CHAPITRE XII.

DES QUESTIONS DE MAXIMIS ET MINIMIS QUI SE RAPPORTENT A LA MÉTHODE DES VARIATIONS. DE L'ÉQUATION COMMUNE AU MAXIMUM ET AU MINIMUM, ET DES CARACTÈRES PROPRES A DISTINGUER LES MAXIMA DES MINIMA.

61. Si le maximum ou minimum, au lieu d'être une fonction donnée de $x, y, y', y'', \ldots$, devait être la fonction primitive de celle-ci, regardée comme une fonction prime, alors il ne serait plus permis de traiter les quantités $y, y', y'', \ldots$ comme indépendantes et isolées, parce que la fonction primitive d'une fonction de ces quantités dépend elle-même de la relation qu'elles peuvent avoir entre elles. Les problèmes de ce genre sont ceux qui se rapportent au calcul connu sous le nom de *calcul des variations;* ils ne demandent pas une analyse nouvelle, mais une application spéciale de l'analyse des fonctions que nous croyons devoir exposer ici, à cause de l'importance de la matière.

Soit donnée la fonction $f(x, y, y', y'', \ldots)$, dans laquelle y est supposé une fonction de x; il est évident qu'on ne peut, généralement parlant, avoir la fonction primitive de cette fonction donnée, sans connaître la valeur de y en x. Mais on peut chercher quelle devrait être cette valeur, pour que la fonction primitive de $f(x, y, y', y'', \ldots)$ fût un maximum ou un minimum, en supposant que cette fonction soit nulle lorsque x aura une valeur donnée a, et qu'elle devienne un maximum ou un minimum lorsque x aura une autre valeur donnée b. Il est évident que, en prenant y pour la valeur cherchée, il faudra, par la nature du maximum ou minimum, que la fonction primitive de la fonction

$$f(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \ldots),$$

qui résulte de la fonction donnée, en mettant $y+\omega$ à la place de y, soit toujours, entre les mêmes limites de x, moindre dans le cas du maximum et plus grande dans le cas du minimum que la fonction primitive de $f(x, y, y', y'', \ldots)$, quelle que soit la valeur de ω, qu'on pourra regarder comme une fonction quelconque de x, et quelque petite que cette valeur puisse être.

La fonction

$$f(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \ldots),$$

étant développée suivant les puissances et les produits de $\omega, \omega', \omega'', \ldots$, d'une manière semblable à celle du n° 78 (I^re^ Partie), deviendra

$$f(x, y, y', y'', \ldots) + \omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y) + \omega\omega' f''(y, y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y') + \ldots,$$

où les quantités $f'(y), f'(y'), f'(y''), \ldots$ dénotent les fonctions primes de $f'(x, y, y', y'', \ldots)$ prises suivant $y, y', y'', \ldots$, et les quantités $f''(y), f''(y, y'), f''(y'), \ldots$ dénotent les fonctions secondes de la fonction $f(x, y+\lambda\omega, y'+\lambda\omega', y''+\lambda\omega'', \ldots)$ prises relativement à y seul, à y et y', à y' seul, et ainsi de suite; le nombre λ est indéterminé ou plutôt inconnu, et peut être différent dans les différentes fonctions; mais il doit être le même dans la même fonction, et il doit toujours être renfermé entre les limites 0 et 1.

Donc il faudra que la fonction primitive de la quantité

$$\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f''(y'') + \ldots$$
$$+ \frac{\omega^2}{2} f''(y) + \omega\omega' f''(y, y') + \frac{\omega'^2}{2} f''(y') + \ldots$$

ait toujours une valeur négative pour le maximum et une valeur positive pour le minimum, quelque valeur qu'on donne à la fonction ω et aussi petite que cette valeur puisse être, en prenant cette fonction primitive de manière qu'elle soit nulle lorsque $x = a$ et y faisant ensuite $x = b$.

Or, sans connaître la quantité ω, on peut prouver qu'il est toujours possible de la prendre assez petite pour que la fonction primitive de la

partie qui ne contient que les premières dimensions de ω, ω', ω'', ... ait une valeur plus grande, positive ou négative, que la fonction primitive de l'autre partie. Car, en substituant iz à la place de ω, z étant une quantité variable quelconque et i un coefficient constant, la première partie se trouvera toute multipliée par i et la seconde le sera par i^2, et leurs fonctions primitives seront aussi multipliées par i et par i^2; et il est visible qu'on pourra toujours donner à i une valeur assez petite pour que la première de ces fonctions surpasse la seconde, du moins tant qu'elle ne sera pas nulle. D'où l'on conclura qu'on pourra toujours prendre la quantité ω assez petite pour que la valeur totale de la fonction primitive dont il s'agit soit nécessairement positive ou négative, suivant que celle de la première partie de cette fonction le sera. Mais il est visible que celle-ci doit changer de signe en changeant le signe de la quantité ω. Donc il sera impossible que la fonction totale soit constamment positive ou négative, indépendamment de la valeur de ω, à moins que la fonction primitive de la partie qui ne contient que les premières dimensions de ω, ω', ω'', ... ne soit nulle, quelle que soit la valeur de ω. Donc le maximum ou minimum ne pourra avoir lieu, à moins que la fonction primitive de la fonction

$$\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \dots$$

ne soit nulle, quelle que soit la valeur de ω.

Cette fonction étant nulle, il faudra alors que la fonction primitive de l'autre partie

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y) + \omega\omega' f''(y, y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y') + \dots$$

soit positive pour le minimum et négative pour le maximum, en donnant à ω une valeur quelconque aussi petite qu'on voudra.

62. Pour satisfaire à la première de ces conditions de la manière la plus générale, nous remarquerons que, puisque la quantité ω doit demeurer indéterminée, la fonction primitive de la fonction

$$\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \dots$$

ne peut être que de la forme

$$\alpha + \omega\beta + \omega'\gamma + \omega''\delta + \dots,$$

où la plus haute des fonctions dérivées ω', ω'', ... sera d'un ordre moindre que dans la fonction proposée; c'est de quoi il est facile de se convaincre avec un peu de réflexion sur la forme des fonctions dérivées. Prenant donc la fonction prime de cette quantité, en regardant α, β, γ, ... comme des fonctions de x, y étant supposé aussi fonction de x, on aura

$$\alpha' + \omega\beta' + \omega'(\beta + \gamma') + \omega''(\gamma + \delta') + \dots,$$

et, comparant avec la fonction proposée, on aura

$$\alpha' = 0, \quad \beta' = f'(y), \quad \beta + \gamma' = f'(y'), \quad \gamma + \delta' = f'(y''), \quad \dots.$$

La première équation donne α égal à une constante arbitraire; les autres équations serviront à déterminer β, γ, δ, ..., et, comme il est facile de voir que le nombre de ces quantités est nécessairement moindre d'une unité que celui des équations, il en résultera une équation de condition qui devra être satisfaite pour que le maximum ou minimum ait lieu.

Pour cela, il n'y a qu'à mettre ces équations sous cette forme

$$\beta' = f'(y), \quad \beta' + \gamma'' = [f'(y')]', \quad \gamma'' + \delta''' = [f'(y'')]'', \quad \dots,$$

en prenant les fonctions primes de la seconde, les fonctions deuxièmes de la troisième, et ainsi de suite; retranchant ensuite alternativement l'une de l'autre, on aura

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - [f'(y''')]''' + \dots = 0,$$

où les traits appliqués aux parenthèses dénotent les fonctions primes, secondes, etc. des quantités renfermées entre ces parenthèses.

Cette équation sera donc commune au maximum et au minimum, et servira à déterminer la valeur de y en fonction de x; elle sera, comme il est aisé de le voir, d'un ordre double de celui de la fonction $f(x, y, y', y'', \dots)$.

63. Les mêmes équations

$$\beta+\gamma'=f'(y'),\quad \gamma+\delta'=f''(y''),\quad \ldots$$

donneront, par un procédé semblable,

$$\begin{aligned}
\beta &= f'(y')-[f'(y'')]'+[f'(y''')]''-\ldots,\\
\gamma &= f'(y'')-[f'(y''')]'+\ldots,\\
\delta &= f'(y''')-\ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Soit, pour abréger,

$$\Omega=\omega\beta+\omega'\gamma+\omega''\delta+\ldots;$$

la fonction primitive de la quantité $\omega f'(y)+\omega' f'(y')+\ldots$ sera $\alpha+\Omega$, et, comme cette fonction doit être nulle lorsque $x=a$, si l'on dénote par A la valeur de Ω qui répondra à $x=a$, on aura, puisque α est une constante arbitraire, $\alpha+A=0$, et par conséquent $\alpha=-A$. On aura donc $\Omega-A$ pour la fonction primitive, qui doit être nulle, en vertu du maximum ou minimum, lorsque $x=b$. Si donc on dénote encore par B la valeur de Ω qui répondra à $x=b$, on aura l'équation

$$B-A=0,$$

à laquelle il faudra satisfaire par le moyen des constantes arbitraires qui entreront dans l'expression de y qu'on déduira de l'équation trouvée ci-dessus, en ayant égard d'ailleurs aux conditions spéciales du problème.

Ainsi, par exemple, si la valeur de y est donnée pour les valeurs a, b de x, alors la valeur de ω sera nulle dans les deux quantités A et B; si, de plus, la valeur de y' était aussi donnée pour les mêmes valeurs de x, les valeurs de ω' seraient aussi nulles dans A et B; et ainsi de suite.

Les quantités ω, ω', ω'', ... étant réduites au plus petit nombre possible tant dans l'expression de A que dans celle de B, on égalera à zéro le coefficient de chacune de celles qui resteront pour satisfaire à l'équation $B-A=0$, indépendamment de ces quantités.

64. Ayant ainsi satisfait à la première condition, il ne restera plus qu'à remplir l'autre condition, qui consiste en ce que la fonction primitive de la quantité

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y)+\omega\omega' f''(y,y')+\tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y')+\ldots$$

doit être, entre les mêmes limites a et b de x, toujours positive pour le minimum et négative pour le maximum, en supposant que la valeur de ω soit quelconque et aussi petite qu'on voudra.

Je remarquerai d'abord ici que, quoique les fonctions $f''(y)$, $f''(y,y')$, ... renferment essentiellement les quantités ω, ω', ... (n° 61), on peut prouver, par un raisonnement semblable à celui du n° 55, qu'il suffira, pour le maximum ou minimum, que la condition dont il s'agit soit remplie en supposant le coefficient λ égal à zéro, ce qui fait disparaître ces quantités des fonctions dont il s'agit, en sorte que ces fonctions ne seront plus alors que les fonctions secondes de la fonction $f'(x,y,y',y'',\ldots)$, prises relativement à y seul, à y et y', à y' seul, etc., et auront, par conséquent, des valeurs déterminées en x, y, y', ...

Cela posé, si l'on rappelle ici le théorème que nous avons démontré dans la première Partie (n° 38), on en conclura que la condition dont il s'agit serait satisfaite si la proposée

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y)+\omega\omega' f''(y,y')+\ldots$$

était telle qu'elle fût constamment positive ou négative pour toutes les valeurs de x, depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, indépendamment des quantités ω, ω', ω'', ..., et, comme nous avons donné plus haut (n° 56) les conditions les plus générales pour qu'une quantité de la forme dont il s'agit soit nécessairement positive ou négative, il n'y aura qu'à examiner si ces conditions ont lieu dans la quantité dont il s'agit. Si elles n'avaient pas lieu ou si elles n'avaient lieu que dans une partie de cette quantité, il faudrait alors chercher la fonction primitive de l'autre partie et la rendre nulle, ou au moins positive pour le minimum et négative pour le maximum, indépendamment des quantités ω, ω', ω'', ...

65. Pour simplifier la solution de cette question, nous supposerons d'abord que la quantité proposée ne renferme que les carrés et les produits des deux quantités ω, ω'; on verra aisément que la même méthode s'étend aux cas plus compliqués, et nous représenterons par cette formule

$$\omega^2 M + \omega\omega' N + \omega'^2 P$$

la partie de la même quantité qui est toujours positive ou négative entre les limites $x=a$, $x=b$; l'autre partie sera

$$\omega^2\left[\tfrac{1}{2}f''(y) - M\right] + \omega\omega'\left[f''(y,y') - N\right] + \omega'^2\left[\tfrac{1}{2}f''(y') - P\right],$$

dont il faudra chercher la fonction primitive, et il est facile de s'assurer d'avance que, pour que la quantité ω demeure indéterminée, cette fonction ne pourra être que de la forme $\mu+\omega^2\nu$; prenant donc sa fonction prime et comparant terme à terme avec la précédente, on aura

$$\mu' = 0, \quad \nu' = \tfrac{1}{2}f''(y) - M, \quad 2\nu = f''(y,y') - N, \quad 0 = \tfrac{1}{2}f''(y') - P.$$

La première de ces équations donne μ égale à une constante arbitraire, et les trois autres serviront à déterminer les valeurs de M, N, P, qui seront

$$M = \tfrac{1}{2}f''(y) - \nu', \quad N = f''(y,y') - 2\nu, \quad P = \tfrac{1}{2}f''(y'),$$

et il faudra que ces valeurs satisfassent aux conditions qui résultent des formules du n° 56. Or, en prenant les quantités ω' et ω à la place des quantités p et q, et par conséquent P, N, M à la place de A, B, C, et faisant $T = M - \frac{N^2}{4P}$, on aura pour le minimum les deux conditions $P > 0$ et $T > 0$, et pour le maximum les conditions opposées $P < 0$ et $T < 0$, ou bien l'une des deux quantités P, T égale à zéro, tant pour le minimum que pour le maximum, et ces conditions devront avoir lieu pour toutes les valeurs de x, depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$, pour que la quantité $\omega'^2 P + \omega\omega' N + \omega^2 M$ soit constamment positive dans le premier cas et négative dans le second entre ces mêmes limites. Comme la quantité P est donnée, elle indiquera tout de suite le maximum ou minimum; mais on n'en sera assuré que par l'autre condition $T > 0$ ou < 0, ou bien $= 0$ pour les deux cas.

66. De plus, et c'est ici une condition bien essentielle, il faudra que les quantités M, N, P ne deviennent point infinies entre les mêmes limites, pour qu'on puisse être assuré que la fonction primitive de la quantité dont il s'agit sera nécessairement positive ou négative, d'après le théorème du n° 38 de la première Partie; car ce théorème, étant fondé sur la nature du développement des fonctions en séries des puissances positives de la quantité ajoutée à la variable, est nécessairement sujet aux exceptions attachées à la forme de ce développement, que nous avons examinées n° 30 (I^re^ Partie) et n° 13 ci-dessus; il pourra donc être en défaut si les fonctions dérivées de la fonction primitive deviennent infinies, parce qu'alors le développement n'aura plus la même forme; c'est ce qui arrivera nécessairement lorsque la fonction primitive passera du positif au négatif par l'infini, comme les tangentes des angles; alors, pour la valeur de x répondant à ce passage, le développement de la fonction de $x+i$ aura son premier terme de la forme Ai^m, m étant un nombre impair négatif, et la fonction prime ainsi que toutes les suivantes seront infinies. Dans ce cas, la fonction primitive pourra changer de signe, quoique sa fonction prime conserve toujours le même signe.

Pour en voir un exemple bien simple, il n'y a qu'à considérer la fonction $\frac{x}{1-x}$, qui est $=1$ lorsque $x=\frac{1}{2}$ et $=-2$ lorsque $x=2$; cependant sa fonction prime $\frac{1}{(1-x)^2}$ est toujours positive tant que x a une valeur réelle. Ici la fonction primitive et toutes ses dérivées deviennent infinies lorsque $x=1$.

C'est une modification à apporter au théorème dont il s'agit, mais qui n'influe point sur la conclusion qu'on en a tirée dans le n° 39.

67. Ayant satisfait à ces conditions, on aura la fonction primitive

$$\mu + \omega^2\nu,$$

dans laquelle μ est une constante arbitraire qu'on déterminera en sorte que la fonction soit nulle lorsque $x=a$. Supposons $\omega^2\nu=(\Omega)$, et soit (A) la valeur de (Ω) lorsque $x=a$; on aura $\mu=-(\mathrm{A})$. Ainsi la fonction primitive dont il s'agit sera

$$(\Omega)-(\mathrm{A}),$$

laquelle devra être nulle ou positive pour le minimum et négative pour le maximum, en faisant $x=b$. Soit donc (B) la valeur de (Ω) lorsque $x=b$; il faudra que l'on ait $(\mathrm{B})-(\mathrm{A})>$ ou <0 pour le minimum ou le maximum, ou $=0$ pour les deux cas, indépendamment de la valeur de ω, qui doit demeurer indéterminée.

Si la valeur de y est donnée pour les valeurs a et b de x, la valeur correspondante de ω étant alors nulle, on aura $(\mathrm{A})=0$, $(\mathrm{B})=0$, et la condition précédente sera remplie tant pour le maximum que pour le minimum. Mais si les valeurs de y ne sont pas données, alors il faudra que l'on ait, pour le minimum, $\nu=$ ou >0 lorsque $x=b$ et $\nu=$ ou <0 lorsque $x=a$; et, pour le maximum, $\nu=$ ou <0 dans le premier cas et $\nu=$ ou >0 dans le second.

A l'égard de la valeur de la quantité ν, elle dépend simplement de la condition T ou $\mathrm{M}-\frac{\mathrm{N}^2}{4\mathrm{P}}>0$ pour le minimum et <0 pour le maximum. Cette condition sera donc, en substituant les valeurs de M, N, P,

$$\tfrac{1}{2}f''(y)-\nu'-\frac{[f''(y,y')-2\nu]^2}{2f''(y')}>\text{ou}<0,$$

et l'on pourra prendre pour ν une fonction quelconque de x qui y satisfasse.

Ce qu'il y aurait de plus simple, ce serait de supposer la quantité T nulle (n° 65), ce qui donnerait l'équation

$$4\mathrm{MP}-\mathrm{N}^2=0,$$

savoir

$$f''(y')[f''(y)-2\nu']-[f''(y,y')-2\nu]^2=0,$$

par laquelle on pourrait déterminer la valeur de ν, et le maximum ou minimum dépendrait simplement du signe de la quantité P ou $\frac{1}{2}f''(y')$.

On aurait de cette manière le même résultat que donne la méthode proposée, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* de 1786, pour distinguer les maxima des minima dans le Calcul des variations. Mais, d'après ce que nous avons dit ci-dessus, il faudrait, pour l'exactitude de ce résultat, qu'on pût s'assurer que la valeur de ν ne deviendra point infinie pour une valeur de x comprise entre les valeurs données a et b, ce qui sera le plus souvent impossible, par la difficulté de trouver l'équation primitive en ν et x. Sans cette condition, quoique la quantité

$$\omega^2\mathrm{M}+\omega\omega'\mathrm{N}+\omega'^2\mathrm{P}$$

devienne alors de la forme

$$\mathrm{P}\left(\omega'+\frac{\omega\mathrm{N}}{2\mathrm{P}}\right)^2,$$

et qu'elle soit, par conséquent, toujours positive ou négative, suivant que la valeur de P le sera, on ne sera jamais certain de l'état positif ou négatif de sa fonction primitive.

68. Pour en donner un exemple qui pourra servir en même temps d'application de la méthode que nous venons d'exposer, supposons que la fonction $f(x,y,y',\ldots)$, dont la fonction primitive doit être un maximum ou minimum, soit

$$y'^2+2my'y+ny^2;$$

en prenant les fonctions primes et secondes, on aura

$$f'(y)=2(my'+ny), \qquad f'(y')=2(y'+my),$$
$$f''(y)=2n, \quad f''(y,y')=2m, \quad f''(y')=2;$$

substituant ces valeurs dans l'équation générale du n° 62, qui, dans ce cas, se réduit à

$$f'(y)-[f'(y')]'=0,$$

on aura

$$2(my'+ny)-2(y''-my')=0,$$

savoir

$$y''-ny=0$$

pour l'équation du maximum ou minimum. Cette équation est susceptible de la méthode du n° 55 (I^re Partie) et donne sur-le-champ

$$y = ge^{x\sqrt{n}} + he^{-x\sqrt{n}},$$

g et h étant deux constantes arbitraires; si n était une quantité négative $= -k^2$, alors on aurait, en prenant d'autres constantes arbitraires g et h,

$$y = g\sin(kx + h).$$

Supposons, pour plus de simplicité, que les valeurs de y soient données pour les deux valeurs extrêmes a et b de x; les quantités A et B seront nulles d'elles-mêmes, et l'équation $B = A$ sera satisfaite (n° 63); on déterminera donc les constantes a et b de manière que y ait les valeurs données lorsque $x = a$ et $x = b$.

Maintenant, nous aurons, par les formules du n° 65,

$$M = n - \nu', \quad N = 2(m - \nu), \quad P = 1,$$

d'où l'on voit que, puisque P est > 0, il n'y a que le minimum qui puisse avoir lieu. Mais cette condition ne suffit pas pour assurer l'existence du minimum; il faudra de plus que l'on ait

$$M - \frac{N^2}{4P} > 0 \quad \text{ou} \quad = 0.$$

Soit : 1° $M - \frac{N^2}{4P} > 0$; on aura

$$n - \nu' - (m - \nu)^2 > 0,$$

en prenant pour ν une quantité qui ne devienne point infinie entre les limites a et b de x. Si la valeur de n est positive, il est clair qu'on peut satisfaire à cette condition en faisant $\nu = m$; ainsi on sera assuré, dans ce cas, de l'existence du minimum, puisque les deux quantités (A) et (B) sont d'ailleurs nulles par l'hypothèse que les valeurs de y sont données pour $x = a$ et $= b$ (n° 67). Mais, si n est négative et $= -k^2$, on aura alors la condition

$$-\nu' > k^2 + (m - \nu)^2,$$

et il n'est pas aisé de trouver une valeur satisfaisante de ν, ni même de s'assurer qu'on pourra la trouver.

Soit : 2° $M - \frac{N^2}{4P} = 0$; on aura

$$-\nu' = k^2 + (m - \nu)^2.$$

Je suppose

$$m - \nu = k\rho;$$

j'aurai

$$\frac{\rho'}{k} = 1 + \rho^2,$$

ce qui donne

$$\frac{\rho'}{1 + \rho^2} = k,$$

et, prenant les fonctions primitives des deux membres,

$$\text{angle tang}\rho = kx + d,$$

savoir

$$\rho = \text{tang}(kx + d),$$

d étant une constante arbitraire. Cette valeur devient infinie lorsque $kx + d =$ à l'angle droit, ou à trois angles droits, ou etc. Donc on ne sera pas assuré de l'existence du minimum si la quantité $(b - a)k$ est plus grande que la valeur de deux angles droits.

En effet, pour que le minimum ait lieu en général, il faut (n° 64) que la fonction primitive de la quantité

$$n\omega^2 + 2m\omega\omega' + \omega'^2$$

soit positive, quelle que puisse être la valeur de ω. Supposons $\omega = i\sin x$; cette quantité deviendra

$$i^2(n\sin^2 x + 2m\sin x\cos x + \cos^2 x) = i^2\left(\frac{1+n}{2} + \frac{1-n}{2}\cos 2x + m\sin 2x\right),$$

dont la fonction primitive est

$$i^2\left(\frac{1+n}{2}x + \frac{1-n}{4}\sin 2x - \frac{m}{2}\cos 2x\right) + c,$$

c étant la constante arbitraire qu'on déterminera de manière que la

fonction primitive soit nulle lorsque $x=a$; ensuite on fera $x=b$. Donc, si l'on suppose $a=0$ et b égal à deux angles droits, afin que la valeur de ω soit nulle lorsque $x=a$ et $=b$ suivant l'hypothèse, on aura $c=\frac{i^2 m}{2}$, et la valeur complète de la fonction primitive dont il s'agit sera

$$i^2(1+n)D,$$

D représentant l'angle droit; et il est visible que cette valeur pourra devenir négative lorsque $n=-k^2$, en prenant $k>1$.

69. Supposons maintenant que la quantité qui renferme les secondes dimensions de $\omega, \omega', \ldots$ contienne aussi ω'', en sorte qu'elle soit de la forme (n° 61)

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 f''(y)+\omega\omega' f''(y,y')+\tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y')+\omega\omega'' f''(y,y'')+\omega'\omega'' f''(y',y'')+\tfrac{1}{2}\omega''^2 f''(y'');$$

nous prendrons

$$\omega^2 M+\omega\omega' N+\omega'^2 P+\omega\omega'' Q+\omega'\omega'' R+\omega''^2 S$$

pour la partie de cette quantité qui doit être assujettie aux conditions de la formule du n° 56, et il faudra que la différence de ces deux quantités soit susceptible d'une fonction primitive indépendamment de la quantité ω. Cette fonction ne pourra donc être que de la forme

$$\mu+\omega^2\nu+\omega\omega'\varpi+\omega'^2\rho,$$

et l'on trouvera, par la comparaison des termes, les équations

$$\begin{aligned}
\mu' &= 0,\\
\nu' &= \tfrac{1}{2}f''(y) - M,\\
2\nu+\varpi' &= f''(y,y') - N,\\
\varpi+\rho' &= \tfrac{1}{2}f''(y') - P,\\
\varpi &= f''(y,y'') - Q,\\
2\rho &= f''(y',y'') - R,\\
0 &= \tfrac{1}{2}f''(y'') - S,
\end{aligned}$$

lesquelles donnent μ égale à une constante arbitraire, ensuite

$$\begin{aligned}
M &= \tfrac{1}{2}f''(y) - \nu',\\
N &= f''(y,y') - 2\nu - \varpi',\\
P &= \tfrac{1}{2}f''(y') - \varpi - \rho',\\
Q &= f''(y,y'') - \varpi,\\
R &= f''(y',y'') - 2\rho,\\
S &= \tfrac{1}{2}f''(y''),
\end{aligned}$$

où les trois quantités ν, ϖ, ρ demeurent indéterminées; mais il faudra les prendre telles qu'elles satisfassent aux conditions auxquelles doivent être assujetties les quantités M, N, P, ..., et qu'on peut déduire du n° 56, en prenant les quantités $\omega'', \omega', \omega$ à la place des quantités p, q, r. Ainsi, si l'on fait

$$T = P - \frac{R^2}{4S}, \quad V = N - \frac{QR}{2S},$$
$$X = M - \frac{Q^2}{4S}, \quad Y = X - \frac{V^2}{4T},$$

les conditions pour le minimum seront $S>0$, $T>0$ et $Y>0$, et, pour le maximum, $S<0$, $T<0$, $Y<0$; et ces conditions devront avoir lieu pour toutes les valeurs de x, depuis $x=a$ jusqu'à $x=b$. La valeur de S indiquera le maximum ou minimum; mais on n'en pourra être assuré que par le concours des deux autres conditions. De plus, il faudra que les quantités M, N, P, Q, R, S ne deviennent jamais infinies entre les mêmes limites, par les raisons exposées plus haut (n° 66).

Enfin il faudra que, en supposant

$$(\Omega) = \omega^2\nu+\omega\omega'\varpi+\omega'^2\rho,$$

et prenant (A) et (B) pour les valeurs de (Ω) qui répondent à $x=a$ et $x=b$, la quantité (B) − (A) soit positive pour le minimum et négative pour le maximum, indépendamment des valeurs de ω et de ω' (n° 67).

On suivra les mêmes procédés pour les fonctions plus compliquées.

70. Si les valeurs de $y, y', \ldots$ n'étaient pas données pour les valeurs a et b de x, mais qu'il y eût seulement, par la nature du problème, une relation entre ces quantités, représentée par l'équation

$$\varphi(x, y, y', \ldots) = 0,$$

alors, suivant les principes du n° 58, il n'y aurait qu'à ajouter à la fonction, qui doit être positive pour le minimum et négative pour le maximum, la quantité

$$\omega\varphi'(y) + \omega'\varphi'(y') + \omega''\varphi'(y'') + \ldots + \tfrac{1}{2}\omega^2\varphi''(y') + \omega\omega'\varphi''(y, y') + \tfrac{1}{2}\omega'^2\varphi''(y') + \ldots,$$

multipliée par un coefficient indéterminé Γ, et traiter ensuite les quantités ω, ω' comme indépendantes. Ainsi, si la condition dont il s'agit doit avoir lieu pour la valeur de $x = a$, on ajoutera aux deux quantités A et (A) (n^{os} 63, 67) les quantités

$$\Gamma[\omega\varphi'(y) + \omega'\varphi'(y') + \ldots]$$

et

$$\Gamma[\tfrac{1}{2}\omega^2\varphi''(y) + \omega\omega'\varphi''(y, y') + \ldots],$$

rapportées à la même valeur de x; et, si cette condition devait avoir lieu pour la valeur $x = b$, on ajouterait aux valeurs de B et de (B) les mêmes quantités rapportées à $x = b$.

On suivrait le même procédé pour chacune des conditions données, s'il y en avait plusieurs.

CHAPITRE XIII.

EXTENSION DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE AUX FONCTIONS D'UN NOMBRE QUELCONQUE DE VARIABLES. PROBLÈME DE LA BRACHISTOCHRONE. CARACTÈRES POUR DISTINGUER SI UNE FONCTION PROPOSÉE EST OU NON UNE FONCTION PRIME, OU EN GÉNÉRAL UNE FONCTION DÉRIVÉE D'UN CERTAIN ORDRE.

71. La fonction proposée, dont la fonction primitive doit être un maximum ou un minimum, pourrait contenir, outre les variables x et y, une troisième variable z, indépendante des deux autres; on opérerait alors, relativement à cette variable, comme on a fait relativement à y. Ainsi, en désignant la fonction proposée par

$$f(x, y, y', y'', \ldots, z, z', z'', \ldots),$$

on y substituera à la fois les quantités $y + \omega$ et $z + \zeta$ à la place de y et z, et il faudra, après le développement, que la fonction primitive de la partie qui ne contiendra que les premières dimensions de ω, ω', $\omega'', \ldots$, ζ, ζ', ζ'', ... soit nulle, et que la fonction primitive de la partie qui contiendra les secondes dimensions de ces mêmes quantités soit positive pour le minimum et négative pour le maximum, indépendamment des quantités ω et ζ.

De là, par une analyse semblable à celle du n° 62 et en conservant aussi pour les fonctions primes relatives à z, z', z'', ... une notation semblable à celle que nous avons employée relativement à y, y', y'', ..., on aura ces deux équations,

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \ldots = 0,$$
$$f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - \ldots = 0,$$

qui serviront à déterminer les quantités y et z en fonction de x. Ensuite il faudra, relativement aux quantités z et ζ, satisfaire à des conditions semblables à celles qu'on a trouvées par rapport à y et ω; c'est un détail qui nous mènerait trop loin et que le lecteur peut suppléer.

On voit par là que, s'il y avait une quatrième variable u, on aurait, relativement à cette variable, une équation semblable à celles qui répondent aux variables y et z; et ainsi de suite.

72. Mais si, dans la fonction $f(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots)$, la quantité z dépendait des quantités x et y d'une manière quelconque donnée par l'équation

$$\varphi(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots) = 0,$$

alors, suivant les mêmes principes du n° **58**, on ajouterait simplement la fonction $\varphi(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots)$, multipliée par un coefficient indéterminé et variable Δ, à la fonction proposée $f(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots)$, et l'on chercherait, par les méthodes exposées, le maximum ou minimum de la fonction primitive de cette fonction composée, en regardant les quantités y et z comme indépendantes. Ainsi, on trouvera d'abord, pour le maximum ou minimum, les deux équations

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \ldots + \Delta\varphi'(y) - [\Delta\varphi'(y')]' + [\Delta\varphi'(y'')]'' - \ldots = 0,$$
$$f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - \ldots + \Delta\varphi'(z) - [\Delta\varphi'(z')]' + [\Delta\varphi'(z'')]'' - \ldots = 0,$$

d'où, éliminant la quantité Δ, on aura une équation qui, combinée avec l'équation donnée $\varphi(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots) = 0$, servira à déterminer les valeurs de y et z en fonction de x.

Enfin, si la fonction primitive de la fonction $f(x, y, y', \ldots)$ ne devait être un maximum ou un minimum qu'autant que la fonction primitive d'une autre fonction $\varphi(x, y, y', \ldots)$ serait donnée entre les mêmes valeurs a et b de x, il n'y aurait qu'à chercher le maximum ou minimum de la somme des deux fonctions primitives, après avoir multiplié

la seconde par un coefficient indéterminé indépendant de x, c'est-à-dire le maximum ou minimum de la fonction primitive de

$$f(x, y, y', \ldots) + \Delta\varphi(x, y, y', \ldots),$$

en regardant Δ comme une quantité constante. De cette manière, on aura d'abord l'équation

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \ldots + \Delta\varphi'(y) - \Delta[\varphi'(y')]' + \Delta[\varphi'(y'')]'' - \ldots = 0,$$

et l'on déterminera la constante Δ de manière que la fonction primitive de $\varphi(x, y, y', \ldots)$, prise depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$, soit donnée; et ainsi du reste.

73. Les problèmes de la *brachistochrone* et des *isopérimètres*, proposés et résolus d'abord par les deux frères Bernoulli, ont ouvert la route pour traiter ce nouveau genre de questions *de maximis et minimis*. On a trouvé ensuite successivement des méthodes plus générales et plus simples, et l'on est parvenu enfin au *Calcul des variations*, qui paraît ne rien laisser à désirer sur ce sujet. Comme les équations trouvées plus haut (n^os^ **62**, **70**) sont les mêmes, à la notation près, que celles qui résultent de ce Calcul, nous pourrions nous dispenser de les appliquer à des exemples; mais il ne sera pas inutile de montrer encore, par un exemple connu, l'usage des règles pour distinguer les maxima et minima, et s'assurer de leur existence.

Nous reprendrons pour cela le problème de la brachistochrone, ou ligne de la plus vite descente, à cause de sa célébrité; il consiste, comme l'on sait, à trouver la courbe le long de laquelle un corps pesant descendrait dans le moindre temps d'un point donné à un autre point donné et placé dans une verticale différente. Comme, par les principes de la Mécanique, la fonction prime du temps est égale à la fonction prime de l'espace divisée par la vitesse, et que, dans les corps qui tombent par la pesanteur, la vitesse est toujours proportionnelle à la racine carrée de la hauteur d'où ils sont censés être descendus, si l'on rapporte aux trois coordonnées rectangulaires x, y, z la courbe décrite

par le corps, et qu'on prenne les abscisses x verticales, la vitesse sera proportionnelle à $\sqrt{h+x}$, et $\sqrt{1+y'^2+z'^2}$ sera la fonction prime de l'arc de la courbe (n° 37); ainsi $\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{h+x}}$ sera proportionnelle à la fonction prime du temps, dont la fonction primitive devra être un minimum. On aura donc

$$f(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots) = \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{\sqrt{h+x}};$$

donc, prenant les fonctions primes, on aura

$$f'(y) = 0, \quad f'(y') = \frac{y'}{\sqrt{h+x}\sqrt{1+y'^2+z'^2}},$$

$$f'(z) = 0, \quad f'(z') = \frac{z'}{\sqrt{h+x}\sqrt{1+y'^2+z'^2}},$$

et l'on aura (n° 70) les deux équations

$$\left(\frac{y'}{\sqrt{h+x}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)' = 0,$$

$$\left(\frac{z'}{\sqrt{h+x}\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)' = 0,$$

lesquelles donnent d'abord ces deux-ci du premier ordre,

$$\frac{y'}{\sqrt{h+x}\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = m,$$

$$\frac{z'}{\sqrt{h+x}\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = n,$$

m et n étant deux constantes arbitraires.

En divisant ces deux équations l'une par l'autre, on a $\frac{y'}{z'} = \frac{m}{n}$; donc $z' = \frac{ny'}{m}$, et, prenant l'équation primitive, on aura

$$z = \frac{ny}{m} + l,$$

l étant une nouvelle constante arbitraire. Cette équation étant à un plan vertical, puisque l'abscisse verticale x ne s'y trouve pas, fait voir que la courbe cherchée est toute dans ce plan; ainsi, en prenant l'axe des y dans ce même plan, on pourra supposer $z = 0$, en faisant l et $n = 0$, et l'on aura pour la courbe cette équation unique entre les coordonnées x et y,

$$\frac{y'}{\sqrt{h+x}\sqrt{1+y'^2}} = m,$$

d'où l'on tire

$$y' = \frac{m\sqrt{h+x}}{\sqrt{1-m^2(h+x)}},$$

équation à la cycloïde, les abscisses x étant prises sur le diamètre du cercle générateur et les ordonnées y perpendiculairement à ce diamètre.

Puisqu'on suppose que les deux points extrêmes de la courbe sont donnés, les quantités ω et ζ répondant à ces points seront nulles, et les valeurs des quantités A et B seront nulles aussi en prenant a et b pour les valeurs de x qui répondent à ces points; ainsi la condition B − A = 0 sera remplie. Si l'on faisait d'autres hypothèses relativement à ces points, on trouverait d'autres résultats; nous ne nous y arrêterons pas, parce que ces différentes questions ont été déjà discutées et résolues par les principes du Calcul des variations. Mais il faut voir ce que donnent les termes où les quantités ω et ζ monteront à la seconde dimension et dont la fonction primitive doit être positive pour que le minimum ait effectivement lieu.

Comme la fonction proposée $f(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots)$ ne contient point, dans le cas présent, les variables y et z, mais seulement leurs fonctions primes y' et z', il est facile de voir que les termes dont il s'agit seront simplement de la forme

$$\tfrac{1}{2}\omega'^2 f''(y') + \omega'\zeta' f''(y', z') + \tfrac{1}{2}\zeta'^2 f''(z'),$$

et l'on trouve, en prenant les fonctions primes des quantités $f'(y')$ et

$f'(z')$ relativement à y' et z',

$$f''(y') = \frac{1+z'^2}{\sqrt{h+x}\,(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f''(y',z') = \frac{y'z'}{\sqrt{h+x}\,(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f''(z') = \frac{1+y'^2}{\sqrt{h+x}\,(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

de sorte que la quantité dont il s'agit deviendra

$$\frac{\omega'^2(1+z'^2) - 2\omega'\zeta' y'z' + \zeta'^2(1+y'^2)}{2\sqrt{h+x}\,(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

laquelle peut se mettre sous cette forme,

$$\frac{\omega'^2+\zeta'^2+(\omega' z' - \zeta' y')^2}{2\sqrt{h+x}\,(1+y'^2+z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où l'on voit que cette quantité a d'elle-même la propriété d'être toujours nécessairement positive, quelles que soient les valeurs de ω et ζ; et, comme d'ailleurs elle ne saurait jamais devenir infinie tant que y' et z' ne seront pas infinies, il s'ensuit que le minimum aura nécessairement lieu dans la cycloïde.

Nous n'entrerons pas dans d'autres détails sur ce problème, qui offre différents cas à examiner, suivant les conditions qu'on peut demander relativement au premier et au dernier point de la courbe, et par rapport à la courbe même, qu'on peut supposer devoir être tracée sur une surface donnée. La solution de tous ces cas peut se tirer aisément des principes établis ci-dessus. *Voir* la fin de la Leçon XXII du *Calcul des fonctions* (*).

74. L'analyse que nous avons employée pour trouver les maxima et minima des fonctions primitives donne lieu à une observation importante. Nous avons trouvé (n° 62) que, pour que la quantité

$$\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f''(y'') + \dots$$

ait une fonction primitive, quelle que soit la valeur de ω, il faut satisfaire à l'équation

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \dots = 0.$$

Donc, si cette quantité était d'elle-même la fonction prime d'une fonction de $x, y, y', \dots, \omega, \omega', \dots$, l'équation précédente aurait aussi lieu d'elle-même et serait par conséquent identique.

Or on voit, par le n° 61, que la quantité dont il s'agit n'est autre chose que la partie du développement de la fonction

$$f(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \dots)$$

qui ne contient que les premières dimensions de $\omega, \omega', \omega'', \dots$, et je vais prouver que cette quantité sera nécessairement une fonction prime si $f(x, y, y', y'', \dots)$ est elle-même une fonction prime d'une fonction de $x, y, y', \dots$.

En effet, si cette fonction est une fonction prime, quelle que soit la valeur de y en x, elle le sera encore en mettant $y+\omega$ au lieu de y, quelle que soit la quantité ω; donc la fonction

$$f(x, y+\omega, y'+\omega', \dots)$$

sera aussi nécessairement une fonction prime, en prenant pour ω une fonction quelconque de x. Supposons que cette fonction soit développée suivant les puissances et les produits de $\omega, \omega', \omega'', \dots$, et dénotons respectivement par P, Q, R, ... les parties de ce développement qui contiendront les premières dimensions, les deuxièmes dimensions, les troisièmes, etc. des mêmes quantités; on aura

$$f(x, y+\omega, y'+\omega', y''+\omega'', \dots) = f(x, y, y', y'', \dots) + \mathrm{P} + \mathrm{Q} + \mathrm{R} + \dots.$$

Ainsi, il faudra que la quantité $\mathrm{P}+\mathrm{Q}+\mathrm{R}+\dots$ soit la fonction prime d'une fonction de $x, y, y', \dots$ et de $\omega, \omega', \omega'', \dots$, et il est facile de

(*) *OEuvres de Lagrange*, t. X.

voir que chacune des quantités P, Q, R, ... devra être en particulier une fonction prime, puisque, ces quantités renfermant des dimensions différentes de l'indéterminée ω et de ses fonctions dérivées ω′, ω″, ..., il est impossible, par la nature des fonctions dérivées, que les fonctions primitives de P, Q, R, ... dépendent les unes des autres. Or on a, dans le numéro cité,

$$P = \omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f''(y'') + \ldots;$$

donc cette quantité sera d'elle-même une fonction prime. Donc enfin, si la fonction $f(x, y, y', y'', \ldots)$ est une fonction prime, l'équation

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - [f'(y''')]''' + \ldots = 0$$

sera nécessairement identique.

Réciproquement, on peut démontrer que, si cette équation est identique, la fonction $f(x, y, y', y'', \ldots)$ sera nécessairement une fonction prime, car nous avons vu que, si cette équation est vraie, la quantité P est une fonction prime, quelles que soient les valeurs de y et de ω; donc elle sera encore une fonction prime si à la place de y on met $y+\omega$. Supposons que, par cette substitution et par le développement suivant les dimensions de ω, ω′, ω″, ..., la quantité P devienne $P+p+\ldots$; la quantité p contenant les premiers termes du développement dans lesquels ω, ω′, ω″, ... ne formeront que deux dimensions, on en conclura, comme plus haut, que la quantité p sera en particulier la fonction prime d'une fonction de $x, y, y', \ldots, \omega, \omega', \ldots$; mais, par les formules générales que nous avons données dans le n° 76 de la première Partie, il est facile de voir qu'on a $p = 2Q$: donc la quantité Q sera une fonction prime, y et ω étant quelconques; donc elle sera encore une fonction prime en y substituant $y+\omega$ pour y. Et, si l'on suppose que, par cette substitution ét par le développement suivant les puissances et les produits de ω, ω′, ..., cette fonction devienne $Q+q+\ldots$, la quantité q renfermant les premiers termes du développement où les ω, ω′, ω″, ... ne formeront que trois dimensions, on en conclura aussi, comme ci-dessus, que la quantité q sera elle-même une fonction prime; mais

par les formules du même numéro on trouve $q = 3R$: donc la quantité R sera elle-même aussi une fonction prime, et ainsi de suite. En effet, si $r, s, \ldots$ sont les premiers termes du développement des quantités R, S, ..., on aura (numéro cité), après la substitution de $y+\omega$ à la place de ω, $r = 4S$, $s = 5T$, ..., d'où l'on conclura, en suivant le même raisonnement, que les quantités S, T, ... seront aussi, chacune en particulier, des fonctions primes.

Donc toute la série $P+Q+R+\ldots$ sera nécessairement la fonction prime d'une fonction de $x, y, y', \ldots, \omega, \omega', \ldots$, quelles que soient les valeurs de y et ω en x. Donc la quantité

$$f(x, y+\omega, y'+\omega', \ldots) - f(x, y, y', \ldots),$$

qui est égale à cette série, sera une fonction prime en donnant à ω une valeur quelconque, et, par conséquent aussi, en faisant $\omega = -y$; or, dans ce cas, la fonction $f(x, y+\omega, y'+\omega', \ldots)$ ne sera plus qu'une simple fonction de x sans y ni ω, qui pourra être censée la fonction prime d'une fonction de x. Donc la fonction $f(x, y, y', y'', \ldots)$ sera elle-même nécessairement la fonction prime d'une fonction de x, y, y', ...

75. Il suit de là que l'équation

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \ldots = 0$$

contient le caractère par lequel on peut reconnaître si la fonction $f(x, y, y', y'', \ldots)$ est ou non une fonction prime.

On trouvera de la même manière que les deux équations

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \ldots = 0,$$
$$f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - \ldots = 0$$

renferment le caractère par lequel on pourra reconnaître si la fonction $f(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots)$ est ou non une fonction prime, les quantités y et z étant indépendantes.

Mais, si la quantité z dépendait de l'équation

$$\varphi(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots) = 0,$$

on aurait, comme au n° **71**,

$$f'(y) - [f'(y')]' + [f'(y'')]'' - \ldots + \Delta\varphi'(y) - [\Delta\varphi'(y')]' + [\Delta\varphi'(y'')]'' - \ldots = 0,$$
$$f'(z) - [f'(z')]' + [f'(z'')]'' - \ldots + \Delta\varphi'(z) - [\Delta\varphi'(z')]' + [\Delta\varphi'(z'')]'' - \ldots = 0,$$

et l'équation résultante de l'élimination de l'indéterminée Δ contiendrait le caractère qui ferait reconnaître si la fonction $f(x, y, y', \ldots, z, z', \ldots)$ est d'elle-même, ou non, une fonction prime.

Puisque la fonction primitive de la quantité

$$\omega f'(y) + \omega' f'(y') + \omega'' f'(y'') + \ldots$$

est représentée (n° **62**) par

$$\omega\beta + \omega'\gamma + \omega''\delta + \ldots,$$

en omettant, ce qui est permis, la constante arbitraire α, on trouvera, de la même manière, que le caractère par lequel on pourra reconnaître si cette fonction primitive est elle-même une fonction prime sera renfermé dans l'équation

$$\beta - \gamma' + \delta'' - \ldots = 0,$$

laquelle, en substituant pour β, γ, δ, ... leurs valeurs (n° **63**), devient

$$f'(y') - 2[f'(y'')]' + 3[f'(y''')]'' - \ldots = 0.$$

Ainsi, le système de cette équation et de l'équation trouvée ci-dessus renfermera le caractère par lequel on pourra juger si la fonction $f(x, y, y', y'', \ldots)$ est d'elle-même, ou non, la fonction seconde d'une fonction de $x, y, y', y'', \ldots$; et ainsi de suite.

76. Ces différentes équations répondent à celles que, dans le Calcul différentiel, on nomme *conditions d'intégrabilité*, et dont on s'est beaucoup occupé dans ces derniers temps. Nous nous contenterons ici

d'avoir établi, d'une manière directe et rigoureuse, le principe de la correspondance de ces équations avec celles du maximum et minimum des fonctions primitives, et nous renverrons, pour ce qui concerne l'usage de ces équations de condition, aux différents Ouvrages qui en traitent, et surtout à la Leçon XXI du *Calcul des fonctions* (*), où cette matière est traitée avec plus de détail et de généralité. On y trouvera aussi un précis historique sur le problème des isopérimètres, dont la solution générale, par la méthode des variations, fait l'objet de la Leçon XXII du même Calcul, à laquelle nous renvoyons pour compléter la théorie des variations exposée ci-dessus.

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. X.

CHAPITRE XIV.

DE LA MESURE DES SOLIDITÉS ET DES SURFACES DES CORPS DE FIGURE DONNÉE.

77. Nous avons donné, dans le Chapitre VI, la manière d'exprimer par les fonctions les solidités et les surfaces des conoïdes formés par la révolution d'une courbe donnée autour d'un axe; il nous reste à étendre cette analyse à tous les corps dont la surface est exprimée par une équation entre ses trois coordonnées.

Considérons d'abord un solide dont la surface soit exprimée par l'équation

$$z = f(x, y);$$

son volume ou sa solidité sera exprimée en général par une fonction de x et y, que nous dénoterons par $\mathrm{F}(x, y)$. Désignons aussi par $\varphi(x, y)$ la fonction de x, y qui exprime l'aire de la section de ce solide faite perpendiculairement à l'axe des x et correspondante à l'abscisse x; donc, en regardant y comme un paramètre constant, et ne faisant varier que x, on aura, par le n° 27, l'équation

$$\mathrm{F}'(x, y) = \varphi(x, y).$$

Or la section, dont $\varphi(x, y)$ est l'aire, est une courbe dont les abscisses sont y et les ordonnées perpendiculaires sont z, et dont l'équation est

$$z = f(x, y),$$

en regardant maintenant x comme un paramètre constant qui ne varie que d'une section à l'autre. Donc, en prenant z à la place de y et y à

la place de x, on aura (numéro cité)

$$f(x, y) = \varphi_1(x, y),$$

l'accent mis au bas de la caractéristique φ dénotant la fonction dérivée par rapport à y, comme nous l'avons pratiqué jusqu'à présent.

On a donc les deux équations

$$\mathrm{F}'(x, y) = \varphi(x, y) \quad \text{et} \quad \varphi_1(x, y) = f(x, y),$$

d'où, éliminant la fonction marquée par φ_1, après avoir pris les fonctions dérivées par rapport à y de la première équation, on aura

$$\mathrm{F}_1(x, y) = f(x, y).$$

Ainsi, pour avoir la fonction $\mathrm{F}(x, y)$ qui exprime la valeur ou la solidité du corps dont la surface est exprimée par l'équation

$$z = f(x, y),$$

il faudra prendre la double fonction primitive de $f(x, y)$ relativement à x et à y.

78. On peut aussi parvenir directement à ce résultat par la considération suivante. Puisque $\mathrm{F}(x, y)$ représente en général la partie du corps qui répond aux coordonnées x, y, il est clair que $\mathrm{F}(x+i, y) - \mathrm{F}(x, y)$ sera le segment compris entre les plans perpendiculaires à celui des x, y qui répondent aux abscisses x et $x+i$ et qui sont terminés par la même ordonnée y. Donc

$$\mathrm{F}(x+i, y+o) - \mathrm{F}(x, y+o) - \mathrm{F}(x+i, y) + \mathrm{F}(x, y)$$

sera l'excès du segment qui est terminé par l'ordonnée $y+o$ sur celui qui est terminé par l'ordonnée y et il est visible que cette différence n'est autre chose qu'un prisme dont la base est le rectangle io, dont les arêtes sont les ordonnées z de la surface qui répondent aux quatre angles de ce rectangle, c'est-à-dire les ordonnées $f(x, y)$, $f(x+i, y)$, $f(x, y+o)$, $f(x+i, y+o)$, et dont la base supérieure

est la partie de la surface interceptée entre ces quatre ordonnées. Or il est facile de voir que la solidité de ce prisme curviligne est nécessairement comprise entre celles des deux prismes rectangulaires dont la base est la même io et dont les hauteurs sont la plus petite et la plus grande des quatre ordonnées dont nous venons de parler. Donc il faudra que la fonction $F(x, y)$ soit telle que la valeur de la quantité

$$F(x+i, y+o) - F(x+i, y) - F(x, y+o) + F(x, y)$$

soit toujours comprise entre la plus grande et la plus petite valeur des quantités

$$io\,f(x, y), \quad io\,f(x+i, y), \quad io\,f(x, y+o), \quad io\,f(x+i, y+o),$$

quelque petites que soient les valeurs de i et de o.

Développons les fonctions marquées par F suivant les formules du n° 78 de la première Partie. En poussant la précision jusqu'aux troisièmes dimensions de i et de o, on aura la quantité

$$io\,F(x, y) + \frac{i^2 o}{2}\,F'_x(x+\lambda i, y+\lambda o) + \frac{io^2}{2}F'_y(x+\lambda i, y+\lambda o)$$
$$+ \frac{i^3}{2.3}[F''_x(x+\lambda i, y+\lambda o) - F''_x(x+\lambda i, y)]$$
$$+ \frac{o^3}{2.3}[F_{iv}(x+\lambda i, y+\lambda o) - F_{iv}(x, y+\lambda o)].$$

Développons de même les fonctions marquées par f, mais en s'arrêtant aux premières dimensions de i et de o, à cause qu'elles sont déjà multipliées par io; on aura les quatre quantités

$$io\,f(x, y),$$
$$io\,f(x, y) + i^2 o\,f'(x+\lambda i, y),$$
$$io\,f(x, y) + io^2\,f_1(x, y+\lambda o),$$
$$io\,f(x, y) + i^2 o\,f'(x+\lambda i, y) + io^2 f_1(x, y+\lambda o),$$

et il faudra que la première quantité soit renfermée entre la plus grande et la plus petite de ces quatre dernières, en prenant pour i et o des quantités aussi petites qu'on voudra. Le coefficient λ peut être différent dans les différentes fonctions, mais il doit être renfermé entre les limites 0 et 1.

Or la différence de l'une à l'autre de celles-ci est, comme on voit, de l'ordre de $i^2 o$ ou de io^2, c'est-à-dire du troisième ordre, en regardant i et o comme très-petites du premier. Mais la différence entre la première quantité et l'une quelconque des quatre dernières est

$$io[F_1(x, y) - f(x, y)],$$

avec des termes du troisième ordre; donc, pour que cette différence soit toujours plus petite que la différence précédente, qui n'est que du troisième ordre, il est nécessaire que le premier terme, qui est du second ordre, soit nul; autrement, il serait possible de prendre les accroissements i et o assez petits pour que ce premier terme surpassât tous les termes du troisième ordre et que par conséquent la première quantité tombât hors des limites formées par les quatre autres quantités. Il faudra donc que l'on ait

$$io[F_1(x, y) - f(x, y)] = 0,$$

et, par conséquent,

$$F_1(x, y) = f(x, y),$$

comme nous l'avons trouvé plus haut.

79. Supposons maintenant que la fonction $F(x, y)$ représente la mesure de la surface. Dans ce cas, il est clair que la quantité

$$F(x+i, y+o) - F(x+i, y) - F(x, y+o) + F(x, y)$$

représentera la portion de surface comprise entre les quatre faces du prisme droit qui a io pour base.

Imaginons qu'aux extrémités des quatre ordonnées qui forment les arêtes de ce prisme on mène quatre plans tangents à la surface dans ces points; on pourra prouver, par un raisonnement analogue à celui du n° 29 relatif aux tangentes, que la portion de surface qui forme la base supérieure du prisme sera comprise entre la plus grande et la

plus petite section du prisme, faites par les quatre plans tangents de la surface courbe.

Soit α l'angle que le plan tangent à l'extrémité de l'ordonnée z fait avec l'axe des x, y; on aura (n° 39)

$$\operatorname{tang}\alpha = \sqrt{z'^2 + z_i^2}.$$

Or on sait, par la Géométrie, que la mesure de la projection d'un plan est égale à celle de ce plan multipliée par le cosinus de son inclinaison sur le plan de projection. Donc, puisque les sections du prisme dont il s'agit ont toutes pour projection le même rectangle io, la mesure de la section faite par le plan qui touche la surface à l'extrémité de l'ordonnée z sera $\frac{io}{\cos\alpha}$; mais on a $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2 + z_i^2}}$; donc la mesure de cette section sera

$$io\sqrt{1 + z'^2 + z_i^2},$$

savoir, en substituant $f(x, y)$ à z,

$$io\sqrt{1 + [f'(x, y)]^2 + [f_i(x, y)]^2}.$$

Faisons, pour abréger, $\sqrt{1 + [f'(x, y)]^2 + [f_i(x, y)]^2} = \varphi(x, y)$; on aura

$$io\,\varphi(x, y)$$

pour la mesure de la section dont il s'agit, et, mettant $x + i$, $y + o$ à la place de x, y, on aura celle des sections faites par les trois autres plans qui touchent la surface aux extrémités des ordonnées $f(x + i, y)$, $f(x, y + o)$ et $f(x + i, y + o)$. Donc il faudra que la quantité

$$\mathrm{F}(x + i, y + o) - \mathrm{F}(x + i, y) - \mathrm{F}(x, y + o) + \mathrm{F}(x, y)$$

soit toujours comprise entre la plus grande et la plus petite des quatre quantités

$$io\,\varphi(x, y), \quad io\,\varphi(x + i, y), \quad io\,\varphi(x, y + o), \quad io\,\varphi(x + i, y + o),$$

et, par une analyse semblable à celle du numéro précédent, on en conclura la condition

$$\mathrm{F}'_i(x, y) = \varphi(x, y) = \sqrt{1 + [f'(x, y)]^2 + [f_i(x, y)]^2}.$$

80. On voit par là que l'ordonnée z d'une surface est la double fonction prime prise par rapport à x et y de la fonction qui exprime le volume ou la solidité du corps, et que la quantité $\sqrt{1 + z'^2 + z_i^2}$ est la double fonction prime de la fonction qui exprime la surface elle-même.

Ainsi, l'ordonnée z étant donnée en fonction de x et y, il faudra prendre sa double fonction primitive pour avoir la solidité et la double fonction primitive de $\sqrt{1 + z'^2 + z_i^2}$ pour avoir la surface. On est libre de commencer par la fonction primitive relative à x ou à y; mais la première fonction primitive admettra pour constante une fonction de l'autre variable qu'on aura regardée comme constante, et il faudra déterminer cette fonction conformément aux limites données de la surface. On déterminera ensuite, d'après ces limites, la première variable en fonction de la seconde, par rapport à laquelle on prendra de nouveau la fonction primitive.

81. Si, pour faciliter la recherche des doubles fonctions primitives ou pour d'autres vues, on voulait changer les variables x, y en d'autres variables t et u, dont celles-là seraient des fonctions données, il faudrait, par les principes établis dans la première Partie (n° 50), multiplier d'abord les fonctions regardées comme dérivées doubles par $x'y'$; mais ensuite on ne pourrait pas substituer immédiatement les valeurs de x', y' en t' et u', parce qu'en prenant la fonction primitive par rapport à l'une des variables l'autre doit être regardée comme constante.

Soit $f(x, y)$ la fonction dont il s'agit d'avoir la double fonction primitive; pour changer les variables x, y en d'autres variables t et u, on la mettra d'abord sous la forme $x'y'f(x, y)$. Supposons qu'à la place de la variable x, par rapport à laquelle on veut prendre d'abord la fonction primitive en regardant y comme constante, on substitue une fonction donnée de t et de y, t étant une nouvelle variable qui remplacera x.

Soit $x = \varphi(t, y)$; on aura, en ne faisant varier que t,

$$x' = \varphi'(t),$$

et la fonction proposée deviendra

$$y'\varphi'(t)f(x,y),$$

dont il faudra prendre la fonction primitive par rapport à t, y étant regardée comme constante, et ensuite par rapport à y, t étant regardée comme constante. Or on peut aussi substituer à la place de y une autre variable u et supposer, puisque t est à son égard constante,

$$y=\psi(t,u),$$

ce qui donnera, en ne faisant varier que u,

$$y'=\psi'(u).$$

Ainsi la fonction proposée deviendra

$$\varphi'(t)\psi'(u)f(x,y),$$

laquelle ne renferme plus que t et u, à cause de

$$x=\varphi(t,y),\quad y=\psi(t,u),$$

et dont on pourra prendre la double fonction primitive par rapport à t et à u.

Puisque $x=\varphi(t,y)$ et $y=\psi(t,u)$, on aura, après la substitution de y, x égale à une simple fonction de t et u, que nous dénoterons par $\chi(t,u)$, de manière que les transformations de x et y en t et u seront représentées par

$$x=\chi(t,u),\quad y=\psi(t,u).$$

Or l'équation identique

$$\varphi(t,y)=\chi(t,u)$$

donne, en faisant varier séparément t et u,

$$\varphi'(t)+\varphi'(y)\psi'(t)=\chi'(t),$$
$$\varphi'(y)\psi'(u)=\chi'(u):$$

éliminant $\varphi'(y)$, on aura

$$\varphi'(t)=\chi'(t)-\frac{\psi'(t)\chi'(u)}{\psi'(u)},$$

et cette valeur, étant substituée dans la dernière transformée de la fonction proposée, donnera

$$[\chi'(t)\psi'(u)-\chi'(u)\psi'(t)]f(x,y),$$

qu'on peut mettre sous cette forme plus simple,

$$(x'y_t-x_ty')f(x,y),$$

dans laquelle x et y peuvent être des fonctions quelconques de t et u, et où les traits supérieurs indiquent les fonctions dérivées par rapport à t et les inférieurs indiquent les dérivées par rapport à u.

82. Ainsi, en regardant z comme une fonction de x et y donnée par la nature de la surface du corps, et supposant qu'on substitue à la place de x, y des fonctions quelconques de t et u, la solidité ou le volume du corps et sa surface seront représentés par les doubles fonctions primitives relatives à t et u des formules

$$(x'y_t-x_ty')z\quad\text{et}\quad(x'y_t-x_ty')\sqrt{1+(z')^2+(z_t)^2},$$

où il faut remarquer que les fonctions dérivées de z doivent être prises par rapport à x et y; mais, si l'on substitue tout de suite dans z, pour x et y, leurs valeurs en t et u, il est clair que z deviendra une simple fonction de t et u, et voici comment on pourra exprimer les dérivées de z par rapport à x et y par ses dérivées par rapport à t et u.

Pour distinguer ces dérivées les unes des autres, nous renfermerons les premières entre des parenthèses. Ainsi (z') et (z_t) désigneront les dérivées de z prises par rapport à x et y, et z', z_t désigneront simplement les dérivées de z prises par rapport à t et u, après la substitution des valeurs de x, y en t et u dans l'expression de z. En regardant donc z comme fonction de x, y, et x, y comme fonctions de t, u, et prenant les dérivées séparément par rapport à t et à u, on aura, par les principes établis dans la première Partie,

$$z'=(z')x'+(z_t)y',$$
$$z_t=(z')x_t+(z_t)y_t.$$

d'où l'on tire

$$(z') = \frac{z'y_t - z_t y'}{x'y_t - x_t y'}, \quad (z_t) = -\frac{z'x_t - z_t x'}{x'y_t - x_t y'};$$

ce sont les valeurs qu'il faudra substituer dans le radical

$$\sqrt{1 + (z')^2 + (z_t)^2},$$

et, la substitution faite, on aura la formule

$$\sqrt{(x'y_t - x_t y')^2 + (z'x_t - z_t x')^2 + (z'y_t - z_t y')^2},$$

dont la double fonction primitive, prise par rapport à t et à u, donnera la surface du corps, les variables z, x, y étant maintenant regardées comme de simples fonctions de t et u.

83. Ces expressions pour le volume et pour la surface d'un corps quelconque, dont les coordonnées x, y, z sont supposées fonctions de t et u, étant traduites en langage différentiel, deviennent

$$dt\,du\left(\frac{dx}{dt}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dt}\right)z$$

et

$$dt\,du\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\frac{dy}{du} - \frac{dx}{du}\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\frac{dx}{du} - \frac{dz}{du}\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\frac{dy}{du} - \frac{dz}{du}\frac{dy}{dt}\right)^2},$$

et représentent les éléments infiniment petits du volume et de la surface, qu'il faut intégrer et compléter d'abord par rapport à l'une des deux variables t, u, et ensuite par rapport à l'autre.

84. Pour donner une application de ces formules, nous supposerons que le corps, dont on cherche la solidité et la surface, soit un ellipsoïde quelconque dont les trois demi-axes soient a, b, c; l'équation de sa surface entre les trois coordonnées rectangles x, y, z, parallèles aux demi-axes a, b, c, sera représentée ainsi,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

d'où l'on aura z en fonction de x et y.

Mais on évitera l'irrationnalité de z en prenant deux angles indéterminés t et u, et en faisant

$$x = a\sin t\cos u, \quad y = b\sin t\sin u, \quad z = c\cos t;$$

et, pour avoir le volume et la surface de tout l'ellipsoïde, il suffira, après les substitutions, de prendre les fonctions primitives séparément par rapport à t et u, depuis $t = 0$ jusqu'à t égal à deux angles droits et depuis $u = 0$ jusqu'à u égal à quatre angles droits; car cette transformation des coordonnées de l'ellipsoïde, que M. Ivory paraît avoir employée le premier pour faciliter le calcul de l'attraction de ce solide (*Transactions philosophiques* de 1809, vol. XI), a l'avantage de rendre indépendantes les fonctions primitives relatives à t et u lorsque la double fonction primitive doit s'étendre à la surface entière.

En prenant les fonctions dérivées des x, y, z par rapport à t et à u, on aura

$$x' = a\cos t\cos u, \quad y' = b\cos t\sin u, \quad z' = -c\sin t,$$
$$x_t = -a\sin t\sin u, \quad y_t = b\sin t\cos u, \quad z_t = 0;$$

et de là on aura

$$x'y_t - x_t y' = ab\sin t\cos t,$$
$$z'x_t - z_t x' = ac\sin^2 t\sin u,$$
$$z'y_t - z_t y' = -bc\sin^2 t\cos u,$$

de sorte que les formules pour le volume et pour la surface de l'ellipsoïde deviendront

$$abc\sin t\cos^2 t, \quad \sin t\sqrt{a^2b^2\cos^2 t + c^2(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)\sin^2 t},$$

dont il faudra prendre les fonctions primitives depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \pi$ et depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 2\pi$, π étant la demi-périphérie.

85. Considérons d'abord la formule

$$abc\sin t\cos^2 t$$

pour le volume. En substituant $1 - \sin^2 t$ à la place de $\cos^2 t$ et ensuite

$\frac{3}{4}\sin t - \frac{1}{4}\sin 3t$ au lieu de $\sin^3 t$, elle devient

$$\frac{abc}{4}(\sin t + \sin 3t),$$

dont la fonction primitive, prise de manière qu'elle commence où $t = 0$, est

$$\frac{abc}{4}\left(1 - \cos t + \frac{1 - \cos 3t}{3}\right).$$

Faisant $t = \pi$, ce qui donne $\cos t = -1$ et $\cos 3t = -1$, elle se réduit à $\frac{2abc}{3}$.

Il faut prendre encore la fonction primitive de celle-ci par rapport à u depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 2\pi$; et comme la variable u, dont la fonction prime est 1, ne s'y trouve pas, il n'y aura qu'à multiplier simplement par 2π, ce qui donnera

$$\frac{4abc}{3}\pi$$

pour la solidité ou le volume du sphéroïde entier dont a, b, c sont les trois demi-axes.

86. Venons à la formule relative à la surface et supposons d'abord, pour la simplifier, $a = b$, ce qui donne un sphéroïde de révolution autour de l'axe $2c$; elle deviendra

$$a\sin t\sqrt{b^2\cos^2 t + c^2\sin^2 t},$$

où l'on voit que l'angle u a disparu; je conserve la lettre b sous le signe, pour plus de généralité.

Faisons $\cos t = s$, on aura $\sin t = -s'$; d'ailleurs on a $\sin^2 t = 1 - s^2$; on aura ainsi la transformée

$$-as'\sqrt{c^2 + (b^2 - c^2)s^2},$$

dont il faudra prendre la fonction primitive depuis $s = 1$ jusqu'à $s = -1$.

Soit $b^2 - c^2 = e^2$; on aura la fonction primitive par rapport à s,

$$-\frac{as}{2}\sqrt{c^2 + e^2 s^2} + \frac{ac^2}{2e}l\left(\sqrt{c^2 + e^2 s^2} - es\right);$$

faisant $s = 1$, elle se réduit à

$$-\frac{ab}{2} + \frac{ac^2}{2e}l(b - e);$$

et, faisant $s = -1$, elle devient

$$\frac{ab}{2} + \frac{ac^2}{2e}l(b + e).$$

Donc la fonction primitive complète, relativement à s ou à t, sera

$$ab + \frac{ac^2}{2e}l\frac{b + e}{b - e}.$$

Il faut de nouveau en prendre la fonction primitive relative à u; et comme la variable u ne s'y trouve pas, on se contentera de la multiplier par 2π; et, faisant maintenant $b = a$, on aura, pour la surface entière du sphéroïde formé par la révolution d'une ellipse dont les demi-axes sont a et c autour du petit axe $2c$, la formule

$$2\pi a^2 + \frac{\pi ac^2}{e}l\frac{a + e}{a - e},$$

où e est l'excentricité $= \sqrt{a^2 - c^2}$.

Pour que la valeur de e soit réelle, il faut que $a > c$, et, par conséquent, que le sphéroïde soit aplati et formé par la révolution de l'ellipse autour de son petit axe $2c$.

Si l'on voulait avoir la surface d'un sphéroïde allongé formé par la révolution d'une ellipse autour de son grand axe, il faudrait prendre $2c$ pour son grand axe : alors la valeur de e deviendrait imaginaire. Soit pour ce cas, $c^2 - a^2 = E^2$; on aura

$$e = E\sqrt{-1},$$

et, passant des logarithmes imaginaires aux arcs réels par les formules

du n° 22 (I^re Partie), on aura, pour la surface cherchée, la formule

$$2\pi a^2 + \frac{2\pi ac^2}{E}\,\text{angle}\left(\tang\frac{E}{a}\right).$$

87. Si l'on n'avait pas fait $a = b$, et qu'on eût supposé, en général,

$$V^2 = \frac{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u}{a^2},$$

on eût eu, pour la fonction primitive relative à t, la formule

$$ab + \frac{ac^2V^2}{2e}\,l\frac{b+e}{b-e},$$

où

$$e^2 = b^2 - c^2V^2,$$

et il aurait été impossible, dans l'état actuel de l'Analyse, de trouver la fonction primitive de celle-ci relative à u. Mais on peut toujours avoir cette fonction par approximation lorsque la différence des demi-axes a et b est assez petite.

Soit $\frac{b^2-a^2}{a^2} = i$; cette quantité étant positive ou négative, la quantité V^2 deviendra $1 + i\cos^2 u$, et il n'y aura qu'à mettre, dans la formule précédente, $c^2(1 + i\cos^2 u)$ à la place de c^2V^2, ensuite développer par rapport à i. Donc, si l'on suppose

$$\frac{ac^2}{2\sqrt{b^2-c^2}}\,l\frac{b+\sqrt{b^2-c^2}}{b-\sqrt{b^2-c^2}} = f(c^2),$$

on aura, en développant par les fonctions dérivées relatives à c^2, la série

$$ab + f(c^2) + f'(c^2)c^2 i\cos^2 u + \frac{1}{2}f''(c^2)c^4 i^2\cos^4 u + \frac{1}{2.3}f'''(c^2)c^6 i^3\cos^6 u + \ldots,$$

dont il faudra prendre les fonctions primitives relatives à u depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 2\pi$.

Désignons par $2\pi\alpha$, $2\pi\beta$, $2\pi\gamma$, ... les fonctions primitives de $\cos^2 u$, $\cos^4 u$, $\cos^6 u$, ... prises entre ces limites; on aura, pour la surface de

l'ellipsoïde dont a, b, c sont les trois demi-axes, l'expression

$$2\pi\left[ab + f(c^2) + \alpha c^2 i f'(c^2) + \frac{1}{2}\beta c^4 i^2 f''(c^2) + \frac{1}{2.3}\gamma c^6 i^3 f'''(c^2) + \ldots\right],$$

série qui sera d'autant plus convergente que la quantité i sera plus petite.

A l'égard des coefficients α, β, γ, ..., il est facile de les déterminer en résolvant les puissances de $\cos u$ en cosinus d'angles multiples de u par le moyen de l'expression exponentielle imaginaire de $\cos u$ (n° 22, I^re Partie), et, comme les cosinus ont pour fonctions primitives les sinus correspondants, lesquels deviennent nuls aux deux extrémités où $u = 0$ et $u = 2\pi$, il s'ensuit qu'il ne restera que les termes indépendants de u, multipliés par 2π, où il est facile de voir que ces termes ne sont que les coefficients du terme moyen du binôme, élevé à la deuxième, à la quatrième, à la sixième, etc. puissance, divisé par la même puissance de 2. Ainsi l'on aura

$$\alpha = \frac{1}{4},\quad \beta = \frac{1.3}{4.8},\quad \gamma = \frac{1.3.5}{4.8.12},\quad \ldots$$

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS A LA MÉCANIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

DE L'OBJET DE LA MÉCANIQUE. DU MOUVEMENT UNIFORME ET DU MOUVEMENT UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉ. DU MOUVEMENT RECTILIGNE EN GÉNÉRAL. RELATION ENTRE L'ESPACE, LA VITESSE ET LA FORCE ACCÉLÉRATRICE.

1. Nous allons employer la théorie des fonctions dans la Mécanique. Ici les fonctions se rapportent essentiellement au temps, que nous désignerons toujours par t, et, comme la position d'un point dans l'espace dépend de trois coordonnées rectangulaires x, y, z, ces coordonnées, dans les problèmes de Mécanique, seront censées être des fonctions de t. Ainsi, on peut regarder la Mécanique comme une Géométrie à quatre dimensions et l'Analyse mécanique comme une extension de l'Analyse géométrique.

Considérons d'abord le mouvement rectiligne et supposons que x soit l'espace parcouru pendant le temps t; on aura $x = f(t)$, et la fonction $f(t)$ devra être telle qu'elle devienne nulle lorsque $t = 0$. La forme la plus simple de $f(t)$ est évidemment at, ce qui donne $x = at$, a étant une constante; ainsi, dans le mouvement représenté par cette équation, les espaces parcourus sont toujours proportionnels aux temps écoulés depuis le commencement du mouvement, ce qui est la propriété du mouvement qu'on appelle *uniforme*. La constante a, qui exprime le

rapport de l'espace au temps, est la mesure de ce qu'on nomme la *vitesse;* c'est le seul élément qui entre dans cette espèce de mouvement et par lequel un mouvement uniforme diffère d'un autre mouvement uniforme.

L'observation et l'expérience nous font voir qu'un corps mis en mouvement d'une manière quelconque, si l'on écarte toutes les causes d'altération qui peuvent agir sur lui, continue à se mouvoir de lui-même d'un mouvement rectiligne et uniforme, d'où il suit que la vitesse, une fois imprimée, se conserve toujours la même et suivant la même direction : c'est en quoi consiste la première loi du mouvement.

Si l'on représente le temps par l'abscisse et l'espace parcouru par l'ordonnée d'une ligne, il est clair que cette ligne sera pour le mouvement uniforme une droite passant par l'origine des abscisses et que la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe sera la mesure de la vitesse du mouvement.

2. La fonction de t la plus simple après at est bt^2; en prenant cette expression pour $f(t)$, on aura une autre espèce de mouvement rectiligne représenté par l'équation $x = bt^2$, dans laquelle les espaces parcourus depuis l'origine du mouvement sont proportionnels aux carrés du temps.

L'observation et l'expérience nous présentent aussi journellement ce mouvement dans les corps qui tombent par leur pesanteur, en faisant abstraction de la résistance de l'air et de toute autre cause étrangère d'altération. La constante b, qui est le seul élément qui entre dans la constitution de ce mouvement, est la même pour tous les corps dans le même lieu de la Terre et dépend de la force de la gravité qui le produit et qui agit sans cesse de la même manière sur le mobile. Ainsi, ce mouvement ne se continue qu'en vertu de la force, qu'on peut regarder comme une cause extérieure agissant continuellement sur le corps et dont le coefficient b est la mesure.

Comme dans ce mouvement les espaces augmentent en plus grande raison que les temps, on le nomme mouvement *accéléré*, et, en particulier, on appelle celui dont il s'agit *uniformément accéléré*, par la raison que nous verrons dans un moment.

Si l'on représente ici le temps par l'abscisse et l'espace parcouru par l'ordonnée d'une courbe, on voit que cette courbe sera une parabole dont le paramètre sera $\frac{1}{b}$ et dont l'axe principal sera l'axe des ordonnées y.

Le mouvement le plus simple, après celui que nous venons de considérer, serait celui où l'on aurait $x = ct^3$; mais la nature ne nous offre aucun mouvement simple de cette espèce, et nous ignorons ce que le coefficient c pourrait représenter, en le considérant d'une manière absolue et indépendante des vitesses et des forces.

Ce sont là les mouvements simples dont toutes les autres espèces de mouvement peuvent être regardées comme composées, et l'art de la Mécanique consiste dans cette composition et décomposition, d'où résultent les rapports entre les temps, les espaces, les vitesses et les forces.

3. Si l'on réunit les deux espèces de mouvement que nous venons de considérer, on aura le mouvement représenté par l'équation

$$x = at + bt^2,$$

qui sera, par conséquent, composé d'un mouvement uniforme et d'un mouvement uniformément accéléré, et qui résultera de la réunion des deux causes qui peuvent produire chacun d'eux en particulier, c'est-à-dire d'une vitesse proportionnelle à a, primitivement imprimée, et d'une force accélératrice proportionnelle à b, agissant continuellement sur le mobile.

La nature nous offre aussi la composition de ces deux mouvements dans les corps pesants lancés verticalement de haut en bas ou de bas en haut, en faisant abstraction de la résistance de l'air et de toute autre cause étrangère. Dans les corps lancés verticalement de haut en bas, la force b agit dans la direction même du mouvement, comme nous le supposons; mais, dans les corps lancés verticalement de bas en

haut, la force b agit en sens contraire et devient par conséquent négative; elle tend ainsi à retarder le mouvement du corps et s'appelle alors *force retardatrice*. Le mouvement lui-même s'appelle, dans ce cas, *uniformément retardé*.

L'observation nous fait voir que, dans la composition de ces deux mouvements, chacun d'eux se conserve comme s'il était seul dans le mobile, de manière que l'espace parcouru au bout d'un temps quelconque est exactement la somme ou la différence des espaces que le mobile aurait parcourus séparément, en vertu des deux causes qui produisent les deux mouvements, de sorte que le résultat, c'est-à-dire l'espace parcouru, est le même que si les deux mouvements avaient lieu séparément et successivement.

4. Considérons maintenant un mouvement rectiligne quelconque représenté par l'équation $x = f(t)$, $f(t)$ étant une fonction quelconque de t. Au bout du temps t, le mobile aura parcouru l'espace $f(t)$, et, au bout du temps $t+\theta$, il aura parcouru l'espace $f(t+\theta)$; par conséquent, la différence $f(t+\theta)-f(t)$ sera l'espace parcouru pendant le temps θ, qui a commencé à l'instant où le temps t a fini. La fonction $f(t+\theta)$, étant développée suivant les puissances de θ, devient

$$f(t)+\theta f'(t)+\frac{\theta^2}{2}f''(t)+\ldots,$$

comme on l'a vu dans la première Partie; donc l'espace parcouru durant le temps θ sera représenté par la formule

$$\theta f'(t)+\frac{\theta^2}{2}f''(t)+\frac{\theta^3}{2.3}f'''(t)+\ldots,$$

dans laquelle le temps t écoulé avant le temps θ est maintenant regardé comme une constante. Ainsi le mouvement par lequel cet espace est parcouru sera composé de différents mouvements partiels, dont les espaces répondant au temps θ seront $\theta f'(t)$, $\frac{\theta^2}{2}f''(t)$, $\frac{\theta^3}{2.3}f'''(t)$, ..., et l'on voit que le premier de ces mouvements partiels sera uniforme avec

une vitesse mesurée par $f'(t)$ (n° 2) et que le second sera uniformément accéléré et dû à une force accélératrice proportionnelle à $\frac{1}{2}f''(t)$ (n° 3). A l'égard des autres, comme ils ne se rapportent à aucun mouvement simple connu, il ne sera pas nécessaire de les considérer en particulier, et nous allons faire voir qu'on peut en faire abstraction dans la détermination du mouvement au commencement du temps θ.

En effet, si l'on développe la fonction $f(t+\theta)$ par notre formule générale de la première Partie (n^os^ 40, 78), on aura

$$f(t)+\theta f'(t)+\frac{\theta^2}{2}f''(t)+\frac{\theta^3}{2.3}f'''(t+\lambda\theta),$$

λ étant un coefficient inconnu, dont la valeur est nécessairement comprise entre 0 et 1, de sorte que l'espace parcouru dans le temps θ sera exprimé exactement par la formule

$$\theta f'(t)+\frac{\theta^2}{2}f''(t)+\frac{\theta^3}{2.3}f'''(t+\lambda\theta).$$

Les deux premiers termes représentent, comme l'on voit, le mouvement composé d'uniforme et d'uniformément accéléré; le troisième représente la totalité des autres mouvements qui se combinent avec celui-là et qui empêchent le vrai mouvement d'être un simple résultat de ces deux. Mais j'observe qu'on peut prendre θ assez petit pour que le mouvement composé des deux termes $\theta f'(t)+\frac{\theta^2}{2}f''(t)$ approche plus du véritable mouvement que ne pourrait faire tout autre mouvement composé d'un mouvement uniforme et d'un mouvement uniformément accéléré; car la différence des espaces parcourus, pendant le temps θ, par le mouvement composé dont il s'agit et par le véritable mouvement sera exprimée par $\frac{\theta^3}{2.3}f'''(t+\lambda\theta)$; mais l'espace parcouru par tout autre mouvement composé d'un uniforme et d'un uniformément accéléré étant représenté par $a\theta+b\theta^2$ (n° 3), la différence entre cet espace et le véritable espace parcouru sera

$$\theta[f'(t)-a]+\theta^2\left[\frac{1}{2}f''(t)-b\right]+\frac{\theta^3}{2.3}f'''(t+\lambda\theta),$$

et il est aisé de prouver, par un raisonnement semblable à celui du n° 3 de la deuxième Partie, que, tant que a et b diffèrent de $f'(t)$ et $\frac{1}{2}f''(t)$, on pourra toujours prendre θ assez petit pour que cette dernière différence surpasse la première, et que, dès que cette condition aura lieu pour une valeur de θ, elle aura lieu, à plus forte raison, pour toutes les valeurs plus petites. Donc le terme $\theta f'(t)$ exprime tout ce qu'il peut y avoir d'uniforme dans le mouvement proposé, considéré au commencement du temps θ, et le terme $\frac{\theta^2}{2}f''(t)$ exprime de même tout ce qu'il peut y avoir dans ce mouvement d'uniformément accéléré.

On peut conclure de là que tout mouvement rectiligne, représenté par l'équation $x = f(t)$, peut, dans un instant quelconque au bout du temps t, être regardé comme composé d'un mouvement uniforme dû à une vitesse imprimée au mobile, mesurée par $f'(t)$, et d'un mouvement uniformément accéléré dû à une force accélératrice agissant sur le mobile et proportionnelle à $\frac{1}{2}f''(t)$ ou simplement à $f''(t)$; que, par conséquent, si les causes qui empêchent le mouvement proposé d'être uniforme venaient à cesser tout à coup, le mouvement se continuerait, dès cet instant, d'une manière uniforme avec une vitesse mesurée par $f'(t)$; et que, si l'effet de ces causes, au lieu de devenir nul, devenait constant, le mouvement deviendrait composé du mouvement uniforme dont nous venons de parler et d'un mouvement uniformément accéléré, commençant au même instant, en vertu d'une force accélératrice constante et proportionnelle à $f''(t)$.

Plusieurs phénomènes de la nature, et surtout les résultats des différentes expériences qu'on a imaginées sur la chute des corps, confirment pleinement la conclusion que nous venons de trouver, et qui doit être regardée comme le principe fondamental de toute la théorie du mouvement.

5. Donc, en général, dans tout mouvement rectiligne dans lequel l'espace parcouru est une fonction donnée du temps écoulé, la fonction prime de cette fonction représentera la vitesse et la fonction seconde représentera la force accélératrice dans un instant quelconque, car,

comme les temps, les espaces, les vitesses et les forces sont des choses hétérogènes qu'on ne peut comparer ensemble qu'après les avoir réduites en nombres, en les rapportant chacune à une unité déterminée dans son espèce, nous pouvons, pour plus de simplicité, exprimer immédiatement la vitesse et la force par les fonctions primes et secondes, comme nous exprimons l'espace par la fonction primitive. D'où l'on voit que les fonctions primes et secondes se présentent naturellement dans la Mécanique, où elles ont une valeur et une signification déterminées; c'est ce qui a porté Newton à établir le Calcul des fluxions sur la considération du mouvement. Ainsi l'espace, la vitesse et la force, étant regardés comme des fonctions du temps, sont représentés respectivement par la fonction primitive, par sa fonction prime et par sa fonction seconde, de manière que, connaissant l'expression de l'espace par le temps, on aura tout de suite celles de la vitesse et de la force par l'analyse directe des fonctions; mais, si l'on ne connaît que la vitesse ou la force par le temps, il faudra alors remonter aux équations primitives par les règles de l'analyse inverse.

Ces notions de la vitesse et de la force accélératrice sont, comme l'on voit, très-simples et indépendantes de toute métaphysique. Elles sont fondées sur la nature du mouvement regardé comme le transport d'un corps d'un lieu à un autre. Si un corps demeure en repos, sa vitesse est évidemment nulle; mais il peut éprouver l'action d'une force accélératrice qui, étant arrêtée par quelque obstacle, ne produit qu'une tendance au mouvement. Cette force est alors ce qu'on appelle *pression* ou *force morte* et peut être comparée à l'action qu'un corps pesant exerce sur l'obstacle qui l'empêche de tomber.

6. Désignons par x l'espace parcouru durant le temps t; en regardant x comme fonction de t, on aura, suivant la notation employée jusqu'ici, x' pour la vitesse au bout de ce temps, et x'' pour la force accélératrice dans le même instant, d'où l'on voit que, si la loi du mouvement est donnée par une relation entre le temps, l'espace, la vitesse et la force, on aura une équation du second ordre entre t, x,

x', x'', d'où il faudra tirer l'équation primitive en t, en x par les règles de l'analyse inverse des fonctions, et l'on déterminera les deux constantes arbitraires qui entreront dans cette équation par les valeurs données de x et x' dans un instant donné, c'est-à-dire par l'espace et la vitesse, qu'on suppose connus dans cet instant.

Dans le mouvement uniforme représenté par l'équation $x = at$, on aura donc

$$x' = a, \quad x'' = 0;$$

ainsi le coefficient a, rapport de l'espace parcouru au temps, exprimera la vitesse, et la force accélératrice sera nulle. Dans le mouvement uniformément accéléré et représenté par $x = bt^2$, on aura

$$x' = 2bt \quad \text{et} \quad x'' = 2b.$$

Donc la vitesse, dans un instant quelconque, est proportionnelle au temps écoulé depuis l'origine du mouvement. Le rapport entre la vitesse et le temps exprime la force accélératrice et est double du rapport entre l'espace parcouru et le carré du temps. L'augmentation continuelle et uniforme de la vitesse dans cette espèce de mouvement lui a fait donner le nom de *mouvement uniformément accéléré*.

Ce qu'il y a de plus simple et de plus naturel pour comparer les forces accélératrices, c'est de prendre la force de la gravité dans un lieu donné pour l'unité. Ainsi l'on aura, pour les corps pesants,

$$2b = 1 \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2};$$

donc

$$x = \frac{t^2}{2}, \quad x' = t = \sqrt{2x};$$

de sorte qu'on peut déterminer la vitesse par la racine carrée du double de la hauteur d'où un corps pesant doit tomber pour acquérir cette vitesse. Par conséquent, si l'on veut prendre une vitesse donnée pour l'unité des vitesses, il faudra alors prendre, pour l'unité des espaces, le double de la hauteur nécessaire pour la produire.

CHAPITRE II.

DE LA COMPOSITION DES MOUVEMENTS, ET EN PARTICULIER DE CELLE DE TROIS MOUVEMENTS UNIFORMES. DE LA COMPOSITION ET DÉCOMPOSITION DES VITESSES ET DES FORCES. DE LA TRAJECTOIRE DES PROJECTILES DANS LE VIDE.

7. Nous venons d'examiner la nature et les propriétés du mouvement rectiligne; le mouvement curviligne se réduit naturellement à deux ou trois mouvements rectilignes, suivant que la courbe décrite par le mobile est à simple ou à double courbure. En effet, en rapportant cette courbe à deux ou trois coordonnées rectangulaires x, y, z, il est clair que la détermination du point de la courbe où le mobile se trouvera à chaque instant, dépendra de la valeur de ces coordonnées au même instant, de sorte que chacune de ces coordonnées sera une fonction donnée du temps, et pourra représenter l'espace rectiligne parcouru par un mobile qui serait la projection du vrai mobile sur chacun des trois axes des mêmes coordonnées.

Ainsi, si le mouvement se fait dans un plan, il pourra être représenté par les deux équations

$$x = f(t), \quad y = \mathrm{F}(t),$$

d'où, éliminant t, on aura en x et y l'équation de la ligne parcourue par le mobile. Si le mouvement se fait dans des plans différents, il sera représenté alors par les trois équations

$$x = f(t), \quad y = \mathrm{F}(t), \quad z = \varphi(t),$$

d'où, éliminant t, on aura deux équations en x, y, z, qui détermineront la ligne à double courbure décrite par le corps.

Supposons d'abord que les trois mouvements relatifs aux axes des x, y, z soient uniformes; on aura

$$x = at, \quad y = bt, \quad z = ct,$$

a, b, c étant les vitesses de ces mouvements. Éliminant t, on aura

$$y = \frac{bx}{a} \quad \text{et} \quad z = \frac{cx}{a},$$

deux équations qui appartiennent à une ligne droite passant par l'origine des coordonnées, et dont les projections sur les plans des xy et des xz font, avec l'axe des x, des angles dont $\frac{b}{a}$ et $\frac{c}{a}$ sont les tangentes. La partie de cette droite qui répond aux coordonnées x, y, z sera donc

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2};$$

ce sera l'espace décrit pendant le temps t, en vertu des trois mouvements uniformes. Ce mouvement composé sera donc aussi rectiligne et uniforme, avec une vitesse égale à $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. A l'égard de sa direction, il est plus simple de la rapporter aux trois axes des coordonnées x, y, z, et il est visible que, puisque at, bt, ct sont les projections de la ligne $t\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ sur les trois axes, les rapports

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

seront les cosinus des angles que cette direction fait avec les mêmes axes. La somme des carrés de ces cosinus est, comme l'on voit, égale à l'unité, ce qui est la propriété connue des angles qu'une même droite fait avec trois autres droites perpendiculaires entre elles.

8. Nommons A la vitesse du mouvement composé et α, β, γ les angles que la direction de ce mouvement fait avec les trois axes; on aura

$$A = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

et

$$\frac{a}{A} = \cos\alpha, \quad \frac{b}{A} = \cos\beta, \quad \frac{c}{A} = \cos\gamma,$$

d'où l'on tire

$$a = A\cos\alpha, \quad b = A\cos\beta, \quad c = A\cos\gamma.$$

On voit par là comment la vitesse A d'un mouvement uniforme, suivant une direction donnée, peut se décomposer dans trois vitesses a, b, c suivant des directions perpendiculaires entre elles.

Si donc un corps avait à la fois deux vitesses A et B suivant des directions données, faisant avec trois axes perpendiculaires entre eux les angles respectifs α, β, γ et λ, μ, ν, il en résulterait, suivant ces mêmes axes, les vitesses composées

$$A\cos\alpha + B\cos\lambda, \quad A\cos\beta + B\cos\mu, \quad A\cos\gamma + B\cos\nu,$$

et ces vitesses donneraient une vitesse unique C, avec une direction qui ferait, avec les mêmes axes, les angles ϖ, ρ, σ, de manière que l'on aurait

$$C\cos\varpi = A\cos\alpha + B\cos\lambda,$$
$$C\cos\rho = A\cos\beta + B\cos\mu,$$
$$C\cos\sigma = A\cos\gamma + B\cos\nu.$$

Comme les lignes $A\cos\alpha$, $A\cos\beta$, $A\cos\gamma$ sont les projections sur les trois axes de la ligne A prise sur la direction de la vitesse A, et ainsi des autres quantités semblables, il est facile de conclure des équations précédentes que, si l'on place les deux lignes A et B l'une au bout de l'autre suivant leurs propres directions, la ligne C joindra ces lignes, de sorte que A, B, C seront les trois côtés d'un triangle, et, si sur les deux lignes A et B partant d'un même point on construit un parallélogramme, la ligne C en sera la diagonale. De cette manière, la composition et décomposition des vitesses se réduit à une considération géométrique très-simple; mais, pour le calcul, il est plus simple encore de tout rapporter à trois axes perpendiculaires entre eux par les formules précédentes, qu'on peut étendre à autant de vitesses qu'on aura à composer.

Nous remarquerons encore que, si l'on nomme Δ l'angle des deux lignes A et B partant d'un même point, le carré de la ligne qui les

joindra sera exprimé, comme l'on sait, par

$$A^2 - 2AB\cos\Delta + B^2.$$

D'un autre côté, en considérant les projections de ces lignes, il est aisé de voir que ce même carré sera exprimé par

$$(A\cos\alpha - B\cos\lambda)^2 + (A\cos\beta - B\cos\mu)^2 + (A\cos\gamma - B\cos\nu)^2$$
$$= A^2 + B^2 - 2AB(\cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu),$$

d'où l'on tire, par la comparaison,

$$\cos\Delta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

équation qui donne la relation entre l'angle Δ de deux lignes et les angles α, β, γ et λ, μ, ν que ces lignes font avec trois axes perpendiculaires entre eux. Cette relation est connue dans la Trigonométrie sphérique; mais, comme nous aurons occasion d'en faire usage dans la suite, nous avons été bien aise de la démontrer par la méthode des projections.

9. La considération des mouvements uniformes nous a donné la composition et la décomposition des vitesses; celle des mouvements uniformément accélérés nous donnera de même la composition et la décomposition des forces.

En effet, supposons que les trois mouvements rectilignes suivant les axes des coordonnées x, y, z soient uniformément accélérés et produits par des forces accélératrices g, h, k; on aura (n° 6)

$$x = \tfrac{1}{2}gt^2, \quad y = \tfrac{1}{2}ht^2, \quad z = \tfrac{1}{2}kt^2.$$

L'élimination de t donne

$$y = \frac{hx}{g}, \quad z = \frac{kx}{g},$$

ce qui fait voir que la ligne décrite en vertu de ces mouvements est aussi une droite passant par l'origine des coordonnées. La partie de

cette droite qui répond aux coordonnées x, y, z sera donc aussi

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \tfrac{1}{2}t^2\sqrt{g^2 + h^2 + k^2};$$

ce sera l'espace parcouru par le mouvement composé pendant le temps t, d'où l'on voit que ce mouvement sera aussi uniformément accéléré et dû à une force accélératrice égale à $\sqrt{g^2 + h^2 + k^2}$, et, comme les lignes $\frac{1}{2}gt^2$, $\frac{1}{2}ht^2$, $\frac{1}{2}kt^2$ sont les projections de la ligne $\frac{1}{2}t^2\sqrt{g^2 + h^2 + k^2}$ sur les trois axes, les rapports

$$\frac{g}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2}}, \quad \frac{h}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2}}, \quad \frac{k}{\sqrt{g^2 + h^2 + k^2}}$$

seront les cosinus des angles que la direction du mouvement composé fera avec les mêmes axes.

On voit par là que la composition des mouvements uniformément accélérés suit les mêmes règles que celle des mouvements uniformes, et que, par conséquent, la composition et décomposition des forces se fait de la même manière que celle des vitesses, de sorte que les formules trouvées dans le numéro précédent s'appliqueront également aux forces accélératrices, en substituant simplement les forces aux vitesses.

Ainsi, si un mobile est sollicité à la fois par deux forces G et H, suivant des directions données, dont les angles avec trois axes perpendiculaires entre eux soient respectivement α, β, γ et λ, μ, ν, il en résultera, suivant les directions des trois axes, les forces composées

$$G\cos\alpha + H\cos\lambda, \quad G\cos\beta + H\cos\mu, \quad G\cos\gamma + H\cos\nu;$$

et, si K est la force unique résultante de celle-ci, en nommant ϖ, ρ, σ les angles que sa direction fera avec les mêmes axes, on aura les équations

$$K\cos\varpi = G\cos\alpha + H\cos\lambda,$$
$$K\cos\rho = G\cos\beta + H\cos\mu,$$
$$K\cos\sigma = G\cos\gamma + H\cos\nu.$$

Cette manière de considérer la composition des vitesses et celle des

forces comme des résultats de la composition des espaces parcourus me paraît la plus naturelle, et elle a l'avantage de faire voir clairement pourquoi la composition des forces suit nécessairement les mêmes lois que celle des vitesses. Comme on peut considérer les forces indépendamment du mouvement, on a cherché à déduire leur composition de principes purement géométriques ou analytiques; mais il ne serait pas impossible de prouver que toutes les démonstrations qu'on a données de la composition des forces ne sont que la composition des espaces, déguisée; il n'en faut peut-être excepter que celles qui sont fondées sur l'équilibre du levier droit.

10. Si les mouvements suivant les axes des coordonnées étaient composés d'uniformes et d'uniformément accélérés, de manière que l'on eût

$$x = at + \tfrac{1}{2}gt^2, \quad y = bt + \tfrac{1}{2}ht^2, \quad z = ct + \tfrac{1}{2}kt^2,$$

alors la ligne décrite en vertu de ces mouvements ne serait plus droite; elle serait seulement dans un même plan passant par l'origine des coordonnées, car, en éliminant t et t^2 des trois équations, on aurait une équation de la forme

$$lx + my + nz = 0.$$

Mais on peut composer à part les trois mouvements uniformes et les trois mouvements uniformément accélérés; et il en résultera un mouvement composé d'un simple mouvement uniforme suivant une direction donnée, et d'un simple mouvement uniformément accéléré suivant une autre direction donnée.

La nature nous présente aussi la combinaison de ces mouvements dans les projectiles lancés obliquement à l'horizon, en faisant abstraction de la résistance de l'air. Le mouvement uniforme, effet de la vitesse imprimée, se continue en ligne droite, comme s'il était seul; et le mouvement uniformément accéléré, effet de la gravité du corps, se continue aussi verticalement de haut en bas, comme s'il était unique dans le mobile, de manière qu'au bout d'un temps quelconque le corps se trouve au même point où il serait si ces deux mouvements s'effectuaient successivement et indépendamment l'un de l'autre; et à chaque instant, le corps a à la fois la vitesse du mouvement uniforme et la vitesse du mouvement uniformément accéléré, et de ces deux vitesses suivant des directions différentes, se compose la vitesse du projectile.

Soit H la hauteur d'où il faudrait qu'un corps tombât pour acquérir la vitesse avec laquelle le projectile est lancé obliquement à l'horizon; cette vitesse sera exprimée par $\sqrt{2H}$, en prenant la force accélératrice de la gravité pour l'unité (n° 6). De là, en prenant les abscisses x horizontales et dans le plan de la ligne de projection, et les ordonnées y verticales et dirigées de haut en bas, et nommant α l'inclinaison de la ligne de projection avec l'horizontale x, on aura $\sqrt{2H}\cos\alpha$ et $\sqrt{2H}\sin\alpha$ pour les vitesses horizontale et verticale : donc les expressions de x et y deviendront

$$x = t\sqrt{2H}\cos\alpha \quad \text{et} \quad y = t\sqrt{2H}\sin\alpha - \tfrac{1}{2}t^2,$$

parce que, la direction de la gravité étant contraire à celle des ordonnées y, le terme $\frac{1}{2}t^2$, dû à l'accélération de la gravité, doit être pris négativement. En éliminant t de ces équations, on aura

$$y = x\,\mathrm{tang}\,\alpha - \frac{x^2}{4H\cos^2\alpha},$$

équation à une parabole, d'où l'on pourra déduire les propriétés connues de la trajectoire des projectiles dans le vide; mais ce n'est pas ici le lieu d'entrer dans ce détail.

CHAPITRE III.

DU MOUVEMENT CURVILIGNE. DES VITESSES ET DES FORCES DANS CES MOUVEMENTS. ÉQUATIONS GÉNÉRALES DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLLICITÉ PAR DES FORCES QUELCONQUES. DE LA MANIÈRE D'ÉLIMINER LE TEMPS DANS CES ÉQUATIONS POUR TROUVER LA COURBE DÉCRITE PAR LE CORPS.

11. Considérons maintenant un mouvement quelconque, et supposons que les coordonnées x, y, z de la courbe décrite par le mobile soient des fonctions données du temps t. Dans un instant quelconque, au bout du temps t, le corps aura, suivant la direction de l'axe des x, la vitesse x' et la force accélératrice x'' (n° 6); il aura pareillement, suivant la direction de l'axe des y, la vitesse y' et la force accélératrice y'', et, suivant la direction de l'axe des z, la vitesse z' et la force accélératrice z''. Donc les trois vitesses x', y', z' donneront la vitesse composée $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, que nous appellerons u, dont la direction fera avec les trois axes des angles dont les cosinus seront $\frac{x'}{u}$, $\frac{y'}{u}$, $\frac{z'}{u}$, de sorte que, nommant α, β, γ ces angles, on aura (n° 8)

$$x' = u\cos\alpha, \quad y' = u\cos\beta, \quad z' = u\cos\gamma.$$

Nous remarquerons d'abord ici que l'expression de la vitesse u du mobile est la même que celle de la fonction prime de l'arc de la courbe parcourue (n° 37, II^e^ Partie), de sorte que, nommant en général s l'espace curviligne parcouru par le corps et le regardant comme une fonction du temps, on aura s' pour vitesse réelle du mobile, comme si le mouvement était rectiligne. Nous remarquerons ensuite que la direction de cette vitesse sera la même que celle de la tangente de la courbe; car, par les formules du n° 33 de la deuxième Partie, on voit que y' et z' sont les tangentes des angles que la tangente de la courbe projetée sur le plan des x et y et sur celui des x et z fait avec l'axe des x; mais, comme dans ces formules y et z sont supposées fonctions de x, pour les appliquer au cas où l'on suppose x, y, z fonctions d'une troisième variable t, il faudra, suivant la remarque du n° 50 de la première Partie, substituer $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{z'}{x'}$ à la place de y' et z', de sorte que les tangentes des angles dont il s'agit seront exprimées par $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{z'}{x'}$; ces angles seront donc les mêmes que ceux des projections sur les mêmes plans de la ligne qui serait décrite par la vitesse composée de trois vitesses x', y', z' (n° 7); par conséquent, cette ligne coïncidera avec la tangente de la courbe. De là il suit que, si les causes qui empêchent le mouvement d'être rectiligne et uniforme venaient à cesser subitement dans un instant quelconque, le mobile continuerait son mouvement par la tangente avec une vitesse égale à la fonction prime de l'arc décrit.

Suivant le Calcul différentiel, les fonctions primes x', y', z' sont représentées par $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, et les fonctions secondes x'', y'', z'' par $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, en prenant dt constant.

12. Les trois forces accélératrices x'', y'', z'' donneront de même (n° 9) une force unique exprimée par $\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}$, que nous appellerons P et dont la direction fera avec les trois axes des coordonnées x, y, z des angles dont les cosinus seront $\frac{x''}{P}$, $\frac{y''}{P}$, $\frac{z''}{P}$, de sorte que, nommant λ, μ, ν ces angles, on aura

$$x'' = P\cos\lambda, \quad y'' = P\cos\mu, \quad z'' = P\cos\nu.$$

Ainsi, connaissant la loi du mouvement du corps, c'est-à-dire les valeurs de x, y, z en t, on pourra trouver, par ces équations, la force accélératrice et sa direction à chaque instant, et, réciproquement, connaissant la force P avec les angles λ, μ, ν, on aura trois équations du

second ordre qui serviront à déterminer x, y et z en t. Les problèmes de la première espèce ne dépendent que de l'analyse directe des fonctions et sont, par conséquent, toujours résolubles; ceux de la seconde espèce dépendent de l'analyse inverse des fonctions et sont sujets à toutes les difficultés de cette analyse.

Si le mobile était sollicité à la fois par deux forces accélératrices P et Q suivant des directions faisant avec les axes des x, y, z des angles λ, μ, ν pour la force P et ϖ, ρ, σ pour la force Q, on aurait, par les formules des numéros cités,

$$x'' = \mathrm{P}\cos\lambda + \mathrm{Q}\cos\varpi,$$
$$y'' = \mathrm{P}\cos\mu + \mathrm{Q}\cos\rho,$$
$$z'' = \mathrm{P}\cos\nu + \mathrm{Q}\cos\sigma,$$

et ainsi de suite, pour tel nombre de forces qu'on voudra.

13. Supposons que les directions des forces P et Q fassent avec la tangente de la courbe les angles Δ, Γ; puisque, dans les formules du n° 11, les angles α, β, γ sont les mêmes que ceux de la tangente avec les trois axes, on aura, par la formule trouvée à la fin du n° 8,

$$\cos\Delta = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu,$$

et de même,

$$\cos\Gamma = \cos\alpha\cos\varpi + \cos\beta\cos\rho + \cos\gamma\cos\sigma.$$

Donc, multipliant les trois dernières équations du numéro précédent par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et les ajoutant ensemble, on aura

$$x''\cos\alpha + y''\cos\beta + z''\cos\gamma = \mathrm{P}\cos\Delta + \mathrm{Q}\cos\Gamma.$$

Substituant pour $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ leurs valeurs $\frac{x'}{u}$, $\frac{y'}{u}$, $\frac{z'}{u}$ (n° 11) et remarquant que $\frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$ est la fonction prime de $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, c'est-à-dire de s', que, par conséquent, cette quantité est égale à s'', on aura l'équation

$$s'' = \mathrm{P}\cos\Delta + \mathrm{Q}\cos\Gamma,$$

qui est, comme l'on voit, semblable aux équations du mouvement rectiligne suivant les trois axes.

Cette équation sert à déterminer directement la vitesse réelle du corps, qui est exprimée par s', et l'on voit que les forces perpendiculaires à la tangente n'influent en rien sur la vitesse, puisque, les angles Δ, Γ étant alors droits, leurs cosinus sont nuls, ce qui détruit les termes dus à ces forces dans l'expression de s''; d'où l'on peut conclure, en général, que lorsqu'un corps est contraint de se mouvoir dans un canal d'une figure donnée, comme l'action des parois du canal sur le corps ne peut s'exercer que perpendiculairement au canal même, la vitesse du corps ne sera nullement altérée par cette action. Au contraire, les forces qui agissent suivant la tangente produisent sur la vitesse leur plein et entier effet, comme si le mouvement du corps était rectiligne, puisque, les angles Δ, Γ devenant nuls par ces forces, leurs cosinus sont égaux à l'unité.

14. La gravité et toutes les forces d'attraction connues agissent également sur toutes les parties matérielles des corps et produisent le même mouvement, abstraction faite de l'inégalité des forces à raison des distances, de sorte que l'effet de l'action de ces forces est indépendant de la masse du corps mû et est le même, par rapport à la vitesse imprimée, que si la masse était réduite à un point. Dans les attractions réciproques des corps, la force d'attraction est proportionnelle à la masse du corps attirant, parce que chacune de ses particules attire également; par conséquent, le mouvement absolu imprimé au corps attiré est simplement proportionnel à la masse du corps attirant.

Il n'en est pas de même des forces qui ne pénètrent point dans l'intérieur des corps et qui n'agissent qu'à l'extérieur, comme l'action des ressorts, celle de la résistance des fluides, les forces produites par la pression, par la tension des fils, etc. Il est clair que ces forces ne peuvent produire le même effet sur différents corps, à moins qu'elles ne soient proportionnelles à leurs masses; car, si une force double, par exemple, agit sur un corps de masse double, c'est la même chose

que si deux forces simples agissent séparément sur deux masses simples; il est clair aussi que l'effet produit sur une même masse ou des masses égales par différentes forces, c'est-à-dire le mouvement ou la vitesse imprimée, doit être proportionnelle aux forces; ainsi, si une force F, agissant sur une masse M, y imprime la vitesse V, une force mF, agissant sur la masse mM, y imprimera la même vitesse V; mais la force mF, agissant sur la masse M, lui imprimera la vitesse mV: donc la même force mF imprimera à la masse mM la vitesse V et à la masse M la vitesse mV, d'où il suit que les vitesses imprimées par une même force à des masses différentes sont en raison inverse des masses. Donc, en général, l'effet d'une force donnée sur une masse donnée est en raison directe de la force et en raison inverse de la masse, ou comme la force divisée par la masse.

Ce principe est confirmé par l'expérience, car un ressort placé entre deux corps et agissant également sur l'un et sur l'autre leur imprime des vitesses en raison inverse de leurs masses. Lorsque deux corps durs, mus sur la même ligne en sens opposés, viennent à se choquer avec des vitesses en raison inverse de leurs masses, ils s'arrêtent après le choc par la destruction réciproque de leur mouvement, et s'ils sont parfaitement élastiques ils sont réfléchis en arrière, chacun avec la même vitesse qu'il avait avant le choc.

Dans les corps pesants, comme la gravité agit également sur toutes les parties de la masse du corps, son action absolue est proportionnelle à la masse; donc, divisant cette action par la masse, l'effet de la pesanteur pour imprimer du mouvement aux corps devient indépendant de leur masse et est le même pour tous les corps. Mais si deux corps pesants se tiennent par un fil passant sur une poulie, comme les forces qui résultent de leur pesanteur, et qui sont proportionnelles aux masses, tirent le fil en sens contraire, il n'y a que la différence de ces forces qui puisse leur imprimer du mouvement, et, comme les deux corps doivent se mouvoir conjointement et parcourir le même espace vertical dans le même temps, la masse totale à mouvoir est la somme des masses; ainsi, l'action de la gravité pour mouvoir ces corps se trouve

diminuée en raison de la différence des masses à leur somme; par conséquent, les espaces parcourus au bout d'un temps quelconque seront à ceux d'un corps pesant qui tombe librement dans la même raison. C'est ce que l'expérience confirme dans la machine inventée par Atwood pour démontrer les lois de l'accélération des graves.

15. Il résulte du principe que nous venons d'exposer que les forces accélératrices d'un corps doivent être estimées par les valeurs absolues des forces qui agissent sur le corps, divisées par la masse même du corps. Ainsi, si P, Q, ... expriment les valeurs absolues des forces qui agissent sur un corps dont la masse est M, suivant des directions qui fassent avec les axes des coordonnées x, y, z les angles λ, μ, ν pour la force P, les angles ϖ, ρ, σ pour la force Q, et ainsi des autres, il faudra, dans les formules du n° 12, mettre partout $\frac{P}{M}$, $\frac{Q}{M}$, ... à la place de P, Q, ..., ou, ce qui reviendra au même, multiplier par M les quantités x'', y'', z''. De cette manière on aura donc, pour les équations du mouvement du corps M, sollicité par les forces ou puissances quelconques P, Q, ..., les équations

$$\begin{aligned} Mx'' &= P\cos\lambda + Q\cos\varpi + \dots, \\ My'' &= P\cos\mu + Q\cos\rho + \dots, \\ Mz'' &= P\cos\nu + Q\cos\sigma + \dots. \end{aligned}$$

Lorsque des corps s'attirent mutuellement, comme l'attraction est censée venir de toutes les parties de la masse attirante et agir sur toutes les parties de la masse attirée, il s'ensuit que la valeur absolue de la force d'attraction entre deux corps doit être proportionnelle au produit de leurs masses.

16. Dans ces équations, les coordonnées x, y, z sont regardées comme des fonctions du temps t. Pour avoir les équations mêmes de la courbe décrite par le corps, il faudra éliminer le temps et réduire les coordonnées y et z à de simples fonctions de x. Voici l'esprit et le fondement de cette réduction.

En regardant les quantités x, y, z comme fonctions de t, lorsque t devient $t+\theta$, ces quantités deviennent

$$x+\theta x'+\frac{\theta^2}{2}x''+\frac{\theta^3}{2.3}x'''+\dots,$$

$$y+\theta y'+\frac{\theta^2}{2}y''+\frac{\theta^3}{2.3}y'''+\dots,$$

$$z+\theta z'+\frac{\theta^2}{2}z''+\frac{\theta^3}{2.3}z'''+\dots,$$

par les principes établis dans la première Partie sur le développement des fonctions.

En regardant, d'un autre côté, y et z comme fonctions de x, lorsque x devient $x+i$, ces mêmes quantités deviennent

$$y+i(y')+\frac{i^2}{2}(y'')+\frac{i^3}{2.3}(y''')+\dots,$$

$$z+i(z')+\frac{i^2}{2}(z'')+\frac{i^3}{2.3}(z''')+\dots.$$

Je renferme ici les quantités y', y'', ..., z', z'', ... entre des parenthèses, pour les distinguer des mêmes quantités relatives à la première hypothèse.

Donc, si l'on fait

$$i=\theta x'+\frac{\theta^2}{2}x''+\frac{\theta^3}{2.3}x'''+\dots,$$

il faudra que l'on ait, quel que soit θ, l'équation

$$i(y')+\frac{i^2}{2}(y'')+\frac{i^3}{2.3}(y''')+\dots=\theta y'+\frac{\theta^2}{2}y''+\frac{\theta^3}{2.3}y'''+\dots,$$

et de même,

$$i(z')+\frac{i^2}{2}(z'')+\frac{i^3}{2.3}(z''')+\dots=\theta z'+\frac{\theta^2}{2}z''+\frac{\theta^3}{2.3}z'''+\dots.$$

Substituant la valeur de i et comparant les termes affectés de la même puissance de θ, la première équation donnera

$$y'=(y')x',\quad y''=(y')x''+(y'')x'^2,$$
$$y'''=(y')x'''+3(y'')x'x''+(y''')x'^3,$$

et ainsi de suite; d'où l'on tire

$$(y')=\frac{y'}{x'},\quad (y'')=\frac{y''-(y')x''}{x'^2}=\frac{y''}{x'^2}-\frac{y'x''}{x'^3},$$
$$(y''')=\frac{y'''-(y')x'''-3(y'')x'x''}{x'^3}=\frac{y'''}{x'^3}-\frac{y'x''}{x'^4}-\frac{3y''x''}{x'^4}+\frac{3y'x''^2}{x'^5},$$

et ainsi de suite; et l'on aura, par la seconde équation, des formules semblables pour (z'), (z''), ... en changeant seulement la lettre y en z.

Ces formules s'accordent avec celles que nous avons trouvées, d'une autre manière, dans la première Partie (n° **50**), car on voit que

$$(y')=\frac{y'}{x'},\quad (y'')=\frac{\left(\frac{y'}{x'}\right)'}{x'},\quad \dots.$$

L'analyse précédente est plus directe et résulte des premiers principes de la chose; mais celle de l'endroit cité a l'avantage de faire voir la loi de la progression, car elle donne immédiatement

$$(y')=\frac{y'}{x'},\quad (y'')=\frac{[(y')]'}{x'},\quad (y''')=\frac{[(y'')]'}{x'},\quad \dots.$$

et ainsi de suite, en désignant par un trait appliqué aux parenthèses carrées la fonction prime de la quantité renfermée entre les parenthèses.

Par le moyen de ces formules, on pourra transformer les équations qui contiennent les fonctions dérivées x', x'', ..., y', y'', ..., z', z'', ... relativement à t en d'autres équations où il n'y ait que les fonctions dérivées (y'), (y''), ..., (z'), (z''), ... relativement à x.

CHAPITRE IV.

DE LA QUESTION OU IL S'AGIT DE TROUVER LA RÉSISTANCE QUE LE MILIEU DOIT OPPOSER POUR QUE LE PROJECTILE DÉCRIVE UNE COURBE DONNÉE. ANALYSE DE LA SOLUTION QUE NEWTON A DONNÉE DE CE PROBLÈME DANS LA PREMIÈRE ÉDITION DE SES « PRINCIPES ». SOURCE DE L'ERREUR DE CETTE SOLUTION. DISTINCTION ENTRE LA MÉTHODE DES SÉRIES ET CELLE DES FONCTIONS DÉRIVÉES, OU DU CALCUL DIFFÉRENTIEL.

17. Pour montrer l'usage des formules que nous venons de donner, supposons qu'on demande la résistance du milieu en vertu de laquelle un corps pesant lancé dans ce milieu décrirait une courbe donnée. On regardera la résistance comme une force retardatrice qui agit dans la direction même du corps, c'est-à-dire dans celle de la tangente de la courbe; ainsi, en nommant r la résistance, c'est-à-dire l'action du milieu résistant sur la surface du corps, divisée par la masse même du corps, on aura $-r\cos\alpha$, $-r\cos\beta$, $-r\cos\gamma$ pour les forces accélératrices qui en résultent suivant les directions des axes des x, y, z, les angles α, β, γ étant ceux de la tangente avec ces axes. De plus, si l'on nomme g la force accélératrice de la gravité, et qu'on prenne les coordonnées y verticales et dirigées de bas en haut, on aura $-g$ pour la force accélératrice provenant de la gravité suivant les coordonnées y.

Donc les équations du mouvement seront

$$x'' = -r\cos\alpha, \quad y'' = -g - r\cos\beta, \quad z'' = -r\cos\gamma.$$

Substituant pour $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ leurs valeurs $\frac{x'}{u}$, $\frac{y'}{u}$, $\frac{z'}{u}$ (n° 11), où

u, vitesse du corps, est $= s' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, on aura celle-ci :

$$x'' = -\frac{rx'}{u}, \quad y'' = -g - \frac{ry'}{u}, \quad z'' = -\frac{rz'}{u}.$$

La première et la dernière donnent

$$\frac{x''}{x'} = \frac{z''}{z'},$$

d'où l'on tire, en prenant les fonctions primitives,

$$z = mx + n,$$

m et n étant des constantes arbitraires. Cette équation, étant celle d'un plan vertical, fait voir que la courbe est nécessairement toute dans ce plan : ainsi, en prenant l'axe des x dans ce même plan, on aura $z = 0$ et $z' = 0$, et les équations de la courbe se réduiront aux deux premières. Mais, comme dans ces équations les variables x, y sont supposées fonctions du temps, et que pour avoir l'équation de la courbe on doit regarder y comme fonction de x, il faudra chercher ses fonctions dérivées dans cette hypothèse par les formules du numéro précédent.

Supposons, pour abréger, $\frac{r}{u} = q$; on aura

$$x'' = -qx', \quad y'' = -g - qy';$$

substituant ces valeurs dans l'expression de (y'') du n° 16, on aura

$$(y'') = -\frac{g}{x'^2};$$

ainsi la valeur de q dépend de (y''). Or on a, par le même numéro,

$$(y'') = \frac{y'''}{x'^3} - \frac{y'x'''}{x'^4} - \frac{3(y'')x''}{x'^2};$$

mais, connaissant les valeurs de x'' et y'', il n'y aura qu'à prendre leurs fonctions primes pour avoir celles de x''' et y''', et l'on trouvera, en désignant par q' la fonction prime de q,

$$x''' = -qx'' - q'x' = (q^2 - q')x',$$
$$y''' = -qy'' - q'y' = qg + (q^2 - q')y'.$$

Par ces substitutions, les deux premiers termes de la valeur de (y''') donneront $\frac{qg}{x'^3}$ et le terme $-\frac{3(y'')x''}{x'^2}$ donnera $-\frac{3qg}{x'^3}$; de sorte que l'on aura $(y''')=-\frac{2qg}{x'^3}$. Or, q étant $=\frac{r}{\sqrt{x'^2+y'^2}}$, on fera cette substitution, et l'on en chassera x' et y' au moyen des équations $(y')=\frac{y'}{x'}$ et $(y'')=-\frac{g}{x'^2}$, lesquelles donneront

$$x'^3\sqrt{x'^2+y'^2}=x'^3\sqrt{1+(y')^2}=\frac{g^2\sqrt{1+(y')^2}}{(y'')^2};$$

on aura ainsi

$$(y''')=\frac{2r(y'')^2}{g\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Comme les fonctions dérivées (y'), (y''), (y''') se rapportent maintenant à la variable x, nous pouvons les représenter simplement par y', y'', y'''; on aura donc

$$\frac{r}{g}=-\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2}.$$

Or, la courbe étant donnée, on a y en fonction de x : de là on tirera les fonctions dérivées y', y'', y''', et la formule précédente donnera, pour chaque point de la courbe, le rapport de la résistance à la gravité.

La vitesse u sera

$$u=\sqrt{x'^2+y'^2}=x'\sqrt{1+(y')^2}=\frac{\sqrt{g}\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{-(y'')}},$$

c'est-à-dire, en changeant (y') en y',

$$u=\frac{\sqrt{g}\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y''}}.$$

Pour traduire ces formules en Calcul différentiel, il faudra changer y' en $\frac{dy}{dx}$, et y'' en $\frac{d^2y}{dx^2}$, en prenant dx constant, parce que ces fonctions dérivées sont ici relatives à la variable x.

Si l'on suppose la résistance proportionnelle au carré de la vitesse et

à la densité du milieu, alors, nommant Δ cette densité dans un lieu quelconque, on aura

$$r=mu^2\Delta,$$

m étant un coefficient constant; donc, substituant la valeur de u,

$$r=\frac{mg(1+y'^2)\Delta}{-y''},$$

et, mettant cette valeur dans l'équation ci-dessus, elle deviendra

$$m\Delta=\frac{y'''}{2y''\sqrt{1+y'^2}},$$

par où l'on déterminera la densité du milieu nécessaire pour faire décrire la courbe donnée. Réciproquement, cette équation servira à déterminer la courbe lorsque la densité du milieu sera donnée.

Pour les projectiles lancés dans l'air, on peut supposer la densité du milieu constante; ainsi, faisant, pour plus de simplicité, $2m\Delta=\frac{1}{k}$, l'équation de la courbe sera

$$\frac{y'''}{y''}=k\sqrt{1+y'^2}=ks',$$

s étant l'arc de la courbe, d'où l'on tire, en prenant les fonctions primitives,

$$y=Ae^{ks},$$

A étant une constante arbitraire : c'est la forme la plus simple sous laquelle puisse être mise l'équation de cette courbe. On peut tirer de ces équations les différentes approximations qui ont été données jusqu'ici pour la détermination de la courbe décrite par les boulets et les bombes; mais les bornes de cet écrit nous empêchent d'entrer dans aucun détail sur ce sujet.

18. Nous remarquerons encore qu'on aurait pu déduire tout de suite l'équation de la courbe des équations du mouvement,

$$x''=-\frac{rx'}{s'},\quad y''=-g-\frac{ry'}{s'},$$

par l'élimination immédiate du temps t. En effet, x et y étant fonctions de t, on peut réciproquement regarder y et t comme fonctions de x, et, par la règle donnée dans le n° 50 de la première Partie, si l'on regarde, en général, x, y, t comme fonctions d'une autre variable quelconque z, il faudra substituer $\frac{x'}{t'}$ et $\frac{y'}{t'}$ à la place de x', y', et $\frac{\left(\frac{x'}{t'}\right)'}{t'}$, $\frac{\left(\frac{y'}{t'}\right)'}{t'}$ à la place de x'', y''; mais, en prenant x pour variable principale à la place de t, on fera $x'=1$, et l'on aura à substituer $\frac{1}{t'}$ et $\frac{y'}{t'}$ à la place de x' et y', et $-\frac{t''}{t'^3}$ et $\frac{y''}{t'^2}-\frac{y't''}{t'^3}$ à la place de x'' et y''.

Les deux équations deviendront donc, à cause de $s'=\sqrt{x'^2+y'^2}$,

$$-\frac{t''}{t'^3}=-\frac{r}{\sqrt{1+y'^2}},\quad \frac{y''}{t'^2}-\frac{y't''}{t'^3}=-g-\frac{ry'}{\sqrt{1+y'^2}},$$

d'où il faudra éliminer la fonction t'. Substituant, dans la seconde équation, la valeur de $\frac{t''}{t'^3}$ tirée de la première, elle deviendra

$$\frac{y''}{t'^2}=-g;$$

divisant par y'', et prenant de part et d'autre les fonctions primes, on aura

$$-\frac{2t''}{t'^3}=\frac{gy'''}{y''^2},$$

valeur qui, étant substituée dans la première équation, donnera, comme plus haut,

$$\frac{r}{g}=-\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2}.$$

A l'égard de la vitesse $u=s'=\sqrt{x'^2+y'^2}$, elle deviendra $\frac{\sqrt{1+y'^2}}{t'}$, et, comme on vient de trouver $t'=\sqrt{-\frac{y''}{g}}$, la vitesse deviendra $\frac{\sqrt{g}\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{-y''}}$, comme ci-dessus.

Si la force de la gravité g était variable, alors la valeur de $\frac{r}{g}$ que

l'on vient de trouver ne serait plus exacte, car, en prenant les fonctions primes de l'équation

$$\frac{1}{t'^2}=-\frac{g}{y''},$$

on aurait

$$-\frac{2t''}{t'^3}=\frac{gy'''}{y''^2}-\frac{g'}{y''},$$

et la substitution de cette valeur donnerait

$$\frac{r}{g}=-\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2}+\frac{g'\sqrt{1+y'^2}}{2gy''}.$$

Cette manière d'éliminer le temps dans les équations du mouvement, pour avoir l'équation de la courbe décrite, est analogue à celle qu'on emploie dans le Calcul différentiel; mais l'analyse du n° 16, fondée sur le développement des fonctions, est, à certains égards, plus directe; elle nous sera d'ailleurs utile pour découvrir, comme nous l'avons annoncé au commencement de cet écrit, la véritable source de la méprise où Newton est tombé dans la première édition des *Principes*, en résolvant le problème dont nous venons de nous occuper.

Quoiqu'il puisse paraître peu important de découvrir en quoi et comment Newton a pu se tromper dans une solution qu'il a ensuite lui-même abandonnée, néanmoins, comme tout ce qui a rapport à l'invention et aux premiers développements de l'Analyse infinitésimale mérite l'attention de ceux qui s'intéressent à l'histoire des sciences, j'ai cru que l'on me saurait gré de discuter de nouveau ce sujet, comme un point qui n'a pas été assez éclairci, parce qu'il tient à une distinction subtile entre la méthode différentielle et la méthode des séries, que Newton a employée dans sa première solution (liv. II, prop. X).

19. Voici la construction qui sert de fondement à cette solution. Le mobile étant parvenu à un point quelconque de la courbe, sans la résistance et la gravité il décrirait, dans un temps donné très-petit, une partie très-petite de la tangente que nous désignerons par z; soient γ le petit espace que la gravité lui ferait décrire dans le même temps per-

pendiculairement à l'horizon, et ρ le petit espace dont la résistance diminue l'espace α parcouru sur la tangente; il est clair que le rapport de ρ à γ sera celui de la résistance à la gravité. Ainsi le corps, dans le temps qu'il aurait parcouru sur la tangente l'espace $\alpha - \rho$, serait descendu verticalement de la quantité γ; par conséquent, γ sera la flèche de l'arc $\alpha - \rho$. Maintenant, si l'on considère le corps comme partant du même point et rebroussant chemin pour décrire en sens contraire le même arc de courbe qu'il a parcouru, il faudra regarder la résistance comme négative, et par conséquent comme une force qui accélère le mouvement au lieu de le retarder. Le mobile décrira ainsi, dans le même temps très-petit, l'espace $\alpha + \rho$ sur la même tangente dans une direction contraire, et descendra verticalement par le même espace γ, en vertu de la gravité. Par conséquent, γ sera la flèche de l'arc $\alpha + \rho$, pris de l'autre côté du point de la courbe dont il s'agit. Or les flèches étant, pour les arcs infiniment petits, comme les carrés des arcs ou des tangentes, la flèche de la portion $\alpha - \rho$ de l'arc $\alpha + \rho$ sera $\gamma\left(\frac{\alpha-\rho}{\alpha+\rho}\right)^2$; donc la différence des flèches pour les arcs égaux $\alpha - \rho$, pris de part et d'autre du point donné de la courbe, sera

$$\gamma\left[1 - \frac{(\alpha-\rho)^2}{(\alpha+\rho)^2}\right] = \frac{4\alpha\gamma\rho}{(\alpha+\rho)^2}.$$

Nommons cette différence δ; on aura

$$\frac{4\alpha\gamma\rho}{(\alpha+\rho)^2} = \delta \quad \text{et} \quad \frac{\rho}{\gamma} = \frac{\delta(\alpha+\rho)^2}{4\alpha\gamma^2} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2},$$

à cause que la petite ligne ρ, parcourue d'un mouvement uniformément accéléré, est infiniment plus petite que la ligne α, parcourue dans le même temps d'un mouvement uniforme.

Tel est le raisonnement de Newton, présenté de la manière la plus claire, et le résultat que nous venons de trouver s'accorde avec celui du corollaire II du problème cité, où il est visible que les lignes CF et FG sont ce que nous avons nommé α et γ, et que la différence FG — Kl est ce que nous avons nommé δ.

Maintenant, en prenant les abscisses x horizontales et les ordonnées y verticales et dirigées de bas en haut, Newton suppose que, pour l'abscisse $x + o$, l'ordonnée exprimée en série est

$$y + Qo - Ro^2 - So^3 + \ldots,$$

et il remarque que la partie de la tangente qui répond à la partie o de l'axe est $o\sqrt{1+Q^2}$, et que la flèche, c'est-à-dire la partie de l'ordonnée comprise entre la courbe et la tangente, est $Ro^2 + So^3 + \ldots$. En faisant o négatif, on aura la flèche qui répond à la même partie de la tangente, prise de l'autre côté du point de contact, et qui sera, par conséquent, $Ro^2 - So^3 + \ldots$, et la différence des deux flèches sera $2So^3 - \ldots$. Or il est visible que les quantités $o\sqrt{1+Q^2}$, $Ro^2 + So^3 + \ldots$ et $2So^3 - \ldots$ répondent à celles que nous avons nommées α, γ et δ: donc la quantité $\frac{\alpha\delta}{4\gamma^2}$, qui exprime le rapport de la résistance à la gravité, deviendra, en divisant le haut et le bas par o^3,

$$\frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2(R+So)^2} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2},$$

la quantité infiniment petite o s'évanouissant à côté de la quantité R. C'est aussi le résultat trouvé par Newton dans l'exemple premier du même problème.

Suivant notre notation, lorsque x devient $x + o$, y devient

$$y + oy' + \frac{o^2}{2}y'' + \frac{o^3}{2.3}y''' + \ldots;$$

donc, comparant avec la série de Newton, on a

$$Q = y', \quad R = -\frac{y''}{2}, \quad S = -\frac{y'''}{2.3};$$

substituant ces valeurs dans la formule précédente, le rapport de la résistance à la gravité deviendra $-\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{3y''^2}$, au lieu que nous l'avons trouvé ci-dessus (n° 17) $-\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2}$. D'où il suit que la solution de Newton est fautive.

Il est remarquable que, si l'on substitue simplement y', y'', y''' ou $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ pour Q, — R, — S, on a un résultat exact : c'est ce qui a fait croire aux Bernoulli, qui ont découvert les premiers l'erreur de Newton, et à tous ceux qui en ont parlé depuis, que cette erreur venait de ce que Newton avait pris les termes de la série $Qo - Ro^2 - So^3 - \ldots$ pour les différences premières, secondes et troisièmes de l'ordonnée, tandis que ces termes ne sont égaux qu'à ces différences divisées par 1, 2, 6, ... Mais il est facile de voir que la solution de Newton est indépendante de la considération de ces différences et que la substitution des termes Ro^2, So^3 de la série dont il s'agit à la place des quantités p et $\frac{\delta}{2}$, dans la formule $\frac{\alpha\delta}{4\gamma}$, est légitime; ainsi l'erreur doit être dans cette formule même, qui donne le rapport de la résistance à la gravité, et ce qui doit le prouver sans réplique, c'est que, si la gravité était variable, la même formule aurait encore lieu, puisque dans les deux mouvements direct et rétrograde le corps est censé descendre verticalement de la même ligne γ. Ainsi, dans ce cas, on devrait aussi avoir une solution exacte par la substitution de y', y'', y''' à la place de Q, — R, — S, ce qui n'est pas, comme on le voit par la valeur de $\frac{r}{g}$ que nous avons trouvée pour ce cas dans le numéro précédent.

20. Pour découvrir la source de l'erreur, nous allons réduire la solution de Newton en analyse. En nommant u la vitesse dans un point de la courbe, $u\theta$ est l'espace que le mobile parcourrait dans la tangente pendant le temps θ, sans la gravité et la résistance. Nommant g la force absolue de la gravité et r celle de la résistance, $\frac{g\theta^2}{2}$ et $\frac{r\theta^2}{2}$ seront les espaces parcourus en vertu de ces forces, regardées comme constantes pendant le temps θ, supposé très-petit. Ainsi le corps aura parcouru, suivant la tangente, l'espace $u\theta - \frac{r\theta^2}{2}$, et, suivant l'ordonnée verticale y, l'espace $\frac{g\theta^2}{2}$, lequel représente la flèche qui répond à la tangente $u\theta - \frac{r\theta^2}{2}$. Supposons maintenant, comme Newton, que le mobile

rebrousse chemin avec la même vitesse u et sur la même tangente; dans le temps T, il décrirait l'espace $u\mathrm{T} + \frac{r\mathrm{T}^2}{2}$, parce que la résistance doit être prise en sens contraire; c'est l'espace pris négativement qui répond au temps $\theta = -\mathrm{T}$, et la flèche correspondante serait $\frac{g\mathrm{T}^2}{2}$, et, si l'on veut que les deux espaces décrits de part et d'autre soient égaux, comme Newton le suppose, on aura l'équation

$$u\theta - \frac{r\theta^2}{2} = u\mathrm{T} + \frac{r\mathrm{T}^2}{2},$$

d'où l'on tire, aux θ^3 près,

$$\mathrm{T} = \theta - \frac{r\theta^2}{u}.$$

Substituant cette valeur dans la flèche $\frac{g\mathrm{T}^2}{2}$, elle devient $\frac{g\theta^2}{2} - \frac{gr\theta^3}{u}$; et la différence des deux flèches sera $\frac{gr\theta^3}{u}$; c'est la quantité que nous avons nommée ci-dessus δ. D'un autre côté, il est clair qu'on a, suivant les dénominations employées ci-dessus,

$$\alpha = u\theta - \frac{r\theta^2}{2}, \quad \gamma = \frac{g\theta^2}{2}, \quad \rho = \frac{r\theta^2}{2};$$

donc

$$\frac{r}{g} = \frac{\rho}{\gamma} = \frac{\delta\alpha}{4\gamma^2};$$

de là, en faisant $\alpha = o\sqrt{1+\mathrm{Q}^2}$, et prenant $Ro^2 + So^3$, $Ro^2 - So^3$ pour les deux flèches, ce qui donne $\gamma = Ro^2$, $\delta = 2So^3$, on a

$$\frac{r}{g} = \frac{\rho}{\gamma} = \frac{\mathrm{S}\sqrt{1+\mathrm{Q}^2}}{2\mathrm{R}^2},$$

comme Newton l'a trouvé par sa construction.

21. Maintenant il est aisé de voir que ce résultat vient des équa-

tions

$$u\theta - \frac{r\theta^2}{2} = o\sqrt{1+Q^2}, \quad -uT - \frac{rT^2}{2} = -o\sqrt{1+Q^2},$$

$$\frac{g\theta^2}{2} = Ro^2 + So^3, \qquad \frac{gT^2}{2} = Ro^2 - So^3,$$

ou bien simplement de celles-ci,

$$u\theta - \frac{r\theta^2}{2} = o\sqrt{1+Q^2}, \quad \frac{g\theta^2}{2} = Ro^2 + So^3,$$

en prenant θ et o positivement et négativement, ce qui revient à vérifier ces équations indépendamment de la valeur de o, qui en effet doit demeurer indéterminée, étant supposée très-petite.

La première équation donne, aux termes du troisième ordre près, θ et o étant du premier,

$$\theta = \frac{o\sqrt{1+Q^2}}{u} + \frac{r(1+Q^2)o^2}{2u^3}.$$

Cette valeur étant substituée dans la seconde, on a, au quatrième ordre près,

$$\frac{g(1+Q^2)o^2}{2u^2} + \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}o^3}{2u^4} = Ro^2 + So^3,$$

et la comparaison des termes homogènes en o donne

$$R = \frac{g(1+Q^2)}{2u^2}, \quad S = \frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{2u^4}.$$

De la première on tire $u^2 = \frac{g(1+Q^2)}{2R}$, et, cette valeur étant substituée dans la seconde, on a le résultat de Newton :

$$\frac{r}{g} = \frac{S\sqrt{1+Q^2}}{2R^2}.$$

Mais nous devons remarquer que ce dernier résultat, étant tiré de la comparaison des termes affectés de o^3 dans la transformée de l'équation $\frac{g\theta^2}{2} = Ro^2 + So^3$, ne saurait être exact, parce que le premier membre de cette équation, qui est l'expression de la flèche en temps, n'est lui-même exact qu'aux θ^3 près, de sorte qu'à la rigueur il n'y a d'exact que le résultat $R = \frac{g(1+Q^2)}{2u^2}$, tiré de la comparaison des termes du second ordre. Pour avoir de cette manière la valeur exacte de $\frac{r}{g}$, en la déduisant des termes affectés de o^3, il faudrait que l'expression de la flèche en θ fût elle-même exacte jusqu'aux θ^3; mais, le terme qui devrait suivre $\frac{g\theta^2}{2}$ n'étant pas donné immédiatement par les principes de la Mécanique, on ne peut le trouver que par la loi de la dérivation, de la manière suivante.

22. Puisque, suivant l'hypothèse de Newton (n° 19), x croissant de o, y croît de $Qo - Ro^3 - So^3 - \ldots$, et que $o\sqrt{1+Q^2} = u\theta - \frac{r\theta^2}{2}$ et $Ro^2 + So^3 = \frac{g\theta^2}{2}$ (numéro précédent), θ étant l'accroissement du temps t, correspondant à l'accroissement o de l'abscisse x, il s'ensuit que, t devenant $t+\theta$, x devient

$$x + \frac{u}{\sqrt{1+Q^2}}\theta - \frac{r}{\sqrt{1+Q^2}}\frac{\theta^2}{2},$$

et y devient

$$y + \frac{Qu}{\sqrt{1+Q^2}}\theta - \left(\frac{Qr}{\sqrt{1+Q^2}} + g\right)\frac{\theta^2}{2}.$$

Or, en rapportant à t les fonctions dérivées $x', x'', \ldots, y', y'', \ldots$ lorsque t devient $t+\theta$, x et y deviennent en général

$$x + x'\theta + x''\frac{\theta^2}{2} + x'''\frac{\theta^3}{2.3} + \cdots,$$

$$y + y'\theta + y''\frac{\theta^2}{2} + y'''\frac{\theta^3}{2.3} + \cdots;$$

donc, comparant avec les formules précédentes, on a

$$x' = \frac{u}{\sqrt{1+Q^2}}, \quad x'' = -\frac{r}{\sqrt{1+Q^2}},$$

$$y' = \frac{Qu}{\sqrt{1+Q^2}}, \quad y'' = -\frac{Qr}{\sqrt{1+Q^2}} - g.$$

D'un autre côté, puisque x et y deviennent en même temps $x+o$ et $y+Qo-Ro^2-So^3-\ldots$, on aura aussi

$$o=x'\theta+x''\frac{\theta^2}{2}+x'''\frac{\theta^3}{2.3}+\cdots,$$

$$Qo-Ro^2-So^3-\ldots=y'\theta+y''\frac{\theta^2}{2}+y'''\frac{\theta^3}{2.3}+\cdots.$$

Donc, comme la flèche est exprimée en général par $Ro^2+So^3+\ldots$, son expression en θ sera

$$Q\left(x'\theta+x''\frac{\theta^2}{2}+x'''\frac{\theta^m}{2.3}+\cdots\right)-y'\theta-y''\frac{\theta^2}{2}-y'''\frac{\theta^3}{2.3}-\cdots$$

ou

$$(Qx'-y')\theta+(Qx''-y'')\frac{\theta^2}{2}+(Qx'''-y''')\frac{\theta^3}{2.3}+\cdots.$$

Les deux premiers termes se réduisent à $\frac{g\theta^2}{2}$ par la substitution des valeurs de x', x'', y', y''; pour avoir le terme suivant, il n'y aura qu'à chercher les valeurs de x''', y''' d'après celles de x'', y''. Or on a

$$y''=Qx''-g,$$

d'où l'on tire

$$y'''=Qx'''+Q'x'', \quad \text{donc} \quad Qx'''-y'''=-Q'x''.$$

Pour avoir Q', je prends l'équation

$$y'=Qx',$$

qui résulte des valeurs x' et y' trouvées ci-dessus, d'où l'on tire

$$y''=Qx''+Q'x';$$

donc

$$Q'=\frac{y''-Qx''}{x'}=-\frac{g}{x'}, \quad \text{donc} \quad Qx'''-y'''=g\frac{x''}{x'}=-\frac{gr}{u}.$$

Il résulte de là que l'expression de la flèche, au lieu d'être simplement $\frac{g\theta^2}{2}$, sera $\frac{g\theta^2}{2}-\frac{gr\theta^3}{6u}$. Ainsi, au lieu de l'équation

$$\frac{g\theta^2}{2}=Ro^2+So^3,$$

on aura celle-ci,

$$\frac{g\theta^2}{2}-\frac{gr\theta^3}{6u}=Ro^2+So^3,$$

qui est exacte jusqu'aux quantités du troisième ordre. En y substituant la valeur de θ du numéro précédent, qui est exacte jusqu'aux quantités du second ordre, on aura, au quatrième ordre près,

$$Ro^2+So^3=\frac{g(1+Q^2)o^2}{2u^2}+\left[\frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{2u^3}-\frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{6u^3}\right]o^3,$$

savoir,

$$Ro^2+So^3=\frac{g(1+Q^2)o^2}{2u^2}+\frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}o^3}{3u^3},$$

d'où l'on tire, par la comparaison des termes,

$$R=\frac{g(1+Q^2)}{2u^2}, \quad S=\frac{gr(1+Q^2)^{\frac{3}{2}}}{3u^3}.$$

Substituant dans la seconde équation la valeur de u^2 tirée de la première, et qui est la même qu'on avait trouvée plus haut, on en déduira

$$\frac{r}{g}=\frac{3S\sqrt{1+Q^2}}{4R^2}.$$

C'est la valeur que Newton a donnée ensuite dans la seconde édition de ses *Principes* (liv. II, prob. III), et l'on voit qu'en mettant dans cette valeur y', $-\frac{y''}{2}$, $-\frac{y'''}{2.3}$ à la place de Q, R, S, comme dans le n° 19, elle devient

$$-\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2},$$

telle que nous l'avons trouvée dans le n° 17.

23. Si l'on voulait suivre la première marche de Newton, mais en prenant pour la flèche qui répond au temps très-petit θ l'expression plus exacte $\frac{g\theta^2}{2} - \frac{gr\theta^3}{6u}$ que nous venons de trouver, on aurait, pour la flèche qui répond au temps $-\mathrm{T}$, $\frac{g\mathrm{T}^2}{2} + \frac{gr\mathrm{T}^3}{6u}$; substituant pour T sa valeur en θ, $\theta - \frac{r\theta^2}{u}$, elle deviendrait $\frac{g\theta^2}{2} - \frac{5gr\theta^3}{6u}$, et la différence des deux flèches serait alors $\frac{2gr\theta^3}{3u}$, qu'il faudrait prendre pour δ; les valeurs de γ et ρ seraient également, aux θ^3 près, $\frac{g\theta^2}{2}$, $\frac{r\theta^2}{2}$, et l'on aurait, par la substitution,

$$\frac{\alpha\delta}{4\gamma^2} = \frac{2r}{3g}; \quad \text{donc} \quad \frac{r}{g} = \frac{3\alpha\delta}{8\gamma^2}.$$

Prenant maintenant, comme Newton,

$$\alpha = o\sqrt{1+\mathrm{Q}^2}, \quad \gamma = \mathrm{R}o^2, \quad \delta = 2\mathrm{S}o^3,$$

on aurait le résultat exact

$$\frac{r}{g} = \frac{3\mathrm{S}\sqrt{1+\mathrm{Q}^2}}{4\mathrm{R}^2}.$$

Comme Newton n'est parvenu à ce second résultat qu'en suivant une marche analogue à celle du Calcul différentiel et en considérant deux tangentes successives ou deux côtés successifs de la courbe, au lieu que, dans la première solution, il n'avait considéré qu'une seule tangente prolongée de part et d'autre du point de contact, nous avons cru devoir montrer comment, sans s'écarter de l'esprit de cette solution, mais en la rectifiant par la méthode des séries, on pouvait aussi arriver à un résultat exact. En effet, on peut toujours trouver, par cette méthode, les premiers termes de l'ordonnée en série d'une courbe, ou en général du développement d'une fonction, lesquels satisfassent aux conditions mécaniques ou géométriques du problème proposé, et la loi de ces termes donnera l'équation du problème. C'est en quoi consiste la méthode qu'on peut appeler, d'après Newton, *méthode des séries*, pour la distinguer de la méthode des différences ou des

fonctions dérivées, par laquelle on arrive directement à cette équation sans le circuit des séries et sans employer d'autres termes que ceux qui doivent y entrer, comme on le voit par l'analyse du n° 18.

24. Il est à remarquer, au reste, que la construction employée par Newton dans sa seconde solution mène à une formule semblable à celle de la première, que nous avons représentée par $\frac{\rho}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{4\gamma^2}$, et que nous avons vue n'être pas exacte, mais avec cette différence que la quantité δ, au lieu d'exprimer, comme dans la première solution, la différence des flèches qui répondent à des portions égales de la même tangente, prises de part et d'autre du point de contact, et dont les parties correspondantes de l'axe des x sont o et $-o$, doit exprimer, au contraire, la différence des flèches de deux tangentes consécutives, prises du même côté et répondantes à des parties de l'axe égales à o. Pour avoir ces flèches, Newton représente l'ordonnée qui répond à l'abscisse $x+o$ par la série

$$\mathrm{P} + \mathrm{Q}o + \mathrm{R}o^2 + \mathrm{S}o^3 + \ldots;$$

mais il les détermine par la méthode différentielle, en prenant la différence d'une ordonnée intermédiaire et de la demi-somme des deux ordonnées adjacentes. Ainsi, en considérant les trois ordonnées qui répondent aux abscisses $x-o$, x, $x+o$, il a la flèche $\mathrm{R}o^2$, et les ordonnées qui répondent aux abscisses x, $x+o$, $x+2o$ donnent la flèche $\mathrm{R}o^2 + 3\mathrm{S}o^3$, et la différence des deux flèches est $3\mathrm{S}o^3$. Cette valeur étant prise pour δ, et faisant, comme dans la première solution (n° 19), $\alpha = o\sqrt{1+\mathrm{Q}^2}$, $\gamma = \mathrm{R}o^2$, on a

$$\frac{\rho}{\gamma} = \frac{3\mathrm{S}\sqrt{1+\mathrm{Q}^2}}{4\mathrm{R}^2},$$

expression exacte, comme on l'a vu plus haut.

Suivant nos dénominations, lorsque x devient $x+o$, y devient

$$y + oy' + \frac{o^2y''}{2} + \frac{o^3y'''}{2.3} + \ldots.$$

La partie de la tangente qui répond à o est $o\sqrt{1+y'^2}$; c'est la valeur de α. La partie interceptée entre la tangente et la courbe, ou la flèche, est $\frac{o^2y''}{2}+\frac{o^3y'''}{2.3}+\cdots$; c'est la valeur de γ. Ainsi l'on a, dans les deux solutions,

$$\frac{\alpha}{4\gamma^2}=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{o^3y''^2}.$$

A l'égard de δ, dans la première solution, c'est la différence des flèches qui répondent à o et à $-o$, laquelle est $\frac{o^3y'''}{3}$; mais, dans la seconde solution, c'est la différence des flèches qui répondent à x et à $x+o$. Or, x devenant $x+o$, y'' devient $y''+oy'''+\ldots$; donc, négligeant les o^3, la seconde flèche sera $\frac{o^2y''}{2}+\frac{4o^3y'''}{2.3}$, et la différence des flèches sera $\frac{o^3y'''}{2}$. Substituant dans $\frac{\alpha\delta}{4\gamma^2}=\frac{\delta\sqrt{1+y'^2}}{o^3y''^2}$ la première valeur de $\delta=\frac{o^3y'''}{3}$ ou la seconde $\frac{o^3y'''}{2}$, on a les deux résultats

$$\frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{3y''^2} \text{ et } \frac{y'''\sqrt{1+y'^2}}{2y''^2},$$

dont le premier est fautif et le second exact (n° 19).

CHAPITRE V.

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SUR UNE SURFACE DONNÉE OU ASSUJETTI A DE CERTAINES CONDITIONS. DU MOUVEMENT DE PLUSIEURS CORPS LIÉS ENTRE EUX. DES ÉQUATIONS DE CONDITION ENTRE LES COORDONNÉES DE CES DIFFÉRENTS CORPS, ET DE LA MANIÈRE D'EN DÉDUIRE LES FORCES QUI RÉSULTENT DE LEUR ACTION MUTUELLE. DÉMONSTRATION GÉNÉRALE DU PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES.

25. Reprenons les formules générales du n° 15, et supposons que la force P soit dirigée vers un point ou centre déterminé par les coordonnées a, b, c; si l'on nomme p la distance rectiligne de ce centre au point de la courbe qui répond aux coordonnées x, y, z, on aura

$$p=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

et il est visible que $x-a$, $y-b$, $z-c$ seront les projections de la ligne p sur les axes des x, y, z; donc $\frac{x-a}{p}$, $\frac{y-b}{p}$, $\frac{z-c}{p}$ seront les cosinus des angles que la ligne p fait avec ces axes, c'est-à-dire des angles λ, μ, ν que la direction de la force P fait avec les mêmes axes. Donc les termes $P\cos\lambda$, $P\cos\mu$, $P\cos\nu$, dus à la force P dans les valeurs de Mx'', My'', Mz'', pourront être représentés par $P\frac{x-a}{p}$, $P\frac{y-b}{p}$, $P\frac{z-c}{p}$: ce sont les forces qui résultent de la décomposition de la force P suivant les directions des coordonnées x, y, z.

Si maintenant on suppose p égale à une constante d, on aura l'équation d'une sphère dont d sera le rayon et dont le centre sera déterminé

par les coordonnées a, b, c, et la direction de la force P sera perpendiculaire à la surface de cette sphère. Donc elle sera aussi perpendiculaire à toute autre surface qui passerait par le même point et qui serait tangente à la sphère.

Représentons par $f(x, y, z) = 0$ l'équation de la sphère

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} - d = 0;$$

on aura, en prenant les fonctions primes,

$$\frac{x-a}{d} = f'(x), \quad \frac{y-b}{d} = f'(y), \quad \frac{z-c}{d} = f'(z),$$

et, comme on a supposé $p = d$, il est clair que les forces dirigées suivant x, y, z et résultantes de la force P seront exprimées par $Pf'(x)$, $Pf'(y)$, $Pf'(z)$.

26. Si l'on a une surface représentée par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

laquelle soit tangente de la sphère dont il s'agit, il faudra, par ce qu'on a vu dans le n° 40 de la deuxième Partie, que les trois fonctions primes $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ de cette surface soient proportionnelles aux fonctions primes $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$ de la surface de la sphère. Donc, si la force P agit perpendiculairement à cette surface, il en résultera, suivant les directions de x, y, z, trois forces proportionnelles à $PF'(x)$, $PF'(y)$, $PF'(z)$.

Or, si l'on fait abstraction de la force P, et qu'on suppose que le corps soit forcé de se mouvoir sur cette surface, il est clair que l'action, ou plutôt la résistance que la surface oppose au corps, ne peut agir que dans une direction perpendiculaire à la surface; donc il en résultera, sur le corps, des forces proportionnelles aux fonctions primes $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ de l'équation $F(x, y, z) = 0$ de la surface.

Donc le même résultat aura lieu aussi si, en faisant abstraction de la surface, on considère seulement l'équation $F(x, y, z) = 0$ comme une équation de condition donnée par la nature de la question mécanique proposée, d'où l'on peut conclure que toute condition du problème représentée par l'équation $F(x, y, z) = 0$ sera équivalente à des forces proportionnelles aux fonctions primes $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$ et dirigées suivant les coordonnées x, y, z. Ainsi, en prenant un coefficient indéterminé Π, il faudra ajouter aux valeurs de Mx'', My'', Mz'' des équations du n° 15 les termes $\Pi F'(x)$, $\Pi F'(y)$, $\Pi F'(z)$. La quantité inconnue Π devra être éliminée, mais l'équation qu'on aura de moins par cette élimination sera remplacée par l'équation de condition $F(x, y, z) = 0$.

On peut étendre cette conclusion au cas où il y aurait deux équations de condition représentées par

$$F(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(x, y, z) = 0;$$

elles équivaudraient à des forces exprimées par

$$\Pi F'(x) + \Psi \Phi'(x), \quad \Pi F'(y) + \Psi \Phi'(y), \quad \Pi F'(z) + \Psi \Phi'(z)$$

et dirigées suivant x, y, z, qu'il faudrait ajouter aux valeurs de Mx'', My'', Mz'' (n° 15), les coefficients Π et Ψ étant indéterminés et devant être éliminés.

27. Jusqu'ici nous n'avons considéré qu'un corps isolé. Soient maintenant deux corps M et N attachés aux extrémités d'un fil inextensible qui passe sur une poulie fixe. Soient x, y, z les coordonnées du corps M; ξ, η, ζ celles du corps N; a, b, c les coordonnées du point fixe où est placée la poulie, et d la longueur donnée du fil; il est clair qu'on aura l'équation

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} + \sqrt{(\xi-a)^2+(\eta-b)^2+(\zeta-c)^2} - d = 0,$$

que nous représenterons par

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Si l'on nomme T la tension du fil qui agit également sur les deux corps, et qu'on applique ici l'analyse du n° 25, il est clair que l'action

du fil sur les deux corps produira sur le corps M les forces $Tf'(x)$, $Tf'(y)$, $Tf'(z)$ suivant x, y, z, et sur le corps N les forces $Tf'(\xi)$, $Tf'(\eta)$, $Tf'(\zeta)$ suivant ses coordonnées ξ, η, ζ.

Il en serait de même si le fil passait sur deux poulies fixes dont la position dans l'espace fût déterminée par les coordonnées a, b, c pour la première, et par α, β, γ pour la seconde. Alors, en désignant par d la longueur totale du fil, moins la partie interceptée entre les deux poulies, qui est aussi donnée, l'équation de l'inextensibilité du fil donnerait

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}+\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2}-d=0,$$

et, en représentant cette équation par

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)=0,$$

on aurait pareillement $Tf'(x)$, $Tf'(y)$, $Tf'(z)$ pour les forces qui tireraient le corps M suivant les coordonnées x, y, z, et $Tf'(\xi)$, $Tf'(\eta)$, $Tf'(\zeta)$ pour celles qui tireraient le corps N suivant les coordonnées ξ, η, ζ.

Enfin, si l'on supposait que le fil auquel est attaché le corps M, après avoir passé sur la première poulie fixe, repassât sur le même corps M et de là sur la même poulie, et de nouveau sur le corps et sur la poulie à plusieurs reprises, de manière qu'il y eût m cordons entre le corps et la poulie; qu'ensuite le fil, en quittant cette poulie, passât sur la seconde poulie fixe et de là sur le corps N, en faisant aussi plusieurs tours entre ce corps et la même poulie avant d'être attaché fixement au corps N, de manière qu'il y eût n cordons entre ce corps et la poulie; comme la tension T est la même dans toute l'étendue du fil, le corps M, étant tiré par m cordons, serait tiré vers la première poulie par une force égale à mT, et le corps N serait tiré vers la seconde poulie par une force égale à nN. Or il est clair que dans ce cas l'équation qui renferme la condition de l'inextensibilité du fil serait

$$m\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}+n\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2}-d=0,$$

en désignant toujours par d la longueur totale du fil, moins la longueur interceptée entre les deux poulies et il est facile de voir qu'en représentant cette équation par

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)=0,$$

on aurait aussi, pour les forces qui tireraient le corps M suivant x, y, z et le corps N suivant ξ, η, ζ, les mêmes expressions que ci-dessus : $Tf'(x)$, $Tf'(y)$, $Tf'(z)$, $Tf'(\xi)$, $Tf'(\eta)$, $Tf'(\zeta)$.

Si l'on suppose que P et Q soient les forces qui tirent les corps M et N vers les deux poulies fixes, on aura $P=mT$ et $Q=nT$; donc, puisque m et n doivent être des nombres entiers, si les quantités P et Q sont commensurables, il faudra prendre T pour leur commune mesure; mais, quelles que soient les forces P et Q, on peut toujours les représenter par mT et nT, en prenant, dans le cas où elles seraient incommensurables, les nombres m et n très-grands et la quantité T infiniment petite, et les forces qui tirent les corps M et N suivant leurs coordonnées x, y, z, ξ, η, ζ seront toujours proportionnelles aux fonctions primes de la même équation de condition relatives à ces coordonnées.

28. Maintenant, si au lieu de l'équation de condition

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)=0,$$

dépendante de l'inextensibilité du fil, on a une autre équation quelconque entre les mêmes coordonnées x, y, z, ξ, η, ζ des deux corps, représentée par

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)=0,$$

on peut, en regardant les constantes qui entrent dans la première de ces équations comme arbitraires, faire coïncider non-seulement les équations mêmes, mais encore toutes leurs fonctions primes pour des valeurs données des variables x, y, z, ξ, η, ζ; de cette manière, les deux équations deviendront comme tangentes l'une de l'autre, par la théorie des contacts que nous avons donnée dans la deuxième Partie,

et, quelle que soit la liaison des deux corps qui est représentée par l'équation

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0,$$

elle deviendra équivalente à celle d'un fil qui passe par deux poulies.

On pourrait croire que, puisque l'équation de condition

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}+\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2}-d=0,$$

pour un fil simple qui passe sur deux poulies fixes, renferme sept constantes arbitraires, elle peut toujours avoir un contact du premier ordre avec une équation quelconque, puisque ce contact ne demande que sept conditions; mais, en représentant cette équation par

$$f(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$$

et prenant ses fonctions dérivées, il est visible qu'on a

$$[f'(x)]^2+[f'(y)]^2+[f'(z)]^2=1, \quad [f'(\xi)]^2+[f'(\eta)]^2+[f'(\zeta)]^2=1,$$

de sorte qu'on ne pourrait plus satisfaire en général aux conditions du contact :

$$f'(x)=F'(x), \quad f'(y)=F'(y), \quad f'(z)=F'(z),$$
$$f'(\xi)=F'(\xi), \quad f'(\eta)=F'(\eta), \quad f'(\zeta)=F'(\zeta).$$

Cet inconvénient disparaît en prenant

$$m\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}+n\sqrt{(\xi-\alpha)^2+(\eta-\beta)^2+(\zeta-\gamma)^2}-d=0$$

pour l'équation de condition du fil multiple, à cause des nouveaux coefficients indéterminés m et n, et l'on peut dire que l'équation de condition donnée

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0$$

produit sur les corps M et N les mêmes forces que le fil.

On tire de là cette conclusion que, dans un système de deux corps dont la liaison dépend de l'équation

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = 0,$$

leur action mutuelle produit sur l'un des corps les forces $\Pi F'(x)$, $\Pi F'(y)$, $\Pi F'(z)$ suivant les trois coordonnées rectangles x, y, z, et sur l'autre corps les forces $\Pi F'(\xi)$, $\Pi F'(\eta)$, $\Pi F'(\zeta)$ suivant les coordonnées rectangles ξ, η, ζ, Π étant un coefficient indéterminé.

29. Si le système était composé de trois corps ayant pour coordonnées rectangles x, y, z, ξ, η, ζ, x, y, z, on trouverait, par un pareil raisonnement, que toute équation entre ces coordonnées dépendante de la liaison des corps et représentée par

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, x, y, z) = 0$$

donnerait pour le premier corps les forces $\Pi F'(x)$, $\Pi F'(y)$, $\Pi F'(z)$ suivant x, y, z, pour le second corps les forces $\Pi F'(\xi)$, $\Pi F'(\eta)$, $\Pi F'(\zeta)$ suivant ξ, η, ζ, et pour le troisième les forces $\Pi F'(x)$, $\Pi F'(y)$, $\Pi F'(z)$ suivant x, y, z, et ainsi de suite si le système était composé d'un plus grand nombre de corps. En effet, quel que soit le nombre des corps et quelle que soit leur liaison, elle ne peut produire sur chaque corps qu'une force déterminée suivant une certaine direction; or toutes ces forces peuvent être aussi produites par la tension d'un même fil qui passerait successivement et à plusieurs reprises sur les mêmes corps et sur des poulies fixes.

Enfin, s'il y avait entre les mêmes coordonnées une seconde équation de condition représentée par

$$\Phi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, x, y, z) = 0,$$

il en résulterait d'autres forces exprimées par $\Psi\Phi'(x)$, $\Psi\Phi'(y)$, $\Psi\Phi'(z)$ pour le premier corps, par $\Psi\Phi'(\xi)$, $\Psi\Phi'(\eta)$, $\Psi\Phi'(\zeta)$ pour le second corps et par $\Psi\Phi'(x)$, $\Psi\Phi'(y)$, $\Psi\Phi'(z)$ pour le troisième, et suivant les directions des mêmes coordonnées, le coefficient Ψ étant indéterminé comme le coefficient Π; et ainsi de suite s'il y avait un plus grand nombre d'équations de condition.

30. On doit conclure de là, en général, que les forces qui peuvent résulter de l'action mutuelle des corps d'un système donné se déduisent

directement des équations de condition qui doivent avoir lieu entre les coordonnées des différents corps du système, en prenant les fonctions primes des fonctions qui sont nulles en vertu de ces équations. Les fonctions primes de la même fonction, prises par rapport aux différentes coordonnées, sont toujours proportionnelles aux forces qui agissent suivant ces coordonnées, et qui dépendent de la condition exprimée par cette fonction.

J'étais déjà arrivé à un résultat semblable dans la *Mécanique analytique*, en partant du principe général des vitesses virtuelles, et, en effet, ce principe est renfermé dans le résultat que nous venons de trouver; car il est évident que, si plusieurs forces appliquées à un système de corps sont en équilibre, elles doivent être égales et directement opposées à celles qui résultent de leur action mutuelle.

Soient X, Y, Z les forces appliquées à l'un des corps suivant les directions des coordonnées x, y, z prolongées, Ξ, Υ, Σ les forces appliquées à un autre corps suivant le prolongement de ses coordonnées ξ, η, ζ, et X, Y, Z les forces appliquées à un troisième corps suivant le prolongement de ses coordonnées x, y, z; on aura, par ce qu'on vient de démontrer,

$$\begin{aligned}
&X=\Pi F'(x)+\Psi\Phi'(x), \quad Y=\Pi F'(y)+\Psi\Phi'(y), \quad Z=\Pi F'(z)+\Psi\Phi'(z),\\
&\Xi=\Pi F'(\xi)+\Psi\Phi'(\xi), \quad \Upsilon=\Pi F'(\eta)+\Psi\Phi'(\eta), \quad \Sigma=\Pi F'(\zeta)+\Psi\Phi'(\zeta),\\
&\mathrm{X}=\Pi F'(\mathrm{x})+\Psi\Phi'(\mathrm{x}), \quad \mathrm{Y}=\Pi F'(\mathrm{y})+\Psi\Phi'(\mathrm{y}), \quad \mathrm{Z}=\Pi F'(\mathrm{z})+\Psi\Phi'(\mathrm{z}),
\end{aligned}$$

et de là on tirera immédiatement

$$\begin{aligned}
&Xx'+Yy'+Zz'+\Xi\xi'+\Upsilon\eta'+\Sigma\zeta'+\mathrm{X}x'+\mathrm{Y}y'+\mathrm{Z}z'\\
&\quad=\Pi F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})'+\Psi\Phi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})'.
\end{aligned}$$

Le second membre de cette équation est évidemment nul, en vertu des équations de condition, puisque les quantités indéterminées Π, Ψ se trouvent multipliées par les fonctions primes de ces équations; donc on aura

$$Xx'+Yy'+Zz'+\Xi\xi'+\Upsilon\eta'+\Sigma\zeta'+\mathrm{X}x'+\mathrm{Y}y'+\mathrm{Z}z'=0,$$

équation générale du principe des vitesses virtuelles pour l'équilibre

des forces X, Y, Z, Ξ, Υ, Σ, X, Y, Z, dans laquelle les fonctions primes $x', y', z', \xi', \ldots$ expriment les vitesses virtuelles des points auxquels sont appliquées les forces $X, Y, Z, \Xi, \ldots$, estimées suivant les directions de ces forces. [*Voir* la première Partie de la *Mécanique analytique* (*)].

Au reste, on ne doit pas être surpris de voir le principe des vitesses virtuelles devenir une conséquence naturelle des formules qui expriment les forces d'après les équations de condition, puisque la considération d'un fil qui par sa tension uniforme agit sur tous les corps et y produit des forces données suffit pour conduire à une démonstration directe et générale de ce principe, comme je l'ai fait voir dans la seconde édition de l'Ouvrage cité.

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. XI.

CHAPITRE VI.

DE LA LOI DU MOUVEMENT DU CENTRE DE GRAVITÉ. DE LA LOI DES AIRES DANS LA ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE, OU D'UN SEUL POINT FIXE, OU AUTOUR DU CENTRE DE GRAVITÉ DANS LES SYSTÈMES LIBRES.

31. Nous venons de donner la manière de déterminer les forces qui peuvent résulter de l'action mutuelle des corps dans un système quelconque et qui doivent être ajoutées aux autres forces, dans les équations du n° 15, pour avoir les équations complètes du mouvement du système. Quoiqué les équations de condition

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \ldots) = 0, \quad \Phi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \ldots) = 0, \quad \ldots,$$

qui donnent naissance à ces forces, dépendent des circonstances particulières de chaque problème, il y a néanmoins des cas généraux qui méritent d'être examinés, parce qu'ils offrent des résultats remarquables.

Le premier de ces cas est celui où les conditions du système sont indépendantes de l'origine des abscisses $x, \xi, \ldots$ et où les fonctions désignées par les caractéristiques F, Φ, ... ne contiennent que les différences $\xi - x, \chi - x, \ldots$ des abscisses. Alors il est évident que, si l'on augmente chacune des variables $x, \xi, \ldots$ d'une même quantité i, cette quantité disparaîtra d'elle-même des fonctions dont il s'agit. Or, en substituant $x + i, \xi + i, \ldots$ à la place de $x, \xi, \ldots$ dans la fonction $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, \ldots)$, elle devient, par le développement,

$$F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) + i[F'(x) + F'(\xi) + \ldots] + \ldots$$

Donc on aura nécessairement l'équation du premier ordre

$$F'(x) + F'(\xi) + \ldots = 0.$$

On trouvera, de la même manière,

$$\Phi'(x) + \Phi'(\xi) + \ldots = 0,$$

et ainsi de suite.

Or, si le système n'est soumis à d'autres forces que celles qui peuvent résulter de l'action mutuelle des corps, les équations du mouvement relatives aux coordonnées $x, \xi, \ldots$ seront de la forme (n° 15)

$$\begin{aligned} Mx'' &= \Pi F'(x) + \Psi \Phi'(x) + \ldots, \\ N\xi'' &= \Pi F'(\xi) + \Psi \Phi'(\xi) + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Donc, ajoutant ces équations ensemble, on aura simplement

$$Mx'' + N\xi'' + \ldots = 0,$$

équation indépendante des conditions du système.

Cette équation a l'équation primitive

$$Mx' + N\xi' + \ldots = a,$$

et celle-ci a encore l'équation primitive

$$Mx + N\xi + \ldots = at + b,$$

a et b étant des constantes arbitraires.

Ainsi l'on a tout de suite, dans ce cas, une relation entre les différentes abscisses $x, \xi, \ldots$.

Il est facile de voir que le cas dont il s'agit aura lieu dans tout système entièrement libre de se mouvoir dans la direction de l'axe des abscisses, quelle que soit l'action que les corps peuvent exercer les uns sur les autres. Car alors, relativement à cet axe, les conditions du système ne pourront dépendre que de la position respective des corps, et nullement de leur position par rapport à l'origine des abscisses; par

conséquent, les équations qui exprimeront ces conditions ne pourront contenir que les différences $x-\xi$, ... des abscisses. Et, si les corps exercent les uns sur les autres des attractions ou des répulsions mutuelles, comme les fonctions $F(x, y, z, \xi, \ldots)$ dues à ces forces ne dépendent que des distances $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$, ..., ces fonctions auront aussi la même propriété.

Donc, lorsque le mouvement du système sera tout à fait libre suivant la direction de l'axe des x, de quelque manière que les corps agissent les uns sur les autres, soit par des forces quelconques de résistance, ou par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, l'équation précédente entre les abscisses X, ξ, ... des différents corps aura toujours lieu.

Si l'on prend dans le système un point qui réponde à l'abscisse X, telle que l'on ait

$$X=\frac{Mx+N\xi+\ldots}{M+N+\ldots},$$

on aura

$$X''=0, \quad \text{et de là} \quad X'=a, \quad X=at,$$

en supposant que l'espace X soit nul au commencement du temps. Ainsi, le mouvement de ce point suivant la direction de l'axe des x sera uniforme avec la vitesse constante a.

32. Si, dans le même système, on suppose que les corps M, N, ... soient de plus animés par des forces quelconques P, Q, ... dirigées suivant l'axe des x et tendant à augmenter les x, ξ, ..., il faudra, dans ce cas, ajouter respectivement les quantités P, Q, ... aux valeurs de Mx'', $N\xi''$, ..., ce qui donnera les équations

$$\begin{aligned} Mx'' &= P+\Pi F'(x)+\Psi\Phi'(x)+\ldots,\\ N\xi'' &= Q+\Pi F'(\xi)+\Psi\Phi'(\xi)+\ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

dont la somme sera

$$Mx''+N\xi''+\ldots=P+Q+\ldots,$$

et, si l'on substitue pour $Mx+N\xi+\ldots$ la quantité $(M+N+\ldots)X$, on aura

$$(M+N+\ldots)X''=P+Q+\ldots,$$

équation qui représente le mouvement rectiligne suivant l'axe des x d'un corps dont la masse serait $M+N+\ldots$ et qui serait animé par une force égale à $P+Q+\ldots$.

D'où l'on peut conclure que le point du système qui répond à l'abscisse X aura, dans la direction de l'axe des x, le même mouvement qu'il aurait si tous les corps du système étaient concentrés dans ce point et que toutes les forces qui agissent sur les corps dans la direction du même axe lui fussent appliquées.

33. Si le système est libre à la fois relativement à l'axe des x et à celui des y, il est visible que les mêmes résultats auront lieu pour les mouvements suivant ces deux axes, et, si le système est absolument libre dans tous les sens, alors les mêmes résultats auront lieu par rapport aux trois axes; et l'on en pourra conclure que, si l'on prend dans le système un point qui réponde aux coordonnées X, Y, Z, telles que l'on ait

$$X=\frac{Mx+N\xi+\ldots}{M+N+\ldots},$$

$$Y=\frac{My+N\eta+\ldots}{M+N+\ldots},$$

$$Z=\frac{Mz+N\zeta+\ldots}{M+N+\ldots},$$

ce point, lorsque le système n'est animé par aucune force extérieure, se mouvra uniformément en ligne droite, et que, si les différents corps du système sont animés par des forces quelconques, le même point se mouvra comme si tous les corps y étaient concentrés et que toutes les forces y fussent appliquées chacune suivant sa direction propre.

Le point dont il s'agit est connu, en Mécanique, sous le nom de *centre de gravité*, et la proposition que nous venons de démontrer s'é-

nonce ordinairement ainsi : L'état de mouvement ou de repos du centre de gravité de plusieurs corps ne change point par l'action mutuelle des corps entre eux, pourvu que le système soit entièrement libre; c'est ce qui constitue la loi de la *conservation du mouvement du centre de gravité*.

Il est bon de remarquer que cette loi a lieu aussi lorsque, par la rencontre et l'action mutuelle des corps, il survient des changements brusques dans leurs mouvements, car on peut regarder ces changements comme produits par l'action de ressorts interposés entre les corps qui se choquent, et dont la durée est presque momentanée. C'est ainsi que l'on peut envisager les changements qui arrivent dans le choc des corps durs, et c'est par cette raison que le mouvement du centre de gravité n'est point altéré dans ces changements.

34. On rapporte communément le centre de gravité de plusieurs corps à trois axes fixes, par le moyen des coordonnées X, Y, Z, données ci-dessus; si l'on voulait le rapporter à des points déterminés, alors, nommant a, b, c les trois coordonnées d'un de ces points et d la distance du centre de gravité à ce point, on aurait

$$\begin{aligned} d^2 &= (\mathrm{X}-a)^2+(\mathrm{Y}-b)^2+(\mathrm{Z}-c)^2 \\ &= \mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+\mathrm{Z}^2-2a\mathrm{X}-2b\mathrm{Y}-2c\mathrm{Z}+a^2+b^2+c^2. \end{aligned}$$

Or, si l'on fait le carré de la quantité $\mathrm{M}x+\mathrm{N}\xi+\ldots$, il est facile de voir qu'on peut le mettre sous la forme

$$(\mathrm{M}+\mathrm{N}+\ldots)(\mathrm{M}x^2+\mathrm{N}\xi^2+\ldots)-\mathrm{MN}(x-\xi)^2-\ldots;$$

donc on aura (numéro précédent)

$$\mathrm{X}^2=\frac{\mathrm{M}x^2+\mathrm{N}\xi^2+\ldots}{\mathrm{M}+\mathrm{N}+\ldots}-\frac{\mathrm{MN}(x-\xi)^2+\ldots}{(\mathrm{M}+\mathrm{N}+\ldots)^2},$$

et de là

$$\mathrm{X}^2-2a\mathrm{X}+a^2=\frac{\mathrm{M}(x-a)^2+\mathrm{N}(\xi-a)^2+\ldots}{\mathrm{M}+\mathrm{N}+\ldots}-\frac{\mathrm{MN}(x-\xi)^2+\ldots}{(\mathrm{M}+\mathrm{N}+\ldots)^2}.$$

On trouvera de même

$$\mathrm{Y}^2-2b\mathrm{Y}+b^2=\frac{\mathrm{M}(y-b)^2+\mathrm{N}(\eta-b)^2+\ldots}{\mathrm{M}+\mathrm{N}+\ldots}-\frac{\mathrm{MN}(y-\eta)^2+\ldots}{(\mathrm{M}+\mathrm{N}+\ldots)^2},$$

et pareillement

$$\mathrm{Z}^2-2c\mathrm{Z}+c^2=\frac{\mathrm{M}(z-c)^2+\mathrm{N}(\zeta-c)^2+\ldots}{\mathrm{M}+\mathrm{N}+\ldots}-\frac{\mathrm{MN}(z-\zeta)^2+\ldots}{(\mathrm{M}+\mathrm{N}+\ldots)^2}.$$

Si l'on fait ces substitutions dans l'expression précédente de d^2, et que l'on désigne, pour abréger, par A la somme des masses M, N, ..., multipliées chacune par le carré de sa distance au point donné, cette somme étant de plus divisée par la somme des masses; et que l'on désigne aussi par B la somme des produits des masses prises deux à deux et multipliées par le carré de leurs distances respectives, cette somme étant divisée par le carré de la somme des masses, on aura

$$d^2=\mathrm{A}-\mathrm{B}, \quad \text{et par conséquent} \quad d=\sqrt{\mathrm{A}-\mathrm{B}}.$$

Ainsi, comme la quantité B ne dépend que de la position respective des corps, si l'on détermine les valeurs de A par rapport à trois points différents, pris dans le système ou hors du système, à volonté, on aura les distances du centre de gravité à ces points, et par conséquent sa position absolue. Si les corps étaient tous dans le même plan, il suffirait de considérer deux points, et il n'en faudrait qu'un seul si tous les corps étaient dans une même ligne droite. En prenant les trois points donnés dans les corps mêmes du système, la position du centre de gravité sera donnée simplement par les masses et par leurs distances respectives. Comme cette manière de trouver le centre de gravité est peu connue, j'ai cru pouvoir la donner ici, à cause de l'utilité dont elle peut être dans plusieurs occasions.

35. Le second cas est celui où les conditions du système sont indépendantes de la direction des axes des x et y sur le plan de ces coordonnées, en sorte qu'en faisant tourner ces axes autour de l'axe des z d'un angle quelconque i, ce qui changera les abscisses x, ξ, ... en

$x\cos i - y\sin i$, $\xi\cos i - \eta\sin i$, ... et les ordonnées y, η, ... en $y\cos i + x\sin i$, $\eta\cos i + \xi\sin i$, ..., les fonctions représentées par les caractéristiques F, Φ, ... ne varient point par ces changements, quel que soit l'angle i. Il est facile de voir que cette propriété aura lieu, en général, dans toute fonction des quantités x^2+y^2, $\xi^2+\eta^2$, $x\xi+y\eta$, $x\eta-y\xi$, ...

Si l'on fait, dans ce cas,

$$a = x(\cos i - 1) - y\sin i, \quad b = y(\cos i - 1) + x\sin i, \quad \ldots,$$
$$\alpha = \xi(\cos i - 1) - \eta\sin i, \quad \beta = \eta(\cos i - 1) + \xi\sin i, \quad \ldots,$$

il faudra qu'en substituant à la fois dans ces fonctions $x+a$, $y+b$, $\xi+\alpha$, $\eta+\beta$, ... à la place de x, y, ξ, η, ..., et développant suivant les puissances de i, la somme des termes affectés d'une même puissance soit nulle. Or, par ces substitutions et par le développement suivant les puissances de a, b, α, β, ..., la fonction $F(x, y, z, \xi, \ldots)$ devient

$$F(x, y, z, \xi, \ldots) + aF'(x) + bF'(y) + \alpha F'(\xi) + \beta F'(\eta) + \ldots + \frac{a^2}{2}F''(x) + \ldots.$$

Mais on a

$$\sin i = i - \frac{i^3}{2.3} + \ldots, \quad \cos i = 1 - \frac{i^2}{2} + \ldots;$$

donc les termes affectés de i dans la formule précédente seront

$$i[-yF'(x) + xF'(y) - \eta F'(\xi) + \xi F'(\eta) - \ldots];$$

par conséquent on aura, pour la fonction $F(x, y, \ldots)$, l'équation de condition

$$xF'(y) - yF'(x) + \xi F'(\eta) - \eta F'(\xi) + \ldots = 0.$$

On trouvera de la même manière, pour la fonction $\Phi(x, y, \ldots)$, l'équation

$$x\Phi'(y) - y\Phi'(x) + \xi\Phi'(\eta) - \eta\Phi'(\xi) + \ldots = 0,$$

et ainsi des autres.

36. Maintenant, si les corps du système n'éprouvent d'autres actions que celles qui peuvent résulter de leur liaison mutuelle, les équations du mouvement relatives aux coordonnées x, y, ξ, η, ... seront de cette forme (n^os 26 et 30) :

$$Mx'' = \Pi F'(x) + \Psi\Phi'(x) + \ldots,$$
$$My'' = \Pi F'(y) + \Psi\Phi'(y) + \ldots,$$
$$N\xi'' = \Pi F'(\xi) + \Psi\Phi'(\xi) + \ldots,$$
$$N\eta'' = \Pi F'(\eta) + \Psi\Phi'(\eta) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, si l'on ajoute la seconde de ces équations multipliée par x, la quatrième multipliée par ξ, et ainsi de suite, et qu'on en retranche la première multipliée par y, la troisième multipliée par η, etc., on aura, en vertu des équations de condition trouvées ci-dessus, l'équation

$$M(xy'' - yx'') + N(\xi\eta'' - \eta\xi'') - \ldots = 0,$$

qui est aussi, comme l'on voit, indépendante des conditions du système.

En prenant son équation primitive, on aura

$$M(xy' - yx') + N(\xi\eta' - \eta\xi') + \ldots = C,$$

C étant une constante arbitraire. Ainsi l'on a tout de suite une équation du premier ordre entre les coordonnées x, y, ξ, η, ... des différents corps.

Or $xy' - yx' = xy' + yx' - 2yx'$; mais $xy' + yx'$ est la fonction prime de xy, c'est-à-dire du double de l'aire du triangle rectangle dont x est la base et y la hauteur, et yx' est la fonction prime de l'aire de la courbe comprise entre l'abscisse x et l'ordonnée y; donc $\frac{xy' - yx'}{2}$ sera la fonction prime de la différence du triangle et de l'aire dont nous parlons, et il est facile de voir que cette différence est, en général, égale à l'espace compris entre la courbe dont x et y sont les coor-

données, et la droite menée de l'origine de ces coordonnées à la courbe, c'est-à-dire à l'aire du secteur décrit par cette même droite, qu'on nomme *rayon vecteur*.

Ainsi, nommant A cette aire, on aura

$$xy' - \dot{y}x' = 2A',$$

et, nommant de même α l'aire décrite par le rayon vecteur mené à la courbe dont ξ et η sont les coordonnées, on aura pareillement

$$\xi\eta' - \eta\xi' = 2\alpha',$$

et ainsi des autres. De cette manière, l'équation précédente deviendra

$$2MA' + 2N\alpha' + \ldots = C;$$

et, comme les fonctions primes se rapportent ici au temps t, on aura cette équation primitive,

$$MA + N\alpha + \ldots = \tfrac{1}{2}Ct + D,$$

D étant une constante arbitraire, qui sera nulle si l'on fait commencer les aires A, α, ... au commencement du temps t. Alors la somme des aires multipliées chacune par la masse correspondante sera proportionnelle au temps.

Il peut arriver, suivant la forme de la courbe dont x et y sont les coordonnées, que l'aire décrite par le rayon vecteur soit au contraire la différence de l'aire de la courbe et de celle du triangle, auquel cas on aura

$$xy' - yx' = -2A';$$

mais il est facile de se convaincre que, dans ce cas, l'aire sera décrite dans un sens opposé. Donc, en général, la somme des produits des masses par les aires sera proportionnelle au temps, en prenant positivement les aires tracées dans le même sens et négativement celles qui seraient tracées dans un sens opposé. C'est une remarque essentielle, et sans laquelle le théorème dont il s'agit ne serait pas vrai en général.

Cette loi des aires aura donc lieu dans le mouvement de tout système de corps agissant les uns sur les autres d'une manière quelconque, pourvu que le système soit entièrement libre de tourner autour de l'axe des z, perpendiculaire au plan des x et y; car il est visible que les conditions provenant de la liaison mutuelle des corps seront alors les mêmes, quelque direction qu'on donne aux axes des x et y.

Et si les corps agissent les uns sur les autres par des forces d'attraction ou de répulsion, ces forces seront exprimées par des fonctions des distances $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$, lesquelles auront aussi la propriété que nous avons supposée; par conséquent, la même loi des aires aura encore lieu.

Enfin, si les corps M, N, ... étaient de plus animés par des forces quelconques P, Q, ..., dirigées vers des points donnés de l'axe des z, éloignés du plan des x et y des quantités m, n, ..., il est facile de conclure des formules du n° 15 que l'on aurait à ajouter aux valeurs de Mx'' et Ny'' les termes respectifs

$$\frac{Px}{\sqrt{x^2+y^2+(z-m)^2}} \quad \text{et} \quad \frac{Py}{\sqrt{x^2+y^2+(z-m)^2}},$$

et, de même, aux valeurs de $M\xi''$ et $N\eta''$ les termes

$$\frac{Q\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-n)^2}} \quad \text{et} \quad \frac{Q\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-n)^2}};$$

et ainsi de suite. Donc les valeurs des quantités $M(xy'' - yx'')$, $M(\xi\eta'' - \eta\xi'')$, ... seront indépendantes de ces forces, et la loi des aires subsistera également dans ce cas; donc elle subsistera aussi si les corps ne sont animés que par des forces dirigées parallèlement au même axe, et par conséquent perpendiculaires au plan des x et y.

37. Donc, en général, si le système est libre de tourner autour d'un axe fixe, quelle que soit l'action que les corps peuvent exercer les uns

sur les autres et de quelques forces qu'ils soient animés, pourvu qu'elles tendent à cet axe ou qu'elles y soient parallèles, la somme des produits de la masse de chaque corps par l'aire que sa projection sur un plan perpendiculaire au même axe décrit autour de cet axe est toujours proportionnelle au temps.

Si donc le système était libre de tourner d'une manière quelconque autour d'un point fixe, et qu'outre l'action mutuelle des corps chacun d'eux fût encore sollicité par une force quelconque tendant à ce point, la même loi des aires aurait lieu relativement à tous les axes qui passeraient par ce même point. Ainsi, dans ce cas, en prenant ce point pour l'origine des coordonnées, on aurait, relativement aux trois axes des coordonnées, ces trois équations du premier ordre (numéro précédent) :

$$\mathrm{M}(xy'-yx')+\mathrm{N}(\xi\eta'-\eta\xi')+\ldots=\mathrm{C},$$
$$\mathrm{M}(xz'-zx')+\mathrm{N}(\xi\zeta'-\zeta\xi')+\ldots=\mathrm{D},$$
$$\mathrm{M}(yz'-zy')+\mathrm{N}(\eta\zeta'-\zeta\eta')+\ldots=\mathrm{E},$$

C, D, E étant trois constantes arbitraires.

38. Si le système était entièrement libre, et qu'il n'y eût aucun point fixe, ces équations, et par conséquent la loi des aires, auraient lieu par rapport à un point quelconque qu'on prendrait pour l'origine des coordonnées et pour tous les axes qu'on ferait passer par ce point.

Il en serait encore de même dans ce cas, si le point dont il s'agit, au lieu d'être fixe dans l'espace, avait un mouvement quelconque rectiligne et uniforme. En effet, supposons qu'il parcoure dans le temps t les espaces αt, βt, γt suivant la direction des axes des x, y, z, les vitesses α, β, γ étant constantes, et soient p, q, r les coordonnées du corps M, ϖ, χ, ρ celles du corps N, etc., rapportées à ce même point pris pour leur origine; il est clair qu'on aura

$$p=x-\alpha t,\quad q=y-\beta t,\quad r=z-\gamma t,$$

et de même

$$\varpi=\xi-\alpha t,\quad \chi=\eta-\beta t,\quad \rho=\zeta-\gamma t;$$

et ainsi des autres. Donc on aura

$$\begin{aligned}pq'-qp'&=(x-\alpha t)(y'-\beta)-(y-\beta t)(x'-\alpha)\\&=xy'-yx'-\alpha(ty'-y)+\beta(tx'-x),\end{aligned}$$

et pareillement

$$\varpi\chi'-\chi\varpi'=\xi\eta'-\eta\xi'-\alpha(t\eta'-\eta)+\beta(t\xi'-\xi);$$

et ainsi des autres formules semblables. On aura donc

$$\begin{aligned}&\mathrm{M}(pq'-qp')+\mathrm{N}(\varpi\chi'-\chi\varpi')+\ldots\\&=\mathrm{M}(xy'-yx')+\mathrm{N}(\xi\eta'-\eta\xi')+\ldots-\alpha t(\mathrm{M}y'+\mathrm{N}\eta'+\ldots)+\alpha(\mathrm{M}y+\mathrm{N}\eta+\ldots)\\&\quad+\beta t(\mathrm{M}x'+\mathrm{N}\xi'+\ldots)-\beta(\mathrm{M}x+\mathrm{N}\xi+\ldots).\end{aligned}$$

Or, dans ce cas (n^os^ 32 et 33),

$$\mathrm{M}x+\mathrm{N}\xi+\ldots=at+b,\quad \mathrm{M}y+\mathrm{N}\eta+\ldots=ct+d,$$

a, b, c, d étant des constantes : donc, faisant ces substitutions, il viendra

$$\begin{aligned}\mathrm{M}(pq'-qp')+\mathrm{N}(\varpi\chi'-\chi\varpi')+\ldots&=\mathrm{M}(xy'-yx')+\mathrm{N}(\xi\eta'-\eta\xi')+\ldots+\alpha d-\beta b\\&=\mathrm{C}+\alpha d-\beta b.\end{aligned}$$

Ainsi la quantité $\mathrm{M}(pq'-qp')+\mathrm{N}(\varpi\chi'-\chi\varpi')+\ldots$ sera encore constante; par conséquent, la somme des aires décrites autour de l'axe des r passant par le point mobile, multipliées chacune par la masse respective, sera aussi proportionnelle au temps.

On trouvera de la même manière que les deux autres quantités

$$\mathrm{M}(pr'-rp')+\mathrm{N}(\varpi\rho'-\rho\varpi')+\ldots,\quad \mathrm{M}(qr'-rq')+\mathrm{N}(\chi\rho'-\rho\chi')+\ldots$$

seront constantes, et qu'ainsi la somme des aires décrites autour des axes de q et p passant par le même point mobile, multipliées chacune par la masse respective, sera encore proportionnelle au temps.

Donc, puisque, dans le cas dont il s'agit, le centre de gravité du système ne peut avoir qu'un mouvement rectiligne et uniforme (n° 33),

il s'ensuit que la loi des aires aura lieu aussi par rapport au centre de gravité et pour tous les axes qu'on fera passer par ce centre.

Nous remarquerons encore que la loi des aires dont nous parlons a lieu aussi comme celle du mouvement du centre de gravité, et par la même raison (numéro cité), lorsqu'il survient des changements brusques dans les mouvements du système, par l'action mutuelle des corps qui le composent. Ainsi la même loi peut s'appliquer également au choc des corps durs et à celui des corps élastiques.

CHAPITRE VII.

DE LA LOI DES FORCES VIVES DANS LE MOUVEMENT D'UN SYSTÈME ANIMÉ PAR DES FORCES ACCÉLÉRATRICES QUELCONQUES. DE LA CONSERVATION DES FORCES VIVES DANS LE CHOC DES CORPS ÉLASTIQUES. DE LA PERTE DE CES FORCES DANS LE CHOC DES CORPS DURS, OU EN GÉNÉRAL DANS LES CHANGEMENTS BRUSQUES QUE LE SYSTÈME PEUT ÉPROUVER. DE LA SOMME DES FORCES VIVES DANS LES SITUATIONS DE L'ÉQUILIBRE. REMARQUES GÉNÉRALES SUR L'ÉCONOMIE DE CES FORCES DANS LES MACHINES.

39. En général, quelles que soient les conditions du système, les équations de condition

$$F(x, y, z, \xi, \ldots) = 0, \quad \Phi(x, y, z, \xi, \ldots) = 0, \quad \ldots$$

donneront toujours, en prenant les fonctions primes relativement au temps t, dont les variables $x, y, \ldots$ sont des fonctions,

$$x' F'(x) + y' F'(y) + z' F'(z) + \xi' F'(\xi) + \eta' F'(\eta) + \zeta' F'(\zeta) + \ldots = 0,$$
$$x' \Phi'(x) + y' \Phi'(y) + z' \Phi'(z) + \xi' \Phi'(\xi) + \eta' \Phi'(\eta) + \zeta' \Phi'(\zeta) + \ldots = 0,$$

et ainsi de suite.

Or, si le système n'éprouve que l'action des forces qui résultent de ces conditions, les équations du mouvement des corps M, N, ... seront, comme dans le n° 36, de la forme

$$\begin{aligned}
M x'' &= \Pi F'(x) + \Psi \Phi'(x) + \ldots, \\
M y'' &= \Pi F'(y) + \Psi \Phi'(y) + \ldots, \\
M z'' &= \Pi F'(z) + \Psi \Phi'(z) + \ldots, \\
N \xi'' &= \Pi F'(\xi) + \Psi \Phi'(\xi) + \ldots, \\
N \eta'' &= \Pi F'(\eta) + \Psi \Phi'(\eta) + \ldots, \\
N \zeta'' &= \Pi F'(\zeta) + \Psi \Phi'(\zeta) + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Donc, multipliant ces équations respectivement par x', y', z', ξ', η', ζ', ... et les ajoutant ensemble, on aura celle-ci,

$$\mathrm{M}(x'x''+y'y''+z'z'')+\mathrm{N}(\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'')+\ldots=0,$$

qui est entièrement indépendante des conditions du système, et qui par conséquent aura lieu en général, quelles que puissent être la disposition et la liaison mutuelle des corps qui le composent.

Cette équation a pour équation primitive

$$\mathrm{M}(x'^2+y'^2+z'^2)+\mathrm{N}(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)+\ldots=\mathrm{H},$$

dans laquelle H est une constante arbitraire. Or nous avons vu (n° 11) que $\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$ exprime la vitesse du corps qui décrit la courbe dont x, y, z sont les coordonnées; donc, si l'on nomme u la vitesse du corps M, v celle du corps N, et ainsi des autres, on aura

$$x'^2+y'^2+z'^2=u^2,\quad \xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2=v^2,\quad \ldots,$$

et l'équation précédente deviendra

$$\mathrm{M}u^2+\mathrm{N}v^2+\ldots=\mathrm{H}.$$

Dans la fameuse dispute sur l'estimation des forces, on a appelé *force vive* d'un corps en mouvement le produit de sa masse et du carré de sa vitesse. Ainsi, en conservant cette dénomination, on voit, par l'équation qu'on vient de trouver, que la somme des forces vives de tous les corps d'un système est constante, lorsque ces corps n'éprouvent d'autres actions que celles qui résultent de leur liaison, et, en général, de toutes les conditions qui peuvent être exprimées par des équations entre les différentes coordonnées du corps, sans que le temps y entre. C'est dans cette loi que consiste le principe de la conservation des forces vives.

40. Si les corps agissaient, de plus, les uns sur les autres par des forces d'attraction ou de répulsion quelconques, ces forces donneraient, à la vérité, des termes de la même forme $\mathrm{H}f'(x)$, $\mathrm{H}f'(y)$, ... dans les

valeurs des quantités $\mathrm{M}x''$, $\mathrm{M}y''$, ..., en prenant pour la fonction $f(x, y, \ldots)$ la distance $\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$ entre deux corps, et pour H la force absolue que ces corps exercent l'un sur l'autre (n° 25); mais il est évident que la condition

$$x'f'(x)+y'f'(y)+\ldots=0$$

n'aurait pas lieu pour cette fonction comme pour celles qui résultent des conditions du système. Ainsi ces termes subsisteront dans l'équation indépendante des conditions du système, et l'on aura, par conséquent,

$$\mathrm{M}(x'x''+y'y''+z'z'')+\mathrm{N}(\xi'\xi''+\eta'\eta''+\zeta'\zeta'')+\ldots$$
$$=\mathrm{H}[x'f'(x)+y'f'(y)+z'f'(z)+\xi'f'(\xi)+\eta'f'(\eta)+\zeta'f'(\zeta)]+\ldots,$$

où l'on voit que la quantité $x'f'(x)+y'f'(y)+\ldots$ est la fonction prime relativement à t de la fonction $f(x, y, z, \xi, \ldots)$, qui est ici

$$\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Donc, en général, si l'on désigne par p la distance rectiligne entre les corps M et N, et par P la force absolue d'attraction ou de répulsion que ces corps exercent l'un sur l'autre, si l'on désigne de même par q la distance rectiligne entre deux autres corps du système et par Q la force d'attraction ou de répulsion entre ces corps, et ainsi de suite, en prenant les quantités P, Q, ... positivement lorsqu'elles tendent à augmenter les distances p, q, ..., et négativement lorsqu'elles tendent à diminuer ces distances, et qu'on nomme u, v, ... les vitesses des corps M, N, ..., l'équation précédente deviendra

$$\mathrm{M}uu'+\mathrm{N}vv'+\ldots=\mathrm{P}p'+\mathrm{Q}q'+\ldots,$$

qui est également indépendante des conditions du système, mais qui renferme, comme l'on voit, les forces P, Q, ... d'attraction ou de répulsion mutuelle.

41. Enfin, si les corps étaient en même temps attirés vers des centres fixes ou repoussés de ces centres, la même équation aurait

encore lieu en prenant, par exemple, p pour la distance du corps M à un centre fixe et P pour la force qui vient de ce centre; et ainsi des autres. Car on peut déduire le cas des forces tendantes à des centres fixes de celui des actions mutuelles des corps, en supposant que quelques-uns de ces corps deviennent immobiles, ce qui a lieu lorsque leurs masses sont infinies; mais, sans avoir recours à cette démonstration indirecte, il n'y a qu'à considérer que, si le corps M, par exemple, éprouve l'action d'une force P qui part d'un centre fixe dont la position soit déterminée par les coordonnées l, m, n et dont la distance à M soit p, il en résultera (n° 25), dans les valeurs des quantités Mx'', My'', Mz'', les termes respectifs

$$\frac{P(x-l)}{p}, \quad \frac{P(y-m)}{p}, \quad \frac{P(z-n)}{p},$$

et par conséquent, dans la valeur de $M(x'x''+y'y''+z'z'')$, ou de Muu', les termes

$$\frac{P(x-l)x'}{p}+\frac{P(y-m)y'}{p}+\frac{P(z-n)z'}{p}.$$

Mais p étant $=\sqrt{(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2}$, on a

$$p'=\frac{(x-l)x'+(y-m)y'+(z-n)z'}{p};$$

donc les termes dont il s'agit se réduisent à Pp'.

D'où l'on conclura, en général, que l'équation

$$Muu'+Nvv'+\ldots=Pp'+Qq'+\ldots$$

a lieu pour un système quelconque de corps disposés ou liés entre eux d'une manière quelconque, et qui s'attirent ou se repoussent réciproquement, ou sont attirés vers des centres fixes ou repoussés par des forces quelconques P, Q, ..., en nommant p, q, ... les distances mutuelles des corps qui s'attirent ou se repoussent, ou leurs distances aux centres fixes d'attraction ou de répulsion, et prenant les quantités P, Q, ... positivement ou négativement selon que ces forces seront

répulsives ou attractives, parce que les premières tendent à augmenter les distances p, q, ..., et les secondes à les diminuer.

42. Si les forces P, Q, ... sont respectivement des fonctions quelconques des distances p, q, ... suivant lesquelles elles agissent, ce qu'on peut toujours supposer lorsque ces forces sont indépendantes les unes des autres, ou, en général, si les quantités P, Q, ... sont des fonctions de p, q, ... telles que la quantité $Pp'+Qq'+\ldots$ soit la fonction prime d'une fonction de p, q, ..., que nous désignerons par $F(p, q, \ldots)$, l'équation primitive de l'équation ci-dessus sera

$$Mu^2+Nv^2+\ldots=K+2F(p, q, \ldots),$$

K étant une constante arbitraire; et, dans ce cas, les forces P, Q, ..., qui agissent suivant les lignes p, q, ..., seront représentées par les fonctions primes $F'(p)$, $F'(q)$, ...

Soient a, b, ... les valeurs de p, q, ... dans un instant donné, et U, V, ... les vitesses de M, N, ... dans cet instant; l'équation précédente, rapportée à ce même instant, donnera

$$MU^2+NV^2+\ldots=K+2F(a, b, \ldots),$$

d'où l'on tire

$$K=MU^2+NV^2+\ldots-2F(a, b, \ldots);$$

donc, substituant cette valeur, on aura l'équation générale

$$Mu^2+Nv^2+\ldots=MU^2+NV^2+\ldots+2F(p, q, \ldots)-2F(a, b, \ldots).$$

Cette équation renferme le principe de la conservation des forces vives pris dans toute sa généralité. Elle fait voir que la force vive totale du système ne dépend que des forces actives qui animent les corps et de la position des corps relativement aux centres de ces forces, de sorte que, si dans deux instants les corps se trouvent à mêmes distances de ces centres, la somme de leurs forces vives sera aussi la même.

J'entends par *forces actives* les forces que les corps exercent les uns

sur les autres, et dont l'effet est de changer leurs distances ou leurs positions respectives, comme les forces intrinsèques d'attraction ou de répulsion, les forces des ressorts placés entre les corps, etc. Au contraire, j'appelle *forces passives* les forces de résistance produites par les pressions des corps, les tensions des fils ou des verges, etc., et dont l'effet est de maintenir les corps dans une même position respective et d'empêcher que les conditions du système ne soient violées. Ces forces passives ne contribuent en rien, comme l'on voit, à la production de la force vive; les forces actives seules l'augmentent ou la diminuent, comme elles feraient si les corps, étant mus librement, partaient des mêmes points et arrivaient aux mêmes points, en décrivant des lignes quelconques.

43. Nous avons vu que la loi du mouvement du centre de gravité et celle des aires sont indépendantes de l'action mutuelle des corps, quelle que soit cette action, soit qu'elle vienne des forces passives ou actives; ainsi, à cet égard, ces deux lois ont une plus grande étendue que la loi de la conservation des forces vives, qui n'est indépendante que de l'action des forces passives. Il résulte de là que cette dernière loi ne peut pas subsister, comme les deux premières, dans le cas où, par l'action mutuelle des corps ou par la rencontre d'obstacles, il survient des changements brusques dans leurs mouvements, parce que ces changements sont ou peuvent toujours être regardés comme l'effet des forces actives de ressorts placés entre les corps ou entre eux et les obstacles, et qui, en se contractant ou se dilatant très-peu, maintiennent la loi de continuité dans la variation des mouvements. La force vive des corps qui subissent ainsi des changements brusques reçoit, à chacun de ces changements, une augmentation ou une diminution égale à la force vive que l'action de ces ressorts produirait si les corps n'étaient soumis qu'à cette action.

Ainsi, si les corps M, N, ... viennent à se rencontrer ou à rencontrer des obstacles, de manière qu'il en résulte des changements brusques dans leurs mouvements, on pourra appliquer à ces corps, pendant leur

action, quelque courte qu'elle puisse être, la formule du numéro précédent, de sorte qu'en nommant U, V, ... leurs vitesses au commencement de l'action, $u, v, \ldots$ les vitesses à la fin de l'action, désignant de plus par $a, b, \ldots$ les valeurs des distances $p, q, \ldots$ au commencement et par $\alpha, \beta, \ldots$ leurs valeurs à la fin de la même action, on aura

$$MU^2 + NV^2 + \ldots - Mu^2 - Nv^2 - \ldots = 2F(a, b, \ldots) - 2F(\alpha, \beta, \ldots),$$

ce qui montre que la différence des forces vives au commencement et à la fin de l'action sera

$$2F(a, b, \ldots) - 2F(\alpha, \beta, \ldots),$$

où l'on remarquera que, quoique les quantités $\alpha, \beta, \ldots$ diffèrent très-peu des quantités $a, b, \ldots$, la différence des fonctions semblables $F(a, b, \ldots)$ et $F(\alpha, \beta, \ldots)$ peut avoir une valeur finie quelconque.

44. Comme ces fonctions sont inconnues, on ne pourrait pas déterminer, de cette manière, la variation de la force vive; mais dans les cas particuliers on pourra la trouver d'après les conditions du problème.

Lorsque des corps se choquent, soit immédiatement, soit par l'entremise de leviers ou de machines quelconques, si les corps sont parfaitement élastiques, la compression et la restitution se font suivant la même loi, et l'action est censée durer jusqu'à ce que les corps soient revenus, par la restitution du ressort, à la même position respective où la compression a commencé. On aura donc pour ce cas, dans l'équation précédente,

$$\alpha = a, \quad \beta = b, \quad \ldots,$$

et par conséquent

$$F(\alpha, \beta, \ldots) = F(a, b, \ldots),$$

d'où il suit que la force vive sera la même avant et après le choc : ce qu'on sait depuis longtemps, mais dont on n'avait pas, que je sache, une démonstration simple et générale.

Au contraire, dans le choc des corps durs, l'action n'est censée durer

que jusqu'à ce que les corps aient acquis des vitesses en vertu desquelles ils ne se nuisent plus et qui, par conséquent, ne produisent point d'action entre eux. Ainsi, l'effet de ces vitesses sur l'action mutuelle des corps étant nul, si on leur imprimait ces mêmes vitesses avant ou pendant l'action, elle serait la même en vertu des vitesses composées de celles-ci et des vitesses propres des corps. Donc elle serait encore la même si les vitesses imprimées étaient égales et directement contraires à celles dont nous parlons; car l'action ne varierait pas, en supposant qu'on détruisit ces vitesses imprimées par des vitesses opposées.

Il s'ensuit de là que, dans le choc des corps durs, les vitesses u, v, ..., après le choc, sont telles, que l'équation

$$MU^2 + NV^2 + \ldots - Mu^2 - Nv^2 - \ldots = 2F(a, b, c, \ldots) - 2F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$$

subsisterait également en composant les vitesses U, V, ..., u, v, ... avec les vitesses $-u$, $-v$, ..., le second membre de cette équation demeurant le même, parce qu'il ne dépend que de la position mutuelle des corps avant et après le choc.

Si donc on nomme A la vitesse composée de U et de $-u$, B la vitesse composée de V et de $-v$, etc., l'équation deviendra

$$MA^2 + NB^2 + \ldots = 2F(a, b, c, \ldots) - 2F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots),$$

puisque les vitesses composées $u - u$, $v - v$, ... sont nulles.

On aura donc, pour le choc des corps durs, cette équation

$$MU^2 + NV^2 + \ldots - Mu^2 - Nv^2 - \ldots = MA^2 + NB^2 + \ldots$$

Comme U, V, ... sont les vitesses avant le choc, et u, v, ... les vitesses après le choc, il est clair que A, B, ... seront les vitesses perdues par le choc; par conséquent, $MA^2 + NB^2 + \ldots$ sera la force vive qui résulterait de ces vitesses : d'où l'on tire cette conclusion que, dans le choc des corps durs, il se fait une perte de forces vives égale à la force vive que les mêmes corps auraient s'ils étaient animés chacun de la vitesse qu'il perd dans le choc. Ce théorème remarquable est dû,

je crois, à M. Carnot, qui l'a trouvé d'une autre manière dans son *Essai sur les machines en général;* il est utile pour compléter l'équation des forces vives, dans le cas où il se fait une perte de ces forces par le choc.

45. Dans l'équation (n° 41)

$$Mau' + Nvv' + \ldots = Pp' + Qq' + \ldots,$$

les quantités p, q, ... désignent les distances rectilignes des points où les forces P, Q, ... sont appliquées aux centres de ces forces; ainsi les quantités p', q', ... expriment les vitesses de ces points suivant les directions de ces mêmes forces, et, comme les quantités p, q, ... n'entrent point dans l'équation, il s'ensuit qu'elle a toujours lieu, quelles que soient les forces P, Q, ..., soit qu'elles tendent à des points donnés ou non, pourvu que l'on prenne pour p', q', ... les vitesses respectives des points où ces forces sont appliquées suivant les directions mêmes des forces.

Si les forces P, Q, ... étaient en équilibre, la quantité $Pp' + Qq' + \ldots$ serait nulle par le principe des vitesses virtuelles (n° 30) : ainsi l'équation précédente montre ce que cette quantité devient lorsque les forces produisent du mouvement, et l'on voit qu'elle est alors égale à la fonction prime de la moitié de la force vive de tous les corps du système, quelles que soient d'ailleurs la disposition et la liaison mutuelle de ces corps.

Donc, si dans un instant quelconque les forces qui agissent sur le système viennent à se contre-balancer, la fonction prime de la force vive sera alors nulle, et, par conséquent, la force vive sera un maximum ou un minimum (n° 26, II^e^ Partie). En général, de toutes les situations que le système peut prendre, celle où il serait en équilibre est aussi celle où sa force vive serait un maximum ou un minimum s'il était en mouvement, et il est démontré que l'équilibre sera stable lorsque la force vive sera un maximum et qu'il ne le sera pas lorsque la force vive sera un minimum. Mais la démonstration de cette propriété sin-

gulière de l'équilibre ne peut pas être insérée ici; on peut la voir dans la *Mécanique analytique* (*).

46. Puisque les quantités p', q', ... n'expriment que les vitesses des points où sont appliquées les forces P, Q, ..., estimées suivant la direction de ces forces, on peut prendre pour p', q', ... les espaces simultanés parcourus par ces points suivant ces directions. Ainsi Pp' sera la fonction prime de l'aire de la courbe dont l'abscisse serait égale à p et l'ordonnée rectangle serait P, et de même Qq' sera la fonction prime de l'aire de la courbe dont l'abscisse serait q et l'ordonnée Q; et ainsi des autres (n° 28, II^e^ Partie). Donc, si l'on désigne respectivement ces aires par (P), (Q), ..., et qu'on prenne les fonctions primitives des deux membres de l'équation du numéro précédent, on aura, en multipliant par 2, et nommant U, V, ... les vitesses de M, N, ... lorsque les aires (P), (Q), ... sont supposées commencer,

$$Mu^2 + Nv^2 + \ldots - MU^2 - NV^2 - \ldots = 2(P) + 2(Q) + \ldots.$$

Cette équation est la même que celle du n° 42, qui renferme le principe de la conservation des forces vives; mais elle est présentée ici d'une manière indépendante des fonctions qui peuvent représenter les forces P, Q, ...

Si l'on suppose que ces forces agissent chacune séparément sur des corps libres dont les masses soient m, n, ..., on aura, par les équations fondamentales du n° 15,

$$mp'' = P, \quad nq'' = Q, \quad \ldots;$$

donc, multipliant respectivement par $2p'$, $2q'$, ..., et prenant les fonctions primitives, on aura

$$mp'^2 = a + 2(P), \quad nq'^2 = b + 2(Q),$$

et ainsi des autres, a et b étant des constantes arbitraires. Donc, si

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. XI.

l'on suppose, pour plus de simplicité, que les vitesses p', q', ... soient nulles lorsque les aires (P), (Q), ... commencent, on aura

$$a = 0, \quad b = 0, \quad \ldots,$$

et par conséquent

$$mp'^2 = 2(P), \quad nq'^2 = 2(Q), \quad \ldots.$$

où l'on voit que mp'^2, nq'^2, ... sont les forces vives produites séparément et librement par les forces P, Q, ... pendant la génération des aires (P), (Q), ..., de sorte que ces aires elles-mêmes sont égales à la moitié des forces vives engendrées.

Donc, lorsque ces forces agissent sur des corps liés entre eux d'une manière quelconque, elles produisent, dans tout le système, une augmentation de force vive égale à la somme des forces vives que chaque force produirait en particulier si elle agissait seule sur un corps libre, et qu'elle lui fît parcourir, suivant sa direction, un espace égal à celui que le corps parcourt réellement, suivant la même direction. C'est proprement ce qui constitue le principe de la conservation des forces vives.

47. Cette loi des forces vives est d'une grande importance dans la théorie des machines. L'objet général des machines est de transmettre l'action des puissances motrices de la manière la plus propre à vaincre les résistances qui s'opposent au mouvement qu'on veut produire. Ces résistances n'étant que des forces qui agissent dans un sens contraire à celui des puissances, on peut les regarder et traiter comme des puissances négatives. Ainsi, dans une machine quelconque en mouvement, l'augmentation de la force vive totale est toujours égale à la somme des forces vives que les puissances auraient produites, moins la somme de celles qui auraient pu être produites par les résistances, si les points sur lesquels ces forces agissent s'étaient mus librement.

On peut réduire à la gravité et aux ressorts presque toutes les forces dont nous pouvons disposer. Un poids P, en descendant librement d'une

hauteur h, acquiert une force vive égale à $2Ph$; car, dans ce cas, la force P étant constante, l'aire (P) est égale au produit de l'ordonnée P par l'abscisse h. Ainsi, lorsqu'on a à sa disposition une chute verticale h d'un poids P, on peut dépenser une force vive égale à $2Ph$, laquelle peut être employée dans une machine comme puissance ou comme résistance. Un ressort bandé produit, en se débandant librement, une force vive qui dépend de la force du ressort et de l'espace par lequel le ressort peut se débander, et qui est égale au double de l'aire (P). Donc, si l'on a à sa disposition un ressort bandé jusqu'à un certain point, et qui puisse se débander par un espace donné, on est le maître de dépenser une force vive donnée et de l'employer dans une machine quelconque. Ainsi l'on peut dire qu'une chute d'eau dont la quantité et la hauteur sont données, qu'une quantité donnée de charbon, en tant qu'elle peut être employée à vaporiser une quantité donnée d'eau, qu'une quantité donnée de poudre à canon, qu'une journée de travail d'un animal donné, etc., renferment une quantité déterminée de force vive, dont on peut disposer, mais qu'on ne saurait augmenter par aucun moyen mécanique.

On peut donc toujours regarder une machine comme destinée à détruire une quantité donnée de force vive en consumant une autre force vive donnée; et il suit du principe général que la force vive des puissances motrices doit surpasser celle des résistances d'une quantité égale à la force vive totale de tous les corps qui se meuvent en vertu de ces forces, et, s'il arrivait des changements brusques dans leurs mouvements, il y faudrait ajouter la somme des forces vives qui résulteraient des vitesses perdues dans les chocs (n° 44).

On peut calculer de cette manière l'effet de toute machine et déterminer les conditions nécessaires pour que cet effet devienne le plus grand qu'il est possible, relativement aux circonstances de la machine donnée.

Je ne m'étends pas davantage sur les applications à la Mécanique, et je ne m'arrêterai pas à résoudre des problèmes particuliers. Comme mon dessein n'est pas de donner un Traité de cette science, je me contenterai d'avoir établi, par la théorie des fonctions, les principes et les équations fondamentales de la Mécanique, qu'on ne démontre ordinairement que par la considération des infiniment petits, et d'avoir donné, d'une manière nouvelle, les lois générales du mouvement des corps animés par des forces quelconques et qui agissent les uns sur les autres, et je renverrai à la *Mécanique analytique* ceux qui désireraient un plus grand détail.

ADDITION

AU CHAPITRE II DE LA PREMIÈRE PARTIE, PAGE 33.

On peut démontrer de différentes manières la correspondance des fonctions dérivées avec les différentielles. Si l'on désigne par dx la différence constante des valeurs successives x, $x+dx$, $x+2dx$, $x+3dx$, ... de la variable x, les valeurs correspondantes de la variable y, regardée comme fonction de x, seront, par la formule précédente, en y faisant successivement $i=dx$, $2dx$, $3dx$, ...

$$y,$$

$$y+y'dx+\frac{y''dx^2}{2}+\frac{y'''dx^3}{2.3}+\frac{y^{IV}dx^4}{2.3.4}+\cdots,$$

$$y+2y'dx+\frac{4y''dx^2}{2}+\frac{8y'''dx^3}{2.3}+\frac{16y^{IV}dx^4}{2.3.4}+\cdots,$$

$$y+3y'dx+\frac{9y''dx^2}{2}+\frac{27y'''dx^3}{2.3}+\frac{81y^{IV}dx^4}{2.3.4}+\cdots,$$

$$y+4y'dx+\frac{16y''dx^2}{2}+\frac{64y'''dx^3}{2.3}+\frac{256y^{IV}dx^4}{2.3.4}+\cdots,$$

.....

Si l'on prend, par des soustractions successives, les différences premières, secondes, troisièmes, etc. de ces valeurs, et qu'on les dénote par dy, d^2y, d^3y, ..., on aura

$$dy=y'dx+\frac{y''dx^2}{2}+\frac{y'''dx^3}{2.3}+\frac{y^{IV}dx^4}{2.3.4}+\cdots,$$

$$d^2y=\frac{2y''dx^2}{2}+\frac{6y'''dx^3}{2.3}+\frac{14y^{IV}dx^4}{2.3.4}+\cdots,$$

$$d^3y=\frac{6y'''dx^3}{2.3}+\frac{36y^{IV}dx^4}{2.3.4}+\cdots,$$

$$d^4y=\frac{24y^{IV}dx^4}{2.3.4}+\cdots,$$

.....

Supposons que la différence dx devienne infiniment petite : les puissances dx^2, dx^3, ... deviendront infiniment petites, chacune par rapport à celle qui précède, et les séries qui expriment les valeurs des différences dy, d^2y, d^3y, ... se trouveront composées de termes infiniment petits, chacun relativement au précédent, de sorte qu'en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur relativement à ceux d'un ordre inférieur, on aura simplement

$$dy=y'dx,\quad d^2y=y''dx^2,\quad d^3y=y'''dx^3,\quad \ldots,$$

et par conséquent

$$y'=\frac{dy}{dx},\quad y''=\frac{d^2y}{dx^2},\quad y'''=\frac{d^3y}{dx^3},\quad \ldots.$$

On voit par là comment la supposition des infiniment petits peut servir à trouver les fonctions dérivées, et l'on peut en conclure que les expressions différentielles $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., au lieu d'exprimer ce qu'elles paraissent représenter, ne sont à la rigueur que des symboles qui dénotent des fonctions différentes de la fonction primitive y, mais dérivées de celle-ci suivant certaines lois. [*Voir*, dans la nouvelle édition des *Leçons sur le Calcul des fonctions*, la Leçon XVIII, qui contient des remarques importantes sur le passage du fini à l'infiniment petit (*).]

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. X.

FIN DU TOME NEUVIÈME.

THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES.

NOTE DE M. J.-A. SERRET.

I. La théorie remarquable exposée dans les Chapitres III et IV de la deuxième Partie fait connaître l'intégrale première et la solution singulière d'une classe assez étendue d'équations différentielles : il s'agit des équations auxquelles conduisent les problèmes *inverses* sur le contact des courbes, et dans lesquelles n'entrent que les *éléments* mêmes du contact. Le succès de la méthode est dû à cette seule circonstance que les éléments du contact sont des fonctions de x, y et des dérivées de y, qui, étant égalées à des constantes arbitraires, fournissent autant d'intégrales premières d'une même équation différentielle; aussi peut-on donner un peu plus de généralité au théorème de Lagrange.

Désignons par α et β deux constantes arbitraires, et supposons que les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(x, y, y', y'', \ldots, y^m) = \alpha, \\ \psi(x, y, y', y'', \ldots, y^m) = \beta \end{cases}$$

soient deux intégrales premières d'une même équation différentielle de l'ordre $m+1$,

$$(2)\qquad V = 0,$$

y', y'', ... étant mis au lieu de $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ...

Si l'on élimine y^m entre les deux équations (1), on obtiendra une équation différentielle de l'ordre $m-1$:

$$(3)\qquad (x, y, y', \ldots, y^{m-1}, \alpha, \beta) = 0.$$

Cela posé, l'équation (3), qui est une intégrale seconde de l'équation (2) et une intégrale première de l'une quelconque des équations (1), sera également une intégrale première de l'équation

$$(4)\qquad F(\varphi, \psi) = 0,$$

où F désigne une fonction quelconque, pourvu que l'on considère les deux constantes α et β comme assujetties à vérifier l'équation

$$(5)\qquad F(\alpha, \beta) = 0.$$

Ce théorème est presque évident, car les valeurs de α et β que l'on tirerait de l'équation (3) et de sa dérivée seraient $\alpha = \varphi$, $\beta = \psi$, et, comme l'équation (5) a lieu entre les constantes α et β, il s'ensuit que l'équation (4) se trouvera aussi vérifiée. Si les fonctions φ et ψ ne renfermaient que x, y et y', l'équation (3) ne contiendrait plus de dérivées et serait, par suite, l'intégrale générale de l'équation proposée. Il résulte de là que, si, parmi les différentes manières, en nombre infini, d'écrire une équation différentielle, on en distingue une qui permette de lui donner la forme de l'équation (4), on aura, par cela seul, intégré une première fois cette équation.

II. Proposons-nous, comme application, de chercher l'équation intégrale des lignes de courbure d'une surface du second ordre à centre. L'équation de la surface étant

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1, \tag{1}$$

l'équation différentielle des projections des lignes de courbure sur le plan xy sera

$$\frac{c^2}{\rho^2}\left(x^2 - \frac{xy}{y'}\right) - \frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}(y^2 - xyy') - b^2 = 0; \tag{2}$$

si maintenant on pose

$$\frac{c^2}{\rho^2}\left(x^2 - \frac{xy}{y'}\right) = \alpha, \quad \frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}(y^2 - xyy') = \beta,$$

ces équations seront les intégrales premières de la même équation

$$xyy'' - yy' + xy'^2 = 0;$$

on pourra donc appliquer le théorème à l'équation (2). Si l'on élimine y' entre celles-ci, on aura

$$\frac{c^2}{\rho^2}\frac{x^2}{\alpha} + \frac{c^2 - b^2}{\rho^2 - b^2}\frac{y^2}{\beta} = 1, \quad \text{avec} \quad \beta = \alpha - b^2;$$

nous ferons $\alpha = \mu^2$, $\beta = \mu^2 - b^2$, et l'équation des projections des lignes de courbure sera finalement

$$\frac{c^2 x^2}{\rho^2 \mu^2} + \frac{(c^2 - b^2)y^2}{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)} = 1, \tag{3}$$

μ^2 étant la constante arbitraire : elle représente, comme on sait, des ellipses ou des hyperboles. Comme l'équation (3) est symétrique entre ρ et μ, si l'on considère ρ comme un paramètre variable et μ comme déterminé, l'équation (3) représentera également les projections des lignes de courbure de la surface

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1, \tag{4}$$

et, si ρ et μ ont en même temps des valeurs déterminées, l'équation (3) représentera la projection d'une ligne de courbure commune aux surfaces (1) et (4), laquelle sera donc l'intersection de ces deux surfaces.

Si dans l'équation (1) on a $\rho > c > b$, μ devra être compris entre b et c, ou inférieur à ces deux quantités, car autrement les deux surfaces ne se couperaient pas. On conclut de là

que les trois équations

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\rho^2} + \dfrac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\mu^2} + \dfrac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{\nu^2} - \dfrac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \dfrac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1, \end{cases} \tag{5}$$

dans lesquelles b et $c > b$ sont des constantes déterminées, ρ, μ, ν trois paramètres variables compris, le premier entre c et ∞, le second entre b et c, et le troisième entre zéro et b, représentent trois systèmes de surfaces telles, que l'une quelconque des surfaces de l'un de ces systèmes sera coupée, suivant ses lignes de courbure, par toutes les surfaces des deux autres systèmes. Il en résulte que les surfaces (5) sont orthogonales entre elles.

C'est au même principe que l'on doit rattacher l'intégration de l'équation si connue

$$y = y'x + \mathrm{F}(y'),$$

car, si l'on fait

$$y' = \alpha,$$
$$y - y'x = \beta,$$

à cause que les deux équations qui précèdent sont les deux intégrales premières de l'équation

$$y'' = 0,$$

l'équation

$$y = \alpha x + \beta,$$

qui résulte de l'élimination de y', sera l'intégrale générale de la proposée, pourvu que les constantes α et β soient unies par la relation

$$\beta = \mathrm{F}(\alpha),$$

et l'on obtient finalement

$$y = \alpha x + \mathrm{F}(\alpha),$$

où α désigne la constante arbitraire. Au surplus, dans la question actuelle, les fonctions y' et $y - y'x$, entre lesquelles a lieu l'équation proposée, ne sont autres que les *éléments* du contact du premier ordre.

III. Les équations différentielles dont il vient d'être question, et dont on détermine si aisément une intégrale première, admettent, en général, des solutions singulières, ainsi que Lagrange l'a remarqué ; la théorie de ces solutions singulières peut être présentée très-simplement à l'aide de considérations géométriques, identiques à celles que l'on emploie dans la recherche des développantes des courbes planes.

Lorsqu'on donne l'équation d'une courbe en coordonnées rectangulaires x et y, on obtient, comme on sait, l'équation de la développée en éliminant x et y à l'aide de la proposée et des deux suivantes,

$$\begin{cases} x - \dfrac{y'(1 + y'^2)}{y''} = \alpha, \\ y + \dfrac{1 + y'^2}{y''} = \beta, \end{cases} \tag{1}$$

dans lesquelles α et β représentent les coordonnées du centre de courbure.

Mais si, au contraire, on donne l'équation

$$F(\alpha, \beta) = 0 \tag{2}$$

de la développée, et que l'on élimine α et β entre les équations (1) et (2), on obtiendra l'équation différentielle du second ordre

$$F\left[x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \; y + \frac{1+y'^2}{y''}\right] = 0, \tag{3}$$

que la théorie présente immédiatement comme devant faire connaître les développantes de la courbe représentée par l'équation (2). Mais cette équation est du second ordre, et son intégrale complète doit renfermer deux constantes arbitraires, tandis qu'il n'en peut entrer qu'une seule dans l'équation des développantes, d'où résulte ce paradoxe d'Analyse signalé par Lagrange, et qu'il est bien aisé d'éclaircir. D'abord l'équation (3) est du genre de celles dont nous avons parlé précédemment, et son intégrale première s'obtiendra en éliminant y'' des équations (1), ce qui donne

$$(x - \alpha) + y'(y - \beta) = 0, \tag{4}$$

dans laquelle α et β doivent être considérées comme deux constantes liées par la relation

$$F(\alpha, \beta) = 0;$$

γ désignant une constante arbitraire, l'intégrale de l'équation (4) sera

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \gamma^2.$$

Cette équation, qui renferme deux constantes arbitraires, est l'intégrale générale de l'équation (3); elle représente un cercle de rayon arbitraire et dont le centre est en un point quelconque de la courbe donnée que représente l'équation (2). Le cercle satisfait effectivement à la question de Géométrie, puisque, pour chacun de ses points, le centre de courbure est bien situé sur la courbe donnée. Il résulte donc de là que l'équation des développantes de la courbe proposée est nécessairement une solution singulière de l'équation différentielle (3). La plupart des Traités d'Analyse ne font aucune mention de l'équation (3) comme devant faire connaître l'équation des développantes, et l'on se contente habituellement de montrer, à l'aide de *considérations particulières*, que celle-ci est l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre, laquelle résulte de l'élimination de α et β entre les trois équations

$$(x - \alpha) + \frac{dy}{dx}(y - \beta) = 0,$$

$$\frac{d\beta}{dx} + \frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

$$F(\alpha, \beta) = 0.$$

C'est, au surplus, le résultat auquel on est immédiatement conduit en considérant les développantes d'une courbe comme les trajectoires orthogonales de ses tangentes.

IV. Nous allons montrer quelle extension on peut donner aux considérations particulières que l'on emploie dans la théorie des développantes.

Nous savons que, si les équations

$$\begin{cases} \varphi(x, y, y', \ldots, y^m) = \alpha, \\ \psi(x, y, y', \ldots, y^m) = \beta \end{cases} \tag{1}$$

sont deux intégrales premières d'une même équation différentielle, et que

$$f(x, y, y', \ldots, y^{m-1}, \alpha, \beta) = 0 \tag{2}$$

en résulte par l'élimination de y^m, cette dernière équation sera une intégrale première de l'équation

$$F(\varphi, \psi) = 0, \tag{3}$$

pourvu que l'on considère α et β comme des constantes vérifiant l'équation

$$F(\alpha, \beta) = 0; \tag{4}$$

en sorte que l'on obtiendra l'intégrale générale de l'équation (3) en cherchant celle de l'équation (2), dont l'ordre est inférieur d'une unité.

Considérons α et β comme des coordonnées rectangulaires, de même que x et y, puis imaginons que l'on ait tracé la courbe représentée par l'équation (4), en même temps que celles qui sont représentées par l'intégrale générale de l'équation (3); chacune de ces dernières dépendra, *en partie*, de la position d'un point de la première courbe, de celui qui répond aux valeurs de α et β relatives à la courbe que l'on considère : pour abréger le discours, j'appellerai ce point *point directeur*, et *courbe directrice* l'ensemble des points directeurs, c'est-à-dire la courbe représentée par l'équation (4).

Pour tous les points d'une même courbe de l'intégrale générale (3), le point directeur est le même, et jouit, par rapport à chacun d'eux, d'une propriété commune définie analytiquement par les équations (1); d'où il suit clairement que les courbes susceptibles de satisfaire à l'équation (3) et qui ne font pas partie de l'intégrale générale jouissent de cette propriété remarquable que le point directeur n'est pas le même pour tous les points d'une même courbe, et que la propriété définie analytiquement par les équations (1) a lieu entre les différents points d'une même courbe et leurs *correspondants* sur la courbe directrice.

Pour chacune de ces nouvelles courbes qui constituent une solution singulière de l'équation (3), l'équation (2) aura encore lieu entre les coordonnées x, y de l'un de ses points et celles α et β du point directeur correspondant; mais, si l'on fait varier x et y, α et β varieront aussi : on aura donc, en différentiant l'équation (2),

$$\left(\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dy} + \ldots + y^m\frac{df}{dy^{m-1}}\right)dx + \frac{df}{d\alpha}d\alpha + \frac{df}{d\beta}d\beta = 0.$$

Mais, si l'on observe que l'équation (2), dans laquelle on regarde α et β comme constantes, est une intégrale première de l'une quelconque des équations (1), on verra que le coefficient de dx dans l'équation précédente devient nul en vertu de ces mêmes équations (1) : on aura donc simplement

$$\frac{df}{d\alpha}d\alpha + \frac{df}{d\beta}d\beta = 0.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{d\beta}\,d\beta = 0;$$

donc

$$\frac{\dfrac{df}{dx}}{\dfrac{dF}{dx}} = \frac{\dfrac{df}{d\beta}}{\dfrac{dF}{d\beta}}, \tag{5}$$

équation qui établit une relation entre chaque point de la courbe singulière et le point directeur correspondant.

Si des équations (4) et (5) on tire les valeurs de α et β pour les porter dans l'équation (2), ou, ce qui revient au même, si l'on élimine α et β à l'aide des équations (2), (4) et (5), on obtiendra une équation différentielle de l'ordre $m-1$,

$$\Pi(x, y, y', \ldots, y^{m-1}) = 0,$$

sans constante arbitraire, et qui sera une solution singulière de l'équation (3).

Bornons-nous à indiquer une seule application des résultats qui précèdent.

On demande quelle est la courbe jouissant de la propriété que, si M *est un de ses points,* C *le centre de courbure en ce point, et* M' *la position du point* M *auquel on fait faire un quart de révolution autour d'un point fixe, l'on ait* CM' = *une constante* K.

L'équation différentielle du second ordre est

$$\left[x - y - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}\right]^2 + \left(x + y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)^2 = K^2;$$

on trouve pour intégrale première

$$\frac{(x-\alpha)-(y-\beta)}{(x-\alpha)+(y-\beta)} + \frac{dy}{dx} = 0,$$

avec

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{K^2}{2},$$

et pour solution singulière

$$(x-y)+(x+y)\frac{dy}{dx} = K\sqrt{1+\frac{dy^2}{dx^2}};$$

l'intégrale générale représente ici des spirales logarithmiques, la solution singulière des courbes beaucoup plus compliquées.

V. On démontrerait absolument, comme au n° I, que, si

$$\varphi = \alpha, \quad \psi = \beta, \quad \varpi = \gamma, \quad \ldots$$

sont n intégrales premières d'une même équation différentielle et que

$$f = 0$$

en résulte par l'élimination des $n-1$ plus hautes dérivées, cette dernière sera une intégrale d'ordre $n-1$ de l'équation

$$F(\varphi, \psi, \varpi, \ldots) = 0,$$

pourvu que l'on considère α, β, γ, ... comme des constantes assujetties à vérifier l'équation

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0.$$

Dans ce cas, l'équation proposée admet encore une solution singulière, que l'on déterminera par un procédé analogue à celui que nous venons d'employer.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME NEUVIÈME.

INTRODUCTION.

Pages

DES FONCTIONS EN GÉNÉRAL; DES FONCTIONS PRIMITIVES ET DÉRIVÉES. DES DIFFÉRENTES MANIÈRES DONT ON A ENVISAGÉ LE CALCUL DIFFÉRENTIEL. OBJET DE CET OUVRAGE.... 1

PREMIÈRE PARTIE.

EXPOSITION DE LA THÉORIE, AVEC SES PRINCIPAUX USAGES DANS L'ANALYSE.

CHAPITRE I. — Développement en série d'une fonction d'une variable, lorsqu'on attribue un accroissement à cette variable. Formation successive des termes de la série. Théorème important sur la nature de ces séries..... 21

CHAPITRE II. — Fonctions dérivées; leur notation et leur algorithme..... 31

CHAPITRE III. — Fonctions dérivées des puissances, des quantités exponentielles et logarithmiques, des sinus, cosinus, et des expressions composées de ces fonctions simples. Équations dérivées..... 34

CHAPITRE IV. — Digression sur la manière de déduire les séries qui expriment les exponentielles, les logarithmes, les sinus, cosinus et les arcs de simples considérations algébriques..... 45

CHAPITRE V. — Du développement des fonctions lorsqu'on donne à la variable une valeur déterminée. Cas dans lesquels la règle générale est en défaut. Des valeurs des fractions dont le numérateur et le dénominateur s'évanouissent en même temps. Des cas singuliers où le développement de la fonction ne procède pas suivant les puissances positives et entières de l'accroissement de la variable..... 57

Pages

CHAPITRE VI. — Résolution générale des fonctions en séries. Développement des fonctions en séries terminées et composées d'autant de termes qu'on voudra. Moyen d'exprimer les restes depuis un terme quelconque proposé. Théorème nouveau sur ces séries..... 69

CHAPITRE VII. — Des équations dérivées et de leur usage dans l'Analyse pour la transformation des fonctions. Théorie générale de ces équations et des constantes arbitraires qui y entrent..... 86

CHAPITRE VIII. — Où l'on examine les cas simples dans lesquels on peut passer des fonctions ou des équations dérivées du premier ordre aux fonctions ou aux équations primitives. Des équations linéaires des différents ordres, et de celles qu'on peut rendre linéaires..... 97

CHAPITRE IX. — Des valeurs singulières qui ne sont pas comprises dans les équations primitives complètes. Des équations primitives singulières..... 109

CHAPITRE X. — De l'emploi des fonctions dérivées dans l'Analyse, et de la détermination des constantes arbitraires. Application à la sommation des suites et à la résolution des équations du troisième degré..... 118

CHAPITRE XI. — Où l'on donne l'équation primitive d'une équation du premier ordre, dans laquelle les variables sont séparées, mais où l'on ne peut point obtenir directement les fonctions primitives de chacun des deux membres. Propriétés remarquables de ces fonctions primitives..... 127

CHAPITRE XII. — Du développement des fonctions de deux variables. De leurs fonctions dérivées. Notation de ces fonctions et conditions auxquelles elles doivent satisfaire. Loi générale qui règne entre les termes du développement d'une fonction de plusieurs variables et ceux qui résultent du développement de ces termes eux-mêmes..... 142

CHAPITRE XIII. — Où l'on donne la manière de développer les fonctions d'un nombre quelconque de variables en séries terminées et composées d'autant de termes qu'on voudra, et d'avoir la valeur des restes..... 151

CHAPITRE XIV. — Des équations dérivées d'une équation entre trois variables. Des fonctions arbitraires qui entrent dans les équations primitives complètes entre trois variables..... 157

CHAPITRE XV. — Formule remarquable pour le développement en série d'une fonction quelconque de l'inconnue z de l'équation $z = x + yf(z)$..... 163

CHAPITRE XVI. — Méthode générale pour trouver l'équation primitive d'une équation du premier ordre entre plusieurs variables, lorsque les fonctions dérivées sont linéaires, et pour trouver l'équation primitive d'une équation quelconque du premier ordre entre trois variables..... 170

SECONDE PARTIE.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS A LA GÉOMÉTRIE.

Pages

CHAPITRE I. — Des différentes manières dont on a considéré les tangentes. Théorie des tangentes et des contacts de différents ordres, d'après les principes de la Géométrie ancienne..... 183

CHAPITRE II. — Des lignes droites tangentes, des cercles tangents et du lieu de leurs centres. Des cercles osculateurs et du lieu de leurs centres. Analyse générale du contact des courbes planes. Du contact dans des cas singuliers, et des lignes asymptotes..... 190

CHAPITRE III. — Problèmes directs et inverses sur le contact des courbes. Analyse des cas où l'on propose une relation entre les deux éléments du contact du premier ordre. De la courbe représentée par l'équation primitive singulière d'une équation du premier ordre..... 206

CHAPITRE IV. — Des contacts du second ordre. Théorie et construction des équations primitives singulières dans les ordres supérieurs. Exemple contenant la théorie analytique des développées..... 220

CHAPITRE V. — Des plus grandes et des moindres valeurs des fonctions d'une variable..... 232

CHAPITRE VI. — De la mesure des aires, et de la longueur des arcs dans les courbes planes. De la mesure des solidités et de celle des surfaces des conoïdes. Principe général de la solution analytique de ces questions..... 238

CHAPITRE VII. — Théorie du contact des courbes à double courbure. Du rayon osculateur, des centres de courbure et du lieu de ces centres. Des développées des courbes à double courbure. Quadrature et rectification de ces courbes..... 248

CHAPITRE VIII. — Des surfaces courbes et de leurs plans tangents. Théorie du contact des surfaces courbes. Des contacts des différents ordres..... 258

CHAPITRE IX. — Des sphères osculatrices. Des lignes de plus grande et de moindre courbure. Propriétés de ces lignes..... 268

CHAPITRE X. — Solutions des questions dans lesquelles on propose une relation entre les éléments du contact du premier ordre des surfaces courbes. Construction de cette solution. Équation des surfaces développables..... 274

CHAPITRE XI. — Des plus grandes et des moindres ordonnées des surfaces courbes. Solution générale des questions *de maximis et minimis*. Manière de distinguer les maxima des minima dans les fonctions de plusieurs variables..... 280

Pages

CHAPITRE XII. — Des questions *de maximis et minimis* qui se rapportent à la méthode des variations. De l'équation commune au maximum et au minimum, et des caractères propres à distinguer les maxima des minima..... 296

CHAPITRE XIII. — Extension de la méthode précédente aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Problème de la brachistochrone. Caractères pour distinguer si une fonction proposée est ou non une fonction prime, ou en général une fonction dérivée d'un certain ordre..... 311

CHAPITRE XIV. — De la mesure des solidités et des surfaces des corps de figure donnée..... 322

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS A LA MÉCANIQUE.

CHAPITRE I. — De l'objet de la Mécanique. Du mouvement uniforme et du mouvement uniformément accéléré. Du mouvement rectiligne en général. Relation entre l'espace, la vitesse et la force accélératrice..... 337

CHAPITRE II. — De la composition des mouvements, et en particulier de celle de trois mouvements uniformes. De la composition et décomposition des vitesses et des forces. De la trajectoire des projectiles dans le vide..... 345

CHAPITRE III. — Du mouvement curviligne. Des vitesses et des forces dans ce mouvement. Équations générales du mouvement d'un corps sollicité par des forces quelconques. De la manière d'éliminer le temps dans ces équations pour trouver la courbe décrite par le corps..... 352

CHAPITRE IV. — De la question où il s'agit de trouver la résistance que le milieu doit opposer pour que le projectile décrive une courbe donnée. Analyse de la solution que Newton a donnée de ce problème dans la première édition de ses *Principes*. Source de l'erreur de cette solution. Distinction entre la méthode des séries et celle des fonctions dérivées, ou du Calcul différentiel..... 360

CHAPITRE V. — Du mouvement d'un corps sur une surface donnée, ou assujetti à de certaines conditions. Du mouvement de plusieurs corps liés entre eux. Des équations de condition entre les coordonnées de ces différents corps, et de la manière d'en déduire les forces qui résultent de leur action mutuelle. Démonstration générale du principe des vitesses virtuelles..... 377

Pages

CHAPITRE VI. — De la loi du mouvement du centre de gravité. De la loi des aires dans la rotation autour d'un axe fixe, ou d'un seul point fixe, ou autour du centre de gravité dans les systèmes libres..... 386

CHAPITRE VII. — De la loi des forces vives dans le mouvement d'un système animé par des forces accélératrices quelconques. De la conservation des forces vives dans le choc des corps élastiques. De la perte de ces forces dans le choc des corps durs, ou en général dans les changements brusques que le système peut éprouver. De la somme des forces vives dans les situations de l'équilibre. Remarques générales sur l'économie de ces forces dans les machines..... 399

ADDITION au Chapitre II de la première Partie, page 33..... 412

THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES (Note de M. J.-A. Serret)..... 415

5656 Paris. — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.

