

CHAPITRE XVI.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR TROUVER L'ÉQUATION PRIMITIVE D'UNE ÉQUATION DU PREMIER ORDRE ENTRE PLUSIEURS VARIABLES, LORSQUE LES FONCTIONS DÉRIVÉES SONT LINÉAIRES, ET POUR TROUVER L'ÉQUATION PRIMITIVE D'UNE ÉQUATION QUELCONQUE DU PREMIER ORDRE ENTRE TROIS VARIABLES.

88. Nous avons vu comment on peut faire disparaître une fonction arbitraire contenue dans une équation donnée, au moyen de ses équations primes; mais il y a, pour y parvenir, un moyen plus simple à quelques égards, fondé sur la considération que nous avons employée plus haut (n° 82).

Considérons en général l'équation

$$F[x, y, z, \varphi(p)] = 0,$$

dans laquelle p soit égale à $f(x, y, z)$, les deux fonctions désignées par les caractéristiques F et f étant données, et la fonction marquée par la caractéristique φ étant arbitraire; on peut supposer y une fonction de x telle que la fonction prime de p soit nulle; alors p pourra être traitée comme constante dans la fonction $F[x, y, z, \varphi(p)]$, pourvu qu'on détermine y' par la condition que la fonction prime de $f(x, y, z)$ soit nulle.

Désignons simplement par $F(x)$, $F'(y)$, $F(z)$ et de même par $f(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$ les fonctions primes de $F[x, y, z, \varphi(p)]$ et de $f(x, y, z)$, prises relativement à x , y , z isolées et regardées comme indépendantes; on aura, comme dans l'endroit cité, les deux équations primes

$$F'(x) + z' F'(z) + y' [F'(y) + z, F'(z)] = 0,$$

$$f'(x) + z' f'(z) + y' [f'(y) + z, f'(z)] = 0,$$

dont la première contiendra $\varphi(p)$ et dont la seconde ne contiendra point p ; celle-ci servira à éliminer l'inconnue y' ; la première, jointe à son équation primitive, servira à éliminer l'inconnue $\varphi(p)$.

Cette méthode a l'avantage de pouvoir s'appliquer aux équations qui contiendraient plusieurs fonctions arbitraires de la même fonction p .

En effet, si l'on avait l'équation

$$F[x, y, z, \varphi(p), \psi(p)] = 0,$$

on trouverait d'abord, comme ci-dessus, une équation du premier ordre sans la fonction $\varphi(p)$, mais qui contiendrait encore la fonction $\psi(p)$; ensuite, appliquant à cette équation le même procédé et éliminant de nouveau la fonction y' qui paraîtra dans son équation prime par la même équation ci-dessus, on aura une équation du second ordre qui contiendra $\psi(p)$ et d'où l'on éliminera cette fonction par le moyen de l'équation du premier ordre; et ainsi de suite, quel que puisse être le nombre des fonctions arbitraires de la même quantité p .

Mais, si l'équation proposée contenait les fonctions $\varphi(p)$ et $\psi(q)$, p et q étant des fonctions différentes de x, y, z , on ne pourrait pas parvenir à une équation du second ordre, débarrassée des fonctions $\varphi(p)$ et $\psi(q)$ et de leurs dérivées; il faudrait alors passer à des équations d'un ordre supérieur.

89. Considérons les équations du premier ordre qui peuvent résulter de l'élimination d'une fonction arbitraire $\varphi(p)$, et supposons, pour plus de simplicité, ce qui est toujours possible, que l'équation primitive soit de la forme

$$F(x, y, z) = \varphi(p), \quad p \text{ étant } = f(x, y, z);$$

on aura alors les deux équations primes

$$F'(x) + z' F'(z) + y' [F'(y) + z, F'(z)] = 0,$$

$$f'(x) + z' f'(z) + y' [f'(y) + z, f'(z)] = 0,$$

qui seront délivrées de $\varphi(p)$, et il ne s'agira plus que d'éliminer y' .

Le résultat de cette élimination est

$$\frac{F'(x) + z' F'(z)}{f'(x) + z' f'(z)} = \frac{F'(y) + z F'(z)}{f'(y) + z f'(z)},$$

d'où résulte cette équation du premier ordre

$$F'(x) f'(y) - F'(y) f'(x) + z' [F'(z) f'(y) - F'(y) f'(z)] + z [F'(x) f'(z) - F'(z) f'(x)] = 0,$$

qui ne contient que x, y, z avec les fonctions primes z' et z .

Cette équation pourra donc être mise sous cette forme

$$z' + Mz + N = 0,$$

en faisant

$$M = \frac{F'(x) f'(z) - F'(z) f'(x)}{F'(z) f'(y) - F'(y) f'(z)},$$

$$N = \frac{F'(x) f'(y) - F'(y) f'(x)}{F'(z) f'(y) - F'(y) f'(z)},$$

d'où l'on peut conclure :

1° Que toutes les équations du premier ordre entre x, y, z' et z , qui ne seront pas réductibles à la forme précédente ne pourront pas être dérivées d'une équation primitive entre x, y, z et $\varphi(p)$, p étant une fonction de x, y, z ;

2° Que toutes les équations du premier ordre réductibles à la forme précédente pourront toujours avoir pour équation primitive une équation de la forme supposée $F(x, y, z) = \varphi(p)$, p étant égal à $f(x, y, z)$.

Car les valeurs des coefficients M et N étant données en fonction de x, y , on aura deux équations par lesquelles on pourra déterminer les deux fonctions marquées par les caractéristiques F et f , et la fonction marquée pour φ demeurera arbitraire.

Ce problème étant l'un des plus intéressants de la théorie des fonctions, je vais en donner ici une solution directe.

90. Regardons, ce qui est permis, y et z comme des fonctions de x dont les fonctions primes soient y' et z' , et considérons les deux quan-

tités $z' + N$ et $Mz' + Ny'$; ces quantités deviendront, par la substitution des expressions précédentes de M et de N ,

$$\frac{f'(y) [F'(z) z' + F'(x)] - F'(y) [f'(z) z' + f'(x)]}{F'(z) f'(y) - F'(y) f'(z)},$$

$$\frac{F'(x) [f'(z) z' + f'(y) y'] - f'(x) [F'(z) z' + F'(y) y']}{F'(z) f'(y) - F'(y) f'(z)}.$$

Si l'on ajoute, et qu'on retranche en même temps du numérateur de la première la quantité $F'(y) f'(y) y'$ et du numérateur de la seconde la quantité $F'(x) f'(x)$, et qu'on fasse attention que $F'(x) + F'(y) y' + F'(z) z'$ est la fonction prime de $F(x, y, z)$, que nous dénoterons simplement par $F(x, y, z)'$; que de même $f'(x) + f'(y) y' + f'(z) z'$ est la fonction prime de $f(x, y, z)$, que nous dénoterons pareillement par $f(x, y, z)'$, on aura

$$z' + N = \frac{f'(y) F(x, y, z)' - F'(y) f(x, y, z)'}{F'(z) f'(y) - F'(y) f'(z)},$$

$$Mz' + Ny' = \frac{F'(x) f(x, y, z)' - f'(x) F(x, y, z)'}{F'(z) f'(y) - F'(y) f'(z)}.$$

Donc, si l'on fait les deux équations

$$z' + N = 0, \quad Mz' + Ny' = 0,$$

ces équations seront équivalentes à ces deux-ci,

$$F(x, y, z)' = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y, z)' = 0,$$

dont les équations primitives sont évidemment

$$F(x, y, z) = A, \quad f(x, y, z) = B,$$

A et B étant des constantes arbitraires, de sorte que ces équations primitives seront complètes à cause des deux constantes arbitraires A et B .

Mais il est possible qu'en cherchant les équations primitives des équations

$$z' + N = 0, \quad Mz' + Ny' = 0,$$

où M et N sont des fonctions données de x, y, z , on ne les trouve pas sous la forme précédente. Cependant, sous quelque forme qu'elles

puissent se présenter, si elles renferment deux constantes arbitraires a et b , elles doivent être comprises dans les précédentes, et les constantes A et B ne pourront qu'être fonctions des constantes a et b . Si donc on tire de ces équations primitives les valeurs des constantes a et b en x, y, z , et que ces valeurs soient P et Q , en sorte que les équations dont il s'agit soient réduites à la forme $P = a$, $Q = b$, il s'ensuit que les fonctions $F(x, y, z)$ et $f(x, y, z)$ ne pourront être aussi que des fonctions de P et Q .

Donc, puisque l'équation primitive d'où l'équation du premier ordre $z' + Mz + N = 0$ est dérivée, est de la forme

$$F(x, y, z) = \varphi(p) = \varphi[f(x, y, z)],$$

cette équation primitive deviendra

$$\text{fonct.}(P, Q) = \varphi[\text{fonct.}(P, Q)],$$

la fonction marquée par φ demeurant arbitraire : d'où il résulte que P sera une fonction quelconque de Q , de sorte que l'équation primitive de l'équation du premier ordre

$$z' + Mz + N = 0$$

pourra être réduite, en général, à cette forme très-simple,

$$P = \varphi(Q),$$

la fonction marquée par la caractéristique φ étant arbitraire. Cette méthode réduit, comme l'on voit, la détermination de la fonction de deux variables à celle de deux fonctions d'une seule variable, et elle est surtout remarquable par la simplicité et la généralité du résultat.

91. La méthode précédente peut s'étendre aussi aux fonctions de plus de deux variables. Ainsi, si u est une fonction de trois variables x, y, z , déterminée par l'équation

$$F(x, y, z, u) = \varphi(p, q),$$

p et q étant des fonctions données de x, y, z, u , et $\varphi(p, q)$ étant une

fonction quelconque de p, q , on trouvera, par une analyse semblable à celle du n° 89, et regardant y et z comme des fonctions de x dont on déterminera les fonctions primes y' et z' par la supposition que p et q demeurent constantes, on trouvera, dis-je, une équation du premier ordre, dérivée de la fonction φ , de la forme suivante,

$$u' + Lu + M'u + N = 0,$$

L, M, N étant des fonctions données de x, y, z, u , et u', u'', u''' étant les fonctions primes de u relativement à x, y et z , de sorte que toute équation entre x, y, z, u et les fonctions primes de u qui ne serait pas de cette forme ne pourra pas être dérivée d'une équation primitive de la forme ci-dessus.

Pour les équations du premier ordre réductibles à la forme précédente, on trouvera aussi, par une analyse semblable à celle du numéro précédent, que, si l'on regarde y, z, u comme des fonctions de x déterminées par ces trois équations du premier ordre,

$$u' + N = 0, \quad Lu' + Ny' = 0, \quad Mu' + Nz' = 0,$$

et qu'on en cherche les équations primitives qui devront renfermer trois constantes arbitraires a, b, c , qu'ensuite on tire de ces équations les valeurs de ces constantes, de manière que l'on ait

$$a = P, \quad b = Q, \quad c = R,$$

P, Q, R étant des fonctions données de x, y, z, u , on aura sur-le-champ

$$P = \varphi(Q, R)$$

pour l'équation primitive de l'équation proposée, dans laquelle $\varphi(P, Q)$ sera une fonction arbitraire de P et Q .

Cette méthode est présentée d'une manière plus simple et plus directe dans la Leçon XX du *Calcul des fonctions* (*), à laquelle nous nous contentons de renvoyer.

92. Mais, si l'on avait, pour la détermination de z en fonction de x et y , une équation quelconque du premier ordre entre x, y, z, z' et z , non réductible à la forme du n° 89, la même méthode ne servirait plus. Cependant on peut toujours, quelle que soit la forme de l'équation proposée, la ramener à la forme du n° 91 en y introduisant une variable de plus.

Soit donc proposée l'équation

$$z' = F(x, y, z, z),$$

la fonction indiquée par la caractéristique F étant donnée; je suppose $z = u$, et, comme z est fonction de x, y , il est clair que u sera aussi fonction de x, y ; donc, prenant les fonctions primes relativement à x seul, on aura $z' = u'$. Maintenant, l'équation proposée deviendra

$$z' = F(x, y, z, u);$$

prenant les fonctions primes relativement à y seul, et observant que z et u sont fonctions de x, y , on aura

$$z' = F'(y) + z, F'(z) + u, F'(u),$$

où les quantités $F'(y), F'(z), F'(u)$ dénotent les fonctions primes de $F(x, y, z, u)$ prises relativement aux variables isolées y, z, u , ainsi que nous l'avons pratiqué jusqu'ici; donc, substituant u et u' pour z , et z' , on aura l'équation

$$u' = F'(y) + u F'(z) + u, F'(u),$$

dans laquelle les quantités $F'(y), F'(z), F'(u)$ seront des fonctions données de x, y, z et u .

Cette équation serait donc susceptible de la méthode précédente si u était une fonction des variables x, y, z , regardées comme indépendantes entre elles; mais rien n'empêche de les regarder comme telles et de regarder en même temps u comme une simple fonction de x, y, z , pourvu qu'on exprime, d'une manière conforme à cette supposition, les fonctions primes u' et u , qui se rapportent aux seules variables x et y .

Qu'on dénote par u', u et u les fonctions primes de u relativement à x, y, z , il est facile de voir, par les principes établis pour la formation des fonctions primes, que, puisque z est essentiellement une fonction de x et y dont z' et z , sont les fonctions primes relativement à chacune de ces variables isolées, la valeur complète de la fonction prime de u relativement à x sera $u' + \mu z'$, et que la valeur complète de la fonction prime de u relativement à y sera $u + \mu z$; ces valeurs sont celles qui, dans l'équation ci-dessus, sont représentées simplement par u' et u ; mais on a supposé $z' = u$, et, par l'équation proposée, on a $z' = F(x, y, z, u)$; donc les valeurs à substituer à u' et u , seront $u' + u F(x, y, z, u)$ et $u + \mu u$. Faisant donc ces substitutions dans la dernière équation en u, u', u et ordonnant les termes suivant les quantités u', u et u , on aura

$$u' - u, F'(u) + u[F(x, y, z, u) - u F'(u)] - F'(y) - u F'(z) = 0,$$

équation qui, étant comparée à la formule générale du n° 91, donne

$$L = -F'(u), \quad M = F(x, y, z, u) - u F'(u), \quad N = -F'(y) - u F'(z),$$

de sorte que les trois équations par lesquelles il faudra déterminer y, z, u en fonction de x seront

$$u' - F'(y) - u F'(z) = 0,$$

$$u' F'(u) + y' [F'(y) + u F'(z)] = 0,$$

$$u' [F(x, y, z, u) - u F'(u)] - z' [F'(y) + u F'(z)] = 0.$$

Ainsi la difficulté est réduite à trouver les équations primitives d'où celles-ci peuvent être déduites; mais il suffira d'en trouver une, et il serait même inutile de trouver les deux autres.

93. En effet, supposons qu'on ait trouvé les trois équations primitives avec les trois constantes arbitraires a, b, c , et soient P, Q, R les valeurs de ces constantes qui en résultent; on aura

$$P = \varphi(Q, R)$$

pour la forme générale de l'équation primitive en u (n° 91).

Cette équation, où la caractéristique φ désigne une fonction arbitraire, satisfera dans toute son étendue à l'équation du premier ordre en u , dans laquelle u est regardée comme fonction de x, y, z ; mais u a été supposée égale à z , et z doit être, d'après l'équation proposée, une fonction de x et y ; donc l'équation

$$P = \varphi(Q, R)$$

est trop générale, et il faudra encore chercher les limitations qu'on doit donner à la fonction arbitraire relativement aux deux quantités P et Q , pour que cette équation réponde exactement à l'équation proposée.

Mais, sans entrer dans cette recherche, j'observe que, quelle que puisse être la vraie forme de la fonction arbitraire, on peut la supposer égale à une constante, de sorte que $P = a$, c'est-à-dire une des équations primitives des trois équations ci-dessus, avec une constante arbitraire, donnera une valeur de u qui satisfera à l'équation en u .

Maintenant, en remettant z , pour u dans cette équation, on aura une équation du premier ordre entre x, y, z et z , dans laquelle z devra être regardée comme fonction de x et y ; mais, puisque cette équation ne contient que la fonction prime z , relative à y , on pourra regarder x comme constante et z comme une simple fonction de y ; on trouvera donc son équation primitive par l'analyse des fonctions d'une seule variable, et, puisque x est regardée comme constante, la constante arbitraire qui entrera dans cette équation primitive pourra être aussi une fonction quelconque de x , que nous nommerons p .

On aura ainsi une valeur de z en x et y , avec les deux quantités a et p , qui satisfera à l'équation proposée. La constante a demeurera arbitraire; mais la fonction p devra être déterminée conformément à cette équation. Pour cela, il n'y aura qu'à y substituer l'expression de z dont il s'agit; tous les termes qui renfermeront y se détruiront, et il ne restera que des termes qui contiendront x, p et p' , de sorte que l'on aura de nouveau une équation du premier ordre entre les va-

riables x et p , dont l'équation primitive donnera la valeur de p en x , avec une nouvelle constante arbitraire b .

De cette manière, on aura enfin une valeur de z en x et y , avec deux constantes arbitraires a et b , qui satisfera à la proposée indépendamment des constantes. Cette valeur ne sera que particulière; mais on pourra, par la méthode du n° 83, trouver la valeur générale de z , qui contiendra une fonction arbitraire.

En effet, si

$$f(x, y, z, a, b) = 0$$

est l'équation trouvée pour la détermination de z , on fera $b = \varphi(a)$, et l'on égalera à zéro la fonction prime de $f[x, y, z, a, \varphi(a)]$ prise relativement à la quantité a , regardée comme seule variable; on aura une équation qui servira à déterminer a , et l'équation

$$f[x, y, z, a, \varphi(a)] = 0$$

sera l'équation primitive cherchée de la proposée du premier ordre, la fonction marquée par la caractéristique φ demeurant arbitraire.

J'ai cru devoir exposer cette méthode avec tout le détail nécessaire pour la faire bien entendre, parce qu'elle est nouvelle et qu'elle réduit toute l'analyse inverse des fonctions de deux variables qui ne passent pas le premier ordre à l'analyse des fonctions d'une seule variable.

94. Pour éclaircir cette méthode par un exemple dont le calcul soit assez simple, supposons que l'équation proposée soit de cette forme

$$z' = Ay + Bz + f(x, z),$$

A et B étant des constantes, et $f(x, z)$ une fonction quelconque donnée de x et de z . En rapportant cette équation à la formule générale du numéro précédent, on aura

$$F(x, y, z, z') = Ay + Bz + f(x, z);$$

donc

$$F(x, y, z, u) = Ay + Bz + f(x, u),$$

et de là, en prenant les fonctions primes relativement à y et z ,

$$F'(y) = A, \quad F'(z) = B,$$

de sorte que, en faisant ces substitutions dans les trois équations du premier ordre entre x, y, z, u , la première d'entre elles deviendra

$$u' - A - Bu = 0,$$

laquelle ne contenant que la variable u , qu'on suppose fonction de x , aura une équation primitive indépendamment des deux autres. En effet, si l'on multiplie cette équation par e^{-Bx} , e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est l'unité, son premier membre deviendra la fonction prime de

$$ue^{-Bx} + \frac{Ae^{-Bx}}{B},$$

comme il est aisé de s'en assurer en cherchant la fonction prime de cette quantité par les formules du Chapitre III.

Ainsi, comme le second membre est nul, on aura, en passant aux fonctions primitives,

$$\left(u + \frac{A}{B}\right)e^{-Bx} = a,$$

a étant une constante arbitraire. Cette équation donnera donc

$$u = -\frac{A}{B} + ae^{Bx},$$

et, substituant pour u sa valeur z , on aura l'équation prime

$$z = -\frac{A}{B} + ae^{Bx},$$

dans laquelle, z , étant la fonction prime de z relativement à y seul, on pourra regarder x comme constante et z comme fonction de y . Ainsi, comme le second membre ne contient ni y ni z , sa fonction primitive dans cette supposition sera simplement

$$\left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right)y;$$

done, passant des fonctions primes relatives à y seul aux fonctions primitives, on aura l'équation primitive

$$z = \left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right)y + p,$$

p étant une fonction quelconque de x qui peut être ajoutée comme constante, puisque sa fonction prime relativement à y est nulle.

De cette expression de z on tirera celles des deux fonctions primes z' et z , relatives à x et y , et l'on aura

$$z' = aBe^{Bx}y + p',$$

$$z = -\frac{A}{B} + ae^{Bx};$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation proposée, elle deviendra

$$aBe^{Bx}y + p' = Ay + B\left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right)y + Bp + f\left(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right),$$

laquelle se réduit à

$$p' = Bp + f\left(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right),$$

où l'on voit que les y ont disparu, de manière qu'on pourra déterminer p en fonction de x seul.

Qu'on multiplie cette équation par e^{-Bx} et qu'on suppose

$$e^{-Bx}f\left(x, -\frac{A}{B} + ae^{Bx}\right) = F'(x),$$

elle deviendra

$$(pe^{-Bx})' = F'(x),$$

et, passant aux fonctions primitives, on aura

$$pe^{-Bx} = F(x) + b,$$

b étant une constante arbitraire. De là on tire

$$p = e^{Bx}[F(x) + b];$$

done, substituant cette valeur dans l'expression de z trouvée ci-dessus,

on aura

$$z = \left(-\frac{A}{B} + ae^{Bx} \right) y + [F(x) + b] e^{Bx}.$$

Cette valeur de z n'est que particulière; mais, comme elle contient les deux constantes arbitraires a et b , elle donnera la valeur générale si l'on fait $b = \varphi(a)$ et que l'on détermine a par l'équation

$$y + F'(a) + \varphi'(a) = 0,$$

en désignant par $F'(a)$ la fonction prime de $F(x)$ prise relativement à a .

Si $B = 0$, le calcul devient plus simple, et l'on trouvera, en faisant $f(x, Ax + a) = F'(x)$, les deux équations

$$\begin{aligned} z &= (Ax + a)y + F(x) + \varphi(a), \\ y + F'(a) + \varphi'(a) &= 0, \end{aligned}$$

d'où il faudra éliminer a .

95. Cette dernière méthode est néanmoins sujette à quelques difficultés que nous avons résolues complètement dans la même Leçon XX déjà citée, où cette matière est envisagée d'une manière plus générale que nous ne l'avons fait ici.

Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce qui regarde les fonctions de plusieurs variables. Ceux qui connaissent le Calcul qu'on appelle *aux différences partielles* pourront aisément le rapprocher de l'analyse de ces fonctions et donner par là à cette analyse les développements qu'on y pourrait encore désirer.

Notre objet, dans cette première Partie, n'a été que d'établir la théorie des fonctions et des équations dérivées d'une manière purement analytique et indépendante de toute supposition ou considération étrangère.

SECONDE PARTIE.

APPLICATION DE LA THÉORIE DES FONCTIONS A LA GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

DES DIFFÉRENTES MANIÈRES DONT ON A CONSIDÉRÉ LES TANGENTES. THÉORIE DES TANGENTES ET DES CONTACTS DE DIFFÉRENTS ORDRES, D'APRÈS LES PRINCIPES DE LA GÉOMÉTRIE ANCIENNE.

1. Les opérations ordinaires de l'Algèbre suffisent pour résoudre les problèmes de la théorie des courbes, qui ne consistent que dans des rapports de lignes tirées d'une certaine manière et terminées aux courbes; mais la détermination des tangentes, des rayons de courbure, des aires, etc., dépend essentiellement des opérations relatives aux fonctions.

Suivant les anciens géomètres, une ligne droite est tangente d'une courbe lorsque, ayant un point commun avec la courbe, on ne peut mener par ce point aucune droite entre elle et la courbe: c'est par ce principe qu'ils ont déterminé les tangentes dans le petit nombre des courbes qu'ils ont considérées. Mais depuis que, par l'application de l'Algèbre à la Géométrie, les courbes ont été soumises à l'analyse, on a envisagé les tangentes sous d'autres points de vue: on les a regardées comme des sécantes dont les deux points d'intersection sont réunis, ou comme le prolongement des côtés infiniment petits de la courbe, considérée comme un polygone d'une infinité de côtés, ou comme la

direction du mouvement composé par lequel la courbe peut être décrite, et ces différentes manières de considérer les tangentes ont donné lieu aux méthodes algébriques fondées sur l'égalité des racines des équations et aux méthodes différentielles fondées sur le rapport des différences infiniment petites ou des fluxions des coordonnées. Ces méthodes ne laissent rien à désirer pour la généralité et la simplicité; mais ceux qui admirent avec raison l'évidence et la rigueur des anciennes démonstrations regrettent de ne pas trouver ces avantages dans les principes de ces nouvelles méthodes. La théorie des fonctions que nous avons développée dans la première Partie nous met en état de traiter le problème des tangentes et les autres problèmes du même genre d'après les notions et les principes des anciens, et de donner ainsi aux résultats de l'Analyse le caractère qui distingue leurs solutions.

2. Pour considérer ces questions d'une manière générale, soient

$$y = f(x)$$

l'équation d'une courbe quelconque proposée et

$$q = F(p)$$

l'équation d'une ligne droite ou d'une autre courbe qu'on veut comparer à celle-là; x et y sont l'abscisse et l'ordonnée de la première courbe; p et q sont aussi l'abscisse et l'ordonnée de l'autre courbe, rapportées aux mêmes axes que x et y .

Pour que ces deux courbes aient un point commun relatif à l'abscisse x , il faut que, en faisant $p = x$, on ait $q = y$; donc $y = F(x)$, et, par conséquent,

$$F(x) = f(x).$$

Pour comparer maintenant le cours de ces courbes au delà de ce point, on mettra dans leurs équations $x + i$ à la place de x et de p , et l'on aura $f(x + i)$ et $F(x + i)$ pour les ordonnées répondant au même point de l'axe des x et éloignées de la quantité i de l'ordonnée qui passe par le point commun. Donc la différence de ces ordonnées sera

$f(x + i) - F(x + i)$, savoir, en développant les fonctions et observant que l'on a déjà $f(x) - F(x) = 0$,

$$i[f'(x) - F'(x)] + \frac{i^2}{2}[f''(x) - F''(x)] + \frac{i^3}{3}[f'''(x) - F'''(x)] + \dots$$

et cette différence exprimera la distance des points des deux courbes qui répondent à la même abscisse $x + i$.

On voit d'abord, en général, que cette distance sera d'autant plus petite et que, par conséquent, les courbes se rapprocheront d'autant plus qu'il y aura plus de termes qui disparaîtront au commencement de cette série.

Ainsi le rapprochement sera plus grand si l'on a $f'(x) = F'(x)$, c'est-à-dire si les fonctions primes des ordonnées des deux courbes deviennent égales pour la même abscisse x ; il sera plus grand encore si, de plus, les fonctions secondes $f''(x)$ et $F''(x)$ des mêmes ordonnées deviennent aussi égales, et ainsi de suite.

3. Mais, pour voir de plus près en quoi consistent ces différents degrés de rapprochement, nous considérerons une troisième courbe quelconque, rapportée aux mêmes axes par les coordonnées r et s , et dont l'équation soit

$$s = \varphi(r),$$

et nous supposons d'abord qu'elle ait aussi avec les deux autres un point commun pour la même abscisse x , ce qui exige que les ordonnées à cette abscisse soient égales, et, par conséquent, que l'on ait aussi-

$$\varphi(x) = f(x) = F(x).$$

Soient D la différence des ordonnées des deux premières courbes pour la même abscisse $x + i$, et Δ la différence des ordonnées de la première courbe et de la troisième pour cette même abscisse $x + i$; on aura

$$D = f(x + i) - F(x + i),$$

et de même

$$\Delta = f(x + i) - \varphi(x + i).$$

Il est clair que la troisième courbe ne pourra passer entre les deux premières, à moins que pour une valeur quelconque de i , aussi petite qu'on voudra, la valeur de D ne surpasse celle de Δ , abstraction faite des signes.

Développons les fonctions $f(x+i)$, $F(x+i)$, $\varphi(x+i)$ partiellement, suivant la formule du n° 40 de la première Partie, et arrêtons-nous d'abord aux deux premiers termes. Nommant j une quantité indéterminée, mais renfermée entre les limites 0 et i , on aura, par cette formule,

$$f(x+i) = f(x) + i f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x+j),$$

et de même

$$F(x+i) = F(x) + i F'(x) + \frac{i^2}{2} F''(x+j),$$

$$\varphi(x+i) = \varphi(x) + i \varphi'(x) + \frac{i^2}{2} \varphi''(x+j),$$

où la quantité j pourra n'être pas la même dans les trois fonctions, pourvu qu'elle soit renfermée entre les mêmes limites.

Faisant ces substitutions dans les expressions de D et Δ , on aura, à cause de $f(x) = F(x) = \varphi(x)$, en vertu du point commun aux trois courbes,

$$D = i[f'(x) - F'(x)] + \frac{i^2}{2}[f''(x+j) - F''(x+j)],$$

$$\Delta = i[f'(x) - \varphi'(x)] + \frac{i^2}{2}[f''(x+j) - \varphi''(x+j)].$$

Supposons maintenant que les deux premières courbes soient telles que l'on ait $f'(x) = F'(x)$; la valeur D se réduira à

$$D = \frac{i^2}{2}[f''(x+j) - F''(x+j)],$$

et il est aisé de se convaincre que, tant que le terme affecté de i dans l'expression de Δ ne sera pas nul, on pourra toujours prendre i assez petit pour que la quantité Δ devienne plus grande que la quantité D , abstraction faite des signes. En effet, en divisant ces deux quan-

tités par i , il suffira que la quantité $f'(x) - \varphi'(x)$ soit plus grande que $\frac{i}{2}[f''(x+j) - F''(x+j)]$, ce qui est évidemment toujours possible, en prenant i aussi petit qu'on voudra, et il est visible aussi que, aussitôt que cette condition aura lieu pour une valeur déterminée de i , elle aura lieu, à plus forte raison, pour toutes les valeurs plus petites de i .

Donc la troisième courbe ne pourra, dans ce cas, passer entre les deux premières, à moins que la quantité $f'(x) - \varphi'(x)$ ne devienne nulle, c'est-à-dire qu'on n'ait

$$\varphi'(x) = f'(x),$$

auquel cas la conclusion précédente cessera d'avoir lieu.

4. Supposons ensuite que l'on ait à la fois $F'(x) = f'(x)$ et $F''(x) = f''(x)$; en prenant trois termes dans le développement des fonctions, nous aurons, par la même formule du n° 40 (1^{re} Partie),

$$f(x+i) = f(x) + i f'(x) + \frac{i^2}{2} f''(x) + \frac{i^3}{2.3} f'''(x+j),$$

$$F(x+i) = F(x) + i F'(x) + \frac{i^2}{2} F''(x) + \frac{i^3}{2.3} F'''(x+j),$$

$$\varphi(x+i) = \varphi(x) + i \varphi'(x) + \frac{i^2}{2} \varphi''(x) + \frac{i^3}{2.3} \varphi'''(x+j).$$

Ces valeurs étant substituées dans les expressions générales de D et Δ , à cause de $f(x) = F(x) = \varphi(x)$ et $f'(x) = F'(x)$, $f''(x) = F''(x)$, donneront

$$D = \frac{i^3}{2.3}[f'''(x+j) - F'''(x+j)],$$

$$\Delta = i[f'(x) - \varphi'(x)] + \frac{i^2}{2}[f''(x) - \varphi''(x)] + \frac{i^3}{2.3}[f'''(x+j) - \varphi'''(x+j)].$$

Ici, il est aisé de voir que, tant que les termes affectés de i et de i^2 dans l'expression de Δ ne seront pas nuls, on pourra prendre i assez petit pour que la quantité Δ devienne plus grande que D , abstraction faite des signes. Car, divisant ces deux quantités par i , il suffira

que la quantité $f'(x) - \varphi'(x) + \frac{i}{2} [f''(x) - \varphi''(x)]$ soit plus grande que $\frac{i^2}{2,3} [\varphi''(x+j) - F''(x+j)]$, ce qui est évidemment possible lorsque $f'(x) - \varphi'(x)$ n'est pas nulle, et, si $f'(x) - \varphi'(x)$ est nulle, alors, en divisant encore par i , il suffira que $f''(x) - \varphi''(x)$ soit une quantité plus grande que $\frac{i}{3} [\varphi''(x+j) - F''(x+j)]$, ce qui est encore visiblement possible, en diminuant la valeur de i tant qu'on voudra, pourvu que $f''(x) - \varphi''(x)$ ne soit pas nulle.

Donc, dans ce cas, la troisième courbe ne pourra passer entre les deux premières, à moins qu'on n'ait à la fois

$$\varphi'(x) = f'(x) \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = f''(x).$$

On prouvera de la même manière que, si l'on a pour les deux premières courbes

$$f'(x) = F'(x), \quad f''(x) = F''(x) \quad \text{et} \quad f'''(x) = F'''(x),$$

la troisième courbe ne pourra passer entre les deux premières, à moins que l'on n'ait aussi

$$\varphi'(x) = f'(x), \quad \varphi''(x) = f''(x), \quad \varphi'''(x) = f'''(x),$$

et ainsi de suite.

5. On peut conclure de là, en général, que, si l'on a une courbe quelconque et qu'une autre courbe donnée ait un point commun avec celle-là, ce qui exige que leurs ordonnées pour la même abscisse soient égales, que de plus les fonctions primes de ces ordonnées pour la même abscisse commune soient aussi égales, alors il sera impossible qu'aucune autre courbe qu'on mènerait par le même point commun passe entre les deux courbes, à moins que la fonction prime de son ordonnée pour la même abscisse ne soit aussi égale à la fonction prime de l'ordonnée commune aux deux courbes.

Et si, outre les fonctions primes de ces ordonnées, leurs fonctions secondes pour la même abscisse étaient aussi égales, alors il serait im-

possible qu'aucune autre courbe qui passerait par le point commun passât entre les deux courbes, à moins que les fonctions prime et seconde de son ordonnée ne fussent respectivement égales aux fonctions prime et seconde de l'ordonnée commune aux deux courbes, et ainsi du reste.

A proprement parler, ces courbes ne coïncident que dans le point où les ordonnées sont égales, et l'égalité des fonctions primes, secondes, etc. de ces ordonnées ne les rend pas plus coïncidentes dans d'autres points, mais elle les fait approcher de manière qu'aucune autre courbe pour laquelle la même égalité n'aurait pas lieu ne puisse passer entre elles.

C'est là l'idée nette qu'on doit se faire de ces différents degrés de rapprochement des courbes que l'on appelle communément *contact*, *osculation*, etc., et que la manière ordinaire de concevoir le Calcul différentiel fait regarder comme des coïncidences plus ou moins rigoureuses ou plus ou moins étendues.

CHAPITRE II.

DES LIGNES DROITES TANGENTES, DES CERCLES TANGENTS ET DU LIEU DE LEURS CENTRES. DES CERCLES OSCULATEURS ET DU LIEU DE LEURS CENTRES. ANALYSE GÉNÉRALE DU CONTACT DES COURBES PLANES. DU CONTACT DANS DES CAS SINGULIERS ET DES LIGNES ASYMPTOTES.

6. Soit proposée une courbe quelconque représentée par l'équation

$$y = f(x);$$

comparons-la d'abord avec une ligne droite quelconque. Puisque nous avons représenté en général par $q = F(p)$ l'équation de la courbe à laquelle on veut comparer la proposée (n° 2), on aura, pour la ligne droite,

$$F(p) = a + bp,$$

a et b étant deux constantes qui déterminent la position de cette droite.

La condition d'un point commun donne d'abord

$$f(x) = F(x) = a + bx,$$

et l'on pourra y satisfaire au moyen d'une des indéterminées a ou b .

Supposons ensuite $f'(x) = F'(x)$; il est clair qu'en changeant, dans $a + bp$, p en x , et prenant la fonction prime, on aura

$$F'(x) = b;$$

donc

$$f'(x) = b.$$

Ainsi les valeurs de a et b seront déterminées par ces deux conditions, car on aura

$$b = f'(x) \quad \text{et} \quad a = f(x) - x f'(x).$$

Donc l'équation de la ligne droite deviendra

$$q = f(x) - x f'(x) + p f'(x),$$

p et q étant les deux coordonnées et l'abscisse x étant regardée comme constante.

Je dis maintenant que cette droite a la propriété qu'aucune autre droite ne pourra être menée entre elle et la courbe.

Car, soit

$$s = \varphi(r) = g + hr$$

l'équation d'une autre droite quelconque; pour qu'elle passe par le même point commun, il faudra que l'on ait aussi $\varphi(x) = f(x)$, et, pour qu'elle puisse passer entre la courbe et la droite que nous venons de déterminer, il faudra de plus que l'on ait $\varphi'(x) = f'(x)$ (n° 3); ces deux conditions donnent

$$g + hx = f(x) \quad \text{et} \quad h = f'(x),$$

d'où l'on tire, pour g et h , les mêmes valeurs que nous venons de trouver pour a et b , de sorte que cette dernière droite coïncidera avec la première.

Donc la droite déterminée par l'équation

$$q = a + bp,$$

où $a = f(x) - x f'(x)$ et $b = f'(x)$, sera tangente de la courbe représentée par l'équation $y = f(x)$, au point qui répond à l'abscisse $p = x$.

Puisque $y = f(x)$, on aura, suivant la notation employée dans la première Partie,

$$y' = f'(x);$$

donc les expressions de a et b seront plus simplement

$$a = y - xy' \quad \text{et} \quad b = y'.$$

Dans l'équation de la ligne droite

$$q = a + bp,$$

il est aisé de voir que b exprime la tangente de l'angle que cette droite fait avec l'axe et que $-\frac{a}{b}$ est l'abscisse qui répond au point où la même droite coupe l'axe. Donc, cette droite étant tangente à la courbe au point où $p = x$, y' sera la tangente de l'angle qu'elle fait avec l'axe, et $x + \frac{a}{b} = \frac{y}{y'}$ sera ce qu'on appelle la *sous-tangente*.

7. Représentons par

$$s = \alpha + \beta r$$

une autre droite qui passe par le même point de la courbe, r et s étant les deux coordonnées de cette droite; on aura pour ce point

$$r = p = x, \quad s = q = y;$$

donc

$$\alpha + bx = \alpha + \beta x.$$

Pour que cette droite coupe la première sous un angle dont la tangente soit m , comme b et β sont les tangentes des angles que ces deux droites font avec le même axe, on aura, par les formules connues de la Trigonométrie,

$$\beta = \frac{b + m}{1 - bm},$$

donc

$$\alpha = a - \frac{x(1 + b^2)m}{1 - bm},$$

où il n'y aura qu'à substituer les valeurs de a et b .

Si l'on veut que cette seconde droite soit perpendiculaire à la tangente, on fera $m = \infty$, c'est-à-dire $\frac{1}{m} = 0$, et l'on aura simplement

$$\alpha = a + x \left(b + \frac{1}{b} \right) = y + \frac{x}{y'}$$

et

$$\beta = -\frac{1}{b} = -\frac{1}{y'}.$$

Ainsi $-\frac{1}{y'}$ sera la tangente de l'angle que cette perpendiculaire qu'on appelle communément *normale* fera avec l'axe, et $x + \frac{\alpha}{\beta} = -yy'$ sera la partie de l'axe comprise entre le point où elle coupe l'axe et l'ordonnée, c'est-à-dire la *sous-normale*.

Si les deux coordonnées x, y de la courbe étaient exprimées en fonction d'une troisième variable quelconque, alors, prenant x' et y' pour les fonctions primes de x et y relativement à cette autre variable, il n'y aurait qu'à mettre partout, dans les formules précédentes, $\frac{y'}{x'}$ à la place de y' (n° 50, 1^{re} Partie).

Il serait superflu d'appliquer ces formules à des exemples; car, pour peu qu'on sache les premiers éléments du Calcul différentiel, on ne peut manquer d'apercevoir l'identité des formules précédentes avec les formules différentielles connues. Il suffit de mettre $\frac{dy}{dx}$ à la place de la fonction dérivée y' .

8. Prenons maintenant le cercle pour le comparer avec la courbe proposée. L'équation générale du cercle rapportée aux coordonnées rectangles p et q est

$$(p - a)^2 + (q - b)^2 = c^2,$$

où a et b sont les coordonnées qui répondent au centre et c est le rayon du cercle. De là on tire

$$q = b + \sqrt{c^2 - (p - a)^2} = F(p);$$

donc

$$F(x) = b + \sqrt{c^2 - (x - a)^2}, \quad \text{et} \quad F'(x) = -\frac{x - a}{\sqrt{c^2 - (x - a)^2}}.$$

Faisons donc

$$F(x) = f(x) = y, \quad \text{et} \quad F'(x) = f'(x) = y',$$

et tirons de ces équations les valeurs de a et b ; la seconde donne

$$\sqrt{c^2 - (x - a)^2} = -\frac{x - a}{y'},$$

d'où l'on tire

$$x - a = \frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}};$$

ensuite la première donne

$$y - b = \sqrt{c^2 - (x - a)^2} = -\frac{x - a}{y'} = -\frac{c}{\sqrt{1+y'^2}};$$

donc

$$a = x - \frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad b = y + \frac{c}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

Si l'on regarde le rayon c comme donné, il ne reste plus d'arbitraires dans l'équation, et l'on en conclura que le cercle donné, dont le centre est déterminé par les coordonnées a et b , est tel, qu'on ne pourrait mener entre lui et la courbe aucun autre arc de même rayon, mais placé différemment.

Car, pour un autre cercle du même rayon c , rapporté aux coordonnées r et s , et dont les coordonnées du centre seraient g et h , on aurait l'équation

$$s = \varphi(r) = h + \sqrt{c^2 - (r - g)^2},$$

et, pour que ce cercle eût le même point commun avec la courbe proposée et pût passer entre cette courbe et le cercle déjà déterminé, il faudrait que l'on eût aussi

$$\varphi(x) = f(x) = y, \quad \text{et} \quad \varphi'(x) = f'(x) = y',$$

équations qui serviraient à déterminer les deux quantités g et h ; or il est visible que ces équations sont de la même forme que les précédentes, les quantités g et h étant à la place de a et b : donc elles donneront pour g et h les mêmes valeurs que l'on a trouvées pour a et b ; par conséquent, le nouveau cercle se confondra avec le cercle déterminé par ces valeurs.

Donc, suivant la même notion des tangentes, le cercle de rayon c , dont le centre sera déterminé par les coordonnées a et b , sera tangent à la courbe proposée, dont x et y sont les coordonnées.

Comme cette conclusion a lieu quelle que soit la valeur du rayon c ,

on peut regarder c comme indéterminé dans les expressions de a et b : alors ces coordonnées a et b appartiendront à une ligne droite dont l'équation résultera de l'élimination de c et qui sera, par conséquent,

$$b = y + \frac{x - a}{y'}.$$

Cette droite sera donc le lieu des centres de tous les cercles qui peuvent être tangents à la courbe; elle sera donc normale à la courbe: en effet, on voit que l'équation de cette droite, où a et b sont les coordonnées, coïncide avec celle de la normale trouvée plus haut (n° 7), en y changeant r et s en a et b .

9. Maintenant, parmi ces différents cercles qui satisfont aux conditions $F(x) = f(x) = y$, $F'(x) = f'(x) = y'$, on peut en trouver un qui satisfasse de plus à la condition $F''(x) = f''(x) = y''$.

En effet, ayant trouvé ci-dessus

$$F'(x) = -\frac{x - a}{\sqrt{c^2 - (x - a)^2}},$$

on en déduira

$$F''(x) = -\frac{c^2}{[c^2 - (x - a)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi, on aura l'équation

$$y'' = -\frac{c^2}{[c^2 - (x - a)^2]^{\frac{3}{2}}};$$

or on a déjà trouvé dans le même endroit

$$\sqrt{c^2 - (x - a)^2} = -\frac{x - a}{y'} = -\frac{c}{\sqrt{1 + y'^2}};$$

done on aura

$$y'' = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{c},$$

et de là

$$c = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Substituant cette valeur dans les expressions de a et b , on aura

$$a = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}, \quad b = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Les trois constantes a, b, c qui entrent dans l'équation générale du cercle étant ainsi déterminées, on en peut conclure qu'aucun autre cercle ne pourra passer entre la courbe proposée et celui qui est déterminé par ces valeurs de a, b, c . En effet, pour qu'une autre courbe quelconque rapportée aux coordonnées r, s et représentée par l'équation $s = \varphi(r)$ pût passer entre la courbe et le cercle dont il s'agit, il faudrait que l'on eût (n° 4)

$$\varphi(x) = f(x) = y, \quad \varphi'(x) = f'(x) = y', \quad \varphi''(x) = f''(x) = y'';$$

or, si cette courbe est un cercle, prenant les quantités g, h, k à la place de a, b, c , on aura pour $\varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x)$ les mêmes expressions que pour $F(x), F'(x), F''(x)$, en substituant seulement dans celles-ci g, h, k au lieu de a, b, c ; donc les trois équations que l'on aura pour la détermination de g, h, k seront les mêmes que celles par lesquelles on a déterminé a, b, c ; donc les valeurs de g, h, k seront nécessairement les mêmes que celles de a, b, c ; par conséquent, le nouveau cercle, qui devrait passer entre la courbe et le cercle déjà déterminé, coïncidera avec celui-ci et n'en formera qu'un avec lui.

Donc ce cercle aura, relativement aux cercles, la même propriété que la tangente à l'égard des lignes droites; ce sera ce que les géomètres appellent *cercle osculateur* ou *cercle de courbure*, parce qu'il sert à mesurer la courbure de la courbe.

La quantité c sera le rayon de ce cercle, qu'on nomme simplement *rayon de courbure*, et les quantités a, b seront les coordonnées de la courbe qui sera le lieu de tous les centres de ces cercles.

Si l'on veut transporter ces formules au Calcul différentiel, il n'y aura qu'à substituer $\frac{dy}{dx}$ à la place de y' et $\frac{d^2y}{dx^2}$ à la place de y'' .

10. On peut maintenant présenter cette théorie d'une manière plus générale.

Soient x, y les coordonnées de la courbe proposée, qui peut être quelconque, et p, q les coordonnées de la courbe qu'on veut lui comparer, et qui est supposée donnée.

Supposons que l'équation de cette courbe renferme, avec les variables p et q , des constantes indéterminées $a, b, c, \dots$, et représentons-la par

$$F(p, q, a, b, c, \dots) = 0.$$

Si dans cette équation on change p en x, q en y , on a

$$F(x, y, a, b, c, \dots) = 0,$$

équation qui donne la condition nécessaire pour que la courbe donnée ait un point commun avec la courbe proposée.

Dénotons par $F(x, y, a, b, c, \dots)$ la fonction prime, par $F(x, y, a, b, c, \dots)''$ la fonction seconde, etc. de la fonction $F(x, y, a, b, c, \dots)$, en regardant y comme fonction de x , et $a, b, c, \dots$ comme des constantes.

Cela posé, s'il n'y a que deux constantes indéterminées a et b , et qu'on les détermine par les deux équations

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad F(x, y, a, b)' = 0,$$

alors la courbe donnée, dont l'équation est

$$F(p, q, a, b) = 0,$$

sera tangente de la courbe proposée au point où $p = x$.

S'il y a trois constantes indéterminées a, b, c , et qu'on les détermine par les trois équations

$$F(x, y, a, b, c) = 0, \quad F(x, y, a, b, c)' = 0, \quad F(x, y, a, b, c)'' = 0,$$

la courbe donnée, dont l'équation est

$$F(p, q, a, b, c) = 0,$$

sera osculatoire de la courbe proposée, c'est-à-dire aura même courbure, au point qui répond à l'abscisse $p = x$, et ainsi de suite.

Cela suit immédiatement des principes établis ci-dessus, car l'équation prime

$$F(x, y, a, b, c, \dots)' = 0$$

donne la valeur de y' en $x, y, a, b, c, \dots$, l'équation seconde

$$F(x, y, a, b, c, \dots)'' = 0$$

donne celle de y'' en x, y, y' et $a, b, c, \dots$, et ainsi de suite.

On peut en général appeler *contact du premier ordre* le rapprochement de deux courbes qui se touchent dans un point, *contact du second ordre* lorsqu'elles ont de plus la même courbure, et ainsi de suite.

On peut appeler aussi les constantes $a, b, c, \dots$ qui déterminent le contact, *éléments du contact*.

Ainsi, le contact d'un ordre quelconque m dépendra de $m+1$ éléments $a, b, c, \dots$, et la détermination de ces éléments se tirera de l'équation

$$F(x, y, a, b, c, \dots) = 0$$

de la courbe donnée qui forme le contact et des équations dérivées de celle-ci jusqu'à celle de l'ordre $m^{\text{ième}}$.

La propriété analytique de ces contacts est donc que, lorsque deux courbes ont entre elles un contact d'un ordre donné, leurs ordonnées et les fonctions primes, secondes, etc. de ces ordonnées jusqu'à l'ordre du contact sont les mêmes, et leur propriété géométrique consiste en ce qu'une autre courbe qui n'aura pas avec elle un contact du même ordre ne pourra être menée entre l'une et l'autre (n° 5).

11. La courbe donnée qui forme le contact, étant, par exemple, une ligne droite dont l'équation la plus générale est

$$y' - a - bx = 0,$$

ne sera susceptible que d'un contact du premier ordre, puisqu'il n'y a que deux éléments a et b , et l'on aura pour la détermination de ces

éléments les deux équations

$$y' - a - bx = 0, \quad y'' - b = 0,$$

d'où l'on tire

$$b = y'' \quad \text{et} \quad a = y' - xy'',$$

comme ci-dessus (n° 6).

Prenons pour la courbe du contact un cercle dont l'équation la plus générale est

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0;$$

elle ne sera susceptible que d'un contact du second ordre, puisqu'il n'y a que trois éléments a, b, c . On déterminera donc ces éléments par les trois équations

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - c^2 = 0, \quad x - a + (y - b)y' = 0, \quad 1 + (y - b)y'' + y'^2 = 0,$$

dont la seconde et la troisième sont les équations prime et seconde de la première. De ces équations on tire tout de suite

$$y' - b = -\frac{1 + y'^2}{y''}, \quad x - a = \frac{(1 + y'^2)y'}{y''}, \quad c = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

comme plus haut (n° 9).

Si l'on prenait l'équation à la parabole

$$y' = a + bx + cx^2,$$

qui n'a aussi que trois constantes arbitraires, on aurait de même, pour la détermination de ces constantes, regardées comme éléments d'un contact du second ordre, les équations

$$y' - a - bx - cx^2 = 0, \quad y'' - b - 2cx = 0, \quad y''' - 2c = 0,$$

lesquelles donnent

$$c = \frac{y'''}{2}, \quad b = y'' - xy''', \quad a = y' - xy'' + \frac{x^2 y'''}{2}.$$

Mais, si l'on prenait l'équation à la parabole cubique

$$y' = a + bx + cx^2 + dx^3,$$

elle pourrait avoir un contact du troisième ordre, dont les éléments seraient a, b, c, d et se détermineraient par les équations

$$\begin{aligned} y - a - bx - cx^2 - dx^3 &= 0, & y' - b - 2cx - 3dx^2 &= 0, \\ y'' - 2c - 6dx &= 0, & y''' - 6d &= 0; \end{aligned}$$

on aurait ainsi

$$d = \frac{y'''}{6}, \quad c = \frac{y''}{2} - \frac{xy'''}{2}, \quad b = y' - xy'' + \frac{x^2 y'''}{2}, \quad a = y - xy' + \frac{x^2 y''}{2} - \frac{x^3 y'''}{6},$$

et ainsi de suite.

12. Enfin, si l'on demande la courbe la plus simple qui aura avec une courbe proposée un contact d'un ordre quelconque m , prenant x et y pour l'abscisse et l'ordonnée de la proposée, p et q pour celles de la courbe cherchée, et regardant y comme fonction de x , q comme fonction de p , on fera

$$q = y + (p - x)y' + \frac{(p - x)^2}{2}y'' + \frac{(p - x)^3}{2 \cdot 3}y''' + \dots,$$

en prenant dans le second membre autant de termes qu'il y a d'unités dans $m + 1$.

Car, en prenant les fonctions dérivées relativement à p et faisant $p = x$, on aura $q = y, q' = y', q'' = y'', \dots$ jusqu'à $q^m = y^m$; donc ces deux courbes auront, dans le point commun qui répond à $p = x$, les conditions nécessaires pour un contact de l'ordre $m^{\text{ième}}$ (n° 10).

La courbe représentée par l'équation précédente, et qui est, comme l'on voit, du genre parabolique, aura ainsi, dans le point commun à la courbe proposée, le cours le plus approchant de celui de cette courbe, de manière qu'aucune autre courbe du même genre ne pourra passer entre ces deux si elle n'est pas d'un degré plus haut.

13. La théorie que nous venons de donner sur le contact des courbes n'est qu'une suite de la théorie générale du développement des fonc-

tions, exposée dans la première Partie. Mais nous avons vu (n° 29 et suiv., 1^{re} Partie) qu'il y a des cas particuliers où ce développement échappe à la forme générale, et que ces cas sont ceux où une valeur donnée de x rend infinies les fonctions dérivées $f'(x), f''(x), \dots$. Alors le développement de $f(x+i)$ contiendra nécessairement, pour cette valeur de x , d'autres puissances de i que les simples puissances $i, i^2, \dots$, et l'analyse des n°s 3 et 4 se trouvera en défaut. Quoique ces exceptions ne portent aucune atteinte à la théorie générale, il est nécessaire, pour ne rien laisser à désirer, de voir comment elle doit être modifiée dans les cas particuliers dont il s'agit.

Supposons donc qu'en faisant $x = m$ la fonction $f(x+i)$, développée en une série ascendante de i , soit de la forme

$$f(m) + A i^\lambda + B i^{\lambda+\mu} + C i^{\lambda+\mu+\nu} + \dots,$$

$\mu, \nu, \dots$ étant toujours des nombres positifs.

Je remarque d'abord qu'on peut trouver les coefficients $A, B, C, \dots$, ainsi que les exposants $\lambda, \mu, \nu, \dots$, par une méthode semblable à celle du n° 3 de la première Partie. On fera d'abord

$$f(m+i) = f(m) + i^\lambda P,$$

et l'on prendra pour i^λ la plus haute puissance de i qui divisera $f(m+i) - f(m)$, après les réductions convenables, de manière que le quotient P ne devienne ni nul ni infini en faisant $i = 0$. Lorsque $m = 0$, l'exposant λ pourra être négatif; dans tout autre cas, il sera évidemment toujours positif (*). On fera ensuite

$$P = A + i^\mu Q,$$

A étant la valeur de P lorsque $i = 0$, et l'on prendra pour i^μ la plus

(*) Une inadvertance singulière a été commise ici par Lagrange. L'exposant λ ne peut jamais être négatif, car le développement de $f(m+i)$ ne peut contenir de puissances négatives de i que si $f(m)$ est infini; d'ailleurs l'hypothèse de $m = 0$ ne saurait constituer aucune particularité: on peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi, par un déplacement de l'origine des coordonnées sur l'axe des abscisses.

Je n'ai pas cru pouvoir me permettre la moindre altération au texte de l'illustre auteur, et j'ai laissé subsister la faute dans cette nouvelle édition. (Note de l'éditeur.)

haute puissance positive de i qui divisera $P - A$, de manière que le quotient Q ne devienne ni nul ni infini lorsque $i = 0$. On continuera en supposant

$$Q = B + i^p R,$$

B étant la valeur de Q lorsque $i = 0$, et i^p la plus haute puissance positive de i qui divisera $Q - B$, en sorte que le quotient R ne soit ni nul ni infini lorsque $i = 0$; et ainsi de suite. On aura, de cette manière,

$$\begin{aligned} f(m+i) &= f(m) + i^p P = f(m) + i^p A + i^{p+\mu} Q \\ &= f(m) + i^p A + i^{p+\mu} B + i^{p+\mu+\sigma} R \\ &= \dots \end{aligned}$$

On a, pour trouver les termes successifs d'une série, des méthodes plus courtes ou d'un calcul plus facile, mais la précédente a l'avantage de ne développer la série qu'autant que l'on veut et de donner la valeur du reste. Nous n'aurons pas besoin, pour notre objet, de connaître ces restes; il nous suffira de savoir qu'ils peuvent toujours s'exprimer par des quantités de la forme que nous venons de trouver.

Cela posé, considérons la courbe représentée par l'équation

$$y = f(x),$$

x étant l'abscisse et y l'ordonnée; supposons qu'elle ait un point commun avec une autre courbe, dont l'ordonnée soit $F(x)$, et que ce point réponde à l'abscisse m , en sorte que l'on ait $F(m) = f(m)$. Au delà de ce point, les ordonnées des deux courbes seront $f(m+i)$, $F(m+i)$ pour une abscisse quelconque $m+i$, et leur différence, que je désignerai par D , sera $f(m+i) - F(m+i)$.

Développons la fonction $F(m+i)$ comme la fonction $f(m+i)$, et soient

$$F(m+i) = F(m) + i^p p, \quad p = \alpha + i^{\sigma} q, \quad q = \beta + i^{\tau} r, \quad \dots,$$

$\sigma, \tau, \dots$ étant des nombres positifs, et $\alpha, \beta, \dots$ étant les valeurs de $p, q, \dots$ lorsque $i = 0$; on aura d'abord, à cause de $F(m) = f(m)$,

$$D = i^p A - i^p \alpha + i^{p+\mu} Q - i^{p+\sigma} q + \dots$$

Les deux premiers termes du développement de $f(m+i)$ étant $f(m) + i^p A$, et ceux du développement de $F(m+i)$ étant $F(m) + i^p \alpha$, supposons qu'ils deviennent égaux, en sorte qu'on ait aussi $\rho = \lambda$ et $\alpha = A$: la première de ces deux conditions dépendra de la nature des fonctions désignées par f et F , mais la seconde pourra toujours être remplie comme la condition de $F(m) = f(m)$ par le moyen des constantes arbitraires $a, b, c, \dots$ qui entreront dans la fonction $F(x)$. On aura donc, dans ce cas,

$$D = i^{p+\mu} Q - i^{p+\sigma} q + \dots$$

et il sera impossible qu'aucune autre courbe passe entre les deux courbes dont il s'agit, dans le même point qui répond à l'abscisse m , à moins que les deux premiers termes du développement de $\varphi(m+i)$, $\varphi(x)$ étant l'ordonnée de cette autre courbe, ne soient aussi les mêmes que ceux du développement de $f(m+i)$.

Car, s'ils sont différents, ils ne pourront pas se détruire dans l'expression de la différence Δ des deux ordonnées $f(m+i)$ et $\varphi(m+i)$, et l'on aura en général

$$\Delta = i^p A - i^p \alpha + i^{p+\mu} Q - i^{p+\sigma} q + \dots,$$

à cause de $\varphi(m) = f(m)$ par la condition supposée de la coïncidence des courbes dans le point qui répond à $x = m$. Cette expression de Δ étant comparée à celle $D = i^{p+\mu} Q - i^{p+\sigma} q + \dots$, il est facile de voir que, à cause que les exposants $\mu, \sigma, \dots$ sont nécessairement positifs par la nature du développement, il sera toujours possible de prendre i assez petit pour que la valeur de Δ surpasse celle de D , abstraction faite des signes, tant qu'on n'aura pas $\rho = \lambda$ et $\alpha = A$, comme dans les deux premières courbes. Donc, dans tout autre cas, la troisième courbe passera nécessairement en dehors des deux autres.

En poussant plus loin le développement des fonctions $f(m+i)$ et $F(m+i)$, on prouvera de la même manière que, si les trois premiers termes du développement de ces fonctions sont les mêmes, aucune autre

courbe ne pourra passer entre elles, à moins qu'elle n'ait aussi les mêmes termes communs avec celles-là; et ainsi de suite.

On pourra donc appeler aussi, comme dans le n° 10, *contact du premier ordre, du second, etc.* le rapprochement de deux courbes pour lesquelles les deux premiers termes, ou les trois premiers, ou etc. seront les mêmes dans les développements des fonctions qui représentent les ordonnées.

Ainsi, la courbe dont l'équation est

$$y = f(x)$$

étant donnée, la courbe la plus simple qui aura avec elle un contact du premier ordre au point où $x = m$ sera représentée par l'équation

$$y = f(m) + A(x - m)^2,$$

et celle qui aura un contact du second ordre le sera par

$$y = f(m) + A(x - m)^2 + B(x - m)^3;$$

et ainsi de suite. Car, en substituant $m + i$ pour x , on aura simplement les deux premiers termes $f(m) + Ai^2$, ou les trois premiers $f(m) + Ai^2 + Bi^3$, ou etc. du développement de $f(m + i)$. Ces courbes auront donc aussi dans le même point le cours le plus approchant de celui de la courbe proposée et pourront, par conséquent, servir à en faire connaître les propriétés comme les points singuliers, les points de rebroussement, etc., sur quoi voir l'Analyse des lignes courbes de Cramer.

14. Supposons maintenant que, dans l'équation

$$y = f(x)$$

de la courbe proposée, on substitue $\frac{1}{i}$ à la place de x , et qu'on développe la fonction $f\left(\frac{1}{i}\right)$ en une série ascendante de la forme

$$Ai^2 + Bi^{2+p} + Ci^{2+q+r} + \dots$$

Si l'on fait la même chose pour l'équation

$$y = F(x)$$

d'une autre courbe, et que les premiers termes du développement de $F\left(\frac{1}{i}\right)$ soient les mêmes que ceux du développement de $f\left(\frac{1}{i}\right)$, on pourra prouver, par un raisonnement semblable à celui qui a été fait ci-dessus, qu'on pourra toujours prendre i assez petit pour qu'aucune autre courbe, représentée par l'équation $y = \varphi(x)$ et dont la fonction $\varphi\left(\frac{1}{i}\right)$ développée de même en série ascendante n'aurait pas autant de termes identiques avec ceux de ces courbes, ne puisse passer entre ces mêmes courbes dans les points qui répondront à l'abscisse $x = \frac{1}{i}$ et à toutes les abscisses plus grandes à l'infini, puisque, dès que la condition qui peut empêcher que cette courbe ne passe entre les deux autres aura lieu pour une certaine valeur de i , elle aura lieu, à plus forte raison, pour toutes les valeurs de i plus petites.

D'où l'on peut conclure que la courbe dont l'équation sera simplement

$$y = Ax^{-2}, \text{ ou } y = Ax^{-2} + Bx^{-2-p}, \text{ ou etc.}$$

ira en s'approchant continuellement de la courbe proposée à mesure que les abscisses x deviendront plus grandes, mais sans pouvoir jamais l'atteindre, de manière qu'elle parviendra à un terme passé lequel aucune autre courbe du même genre parabolique ou hyperbolique, qui ne sera pas d'un degré plus haut, ne pourra passer entre les deux courbes. Cette seconde courbe sera donc une asymptote de la première, et cette idée de l'asymptote me paraît la plus simple et la plus générale qu'on en puisse donner, en même temps qu'elle est aussi la plus propre à caractériser la nature du rapprochement qui constitue le vrai asymptotisme.

CHAPITRE III.

PROBLÈMES DIRECTS ET INVERSES SUR LE CONTACT DES COURBES. ANALYSE DES CAS OU L'ON PROPOSE UNE RELATION ENTRE LES DEUX ÉLÉMENTS DU CONTACT DU PREMIER ORDRE. DE LA COURBE REPRÉSENTÉE PAR L'ÉQUATION PRIMITIVE SINGULIÈRE D'UNE ÉQUATION DU PREMIER ORDRE.

15. Les problèmes qu'on peut proposer sur les tangentes, les rayons de courbure, etc., et en général sur les contacts des courbes, sont de deux sortes, directs ou inverses. Les problèmes directs se réduisent toujours à trouver quelques-uns des éléments du contact d'un certain ordre, et, comme ils ne dépendent que de l'analyse directe des fonctions, ils sont toujours résolubles analytiquement. Dans les problèmes inverses, on suppose qu'il y a une relation donnée entre quelques-uns de ces éléments et les coordonnées x, y avec les fonctions dérivées $y', y'', \dots$, et cette relation, en y substituant les expressions générales des éléments en $x, y, y', y'', \dots$, devient une équation dérivée d'un certain ordre, dont il faut trouver l'équation primitive pour avoir celle de la courbe cherchée en x et y . Ces problèmes conduisent donc immédiatement à des équations dérivées, et leur solution, dépendant essentiellement de l'analyse inverse des fonctions, se trouve sujette à toutes les difficultés de cette analyse.

Il y a cependant des cas où l'on peut les résoudre directement par des considérations particulières, qui méritent d'autant plus d'attention, qu'elles tiennent à des finesses d'analyse qu'il est intéressant de connaître.

Ces cas sont ceux où la relation donnée n'est qu'entre les éléments mêmes du contact, sans que les coordonnées x, y y entrent.

Pour donner d'abord, par un exemple, une idée de ces sortes de problèmes, supposons qu'on demande la courbe dont chaque tangente coupera deux ordonnées (prolongées s'il est nécessaire) répondant aux abscisses données $x=m$ et $x=n$, de manière que le produit des parties de ces ordonnées comprises entre la même tangente et l'axe des abscisses soit toujours constant et égal à K .

Puisque l'équation à la tangente est ($n^{\circ} 6$)

$$q = a + bp,$$

en faisant successivement $p=m$ et $p=n$, on aura les deux valeurs de q , dont le produit devra être égal à K ; on aura donc, entre les éléments du contact a et b , l'équation

$$(a + mb)(a + nb) = K.$$

La marche naturelle et directe serait donc de substituer à la place de a et b leurs valeurs $y - xy'$ et y' (numéro cité); on aurait alors cette équation du premier ordre

$$[y + (m - x)y'] [y + (n - x)y'] = K,$$

dont il ne serait pas aisé de trouver l'équation primitive par les méthodes ordinaires.

Mais, si l'on prend les fonctions primes de cette équation, il vient celle-ci,

$$[y + (n - x)y'] (m - x)y'' + [y + (m - x)y'] (n - x)y'' = 0,$$

dont tous les termes se trouvent multipliés par y'' , de sorte qu'elle peut se décomposer dans ces deux :

$$y'' = 0 \quad \text{et} \quad [y + (n - x)y'] (m - x) + [y + (m - x)y'] (n - x) = 0.$$

La première, qui est du second ordre, donne sur-le-champ celle-ci du premier,

$$y' = A,$$

où A est une constante arbitraire; ainsi, par les principes établis dans les nos 46 et suivants de la première Partie, on aura l'équation primitive complète de la proposée en y substituant simplement cette valeur de y' .

Cette équation sera donc de la forme

$$(y - Ax + mA)(y - Ax + nA) = K,$$

savoir, en développant les termes,

$$(y - Ax)^2 + (y - Ax)(m + n)A + mnA^2 - K = 0,$$

d'où, en extrayant la racine, on tire

$$y = Ax + B,$$

en prenant pour B la racine de l'équation

$$B^2 + (m + n)AB + mnA^2 - K = 0.$$

D'où l'on voit que l'on n'a de cette manière qu'une équation à la ligne droite.

En effet, l'équation $y'' = 0$ ayant donné $y' = A$, celle-ci donnera l'équation primitive

$$y = Ax + B,$$

A et B étant deux constantes arbitraires; mais, par la théorie des numéros cités ci-dessus, ces deux constantes ne peuvent pas être arbitraires à la fois, car il faut que l'équation trouvée coïncide avec la proposée pour une valeur de x ; or, faisant $x = 0$, on a

$$y = B, \quad y' = A;$$

donc on aura entre A et B cette équation de condition,

$$(B + mA)(B + nA) = K,$$

qui est la même que celle que nous avons trouvée ci-dessus pour la détermination de B en A .

Venons maintenant à l'autre équation, qui n'est que du premier

ordre. Celle-ci servira également à trouver une équation primitive de la proposée par l'élimination de y' . En effet, elle donne

$$y' = \frac{(2x - m - n)y}{2(m - x)(n - x)},$$

valeur qui, étant substituée dans la proposée, la réduira à celle-ci,

$$y^2 + \frac{4K(m - x)(n - x)}{(m - n)^2} = 0,$$

équation à l'ellipse ou à l'hyperbole, suivant que K sera une quantité positive ou négative. Le grand axe sera $m - n$, le petit axe $2\sqrt{\pm K}$, et les deux sommets seront aux points où $x = m$ et où $x = n$.

La propriété des tangentes qui nous a conduits à cette équation est démontrée dans la proposition XLII du Livre III des *Coniques* d'Apolonius; mais l'analyse précédente a l'avantage de faire voir que cette propriété appartient uniquement aux sections coniques.

16. Si on examine maintenant les deux solutions qu'on vient de trouver, il est facile de voir que la première ne donne que la ligne droite même qu'on a supposée tangente, en regardant les deux éléments a et b comme constants; car l'équation $y = Ax + B$ ne diffère point de l'équation $y = a + bp$ de cette tangente, l'équation entre les deux constantes A et B étant évidemment la même que celle que l'on a supposée entre les quantités b et a .

En effet, il est visible que toute droite peut résoudre le problème, pourvu qu'il y ait entre ses deux constantes la relation donnée par les conditions du problème, et, comme il reste une constante arbitraire, il s'ensuit que l'équation de cette droite doit être l'équation primitive complète de l'équation du premier ordre donnée par le problème. Donc, analytiquement parlant, le problème est résolu complètement par l'équation même

$$y = a + bx,$$

a et b étant deux constantes, dont l'une est arbitraire et l'autre en dé-
IX.

pend par l'équation

$$(a+mb)(a+nb)=K.$$

A l'égard de la seconde solution, comme elle ne contient point de constante arbitraire, elle est à la rigueur moins générale que la première et ne peut être qu'un cas particulier de celle-ci ou bien une solution singulière provenant de la considération que nous avons développée dans le n° 60 de la 1^{re} Partie.

Il est d'abord facile de se convaincre que cette dernière solution ne peut être un cas particulier de la première, car il faudrait pour cela que l'équation $y=a+bx$ de la première pût satisfaire à l'équation

$$y^2 + \frac{4K(m-x)(n-x)}{(m-n)^2} = 0$$

de la seconde, en déterminant convenablement sa constante arbitraire, et par conséquent qu'en éliminant y de ces deux équations la résultante ne contient plus que des constantes, ce qui n'est pas.

Elle ne peut donc être qu'une solution singulière, et, en effet, nous avons vu (1^{re} Partie, n° 59) que le caractère de l'équation primitive singulière de toute équation du premier ordre de la forme $y'=F(x,y)$ est de rendre infinie la fonction $F'(y)$, c'est-à-dire la fonction prime de $F(x,y)$ prise relativement à y seul. Or, l'équation de notre problème

$$[y+(m-x)y'] [y+(n-x)y'] = K,$$

étant mise sous la forme précédente, donne

$$F(x,y) = \frac{y(2x-m-n) + \sqrt{4K(m-x)(n-x) + (m-n)^2 y^2}}{2(m-x)(n-x)},$$

d'où l'on tire

$$F'(y) = \frac{(m-n)^2 y + (2x-m-n) \sqrt{4K(m-x)(n-x) + (m-n)^2 y^2}}{2(m-x)(n-x) \sqrt{4K(m-x)(n-x) + (m-n)^2 y^2}},$$

où l'on voit que $F'(y)$ devient infini par l'équation

$$4K(m-x)(n-x) + (m-n)^2 y^2 = 0,$$

qui est celle de la seconde solution.

17. En examinant la manière dont nous sommes parvenus à cette solution, on verra qu'elle dépend de cette circonstance que les fonctions primes de a et b regardés comme fonctions de x, y, y' sont entre elles dans un rapport qui ne contient pas la fonction seconde y'' ; en effet, ayant $b=y'$ et $a=y-xy'$, on a

$$b'=y'' \quad \text{et} \quad a'=-xy''.$$

ce qui donne

$$\frac{a'}{b'} = -x,$$

de sorte que, prenant la fonction prime de l'équation

$$(a+mb)(a+nb)=K$$

et divisant par b' , on a une équation qui est également du premier ordre, et le résultat de l'élimination de y' entre ces deux équations donne l'équation aux sections coniques trouvées plus haut. Or je considère que les quantités a et b sont données par les équations (n° 11)

$$y'=a+bx \quad \text{et} \quad y'=b.$$

Ainsi l'équation dont il s'agit est le résultat de l'élimination de a, b et y' entre les équations

$$y'=a+bx, \quad y'=b, \quad (a+mb)(a+nb)=K$$

et l'équation prime de cette dernière divisée par b' . On obtiendra donc aussi le même résultat en éliminant d'abord une des deux quantités a ou b entre les deux équations

$$y'=a+bx \quad \text{et} \quad (a+mb)(a+nb)=K,$$

et ensuite éliminant l'autre par le moyen de l'équation résultante et de son équation prime prise en faisant varier cette dernière quantité. Ainsi, éliminant d'abord a , on a l'équation

$$[y+(m-x)b][y+(n-x)b]=K.$$

Prenant l'équation prime relativement à b et divisant par b' , on a

$$[y + (m-x)b](n-x) + [y + (n-x)b](m-x) = 0,$$

d'où l'on tire

$$b = \frac{(2x-m-n)y}{2(m-x)(n-x)},$$

valeur qui, substituée dans l'autre équation, donnera comme ci-dessus l'équation

$$(m-n)^2 y^2 + 4K(m-x)(n-x) = 0,$$

qui renferme la seconde solution.

On peut encore considérer que l'équation

$$(a+mb)(a+nb) = K,$$

qui contient la relation entre a et b , dans laquelle consiste la condition du problème, donne, par la résolution, $a = f(b)$, valeur qui, étant substituée dans l'équation

$$y = a + bx,$$

la réduit à celle-ci,

$$y = f(b) + bx,$$

qui ne contient plus que la constante arbitraire b , qu'on éliminera par l'équation prime prise relativement à b , savoir

$$f'(b) + x = 0,$$

ce qui donnera encore le même résultat. Or, par ce qu'on a vu ci-dessus, l'équation

$$y = f(b) + bx$$

est l'équation primitive complète de l'équation du premier ordre donnée par le problème; donc l'équation résultante de l'élimination de b entre celle-ci et l'équation

$$f'(b) + x = 0$$

sera précisément l'équation primitive singulière, d'après la théorie du n° 60 de la 1^{re} Partie.

D'un autre côté, comme l'équation $y = f(b) + bx$ est l'équation générale des tangentes de la courbe cherchée (n° 15), on en peut conclure que pour avoir l'équation de cette courbe il n'y a qu'à regarder la constante arbitraire b qui différencie les tangentes comme variable et la déterminer par la condition que l'équation prime relative à cette seule variable ait lieu en même temps, et de là on voit aussi que l'équation primitive singulière que nous avons trouvée pour l'équation du premier ordre donnée par le problème n'est autre chose que l'équation de la courbe formée par l'intersection continue des droites représentées par l'équation primitive complète de la même équation du premier ordre.

18. Après avoir ainsi éclairci la matière par un exemple, nous allons la traiter d'une manière générale. Soit, comme dans le n° 10,

$$F(x, y, a, b) = 0$$

l'équation de la courbe du contact, que nous avons supposée ci-dessus une ligne droite, et soit

$$\varphi(a, b) = 0$$

l'équation qui détermine la relation entre les deux éléments a et b , donnée par la nature du problème proposé; suivant la théorie donnée dans ce même numéro, il faudra déterminer a et b par les deux équations

$$F(x, y, a, b) = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y, a, b)' = 0.$$

Or nous avons vu dans la 1^{re} Partie (n° 46) que, si l'on élimine a et b des trois équations

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad F(x, y, a, b)' = 0, \quad F(x, y, a, b)'' = 0,$$

on a une équation du second ordre entre x, y, y' et y'' , que nous désignerons par $V = 0$, et dont

$$F(x, y, a, b) = 0$$

sera l'équation primitive complète, a et b étant les constantes arbi-

traies; nous y avons vu aussi que, si l'on élimine a ou b des deux premières, les deux résultantes seront des équations primitives du premier ordre de la même équation $V=0$, et dont celle-ci sera le résultat, en prenant de nouveau les fonctions primes et éliminant la constante qui y était restée (n° 47). Donc, si de ces deux premières équations on tire les valeurs de a et b , que nous désignerons par P et Q , en sorte que l'on ait $a=P$, $b=Q$, P et Q étant des fonctions de x , y et y' , qu'ensuite on prenne les fonctions primes de ces équations, en y regardant toujours a et b comme constantes, on aura les équations du second ordre $P'=0$, $Q'=0$, qui devront coïncider avec l'équation $V=0$, de sorte qu'on aura nécessairement

$$P'=MV, \quad Q'=NV,$$

M et N étant des fonctions de x , y et y' sans y'' ; car si, par exemple, M contenait encore y'' , alors l'équation $P'=0$ donnerait, outre $V=0$, cette autre équation du second ordre, $M=0$, qui ne serait pas comprise dans la même équation $V=0$, ce qui ne se peut.

Substituant donc ces valeurs de a et b dans l'équation du problème

$$\varphi(a, b)=0,$$

on aura

$$\varphi(P, Q)=0;$$

prenant ensuite l'équation prime, on aura

$$P'\varphi'(P) + Q'\varphi'(Q)=0,$$

en dénotant par $\varphi'(P)$ et $\varphi'(Q)$ les fonctions primes de $\varphi(P, Q)$ prises relativement à P et Q isolés; donc, mettant pour P' et Q' les expressions ci-dessus, cette dernière équation deviendra

$$V[M\varphi'(P) + N\varphi'(Q)]=0,$$

laquelle se décompose naturellement en ces deux-ci:

$$V=0 \quad \text{et} \quad M\varphi'(P) + N\varphi'(Q)=0.$$

La première, $V=0$, sera du second ordre et aura pour équation primitive complète

$$F(x, y, a, b)=0,$$

c'est-à-dire l'équation même de la courbe du contact, dans laquelle une seule des deux constantes a et b sera arbitraire, l'autre étant déterminée par l'équation même du problème $\varphi(a, b)=0$.

L'autre équation,

$$M\varphi'(P) + N\varphi'(Q)=0,$$

ne sera que du premier ordre et sans constante arbitraire; mais, étant combinée avec l'équation $\varphi(P, Q)=0$, elle donnera, par l'élimination de y' , une équation entre x et y qui sera l'équation primitive singulière de cette dernière $\varphi(P, Q)=0$.

Cette équation sera donc le résultat de l'élimination des quantités a , b et y' entre les quatre équations

$$F(x, y, a, b)=0, \quad F(x, y, a, b')=0, \quad \varphi(a, b)=0, \quad M\varphi'(a) + N\varphi'(b)=0.$$

Or, en regardant a et b comme des fonctions de x et y , les équations

$$a=P, \quad b=Q,$$

résultant des deux premières, donnent ces deux équations primes

$$a'=P'=MV \quad \text{et} \quad b'=Q'=NV;$$

donc

$$\frac{N}{M} = \frac{b'}{a'},$$

de sorte que la dernière équation se réduira à celle-ci,

$$\varphi'(a) + \frac{b'\varphi'(b)}{a'}=0,$$

qui n'est autre chose que l'équation prime de $\varphi(a, b)=0$, divisée par a' . D'un autre côté, dans la supposition de a et b variables, il est évident que la fonction prime de $F(x, y, a, b)$ n'est pas simplement $F(x, y, a, b)'$, mais qu'il y faut ajouter les termes dus à la variation de a et b , qui sont $a'F'(a) + b'F'(b)$, en désignant par $F'(a)$ et $F'(b)$ les fonctions primes de $F(x, y, a, b)$ prises relativement à a et à b , regardés comme seules variables. Donc, prenant les fonctions primes de l'équation

$$F(x, y, a, b)=0,$$

on aura

$$F(x, y, a, b)' + a' F'(a) + b' F'(b) = 0.$$

Mais on a déjà l'équation

$$F(x, y, a, b)' = 0;$$

on aura donc nécessairement, dans la supposition de a et b variables, l'équation

$$a' F'(a) + b' F'(b) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{b'}{a'} = - \frac{F'(a)}{F'(b)};$$

c'est la valeur de $\frac{N}{M}$, qu'on peut trouver directement de cette manière, et qu'on voit clairement ne pouvoir être une fonction du premier ordre, puisqu'elle ne contient que les quantités x, y et a, b .

Donc l'équation dont il s'agit sera, en dernière analyse, le résultat de l'élimination de a, b et $\frac{b'}{a'}$ entre les quatre équations

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad \varphi(a, b) = 0,$$

$$F'(a) + \frac{b'}{a'} F'(b) = 0, \quad \varphi'(a) + \frac{b'}{a'} \varphi'(b) = 0,$$

dont les deux dernières sont les fonctions primes des deux premières, prises relativement à a et b et divisées par a' ; l'équation

$$F(x, y, a, b) = 0$$

n'est plus nécessaire ici et se trouve remplacée par l'équation

$$F'(a) + \frac{b'}{a'} F'(b) = 0,$$

qui en est une suite. Donc, si on réduit d'abord les deux premières en une seule par l'élimination de b , il ne s'agira plus que de prendre l'équation prime de celle-ci relativement à a seul et d'éliminer ensuite a par le moyen de ces deux; le résultat sera nécessairement le même qu'auparavant.

Si donc on tire de l'équation

$$\varphi(a, b) = 0,$$

donnée par les conditions du problème entre les éléments du contact a, b , la valeur de b en a , et qu'on suppose $b = \psi(a)$ (ψ étant aussi la caractéristique d'une fonction), qu'on substitue cette valeur dans l'équation

$$F(x, y, a, b) = 0$$

de la courbe du contact, qu'ensuite on prenne la fonction prime de $F[x, y, a, \psi(a)]$ relativement à a seul, fonction que nous désignerons par $a' F[a, \psi(a)]$, a' étant la fonction prime de a regardé comme fonction de x , on aura ces deux équations,

$$F[x, y, a, \psi(a)] = 0 \quad \text{et} \quad F'[a, \psi(a)] = 0,$$

d'où il faudra éliminer a ; et il est visible que le résultat ne sera autre chose que l'équation primitive singulière de l'équation du premier ordre, dont

$$F[x, y, a, \psi(a)] = 0$$

sera l'équation primitive complète (n° 60, 1^{re} Partie).

La courbe représentée par cette équation singulière sera proprement celle qui résout le problème, et qui aura la propriété d'être touchée dans chaque point par une des courbes représentées par l'équation

$$F[x, y, a, \psi(a)] = 0,$$

a étant constant pour la même courbe, mais variable d'une courbe à l'autre.

19. La manière dont nous sommes parvenus à cette dernière solution est la plus directe, analytiquement parlant; mais on y peut parvenir plus simplement par la considération suivante. Puisque le problème consiste à trouver la courbe qui aura, dans chaque point, un contact du premier ordre avec la courbe représentée par l'équation

$$F[x, y, a, \psi(a)] = 0,$$

a étant un paramètre indéterminé, il s'ensuit (n° 10) que l'équation de la courbe cherchée doit donner pour $\dot{y}$ et pour y' des fonctions de x de la même forme que celles qui résultent des équations

$$F[x, y, a, \psi(a)] = 0 \quad \text{et} \quad F[x, y, a, \psi(a)]' = 0,$$

en désignant par $F[x, y, a, \psi(a)]'$ la fonction prime de $F[x, y, a, \psi(a)]$ relative à x et y . Or, a étant une quantité indéterminée, on peut la supposer telle que la courbe cherchée soit représentée par la même équation

$$F[x, y, a, \psi(a)] = 0,$$

pourvu que l'équation prime de celle-ci soit aussi de la même forme

$$F[x, y, a, \psi(a)]' = 0.$$

Mais, si a est une quantité variable, la fonction prime complète de $F[x, y, a, \psi(a)]$ sera, comme nous l'avons vu ci-dessus,

$$F[x, y, a, \psi(a)]' + a' F[a, \psi(a)].$$

Donc la condition dont il s'agit sera remplie si l'on détermine a par l'équation

$$F[a, \psi(a)] = 0,$$

ce qui donnera la dernière solution que nous venons de trouver.

Toute équation entre x, y et un paramètre indéterminé a , que nous dénoterons, pour plus de simplicité, par

$$f(x, y, a) = 0,$$

représente, en donnant successivement à a toutes les valeurs possibles, une famille d'une infinité de courbes qui varient de forme ou de position, ou de l'une et de l'autre à la fois, à raison des variations du paramètre, et, si l'on élimine ce paramètre par le moyen des fonctions primes, l'équation résultante du premier ordre appartiendra à toute cette famille de courbes; elle appartiendra donc aussi à la courbe formée par toutes ces courbes, et qui les enveloppera, ayant avec cha-

cune d'elles un contact du premier ordre. La même équation

$$f(x, y, a) = 0,$$

ainsi que son équation prime

$$f(x, y, a)' = 0,$$

prise relativement à x et y seuls, devront donc avoir lieu aussi pour chaque point de cette courbe enveloppante, en regardant le paramètre a comme une quantité variable. Or, dans cette hypothèse, la fonction prime complète de $f(x, y, a)$ est $f(x, y, a)' + a' f'(a)$, en dénotant par $f'(a)$ la fonction prime de $f(x, y, a)$ prise relativement à a seul, et par a' la fonction prime de a , regardée comme une fonction quelconque de x : donc il faudra que la valeur de a soit telle que l'on ait $f'(a) = 0$, ce qui donnera l'équation primitive singulière de l'équation du premier ordre qui répond à l'équation

$$f(x, y, a) = 0,$$

dans laquelle a est regardée comme une constante arbitraire (n° 60, 1^{re} Partie).

D'où l'on peut conclure, en général, que l'équation primitive singulière d'une équation du premier ordre représente toujours la courbe enveloppante de toutes les courbes qui peuvent être représentées par son équation primitive complète, en donnant à la constante arbitraire toutes les valeurs possibles.

CHAPITRE IV.

DES CONTACTS DU SECOND ORDRE. THÉORIE ET CONSTRUCTION DES ÉQUATIONS
PRIMITIVES SINGULIÈRES DANS LES ORDRES SUPÉRIEURS. EXEMPLE CONTENANT
LA THÉORIE ANALYTIQUE DES DÉVELOPPÉES.

20. Considérons maintenant les contacts du second ordre, et, prenant

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

pour l'équation de la courbe du contact, supposons qu'il y ait entre
les trois éléments a, b, c la relation donnée par l'équation

$$\varphi(a, b, c) = 0.$$

Comme les valeurs de ces éléments doivent se tirer des trois équations
(n° 10)

$$F(x, y, a, b, c) = 0, \quad F(x, y, a, b, c)' = 0, \quad F(x, y, a, b, c)'' = 0,$$

si l'on désigne ces valeurs par P, Q, R , l'équation du problème sera

$$\varphi(P, Q, R) = 0,$$

qu'on voit être du second ordre. Les trois équations

$$a = P, \quad b = Q, \quad c = R$$

donneront, en prenant les fonctions primes dans la supposition de a, b, c constantes, la même équation

$$V = 0$$

du troisième ordre, qui sera le résultat de l'élimination de a, b, c au
moyen des trois équations précédentes, combinées avec l'équation
tierce (n° 46, I^{re} Partie)

$$F(x, y, a, b, c)''' = 0;$$

par conséquent, on aura nécessairement

$$P' = MV, \quad Q' = NV, \quad R' = LV,$$

M, N, L étant des fonctions de x, y, y' et y'' sans y''' , de sorte qu'en pre-
nant les fonctions primes de l'équation

$$\varphi(P, Q, R) = 0,$$

on aura

$$P' \varphi'(P) + Q' \varphi'(Q) + R' \varphi'(R) = 0,$$

savoir

$$V[M \varphi'(P) + N \varphi'(Q) + L \varphi'(R)] = 0,$$

équation qui se partage naturellement dans ces deux-ci,

$$V = 0 \quad \text{et} \quad M \varphi'(P) + N \varphi'(Q) + L \varphi'(R) = 0,$$

dont la première est du troisième ordre et dont la seconde n'est que
du second.

L'équation $V = 0$ a, comme nous l'avons déjà vu, pour équation pri-
mitive complète l'équation même

$$F(x, y, a, b, c) = 0$$

de la courbe du contact, dans laquelle a, b, c sont les trois constantes
arbitraires; mais, comme l'équation du problème

$$\varphi(P, Q, R) = 0$$

n'est que du second ordre, il doit y avoir une relation entre ces trois
constantes qui les réduise à deux arbitraires, et cette relation est
donnée par l'équation

$$\varphi(a, b, c) = 0,$$

qui résulte de la précédente, en substituant les valeurs de P, Q, R
tirées des équations $a = P, b = Q, c = R$.

L'autre équation étant du second ordre, on pourra, par son moyen, éliminer la fonction y'' de l'équation

$$\varphi(P, Q, R) = 0,$$

et la résultante sera une équation primitive de celle-ci du premier ordre, mais qui ne contiendra point de constante arbitraire. Cette équation sera donc le résultat de l'élimination des quantités a, b, c et y'' , au moyen des équations

$$\begin{aligned} F(x, y, a, b, c) = 0, \quad F(x, y, a, b, c)' = 0, \quad F(x, y, a, b, c)'' = 0, \\ \varphi(a, b, c) = 0 \quad \text{et} \quad M\varphi'(a) + N\varphi'(b) + L\varphi'(c) = 0. \end{aligned}$$

Or, en regardant a, b, c comme des fonctions de x, y , la fonction prime de $F(x, y, a, b, c)$ sera

$$F(x, y, a, b, c)' = a'F'(a) + b'F'(b) + c'F'(c),$$

en dénotant simplement par $F'(a), F'(b), F'(c)$ les fonctions primes de $F(x, y, a, b, c)$ prises relativement à a, b, c , regardées comme seules variables; donc les deux équations

$$F(x, y, a, b, c) = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y, a, b, c)' = 0$$

emporteront celle-ci :

$$a'F'(a) + b'F'(b) + c'F'(c) = 0.$$

De plus, la fonction prime de $F(x, y, a, b, c)''$ sera, par la même raison,

$$F(x, y, a, b, c)'' = a''F'(a) + b''F'(b) + c''F'(c),$$

en dénotant de même par $F''(a), F''(b), F''(c)$ les fonctions primes de $F(x, y, a, b, c)''$ prises relativement à a, b, c , regardées comme seules variables; et, comme dans la formation de ces fonctions dérivées on regarde les quantités a, b, c comme indépendantes de x et y , il est aisé de prouver, par les principes établis dans la I^{re} Partie (n° 74), que les fonctions $F'(a), F'(b), F'(c)$ seront la même chose que les fonctions

primes des fonctions $F'(a), F'(b), F'(c)$, prises relativement à x et y . Donc les deux équations

$$F(x, y, a, b, c)' = 0 \quad \text{et} \quad F(x, y, a, b, c)'' = 0$$

emporteront encore nécessairement cette autre-ci :

$$a''F'(a) + b''F'(b) + c''F'(c) = 0.$$

Si donc on combine les deux équations

$$F'(a) + \frac{b'}{a}F'(b) + \frac{c'}{a}F'(c) = 0,$$

$$F'(a)' + \frac{b'}{a}F'(b)' + \frac{c'}{a}F'(c)' = 0$$

avec l'équation

$$\varphi'(a) + \frac{b'}{a}\varphi'(b) + \frac{c'}{a}\varphi'(c) = 0,$$

qui résulte de $\varphi(a, b, c) = 0$, en prenant les fonctions primes, on aura, par l'élimination des quantités $\frac{b'}{a}$ et $\frac{c'}{a}$, une équation en a, b, c et x, y, y' , sans y'' , laquelle sera équivalente à celle qu'on aurait déduite des deux équations

$$F(x, y, a, b, c)'' = 0 \quad \text{et} \quad M\varphi'(a) + N\varphi'(b) + L\varphi'(c) = 0$$

par l'élimination de y'' . Ainsi, il n'y aura plus qu'à éliminer a, b, c au moyen des équations

$$F(x, y, a, b, c) = 0, \quad F(x, y, a, b, c)' = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(a, b, c) = 0,$$

et le résultat final sera la même équation primitive du premier ordre de l'équation

$$\varphi(P, Q, R) = 0,$$

laquelle, ne contenant point, par sa nature, de constantes arbitraires, ne pourra être qu'une équation primitive singulière.

En effet, si, pour simplifier la solution, on commence par tirer la valeur c de l'équation

$$\varphi(a, b, c) = 0,$$

et qu'on la représente par $\psi(a, b)$, alors la solution se réduira à éliminer a, b et $\frac{b'}{a}$ entre les deux équations

$$F[x, y, a, b, \psi(a, b)] = 0, \quad F[x, y, a, b, \psi(a, b)]' = 0$$

et les deux équations primes de celles-ci, prises relativement à a et b seuls, et divisées par a' , procédé analogue à celui du n° 18.

21. En général, si l'on a une équation en x, y et deux constantes arbitraires a et b , que nous représenterons par

$$f(x, y, a, b) = 0,$$

en éliminant ces deux constantes par le moyen des deux équations dérivées

$$f(x, y, a, b)' = 0 \quad \text{et} \quad f(x, y, a, b)'' = 0,$$

on aura une équation du second ordre

$$V = 0,$$

qui appartiendra à toutes les courbes représentées par l'équation

$$f(x, y, a, b) = 0,$$

en donnant à a et b des valeurs quelconques, et dont, par conséquent, celle-ci sera l'équation primitive complète.

Donc elle appartiendra aussi à la courbe ou aux courbes formées par toutes ces courbes, et qui les envelopperont de manière qu'elles aient avec chacune d'elles un contact du second ordre, c'est-à-dire dans lequel les y, y' et y'' soient les mêmes. Mais, les quantités a et b étant constantes dans chaque courbe enveloppée et variables dans les courbes enveloppantes, pour que les y, y' et y'' soient les mêmes dans les deux hypothèses, il faudra que les équations d'où elles dépendent soient aussi les mêmes. Or, dans la supposition de a et b variables, l'équation

$$f(x, y, a, b) = 0$$

donne l'équation prime

$$f(x, y, a, b)' + a' f'(a) + b' f'(b) = 0;$$

done, pour que cette équation se réduise à

$$f(x, y, a, b)' = 0,$$

comme dans le cas de a et b constantes, il faudra que l'on ait

$$a' f'(a) + b' f'(b) = 0.$$

De la même manière, l'équation

$$f(x, y, a, b)' = 0$$

donne, dans le cas de a et b variables, cette équation dérivée

$$f(x, y, a, b)'' + a' f''(a) + b' f''(b) = 0,$$

laquelle ne peut se réduire à

$$(x, y, a, b)'' = 0,$$

comme dans le cas de a et b constantes, qu'en supposant

$$a' f'(a) + b' f'(b)' = 0.$$

Ayant ainsi les quatre équations

$$f(x, y, a, b) = 0, \quad f(x, y, a, b)' = 0,$$

$$f'(a) + \frac{b'}{a} f'(b) = 0 \quad \text{et} \quad f''(a)' + \frac{b'}{a} f''(b)' = 0,$$

il n'y aura qu'à éliminer a, b et $\frac{b'}{a}$, et l'on aura une équation du premier ordre entre x, y et y' , qui sera celle des courbes enveloppantes et qui sera en même temps l'équation primitive singulière de la même équation $V = 0$.

On voit par là comment la théorie des équations primitives singu-

lières peut s'étendre au second ordre et aux ordres supérieurs. On voit en même temps que ces équations représentent toujours des courbes enveloppantes et qui ont des contacts d'un ordre donné avec les courbes enveloppées, représentées par les équations primitives complètes, dans lesquelles les constantes arbitraires varient d'une courbe à l'autre. Ceci peut servir de supplément et de complément à la théorie des équations primitives exposée dans la première Partie (n° 60).

Au reste, de même que les quatre équations ci-dessus

$$\begin{aligned} f(x, y, a, b) &= 0, & f(x, y, a, b)' &= 0, \\ f'(a) + \frac{b'}{a} f'(b) &= 0, & f'(a)' + \frac{b'}{a} f'(b)' &= 0 \end{aligned}$$

donnent, par l'élimination de a , b et $\frac{b'}{a}$, une équation du premier ordre en x , y et y' , ces équations donneront également, par l'élimination de ces trois dernières quantités, une équation en a , b et $\frac{b'}{a}$ qui renfermera les relations que doivent avoir entre elles les deux variables a et b , d'où l'on voit que ces quantités, qui sont indépendantes entre elles dans chacune des courbes enveloppées, ne le sont plus lorsqu'elles se rapportent à la courbe enveloppante. On trouvera des résultats semblables pour les équations et les courbes des ordres supérieurs.

22. Supposons qu'on demande la courbe qui aura dans chacun de ses points un contact du second ordre avec un cercle représenté par l'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2,$$

et dont les éléments du contact a , b , c aient entre eux la relation déterminée par l'équation

$$\varphi(a, b, c) = 0.$$

La marche naturelle pour résoudre ce problème serait de substituer dans cette équation les valeurs des éléments a , b , c trouvées plus haut

(n° 11), ce qui donnerait une équation du second ordre, d'où il faudrait remonter à l'équation primitive.

Mais, sans chercher cette équation du second ordre, on peut d'abord conclure, de ce que nous venons de démontrer, que l'on aura son équation primitive complète en supposant les quantités a , b , c constantes, ce qui redonnera la même équation au cercle. On en conclura ensuite que la même équation admettra aussi une équation primitive singulière du premier ordre, qu'on obtiendra en faisant varier les quantités a , b , c de manière que les équations primes et secondes de l'équation au cercle soient les mêmes que si ces quantités étaient regardées comme constantes, et que cette équation primitive représentera alors la courbe ou les courbes formées par la réunion de tous les cercles représentés par la même équation, c'est-à-dire qui envelopperont ou embrasseront tous ces cercles.

Cette équation sera donc, par les principes établis ci-dessus, le résultat de l'élimination des quantités a , b , c et $\frac{b'}{a}$, $\frac{c'}{a}$ entre les trois équations

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2, \quad x - a + y'(y - b) = 0, \quad \varphi(a, b, c) = 0,$$

et les équations primes de celles-ci, prises relativement aux seules variables a , b , c , savoir

$$x - a + \frac{b'}{a}(y - b) = \frac{c c'}{a}, \quad 1 + \frac{b'}{a} y' = 0, \quad \varphi'(a) + \frac{b'}{a} \varphi'(b) + \frac{c'}{a} \varphi'(c) = 0.$$

Mais, comme cette équation en x et y pourrait se présenter sous une forme assez compliquée, il sera plus simple de chercher à déterminer les valeurs mêmes de x et y par une troisième variable.

Pour cela, on éliminera d'abord y' au moyen des deux équations

$$x - a + y'(y - b) = 0 \quad \text{et} \quad 1 + \frac{b'}{a} y' = 0;$$

on aura celle-ci,

$$x - a - \frac{a'(y - b)}{b'} = 0,$$

qui, étant combinée avec la première,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2,$$

donnera sur-le-champ

$$x = a + \frac{ca'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}, \quad y = b + \frac{cb'}{\sqrt{a'^2 + b'^2}}.$$

De plus, si l'on substitue ces mêmes valeurs de x et y dans l'équation

$$x - a + \frac{b'}{a'}(y - b) = \frac{cc'}{a'},$$

on aura celle-ci,

$$c' = \sqrt{a'^2 + b'^2},$$

laquelle, étant combinée avec l'équation

$$\varphi(a, b, c) = 0$$

donnée par le problème, servira à déterminer deux des trois variables a, b, c par la troisième, moyennant quoi les valeurs de x et y seront aussi exprimées par cette seule variable.

23. Comme les quantités a et b sont les coordonnées de la courbe qui est le lieu de tous les centres des cercles osculateurs (n° 9), si l'on suppose cette courbe donnée, on aura une équation entre a et b par laquelle on pourra déterminer b en a . Soit donc

$$b = \varphi(a);$$

on aura

$$b' = a' \varphi'(a), \quad \text{et de là} \quad c' = a' \sqrt{1 + [\varphi'(a)]^2}.$$

Ainsi, en désignant par A la fonction primitive de $a' \sqrt{1 + [\varphi'(a)]^2}$, on aura

$$c = A + h,$$

h étant une constante arbitraire; ces valeurs de b et c étant substituées dans les expressions de x, y , on aura la courbe cherchée.

Nous remarquerons maintenant que, quelle que soit la courbe des centres, l'équation

$$c' = \sqrt{a'^2 + b'^2}$$

fait voir que le rayon c est égal à l'arc de cette courbe (voir ci-après le n° 29), de sorte que, si l'on nomme s cet arc, on aura

$$c = s + h.$$

Nous remarquerons, de plus, que le rayon c sera nécessairement tangent à la même courbe, car l'angle que la tangente de cette courbe fait avec l'axe a pour tangente la quantité $\frac{b'}{a'}$ (n° 7), et, comme le rayon du cercle osculateur est perpendiculaire à la courbe dont les coordonnées sont x et y (n° 8), la tangente de l'angle qu'il fait avec l'axe sera (n° 7) $-\frac{1}{y'} = \frac{b'}{a'}$, en vertu de l'équation $1 + \frac{b'y'}{a'} = 0$, et par conséquent la même que celle de la tangente à la courbe.

Mais, quoique cette propriété soit démontrée de cette manière, il est bon de faire voir qu'elle est une conséquence nécessaire de l'analyse employée dans la solution de la question. Pour cela, nous reprendrons les deux premières équations

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 \quad \text{et} \quad x-a + y'(y-b) = 0,$$

lesquelles donnent

$$a = x - \frac{cy'}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \text{et} \quad b = y + \frac{c}{\sqrt{1+y'^2}},$$

et nous observerons que ces expressions de a et b peuvent représenter à la fois les coordonnées de la perpendiculaire à la courbe dont x et y sont les coordonnées, en regardant x et y comme constantes et c comme une variable, ainsi qu'on l'a vu dans le n° 8, et les coordonnées de la courbe des centres, en regardant x et y comme variables et c comme donnée en x et y (n° 9).

Donc la perpendiculaire dont il s'agit sera tangente de cette dernière courbe si la fonction prime de b , regardée comme fonction de a , est

la même pour la droite et pour la courbe (n° 10), ou, en général, si les valeurs de a' et de b' , regardées comme fonctions d'une troisième variable, sont les mêmes, et par conséquent aussi, si les valeurs de $\frac{a'}{c'}$ et $\frac{b'}{c'}$ sont les mêmes, soit que les quantités x et y soient traitées comme variables ou non, c'est-à-dire si dans ces valeurs les parties dépendantes des variations de x et y sont nulles; or c'est ce qui a lieu en effet, comme on le voit par les équations de l'article précédent,

$$a'(x-a) + b'(y-b) = cc' \quad \text{et} \quad a' + b'y' = 0,$$

qui servent à la détermination de $\frac{a'}{c'}$ et de $\frac{b'}{c'}$, et qui sont les équations primes de

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 \quad \text{et} \quad x + a - y'(y-b) = 0,$$

en y traitant x et y comme constantes, et a , b comme seules variables.

Donc, puisque le rayon osculateur d'une courbe est partout tangent à la courbe des centres et est en même temps égal à l'arc de cette courbe, il s'ensuit qu'il peut être pris pour ce même arc étendu en ligne droite, et qu'ainsi toute courbe peut être regardée comme formée par le développement de celle qui est le lieu des centres des cercles osculateurs. C'est en quoi consiste la théorie des développées d'Huygens, qui n'avait été démontrée que par des considérations géométriques. L'analyse précédente fournit en même temps l'explication d'un paradoxe qui se présente lorsqu'on cherche, par les formules connues, la courbe formée par le développement d'une courbe donnée.

Si l'on substitue dans l'équation de cette courbe les expressions de ses coordonnées a et b en x , y , y' et y'' , on a évidemment une équation du second ordre, d'où il paraît s'ensuivre que l'équation en x et y de la courbe cherchée devrait contenir deux constantes arbitraires, tandis que la génération de cette courbe par le développement de la courbe donnée n'admet qu'une seule constante arbitraire dépendant du point où commence le développement.

La raison de cette différence consiste, comme nous venons de le démontrer, en ce que l'équation de la courbe engendrée par le développement est proprement l'équation primitive complète d'une équation du premier ordre qui n'est elle-même que l'équation primitive singulière de l'équation du second ordre, donnée par les conditions du problème et qui, par sa nature, ne peut point avoir de constante arbitraire, de sorte qu'il ne peut y avoir qu'une constante arbitraire, à raison de la première équation primitive.

CHAPITRE V.

DES PLUS GRANDES ET DES MOINDRES VALEURS DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE.

24. Il y a un genre de questions qui, quoique indépendantes de la considération des tangentes, peuvent néanmoins s'y rapporter : ce sont celles qu'on appelle *de maximis et minimis*, et qui consistent à trouver, pour une fonction donnée d'une variable, la valeur de cette variable qui rend celle de la fonction la plus grande ou la plus petite. Comme les courbes ne sont que la représentation ou le tableau de toutes les valeurs de la fonction de l'abscisse, représentée par l'ordonnée, il est visible que la question de trouver la plus grande ou la plus petite valeur d'une fonction donnée d'une variable revient à déterminer la plus grande ou la plus petite ordonnée de la courbe dont cette variable serait l'abscisse et la fonction donnée serait l'ordonnée.

Or l'inspection seule de la courbe suffit pour faire voir que ces ordonnées ne peuvent être que celles qui répondent aux points dont les tangentes seront parallèles à l'axe des abscisses. Si la courbe est convexe à l'axe, l'ordonnée sera alors évidemment un minimum, et, si la courbe est concave, l'ordonnée est un maximum.

Nous avons vu (n° 7) que la tangente de l'angle que la tangente d'une courbe fait avec l'axe est exprimée en général par y' , y étant l'ordonnée que l'on suppose fonction de l'abscisse x ; donc, pour que cette tangente devienne parallèle à l'axe, il faut que l'on ait $y' = 0$; or, si l'on fait $y' = 0$ dans les expressions des coordonnées a et b (n° 9), qui déterminent le lieu du centre du cercle osculateur, on a

$$a = x, \quad b = y + \frac{1}{y''},$$

d'où l'on voit que, si y'' est une quantité positive, ce centre tombera au delà de la courbe, qui sera par conséquent convexe vers l'axe, et que, si y'' est une quantité négative, le même centre tombera en deçà de la courbe, c'est-à-dire du côté de l'axe, et que, par conséquent, la courbe sera alors concave vers l'axe. Donc, la fonction y sera un maximum ou un minimum lorsque sa fonction prime y' sera nulle, et, en particulier, elle sera un minimum lorsque la fonction seconde y'' sera en même temps une quantité positive, et un maximum lorsque y'' sera une quantité négative : c'est en quoi consiste la méthode connue *de maximis et minimis*.

25. Mais il n'est pas inutile de faire voir comment cette méthode peut se déduire directement de l'analyse des fonctions sans la considération intermédiaire des courbes.

Soit $f(x)$ la fonction de x dont on demande le maximum ou le minimum. Soit a la valeur de x qui répond au maximum ou au minimum; il faudra que la valeur de $f(a)$ soit toujours plus grande ou toujours moindre que la valeur de $f(a+i)$, quelle que soit la quantité i , positive ou négative, et quelque petite qu'elle puisse être. Je dis quelque petite que la quantité i puisse être, car une quantité est censée devenir un maximum ou un minimum lorsqu'elle parvient au terme de son accroissement ou de sa diminution, de manière qu'en deçà et au delà de ce terme elle se trouve moindre dans le cas du maximum ou plus grande dans le cas du minimum que dans le même terme. Concevons x à la place de a ; la condition du maximum sera

$$f(x+i) < f(x), \quad \text{ou} \quad f(x+i) - f(x) < 0,$$

et celle du minimum sera

$$f(x+i) > f(x), \quad \text{ou} \quad f(x+i) - f(x) > 0,$$

quelque petit que soit i , positif ou négatif.

Développons la fonction $f(x+i)$ en série par nos formules (n° 40, 1^{re} Partie), et arrêtons-nous d'abord aux deux premiers termes; on

aura ainsi

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2}f''(x+j).$$

j étant une quantité renfermée entre les limites 0 et i . Il faudra donc que l'on ait

$$if'(x) + \frac{i^2}{2}f''(x+j) < 0 \text{ pour le maximum et } > 0 \text{ pour le minimum.}$$

Or nous avons déjà vu (n° 3) que l'on peut prendre i assez petit pour que la valeur absolue du terme $if'(x)$ soit plus grande que celle du terme $\frac{i^2}{2}f''(x+j)$, ce qui étant vrai pour une valeur de i aura lieu aussi pour toutes les valeurs de i plus petites; donc la quantité

$$if'(x) + \frac{i^2}{2}f''(x+j)$$

deviendra alors positive ou négative, suivant que la quantité $if'(x)$ le sera. Mais celle-ci change de signe avec la quantité i ; donc il sera impossible que la condition du maximum ou du minimum ait lieu, à moins que l'on n'ait $f'(x) = 0$.

Prenons maintenant dans le développement de $f(x+i)$ un terme de plus; nous aurons

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2}f''(x) + \frac{i^3}{2.3}f'''(x+j);$$

donc, à cause de $f'(x) = 0$, il faudra que l'on ait

$$\frac{i^2}{2}f''(x) + \frac{i^3}{2.3}f'''(x+j) < 0 \text{ pour le maximum et } > 0 \text{ pour le minimum.}$$

On peut aussi prendre i assez petit pour que la valeur absolue du terme $\frac{i^2}{2}f''(x)$ soit plus grande que celle de $\frac{i^3}{2.3}f'''(x+j)$; alors la quantité

$$\frac{i^2}{2}f''(x) + \frac{i^3}{2.3}f'''(x+j)$$

sera positive ou négative, suivant que celle de $\frac{i^2}{2}f''(x)$ le sera. Donc,

puisque la valeur de i^2 est toujours positive, il faudra que l'on ait

$$f''(x) < 0 \text{ pour le maximum et } f''(x) > 0 \text{ pour le minimum.}$$

Si l'on fait $f''(x) = 0$, alors, reprenant le développement de $f(x+i)$ et employant un terme de plus, on aurait

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2}f''(x) + \frac{i^3}{2.3}f'''(x) + \frac{i^4}{2.3.4}f^{(4)}(x+j);$$

donc, puisqu'on suppose $f''(x) = 0$ et $f'(x) = 0$, on aurait pour le maximum la condition

$$\frac{i^3}{2.3}f'''(x) + \frac{i^4}{2.3.4}f^{(4)}(x+j) < 0,$$

et pour le minimum la condition opposée. Or on peut prendre i assez petit pour que la valeur absolue du terme $\frac{i^3}{2.3}f'''(x)$ surpasse celle du terme $\frac{i^4}{2.3.4}f^{(4)}(x+j)$; alors la valeur de

$$\frac{i^3}{2.3}f'''(x) + \frac{i^4}{2.3.4}f^{(4)}(x+j)$$

sera positive ou négative, suivant celle de $\frac{i^3}{2.3}f'''(x)$. Mais celle-ci change de signe avec la quantité i ; donc il sera impossible que la condition du maximum ou du minimum ait lieu, à moins qu'on n'ait $f'''(x) = 0$.

Employons encore le terme suivant dans le développement de $f(x+i)$; on aura

$$f(x+i) = f(x) + if'(x) + \frac{i^2}{2}f''(x) + \frac{i^3}{2.3}f'''(x) + \frac{i^4}{2.3.4}f^{(4)}(x) + \frac{i^5}{2.3.4.5}f^{(5)}(x+j),$$

et les conditions du minimum ou du maximum deviendront

$$\frac{i^4}{2.3.4}f^{(4)}(x) + \frac{i^5}{2.3.4.5}f^{(5)}(x+j) < 0 \text{ ou } > 0,$$

à cause de $f''(x) = 0$, $f'(x) = 0$ et $f'''(x) = 0$. On prouvera ici, comme

plus haut, que l'on pourra prendre i assez petit pour que le terme affecté de i^1 , pris absolument, c'est-à-dire abstraction faite du signe, devienne plus grand que l'autre terme affecté de i^2 , et que, par conséquent, la somme des deux termes soit nécessairement positive ou négative, selon que le terme $\frac{i^1}{2.3.4} f'''(x)$ le sera. D'où il est aisé de conclure, à cause que i^1 est toujours une quantité positive, qu'il faudra que l'on ait

$$f''(x) < 0 \text{ pour le maximum et } f''(x) > 0 \text{ pour le minimum,}$$

et ainsi de suite.

26. Donc, en général, si y est une fonction quelconque de x , on aura d'abord, pour le maximum ou le minimum, la condition $y' = 0$, laquelle donnera la valeur de x , ensuite $y'' < 0$ ou > 0 , ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé ci-dessus (n° 24). Mais nous venons de trouver de plus que, si $y' = 0$, il faudra que l'on ait aussi en même temps $y'' = 0$, ensuite

$$y''' < 0 \text{ pour le maximum et } y''' > 0 \text{ pour le minimum;}$$

et ainsi de suite. En général, si une fonction dérivée d'un ordre quelconque pair disparaît, il faudra que la fonction de l'ordre impair suivant disparaisse aussi, et que la suivante de l'ordre pair soit négative pour le maximum et positive pour le minimum.

Si la fonction y n'est donnée que par une équation

$$F(x, y) = 0,$$

il n'y aura qu'à prendre l'équation prime

$$F'(x) + y' F'(y) = 0,$$

et faire $y' = 0$, ce qui la réduira à celle-ci,

$$F'(x) = 0,$$

laquelle, combinée avec $F(x, y) = 0$, servira à déterminer les valeurs

de x et y répondant au maximum ou au minimum. Ensuite on prendra l'équation seconde, et, faisant de même $y' = 0$, on aura la valeur de y'' , dans laquelle on substituera les valeurs trouvées de x et y , et l'on pourra juger, par cette valeur, du maximum ou du minimum; et ainsi de suite.

Si la fonction y'' ou $f''(x)$ devenait infinie, c'est-à-dire si $\frac{1}{y''} = 0$, ce serait une marque que le développement de $f(x+i)$ contiendrait, pour la valeur trouvée de x , un terme de la forme Λi^m , m étant entre 1 et 2 (n° 30, 1^{re} Partie); et, en considérant la courbe de l'équation $y = f(x)$, on pourrait connaître, par la forme de son cours dans le point donné, si la fonction y est un maximum ou un minimum (n° 24). On pourrait même donner pour cela des règles générales, mais qui nous écarteraient trop de notre objet.

Nous ne nous arrêtons pas à donner des exemples des règles précédentes pour la détermination des maxima et minima; comme elles s'accordent en tout avec celles que l'on connaît d'après le Calcul différentiel, on pourra en faire les mêmes applications. Il n'y aura qu'à changer les symboles

$$y', y'', y''', \dots \text{ en } \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$$

CHAPITRE VI.

DE LA MESURE DES AIRES ET DE LA LONGUEUR DES ARCS DANS LES COURBES PLANES.
DE LA MESURE DES SOLIDITÉS ET DE CELLE DES SURFACES DES CONOÏDES.
PRINCIPE GÉNÉRAL DE LA SOLUTION ANALYTIQUE DE CES QUESTIONS.

27. Je viens maintenant à la détermination des aires des courbes, qu'on appelle communément *quadrature des courbes*. Considérons, en général, la courbe représentée par l'équation

$$y = f(x).$$

y étant l'ordonnée rectangulaire correspondante à l'abscisse x , dont elle est une fonction donnée. L'espace terminé par cette courbe, par l'axe des abscisses et par une ordonnée quelconque y sera donc aussi déterminé par une fonction de la même abscisse x , que nous désignerons par $F(x)$. Supposons que x devienne $x+i$; cette fonction deviendra $F(x+i)$, et il est clair que $F(x+i) - F(x)$ sera alors la portion de l'espace correspondante à la partie i de l'axe et terminée par les deux ordonnées $f(x)$ et $f(x+i)$ répondantes aux abscisses x et $x+i$. Or, quelle que soit la courbe proposée, il est aisé de se convaincre, même sans figure, que, si les ordonnées vont en augmentant ou en diminuant depuis $f(x)$ jusqu'à $f(x+i)$, l'espace dont il s'agit sera, dans le premier cas, plus grand que l'espace rectangulaire $if(x)$ et moindre que l'espace rectangulaire $if(x+i)$, et, dans le second cas, plus grand que ce dernier et moindre que le premier. Donc il sera toujours nécessairement renfermé entre ces limites $if(x)$ et $if(x+i)$, lesquelles seront, par conséquent, les limites de la quantité $F(x+i) - F(x)$ qui doit représenter ce même espace.

Développons les fonctions $f(x+i)$ et $F(x+i)$ suivant notre formule (n° 40, I^{re} Partie), et arrêtons-nous au premier terme pour la première et aux deux premiers pour la seconde; on aura

$$f(x+i) = f(x) + if'(x+j)$$

et

$$F(x+i) = F(x) + iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+j),$$

où j est une quantité indéterminée qui peut n'être pas la même pour les deux fonctions, mais qui doit toujours être renfermée entre les limites 0 et i . Il faudra donc que la fonction $F(x)$ soit telle que la quantité $iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+j)$ soit renfermée entre les limites $if(x)$ et $if(x) + if'(x+i)$, quelle que soit la valeur de i , et par conséquent en prenant i aussi petit qu'on voudra. Or, l'intervalle entre les deux limites étant $i^2f''(x+j)$, la différence de la quantité dont il s'agit et de l'une des limites, savoir

$$i[F'(x) - f'(x)] + \frac{i^2}{2}F''(x+j),$$

devra être moindre que $i^2f''(x+j)$, abstraction faite des signes de ces quantités. Mais il est aisé de prouver que cette condition ne peut avoir lieu pour une valeur de i aussi petite qu'on voudra, à moins que le terme affecté de i ne disparaisse; car autrement on pourra toujours prendre i tel que la première quantité soit plus grande que la seconde, puisqu'il suffira que i soit plus petit que $\frac{F'(x) - f'(x)}{f''(x+j) - \frac{1}{2}F''(x+j)}$. On aura donc nécessairement

$$F'(x) = f'(x),$$

et cette condition suffira pour la détermination de la fonction $F(x)$, puisque l'on voit qu'elle ne sera autre chose que la fonction primitive de $f(x)$.

Donc, en général, la fonction prime de la fonction qui exprime l'aire d'une courbe par l'abscisse est la fonction qui représente l'or-

donnée de cette courbe, et, réciproquement, la fonction qui exprime l'aire ne peut être que la fonction primitive de celle qui exprime l'ordonnée. Ainsi, l'équation d'une courbe étant donnée, pour avoir l'expression de l'aire, c'est-à-dire la quadrature de la courbe, il n'y aura qu'à chercher la fonction primitive de celle qui représente l'ordonnée, et l'on pourra ajouter à cette fonction primitive une constante arbitraire (n° 49, I^{re} Partie), qu'on déterminera par la condition que l'expression de l'aire devienne nulle au point où l'on voudra la faire commencer.

Nous avons supposé, dans l'analyse précédente, que les ordonnées allaient en augmentant ou en diminuant depuis $f(x)$ jusqu'à $f(x+i)$: cette condition n'aurait pas lieu s'il y avait entre ces deux ordonnées un maximum ou un minimum; mais, comme on peut prendre l'intervalle i aussi petit que l'on veut, il est clair qu'on pourra toujours faire tomber la seconde ordonnée $f(x+i)$ en deçà du maximum ou du minimum, et que, par conséquent, la conclusion que nous en avons tirée demeurera toujours la même.

Si la fonction $f(x)$ exprimait l'aire de la section d'un solide faite perpendiculairement à l'abscisse x , on prouverait de la même manière que la solidité serait exprimée par la fonction primitive de $f(x)$. Car, désignant par $F(x)$ la solidité, la différence $F(x+i) - F(x)$ exprimerait la portion du solide comprise entre les deux sections $f(x+i)$ et $f(x)$, et cette portion serait nécessairement intermédiaire entre les deux solides prismatiques $if(x)$ et $if(x+i)$, en prenant la quantité i aussi petite qu'on voudrait; d'où l'on conclurait, comme ci-dessus,

$$F'(x) = f(x).$$

Ainsi, en faisant tourner une courbe autour de l'axe des x , on a un conoïde dont la section perpendiculaire à l'axe et répondante à l'abscisse x est un cercle du rayon y et dont l'aire est $\frac{\pi y^2}{2}$, où π est la circonférence du cercle dont le rayon $= 1$. Or, par la nature de la courbe, on a $y = f(x)$; donc l'aire de la section sera $\frac{1}{2}\pi[f(x)]^2$, et la solidité

$F(x)$ du conoïde sera donnée par la fonction prime

$$F'(x) = \frac{1}{2}\pi[f(x)]^2.$$

28. Le problème de la quadrature des courbes est, comme l'on voit, le problème le plus simple de l'analyse inverse des fonctions, puisqu'il ne consiste qu'à trouver la fonction primitive d'une fonction donnée. Nous avons indiqué dans la première Partie (chap. VIII) les moyens par lesquels on peut faciliter cette recherche; nous ajouterons ici une observation essentielle.

Comme il est souvent avantageux de substituer d'autres variables à la place de celle qui entre dans la fonction, pour simplifier ou décomposer cette fonction en d'autres plus simples, il ne faudra pas oublier alors de multiplier la fonction dont il s'agit par la fonction prime de sa variable. En effet, nommant u l'aire de la courbe dont y est l'ordonnée, et regardant y et u comme fonctions de x , nous venons de voir que l'on a $u' = y$; mais, si l'on suppose x fonction d'une autre variable, et qu'on désigne par x' et u' les fonctions primes de x et u prises relativement à cette nouvelle variable, il faudra substituer $\frac{u'}{x'}$ à la place de u' (n° 50, I^{re} Partie), ce qui donnera $u' = yx'$; et ainsi des autres formules semblables.

Au reste, comme, suivant le Calcul différentiel, u' est équivalent à $\frac{du}{dx}$, l'équation $u' = y$ donne

$$du = y dx,$$

et, intégrant,

$$u = \int y dx,$$

formule connue pour la quadrature des courbes.

29. Après le problème de la quadrature des courbes, se présente naturellement celui de leur rectification, c'est-à-dire de la détermination de la longueur même de la courbe.

Nous partons, pour la solution de ce problème, du principe d'Archimède, adopté par tous les géomètres anciens et modernes, suivant

lequel, deux lignes courbes ou composées de droites ayant leurs concavités tournées du même côté et les mêmes extrémités, celle qui renferme l'autre est la plus longue, d'où il suit qu'un arc de courbe tout concave du même côté est plus grand que sa corde et en même temps moindre que la somme des deux tangentes menées aux deux extrémités de l'arc et comprises entre ces extrémités et leur point d'intersection. De là on peut tirer cette autre conséquence que la longueur du même arc se trouvera comprise entre celles des deux tangentes menées à ses deux extrémités et terminées aux deux ordonnées qui répondent à ses extrémités, prolongées, s'il le faut, au delà de la courbe.

En effet, ayant mené la corde qui joindra les deux extrémités de l'arc, il est aisé de voir que l'une des deux tangentes rencontrera les ordonnées parallèles sous un angle plus aigu que la corde et que l'autre les rencontrera sous un angle moins aigu, et que, par conséquent, la corde sera moindre que la première de ces tangentes et plus longue que la seconde; donc celle-ci sera, à plus forte raison, moindre que l'arc de la courbe. De plus, si l'on considère les deux triangles opposés au sommet et formés par l'intersection des deux tangentes, il est visible que les deux parties de la première tangente seront respectivement plus longues que celles de la seconde, parce que les côtés formés par ces parties-là se trouvent opposés à des angles plus grands que les côtés formés par celles-ci. Donc la première tangente entière sera plus longue que la somme des deux portions de tangentes comprises entre leur point d'intersection et les extrémités de l'arc. Donc elle sera aussi plus longue que l'arc.

Cela posé, $f(x)$ étant l'ordonnée qui répond à l'abscisse x , $f'(x)$ sera (n° 7) la tangente de l'angle sous lequel la tangente de la courbe à l'extrémité de cette ordonnée est inclinée à l'axe des abscisses; par conséquent, $if'(x)$ sera la partie de l'ordonnée $f(x+i)$, prolongée s'il est nécessaire, comprise entre la tangente et une parallèle à l'axe menée par l'extrémité de l'ordonnée $f(x)$; donc

$$\sqrt{i^2 + [if'(x)]^2} = i\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$$

sera la partie de cette tangente comprise entre les deux ordonnées, éloignées l'une de l'autre de l'intervalle i . De la même manière, on aura $f'(x+i)$ pour la tangente de l'angle sous lequel la tangente de la courbe à l'extrémité de l'ordonnée $f(x+i)$ est inclinée à l'axe, et l'on trouvera

$$i\sqrt{1 + [f'(x+i)]^2}$$

pour la partie de cette tangente comprise entre les mêmes ordonnées $f(x)$ et $f(x+i)$.

Soit, pour plus de simplicité,

$$\varphi(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2};$$

on aura $i\varphi(x)$ et $i\varphi(x+i)$ pour les deux tangentes menées aux deux extrémités de l'arc de la courbe compris entre les ordonnées $f(x)$ et $f(x+i)$ et terminées à ces mêmes ordonnées; donc la longueur de cet arc devra être renfermée entre les deux quantités $i\varphi(x)$ et $i\varphi(x+i)$, en donnant à i une valeur aussi petite qu'on voudra. Donc, si $\Phi(x)$ est la fonction de x qui exprime l'arc de la courbe, il faudra que la quantité $\Phi(x+i) - \Phi(x)$, expression de l'arc compris entre les ordonnées $f(x)$ et $f(x+i)$, soit comprise entre ces deux-ci, $i\varphi(x)$ et $i\varphi(x+i)$, quelque petit que soit i , d'où, par un raisonnement semblable à celui du n° 27, on conclura

$$\Phi'(x) = \varphi(x).$$

Donc, pour avoir la longueur indéfinie de la courbe, il faudra chercher la fonction primitive de la fonction $\varphi(x)$, ou $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, et, comme on peut ajouter une constante arbitraire à la fonction primitive, il faudra déterminer cette constante de manière que l'expression de l'arc s'évanouisse au point où l'on voudra le faire commencer.

Donc, si l'on nomme s l'arc de la courbe dont les coordonnées sont x et y , on aura, en regardant y et s comme fonctions de x , à cause de $f(x) = y$, $f'(x) = y'$, l'équation

$$s' = \sqrt{1 + y'^2}.$$

et, si x et y étaient données en fonction d'une autre variable, comme t , alors, en désignant par x', y', s' les fonctions primes relativement à cette variable, il faudrait substituer $\frac{y'}{x'}$ et $\frac{s'}{x'}$ à la place de y' et s' (n° 28), ce qui donnerait cette équation

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$$

entre les coordonnées et l'arc.

Suivant le Calcul différentiel, les fonctions dérivées s' et y' seraient exprimées par $\frac{ds}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$, et l'équation

$$s' = \sqrt{1 + y'^2}$$

deviendrait

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

formule connue des rectifications.

30. Si l'on imagine que la courbe proposée, tournant autour de l'axe des abscisses, engendre un conoïde, il est visible que les deux ordonnées $f(x)$ et $f(x+i)$ décriront en même temps deux cercles dont ces coordonnées seront les rayons, que l'arc de la courbe compris entre ces deux coordonnées décrira une zone conoïdique, et que les deux tangentes menées aux extrémités de cet arc décriront des zones coniques.

Mais, quoique l'une de ces deux tangentes soit toujours plus grande et l'autre plus petite que la longueur de l'arc, comme nous venons de le démontrer, néanmoins, comme elles tombent toutes les deux du même côté de l'arc, il est possible que les zones coniques qu'elles décrivent soient à la fois plus grandes ou plus petites que la zone conoïdique décrite par l'arc. Pour éviter cet inconvénient, il n'y a qu'à transporter parallèlement à elle-même la seconde tangente, qui répond à l'extrémité de l'ordonnée $f(x+i)$, de manière que le point où cette tangente est terminée par la première ordonnée $f(x)$ tombe à l'extrémité de cette ordonnée et devienne sécante de la courbe. Alors cette sécante et la tangente au même point tomberont l'une d'un côté et l'autre de l'autre côté de l'arc, et même la plus longue tombera tou-

jours en dehors et la plus courte en dedans de l'arc, comme il est facile de s'en convaincre par la construction, de sorte que la zone conoïdique décrite par l'arc se trouvera nécessairement renfermée entre les zones coniques décrites par la tangente $i\varphi(x)$ et par la sécante $i\varphi(x+i)$.

Or on sait, par la Géométrie, que la surface convexe d'un cône tronqué est égale à son côté multiplié par la demi-somme des circonférences des deux bases. Donc, si l'on désigne par π la circonférence du cercle dont le rayon = 1, la surface de la zone conique décrite par la tangente $i\varphi(x)$ sera

$$i\varphi(x) \left[f(x) + \frac{i}{2} f'(x) \right] \pi,$$

puisque les rayons des deux bases sont l'un $f(x)$ et l'autre $f(x) + i f'(x)$, et la surface de l'autre zone décrite par la tangente ou sécante $i\varphi(x+i)$ sera

$$i\varphi(x+i) \left[f(x) + \frac{i}{2} f'(x+i) \right] \pi,$$

car il est facile de voir que les rayons des bases de ce tronc de cône seront $f(x)$ et $f(x) + i f'(x+i)$.

Si donc on désigne par $\Phi(x)$ la fonction de l'abscisse x qui exprime la surface du conoïde, il est clair que la zone conoïde sera exprimée par la différence $\Phi(x+i) - \Phi(x)$ et que cette différence devra être renfermée entre les deux quantités

$$i\pi\varphi(x) \left[f(x) + \frac{i}{2} f'(x) \right] \quad \text{et} \quad i\pi\varphi(x+i) \left[f(x) + \frac{i}{2} f'(x+i) \right],$$

en donnant à i une valeur quelconque aussi petite qu'on voudra, d'où l'on pourra conclure, par un raisonnement analogue à celui du n° 27, que cette condition ne pourra avoir lieu, à moins que l'on n'ait

$$\Phi(x) = \pi\varphi(x)f(x) = \pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Donc on aura la surface du conoïde proposé en prenant la fonction pri-

mitive de la fonction

$$\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \quad \text{ou} \quad \pi y \sqrt{1 + y'^2}.$$

31. En général, supposons que l'on cherche la fonction $F(x)$ par cette condition que la différence $F(x+i) - F(x)$ doive être renfermée entre les deux quantités $if(x, i)$ et $i\varphi(x, i)$, f et φ dénotant des fonctions données de x et i telles qu'en faisant $i=0$ on ait $f(x) = \varphi(x)$, et que cette condition doive avoir lieu en donnant à i une valeur quelconque aussi petite qu'on voudra.

En employant notre théorème, on réduira la fonction $F(x+i)$ à

$$F(x) + iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+j),$$

et les fonctions $f(x, i)$, $\varphi(x, i)$ à

$$f(x) + if'(x, j), \quad \varphi(x) + i\varphi'(x, j),$$

la quantité j étant indéterminée, mais comprise entre les limites 0 et i , et pouvant être différente dans les différentes fonctions; les fonctions dérivées marquées par F' , F'' se rapportent à la variable x , et les fonctions dérivées marquées par f' , φ' se rapportent à la variable i . Donc, puisqu'on suppose $f(x) = \varphi(x)$, la condition dont il s'agit se réduira à faire en sorte que la quantité $iF'(x) + \frac{i^2}{2}F''(x+j)$ soit comprise entre les deux quantités $if(x) + i^2f'(x, j)$ et $if(x) + i^2\varphi'(x, j)$, quelque petite que puisse être la valeur de i . Donc il faudra que la différence

$$i[F'(x) - f(x)] + i^2[\frac{1}{2}F''(x+j) - f'(x, j)]$$

ne soit jamais plus grande que la différence

$$i^2[\varphi'(x, j) - f'(x, j)];$$

mais, tant que le terme multiplié par la première puissance de i ne sera pas nul, on pourra toujours prendre i assez petit pour que la première quantité devienne plus grande que la seconde, car il suffira pour cela de prendre i moindre que la quantité $\frac{F'(x) - f(x)}{\varphi'(x, j) - \frac{1}{2}F''(x+j)}$, abstraction

faite du signe de cette quantité. Donc la condition proposée emporte nécessairement celle-ci,

$$F'(x) - f(x) = 0, \quad \text{et par conséquent} \quad F'(x) = f'(x),$$

c'est-à-dire que la fonction cherchée $F(x)$ devra être la fonction primitive de $f(x)$, et, pour avoir la valeur complète de $F(x)$, il faudra y ajouter une constante arbitraire, que l'on déterminera par les conditions de la question.

CHAPITRE VII.

THÉORIE DU CONTACT DES COURBES À DOUBLE COURBURE. DU RAYON OSCULATEUR.
DES CENTRES DE COURBURE ET DU LIEU DE CES CENTRES. DES DÉVELOPPÉES DES
COURBES À DOUBLE COURBURE. QUADRATURE ET RECTIFICATION DE CES COURBES.

32. Les courbes planes appartiennent à la Géométrie de deux dimensions et dépendent, par conséquent, que de deux coordonnées. Les courbes à double courbure doivent appartenir à la Géométrie de trois dimensions, puisqu'elles ne peuvent être tracées que sur la surface des corps solides; aussi dépendent-elles de trois coordonnées perpendiculaires entre elles, dont deux sont fonctions de la troisième, de sorte qu'elles ne peuvent être représentées que par deux équations entre trois indéterminées.

Soient donc, pour une courbe quelconque à double courbure,

$$y = f(x), \quad z = \varphi(x),$$

x, y, z étant les trois coordonnées rectangulaires. Soient de même, pour une autre courbe donnée,

$$q = F(p), \quad r = \Phi(p),$$

p, q, r étant pareillement ses trois coordonnées rapportées aux mêmes axes que les précédentes. Si l'on veut que ces deux courbes aient un point commun pour l'abscisse x , il faudra qu'en faisant $p = x$ on ait aussi

$$y = y' \quad \text{et} \quad r = z;$$

donc

$$y = F(x) \quad \text{et} \quad z = \Phi(x).$$

Pour un autre point quelconque répondant à l'abscisse $x + i$, les ordonnées y et z seront $f(x+i)$, $\varphi(x+i)$, et les ordonnées q, r seront $F(x+i)$, $\Phi(x+i)$; et, faisant, pour abrégé,

$$d = f(x+i) - F(x+i), \quad \delta = \varphi(x+i) - \Phi(x+i),$$

il est facile de concevoir que la distance D entre les points des deux courbes qui répondent à la même abscisse $x+i$ sera exprimée par

$$D = \sqrt{d^2 + \delta^2}.$$

De là, par une analyse semblable à celle qui a été développée au commencement de cette deuxième Partie, on prouvera que, si $f'(x) = F'(x)$, $\varphi'(x) = \Phi'(x)$, il sera impossible qu'aucune autre courbe donnée qui ne satisferait pas aux mêmes conditions puisse passer entre les deux courbes dont il s'agit.

Si l'on avait de plus

$$f''(x) = F''(x) \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = \Phi''(x),$$

on prouverait de la même manière qu'aucune autre courbe pour laquelle ces équations n'auraient pas lieu ne pourrait passer entre les mêmes courbes; et ainsi de suite.

Ainsi, en appliquant aux courbes à double courbure les mêmes notions des différents ordres de contact des courbes ordinaires, on en conclura que les deux premières conditions détermineront un contact du premier ordre, que les deux suivantes détermineront un contact du second ordre; et ainsi de suite.

En général, en nommant x, y, z les coordonnées d'une courbe proposée et p, q, r les coordonnées de la courbe donnée, pour laquelle on demande les conditions du contact d'un ordre donné avec la courbe proposée, si

$$F(p, q, r) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi(p, q, r) = 0$$

sont les deux équations de la courbe donnée, on aura, pour un contact

du premier ordre, les quatre équations

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 0, & F(x, y, z)' &= 0, \\ \Phi(x, y, z) &= 0, & \Phi(x, y, z)' &= 0; \end{aligned}$$

pour un contact du second ordre, on aura de plus les deux équations

$$F(x, y, z)'' = 0, \quad \Phi(x, y, z)'' = 0,$$

et ainsi de suite, en regardant, dans ces fonctions dérivées, y et z comme fonctions de x . On satisfera à ces équations par le moyen des constantes arbitraires $a, b, c, \dots$, qui entreront dans les fonctions données $F(p, q, r)$ et $\varphi(p, q, r)$, et qu'on pourra appeler, comme ci-dessus (n° 10), *éléments du contact*, lorsqu'elles seront déterminées en fonction de $x, y, z, y', z', \dots$.

33. Prenons pour la courbe donnée une ligne droite déterminée par les deux équations

$$q = a + bp, \quad r = c + dp;$$

pour qu'elle ait un contact du premier ordre, c'est-à-dire pour qu'elle soit tangente d'une courbe quelconque proposée et rapportée aux coordonnées x, y, z , on aura ces quatre équations

$$y = a + bx, \quad z = c + dx, \quad y' = b, \quad z' = d,$$

d'où l'on tire

$$a = y - y'x, \quad c = z - z'x,$$

de sorte que les équations de la tangente rapportée aux coordonnées p, q, r seront

$$q = y' - y'x + y'p, \quad r = z' - z'x + z'p.$$

Il est facile de voir que ces deux équations représentent les deux tangentes des courbes planes qui forment les projections de la courbe proposée sur les deux plans des x et y et des x et z (n° 6), de sorte que, pour mener une tangente à une courbe à double courbure, il suffira toujours de mener les tangentes à ses deux projections, et la

droite dont ces deux tangentes seront les projections sera la tangente cherchée.

34. Supposons qu'on demande le cercle osculateur d'une courbe à double courbure.

Pour avoir, de la manière la plus simple, les équations générales d'un cercle tracé sur un plan quelconque, nous considérerons le cercle comme formé par l'intersection d'un plan qui passe par le centre d'une sphère; le rayon et le centre de la sphère deviendront alors ceux du cercle, et le plan sera le plan même du cercle.

L'équation générale d'une sphère rapportée aux trois coordonnées p, q, r est

$$(p-a)^2 + (q-b)^2 + (r-c)^2 = d^2,$$

où a, b, c sont les coordonnées du centre et d est le demi-diamètre ou rayon. L'équation d'un plan rapporté aux mêmes coordonnées et passant par le point qui répond aux coordonnées a, b, c est, en général,

$$p - a + m(q - b) + n(r - c) = 0,$$

m et n étant deux constantes arbitraires qui déterminent l'inclinaison du plan à l'égard des plans fixes des coordonnées. Le système de ces deux équations représentera donc un cercle dont le rayon sera d , dont le centre sera déterminé par les coordonnées a, b, c , et dont le plan dépendra des quantités m et n .

Si donc on change dans ces équations les quantités p, q, r en x, y, z , et qu'on en prenne les équations primes et secondes, on aura ces six équations,

$$\begin{aligned} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 &= d^2, \\ x - a + m(y - b) + n(z - c) &= 0, \\ x - a + y'(y - b) + z'(z - c) &= 0, \\ 1 + my' + nz' &= 0, \\ 1 + y'^2 + z'^2 + y''(y - b) + z''(z - c) &= 0, \\ my'' + nz'' &= 0, \end{aligned}$$

dont les quatre premières renfermeront les conditions nécessaires pour

que le cercle dont il s'agit ait un contact du premier ordre avec toute courbe à double courbure dont x, y, z seront les coordonnées, y et z étant données en fonction de x , et si l'on y joint les deux dernières, on aura les conditions nécessaires pour un contact du second ordre, c'est-à-dire pour que le cercle devienne osculateur de la courbe.

Comme il y a dans ces équations six quantités indéterminées a, b, c, d, m et n , on pourra satisfaire à toutes ces conditions, et le cercle osculateur sera déterminé de grandeur et de position. Mais, si l'on ne demande qu'un cercle tangent, il restera deux indéterminées pour lesquelles on pourra prendre le rayon d et une des deux quantités m et n . Dans ce cas donc, l'équation

$$x - a + y'(y - b) + z'(z - c) = 0$$

déterminera le plan dans lequel se trouveront les centres de tous les cercles qui peuvent être tangents, et, comme le rayon du cercle tangent est nécessairement perpendiculaire à la courbe, cette équation sera celle d'un plan perpendiculaire à la courbe, en prenant a, b, c pour les coordonnées du plan.

Considérons maintenant le contact du second ordre. Les trois premières équations donneront

$$x - a = \frac{(ny' - mz')d}{R}, \quad y - b = -\frac{(n - z')d}{R}, \quad z - c = \frac{(m - y')d}{R},$$

en faisant, pour abréger,

$$R = \sqrt{(ny' - mz')^2 + (n - z')^2 + (m - y')^2}.$$

Ces valeurs étant substituées dans la cinquième équation, on en tirera

$$d = \frac{(1 + y'^2 + z'^2)R}{(n - z')y'' - (m - y')z''}.$$

Enfin, la quatrième et la sixième équation donneront

$$m = \frac{z''}{z'y'' - y'z''}, \quad n = -\frac{y''}{z'y'' - y'z''},$$

valeurs qu'on substituera dans les expressions précédentes.

On trouvera d'abord, après quelques réductions,

$$R = \frac{\sqrt{(1 + y'^2 + z'^2)\sqrt{y''^2 + z''^2} + (z'y'' - y'z'')^2}}{z'y'' - y'z''},$$

et de là

$$\begin{aligned} d &= -\frac{(1 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{y''^2 + z''^2} + (z'y'' - y'z'')^2}, \\ a &= x - \frac{(1 + y'^2 + z'^2)(y'y'' + z'z'')}{y''^2 + z''^2 + (z'y'' - y'z'')^2}, \\ b &= y + \frac{(1 + y'^2 + z'^2)[y'' + z'(z'y'' - y'z'')]}{y''^2 + z''^2 + (z'y'' - y'z'')^2}, \\ c &= z + \frac{(1 + y'^2 + z'^2)[z'' - y'(z'y'' - y'z'')]}{y''^2 + z''^2 + (z'y'' - y'z'')^2}. \end{aligned}$$

La quantité d sera le rayon osculateur de la courbe proposée et les quantités a, b, c seront les coordonnées de la courbe des centres de tous les cercles osculateurs; mais cette courbe ne sera pas pour cela une développée, comme dans les courbes à simple courbure.

35. Pour s'en assurer et trouver en même temps les conditions nécessaires pour qu'elle devienne une développée de la courbe à double courbure, il n'y a qu'à employer des considérations semblables à celles du n° 23.

Reprenons les valeurs de a, b, c tirées des trois premières équations; nous aurons

$$\begin{aligned} a &= x - \frac{(ny' - mz')d}{R}, \\ b &= y + \frac{(n - z')d}{R}, \\ c &= z - \frac{(m - y')d}{R}. \end{aligned}$$

Ces expressions, en regardant les quantités x, y, z, y', z' , ainsi que m et n , comme constantes, et la quantité d comme seule variable, donnent les coordonnées de la droite dans laquelle est placé le rayon osculateur; mais, en regardant toutes ces quantités comme variables

et m, n, d comme données en x , puisque y et z sont censées données en x , ces mêmes expressions représentent alors les coordonnées de la courbe des centres. Or, pour que la même droite devienne tangente de cette courbe, il faut que les valeurs de $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{c'}{a'}$, en regardant b et c comme fonctions de a , ou, en général, a, b, c comme fonctions d'une autre variable quelconque, soient les mêmes dans les deux cas. Donc les valeurs de $\frac{a'}{d}, \frac{b'}{d}, \frac{c'}{d}$ devront être aussi les mêmes, soit que les quantités a, b, c, d soient seules variables, soit que les quantités x, y, z, m et n varient aussi en même temps; par conséquent, il faudra que les équations qui déterminent ces valeurs aient lieu également dans les deux hypothèses.

Or, si l'on considère les équations qui ont servi à déterminer les quantités a, b, c, d, m et n en x, y, y', y'' , et qu'on regarde toutes ces quantités comme variables à la fois, il est clair que les deux équations

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d^2, \\ x-a + y'(y-b) + z'(z-c) = 0$$

emporteront encore celle-ci,

$$-a'(x-a) - b'(y-b) - c'(z-c) = dd',$$

qui n'est que l'équation prime de la première, en supposant a, b, c, d seules variables. De même les deux équations

$$x-a + y'(y-b) + z'(z-c) = 0, \\ 1 + y'^2 + z'^2 + y''(y-b) + z''(z-c) = 0$$

emporteront celle-ci,

$$a' + y'b' + z'c' = 0,$$

qui est également l'équation prime de la première, en ne prenant que a, b, c pour variables. Ces deux équations ont donc la condition demandée; mais, comme elles ne suffisent pas pour la détermination des trois quantités $\frac{a'}{d}, \frac{b'}{d}, \frac{c'}{d}$, il faudra trouver, de la même manière, une

troisième équation qui contienne les fonctions primes a', b', c' ; or, les deux précédentes ayant été déduites de l'équation de la sphère, il faudra tirer la troisième de l'équation du plan

$$x-a + m(y-b) + n(z-c) = 0,$$

laquelle, en faisant tout varier et ayant égard à l'équation

$$1 + my' + nz' = 0,$$

donnera celle-ci,

$$-a' - mb' - nc' + m'(y-b) + n'(z-c) = 0,$$

qui est, comme l'on voit, l'équation prime de la précédente, en supposant a, b, c, m, n variables à la fois; par conséquent, cette équation n'aura pas la condition demandée, à moins que la partie dépendante de la variation des quantités m et n ne disparaisse, c'est-à-dire à moins qu'on n'ait

$$m'(y-b) + n'(z-c) = 0.$$

Si cette condition a lieu, alors l'équation restante

$$a' + mb' + nc' = 0,$$

combinée avec les deux équations qu'on vient de trouver, donnera les valeurs de $\frac{a'}{d}, \frac{b'}{d}, \frac{c'}{d}$, qui seront les mêmes soit que les quantités a, b, c, d soient seules variables, soit que x, y, z, m et n varient aussi à la fois. Par conséquent, la droite dans laquelle est placé le rayon osculateur deviendra tangente à la courbe des centres; donc aussi ce rayon sera tangent de la même courbe, puisqu'il est terminé à cette courbe. Dans ce même cas, les expressions précédentes de a, b, c donneront sur-le-champ ces fonctions primes,

$$a' = -\frac{(ny' - mz')d'}{R}, \quad b' = \frac{(n - z')d'}{R}, \quad c' = -\frac{(m - y')d'}{R},$$

d'où l'on tire

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = d'^2,$$

et de là

$$d' = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}.$$

Or nous verrons ci-après (n° 37) que cette équation montre que d est l'arc de la courbe dont a, b, c sont les coordonnées. Donc le rayon osculateur sera non-seulement tangent à la courbe des centres, mais encore égal à l'arc de cette courbe. Il ne sera donc autre chose que le développement de cette même courbe, laquelle sera, par conséquent, la développée de la courbe proposée, dont x, y, z sont les coordonnées.

36. La condition

$$m'(y-b) + n'(z-c) = 0,$$

que nous venons de trouver pour que la courbe ait une développée, a évidemment lieu lorsque m et n sont constantes, et, dans ce cas, la courbe sera toute dans un plan déterminé par ces constantes. Si ces quantités ne sont pas constantes, elles détermineront le plan tangent de la courbe, et, lorsque l'équation précédente aura lieu, les rayons osculateurs formeront une surface courbe développable. Car, en ajoutant à cette équation l'équation

$$1 + my' + nz' = 0,$$

qui est une de celles du n° 34, on aura celle-ci,

$$1 + my' + nz' + m'(y-b) + n'(z-c) = 0,$$

qui n'est autre chose que l'équation prime de l'équation du plan

$$x - a + m(y-b) + n(z-c) = 0,$$

en regardant les coordonnées a, b, c du plan comme constantes et la quantité x , qui sert ici de paramètre et dont les autres quantités y, z, m, n sont supposées fonctions, comme seule variable, ce qui constitue le principe des surfaces développables, comme on le verra plus bas.

Au reste, il y a une manière plus générale de concevoir les développées des courbes, laquelle consiste à prendre le rayon de la développée dans une position inclinée au plan tangent, et qui donne lieu à plusieurs belles propriétés des courbes et des surfaces. Comme les bornes que nous nous sommes prescrites ne nous permettent pas d'entrer

dans ce détail, nous ne pouvons qu'inviter nos lecteurs à voir cette nouvelle théorie dans le Tome X des *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences*.

37. Si l'on trace la projection d'une courbe à double courbure sur le plan des x et y , on peut regarder cette courbe de projection comme l'axe curviligne de la courbe à double courbure, de sorte qu'en nommant s l'arc de la courbe de projection dont les coordonnées sont x, y , et supposant que cet arc soit étendu en ligne droite, on aura s et z pour les coordonnées rectangulaires de la courbe à double courbure supposée appliquée sur un plan.

Cette considération nous offre le moyen d'appliquer immédiatement aux courbes à double courbure les formules de la quadrature et de la rectification des courbes planes (n°s 27, 29). Pour cela, il n'y aura qu'à substituer s au lieu de x et z au lieu de y dans les expressions de yx' et $\sqrt{x'^2 + y'^2}$; on aura zs' et $\sqrt{s'^2 + z'^2}$, et, comme l'arc s est déterminé par l'équation

$$s' = \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

en faisant cette substitution, on aura les deux formules

$$z \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad \text{et} \quad \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

dont la première sera la fonction prime de l'aire ou de la surface du cylindre droit qui a pour base la projection de la courbe à double courbure et qui est terminé par le contour de cette courbe, et dont la seconde sera la fonction prime de l'arc de la même courbe.

CHAPITRE VIII.

DES SURFACES COURBES ET DE LEURS PLANS TANGENTS. THÉORIE DU CONTACT
DES SURFACES COURBES, DES CONTACTS DES DIFFÉRENTS ORDRES.

38. Les surfaces courbes se déterminent aussi par trois coordonnées rectangulaires, comme les lignes à double courbure, mais avec cette différence que, pour les surfaces, deux des coordonnées sont indépendantes entre elles et la troisième est fonction de ces deux, de sorte qu'une surface n'est représentée que par une seule équation entre les trois coordonnées. Ainsi, les deux équations qui déterminent une courbe à double courbure représentent chacune en particulier une surface courbe, et la courbe représentée par le système de ces deux équations est formée par l'intersection des deux surfaces. La théorie des surfaces dépend donc de l'analyse des fonctions de deux variables, et peut être traitée comme la théorie des courbes et par les mêmes principes. Ainsi, de même qu'une ligne droite peut être tangente d'une courbe, un plan peut être tangent d'une surface, et l'on déterminera le plan tangent par la condition qu'aucun autre plan ne puisse être mené par le point de contact entre celui-là et la surface.

Soient x, y, z les trois coordonnées de la surface donnée et p, q, r les coordonnées du plan tangent rapportées aux mêmes axes rectangulaires; on aura, par la nature de la surface,

$$z = f(x, y),$$

et, par la nature du plan,

$$r = a + bp + cq,$$

a, b, c étant les trois constantes qui déterminent la position du plan.

D'abord, pour que le plan ait avec la surface un point commun, il faut que son équation subsiste, en supposant que les coordonnées p, q, r deviennent x, y, z , ce qui donnera cette première équation :

$$z = a + bx + cy.$$

Considérons maintenant un autre point de la surface répondant aux coordonnées $x+i, y+o$; l'ordonnée perpendiculaire z deviendra $f(x+i, y+o)$. Faisons aussi, dans l'équation du plan,

$$p = x+i, \quad q = y+o;$$

l'ordonnée perpendiculaire r deviendra

$$a + b(x+i) + c(y+o),$$

et la distance entre les points correspondants de la surface et du plan sera exprimée par

$$f(x+i, y+o) - a - b(x+i) - c(y+o).$$

La fonction $f(x+i, y+o)$ peut se développer dans cette série (n° 73, I^{re} Partie) :

$$f(x, y) + i f'_x(x, y) + o f'_y(x, y) + \frac{i^2}{2} f''_{xx}(x, y) + io f''_{xy}(x, y) + \frac{o^2}{2} f''_{yy}(x, y) + \dots$$

Donc, à cause de

$$f(x, y) = z = a + bx + cy,$$

la distance dont il s'agit, que nous désignerons par D , sera exprimée ainsi :

$$D = i[f'_x(x, y) - b] + o[f'_y(x, y) - c] + \frac{i^2}{2} f''_{xx}(x, y) + io f''_{xy}(x, y) + \frac{o^2}{2} f''_{yy}(x, y) + \dots$$

où l'on voit d'abord que, les quantités i et o demeurant indéterminées, la valeur de D deviendra la plus petite si l'on détermine les quantités b et c de manière que les termes multipliés par i et o disparaissent, ce

qui donnera (n° 77, 1^{re} Partie)

$$b = f'(x, y) = z', \quad c = f_z(x, y) = z,$$

et, comme on a déjà trouvé

$$a + bx + cy = z,$$

on aura les valeurs des trois constantes a, b, c de l'équation du plan en fonction de x, y, z . Ces valeurs seront donc

$$a = z - xz' - yz'', \quad b = z', \quad c = z,$$

et la position du plan sera entièrement déterminée.

Par l'évanouissement des termes multipliés par les quantités i et o , l'expression de la distance D ne contiendra plus que des termes multipliés par des puissances ou des produits de ces mêmes quantités. Si l'on faisait passer un autre plan par le même point qui répond aux coordonnées x et y , on trouverait, pour la distance, que je nommerai Δ , entre les points de la surface et du nouveau plan correspondants aux coordonnées $x + i$ et $y + o$, une expression semblable à celle de D , mais où les termes multipliés par i et par o ne se détruiraient plus. Or il est facile de voir qu'on peut prendre les quantités i et o assez petites pour que les termes multipliés par les premières puissances de i ou de o deviennent plus grands que les autres termes multipliés par des puissances ou des produits de plusieurs dimensions, ce qui porterait d'abord à conclure que l'on peut toujours donner à i et o des valeurs assez petites pour que la distance Δ surpasse la distance D , en sorte qu'il soit impossible que le dernier plan passe entre le premier et la surface.

39. Mais cette conséquence, qui serait légitime si les expressions de D et Δ n'étaient composées que d'un nombre déterminé de termes, pourrait souffrir des difficultés à raison des suites infinies qui entrent dans ces expressions. On peut néanmoins les éviter en employant le développement que nous avons donné dans le Chapitre XIII de la pre-

mière Partie et en s'arrêtant aux termes du premier ordre. On aura ainsi

$$\begin{aligned} f(x + i, y + o) &= f(x, y) + if'(x, y) + of_z(x, y) \\ &\quad + \frac{i^2}{2} f''(x + \lambda i, y + \lambda o) + io f''_z(x + \lambda i, y + \lambda o) \\ &\quad + \frac{o^2}{2} f_{zz}(x + \lambda i, y + \lambda o), \end{aligned}$$

et la valeur de la distance D se réduira à

$$D = \frac{i^2}{2} f''(x + \lambda i, y + \lambda o) + io f''_z(x + \lambda i, y + \lambda o) + \frac{o^2}{2} f_{zz}(x + \lambda i, y + \lambda o).$$

Pour tout autre plan représenté par l'équation

$$r = x + \beta p + \gamma q$$

et ayant le même point commun avec le premier plan et la surface, cette distance, que j'appellerai Δ , contiendrait, outre les termes précédents, encore ceux-ci du premier ordre

$$i[f'(x, y) - \beta] + o[f_z(x, y) - \gamma],$$

d'où il est facile de conclure qu'on pourra toujours prendre i et o assez petits pour que cette distance Δ surpasse la distance D . Donc il sera impossible que ce dernier plan puisse passer entre la surface et le plan représenté par l'équation

$$r = a + bp + cq;$$

par conséquent, celui-ci sera tangent de la surface donnée, en faisant, comme ci-dessus,

$$a = z - xz' - yz'', \quad b = z', \quad c = z,$$

d'où l'on voit que la position du plan tangent dépend des deux fonctions primes z' et z .

En effet, il est facile de trouver, d'après l'équation

$$r = a + bp + cq,$$

que, si l'on nomme α l'inclinaison du plan représenté par cette équation sur le plan des coordonnées p et q , et β l'inclinaison de la ligne d'intersection de ces deux plans à l'axe des abscisses p , on aura

$$b = \sin \beta \tan \alpha, \quad c = \cos \beta \tan \alpha,$$

d'où l'on tire

$$\tan \alpha = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad \tan \beta = \frac{b}{c}.$$

Donc, puisque les axes des coordonnées x, y, z sont les mêmes que ceux des coordonnées p, q, r , les angles α et β , relativement au plan tangent, seront pareillement déterminés par ces formules :

$$\tan \alpha = \sqrt{z'^2 + z''^2}, \quad \tan \beta = \frac{z'}{z''}.$$

40. En général,

$$z = f(x, y)$$

étant l'équation de la surface proposée et

$$r = F(p, q)$$

celle d'une surface donnée, si l'on veut que ces deux surfaces aient un point commun qui réponde aux coordonnées x, y, z , il faudra que l'équation

$$r = F(p, q)$$

ait lieu aussi en faisant $p = x, q = y, r = z$, ce qui donnera

$$z = F(x, y).$$

Ensuite, si l'on considère les points des deux surfaces qui répondent aux mêmes coordonnées $x + i$ et $y + o$, et qu'on nomme D la distance entre l'un et l'autre, c'est-à-dire la partie de l'ordonnée qui se trouvera comprise entre les deux surfaces, il est visible qu'on aura

$$D = f(x + i, y + o) - F(x + i, y + o).$$

Développons ces deux fonctions par les formules du n° 78 (1^{re} Partie), en nous arrêtant d'abord aux termes du premier ordre; nous au-

rons, en mettant z, z' et z'' à la place de $f(x, y), f'(x, y), f''(x, y)$,

$$\begin{aligned} D &= i[z' - F'(x, y)] + o[z'' - F''(x, y)] \\ &\quad + \frac{i^2}{2} [f''(x + \lambda i, y + \lambda o) - F''(x + \lambda i, y + \lambda o)] \\ &\quad + i o [f'_x(x + \lambda i, y + \lambda o) - F'_x(x + \lambda i, y + \lambda o)] \\ &\quad + \frac{o^2}{2} [f''_y(x + \lambda i, y + \lambda o) - F''_y(x + \lambda i, y + \lambda o)]. \end{aligned}$$

Supposons que les termes multipliés par i et par o disparaissent, ce qui a lieu en faisant $z' = F'(x, y)$ et $z'' = F''(x, y)$; l'expression de D ne contiendra plus que des termes d'un ordre supérieur, et il est facile de prouver qu'on pourra toujours prendre i et o assez petits pour que cette valeur de D devienne moindre que la valeur d'une pareille quantité pour une autre surface donnée, dans laquelle les termes multipliés par i et par o ne se détruiraient pas. Donc, si l'équation

$$r = F(p, q)$$

de la surface donnée contient trois constantes arbitraires a, b, c , et qu'on les détermine de manière à satisfaire aux trois équations

$$z = F(x, y), \quad z' = F'(x, y), \quad z'' = F''(x, y),$$

il sera impossible qu'aucune autre surface qui ne satisferait pas aux mêmes conditions puisse passer entre cette même surface et la surface proposée dont les coordonnées sont x, y, z .

Il est visible que les trois équations précédentes ne sont autre chose que l'équation même de la surface donnée, en y changeant les coordonnées p, q, r en x, y, z et les deux équations primes de celle-ci, prises suivant x et suivant y , d'où l'on peut conclure, en général, que, si

$$F(p, q, r) = 0$$

est l'équation de la surface donnée, les trois équations dont il s'agit seront renfermées dans celles-ci,

$$F(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0, \quad F''(x, y, z) = 0.$$



en regardant z comme fonction de x et y ; de sorte que, si l'on désigne simplement par $F(x)$, $F(y)$, $F(z)$ les fonctions primes de $F(x, y, z)$ prises relativement à x , y , z seuls, les deux dernières équations deviendront

$$F'(x) + z' F'(z) = 0, \quad F'(y) + z F'(z) = 0.$$

Donc, si la surface proposée est représentée par l'équation

$$f(x, y, z) = 0,$$

et que la surface donnée, qui doit avoir un point de contact avec celle-là, soit représentée par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

la première donnera, en prenant les fonctions primes relatives à x et y , ces deux-ci :

$$f'(x) + z' f'(z) = 0, \quad f'(y) + z f'(z) = 0.$$

Ces deux équations combinées avec les deux précédentes, de manière à en chasser les dérivées z' et z , on aura ces deux-ci :

$$\frac{f'(x)}{F'(x)} = \frac{f'(z)}{F'(z)}, \quad \frac{f'(y)}{F'(y)} = \frac{f'(z)}{F'(z)},$$

d'où il s'ensuit que les trois fonctions dérivées $f'(x)$, $f'(y)$, $f'(z)$ doivent être respectivement proportionnelles aux fonctions dérivées $F'(x)$, $F'(y)$, $F'(z)$.

41. Si, dans l'expression générale de la distance D , on développe les deux fonctions qu'elle contient, en poussant le développement jusqu'aux secondes dimensions de i et o , et qu'on suppose que les trois équations ci-dessus aient déjà lieu, on aura simplement

$$D = \frac{i^2}{2} [z'' - F''(x, y)] + i o [z' - F'(x, y)] + \frac{o^2}{2} [z - F(x, y)] \\ + \frac{i^3}{2 \cdot 3} A'' + \frac{i^2 o}{2} A' + \frac{i o^2}{2} A' + \frac{o^3}{2 \cdot 3} A_o,$$

en faisant, pour abrégér,

$$A'' = f''(x + \lambda i, y + \lambda o) - F''(x + \lambda i, y + \lambda o),$$

$$A' = f'(x + \lambda i, y + \lambda o) - F'(x + \lambda i, y + \lambda o),$$

$$\dots\dots\dots$$

Donc, si l'équation

$$r = F(p, q)$$

de la surface donnée est telle qu'on puisse encore satisfaire aux trois équations

$$z'' = F''(x, y), \quad z' = F'(x, y), \quad z = F(x, y),$$

les termes du second ordre disparaîtront aussi dans l'expression de D , et l'on prouvera aisément qu'il sera toujours possible de prendre les quantités i et o assez petites pour que la distance D soit plus petite que la distance Δ pour toute autre surface donnée qui ne satisferait pas aux mêmes conditions, d'où il suit qu'il sera impossible que cette surface passe entre la surface donnée, dont l'équation est

$$r = F(p, q),$$

et la proposée, dont l'équation est

$$z = f(x, y);$$

et ainsi de suite.

Si l'on représente en général par

$$F(p, q, r) = 0$$

l'équation de la surface donnée, qui doit avoir un point de contact avec une autre surface dont les coordonnées sont x, y, z , les trois dernières équations seront renfermées dans celles-ci,

$$F''(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0,$$

en regardant z comme fonction de x et y ; et ainsi des autres.

On pourra donc étendre aux surfaces la théorie des contacts de différents ordres que nous avons exposée relativement aux lignes courbes

et en déduire des résultats semblables. Ainsi, pour le contact du premier ordre, on aura l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

avec ses deux équations primes suivant x et y ; pour le contact du second ordre, on aura, outre les trois équations précédentes, les trois équations secondes de

$$F(x, y, z) = 0$$

suivant x , suivant y , et suivant x et y ; et ainsi de suite.

42. Prenons, pour la surface donnée, la sphère dont l'équation la plus générale est

$$(p-a)^2 + (q-b)^2 + (r-c)^2 = d^2,$$

p, q, r étant les trois coordonnées d'un point quelconque de sa surface, a, b, c les trois coordonnées qui déterminent la position du centre, et d le demi-diamètre ou le rayon.

En changeant dans cette équation p, q, r en x, y, z , et prenant ensuite les deux équations primes suivant x et y , on aura ces trois équations,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - d^2 = 0,$$

$$x-a + z'(z-c) = 0,$$

$$y-b + z''(z-c) = 0,$$

par lesquelles on pourra déterminer d'abord les trois constantes a, b, c ; on trouvera ainsi

$$a = x + \frac{dz'}{\sqrt{1+z'^2+z''^2}},$$

$$b = y + \frac{dz''}{\sqrt{1+z'^2+z''^2}},$$

$$c = z - \frac{d}{\sqrt{1+z'^2+z''^2}},$$

et le rayon d sera encore arbitraire.

La sphère déterminée par ces éléments sera donc tangente de la

surface, et, par conséquent, son rayon sera perpendiculaire à la même surface. Ainsi, en regardant la valeur de ce rayon comme indéterminée, les trois quantités a, b, c seront les coordonnées de la perpendiculaire à la surface, d étant variable et x, y, z constantes.

Si l'on veut avoir ces éléments a, b, c , ainsi que les angles α et β du n° 39, exprimés en différentielles, il n'y aura qu'à représenter les fonctions dérivées z', z'' par les différences partielles $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$.

43. Pour que la sphère devienne osculatrice de la surface, on aura encore trois autres équations, qui seront les trois équations secondes de la première équation ci-dessus; mais, comme il ne reste plus qu'une arbitraire d , il est clair qu'on ne pourra pas satisfaire à toutes ces équations, d'où il suit qu'il est impossible de trouver en général une sphère osculatrice d'une surface comme on trouve le cercle osculateur d'une courbe.

Si, au lieu d'une sphère, on voulait employer la surface formée par la rotation d'un arc de cercle autour de sa corde, comme on aurait dans l'équation de cette surface six constantes arbitraires, on pourrait alors déterminer ces éléments de manière que le contact du second ordre eût lieu en général avec une surface quelconque. Il en serait de même pour toute autre surface dont l'équation renfermerait au moins six constantes arbitraires.

CHAPITRE IX.

DES SPHÈRES OSCULATRICES. DES LIGNES DE PLUS GRANDE ET DE MOINDRE COURBURE.
PROPRIÉTÉS DE CES LIGNES.

44. Nous venons de voir que, parmi toutes les sphères touchantes, il ne peut y en avoir aucune qui devienne proprement osculatrice de la surface; mais on peut toujours déterminer celle qui sera osculatrice d'une courbe quelconque tracée sur la même surface. Pour cela, il n'y aura qu'à supposer y fonction de x , comme dans les courbes à double courbure, et prendre, dans cette hypothèse, les équations primes et secondes de l'équation de la sphère

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - d^2 = 0.$$

L'équation prime sera

$$x - a + y'(y-b) + (z' + y'z_y)(z-c) = 0,$$

en regardant toujours z comme fonction de x et y , dont les deux fonctions primes sont z' et z_y , et ensuite y comme fonction de x , dont y' est la fonction prime. On trouvera, de la même manière, cette équation seconde :

$$1 + y'^2 + y''(y-b) + (z' + y'z_y)^2 + (z'' + 2y'z'_y + y'^2z_{yy} + y''z_y)(z-c) = 0.$$

L'équation prime est déjà remplie par les deux équations primes du n° 42 :

$$x - a + z'(z-c) = 0, \quad y - b + z_y(z-c) = 0.$$

Ainsi, il ne reste qu'à satisfaire à l'équation précédente, laquelle, à

cause de $y - b + z_y(z-c) = 0$, se réduit à celle-ci

$$1 + y'^2 + (z' + y'z_y)^2 + (z'' + 2y'z'_y + y'^2z_{yy})(z-c) = 0.$$

Si donc on substitue dans cette équation la valeur de c trouvée ci-dessus (numéro cité), on en pourra tirer la valeur de d , et l'on aura

$$d = - \frac{[1 + y'^2 + (z' + y'z_y)^2] \sqrt{1 + z'^2 + z_y^2}}{z'' + 2y'z'_y + y'^2z_{yy}}.$$

Connaissant ainsi le rayon d de la sphère osculatrice, on aura, par les formules du même numéro, les valeurs des coordonnées a, b, c du centre.

45. La quantité y' qui entre dans les expressions précédentes dépend de la courbe qui est la projection de celle qu'on suppose tracée sur la surface. Cette courbe étant arbitraire, on peut chercher celle dans laquelle le rayon de courbure d sera un maximum ou un minimum, et, pour cela, il n'y aura qu'à égaler à zéro la fonction prime de l'expression de d , regardée comme fonction de y' (n° 26). Mais, pour simplifier le calcul, nous observerons que, puisque

$$d = (z-c) \sqrt{1 + z'^2 + z_y^2},$$

le maximum ou minimum de d relativement à y' répondra au maximum ou minimum de c ; ainsi, il n'y aura qu'à prendre l'équation prime de la dernière équation ci-dessus entre c et y' , en supposant nulle la fonction prime de c , c'est-à-dire en ne regardant que y' comme variable. On aura de cette manière l'équation.

$$y' + z_y(z' + y'z_y) + (z' + y'z_y)(z-c) = 0,$$

qui, étant combinée avec la même équation, servira à déterminer y' et c .

Si l'on multiplie cette équation par y' , et qu'on la retranche de l'équation dont il s'agit, on aura celle-ci, plus simple,

$$1 + z'^2 + y'z'_y + (z' + y'z_y)(z-c) = 0,$$

que l'on combinera avec la précédente.

Par l'élimination de $z-c$, on aura une équation en y' de cette forme,

$$Ay'^2 - By' - C = 0,$$

en faisant, pour abrégé,

$$A = (1 + z'^2)z'' - z'z''z''',$$

$$B = (1 + z'^2)z''' - (1 + z''^2)z''',$$

$$C = (1 + z'^2)z'' - z'z''z''',$$

et la résolution de cette équation donnera

$$y' = \frac{B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A},$$

équation du premier ordre en x, y et y' , puisque z étant, par la nature de la surface, une fonction donnée de x et y , les quantités A, B, C seront aussi des fonctions données de x et y . Donc l'équation primitive en x et y renfermera une constante arbitraire et représentera une infinité de courbes qui seront les projections des lignes de plus grande et de moindre courbure de la surface proposée.

Si l'on combine les deux équations ci-dessus de manière à faire disparaître les termes où y' et $z-c$ se trouvent ensemble, on en tirera

$$z-c = \frac{(1+z'^2)z'' - z'z''z'' - Ay'}{z''^2 - z''z'''}.$$

Donc, substituant la valeur de y' et faisant de plus

$$E = 2z'z''z''' - (1+z'^2)z''' - (1+z''^2)z''',$$

on aura

$$z-c = \frac{E \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2(z''z''' - z'^2z'')},$$

et de là

$$d = \frac{(E \pm \sqrt{B^2 + 4AC})\sqrt{1+z'^2+z''^2}}{2(z''z''' - z'^2z'')},$$

d'où l'on voit que les deux valeurs du radical donnent l'une le maximum et l'autre le minimum du rayon d .

Il y a donc, à chaque point de la surface, deux branches qui se coupent et qui répondent l'une à une ligne de plus grande et l'autre à une ligne de moindre courbure, et l'angle sous lequel elles se coupent dépend de la double valeur de la quantité y' , qui est égale à la tangente de l'angle formé par la tangente de la courbe de projection sur le plan des x et y avec l'axe fixe des x . Or, comme la position de ce plan est arbitraire, on peut la prendre de manière qu'il coïncide avec le plan tangent de la surface; alors la projection de la courbe se confondra avec la courbe même, et les deux valeurs de y' deviendront les tangentes des angles que les tangentes des deux branches de plus grande et de moindre courbure feront avec une même ligne; par conséquent, la différence de ces angles sera l'angle cherché sous lequel ces branches se coupent; donc, nommant α et β les deux valeurs de y' , la tangente de cet angle sera, par les formules connues,

$$\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} = \frac{\sqrt{B^2 + 4AC}}{A - C}.$$

Mais il est facile de voir, par les formules du n° 38, que, pour que le plan tangent d'une surface coïncide avec le plan des x et y , il faut que les valeurs de z' et z , soient nulles. Faisant donc, dans les expressions de A, B, C ,

$$z' = 0, \quad z = 0,$$

on aura

$$A = z', \quad B = z'' - z''', \quad C = z',$$

ce qui donne

$$A - C = 0.$$

Ainsi la tangente de l'angle dont il s'agit sera infinie, et, par conséquent, l'angle sera droit, d'où l'on doit conclure, en général, que les lignes de plus grande et de moindre courbure d'une surface quelconque se coupent toujours à angle droit.

46. La propriété du maximum et du minimum n'est pas la seule qui caractérise ces lignes: elles sont encore distinguées par rapport à leurs

développées. En effet, si l'on cherche les conditions nécessaires pour que le rayon de courbure soit partout tangent à la courbe des centres, on trouvera, par des considérations semblables à celles du n° 35, appliquées aux expressions des coordonnées a, b, c de cette courbe (n° 42), que ces conditions se réduisent à ce que les valeurs des fonctions primes a', b', c' soient les mêmes, soit que la quantité d soit seule variable ou que les quantités x, y, z varient en même temps que d . Ainsi, si l'on prend les équations primes des trois équations (n° 42)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d^2,$$

$$x-a + z'(z-c) = 0,$$

$$y-b + z'(z-c) = 0,$$

d'où résultent les valeurs de a, b, c , il faudra que la partie due à la seule variation de x, y, z soit nulle. Or il est visible que la seconde et la troisième équation rendent nulle cette partie dans l'équation prime de la première équation; donc il suffira de prendre les équations primes des équations

$$x-a + z'(z-c) = 0, \quad y-b + z'(z-c) = 0,$$

en regardant a, b et c comme constantes. Ces équations seront donc, en regardant, comme ci-dessus (n° 44), y comme fonction de x , et z comme fonction de x et y ,

$$1 + z'^2 + y'z'_y + (z'' + y'z'_y)(z-c) = 0,$$

$$y' + z_y z' + y'z'_y + (z'_y + y'z''_y)(z-c) = 0,$$

et, si on les compare aux deux équations du numéro précédent, qui déterminent le maximum et le minimum de d , on voit qu'elles sont identiquement les mêmes, d'où il suit que les lignes suivant lesquelles le rayon de courbure sera tangent de la courbe des centres sont les mêmes que celles de la plus grande ou de la moindre courbure.

Mais les expressions de a, b, c du n° 42 donnent, en ne faisant va-

rier que d ,

$$a' = \frac{d'z'}{\sqrt{1+z'^2+z''^2}},$$

$$b' = \frac{d'z'_y}{\sqrt{1+z'^2+z''^2}},$$

$$c' = -\frac{d'}{\sqrt{1+z'^2+z''^2}},$$

d'où l'on tire

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = d'^2,$$

et par conséquent

$$d' = \sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2},$$

d'où l'on conclura (n° 37) que la quantité d sera égale à l'arc de la courbe dont a, b, c sont les coordonnées. Ainsi cette courbe sera la véritable développée des lignes de plus grande et de moindre courbure, et réciproquement il n'y aura, sur une surface quelconque, que ces lignes qui puissent avoir une développée formée par les rayons de courbure.

Ces propriétés des surfaces sont très-curieuses et méritent toute l'attention des géomètres; elles donnent lieu surtout à des applications importantes pour les arts. Voir les *Mémoires de Berlin* pour l'année 1760, les Tomes IX et X des *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences*, et l'*Application de l'Analyse à la Géométrie*, par M. Monge.

Au reste, pour traduire ces formules en Calcul différentiel, il n'y aura qu'à changer y', y'' en $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ et $z', z'', z'_y, z''_y, z''_{yy}$ en $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx dy}, \frac{d^2z}{dy^2}$.

CHAPITRE X.

SOLUTION DES QUESTIONS DANS LESQUELLES ON PROPOSE UNE RELATION ENTRE LES ÉLÉMENTS DU CONTACT DU PREMIER ORDRE DES SURFACES COURBES. CONSTRUCTION DE CETTE SOLUTION. ÉQUATION DES SURFACES DÉVELOPPABLES.

47. On peut proposer, sur les différents contacts des surfaces, des problèmes analogues à ceux qui nous ont occupés, relativement aux lignes courbes (Chap. III), et les résoudre par des principes semblables. Nous nous contenterons ici de considérer les contacts du premier ordre.

Suivant les formules du n° 41, si l'équation

$$F(p, q, r) = 0$$

de la surface donnée contient trois constantes arbitraires a, b, c , pour que cette surface ait un contact du premier ordre avec une surface quelconque rapportée aux coordonnées x, y, z , il faut déterminer a, b, c en x, y, z par les trois équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0, \quad F''(x, y, z) = 0,$$

dont les deux dernières se réduisent à la forme

$$F'(x) + z' F'(z) = 0 \quad \text{et} \quad F'(y) + z F'(z) = 0.$$

Donc, si la question est de trouver la surface pour laquelle les trois éléments du contact a, b, c auront entre eux une relation déterminée, il faudra substituer, dans l'équation qui exprime cette relation, les valeurs de a, b, c , et, si cette équation est entre les quantités a, b, c et x, y, z , on aura une équation du premier ordre en x, y, z, z' et z .

qu'on pourra traiter par la méthode générale du n° 92 de la première Partie.

Mais, si l'équation dont il s'agit n'était qu'entre les trois quantités a, b, c , la solution du problème serait beaucoup plus simple. En effet, il est clair qu'on peut alors supposer que les quantités a, b, c soient constantes, et, dans ce cas, l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

sera l'équation primitive de l'équation du premier ordre donnée par les conditions du problème, en y substituant, pour une des trois constantes a, b, c , sa valeur tirée de l'équation donnée; on aura ainsi une équation primitive qui ne sera que particulière; mais, comme elle renferme deux constantes arbitraires, on pourra, par la méthode du n° 83 de la première Partie, trouver l'équation primitive générale qui donnera la solution complète du problème.

On fera donc, suivant cette méthode, $b = \varphi(a)$, si a et b sont les deux constantes arbitraires, et l'on éliminera a au moyen de l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

et de son équation prime, prise relativement à la seule quantité a , équation représentée par

$$F'(a) + \varphi'(a) F'(b) = 0,$$

en dénotant par $F'(a)$ et $F'(b)$ les fonctions primes de $F(x, y, z)$ relativement aux variables isolées a et b .

48. Pour voir comment le système de ces deux équations satisfait au problème, on observera d'abord que l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

représente la courbe donnée avec laquelle la proposée doit avoir un contact du premier ordre; ainsi cette équation résout le problème, quelles que soient les constantes arbitraires a et b . Mais, comme le

contact demandé par le problème exige seulement que les valeurs de z et de ses deux fonctions primes z' et z , soient les mêmes pour les deux courbes, il s'ensuit qu'il aura également lieu en supposant a et b variables, pourvu que ces fonctions primes soient encore les mêmes. Or, c'est précisément ce qui résulte du système des deux équations dont il s'agit, comme on peut s'en convaincre par le numéro cité.

Nous observerons ensuite que la surface représentée par le système de ces équations ne sera autre chose que la surface formée par l'intersection continue des surfaces représentées par la même équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

en y faisant varier le paramètre a , de manière que cette surface touchera ou enveloppera à la fois toutes ces différentes surfaces particulières. En effet, si l'on représente, ce qui est permis, cette surface enveloppante par l'équation

$$F(x, y, z) = 0,$$

dans laquelle a soit une quantité variable quelconque, et qu'on cherche à déterminer cette quantité de manière que la même surface touche successivement toutes les surfaces données, il faudra satisfaire à l'équation

$$F'(a) + \varphi'(a) F'(b) = 0$$

pour que les valeurs de z' et z , soient les mêmes que celles des surfaces enveloppées. Ceci répond à ce qu'on a trouvé plus haut (n° 19), relativement aux lignes courbes.

49. Puisque l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

renferme les trois arbitraires a, b, c qui doivent être déterminées par la combinaison de cette équation avec ses deux équations primes prises relativement à x et y , en regardant a, b, c comme constantes (n° 47), si l'on regarde maintenant ces quantités comme des fonctions de x et y , il est clair qu'on aura aussi séparément les deux équations primes

de la même équation relativement à ces quantités. Ainsi, en désignant par $F'(a)$, $F'(b)$, $F'(c)$ les fonctions primes de la fonction $F(x, y, z)$ prises relativement aux seules quantités a, b, c considérées séparément, on aura encore ces deux équations primes :

$$\begin{aligned} a' F'(a) + b' F'(b) + c' F'(c) &= 0, \\ a, F'(a) + b, F'(b) + c, F'(c) &= 0. \end{aligned}$$

Soit

$$c = f(a, b)$$

l'équation qui exprime la relation donnée entre les quantités a, b, c , en prenant de même les deux équations primes, on aura

$$\begin{aligned} c' &= a' f'(a) + b' f'(b), \\ c, &= a, f'(a) + b, f'(b), \end{aligned}$$

$f'(a)$ et $f'(b)$ étant les deux fonctions primes de $f(a, b)$ prises relativement à a et b isolées. Substituant ces valeurs de c' et c dans les deux équations précédentes, on aura

$$\begin{aligned} a' [F'(a) + f'(a) F'(c)] + b' [F'(b) + f'(b) F'(c)] &= 0, \\ a, [F'(a) + f'(a) F'(c)] + b, [F'(b) + f'(b) F'(c)] &= 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire cette équation

$$a'b, - b'a, = 0,$$

où la fonction désignée par la caractéristique f n'entre plus.

Si donc on substitue dans cette équation $a'b, - b'a, = 0$ les valeurs de a, b en x, y, z, z' et z , on aura une équation du second ordre, dont l'équation primitive du premier ordre sera

$$c = f(a, b),$$

la fonction désignée par f étant arbitraire; et l'équation primitive de celle-ci entre x, y, z sera le système de l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

et de son équation prime, prise relativement à a , après y avoir substitué

tué $f(a, b)$ pour c et $\varphi(a)$ pour b , la fonction $\varphi(a)$ étant la seconde fonction arbitraire. Ainsi on pourra, de cette manière, trouver l'équation primitive de toute équation du second ordre réductible à la forme

$$a'b_1 - b'a_1 = 0,$$

les quantités a, b étant déduites d'une équation quelconque

$$F(x, y, z, a, b, c) = 0$$

entre les quantités x, y, z, a, b, c et de ses deux équations primes prises dans l'hypothèse de a, b, c constantes, ce qui fournit une méthode importante pour les progrès de l'analyse inverse des fonctions de deux variables.

50. Appliquons la théorie précédente aux plans tangents. Nous avons trouvé plus haut que les éléments a, b, c du contact d'un plan représenté par l'équation

$$r = a + bp + cq,$$

sont exprimés ainsi :

$$a = z - xz' - yz'', \quad b = z', \quad c = z''.$$

Donc, si l'on a une équation quelconque entre ces trois quantités, laquelle donne, par exemple,

$$c = f(a, b).$$

l'équation primitive de cette équation du premier ordre sera représentée par le système de ces deux équations,

$$z = a + x\varphi(a) + yf[a, \varphi(a)],$$

$$1 + x\varphi'(a) + yf'(a) = 0,$$

en dénotant par $\varphi'(a)$ et $f'(a)$ les fonctions primes de $\varphi(a)$ et de $f[a, \varphi(a)]$ relatives à a . La quantité a devra être éliminée pour avoir une équation en x, y, z , et la fonction $\varphi(a)$ sera la fonction arbitraire.

Cette équation sera donc celle de la surface formée par l'intersection continue de tous les plans représentés par l'équation

$$z = a + x\varphi(a) + yf[a, \varphi(a)],$$

en faisant varier successivement le paramètre a ; ce sera, par conséquent, une surface développable, puisqu'on peut concevoir que le même plan tangent, supposé flexible et inextensible, s'applique et se plie sur la surface, sans duplication ni solution de continuité, et, réciproquement, que la surface s'applique et se développe sur le même plan sans se briser ou se replier.

Puisque $a = z - xz' - yz''$, et $b = z'$, on aura

$$a' = -xz'' - yz''', \quad a_1 = -xz'_1 - yz''_1, \quad b' = z'', \quad b_1 = z'_1;$$

donc l'équation (n° 49)

$$a'b_1 - a_1b' = 0$$

deviendra

$$(xz'' + yz''')z'_1 - (xz'_1 + yz''_1)z'' = 0,$$

savoir

$$z_1^2 - z''z_1 = 0.$$

Ce sera l'équation générale des surfaces développables, dont, par conséquent, l'équation primitive sera le système de ces deux-ci,

$$z = a + x\varphi(a) + yf(a) \quad \text{et} \quad 1 + a\varphi'(a) + yf'(a) = 0,$$

$\varphi(a)$ et $f(a)$ dénotant deux fonctions arbitraires de a . Voir le Tome X des *Novi Commentarii* de Pétersbourg et les Ouvrages déjà cités à la fin du Chapitre précédent.

CHAPITRE XI.

DES PLUS GRANDES ET DES MOINDRES ORDONNÉES DES SURFACES COURBES. SOLUTION GÉNÉRALE DES QUESTIONS DE MAXIMIS ET MINIMIS. MANIÈRE DE DISTINGUER LES MAXIMA DES MINIMA DANS LES FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES.

51. Si l'on demande les plus grandes et les moindres ordonnées d'une surface donnée, il est aisé de concevoir qu'elles ne peuvent répondre qu'aux points où le plan tangent devient parallèle au plan des x et y ; donc on aura, dans ces points, $\tan z = 0$, et, par conséquent (n° 39),

$$z'^2 + z''^2 = 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu qu'en faisant à la fois

$$z' = 0 \quad \text{et} \quad z'' = 0.$$

Ce sont là les conditions nécessaires pour que l'ordonnée z devienne un maximum ou un minimum.

Puisque z peut représenter une fonction quelconque de x et y , on en conclura, en général, que, pour qu'une fonction de deux variables devienne un maximum ou un minimum, il faut que ses deux fonctions primes relatives à chacune de ces variables soient nulles.

Mais on peut parvenir directement à cette conclusion par la considération des fonctions d'une seule variable, suivant la théorie du n° 24, et trouver en même temps les conditions nécessaires pour que le maximum ou minimum ait lieu. En effet, z étant fonction de x et y , on peut supposer d'abord x donné et chercher le maximum ou minimum de z relativement à y ; on aura pour cela l'équation

$$z_y = 0,$$

et ensuite $z_y < 0$ pour le maximum et > 0 pour le minimum. Si donc on substitue dans z la valeur de y tirée de l'équation $z_y = 0$, cette quantité z deviendra une simple fonction de x et sera déjà un maximum ou minimum relativement à y . Il n'y aura donc qu'à la rendre encore un maximum ou minimum relativement à la quantité x , qui avait été supposée constante; or, y devant maintenant être regardée comme une fonction de x donnée par l'équation $z_y = 0$, il est clair que la fonction prime de z relativement à x ne sera pas simplement z' , mais $z' + y'z_y$, et sa fonction seconde, relative aussi à x , sera $z'' + 2y'z'_y + y'^2z_{yy} + y''z_y$, en désignant toujours par y' et y'' les fonctions primes et secondes de y relativement à x . On aura donc

$$z' + y'z_y = 0,$$

et, comme on a déjà $z_y = 0$, cette seconde équation se réduira à $z' = 0$, de sorte qu'on aura, pour la détermination de x et y , les deux conditions

$$z' = 0, \quad z_y = 0,$$

comme plus haut.

Maintenant il faudra, de plus, que l'on ait $z'' + 2y'z'_y + y'^2z_{yy} + y''z_y < 0$ pour le maximum, et > 0 pour le minimum; mais, comme y doit être déterminée par l'équation $z_y = 0$, y' le sera par son équation prime

$$z'_y + y'z_{yy} = 0,$$

laquelle donne

$$y' = -\frac{z'_y}{z_{yy}}.$$

Ainsi l'on aura, pour le maximum,

$$z'' - \frac{z'^2_y}{z_{yy}} < 0,$$

et, pour le minimum,

$$z'' - \frac{z'^2_y}{z_{yy}} > 0,$$

ou bien, puisque z_{yy} doit être aussi < 0 dans le premier cas et > 0 dans IX.

le second, il faudra que l'on ait, tant pour le maximum que pour le minimum,

$$z''z_p - z'^2 > 0.$$

D'où l'on peut conclure que les valeurs de x et y tirées des équations $z' = 0$ et $z_p = 0$ donneront un maximum ou un minimum suivant que l'on aura $z_p < 0$ ou > 0 , pourvu que l'on ait en même temps

$$z''z_p - z'^2 > 0,$$

ce qui emporte, comme l'on voit, la condition que z'' et z_p soient de même signe.

Donc, si $z''z_p - z'^2 = 0$ ou < 0 , il n'y aura ni maximum ni minimum, à moins que les fonctions tierces ne disparaissent aussi, auquel cas le jugement dépendra des fonctions quaternes, et ainsi de suite.

Il ne suffit donc pas, pour l'existence du maximum ou minimum, que l'on ait $z' < 0$ et $z_p < 0$ ou $z' > 0$ et $z_p > 0$, comme on pourrait le conclure du Chapitre XI de la seconde Partie du *Calcul différentiel* d'Euler.

52. Il est facile d'appliquer la méthode précédente aux fonctions de trois variables. Supposons que u soit fonction des variables x, y, z ; regardant d'abord x et y comme constantes et z seul comme variable, on aura, suivant la notation déjà adoptée (n° 92, 1^{re} Partie),

$$u = 0$$

pour la condition du maximum ou minimum, et ensuite ${}_p u < 0$ pour le maximum et ${}_p u > 0$ pour le minimum. L'équation $u = 0$ donnera la valeur de z en x et y , qu'on substituera ou qu'on supposera substituée dans la fonction u , moyennant quoi cette fonction, ne contenant plus que les deux variables x et y , retombera dans le cas que nous venons de résoudre.

Pour construire des formules générales, on remarquera que, si u n'était qu'une fonction de x et y , on aurait pour le maximum et le minimum les conditions

$$u' = 0 \quad \text{et} \quad u_p = 0;$$

ensuite pour le maximum $u_p < 0$ et pour le minimum $u_p > 0$, et enfin

$$u''u_p - u'^2 > 0$$

pour les deux cas. Mais, puisque u contient de plus z , qui est elle-même une fonction de x et y , les valeurs des fonctions désignées par $u', u, u'', \dots$ ne seront pas simplement exprimées par ces quantités, mais il faudra y ajouter les termes qui doivent provenir de la quantité z , regardée comme fonction de x et y . Ainsi, en prenant les fonctions primes et secondes de u , on trouvera que la quantité u' devient $u' + u_z z'$, que la quantité u_p devient $u_p + u_z z_p$, que la quantité u'' devient $u'' + 2u'z' + u_z z'' + u_z'^2$, que la quantité u_p' devient $u_p' + 2u'z_p' + u_z z_p'' + u_z'^2$, et que la quantité u'' devient $u'' + u_z z'' + u_z'^2 + u_z z_p'' + u_z'^2$.

Donc on aura d'abord, pour le maximum ou minimum, les deux conditions

$$u' + u_z z' = 0, \quad u_p + u_z z_p = 0,$$

de sorte qu'à cause de $u = 0$ on aura ces trois équations

$$u' = 0, \quad u_p = 0, \quad u = 0,$$

c'est-à-dire les trois fonctions primes de u relatives à x, y, z , chacune égale à zéro.

Ensuite, à cause de $u = 0$, on aura

$$u_p + 2u'z_p + u_z z_p'^2 < 0$$

pour le maximum, et > 0 pour le minimum; et pour l'un et l'autre

$$(u'' + 2u'z' + u_z z'' + u_z'^2)(u_p' + 2u'z_p' + u_z z_p'' + u_z'^2) > (u' + u_z z')^2 + (u_p + u_z z_p)^2.$$

Mais, comme la valeur de z en x et y dépend de l'équation $u = 0$, on prendra ses deux équations primes suivant x et y , pour avoir les valeurs de z' et de z_p ; on aura donc

$$u' + u_z z' = 0 \quad \text{et} \quad u_p + u_z z_p = 0,$$

d'où l'on tire

$$z' = -\frac{u'}{u_z} \quad \text{et} \quad z_p = -\frac{u_p}{u_z}.$$

On substituera donc ces valeurs, et, comme on a déjà trouvé ${}_au < 0$ pour le maximum, et > 0 pour le minimum, en multipliant la première condition par ${}_au$, on aura une quantité qui devra toujours être > 0 . Donc les conditions pour le maximum ou minimum se réduiront à ces trois-ci :

$${}_au < 0 \text{ pour le maximum et } > 0 \text{ pour le minimum,}$$

$${}_auu'' - u'^2 > 0$$

et

$$({}_auu'' - u'^2)({}_auu'' - u'^2) > ({}_auu' - u'u')^2.$$

On voit, par la marche de cette méthode, comment elle peut s'étendre à un plus grand nombre de variables, et l'on en peut d'abord conclure, en général, que l'on aura les équations du maximum ou minimum d'une fonction quelconque de plusieurs variables, en égalant à zéro les fonctions primes de cette fonction, prises relativement à chacune de ces variables, ce qui donnera autant d'équations que de variables. À l'égard des autres conditions nécessaires pour l'existence du maximum ou minimum, on les trouvera successivement par les principes et les formules que nous venons d'exposer.

53. Pour donner un exemple de la méthode *de maximis et minimis*, supposons qu'on demande la plus courte distance entre deux lignes droites données de position dans l'espace. Soit pour l'une des droites l'abscisse x ; ses deux ordonnées seront de la forme $a + bx$ et $c + dx$. Soit pareillement pour l'autre droite l'abscisse y , prise sur le même axe; les deux ordonnées, rapportées aussi aux mêmes axes que celles de la première droite, seront de la forme $A + By$ et $C + Dy$. Donc le carré de la distance entre les deux points qui répondent aux abscisses x et y sera exprimé par cette formule,

$$(x - y)^2 + (a - A + bx - By)^2 + (c - C + dx - Dy)^2,$$

que nous ferons, pour plus de simplicité, égale à $2z$.

En prenant les fonctions dérivées, on aura

$$z' = (x - y) + b(a - A + bx - By) + d(c - C + dx - Dy),$$

$$z'_y = -(x - y) - B(a - A + bx - By) - D(c - C + dx - Dy),$$

$$z'' = 1 + b^2 + d^2,$$

$$z''_{yy} = 1 + B^2 + D^2,$$

$$z'_y = -1 - bB - dD.$$

Donc : 1° On aura, pour la détermination des deux inconnues x et y , les équations

$$x - y + b(a - A + bx - By) + d(c - C + dx - Dy) = 0,$$

$$x - y + B(a - A + bx - By) + D(c - C + dx - Dy) = 0.$$

2° Puisque la valeur de z'' est nécessairement positive, il ne pourra y avoir que le minimum, mais il faudra de plus que l'on ait la condition

$$z''z''_{yy} - z'^2_{yy} > 0,$$

savoir

$$(1 + b^2 + d^2)(1 + B^2 + D^2) - (1 + bB + dD)^2 > 0.$$

Or c'est ce qui a lieu quelles que soient les valeurs de b, d, B, D , car la condition précédente peut se mettre sous cette forme :

$$(b - B)^2 + (d - D)^2 + (bD - dB)^2 > 0.$$

Comme les équations en x et y sont linéaires, la détermination de ces quantités n'a aucune difficulté; nous ne nous y arrêtons pas, d'autant que ce problème est susceptible d'une solution géométrique fort élégante.

54. On peut encore, dans la recherche des maxima et minima des fonctions de plusieurs indéterminées, considérer toutes les variables à la fois, ce qui est plus direct et plus lumineux. Soit, en effet,

$$f(x, y, z, u, \dots)$$

la fonction proposée; si l'on suppose que les quantités $x, y, z, u, \dots$

aient déjà les valeurs convenables pour le maximum ou minimum, il faudra que, en substituant $x+p, y+q, z+r, u+s, \dots$ à la place de $x, y, z, u, \dots$ dans la fonction dont il s'agit, sa valeur devienne toujours plus petite dans le cas du maximum et toujours plus grande dans le cas du minimum, quelles que soient les valeurs de $p, q, r, s, \dots$ et quelque petites qu'elles soient : c'est ce qui résulte de la nature même du maximum ou minimum.

Développons la fonction

$$f(x+p, y+q, z+r, u+s, \dots)$$

suivant les puissances et les produits des quantités $p, q, r, s, \dots$ par les formules du théorème général (n° 78, 1^{re} Partie), et arrêtons-nous aux premiers termes de ce développement.

Si l'on désigne simplement (ainsi que nous l'avons pratiqué jusqu'ici) par $f'(x), f'(y), f'(z), f'(u), \dots$ les fonctions primes de la fonction $f(x, y, z, u, \dots)$, prises relativement à $x, y, z, u, \dots$ considérées séparément, et qu'on désigne de plus par $f''(x), f''(x, y), f''(y), f''(x, z), f''(y, z), f''(z), \dots$ les fonctions secondes de la fonction

$$f(x+\lambda p, y+\lambda q, z+\lambda r, u+\lambda s, \dots),$$

prises relativement à x seul, à x et y , à y seul, à x et z , à y et z , et ainsi de suite, on aura

$$\begin{aligned} f(x+p, y+q, z+r, u+s, \dots) \\ = f(x, y, z, u, \dots) + p f'(x) + q f'(y) + r f'(z) + s f'(u) + \dots \\ + \frac{1}{2} p^2 f''(x) + p q f''(x, y) + \frac{1}{2} q^2 f''(y) + p r f''(x, z) + \frac{1}{2} r^2 f''(z) + q r f''(y, z) + \dots \end{aligned}$$

Le coefficient λ désigne un nombre indéterminé compris entre 0 et 1, et qui sera le même dans la même fonction, mais pourra être différent dans les différentes fonctions.

Donc il faudra que la quantité

$$\begin{aligned} p f'(x) + q f'(y) + r f'(z) + s f'(u) + \dots \\ + \frac{1}{2} p^2 f''(x) + p q f''(x, y) + \frac{1}{2} q^2 f''(y) + \dots \end{aligned}$$

soit toujours positive pour le minimum et négative pour le maximum, en donnant à $p, q, r, \dots$ des valeurs quelconques aussi petites qu'on voudra. D'où l'on conclura d'abord, par un raisonnement analogue à celui du n° 25, que cette condition ne pourra être remplie, à moins que les termes multipliés par les premières puissances de $p, q, r, \dots$ ne soient nuls chacun en particulier, ce qui donnera les équations

$$f'(x) = 0, f'(y) = 0, f'(z) = 0, f'(u) = 0, \dots,$$

qui sont communes au maximum et au minimum, et qui, étant en même nombre que les indéterminées $x, y, z, u, \dots$ serviront à déterminer leurs valeurs.

55. Mais, pour que ces valeurs donnent, en effet, un maximum ou un minimum, il faudra encore que la quantité restante

$$\frac{1}{2} p^2 f''(x) + p q f''(x, y) + \frac{1}{2} q^2 f''(y) + p r f''(x, z) + q r f''(y, z) + \frac{1}{2} r^2 f''(z) + \dots$$

soit toujours positive pour le minimum et négative pour le maximum, quelles que soient les valeurs de $p, q, r, \dots$ et quelque petites qu'elles puissent être.

Comme les fonctions $f''(x), f''(x, y), \dots$ qui multiplient les carrés et les produits des quantités $p, q, r, \dots$ renferment elles-mêmes ces quantités, il pourrait être difficile, et peut-être impossible, de déterminer les caractères nécessaires pour que la condition dont il s'agit ait lieu rigoureusement; mais j'observe que, si l'on suppose $\lambda = 0$, ces fonctions deviennent indépendantes de $p, q, r, \dots$ et ont des valeurs déterminées, et l'on trouve alors, comme on le verra dans un moment, des conditions entre ces mêmes fonctions qui ne consistent que dans des inégalités entre des quantités composées de ces fonctions. Ces inégalités, étant supposées avoir lieu pour des valeurs déterminées de $x, y, z, \dots$ auront lieu encore pour les valeurs peu différentes $x+\lambda p, y+\lambda q, z+\lambda r, \dots$ tant que les quantités $\lambda p, \lambda q, \lambda r, \dots$ ne passeront pas certaines limites, qui pourront être aussi peu étendues qu'on voudra. Donc, puisque la condition exigée pour le maximum ou minimum

n'a besoin d'être remplie que pour des valeurs quelconques de $p, q, r, \dots$ aussi petites qu'on voudra, il s'ensuit qu'il suffira de satisfaire à cette condition dans le cas de $\lambda = 0$; par conséquent, on pourra supposer tout de suite $\lambda = 0$, ce qui réduira les fonctions $f''(x), f''(x, y), f''(y), \dots$ qui entrent dans la quantité ci-dessus $\frac{1}{2}p^2 f''(x) + pq f''(x, y) + \dots$ à n'être que les fonctions secondes de la fonction donnée $f(x, y, z, u, \dots)$, prises relativement à x seul, à x et y , etc.

56. Tout se réduit donc à trouver les conditions pour qu'une quantité de la forme

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2 + Dpr + Eqr + Fr^2 + \dots$$

dans laquelle $A, B, C, \dots$ sont des quantités données et $p, q, r, \dots$ dénotent des quantités indéterminées, soit toujours nécessairement positive ou négative, quelles que soient les valeurs de $p, q, r, \dots$

Supposons qu'elle doive être toujours positive; il est évident que, pour le cas contraire, il suffira de prendre négativement les coefficients $A, B, C, \dots$. Puisque cette quantité ne doit jamais devenir négative, il s'ensuit qu'elle doit avoir un minimum positif; et, réciproquement, si elle n'a que des minima positifs, elle ne pourra jamais devenir négative. Il n'y a donc qu'à chercher les conditions nécessaires pour que la quantité dont il s'agit ait des minima tous positifs.

Suivant l'esprit de la méthode exposée ci-dessus (n° 52), on prendra les fonctions primes et secondes de la quantité proposée relativement à une seule variable, comme p , et l'on supposera la fonction prime égale à zéro et la fonction seconde positive. On aura ainsi l'équation

$$2Ap + Bq + Dr + \dots = 0$$

et la condition $A > 0$.

On substituera la valeur de p tirée de l'équation précédente dans la quantité proposée, laquelle deviendra ainsi de la forme

$$Lq^2 + Mqr + Nr^2 + Pqs + \dots,$$

en faisant

$$L = C - \frac{B^2}{4A}, \quad M = E - \frac{BD}{2A}, \quad N = F - \frac{D^2}{4A}, \quad \dots$$

On prendra de la même manière les fonctions primes et secondes de cette transformée relativement à une seule variable q , et, faisant la fonction prime égale à zéro et la fonction seconde positive, on aura de nouveau l'équation

$$2Lq + Mr + Ps + \dots = 0$$

et la condition $L > 0$.

On substituera pareillement dans la transformée précédente la valeur de q tirée de cette équation; on aura la nouvelle transformée

$$Tr^2 + Vs + \dots = 0,$$

dans laquelle les coefficients $T, V, X, \dots$ seront donnés en $L, M, N, \dots$ comme ceux-ci le sont en $A, B, C, \dots$, et, continuant le même procédé, on aura l'équation

$$2Tr + Vs + \dots = 0$$

et la condition $T > 0$; et ainsi de suite.

Maintenant il est aisé de voir que la dernière de ces transformées, celle qui ne contiendra plus qu'une seule des indéterminées $p, q, r, \dots$ et qui sera par conséquent de la forme Zs^2 , sera elle-même le minimum de la quantité proposée, d'où il s'ensuit que les conditions pour que cette quantité ait un minimum positif seront

$$A > 0, \quad L > 0, \quad T > 0, \quad \dots, \quad Z > 0,$$

et, comme les équations qui déterminent les valeurs de $p, q, r, \dots$ sont toutes linéaires, on en conclura que ce minimum sera le seul qui puisse avoir lieu. Ainsi, le problème est résolu rigoureusement.

Au reste, il est facile de voir que par ces différentes transformations la quantité proposée deviendra de la forme

$$A\left(p + \frac{Bq + Dr + \dots}{2A}\right)^2 + L\left(q + \frac{Mr + Ps + \dots}{2L}\right)^2 + T\left(r + \frac{Vs + \dots}{2T}\right)^2 + \dots,$$

laquelle sera évidemment toujours positive ou négative, suivant que les coefficients $A, L, T, \dots$ le seront tous à la fois, et l'on voit en même temps par cette forme que les quantités $A, L, T, \dots$ pourront être nulles, pourvu qu'elles ne le soient pas toutes à la fois.

Les conditions que nous venons de trouver deviendront donc celles du maximum ou minimum de la fonction $f(x, y, z, u, \dots)$ en faisant, pour le minimum

$$A = \frac{1}{2}f''(x), \quad B = f''(x, y), \quad C = \frac{1}{2}f''(y), \quad \dots$$

et pour le maximum

$$A = -\frac{1}{2}f''(x), \quad B = -f''(x, y), \quad C = -\frac{1}{2}f''(y), \quad \dots$$

Il est facile de voir l'accord de ces résultats avec ceux du n° 52; mais la méthode précédente a l'avantage de fournir un moyen simple d'étendre ces résultats à un nombre quelconque de variables.

57. Les principes exposés jusqu'ici sur la théorie de *maximis et minimis* conduisent à cette conclusion générale : Si, dans une fonction quelconque des variables $x, y, z, \dots$, on substitue à la place de ces variables les quantités $x+p, y+q, z+r, \dots$ et qu'on développe la fonction suivant les puissances et les produits des quantités $p, q, r, \dots$, les termes où ces quantités ne se trouveront qu'à la première dimension, étant égalés chacun séparément à zéro, donneront les équations nécessaires pour que la fonction proposée devienne un maximum ou minimum; ensuite on considérera la quantité composée de tous les termes où $p, q, r, \dots$ formeront deux dimensions, et il faudra pour le minimum que cette quantité soit toujours positive, et pour le maximum toujours négative, quelles que puissent être les valeurs de $p, q, r, \dots$.

Si tous ces termes s'évanouissaient à la fois, il faudrait alors, pour l'existence du maximum ou minimum, que tous les termes où $p, q, r, \dots$ formeraient trois dimensions disparaissent aussi à la fois, et que la quantité composée des termes où $p, q, r, \dots$ formeraient quatre dimensions fût toujours positive pour le minimum et toujours négative pour le maximum, $p, q, r, \dots$ ayant des valeurs quelconques; et ainsi de suite : ce qui répond, comme l'on voit, au théorème du n° 25.

Nous avons donné ci-dessus un moyen simple pour trouver les conditions qui rendent une quantité de la forme

$$Ap^2 + Bpq + \dots$$

toujours positive ou négative. On pourrait, de la même manière, chercher celles qui rendraient toujours positives ou négatives des quantités de la forme

$$Ap^3 + Bp^2q + \dots;$$

mais l'application de la méthode générale à ce cas serait sujette à des difficultés de calcul qui pourraient la rendre impraticable, et c'est là un problème d'Algèbre dont il serait à désirer qu'on pût avoir une solution complète.

58. Nous avons supposé jusqu'ici que les variables qui entrent dans la fonction sont indépendantes les unes des autres; mais, s'il y avait entre elles une ou plusieurs équations, il faudrait commencer par éliminer, au moyen de ces équations, autant de variables dans la fonction proposée; on chercherait ensuite la condition du maximum ou minimum par rapport aux variables qui seraient restées dans la fonction. C'est la méthode qui se présente naturellement; mais on peut la simplifier beaucoup en conservant toutes les variables et réduisant l'élimination aux seules quantités $p, q, r, \dots$.

En effet, supposons qu'on ait entre les variables $x, y, z, \dots$ l'équation de condition

$$\varphi(x, y, z, \dots) = 0;$$

comme cette équation doit avoir lieu quelles que soient les valeurs de $x, y, z, \dots$, elle aura donc lieu aussi en mettant $x+p, y+q, z+r, \dots$ à la place de $x, y, z, \dots$; par conséquent, on aura, par un développement semblable à celui du n° 78 (1^{re} Partie), l'équation

$$p\varphi'(x) + q\varphi'(y) + r\varphi'(z) + \dots + \frac{1}{2}p^2\varphi''(x) + pq\varphi''(x, y) + \frac{1}{2}q^2\varphi''(y) + \dots = 0,$$

d'où l'on pourra tirer la valeur de p en série, qu'on substituera dans le développement de la fonction qui doit être un maximum ou un minimum; ou bien on ajoutera simplement à ce développement la quantité qui forme le premier membre de l'équation précédente, multipliée par une quantité quelconque indéterminée qui pourra même être de la forme

$$a + bp + cq + dr + \dots + lp^2 + mpq + \dots,$$

les coefficients $a, b, c, \dots$ étant indéterminés, et l'on égalera à zéro tous les termes qui contiendront la quantité p , ce qui servira à déterminer les inconnues $a, b, c, \dots$.

Comme les équations du maximum ou minimum résultent de l'évanouissement des termes où les quantités $p, q, r, \dots$ ne sont qu'à la première dimension, il suffira d'égaliser à zéro chacun de ces termes, ce qui donnera sur-le-champ les équations

$$f'(x) + a\varphi'(x) = 0, \quad f'(y) + a\varphi'(y) = 0, \quad f'(z) + a\varphi'(z) = 0, \quad \dots$$

qu'on réduira ensuite à une de moins par l'élimination de l'inconnue a . À l'égard des termes où les quantités $p, q, r, \dots$ formeront deux dimensions, on déterminera, par les méthodes exposées ci-dessus, les conditions qui doivent avoir lieu entre les coefficients de ces termes, et l'on cherchera à satisfaire à ces conditions de la manière la plus générale, au moyen des quantités arbitraires $b, c, d, \dots$.

Nous ne faisons ici qu'indiquer ces procédés, dont il sera facile de faire l'application; mais on peut les réduire à ce principe général: Lorsqu'une fonction de plusieurs variables doit être un maximum ou minimum, et qu'il y a entre ces variables une ou plusieurs équations, il suffira d'ajouter à la fonction proposée les fonctions qui doivent être nulles, multipliées chacune par une quantité indéterminée, et de chercher ensuite le maximum ou minimum comme si les variables étaient indépendantes; les équations qu'on trouvera, combinées avec les équations données, serviront à déterminer toutes les inconnues.

59. On peut résoudre, par les mêmes principes, les questions où il s'agit de trouver des courbes qui jouissent, dans chacun de leurs points, de quelque propriété donnée de maximum ou minimum.

Supposons, par exemple, qu'on demande la courbe dans laquelle la quantité que nous avons nommée K dans le problème du n° 15 soit un maximum ou minimum à chaque point de la courbe. Cette quantité est exprimée par la fonction

$$[y + (m-x)y'] [y' + (n-x)y''].$$

et la question consiste à trouver la valeur de y en x qui rendra cette fonction un maximum ou minimum. Si les deux quantités y et y' étaient indépendantes l'une de l'autre, on pourrait déterminer le maximum ou minimum relativement à chacune de ces variables; mais, comme ces quantités dérivent l'une de l'autre et que leur relation demeure inconnue tant que l'une d'elles n'est pas une fonction déterminée de x , on ne peut chercher le maximum ou minimum que par rapport à l'une de ces quantités, et il est naturel de prendre pour variable la quantité y' qui détermine la position de la tangente, en regardant les coordonnées x et y comme données pour chaque point de la courbe.

On prendra donc les fonctions primes et secondes de la fonction proposée relativement à la quantité y' , regardée comme seule variable, et, égalant à zéro la fonction prime, on aura sur-le-champ l'équation

$$[y + (n-x)y'] (m-x) + [y' + (m-x)y''] (n-x) = 0,$$

laquelle donne, comme dans le numéro cité,

$$y' = \frac{(2x-m-n)y}{2(m-x)(n-x)}$$

pour l'équation de la courbe cherchée.

Ensuite on aura la fonction seconde

$$2(m-x)(n-x),$$

laquelle fait voir que le maximum aura lieu dans toute la partie de la courbe pour laquelle les deux quantités $m-x$ et $n-x$ seront de signes différents, et que le minimum aura lieu pour la partie où $m-x$ et $n-x$ seront de même signe; de sorte que le maximum aura lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites m et n , et le minimum pour les valeurs de x qui tomberont hors de ces limites.

L'équation trouvée pour la courbe étant du premier ordre, elle est susceptible d'une équation primitive avec une constante arbitraire, et, si on la met sous la forme

$$\frac{2y'}{y} = \frac{1}{x-m} + \frac{1}{x-n},$$

on en déduira sur-le-champ cette équation primitive,

$$2 \log y = \log(x-m) + \log(x-n) + \log h,$$

et, passant des logarithmes aux nombres,

$$y^2 = h(x-m)(x-n),$$

où h est une constante arbitraire. Cette équation est de la même forme que celle que nous avons trouvée dans l'endroit cité, ce qui doit être, puisqu'elles viennent l'une et l'autre de la même équation du premier ordre. En effet, l'équation trouvée ci-dessus pour le maximum ou minimum, étant multipliée par y' , a pour équation primitive

$$[y' + (m-x)y'] [y' + (n-x)y'] = K,$$

K étant une constante arbitraire, et celle-ci, combinée avec la même équation pour en éliminer y' , donnera le résultat trouvé dans le même endroit.

Donc, rapprochant cette solution de celle du n° 15, on en conclura, en général, que les sections coniques ont non-seulement la propriété, déjà trouvée, que chaque tangente coupe sur les perpendiculaires élevées aux deux extrémités de l'axe des parties dont le produit est constant, mais encore celle-ci, que la position de la tangente à chaque point de la courbe, regardé comme donné, est telle que ce même produit est un maximum pour l'ellipse et un minimum ou plutôt un maximum négatif pour l'hyperbole.

60. En général, si l'on demande la courbe dans laquelle une fonction donnée de $x, y, y', y'', \dots$ sera un maximum ou minimum, on pourra chercher le maximum ou minimum relativement à chacune des quantités $y, y', y'', \dots$ ce qui donnera autant de solutions différentes, et l'on aura toujours, généralement parlant, pour la courbe cherchée, une équation du même ordre que la fonction proposée.

Si cette fonction était une simple fonction des éléments $a, b, c, \dots$ du contact (n° 10), en cherchant le maximum ou minimum relative-

ment à la dernière des quantités $y, y', y'', \dots$, on trouverait nécessairement la même équation que l'on aurait pour le problème dans lequel on supposerait cette même fonction égale à une constante; c'est de quoi il est facile de se convaincre par l'analyse des n° 20 et 18. En effet, en égalant à zéro la fonction prime de $f(a, b, c, \dots)$, prise relativement à la plus haute des fonctions dérivées $y', y'', \dots$, on aura la même équation que si l'on prenait, en général, la fonction prime de l'équation

$$f(a, b, c, \dots) = \text{const.}$$

relativement à $x, y, y', \dots$, d'où l'on voit que ces deux genres de problèmes, quoique fort différents dans le fond, conduisent néanmoins aux mêmes résultats et sont, par conséquent, susceptibles des mêmes solutions. Ainsi, on pourra appliquer ici tout ce qui a été dit dans les endroits cités. L'exemple du numéro précédent est, comme l'on voit, un cas particulier de ces mêmes problèmes.