
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 1 2 3 4 5 6 7 8 9 20


美術文庫
洋畫

桑木文庫
洋書
0565

物理
08
L
1.10

九州帝國大學理學部
8433
物理學教室

理学部 洋 遡及
022232002008885
九州大学蔵書

801900

ŒUVRES

DE LAGRANGE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

ŒUVRES
DE LAGRANGE,

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE M. J.-A. SERRET,

SOUS LES AUSPICES DE

M. LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME DIXIÈME.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXXXIV

19. 4. 25
130nh9

CINQUIÈME SECTION.

(SUITE.)

OUVRAGES DIDACTIQUES.

圖書館

LEÇONS

SUR LE

CALCUL DES FONCTIONS.

TROISIÈME ÉDITION

RÉIMPRIMÉE

D'APRÈS LA DEUXIÈME ÉDITION DE 1806.

LEÇONS

SUR

LE CALCUL
DES FONCTIONS,

NOUVELLE ÉDITION,

revue, corrigée et augmentée par l'Auteur.

A PARIS,

Chez COURCIER, Impr.-Libraire pour les Mathématiques,
quai des Augustins, n° 57.

AN 1806.

AVERTISSEMENT.

Les Leçons suivantes, (*) destinées à servir de commentaire et de supplément à la première Partie de la *Théorie des fonctions analytiques*, offrent un cours d'Analyse sur cette partie du calcul qu'on nomme communément *infinitésimale* ou *transcendante*, et qui n'est proprement que le Calcul des fonctions.

Ceux qui ont étudié le Calcul différentiel pourront se former, dans ces Leçons, des notions simples et exactes de ce Calcul; ils y trouveront aussi des formules et des méthodes nouvelles, ou qui n'ont pas encore été présentées avec toute la clarté et la généralité qu'on pourrait désirer.

Dans cette nouvelle Édition, on a retouché plusieurs endroits pour y mettre plus de clarté et de simplicité, et on a inséré différentes additions dont les principales se trouvent dans les Leçons dix-huitième, vingt et unième et vingt-deuxième. Cette dernière contient un traité complet du Calcul des variations.

(*) Les Leçons I à XIX ont été professées à l'École Polytechnique, pendant l'an VII (1799), par Lagrange, qui les a fait paraître dans le tome X de la nouvelle édition des *Séances des Écoles Normales*, an IX (1801), en y ajoutant une XX^e^ Leçon.

Ces vingt Leçons ont été réimprimées dans le XII^e^ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, an XII (1804).

Lagrange a publié, en un volume in-8° (1806), une deuxième édition contenant deux Leçons nouvelles (XXI^e^ et XXII^e^), qui ont été reproduites ultérieurement dans le XIV^e^ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* (1808).

(*Note de l'Éditeur.*)

LEÇONS

SUR LE

CALCUL DES FONCTIONS.

LEÇON PREMIÈRE.

SUR L'OBJET DU CALCUL DES FONCTIONS ET SUR LES FONCTIONS EN GÉNÉRAL.

Le Calcul des fonctions a le même objet que le Calcul différentiel pris dans le sens le plus étendu, mais il n'est point sujet aux difficultés qui se rencontrent dans les principes et dans la marche ordinaire de ce Calcul : il sert de plus à lier le Calcul différentiel immédiatement à l'Algèbre, dont on peut dire qu'il a fait jusqu'à présent une science séparée.

On connaît les difficultés qu'offre la supposition des infiniment petits, sur laquelle Leibnitz a fondé le Calcul différentiel. Pour les éviter, Euler regarde les différentielles comme nulles, ce qui réduit leur rapport à l'expression zéro divisé par zéro, laquelle ne présente aucune idée.

Maclaurin et d'Alembert emploient la considération des limites et regardent le rapport des différentielles comme la limite du rapport des différences finies, lorsque ces différences deviennent nulles.

Cette manière de représenter les quantités différentielles ne fait que reculer la difficulté; car, en dernière analyse, le rapport des différences évanouissantes se réduit encore à celui de zéro à zéro.

D'ailleurs on peut observer que c'est improprement qu'on applique

le mot connu de limite à ce que devient une expression analytique lorsqu'on y fait évanouir certaines quantités, parce que ces limites, après avoir décru jusqu'à zéro, pourraient encore devenir négatives. De même qu'en Géométrie, on ne peut pas dire à la rigueur que la sous-tangente soit la limite des sous-sécantes, parce que rien n'empêche la sous-sécante de croitre encore lorsqu'elle est devenue sous-tangente.

Les véritables limites, suivant les notions des anciens, sont des quantités qu'on ne peut passer, quoiqu'on puisse s'en approcher aussi près que l'on veut; telle est, par exemple, la circonférence du cercle à l'égard des polygones inscrit et circonscrit, parce que, quelque grand que devienne le nombre des côtés, jamais le polygone intérieur ne sortira du cercle, ni l'extérieur n'y entrera. Ainsi les asymptotes sont de véritables limites des courbes auxquelles elles appartiennent, etc.

Au reste je ne disconviens pas qu'on ne puisse, par la considération des limites envisagées d'une manière particulière, démontrer rigoureusement les principes du Calcul différentiel, comme Maclaurin, d'Alembert et plusieurs auteurs après eux l'ont fait. Mais l'espèce de métaphysique que l'on est obligé d'y employer est sinon contraire, du moins étrangère à l'esprit de l'Analyse qui ne doit avoir d'autre métaphysique que celle qui consiste dans les premiers principes et dans les premières opérations fondamentales du calcul.

A l'égard de la méthode des fluxions, il est vrai qu'on ne peut considérer les fluxions que comme les vitesses avec lesquelles les grandeurs varient, et y faire abstraction de toute idée mécanique; mais la détermination analytique de ces vitesses dépend aussi, dans cette méthode, de la considération des quantités petites ou évanouissantes; elle est par conséquent sujette aux mêmes difficultés que le Calcul différentiel.

Quand on approfondit ces différentes méthodes ou plutôt ces différentes manières d'envisager la même méthode, on trouve qu'elles n'ont d'autre but que de donner le moyen d'obtenir séparément les premiers termes du développement d'une fonction, en les détachant et les isolant, pour ainsi dire, du reste de la série, parce que tous les problèmes

dont la solution exige le Calcul différentiel dépendent uniquement de ces premiers termes. Et l'on peut dire qu'on remplissait cet objet sans presque se douter que ce fût là le seul but des opérations du calcul qu'on employait.

La considération des courbes avait fait naître la méthode des infiniment petits, qu'on a ensuite transformée en méthode des évanouissants ou des limites, et la considération du mouvement avait fait naître celle des fluxions. On a transporté dans l'Analyse les principes qui résultaient de ces considérations; et l'on n'a pas vu d'abord, ou du moins il ne paraît pas qu'on ait vu que les problèmes qui dépendent de ces méthodes, envisagés analytiquement, se réduisent simplement à la recherche des fonctions dérivées qui forment les premiers termes du développement des fonctions données, ou à la recherche inverse des fonctions primitives par les fonctions dérivées.

Newton avait bien remarqué dans sa première solution du problème sur la courbe décrite par un corps grave, dans un milieu résistant, que ce problème devait se résoudre par les premiers termes de la série de l'ordonnée; mais il se trompa dans l'application de ce principe, et dans sa seconde solution il employa purement la méthode différentielle, en considérant les différences de quatre ordonnées successives; et, quoiqu'il ait laissé subsister le passage où il dit que le problème se résoudra par les premiers termes de la série, on voit que ce passage n'a plus de rapport immédiat à ce qui précède ni à ce qui suit.

Il est donc plus naturel et plus simple de considérer immédiatement le développement des fonctions, sans employer le circuit métaphysique des infiniment petits ou des limites; et c'est ramener le Calcul différentiel à une origine purement algébrique, que de le faire dépendre uniquement de ce développement.

Mais, à la naissance du Calcul différentiel, on n'avait pas encore une idée assez étendue de ce qu'on entend par fonction.

Les premiers analystes n'avaient employé ce mot que pour désigner les différentes puissances d'une même quantité; on en a ensuite étendu la signification à toute quantité formée d'une manière quelconque

d'une autre quantité; et il est aujourd'hui généralement adopté pour exprimer que la valeur d'une quantité dépend, suivant une loi donnée, d'une ou de plusieurs autres quantités données.

Sous ce point de vue on doit regarder l'Algèbre comme la science des fonctions; il est aisé de voir que la résolution des équations ne consiste, en général, qu'à trouver les valeurs des quantités inconnues en fonctions déterminées des quantités connues. Ces fonctions représentent alors les différentes opérations qu'il faut faire sur les quantités connues pour obtenir les valeurs de celles que l'on cherche, et elles ne sont proprement que le dernier résultat du calcul.

Mais, en Algèbre, on ne considère les fonctions qu'autant qu'elles résultent des opérations de l'Arithmétique, généralisées et transportées aux lettres, au lieu que, dans le Calcul des fonctions proprement dit, on considère les fonctions qui résultent de l'opération algébrique du développement en série lorsqu'on attribue à une ou à plusieurs quantités de la fonction des accroissements indéterminés.

Le développement des fonctions, envisagé d'une manière générale, donne naissance aux fonctions dérivées de différents ordres; et, l'algorithme de ces fonctions une fois trouvé, on peut les considérer en elles-mêmes et indépendamment des séries d'où elles résultent. Ainsi, une fonction donnée étant regardée comme primitive, on peut en déduire par des règles simples et uniformes d'autres fonctions que j'appelle *dérivées;* et, lorsqu'on a une équation quelconque entre plusieurs variables, on peut passer successivement aux équations dérivées, et remonter de celles-ci aux équations primitives. Ces transformations répondent aux différentiations et aux intégrations; mais, dans la théorie des fonctions, elles ne dépendent que d'opérations purement algébriques, fondées sur les simples principes du calcul.

Les fonctions dérivées se présentent naturellement dans la Géométrie, lorsqu'on considère les aires, les tangentes, les rayons osculateurs, etc.; et dans la Mécanique, lorsqu'on considère les vitesses et les forces. Si l'on regarde, par exemple, l'aire d'une courbe comme fonction de l'abscisse, l'ordonnée en est la première fonction dérivée ou fonction

prime; le rapport de l'ordonnée à la sous-tangente est exprimé par la fonction prime de l'ordonnée, et par conséquent par la seconde fonction dérivée ou fonction seconde de l'aire; le rayon osculateur dépend des deux premières fonctions dérivées de l'ordonnée, et ainsi de suite. De même, en regardant l'espace parcouru comme fonction du temps, la vitesse en est la fonction prime et la force accélératrice en est la fonction seconde. Ce n'est peut-être pas un des moindres avantages du Calcul des fonctions de fournir, pour ces éléments de la Géométrie des courbes et de la Mécanique, des expressions aussi simples et intelligibles que le sont les expressions algébriques des puissances et des racines.

Lorsqu'on envisage une fonction relativement à une des quantités qui la composent, on fait abstraction de la valeur de cette quantité, et l'on ne considère que la manière dont elle est combinée avec elle-même et avec les autres quantités. Ainsi la fonction est censée demeurer la même, tandis que cette quantité varie d'une manière quelconque, pourvu que les autres quantités avec lesquelles elle est mêlée demeurent constantes : ce qui introduit naturellement, par rapport aux fonctions, la distinction des quantités en variables et constantes.

Dans l'Algèbre ordinaire, on distingue simplement les quantités en connues et inconnues, et l'on a coutume de désigner les unes par les premières lettres de l'alphabet, et les autres par les dernières. L'application de l'Algèbre à la théorie des courbes a fait d'abord distinguer les quantités qui entrent dans l'équation d'une courbe en données, telles que les axes, les paramètres, etc., et en indéterminées, telles que les coordonnées. Depuis on a envisagé ces mêmes quantités sous l'aspect plus naturel de constantes et de variables; et la considération des fonctions porte naturellement à regarder sous ce même point de vue les différentes quantités qui les composent.

Nous appellerons donc simplement *fonction d'une ou de plusieurs quantités* toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entreront d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités regardées comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que

les quantités de la fonction sont censées pouvoir recevoir toutes les valeurs possibles.

Nous désignerons ordinairement les variables des fonctions par les dernières lettres de l'alphabet $x, y, \ldots$, et les constantes par les premières $a, b, c, \ldots$. Et, pour marquer une fonction d'une variable, nous ferons simplement précéder cette variable de la lettre caractéristique f ou F. Ainsi $f(x)$ désignera une fonction de x; $f(x^2)$, $f(a+bx)$, ... désigneront des fonctions de x^2, de $a+bx$, ...

Pour marquer une fonction de deux variables indépendantes comme x, y, nous écrirons $f(x,y)$, et ainsi des autres. Lorsque nous voudrons employer d'autres caractéristiques, nous aurons soin d'en avertir.

Si deux fonctions de deux variables différentes x, y, c'est-à-dire l'une de x et l'autre de y, sont composées de la même manière et avec les mêmes constantes, ces fonctions seront pareilles et pourront être désignées dans un même calcul par la même caractéristique; ainsi $f(x)$ et $f(y)$ seront deux fonctions pareilles qui deviendront identiques en faisant $y=x$. Mais si, les deux fonctions étant composées de la même manière, les constantes qu'elles contiennent sont différentes, alors on ne pourra plus, généralement parlant, les représenter par la même caractéristique dans le cours d'un même calcul. Cependant, si les deux fonctions ne diffèrent, par exemple, que par la valeur d'une constante, qui serait a dans l'une et b dans l'autre, on pourra encore les désigner par la même caractéristique, en les représentant par $f(x,a)$ et $f(y,b)$, comme des fonctions pareilles de x, a et de y, b. Ainsi, dans ce cas, les quantités a et b entreront aussi dans l'expression de la fonction, parce que, quoique constantes dans chaque fonction, elles peuvent être regardées comme variables d'une fonction à l'autre.

Nous n'entrerons ici dans aucun détail sur les différentes formes des fonctions; mais nous allons considérer la dérivation des fonctions les unes des autres, dans laquelle consiste proprement le Calcul des fonctions.

LEÇON DEUXIÈME.

SUR LE DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE, LORSQU'ON ATTRIBUE UN ACCROISSEMENT A CETTE VARIABLE. LOI GÉNÉRALE DE CE DÉVELOPPEMENT. ORIGINE DES FONCTIONS DÉRIVÉES. DIFFÉRENTS ORDRES DE CES FONCTIONS. LEUR NOTATION.

Considérons une fonction $f(x)$ d'une variable quelconque x. Si à la place de x on substitue $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$, et, par la théorie des séries, on pourra la développer en une suite de cette forme

$$f(x)+ip+i^2q+i^3r+\ldots,$$

dans laquelle les quantités $p, q, r, \ldots$, coefficients des puissances de i, seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive $f(x)$, et indépendantes de la quantité i.

Il est clair que la forme des fonctions $p, q, r, \ldots$ dépendra uniquement de celle de la fonction donnée $f(x)$, et l'on déterminera aisément ces fonctions, dans les cas particuliers, par les règles de l'Algèbre ordinaire, en développant la fonction dans une série ordonnée suivant les puissances de i.

Cette dérivation des fonctions est une opération plus générale que l'élévation aux puissances et l'extraction des racines, et les principaux problèmes d'Analyse, de Géométrie et de Mécanique en dépendent, comme on l'a montré dans la *Théorie des fonctions analytiques*.

Mais, pour ne rien avancer gratuitement, nous commencerons par examiner la forme même de la série qui doit résulter du développement de toute fonction $f(x)$, lorsqu'on y substitue $x+i$ au lieu de x.

et que nous supposons ne devoir contenir que des puissances entières et positives de i. Cette supposition se vérifie en effet par le développement des différentes fonctions connues; mais personne, que je sache, n'avait cherché à le démontrer *a priori*, ce qui me paraît néanmoins d'autant plus nécessaire qu'il y a des cas particuliers où elle peut ne pas avoir lieu.

Je vais d'abord démontrer que, dans la série qui résulte du développement d'une fonction $f(x+i)$, il ne peut se trouver aucune puissance fractionnaire de i, à moins qu'on ne donne à x des valeurs particulières.

En effet, il est clair que les radicaux de i ne pourraient venir que des radicaux renfermés dans la fonction même $f(x)$, et il est clair, en même temps, que la substitution de $x+i$ au lieu de x ne pourrait ni augmenter ni diminuer le nombre des radicaux, ni en changer la nature, tant que x et i seront des quantités indéterminées. D'un autre côté, on sait, par la théorie des équations, que tout radical a autant de valeurs différentes, ni plus ni moins, qu'il y a d'unités dans son exposant, et que toute fonction irrationnelle a par conséquent autant de valeurs différentes qu'on peut faire de combinaisons des différentes valeurs des radicaux qu'elle renferme. Donc, si le développement de la fonction $f(x+i)$ pouvait contenir un terme de la forme $ui^{\frac{m}{n}}$, la fonction $f(x)$ serait nécessairement irrationnelle, et aurait par conséquent un certain nombre de valeurs différentes, qui serait le même pour la fonction $f(x+i)$, ainsi que pour son développement. Mais ce développement étant représenté par la série

$$f(x)+pi+qi^2+\ldots+ui^{\frac{m}{n}}+\ldots,$$

chaque valeur de $f(x)$ se combinerait avec chacune des valeurs du radical $\sqrt[n]{i^m}$; de sorte que la fonction $f(x+i)$ développée aurait plus de valeurs différentes que la même fonction non développée, ce qui est absurde.

Cette démonstration est générale et rigoureuse, tant que x et i demeurent indéterminés. Elle cesserait de l'être, si l'on donnait à x des

valeurs déterminées; car il serait possible que ces valeurs détruisissent quelques radicaux dans $f(x)$, qui pourraient néanmoins subsister dans $f(x+i)$. Nous examinerons à part ces sortes de cas et les conséquences qui en résultent.

Nous venons de voir que le développement de la fonction $f(x+i)$ ne saurait contenir en général des puissances fractionnaires de i; il est facile de voir aussi qu'il ne pourra contenir non plus des puissances négatives de i.

Car, si parmi les termes de ce développement il y en avait un de la forme $\frac{r}{i^m}$, m étant un entier positif, en faisant $i=0$, ce terme deviendrait infini; donc la fonction $f(x+i)$ devrait devenir infinie lorsque $i=0$; par conséquent, il faudrait que $f(x)$ devînt infinie, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x.

Nous sommes donc assurés que, $f(x)$ exprimant une fonction quelconque de x, la fonction $f(x+i)$ peut, généralement parlant, se développer en une série de cette forme

$$f(x)+ip+i^2q+i^3r+i^4s+\ldots,$$

dans laquelle p, q, r, ... seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive $f(x)$.

Quoique la forme de ces fonctions dérivées dépende essentiellement de celle de la fonction primitive, il règne néanmoins entre elles une loi générale que nous allons exposer.

Supposons que l'indéterminée x soit changée en $x+o$, o étant une quantité quelconque indéterminée, et indépendante de i, il est visible que la fonction $f(x+i)$ deviendra $f(x+i+o)$; et l'on voit en même temps que l'on aurait le même résultat, si l'on mettait, dans $f(x+i)$, $i+o$ à la place de i. Donc aussi le résultat sera le même, soit qu'on substitue $i+o$ à la place de i, ou $x+o$ à la place de x dans la série $f(x)+ip+i^2q+i^3r+\ldots$, qu'on suppose égale à la fonction $f(x+i)$.

La substitution de $i+o$ au lieu de i, dans cette série, donnera

$$f(x)+(i+o)p+(i+o)^2q+(i+o)^3r+\ldots,$$

savoir, en développant les puissances de $i+o$, et n'écrivant, pour abréger, que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison de ces termes suffit pour notre objet,

$$f(x)+ip+i^2q+i^3r+i^4s+\ldots+op+2ioq+3i^2or+4i^3os+\ldots.$$

Pour faire maintenant la substitution de $x+o$ au lieu de x dans la même série, nous observons que, puisque la fonction $f(x)$ devient $f(x)+ip+\ldots$, lorsqu'on change x en $x+i$, elle deviendra $f(x)+op+\ldots$, en y changeant x en $x+o$. De même, si $p+ip'+\ldots$, $q+iq'+\ldots$, $r+ir'+\ldots$ sont ce que deviennent les fonctions p, q, r, ... lorsqu'on y substitue $x+i$ au lieu de x, et qu'on les développe suivant les puissances de i, on aura, en changeant i en o,

$$p+op'+\ldots,\quad q+oq'+\ldots,\quad r+or'+\ldots,\quad \ldots,$$

pour les développements des mêmes fonctions après la substitution de $x+o$ au lieu de x.

Donc, par cette substitution, la série $f(x)+ip+i^2q+\ldots$ deviendra, en omettant les termes qui contiendraient le carré et les puissances plus hautes de o,

$$f(x)+ip+i^2q+i^3r+i^4s+\ldots+op+iop'+i^2oq'+i^3or'+\ldots.$$

Ce résultat doit être identique avec le précédent, indépendamment des valeurs de i et de o qui peuvent être quelconques; il faudra donc que les termes affectés des mêmes puissances et produits de i et o soient identiques en particulier. Ainsi on aura les équations identiques

$$2q=p',\quad 3r=q',\quad 4s=r',\quad \ldots;$$

d'où l'on tire

$$q=\tfrac{1}{2}p',\quad r=\tfrac{1}{3}q',\quad s=\tfrac{1}{4}r',\quad \ldots.$$

Dénotons en général par $f'(x)$ la fonction p, dérivée de la fonction $f(x)$, en mettant un accent à la caractéristique f, pour indiquer la dérivation de la fonction. Dénotons de même par $f''(x)$ la fonction dérivée de la fonction $f'(x)$, en ajoutant un accent à la caractéristique f' de la

fonction $f'(x)$ d'où elle est dérivée. Dénotons pareillement par $f'''(x)$ la fonction dérivée de $f''(x)$, et ainsi de suite.

Ces fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... ne seront autre chose que les coefficients de i dans les premiers termes des développements des fonctions $f(x+i)$, $f'(x+i)$, $f''(x+i)$, ...

On aura ainsi $p=f'(x)$, et comme p' est la fonction dérivée de p, on aura $p'=f''(x)$, et, par conséquent, $q=\frac{1}{2}f''(x)$. Ensuite, q' étant la fonction dérivée de q, on aura $q'=\frac{1}{2}f'''(x)$, et, par conséquent, $r=\frac{1}{2.3}f'''(x)$, et ainsi de suite.

Donc, substituant ces expressions dans la série

$$f(x)+ip+i^2q+i^3r+\ldots,$$

qui est le développement de $f(x+i)$, on aura cette formule fondamentale

$$f(x+i)=f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\frac{i^3}{2.3}f'''(x)+\frac{i^4}{2.3.4}f^{iv}(x)+\ldots.$$

Cette expression du développement de $f(x+i)$ a l'avantage de faire voir comment les termes de la série dépendent les uns des autres, et surtout comment, lorsqu'on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque, on peut former toutes les fonctions dérivées que la série renferme.

Nous appellerons la fonction $f(x)$ *fonction primitive*, par rapport aux fonctions $f'(x)$, $f''(x)$, ..., qui en dérivent; et nous appellerons celles-ci *fonctions dérivées*, par rapport à celle-là. Nous nommerons de plus la fonction dérivée $f'(x)$, *première fonction dérivée*, ou *fonction dérivée du premier ordre*, ou simplement *fonction prime;* la fonction $f''(x)$, dérivée de celle-ci, *seconde fonction dérivée*, ou *fonction dérivée du second ordre*, ou simplement *fonction seconde;* la fonction $f'''(x)$, dérivée de la précédente, *troisième fonction dérivée*, ou *fonction dérivée du troisième ordre*, ou simplement *fonction tierce*, et ainsi de suite.

Mais nous entendrons toujours par *fonction dérivée* simplement la première fonction dérivée, et par *fonction primitive* celle d'où elle est

censée dérivée. Nous leur donnerons aussi quelquefois, pour plus de simplicité, le simple nom de *dérivées* ou de *primitives*.

Si la fonction primitive n'est pas représentée par la caractéristique f, mais par une autre variable, comme lorsqu'on suppose y fonction de x, donnée par une équation quelconque entre x et y, alors on pourra dénoter de même ses fonctions dérivées par des accents ou traits appliqués à la lettre y, et les appeler simplement *y prime*, *y seconde*, *y tierce*, etc.

Ainsi, y étant regardée comme une fonction quelconque de x, ses fonctions dérivées seront représentées par $y', y'', y''', \ldots$; de sorte que, y étant la fonction primitive, y' sera sa fonction dérivée du premier ordre, ou fonction prime, y'' sera la fonction dérivée du second ordre ou fonction seconde, etc., et on les nommera *y prime*, *y seconde*, etc.

De cette manière, x devenant $x+i$, la valeur de y deviendra

$$y + iy' + \frac{i^2}{2}y'' + \frac{i^3}{2.3}y''' + \ldots.$$

En général, si l'on a une expression quelconque en $x, y, \ldots$, on pourra désigner ses fonctions dérivées par des traits appliqués à la même expression renfermée entre deux parenthèses. Ainsi

$$\left(\frac{a+bx+cy}{d+ex+gy}\right)'$$

représentera la première fonction dérivée de l'expression

$$\frac{a+bx+cy}{d+ex+gy},$$

et

$$\left(\frac{a+bx+cy}{d+ex+gy}\right)''.$$

représentera la seconde fonction dérivée de la même expression, et ainsi de suite.

Et, si l'on a une fonction de plusieurs variables, $x, y, \ldots$, exprimée en général par $f(x, y, \ldots)$, on dénotera ses fonctions dérivées relatives à toutes ces variables, en appliquant un, deux, ... traits à la caractéristique f; ainsi $f'(x, y, \ldots)$ dénotera sa fonction prime, $f''(x, y, \ldots)$ sa fonction seconde, etc.

Quoique les fonctions dérivées doivent leur origine au développement de la fonction primitive lorsqu'on augmente la variable d'une quantité quelconque i, on voit qu'elles sont indépendantes de cette même quantité qui ne sert, pour ainsi dire, que comme un outil pour former ces fonctions. Ainsi, dès qu'on aura trouvé, par la considération du premier terme du développement, des règles générales pour passer d'une fonction primitive à la fonction dérivée, on pourra faire abstraction de tout développement, et regarder la dérivation des fonctions comme une nouvelle opération d'Algèbre plus générale et d'une beaucoup plus grande étendue que l'élévation aux puissances.

Ceux qui savent le Calcul différentiel n'auront pas de peine à se convaincre que les fonctions dérivées $f'(x), f''(x), \ldots, y', y'', \ldots$ reviennent aux quantités qu'on désigne dans ce Calcul par

$$\frac{df(x)}{dx}, \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \ldots, \text{ ou } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots,$$

et ainsi des autres expressions semblables.

LEÇON TROISIÈME.

FONCTIONS DÉRIVÉES DES PUISSANCES. DÉVELOPPEMENT D'UNE PUISSANCE QUELCONQUE D'UN BINÔME.

Puisque toute fonction dérivée du premier ordre $f'(x)$ n'est autre chose que le coefficient de i dans le développement de la fonction primitive $f(x)$, après la substitution de $x+i$ à la place de x, il s'ensuit que la recherche de la fonction dérivée d'une puissance quelconque x^m se réduit à trouver le terme affecté de i dans le développement de la puissance $(x+i)^m$ suivant les puissances de i.

Lorsque l'exposant m est un nombre quelconque entier ou fractionnaire, positif ou négatif, on démontre facilement, par les premières opérations de l'Algèbre, que les deux premiers termes de la puissance m du binôme $x+i$ sont $x^m+mx^{m-1}i$; ainsi, lorsque $f(x)=x^m$ ou $=Ax^m$, A étant un coefficient quelconque, on aura

$$f'(x)=mAx^{m-1},$$

m étant un nombre quelconque rationnel.

Comme tout nombre irrationnel peut être renfermé entre des limites rationnelles aussi resserrées que l'on veut, on en pourrait conclure tout de suite la vérité du résultat précédent pour une valeur quelconque irrationnelle de m, puisqu'on peut, en resserrant les limites, diminuer l'erreur à volonté. Mais, comme il est plutôt question ici de la forme même de la fonction dérivée que de sa valeur absolue dans chaque cas particulier, nous croyons, pour ne rien laisser à désirer sur

cette proposition fondamentale, devoir en donner une démonstration aussi générale que rigoureuse.

Puisque

$$(x+i)^m=x^m\left(1+\frac{i}{x}\right)^m$$

par les règles de l'Algèbre, si l'on fait pour abréger $\frac{i}{x}=\omega$, il s'agira de trouver le coefficient de ω dans le développement de $(1+\omega)^m$, quel que soit l'exposant m. Or, quel que puisse être ce coefficient, comme il doit être indépendant de ω, il est clair qu'il ne peut être qu'une fonction de m, puisque l'expression $(1+\omega)^m$ ne contient que les deux indéterminées ω et m. On pourra donc le représenter en général par $F(m)$, la caractéristique F désignant une fonction déterminée, mais inconnue. Ainsi, comme en faisant ω nul, la quantité $(1+\omega)^m$ devient $1^m=1$, on aura

$$(1+\omega)^m=1+\omega F(m)+\ldots.$$

On aura donc aussi, pour un autre exposant quelconque n,

$$(1+\omega)^n=1+\omega F(n)+\ldots.$$

Multipliant ensemble ces deux équations, on aura

$$(1+\omega)^{m+n}=1+\omega[F(m)+F(n)]+\ldots.$$

Car la théorie des puissances repose uniquement sur ce principe que $a^m a^n=a^{m+n}$, quelles que soient les quantités a, m, n, et l'on peut même dire que c'est dans ce principe que consiste l'essence des puissances, lorsque les exposants ne peuvent être exprimés par des nombres.

Ainsi $F(m)+F(n)$ sera le coefficient de ω dans le développement de la puissance $(1+\omega)^{m+n}$. Mais ce coefficient doit être représenté par $F(m+n)$, puisque la fonction $(1+\omega)^m$ devient $(1+\omega)^{m+n}$, en y substituant $m+n$ pour m. Donc il faudra que la fonction désignée par la caractéristique F soit telle que l'on ait

$$F(m+n)=F(m)+F(n),$$

m et n étant des quantités quelconques.

Pour trouver d'une manière générale la forme de la fonction d'après cette condition, je supposerai que la quantité m soit changée en $m+i$, et que la quantité n le soit en $n-i$, i étant quelconque; alors la fonction $F(m+n)$ demeurera la même, et les fonctions $F(m)$, $F(n)$ deviendront

$$F(m+i), \quad F(n-i);$$

donc l'équation précédente donnera

$$F(m)+F(n)=F(m+i)+F(n-i).$$

Or, par le développement, la fonction

$$F(m+i)$$

devient

$$F(m)+iF'(m)+\frac{i^2}{2}F''(m)+\ldots,$$

comme on l'a vu plus haut; et la fonction $F(n-i)$ deviendra de même, en prenant i négativement,

$$F(n)-iF'(n)+\frac{i^2}{2}F''(n)-\ldots;$$

donc l'équation précédente se réduira à celle-ci

$$i[F'(m)-F'(n)]+\frac{i^2}{2}[F''(m)+F''(n)]+\ldots=0,$$

laquelle devant avoir lieu quelle que soit la valeur de i, on aura nécessairement

$$F'(m)-F'(n)=0, \quad F''(m)+F''(n)=0, \quad \ldots.$$

La première de ces conditions donne

$$F'(m)=F'(n),$$

d'où l'on conclut d'abord que la valeur de la fonction $F(m)$ doit être indépendante de la variable m, puisqu'elle demeure la même en changeant la valeur de cette variable, et qu'ainsi cette valeur doit être constante relativement à la même variable.

On aura donc

$$F'(m)=a,$$

a étant une constante; et cette valeur de $F'(m)$ satisfera aux autres conditions, puisqu'on aura

$$F''(m)=0, \quad F'''(m)=0, \quad \ldots,$$

et de même

$$F''(n)=0, \quad F'''(n)=0, \quad \ldots.$$

Tout se réduit donc à trouver la valeur de la fonction primitive $F(m)$, d'après la fonction dérivée

$$F'(m)=a.$$

Or il est facile de voir que $F(m)$ ne peut être que de la forme $am+b$, b étant une constante arbitraire; car on peut se convaincre qu'il n'y a que cette expression qui puisse donner a pour sa fonction dérivée.

On peut d'ailleurs le démontrer directement comme il suit : puisqu'on a en général

$$F(m+i)=F(m)+iF'(m)+\frac{i^2}{2}F''(m)+\ldots,$$

on aura, dans le cas présent,

$$F'(m)=a, \quad F''(m)=0, \quad F'''(m)=0, \quad \ldots,$$

$$F(m+i)=F(m)+ai,$$

et, comme i peut être une quantité quelconque, si l'on fait $i=-m$, alors la quantité $m+i$ deviendra zéro; donc la valeur de $F(m+i)$ sera indépendante de m; elle sera par conséquent égale à une constante b. On aura ainsi

$$b=F(m)-am,$$

d'où

$$F(m)=am+b.$$

Substituant cette valeur de $F(m)$, on aura en général

$$(1+\omega)^m=1+(am+b)\omega+\ldots,$$

quelle que soit la valeur de m, a et b étant des constantes indépen-

dantes de m, dont la valeur doit se déterminer par la considération de quelques cas particuliers.

Pour cela, on fera d'abord $m = 0$, et l'on aura

$$1 = 1 + b\omega + \dots,$$

donc $b = 0$. On fera ensuite $m = 1$, et l'on aura

$$1 + \omega = 1 + a\omega + \dots;$$

donc $a = 1$.

D'où l'on conclura enfin

$$(1 + \omega)^m = 1 + m\omega + \dots.$$

Donc, puisque

$$(x + i)^m = x^m (1 + \omega)^m,$$

ω étant $= \frac{i}{x}$, on aura

$$A(x + i)^m = Ax^m + Amx^{m-1} i + \dots,$$

quel que soit le nombre m, de sorte que la fonction dérivée de Ax^m sera de Amx^{m-1}, comme nous l'avons trouvée d'abord pour le cas de m rationnel.

La démonstration précédente ne laisse rien à désirer pour la rigueur et la généralité. Elle ne dépend que des fonctions dérivées de la forme la plus simple, et fournit, dès le commencement, un exemple remarquable de leur usage dans l'Analyse.

On peut donc établir pour règle générale que *la fonction dérivée d'une puissance quelconque d'une variable est égale à la puissance d'un degré moindre d'une unité de la même variable, multipliée par l'exposant de la puissance donnée.*

De là et de la loi du développement des fonctions résulte une démonstration aussi simple que générale, et peut-être la seule rigoureuse qu'on ait encore donnée de la formule du binôme pour un exposant quelconque.

En effet, puisqu'on vient de trouver que

$$F(x) = Ax^m,$$

donne

$$F'(x) = mAx^{m-1},$$

on aura de même, en prenant la fonction dérivée de cette dernière quantité,

$$F'(x) = m(m-1)Ax^{m-2},$$

et, par la même raison, on aura, en prenant de nouveau la fonction dérivée,

$$F''(x) = m(m-1)(m-2)Ax^{m-3},$$

et ainsi de suite.

Donc, puisqu'on a trouvé, en général,

$$f(x + i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \frac{i^3}{2.3} f'''(x) + \dots,$$

on aura, pour le cas de $f(x) = x^m$, la série

$$(x + i)^m = x^m + mx^{m-1} i + \frac{m(m-1)}{2} x^{m-2} i^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} x^{m-3} i^3 + \dots.$$

Si l'on divise toute l'équation par x^m, et qu'on y mette ensuite i à la place de $\frac{i}{x}$, on aura

$$(1 + i)^m = 1 + mi + \frac{m(m-1)}{2} i^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} i^3 + \dots.$$

Cette formule résulte de la précédente en y faisant $x = 1$; mais il n'aurait pas été rigoureux de l'en déduire de cette manière, puisqu'on a déjà remarqué que le développement de la fonction $f(x + i)$ en puissances entières de i peut cesser d'être exact dans des cas particuliers de la valeur de x.

Si maintenant on multiplie l'équation précédente par a^m, et qu'on y substitue ensuite b à la place de ai, on aura

$$(a + b)^m = a^m + ma^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} b^2 + \dots,$$

quelques valeurs qu'on attribue aux quantités a, b, m.

La méthode, que nous avons employée plus haut pour trouver direc-

tement la fonction primitive d'une quantité constante, peut être appliquée à d'autres cas. En effet, si dans la formule générale

$$f(x+i)=f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\dots$$

on fait

$$i=-x,$$

la fonction $f(x+i)$ deviendra indépendante de x, et sera par conséquent égale à une constante b, laquelle sera proprement la valeur de $f(x)$ lorsque $x=0$. On aura donc ainsi

$$b=f(x)-xf'(x)+\frac{x^2}{2}f''(x)-\dots,$$

d'où l'on tire

$$f(x)=b+xf'(x)-\frac{x^2}{2}f''(x)+\dots.$$

Si maintenant $f'(x)=a$, on aura

$$f''(x)=0,\quad f'''(x)=0,\quad \dots;$$

donc

$$f(x)=b+ax.$$

Si $f(x)=ax$, on aura

$$f'(x)=a,\quad f''(x)=0,\quad f'^{\text{v}}(x)=0,\quad \dots;$$

donc

$$f(x)=b+ax^2-\frac{ax^2}{2}=b+\frac{ax^2}{2}.$$

Si $f'(x)=ax^2$, on aura

$$f''(x)=2ax,\quad f'''(x)=2a,\quad f'^{\text{v}}(x)=0,\quad f^{\text{v}}(x)=0,\quad \dots;$$

donc

$$f(x)=b+ax^3-ax^3+\frac{ax^3}{3}=b+\frac{ax^3}{3},$$

et ainsi de suite.

En général, si $f'(x)=ax^n$, on aura, en prenant les fonctions dérivées,

$$f''(x)=nax^{n-1},\quad f'''(x)=n(n-1)ax^{n-2},\quad \dots;$$

donc, substituant ces valeurs,

$$f(x)=b+ax^{n+1}\left[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2.3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4}+\dots\right].$$

Or on a, par le développement,

$$(1-1)^{n+1}=1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{2}-\frac{(n+1)n(n-1)}{2.3}+\dots=0;$$

donc

$$(n+1)\left[1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2.3}-\dots\right]=1,$$

et, par conséquent,

$$1-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{2.3}-\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3.4}+\dots=\frac{1}{n+1},$$

quel que soit le nombre n; donc on aura

$$f(x)=\frac{ax^{n+1}}{n+1}+b.$$

En effet, la fonction dérivée de cette quantité sera, par la règle générale,

$$\frac{a(n+1)x^n}{n+1}=ax^n,$$

la constante b ayant zéro pour fonction dérivée.

LEÇON QUATRIÈME.

FONCTIONS DÉRIVÉES DES QUANTITÉS EXPONENTIELLES ET LOGARITHMIQUES. DÉVELOPPEMENT DE CES QUANTITÉS EN SÉRIES.

La fonction x^m, dans laquelle x est la variable et m est une constante, conduit naturellement à la considération de la fonction a^x, dans laquelle la variable est x, et où a est une constante. Ces sortes de quantités s'appellent *exponentielles*, parce qu'elles ne varient qu'à raison de l'exposant.

Pour trouver la fonction dérivée de a^x, il n'y aura, suivant le principe général, qu'à substituer $x+i$ à la place de x, et développer suivant les puissances de i; le coefficient du terme affecté de i sera la fonction cherchée.

Cette substitution donne la fonction

$$a^{x+i}=a^x a^i.$$

Supposons $a=1+b$, on aura

$$a^i=(1+b)^i,$$

et, par la formule générale démontrée précédemment, on aura

$$a^i=(1+b)^i=1+ib+\frac{i(i-1)}{2}b^2+\frac{i(i-1)(i-2)}{2.3}b^3+\ldots.$$

En ordonnant les termes de cette série suivant les puissances de i, il est facile de voir que les deux premiers termes du développement de a^i seront

$$1+\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\ldots\right)i.$$

Soit, pour abréger,

$$c=b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\ldots=a-1-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\ldots;$$

on aura donc $1+ci$ pour les deux premiers termes du développement de a^i; par conséquent, en multipliant par a^x, on aura a^x+ca^xi pour les deux premiers termes du développement de a^{x+i}. Donc ca^x, coefficient de i, sera la fonction dérivée de a^x.

Le coefficient c dépend, comme l'on voit, de la quantité a, qui est comme la base de l'exponentielle, et l'on nomme communément ce coefficient le *module*.

On peut ainsi établir cette règle, que *la fonction dérivée d'une quantité exponentielle est égale à cette exponentielle multipliée par un coefficient constant qui dépend de la base de l'exponentielle, et qu'on nomme le* module.

Puisque la dérivée de a^x est ca^x, la dérivée de celle-ci sera c^2a^x, et la dérivée de cette dernière sera de même c^3a^x, et ainsi de suite.

Ainsi, en faisant $f(x)=a^x$, on aura

$$f'(x)=ca^x,\quad f''(x)=c^2a^x,\quad \ldots.$$

Donc, substituant ces valeurs dans le développement de $f(x+i)$, on aura

$$a^{x+i}=a^x+ca^xi+\frac{c^2}{2}a^xi^2+\frac{c^3}{2.3}a^xi^3+\ldots,$$

et, divisant par a^x,

$$a^i=1+ci+\frac{c^2i^2}{2}+\frac{c^3i^3}{2.3}+\ldots.$$

C'est la série dont nous n'avions trouvé ci-dessus que les deux premiers termes. Elle peut servir, comme l'on voit, à réduire toute puissance en une série ordonnée suivant les puissances de son exposant.

On peut par cette série déterminer directement la valeur de a en c.

En faisant $i=1$, on aura

$$a=1+c+\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{2.3}+\ldots.$$

Et, lorsque $c = 1$, la valeur de a se trouvera exprimée par la série très simple

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots,$$

dont la valeur est

$$2,718281828459\dots.$$

C'est le nombre qu'on désigne ordinairement par e, et qui est par conséquent la base des exponentielles dont le module est l'unité.

Ainsi, en faisant $f(x) = e^x$, on aura simplement $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ..., et conséquemment

$$e^i = 1 + i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{2.3} + \frac{i^4}{2.3.4} + \dots.$$

Si, dans l'équation trouvée ci-dessus

$$a^i = 1 + ci + \frac{c^2 i^2}{2} + \dots,$$

on fait $i = \frac{1}{c}$, on aura

$$a^{\frac{1}{c}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \dots = e.$$

Ainsi l'on a entre les trois constantes a, c et e la relation

$$a^{\frac{1}{c}} = e,$$

d'où l'on tire

$$a = e^c.$$

Cette équation donne aussi

$$\frac{1}{a} = e^{-c},$$

d'où l'on voit qu'en prenant c négatif, a se change en $\frac{1}{a}$; ainsi, en faisant ces changements dans l'équation

$$c = a - 1 - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \dots,$$

donnée ci-dessus, on aura

$$c = \frac{a-1}{a} + \frac{(a-1)^2}{2a^2} + \frac{(a-1)^3}{3a^3} + \dots.$$

Cette série est plus propre que la précédente à donner la valeur de c, lorsque a est un nombre plus grand que l'unité.

En faisant $a = 10$, on a

$$c = 0,9 + \frac{(0,9)^2}{2} + \frac{(0,9)^3}{3} + \dots;$$

et l'on trouvera, par le calcul,

$$c = 2,302585092994\dots.$$

On peut exprimer toute quantité variable par une constante élevée à une puissance variable; alors l'exposant de cette puissance devient une fonction de la même quantité, et cette fonction est, dans le sens le plus général, le *logarithme* de la quantité proposée. D'où l'on voit que les fonctions logarithmiques ne sont proprement que les réciproques des fonctions exponentielles.

Nous dénotons, en général, les logarithmes d'une quantité par le mot log, mis en avant de cette quantité en forme de caractéristique. Ainsi $\log x$ exprimera le logarithme ou la fonction logarithmique de x, et cette fonction sera donnée par l'équation $x = a^{\log x}$, où a, base de l'exponentielle, sera en même temps la base du système logarithmique.

Pour trouver maintenant la fonction dérivée de $\log x$, on fera, en général,

$$f(x) = \log x,$$

ce qui donnera $x = a^{f(x)}$, et, mettant $x + i$ à la place de x, on aura

$$x + i = a^{f(x+i)},$$

équation qui doit être identique, et avoir lieu par conséquent, quelle que soit la valeur de i. Or, par le développement, on a

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \dots = f(x) + \omega,$$

en posant

$$\omega = i f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \ldots;$$

donc, faisant cette substitution, on aura

$$x + i = a^{f(x)+\omega} = a^{f(x)} a^{\omega} = x a^{\omega},$$

et, divisant par x,

$$1 + \frac{i}{x} = a^{\omega}.$$

Or, par la formule trouvée ci-dessus, on a, en général,

$$a^{\omega} = 1 + c\omega + \frac{c^2\omega^2}{2} + \cdots;$$

donc on aura

$$1 + \frac{i}{x} = 1 + c\omega + \frac{c^2\omega^2}{2} + \ldots.$$

Donc, remettant pour ω sa valeur, et ordonnant les termes suivant les puissances de i, on aura cette équation identique

$$\frac{i}{x} = ic f'(x) + \frac{i^2}{2}\left[c^2[f'(x)]^2 + c f''(x)\right] + \ldots,$$

et la comparaison des termes donnera d'abord

$$\frac{1}{x} = c f'(x),$$

d'où l'on tire

$$f'(x) = \frac{1}{cx}.$$

La comparaison des autres termes donnera les valeurs de $f''(x)$, $f'''(x)$, ...; mais il est plus simple de les déduire successivement de celle de $f'(x)$.

La constante c dépend de la base a du système logarithmique, par les mêmes formules que nous avons trouvées plus haut; relativement aux logarithmes, elle s'appelle le *module* du système logarithmique.

De là résulte cette règle générale, que *la fonction dérivée du logarithme d'une variable est égale à l'unité divisée par cette variable multipliée par le module du système logarithmique.*

Puisque

$$f(x) = \log x \quad \text{donne} \quad f'(x) = \frac{1}{cx},$$

en prenant successivement les fonctions dérivées, d'après la règle générale des puissances, on aura

$$f''(x) = -\frac{1}{cx^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{cx^3}, \quad \cdots;$$

donc, si l'on fait ces substitutions dans le développement de $f(x+i)$, on aura la série

$$\log x + \frac{i}{cx} - \frac{i^2}{2cx^2} + \frac{i^3}{3cx^3} - \cdots,$$

pour la valeur de $\log(x+i)$.

Ayant ainsi le logarithme d'un nombre quelconque x, on peut par cette série trouver celui d'un autre nombre plus grand $x+i$, et la série sera d'autant plus convergente que la différence i des deux nombres aura un moindre rapport au nombre x.

Par la théorie des logarithmes, on a

$$\log(x+i) - \log x = \log\left(\frac{x+i}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{i}{x}\right);$$

donc, si l'on fait dans la formule précédente $\frac{i}{x} = y$, on aura

$$\log(1+y) = \frac{1}{c}\left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \cdots\right),$$

formule connue.

Soit $1 + y = z$; on aura

$$y = z - 1;$$

donc

$$\log z = \frac{1}{c}\left[(z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \cdots\right].$$

Cette série n'est convergente et par conséquent ne peut servir à

trouver le logarithme d'un nombre donné z, que lorsque ce nombre diffère peu de l'unité; mais on peut la rendre convergente, dans tous les cas, par la substitution de $\sqrt[r]{z}$ au lieu de z; car, puisque $\log\sqrt[r]{z}$ est égal à $\frac{\log z}{r}$, on aura, en multipliant par r,

$$\log z = \frac{r}{c}\left[(\sqrt[r]{z}-1)-\frac{1}{2}(\sqrt[r]{z}-1)^2+\frac{1}{3}(\sqrt[r]{z}-1)^3-\dots\right],$$

où l'on peut prendre pour r un nombre quelconque positif ou négatif.

Or, quel que soit le nombre z, on peut toujours en extraire la racine d'un degré r, tel que $\sqrt[r]{z}$ soit un nombre aussi peu différent de l'unité qu'on voudra; ainsi la formule précédente donnera toujours la valeur de $\log z$ avec toute l'exactitude qu'on pourra désirer.

Si l'on prend r négativement, alors $\sqrt[r]{z}$ devient $\frac{1}{\sqrt[r]{z}}$, et la série qui exprime $\log z$ devient, en changeant les signes,

$$\log z = \frac{r}{c}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)^3+\cdots\right],$$

où tous les termes sont positifs. Ainsi l'on peut avoir à volonté, pour la valeur de $\log z$, une série dont tous les termes soient positifs, ou alternativement positifs ou négatifs. Car il est évident que, z étant un nombre plus grand que l'unité, $\sqrt[r]{z}$ sera plus grand que l'unité, et, z étant moindre que l'unité, $\sqrt[r]{z}$ sera aussi moindre que l'unité; mais les différences seront d'autant plus petites, que l'exposant r de la racine sera un plus grand nombre; donc $\sqrt[r]{z}-1$ et $1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}$ seront positifs dans le premier cas, et négatifs dans le second.

Si a est la base des logarithmes, en sorte que $\log a = 1$, on pourra, par les mêmes formules, déterminer aussi exactement qu'on voudra la valeur du module c; car, en faisant $\log a = 1$, on aura

$$c = r\left[(\sqrt[r]{a}-1)-\tfrac{1}{2}(\sqrt[r]{a}-1)^2+\tfrac{1}{3}(\sqrt[r]{a}-1)^3-\dots\right],$$

ou bien

$$c = r\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^3+\cdots\right].$$

Il est clair que les deux séries que nous venons de donner pour l'expression de $\log z$ seront nécessairement convergentes aussitôt qu'on aura extrait de z une racine r, telle que $\sqrt[r]{z}-1$ soit une fraction moindre que l'unité; car alors $1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}$ sera une fraction plus petite encore, puisque

$$1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}} = \frac{\sqrt[r]{z}-1}{\sqrt[r]{z}}.$$

Ainsi, puisque dans la première série les termes sont alternatifs, le second et le troisième, le quatrième et le cinquième, etc., formeront des sommes négatives; de sorte que la première série donnera

$$\log z < \frac{r}{c}(\sqrt[r]{z}-1).$$

Au contraire, la seconde série, ayant tous ses termes positifs, donnera

$$\log z > \frac{r}{c}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right).$$

Ainsi l'on a tout de suite deux limites pour la valeur de $\log z$, qu'on peut resserrer autant que l'on veut, en prenant r toujours plus grand.

On aura, par la même raison, si $\sqrt[r]{a} < 2$,

$$c < r(\sqrt[r]{a}-1) > r\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right).$$

Puisqu'on a

$$1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}} = \frac{\sqrt[r]{z}-1}{\sqrt[r]{z}},$$

il est visible que la différence entre les deux limites de $\log z$ sera

$$\frac{r}{c}(\sqrt[r]{z}-1)\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right);$$

ainsi, en prenant l'une ou l'autre des deux expressions précédentes de $\log z$, on est assuré que l'erreur en excès ou en défaut est nécessairement moindre que cette même quantité.

Ainsi l'on sera sûr d'avoir, par ces expressions, les logarithmes exacts jusqu'à s chiffres, en prenant la racine $\sqrt[r]{z}$, de telle manière qu'il y ait après la virgule s zéros avant les chiffres significatifs.

En général, puisque l'erreur va en diminuant à mesure que l'on prend l'exposant r de la racine plus grand, on peut dire qu'elle deviendra nulle ou comme nulle, si l'on prend r infiniment grand; de sorte qu'on pourra regarder alors l'une et l'autre des deux formules

$$\frac{r}{c}(\sqrt[r]{z}-1) \quad \text{et} \quad \frac{r}{c}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{z}}\right)$$

comme l'expression exacte de $\log z$.

On peut conclure de là que les logarithmes rentrent dans la classe des puissances, et forment le premier terme de la série des puissances dont les exposants croissent ou décroissent depuis zéro, ou le dernier terme des racines dont les degrés vont en augmentant à l'infini.

C'est aussi sous ce rapport qu'on peut dire qu'à un nombre donné répond toujours une infinité de logarithmes, puisque sa racine infinitième a nécessairement une infinité de valeurs différentes.

La meilleure manière d'employer la formule précédente est de prendre pour r une puissance de 2, puisqu'on n'aura alors que des extractions de racines carrées à faire. C'est ainsi que Briggs a calculé les premiers logarithmes : il avait remarqué qu'en faisant des extractions successives de racines carrées d'un nombre quelconque, si l'on s'arrête dans une de ces extractions à deux fois autant de décimales qu'il y aura de zéros à la suite de l'unité, lorsqu'il n'y a plus que l'unité avant la virgule, la partie décimale de cette racine se trouve exactement la moitié de la racine précédente, en sorte que ces parties décimales ont entre elles le même rapport que les logarithmes des racines mêmes; c'est ce qui résulte évidemment de la formule précédente.

Ainsi, en prenant $r = 2^{60}$, on trouve, pour $a = 10$,

$$\sqrt[r]{a} = 1,00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527\ 03251\ \ldots,$$

$$\frac{1}{r} = 0,00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37988\ 40354;$$

de sorte que l'on aura

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt[r]{a}-1} = \frac{86\ 73617\ 37988\ 40354\ \ldots}{199\ 71742\ 08125\ 50327\ \ldots} = 0,43429\ 44819\ \ldots.$$

C'est de ce nombre qu'on a tiré celui qu'on a donné ci-dessus pour la valeur de c.

Si maintenant on veut avoir, par exemple, le logarithme de 3, on fera $z = 3$, et, employant de même 60 extractions de racines carrées, on trouvera les nombres suivants :

$$\sqrt[r]{z} = 1,00000\ 00000\ 00000\ 00095\ 28942\ 64074\ 58932\ \ldots,$$

et de là

$$\log z = \frac{\sqrt[r]{z}-1}{\sqrt[r]{a}-1} = \frac{95\ 28942\ 64074\ 58932\ \ldots}{199\ 71742\ 08125\ 50527\ \ldots} = 0,47712\ 12547\ 19662\ \ldots.$$

Cette méthode est, comme l'on voit, très laborieuse par le grand nombre d'extractions de racines qu'elle demande pour avoir un résultat en plusieurs décimales; mais les séries que nous avons données ci-dessus servent à la simplifier et à la compléter; car, quel que soit le nombre z, il suffira d'en extraire quelques racines carrées, jusqu'à ce qu'on parvienne à un nombre $\sqrt[r]{z}$ qui n'ait que l'unité avant la virgule; alors les puissances de $\sqrt[r]{z}-1$ seront des fractions d'autant plus petites qu'elles seront plus hautes; par conséquent il suffira toujours de prendre un certain nombre de termes de la série pour avoir les logarithmes exacts jusqu'à tel ordre de décimales qu'on voudra.

Les logarithmes qui ont l'unité pour module sont ceux qui se nomment *logarithmes naturels* ou *hyperboliques*, parce qu'ils représentent l'aire de l'hyperbole équilatère, rapportée aux abscisses prises sur l'une des asymptotes, et que Neper a le premier calculés. Leur base est le nombre e, et, pour les distinguer des autres, nous les dénoterons simplement par la caractéristique l.

Ainsi lx aura pour fonction dérivée $\frac{1}{x}$, et la formule générale

$x = a^{\log x}$ deviendra pour ces logarithmes $x = e^{lx}$; de sorte qu'on aura en général $a^{\log x} = e^{lx}$; et, comme on a trouvé plus haut $a = e^c$, on aura $e^{c\log x} = e^{lx}$ et, par conséquent, $lx = c\log x$. D'où l'on voit que les logarithmes d'un même nombre, dans différents systèmes, sont en raison inverse de leurs modules.

Au reste, l'équation $a = e^c$ donne $c = la$; d'où il suit que le module c du système logarithmique dont la base est a n'est autre chose que le logarithme naturel de la même base. Ainsi l'on pourra par la suite substituer l'expression la à la place de c, dans les fonctions dérivées de a^x et de $\log x$.

De cette manière, on aura $a^x la$ pour la dérivée de a^x, et $\frac{1}{x\,la}$ pour la dérivée de $\log x$.

Dans le système des logarithmes des Tables usuelles, la base a est supposée égale à 10; ainsi le module de ce système sera $l10$, dont la valeur est $2{,}3025850929940\ldots$.

Avant de terminer cette Leçon, je ne puis m'empêcher d'indiquer un usage de la formule

$$e^i = 1 + i + \frac{i^2}{2} + \frac{i^3}{2.3} + \frac{i^4}{2.3.4.} + \cdots,$$

pour trouver le développement d'une puissance quelconque d'une quantité composée d'autant de termes que l'on voudra.

En effet, si à la place de i on met $i(p+q+r+\ldots)$, on aura

$$e^{i(p+q+r+\ldots)} = 1 + i(p+q+r+\ldots) + \frac{i^2}{2}(p+q+r+\ldots)^2 + \frac{i^3}{2.3}(p+q+r+\ldots)^3 + \ldots.$$

Ainsi le terme multiplié par i^m sera

$$\frac{(p+q+r+\ldots)^m}{1.2.3\ldots m};$$

d'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} e^{i(p+q+r\ldots)} &= e^{ip}e^{iq}e^{ir}\ldots \\ &= \left(1 + ip + \frac{i^2p^2}{2} + \frac{i^3p^3}{2.3} + \cdots\right) \\ &\times \left(1 + iq + \frac{i^2q^2}{2} + \frac{i^3q^3}{2.3} + \cdots\right) \\ &\times \left(1 + ir + \frac{i^2r^2}{2} + \frac{i^3r^3}{2.3} + \cdots\right) \\ &\times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Donc le coefficient de i^m, dans le développement de ces différents produits, multiplié par $1.2.3\ldots m$, sera la valeur de $(p+q+r+\ldots)^m$.

Or il est visible que ce coefficient se trouvera composé d'autant de termes de la forme

$$\frac{p^\lambda q^\mu r^\nu\ldots}{1.2.3\ldots\lambda \times 1.2.3\ldots\mu \times 1.2.3\ldots\nu \times \ldots}$$

qu'on peut donner de valeurs différentes à λ, μ, ν, ..., de sorte que l'on ait

$$\lambda + \mu + \nu + \ldots = m,$$

en prenant pour λ, μ, ν, ... des nombres entiers positifs.

Ainsi la puissance $(p+q+r+\ldots)^m$ sera composée d'autant de termes de la forme

$$\frac{1.2.3.4\ldots m.p^\lambda q^\mu r^\nu\ldots}{1.2.3\ldots\lambda \times 1.2.3\ldots\mu \times 1.2.3\ldots\nu \times \ldots},$$

ce qui s'accorde avec ce que donne la théorie des combinaisons.

LEÇON CINQUIÈME.

FONCTIONS DÉRIVÉES DES SINUS ET COSINUS D'ANGLES, ET DES ANGLES EXPRIMÉS PAR LES SINUS ET COSINUS. DÉVELOPPEMENT DE CES QUANTITÉS EN SÉRIES.

Les angles n'entrent dans l'Analyse que par le moyen de leurs sinus et cosinus, qu'on dénote par les mots sin et cos, placés comme caractéristiques avant les angles. On a ainsi les fonctions angulaires $\sin x$ et $\cos x$, dont la propriété générale, tirée de la nature du cercle, est qu'en prenant deux angles quelconques x et y, on a

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Cela posé, pour avoir les fonctions dérivées de $\sin x$ et $\cos x$, il n'y aura qu'à mettre $x+i$ à la place de x, et développer ensuite les fonctions

$$\sin(x+i) \quad \text{et} \quad \cos(x+i)$$

suivant les puissances de i; les coefficients de i dans ces développements seront les dérivées cherchées. Or, par les formules précédentes, on a

$$\sin(x+i) = \sin x \cos i + \cos x \sin i,$$
$$\cos(x+i) = \cos x \cos i - \sin x \sin i.$$

Ainsi tout se réduit à développer en séries les quantités $\sin i$ et $\cos i$.

J'observe d'abord que, quelle que puisse être la série du développement de $\sin i$, elle ne saurait être que de la forme

$$A i^m + B i^n + \ldots,$$

m, n, ... étant des nombres positifs et qui vont en augmentant; car le

sinus devant être nul lorsque l'angle est nul, il est évident que son expression en série par les puissances de l'angle ne peut contenir aucune puissance négative.

J'observe ensuite que, par les formules générales, en faisant x et y égaux à i, on a

$$\sin 2i = 2 \sin i \cos i = 2 \sin i \sqrt{1 - \sin^2 i};$$

donc, $\sin i$ étant $= A i^m + B i^n + \ldots$, on aura

$$\sin 2i = 2^m A i^m + 2^n B i^n + \ldots.$$

D'un autre côté, on a

$$\sin^2 i = A^2 i^{2m} + 2AB i^{m+n} + \ldots,$$

et

$$\sqrt{1 - \sin^2 i} = (1 - \sin^2 i)^{\frac{1}{2}} = 1 - \tfrac{1}{2} A^2 i^{2m} - AB i^{m+n} - \ldots;$$

donc on aura

$$2 \sin i \sqrt{1 - \sin^2 i} = 2A i^m + 2B i^n + \ldots - A^2 i^{2m} - \ldots;$$

cette série devant être identique avec la suivante,

$$2^m A i^m + 2^n B i^n + \ldots,$$

qui exprime la valeur de $\sin 2i$, la comparaison des premiers termes qui renferment la même puissance i^m donnera

$$2A = 2^m A;$$

donc $m = 1$.

Ainsi on est assuré que le premier terme de la série de $\sin i$ est Ai; par conséquent, les deux premiers termes de la série de $\cos i$ seront $1 - \frac{A^2 i^2}{2}$; faisant ces substitutions dans les expressions ci-dessus de $\sin(x+i)$ et $\cos(x+i)$, et n'ayant égard qu'à la première puissance de i, on aura

$$\sin(x+i) = \sin x + iA \cos x + \ldots,$$
$$\cos(x+i) = \cos x - iA \sin x + \ldots;$$

donc la fonction dérivée de $\sin x$ sera $A\cos x$, et la fonction dérivée de $\cos x$ sera $-A\sin x$.

Le coefficient A est une constante encore inconnue, mais que nous déterminerons ci-après par la nature du cercle.

Connaissant ces premières fonctions dérivées, on pourra de la même manière trouver toutes les suivantes. Ainsi, la première dérivée de $\sin x$ étant $A\cos x$, la dérivée de celle-ci sera $-A^2\sin x$, et la troisième dérivée sera $-A^3\cos x$, et ainsi de suite.

Donc, en général, si $f(x)=\sin x$, on aura

$$f(x)=A\cos x,\quad f'(x)=-A^2\sin x,\quad f''(x)=-A^3\cos x,\quad \ldots;$$

et, faisant ces substitutions dans la série du développement de $f(x+i)$, on aura

$$\sin(x+i)=\sin x+Ai\cos x-\frac{A^2i^2}{2}\sin x-\frac{A^3i^3}{2.3}\cos x+\frac{A^4i^4}{2.3.4}\sin x+\ldots.$$

On aura de même

$$f(x)=\cos x,\quad f'(x)=-A\sin x,\quad f''(x)=-A^2\cos x,\quad f'''(x)=A^3\sin x,\quad \ldots;$$

et ces substitutions donneront

$$\cos(x+i)=\cos x-Ai\sin x-\frac{A^2i^2}{2}\cos x+\frac{A^3i^3}{2}\sin x+\frac{A^4i^4}{2.3.4}\cos x-\ldots.$$

Faisons pour abréger

$$P=Ai-\frac{A^3i^3}{2.3}+\frac{A^5i^5}{2.3.4.5}-\ldots,$$

$$Q=1-\frac{A^2i^2}{2}+\frac{A^4i^4}{2.3.4}-\frac{A^6i^6}{2.3.4.5.6}+\ldots;$$

on aura

$$\sin(x+i)=Q\sin x+P\cos x,$$

$$\cos(x+i)=Q\cos x-P\sin x,$$

d'où l'on tire, par les théorèmes connus,

$$\sin i=P\quad\text{et}\quad\cos i=Q.$$

Ainsi on aura, quel que soit l'angle i, les séries

$$\sin i=iA-\frac{i^3A^3}{2.3}+\frac{i^5A^5}{2.3.4.5}-\ldots.$$

$$\cos i=1-\frac{i^2A^2}{2}+\frac{i^4A^4}{2.3.4}-\frac{i^6A^6}{2.3.4.5.6}+\ldots.$$

Il semble qu'on aurait pu déduire immédiatement ces séries de celles qu'on a trouvées ci-dessus pour $\sin(x+i)$ et $\cos(x+i)$, en y faisant $x=0$; mais nous avons voulu éviter ici, comme nous l'avons déjà fait plus haut, les difficultés qui pourraient naître de ce que le développement de $f(x+i)$ n'est généralement vrai que tant qu'on ne donne pas à x des valeurs particulières.

Maintenant il est visible que ces séries sont nécessairement convergentes, en prenant l'angle i tel que Ai soit égal ou moindre que l'unité, et il est visible en même temps qu'on aura alors

$$\sin i<Ai\quad\text{et}\quad>Ai-\frac{A^3i^3}{2.3};$$

car les termes ayant les signes alternatifs, et allant en diminuant, les sommes du second et du troisième, du quatrième et du cinquième, etc., seront toutes négatives; et au contraire les sommes du troisième et du quatrième, du cinquième et du sixième, etc., seront toutes positives.

D'un autre côté, il est démontré rigoureusement par les théorèmes d'Archimède que le sinus est toujours moindre que l'arc, et que la tangente est plus grande que l'arc, du moins dans le premier quart de cercle; ainsi on aura

$$\sin i<i\quad\text{et}\quad\frac{\sin i}{\cos i}>i;$$

mais

$$\cos i=\sqrt{1-\sin^2 i},$$

donc

$$\frac{\sin i}{\sqrt{1-\sin^2 i}}>i,\quad \sin^2 i>i^2(1-\sin^2 i),$$

d'où l'on tire

$$\sin i > \frac{i}{\sqrt{1+i^2}};$$

ainsi l'on aura, par la nature du cercle,

$$\sin i < i \quad \text{et} \quad > \frac{i}{\sqrt{1+i^2}}.$$

Si donc on prend l'angle i moindre qu'un droit et assez petit pour que Ai soit moindre que l'unité, on aura nécessairement

1° $$\sin i < Ai \quad \text{et} \quad > \frac{i}{\sqrt{1+i^2}},$$

par conséquent,

$$Ai > \frac{i}{\sqrt{1+i^2}} \quad \text{et} \quad A > \frac{1}{\sqrt{1+i^2}};$$

2° $$\sin i > Ai - \frac{A^3 i}{2.3} \quad \text{et} \quad < i,$$

par conséquent,

$$A - \frac{A^3 i^3}{2.3} < i, \quad \text{et} \quad A - \frac{A^3 i^2}{2.3} < 1, \quad \text{ou} \quad A < 1 + \frac{A^3 i^2}{2.3}.$$

Comme ces conditions doivent avoir lieu, quelque petit que soit i, il résulte de la première que A ne peut pas être moindre que 1; car, si $A < 1$, on aura $\frac{1}{A} > 1$; or la condition

$$A > \frac{1}{\sqrt{1+i^2}} \quad \text{donne} \quad \frac{1}{A} < \sqrt{1+i^2};$$

donc, quelque peu que $\frac{1}{A}$ surpassât l'unité, il serait toujours possible de prendre i tel que

$$\sqrt{1+i^2} \quad \text{fût} \quad < \frac{1}{A},$$

tandis que cette quantité doit toujours être $> \frac{1}{A}$.

Il résulte ensuite de la seconde condition que A ne peut pas être

plus grand que l'unité; car, quelque peu que A surpassât l'unité, il serait toujours possible de prendre i assez petit pour que l'on eût

$$1 + \frac{A^3 i^2}{2.3} < A,$$

tandis qu'on doit avoir toujours

$$1 + \frac{A^3 i^2}{2.3} > A.$$

Donc, puisque la valeur de A ne peut être ni moindre ni plus grande que l'unité, il s'ensuit qu'on aura nécessairement $A = 1$.

Donc *la fonction dérivée de* $\sin x$ *est simplement* $\cos x$, *et la fonction dérivée de* $\cos x$ *est* $-\sin x$, x désignant un angle quelconque, c'est-à-dire un arc dans le cercle dont le rayon est l'unité.

Ainsi l'on aura en général, pour un angle quelconque i,

$$\sin i = i - \frac{i^3}{2.3} - \frac{i^5}{2.3.4.5} - \ldots,$$

$$\cos i = 1 - \frac{i^2}{2} + \frac{i^4}{2.3.4} - \frac{i^6}{2.3.4.5.6} + \ldots,$$

formules connues, et dont la découverte est due à Newton.

Nous venons de considérer les sinus et les cosinus comme fonctions des angles. On peut réciproquement considérer les angles comme fonctions de leurs sinus ou cosinus, et en cherchant les fonctions dérivées. On désigne communément cette fonction par les mots angle sin ou angle cos, placés avant le sinus ou le cosinus, comme caractéristiques.

Soit

$$f(x) = \text{angle sin } x, \quad \text{on aura} \quad \sin f(x) = x;$$

mettant $x + i$ pour x, et supposant

$$i f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \ldots = \omega,$$

on aura

$$\sin[f(x) + \omega] = x + i = \sin f(x) \cos\omega + \cos f(x) \sin\omega;$$

or

$$\sin f(x) = x, \quad \cos f(x) = \sqrt{1 - \sin^2 f(x)} = \sqrt{1 - x^2};$$

de plus

$$\sin\omega = \omega - \frac{\omega^3}{2.3} + \ldots, \quad \text{et} \quad \cos\omega = 1 - \frac{\omega^2}{2} + \ldots,$$

par les formules trouvées plus haut; donc, faisant ces substitutions et restituant la valeur de ω, on aura, en ordonnant les termes par rapport à i, l'équation identique

$$x + i = x + i\sqrt{1-x^2}\,f'(x) + \frac{i^2}{2}\left[\sqrt{1-x^2}\,f''(x) - x[f'(x)]^2\right] + \ldots,$$

laquelle donne, par la comparaison des premiers termes affectés de i,

$$1 = \sqrt{1-x^2}\,f'(x), \quad \text{d'où résulte} \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La comparaison des autres termes donnera les valeurs de $f''(x)$, $f'''(x)$, ...; mais il est plus simple de les déduire immédiatement de celle de $f'(x)$.

Soit maintenant

$$f(x) = \text{angle cos}\,x, \quad \text{on aura} \quad x = \cos f(x);$$

mettant $x + i$ pour x, et $f(x) + \omega$ pour $f(x)$, on aura

$$x + i = \cos[f(x) + \omega] = \cos f(x)\cos\omega - \sin f(x)\sin\omega;$$

or

$$\cos f(x) = x \quad \text{et} \quad \sin f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 f(x)} = \sqrt{1-x^2};$$

faisant ces substitutions, et mettant pour $\sin\omega$ et $\cos\omega$ leurs valeurs en séries, $\omega - \frac{\omega^3}{2.3} + \ldots$ et $1 - \frac{\omega^2}{2} + \ldots$, on aura, après avoir restitué la valeur de ω et ordonné les termes suivant les puissances de i, cette équation identique

$$x + i = x - i\sqrt{1-x^2}\,f'(x) - \frac{i^2}{2}\left[\sqrt{1-x^2}\,f''(x) + x[f(x)]^2\right] + \ldots;$$

et la comparaison des deux premiers termes affectés de i donnera

$$1 = -\sqrt{1-x^2}\,f'(x),$$

d'où résulte

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc, puisque x étant le sinus d'un angle, $\sqrt{1-x^2}$ en est le cosinus et x étant le cosinus, $\sqrt{1-x^2}$ en est le sinus, il résulte de ce que nous venons de trouver que *la fonction dérivée d'un angle, exprimé par son sinus, est égale à l'unité divisée par le cosinus, et que la fonction dérivée d'un angle, exprimé par son cosinus, est égale à l'unité divisée par le sinus, et prise avec le signe* $-$.

LEÇON SIXIÈME.

FONCTIONS DÉRIVÉES DES QUANTITÉS DE DIFFÉRENTES FONCTIONS D'UNE MÊME VARIABLE, OU DÉPENDANTES DE CES FONCTIONS PAR DES ÉQUATIONS DONNÉES.

Les fonctions que nous venons de considérer dans les trois dernières Leçons sont comme les éléments dont se composent toutes les fonctions qu'on peut former par des opérations algébriques; c'est pourquoi nous avons cru devoir commencer par chercher les fonctions dérivées de ces fonctions simples; et nous allons voir maintenant comment on peut trouver les fonctions dérivées des fonctions composées de celles-ci d'une manière quelconque.

Nous supposerons en général que p, q, r, ... soient des fonctions quelconques d'une même variable, dont les fonctions dérivées p', q', r', ... soient connues, et que y soit une fonction composée de p, q, r, ..., dont on demande la fonction dérivée y'.

On considérera que, x devenant $x+i$, y deviendra en général

$$y+iy'+\frac{i^2}{2}y''+\ldots;$$

or p, q, r, ... deviennent en même temps

$$p+ip'+\ldots,\quad q+iq'+\ldots,\quad r+ir'+\ldots;$$

il n'y aura donc qu'à substituer ces valeurs dans l'expression de y, développer les termes suivant les puissances de i, et le coefficient de i sera la valeur cherchée de y'.

Ainsi, si

$$y=Ap+Bq+Cr+\ldots,$$

A, B, C, ... étant des coefficients quelconques, on aura sur-le-champ

$$y'=Ap'+Bq'+Cr'+\ldots.$$

Si $y=Apq$, la quantité pq deviendra

$$(p+ip'+\ldots)(q+iq'+\ldots)=pq+i(qp'+pq')+\ldots;$$

donc

$$y'=A(qp'+pq').$$

Si $y=Apqr$, on trouvera de la même manière

$$y'=A(qrp'+prq'+pqr').$$

Si $y=A\frac{p}{q}$, la quantité $\frac{p}{q}$ deviendra

$$\frac{p+ip'+\ldots}{q+iq'+\ldots}.$$

Développant le dénominateur en série, suivant les règles connues, on aura

$$(p+ip'+\ldots)\left(\frac{1}{q}-\frac{iq'}{q^2}+\ldots\right)=\frac{p}{q}+i\left(\frac{p'}{q}-\frac{pq'}{q^2}\right)+\ldots;$$

donc

$$y'=A\left(\frac{p'}{q}-\frac{pq'}{q^2}\right)=A\left(\frac{p'q-pq'}{q^2}\right).$$

Soit $y=Ap^mq^n$, la quantité p^mq^n deviendra

$$(p+ip'+\ldots)^m(q+iq'+\ldots)^n=(p^m+mip^{m-1}p'+\ldots)(q^n+niq^{n-1}q'+\ldots)$$
$$=p^mq^n+i(mp^{m-1}q^np'+nq^{n-1}p^mq')+\ldots;$$

donc

$$y'=A(mq^np^{m-1}p'+np^mq^{n-1}q').$$

On trouvera de la même manière que, si $y=Ap^mq^nr^l$, on aura

$$y'=A(mq^nr^lp^{m-1}p'+np^mr^lq^{n-1}q'+lp^mq^nr^{l-1}r'),$$

et ainsi de suite.

Soit en général $y=f(p)$; en regardant $f(p)$ comme une fonction

de p, ses fonctions dérivées seront $f'(p)$, $f''(p)$, ...; en sorte que, p devenant $p+\omega$, $f(p)$ deviendra

$$f(p)+\omega f'(p)+\frac{\omega^2}{2}f''(p)+\dots.$$

Or, p étant une fonction de x, lorsque x devient $x+i$, p devient

$$p+ip'+\frac{i^2}{2}p''+\dots.$$

Donc, faisant $\omega=ip'+\frac{i^2}{2}p''+\dots$, la fonction $f(p)$ deviendra, par la substitution de $x+i$ à la place de x,

$$f(p)+ip'f'(p)+\frac{i^2}{2}[p'^2f''(p)+p''f'(p)]+\dots.$$

Ainsi l'on aura d'abord $y'=p'f'(p)$, d'où résulte ce principe : que *la fonction dérivée d'une fonction, qui est elle-même une fonction de x, est égale au produit des fonctions dérivées de ces deux fonctions.*

Ce principe sert à généraliser les résultats précédents, relativement aux fonctions dérivées des puissances des exponentielles des logarithmes et des sinus et cosinus.

Ainsi :

si $y=p^m$, on aura ..... $y'=mp^{m-1}p'$;

si $y=a^p$, on aura ..... $y'=a^p p'la$;

si $y=\log p$, on aura ..... $y'=\frac{p'}{p}$;

si $y=\sin p$, on aura ..... $y'=p'\cos p$;

si $y=\cos p$, on aura ..... $y'=-p'\sin p$;

si $y=\text{angle sin}\,p$, on aura ... $y'=\frac{p'}{\sqrt{1-p^2}}$;

si $y=\text{angle cos}\,p$, on aura ... $y'=-\frac{p'}{\sqrt{1-p^2}}$.

Supposons ensuite que y soit une fonction de p et q, que nous désignerons par $f(p,q)$; il s'agira de substituer $x+i$ à la place de x dans

les deux fonctions p et q, et de trouver ensuite le coefficient de i dans le développement de la fonction composée $f(p,q)$. Or il est visible qu'on aura le même résultat, soit qu'on fasse ces deux substitutions à la fois, soit qu'on les fasse l'une après l'autre, puisque les quantités p et q sont regardées dans ces substitutions comme indépendantes.

En substituant d'abord $x+i$ à la place de x dans la fonction p, la fonction $f(p,q)$, regardée seulement comme fonction de p, deviendra, par ce que nous venons de trouver,

$$f(p,q)+ip'f'(p)+\dots.$$

J'écris simplement $f'(p)$ pour désigner la fonction dérivée de $f(p,q)$ relativement à p seul, q étant regardée comme constante.

Substituons ensuite $x+i$ au lieu de x dans la fonction q, la fonction $f(p,q)$ deviendra pareillement

$$f(p,q)+iq'f'(q)+\dots,$$

où $f'(q)$ représente la fonction prime de $f(p,q)$ prise relativement à q seul, p étant regardée comme constante.

Quant au terme $ip'f'(p)$, il est visible qu'étant déjà multiplié par i il se trouverait par cette nouvelle substitution augmenté de termes multipliés par i^2, i^3, ...

Ainsi les deux premiers termes de la série provenant du développement de $f(p,q)$, après la substitution de $x+i$ pour x dans p et q, seront simplement

$$f(p,q)+ip'f'(p)+iq'f'(q);$$

de sorte qu'on aura

$$y'=p'f'(p)+q'f'(q)=f'(p,q).$$

Si y était une fonction de p, q, r, représentée par $f(p,q,r)$, on trouverait de la même manière

$$y'=p'f'(p)+q'f'(q)+r'f'(r)=f'(p,q,r),$$

et ainsi de suite.

D'où l'on peut tirer cette conclusion générale, que *la fonction dérivée d'une fonction composée de différentes fonctions particulières sera la somme des fonctions dérivées relatives à chacune de ces mêmes fonctions considérées séparément et indépendamment de l'autre.*

Ce principe, combiné avec le précédent, suffit pour trouver les premières fonctions dérivées de toutes sortes de fonctions, ainsi que les fonctions dérivées des ordres supérieurs.

Ainsi la fonction dérivée de pq étant qp' relativement à p, et pq' relativement à q, la fonction dérivée totale sera $qp'+pq'$, comme nous l'avons trouvé ci-dessus.

De même, en regardant maintenant p' et q' comme de nouvelles fonctions, dont p'' et q'' sont les fonctions dérivées, la fonction dérivée de qp' sera $q'p'+qp''$, et la fonction dérivée de pq' sera $p'q'+pq''$; de sorte que la seconde fonction dérivée de pq sera $qp''+2p'q'+pq''$; et ainsi de suite.

Par les mêmes principes, on a

$$mq^n p^{m-1}p' + np^m q^{n-1}q'$$

pour la fonction dérivée de $p^m q^n$, le premier terme étant la fonction dérivée relative à p, et le second étant la fonction dérivée relative à q; et ainsi du reste.

Si $p=\sin x$ et $q=\cos x$, on a $p'=\cos x$ et $q'=-\sin x$; donc, lorsque

$$y=\sin^m x\cos^n x,$$

on aura

$$y'=m\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x-n\cos^{n-1}x\sin^{m+1}x.$$

Ainsi, comme la tangente d'un angle est égale au sinus divisé par le cosinus, en la dénotant par le mot tang placé avant l'angle comme caractéristique, et faisant

$$y=\operatorname{tang}x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

on aura

$$y'=1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Et en général, si $y=\operatorname{tang}p$, on trouvera

$$y'=\frac{p'}{\cos^2 p}.$$

Mais la fonction y pourrait n'être donnée que par une équation entre x et y. Représentons en général cette équation par

$$\mathrm{F}(y,x)=0;$$

il est clair que, si l'on regarde y comme une fonction de x déterminée par cette équation, et qu'on imagine cette fonction substituée au lieu de y dans $\mathrm{F}(y,x)$, il en résultera une fonction de x qui sera identiquement nulle, quelle que soit la valeur de x, et par conséquent aussi en mettant $x+i$ à la place de x, quelle que soit la valeur de i.

Dénotons cette fonction par z, et comme x, devenant $x+i$, z devient $z+iz'+\frac{i^2}{2}z''+\ldots$, on aura, quelle que soit la valeur de i, l'équation

$$z+iz'+\frac{i^2}{2}z''+\ldots=0;$$

d'où l'on tire les équations

$$z=0,\quad z'=0,\quad z''=0,\quad \ldots.$$

Maintenant, z étant $=\mathrm{F}(y,x)$, on aura, par les formules ci-dessus,

$$z'=y'\,\mathrm{F}'(y)+\mathrm{F}'(x),$$

en dénotant par $\mathrm{F}'(y)$ la fonction prime de $\mathrm{F}(y,x)$ prise relativement à y seul, et par $\mathrm{F}'(x)$ la fonction prime de $\mathrm{F}(y,x)$ prise relativement à x, et faisant $x'=1$, puisque x devient simplement $x+i$.

Ainsi l'équation dérivée $z'=0$ sera

$$y'\,\mathrm{F}'(y)+\mathrm{F}'(x)=0,$$

d'où l'on tire

$$y'=-\frac{\mathrm{F}'(x)}{\mathrm{F}'(y)}.$$

On aura de cette manière la valeur de y' en fonction de x et y; de là,

en regardant toujours y comme fonction de x, on pourra déduire la valeur de y'' en fonction de x et y. Car, en supposant pour abréger $y' = f(y, x)$, la fonction dérivée de $f(y, x)$ sera de la forme $y' f'(y) + f'(x)$; donc, substituant pour y' sa valeur, on aura

$$y'' = f(y, x)\, f'(y) + f'(x),$$

et ainsi de suite.

On trouverait les mêmes valeurs de y''', y^{IV}, ..., par les équations $z'' = 0$, $z''' = 0$, ...

Si l'on avait plus généralement l'équation

$$\mathrm{F}(y, p, q, \ldots) = 0,$$

on trouverait de la même manière l'équation dérivée

$$y' \mathrm{F}'(y) + p' \mathrm{F}'(p) + q' \mathrm{F}'(q) + \ldots = 0;$$

d'où l'on tire

$$y' = -\frac{p' \mathrm{F}'(p) + q' \mathrm{F}'(q) + \ldots}{\mathrm{F}'(y)}.$$

Et, regardant de nouveau la valeur de y' comme une fonction de y, p, q, ..., p', q', ..., sa fonction dérivée sera la valeur de y''; et ainsi de suite.

Enfin, si l'on avait deux fonctions y et u données par les équations

$$\mathrm{F}(y, u, p, q, \ldots) = 0, \quad f(y, u, p, q, \ldots) = 0,$$

on pourrait par les mêmes opérations trouver immédiatement les valeurs de y' et u' en fonctions de y, u, p, q, ...

Car on aurait d'abord les équations dérivées

$$y' \mathrm{F}'(y) + u' \mathrm{F}'(u) + p' \mathrm{F}'(p) + q' \mathrm{F}'(q) + \ldots = 0,$$
$$y' f'(y) + u' f'(u) + p' f'(p) + q' f'(q) + \ldots = 0,$$

d'où l'on tirerait y' et u'; et ainsi du reste.

Les règles que nous venons d'établir suffisent pour trouver les fonctions dérivées d'un ordre quelconque de toute fonction d'une variable, de quelque manière qu'elle soit donnée, soit explicitement par des

expressions déterminées, soit implicitement par des équations quelconques.

A l'égard de la notation que nous avons employée pour représenter séparément chaque partie d'une fonction dérivée, relative à chacune des fonctions particulières qui entrent dans la fonction primitive, on voit qu'elle est très simple et très commode, et nous nous en servirons ainsi dans la suite.

On peut même, par cette notation, ne séparer du reste de la fonction dérivée que la partie relative à une variable donnée. Ainsi les fonctions primes de p et q, ou de p, q et r ou ..., peuvent se développer de cette manière,

$$f'(p, q) = p' f'(p) + q' f'(q),$$
$$f'(p, q, r) = p' f'(p) + f'(q, r) = p' f'(p) + q' f'(q) + r' f'(r),$$

et ainsi des autres.

Il faut toujours observer de ne renfermer, entre les parenthèses qui suivent la caractéristique f' des fonctions dérivées, que les variables par rapport auxquelles on veut prendre la fonction dérivée.

Lorsqu'il n'y a qu'une seule variable entre les parenthèses, comme $f'(p)$, cette expression indique que la fonction dérivée doit être prise relativement à cette variable, comme si elle était seule et unique; c'est-à-dire que $f'(p)$ sera le coefficient de i dans le développement de la fonction donnée, en y substituant simplement $p + i$ au lieu de p, quelque fonction d'ailleurs que p puisse être de x.

Quoiqu'il soit plus simple de déduire les fonctions dérivées des différents ordres les unes des autres, parce que de cette manière les mêmes règles et les mêmes opérations font trouver toutes les dérivées, et que ce soit même dans cette dérivation successive des fonctions que consistent l'essence et l'algorithme fondamental du Calcul des fonctions dérivées, il y a néanmoins des cas où la considération immédiate des termes successifs de la série peut donner les fonctions dérivées successives d'une même fonction d'une manière plus directe et plus générale; c'est ce qui a lieu lorsque le développement de la fonction en série peut s'exécuter facilement par les formules connues.

En effet, si l'on a en général

$$y = f(p, q, \ldots),$$

p, q, ... étant des fonctions de x, et qu'on substitue $x + i$ à la place de x, cette équation deviendra

$$y + iy' + \frac{i^2}{2}y'' + \ldots = f\left(p + ip' + \frac{i^2}{2}p'' + \ldots,\ q + iq' + \frac{i^2}{2}q'' + \ldots\right).$$

Et elle devra avoir lieu indépendamment de la quantité indéterminée i; de sorte que, si l'on peut développer directement la fonction qui forme le second membre en une série de la forme

$$f(p, q, \ldots) + i\mathrm{P} + i^2\mathrm{Q} + i^3\mathrm{R} + \ldots,$$

on aura sur-le-champ

$$y' = \mathrm{P}, \quad \frac{y''}{2} = \mathrm{Q}, \quad \frac{y'''}{2.3} = \mathrm{R}, \quad \ldots.$$

Soit, par exemple, $y = pq$; on aura à réduire en série l'expression

$$\left(p + ip' + \frac{i^2}{2}p'' + \ldots\right)\left(q + iq' + \frac{i^2}{2}q'' + \ldots\right),$$

et il est facile de voir qu'on aura

$$y' = pq' + p'q,$$

$$\frac{y''}{2} = \frac{pq''}{2} + p'q' + \frac{p''q}{2},$$

$$\frac{y'''}{2.3} = \frac{pq'''}{2.3} + \frac{p'q''}{2} + \frac{p''q'}{2} + \frac{p'''q}{2.3},$$

et, en général,

$$\frac{y^{(m)}}{2.3\ldots m} = \frac{pq^{(m)}}{2.3\ldots m} + \frac{p'q^{(m-1)}}{2.3\ldots(m-1)} + \frac{p''q^{(m-2)}}{2.2.3\ldots(m-2)} + \frac{p'''q^{(m-3)}}{2.3.2.3\ldots(m-3)} + \ldots;$$

l'exposant placé entre deux parenthèses désignant l'ordre de la fonction dérivée; de sorte qu'en multipliant par $2.3\ldots m$, on aura la formule générale

$$y^{(m)} = pq^{(m)} + mp'q^{(m-1)} + \frac{m(m-1)}{2}p''q^{(m-2)} + \ldots$$

En général, si l'on fait $y = pqr, \ldots$, on trouvera de la même manière que la valeur de $\frac{y^{(m)}}{1.2.3\ldots m}$ sera composée d'autant de termes de la forme

$$\frac{p^{(\lambda)}q^{(\mu)}r^{(\nu)}\ldots}{1.2.3\ldots\lambda \times 1.2.3\ldots\mu \times 1.2.3\ldots\nu \times \ldots}$$

qu'on pourra donner de valeurs différentes aux nombres λ, μ, ν, ..., de manière que l'on ait

$$\lambda + \mu + \nu + \ldots = m.$$

Supposons

$$p = e^{ax}, \quad q = e^{bx}, \quad r = e^{cx}, \quad \ldots,$$

la quantité e étant toujours telle que $le = 1$; on aura

$$y = e^{(a+b+c+\ldots)x},$$

et la fonction dérivée de l'ordre m sera

$$y^{(m)} = (a + b + c + \ldots)^m y;$$

on aura de même

$$p^{(\lambda)} = a^\lambda p, \quad q^{(\mu)} = b^\mu q, \quad r^{(\nu)} = c^\nu r, \quad \ldots.$$

Donc, puisque $y = pqr, \ldots$, il s'ensuit que la quantité

$$\frac{(a + b + c + \ldots)^m}{1.2.3\ldots m}$$

pourra se développer en autant de termes de la forme

$$\frac{a^\lambda b^\mu c^\nu \ldots}{1.2.3\ldots\lambda \times 1.2.3\ldots\mu \times 1.2.3\ldots\nu \times \ldots}$$

qu'il y aura de manières différentes de satisfaire à l'équation

$$\lambda + \mu + \nu + \ldots = m,$$

ce qui s'accorde avec ce qu'on a trouvé d'une autre manière à la fin de la Leçon IV.

Faisons maintenant

$$p = x^a, \quad q = x^b, \quad r = x^c, \quad \ldots,$$

on aura

$$y = x^{a+b+c+\ldots} = x^{\mathrm{A}},$$

en faisant

$$\mathrm{A} = a + b + c + \ldots.$$

Donc, prenant les fonctions dérivées des ordres m, λ, μ, ν, ... on aura

$$y^{(m)} = \mathrm{A}(\mathrm{A}-1)(\mathrm{A}-2)\ldots(\mathrm{A}-m+1)x^{\mathrm{A}-m},$$
$$p^{(\lambda)} = a(a-1)(a-2)\ldots(a-\lambda+1)x^{a-\lambda},$$
$$q^{(\mu)} = b(b-1)(b-2)\ldots(b-\mu+1)x^{b-\mu},$$
$$r^{(\nu)} = c(c-1)(c-2)\ldots(c-\nu+1)x^{c-\nu},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, puisque

$$\mathrm{A} - m = a - \lambda + b - \mu + c - \nu + \ldots,$$

la quantité

$$\frac{\mathrm{A}(\mathrm{A}-1)(\mathrm{A}-2)\ldots(\mathrm{A}-m+1)}{1.2.3\ldots m}$$

se trouvera composée d'autant de quantités de la forme

$$\frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-\lambda+1)}{1.2.3\ldots\lambda} \times \frac{b(b-1)(b-2)\ldots(b-\mu+1)}{1.2.3\ldots\mu} \times \frac{c(c-1)(c-2)\ldots(c-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu} \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

qu'il y a de manières différentes de satisfaire à l'équation

$$m = \lambda + \mu + \nu + \ldots,$$

ce qui indique une analogie singulière entre le développement de la puissance d'un multinôme et celui du produit continuel du même degré.

En effet, ayant développé une puissance comme

$$(a + b + c + \ldots)^m$$

en ses différents termes, on aura tout de suite le développement du produit continuel

$$\mathrm{A}(\mathrm{A}-1)(\mathrm{A}-2)\ldots(\mathrm{A}-m+1),$$

où

$$\mathrm{A} = a + b + c + \ldots,$$

en substituant dans chaque terme, à la place des puissances a^{λ}, b^{μ}, c^{ν}, ..., les produits continuels

$$a(a-1)(a-2)\ldots(a-\lambda+1),$$
$$b(b-1)(b-2)\ldots(b-\mu+1),$$
$$c(c-1)(c-2)\ldots(c-\nu+1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On trouve une démonstration directe de ce théorème, pour le binôme, dans l'ouvrage de Kramp, qui vient de paraître sous le titre d'*Analyse des Réfractions*.

Nous terminerons cette Leçon par une observation importante sur la nature des fonctions dérivées.

Il est facile de se convaincre, par la manière dont les fonctions dérivées dépendent de la fonction primitive, que ces fonctions sont absolument déterminées, de sorte qu'une fonction donnée ne peut avoir que des fonctions dérivées données aussi et uniques pour chaque ordre.

Il n'en est pas de même des fonctions primitives à l'égard de leurs dérivées; car, puisque la fonction dérivée de toute quantité constante est nulle, il s'ensuit que, si une fonction donnée est primitive à l'égard d'une autre fonction donnée, elle le sera encore, étant augmentée ou diminuée d'une constante quelconque. Ainsi une fonction donnée peut avoir une infinité de fonctions primitives à raison de la constante qu'on y peut ajouter. Mais il ne s'ensuit pas que toutes les fonctions primitives dont elle est susceptible ne puissent différer que par une constante; c'est ce que nous allons démontrer.

Soit une fonction donnée $f(x)$, dont $\mathrm{F}(x)$ et $\varphi(x)$ soient également fonctions primitives; on aura donc, par l'hypothèse,

$$\mathrm{F}'(x) = f(x), \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = f(x);$$

donc, prenant les fonctions dérivées successives, on aura aussi

$$F'(x)=f'(x),\quad F''(x)=f''(x),\quad \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \ldots,$$

et de même

$$\varphi'(x)=f'(x),\quad \varphi''(x)=f''(x),\quad \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots,\quad \ldots.$$

Considérons maintenant les fonctions

$$F(x+i)\quad \text{et}\quad \varphi(x+i);$$

on a, par le développement,

$$F(x+i)=F(x)+iF'(x)+\frac{i^2}{2}F''(x)+\ldots;$$

donc, substituant les valeurs de $F'(x)$, $F''(x)$, ..., on aura

$$F(x+i)=F(x)+if(x)+\frac{i^2}{2}f'(x)+\frac{i^3}{2,3}f''(x)+\ldots,$$

et de même

$$\varphi(x+i)=\varphi(x)+if(x)+\frac{i^2}{2}f'(x)+\frac{i^3}{2,3}f''(x)+\ldots,$$

donc, retranchant l'une de l'autre ces deux équations, on aura

$$F(x+i)-\varphi(x+i)=F(x)-\varphi(x).$$

Comme cette équation doit avoir lieu quels que soient x et i, et que le premier membre est une fonction de $x+i$, et le second une pareille fonction de x, il est visible que cette fonction ne peut être qu'une constante indépendante de x et i. On aura donc nécessairement

$$F(x)-\varphi(x)=K,$$

K étant une constante, et par conséquent

$$F(x)=\varphi(x)+K;$$

d'où l'on voit que, si $\varphi(x)$ est une fonction primitive de $f(x)$, toute

autre fonction primitive $F(x)$ de la même fonction $f(x)$ ne pourra différer de $\varphi(x)$ que par une constante.

Il suit de là que, lorsqu'on aura trouvé d'une manière quelconque une fonction primitive d'une fonction donnée, en y ajoutant une constante arbitraire, on aura l'expression générale de la fonction primitive de la fonction donnée.

LEÇON SEPTIÈME.

SUR LA MANIÈRE DE RAPPORTER LES FONCTIONS DÉRIVÉES A DIFFÉRENTES VARIABLES.

Nous avons vu comment les fonctions dérivées naissent des fonctions primitives par le simple développement, lorsqu'on attribue à une variable de la fonction un accroissement indéterminé.

Ainsi toute fonction dérivée est nécessairement relative à une variable, et une fonction qui contient plusieurs quantités peut avoir différentes fonctions dérivées, suivant les quantités qu'on y considère comme variables. Lorsque ces quantités dépendent les unes des autres, il y a aussi une relation entre les fonctions dérivées qui y sont relatives, par laquelle on peut déduire les fonctions les unes des autres; cette relation étant un point important de la théorie des fonctions, nous allons nous en occuper dans cette Leçon.

En regardant y comme une simple fonction de x, on sait que y devient $y+iy'+\frac{i^2}{2}y''+\ldots$, x devenant $x+i$. Si l'on suppose que x soit elle-même une fonction d'une autre variable quelconque t, et qu'on veuille regarder y comme fonction de t, alors t devenant $t+i$, ou bien (pour ne pas confondre les accroissements de x et de t), t devenant $t+o$, y deviendra aussi de la forme

$$y+oy'+\frac{o^2}{2}y''+\ldots.$$

Mais pour distinguer les fonctions dérivées $y', y'', \ldots$, qui dans la première formule se rapportent à x, celles de la seconde, qui se rapportent à t, nous désignerons pour un moment les premières par (y'),

(y''), ..., de manière que, x devenant $x+i$, y deviendra

$$y+i(y')+\frac{i^2}{2}(y'')+\ldots.$$

Or x étant regardé comme fonction de t, lorsque t devient $t+o$, x devient

$$x+ox'+\frac{o^2}{2}x''+\ldots;$$

donc, si dans la formule précédente l'on met à la place de i l'accroiscroissement de x, qui est $ox'+\frac{o^2}{2}x''+\ldots$, on aura également ce que y devient lorsque t devient $t+o$. Ainsi on aura l'équation identique

$$y+\left(ox'+\frac{o^2}{2}x''+\ldots\right)(y')+\frac{1}{2}\left(ox'+\frac{o^2}{2}x''+\ldots\right)^2(y'')+\ldots=y+oy'+\frac{o^2}{1.2}y''+\ldots,$$

d'où l'on tire, par la comparaison des termes affectés des différentes puissances de o,

$$x'(y')=y', \quad x''(y')+x'^2(y'')=y'', \quad \ldots.$$

La première équation donne

$$(y')=\frac{y'}{x'},$$

la seconde donnera

$$(y'')=\frac{y''-x''(y')}{x'^2},$$

et, substituant la valeur précédente de (y'), l'on aura

$$(y'')=\frac{y''}{x'^2}-\frac{x''y'}{x'^3}.$$

La troisième équation donnerait la valeur de (y'''), et ainsi de suite. Mais j'observe que l'on peut déduire immédiatement la valeur de (y'') de celle de (y'), et successivement celle de (y''') de celle de (y''), ..., par la loi uniforme qui doit régner entre ces fonctions dérivées successives.

En effet, puisque (y') fonction dérivée de y par rapport à x est égale à $\frac{y'}{x'}$, c'est-à-dire à la fonction dérivée de y par rapport à t, divisée par

celle de x; de même (y'') fonction dérivée de (y') par rapport à x sera égale à la fonction dérivée de $\frac{y'}{x'}$ par rapport à t, divisée par x', et ainsi de suite. Or la fonction dérivée de $\frac{y'}{x'}$ est $\frac{y''}{x'^2} - \frac{y'x''}{x'^3}$; donc on aura

$$(y'') = \frac{y''}{x'^2} - \frac{y'x''}{x'^3},$$

comme on l'a trouvé par la seconde équation. Et ainsi de suite.

Par ces substitutions on dépouille, pour ainsi dire, les fonctions dérivées de ce qui dépend de la variable à laquelle elles se rapportaient originairement, et on les généralise de manière qu'elles peuvent se rapporter également à toute autre variable.

Or ce qui déterminait les fonctions dérivées de y à se rapporter à la variable x, c'était qu'elles résultaient de l'accroissement i attribué à cette variable; au lieu qu'en rapportant ces fonctions à une autre variable dont x est censée fonction, l'accroissement de x devient alors $ox' + \frac{o^2}{2}x'' + \ldots$, o étant l'accroissement de la nouvelle variable. Ainsi, comme le cas particulier où l'accroissement de x est simplement i résulte de l'expression générale de l'accroissement de x, en y faisant $x' = 1$, il s'ensuit que $x' = 1$ est la condition qui détermine les fonctions dérivées à se rapporter à la variable x, et qu'en général pour les rapporter à toute autre variable il n'y aura qu'à supposer égale à l'unité la fonction prime de cette variable.

Il résulte de là cette conclusion générale que, si une formule contient les fonctions dérivées y', y'', ..., relatives à une variable x, et qu'on veuille les rapporter à une autre variable quelconque, il faudra changer

y' en $\frac{y'}{x'}$,

y'' en $\frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'} = \frac{y''}{x'^2} - \frac{y'x''}{x'^3}$,

y''' en $\frac{\left[\frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'}\right]'}{x'} = \frac{\left(\frac{y''}{x'^2} - \frac{y'x''}{x'^3}\right)'}{x'} = \frac{y'''}{x'^3} - \frac{3y''x''}{x'^4} - y'\left(\frac{x'''}{x'^4} - \frac{3x''^2}{x'^5}\right)$,

et ainsi de suite. Si t est la nouvelle variable à laquelle on veut rapporter les fonctions dérivées, cette variable étant une fonction quelconque de x et y, il n'y aura qu'à faire $t' = 1$, et par conséquent $t'' = 0$, $t''' = 0$, ..., équations par lesquelles on déterminera les valeurs de x', x'', ..., ou de y', y'', ...

Ce principe est général et doit s'appliquer à toutes les fonctions dérivées qui se rapportent à une même variable. Il est d'un grand usage dans le calcul des fonctions, et constitue un des principes fondamentaux de l'algorithme de ce calcul.

Le cas le plus simple est celui où, y étant supposé fonction de x, et ses fonctions dérivées y', y'', ... étant rapportées à x, on veut au contraire regarder x comme fonction de y, et rapporter à y les fonctions dérivées x', x'', ... On fera dans ce cas les substitutions indiquées ci-dessus, et l'on supposera

$$y' = 1, \quad y'' = 0, \quad \ldots.$$

On substituera donc $\frac{1}{x'}$ à la place de y', $-\frac{x''}{x'^3}$ à la place de y'', et ainsi des autres.

Ainsi, ayant trouvé dans la Leçon IV que $y = a^x$ donne, relativement à x,

$$y' = a^x la = y la,$$

on pourra avoir immédiatement la valeur de x' relativement à y, en substituant simplement $\frac{1}{x'}$ à la place de y', ce qui donnera

$$x' = \frac{1}{y la}.$$

Comme x est le logarithme de y pour la base a, on a par là la fonction dérivée du logarithme.

De même, en supposant

$$y = \sin x,$$

on a vu dans la Leçon V que l'on a, relativement à x,

$$y' = \cos x;$$

donc, pour avoir réciproquement la fonction dérivée x' de l'angle par

le sinus y, il n'y aura qu'à substituer $\frac{1}{x'}$ à la place de y', ce qui donnera

$$x' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Si l'on fait

$$y = \cos x,$$

on a

$$y' = -\sin x;$$

donc, on obtiendra de la même manière

$$x' = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Ces résultats s'accordent avec ceux qu'on a trouvés dans les endroits cités d'une manière directe, mais plus longue.

Enfin ayant vu, dans la Leçon VI, que

$$y = \operatorname{tang} x \quad \text{donne} \quad y' = \frac{1}{\cos^2 x},$$

si l'on veut avoir la fonction dérivée de l'arc par la tangente, on aura sur-le-champ

$$x' = \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tang}^2 x} = \frac{1}{1+y^2}.$$

En général, puisque

$$y = \operatorname{tang} p \quad \text{donne} \quad y' = \frac{p'}{\cos^2 p},$$

on aura réciproquement

$$p' = y' \cos^2 p,$$

p étant une fonction quelconque de x.

Si maintenant on veut regarder p comme fonction de y et rapporter la fonction dérivée p' à la variable y, on fera $y' = 1$, et l'on aura

$$p' = \cos^2 p = \frac{1}{1+y^2},$$

comme ci-dessus.

La formule $x' = \cos^2 x$ est très propre pour trouver facilement les fonctions dérivées de x des ordres supérieurs. En effet, on aura d'abord

$$x'' = -2x' \sin x \cos x = -x' \sin 2x = -\sin 2x \cos^2 x,$$

en substituant la valeur précédente de x'. Prenant de nouveau les fonctions dérivées, on aura

$$\begin{aligned} x''' &= -2x'(\cos 2x \cos^2 x - \sin 2x \sin x \cos x) \\ &= -2x' \cos 3x \cos x \\ &= -2 \cos 3x \cos^3 x, \end{aligned}$$

et, continuant de la même manière, on aura

$$\begin{aligned} x^{IV} &= 2.3x'(\sin 3x \cos^3 x + \cos 3x \sin x \cos^2 x) \\ &= 2.3x' \sin 4x \cos^2 x \\ &= 2.3 \sin 4x \cos^4 x, \\ x^{V} &= 2.3.4x'(\cos 4x \cos^4 x - \sin 4x \sin x \cos^3 x) \\ &= 2.3.4x' \cos 5x \cos^3 x \\ &= 2.3.4 \cos 5x \cos^5 x, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Ayant ainsi toutes les fonctions dérivées de x relativement à y, c'est-à-dire, en supposant $x = f(y)$, si on les substitue dans la formule

$$x + ix' + \frac{i^2}{2}x'' + \ldots,$$

on aura la valeur de x répondant à $y + i$.

Ainsi l'on aura la valeur de l'arc dont la tangente sera $\operatorname{tang}(x+i)$, exprimée par la série

$$x + i\cos^2 x - \frac{i^2 \cos^2 x}{2}\sin 2x - \frac{i^3 \cos^3 x}{3}\cos 3x + \frac{i^4 \cos^4 x}{4}\sin 4x + \frac{i^5 \cos^5 x}{5}\cos 5x - \ldots,$$

formule remarquable par sa simplicité et sa généralité.

Si l'on fait $x = 0$, on trouvera

$$\operatorname{arc\,tang} i = i - \frac{i^3}{3} + \frac{i^5}{5} - \ldots.$$

formule connue et due à Leibnitz; mais il n'est permis de faire $x = 0$ qu'autant qu'on est assuré d'avance de la forme de la série.

LEÇON HUITIÈME.

DU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS LORSQU'ON DONNE A LA VARIABLE UNE VALEUR DÉTERMINÉE. CAS DANS LESQUELS LA RÈGLE GÉNÉRALE EST EN DÉFAUT. ANALYSE DE CES CAS. DES VALEURS DES FRACTIONS DONT LE NUMÉRATEUR ET LE DÉNOMINATEUR S'ÉVANOUISSENT A LA FOIS.

La théorie des fonctions dérivées est fondée sur le développement des fonctions lorsqu'on attribue à une variable un accroissement indéterminé. Nous avons montré dans la Leçon II que ce développement ne peut contenir que des puissances entières et positives de la quantité dont la variable est augmentée, tant que cette variable demeure indéterminée, et nous avons ensuite déduit de cette forme les lois de la dérivation des fonctions. Il est donc nécessaire, avant d'aller plus loin, d'examiner les cas où elle pourrait se trouver en défaut, et les conséquences qui en résulteraient relativement aux fonctions dérivées.

Nous avons vu, dans la même Leçon, que la série du développement de $f(x+i)$ ne peut contenir de puissances négatives de i, à moins que l'on ait $f(x) =$ à l'infini, parce que, en supposant $i = 0$, les termes qui contiendraient de pareilles puissances deviendraient infinis. On peut prouver de la même manière que la série ne pourra contenir aucun terme multiplié par $\log i$ ou par une puissance positive quelconque de $\log i$, si la même condition n'a lieu, ces sortes de termes devenant également infinis lorsque $i = 0$. Or cette condition exige que la variable x ait une valeur déterminée, qu'on trouvera par la résolution de l'équation

$$f(x) = \frac{1}{0}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Soit donc a une racine de l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$, de manière que l'on ait

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{(x-a)^m}{F(x)},$$

$F(x)$ étant une fonction de x qui ne devienne ni nulle ni infinie, lorsque $x = a$, et m étant un nombre positif quelconque.

En mettant $x + i$ à la place de x, et faisant $x = a$, on aura

$$f(x+i) = \frac{F(a+i)}{i^m},$$

où l'on voit que la série du développement de $f(x+i)$ aura dans ce cas des termes de la forme $\frac{1}{i^m}$, $\frac{1}{i^{m-1}}$, ...

Considérons maintenant les cas où ce développement pourrait contenir des puissances positives, mais fractionnaires de i. La démonstration, que nous avons donnée pour prouver l'absence de ces sortes de termes, est fondée sur ce que ces termes augmenteraient le nombre des radicaux dans le développement de $f(x+i)$, tandis qu'il est évident que cette fonction ne peut contenir que les mêmes radicaux que la fonction $f(x)$, tant que x est supposé une quantité quelconque indéterminée. Mais cette démonstration cesse d'avoir lieu lorsqu'on donne à x une valeur déterminée telle qu'elle fasse disparaître un radical dans $f(x)$, car alors ce radical pourra être remplacé par un radical de i dans le développement de $f(x+i)$. En effet, supposons que la fonction $f(x)$ contienne un radical qui s'évanouisse lorsque $x = a$, tel que $(x-a)^{\frac{m}{n}}$, m et n étant des nombres entiers; la fonction $f(x+i)$ contiendra le radical correspondant $(x-a+i)^{\frac{m}{n}}$, lequel, en faisant $x = a$, devient $i^{\frac{m}{n}}$; de sorte que le développement de cette fonction suivant les puissances de i pourra contenir le radical $i^{\frac{m}{n}}$ et toutes ses puissances entières et positives.

Cette conclusion n'aurait pas lieu si la valeur particulière de x n'anéantissait pas le radical, mais le faisait seulement disparaître en

rendant nulle une quantité par laquelle il serait multiplié. Car, quoique le radical puisse disparaître de cette manière de la fonction $f(x)$, il pourrait ne pas disparaître dans les fonctions dérivées $f'(x), f''(x), \ldots$, qui entrent dans le développement de $f(x+i)$, et alors la démonstration conserverait toute sa force. Ainsi, si un radical de la fonction $f(x)$ se trouvait multiplié par $(x-a)^m$, m étant un nombre entier positif, ce radical y disparaîtrait lorsque $x=a$; mais, dans la fonction $f(x+i)$, il serait multiplié par $(x-a+i)^m$, et, dans le cas de $x=a$, il le serait par i^m. Donc, dans le développement de cette fonction, il ne pourrait paraître alors avant le terme qui contiendrait la puissance i^m; par conséquent il disparaîtrait des fonctions dérivées $f'(x), f''(x), \ldots$, jusqu'à $f^{(m-1)}x$, mais reparaîtrait dans les fonctions dérivées des ordres suivants; de sorte que le développement de $f(x+i)$ contiendrait toujours dans ce cas le même radical. Il n'y a donc que le cas où le radical est détruit dans la fonction $f(x)$ par une valeur particulière de x, dans lequel le développement de $f(x+i)$ doive contenir des radicaux de i, et il reste maintenant à voir comment on pourra juger que cela doive avoir lieu.

Pour cela, j'observe que les fonctions $f'(x+i), f''(x+i), \ldots$ sont également les fonctions dérivées de $f(x+i)$, soit qu'on les prenne relativement à x, soit qu'on les prenne relativement à i, ce qui est évident, puisqu'en augmentant soit x, soit i d'une même quantité quelconque, on a le même accroissement de la quantité $x+i$. D'où il suit que l'on aura également les valeurs de $f'(x), f''(x), \ldots$, quel que soit x, en prenant les fonctions dérivées successives de $f(x+i)$ relativement à i, et faisant ensuite $i=0$.

Or, si l'on suppose que le développement de $f(x+i)$ doive contenir, lorsque $x=a$, un terme affecté de i^m, tel que Ai^m, A étant une fonction de a, et m n'étant pas un nombre entier positif, en prenant les fonctions dérivées relativement à i, il faudra que les développements des fonctions

$$f'(x+i), \quad f''(x+i), \quad \ldots$$

contiennent les termes

$$mAi^{m-1}, \quad m(m-1)Ai^{m-2}, \quad \ldots.$$

Donc, faisant $i=0$, on en conclura que les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., lorsque $x=a$, contiendront respectivement les termes

$$A0^m, \quad mA0^{m-1}, \quad m(m-1)A0^{m-2}, \quad \ldots.$$

Si m est un nombre quelconque négatif, il est clair que ces termes seront infinis.

Si m est un nombre positif non entier, soit n le nombre entier immédiatement plus grand que m, il est visible que le terme

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)A0^{m-n}$$

sera infini ainsi que tous les suivants, et que tous les précédents seront nuls. D'où il suit que les fonctions dérivées de l'ordre $n^{\text{ième}}$ et des ordres suivants deviendront infinies lorsque $x=a$.

Dans ce cas donc, si n est l'indice de l'ordre de la première fonction qui devient infinie, le développement de $f(x+i)$ devra contenir un terme de forme i^m, m étant un nombre compris entre $n-1$ et n.

Si $n=0$, c'est-à-dire si la fonction $f(x)$ devient elle-même infinie, ce développement contiendra alors des puissances de i.

On doit appliquer aux logarithmes ce qu'on vient de démontrer sur les puissances fractionnaires de i; car on a vu, à la fin de la Leçon IV, que les logarithmes répondent aux puissances fractionnaires dont l'exposant est infiniment petit, c'est-à-dire aux racines infinitièmes, et que c'est par cette raison qu'il y a toujours une infinité de logarithmes répondant à un même nombre.

Aussi, par la même raison, lorsqu'on résout une fonction en série suivant les puissances d'une même quantité, il peut se trouver quelquefois le logarithme de cette quantité entre les puissances positives et les puissances négatives de la même quantité, lorsque la fonction elle-même contient des logarithmes.

Ainsi, si la fonction $f(x)$ contient des logarithmes, le développement de $f(x+i)$ pourra contenir, dans le cas particulier de $x=a$, des termes de la forme $i^m(\log i)^n$, et les fonctions dérivées $f'(x+i)$,

$f''(x+i)$, ... contiendront alors des termes de la forme

$$i^{m-1}(\log i)^n \quad \text{et} \quad i^m(\log i)^{n-1},$$

de la forme

$$i^{m-2}(\log i)^n, \quad i^m(\log i)^{n-1} \quad \text{et} \quad i^m(\log i)^{n-2},$$

et ainsi de suite. Or, lorsque $i=0$, $\log i$ est infini, et toute quantité de la forme $i^m(\log i)^n$ est nulle ou infinie suivant que m est un nombre positif ou négatif, quel que soit n. Donc, puisque dans les termes des fonctions dérivées

$$f'(x+i), \quad f''(x+i), \quad \ldots,$$

les exposants des puissances de i qui multiplient les puissances de $\log i$ vont nécessairement en diminuant, il s'ensuit que, dès qu'une de ces fonctions deviendra infinie par la position de $x=a$, toutes les autres des ordres suivants deviendront infinies aussi.

On peut donc conclure en général que le développement

$$f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\ldots$$

de la fonction $f(x+i)$ ne peut devenir fautif pour une valeur déterminée de x, qu'autant qu'une des fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... deviendra infinie en donnant à x cette valeur, et que ce développement ne sera fautif qu'à commencer du terme qui deviendra infini.

Pour trouver alors la vraie forme du développement suivant les puissances ascendantes de i, il faudra faire d'abord dans la fonction $f(x+i)$, x égal à la valeur donnée, et développer ensuite suivant les puissances croissantes de i par les règles connues, en ayant égard aux puissances fractionnaires ou négatives de i qui se trouveraient dans la fonction même.

Pour confirmer par quelques exemples ce que nous venons de démontrer, supposons d'abord que l'on ait

$$f(x)=2ax-x^2+a\sqrt{x^2-a^2},$$

et qu'on demande le développement $f(x+i)$ lorsque $x=a$.

En prenant les fonctions dérivées suivant les règles générales, on aura

$$f'(x)=2(a-x)+\frac{ax}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$f''(x)=-2+\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}-\frac{ax^2}{(x^2-a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et ainsi de suite.

En faisant $x=a$, on a

$$f(x)=a^2, \quad f'(x)=+\frac{1}{0};$$

donc toutes les fonctions dérivées des ordres suivants seront aussi infinies, et le développement de $f(a+i)$ contiendra nécessairement un terme de la forme Ai^m, m étant entre 0 et 1.

En effet, on aura, par la substitution de $a+i$ dans l'expression de $f(x)$,

$$f(a+i)=a^2-i^2+a\sqrt{i}\sqrt{2a+i},$$

d'où l'on voit que le développement suivant les puissances de i contiendra des termes de la forme $\sqrt{i}$, $i\sqrt{i}$, $i^2\sqrt{i}$, ...

Soit, en second lieu,

$$f(x)=\sqrt{x}+(x-a)^2l(x-a);$$

on aura ces fonctions dérivées

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2(x-a)l(x-a)+x-a,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}+2l(x-a)+3,$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8x^2\sqrt{x}}+\frac{2}{x-a},$$

.....

Si l'on fait $x=a$, la fonction dérivée $f'(x)$ devient infinie, ainsi que toutes les suivantes.

Ainsi le développement de $f(x+i)$ par la formule générale devien-

dra fautif dans le cas de $x=a$, et il contiendra nécessairement le terme $i^2 li$.

Nous avons observé plus haut que, lorsqu'une valeur particulière de x fait disparaître dans $f(x)$ un radical en ne détruisant pas ce radical lui-même, mais en rendant seulement nul son coefficient, alors ce même radical reparaîtra nécessairement dans les fonctions dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ..., et la formule générale du développement de $f(x+i)$ ne cessera pas d'être exacte dans ce cas.

Mais, lorsque la fonction $f(x)$, au lieu d'être donnée d'une manière explicite, n'est déterminée que par une équation où le radical ne se trouve pas, la détermination de ses fonctions dérivées dans le cas dont il s'agit pourra être sujette à des difficultés qu'il est bon de prévenir.

Soit $y=f(x)$, et par conséquent, en prenant les fonctions dérivées, $y'=f'(x)$, $y''=f''(x)$, ... Supposons que, pour une valeur donnée de x, il disparaisse dans $f(x)$ un radical, lequel ne disparaisse pas dans $f'(x)$; il est clair que, pour cette valeur de x, la fonction $f'(x)$ aura un plus grand nombre de valeurs différentes que la fonction $f(x)$, à raison du radical qui se trouve dans $f'(x)$, et qui a disparu de $f(x)$; d'où il suit que la valeur de y' ne pourra pas être donnée par une simple fonction de x et y qui ne contiendrait pas explicitement ce radical. Cependant, si dans l'équation $y=f(x)$ on fait disparaître ce même radical par l'élévation aux puissances, et que l'équation résultante soit représentée par

$$F(x,y)=0,$$

l'équation dérivée de celle-ci donnera

$$y'=-\frac{F'(x)}{F'(y)},$$

comme on l'a vu dans la Leçon VI; donc cette expression sera en défaut, dans le cas où l'on donnerait à x la valeur en question, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les quantités $F'(x)$ et $F'(y)$ seront, l'une et l'autre, nulles à la fois. Ainsi, dans le cas dont il s'agit, l'expression de y' deviendra égale à zéro divisé par zéro; et réciproquement, lorsque

cela arrivera, ce sera une marque que la valeur correspondante de x aura détruit dans $f(x)$ un radical, sans le détruire dans $f'(x)$.

Pour avoir dans ce cas la valeur de y', il ne suffira donc pas de s'arrêter à la première équation dérivée de $F(x,y)=0$, laquelle étant

$$y'F'(y)+F'(x)=0,$$

aura lieu d'elle-même, indépendamment de la valeur de y'; mais il faudra passer aux secondes fonctions dérivées, et l'on aura une équation de la forme

$$y''F'(y)+y'^2P+y'Q+R=0,$$

P, Q, R étant des fonctions de x et de y qu'on trouvera par les règles générales de la dérivation des fonctions.

Cette équation donnera, généralement parlant, la valeur de y''; mais, dans le cas proposé, la quantité $F'(y)$ devenant nulle, le terme qui contient y'' disparaîtra, et l'équation restante sera une équation du second degré en y' par laquelle on déterminera la valeur de y', qui sera par conséquent double.

Soit, par exemple,

$$f(x)=x+(x-a)\sqrt{x-b},$$

on aura

$$f'(x)=1+\sqrt{x-b}+\frac{x-a}{2\sqrt{x-b}}.$$

Faisant $x=a$, on a

$$f(x)=a, \quad \text{et} \quad f'(x)=1+\sqrt{a-b},$$

où l'on voit que le radical disparaît dans la valeur de $f(x)$, mais non pas dans celle de $f'(x)$, en sorte que la première est simple et la seconde double.

Maintenant, si l'on fait $f(x)=y$, et qu'on élève l'équation au carré pour faire disparaître le radical, on aura

$$(y-x)^2=(x-a)^2(x-b).$$

En prenant les fonctions primes, on aura celle-ci

$$2(y-x)(y'-1)=2(x-a)(x-b)+(x-a)^2,$$

d'où l'on tire

$$y' = 1 + \frac{2(x-a)(x-b)+(x-a)^2}{2(y-x)}.$$

Faisant $x=a$, on a aussi $y=a$; ce qui donne

$$y' = \frac{0}{0}.$$

On passera donc aux fonctions secondes, et l'on aura cette équation du second ordre :

$$2(y-x)y'' + 2(y'-1)^2 = 4(x-a) + 2(x-b).$$

Ici la supposition de $x=a$ et $y=a$ donne

$$(y'-1)^2 = a-b,$$

d'où l'on tire

$$y' = 1 + \sqrt{a-b},$$

comme plus haut.

Il peut arriver que la même valeur de x, qui détruit les termes de la première équation dérivée, détruise aussi ceux de la seconde; il faudra alors passer à l'équation tierce, laquelle, par la destruction des termes qui contiendront y'' et y''', deviendra une simple équation en y', mais du troisième degré, et ainsi de suite; cela dépend de la nature du radical qui aura été détruit dans y, et qui doit être remplacé par le degré de l'équation d'où dépend la valeur de y'.

Supposons en second lieu que la même valeur de x, qui fait disparaître un radical dans $f(x)$, le fasse disparaître aussi dans $f'(x)$, sans le faire disparaître néanmoins dans $f''(x)$; alors les valeurs correspondantes de $f(x)$ et $f'(x)$ seront en même nombre, mais celles de $f''(x)$ seront en nombre plus grand. Si donc on fait évanouir ce radical dans l'équation $y=f(x)$, la valeur de y'' qu'on en déduira se trouvera $=\frac{0}{0}$, et il faudra passer aux équations dérivées d'un ordre supérieur pour avoir la valeur de y''.

Soit, pour en donner un exemple,

$$y = x + (x-a)^2\sqrt{x-b};$$

on aura

$$y' = 1 + 2(x-a)\sqrt{x-b} + \frac{(x-a)^2}{2\sqrt{x-b}},$$

$$y'' = 2\sqrt{x-b} + \frac{(x-a)}{\sqrt{x-b}} - \frac{(x-a)^2}{4(x-b)^{\frac{3}{2}}}.$$

Faisant $x=a$, on a

$$y=a, \quad y'=1 \quad \text{et} \quad y'' = 2\sqrt{a-b}.$$

Mais, si l'on réduit l'équation proposée à cette forme rationnelle

$$(y-x)^2 = (x-a)^4(x-b),$$

on en tirera l'équation dérivée

$$2(y-x)(y'-1) = 4(x-a)^3(x-b) + (x-a)^4,$$

dans laquelle, en faisant $x=a$ et $y=a$, tout se détruit.

On passera donc à l'équation dérivée du second ordre, laquelle sera

$$(y-x)y'' + (y'-1)^2 = 6(x-a)^2(x-b) + 8(x-a)^3.$$

Faisant $x=a$ et $y=a$, on aura

$$(y'-1)^2 = 0, \quad \text{et par conséquent} \quad y'=1;$$

mais, pour avoir la valeur de y'', il faudra avoir recours à l'équation tierce, et même à l'équation quarte.

On aura ainsi

$$(y-x)y''' + 3(y'-1)y'' = 18(x-a)^2 + 12(x-a)(x-b),$$

où tout se détruit encore en faisant $x=a$, $y=a$, $y'=1$.

L'équation dérivée de l'ordre suivant sera donc

$$(y-x)y^{iv} + 4(y'-1)y''' + 3y''^2 = 48(x-a) + 12(x-b).$$

Faisant ici $x=a$, $y=a$, $y'=1$, on aura

$$3y''^2 = 12(a-b),$$

d'où l'on tire

$$y'' = 2\sqrt{a-b},$$

comme plus haut.

Nous ne pousserons pas plus loin cette analyse, qui d'ailleurs n'a plus de difficultés d'après les principes établis. Mais nous allons donner à cette occasion la théorie de la méthode pour trouver la valeur d'une fraction dans les cas où le numérateur et le dénominateur deviennent nuls à la fois.

Soit $\frac{f(x)}{F(x)}$ une pareille fraction, $f(x)$ et $F(x)$ étant des fonctions de x, telles que la supposition de $x=a$ les rendent toutes deux nulles à la fois, et que l'on demande la valeur de cette fraction lorsque $x=a$.

On fera

$$y=\frac{f(x)}{F(x)}, \quad \text{et par conséquent} \quad yF(x)=f(x);$$

en supposant $x=a$, cette équation se vérifie d'elle-même et ne peut pas servir à déterminer la valeur de y. Mais, en prenant l'équation dérivée, on aura

$$y'F(x)+yF'(x)=f'(x);$$

la supposition de $x=a$ détruit le terme $y'F(x)$, et le reste de l'équation donne

$$y=\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

S'il arrivait que les fonctions primes $f'(x)$ et $F'(x)$ devinssent aussi nulles par la même supposition, on trouverait alors par le même principe, en substituant dans l'équation ci-dessus $f'(x)$, $F'(x)$, au lieu de $f(x)$, $F(x)$, cette nouvelle expression de y,

$$y=\frac{f''(x)}{F''(x)}.$$

On pourrait aussi déduire la même expression de l'équation dérivée trouvée ci-dessus, en considérant que, comme elle se vérifie d'elle-même lorsque $x=a$, elle ne peut servir à la détermination de y; que par conséquent il sera nécessaire de passer à la seconde équation dérivée, laquelle sera

$$y''F(x)+2y'F'(x)+yF''(x)=f''(x).$$

La supposition de $x=a$ rendant nulles les fonctions $F(x)$ et $F'(x)$, les termes qui contiennent y' et y'' s'en iront d'eux-mêmes, et les termes restants donneront

$$y=\frac{f''(x)}{F''(x)},$$

comme plus haut.

Si la même supposition de $x=a$ donnait encore

$$f''(x)=0 \quad \text{et} \quad F''(x)=0,$$

on trouverait de la même manière

$$y=\frac{f'''(x)}{F'''(x)},$$

et ainsi de suite.

D'où résulte cette règle générale que, lorsque le numérateur et le dénominateur d'une fonction de x deviennent nuls à la fois pour une valeur donnée de x, il faut prendre à leur place les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur, jusqu'à ce qu'on arrive à une fraction qui ait une valeur déterminée pour la même supposition de x.

On sait que la formule $\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$ donne la somme de la progression géométrique

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^n.$$

Lorsque $x=1$, cette formule devient $\frac{0}{0}$; on prendra donc les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur, et on aura la nouvelle fraction $\frac{1-(n+1)x^n}{-1}$, dont la valeur, lorsque $x=1$, est n.

Si l'on prend la fonction dérivée de la formule $\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$, on a $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$, et celle-ci exprime par conséquent la somme de la série

$$1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1},$$

qui est la fonction dérivée de la série

$$x+x^2+x^3+\ldots+x^n.$$

Lorsque $x=1$, la formule précédente devient $\frac{0}{0}$; on prendra donc

les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur, et l'on aura la nouvelle fraction

$$\frac{-n(n+1)x^{n-1}+n(n+1)x^n}{-2(1-x)},$$

qui, en faisant $x=1$, devient de nouveau $\frac{0}{0}$. On prendra derechef les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur de cette dernière fraction, et l'on aura celle-ci

$$\frac{-n(n+1)(n-1)x^{n-2}+n^2(n+1)x^{n-1}}{2},$$

laquelle, lorsque $x=1$, devient

$$\frac{-n(n+1)(n-1)+n^2(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2},$$

somme de la série

$$1+2+3+\ldots+n.$$

On pourrait craindre qu'en prenant ainsi les fonctions dérivées du numérateur et du dénominateur, on n'eût toujours des fonctions qui devinssent égales à zéro divisé par zéro pour la même valeur de x; mais il est aisé de se convaincre que cela ne saurait avoir lieu. Car, si $x=a$ faisait évanouir les fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ... à l'infini, puisqu'on a en général

$$f(x+i)=f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\ldots,$$

on aurait, lorsque $x=a$,

$$f(a+i)=0,$$

quel que soit i, ce qui est impossible. Il en serait de même de $F(x+i)$.

Il peut néanmoins arriver que ces fonctions deviennent à la fois infinies par la même supposition de $x=a$, ce qui rendrait également indéterminées les valeurs des fractions $\frac{f(x)}{F(x)}$, $\frac{f'(x)}{F'(x)}$, ...; mais ce cas rentre alors dans le cas général que nous avons examiné plus haut, et

il en faudra conclure que le développement des fonctions $f(x+i)$ et $F(x+i)$ contiendra alors des puissances de i fractionnaires ou négatives.

On substituera donc $a+i$ à la place de x, tant dans la fonction du numérateur que dans celle du dénominateur, et l'on résoudra l'une et l'autre en série suivant les puissances ascendantes de i; on fera ensuite $i=0$, après avoir divisé le haut et le bas de la fraction par la plus basse puissance de i; ou, ce qui revient au même, on n'aura d'abord égard qu'au premier terme de chacune des deux séries.

Soit, par exemple, la fraction

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

dont on demande la valeur, lorsque $x=a$. On voit d'abord que cette supposition rend le numérateur et le dénominateur nuls. Leurs fonctions dérivées sont

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{a-x}} \quad \text{et} \quad \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}},$$

qui deviennent l'une et l'autre infinies par la même supposition. On fera donc $x=a+i$, et la fonction du numérateur deviendra

$$\sqrt{a+i}-\sqrt{a}+\sqrt{i}=\sqrt{i}+\frac{i}{2\sqrt{a}}+\ldots;$$

la fonction du dénominateur deviendra

$$\sqrt{i(2a+i)}=\sqrt{2ai}+\frac{i\sqrt{i}}{2\sqrt{2a}}+\ldots,$$

en ordonnant les termes suivant les puissances croissantes de i. En ne prenant que les deux premiers, on aura la fraction

$$\frac{\sqrt{i}}{\sqrt{2ai}}=\frac{1}{\sqrt{2a}},$$

pour la valeur cherchée.

En général, une fonction de x ne peut devenir nulle lorsque $x=a$,

à moins qu'elle ne contienne un facteur $(x-a)^m$, m étant un nombre positif quelconque. Donc, si deux fonctions de x deviennent nulles par la même supposition, il faudra qu'elles contiennent chacune un pareil facteur; et, pour trouver alors la valeur de la fraction formée de ces deux fonctions, il ne s'agira que de la réduire à sa plus simple expression, en la dégageant du facteur commun au numérateur et au dénominateur.

Si donc on fait $x=a+i$, ce qui donne $x-a=i$, le facteur commun sera une puissance de i qui s'évanouira par la division, et alors il n'y aura plus qu'à faire $i=0$ pour avoir $x=a$.

Ainsi, ayant la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$, la substitution de $a+i$ au lieu de x donnera d'abord en général

$$\frac{f(a)+i\,f'(a)+\frac{i^2}{2}f''(a)+\dots}{F(a)+i\,F'(a)+\frac{i^2}{2}F''(a)+\dots}.$$

Si $f(a)=0$ et $F(a)=0$, le haut et le bas de la fraction seront divisibles par i, et elle deviendra

$$\frac{f'(a)+\frac{i}{2}f''(a)+\dots}{F'(a)+\frac{i}{2}F''(a)+\dots}.$$

Faisant ensuite $i=0$ pour avoir $x=a$, on aura $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ pour la valeur de la fraction proposée, lorsque $x=a$.

Si $f'(a)=0$ et $F'(a)=0$, la fraction se réduira encore, et deviendra, par une nouvelle division par i,

$$\frac{\frac{1}{2}f''(a)+\frac{i}{2.3}f'''(a)+\dots}{\frac{1}{2}F''(a)+\frac{i}{2.3}F'''(a)+\dots},$$

laquelle, en faisant $i=0$, se réduit à $\frac{f''(a)}{F''(a)}$; et ainsi de suite.

On voit par là la raison de la règle donnée plus haut, et l'on voit en

même temps que cette règle n'est bonne que pour les fractions dont le numérateur et le dénominateur contiennent à la fois un facteur de la forme $(x-a)^m$, m étant un nombre entier positif. Aussi peut-on toujours résoudre ces cas en faisant disparaître ce facteur par les règles connues, pour réduire la fraction à sa plus simple expression.

Dans les autres cas où m serait un nombre fractionnaire ou négatif, la règle sera en défaut, et il faudra alors réduire les deux fonctions $f(a+i)$ et $F(a+i)$ dans les séries ascendantes

$$\alpha i^m+\beta i^{m+n}+\dots \quad \text{et} \quad Ai^m+Bi^{m+p}+\dots,$$

de sorte que l'on aura

$$\frac{f(a+i)}{F(a+i)}=\frac{\alpha+\beta i^n+\dots}{A+Bi^p+\dots},$$

et, faisant $i=0$, on a

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{\alpha}{A}.$$

Si les premiers termes des deux séries contenaient des puissances différentes de i, par exemple, si, la série du numérateur étant la même que ci-dessus, celle du dénominateur était

$$Ai^p+Bi^{p+q}+\dots,$$

m et p étant des nombres quelconques, mais n, q, ... étant positifs pour que les deux séries soient toujours ascendantes, alors, faisant $i=0$, après avoir divisé le haut et le bas de la fraction par la plus petite des deux puissances i^m et i^p, on aura $\frac{f(a)}{F(a)}=0$ ou $=\infty$ suivant que $m>$ ou $<p$, en regardant les nombres négatifs comme moindres que les positifs. Mais, par ce que nous avons démontré plus haut, on est assuré que ces cas n'auront lieu que lorsque les valeurs des fonctions dérivées de $f(x)$ et de $F(x)$ deviendront infinies en même temps, par la supposition de $x=a$.

L'analyse que nous venons de donner est nécessaire pour ne rien laisser à désirer sur la nature des fonctions dérivées; mais, comme

elle ne regarde que la valeur de ces fonctions dans des cas particuliers, elle n'influe point sur la théorie générale des fonctions, en tant qu'on n'y considère que la forme et la dérivation des fonctions, laquelle est par conséquent indépendante des exceptions que nous avons trouvées.

LEÇON NEUVIÈME.

DE LA MANIÈRE D'AVOIR LES LIMITES DU DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION, LORSQU'ON N'A ÉGARD QU'A UN NOMBRE DÉTERMINÉ DE TERMES. CAS DANS LESQUELS LES PRINCIPES DU CALCUL DIFFÉRENTIEL SONT EN DÉFAUT. THÉORÈME FONDAMENTAL. LIMITES DE PLUSIEURS SÉRIES. MANIÈRE RIGOUREUSE D'INTRODUIRE LES FONCTIONS DÉRIVÉES DANS LA THÉORIE DES COURBES ET DANS CELLE DES MOUVEMENTS VARIÉS.

Toute fonction $f(x+i)$ se développe, ainsi qu'on l'a vu, dans la série

$$f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\frac{i^3}{2.3}f'''(x)+\ldots,$$

laquelle va naturellement à l'infini, à moins que les fonctions dérivées de $f(x)$ ne deviennent nulles, ce qui a lieu lorsque $f(x)$ est une fonction rationnelle et entière de x.

Tant que ce développement ne sert qu'à la génération des fonctions dérivées, il est indifférent que la série aille à l'infini ou non; il l'est aussi lorsqu'on ne considère le développement que comme une simple transformation analytique de la fonction; mais, si on veut l'employer pour avoir la valeur de la fonction dans les cas particuliers, comme offrant une expression d'une forme plus simple à raison de la quantité i qui se trouve dégagée de dessous la fonction, alors, ne pouvant tenir compte que d'un certain nombre plus ou moins grand de termes, il est important d'avoir un moyen d'évaluer le reste de la série qu'on néglige, ou du moins de trouver des limites de l'erreur qu'on commet en négligeant ce reste.

La détermination de ces limites est surtout d'une grande importance

dans l'application de la Théorie des fonctions à l'Analyse des courbes et à la Mécanique, pour pouvoir donner à cette application la rigueur de l'ancienne Géométrie, comme on le voit dans la seconde Partie de la *Théorie des fonctions analytiques*.

Dans la solution que j'ai donnée de ce problème dans l'Ouvrage cité, j'ai commencé par chercher l'expression exacte du reste de la série, ensuite j'ai déterminé les limites de cette expression. Mais on peut trouver immédiatement ces limites d'une manière plus élémentaire, et également rigoureuse.

Nous allons, pour cela, établir ce principe général, qui peut être utile dans plusieurs occasions :

Une fonction qui est nulle lorsque la variable est nulle aura nécessairement, pendant que la variable croîtra positivement, des valeurs finies et de même signe que celles de sa fonction dérivée, ou de signe opposé si la variable croît négativement, tant que les valeurs de la fonction dérivée conserveront le même signe et ne deviendront pas infinies.

Ce principe est très important dans la théorie des fonctions, parce qu'il établit une relation générale entre l'état des fonctions primitives et celui des fonctions dérivées, et qu'il sert à déterminer les limites des fonctions dont on ne connait que les dérivées.

Nous allons le démontrer d'une manière rigoureuse.

Considérons la fonction $f(x+i)$, dont le développement général est

$$f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\dots.$$

Nous avons vu, dans la Leçon précédente, que la forme du développement peut être différente pour des valeurs particulières de x; mais que, tant que $f'(x)$ ne sera pas infinie, les deux premiers termes de ce développement seront exacts, et que les autres contiendront par conséquent des puissances de i plus hautes que la première, de manière qu'on aura

$$f(x+i)=f(x)+i[f'(x)+\mathrm{V}],$$

V étant une fonction de x et i, telle qu'elle devienne nulle lorsque $i=0$.

Donc, puisque V devient nul lorsque i devient nul, il est clair que, en faisant croître i par degrés insensibles depuis zéro, la valeur de V croîtra aussi insensiblement depuis zéro, soit en plus ou en moins, jusqu'à un certain point, après quoi elle pourra diminuer; que par conséquent on pourra toujours donner à i une valeur telle que la valeur correspondante de V, abstraction faite du signe, soit moindre qu'une quantité donnée, et que pour les valeurs moindres de i la valeur de V soit aussi moindre.

Soit D une quantité donnée qu'on pourra prendre aussi petite qu'on voudra; on pourra donc toujours donner à i une valeur assez petite pour que la valeur de V soit renfermée entre les limites D et $-\mathrm{D}$; donc, puisqu'on a

$$f(x+i)-f(x)=i[f'(x)+\mathrm{V}],$$

il s'ensuit que la quantité $f(x+i)-f(x)$ sera renfermée entre ces deux-ci

$$i[f'(x)\pm\mathrm{D}].$$

Comme cette conclusion a lieu quelle que soit la valeur de x, pourvu que $f'(x)$ ne soit pas infinie, elle subsistera aussi en mettant successivement

$$x+i,\ x+2i,\ x+3i,\ \dots,\ x+(n-1)i$$

à la place de x; de sorte qu'on pourra toujours prendre i positif et assez petit pour que les valeurs des quantités

$$\begin{aligned}
&f(x+i)-f(x),\\
&f(x+2i)-f(x+i),\\
&f(x+3i)-f(x+2i),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&f(x+ni)-f[x+(n-1)i]
\end{aligned}$$

soient renfermées respectivement entre les limites

$$i[f'(x)\pm D],$$
$$i[f'(x+i)\pm D],$$
$$i[f'(x+2i)\pm D],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$i\big[f'[x+(n-1)i]\pm D\big],$$

en prenant pour D la même quantité dans chacune de ces limites, ce qui est permis, pourvu qu'aucune des quantités

$$f'(x),\ f'(x+i),\ f'(x+2i),\ \ldots,\ f'[x+(n-1)i]$$

ne soit infinie.

Donc, si toutes ces dernières quantités sont de même signe, c'est-à-dire, toutes positives ou toutes négatives, il est facile d'en conclure que la somme des quantités précédentes, laquelle se réduit à

$$f(x+ni)-f(x),$$

aura pour limite la somme des limites, c'est-à-dire les quantités

$$if'(x)+if'(x+i)+if'(x+2i)+\ldots+if'[x+(n-1)i]\pm niD.$$

Si donc on prend la quantité arbitraire D moindre que la somme

$$f'(x)+f'(x+i)+f'(x+2i)+\ldots+f'[x+(n-1)i]$$

divisée par n, abstraction faite du signe de cette somme, la quantité $f(x+ni)-f(x)$ sera nécessairement renfermée entre zéro et la somme

$$2i\big[f'(x)+f'(x+i)+f'(x+2i)+\ldots+f'[x+(n-1)i]\big].$$

Donc, si P est la plus grande valeur positive ou négative des quantités

$$f'(x),\ f'(x+i),\ \ldots,\ f'[x+(n-1)i],$$

la quantité $f(x+ni)-f(x)$ sera, à plus forte raison, renfermée entre zéro et $2ni$P.

Or, comme, en prenant i aussi petit qu'on voudra, on peut en même temps prendre n aussi grand qu'on voudra, on pourra supposer in égale à une quantité quelconque z, positive ou négative, puisque la quantité i peut être prise positivement ou négativement.

La quantité $f(x+ni)-f(x)$ deviendra ainsi $f(x+z)-f(x)$, et pourra représenter une fonction quelconque de z, qui s'évanouit lorsque $z=0$, la quantité x pouvant maintenant être regardée comme une constante arbitraire. De même, la quantité $f'(x+ni)$ deviendra $f'(x+z)$, et représentera la fonction dérivée de la même fonction de z, puisque $f'(x+z)$ est également la fonction dérivée de $f(x+z)$, soit par rapport à x, soit par rapport à z.

On peut donc conclure en général que, si $f'(x+z)$ a constamment des valeurs finies et de même signe, depuis $z=0$, et que P soit la plus grande de ces valeurs, abstraction faite du signe, la fonction primitive dont il s'agit sera renfermée entre 0 et $2z$P; par conséquent elle aura toujours aussi des valeurs finies, et de même signe que la fonction dérivée si z est positive, ou de signe différent si z est négative.

Dans le Calcul différentiel, la conclusion précédente est une suite immédiate et nécessaire de la manière dont ce Calcul est envisagé, et elle se présente même sans aucune limitation relativement aux valeurs infinies; mais nous allons voir qu'elle est souvent en défaut à cet égard, ce qui servira à montrer la nécessité d'une analyse plus rigoureuse que celle qui sert de base au Calcul différentiel.

En effet, si y est une fonction de z, sa fonction dérivée, suivant la notation de ce Calcul, sera représentée par $\frac{dy}{dz}$, et y, intégrale de dy, est regardée, par les principes mêmes du Calcul, comme la somme de tous les éléments infiniment petits dy, ou $\frac{dy}{dz}dz$; par conséquent, si $y=0$ lorsque $z=0$, y sera la somme de tous les éléments $\frac{dy}{dz}dz$ qui répondent à tous les éléments de z. D'où l'on est en droit de conclure que, si $\frac{dy}{dz}$ a toujours des valeurs positives, depuis $z=0$ jusqu'à une

valeur quelconque positive de z, tous les éléments $\frac{dy}{dz}dz$ étant positifs, la valeur de y répondant à cette valeur de z sera nécessairement positive.

Cependant, si l'on a, par exemple,

$$y=\frac{1}{a-z}-\frac{1}{a},$$

a étant une constante quelconque positive, on aura $y=0$ lorsque $z=0$, et la valeur de $\frac{dy}{dz}$ sera, par les règles connues de la différentiation, $\frac{1}{(a-z)^2}$. Cette valeur est constamment positive, quelle que soit la valeur de z; il faudrait donc que la valeur de y fût toujours positive, ce qui n'est pas; car, en prenant z plus grand que a, y devient négative. Ainsi les principes du Calcul différentiel sont en défaut dans ce cas.

Suivant le principe que nous venons d'établir, la valeur de y ne sera nécessairement positive qu'autant que la fonction dérivée $\frac{dy}{dz}$ ne sera pas infinie dans l'étendue de la valeur de z. Or, $\frac{dy}{dz}$ étant égale à $\frac{1}{(a-z)^2}$, elle devient infinie lorsque $z=a$. Donc les valeurs de y seront nécessairement positives depuis $z=0$ jusqu'à $z=a$; mais elles pourront ne pas l'être lorsque $z>a$, quoique les fonctions dérivées $\frac{1}{(a-z)^2}$ soient toujours positives.

Voici maintenant comment le principe dont il s'agit s'applique à la détermination des limites du développement de $f(x+i)$.

Soient d'abord p et q les valeurs de $x+i$ qui rendent la fonction dérivée $f'(x+i)$ la plus petite et la plus grande, en regardant x comme donné, et faisant varier i depuis zéro jusqu'à une valeur quelconque donnée de i. Donc $f'(p)$ sera la plus petite valeur de $f'(x+i)$, et $f'(q)$ en sera la plus grande; par conséquent, $f'(x+i)-f'(p)$ et $f'(q)-f'(x+i)$ seront toujours des quantités positives.

Regardant ces deux quantités comme des fonctions dérivées, relatives à la variable i, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $i=0$, seront, à cause de x, p et q supposées constantes,

$$f(x+i)-f(x)-if'(p) \quad \text{et} \quad if'(q)-f(x+i)+f(x).$$

Ainsi, pourvu que $f'(x+i)$ ne soit jamais infinie depuis $i=0$ jusqu'à la valeur donnée de i, ce qui aura lieu si $f'(p)$ et $f'(q)$ ne sont point des quantités infinies, on aura par le principe précédent, si i est positif,

$$f(x+i)-f(x)-if'(p)>0 \quad \text{et} \quad f(x)-f(x+i)+if'(q)>0,$$

d'où l'on tire

$$f(x+i)>f(x)+if'(p) \quad \text{et} \quad f(x+i)<f(x)+if'(q).$$

Supposons ensuite que p et q soient les valeurs de $x+i$ qui rendent la fonction dérivée du second ordre $f''(x+i)$ la plus petite et la plus grande, en faisant varier i depuis zéro jusqu'à une valeur donnée; on aura $f''(p)$ et $f''(q)$ pour la plus petite et la plus grande valeur de $f''(x+i)$; par conséquent, $f''(x+i)-f''(p)$ et $f''(q)-f''(x+i)$ seront toujours des quantités positives.

Regardant ces quantités comme des fonctions dérivées relatives à la variable i, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles soient nulles, lorsque $i=0$, seront

$$f'(x+i)-f'(x)-if''(p),$$
$$if''(q)-f'(x+i)+f'(x).$$

Donc, pourvu que $f''(x+i)$ ne soit jamais infinie dans toute l'étendue de i, ce qui revient à ce que $f''(p)$ et $f''(q)$ ne soient point infinies, ces deux quantités seront, par le même principe, toujours positives et finies, i étant supposé positif; et en les regardant comme des fonctions dérivées relatives à i, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $i=0$, seront, à cause de x,

tives à la variable i, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $i=0$, seront, à cause de x, p et q supposées constantes,

$$f(x+i)-f(x)-if'(p) \quad \text{et} \quad if'(q)-f(x+i)+f(x).$$

Ainsi, pourvu que $f'(x+i)$ ne soit jamais infinie depuis $i=0$ jusqu'à la valeur donnée de i, ce qui aura lieu si $f'(p)$ et $f'(q)$ ne sont point des quantités infinies, on aura par le principe précédent, si i est positif,

$$f(x+i)-f(x)-if'(p)>0 \quad \text{et} \quad f(x)-f(x+i)+if'(q)>0,$$

d'où l'on tire

$$f(x+i)>f(x)+if'(p) \quad \text{et} \quad f(x+i)<f(x)+if'(q).$$

Supposons ensuite que p et q soient les valeurs de $x+i$ qui rendent la fonction dérivée du second ordre $f''(x+i)$ la plus petite et la plus grande, en faisant varier i depuis zéro jusqu'à une valeur donnée; on aura $f''(p)$ et $f''(q)$ pour la plus petite et la plus grande valeur de $f''(x+i)$; par conséquent, $f''(x+i)-f''(p)$ et $f''(q)-f''(x+i)$ seront toujours des quantités positives.

Regardant ces quantités comme des fonctions dérivées relatives à la variable i, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles soient nulles, lorsque $i=0$, seront

$$f'(x+i)-f'(x)-if''(p),$$
$$if''(q)-f'(x+i)+f'(x).$$

Donc, pourvu que $f''(x+i)$ ne soit jamais infinie dans toute l'étendue de i, ce qui revient à ce que $f''(p)$ et $f''(q)$ ne soient point infinies, ces deux quantités seront, par le même principe, toujours positives et finies, i étant supposé positif; et en les regardant comme des fonctions dérivées relatives à i, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $i=0$, seront, à cause de x,

p et q supposées constantes,

$$f(x+i)-f(x)-if'(x)-\frac{i^2}{2}f''(p),$$

$$\frac{i^2}{2}f''(q)-f(x+i)+f(x)+if'(x).$$

Ces nouvelles quantités seront donc aussi, par le même principe, toujours positives; on aura ainsi

$$f(x+i)-f(x)-if'(x)-\frac{i^2}{2}f''(p)>0,$$

$$f(x)-f(x+i)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(q)>0,$$

d'où l'on tire

$$f(x+i)>f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(p),$$

$$f(x+i)<f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(q).$$

Si l'on suppose, en troisième lieu, que p et q soient les valeurs de $x+i$ qui rendent la fonction tierce $f''(x+i)$ la plus petite et la plus grande, $i=0$ jusqu'à une valeur donnée de i, on aura les deux quantités depuis $f''(x+i)-f''(p)$ et $f''(q)-f''(x+i)$, qui seront nécessairement positives dans toute l'étendue de i. Donc, en les regardant comme des fonctions dérivées relatives à la variable i, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $i=0$, seront

$$f''(x+i)-f''(x)-if''(p),$$

$$if''(q)-f''(x+i)+f''(x);$$

et ces quantités seront, par le même principe, toujours positives et finies, pourvu que $f''(x+i)$ ne soit jamais infinie dans toute l'étendue de i, c'est-à-dire, pourvu que $f''(p)$ et $f''(q)$ ne soient point infinies.

Donc, en regardant de nouveau ces dernières quantités comme des fonctions dérivées relatives à i, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $i=0$, seront

$$f'(x+i)-f'(x)-if''(x)-\frac{i^2}{2}f'''(p),$$

$$\frac{i^2}{2}f'''(q)-f'(x+i)+f'(x)+if''(x),$$

lesquelles seront par conséquent aussi toujours positives et finies, en vertu du même principe.

Enfin, regardant encore ces nouvelles quantités comme des fonctions dérivées relatives à i, leurs fonctions primitives, prises de manière qu'elles soient nulles lorsque $i=0$, seront

$$f(x+i)-f(x)-if'(x)-\frac{i^2}{2}f''(x)-\frac{i^3}{2.3}f'''(p),$$

$$\frac{i^3}{2.3}f'''(q)-f(x+i)+f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x).$$

Ces quantités seront donc encore positives par le même principe: ainsi on aura

$$f(x+i)-f(x)-if'(x)-\frac{i^2}{2}f''(x)-\frac{i^3}{2.3}f'''(p)>0,$$

$$f(x)-f(x+i)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\frac{i^3}{2.3}f'''(q)>0;$$

d'où l'on tire

$$f(x+i)>f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\frac{i^3}{2.3}f'''(p),$$

$$f(x+i)<f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\frac{i^3}{2.3}f'''(q),$$

et ainsi de suite.

Nous avons supposé dans ces développements i positif; si i était négatif, ou bien si l'on changeait i en $-i$, alors on trouverait pour premières limites de $f(x-i)$

$$f(x-i)<f(x)-if'(p),$$

$$f(x-i)>f(x)-if'(q).$$

On trouverait ensuite pour secondes limites

$$f(x-i) < f(x) - i f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(p),$$

$$f(x-i) > f(x) - i f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(q),$$

et ainsi des autres.

Donc, en général, la quantité $f(x+i)$, soit que i soit positif ou négatif, sera toujours renfermée entre ces deux-ci :

$$f(x) + i f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \frac{i^3}{2.3} f'''(x) + \ldots + \frac{i^\mu}{2.3\ldots\mu} f^\mu(p),$$

$$f(x) + i f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \frac{i^3}{2.3} f'''(x) + \ldots + \frac{i^\mu}{2.3\ldots\mu} f^\mu(q),$$

en prenant pour p et q les valeurs de $x+i$, qui répondent à la plus petite et à la plus grande des valeurs de $f^\mu(x+i)$, dans toute l'étendue de i, depuis $i=0$, pourvu que les deux quantités $f^\mu(p)$ et $f^\mu(q)$ ne soient pas infinies.

Au reste, il est facile de voir, par l'analyse précédente, qu'on n'est pas astreint à prendre pour $f^\mu(p)$ et $f^\mu(q)$ la plus petite et la plus grande valeur de $f^\mu(x+i)$, mais qu'on peut prendre à leur place des valeurs quelconques plus petites que la plus petite, et plus grandes que la plus grande; ce qui peut servir, dans nombre de cas, à faciliter beaucoup la détermination des limites.

J'observerai ici, quoique cela ne soit presque pas nécessaire, que j'entends toujours par quantités plus grandes ou plus petites absolument celles qui sont plus avancées vers l'infini positif ou vers l'infini négatif; ainsi, si $a > b$, on aura $-a < -b$, etc.

L'analyse précédente redonne, comme l'on voit, successivement les termes du développement de $f(x+i)$; mais elle a l'avantage de ne développer cette fonction qu'autant que l'on veut, et d'offrir des limites du reste.

En effet, si dans le développement de $f(x+i)$ on veut s'arrêter au terme $\mu^{\text{ième}}$, pour avoir les limites du reste du développement, il n'y a

qu'à considérer le terme suivant, qui serait de la forme

$$\frac{i^\mu}{2.3.4\ldots\mu} f^\mu(x),$$

et y mettre à la place de $f^\mu(x)$ la plus grande et la plus petite valeur de $f^\mu(x+i)$, en faisant varier i depuis zéro, ou bien des quantités quelconques plus grandes ou plus petites que la plus grande et la plus petite valeur de $f^\mu(x+i)$. Si ces deux valeurs, ou l'une d'entre elles, étaient infinies, il n'y aurait point alors de limites; c'est aussi le cas où le développement deviendrait fautif, parce que la valeur de $f^\mu(x+i)$ serait infinie dans quelque point.

En général, on peut avoir de la même manière les limites des valeurs de toute fonction dont on ne connaîtra que la fonction dérivée d'un ordre quelconque. On examinera la marche de la fonction dérivée depuis l'origine de la variable, et, si elle ne devient jamais infinie, on y appliquera immédiatement les formules précédentes, où i est la variable, et x peut être une constante quelconque. Si, au contraire, la fonction dérivée devient infinie pour certaines valeurs de la variable, on partagera cette variable en autant de parties séparées par les termes auxquels répondent les valeurs infinies de la fonction, et l'on appliquera séparément les mêmes formules à chacune de ces parties.

Supposons, pour donner quelques exemples,

$$f(x+i) = (x+i)^m,$$

on aura

$$f(x) = x^m,$$

et de là

$$f'(x) = m x^{m-1},$$
$$f''(x) = m(m-1) x^{m-2},$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2) x^{m-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et en général

$$f^\mu(x) = \mathrm{M} x^{m-\mu},$$

où

$$\mathrm{M} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-\mu+1),$$

comme on l'a vu dans la Leçon II. On aura donc

$$f^{\mu}(x+i)=\mathrm{M}(x+i)^{m-\mu},$$

où l'on voit que cette fonction ne peut jamais devenir infinie tant que $x+i$ n'est pas $=0$ et que μ n'est pas $>m$. On voit aussi que la plus petite et la plus grande valeur de $\mathrm{M}(x+i)^{m-\mu}$ répondent, l'une à $i=0$, et l'autre à i; de sorte que les valeurs p et q seront x et $x+i$, ou $x+i$ et x.

Donc, en général, le développement de $(x+i)^m$ sera compris entre ces deux limites

$$x^m+mix^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}i^2x^{m-2}+\ldots+\frac{\mathrm{M}i^{\mu}}{2.3\ldots\mu}x^{m-\mu},$$

$$x^m+mix^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}i^2x^{m-2}+\ldots+\frac{\mathrm{M}i^{\mu}}{2.3\ldots\mu}(x+i)^{m-\mu}.$$

Par le moyen de ces limites, on est à couvert des difficultés qui peuvent résulter de la non-convergence de la série; car, comme un terme quelconque $n^{\text{ième}}$ est au suivant dans le rapport de 1 à $\frac{m-n+1}{n}\frac{i}{x}$, pour que la série soit convergente, il faut que la quantité $\frac{m-n+1}{n}\frac{i}{x}$, abstraction faite du signe qu'elle doit avoir, soit moindre que l'unité. Si $\frac{i}{x}<1$, il est clair que la série finira toujours par être convergente, puisque la dernière valeur de $\frac{m-n+1}{n}$ est -1. Mais elle sera toujours divergente à son extrémité, si $\frac{i}{x}>1$, quoiqu'elle puisse être convergente dans ses premiers termes. Ainsi elle ne pourra alors être employée avec sûreté, quelque loin qu'elle soit portée, qu'en ayant égard aux limites que vous venons de donner.

Supposons, en second lieu,

$$f(x+i)=a^{x+i};$$

on aura

$$f(x)=a^x,$$

et de là

$$f'(x)=a^x la,\quad f''(x)=a^x(la)^2,\quad f'''(x)=a^x(la)^3,\quad \ldots.$$

Donc, en général,

$$f^{\mu}(x+i)=a^{x+i}(la)^{\mu},$$

où l'on voit que la plus petite et la plus grande valeur répondent aussi à $i=0$ et à i. Ainsi on aura, en faisant $x=0$,

$$1+ila+\frac{i^2}{2}(la)^2+\frac{i^3}{2.3}(la)^3+\ldots+\frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu}(la)^{\mu},$$

$$1+ila+\frac{i^2}{2}(la)^2+\frac{i^3}{2.3}(la)^3+\ldots+\frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu}(la)^{\mu}a^i,$$

pour les limites de la valeur de a^i, où l'on pourra prendre dans le dernier terme, au lieu de a^i, une quantité quelconque plus grande.

Soit, en troisième lieu,

$$f(x+i)=l(x+i);$$

on aura

$$f(x)=lx,\quad f'(x)=\frac{1}{x},\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2},\quad f'''(x)=\frac{2}{x^3},\quad \ldots;$$

donc,

$$f^{\mu}(x+i)=\pm\frac{2.3\ldots(\mu-1)}{(x+i)^{\mu}},$$

le signe supérieur étant pour le cas de μ impair, et l'inférieur pour le cas de μ pair.

Il est clair que, pourvu que $x+i$ ne soit pas égal à zéro, la quantité $f^{\mu}(x+i)$ ne sera jamais infinie, et que sa plus grande valeur et sa plus petite, relativement à i, répondront à $i=0$ et à i.

On aura donc, par la formule générale, ces deux limites, pour la valeur de $l(x+i)$,

$$lx+\frac{i}{x}-\frac{i^2}{2x^2}+\frac{i^3}{3x^3}-\ldots\pm\frac{i^{\mu}}{\mu x^{\mu}},$$

$$lx+\frac{i}{x}-\frac{i^2}{2x^2}+\frac{i^3}{3x^3}-\ldots\pm\frac{i^{\mu}}{\mu(x+i)^{\mu}},$$

où l'on pourra mettre à la place de i une valeur quelconque plus grande dans le dénominateur $(x+i)^{\mu}$.

Soit, en quatrième lieu,

$$f(x+i)=\sin(x+i);$$

on aura

$$f(x)=\sin x,\quad f'(x)=\cos x,\quad f''(x)=-\sin x,\quad \ldots;$$

donc, en général,

$$f^{\mu}(x+i)=\pm\sin(x+i)\text{ ou }=\pm\cos(x+i),$$

suivant que μ sera de l'une de ces formes, $4n$, $4n+2$, $4n+1$, $4n+3$, n étant un nombre entier quelconque; ce qu'on peut renfermer dans cette expression générale

$$f^{\mu}(x+i)=\sin(x+i+\mu\mathrm{D}),$$

D étant l'angle droit.

Or, quelles que soient les valeurs de x et i, il est visible que la plus grande et la plus petite valeur de $f^{\mu}(x+i)$ seront 1 et -1; ainsi on aura, pour le développement de $\sin(x+i)$, ces limites

$$\sin x+i\cos x-\frac{i^2}{2}\sin x-\frac{i^3}{2.3}\cos x+\ldots\pm\frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu}.$$

Si l'on fait $x=0$, on aura

$$i-\frac{i^3}{2.3}+\frac{i^5}{2.3.4.5}-\ldots\pm\frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu},$$

et, si l'on fait $x=\mathrm{D}$, on aura

$$1-\frac{i^2}{2}+\frac{i^4}{2.3.4}-\ldots\pm\frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu},$$

pour les limites de $\sin i$ et $\cos i$, où il faudra prendre pour μ le nombre immédiatement plus grand d'une unité que l'exposant de i, dans le terme auquel on voudra s'arrêter.

Nous avons donné, à la fin de la Leçon VII, la série du développement de $f(y+i)$, en supposant $y=\operatorname{tang}x$ et $f(y)=x$, et nous avons trouvé en général

$$f^{\mu}(y)=\pm 2.3\ldots(\mu-1)\cos^{\mu}x\times\sin\text{ ou }\cos\mu x.$$

Donc, on aura aussi

$$f^{\mu}(y+i)=\pm 2.3\ldots(\mu-1)\cos^{\mu}z\times\sin\text{ ou }\cos\mu z,$$

en faisant $y+i=\operatorname{tang}z$, c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}z=\operatorname{tang}x+i.$$

Or, quels que soient y et i, il est visible que la plus petite et la plus grande valeur de $\cos^{\mu}z\times\sin$ ou $\cos\mu z$ seront -1 et 1; d'où l'on peut d'abord conclure que la série est vraie pour des valeurs quelconques de x et i, et que, si l'on veut arrêter la série au terme $\mu^{\text{ième}}$, le reste de la série sera nécessairement renfermé entre les limites $\pm\frac{i^{\mu}}{\mu}$.

Ainsi, en faisant $x=0$, on aura ces limites

$$\operatorname{arc\,tang}i=i-\frac{i^3}{3}+\frac{i^5}{5}-\ldots\pm\frac{i^{\mu+1}}{\mu+1},$$

où μ est l'exposant du terme auquel on veut s'arrêter.

Nous finirons par remarquer que les mêmes formules peuvent servir à développer une fonction quelconque, suivant les puissances de sa variable; car en faisant $x=0$, $f(x+i)$ devient simplement $f(i)$ et peut représenter une fonction quelconque d'une variable i.

Or il est visible que les valeurs de $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., lorsque $x=0$, doivent coïncider avec celles de $f(i)$, $f'(i)$, $f''(i)$, ..., lorsque $i=0$.

Donc, si l'on dénote simplement par f, f', f'', ... les valeurs de $f(i)$, $f'(i)$, $f''(i)$, ..., lorsque $i=0$, on aura en général

$$f(i)=f+if'+\frac{i^2}{2}f''+\frac{i^3}{2.3}f'''+\ldots;$$

et si l'on veut s'arrêter au terme $\mu^{\text{ième}}$, alors, comme le terme suivant serait

$$\frac{i^{\mu}}{2.3.4\ldots\mu} f^{\mu},$$

il n'y aura qu'à substituer à la place de f^{μ} la plus grande et la plus petite valeur de $f^{\mu}(i)$, ou des valeurs plus grandes ou plus petites que celles-ci, et l'on aura les limites du reste du développement.

Ainsi le développement sera exact tant que ces limites auront des valeurs finies. Si l'une d'elles devenait infinie, le reste de la série pourrait aussi devenir infini, et le développement deviendrait fautif. Il faudra donc alors, ou s'arrêter à un terme précédent, ou n'attribuer à i que des valeurs telles, que $f^{\mu}(i)$ ne devienne pas infinie depuis $i = 0$ jusqu'à cette valeur.

Puisque ces limites répondent à la plus grande et à la plus petite valeur de $f^{\mu}(i)$, en prenant i depuis zéro jusqu'à la valeur donnée, il est clair que la valeur exacte du reste du développement de la fonction $f(i)$ répondra à une valeur intermédiaire de $f^{\mu}(i)$, qui pourra être représentée par $f^{\mu}(j)$, en prenant pour j une quantité entre zéro et i. Il suit de là qu'on pourra toujours représenter d'une manière finie le développement d'une fonction quelconque $f(i)$, en y introduisant une quantité inconnue j moindre que i. Ainsi on a ce théorème analytique, remarquable par sa simplicité,

$$f(i) = f + if' + \frac{i^2}{2} f'' + \frac{i^3}{2.3} f''' + \ldots + \frac{i^{\mu-1}}{2.3\ldots(\mu-1)} f^{\mu-1} + \frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu} f^{\mu}(j),$$

où $f, f', f'', \ldots$ sont les valeurs de $f(i), f'(i), f''(i), \ldots$, en y faisant $i = 0$, l'exposant μ étant quelconque.

On a par là une démonstration rigoureuse de cette proposition qu'on s'était contenté de supposer jusqu'ici : savoir que, dans le développement d'une fonction, on peut donner à la variable, suivant laquelle est ordonné le développement, une valeur assez petite pour qu'un terme quelconque de la série soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent; car il est clair qu'il suffit pour cela de faire voir qu'on peut

toujours prendre i assez petit pour que l'on ait

$$\frac{i^{\mu-1}}{2.3\ldots(\mu-1)} f^{\mu-1} > \frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu} f^{\mu}(j),$$

condition qui se réduit à celle-ci

$$f^{\mu-1} > \frac{i}{\mu} f^{\mu}(j),$$

à laquelle il est visible qu'on peut toujours satisfaire en diminuant la valeur de i, pourvu qu'on n'ait pas $f^{\mu-1} = 0$.

On peut démontrer de la même manière cette autre proposition, que, si l'on a deux fonctions différentes $f(i)$ et $F(i)$, qui soient telles que les μ premiers termes du développement de $f(i)$ soient respectivement égaux aux μ premiers termes du développement de $F(i)$, on peut, en diminuant la quantité i, rapprocher assez près les valeurs de ces deux fonctions, pour que la valeur d'aucune autre fonction, comme $\varphi(i)$, ne puisse jamais tomber entre ces valeurs, si les μ premiers termes du développement $\varphi(i)$ ne coïncident pas aussi avec ceux du développement de $f(i)$ et de $F(i)$; car la différence $F(i) - f(i)$ se réduira, par l'hypothèse, à

$$\frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu} [F^{\mu}(j) - f^{\mu}(j)],$$

où la quantité j pourra être différente dans les deux fonctions, mais toujours $j < i$; au lieu que la différence $\varphi(i) - f(i)$ sera de la forme

$$\frac{i^{\lambda}}{2.3\ldots\lambda} (\varphi^{\lambda} - f^{\lambda}) + \ldots + \frac{i^{\mu}}{2.3\ldots\mu} [\varphi^{\mu}(j) - f^{\mu}(j)],$$

λ étant $< \mu$; d'où l'on voit qu'en diminuant la valeur de i, le rapport de cette différence à la première deviendra toujours plus grand, à moins que l'on n'ait aussi $\varphi^{\lambda} = f^{\lambda}$, etc.

C'est sur ces principes qu'est fondée l'application rigoureuse de la théorie des fonctions dérivées aux parties de la Géométrie et de la Mécanique, pour lesquelles on emploie le Calcul différentiel. Soit $f(x)$ l'ordonnée d'une courbe dont x est l'abscisse; prenons une nouvelle

abscisse i, qui commence où finit l'abscisse x, que nous regarderons maintenant comme constante; l'ordonnée correspondante sera

$$f(x+i)=f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\ldots.$$

Arrêtons-nous aux premiers termes, et supposons l'équation

$$z=f(x)+if'(x),$$

entre l'abscisse i et l'ordonnée z; cette équation sera une ligne droite qui passe par le point de la courbe qui répond à l'abscisse x, et qui est inclinée à l'axe d'un angle dont $f'(x)$ est la tangente.

Comme les deux termes de l'ordonnée de cette droite coïncident avec les deux premiers termes de celle de la courbe, il sera impossible qu'aucune autre droite passant par le même point de la courbe puisse passer aussi entre elle et la droite dont il s'agit; celle-ci sera donc la tangente de la courbe au même point, de manière qu'en appelant t la sous-tangente, on aura en général $\frac{y}{t}=f'(x)$, et de là $t=\frac{y}{f'(x)}=\frac{y}{y'}$.

Prenons maintenant les trois premiers termes du même développement, et considérons la courbe dont l'équation entre l'ordonnée z et l'abscisse i serait

$$z=f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x);$$

on aura une parabole dont l'axe est parallèle aux ordonnées, et dont le paramètre est $\frac{2}{f''(x)}$.

Cette parabole passera par le point de la courbe proposée qui répond à l'abscisse x, et aura la même tangente qu'elle, parce que les deux premiers termes de son équation coïncident avec ceux de l'équation de la courbe; et, comme les troisièmes termes coïncident aussi, il s'ensuit qu'aucune autre parabole ne pourra passer entre celle-ci et la même courbe : ce sera, par conséquent, la parabole qu'on nomme *osculatrice*, et qui aura $\frac{2}{f''(x)}$ ou $\frac{2}{y''}$ pour paramètre.

Comme c'est ordinairement au cercle qu'on rapporte la courbure des courbes, pour avoir le rayon de courbure, on supposera que la courbe proposée est un cercle dont l'équation générale est, comme l'on sait,

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2;$$

ainsi on aura

$$y=b+\sqrt{r^2-(x-a)^2}=f(x),$$

d'où l'on déduit, en prenant les fonctions dérivées,

$$y'=-\frac{x-a}{\sqrt{r^2-(x-a)^2}}=f'(x),$$

$$y''=-\frac{r^2}{[r^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}}}=f''(x).$$

Si l'on détermine, par ces trois équations, les valeurs de a, b, r en x, $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, on aura non seulement le rayon r du cercle osculateur, mais aussi la position du centre de ce cercle par les deux coordonnées a, b, qui seront en même temps celles de la développée; car alors les trois premiers termes du développement de y dans le cercle coïncideront avec les trois premiers termes du développement de y dans la courbe proposée.

On aura aussi, pour une courbe quelconque,

$$r=-\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

$$a=x-\frac{y'(1+y'^2)}{y''},$$

$$b=y-\frac{1+y'^2}{y''}.$$

On peut pousser plus loin cette théorie des oscultations, comme nous l'avons fait dans les n^os^ **117** et suivants de la *Théorie des Fonctions analytiques*.

Si l'on considère l'espace décrit par un mobile comme fonction du temps employé à le parcourir, et qu'on nomme x le temps et y l'es-

pace, l'équation $y = f(x)$ exprimera la nature du mouvement. Soit z l'espace décrit dans le temps i qui commence au bout du temps x; on aura

$$z = f(x+i) - f(x),$$

et par le développement

$$z = i f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \frac{i^3}{2.3} f'''(x) + \ldots;$$

ne prenons dans cette expression de z que le premier terme, et considérons un autre mobile dont le mouvement serait représenté par l'équation

$$u = i f'(x)$$

entre l'espace u et le même temps i; ce mouvement sera uniforme avec la vitesse $f'(x)$. Comme la valeur de u est exprimée par un terme qui est le même que le premier terme de la valeur de z, il suit de ce que nous avons démontré, en général, que, dans les premiers instants du temps i, ce mouvement uniforme approchera plus du mouvement dont il s'agit qu'aucun autre mouvement uniforme; car on pourra toujours prendre le temps i assez court pour que, entre les espaces parcourus en vertu de ces deux mouvements, il ne puisse être parcouru uniformément, dans le même temps, aucun espace moyen avec une autre vitesse que $f'(x)$. Donc on pourra regarder $f'(x)$ comme l'expression de la vitesse de tout mouvement représenté par l'équation $y = f(x)$, au bout du temps x.

Si l'on prend les deux premiers termes de l'expression de z pour l'espace décrit par un autre mobile dans le même temps i, la formule

$$u = i f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x)$$

représentera un mouvement composé d'un mouvement uniforme avec la vitesse $f'(x)$, et d'un mouvement uniformément accéléré produit par une pression ou force accélératrice constante $f''(x)$, comme l'expérience le prouve dans le mouvement des graves.

Les termes de la valeur de u étant les mêmes que les deux premiers

termes de l'expression générale de z, on conclura des mêmes principes établis ci-dessus, et par un raisonnement semblable au précédent, que, dans les premiers instants du temps i, ce nouveau mouvement approchera du mouvement représenté par l'équation

$$z = f(x+i) - f(x), \quad \text{ou} \quad y = f(x),$$

plus qu'aucun autre mouvement semblable, de manière qu'on pourra prendre $f'(x)$ pour la vitesse, et $f''(x)$ pour la force accélératrice au commencement du temps i, c'est-à-dire au bout du temps x. Donc, en général, y étant l'espace décrit et exprimé en fonction du temps, y' sera la vitesse, et y'' la force accélératrice nécessaire pour ce mouvement.

Ceci a lieu naturellement dans les mouvements rectilignes; mais, en considérant les mouvements curvilignes comme composés de rectilignes, on en déduit les lois des vitesses et des forces dans toutes sortes de mouvements.

Nous nous contenterons ici d'avoir fait voir, en deux mots, l'usage de notre théorème sur les limites du développement des fonctions, dans l'application des fonctions dérivées à la Géométrie et à la Mécanique; et nous renverrons ceux qui désireront un plus grand détail à la seconde Partie de notre *Théorie des Fonctions analytiques*.

LEÇON DIXIÈME.

DES ÉQUATIONS DÉRIVÉES ET DE LEUR USAGE POUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS. ANALYSE DES SECTIONS ANGULAIRES.

Jusqu'à présent nous n'avons considéré les fonctions dérivées que comme servant à la formation des séries d'où elles tirent leur origine; mais ces fonctions, considérées en elles-mêmes, offrent un nouveau système d'opérations algébriques, et sont, pour ainsi dire, la clef de la transformation des fonctions.

Lorsqu'une fonction d'une variable est présentée sous deux formes différentes, en égalant ces expressions, on a ce qu'on appelle une *équation identique*, à cause de l'identité de la valeur, laquelle doit par conséquent avoir lieu indépendamment de la variable, c'est-à-dire, quelle que soit cette variable; ainsi elle aura lieu en attribuant à la variable un accroissement quelconque i.

Soit

$$f(x)=0$$

une pareille équation identique; on aura donc aussi

$$f(x+i)=0,$$

savoir, en développant,

$$f(x)+if'(x)+\frac{i^2}{2}f''(x)+\ldots=0,$$

quel que soit i; donc on aura séparément

$$f(x)=0,\quad f'(x)=0,\quad f''(x)=0,\quad \ldots;$$

d'où il suit que l'on aura la même équation en prenant les fonctions dérivées d'un ordre quelconque.

Supposons maintenant une équation comme

$$F(x,y)=0$$

entre deux variables x et y, par laquelle l'une y doive être fonction de x. Il est évident qu'en regardant y comme une fonction de x, déterminée par cette équation, l'équation

$$F(x,y)=0$$

sera identique et aura lieu indépendamment de x; donc l'équation subsistera aussi entre les fonctions dérivées d'un ordre quelconque.

En prenant donc les fonctions dérivées premières, secondes, etc., de chaque terme, on aura autant de nouvelles équations qui auront lieu en même temps que l'équation primitive; par conséquent, toute combinaison de ces équations aura lieu aussi à la fois.

Nous nommerons en général *équations dérivées du premier ordre, du second ordre*, etc., ou simplement *équations primes, secondes*, etc., non seulement les équations dérivées qu'on obtient en prenant les fonctions primes, secondes, etc. de tous les termes d'une équation regardée comme primitive, mais encore les équations qu'on pourra former par une combinaison quelconque de l'équation primitive et de son équation prime, ou de ces deux-ci et de l'équation seconde, etc.

Ainsi, l'équation primitive contenant x et y, l'équation dérivée du premier ordre, ou équation prime, contiendra x, y et y'; l'équation dérivée du second ordre, ou équation seconde, contiendra x, y, y' et y''; et ainsi de suite.

Si, au lieu de regarder y comme fonction de x, on regardait au contraire x comme fonction de y, l'équation prime serait entre y, x et x', l'équation seconde serait entre y, x, x' et x'', et ainsi de suite; et, par le principe exposé dans la Leçon VII, on pourra toujours transformer un de ces systèmes d'équations dérivées dans l'autre.

Pour montrer d'abord par quelques exemples l'usage des équations

dérivées dans la transformation des fonctions, je considérerai les fonctions $\sin x$ et $\cos x$, dont nous avons donné les fonctions dérivées dans la Leçon V, et faisant

$$y = \sin x, \quad z = \cos x,$$

j'aurai d'abord

$$y' = \cos x, \quad z' = -\sin x,$$

par conséquent

$$y' = z, \quad z' = -y;$$

si on multiplie la première de ces équations par $\sqrt{-1}$, et qu'on l'ajoute à la seconde, on aura

$$z' + y'\sqrt{-1} = z\sqrt{-1} - y = (z + y\sqrt{-1})\sqrt{-1};$$

d'où l'on tire l'équation

$$\frac{z' + y'\sqrt{-1}}{z + y\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}.$$

Or, nous avons vu dans la Leçon VI que, si p est une fonction quelconque de x, $\frac{p'}{p}$ est la fonction dérivée de lp; ainsi

$$l(z + y\sqrt{-1}) = x\sqrt{-1} + k$$

sera l'équation primitive d'où la précédente peut être censée dérivée; la quantité k est la constante arbitraire que nous avons vue, à la fin de la même Leçon, pouvoir toujours s'ajouter à la fonction primitive d'une fonction dérivée donnée, et qui sert à lui donner toute la généralité dont elle est susceptible. Il serait inutile d'ajouter de même une constante au premier membre de l'équation, parce qu'elle se fondrait dans l'autre par la simple transposition dans le second membre.

Mais, cette constante étant jusqu'ici arbitraire, il faut la déterminer conformément à la nature des fonctions y et z.

Pour cela, j'observe qu'en faisant $x = 0$ on a

$$\sin x = 0 \quad \text{et} \quad \cos x = 1; \quad \text{donc} \quad y = 0, \quad z = 1.$$

Il faudra donc que l'équation que nous venons de trouver satisfasse à

ces suppositions; or elle devient dans ce cas $l1 = k$; et, comme $l1$ est $= 0$, on aura $k = 0$.

L'équation sera donc simplement

$$l(z + y\sqrt{-1}) = x\sqrt{-1},$$

et, passant de là aux exponentielles,

$$z + y\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}},$$

e étant, comme nous le supposons toujours, le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Remettant pour y et z leurs valeurs $\sin x$ et $\cos x$, on aura cette formule remarquable

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}},$$

laquelle, à cause de l'ambiguïté du radical $\sqrt{-1}$, donne également celle-ci

$$\cos x - \sin x\sqrt{-1} = e^{-x\sqrt{-1}};$$

et ces deux, combinées ensemble, suffisent pour déterminer les valeurs de $\sin x$ et $\cos x$. On aura, en effet, après les avoir ajoutées ou retranchées,

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ainsi les sinus et cosinus se trouvent exprimés par des exponentielles imaginaires, ce qu'on peut regarder comme l'une des plus belles découvertes analytiques qu'on ait faites dans ce siècle.

Ces formules peuvent aussi se déduire immédiatement de la comparaison des séries qui expriment les fonctions $\sin x$, $\cos x$ et e^x, et que nous avons trouvées plus haut (Leçons IV et VI). C'est de cette manière qu'Euler les a données dans le Tome VII des *Miscellanea Berolinensia;* mais, dans son *Introductio,* il les déduit des expressions algébriques des sinus et cosinus des angles multiples, par une réduction ingénieuse, mais dépendante de la considération des quantités infinies

et infiniment petites, et que nous avons tâché de rendre rigoureuse dans la *Théorie des Fonctions* (nos 22 et 25).

Comme ces mêmes séries avaient été données par Newton dans son *Commerce* avec Oldenburg, et étaient ainsi connues avant la fin du siècle dernier, on aurait pu dès lors parvenir aux formules dont nous parlons, et donner par là à la théorie des sections angulaires la perfection qu'elle n'a acquise que cinquante ans après par les Ouvrages d'Euler.

L'expression des arcs en logarithmes imaginaires remonte, à la vérité, au commencement de ce siècle, et c'est une des plus belles découvertes de Jean Bernoulli, qui l'a donnée en peu de mots dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1702. Il y était parvenu en intégrant par logarithmes l'élément de l'arc exprimé par la tangente, comme Leibnitz avait trouvé la série qui exprime l'arc par la tangente, en intégrant le même élément par série.

Cette découverte conduisait aussi naturellement aux mêmes formules exponentielles; mais elle est restée longtemps stérile, et ce n'est que lorsque ces formules ont été connues par d'autres voies, qu'on a vu qu'on pouvait les tirer immédiatement de l'intégration.

L'équation

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}},$$

où le radical $\sqrt{-1}$ peut avoir également le signe $+$ et $-$, donne toute la théorie du calcul des angles. Car, en multipliant cette équation par l'équation semblable

$$\cos y + \sin y\sqrt{-1} = e^{y\sqrt{-1}},$$

on a

$$(\cos x + \sin x\sqrt{-1})(\cos y + \sin y\sqrt{-1}) = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

Mais, en mettant dans la même équation $x + y$ à la place de x, on a aussi

$$\cos(x+y) + \sin(x+y)\sqrt{-1} = e^{(x+y)\sqrt{-1}}.$$

Donc, en comparant et développant le produit, on a

$$\cos x\cos y - \sin x\sin y + (\cos x\sin y + \cos y\sin x)\sqrt{-1} = \cos(x+y) + \sin(x+y)\sqrt{-1};$$

et, comme cette équation doit avoir lieu pour les deux signes de $\sqrt{-1}$, il s'ensuit qu'on aura séparément

$$\cos x\cos y - \sin x\sin y = \cos(x+y),$$
$$\cos x\sin y + \sin x\cos y = \sin(x+y),$$

formules qu'on démontre par la Géométrie, et qui sont le fondement de toute la théorie des angles.

La même équation, en élevant les deux membres à une puissance quelconque m, donne

$$(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m = e^{mx\sqrt{-1}}.$$

Donc aussi, en mettant dans l'équation primitive mx à la place de x et comparant, on a

$$(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m = \cos mx + \sin mx\sqrt{-1},$$

formule remarquable autant par sa simplicité et son élégance que par sa généralité et sa fécondité.

Il paraît que Moivre est le premier qui ait trouvé cette belle formule; on voit, par les *Miscellanea analytica*, qu'il y a été conduit par la considération des sections hyperboliques comparées aux sections circulaires. Maintenant elle est devenue une vérité élémentaire, qu'on démontre par le moyen des valeurs de $\sin(x+y)$ et $\cos(x+y)$ que donne la Géométrie, en considérant le produit des formules semblables

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \cos y + \sin y\sqrt{-1},$$

lequel se réduit à cette formule semblable

$$\cos(x+y) + \sin(x+y)\sqrt{-1};$$

et c'est à Euler qu'on doit d'avoir transporté ainsi dans les *Éléments* une formule d'une si grande utilité.

Il est vrai que de cette manière on ne peut la démontrer que pour des valeurs rationnelles de m; mais il en est ici comme dans la formule du

développement du binôme, et en général dans toutes les formules qui contiennent une indéterminée qui peut être un nombre quelconque rationnel; ce n'est que par la considération des fonctions dérivées qu'on en peut prouver la généralité pour une valeur quelconque de la même quantité.

En prenant, dans la formule que nous venons de trouver, le radical $\sqrt{-1}$ en plus ou en moins, on a ces deux-ci

$$\cos mx + \sin mx\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m,$$
$$\cos mx - \sin mx\sqrt{-1} = (\cos x - \sin x\sqrt{-1})^m,$$

d'où l'on tire aisément

$$\cos mx = \frac{(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m + (\cos x - \sin x\sqrt{-1})^m}{2},$$
$$\sin mx = \frac{(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m - (\cos x - \sin x\sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}.$$

Si l'on développe les puissances $m^{\text{ièmes}}$ par la formule du binôme, les imaginaires disparaissent, et l'on a ces expressions en série

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{2}\cos^{m-2}x\sin^2 x + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}\cos^{m-4}x\sin^4 x - \dots,$$
$$\sin mx = m\cos^{m-1}x\sin x - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\cos^{m-3}x\sin^3 x + \dots.$$

Ces deux formules avaient été données dès 1701, par Jean Bernoulli, dans les *Actes de Leipzig*, mais sans démonstration, et on voit, par la Lettre 129 du *Commercium epistolicum*, et par le *Traité des Sections coniques* de l'Hospital, qu'ils les avaient trouvées en cherchant successivement, par les théorèmes connus, les valeurs des sinus et cosinus des angles doubles, triples, etc., et en observant l'analogie des termes de ces valeurs avec ceux du développement du binôme. En effet, si l'on fait successivement $y = x$, $2x$, $3x$, ..., dans les

formules données ci-dessus pour $\sin(x+y)$ et $\cos(x+y)$, et qu'on substitue à mesure les valeurs précédentes, on trouve

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x,$$
$$\sin 2x = 2\cos x\sin x,$$
$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x,$$
$$\sin 3x = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

dont l'analogie avec les termes des puissances correspondantes du binôme est manifeste.

D'après cela, il est étonnant que Jean Bernoulli n'ait pas trouvé les expressions finies de $\sin mx$ et $\cos mx$, et qu'il ait fallu encore vingt ans pour qu'on parvînt à la formule donnée par Moivre. Ainsi Jean Bernoulli a touché deux fois à la même découverte, et il en a laissé la gloire à ses successeurs.

Les formules précédentes renferment les puissances de $\sin x$ et $\cos x$ mêlées ensemble; comme on a toujours

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

il est possible de faire disparaître toutes les puissances paires de $\sin x$ ou de $\cos x$, et d'avoir des formules qui procèdent suivant les puissances de $\cos x$ ou $\sin x$.

Il serait difficile de parvenir à des séries régulières par la simple substitution; mais les formules connues

$$2\cos x\cos mx = \cos(m+1)x + \cos(m-1)x,$$
$$2\cos x\sin mx = \sin(m+1)x + \sin(m-1)x$$

font voir que les cosinus et sinus des multiples de x forment deux séries récurrentes dont l'échelle de relation est $2\cos x - 1$.

Ainsi, en partant des premières valeurs de $\cos mx$ et $\sin mx$, lorsque $m = 0$ et $m = 1$, et mettant, pour plus de simplicité, p et q à la place

de $\cos x$ et $\sin x$, on trouvera successivement

$$\begin{aligned}
&\cos 0x = 1,\\
&\cos 1x = p,\\
&\cos 2x = 2p\cos x - \cos 0x = 2p^2 - 1,\\
&\cos 3x = 2p\cos 2x - \cos x = 4p^3 - 3p,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;
\end{aligned}$$

d'où résulte la Table suivante :

$$(A)\qquad \begin{cases}
\cos 1x = p,\\
\cos 2x = 2p^2 - 1,\\
\cos 3x = 4p^3 - 3p,\\
\cos 4x = 8p^4 - 8p^2 + 1,\\
\cos 5x = 16p^5 - 20p^3 + 5p,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{cases}$$

et, en général,

$$2\cos mx = (2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}(2p)^{m-6} + \dots.$$

On trouvera de même

$$(B)\qquad \begin{cases}
\sin 1x = q,\\
\sin 2x = 2pq,\\
\sin 3x = (4p^2 - 1)q,\\
\sin 4x = (8p^3 - 4p)q,\\
\sin 5x = (16p^4 - 12p^2 + 1)q,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{cases}$$

et, en général,

$$\sin mx = \left[(2p)^{m-1} - (m-2)(2p)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}(2p)^{m-5} - \dots\right]q.$$

Ces séries procèdent suivant les puissances descendantes de p; on peut en avoir aussi qui procèdent suivant les puissances ascendantes de p ou de q; mais il faut alors distinguer les cas de m impair ou pair.

Soit 1° m impair; on aura

$$(C)\qquad \begin{cases}
\cos 1x = p,\\
\cos 3x = -(3p - 4p^3),\\
\cos 5x = 5p - 20p^3 + 16p^5,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}$$

et, en général,

$$\cos mx = \pm\left[mp - \frac{m(m^2-1)}{2.3}p^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}p^5 - \dots\right],$$

le signe supérieur étant pour le cas où m est de la forme $4n+1$, et l'inférieur pour celui où m est de la forme $4n+3$.

On aura de même, lorsque m est impair,

$$(D)\qquad \begin{cases}
\sin 1x = q,\\
\sin 3x = -q(1 - 4p^2),\\
\sin 5x = q(1 - 12p^2 + 16p^4),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{cases}$$

et, en général,

$$\sin mx = \pm q\left[1 - \frac{m^2-1}{2}p^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}p^4 - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6}p^6 + \dots\right],$$

où l'on observera, à l'égard des signes ambigus, la même règle que ci-dessus.

Soit 2° m pair; on aura

$$(E)\qquad \begin{cases}
\cos 2x = -(1 - 2p^2),\\
\cos 4x = 1 - 8p^2 + 8p^4,\\
\cos 6x = -(1 - 18p^2 + 48p^4 - 32p^6),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{cases}$$

et, en général,

$$\cos mx = \pm\left[1 - \frac{m^2}{2}p^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}p^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}p^6 + \dots\right].$$

Ensuite

$$(F)\qquad \begin{cases}
\sin 2x = 2pq,\\
\sin 4x = -q(4p - 8p^3),\\
\sin 6x = q(6p - 32p^3 + 32p^5),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{cases}$$

et, en général,

$$\sin mx = \pm\left[mp - \frac{m(m^2-4)}{2.3}p^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}p^5 - \dots\right]q.$$

A l'égard des signes ambigus, on prendra les signes supérieurs lorsque m est de la forme $4n+2$, et les inférieurs lorsque m est de la forme $4n$.

Enfin on aura aussi, à cause de $p^2 = 1 - q^2$: 1° Pour le cas de m impair,

$$\text{(G)} \quad \begin{cases} \cos 1x = p, \\ \cos 3x = p(1 - 4q^2), \\ \cos 5x = p(1 - 12q^2 + 16q^4), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

et, en général,

$$\cos mx = p\left[1 - \frac{m^2-1}{2}q^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}q^4 - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{2.3.4.5.6}q^6 + \dots\right].$$

Ensuite

$$\text{(H)} \quad \begin{cases} \sin 1x = q, \\ \sin 3x = 3q - 4q^3, \\ \sin 5x = 5q - 20q^3 + 16q^5, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

et, en général,

$$\sin mx = mq - \frac{m(m^2-1)}{2.3}q^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}q^5 - \dots;$$

2° Pour le cas de m pair,

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \cos 2x = 1 - 2q^2, \\ \cos 4x = 1 - 8q^2 + 8q^4, \\ \cos 6x = 1 - 18q^2 + 48q^4 - 32q^6, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

et, en général,

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{2}q^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}q^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}q^6 + \dots.$$

Ensuite

$$\text{(K)} \quad \begin{cases} \sin 2x = 2pq, \\ \sin 4x = p(4q - 8q^3), \\ \sin 6x = p(6q - 32q^3 + 32q^5), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

et, en général,

$$\sin mx = p\left[mq - \frac{m(m^2-4)}{2.3}q^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}q^5 - \dots\right].$$

J'ai rapporté ici ces différentes formules, parce que je ne connais aucun ouvrage où elles se trouvent réunies, et surtout parce qu'elles nous fournissent l'occasion de faire plusieurs remarques qui pourront intéresser les lecteurs.

Nous observerons d'abord que les formules des Tables (A), (B), (H) et (I) ont été trouvées par Viète et répondent à celles que l'on voit aux pages 295, 297 et 299 de ses *Œuvres* imprimées à Leide en 1646. Il faut seulement observer que Viète a considéré les cordes plutôt que les sinus ou cosinus; or $2\cos x$ étant la corde du complément à deux droits de l'angle $2x$, les quantités $2\cos 2x$, $2\cos 3x$, ... seront les cordes des compléments des angles doubles, triples, etc.; et la Table (A) deviendra celle de la page 295 de Viète, en multipliant tous les termes par 2, et faisant $2p = \mathrm{N}$, $(2p)^2 = \mathrm{Q}$, $(2p)^3 = \mathrm{C}$, ..., suivant sa notation.

A l'égard de la Table de la page 297 de Viète, elle donne le rapport des cordes des arcs doubles, triples, quadruples, etc., à la corde de l'arc simple; et le premier de ces rapports y est désigné par N, dont le carré est Q, le cube C, etc. Ainsi, en prenant $2\sin x$ pour la corde de l'arc simple, ces rapports seront représentés par $\frac{\sin 2x}{\sin x}$, $\frac{\sin 3x}{\sin x}$, ...; et la Table dont il s'agit s'accordera avec la Table (B), en faisant $\frac{\sin 2x}{\sin x} = 2p = \mathrm{N}$ et divisant chaque équation par la première.

La Table de la page 299 de Viète renferme les deux Tables (H) et (I), en multipliant tous les termes de ces Tables par 2, et faisant $2q = \mathrm{N}$, $(2q)^2 = \mathrm{Q}$.

Il m'a paru intéressant de montrer ce que Viète avait fait sur l'objet dont il s'agit, et surtout d'indiquer lesquelles des formules connues pour la multiplication des angles lui sont dues, ce qu'on n'avait pas encore fait, que je sache, d'une manière tout à fait exacte.

Au reste Viète n'a pas donné les formules générales de ces Tables; il a donné simplement le moyen de les continuer aussi loin qu'on voudra, en indiquant la loi des termes et de leurs coefficients.

Dans les mêmes *Actes de Leipzig* pour 1701, déjà cités plus haut, Jean Bernoulli avait aussi donné, sans démonstration, une formule générale pour les cordes des arcs multiples, laquelle revient à celle de la Table (B), en observant que $2q$ est la corde de son complément à la demi-circonférence.

Ensuite Jean Bernoulli a donné, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1702, deux formules pour les cordes des arcs multiples, qui répondent aux formules générales des Tables (H) et (I), en observant que, $2q$ étant la corde de l'arc $2x$, et $2p$ la corde de son complément, $2\sin mx$ sera la corde de l'arc m^{uple} et $2\cos mx$ la corde de son complément. Mais la première de ces deux formules avait déjà été donnée par Newton dans sa première Lettre à Oldenburg, imprimée dans les *Œuvres* de Wallis.

Enfin nous remarquerons qu'il n'y a que les formules générales des Tables (A), (B), (H), (K) qui se trouvent dans l'*Introduction* d'Euler (Chap. XIV).

Mais toutes ces formules n'ont été données ici que par induction, ou bien en supposant que le nombre m est un des nombres de la série 1, 2, 3, ..., de sorte qu'on peut douter si elles s'appliquent à d'autres valeurs de m.

De plus, si l'on considère les formules des Tables (A) et (B), on voit qu'à la rigueur elles vont à l'infini, même lorsque m est un nombre entier positif; car, en faisant $m = 1$, la première donne

$$\cos x = p - \frac{1}{4p} - \frac{1}{16p^3} - \frac{2}{64p^5} - \ldots,$$

et la seconde donne

$$\sin x = q + \frac{q}{4p^2} + \frac{3q}{16p^4} + \ldots,$$

valeurs qui sont évidemment fausses. Il en sera de même en donnant

à m d'autres valeurs quelconques entières et positives, et tenant compte de tous les termes qui ne sont pas nuls.

Il est vrai que, par la nature des Tables (A) et (B) dont ces formules ne sont que le terme général, on ne doit y employer que les termes qui contiennent des puissances positives de p; mais, comme les termes qui suivent ne sont pas nuls, on ne voit pas, *a priori*, pourquoi l'on doit les rejeter, et l'on voit moins encore ce que la formule exprimerait en ne les rejetant pas. Nous réserverons le dénouement de ces difficultés pour la Leçon suivante.

LEÇON ONZIÈME.

SUITE DE L'ANALYSE DES SECTIONS ANGULAIRES, OU L'ON DÉMONTRE LES FORMULES GÉNÉRALES DES TABLES DONNÉES DANS LA LEÇON PRÉCÉDENTE.

Reprenons les expressions générales de $\cos mx$ et $\sin mx$ données dans la Leçon précédente; faisant

$$\cos x = p, \quad \text{et par conséquent} \quad \sin x = \sqrt{1-p^2},$$

on aura

$$2\cos mx = (p+\sqrt{p^2-1})^m + (p-\sqrt{p^2-1})^m,$$
$$2\sin mx\sqrt{-1} = (p+\sqrt{p^2-1})^m - (p-\sqrt{p^2-1})^m.$$

Nous observerons d'abord que ces formules sont toujours vraies, quel que soit le nombre m, parce qu'elles ont été déduites de l'équation générale

$$\cos x \pm \sin x\sqrt{-1} = e^{\pm x\sqrt{-1}}$$

élevée à la puissance m. Ainsi les doutes qui pourraient rester à cet égard disparaissent ici entièrement.

Tout se réduit donc à développer, suivant les puissances de p, l'expression

$$(p \pm \sqrt{p^2-1})^m.$$

Comme les quantités $p+\sqrt{p^2-1}$ et $p-\sqrt{p^2-1}$ sont les deux racines de l'équation

$$z^2 - 2pz + 1 = 0,$$

je ferai usage du théorème que j'ai démontré dans la Note XI de la

Résolution des équations numériques, sur la somme des puissances des racines des équations.

Suivant ce théorème, si l'on a une équation quelconque de la forme

$$u - x + f(x) = 0,$$

où x est l'inconnue, la formule

$$u^{-m} + (u^{-m})' f(u) + \left(\frac{(u^{-m})' f^2(u)}{2}\right)' + \left(\frac{(u^{-m})' f^3(u)}{2.3}\right)'' + \ldots,$$

n'étant continuée que tant qu'il y aura des puissances négatives de u, donne la somme de toutes les racines élevées chacune à la puissance $-m$; mais, étant continuée à l'infini, elle ne donne que la même puissance de la plus petite des racines. Les quantités $f^2(u)$, $f^3(u)$, ... sont le carré, le cube, etc. de $f(u)$; et les traits appliqués aux parenthèses désignent les fonctions dérivées des fonctions de u renfermées entre ces parenthèses.

Ainsi, dans notre cas, si l'on change z en x et qu'on divise l'équation par $2p$, coefficient de x, elle deviendra

$$\frac{1}{2p} - x + \frac{x^2}{2p} = 0,$$

laquelle, étant comparée à

$$u - x + f(x) = 0,$$

donne

$$u = \frac{1}{2p}, \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x^2}{2p};$$

donc

$$f(u) = \frac{u^2}{2p}.$$

de manière que la série précédente deviendra

$$u^{-m} + \frac{(u^{-m})' u^2}{2p} + \left(\frac{(u^{-m})' u^4}{2.(2p)^2}\right)' + \left(\frac{(u^{-m})' u^6}{2.3.(2p)^3}\right)'' + \ldots,$$

où il faudra faire $u = \frac{1}{2p}$, après avoir pris les fonctions dérivées désignées par les traits appliqués aux parenthèses.

Or

$$(u^{-m})' = -mu^{-m-1},$$
$$\left((u^{-m})'u^4\right)' = (-mu^{-m+3})' = m(m-3)u^{-m+2},$$
$$\left((u^{-m})'u^6\right)'' = (-mu^{-m+5})'' = -m(m-5)(m-4)u^{-m+3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi la série deviendra

$$u^{-m} - \frac{m}{2p}u^{-m+1} + \frac{m(m-3)}{2\cdot(2p)^2}u^{-m+2} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2\cdot3\cdot(2p)^3}u^{-m+3} + \ldots.$$

Faisons maintenant $u = \frac{1}{2p}$, et l'on aura la série

$$(2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2\cdot3}(2p)^{m-6} + \ldots,$$

laquelle, étant continuée seulement tant qu'il y aura des puissances négatives de $\frac{1}{2p}$, c'est-à-dire des puissances positives de $2p$, exprimera la valeur de

$$(p+\sqrt{p^2-1})^{-m} + (p-\sqrt{p^2-1})^{-m},$$

ce qui est la même chose que la valeur de

$$(p+\sqrt{p^2-1})^m + (p-\sqrt{p^2-1})^m,$$

à cause de

$$(p+\sqrt{p^2-1})(p-\sqrt{p^2-1}) = 1.$$

Ainsi, dans cet état, la série dont il s'agit donnera la valeur de $2\cos mx$, ce qui s'accorde avec la formule de la Table (A).

Mais, si l'on continue la série à l'infini, alors elle ne donnera que la valeur de

$$(p-\sqrt{p^2-1})^{-m},$$

puisque $p-\sqrt{p^2-1}$ est la plus petite des deux racines; ou, ce qui revient au même, elle donnera la valeur de

$$(p+\sqrt{p^2-1})^m.$$

Pour nous convaincre en effet que la série précédente, prise dans toute son étendue, n'est que le développement de cette quantité, nous allons chercher ce développement par une marche directe, ce qui servira d'exemple de la manière d'employer les fonctions dérivées dans ces sortes de recherches.

Supposons donc qu'il s'agisse de développer l'expression

$$(p+\sqrt{p^2-1})^m$$

dans une série descendante de la forme

$$Ap^m + Bp^{m-1} + Cp^{m-2} + Dp^{m-3} + \ldots;$$

si l'on divise de part et d'autre par p^m, et qu'on fasse $\frac{1}{p} = z$, on aura

$$(1+\sqrt{1-z^2})^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots,$$

où l'on voit que la série ne peut avoir que des puissances paires de z.

Ainsi, en faisant $u = z^2$, on aura la fonction

$$(1+\sqrt{1-u})^m$$

à développer suivant les puissances de u.

Donc, par la formule générale donnée à la fin de la Leçon IX, si l'on fait

$$f(u) = (1+\sqrt{1-u})^m,$$

on aura

$$(1+\sqrt{1-u})^m = f + uf' + \frac{u^2}{2}f'' + \ldots,$$

où $f, f', f'', \ldots$ sont les valeurs de $f(u), f'(u), f''(u), \ldots$ lorsque $u = 0$, et forment ici les coefficients A, C, ...

Ainsi l'on trouvera d'abord $f = 2^m$; ensuite on aura

$$f' = -\frac{m}{2}\frac{(1+\sqrt{1-u})^{m-1}}{\sqrt{1-u}},$$

et de là

$$f' = -m.2^{m-2},$$

et ainsi de suite.

On peut de cette manière avoir successivement tous les coefficients de la série ; mais on n'en aura pas la loi, ce qui est le plus essentiel.

Pour la trouver d'une manière générale, je reprends la formule en p et je la suppose égale à y, ce qui me donne l'équation

$$y=(p+\sqrt{p^2-1})^m.$$

Je remarque maintenant qu'un des principaux avantages des fonctions dérivées est de pouvoir faire disparaître dans les équations les puissances et les radicaux. En effet, en prenant les fonctions dérivées par rapport à p et regardant y comme fonction de p, on a

$$y'=m(p+\sqrt{p^2-1})^{m-1}\left(1+\frac{p}{\sqrt{p^2-1}}\right)=m\frac{(p+\sqrt{p^2-1})^m}{\sqrt{p^2-1}};$$

cette équation, divisée par l'équation primitive, donne

$$\frac{y'}{y}=\frac{m}{\sqrt{p^2-1}};$$

multipliant en croix et carrant, on aura

$$y'^2(p^2-1)=m^2y^2.$$

Prenant de nouveau les fonctions dérivées par rapport à p, on obtiendra

$$2y'y''(p^2-1)+2y'^2p=2m^2yy',$$

d'où, en divisant par $2y'$, résulte cette équation du second ordre en y et p

$$m^2y-py'-(p^2-1)y''=0,$$

laquelle étant, comme l'on voit, linéaire par rapport à y et dégagée de radicaux, est très propre au développement de y en série.

En effet, il n'y a qu'à substituer pour y la série

$$Ap^m+Bp^{m-1}+Cp^{m-2}+Dp^{m-3}+\ldots,$$

et par conséquent pour y'

$$mAp^{m-1}+(m-1)Bp^{m-2}+(m-2)Cp^{m-3}+\ldots,$$

et pour y''

$$m(m-1)Ap^{m-2}+(m-1)(m-2)Bp^{m-3}+\ldots.$$

Ordonnant les termes suivant les puissances de p, on aura

$$\begin{aligned}&[m^2A-mA-m(m-1)A]p^m\\&+[m^2B-(m-1)B-(m-1)(m-2)B]p^{m-1}\\&+[m^2C-(m-2)C-(m-2)(m-3)C+m(m-1)A]p^{m-2}\\&+[m^2D-(m-3)D-(m-3)(m-4)D+(m-1)(m-2)B]p^{m-3}\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=0.\end{aligned}$$

Comme cette équation doit avoir lieu indépendamment de p, il faudra égaler à zéro le coefficient de chaque terme.

Le coefficient de p^m disparaissant de lui-même, c'est une marque que le coefficient A demeure indéterminé.

Le coefficient de p^{m-1} se réduit à $m^2B-(m-1)^2B$, qui ne peut devenir nul à moins de faire $B=0$. Or, B étant nul, il est facile de voir que les coefficients de p^{m-3}, p^{m-5}, ... ne pourront aussi devenir nuls qu'en faisant $D=0$, $F=0$, ...

Maintenant le coefficient de p^{m-2} se réduit à

$$m^2C-(m-2)^2C+m(m-1)A,$$

celui de p^{m-4} se réduit de même à

$$m^2E-(m-4)^2E+(m-2)(m-3)C,$$

et ainsi des autres.

On aura donc, en réduisant, les équations

$$\begin{aligned}&4(m-1)C+m(m-1)A=0,\\&8(m-2)E+(m-2)(m-3)C=0,\\&12(m-3)G+(m-4)(m-5)E=0,\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

lesquelles donnent la loi suivant laquelle les coefficients A, C, E, G, ... dépendent les uns des autres.

On tire de ces équations

$$C = -\frac{mA}{4},$$

$$E = -\frac{(m-3)C}{8} = \frac{m(m-3)A}{4.8},$$

$$G = -\frac{(m-4)(m-5)E}{12(m-3)} = -\frac{m(m-4)(m-5)A}{4.8.12},$$

.....

Or nous avons vu que le premier coefficient A est égal à 2^m; ainsi on aura ce développement

$$(p+\sqrt{p^2-1})^m = (2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}(2p)^{m-6} + \ldots,$$

qui s'accorde avec la série trouvée ci-dessus.

Cherchons de même le développement de $(p-\sqrt{p^2-1})^m$. Comme cette expression ne diffère de celle que nous venons de traiter que par le signe du radical, lequel ne se trouve plus dans l'équation dérivée en y dont nous avons fait usage, il s'ensuit que la même formule, que nous venons d'obtenir, pourra encore s'appliquer à ce développement. Il faut seulement remarquer que, comme les premiers termes du radical $\sqrt{p^2-1}$ sont $p - \frac{1}{2p} + \cdots$, le premier terme du développement dont il s'agit sera $\frac{1}{(2p)^m}$, de sorte qu'ici il faudra prendre m négativement; et, comme l'équation dérivée en y ne contient que m^2, on aura nécessairement la même série en y changeant seulement m en $-m$, ce qui suit d'ailleurs aussi de ce que

$$(p-\sqrt{p^2-1})^m = (p+\sqrt{p^2-1})^{-m};$$

on aura donc

$$(p-\sqrt{p^2-1})^m = (2p)^{-m} + m(2p)^{-m-2} + \frac{m(m+3)}{2}(2p)^{-m-4} + \frac{m(m+4)(m+5)}{2.3}(2p)^{-m-6} + \ldots$$

Si maintenant on réunit ces deux séries, on aura la valeur de $2\cos mx$;

donc

$$2\cos mx = (2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}(2p)^{m-6} + \ldots$$
$$+ (2p)^{-m} + m(2p)^{-m-2} + \frac{m(m+3)}{2}(2p)^{-m-4} + \frac{m(m+4)(m+5)}{2.3}(2p)^{-m-6} + \ldots.$$

C'est le développement complet de $2\cos mx$ en puissances de $\cos x$, pour une valeur quelconque de m.

Si maintenant on fait ici $m = 1$, on a

$$\cos x = p - \frac{1}{4p} - \frac{1}{16p^3} - \frac{2}{64p^5} - \ldots + \frac{1}{4p} + \frac{1}{16p^3} + \frac{2}{64p^5} + \ldots,$$

où l'on voit que les deux séries se réduisent au premier terme p.

En donnant à m d'autres valeurs entières et positives quelconques, on trouvera toujours que la seconde série, qui contient les puissances négatives de p, servira à détruire dans la première série tous les termes qui contiendront ces mêmes puissances; c'est ce qu'on peut démontrer en général par la loi même des deux séries; de sorte que le résultat se réduira aux seuls termes de la première qui contiennent des puissances positives de p; ce qui revient à ne conserver dans cette série que les termes où p est élevée à une puissance positive, ou nulle, comme nous l'avons trouvé plus haut *a priori*.

Mais lorsqu'on donne à m une valeur fractionnaire quelconque, les deux séries ne se détruisent plus, et leur réunion est nécessaire pour avoir la valeur complète de $2\cos mx$.

En prenant la différence des deux séries au lieu de leur somme, on aurait la valeur de $\sin mx\sqrt{-1}$; mais $\sin mx$ serait exprimé de cette manière par des séries infinies et imaginaires. Pour avoir une expression réelle, il suffit de considérer que la fonction dérivée de $\cos mx$ est $-m\sin mx$, et que celle de p est $-q$, puisque

$$p = \cos x \quad \text{et} \quad q = \sin x;$$

de manière qu'en prenant les fonctions dérivées des séries trouvées

pour $\cos mx$, on aura sur-le-champ, en changeant les signes et divisant par $2m$,

$$\sin mx = \left[(2p)^{m-1} - (m-2)(2p)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}(2p)^{m-5} - \dots\right]q$$
$$- \left[(2p)^{-m-1} + (m+2)(2p)^{-m-3} + \frac{(m+3)(m+4)}{2}(2p)^{-m-5} + \dots\right]q.$$

Cette expression se réduit aussi à une forme finie, lorsque m est un nombre entier, par la destruction mutuelle des termes qui contiendraient des puissances négatives de p; de sorte que, m étant un nombre positif entier, il suffira de prendre dans la première série les termes qui contiendront des puissances positives de p; ce qui s'accorde avec la formule de la Table (B).

Lorsque m est un nombre fractionnaire, les deux séries vont à l'infini, et, jointes ensemble, elles donnent la vraie valeur de $\sin mx$ développée suivant les puissances descendantes de $\cos x$, comme cela a lieu pour la valeur de $\cos mx$.

Euler a le premier reconnu cette espèce d'imperfection des formules connues des Tables (A) et (B); il a fait voir, par une analyse à peu près semblable à celle que nous venons de donner, que ces formules, pour être générales et applicables à des valeurs quelconques de m, doivent être complétées par des valeurs semblables où l'exposant m est négatif.

J'ai cru devoir entrer dans ce détail pour l'instruction des jeunes analystes, et surtout pour montrer que, si l'Analyse paraît quelquefois en défaut, c'est toujours faute de l'envisager d'une manière assez étendue et de la traiter avec toute la généralité dont elle est susceptible. (*Voyez* le Tome IX des *Nova Acta* de l'Académie de Pétersbourg.)

Nous venons de développer les expressions

$$(p \pm \sqrt{p^2-1})^m,$$

suivant les puissances descendantes de p; on peut de même, et par le moyen de la même équation dérivée en y, les développer suivant les puissances ascendantes de p, ce qui nous donnera les formules des

Tables (C), (D), (E), (F), et pourra même servir à les compléter pour toutes les valeurs de m.

Supposons donc, en général,

$$y = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \dots.$$

Substituant dans la même équation, et ordonnant suivant les puissances de p, on aura

$$\begin{aligned}
&m^2A + 2C \\
&+ (m^2B - 1B + 2.3D)p \\
&+ (m^2C - 2C + 3.4E - 2C)p^2 \\
&+ (m^2D - 3D + 4.5F - 2.3D)p^3 \\
&+ (m^2E - 4E + 5.6G - 3.4E)p^4 \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots = 0.
\end{aligned}$$

Égalant donc à zéro chacun des coefficients des puissances de p, on aura, en réduisant,

$$\begin{aligned}
m^2A + 2C &= 0, \\
(m^2 - 1)B + 2.3D &= 0, \\
(m^2 - 4)C + 3.4E &= 0, \\
(m^2 - 9)D + 4.5F &= 0, \\
(m^2 - 16)E + 5.6G &= 0, \\
&\dots\dots\dots\dots,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en substituant successivement les valeurs précédentes,

$$C = -\frac{m^2A}{2},$$
$$D = -\frac{(m^2-1)B}{2.3},$$
$$E = \frac{m^2(m^2-4)A}{2.3.4},$$
$$F = \frac{(m^2-1)(m^2-9)B}{2.3.4.5},$$
$$G = -\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)A}{2.3.4.5.6},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Les coefficients A et B étant restés indéterminés, il faudra les déterminer par la nature de la fonction y. Or il est visible qu'on a

$$A = y, \quad B = y',$$

en faisant $p = 0$. Ainsi, puisque la fonction y est égale à

$$(p + \sqrt{p^2 - 1})^m,$$

on aura d'abord, en faisant $p = 0$,

$$A = (\sqrt{-1})^m.$$

Ensuite, en faisant $p = 0$ dans la fonction dérivée y' trouvée ci-dessus, on aura

$$y' = m(\sqrt{-1})^{m-1} = B.$$

Substituant donc ces valeurs de A et B, on aura le développement de l'expression

$$(p + \sqrt{p^2 - 1})^m.$$

Pour avoir celui de l'expression

$$(p - \sqrt{p^2 - 1})^m,$$

il n'y aura qu'à prendre le radical $\sqrt{p^2 - 1}$ en moins; mais, comme ce radical n'entre plus dans l'équation dérivée en y, par laquelle nous avons déterminé les coefficients de la série, il s'ensuit qu'on aura la même série pour cette dernière expression que pour la première, aux coefficients A et B près, qui pourront être différents; et on trouvera ici, par le même procédé,

$$A = (-\sqrt{-1})^m, \quad B = m(-\sqrt{-1})^{m-1}.$$

Donc, puisque la somme de ces deux expressions donne la valeur de $2\cos mx$, comme on l'a vu plus haut, on aura cette valeur en substituant dans la série $A + Bp + Cp^2 + \ldots$, à la place de A et B, la somme des deux valeurs qu'on vient de trouver, c'est-à-dire en faisant

$$A = (\sqrt{-1})^m + (-\sqrt{-1})^m,$$
$$B = m(\sqrt{-1})^{m-1} + m(-\sqrt{-1})^{m-1};$$

d'où il est facile de voir que, lorsque m est un nombre entier impair, on aura $A = 0$, $B = \pm 2m$, et, lorsque m sera pair, on aura $A = \pm 2$, $B = 0$.

Mais, pour avoir les valeurs de A et B dégagées d'imaginaires pour toutes les valeurs de m, il n'y a qu'à employer la formule générale

$$(\cos x + \sin x\sqrt{-1})^m = \cos mx + \sin mx\sqrt{-1},$$

et y supposer x égal à l'angle droit, car alors $\cos x = 0$ et $\sin x = 1$: ainsi, en adoptant l'angle droit pour l'unité des angles, et prenant le radical $\sqrt{-1}$ en + et en −, on aura

$$(\pm\sqrt{-1})^m = \cos m \pm \sin m\sqrt{-1},$$

et les valeurs de A et B deviendraient

$$A = 2\cos m, \quad B = 2m\cos(m-1).$$

On aura donc en général, pour un nombre quelconque m,

$$\cos mx = \left[1 - \frac{m^2}{2}p^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}p^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}p^6 + \ldots\right]\cos m$$
$$+ \left[mp - \frac{m(m^2-1)}{2.3}p^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}p^5 - \ldots\right]\cos(m-1).$$

Tel est le développement complet de $\cos mx$ en série ascendante de p ou $\cos x$. On voit que, lorsque m est un nombre entier, il y a toujours une des deux séries partielles qui se termine, et que l'autre qui irait à l'infini disparaît parce qu'elle se trouve toute multipliée par un coefficient $\cos m$ ou $\cos(m-1)$, qui devient nul. On a alors l'une ou l'autre des Tables (C) et (E). Mais, lorsque m est une fraction quelconque, les deux séries vont à l'infini, et leur réunion est nécessaire pour avoir la valeur complète de $\cos mx$, ce que personne, ce me semble, n'avait encore observé.

En prenant les fonctions dérivées, comme on a fait plus haut, pour

déduire la valeur de $\sin mx$ de celle de $\cos mx$, on aura aussi, à cause de $p' = -q$,

$$\sin mx = -\left[mp - \frac{m(m^2-4)}{2.3}p^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}p^5 - \dots\right]q\cos m$$
$$+\left[1 - \frac{m^2-1}{2}p^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}p^4 - \dots\right]q\cos(m-1)$$

pour le développement complet de $\sin mx$, quel que soit m; où l'on voit que, lorsque m est un nombre entier, on a les formules des Tables (D) et (F).

Il nous reste à considérer encore les développements de $\cos mx$ et $\sin mx$, suivant les puissances ascendantes de q, conformément aux Tables (G), (H), (I), (K).

Pour cela nous remarquerons d'abord qu'en faisant $\sin x = q$, on a $\cos x = \sqrt{1-q^2}$, et les expressions générales de $\cos mx$ et $\sin mx$ deviennent

$$2\cos mx = (\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{-1})^m + (\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{-1})^m,$$
$$2\sin mx\sqrt{-1} = (\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{-1})^m - (\sqrt{1-q^2} - q\sqrt{-1})^m.$$

Il ne s'agit donc que de développer les formules

$$(\sqrt{1-q^2} \pm q\sqrt{-1})^m$$

en puissances ascendantes de q.

Faisons

$$(\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{-1})^m = z;$$

on aura, en prenant les fonctions dérivées par rapport à q,

$$z' = m(\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{-1})^{m-1}\left(-\frac{q}{\sqrt{1-q^2}} + \sqrt{-1}\right)$$
$$= \frac{m(\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{-1})^{m-1}(\sqrt{1-q^2}\sqrt{-1} - q)}{\sqrt{1-q^2}}$$
$$= \frac{m\sqrt{-1}(\sqrt{1-q^2} + q\sqrt{-1})^m}{\sqrt{1-q^2}}.$$

Divisant cette équation par l'équation primitive, on a

$$\frac{z'}{z} = \frac{m\sqrt{-1}}{\sqrt{1-q^2}};$$

multipliant en croix et carrant, on aura

$$z'^2(1-q^2) = -m^2z^2.$$

Prenant de nouveau les fonctions dérivées et divisant par $2z'$, on obtiendra cette équation du second ordre en z

$$m^2z - qz' - (q^2-1)z'' = 0,$$

qui est, comme l'on voit, entièrement semblable à l'équation en y et p trouvée plus haut.

Ainsi, en supposant

$$z = A + Bq + Cq^2 + Dq^3 + \dots,$$

on trouvera les mêmes valeurs des coefficients; mais, comme les deux premiers A et B demeurent indéterminés, ils pourront être différents, à raison de la diversité des fonctions y et z en p et en q.

Pour trouver ici ces deux coefficients, ce qu'il y a de plus simple, c'est de chercher par le développement actuel les deux premiers termes de la série. Or, puisque $\sqrt{1-q^2}$ donne

$$1 - \frac{q^2}{2} + \dots,$$

il est évident que les deux premiers termes de

$$\left(1 + q\sqrt{-1} - \frac{q^2}{2} + \dots\right)^m$$

sont $1 + mq\sqrt{-1}$; ainsi l'on aura

$$A = 1, \quad B = m\sqrt{-1}.$$

Le développement de

$$(\sqrt{1-q^2}-q\sqrt{-1})^m$$

sera le même en changeant seulement $\sqrt{-1}$ en $-\sqrt{-1}$; ainsi l'on aura, relativement à ce développement,

$$A=1, \quad B=-m\sqrt{-1}.$$

Donc, pour avoir la somme des deux développements, il n'y aura qu'à prendre pour A et B la somme des deux valeurs correspondantes, ce qui donne

$$A=2, \quad B=0.$$

Et, pour avoir la différence des mêmes développements, on prendra la différence des valeurs correspondantes de A et B, ce qui donnera

$$A=0, \quad B=2m\sqrt{-1}.$$

Faisant ces substitutions, on aura donc, en divisant par 2 et par $2\sqrt{-1}$,

$$\cos mx=1-\frac{m^2}{2}q^2+\frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}q^4-\frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}q^6+\ldots,$$

$$\sin mx=mq-\frac{m(m^2-1)}{2.3}q^3+\frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}q^5-\ldots.$$

Ces formules sont, comme l'on voit, les mêmes que celles des Tables (I) et (H); mais, par la manière dont nous venons de les trouver, on voit en même temps qu'elles sont générales pour des valeurs quelconques de m. Cependant, comme la première ne se termine que lorsque m est un nombre entier pair, et que la seconde ne se termine que lorsque m est un nombre entier impair, elles ne peuvent servir pour la section des angles que dans ces cas; mais on peut, en prenant les fonctions dérivées, comme nous l'avons fait ci-dessus, déduire de ces mêmes formules d'autres formules qui se termineront justement dans les cas où celles-ci vont à l'infini. Pour cela, on se rappellera que les fonctions dérivées de $\cos mx$ et $\sin mx$ sont $-m\sin mx$ et $m\cos mx$, et que celles de p et q sont $-q$ et p; de sorte que les deux équations

fourniront, par la dérivation, ces deux-ci :

$$\sin mx=p\left[mq-\frac{m(m^2-4)}{2.3}q^3+\frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}q^5-\ldots\right],$$

$$\cos mx=p\left[1-\frac{m^2-1}{2}q^2+\frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}q^4-\ldots\right],$$

qui répondent, comme l'on voit, aux formules des Tables (K) et (G), et qui sont par conséquent aussi générales pour des valeurs quelconques de m. Ainsi toutes les formules de ces différentes Tables sont démontrées d'une manière générale.

Le théorème de Cotes est si intimement lié à la théorie des sections angulaires, que nous ne pouvons nous dispenser d'en dire un mot ici.

On ignore comment Cotes l'a trouvé, et on en a donné après sa mort différentes démonstrations plus ou moins simples, et même plus ou moins rigoureuses. Sans avoir recours aux expressions imaginaires comme on le fait communément, on peut le déduire directement des formules mêmes données par Viète, que nous avons rapportées dans la Table (A); et il est vraisemblable que c'est ainsi que Cotes y est parvenu.

En effet, si l'on multiplie ces formules par 2 et qu'on y suppose $p=y+\frac{1}{y}$, elles se réduisent à cette forme simple

$$2\cos 1x=y+\frac{1}{y},$$

$$2\cos 2x=y^2+\frac{1}{y^2},$$

$$2\cos 3x=y^3+\frac{1}{y^3},$$

$$2\cos 4x=y^4+\frac{1}{y^4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où il est facile de conclure, en général,

$$2\cos mx=y^m+\frac{1}{y^m}.$$

Pour se convaincre d'une manière plus directe de la généralité de cette formule, il suffit de considérer que si, dans l'équation

$$2\cos x\cos mx = \cos(m-1)x + \cos(m+1)x,$$

on fait

$$2\cos x = y + \frac{1}{y},$$

et qu'on suppose que deux termes consécutifs $2\cos(m-1)x$ et $2\cos mx$ soient de la forme

$$y^{m-1} + \frac{1}{y^{m-1}}, \quad \text{et} \quad y^m + \frac{1}{y^m},$$

elle donnera

$$2\cos(m+1)x = \left(y + \frac{1}{y}\right)\left(y^m + \frac{1}{y^m}\right) - \left(y^{m-1} + \frac{1}{y^{m-1}}\right) = y^{m+1} + \frac{1}{y^{m+1}}.$$

Ainsi, pourvu que les deux premiers termes $2\cos 0x$ et $2\cos x$ soient de la forme $y^m + \frac{1}{y^m}$, en faisant $m = 0$ et $m = 1$, ce qui est en effet, tous les autres seront nécessairement de la même forme.

Maintenant les deux équations

$$2\cos x = y + \frac{1}{y}, \quad 2\cos mx = y^m + \frac{1}{y^m}$$

donnent ces deux-ci

$$y^2 - 2y\cos x + 1 = 0, \quad y^{2m} - 2y^m\cos mx + 1 = 0,$$

qui doivent donc avoir lieu en même temps; par conséquent, il faut qu'elles aient une racine commune.

Ce dernier théorème a été donné par Moivre, sans démonstration, dans les *Transactions philosophiques* de 1722, année où a paru l'*Harmonia mensurarum* de Cotes, qui était mort six ans auparavant.

Soit maintenant a la racine commune à ces deux équations; comme elles demeurent les mêmes en y changeant y en $\frac{1}{y}$, il s'ensuit que $\frac{1}{a}$ sera encore une racine commune aux mêmes équations; mais l'équation

$$y^2 - 2y\cos x + 1 = 0,$$

n'étant que du second degré, ne peut avoir que les deux racines a et $\frac{1}{a}$: donc cette équation a toutes ses racines communes avec

$$y^{2m} - 2y^m\cos mx + 1 = 0;$$

par conséquent elle est nécessairement un diviseur de celle-ci.

Soit

$$mx = \varphi, \quad \text{donc} \quad x = \frac{\varphi}{m};$$

il suit de ce qu'on vient de démontrer que la formule

$$y^{2m} - 2y^m\cos\varphi + 1$$

a pour diviseur celle-ci :

$$y^2 - 2y\cos\frac{\varphi}{m} + 1,$$

m étant un nombre quelconque entier.

Or, si c est la circonférence ou l'angle de quatre droites, on sait que $\cos\varphi = \cos(\varphi + nc)$, n étant un nombre quelconque entier; ainsi, en mettant $\varphi + nc$ à la place de φ, et faisant successivement $n = 0$, 1, 2, ..., $m-1$, on en conclura que la formule

$$y^{2m} - 2y^m\cos\varphi + 1$$

a pour diviseurs les m formules suivantes :

$$y^2 - 2\cos\frac{\varphi}{m}\cdot y + 1,$$

$$y^2 - 2\cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{c}{m}\right)\cdot y + 1,$$

$$y^2 - 2\cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{2c}{m}\right)\cdot y + 1,$$

$$y^2 - 2\cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{3c}{m}\right)\cdot y + 1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$y^2 - 2\cos\left(\frac{\varphi}{m} + \frac{m-1}{m}c\right)\cdot y + 1.$$

De sorte que, comme ces diviseurs sont tous différents entre eux et qu'ils sont au nombre de m, la formule en question du $2m^{\text{ième}}$ degré ne peut être que le produit de ces m formules du second degré.

Le théorème de Cotes n'est, comme l'on sait, qu'un cas particulier de ce théorème général, lorsqu'on y fait $\varphi = 0$ ou $\varphi = \frac{c}{2}$, ce qui donne $\cos\varphi = \pm 1$, et réduit la formule générale à

$$(y^m \pm 1)^2.$$

Le théorème général est dû à Moivre, comme on le voit par ses *Miscellanea analytica*.

Jusqu'ici nous avons développé les cosinus et les sinus des angles multiples en puissances des cosinus ou des sinus de l'angle simple. On peut chercher réciproquement à développer les puissances des cosinus ou sinus de l'angle simple en cosinus ou sinus des angles multiples, et cette transformation, qui est toujours possible, est un des plus grands avantages de l'algorithme des sinus et cosinus, par la facilité qu'elle donne de passer des fonctions primitives aux fonctions dérivées, et de revenir de celles-ci aux primitives.

Nous pourrions la déduire des formules trouvées ci-dessus, mais nous aimons mieux la chercher directement par le moyen des fonctions dérivées, pour donner un nouvel exemple de leur usage dans la transformation des fonctions.

Considérons la puissance $\cos^m x$, et supposons cette fonction de x égale à y; nous aurons ainsi

$$y = \cos^m x,$$

et, prenant les fonctions dérivées par rapport à x, il viendra

$$y' = -m\cos^{m-1}x\sin x;$$

cette équation, divisée par la précédente, donne

$$\frac{y'}{y} = -\frac{m\sin x}{\cos x},$$

d'où l'on tire, en réduisant,

$$my\sin x + y'\cos x = 0,$$

équation dérivée du premier ordre, qui a l'avantage de ne plus contenir la puissance indéterminée de $\cos x$.

Supposons maintenant, en général,

$$y = A\cos nx + B\cos(n-1)x + C\cos(n-2)x + D\cos(n-3)x + \ldots,$$

les coefficients A, B, C, ... étant indéterminés, ainsi que n. L'équation précédente deviendra par cette substitution

$$m[A\cos nx + B\cos(n-1)x + C\cos(n-2)x + \ldots]\sin x$$
$$-[nA\sin nx + (n-1)B\sin(n-1)x + (n-2)C\sin(n-2)x + \ldots]\cos x = 0,$$

savoir, en développant les produits des sinus et cosinus, et ordonnant les termes suivant les sinus multiples :

$$+[mA - nA]\sin(n+1)x$$
$$+[mB - (n-1)B]\sin nx$$
$$+[mC - mA - (n-2)C - nA]\sin(n-1)x$$
$$+[mD - mB - (n-3)D - (n-1)B]\sin(n-2)x$$
$$+[mE - mC - (n-4)E - (n-2)C]\sin(n-3)x$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Égalant donc à zéro chacun des coefficients de ces différents termes, on aura

$$(m-n)A = 0,$$
$$(m-n+1)B = 0,$$
$$(m-n+2)C - (m+n)A = 0,$$
$$(m-n+3)D - (m+n-1)B = 0,$$
$$(m-n+4)E - (m+n-2)C = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La première donne d'abord $n = m$, et, substituant cette valeur, les

autres deviennent

$$B = 0,$$
$$2C - 2mA = 0,$$
$$3D - (2m-1)B = 0,$$
$$4E - (2m-2)C = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi le premier coefficient A demeure indéterminé; ensuite on a

$$B = 0,$$
$$C = \frac{2m}{2}A,$$
$$D = \frac{2m-1}{3}B,$$
$$E = \frac{2m-2}{4}C,$$
$$F = \frac{2m-3}{5}D,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

donc,

$$B = 0, \quad D = 0, \quad F = 0, \quad \ldots.$$

Ensuite,

$$C = mA,$$
$$E = \frac{m(m-1)}{2}A,$$
$$G = \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}A,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

On a donc en général, quel que soit l'exposant m,

$$\cos^m x = A\left[\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \ldots\right].$$

Il reste à déterminer le coefficient A; pour cela, supposant $x = 0$, on obtient

$$1 = A\left[1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \ldots\right] = A(1+1)^m = 2^m A;$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{1}{2^m};$$

Donc enfin, en multipliant toute l'équation par 2^m, on aura

$$(2\cos x)^m = \cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \ldots,$$

série fort simple qui se termine toujours, comme celle du binôme, lorsque m est un nombre entier positif.

On peut déduire de cette formule un pareil développement pour $\sin^m x$, en changeant simplement x en $1 - x$, l'angle droit étant pris pour l'unité des angles.

Ainsi on aura de même

$$(2\sin x)^m = \cos m(1-x) + m\cos(m-2)(1-x) + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)(1-x) + \ldots.$$

Nous venons de donner une théorie complète des sections angulaires, et nous avons en même temps montré, par différents exemples, combien l'algorithme des fonctions dérivées est utile pour la transformation des fonctions, en faisant disparaître des équations les puissances et les radicaux, qui rendent les développements difficiles et font perdre la loi et la dépendance mutuelle des termes.

On voit que tout se réduit à former d'abord des équations dérivées d'après l'équation ou les équations primitives données, et à déduire ensuite de ces équations dérivées d'autres équations primitives, qui seront les transformées des premières. Il est donc important de bien connaître la théorie de ces équations, et de se rendre familiers les différents artifices qui peuvent en faciliter le calcul.

Commençons par exposer les principes généraux de cette théorie.

LEÇON DOUZIÈME.

THÉORIE GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DÉRIVÉES ET DES CONSTANTES ARBITRAIRES.

Nous avons déjà démontré que toute équation entre deux variables, par laquelle une de ces variables est fonction de l'autre, subsiste également en prenant les fonctions dérivées, premières, secondes, etc., de chaque terme de l'équation par rapport à l'une de ces variables.

Ces équations dérivées ayant lieu en même temps que l'équation primitive, il s'ensuit qu'une combinaison quelconque de ces différentes équations aura lieu aussi. Donc, comme les constantes qui entrent dans une fonction restent les mêmes dans ses fonctions dérivées, on pourra toujours, par le moyen des équations dérivées, éliminer autant de constantes de l'équation primitive qu'on aura d'équations dérivées; l'équation résultante de cette élimination sera une équation du même ordre que la plus haute des équations dérivées, laquelle sera vraie en même temps que l'équation primitive et pourra par conséquent en tenir lieu; elle renfermera autant de constantes de moins que l'exposant de son ordre contiendra d'unités.

Ainsi l'équation primitive, combinée avec son équation dérivée ou prime, pourra donner une équation du premier ordre contenant une constante de moins que l'équation primitive.

L'équation primitive, combinée avec les équations dérivées prime et seconde, donnera une équation du second ordre contenant deux constantes de moins que l'équation primitive, et ainsi de suite.

On ne peut parvenir que d'une seule manière à l'équation du premier ordre qui résulte de l'équation primitive et de son équation dérivée par l'élimination d'une constante donnée; mais on peut parvenir de deux manières différentes à l'équation du second ordre déduite de la primitive et de ses deux premières dérivées par l'élimination de deux constantes données; et ce double point de vue donne lieu à des conséquences importantes relatives à ce genre d'équations.

Au lieu d'éliminer à la fois les deux constantes par le moyen des trois équations dont il s'agit, on peut n'éliminer d'abord que l'une ou l'autre de ces constantes, à l'aide de l'équation primitive et de sa dérivée; on aura ainsi deux équations différentes du premier ordre, dont l'une ne contiendra que l'une des deux constantes, et dont l'autre ne contiendra que l'autre constante. Maintenant, en combinant chacune de ces équations avec sa dérivée, on pourra aussi en éliminer la constante qui y était restée, et on aura deux équations du second ordre, sans les deux constantes, lesquelles devront être équivalentes entre elles et avec l'équation qui résulte de l'élimination simultanée des deux constantes.

En effet, chacune de ces équations donnera la valeur de la fonction seconde de la variable qu'on regarde comme fonction de l'autre, valeur qui sera exprimée par la fonction prime de la même variable et par les deux variables mêmes, sans les deux constantes qui entraient dans l'équation primitive; et il est facile de se convaincre que cette valeur est unique et déterminée, de quelque manière qu'on y parvienne, puisque les fonctions dérivées d'une fonction donnée, soit explicite ou non, sont uniques et déterminées, et que les résultats de l'élimination sont aussi toujours déterminés.

On doit conclure de là qu'une équation du second ordre peut être dérivée de deux équations différentes du premier ordre, renfermant chacune une constante arbitraire de plus, et que ces équations seront par conséquent deux équations primitives de la même équation du second ordre, mais primitives du premier ordre, pour les distinguer de l'équation primitive absolue d'où celles-ci sont censées dérivées.

Enfin on peut étendre aux équations des ordres supérieurs au second le raisonnement que nous venons de faire sur celles de cet ordre,

et on en conclura de la même manière qu'une équation du troisième ordre peut être dérivée de trois équations du second ordre, et qu'alors elle peut avoir trois équations primitives de cet ordre; et ainsi de suite.

Nous allons éclaircir et confirmer cette théorie générale par quelques exemples.

Soit l'équation de premier degré

$$y + ax + b = 0;$$

en regardant y comme fonction de x et en prenant les fonctions dérivées, on aura

$$y' + a = 0.$$

En éliminant a au moyen de ces deux équations, on obtiendra l'équation du premier ordre

$$y - xy' + b = 0,$$

dont l'équation primitive sera

$$y + ax + b = 0,$$

a étant la constante arbitraire.

Si la constante b dépendait de la constante a, par exemple si

$$b = a^2,$$

alors en éliminant a, c'est-à-dire en substituant $-y'$ pour a, on aurait l'équation du premier ordre

$$y - xy' + y'^2 = 0,$$

et l'équation primitive de celle-ci serait

$$y + ax + a^2 = 0,$$

a étant la constante arbitraire.

Supposons

$$b = c\sqrt{1 + a^2};$$

on aura l'équation du premier ordre

$$y - xy' + c\sqrt{1 + y'^2} = 0,$$

dont l'équation primitive sera

$$y + ax + c\sqrt{1 + a^2} = 0,$$

où a est la constante arbitraire.

Soit encore l'équation

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0;$$

sa dérivée sera

$$x - ay' = 0,$$

équation du premier ordre dont la proposée est l'équation primitive, et où b sera la constante arbitraire.

Mais, si l'on veut que la constante arbitraire soit a, alors il faudra éliminer a; or l'équation dérivée donne

$$a = \frac{x}{y'};$$

donc, substituant cette valeur dans la proposée, elle donnera

$$x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2} - b = 0,$$

ou bien

$$(x^2 - b)y'^2 - 2xyy' - x^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$y'\sqrt{x^2 + y^2 - b} - yy' - x = 0,$$

équation du premier ordre dont la primitive sera

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0,$$

a étant la constante arbitraire.

Si l'on voulait éliminer à la fois a et b, il faudrait employer les fonctions secondes. Ainsi, puisqu'on a déjà trouvé l'équation du premier ordre

$$x - ay' = 0,$$

où b ne se trouve plus, il n'y aura qu'à former l'équation dérivée de celle-ci, laquelle sera

$$1 - ay'' = 0,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{1}{y''},$$

et cette valeur, substituée dans la précédente, donnera

$$x - \frac{y'}{y''} = 0, \quad \text{ou} \quad xy'' - y' = 0,$$

équation du second ordre dont l'équation

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0$$

sera la primitive absolue, a et b étant les deux constantes arbitraires.

On parviendrait à la même équation en faisant disparaître b de l'équation du premier ordre

$$y'\sqrt{x^2 + y^2 - b} - yy' - x = 0$$

trouvée plus haut; car, en prenant les fonctions dérivées, on aura

$$y''\sqrt{x^2 + y^2 - b} + \frac{y'(x + yy')}{\sqrt{x^2 + y^2 - b}} - yy'' - y'^2 - 1 = 0;$$

en éliminant b au moyen de la précédente, il viendra

$$\frac{y''(yy' + x)}{y'} + y'^2 - yy'' - y'^2 - 1 = 0,$$

savoir, comme on l'a vu plus haut,

$$\frac{y''x}{y'} - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad y''x - y' = 0.$$

On voit aussi que cette même équation du second ordre a deux équations primitives du premier ordre, savoir :

$$x - ay' = 0 \quad \text{et} \quad y'\sqrt{x^2 + y^2 - b} - yy' - x = 0,$$

où a et b sont les deux constantes arbitraires; et ces deux-ci, par l'élimination de la fonction dérivée y', donneront l'équation primitive

absolue entre x et y,

$$\frac{x}{a}\sqrt{x^2 + y^2 - b} - \frac{yx}{a} - x = 0,$$

savoir,

$$\sqrt{x^2 + y^2 - b} - y - a = 0,$$

et, en faisant disparaître le radical,

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0,$$

qui est la même dont nous sommes parti.

En éliminant ainsi les constantes qu'on veut faire disparaître, on tombe souvent, comme on le voit, dans des équations où la plus haute fonction dérivée est élevée à des puissances; et ce n'est que par la résolution qu'on peut avoir la valeur de cette fonction en fonction des variables et des fonctions dérivées d'un ordre moindre.

On peut cependant parvenir directement à une équation dérivée où la plus haute fonction dérivée ne se trouve qu'au premier degré; pour cela, il n'y a qu'à préparer l'équation primitive de manière que la constante arbitraire qu'on veut faire disparaître s'en aille d'elle-même en prenant la fonction dérivée de chacun de ses termes; ce qui arrive lorsque cette constante est dégagée des variables, et forme elle seule un des termes de l'équation; car alors, la fonction dérivée de ce terme étant nulle, l'équation dérivée se trouvera naturellement délivrée de la constante, et la plus haute fonction dérivée y sera nécessairement à la première dimension; car, comme on l'a vu dans la Leçon VI, en prenant la fonction dérivée d'une fonction de plusieurs variables, chaque variable ne peut donner que des termes multipliés par la fonction dérivée de la même variable.

Or il est évident que cette préparation ne demande que de résoudre l'équation primitive, en regardant la constante qu'on veut éliminer comme l'inconnue de l'équation. Ainsi l'on peut obtenir par ce moyen le même résultat qu'on aurait par la résolution de l'équation dérivée, par rapport à la plus haute fonction dérivée.

Dans le second exemple, où l'équation primitive était

$$y + ax + a^2 = 0,$$

nous avons trouvé l'équation dérivée

$$y - xy' + y'^2 = 0,$$

laquelle donne, par la résolution,

$$2y' = x + \sqrt{x^2 - 4y}.$$

Mais, si nous avions d'abord résolu l'équation par rapport à la constante a, nous eussions eu

$$2a = -x + \sqrt{x^2 - 4y};$$

sa dérivée serait

$$-1 + \frac{x - 2y'}{\sqrt{x^2 - 4y}} = 0,$$

savoir, en multipliant par $\sqrt{x^2 - 4y}$,

$$x - 2y' - \sqrt{x^2 - 4y} = 0,$$

équation qui coïncide avec la précédente, à cause de l'ambiguïté du signe du radical.

On peut de la même manière faire disparaître successivement plusieurs constantes en préparant toujours l'équation en sorte que la constante à éliminer soit dégagée des variables.

Ainsi l'équation primitive

$$x^2 - 2ay - a^2 - b = 0,$$

contenant la constante b isolée dans un seul terme, donne tout de suite l'équation du premier ordre sans b,

$$x - ay' = 0;$$

ensuite, en dégageant a, on a $a = \frac{x}{y'}$; prenant la fonction dérivée de chacun des deux membres, on obtient

$$\frac{1}{y'} - \frac{xy''}{y'^2} = 0,$$

équation qui, multipliée par y'^2, devient

$$y' - xy'' = 0,$$

comme plus haut.

En commençant l'élimination par la constante a, nous avions trouvé l'équation du premier ordre

$$x^2 - \frac{2xy}{y'} - \frac{x^2}{y'^2} - b = 0;$$

comme la constante b y est dégagée des variables, il n'y a qu'à prendre la fonction dérivée de chaque terme pour avoir tout de suite l'équation du second ordre sans a ni b.

On a ainsi

$$x - \frac{y}{y'} - x + \frac{xyy''}{y'^2} - \frac{x}{y'^2} + \frac{x^2 y''}{y'^3} = 0.$$

Cette équation se réduit à cette forme

$$\left(\frac{xy''}{y'} - 1\right)\left(\frac{y}{y'} + \frac{x}{y'^2}\right) = 0.$$

Comme le facteur $\frac{y}{y'} + \frac{x}{y'^2}$ ne renferme que la fonction prime y', il ne peut donner une équation du second ordre; ainsi, c'est l'autre facteur $\frac{xy''}{y'} - 1$ qu'il faut employer, et l'on a

$$\frac{xy''}{y'} - 1 = 0, \quad \text{savoir,} \quad xy'' - y' = 0,$$

comme ci-dessus.

Nous verrons plus bas, lorsqu'il sera question des équations primitives singulières, l'usage du premier facteur.

Ce peu d'exemples, que j'ai choisis parmi les plus simples, suffit pour montrer comment les équations dérivées se forment des équations primitives, par l'évanouissement des constantes. On voit que, pour une équation primitive donnée, il est toujours possible de trouver une équation dérivée qui renferme autant de constantes de moins qu'il y aura d'unités dans l'ordre de cette équation, et que, de quelque manière qu'on parvienne à cette équation, et sous quelque forme qu'elle

se présente, elle sera toujours essentiellement la même. Ainsi le problème de trouver l'équation dérivée d'une primitive donnée est résolu dans toute sa généralité. Nous allons considérer maintenant le problème inverse, qui consiste à remonter des équations dérivées aux primitives.

Puisque, dans les équations à deux variables, une équation du premier ordre peut renfermer une constante de moins que l'équation primitive, une équation du second ordre peut renfermer deux constantes de moins que l'équation primitive, et ainsi de suite; il s'ensuit réciproquement que l'équation primitive peut contenir une constante de plus qu'une équation du premier ordre, deux constantes de plus qu'une équation du second ordre, et ainsi de suite, constantes qui seront par conséquent arbitraires; et on voit en même temps qu'elles ne sauraient en contenir davantage, puisqu'on ne pourrait les faire disparaître toutes par le moyen des équations dérivées.

Cette proposition étant d'une grande importance dans la théorie des fonctions dérivées, et n'ayant pas encore été démontrée d'une manière tout à fait rigoureuse, nous croyons devoir en donner une démonstration directe, tirée de l'expression générale de la fonction primitive.

Si y est une fonction quelconque de x, et qu'on dénote par y^0, $y^{0'}$, $y^{0''}$, $y^{0'''}$, ... les valeurs de y et de ses fonctions dérivées y', y'', y''', ..., qui répondent à $x = 0$ et qui sont par conséquent constantes, on aura, par ce que nous avons démontré à la fin de la Leçon IX,

$$y = y^0 + y^{0'}x + y^{0''}\frac{x^2}{2} + y^{0'''}\frac{x^3}{2.3} + \ldots;$$

et, si l'on veut arrêter la série au terme $n^{\text{ième}}$, alors on aura les limites du reste, en substituant dans le terme suivant

$$y^{0(n)}\frac{x^n}{1.2.3\ldots n},$$

à la place de $y^{0(n)}$, la plus grande et la plus petite valeur de $y^{(n)}$ depuis $x = 0$ jusqu'à la grandeur qu'on veut attribuer à x.

Maintenant, si la valeur de y est donnée par une équation du premier ordre entre x, y et y', on aura par cette équation la valeur de y' en x et y, et de là on trouvera, en prenant les fonctions dérivées, une équation du second ordre en x, y, y' et y'', ensuite une équation du troisième ordre entre x, y, y', y'' et y''', et ainsi de suite; de sorte que, en substituant successivement dans ces équations les valeurs de y', y'', y''', ... données par les équations précédentes, on aura, en dernière analyse, les valeurs de y', y'', y''', ... exprimées en x et y. Or, en faisant $x = 0$, les quantités y, y', y'', ... se changeront en y^0, $y^{0'}$, $y^{0''}$, ...: ainsi, on aura les valeurs de $y^{0'}$, $y^{0''}$, ... exprimées en y^0 qui demeurera indéterminée.

De même, si l'on n'a pour la détermination de y qu'une équation du second ordre entre x, y, y' et y'', on en tirera successivement des équations des ordres supérieurs entre x, y, y', y'', y''', entre x, y, y', y'', y''', y^{IV}, et ainsi de suite; et, par les substitutions successives des valeurs de y'', y''', ... données par les équations précédentes, on aura en dernière analyse y'', y''', ... données en x, y et y', de sorte qu'en faisant $x = 0$, on aura les valeurs de $y^{0''}$, $y^{0'''}$, ... exprimées en y^0 et $y^{0'}$, ces deux quantités demeurant indéterminées; et ainsi de suite.

Donc enfin, faisant ces substitutions dans l'expression générale de y en x, il est clair qu'il restera dans cette expression une indéterminée constante y^0, lorsque la fonction y sera donnée par une équation du premier ordre; qu'il y restera deux constantes indéterminées y^0 et $y^{0'}$, lorsque y ne sera donnée que par une équation du second ordre; qu'il y en restera trois, savoir, y^0, $y^{0'}$ et $y^{0''}$, lorsque y sera donnée par une équation du troisième ordre; et ainsi de suite.

Donc, en général, l'expression de y en x renfermera autant de constantes indéterminées qu'il y aura d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation qui détermine la fonction y; et, quoique cette conclusion soit fondée ici sur la théorie des séries, il n'est pas difficile de se convaincre qu'elle doit avoir lieu généralement, quelle que soit l'expression de y, puisqu'on peut toujours regarder une expression en série comme le développement d'une expression finie.

Dans l'analyse précédente, on voit que les constantes arbitraires sont toujours les valeurs de $y, y', y'', \ldots$ qui répondent à $x = 0$, au lieu qu'en envisageant, comme nous l'avons fait plus haut, les équations dérivées comme le résultat de l'élimination des constantes, ces constantes peuvent être quelconques; mais il est toujours facile de les réduire les unes aux autres : car, quelles que soient les constantes qui entrent dans l'expression de y, si l'on déduit de cette expression celles de $y', y'' \ldots$, et qu'ensuite on fasse $x = 0$, ce qui changera les valeurs de $y, y', y'', \ldots$ en $y^0, y^{0\prime}, y^{0\prime\prime}, \ldots$, on pourra toujours, en prenant autant de ces valeurs qu'il y a de constantes arbitraires, déterminer celles-ci en $y^0, y^{0\prime}, y^{0\prime\prime}, \ldots$, et les substituer ensuite dans l'expression générale de y.

Or, quelle que puisse être la forme de cette expression ou de l'équation d'où elle dépend, à raison des différentes constantes qui y seront contenues, il est visible que, lorsque ces constantes seront réduites aux valeurs de $y^0, y^{0\prime}, y^{0\prime\prime}, \ldots$, cette forme deviendra nécessairement la même pour la même équation dérivée.

On peut donc conclure, en général, que, si l'on a une équation dérivée d'un ordre quelconque, et que l'on trouve, de quelque manière que ce soit, une équation entre les mêmes variables qui y satisfasse, et qui renferme autant de constantes arbitraires qu'il y aura d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation dérivée, cette équation sera l'équation primitive de la proposée, avec toute la généralité dont elle est susceptible; de sorte qu'elle renfermera nécessairement toute autre équation qui pourrait aussi satisfaire à la même équation avec autant de constantes arbitraires.

On voit par là que les constantes arbitraires forment proprement la liaison entre les équations primitives et les équations dérivées; celles-ci sont, par leur nature, plus générales que les équations d'où elles dérivent, à raison des constantes qui ont disparu ou qui peuvent avoir disparu; elles équivalent donc à toutes les équations primitives, et qui ne différeraient entre elles que par la valeur de ces constantes.

On pourra donc toujours passer d'une équation primitive à une de

ses dérivées d'un ordre quelconque, et revenir ensuite de celle-ci à une nouvelle équation primitive, pourvu que cette dernière opération y introduise le nombre requis de constantes arbitraires. Alors cette dernière équation renfermera la première et lui deviendra équivalente, en déterminant convenablement ses constantes arbitraires. C'est ainsi qu'on en a usé dans la Leçon précédente, pour la transformation des fonctions angulaires.

Comme nous avons vu qu'une équation du second ordre peut provenir de deux équations différentes du premier ordre, renfermant chacune une constante arbitraire; qu'une équation du troisième ordre peut être dérivée de même de trois équations différentes du second, et ainsi de suite, il est naturel d'en conclure aussi réciproquement que toute équation du second ordre aura deux équations primitives du premier ordre, chacune avec une constante arbitraire; que toute équation du troisième ordre aura trois équations primitives du second ordre, ayant chacune une constante arbitraire; et ainsi de suite. Mais nous pouvons démontrer aussi cette proposition d'une manière directe, par une analyse semblable à celle que nous avons employée ci-dessus.

Considérons la formule générale du développement des fonctions

$$f(x+i) = f(x) + i f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \ldots.$$

Faisons $y = f(x)$ et $i = -x$; on aura

$$f(x) = y, \quad f'(x) = y', \quad f''(x) = y'', \quad \ldots,$$

et $f(x+i)$ deviendra $f(x-x)$, c'est-à-dire égale à la valeur de $f(x)$ ou y, lorsqu'on y fait $x = 0$, valeur que nous avons désignée plus haut par y^0. Ainsi, par ces substitutions, on aura cette formule

$$y^0 = y - xy' + \frac{x^2}{2} y'' - \frac{x^3}{2.3} y''' + \ldots$$

Changeons maintenant dans la formule générale $f(x)$ en $f'(x)$, et l'on aura de même

$$f'(x+i) = f'(x) + i f''(x) + \frac{i^2}{2} f'''(x) + \ldots.$$

Donc, faisant de nouveau

$$f(x)=y,\quad f'(x)=y',\quad f''(x)=y'',\quad \ldots,\quad \text{et}\quad i=-x,$$

ce qui donnera

$$f'(x+i)=f'(x-x),$$

valeur de $f'(x)$ ou de y', lorsque $x=0$, que nous avons désignée par $y^{0'}$, on aura cette autre formule

$$y^{0'}=y'-xy''+\frac{x^2}{2}y'''-\frac{x^3}{2.3}y^{IV}+\ldots.$$

On trouvera de la même manière

$$y^{0''}=y''-xy'''+\frac{x^2}{2}y^{IV}-\frac{x^3}{2.3}y^{V}+\ldots,$$

et ainsi de suite.

Cela posé, si y est donnée par une équation du premier ordre, on aura les valeurs de y', y'', y''', ..., toutes données en x et y, comme on l'a vu plus haut; si on les substitue dans la formule

$$y^0=y-xy'+\frac{x^2}{2}y''-\frac{x^3}{2.3}y'''+\ldots,$$

on aura une équation entre x et y avec la constante arbitraire y^0.

Si y est donnée par une équation du second ordre, on aura y'', y''', y^{IV}, ..., données en x, y et y'; donc, substituant ces valeurs dans les deux formules

$$y^0=y-xy'+\frac{x^2}{2}y''-\frac{x^3}{2.3}y'''+\ldots,$$

$$y^{0'}=y'-xy''+\frac{x^2}{2}y'''-\frac{x^3}{2.3}y^{IV}+\ldots,$$

on aura deux équations en x, y et y', ayant chacune une des constantes arbitraires y^0 et $y^{0'}$, lesquelles seront également deux équations primitives du premier ordre de la proposée du second ordre, et ainsi de suite.

Quoique ces équations soient en séries, les conclusions qu'on peut tirer relativement à la nature des équations primitives n'en sont pas

moins exactes; et il est visible, par la forme même de ces équations, qu'elles sont essentiellement différentes, et qu'il ne peut y en avoir qu'un nombre égal à celui de l'ordre de l'équation donnée.

On en conclura donc aussi que, si pour une équation du second ordre on trouve d'une manière quelconque deux équations différentes du premier ordre qui y satisfassent, et qui renferment chacune une constante arbitraire, on aura les deux équations primitives du premier ordre de la proposée; et toute autre équation de cet ordre, qui y satisferait avec une constante arbitraire, sera nécessairement renfermée dans celle-ci.

Ces deux équations primitives étant connues, on pourra toujours en déduire l'équation primitive absolue, sans fonctions dérivées, en éliminant par leur moyen la fonction dérivée qu'elles contiendront, et qui est censée être la même dans les deux équations.

L'équation résultante, ne contenant plus de fonction dérivée, sera l'équation primitive absolue de la proposée du second ordre; et, comme les deux constantes arbitraires, qui entraient dans les deux équations primitives du premier ordre, se trouveront dans cette équation, elle aura toute la généralité dont elle est susceptible.

Donc, ayant une équation du second ordre, on aura également son équation primitive absolue, soit qu'on trouve immédiatement une équation entre les mêmes variables qui y satisfasse, et qui renferme en même temps deux constantes arbitraires, soit qu'on trouve séparément deux équations du premier ordre qui y satisfassent chacune en particulier, et qui renferment chacune une constante arbitraire.

Mais, si l'une de ces deux équations du premier ordre ne contenait point de constante arbitraire, alors l'équation primitive qu'on en déduirait, ne contenant qu'une seule constante arbitraire, n'aurait pas toute la généralité qu'elle peut avoir; mais elle satisferait toujours à l'équation du second ordre d'où on l'aurait tirée, en même temps qu'elle satisfera aux deux du premier ordre.

Il suit encore de là que, si l'on a une équation du premier ordre, et qu'on en déduise d'une manière quelconque une équation du second

ordre, soit en éliminant une constante ou non, qu'ensuite on passe de celle-ci à une autre équation primitive du premier ordre, avec une constante arbitraire, on pourra, par l'élimination de la fonction dérivée qui se trouve dans les deux équations du premier ordre, avoir une équation entre les deux variables et la constante arbitraire, qui sera par conséquent l'équation primitive absolue de la proposée du premier ordre.

En général, si de la proposée du premier ordre on passe à une équation d'un ordre supérieur, et si l'on trouve d'une manière quelconque une équation primitive de celle-ci d'un ordre inférieur avec une constante arbitraire, on pourra toujours, par l'élimination successive des fonctions dérivées, parvenir à une équation entre les deux variables et la constante arbitraire, laquelle sera ainsi l'équation primitive de la proposée.

Enfin on peut étendre aux équations des ordres supérieurs au second ce que nous venons de trouver relativement à celles de cet ordre, et en déduire des conclusions semblables.

LEÇON TREIZIÈME.

(Continuation de la Leçon précédente.)

THÉORIE DES MULTIPLICATEURS DES ÉQUATIONS DÉRIVÉES.

La manière la plus naturelle de trouver l'équation primitive d'une équation d'un ordre quelconque est de la préparer de façon que son premier membre devienne une fonction dérivée exacte; car alors il n'y aura qu'à prendre sa fonction primitive et y ajouter une constante pour avoir l'équation primitive d'un ordre inférieur; et, en opérant ainsi successivement, on pourra parvenir à l'équation primitive entre les deux variables et autant de constantes arbitraires que l'ordre de la proposée le comportera.

Or je vais prouver que cette préparation est toujours possible par le moyen d'un multiplicateur, lorsque l'équation dérivée de l'ordre n est réduite à la forme

$$y^{(n)} + f[x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}] = 0,$$

$y^{(n)}$ étant la plus haute des fonctions dérivées de y.

D'un côté, il est clair que cette réduction est toujours possible ou censée possible, quelle que soit la forme de l'équation proposée; car il n'y a qu'à en tirer la valeur de $y^{(n)}$ en x, y, y', y'', ... par les règles connues.

De l'autre côté, nous avons déjà observé plus haut que, quelle que puisse être l'équation primitive de l'ordre immédiatement inférieur, si l'on dégage la constante arbitraire, et qu'on prenne ensuite les fonc-

tions dérivées, on a une équation dérivée où la plus haute des fonctions dérivées de y ne sera qu'à la première dimension, et qui devra, par conséquent, être identique avec la proposée.

Ainsi, ayant réduit l'équation primitive à la forme

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = a,$$

où a est la constante arbitraire, on aura l'équation dérivée

$$F'(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

laquelle, en séparant la partie qui se rapporte à la variation de $y^{(n-1)}$, d'après la notation abrégée indiquée dans la Leçon VI, peut se mettre sous la forme

$$F'(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}) + y^{(n)} F'(y^{(n-1)}) = 0,$$

d'où l'on tire

$$y^{(n)} + \frac{F'(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})}{F'(y^{(n-1)})} = 0.$$

Comme la constante a a disparu, cette équation devra être identique avec l'équation proposée, puisque la valeur de $y^{(n)}$ doit être la même dans les deux équations. Donc la fonction $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ sera identique avec la fonction

$$\frac{F'(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)})}{F'(y^{(n-1)})}.$$

Ajoutant de part et d'autre la quantité $y^{(n)}$, la fonction

$$y^{(n)} + f(y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

deviendra identique avec la fonction

$$\frac{F'(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}) + y^{(n)} F'(y^{(n-1)})}{F'(y^{(n-1)})},$$

c'est-à-dire avec la fonction

$$\frac{F'(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{F'(y^{(n-1)})}.$$

Donc l'équation

$$y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

étant multipliée par la fonction $F'(y^{(n-1)})$, deviendra

$$F'(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

en sorte que son premier membre sera une fonction dérivée exacte.

Ainsi il existe toujours une fonction d'un ordre inférieur à celui de l'équation proposée, par laquelle cette équation étant multipliée, son premier membre devient une fonction dérivée exacte.

Comme cette proposition est fondamentale, et donne lieu à des conséquences importantes, nous allons la considérer sous un point de vue plus étendu.

Soit

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, a) = 0$$

l'équation primitive de la même équation dérivée

$$y^{(n)} + f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

a étant la constante arbitraire.

Par la théorie générale, on aura l'équation dérivée de la primitive supposée, en éliminant a au moyen de l'équation

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, a) = 0$$

et de sa dérivée immédiate

$$F'(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

a étant regardée comme constante.

De là il est facile de conclure, comme ci-dessus, que la fonction

$$y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

deviendra identique avec

$$\frac{F'(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{F'(y^{(n-1)})}.$$

en substituant ici, à la place de a, sa valeur en $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, tirée de l'équation primitive.

Considérant donc a comme une pareille fonction déterminée par l'équation primitive

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, a) = 0,$$

on aura, pour la détermination de a', l'équation dérivée

$$F'(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, a) = 0,$$

laquelle, en séparant la partie qui se rapporte à a', suivant la notation employée ci-dessus, devient

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) + a' F'(a) = 0,$$

d'où l'on tire

$$-a' = \frac{F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{F'(a)} = [y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})] \frac{F'(y^{(n-1)})}{F'(a)},$$

équation qui sera identique en substituant pour a sa valeur en $x, y, \ldots$.

Si donc on multiplie l'équation

$$y^{(n)} + f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$$

par la fonction $\frac{F'(y^{(n-1)})}{F'(a)}$, son premier membre deviendra une fonction dérivée exacte, dont la fonction primitive sera $-a$, en supposant a déterminé par l'équation

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, a) = 0.$$

On est donc assuré, de cette manière, de l'existence d'un multiplicateur qui peut rendre le premier membre de l'équation proposée une fonction dérivée exacte.

La même équation identique nous fait voir aussi que ce multiplicateur n'est pas le seul qui jouisse de cette propriété, et nous donne en même temps le moyen de trouver tous les multiplicateurs qui auront la même propriété; car il est évident que, le premier membre de l'équation devenant égal à $-a'$, il sera toujours une fonction dérivée

exacte, étant multiplié par une fonction quelconque de a, et qu'il ne pourra l'être qu'autant que le multiplicateur ne contiendra que a. Donc le second membre deviendra aussi une fonction dérivée exacte, étant multiplié par une fonction quelconque de a.

D'où il est aisé de conclure que la formule générale de ce multiplicateur sera

$$\frac{\varphi(a)\, F'(y^{(n-1)})}{F'(a)},$$

$\varphi(a)$ dénotant une fonction quelconque de a, et la quantité a étant une fonction de $x, y, y', \ldots$ déterminée par l'équation primitive

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, a) = 0,$$

a étant ici la constante arbitraire; car le premier membre de l'équation proposée de l'ordre $n^{\text{ième}}$ deviendra, par la multiplication de la formule précédente, identique avec la quantité $-a'\varphi(a)$: de sorte qu'en dénotant par $\Phi(a)$ la fonction primitive de $a'\varphi(a)$, on aura tout de suite l'équation primitive $\Phi(a) = \text{const.}$; d'où l'on tirera aussi $a = \text{const.}$ Or a étant ici la fonction de $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, qui résulte de l'équation

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, a) = 0,$$

il est visible que l'équation $\Phi(a) = \text{const.}$ n'est autre chose que cette même équation, dans laquelle on suppose que a devient une constante arbitraire.

Ainsi, lorsqu'une équation dérivée de l'ordre $n^{\text{ième}}$ est réduite à la forme

$$y^{(n)} + f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) = 0,$$

chaque équation primitive de l'ordre $n - 1$, avec une constante arbitraire, fournit une infinité de multiplicateurs, tous renfermés dans une même formule, lesquels peuvent rendre le premier membre de l'équation une fonction dérivée exacte, et redonner la même équation primitive.

Si l'équation proposée n'est que du premier ordre, il n'y a alors

qu'une seule équation primitive; et par conséquent il n'y aura aussi qu'une seule formule de multiplicateurs.

Si l'équation proposée est du second ordre, nous avons démontré qu'elle est susceptible alors de deux différentes équations primitives du premier ordre; chacune d'elles donnera donc une formule particulière de multiplicateurs; mais on pourra aussi renfermer ces formules dans une formule plus générale encore.

Car, soit

$$y'' + f(x, y, y') = 0$$

l'équation proposée du second ordre, dont les deux équations primitives du premier ordre soient

$$\mathrm{F}(x, y, y', a) = 0, \quad \overline{\mathrm{F}}(x, y, y', b) = 0,$$

a et b étant les deux constantes arbitraires.

En regardant ces deux quantités a et b comme des fonctions de x, y, y', déterminées par ces mêmes équations, on trouvera, par l'analyse exposée ci-dessus, les deux équations identiques

$$[y'' + f(x, y, y')] \frac{\mathrm{F}'(y')}{\mathrm{F}'(a)} = -a',$$

$$[y'' + f(x, y, y')] \frac{\overline{\mathrm{F}}'(y')}{\overline{\mathrm{F}}'(b)} = -b'.$$

Soit maintenant $\Phi(a, b)$ une fonction quelconque de a, b; sa fonction dérivée $\Phi'(a, b)$ sera représentée par $a'\Phi'(a) + b'\Phi'(b)$; de sorte qu'en multipliant la première des équations précédentes par $\Phi'(a)$, la seconde par $\Phi'(b)$, et les ajoutant ensemble, on aura

$$[y'' + f(x, y, y')] \left[\frac{\mathrm{F}'(y')\,\Phi'(a)}{\mathrm{F}'(a)} + \frac{\overline{\mathrm{F}}'(y')\,\Phi'(b)}{\overline{\mathrm{F}}'(b)} \right] = -\Phi'(a, b).$$

On aura ainsi cette formule générale pour le multiplicateur de l'équation proposée

$$\frac{\mathrm{F}'(y')\,\Phi'(a)}{\mathrm{F}'(a)} + \frac{\overline{\mathrm{F}}'(y')\,\Phi'(b)}{\overline{\mathrm{F}}'(b)},$$

en supposant a et b déterminés par les deux équations

$$\mathrm{F}(x, y, y', a) = 0, \quad \overline{\mathrm{F}}(x, y, y', b) = 0;$$

et le premier membre de l'équation deviendra alors $-\Phi(a, b)$; de sorte que l'on aura sur-le-champ l'équation primitive $\Phi(a, b) = \text{const.}$

De même, si l'on prend une autre fonction quelconque a et b, représentée par $\psi(a, b)$, on en tirera de même l'équation primitive $\psi(a, b) = \text{const.}$

Ces deux équations donneront donc a et b égales à des constantes, quelles que soient les fonctions désignées par les caractéristiques Φ et ψ, ce qui redonnera les mêmes équations primitives d'où l'on était parti; d'où l'on voit comment ces équations se trouvent indépendantes des fonctions arbitraires qui peuvent entrer dans les multiplicateurs.

On peut appliquer cette théorie aux équations dérivées des ordres supérieurs au second, et en tirer des conclusions semblables.

On peut donc toujours trouver la forme générale des multiplicateurs lorsqu'on connaît les équations primitives; mais, comme ces multiplicateurs fournissent eux-mêmes un moyen de parvenir aux équations primitives, il serait important de pouvoir les trouver *a posteriori*, d'après les équations dérivées. Euler et d'autres après lui se sont occupés de cette recherche; mais c'est un de ces problèmes dont on ne saurait espérer une solution générale.

Pour donner un exemple de ce que nous venons d'exposer, prenons l'équation du second ordre

$$xy'' - y' = 0,$$

que nous avons trouvée plus haut. J'observe d'abord que, dans l'état où elle est, son premier membre est déjà une fonction dérivée exacte; car, puisque

$$(xy')' = xy'' + y',$$

on a

$$xy'' = (xy')' - y';$$

de sorte qu'on peut la mettre sous la forme

$$(xy')' - 2y' = 0;$$

d'où l'on tire, sur-le-champ, l'équation primitive du premier ordre

$$xy' - 2y + A = 0,$$

A étant une constante arbitraire.

Pour avoir l'équation primitive de celle-ci, je cherche un multiplicateur qui rende son premier membre une fonction dérivée exacte, et il est facile de voir que cela aura lieu en divisant l'équation par x^3, de sorte que le multiplicateur sera $\frac{1}{x^3}$.

En effet, elle devient par là

$$\frac{y'}{x^2} - \frac{2y}{x^3} + \frac{A}{x^3} = 0,$$

et la fonction primitive du premier membre est

$$\frac{y}{x^2} - \frac{A}{2x^2};$$

de sorte qu'on aura l'équation primitive

$$\frac{y}{x^2} - \frac{A}{2x^2} + B = 0,$$

savoir, en multipliant par x^2,

$$y + Bx^2 - \frac{A}{2} = 0,$$

B étant une nouvelle constante arbitraire.

Cette équation, contenant ainsi deux constantes arbitraires A et B, sera l'équation primitive complète de l'équation proposée du second ordre; et l'on voit, en effet, qu'elle coïncide avec l'équation

$$x^2 - 2ay + a^2 + b = 0,$$

d'où la proposée avait été dérivée, puisqu'il n'y a qu'à la diviser par B et faire

$$B = -\frac{1}{2a}, \quad -\frac{A}{2B} = a^2 + b.$$

Mais, au lieu de chercher, comme on vient de le faire, l'équation

primitive de la primitive du premier ordre, on peut chercher une autre équation primitive de la proposée; et, pour cela, j'observe que la fonction dérivée de $x^m y'^n$ est

$$mx^{m-1}y'^n + nx^m y'^{n-1}y'' = x^{m-1}y'^{n-1}(my' + nxy'');$$

ainsi, la proposée étant

$$xy'' - y' = 0,$$

on voit qu'en faisant $m = -1$, $n = 1$, son premier membre deviendra une fonction dérivée exacte, étant multipliée par x^{-2} ou par $\frac{1}{x^2}$, et l'on aura la nouvelle équation primitive

$$\frac{y'}{x} + B = 0.$$

Combinant donc cette équation avec l'équation

$$xy' - 2y + A = 0,$$

trouvée précédemment, pour en éliminer y', on aura l'équation en x et y

$$-Bx^2 - 2y + A = 0,$$

qui, à raison des deux constantes arbitraires A et B, sera aussi l'équation primitive complète de la proposée. En effet, elle se réduira à la même forme

$$x^2 - 2ay + a^2 + b = 0,$$

étant divisée par $-B$ et faisant

$$\frac{1}{B} = -a, \quad -\frac{A}{B} = a^2 + b.$$