous avons résolu au commencement de la Leçon précédente se réduit à trouver des courbes qui, ayant un paramètre variable, puissent former, par leur intersection mutuelle, une courbe donnée.

On peut donc présenter ce problème ainsi :

Ayant deux courbes dont les équations soient données, et dont l'une contienne deux constantes arbitraires, trouver la relation nécessaire entre ces deux constantes, pour qu'en faisant varier celle qui demeure arbitraire, on ait une infinité de courbes du même genre qui, par leur intersection continuelle, forment toujours l'autre courbe donnée.

Pour le résoudre, il n'y aura qu'à chercher, par les méthodes exposées dans la Leçon précédente, la relation entre les constantes a

et b de l'équation donnée

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

pour qu'à cette équation, regardée comme une équation primitive ordinaire, réponde l'équation primitive singulière

$$y = \Sigma(x),$$

qui sera celle de la courbe qui doit être formée par l'intersection continuelle des courbes données par l'autre équation.

Le problème résolu par Leibnitz l'a été aussi par Jean Bernoulli, dans ses Leçons de Calcul intégral (tome III des *Œuvres* de Jean Bernoulli, Leçon XIV), mais par une autre voie qui l'a conduit au même résultat. En considérant deux normales infiniment proches, il observe que l'accroissement infiniment petit de la normale est à l'accroissement de la partie de l'axe qui répond à la normale comme la partie de l'axe comprise entre l'ordonnée et la normale est à la normale même, ce qui est facile à voir par la similitude des triangles.

Il a ainsi, suivant l'esprit du Calcul différentiel, en nommant, comme plus haut, a la partie de l'axe qui répond à la normale et b la normale même, l'équation

$$\frac{db}{da} = \frac{a - x}{b};$$

d'un autre côté, la considération du triangle rectangle dont b est l'hypoténuse et y et $a - x$ les deux côtés donne

$$y^2 + (a - x)^2 = b^2.$$

De ces deux équations il tire

$$x = a - b\frac{db}{da}, \qquad y = b\sqrt{1 - \frac{db^2}{da^2}}.$$

Or les conditions du problème donnent b en fonction de a; ainsi on aura x et y en fonction de a, et, chassant a, on aura l'équation de la courbe cherchée en x et y.

En supposant, comme dans l'exemple de Leibnitz,

$$b = \sqrt{ka},$$

on a

$$\frac{db}{da} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{a}};$$

donc, faisant ces substitutions dans les valeurs de x et y, on aura

$$x = a - \frac{k}{2}, \qquad y = \sqrt{ak - \frac{k^2}{4}},$$

d'où, éliminant a, il vient

$$y^2 = kx + \frac{k^2}{4}$$

pour l'équation de la courbe cherchée, qu'on voit être la même parabole que Leibnitz avait trouvée par une méthode tout à fait différente.

Telle est la solution de Jean Bernoulli, qui coïncide, comme on le voit, avec celle de Leibnitz, et sur laquelle, par conséquent, on peut faire les mêmes observations.

D'abord on peut être étonné que Bernoulli n'ait pas remarqué que ce problème appartient essentiellement à la méthode inverse des tangentes, et que, par conséquent, la solution générale dépend d'une intégration qui doit nécessairement introduire une constante arbitraire dans l'équation entre x et y, et cela peut surprendre d'autant plus qu'il avait donné auparavant, dans les mêmes Leçons, les expressions différentielles de la normale et de la sous-normale, et que le problème ne consiste qu'à établir entre ces quantités une relation donnée.

Ensuite il est clair, par ce que nous avons vu plus haut, que la solution de Bernoulli dépend d'une équation intégrale ou primitive singulière, et, pour le démontrer par sa propre analyse, il suffit de considérer qu'on aura directement l'équation en x et y en substituant la valeur de b en a, donnée par le problème, dans les deux équations

$$\frac{db}{da} = \frac{a - x}{b}, \qquad y^2 + (a - x)^2 = b^2,$$

et éliminant ensuite a.

Ainsi, en supposant

$$b = \sqrt{ka},$$

ces deux équations deviennent

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{a}} = \frac{a-x}{\sqrt{ka}}, \qquad y^2 + (a-x)^2 = ka;$$

la première donne

$$\frac{k}{2} = a - x; \qquad \text{donc} \qquad a = x + \frac{k}{2},$$

ce qui étant substitué dans la seconde, on a

$$y^2 + \frac{k^2}{4} = kx + \frac{k^2}{2}, \qquad \text{d'où} \qquad y^2 = kx + \frac{k^2}{4},$$

comme on l'a trouvé.

Or je remarque que l'équation différentielle

$$\frac{db}{da} = \frac{a-x}{b}, \qquad \text{ou} \qquad b\,db = (a-x)\,da,$$

n'est autre chose que la différentielle de l'autre équation

$$y^2 + (a-x)^2 = b^2,$$

en faisant varier seulement a et b.

Ainsi, comme b est supposé fonction de a, la solution se réduit à faire varier a seul dans l'équation

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

et à éliminer ensuite a au moyen de cette nouvelle équation, ce qui revient, comme l'on voit, au procédé de Leibnitz, puisque l'équation est la même que son équation au cercle; on voit aussi que ce procédé coïncide avec celui qui donne l'équation primitive singulière de l'équation dérivée ou différentielle, dont la même équation

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

serait l'équation primitive, a étant la constante arbitraire.

On aura donc cette équation dérivée en éliminant a de l'équation primitive par le moyen de sa dérivée

$$yy' + x - a = 0,$$

ou bien en déterminant a et b par le moyen de ces deux équations, et substituant leurs valeurs dans celle qui renferme la relation entre les quantités a et b, donnée par les conditions du problème.

Or ces équations donnent

$$a = x + yy', \qquad b = y\sqrt{1+y'^2},$$

expressions qu'on voit être les mêmes que nous avons trouvées plus haut pour la normale b et pour la partie de l'axe a qui répond à cette normale; de sorte que, si la relation entre ces deux quantités est représentée, en général, par

$$\Phi(a, b) = 0,$$

l'équation dérivée, qui répond à la primitive

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0,$$

sera

$$\Phi\left(x + yy', y\sqrt{1+y'^2}\right) = 0.$$

C'est l'équation générale du problème de Leibnitz et de Bernoulli, dont ils ont trouvé l'un et l'autre, par des méthodes différentes, l'équation primitive singulière, sans se douter de l'espèce de contradiction que leurs solutions présentaient avec les principes mêmes du Calcul différentiel.

Avant de quitter cette analyse, il est bon de montrer *a priori* pourquoi les expressions des constantes a et b, tirées de l'équation au cercle

$$y^2 + x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$$

et de sa dérivée

$$yy' + x - a = 0,$$

sont les mêmes que celles qu'on trouve pour la normale et pour la partie correspondante de l'axe, dans une courbe quelconque rapportée aux coordonnées x, y.

Si l'on conçoit un cercle qui touche une courbe dans un point, il est clair que son rayon, dans ce point, deviendra la normale à la courbe. Or l'équation dont il s'agit est, comme nous l'avons déjà vu, celle d'un cercle dont le centre est dans l'axe et répond à l'abscisse a, et dont le rayon est b; et, pour que le cercle touche une courbe donnée, il faut premièrement qu'il ait un point commun avec elle, dans lequel, par conséquent, les coordonnées x, y seront les mêmes; il faut ensuite que la valeur de y' soit aussi la même dans le cercle et dans la courbe, comme nous l'avons démontré rigoureusement dans la seconde Partie de la *Théorie des fonctions analytiques* : ainsi, pour que b devienne la normale à la courbe et que a soit la partie de l'axe qui y répond, il faudra que l'équation

$$y^2+(x-a)^2-b^2=0$$

et sa dérivée, prise en regardant a et b comme constantes,

$$yy'+x-a=0$$

aient lieu en même temps, par rapport aux coordonnées x, y de la courbe; d'où l'on tire, pour a et b, les valeurs données ci-dessus.

Les solutions de Leibnitz et de Jean Bernoulli offrent les premiers exemples des équations primitives singulières; mais Taylor est peut-être le premier qui ait trouvé directement une équation primitive singulière d'après l'équation dérivée.

Dans son Ouvrage intitulé *Methodus incrementorum*, qui a paru en 1715, Taylor étant parvenu (p. 27), pour la solution d'un problème, à cette équation différentielle (j'emploie ici, pour plus de commodité, la notation différentielle à la place de la notation fluxionnelle des Anglais, ces deux notations exprimant la même chose dans le fond),

$$1=y^2-2zy\frac{dy}{dz}+(1+z^2)\frac{dy^2}{dz^2},$$

dans laquelle y est fonction de z; il la différentie en faisant dz constant, et il obtient l'équation

$$\left[-2zy+2(1+z^2)\frac{dy}{dz}\right]\frac{d^2y}{dz}=0,$$

d'où il tire

$$d^2y=0 \quad \text{ou} \quad zy-(1+z^2)\frac{dy}{dz}=0.$$

Cette dernière équation donne

$$\frac{dy}{dz}=\frac{zy}{1+z^2},$$

ce qui réduit la proposée à

$$1=y^2-\frac{2z^2y^2}{1+z^2}+\frac{z^2y^2}{1+z^2},$$

savoir,

$$1+z^2=y^2,$$

qui est, dit-il, *singularis quædam solutio problematis*.

Considérons l'autre équation $d^2y=0$, où dz est constant; en prenant successivement ses deux primitives ou intégrales, on a

$$y=a+bz,$$

où a et b sont deux constantes arbitraires; mais la proposée n'étant que du premier ordre ne comporte qu'une seule arbitraire; il faut donc y substituer cette valeur de y pour avoir la relation qui doit avoir lieu entre a et b, et pour cela il suffit de supposer partout $z=0$, auquel cas on a

$$y=a, \qquad \frac{dy}{dz}=b,$$

et l'équation devient

$$1=y^2+\frac{dy^2}{dz^2};$$

donc

$$1=a^2+b^2$$

et, par conséquent,

$$b=\sqrt{1-a^2}.$$

Il est évident, par ce que nous avons démontré dans les dernières Leçons, que la solution que Taylor nomme *singulière* n'est autre chose qu'une équation primitive singulière de l'équation du premier ordre

$$1=y^2-2zyy'+(1+z^2)y'^2,$$

dont

$$y = a + z\sqrt{1 - a^2}$$

est l'équation primitive complète; car la dérivée de cette équation du premier ordre étant, en faisant $z' = 1$,

$$[-2zy + 2(1 + z^2)y']y'' = 0,$$

le facteur du premier ordre $-2zy + 2(1 + z^2)y'$ donnera l'équation primitive singulière, et l'autre facteur y'' donnera l'équation primitive complète, comme nous l'avons montré dans la Leçon seizième.

On peut aussi tirer la première de la seconde par les principes exposés dans la Leçon quinzième; car, l'équation primitive complète étant

$$y = a + z\sqrt{1 - a^2},$$

sa dérivée relative à a sera

$$0 = 1 - \frac{za}{\sqrt{1 - a^2}};$$

éliminant a de ces deux équations, on a

$$1 + z^2 = y^2.$$

Longtemps après, en 1734, Clairaut, en résolvant quelques problèmes sur des courbes, fut conduit à une équation différentielle, dont il obtint aussi deux intégrales différentes par le moyen de la différentiation; il était parvenu à ces deux équations

$$(x - u)\Pi(u) = y - \Phi(u) \qquad \text{et} \qquad dy = \Pi(u)\,dx,$$

$\Pi(u)$ et $\Phi(u)$ étant des fonctions données d'une variable u qu'il s'agissait d'éliminer.

L'élimination étant impossible en général, il eut l'idée heureuse de différentier la première et d'y substituer la valeur de dy, tirée de la seconde; on a ainsi cette équation

$$[\Pi(u) - (x - u)\Pi'(u) - \Phi'(u)]\,du = 0,$$

d'où l'on déduit deux valeurs de u, l'une donnée par l'équation

$$\Pi(u) - (x - u)\Pi'(u) - \Phi'(u) = 0,$$

l'autre par l'équation

$$du = 0,$$

laquelle donne, par l'intégration,

$$u = a,$$

a étant une constante arbitraire.

Ces deux valeurs de u, étant substituées dans la première équation

$$(x - u)\Pi(u) = y - \Phi(u),$$

donneront deux intégrales en x et y, l'une sans constante arbitraire, l'autre avec la constante arbitraire a, et qui sera

$$(x - a)\Pi(a) = y - \Phi(a),$$

laquelle ne représente, comme l'on voit, que des lignes droites.

Clairaut examine ensuite quelques cas particuliers du même problème, où il fait voir comment le Calcul intégral ne donne jamais que les lignes droites exprimées par l'équation générale

$$x\Pi(a) - a\Pi(a) = y - \Phi(a),$$

et comment les équations trouvées par la première méthode échappent à l'intégration.

« J'ai été bien aise », dit-il, « de montrer cette singularité de calcul, qui s'est présentée d'elle-même; on pourrait l'énoncer, indépendamment du problème présent, de cette manière :

» *Il y a des équations différentielles capables d'avoir deux solutions différentes l'une de l'autre, dont l'une (et même dans ce cas-ci la plus générale) n'a pas besoin du Calcul intégral; telles sont les équations*

$$x\,dy\,dx - dy^2 = y\,dx^2 - dy\,dx,$$

à laquelle

$$4y = x^2 + 2x + 1 \qquad \textit{et} \qquad 2ax - 2x = -4y + 1 - a^2$$

satisfont également; et

$$a\,dy^2 + x\,dy^2 - y\,dy\,dx = x\,dx\,dy - y\,dx^2,$$

qui donne pour solutions

$$\frac{x}{\sqrt{y}} - \sqrt{y} = \sqrt{4a} \qquad et \qquad b^2 y - 2bx + 2by = -4a.$$

» *En général,* $\frac{d\Phi(x,y)}{\Phi(x,y)}$ *= à une fonction quelconque de x, y, dx, dy serait de cette nature; intégrée, elle donnerait une équation; et, sans aucune intégration,*

$$\Phi(x,y,) = 0$$

serait l'autre (¹). »

En rapprochant ces différentes solutions de notre théorie, il est évident que celles qui ne renferment point de constante arbitraire ne sont que des équations primitives singulières, et que les autres, qui contiennent une constante arbitraire, sont les équations primitives complètes; mais Clairaut a tort de regarder ces dernières comme moins générales, parce qu'elles ne représentent que des lignes droites.

A l'égard de l'équation différentielle

$$\frac{d\Phi(x,y)}{\Phi(x,y)} = \mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx,$$

on ne peut pas dire, en général, avec Clairaut, que l'équation finie

$$\Phi(x,y) = 0$$

est de la même nature que les intégrales qu'il avait trouvées auparavant sans constante arbitraire; car cette intégrale peut être une équation primitive singulière ou simplement un cas particulier de l'équation primitive complète.

Car, si l'on fait, pour abréger,

$$\Phi(x,y) = z,$$

et qu'on suppose qu'ayant tiré de cette équation la valeur de y en z on la substitue dans la fonction $\mathrm{F}\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$, on aura une équation

(¹) *Voyez* les *Mémoires de l'Académie des Sciences* pour 1734, p. 213.

en x et z de la forme

$$\frac{dz}{z} = f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) dx$$

ou bien

$$z' = z\, f(x, z, z').$$

Pour que $z = 0$ soit une équation primitive singulière, il faudra que $z = 0$ donne

$$z'' = \frac{0}{0},$$

comme nous l'avons vu dans la Leçon seizième; or, en prenant la dérivée de l'équation précédente, on verra que cette condition ne peut avoir lieu que lorsque $z = 0$ donnera

$$z\, f'(z') = 1.$$

Dans les autres cas, l'équation $z = 0$ ne pourra donc être qu'un cas particulier de l'équation primitive complète.

En effet, en regardant d'abord z comme très petite et négligeant z, dans la fonction $f(x, z, z')$, on aura simplement

$$z' = z\, f(x),$$

d'où l'on tire

$$\frac{z'}{z} = f(x),$$

et, prenant les fonctions primitives,

$$lz = f_1(x) + k,$$

k étant une constante arbitraire.

Je dénote par f_1, avec un trait placé au bas de la caractéristique f, la fonction primitive dénotée par la simple caractéristique f; on pourra de même dénoter, dans l'occasion, par y_1 la fonction primitive de y; par y_{11} la fonction primitive de y_1, c'est-à-dire la fonction primitive seconde de y, et ainsi des autres. Cette notation, que j'avais déjà proposée dans l'Ouvrage sur la *Résolution des équations numériques* (¹), me

(¹) *Œuvres de Lagrange*, t. VIII.

paraît aussi propre, pour désigner les fonctions primitives, que la notation ordinaire l'est pour les fonctions dérivées.

Maintenant il est clair que, dans l'équation

$$lz = f_1(x) + k,$$

on aura

$$z = 0,$$

en faisant la constante k infinie, puisque

$$l0 = -\infty.$$

Ainsi

$$z = 0$$

sera alors un cas particulier de l'équation primitive complète.

Euler avait aussi trouvé, dans sa *Mécanique*, différents exemples de cette duplicité d'intégrales; il avait même donné des règles pour les découvrir dans quelques cas, comme on le voit dans les articles 268, 303, 335 du second Tome de la *Mécanique*; mais ce n'est que plusieurs années après qu'il s'est occupé, *ex professo*, de cette partie du Calcul intégral dans un Mémoire intitulé *Exposition de quelques paradoxes du Calcul intégral*, et imprimé dans le *Recueil de l'Académie de Berlin* pour 1756.

Dans ce Mémoire, Euler se propose différents problèmes relatifs aux tangentes, qui conduisent naturellement à des équations différentielles, et il remarque qu'ils ont chacun deux solutions, dont l'une résulte de l'intégration et admet, par conséquent, une constante arbitraire, et dont l'autre est indépendante de l'intégration et peut se trouver même par la différentiation de l'équation.

Voici un de ces problèmes :

On demande une courbe telle, que, tirant de deux points donnés des perpendiculaires sur une quelconque de ses tangentes, le produit de ces perpendiculaires soit une quantité constante.

Faisons passer l'axe des abscisses par les deux points donnés, et soient p et q les deux abscisses qui répondent à ces points et t la sous-

tangente à un point quelconque, c'est-à-dire la partie de l'axe comprise entre la tangente et l'ordonnée y; on aura $t - x$ pour la partie comprise entre la tangente et l'origine des abscisses; donc $t - x + p$ et $t - x + q$ seront les parties de l'axe comprises entre les deux points donnés et la tangente.

Ayant abaissé de ces points des perpendiculaires sur la tangente, on formera par là deux triangles rectangles semblables au triangle rectangle formé par la tangente, l'ordonnée y et la sous-tangente t; il est visible que, dans ces triangles, les lignes $t - x + p$ et $t - x + q$ répondront à la tangente même, qui est $\sqrt{y^2 + t^2}$, et que les perpendiculaires dont il s'agit répondront à l'ordonnée y, de sorte qu'on aura pour ces perpendiculaires les valeurs

$$\frac{(t - x + p)y}{\sqrt{y^2 + t^2}}, \quad \frac{(t - x + q)y}{\sqrt{y^2 + t^2}};$$

par conséquent l'équation du problème sera

$$\frac{(t - x + p)(t - x + q)y^2}{y^2 + t^2} = k,$$

k étant une constante donnée.

Or le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente étant exprimé par la fonction prime y', on a

$$\frac{y}{t} = y',$$

par conséquent

$$t = \frac{y}{y'};$$

cette valeur étant substituée dans l'équation précédente, elle se réduit à

$$\frac{(y - y'x + py')(y - y'x + qy')}{1 + y'^2} = k,$$

équation du premier ordre.

Cette équation, étant mise sous la forme différentielle et multipliée

par dx^2+dy^2, devient

$$(y\,dx-x\,dx+p\,dy)(y\,dx-x\,dy+q\,dy)-k(dx^2+dy^2)=0;$$

c'est l'équation donnée par les conditions du problème.

Euler remarque qu'il serait difficile d'intégrer cette équation directement, mais qu'on y peut parvenir facilement en la différentiant.

On a ainsi, en prenant dx pour constant,

$$(y\,dx-x\,dy+q\,dy)(p-x)\,d^2y+(y\,dx-x\,dy+p\,dy)(q-x)\,d^2y-2k\,dy\,d^2y=0,$$

équation toute divisible par d^2y.

En la divisant d'abord par d^2y, on a celle-ci :

$$(y\,dx-x\,dy+q\,dy)(p-x)+(y\,dx-x\,dy+p\,dy)(q-x)-2k\,dy=0,$$

qui n'est que du premier ordre, comme la proposée, et qui, étant combinée avec elle, donnera, par l'élimination de dy, une équation finie en x et y.

En effet, cette dernière équation étant multipliée par dy et retranchée de la première multipliée par 2, on aura celle-ci :

$$2y^2dx^2+y\,dy\,dx(p+q-2x)-2k\,dx^2=0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2(k-y^2)}{y(p+q-2x)};$$

mais la même équation donne

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(p+q-2x)}{2[k-(p-x)(q-x)]};$$

donc, comparant ces deux valeurs et multipliant en croix, on aura celle-ci :

$$y^2(p+q-2x)^2=4(k-y^2)[k-(p-x)(q-x)],$$

laquelle se réduit à

$$[(p-q)^2+4k]y^2+4k(p-x)(q-x)=4k^2,$$

ou, plus simplement encore, à

$$y^2+\frac{k}{k+\left(\frac{p-q}{2}\right)^2}\left(x-\frac{p+q}{2}\right)^2=k,$$

équation à une ellipse dont le carré du demi-petit axe est k, et le carré du demi-grand axe est $k+\left(\frac{p-q}{2}\right)^2$, de sorte que $\frac{p-q}{2}$ sera la distance du centre au foyer, et, comme le centre de l'ellipse répond à l'abscisse $\frac{p+q}{2}$, il s'ensuit que les deux foyers répondent aux abscisses p et q, et sont, par conséquent, dans les deux points donnés.

En effet, on sait, par la théorie des sections coniques, que le produit des perpendiculaires menées de chacun des foyers sur une tangente quelconque est constant et égal au carré du petit axe.

L'équation que nous venons de trouver ne renferme point de constante arbitraire, puisqu'elle provient de deux équations différentielles du premier ordre par l'élimination de $\frac{dy}{dx}$; mais on aura une autre équation, avec une constante arbitraire, par le moyen de l'autre facteur d^2y, lequel donne l'équation du second ordre

$$d^2y=0,$$

d'où l'on tire

$$dy=a\,dx,$$

a étant une constante arbitraire; cette équation étant combinée de nouveau avec la proposée, on aura celle-ci :

$$(y-ax+ap)(y-ax+aq)=k(1+a^2),$$

d'où l'on tire

$$y-ax+\frac{(p+q)a}{2}=\pm\sqrt{(1+a^2)k+a^2\left(\frac{p-q}{2}\right)^2},$$

équation à deux lignes droites.

Il est visible, en effet, que la ligne droite satisfait aussi au même problème, pourvu qu'elle soit placée de manière que le produit des

deux perpendiculaires menées des deux points donnés sur cette ligne soit égal à k.

Si, dans les expressions générales de ces perpendiculaires trouvées ci-dessus, on substitue pour t sa valeur $\frac{y}{y'}$ ou bien $y\frac{dx}{dy}$, suivant la notation du Calcul différentiel, on a

$$\frac{y\,dx - x\,dy + p\,dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \quad \text{et} \quad \frac{y\,dx - x\,dy + q\,dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Soit

$$y = ax + b,$$

en général, l'équation à la ligne droite; on aura

$$dy = a\,dx;$$

substituant ces deux valeurs, les deux perpendiculaires deviendront

$$\frac{b + ap}{\sqrt{1 + a^2}} \quad \text{et} \quad \frac{b + aq}{\sqrt{1 + a^2}},$$

et l'on aura l'équation

$$(b + ap)(b + aq) = k(1 + a^2),$$

d'où l'on tire

$$b = -a\frac{p+q}{2} \pm \sqrt{(1 + a^2)k + a^2\left(\frac{p-q}{2}\right)^2},$$

ce qui donne les mêmes lignes droites que nous venons de trouver.

Telle est l'analyse d'Euler, que j'ai rapportée en entier, et même avec un peu plus de détail, pour servir d'exemple dans une matière qui est encore peu traitée dans les Ouvrages élémentaires.

On voit que ce problème admet réellement deux solutions très différentes, puisque l'une donne des lignes droites, et l'autre donne une ellipse.

Euler n'a pas cherché à rapprocher ces deux solutions et à les faire dépendre l'une de l'autre; il s'est contenté de donner cette duplicité de solutions comme un paradoxe de Calcul intégral, par la raison que l'équation qui contient une constante arbitraire, et qu'on doit, par

conséquent, regarder comme l'intégrale complète, ne renferme cependant pas l'autre équation finie, qui satisfait également à l'équation différentielle, ce qui paraît, en effet, contraire aux principes du Calcul différentiel.

Euler regarde aussi comme un paradoxe que la différentiation puisse suppléer à l'intégration, ce qui ne doit s'entendre cependant que de l'intégrale sans constante arbitraire, qui résulte immédiatement de la différentielle de l'équation proposée, combinée avec cette même équation; car, pour l'autre intégrale qui dépend d'une intégration subséquente, elle est conforme aux principes généraux du calcul.

D'après la théorie que nous avons donnée sur les équations primitives singulières, on voit clairement que ces paradoxes d'Euler ne sont que des résultats particuliers de cette théorie.

Il est évident que l'équation à l'ellipse, qui est sans constante arbitraire, n'est que l'équation primitive singulière de l'équation du premier ordre, donnée par les conditions du problème, puisqu'elle résulte du facteur du même ordre qui multiplie la dérivée de la même équation; et que l'équation à la ligne droite, qui vient de l'autre facteur du second ordre, est donnée par l'équation primitive complète, avec une constante arbitraire, conformément à la théorie développée dans la Leçon seizième.

Si de l'équation à la ligne droite

$$y = ax + b$$

et de sa dérivée

$$y' = a$$

on tire les valeurs des constantes a et b, on a

$$a = y', \qquad b = y - xy',$$

et ces valeurs, substituées dans l'équation donnée par les conditions du problème, savoir,

$$(b + ap)(b + aq) = k(1 + a^2),$$

fournissent celle-ci :

$$(y - xy' + py')(y - xy' + qy') = k(1 + y'^2),$$

qui est, comme l'on voit, l'équation du premier ordre à laquelle le problème conduit directement. Ainsi cette équation appartient à la classe que nous avons examinée dans la Leçon précédente, dont la forme générale est

$$\Phi(a, b) = c,$$

et qui est toujours susceptible d'une équation primitive singulière, qu'on peut obtenir par l'élimination de y', au moyen de la dérivée relative à y', ce qui redonne le résultat que nous avons trouvé.

Si l'on voulait tirer l'équation primitive singulière de l'équation primitive complète, d'après la théorie de la Leçon quinzième, il n'y aurait qu'à substituer d'abord, dans l'équation de condition en a et b, la valeur de b tirée de l'équation

$$y = ax + b,$$

ce qui donnera celle-ci :

$$(y - ax + ap)(y - ax + aq) = k(1 + a^2),$$

qui est à deux lignes droites, et qu'on peut regarder comme l'équation primitive du problème, dans laquelle a est la constante arbitraire. Ainsi il n'y aura qu'à éliminer a au moyen de cette équation et de sa dérivée, et l'on aura encore le même résultat, puisque l'équation en y' a la même forme que l'équation en a, ce qui sert de plus en plus à rapprocher les différentes méthodes que nous avons données.

Nous avons démontré, à l'occasion du problème de Leibnitz, que toute équation primitive singulière représente la courbe formée par l'intersection continuelle des lignes représentées par l'équation primitive complète; ainsi on peut dire que l'ellipse qui résout le problème d'Euler est formée par l'intersection continuelle de toutes les droites représentées par l'équation

$$(y - ax + ap)(y - ax + aq) = k(1 + a^2),$$

en supposant que la constante a varie de l'une à l'autre.

Par cette considération on pourrait donc aussi résoudre le problème d'Euler, comme Leibnitz avait résolu celui dont nous avons parlé au commencement de cette Leçon, et parvenir directement à l'ellipse, qui n'est donnée par l'analyse que d'une manière indirecte.

Jusque-là on n'avait considéré les équations primitives singulières que comme des solutions particulières qui se présentaient d'elles-mêmes et sans intégration, et l'on n'avait encore aucun moyen pour reconnaître, *a priori*, si une pareille solution pouvait être comprise ou non dans la solution générale donnée par l'intégrale complète de l'équation différentielle du problème. Euler a donné le premier une règle générale pour cet objet dans le premier Volume de son *Calcul intégral*, et Laplace a montré ensuite comment on peut déduire de l'équation différentielle les solutions particulières qui échappent à l'intégrale complète, comme nous l'avons rapporté à la fin de la Leçon quinzième.

Il restait à découvrir la liaison entre ces intégrales particulières et les intégrales complètes, ainsi qu'entre les courbes données par les unes et les autres, et à rappeler toute la théorie de ces différentes intégrales aux premiers principes du Calcul différentiel; c'est ce qu'on a fait dans un Mémoire sur ce sujet, imprimé dans le *Recueil de l'Académie de Berlin* de 1774, et dans un autre Mémoire imprimé dans le même Recueil pour 1779 [1].

Comme ce point d'analyse est un des plus intéressants par ses différentes applications, j'ai cru devoir en développer toute la théorie dans ces Leçons, en y joignant des considérations nouvelles et des détails historiques qui peuvent faire plaisir aux analystes et servir à l'histoire de cette partie des Mathématiques.

[1] *Œuvres de Lagrange*, t. IV, p. 1 et p. 585.

LEÇON DIX-HUITIÈME.

DIGRESSION SUR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES, SUR LE PASSAGE DE CES DIFFÉRENCES AUX DIFFÉRENTIELLES ET SUR L'INVENTION DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

Les premiers auteurs du Calcul différentiel, Barrow et Leibnitz, ont considéré les quantités variables comme croissant par des différences infiniment petites, et ont inventé les équations différentielles pour déterminer les rapports de ces différences. Comme la supposition des quantités infiniment petites répugne à la rigueur de l'Analyse, on a considéré depuis les accroissements des quantités variables comme finis, et l'on a formé, à l'imitation du Calcul différentiel, un nouveau Calcul pour les différences finies, dans lequel les résultats sont rigoureusement exacts. Ce Calcul, dont Taylor avait donné la première idée dans son *Methodus incrementorum*, et dont on s'est beaucoup occupé dans ces derniers temps sous le nom de *Calcul aux différences finies*, sert à trouver la loi des termes consécutifs d'une série ou progression dans laquelle on connaît l'expression ou la formation du terme général, et réciproquement à trouver l'expression du terme général, d'après la loi des termes consécutifs.

Mais nous observerons que, dans ces recherches, la considération des différences n'est point nécessaire comme dans le Calcul différentiel, et que leur emploi peut même être plus incommode qu'utile, parce que la suppression des termes infiniment petits, qui produit la simplification du Calcul différentiel, n'ayant point lieu dans les différences finies, il arrive souvent que les formules en différences sont

plus compliquées que si elles contenaient immédiatement les termes successifs eux-mêmes.

D'ailleurs l'analogie qu'on a cru pouvoir établir entre le Calcul aux différences infiniment petites et le Calcul aux différences finies est plus apparente que réelle, malgré la conformité de quelques procédés et de quelques résultats; car, dans celui-ci, on considère les différents termes de la progression comme représentés par une même fonction de quantités différentes d'un terme à l'autre, et les équations aux différences finies ne sont que des équations entre ces mêmes fonctions; au lieu que les équations différentielles, ou aux différences infiniment petites, sont essentiellement entre des fonctions différentes de la même variable, mais dérivées les unes des autres par des règles fixes et uniformes.

Les équations aux différences finies ne sont autre chose qu'une suite d'équations semblables entre différentes inconnues, par lesquelles on peut toujours déterminer successivement chacune de ces inconnues.

Mais la loi uniforme qui règne entre ces équations fait qu'on peut regarder leurs inconnues comme formant une suite régulière et susceptible d'un terme général, et l'expression de ce terme donne alors la résolution générale de toutes les équations.

Ainsi le Calcul qu'on a nommé *aux différences finies* n'est proprement que le Calcul des suites, et ne peut être assimilé au Calcul différentiel, qui est essentiellement le Calcul des fonctions dérivées.

Mais on a pensé que la considération des différences finies pouvait conduire à celle des différences infiniment petites, et que le Calcul aux différences finies conserverait toute sa rigueur, en devenant Calcul différentiel, par l'omission des termes infiniment petits. Et de là est née la méthode des limites dans laquelle on regarde le rapport des différences infiniment petites comme la limite du rapport des différences finies, et les équations différentielles comme les limites des équations aux différences finies.

Je ne disconviens pas qu'on ne puisse, de cette manière, démontrer la légitimité des résultats du Calcul différentiel; mais, quoique cette

marche paraisse directe et naturelle, le passage du fini à l'infini exige toujours une espèce de saut, plus ou moins forcé, qui rompt la loi de continuité et change la forme des fonctions.

Ayant réduit, comme nous l'avons fait, le Calcul différentiel à ses véritables éléments, les fonctions dérivées, et l'ayant ainsi entièrement séparé du Calcul aux différences finies, nous avons cru devoir dire deux mots de la nature et des usages de celui-ci, qui n'est, à proprement parler, que l'analyse ordinaire appliquée à une suite de quantités qu'on suppose dépendre d'une même loi.

Soit une suite de quantités

$$y^{0}, y^{1}, y^{2}, y^{3}, y^{4}, \ldots,$$

qui répondent à ces quantités en progression arithmétique

$$0, i, 2i, 3i, 4i, \ldots.$$

Désignons, en général, un terme quelconque de la première suite par y, et le terme correspondant de la seconde suite par x; désignons de plus par $y', y'', y''', \ldots$ les termes qui, dans la première suite, suivent le terme y, et qui répondent aux termes

$$x+i, x+2i, x+3i, \ldots$$

de la seconde.

Enfin, désignons, pour plus de simplicité, par les caractéristiques $\Delta, \Delta^2, \ldots$ les différences premières, secondes, ... des termes de la première suite, de manière que l'on ait

$$\Delta y = y' - y, \qquad \Delta^2 y = y'' - 2y' + y, \qquad \ldots.$$

A l'égard de la seconde suite, il est clair qu'on aura

$$\Delta x = i \qquad \text{et} \qquad \Delta^2 x = 0, \qquad \ldots.$$

Cela posé, supposons d'abord que la première suite soit formée de la seconde par cette loi très simple

$$y = ax,$$

a étant un coefficient constant pour toute la suite.

On aura donc aussi, en changeant y en y' et x en $x+i$, l'équation

$$y' = a(x+i);$$

et, comme les deux équations doivent avoir lieu en même temps, on pourra, si l'on veut, en éliminer la constante a.

Retranchant, pour cela, la première de la seconde, on aura

$$y' - y = ai \qquad \text{ou} \qquad \Delta y = ai,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{\Delta y}{i};$$

donc, substituant cette valeur dans la première, elle deviendra

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i}.$$

La première équation

$$y = ax$$

donne le terme général de la suite; l'autre équation

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i}$$

donne la loi entre les termes successifs; car, puisque

$$\Delta y = y' - y,$$

on aura

$$y' = y + \frac{iy}{x} \qquad \text{ou} \qquad y' = \frac{x+i}{x}\,y.$$

Réciproquement, on voit que, cette loi des termes étant donnée, le terme général sera nécessairement

$$y = ax,$$

a étant une constante arbitraire, et il est facile de se convaincre que cette expression de y en x est la plus générale qui puisse répondre à l'équation aux différences

$$\Delta y = \frac{iy}{x}.$$

Si la différence i de la progression arithmétique devenait infiniment petite, la différence correspondante Δy deviendrait infiniment petite aussi, et leur rapport $\frac{\Delta y}{i}$, que nous avons vu être égal à la constante arbitraire a, serait toujours le même. Dans l'infiniment petit, ce rapport devient égal à la fonction dérivée y', en regardant y comme fonction de x, et l'équation devient alors

$$y = xy',$$

qui est l'équation dérivée dont

$$y = ax$$

est l'équation primitive, a étant la constante arbitraire.

Supposons maintenant cette loi

$$y = ax + a^2,$$

qui n'est guère plus compliquée que la précédente.

On aura donc aussi, en changeant y en y' et x en $x + i$,

$$y' = ax + ai + a^2;$$

retranchant la première de celle-ci et mettant Δy pour $y' - y$, on aura

$$\Delta y = ai,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{\Delta y}{i},$$

et, substituant cette valeur à la place de a, on aura

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta y^2}{i^2},$$

équation aux différences finies, et qui est indépendante de la constante a.

La première équation donne donc l'expression du terme général, et la seconde donne la loi entre les termes successifs, de manière que, cette loi étant proposée, on aura, par la première, le terme général avec une constante arbitraire a.

L'analyse précédente suppose que la quantité a est indépendante de x, puisqu'elle demeure la même dans les deux équations successives; mais, si elle dépendait de x, de manière que les deux équations eussent néanmoins la même forme que dans le cas où elle est constante, il est clair que l'équation aux différences, qui résulte de ces deux équations par l'élimination de a, serait encore la même; par conséquent on aurait plus d'une équation en x et y pour la même équation aux différences : c'est le principe qui donne les équations primitives singulières, comme on l'a vu dans la Leçon quatorzième.

Supposons donc, en général, que la quantité a, qui répond à x, devienne a', a'', ... lorsque x devient $x + i$, $x + 2i$, ...; les deux équations successives, dont l'une répond à x et l'autre à $x + i$, seront

$$y = ax + a^2,$$
$$y' = a'(x + i) + a'^2.$$

Or, si l'on suppose que les quantités a et a' soient telles que l'on ait

$$a'(x + i) + a'^2 = a(x + i) + a^2,$$

la seconde équation deviendra

$$y' = a(x + i) + a^2,$$

comme dans le cas où a est supposée constante; par conséquent, on aura également, par l'élimination de a, l'équation aux différences

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta y^2}{i^2}.$$

Il s'agit donc de trouver le terme général de la série dont les termes consécutifs a et a', répondant à x et $x + i$, ont entre eux la relation déterminée par l'équation ci-dessus, qui se réduit à cette forme

$$a'^2 - a^2 + (x + i)(a' - a) = 0,$$

et qui est, comme on voit, du genre des équations aux différences.

Cette équation se réduit à

$$[a' + a + (x+i)](a' - a) = 0$$

et se décompose, par conséquent, en ces deux-ci,

$$a' - a = 0, \qquad a' + a + x + i = 0.$$

La première donne

$$a' = a,$$

et, par conséquent, a égal à une constante quelconque; c'est le cas que nous avons supposé d'abord.

La seconde donne une relation entre a et a', d'après laquelle il faut trouver le terme général.

Pour simplifier cette équation, je suppose d'abord

$$a = u + mx + n,$$

m et n étant des constantes et u une nouvelle variable; j'ai

$$a' = u' + m(x+i) + n,$$

et l'équation devient, par ces substitutions,

$$u' + u + (2m+1)x + 2n + (m+1)i = 0,$$

où je peux faire disparaître les termes indépendants de u.

Je fais donc

$$2m + 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad 2n + (m+1)i = 0,$$

ce qui donne

$$m = -\frac{1}{2}, \qquad n = -\frac{i}{4};$$

de sorte qu'en faisant

$$a = u - \frac{x}{2} - \frac{i}{4},$$

l'équation se réduit à cette forme plus simple

$$u' + u = 0.$$

J'observe maintenant qu'en supposant

$$u = br^x,$$

b et r étant des constantes, on a

$$u' = br^{x+i},$$

et la substitution donne

$$br^{x+i} + br^x = 0,$$

équation divisible par br^x, et qui donne

$$r^i + 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$r^i = -1 \qquad \text{et} \qquad r = (-1)^{\frac{1}{i}}.$$

Ainsi l'expression

$$u = b(-1)^{\frac{x}{i}}$$

satisfait à l'équation avec la constante arbitraire b. En effet, en supposant cette équation en u et x, pour faire disparaître la constante b, on prendra l'équation successive

$$u' = b(-1)^{\frac{x+i}{i}} = -b(-1)^{\frac{x}{i}},$$

et, éliminant b, on aura

$$u + u' = 0,$$

équation proposée.

Donc l'expression générale de a sera

$$a = b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4},$$

et cette valeur, substituée dans l'expression de y, donnera un nouveau terme général avec une constante arbitraire b, qui satisfera également à la même équation aux différences

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta y^2}{i^2}.$$

Pour faciliter cette substitution, je mets l'expression donnée de y sous cette forme

$$y=\left(a+\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4},$$

et j'y substitue, pour a, la valeur qu'on vient de trouver; il vient cette nouvelle expression de y

$$y=\left[b(-1)^{\frac{x}{i}}-\frac{i}{4}\right]^2-\frac{x^2}{4}.$$

Comme b est ici une constante arbitraire, on peut aussi la faire disparaître par l'équation successive, dans laquelle x devient $x+i$, et y devient y' ou $y+\Delta y$; on aura ainsi

$$y+\Delta y=\left[-b(-1)^{\frac{x}{i}}-\frac{i}{4}\right]^2-\frac{(x+i)^2}{4},$$

à cause de

$$(-1)^{\frac{x+i}{i}}=(-1)^{\frac{x}{i}+1}=-(-1)^{\frac{x}{i}}.$$

Retranchant de cette équation la précédente et observant que la différence des deux carrés est le produit de la somme par la différence des racines, on aura tout de suite

$$\Delta y=ib(-1)^{\frac{x}{i}}-\frac{ix}{2}-\frac{i^2}{4},$$

d'où l'on tire

$$b(-1)^{\frac{x}{i}}=\frac{\Delta y}{i}+\frac{x}{2}+\frac{i}{4};$$

et cette valeur, substituée dans la première équation, donne l'équation aux différences

$$y=\left(\frac{\Delta y}{i}+\frac{x}{2}\right)^2-\frac{x^2}{4},$$

savoir,

$$y=\frac{x\,\Delta y}{i}+\frac{\Delta y^2}{i^2},$$

qui est la même valeur qu'on avait trouvée dans le cas où a était la constante arbitraire.

Si maintenant on suppose que la différence i devienne infiniment petite, la différence correspondante Δy le deviendra aussi; mais leur rapport $\frac{\Delta y}{i}$, qui, dans le premier cas, est égal à a et, dans le second, est égal à $b(-1)^{\frac{x}{i}}-\frac{x}{2}-\frac{i}{4}$, demeurera fini; ce rapport devient alors la fonction dérivée de y, regardée comme fonction de x, et l'équation aux différences devient, par conséquent,

$$y=xy'+y'^2,$$

qui est, en effet, l'équation dérivée dont la primitive est

$$y=ax+a^2,$$

a étant la constante arbitraire.

Car, en prenant les fonctions dérivées, on a

$$y'=a,$$

et, substituant cette valeur, il vient

$$y=xy'+y'^2.$$

Mais que devient alors la seconde expression de y qui contient la constante arbitraire b?

Suivant les principes des infiniment petits, le terme $-\frac{i}{4}$ doit être rejeté vis-à-vis du terme fini $b(-1)^{\frac{x}{i}}$; ainsi on aurait simplement

$$y=\left[b(-1)^{\frac{x}{i}}\right]^2-\frac{x^2}{4}=b^2-\frac{x^2}{4},$$

à cause de

$$(-1)^{\frac{2x}{i}}=1^{\frac{x}{i}}=1.$$

Mais cette valeur de y ne satisfait pas à l'équation dérivée, à moins qu'on ne suppose

$$b=0,$$

car elle donne

$$y'=-\frac{x}{2}.$$

Faisant la substitution, on a

$$b^2 - \frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}$$

et, par conséquent,

$$b = 0.$$

Ainsi il faut dire que le passage du fini à l'infiniment petit anéantit non seulement les quantités infiniment petites, mais encore la constante arbitraire.

Au reste, en faisant

$$b = 0,$$

l'expression

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

devient une valeur singulière; car, en prenant les fonctions dérivées relatives à a dans l'équation primitive

$$y = ax + a^2,$$

on a

$$x + 2a = 0,$$

d'où

$$a = -\frac{x}{2},$$

et de là

$$y = -\frac{x^2}{4}.$$

Ainsi on peut regarder aussi la seconde expression de y comme une valeur singulière du terme général; mais, comme elle conserve la constante b tant que les différences i sont finies, il est clair qu'elle a la même généralité que la première, en sorte qu'on peut supposer que la valeur de y soit donnée lorsque $x = 0$, ce qui n'a pas lieu pour les valeurs singulières des équations primitives ordinaires.

Feu Charles, de l'Académie des Sciences, est le premier qui ait fait cette remarque importante, qu'à une même équation aux différences finies peuvent répondre deux équations intégrales ou sans différences,

ayant chacune une constante arbitraire. (*Voyez* les *Mémoires* de cette Académie pour l'année 1783.)

Mais les conséquences qu'il a voulu en tirer dans la suite (Mémoire de 1788), relativement aux intégrales des équations différentielles, sont tout à fait illusoires; elles prouvent seulement qu'on ne peut pas appliquer immédiatement à l'infiniment petit proprement dit les résultats trouvés dans la supposition du fini, et que, dans le passage du fini à l'infiniment petit, il faut supprimer entièrement tous les termes qui peuvent contenir l'infiniment petit, quoique ces termes puissent n'être pas eux-mêmes infiniment petits.

Ainsi, dans la formule

$$y = \left[b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{i}{4}\right]^2 - \frac{x^2}{4},$$

le terme $b(-1)^{\frac{x}{i}}$ ne devient pas infiniment petit par la supposition de i infiniment petit; néanmoins, ce terme contenant la différence i, qui devient infiniment petite dans l'équation différentielle, doit être supprimé pour avoir un résultat exact. En effet, en effaçant tout ce qui contient i dans l'équation précédente, on a simplement

$$y = -\frac{x^2}{4},$$

comme cela doit être pour satisfaire à l'équation dérivée.

La raison en est que, dans le passage supposé du fini à l'infiniment petit, les fonctions changent réellement de nature, et que le $\frac{dy}{dx}$, qu'on emploie dans le Calcul différentiel, est essentiellement une fonction différente de la fonction y, tandis que tant que la différence dx a une valeur quelconque, aussi petite qu'on voudra, cette quantité n'est que la différence de deux fonctions de la même forme; d'où l'on voit que, si le passage du fini à l'infiniment petit peut être admis comme moyen mécanique de calcul, il ne peut servir à faire connaître la nature des équations différentielles, qui consiste en ce qu'elles donnent des rapports entre les fonctions primitives et leurs dérivées.

On peut trouver d'une autre manière les mêmes expressions de y qui satisfont à l'équation aux différences

$$y = \frac{x\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta y^2}{i^2}.$$

En prenant l'équation successive qui répond à $x + i$, on a aussi

$$y' = \frac{(x+i)\,\Delta y'}{i} + \frac{\Delta y'^2}{i^2};$$

mais

$$y' = y + \Delta y, \qquad \Delta y' = \Delta y + \Delta^2 y;$$

donc, retranchant la première équation de la seconde, on aura

$$\Delta y = x\frac{\Delta^2 y}{i} + \Delta y + \Delta^2 y + \frac{2\,\Delta y\,\Delta^2 y}{i^2} + \frac{\Delta^2 y^2}{i^2},$$

savoir, en multipliant par i et réduisant,

$$\left(x + i + \frac{2\,\Delta y}{i} + \frac{\Delta^2 y}{i}\right)\Delta^2 y = 0,$$

équation qui se décompose, comme l'on voit, en deux,

$$\Delta^2 y = 0 \qquad \text{et} \qquad x + i + \frac{2\,\Delta y + \Delta^2 y}{i} = 0.$$

La première donne tout de suite

$$\Delta y = \text{à une constante};$$

faisant cette constante $= ai$, on obtiendra

$$\Delta y = ai;$$

substituant cette valeur dans l'équation aux différences, on aura, comme plus haut,

$$y = ax + a^2.$$

Retenons maintenant la supposition

$$\Delta y = ai,$$

mais en regardant a comme une variable dépendante de x; on aura

$$\Delta y' = a'i \qquad \text{et} \qquad \Delta^2 y = (a' - a)\,i;$$

donc l'autre équation deviendra

$$x + i + a + a' = 0,$$

qui est la même que nous avons trouvée plus haut, et d'où nous avons tiré

$$a = b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}.$$

On aura donc

$$\Delta y = i\left[b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}\right],$$

et, comme l'équation aux différences peut se mettre sous la forme

$$y = \left(\frac{x}{2} + \frac{\Delta y}{i}\right)^2 - \frac{x^2}{4},$$

la substitution de cette valeur de Δy donnera

$$y = \left[b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{i}{4}\right]^2 - \frac{x^2}{4},$$

comme plus haut.

Cette manière de trouver la seconde expression de y revient à la méthode que nous avons exposée dans la Leçon XVI, pour les équations primitives singulières.

En supposant i infiniment petit, les valeurs de a et a', qui répondent à x et $x + i$, ne doivent différer l'une de l'autre que d'une quantité infiniment petite; par conséquent, par le principe des infiniment petits, l'équation

$$a' + a + x + i = 0$$

se réduit à

$$2a + x = 0,$$

ce qui donne

$$a = -\frac{x}{2},$$

d'où l'on tire

$$y = -\frac{x^2}{2},$$

comme dans le cas de

$$b = 0.$$

En effet, l'expression de a

$$a = b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x}{2} - \frac{i}{4}$$

donne, relativement à $x + i$,

$$a' = -b(-1)^{\frac{x}{i}} - \frac{x+i}{2} - \frac{i}{4},$$

où l'on voit que, dans le cas de i infiniment petit, la différence entre a et a' demeure finie tant que la constante b n'est pas nulle.

En général, soit

$$F(x, y, a) = 0$$

l'équation par laquelle le terme général y est déterminé en fonction de x, a étant une constante quelconque.

Cette équation est censée avoir lieu également pour les termes successifs y', y'', ..., qui répondent aux valeurs successives $x+i$, $x+2i$, ... de x; ainsi on aura

$$F(x + i, y', a) = 0,$$

et l'on pourra, par la combinaison de ces deux équations, éliminer la constante a.

On aura, de cette manière, une équation sans a, mais qui sera en x, y et y'; et, si à la place de y' on substitue $y + \Delta y$, l'équation sera en x, y et Δy; ce sera alors proprement une équation aux différences premières.

De même, si l'équation du terme général renferme deux constantes a et b, comme

$$F(x, y, a, b) = 0,$$

on pourra faire évanouir ces deux constantes par le moyen des deux équations successives

$$F(x + i, y', a, b) = 0, \qquad F(x + 2i, y'', a, b) = 0.$$

L'équation résultante sera alors entre x, y, y' et y'', ou bien entre les quantités x, y, Δy et $\Delta^2 y$, en substituant $y + \Delta y$ pour y', et $y + 2\Delta y + \Delta^2 y$ pour y''; ce sera donc une équation aux différences secondes, et ainsi de suite.

Donc, réciproquement, toute équation aux différences premières, ou entre deux termes successifs, comportera une constante arbitraire dans l'équation du terme général; toute équation aux différences secondes, ou entre trois termes successifs, comportera deux constantes arbitraires dans l'équation du terme général, et ainsi de suite.

On peut, en effet, se convaincre que cela doit être, par la nature même de ces équations.

Considérons, par exemple, une équation quelconque aux différences premières entre x, y et y', et supposons qu'ayant tiré la valeur de y' on ait

$$y' = f(x, y).$$

Comme la même équation doit avoir lieu dans toute l'étendue de la série, en faisant successivement

$$x = 0, \ i, \ 2i, \ 3i, \ \ldots,$$

la variable y deviendra y^0, y^1, y^2, y^3, ..., et y' deviendra en même temps y^1, y^2, y^3, y^4, ...

Ainsi l'équation proposée donnera cette suite d'équations

$$y^1 = f(0, y^0), \qquad y^2 = f(i, y^1), \qquad y^3 = f(2i, y^2), \qquad \ldots.$$

Donc, substituant successivement les valeurs précédentes, tous les termes y^1, y^2, y^3, ... seront donnés par le premier terme y^0, et un terme quelconque y, répondant à x, sera donné en x et y^0.

Ainsi l'expression du terme général contiendra nécessairement la valeur arbitraire et constante du premier terme y^0.

Si l'équation proposée était aux différences secondes ou entre les termes successifs y, y', y'', on pourrait en tirer la valeur de y'', et l'on

aurait

$$\overset{n}{y} = f(x, y, \overset{1}{y}).$$

Donc, faisant successivement

$$x = 0,\ i,\ 2i,\ 3i,\ \ldots,$$

on aurait

$$\overset{2}{y} = f(0, \overset{0}{y}, \overset{1}{y}), \qquad \overset{3}{y} = f(i, \overset{1}{y}, \overset{2}{y}), \qquad \overset{4}{y} = f(2i, \overset{2}{y}, \overset{3}{y}), \qquad \ldots;$$

de sorte qu'en substituant toujours les valeurs précédentes on aurait les termes $\overset{2}{y}, \overset{3}{y}, \overset{4}{y}, \ldots$ donnés en $\overset{0}{y}$ et $\overset{1}{y}$; par conséquent le terme général y répondant à x serait exprimé en x, $\overset{0}{y}$ et $\overset{1}{y}$, dans lequel $\overset{0}{y}$ et $\overset{1}{y}$ ont des valeurs arbitraires et constantes.

Et ainsi pour les équations aux différences plus hautes.

On voit par là que le nombre de constantes arbitraires qui doivent entrer dans l'expression complète du terme général est nécessairement égal à l'exposant de la plus haute différence qui entre dans l'équation proposée; d'où l'on doit conclure que toute expression du terme général qui satisfera à une équation aux différences, et qui aura autant de constantes arbitraires que cette équation en admet en raison de l'ordre de ces différences, devra être regardée comme complète, de quelque manière qu'on y soit parvenu.

Mais la même équation pourra encore être susceptible d'une autre expression générale, qui répondra à l'équation primitive singulière, et qu'on pourra trouver par les mêmes principes.

Car, si

$$\mathrm{F}(x, y, a) = 0$$

est l'équation qui donne l'expression générale de y en x avec la constante arbitraire a, on aura l'équation entre les termes successifs y et $\overset{1}{y}$, ou y et $y + \Delta y$, en éliminant a des deux équations

$$\mathrm{F}(x, y, a) = 0, \qquad \mathrm{F}(x + i, \overset{1}{y}, a) = 0,$$

et le résultat de cette élimination, qui sera l'équation aux différences,

sera la même, soit que la quantité a soit une constante ou une quantité dépendante de x, pourvu que, dans ce cas, elle soit telle que l'on ait

$$\mathrm{F}(x + i, \overset{1}{y}, a) = \mathrm{F}(x + i, \overset{1}{y}, \overset{1}{a}).$$

Cette équation, étant délivrée des fractions et des radicaux, sera toujours divisible par $\overset{1}{a} - a$, puisqu'en effet $\overset{1}{a} = a$ satisfait; et il est clair que cette racine donne a égal à une constante, comme on l'avait supposé d'abord.

Si l'équation ne contient les quantités a et $\overset{1}{a}$ qu'à la première dimension, le résultat de la division ne contiendra plus ces quantités; ainsi

$$\overset{1}{a} - a = 0$$

sera la seule racine, et il n'y aura alors qu'une seule expression du terme général.

Mais, si ces mêmes quantités forment plusieurs dimensions dans l'équation dont il s'agit, elles s'y trouveront encore après la division par $\overset{1}{a} - a$, et l'on aura une nouvelle équation entre a et $\overset{1}{a}$, qui sera, par conséquent, aux différences premières par rapport à la variable a, et qui pourra donner encore une ou plusieurs valeurs de a avec de nouvelles constantes arbitraires. C'est le cas de l'équation que nous avons considérée ci-dessus.

En regardant a comme une fonction de x, $\overset{1}{a}$ qui répond à $x + i$ deviendra, par le développement,

$$\overset{1}{a} = a + ia' + \frac{i^2}{2} a'' + \ldots,$$

et la fonction $\mathrm{F}(x, y, \overset{1}{a})$ deviendra aussi

$$\mathrm{F}(x, y, a) + ia'\,\mathrm{F}'(a) + \ldots;$$

par conséquent, l'équation en a et $\overset{1}{a}$ deviendra

$$ia'\,\mathrm{F}'(a) + \ldots = 0.$$

Lorsque i devient infiniment petit, les termes qui contiennent i^2,

i^3, ... devant être négligés vis-à-vis de ceux qui ne contiennent que i, l'équation précédente se réduit à

$$ia' F'(a) = 0,$$

laquelle donne

$$a' = 0$$

et, par conséquent, a constante, ou

$$F'(a) = 0,$$

d'où l'on tire a en fonction de x; c'est le cas des équations primitives singulières.

Dans ce cas donc, l'expression de a ne peut plus contenir de constante arbitraire ni dépendre de la quantité i; par conséquent, il faut que les termes qui renfermeraient i dans l'expression générale de a, tirée de l'équation en a et a', disparaissent absolument dans le cas de i infiniment petit, quand même ces termes ne deviendraient pas alors infiniment petits, comme nous l'avons vu dans l'exemple précédent.

La plupart des formules qu'on a trouvées par la considération des différences finies, et qu'on a ensuite traduites en Calcul différentiel, présentent des difficultés analogues dans le passage du fini à l'infiniment petit, et qu'on ne peut lever que par le même principe de rejeter indistinctement des formules finies tous les termes qui contiendraient des différences infiniment petites, de quelque manière que ces différences s'y trouvent contenues.

Ainsi, par exemple, on a, en employant les différences successives,

$$y' = y + \Delta y, \quad y'' = y + 2\Delta y + \Delta^2 y, \quad y''' = y + 3\Delta y + 3\Delta^2 y + \Delta^3 y, \quad \ldots$$

et, en général,

$$y^{m} = y + m\Delta y + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2 y + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\Delta^3 y + \ldots;$$

c'est l'expression du terme $m^{\text{ième}}$ qui répond au terme $x + mi$ de la série x, $x + i$, $x + 2i$, ...

Si donc on fait

$$mi = \omega,$$

le terme répondant à $x + \omega$ sera, par la substitution de $\frac{\omega}{i}$ au lieu de m,

$$y + \omega\frac{\Delta y}{i} + \frac{\omega(\omega - i)}{2}\frac{\Delta^2 y}{i^2} + \frac{\omega(\omega - i)(\omega - 2i)}{2.3}\frac{\Delta^3 y}{i^3} + \ldots$$

Cette formule, donnée d'abord par Newton à la fin des *Principes*, pour l'interpolation des lieux des comètes, a été ensuite appliquée par Taylor au cas où, les différences i devenant infiniment petites et égales à dx, les différences Δy, $\Delta^2 y$, ... deviennent dy, $d^2 y$, ...

Alors, en négligeant les termes i, $2i$, $3i$, ... vis-à-vis de ω, on a la formule

$$y + \omega\frac{dy}{dx} + \frac{\omega^2}{2}\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\omega^3}{2.3}\frac{d^3 y}{dx^3} + \ldots,$$

qui exprime la valeur de ce que devient y lorsque x devient $x + \omega$.

C'est la formule connue sous le nom de *théorème de Taylor*.

Cependant, comme les coefficients de i dans les facteurs successifs de la première formule vont en augmentant continuellement, il est visible que, quelque petit que soit i, il se trouvera à la fin multiplié par un coefficient si grand, que sa valeur pourra devenir comparable à celle de ω, et ne pourra plus être, sans erreur, négligée vis-à-vis de celle-ci. Mais la suppression de tous les multiples de i, quelque grands qu'ils soient, est néanmoins commandée par la nature de la chose, afin que les quantités $\frac{\Delta y}{i}$, $\frac{\Delta^2 y}{i^2}$, ... cessent d'être exprimées par les différences finies des quantités y, y', y'', ..., qui sont des fonctions semblables de x, $x + i$, $x + 2i$, ..., et deviennent simplement les fonctions dérivées y', y'', ... de la même fonction y.

En effet, la quantité y étant regardée comme une fonction de x, la formule dont il s'agit doit donner la même fonction de $x + \omega$, et nous avons démontré, d'une manière directe et rigoureuse, que cette fonction, développée suivant les puissances de ω, est exactement égale à la série

$$y + \omega y' + \frac{\omega^2}{2}y'' + \frac{\omega^3}{2.3}y''' + \ldots.$$

La formule des sinus des arcs multiples s'applique de la même ma-

nière au développement des sinus par l'arc et est sujette aux mêmes difficultés.

En effet, on a, comme on l'a vu dans la Leçon X,

$$\sin mx = m\cos^{m-1}x\sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5}\cos^{m-5}x\sin^5 x - \dots.$$

Supposons x infiniment petit et m infini, en sorte que mx ait une valeur finie z; donc $m = \frac{z}{x}$, et les coefficients

$$m, \quad \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}, \quad \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5}, \quad \dots$$

deviendront, en rejetant vis-à-vis de z tous les multiples de x, quelque grands qu'ils puissent être,

$$\frac{z}{x}, \quad \frac{z^3}{2.3x^3}, \quad \frac{z^5}{2.3.4.5x^5}, \quad \dots.$$

D'un autre côté $\sin x$ se réduit à x, et $\cos x$ à 1; donc, faisant ces substitutions, on a

$$\sin z = z - \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^5}{2.3.4.5} - \dots,$$

formule exacte et rigoureuse, comme nous l'avons trouvé par les méthodes directes.

Ce n'est pas seulement dans le passage des différences finies aux différentielles que les fonctions changent de forme; cela a lieu aussi dans plusieurs autres circonstances, et nous allons faire voir, par différents exemples, que l'analyse indique toujours et opère ce changement par des expressions qui deviennent alors zéro divisé par zéro.

Considérons d'abord la différentielle $df(x)$. Suivant les principes rigoureux du Calcul des différences, on a

$$df(x) = f(x+dx) - f(x)$$

et, par conséquent,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}.$$

Cette valeur de $\frac{df(x)}{dx}$ devient $\frac{0}{0}$ lorsque $dx = 0$; pour savoir ce qu'elle doit être dans ce cas-là, on suivra la règle exposée à la fin de la Leçon VIII, et que nous avons déduite de principes indépendants du Calcul différentiel.

On prendra donc les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur relatives à la variable dx, et l'on y fera ensuite

$$dx = 0.$$

On aura ainsi $f'(x+dx)$, et, faisant $dx = 0$, on trouvera $f'(x)$ pour la valeur de $\frac{df(x)}{dx}$, lorsque

$$dx = 0.$$

Cette valeur est, comme l'on voit, la même que celle que donne le Calcul différentiel, comme nous l'avons observé à la fin de la Leçon II.

Si l'on considère de même les différences secondes, on a d'abord rigoureusement

$$d^2 f(x) = f(x+2dx) - 2f(x+dx) + f(x);$$

donc

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{f(x+2dx) - 2f(x+dx) + f(x)}{dx^2}.$$

En faisant

$$dx = 0,$$

cette valeur de $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ devient $\frac{0}{0}$; on prendra donc alors les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur relativement à la variable dx, ce qui donnera

$$\frac{f'(x+2dx) - f'(x+dx)}{dx}.$$

Cette expression devient de nouveau $\frac{0}{0}$, lorsqu'on y fait

$$dx = 0;$$

c'est pourquoi il faudra prendre encore les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur relativement à la même variable dx; on

aura

$$2f''(x+2dx)-f''(x+dx).$$

En faisant ici

$$dx=0,$$

on a enfin $f''(x)$ pour la valeur de $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$, lorsque

$$dx=0.$$

C'est, en effet, la valeur de la différentielle seconde de $f(x)$, divisée par dx^2.

On doit conclure de là, en général, que les expressions $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$, employées dans le Calcul différentiel, ne peuvent être prises que pour des symboles des fonctions dérivées $y', y'', \dots$.

Nous avons observé plus haut que Taylor n'était parvenu à la formule qui porte son nom que d'une manière peu exacte. On peut, par les principes précédents, donner à son procédé toute la rigueur que l'Analyse exige.

Si, dans la formule générale d'interpolation donnée ci-dessus, on fait

$$y=f(x),$$

elle devient

$$f(x+\omega)=f(x)+\omega\frac{\Delta f(x)}{i}+\frac{\omega(\omega-i)}{2}\frac{\Delta^2 f(x)}{i^2}+\frac{\omega(\omega-i)(\omega-2i)}{2.3}\frac{\Delta^3 f(x)}{i^3}+\dots,$$

dans laquelle

$$\Delta f(x)=f(x+i)-f(x),$$
$$\Delta^2 f(x)=f(x+2i)-2f(x+i)+f(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Cette formule est générale, quel que soit i; mais, en faisant

$$i=0,$$

les valeurs des expressions $\frac{\Delta f(x)}{i}, \frac{\Delta^2 f(x)}{i^2}, \dots$ deviennent $\frac{0}{0}$.

Or ces expressions sont les mêmes que celles que nous avons considérées ci-dessus, en changeant Δ en d, et i en dx.

Ainsi elles deviennent $f'(x), f''(x), \dots$ dans le cas de

$$i=0.$$

On a donc alors

$$f(x+\omega)=f(x)+\omega f'(x)+\frac{\omega^2}{2}f''(x)+\dots,$$

comme nous l'avons trouvé dans la Leçon deuxième, d'une manière rigoureuse et directe.

On peut conclure de ce que nous venons d'exposer que ceux qui, d'après Euler, regardent les différentielles comme de véritables zéros, et, par conséquent, leur rapport comme celui de zéro à zéro, sont dans toute la rigueur de l'Analyse, parce qu'une fonction qui satisfait en général aux conditions d'une question ne saurait changer de forme pour un cas particulier, qu'en passant par l'état de $\frac{0}{0}$; comme on peut le prouver par plusieurs exemples.

On sait que la somme des n premiers termes de la progression géométrique

$$1+a+a^2+a^3+\dots$$

est exprimée par $\frac{1-a^n}{1-a}$.

En regardant cette expression comme une fonction de n, on voit que cette fonction est de la forme exponentielle.

Cependant, lorsque

$$a=1,$$

la série devient

$$1+1+1+\dots,$$

et la somme de n termes est n.

Ainsi, dans ce cas, il faut que la fonction exponentielle change de forme et devienne une simple fonction algébrique, ce qui ne peut se faire que par une espèce de saut que l'Analyse indique alors par l'expression $\frac{0}{0}$.

En effet, en faisant

$$a=1,$$

la formule $\frac{1-a^n}{1-a}$ devient $\frac{0}{0}$; pour en trouver la valeur, il faut prendre les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur relativement à la variable a, ce qui donne na^{n-1} et par conséquent n, en faisant

$$a = 1.$$

La fonction primitive de x^n, ou l'intégrale de $x^n dx$, est, en général, $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Pour qu'elle commence au point où

$$x = a,$$

il faut en retrancher la constante $\frac{a^{n+1}}{n+1}$, et l'on a alors la fonction

$$\frac{x^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}.$$

Cette fonction de x est toujours algébrique; mais, dans le cas où

$$n = -1,$$

elle devient $\frac{0}{0}$, ce qui indique qu'elle doit alors changer de forme.

Pour trouver la nouvelle fonction, on prendra les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur de l'expression précédente relativement à la variable n; on aura ainsi, par les formules données dans la Leçon IV,

$$x^{n+1} lx - a^{n+1} la.$$

En faisant

$$n = -1,$$

on a $lx - la$ ou $l\frac{x}{a}$ pour la fonction primitive de $\frac{1}{x}$, comme on l'a trouvé dans la même Leçon par d'autres principes.

La série

$$\cos^{n-1}x \sin x - \frac{(n-1)(n-2)}{2.3}\cos^{n-3}x \sin^3 x + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5}\cos^{n-5}x \sin^5 x - \dots$$

est représentée généralement par la fonction en sinus $\frac{\sin nx}{n}$, comme on le voit par la formule rapportée plus haut.

Cette fonction devient $\frac{0}{0}$ lorsque

$$n = 0,$$

auquel cas la série se réduit à

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin^3 x}{3\cos^3 x} + \frac{\sin^5 x}{5\cos^5 x} - \dots$$

Cela indique que la fonction doit changer de forme dans ce cas; en effet, si l'on prend, suivant la règle, les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur, relativement à la variable n, la fonction devient $x\cos nx$ et se réduit à la fonction circulaire x, en faisant

$$n = 0.$$

C'est, comme l'on sait, la valeur rigoureuse de la série

$$\operatorname{tang} x - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tang}^5 x - \dots.$$

On voit clairement, par ces différents exemples, qu'il serait aisé de multiplier s'il était nécessaire, que l'expression $\frac{0}{0}$ est toujours le symptôme d'un changement de fonction, ce qu'il me semble qu'on n'avait pas encore remarqué.

C'est par les principes exposés dans cette Leçon qu'on peut résoudre, d'une manière satisfaisante, les difficultés qu'on a toujours rencontrées lorsqu'on a voulu appliquer à un nombre infini d'éléments les formules qu'on avait trouvées pour un nombre fini quelconque. Le fameux problème des cordes vibrantes en fournit un exemple remarquable, et l'on peut voir, dans les *Opuscules mathématiques* (t. I et IV), les objections que d'Alembert a faites contre la solution de ce problème, donnée dans le premier Volume des *Mémoires de l'Académie de Turin* (1), et déduite de la formule générale du mouvement d'un fil chargé d'un nombre quelconque de poids, en supposant ce nombre infini et chaque poids infini-

(1) *OEuvres de Lagrange*, t. I, p. 39.

ment petit. Dans la réponse à ces objections, qu'on trouve dans le second Volume des mêmes *Mémoires* (¹), je me suis contenté de faire voir, par l'exactitude des résultats, la légitimité des suppositions que j'avais employées dans le passage du fini à l'infini; mais la vraie métaphysique de ces suppositions dépend des mêmes principes que celle du Calcul des infiniment petits, sur laquelle il ne peut plus rester maintenant d'incertitude ni d'obscurité.

Nous allons terminer cette Leçon par quelques remarques sur l'invention du Calcul différentiel.

On peut regarder Fermat comme le premier inventeur des nouveaux calculs. Dans sa méthode *de maximis et minimis*, il égale l'expression de la quantité dont on recherche le maximum ou le minimum à l'expression de la même quantité, dans laquelle l'inconnue est augmentée d'une quantité indéterminée. Il fait disparaître dans cette équation les radicaux et les fractions s'il y en a, et, après avoir effacé les termes communs dans les deux membres, il divise tous les autres par la quantité indéterminée par laquelle ils se trouvent multipliés; ensuite il fait cette quantité nulle, et il a une équation qui sert à déterminer l'inconnue de la question. En voici un exemple très simple, donné par Fermat.

Soit proposé de diviser une ligne donnée en deux parties, de manière que le rectangle de ces deux parties soit un maximum.

Nommant a la longueur de la ligne donnée et x une de ses parties, $a-x$ sera l'autre, et l'expression dont on cherche le maximum sera $ax-x^2$. Ajoutant la quantité arbitraire e à l'inconnue x, on aura cette nouvelle expression

$$a(x+e)-(x+e)^2.$$

Égalant ces deux expressions, on a l'équation

$$ax-x^2=a(x+e)-(x+e)^2,$$

savoir, en développant le carré $(x+e)^2$,

$$ax-x^2=ax+ae-x^2-2xe-e^2.$$

(¹) *Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 319.

Effaçant de part et d'autre les termes communs $ax-x^2$, et divisant les autres par e, on a

$$a-2x-e=0,$$

où il faut maintenant supposer e nul, ce qui réduit l'équation à

$$a-2x=0,$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{a}{2},$$

ce qui montre que la ligne donnée doit être partagée par le milieu, comme on le sait d'ailleurs.

Il est facile de voir, au premier coup d'œil, que la règle déduite du Calcul différentiel, qui consiste à égaler à zéro la différentielle de l'expression qu'on veut rendre un maximum ou un minimum, prise en faisant varier l'inconnue de cette expression, donne le même résultat, parce que le fond est le même, et que les termes qu'on néglige comme infiniment petits dans le Calcul différentiel sont ceux qu'on doit supprimer comme nuls dans la méthode de Fermat.

Sa méthode des tangentes dépend du même principe. Dans l'équation entre l'abscisse et l'ordonnée, que Fermat appelle la propriété spécifique de la courbe, il augmente ou diminue l'abscisse d'une quantité indéterminée, et il regarde la nouvelle ordonnée comme appartenant à la fois à la courbe et à la tangente, ce qui fournit une équation qu'il traite comme celle de la méthode *de maximis et minimis*.

Ainsi, x étant l'abscisse et y l'ordonnée, si t est la sous-tangente au point de la courbe qui répond à x et y, il est facile de voir que les triangles semblables donnent $\frac{y(t+e)}{t}$ pour l'ordonnée à la tangente, relativement à l'abscisse $x+e$, et cette ordonnée doit être égalée à celle de la courbe pour la même abscisse $x+e$. On aura donc l'équation dont il s'agit en mettant dans l'équation de la courbe $x+e$ à la place de x, et $y+\frac{ye}{t}$ à la place de y. Cette équation, après les réductions, sera donc divisible par e; on divisera donc tous les termes par e,

et l'on supprimera ensuite comme nuls tous ceux où l'indéterminée e se trouvera, parce qu'on doit supposer cette indéterminée nulle. L'équation restante donnera la valeur de t en x et y.

Ainsi, dans la parabole, par exemple, dont l'équation est

$$y^2 - ax = 0,$$

en mettant $y + \frac{ye}{t}$ à la place de y, et $x + e$ à la place de x, l'équation devient

$$y^2 + \frac{2y^2e}{t} + \frac{y^2e^2}{t^2} - ax - ae = 0.$$

Mais

$$y^2 - ax = 0;$$

donc, effaçant ces termes et divisant les autres par e, on aura

$$\frac{2y^2}{t} + \frac{y^2e}{t^2} - a = 0;$$

et, effaçant encore le terme $\frac{y^2e}{t^2}$, qui s'évanouit en faisant e nul, on aura simplement l'équation

$$\frac{2y^2}{t} - a = 0,$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{2y^2}{a} = 2x.$$

On voit encore ici l'analogie de la méthode de Fermat avec celle du Calcul différentiel; car la quantité indéterminée dont on augmente l'abscisse x répond à la différentielle dx, et la quantité $\frac{ye}{t}$, qui est l'augmentation correspondante de y, répond à sa différentielle dy.

Et il est même remarquable que, dans l'écrit qui contient la découverte du Calcul différentiel, imprimé dans les *Actes de Leipzig* du mois d'octobre 1684, sous le titre : *Nova methodus pro maximis et minimis*, etc., Leibnitz appelle dy une ligne qui soit à la ligne arbitraire dx comme l'ordonnée y à la sous-tangente, ce qui rapproche l'analyse de Leibnitz de celle de Fermat.

On voit que Fermat a ouvert la carrière par une idée très originale, mais un peu obscure, qui consiste à introduire dans l'équation une indéterminée qui doit être nulle par la nature de la question, mais qu'on ne fait évanouir qu'après avoir divisé toute l'équation par cette même quantité.

Cette idée est devenue le germe des nouveaux calculs qui ont fait faire tant de progrès à la Géométrie et à la Mécanique; mais on peut dire qu'elle a porté aussi son obscurité sur les principes de ces calculs.

Maintenant qu'on a une métaphysique bien claire de ces principes, on voit que la quantité indéterminée que Fermat ajoutait à l'inconnue ne servait qu'à former la fonction dérivée qui doit être nulle dans le cas du maximum ou minimum, et qui sert en général à déterminer la position des tangentes des courbes.

Mais les géomètres contemporains de Fermat ne saisirent point l'esprit de ce nouveau genre de calcul; ils ne le regardèrent que comme un artifice particulier, applicable seulement à quelques cas et sujet à beaucoup de difficultés. On peut voir, dans le troisième Tome des *Lettres* de Descartes, sa longue dispute avec Fermat sur ce sujet. Aussi cette invention, qui avait paru un peu avant la *Géométrie* de Descartes, demeura-t-elle stérile et presque dans l'oubli pendant près de quarante ans; car, si l'on excepte la règle de Sluze pour trouver les tangentes, qui paraît déduite de la méthode de Fermat, et la méthode donnée par Wallis pour le même objet, laquelle n'est que celle de Fermat présentée d'une manière moins abstraite, cet espace de temps n'offre rien qui ait rapport à la découverte de Fermat.

Enfin Barrow imagina de substituer aux quantités qui doivent être supposées nulles, suivant Fermat, des quantités réelles, mais infiniment petites, et il donna en 1674 sa Méthode des tangentes, qui n'est que la construction de celle de Fermat, par le moyen du triangle infiniment petit, formé des côtés e et $\frac{ey}{t}$, et du côté infiniment petit de la courbe, regardée comme un polygone. Il donna ainsi naissance au système des infiniment petits et au Calcul différentiel. Mais ce calcul

n'était encore qu'ébauché, car il ne s'appliquait qu'aux expressions rationnelles, et exigeait le développement des termes, pour qu'on pût négliger ceux qui contiendraient le carré et les puissances supérieures des quantités infiniment petites.

Il restait donc à trouver un algorithme simple et général, applicable à toutes sortes d'expressions, par lequel on pût passer, directement et sans aucune réduction, des formules algébriques à leurs différentielles. C'est ce que Leibnitz a donné dix ans après dans l'écrit cité ci-dessus, qui renferme les éléments du Calcul différentiel proprement dit. Il paraît que Newton était parvenu, dans le même temps, ou un peu auparavant, aux mêmes abrégés de calcul pour les différentiations. Mais c'est dans la formation des équations différentielles et dans leur intégration que consiste le grand mérite et la force principale des nouveaux calculs; et, sur ce point, il me semble que la gloire de l'invention est presque uniquement due à Leibnitz et surtout aux Bernoulli.

Mais, tandis que cet édifice s'élevait à une hauteur immense, l'entrée en demeurait toujours mal éclairée. L'emploi de quantités qui doivent s'évanouir d'elles-mêmes, ou qui doivent être négligées en raison de leur petitesse, n'offre à l'esprit des commençants que des idées peu satisfaisantes et, par conséquent, peu propres à servir de base à la partie la plus importante des Mathématiques. Pour lever tous les scrupules et dissiper tous les nuages, il ne faut rien faire évanouir ni rien négliger; c'est ce qu'on obtient par la considération des fonctions dérivées.

LEÇON DIX-NEUVIÈME.

DES FONCTIONS DE DEUX OU PLUSIEURS VARIABLES; DE LEURS FONCTIONS DÉRIVÉES. NOTATION ET FORMATION DE CES FONCTIONS.

Nous n'avons encore traité que des fonctions d'une seule variable; car, lorsque nous avons considéré des fonctions de deux ou de plusieurs variables, nous avons regardé ces variables elles-mêmes comme fonctions d'une seule et même variable. Or, si l'on considère une fonction de deux ou de plusieurs variables indépendantes, il est clair que cette fonction pourra avoir différentes fonctions dérivées relatives aux différentes variables, et qui naîtront de la fonction primitive par le simple développement, en attribuant à chaque variable un accroissement particulier.

Ainsi le calcul des fonctions dérivées relatives à une seule variable conduit naturellement à celui des fonctions dérivées relatives à différentes variables, lequel n'est, comme l'on voit, qu'une généralisation du premier, et dépend des mêmes principes.

Si les inventeurs du Calcul différentiel l'avaient regardé d'abord comme le calcul des fonctions dérivées, ils auraient été conduits naturellement et immédiatement au calcul des fonctions dérivées relatives à plusieurs variables, et il ne se serait pas passé un demi-siècle entre la découverte du Calcul différentiel proprement dit et celle du calcul aux différences partielles, qui répond au calcul des fonctions dérivées relatives à différentes variables. A plus forte raison, au lieu d'envisager ce dernier comme un nouveau calcul, on l'aurait seulement regardé comme une nouvelle application ou plutôt comme une extension du

Calcul différentiel, et l'on aurait, dès le commencement, embrassé sous un même point de vue et sous une même dénomination les différentes branches du même calcul, qui ont été longtemps séparées et comme isolées.

Soit d'abord $f(x, y)$ une fonction quelconque de deux variables x et y, que nous regarderons comme indépendantes l'une de l'autre. Si dans cette fonction on substitue à la fois $x+i$ à la place de x, et $y+o$ à la place de y, les deux quantités i et o étant indéterminées, qu'ensuite on développe la fonction $f(x+i, y+o)$ suivant les puissances ascendantes de i et de o, il est clair que le premier terme sans i ni o sera la fonction proposée $f(x, y)$, et que les autres termes seront de nouvelles fonctions de x et de y, multipliées successivement par $i, o, i^2, io, o^2, i^3, \ldots$.

Ces fonctions seront aussi dérivées de la fonction primitive $f(x, y)$, et l'on trouvera la loi de leur dérivation en considérant successivement les dérivées relatives à chacune des quantités i et o.

Pour cela, on commencera par supposer qu'il n'y ait que la variable x qui devienne $x+i$, la variable y demeurant la même, et l'on développera la fonction $f(x+i, y)$ comme une simple fonction de x. On supposera ensuite que, dans les fonctions dérivées relatives à x, la variable y devienne $y+o$, et l'on développera chacune de ces fonctions comme des fonctions de y, en regardant alors la variable x comme une constante.

Il naîtra ainsi, du développement de $f(x+i, y+o)$, différentes fonctions dérivées de la fonction primitive $f(x, y)$, dont les unes seront relatives à la variable x, les autres seront relatives à la variable y, et d'autres enfin seront relatives en partie à la variable x et en partie à la variable y, la loi du développement étant toujours la même, mais appliquée successivement aux différentes variables.

Mais, pour ne pas confondre dans la notation ces différentes fonctions dérivées, on pourra dénoter les fonctions dérivées, relatives à la seule variable x, par des traits appliqués, comme à l'ordinaire, à la caractéristique de la fonction, et suivis d'une virgule; les fonctions

dérivées relatives à la variable y, par des traits appliqués à la même caractéristique, mais précédés d'une virgule; enfin les fonctions dérivées relatives en partie à la variable x et en partie à la variable y, par des traits séparés par une virgule, de manière que ceux qui précèdent la virgule se rapportent à la variable x, et ceux qui la suivent se rapportent à la variable y.

Cette notation conserve mieux l'analogie qui doit régner entre les fonctions dérivées et la fonction primitive $f(x, y)$, dans laquelle la virgule sépare les deux variables indépendantes x et y, que celle que j'avais employée dans la théorie des fonctions, en appliquant au bas de la caractéristique f les traits relatifs aux fonctions dérivées par rapport à la seconde variable y.

D'ailleurs nous trouvons plus convenable d'employer, comme nous l'avons déjà fait dans la Leçon XVII, les traits inférieurs pour désigner les fonctions primitives d'une fonction donnée.

De cette manière on aura donc, en premier lieu,

$$f(x+i, y) = f(x, y) + i f'(x, y) + \frac{i^2}{2} f''(x, y) + \frac{i^3}{2.3} f'''(x, y) + \ldots$$

Substituant maintenant partout $y+o$ à la place de y, on aura

$$f(x+i, y+o) = f(x, y+o) + i f'(x, y+o) + \frac{i^2}{2} f''(x, y+o) + \frac{i^3}{2.3} f'''(x, y+o) + \ldots$$

Développons successivement les fonctions

$$f(x, y+o), \quad f'(x, y+o), \quad f''(x, y+o), \quad \ldots$$

comme des fonctions de $y+o$; on aura pareillement

$$f(x, y+o) = f(x, y) + o f'(x, y) + \frac{o^2}{2} f''(x, y) + \frac{o^3}{2.3} f'''(x, y) + \ldots,$$

$$f'(x, y+o) = f'(x, y) + o f''(x, y) + \frac{o^2}{2} f'''(x, y) + \ldots,$$

$$f''(x, y+o) = f''(x, y) + \ldots,$$

et ainsi de suite.

Faisant donc ces substitutions et ordonnant les termes par rapport aux puissances et aux produits de i et o, on aura ce développement complet

$$\begin{aligned} f(x+i,y+o) = {} & f(x,y) + i f'(x,y) + o f'(x,y) \\ & + \frac{i^2}{2} f''(x,y) + io f''(x,y) + \frac{o^2}{2} f''(x,y) \\ & + \frac{i^3}{2.3} f'''(x,y) + \frac{i^2 o}{2} f'''(x,y) + \frac{io^2}{2} f'''(x,y) + \frac{o^3}{2.3} f'''(x,y) \\ & + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

dans lequel la forme générale du terme est

$$\frac{i^m o^n}{(1.2.3\dots m)(1.2.3\dots n)} f^{m,n}(x,y).$$

Dans l'opération que nous venons de faire pour avoir le développement de $f(x+i, y+o)$, nous avons commencé par substituer, dans $f(x,y)$, $x+i$ pour x, et nous avons développé suivant i; nous avons ensuite substitué, dans tous les termes de ce développement, $y+o$ pour y, et nous avons développé suivant o.

Or il est visible qu'on aurait identiquement le même résultat si l'on commençait l'opération par la substitution de $y+o$ à la place de y, et par le développement suivant o, et qu'on fît ensuite la substitution de $x+i$ pour x, et le développement suivant i.

De cette manière on aurait d'abord les fonctions primes, secondes, ... relatives à y, c'est-à-dire, suivant la notation que nous venons d'employer, les fonctions

$$f'(x,y), \quad f''(x,y), \quad \dots.$$

Ensuite on aurait les fonctions primes, secondes, ... de celles-ci relatives à x, et qui seraient désignées par

$$\begin{aligned} & f'',(x,y), \quad f'',(x,y), \quad \dots, \\ & f'',(x,y), \quad f'',(x,y), \quad \dots, \end{aligned}$$

et l'on obtiendrait ainsi la même formule que ci-dessus, comme cela doit être.

Mais il faut remarquer que, dans le premier procédé, la fonction $f'',(x+y)$, relative à la fois à x et à y, s'obtient en prenant d'abord la fonction prime de $f(x,y)$ relativement à x, ce qui donne $f'(x,y)$, et ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à y, d'où résulte la fonction seconde $f'',(x,y)$; et, dans le second procédé, la même fonction s'obtient en prenant d'abord la fonction prime de $f(x,y)$ relativement à y, ce qui donne $f'(x,y)$, et ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à x, ce qui donne également $f'',(x,y)$.

D'où il suit qu'il est indifférent dans quel ordre se fasse la double opération nécessaire pour passer de la fonction primitive $f(x,y)$ à la double dérivée $f'',(x,y)$.

Et, comme on doit dire la même chose des autres fonctions dérivées dénotées par des traits séparés par une virgule, on en peut conclure, en général, que les opérations indiquées par les traits placés avant et après la virgule sont absolument indépendantes entre elles, et qu'elles conduisent aux mêmes résultats, quelque ordre qu'on suive en prenant les fonctions dérivées relativement à x et y, indiquées par les traits qui précèdent ou qui suivent la virgule.

Ainsi on aura également la valeur de la fonction dérivée triple $f'',(x,y)$, en prenant la fonction seconde de $f(x,y)$ relativement à x, et ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à y, ou en prenant d'abord la fonction prime de $f(x,y)$ relativement à y, et ensuite la fonction seconde de celle-ci relativement à x, ou bien encore en prenant la fonction prime de $f(x,y)$ relativement à x, ensuite la fonction prime de celle-ci relativement à y, et enfin la fonction prime de cette dernière relativement à x, et ainsi de suite.

Soit, par exemple,

$$f(x,y) = \frac{x^3}{y^2};$$

on aura les fonctions primes, relatives à x et y,

$$f'(x,y) = \frac{3x^2}{y^2}, \qquad f'(x,y) = -\frac{2x^3}{y^3}.$$

La première donnera, relativement à y, la dérivée

$$f'_{,'}(x,y) = -\frac{6x^2}{y^2},$$

et la seconde donnera également, relativement à x,

$$f'_{,'}(x,y) = -\frac{6x^2}{y^2};$$

ensuite on aura, relativement à x et à y seuls,

$$f''_{,}(x,y) = \frac{6x}{y^2}, \qquad f'_{,''}(x,y) = \frac{6x^2}{y^4}.$$

La dérivée, relativement à y, de $f''_{,}(x,y)$ sera

$$f''_{,'}(x,y) = -\frac{12x}{y^3},$$

et la dérivée, relativement à x, de $f'_{,'}(x,y)$ sera aussi

$$f''_{,'}(x,y) = -\frac{12x}{y^3},$$

et ainsi des autres.

A l'imitation de ce que nous avons fait sur les fonctions d'une variable, si l'on suppose que la variable z soit une fonction de deux variables x et y, soit explicite, soit donnée simplement par une équation quelconque entre x, y et z, on pourra désigner par

$$z', \quad z'', \quad z'_{,}, \quad z'_{,'}, \quad z''_{,}, \quad \ldots$$

ses différentes fonctions dérivées, en appliquant à la lettre z les traits avec la virgule qu'on applique à la caractéristique f.

Ainsi, x devenant $x+i$ et y devenant en même temps $y+o$, la valeur de z deviendra

$$z + iz'_{,} + oz'_{,} + \frac{i^2}{2}z''_{,} + ioz'_{,'} + \frac{o^2}{2}z''_{,} + \frac{i^3}{2.3}z'''_{,} + \frac{i^2o}{2}z''_{,'} + \ldots,$$

et le terme général de cette série sera

$$\frac{i^m o^n}{(1.2.3\ldots m)(1.2.3\ldots n)} z^{(m,n)}.$$

On voit que les fonctions de deux variables engendrent, par le développement, différentes sortes de fonctions dérivées dont la dérivation répond à chacune de ces variables, et que ces fonctions dérivées se forment de la même manière et par les mêmes règles que celles d'une seule variable, en considérant chaque variable séparément et successivement; d'où il suit que tout ce que nous avons démontré sur les fonctions d'une seule variable pourra s'appliquer de même aux fonctions de deux variables, relativement à chacune d'elles.

On pourra donc aussi étendre la théorie des fonctions dérivées aux fonctions de trois variables ou d'un plus grand nombre; car il ne s'agira que de répéter séparément, pour chaque variable, les mêmes opérations, et de les désigner par une notation semblable.

Dans les Leçons précédentes, où nous ne considérions que les fonctions dérivées relativement à une seule variable, lorsqu'il s'est présenté des fonctions de plusieurs variables, nous nous sommes contentés de renfermer, sous la caractéristique des fonctions dérivées, la variable par rapport à laquelle nous voulions avoir la fonction dérivée.

Ainsi, pour ne pas anticiper sur ce qui regarde les fonctions dérivées relatives à plusieurs variables, nous avons dénoté jusqu'ici par $f'(x)$, $f''(x)$, ... les fonctions dérivées de $f(x,y)$ relatives à la seule variable x, qui, suivant la notation précédente, seraient $f'_{,}(x,y)$, $f''_{,}(x,y)$, ...

Cette manière de noter les fonctions dérivées relativement à une seule variable nous suffisait alors, et nous pourrons l'employer encore quelquefois, pour plus de commodité, pourvu qu'on soit prévenu de son identité avec la notation que nous venons d'établir.

Quoique, dans les fonctions de deux variables que nous considérons ici, les deux variables soient censées indépendantes, et que ce soit même cette indépendance qui produise les différentes espèces de fonc-

tions dérivées dont nous venons de parler, rien n'empêche cependant qu'on ne puisse regarder ces variables elles-mêmes comme des fonctions d'une autre variable quelconque, mais fonctions indéterminées et arbitraires.

Par cette considération, on peut ramener, en quelque manière, la théorie des fonctions de deux variables à celle des fonctions d'une seule, et appliquer, surtout au développement des fonctions de deux ou de plusieurs variables, ce que nous avons démontré dans la Leçon XVIII, sur le développement des fonctions d'une seule variable.

Soit z une fonction de deux variables x et y; supposons que chacune de ces variables soit elle-même une fonction d'une autre variable t, de manière que z devienne une simple fonction de t; sous ce point de vue, lorsque t devient $t+i$, z deviendra, par la formule générale (Leçon II),

$$z + iz' + \frac{i^2}{2}z'' + \frac{i^3}{2.3}z''' + \dots.$$

Et si, dans ce développement, on veut s'arrêter au terme $\mu^{\text{ième}}$ (Leçon IX), on aura les limites du reste par le terme qui suivra, savoir,

$$\frac{i^\mu}{1.2.3\dots\mu}z^{(\mu)},$$

en mettant $t+i$ à la place de t dans la fonction $z^{(\mu)}$ et prenant la plus grande et la plus petite valeur de cette fonction depuis $i=0$ jusqu'à la valeur donnée de i, ou des valeurs quelconques plus grandes et plus petites que celle-ci.

Or, x et y étant supposées fonctions de t, lorsque t devient $t+i$, x et y deviennent, par la même formule générale,

$$x + ix' + \frac{i^2}{2}x'' + \dots,$$

$$y + iy' + \frac{i^2}{2}y'' + \dots,$$

et l'on trouvera les valeurs des fonctions dérivées $z', z'', \dots$ en $x, y, x', y', x'', y'', \dots$ par les procédés exposés dans la Leçon VI.

Si l'on ne veut avoir le développement de z que par rapport aux accroissements ix' et iy' de x et y, il n'y aura qu'à supposer x' et y' constants; par conséquent

$$x''=0, \quad y''=0, \quad \dots,$$

et x' et y' pourront être des coefficients quelconques.

Si, dans les accroissements de x et y, on voulait considérer les deux termes

$$ix' + \frac{i^2}{2}x'', \qquad iy' + \frac{i^2}{2}y'',$$

on ne ferait alors que

$$x''=0, \quad y''=0, \quad \dots,$$

et x', x'', y', y'' pourraient être prises pour des constantes quelconques, et ainsi de suite.

Soit, par exemple,

$$z=(x^2+y^2)^m;$$

on aura, en prenant les dérivées d'après la Leçon VI, et supposant x', y' constantes,

$$z' = 2m(xx'+yy')(x^2+y^2)^{m-1},$$

$$z'' = 2m(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)^{m-1} + 4m(m-1)(xx'+yy')^2(x^2+y^2)^{m-2},$$

$$z''' = 12m(m-1)(x'^2+y'^2)(xx'+yy')(x^2+y^2)^{m-2} + 8m(m-1)(m-2)(xx'+yy')^3(x^2+y^2)^{m-3},$$

et ainsi de suite.

Donc, lorsque x et y deviennent $x+ix'$, $y+iy'$, on aura

$$[(x+ix')^2+(y+iy')^2]^m = (x^2+y^2)^m + 2m(xx'+yy')(x^2+y^2)^{m-1}i + [2m(x'^2+y'^2)(x^2+y^2)^{m-1} + 4m(m-1)(xx'+yy')^2(x^2+y^2)^{m-2}]\frac{i^2}{2} + \dots.$$

Si l'on veut s'arrêter à ces trois premiers termes, alors, le terme

suivant étant $\frac{i^3}{2.3}z'''$, on aura les limites du reste en substituant $x+ix'$, $y+iy'$, au lieu de x et de y, dans l'expression de z''', et prenant la plus grande et la plus petite valeur de cette expression depuis $i=0$.

Si $m-3$ est un nombre positif, et que x' et y' soient aussi des quantités positives, il est facile de voir que la plus petite valeur de z''' sera

$$12m(m-1)(x'^2+y'^2)(xx'+yy')(x^2+y^2)^{m-2}$$
$$+8m(m-1)(m-2)(xx'+yy')^3(x^2+y^2)^{m-3},$$

qui répond à $i=0$, et que la plus grande sera cette même quantité, en y mettant $x+ix'$ et $y+iy'$ à la place de x et y.

Si l'on voulait avoir le développement de z répondant à $x+i$ et $y+o$, comme dans le commencement de cette Leçon, il est clair qu'il n'y aurait qu'à faire

$$x'=1, \qquad iy'=o;$$

on trouverait des résultats semblables.

Car, en désignant par des traits sans virgule les fonctions dérivées par rapport à la variable principale t, et par des traits séparés par une virgule les fonctions dérivées relativement à chacune des variables x et y, comme nous l'avons fait ci-dessus, on aura, suivant ce qu'on a vu dans la Leçon VI sur les dérivées des fonctions composées d'autres fonctions,

$$z'=x'z'_{,}+y'z'_{,};$$

de là, en prenant les fonctions dérivées par rapport à la variable principale t,

$$z''=x''z'_{,}+y''z'_{,}+x'(z'_{,})'+y'(z'_{,})'.$$

Mais, $z'_{,}$ et $z'_{,}$ étant aussi regardées comme des fonctions de x et y, leurs dérivées relatives à t seront

$$(z'_{,})'=x'z''_{,}+y'z''_{,}, \qquad (z'_{,})'=x'z''_{,}+y'z'''_{,};$$

Donc, substituant,

$$z''=x''z'_{,}+y''z'_{,}+x'^2z''_{,}+2x'y'z''_{,}+y'^2z'''_{,},$$

et ainsi de suite.

Si les fonctions dérivées x' et y', relativement à t, sont constantes, en sorte que $x''=0$, $y''=0$, $x'''=0$, ..., on aura simplement

$$z' = x'z'_{,}+y'z'_{,},$$
$$z'' = x'^2z''_{,}+2x'y'z''_{,}+y'^2z'_{,},$$
$$z''' = x'^3z'''_{,}+3x'^2y'z''_{,}+3x'y'^2z''_{,}+y'^3z'_{,},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$z^{(m)}=x'^mz^{(m)}_{,}+mx'^{m-1}y'z^{(m-1)}_{,}+\frac{m(m-1)}{2}x'^{m-2}y'^2z^{(m-2)}_{,}+\ldots.$$

Ces valeurs, substituées dans la formule générale

$$z+iz'+\frac{i^2}{2}z''+\frac{i^3}{2.3}z'''+\ldots,$$

donnent

$$z+i(x'z'_{,}+y'z'_{,})$$
$$+\frac{i^2}{2}(x'^2z''_{,}+2x'y'z''_{,}+y'^2z'_{,})$$
$$+\frac{i^3}{2.3}(x'^3z'''_{,}+3x'^2y'z''_{,}+3x'y'^2z''_{,}+y'^3z'_{,})$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Et, si l'on fait

$$x'=1, \qquad iy'=o,$$

on aura la même formule trouvée plus haut pour le développement de z, suivant les puissances de i et o.

Les expressions des fonctions z', z'', ... que nous venons de trouver donnent la composition des fonctions dérivées de fonctions quelconques des deux variables x et y.

Ainsi, en faisant

$$x'=1,$$

ce qui revient à prendre x pour variable principale, c'est-à-dire à regarder y comme fonction de x, si l'on veut que

$$\psi(x,y)+y'\varphi(x,y)$$

soit une fonction dérivée d'une fonction de x et y, en la comparant à

l'expression de z', il faudra que l'on ait

$$\psi(x,y)=z'', \qquad \varphi(x,y)=z''.$$

Pour éliminer z de ces deux équations, il n'y a qu'à prendre leurs dérivées par rapport à y pour la première, et par rapport à x pour la seconde; on aura ainsi

$$\psi'(y)=z'', \qquad \varphi'(x)=z'',$$

d'où l'on tire

$$\psi'(y)=\varphi'(x).$$

C'est l'équation de condition connue pour que la formule

$$\psi(x,y)+y'\,\varphi(x,y)$$

puisse être une dérivée exacte d'une fonction de x et y, indépendamment d'aucune relation entre x et y.

Ainsi, sans cette condition, il serait illusoire de supposer l'équation

$$z'=x'\,\psi(x,y)+y'\,\varphi(x,y),$$

à moins d'admettre en même temps une relation quelconque entre x et y, ou entre x, y, z.

En général, si l'on avait l'équation

$$z'=x'\,\psi(x,y,z)+y'\,\varphi(x,y,z),$$

on trouverait, par les mêmes principes, la condition nécessaire pour qu'elle pût avoir une équation primitive indépendamment d'aucune relation particulière entre x, y, z.

Car, en comparant cette expression de z' avec l'expression générale de z' donnée ci-dessus, on a pareillement

$$\psi(x,y,z)=z'', \qquad \varphi(x,y,z)=z''.$$

Pour que ces deux équations s'accordent, il faudra que la dérivée de $\psi(x,y,z)$ par rapport à y soit égale à la dérivée de $\varphi(x,y,z)$ par rapport à x, puisque l'une et l'autre deviennent z''.

Or, z étant censée fonction de x, y (puisque, si l'équation proposée

a une primitive, la valeur de z sera déterminée par cette primitive en fonction de x et y), il faudra la regarder comme telle dans les fonctions $\psi(x,y,z)$ et $\varphi(x,y,z)$; et, d'après notre notation, il est clair que la dérivée de $\psi(x,y,z)$, par rapport à y, sera exprimée par

$$\psi'(y)+\psi'(z)\,z'',$$

et que la dérivée de $\varphi(x,y,z)$, par rapport à x, sera

$$\varphi'(x)+\varphi'(z)\,z''.$$

On aura donc l'équation de condition

$$\psi'(y)+\psi'(z)\,z''=\varphi'(x)+\varphi'(z)\,z'',$$

savoir, en substituant pour z'' et z'' leurs valeurs,

$$\psi'(y)+\psi'(z)\,\varphi(x,y,z)=\varphi'(x)+\varphi'(z)\,\psi(x,y,z);$$

et cette équation devra avoir lieu d'elle-même, c'est-à-dire être identique pour que la variable z puisse être une fonction de x et y, et que, par conséquent, la proposée ait une primitive en x, y et z. Dans ce cas, on trouvera facilement cette primitive au moyen de l'une ou de l'autre des deux équations

$$z''=\psi(x,y,z), \qquad z''=\varphi(x,y,z).$$

Car, prenant, par exemple, l'équation

$$z''=\psi(x,y,z),$$

dans laquelle z'' est la dérivée de z en y regardant y comme constant, on pourra la traiter comme une équation du premier ordre entre x et z, l'autre variable y étant supposée constante; et, ayant trouvé sa primitive dans cette supposition, il faudra regarder la constante arbitraire comme une fonction inconnue de y, qu'on déterminera ensuite par le moyen de l'autre équation

$$z''=\varphi(x,y,z).$$

Mais, lorsque l'équation de condition que nous venons de trouver

n'aura pas lieu d'elle-même, l'équation proposée ne pourra pas subsister, à moins qu'on ne suppose une relation quelconque entre x, y, z, de manière que deux de ces variables deviennent fonctions de la troisième.

Ainsi, dans ce cas, en supposant

$$z = f(x, y),$$

on aura

$$z' = f'(x) + y' f'(y);$$

et, substituant ces valeurs dans l'équation ci-dessus, on aura alors une équation en x, y et y', par laquelle on pourra trouver la valeur de y en x, et l'on aura y et z en fonctions données de x, la fonction $f(x, y)$ demeurant indéterminée.

Mais, comme on pourrait avoir ainsi une équation du premier ordre en x et y, dont il serait difficile et peut-être impossible de trouver l'équation primitive, on a cherché les moyens de donner à la fonction arbitraire une forme telle que l'on ait immédiatement, pour la détermination de y et z en x, deux équations entre ces variables.

Pour en donner un exemple très simple, supposons l'équation

$$z' = xy(x + yy');$$

on aura ici

$$\psi(x, y) = x^2 y, \qquad \varphi(x, y) = xy^2;$$

donc

$$\psi'(y) = x^2, \qquad \varphi'(x) = y^2.$$

Ainsi il est impossible que z soit une fonction de x et y, regardées comme indépendantes entre elles.

On fera donc

$$y = f(x),$$

et l'on aura

$$y' = f'(x);$$

donc

$$z' = x^2 f(x) + x f^2(x) f'(x);$$

par conséquent z sera égal à la fonction primitive de

$$x^2 f(x) + x f^2(x) f'(x).$$

Mais on peut éviter la recherche de cette fonction primitive, en mettant le terme xy^2y' de l'expression de z' sous la forme $\left(\frac{xy^3}{3}\right)' - \frac{y^3}{3}$, ce qui réduit l'équation à cette forme

$$z' = \left(\frac{xy^3}{3}\right)' + yx^2 - \frac{y^3}{3},$$

et supposant ensuite

$$yx^2 - \frac{y^3}{3} = f'(x),$$

moyennant quoi elle devient

$$z' = \left(\frac{xy^3}{3}\right)' + f'(x),$$

dont la primitive est

$$z = \frac{xy^3}{3} + f(x).$$

Ainsi ces deux équations remplacent conjointement l'équation proposée, la fonction $f(x)$ demeurant arbitraire.

On doit dire, à plus forte raison, la même chose des équations que l'on pourrait supposer entre x, y, z et y', z', dans lesquelles les fonctions dérivées y', z' monteraient à des puissances quelconques.

Qu'on suppose, par exemple, l'équation

$$z'^2 = 1 + y'^2;$$

en faisant

$$y = f(x),$$

on aurait

$$z' = \sqrt{1 + f'^2(x)}.$$

Et il faudrait, pour avoir z en x, trouver la fonction primitive de $\sqrt{1 + f'^2(x)}$, ce qui est impossible tant que la fonction $f(x)$ demeurera indéterminée, à moins d'employer les séries.

Mais, en introduisant une troisième variable, on peut avoir des expressions finies de x, y, z en fonction de cette même variable.

Pour cela il faut rétablir la fonction prime x', qui est $= 1$ lorsque x est la variable principale, et substituer, par conséquent, $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{z'}{x'}$ à la

place de y' et z', conformément aux principes établis dans la Leçon septième. Ainsi l'équation sera

$$z'^2 = x'^2 + y'^2.$$

Pour résoudre cette équation de la manière la plus générale, nous emploierons un principe dont nous ferons, dans la suite, un plus grand usage, et qui consiste à trouver d'abord des expressions de x, y, z qui y satisfassent avec des constantes arbitraires, et à rendre ensuite ces constantes variables, de manière que les expressions des dérivées x', y', z' restent les mêmes.

Prenons un angle arbitraire ω; puisque

$$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1,$$

en multipliant le second membre de l'équation proposée par

$$\sin^2\omega + \cos^2\omega,$$

le premier ne changera pas.

Or le produit de $x'^2 + y'^2$ par $\sin^2\omega + \cos^2\omega$ peut se mettre sous la forme

$$(y'\cos\omega - x'\sin\omega)^2 + (y'\sin\omega + x'\cos\omega)^2;$$

de sorte que l'équation proposée deviendra

$$z'^2 = (y'\cos\omega - x'\sin\omega)^2 + (y'\sin\omega + x'\cos\omega)^2.$$

Supposons

$$y'\sin\omega + x'\cos\omega = 0,$$

ce qui est permis à cause de l'indéterminée ω; on aura, en extrayant la racine carrée des deux membres,

$$z' = y'\cos\omega - x'\sin\omega.$$

Regardons d'abord l'angle ω comme constant; les deux équations que nous venons de trouver auront pour primitives ces deux-ci :

$$z = y\cos\omega - x\sin\omega + a,$$
$$y\sin\omega + x\cos\omega = b,$$

a et b étant deux constantes arbitraires.

Ainsi ces deux équations donnent des valeurs de y et z en x qui satisfont à l'équation proposée, quelles que soient les valeurs des trois constantes a, b et ω, comme on peut s'en assurer par la substitution.

Or il est facile de concevoir que ces mêmes valeurs satisferont encore à la proposée, en supposant que les quantités a, b et ω soient variables, pourvu que les dérivées x', y', z' restent les mêmes, ce qui aura lieu si, en prenant les dérivées des deux équations précédentes, les termes dus aux dérivées de a, b et ω se détruisent.

Il n'y aura donc qu'à prendre les dérivées des mêmes équations par rapport à a, b et ω, et déterminer, par leur moyen, les variables a et b.

Regardons dans ces dérivées la variable ω comme la principale; nous ferons

$$\omega' = 1,$$

et l'on aura

$$-y\sin\omega - x\cos\omega + a' = 0,$$
$$y\cos\omega - x\sin\omega = b'.$$

Mais nous avons déjà

$$y\sin\omega + x\cos\omega = b;$$

donc on aura

$$-b + a' = 0,$$

ce qui donne

$$b = a'$$

et, par conséquent,

$$b' = a''.$$

Ainsi on aura ces trois équations

$$z = y\cos\omega - x\sin\omega + a,$$
$$y\sin\omega + x\cos\omega = a',$$
$$y\cos\omega - x\sin\omega = a''.$$

Mais, a étant une fonction quelconque de ω, si on la dénote par $f(\omega)$, on aura

$$a' = f'(\omega), \qquad a'' = f''(\omega),$$

et les trois équations précédentes fourniront ces expressions de x, y, z en ω,

$$x = \cos\omega f'(\omega) - \sin\omega f''(\omega),$$
$$y = \sin\omega f'(\omega) + \cos\omega f''(\omega),$$
$$z = f(\omega) + f''(\omega),$$

la fonction $f(\omega)$ demeurant arbitraire.

Ces formules pourraient servir à trouver des courbes rectifiables; car, si x et y sont les coordonnées rectangles d'une courbe plane, et z l'arc correspondant, on sait, par le Calcul différentiel, et je l'ai démontré rigoureusement dans la *Théorie des fonctions* (¹), que l'on a

$$z' = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

en regardant x et y comme fonctions d'une même variable quelconque.

Si l'on fait $f'(\omega) = m$, on a

$$f''(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(\omega) = m\omega + n;$$

les formules précédentes donneront

$$x = m\cos\omega, \qquad y = m\sin\omega, \qquad z = m\omega + n,$$

ce qui est le cas du cercle.

En prenant pour $f(\omega)$ des fonctions quelconques de $\sin\omega$ et $\cos\omega$, on aura autant de courbes algébriques qu'on voudra, dont la rectification sera algébrique aussi, problème sur lequel les géomètres se sont autrefois beaucoup exercés, et dont on peut voir différentes solutions dans le tome V des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*.

Les équations dont nous venons de nous occuper sont connues sous le nom d'*équations qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité*. On trouve des solutions élégantes de plusieurs de ces équations dans un Mémoire de Monge imprimé dans le *Recueil de l'Académie des Sciences* pour l'année 1784.

La notation que nous avons employée pour désigner les fonctions

(¹) *OEuvres de Lagrange*, t. IX.

dérivées de z par rapport à x et y, par des traits séparés par une virgule, est, comme l'on voit, très simple et conforme à la nature de la chose; mais elle ne met pas en évidence les variables auxquelles chaque groupe de traits doit se rapporter; et, si l'on avait des fonctions de plus de deux variables, la multitude des virgules pourrait rendre la notation incommode et causer de la confusion par rapport aux variables auxquelles les différentes fonctions dérivées répondraient.

On pourrait, dans ces cas, employer avec avantage la notation que j'ai déjà proposée dans l'Ouvrage sur la *Résolution des équations numériques* (¹), et qui dérive aussi de la nature de ce calcul.

En effet, la formule donnée plus haut

$$z' = x'z'_{,} + y'z'_{,}$$

fait voir que, si l'on veut considérer à part les dérivées relatives à x et y, on a, par rapport à x,

$$z' = x'z'_{,};$$

donc

$$z'_{,} = \frac{z'}{x'};$$

ici z' ne doit être pris que par rapport à la variable t, en tant qu'elle est renfermée dans la fonction x; et, pour indiquer ce point de vue, il n'y a qu'à enfermer l'expression $\frac{z'}{x'}$ entre deux parenthèses, ce qui donnera

$$z'_{,} = \left(\frac{z'}{x'}\right).$$

On aura pareillement, par rapport à y,

$$z' = y'z'_{,};$$

donc

$$z'_{,} = \frac{z'}{y'};$$

en renfermant l'expression $\frac{z'}{y'}$ entre deux parenthèses, pour indiquer

(¹) *OEuvres de Lagrange*, t. VIII.

qu'ici la dérivée z' n'est relative à la variable t qu'autant qu'elle est renfermée dans y, on aura

$$z' = \left(\frac{z'}{y'}\right).$$

De cette manière, l'expression de la dérivée z' prendra cette forme

$$z' = x'\left(\frac{z'}{x'}\right) + y'\left(\frac{z'}{y'}\right),$$

où l'on voit que $\left(\frac{z'}{x'}\right)$, $\left(\frac{z'}{y'}\right)$ ne sont proprement que les coefficients de x' et de y' dans l'expression de la dérivée z'.

Comme la variable t, dont on suppose que x et y sont fonctions, demeure indéterminée, en prenant x pour t, on aurait

$$x' = 1;$$

l'expression $\left(\frac{z'}{x'}\right)$ deviendrait alors simplement (z'), et indiquerait, comme elle le doit, la fonction dérivée de z par rapport à la variable principale x; de même, en prenant y pour t, on aurait

$$y' = 1,$$

et l'expression $\left(\frac{z'}{y'}\right)$ deviendrait aussi (z'), et indiquerait la fonction dérivée de z par rapport à la variable principale y.

Mais, pour distinguer ces fonctions l'une de l'autre, nous retiendrons toujours les lettres x' et y' sous z', et nous entendrons simplement par $\left(\frac{z'}{x'}\right)$, $\left(\frac{z'}{y'}\right)$ les fonctions dérivées de z par rapport à x et y.

D'ailleurs cette manière d'exprimer les fonctions dérivées a l'avantage de faciliter la transformation de ces fonctions lorsqu'on veut les rapporter à d'autres variables.

Ainsi, comme l'expression $\left(\frac{z'}{x'}\right)$ indique que z est regardé comme fonction de x, l'expression réciproque $\left(\frac{x'}{z'}\right)$ indiquerait que x serait regardé comme fonction de z; et il est facile de se convaincre, par la

nature de ces expressions, que l'on a, en effet,

$$\left(\frac{z'}{x'}\right)\cdot\left(\frac{x'}{z'}\right) = 1,$$

comme si les parenthèses n'existaient pas, de sorte que l'on aura

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x'}{z'}\right)}.$$

Si donc, au lieu de regarder z comme fonction de x et y, on voulait regarder x comme fonction de z et y, on substituerait d'abord $\frac{1}{\left(\frac{x'}{z'}\right)}$ à la place de $\left(\frac{z'}{x'}\right)$.

Ensuite, pour avoir la valeur de l'autre fonction dérivée $\left(\frac{z'}{y'}\right)$, on remarquerait qu'ici la variable x est censée constante, puisque z n'est regardée que comme fonction de y.

Or, x étant supposée fonction de y et z, on aura, en général,

$$x' = \left(\frac{x'}{y'}\right)y' + \left(\frac{x'}{z'}\right)z';$$

donc, pour que x soit constante, x' devra être zéro, ce qui donnera l'équation

$$\left(\frac{x'}{y'}\right)y' + \left(\frac{x'}{z'}\right)z' = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{z'}{y'} = -\frac{\left(\frac{x'}{y'}\right)}{\left(\frac{x'}{z'}\right)},$$

et cette valeur de $\frac{z'}{y'}$, tirée de la supposition de x constante, sera, par conséquent, la même que celle de $\left(\frac{z'}{y'}\right)$.

D'où il suit que l'on aura ces transformées

$$\left(\frac{z'}{x'}\right) = \frac{1}{\left(\frac{x'}{z'}\right)}, \qquad \left(\frac{z'}{y'}\right) = -\frac{\left(\frac{x'}{y'}\right)}{\left(\frac{x'}{z'}\right)}.$$

De sorte que, si l'on a une équation qui contienne x, y, z avec les fonctions dérivées $\left(\frac{z'}{x'}\right)$, $\left(\frac{z'}{y'}\right)$, elle ne changera pas essentiellement par les substitutions précédentes; seulement, au lieu de supposer z fonction de x et y, ce sera x qui sera fonction de y et z, et ainsi pour les cas semblables.

Maintenant, puisque $\left(\frac{z'}{x'}\right)$ est une fonction de x et y, on aura de même, en prenant sa dérivée relativement à t,

$$\left(\frac{z'}{x'}\right)' = x'\left(\frac{\left(\frac{z'}{x'}\right)'}{x'}\right) + y'\left(\frac{\left(\frac{z'}{x'}\right)'}{y'}\right);$$

mais, comme x' et y', entre les parenthèses, n'ont qu'une signification de convention, on peut, sans inconvénient, écrire

$$\left(\frac{z''}{x'^2}\right), \quad \left(\frac{z''}{x'y'}\right) \qquad \text{à la place de} \qquad \left(\frac{\left(\frac{z'}{x'}\right)'}{x'}\right), \quad \left(\frac{\left(\frac{z'}{x'}\right)'}{y'}\right),$$

et, par conséquent,

$$\left(\frac{z'}{x'}\right)' = x'\left(\frac{z''}{x'^2}\right) + y'\left(\frac{z''}{x'y'}\right).$$

On aura de même

$$\left(\frac{z'}{y'}\right)' = x'\left(\frac{z''}{x'y'}\right) + y'\left(\frac{z''}{y'^2}\right),$$

où l'on voit que les symboles

$$\left(\frac{z''}{x'^2}\right), \quad \left(\frac{z''}{x'y'}\right), \quad \left(\frac{z''}{y'^2}\right)$$

expriment ici ce que nous avions dénoté plus haut par les signes

$$z'', \quad z'', \quad z''.$$

Donc la dérivée seconde de z, c'est-à-dire la valeur de z'' que nous avons donnée plus haut, sera représentée ainsi

$$z'' = x''\left(\frac{z'}{x'}\right) + y''\left(\frac{z'}{y'}\right) + x'^2\left(\frac{z''}{x'^2}\right) + 2x'y'\left(\frac{z''}{x'y'}\right) + y'^2\left(\frac{z''}{y'^2}\right).$$

On voit ici que $\left(\frac{z''}{x'^2}\right)$ et $\left(\frac{z''}{y'^2}\right)$ sont aussi les coefficients de x'^2 et y'^2 dans l'expression complète de z'', mais que $\left(\frac{z''}{x'y'}\right)$ n'est plus le simple coefficient de $x'y'$ dans la même expression, comme on serait porté à le supposer d'après sa notation.

En général, l'expression $\left(\frac{z^{(m+n)}}{x'^m y'^n}\right)$ dénotera ce que nous avions dénoté par $z^{(m,n)}$, c'est-à-dire la fonction dérivée de z de l'ordre $(n+m)^{\text{ième}}$, prise m fois relativement à x, et n fois relativement à y.

Cette dernière notation se rapproche, comme l'on voit, de celle qui est depuis longtemps en usage chez les analystes pour désigner les différences qu'on appelle *partielles*.

En effet, il est visible que les fonctions dérivées que nous désignons ici par

$$\left(\frac{z'}{x'}\right), \quad \left(\frac{z'}{y'}\right), \quad \left(\frac{z''}{x'^2}\right), \quad \left(\frac{z''}{x'y'}\right), \quad \ldots$$

ne sont autre chose que les quantités

$$\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dz}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dx^2}, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy}, \quad \ldots,$$

que plusieurs géomètres, à l'exemple d'Euler, renferment aussi entre deux parenthèses.

Ainsi on aura, en général, ces notations correspondantes

$$z^{(m,n)} = \left(\frac{z^{(m+n)}}{x'^m y'^n}\right) = \left(\frac{d^{(m+n)}z}{dx^m dy^n}\right).$$

Après avoir donné la manière de former et de noter les fonctions dérivées relativement à différentes variables, nous allons considérer les équations qui contiennent des fonctions de ce genre, et qu'on peut appeler *équations dérivées à plusieurs variables*.