



MÉMOIRE

sur une

QUESTION CONCERNANT LES ANNUITÉS.



MÉMOIRE

DE

QUESTION CONCERNANT LES ANNUITÉS.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, années 1792 et 1793.)

Ce Mémoire a été lu à l'Académie il y a plus de dix ans. Comme il n'a pas été imprimé dans le temps, j'ai cru pouvoir le lui présenter de nouveau, à cause de l'utilité dont les formules et les Tables qu'il contient peuvent être dans différentes occasions.

1. Voici l'objet de la question :

On demande la valeur présente d'une annuité constituée sur une ou plusieurs têtes dont les âges sont donnés, à condition qu'elle ne commence à courir qu'après la mort d'une autre personne d'un âge donné, et qu'elle cesse aussitôt que toutes les personnes, sur lesquelles l'annuité est constituée, auront passé un âge donné.

Pour se faire une idée plus nette de l'état de la question, on n'a qu'à supposer qu'un père veuille assurer à ses enfants une rente annuelle payable seulement après sa mort, et jusqu'à ce que le plus jeune ait atteint un âge donné, par exemple celui de la majorité; il s'agit de déter-

miner la somme qu'il devrait payer pour acheter une telle rente, l'âge du père, le nombre et les âges des enfants étant donnés.

2. On pourrait supposer aussi qu'au lieu de payer d'abord une certaine somme le père s'engageât à payer annuellement, mais seulement pendant sa vie et la minorité de tous ses enfants, une somme donnée pour leur assurer après sa mort une annuité qui ne durerait que jusqu'à la majorité de tous les enfants.

La question présentée de cette manière est un peu plus difficile, parce qu'il y a deux annuités à estimer : l'une constituée conjointement sur les têtes du père et des enfants mineurs, et l'autre constituée seulement sur les têtes des enfants et sur leur minorité, mais qui ne doit commencer qu'après la mort du père; il est clair que l'état de la question exige que la valeur absolue ou présente de chacune de ces deux annuités soit égale, pour qu'on puisse échanger au pair l'une contre l'autre.

3. Quoique les principes nécessaires pour résoudre ces sortes de questions soient connus, l'application en est néanmoins d'autant plus difficile que les questions sont plus compliquées; et celle que nous venons de proposer l'est assez pour que cette application ne se présente pas facilement. Comme la solution de cette question pourrait être utile dans quelques occasions, j'ai cru qu'on verrait avec plaisir la méthode que j'ai imaginée pour y parvenir, et qui réduit la difficulté au calcul des annuités ordinaires et constituées sur une ou plusieurs têtes. Je donnerai d'ailleurs des applications particulières de cette méthode, et je présenterai des Tables qui serviront à résoudre, avec une exactitude suffisante, la plupart des cas qu'on pourrait proposer.

4. Je remarque d'abord qu'on peut simplifier beaucoup la question dont il s'agit par la considération suivante.

Soit x l'annuité que le père doit payer, et dont on cherche la valeur, et a l'annuité qu'il veut assurer aux enfants après sa mort; il est clair qu'on peut supposer, sans rien changer à l'état de la question, que l'annuité x soit augmentée de a , en sorte que l'annuité à payer par le père

soit $x + a$, et que l'annuité due aux enfants commence en même temps; car de cette manière ce que le père paye de trop est immédiatement rendu aux enfants; mais, en envisageant la question ainsi, on a l'avantage que les deux annuités commencent à la même époque et sont semblables, excepté que l'annuité $a + x$ dépend de la vie du père, et que l'annuité a n'en dépend point.

5. Dénotons, en général, par M la valeur présente d'une annuité d'une unité (par exemple d'un écu, ou de cent écus, etc.) constituée uniquement sur la minorité des enfants, c'est-à-dire payable tant qu'il y a des enfants mineurs; et dénotons par N la valeur présente d'une annuité égale, mais constituée conjointement sur la tête du père et sur la minorité des enfants, c'est-à-dire payable seulement tant que le père vit et qu'il a des enfants mineurs. La valeur absolue de l'annuité $a + x$ que le père est supposé payer sera donc $(a + x)N$, et la valeur de l'annuité a que les enfants reçoivent sera aM .

Donc, pour que ces deux valeurs soient égales, il faudra que l'on ait l'équation

$$(a + x)N = aM,$$

laquelle donne

$$x = \frac{a(M - N)}{N};$$

c'est l'annuité réelle que le père doit payer. Et toute la difficulté se réduira à déterminer les deux quantités M et N .

6. Pour ramener cette question aux notions ordinaires et rendre ce que je vais dire plus simple et plus intelligible, j'appellerai le père P , et les différents enfants mineurs $A, B, C, \dots$

Ensuite je désignerai par $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \dots$ la valeur d'une annuité d'une unité constituée uniquement sur la minorité de l'enfant A , ou B , ou $C, \dots$; je désignerai de plus par AB la valeur d'une pareille annuité, mais constituée conjointement sur la minorité des deux enfants A et B , c'est-à-dire payable tant qu'ils sont tous les deux mineurs; je désignerai de

même par $\overline{ABC}$ la valeur d'une égale annuité, mais constituée sur la minorité des enfants A, B, C, c'est-à-dire payable tant qu'ils seront tous les trois en vie et en minorité; et ainsi du reste.

Enfin je dénoterai de même par $\overline{AP}$ la valeur d'une annuité constituée sur la minorité de l'enfant A et sur la vie du père P, c'est-à-dire payable pendant que l'enfant est mineur et que le père est en vie; par $\overline{ABP}$ je dénoterai pareillement la valeur d'une annuité constituée sur la minorité des enfants A et B, et sur la tête du père, c'est-à-dire payable pendant que les enfants A et B seront mineurs à la fois et que le père sera vivant; et ainsi de suite.

7. Cela posé et bien entendu, je vais parcourir successivement les cas d'un enfant A, de deux enfants A et B, ..., et je déterminerai pour chaque cas les valeurs des quantités M et N par le moyen des quantités $\overline{A}$, $\overline{AP}$, $\overline{B}$, $\overline{AB}$, $\overline{BP}$, ..., dont la signification est maintenant connue, et dont la détermination peut se tirer des Tables des annuités.

Et d'abord, s'il n'y a qu'un seul enfant A, il est clair que la valeur de M est égale à $\overline{A}$, et que celle de N est égale à $\overline{AP}$. On a donc dans ce cas

$$M = \overline{A}, \quad N = \overline{AP}.$$

8. En second lieu, s'il y a deux enfants A et B, alors la valeur de M doit être celle d'une annuité constituée sur la plus longue des minorités de ces deux enfants, et la valeur de N doit être celle d'une annuité constituée sur la plus longue minorité des enfants et en même temps sur la tête du père. Je suppose que la minorité de A soit la plus courte, soit parce que A meure ou qu'il atteigne l'âge de majorité avant B. Il est clair que la valeur de l'annuité M devra être égale à $\overline{A}$, plus à la valeur d'une annuité constituée sur la minorité de B, mais payable seulement à la majorité de A. Il s'agit donc de trouver la valeur de cette dernière annuité. Je l'appelle X, et je considère que si j'y ajoute la valeur d'une annuité constituée sur la minorité des deux enfants A et B, valeur que j'ai désignée par $\overline{AB}$, j'aurai alors la valeur d'une annuité payable pen-

dant la minorité commune des enfants A et B, et ensuite après l'extinction de la minorité de A, continuée jusqu'à la majorité de B; ce qui est évidemment la même chose qu'une annuité constituée sur la seule minorité de B, dont la valeur a été désignée par $\overline{B}$. J'aurai donc

$$X + \overline{AB} = \overline{B},$$

et de là

$$X = \overline{B} - \overline{AB};$$

donc, puisque

$$M = \overline{A} + X,$$

j'aurai

$$M = \overline{A} + \overline{B} - \overline{AB}.$$

J'ai supposé que la minorité de A était la première à s'éteindre; mais, si l'on supposait que ce fût celle de B, on parviendrait au même résultat.

9. Reste maintenant à trouver la valeur de N. Pour cela, il faut faire un raisonnement semblable au précédent, mais en combinant la vie du père avec la minorité des enfants.

Je considère donc que la valeur de N est celle d'une annuité constituée sur la tête du père et sur la plus longue des minorités des deux enfants A et B; et, supposant que la minorité de B soit plus longue que celle de A, j'en conclus que la valeur de N doit être égale à la valeur d'une annuité constituée sur la tête du père et sur la minorité de l'enfant A, valeur qu'on a dénotée par $\overline{AP}$, plus à la valeur d'une annuité constituée sur la tête du père et sur la minorité de l'enfant B, mais qui ne commence qu'après la minorité de A. Nommant cette dernière valeur X, j'observe que si j'y ajoute la valeur d'une annuité constituée sur la tête du père et sur la minorité commune des enfants A et B, valeur que nous avons dénotée par $\overline{ABP}$, j'aurai la valeur d'une annuité payable pendant la vie du père et la minorité totale de l'enfant B, c'est-à-dire d'une annuité constituée sur la tête du père et sur la minorité de l'enfant B, valeur exprimée suivant nos dénominations par $\overline{BP}$. Donc

$$X + \overline{ABP} = \overline{BP},$$

et de là

$$X = \overline{BP} - \overline{ABP}.$$

Donc, puisque

$$N = \overline{AP} + X,$$

on aura enfin

$$N = \overline{AP} + \overline{BP} - \overline{ABP}.$$

Et l'on trouverait la même expression, si l'on supposait que la minorité de l'enfant B s'éteignit avant celle de l'enfant A.

10. En troisième lieu, s'il y a trois enfants A, B, C, on trouvera, par des raisonnements analogues que je supprimerai pour n'être pas trop long,

$$M = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} - \overline{AB} - \overline{AC} - \overline{BC} + \overline{ABC},$$

et de même

$$N = \overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} - \overline{ABP} - \overline{ACP} - \overline{BCP} + \overline{ABCP};$$

et ainsi de suite s'il y avait un plus grand nombre d'enfants.

11. De là je conclus, en général, que, quel que soit le nombre des enfants mineurs, la valeur de M est toujours égale à la somme des valeurs des annuités constituées sur la minorité de chaque enfant en particulier, moins la somme des valeurs des annuités constituées sur la minorité commune de chaque couple d'enfants pris deux à deux de toutes les manières possibles, plus la somme des valeurs des annuités constituées sur la minorité commune de chaque trio d'enfants pris trois à trois de toutes les manières possibles, moins, etc.

Et la valeur de N sera pareillement égale à la somme des valeurs des annuités constituées sur la vie du père et sur la minorité de chaque enfant en particulier, moins la somme des valeurs des annuités constituées sur la vie du père et sur la minorité commune de chaque couple d'enfants pris deux à deux de toutes les manières possibles, plus la somme des valeurs des annuités constituées sur la vie du père et sur la minorité commune de chaque trio d'enfants pris trois à trois de toutes les manières possibles, moins, etc.

12. La question est donc réduite maintenant à trouver les valeurs de ces différentes annuités; c'est à quoi on peut parvenir par les règles connues pour l'évaluation des rentes viagères. J'observerai seulement qu'entre une annuité ordinaire constituée sur la vie d'une ou de plusieurs personnes et la même annuité constituée sur la vie de quelques-unes de ces personnes et sur la minorité des autres, il n'y a d'autre différence, si ce n'est que la première doit être censée continuée jusqu'au dernier terme de la vie, et que la seconde ne doit être continuée que jusqu'au temps où le plus âgé des mineurs deviendrait majeur; parce qu'alors cette personne, devenue majeure, est, par rapport à l'annuité, dans le même cas que si elle mourait tout à coup dès qu'elle atteint l'âge de majorité.

Voici les formules générales pour le calcul des annuités.

13. Je désigne par (1), (2), (3),... les nombres des personnes nées en même temps et qui ont atteint l'âge d'un an, de deux ans, de trois ans,.... Ces nombres sont donnés par les Tables connues de mortalité, et varient suivant ces différentes Tables. Suivant la Table de feu Süssmilch, donnée dans la première édition de son Ouvrage, on a

$$(0) = 1000, \quad (1) = 740, \quad (2) = 660, \quad (3) = 620, \dots$$

Ainsi ces nombres sont supposés connus.

Je suppose, de plus, que l'intérêt de l'argent soit de m pour 100, et je fais, pour abrégé,

$$1 + \frac{m}{100} = r.$$

Cela posé, la valeur présente d'une annuité à vie, constituée sur une personne de l'âge a , et payable au commencement de chaque année, est, y compris la première année, de

$$\frac{(a) + \frac{(a+1)}{r} + \frac{(a+2)}{r^2} + \frac{(a+3)}{r^3} + \dots}{(a)}.$$

La valeur présente d'une annuité à vie, constituée sur deux personnes

dont les âges sont a et b , est, y compris la première année, de

$$\frac{(a)(b) + \frac{(a+1)(b+1)}{r} + \frac{(a+2)(b+2)}{r^2} + \frac{(a+3)(b+3)}{r^3} + \dots}{(a)(b)}$$

La valeur présente d'une annuité à vie, constituée sur trois personnes dont les âges sont a , b , c , est, y compris toujours la première année, de

$$\frac{(a)(b)(c) + \frac{(a+1)(b+1)(c+1)}{r} + \frac{(a+2)(b+2)(c+2)}{r^2} + \dots}{(a)(b)(c)};$$

et ainsi de suite.

Et, si l'on veut que ces annuités dépendent de la minorité de quelques-unes des personnes sur lesquelles elles sont constituées, alors si a est l'âge du mineur le plus âgé, il ne faudra prendre qu'autant de termes de la série qu'il y a d'unités dans $26 - a$, en supposant que la minorité cesse à 25 ans; en sorte qu'il faudra s'arrêter au terme qui aura r^{25-a} au dénominateur.

14. L'application de ces formules n'a plus, comme on voit, d'autre difficulté que la longueur du calcul, mais on peut l'abréger en considérant que, comme les Tables de mortalité ne sont pas rigoureusement exactes et qu'elles n'ont même été construites que par des milieux pris entre différentes années, il suffira de prendre les années de quatre en quatre, ou de cinq en cinq, et de supposer que les termes intermédiaires dans les formules soient en progression arithmétique.

Or, si l'on a la série

$$a, b, c, d, e, \dots, u,$$

et qu'entre les termes consécutifs de cette série il faille placer m autres termes qui soient en progression arithmétique avec les termes donnés, en dénotant par $a', a'', \dots$ les termes entre a et b , par $b', b'', \dots$ les termes entre b et c , et ainsi de suite, il est clair qu'on aura, par la propriété

connue des progressions arithmétiques,

$$a + a' + a'' + \dots + b = (a + b) \frac{m+2}{2},$$

$$b + b' + b'' + \dots + c = (b + c) \frac{m+2}{2},$$

$$c + c' + c'' + \dots + d = (c + d) \frac{m+2}{2},$$

$$\dots \dots \dots;$$

done, ajoutant,

$$a + a' + a'' + \dots + 2b + b' + b'' + \dots + 2c + c' + c'' + \dots + 2d + \dots + u \\ = (a + 2b + 2c + 2d + \dots + u) \frac{m+2}{2};$$

et par conséquent la somme entière de la série

$$a + a' + a'' + \dots + b + b' + b'' + \dots + c + c' + \dots + u$$

sera

$$(a + 2b + 2c + \dots + u) \frac{m+2}{2} - b - c - d - \dots \\ = (a + b + c + \dots + u) \frac{m+2}{2} + (b + c + d + \dots) \frac{m}{2} \\ = (a + b + c + \dots + u)(m+1) - (a + u) \frac{m}{2}.$$

D'où il s'ensuit que, pour avoir la somme de la série interpolée, il n'y aura qu'à multiplier la somme de la série primitive par $m+1$, et en retrancher la somme des deux termes extrêmes multipliée par $\frac{m}{2}$.

Si l'on ne prend les années que de quatre en quatre, on aura alors $m=3$, et il faudra quadrupler la somme de la série et en retrancher les $\frac{3}{2}$ de la somme des termes extrêmes.

15. J'ai calculé de cette manière deux Tables pour le cas d'un seul enfant mineur, et en prenant successivement pour l'âge de l'enfant 1, 5, 9, 13, 17, 21 ans, et pour l'âge du père 30, 34, 38, 42, ... jusqu'à 90 ans; mais dans l'une de ces Tables j'ai tenu compte de la mortalité de l'en-

fant conformément à l'état de la question; dans l'autre, au contraire, j'en ai fait abstraction, c'est-à-dire que j'ai supposé que l'enfant parviendrait sûrement à l'âge de la majorité. Voici la raison qui m'a engagé à calculer cette seconde Table conjointement à la première.

16. Il est visible, en général, que plus le nombre des têtes sur lesquelles une annuité quelconque est constituée est grand, plus aussi doit être grande la valeur présente de cette annuité, c'est-à-dire ce qu'il faudrait payer pour l'acheter, parce que le risque de la perdre par la mort de toutes les personnes sur lesquelles elle est constituée en est d'autant moindre. Mais, d'un côté, quelque grand que soit le nombre de ces personnes, la valeur de l'annuité sera toujours moindre que si l'on n'avait point d'égard à leur mortalité, et qu'on supposât que la plus jeune atteignit sûrement un âge donné.

De là il s'ensuit que, si une annuité est constituée sur plusieurs personnes, sa valeur, quelle qu'elle soit, sera toujours nécessairement renfermée entre ces deux limites, dont l'une sera la valeur de la même annuité constituée seulement sur la plus jeune de ces personnes, en ayant égard à sa mortalité, et l'autre sera la valeur de l'annuité, constituée de même sur cette personne, mais en n'ayant aucun égard à sa mortalité.

Et, s'il arrive que ces deux limites soient peu différentes entre elles, alors on sera assuré que la valeur de l'annuité est à peu près la même, quel que soit le nombre des têtes sur lesquelles elle est constituée.

17. On doit donc regarder les deux Tables dont nous venons de parler comme les limites de toutes les Tables pareilles qu'on pourrait construire pour les cas de deux, de trois,.... ou d'un nombre quelconque d'enfants mineurs.

Dans ces Tables nous avons pris pour base la Table de mortalité qui se trouve dans la nouvelle édition de l'Ouvrage de Süssmilch (tome III. Table XXII, n° 4), et qui a été dressée particulièrement pour ce pays; suivant cette Table, on a

$$(0) = 1000, \quad (1) = 759, \quad (5) = 603, \quad (9) = 552, \dots$$

A l'égard de l'intérêt de l'argent, nous l'avons supposé à 4 pour 100, ce qui donne

$$m = 4, \quad r = \frac{104}{100} = \frac{26}{25}.$$

Ces Tables donnent immédiatement la somme annuelle ou l'annuité que le père devrait payer pendant sa vie et la minorité de son enfant, pour lui assurer après sa mort une annuité d'une unité qui ne durerait que jusqu'à ce qu'il eût atteint sa vingt-cinquième année. Dans la première Table on a fait abstraction de la mortalité de l'enfant, et l'on voit que les nombres sont tous un peu plus grands que dans la seconde, où l'on a tenu compte de cette mortalité, mais on voit en même temps que les différences des nombres correspondants dans les deux Tables sont en général fort petites. De sorte que, lorsqu'il y aura plusieurs enfants, on ne se trompera pas beaucoup en prenant le milieu entre les nombres donnés par ces deux Tables et relatifs à l'âge du père et à celui du plus jeune des enfants. Mais on pourrait peut-être dans ce cas approcher davantage de l'exactitude par la formule suivante :

Soit $1+n$ le nombre des enfants, A et B les nombres donnés par la première et par la seconde Table, pour le cas du plus jeune de ces enfants, on prendra, pour l'annuité que le père doit payer, la quantité $\frac{nA+B}{n+1}$; cette formule devient égale à B lorsque $n=0$, et égale à A lorsque $n=\infty$, ce qui doit être.

TABLE I.
EN FAISANT ABSTRACTION DE LA MORTALITÉ DE L'ENFANT.

	AGE du père.	AGE DE L'ENFANT.					
		1	5	9	13	17	21
1	30	0,1699	0,1399	0,1108	0,0815	0,0527	0,0251
2	34	1957	1597	1261	9910	6617	0300
3	38	2253	1808	1403	1033	6681	0332
4	42	2674	2114	1601	1141	0736	0358
5	46	3327	2616	1958	1361	0840	0389
6	50	4358	3446	2590	1805	1105	0501
7	54	5705	4555	3754	2412	1489	0676
8	58	7360	5945	4522	3171	1962	0903
9	62	9389	8002	5830	4091	2498	1122
10	66	1,1777	9760	7604	5417	3331	1510
11	70	4505	1,2187	9622	6908	4334	1950
12	74	6987	4342	1,1473	8346	5219	2337
13	78	9516	6499	3213	9788	6150	2728
14	82	2,1946	8681	4871	1,0913	7090	3166
15	86	3560	2,0131	6128	1445	7045	3350
16	90	5770	2113	7848	2856	7018	2261

TABLE II.
EN TENANT COMPTE DE LA MORTALITÉ DE L'ENFANT.

	AGE du père.	AGE DE L'ENFANT.					
		1	5	9	13	17	21
1	30	0,1513	0,1324	0,1069	0,0792	0,0514	0,0246
2	34	1740	1511	1220	0914	0602	0293
3	38	1994	1707	1354	0979	0665	0325
4	42	2353	1989	1543	1111	0718	0350
5	46	2906	2455	1881	1320	0820	0381
6	50	3783	3225	2488	1748	1076	0492
7	54	4917	4251	3298	2335	1449	0660
8	58	6286	5531	4229	3066	1910	0882
9	62	7851	7035	5568	3952	2429	1095
10	66	9844	9009	7251	5220	3236	1446
11	70	1,1991	1,1206	9161	6686	4206	1899
12	74	3898	3145	1,0905	8022	5059	2273
13	78	5794	5066	2551	9393	5956	2653
14	82	7654	6983	4101	1,0481	6861	3076
15	86	8719	8214	5214	0957	6802	3262
16	90	2,0001	9838	6761	2195	6732	2200

MÉMOIRE

SUR

L'EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL

DES SÉRIES RÉCURRENTES,

LORSQUE L'ÉQUATION GÉNÉRATRICE A DES RACINES ÉGALES.



MÉMOIRE

SUR

L'EXPRESSION DU TERME GÉNÉRAL

DES SÉRIES RÉCURRENTES,

LORSQUE L'ÉQUATION GÉNÉRATRICE A DES RACINES ÉGALES (*).

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, années 1792 et 1793.)

J'ai donné, dans les *Mémoires* de 1775 (**), une méthode et des formules très-simples pour avoir le terme général d'une suite récurrente, dont on connaît les premiers termes. Mais ces formules ont, comme toutes celles qui sont des fonctions des différentes racines d'une même équation, l'inconvénient de ne pouvoir servir que lorsque toutes les racines sont inégales. Le cas de l'égalité de deux ou plusieurs racines demande des réductions et des transformations fondées sur ce principe du Calcul différentiel que des quantités égales peuvent être supposées différer entre elles de quantités infiniment petites; mais l'application de ce principe aux formules dont il s'agit exige des attentions particulières, et

(*) Ce Mémoire et les quatre suivants, les derniers que Lagrange ait publiés dans le *Recueil de l'Académie de Berlin*, sont compris sous le titre commun : *Recherches sur plusieurs points d'Analyse relatifs à différents endroits des Mémoires précédents*.

(Note de l'Éditeur.)

(**) *Oeuvres de Lagrange*, t. IV, p. 151.

donne lieu à des résultats nouveaux et remarquables pour leur simplicité; c'est ce qui m'a engagé à en faire la matière de ce Mémoire.

1. Je commencerai par rappeler les principales formules de l'endroit cité.

Soit la série

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \dots$$

dans laquelle on ait constamment cette équation, entre $n+1$ termes consécutifs,

$$(A) \quad Ay_n + By_{n+1} + Cy_{n+2} + \dots + Ny_{n+k} = 0,$$

A, B, C, ... étant des coefficients constants quelconques. L'expression du terme général y_x sera de cette forme

$$y_x = ax^r + b\beta^r + c\gamma^r + \dots,$$

les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ étant les différentes racines de l'équation

$$(B) \quad A + By + Cy^2 + Dy^3 + \dots + Ny^n = 0, \dots,$$

que j'appelle *équation génératrice*, et les coefficients $a, b, c, \dots$ étant de cette forme

$$a = \frac{y_{n-1} - (\beta + \gamma + \delta + \dots)y_{n-2} + (\beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \dots)y_{n-3} - \dots}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) \dots},$$

$$b = \frac{y_{n-1} - (\alpha + \gamma + \delta + \dots)y_{n-2} + (\alpha\gamma + \alpha\delta + \gamma\delta + \dots)y_{n-3} - \dots}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) \dots},$$

et ainsi de suite.

Je remarque d'abord qu'on peut donner à ces expressions une forme plus simple et plus commode pour le calcul, en observant que, si dans le produit

$$(y - \beta)(y - \gamma)(y - \delta) \dots,$$

on change après le développement les puissances

$$y^0, y^1, y^2, y^3, \dots, y^{n-1}$$

en

$$y_1, y_2, y_3, y_4, \dots, y_{n-1}$$

on aura le numérateur de l'expression de a ; que de même on aura celui de l'expression de b en faisant le même changement dans le produit

$$(y - \alpha)(y - \gamma)(y - \delta) \dots;$$

et ainsi des autres. De sorte qu'avec cette condition on pourra supposer d'abord

$$a = \frac{(y - \beta)(y - \gamma)(y - \delta) \dots}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) \dots},$$

$$b = \frac{(y - \alpha)(y - \gamma)(y - \delta) \dots}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) \dots},$$

$$c = \frac{(y - \alpha)(y - \beta)(y - \delta) \dots}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \delta) \dots},$$

2. Cela posé, soit $\beta = \alpha$, les deux premiers termes $a\alpha^x, b\beta^x$ de l'expression de y_x deviendront infinis.

Faisons, pour abrégé,

$$\frac{\alpha^x}{(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) \dots} = f(\alpha),$$

on aura

$$\frac{\beta^x}{(\beta - \gamma)(\beta - \delta) \dots} = f(\beta),$$

et les deux termes

$$a\alpha^x + b\beta^x$$

deviendront

$$\frac{(y - \beta)(y - \gamma)(y - \delta) \dots}{\alpha - \beta} f(\alpha) + \frac{(y - \alpha)(y - \gamma)(y - \delta) \dots}{\beta - \alpha} f(\beta).$$

Faisons maintenant

$$\beta = \alpha + \omega,$$

ω étant une quantité infiniment petite, on aura

$$\alpha - \beta = -\omega, \quad \beta - \alpha = \omega,$$

$$(y - \beta)(y - \gamma)(y - \delta) \dots = (y - \alpha)(y - \gamma)(y - \delta) \dots - \omega(y - \gamma)(y - \delta) \dots,$$

$$f(\beta) = f(\alpha + \omega) = f(\alpha) + \frac{df(\alpha)}{d\alpha} \omega + \dots$$

Substituant ces valeurs dans les deux termes dont il s'agit, effaçant ce qui se détruit et faisant ensuite $\omega = 0$, on aura pour résultat

$$(y-\gamma)(y-\delta)\dots f(x) + (y-\alpha)(y-\gamma)(y-\delta)\dots \frac{df(x)}{dx}.$$

C'est la valeur des deux premiers termes de l'expression de y_x . Et le troisième terme $c\gamma^x$ de la même expression deviendra alors, à cause de $\beta = \alpha$,

$$\frac{(y-\alpha)^2(y-\delta)\dots}{(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\delta)\dots} \gamma^x.$$

La valeur des autres ne sera sujette à aucune difficulté.

Si outre $\beta = \alpha$ on avait encore $\gamma = \alpha$, ce qui est le cas de trois racines égales, alors $f(x)$ deviendrait infini, ainsi que la valeur du troisième terme; les trois premiers termes seraient donc infinis, et il faudrait faire de nouveau $\gamma = \alpha + \omega$.

Soit

$$\frac{\alpha^x}{(\alpha-\delta)(\alpha-\epsilon)\dots} = f'(x),$$

on aura

$$f(x) = \frac{f'(x)}{\alpha-\gamma},$$

et, différentiant suivant α ,

$$\frac{df(x)}{d\alpha} = \frac{1}{\alpha-\gamma} \frac{df'(x)}{d\alpha} - \frac{f'(x)}{(\alpha-\gamma)^2}.$$

Donc, faisant

$$\gamma = \alpha + \omega,$$

on aura

$$f(x) = -\frac{f'(x)}{\omega}, \quad \frac{df(x)}{d\alpha} = -\frac{1}{\omega} \frac{df'(x)}{d\alpha} - \frac{f'(x)}{\omega^2}.$$

De plus

$$(y-\gamma)(y-\delta)\dots$$

deviendra

$$(y-\alpha)(y-\delta)\dots - \omega(y-\delta)\dots,$$

et

$$(y-\alpha)(y-\gamma)(y-\delta)\dots$$

deviendra

$$(y-\alpha)^2(y-\delta)\dots - \omega(y-\alpha)(y-\delta)\dots$$

Enfin le troisième terme étant représenté par

$$\frac{(y-\alpha)^2(y-\delta)\dots}{(\gamma-\alpha)^2} f'(\gamma)$$

deviendra, en mettant $\alpha + \omega$ pour γ ,

$$\frac{(y-\alpha)^2(y-\delta)\dots}{\omega^2} f'(\alpha + \omega),$$

savoir

$$\frac{(y-\alpha)^2(y-\delta)\dots}{\omega^2} \left[f'(\alpha) + \omega \frac{df'(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d^2f'(\alpha)}{d\alpha^2} + \dots \right].$$

Faisant toutes ces substitutions, effaçant ce qui se détruit et faisant ensuite $\omega = 0$, on trouvera pour la valeur des trois premiers termes de y_x la quantité

$$(y-\delta)\dots f'(x) + (y-\alpha)(y-\delta)\dots \frac{df'(x)}{d\alpha} + (y-\alpha)^2(y-\delta)\dots \frac{1}{2} \frac{d^2f'(x)}{d\alpha^2}.$$

Si l'on avait encore $\delta = \alpha$, en sorte que les quatre racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ fussent égales entre elles, on trouverait, en suivant la même marche, que les quatre premiers termes de l'expression de y_x , savoir

$$a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + d\delta^x,$$

dont chacun serait infini, pris ensemble se réduiraient à la quantité suivante

$$(y-\epsilon)\dots f''(x) + (y-\alpha)(y-\epsilon)\dots \frac{df''(x)}{d\alpha} + (y-\alpha)^2(y-\epsilon)\dots \frac{1}{2} \frac{d^2f''(x)}{d\alpha^2} \\ + (y-\alpha)^3(y-\epsilon)\dots \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3f''(x)}{d\alpha^3},$$

en faisant

$$f''(x) = \frac{x^x}{(\alpha-\epsilon)(\alpha-\zeta)\dots};$$

et ainsi de suite, la loi de la progression étant visible d'elle-même.

Pour pouvoir employer ces expressions, il faudra développer les différents produits

$$(y-\gamma)(y-\delta)\dots, (y-\alpha)(y-\gamma)(y-\delta)\dots, \\ (y-\delta)\dots, (y-\alpha)(y-\delta)\dots, (y-\alpha)^2(y-\delta)\dots,$$

et ainsi de suite enⁿ puissances de y , et changer ensuite dans ces puissances les exposants en indices, c'est-à-dire changer

$$y^0, y^1, y^2, \dots$$

en

$$y_0, y_1, y_2, \dots$$

en conservant les coefficients de ces puissances.

3. La difficulté qui résulte des racines égales est donc résolue d'une manière générale; mais les expressions qu'on vient de trouver étant données en fonction de toutes les racines $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, on peut désirer de les avoir en fonction de la seule racine α , ce qui donnera même à nos formules plus de simplicité.

Pour cela, nous remarquerons que, puisque $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sont les racines de l'équation (B), on aura

$$A + By + Cy^2 + \dots + Ny^n = N(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)\dots$$

En faisant $y = \alpha$, on aura

$$A + B\alpha + C\alpha^2 + \dots + N\alpha^n = 0;$$

retranchant cette quantité du premier membre de l'équation précédente et divisant ensuite par $y - \alpha$, on aura

$$Q + Ry + Sy^2 + Ty^3 + \dots + Ny^{n-1} = N(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)\dots,$$

en faisant, comme dans le n° 2 du Mémoire cité,

$$Q = B + C\alpha + D\alpha^2 + \dots,$$

$$R = C + D\alpha + \dots,$$

$$S = D + \dots,$$

$$\dots\dots\dots$$

Faisons dans l'équation précédente $y = \beta$, on aura

$$Q + R\beta + S\beta^2 + T\beta^3 + \dots = 0;$$

retranchant cette quantité du premier membre de la même équation et divisant le tout par $y - \beta$, on aura

$$Q' + R'y + S'y^2 + T'y^3 + \dots = N(y-\gamma)(y-\delta)\dots,$$

en faisant

$$Q' = R + S\beta + T\beta^2 + \dots,$$

$$R' = S + T\beta + \dots,$$

$$S' = T + \dots,$$

$$\dots\dots\dots$$

Pareillement on trouvera

$$Q'' + R''y + S''y^2 + \dots = N(y-\delta)\dots$$

en faisant

$$Q'' = R' + S'\gamma + T'\gamma^2 + \dots,$$

$$R'' = S' + T'\gamma + \dots,$$

$$S'' = T' + \dots,$$

$$\dots\dots\dots;$$

et ainsi de suite.

4. 1° Soit maintenant $\beta = \alpha$, on aura

$$N(y-\alpha)(y-\gamma)(y-\delta)\dots = Q + Ry + Sy^2 + \dots,$$

$$N(y-\gamma)(y-\delta)\dots = Q' + R'y + S'y^2 + \dots$$

Faisant dans $Q', R', S', \dots$ $\beta = \alpha$, et substituant les valeurs de $Q, R, \dots$ en α , on trouve

$$Q' = C + 2D\alpha + 3E\alpha^2 + \dots = \frac{dQ}{d\alpha},$$

$$R' = D + 2E\alpha + \dots = \frac{dR}{d\alpha},$$

$$S' = E + \dots = \frac{dS}{d\alpha},$$

$$\dots\dots\dots$$

Donc

$$N(y-\gamma)(y-\delta) = \frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx}y + \frac{dS}{dx}y^2 + \dots;$$

2° Soit $\gamma = \beta = \alpha$, on aura d'abord

$$N(y-\alpha)^2(y-\delta) \dots = Q + Ry + Sy^2 + \dots,$$

$$N(y-\alpha)(y-\delta) \dots = \frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx}y + \frac{dS}{dx}y^2 + \dots,$$

$$N(y-\delta) \dots = Q'' + R''y + S''y^2 + \dots$$

Faisant dans Q'' , R'' , S'' ,... $\gamma = \alpha$, et substituant les valeurs ci-dessus de Q' , R' , S' ,..., on trouve

$$Q'' = D + 3E\alpha + \dots = \frac{1}{2} \frac{d^2Q}{dx^2},$$

$$R'' = \frac{1}{2} \frac{d^2R}{dx^2},$$

$$S'' = \frac{1}{2} \frac{d^2S}{dx^2},$$

De sorte qu'on aura

$$N(y-\delta) \dots = \frac{1}{2} \frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{d^2R}{dx^2}y + \frac{1}{2} \frac{d^2S}{dx^2}y^2 + \dots;$$

et ainsi de suite.

Faisons ces substitutions dans les formules trouvées plus haut pour le cas des racines égales, et changeons, comme nous l'avons prescrit, les puissances $y^0, y^1, y^2, \dots$ en $y_0, y_1, y_2, \dots$, on trouvera ces résultats fort simples :

1° Dans le cas où $\beta = \alpha$, la quantité

$$\frac{1}{N} \frac{d[(Qy_1 + Ry_1 + Sy_1 + \dots)f(\alpha)]}{dx}$$

pour la valeur des deux termes

$$a\alpha^x + b\beta^x;$$

2° Dans le cas de $\gamma = \beta = \alpha$, la quantité

$$\frac{1}{2N} \frac{d^2[(Qy_1 + Ry_1 + Sy_1 + \dots)f(\alpha)]}{dx^2}$$

pour la valeur des trois termes

$$a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x;$$

et ainsi de suite

5. En considérant ces résultats, il est clair qu'on eût pu les trouver plus simplement, en substituant dans l'expression du coefficient a , à la place de

$$y_{n-1} = (\beta + \gamma + \delta + \dots)y_{n-1} + (\beta\gamma + \beta\delta + \dots)y_{n-2} - \dots,$$

sa valeur

$$\frac{Qy_1 + Ry_1 + Sy_1 + \dots}{N},$$

et considérant cette quantité comme une fonction de α ; car, en la désignant par $F(\alpha)$, on eût eu, de même, pour le coefficient b , la quantité

$$y_{n-1} = (\alpha + \gamma + \delta + \dots)y_{n-1} + (\alpha\gamma + \alpha\delta + \dots)y_{n-2} - \dots = F(\beta);$$

de sorte que l'on eût eu pour les deux termes $a\alpha^x + b\beta^x$ l'expression

$$\frac{F(\alpha)f(\alpha)}{\alpha - \beta} + \frac{F(\beta)f(\beta)}{\beta - \alpha},$$

laquelle eût donné sur-le-champ, en faisant $\beta = \alpha + \omega$,

$$\frac{d[F(\alpha)f(\alpha)]}{d\alpha}.$$

On eût trouvé de la même manière, pour le cas de trois racines égales, en faisant

$$f(\alpha) = \frac{f'(\alpha)}{\alpha - \gamma},$$

que les trois premiers termes

$$a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$$

auraient donné

$$\frac{d[F(\alpha)f'(\alpha)]}{\alpha-\gamma} = \frac{F(\alpha)f'(\alpha)}{(\alpha-\gamma)^2} + \frac{F(\gamma)f'(\gamma)}{(\gamma-\alpha)^2};$$

ce qui, en faisant $\gamma = \alpha + \omega$, se réduit à

$$\frac{1}{2} \frac{d^2[F(\alpha)f'(\alpha)]}{d\alpha^2}.$$

C'est aussi de cette manière que je m'y étais pris d'abord pour résoudre le cas des racines égales; mais, quoiqu'elle conduise à des résultats exacts, il me semble qu'on ne peut pas l'adopter sans précaution; car il est remarquable que la quantité qu'on y prend pour une simple fonction de α contient toutes les autres racines $\beta, \gamma, \dots$ sans α ; que, de même, celle qu'on y prendrait pour une fonction de β contiendrait les autres racines sans β , et ainsi de suite; ce qui doit au moins laisser quelque doute sur la bonté de cette méthode; mais d'après celle que nous avons suivie, il n'en doit rester aucun sur l'exactitude de nos résultats.

6. Mais ces résultats n'ont pas encore toute la simplicité dont ils sont susceptibles; car les quantités que nous avons désignées par $f(\alpha), f'(\alpha), \dots$ dépendent à la fois des différentes racines $\alpha, \gamma, \delta, \dots$, et il faut les réduire à n'être que des fonctions de la seule racine α .

Pour cela je fais, comme dans le n° 2 du Mémoire déjà cité,

$$P = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots + Nx^n;$$

je change pour un moment α en γ ; j'aurai

$$P = 0$$

pour l'équation (A) du n° 1 ci-dessus, dont les racines sont $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. De sorte que, par la nature des équations, j'aurai

$$P = N(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)(\gamma - \gamma) \dots,$$

équation identique.

Donc :

1° En différenciant et faisant ensuite $\gamma = \alpha$, on aura

$$\frac{dP}{d\alpha} = N(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta) \dots;$$

2° Si $\alpha = \beta$, on a

$$P = N(\gamma - \alpha)^2(\gamma - \gamma)(\gamma - \delta) \dots$$

Soit

$$P' = N(\gamma - \gamma)(\gamma - \delta) \dots,$$

on aura

$$P = (\gamma - \alpha)^2 P';$$

donc, différenciant et faisant ensuite $\gamma = \alpha$, on aura

$$\frac{dP}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2P}{d\alpha^2} = 2P', \quad \frac{d^3P}{d\alpha^3} = 2.3 \frac{dP'}{d\alpha}, \quad \frac{d^4P}{d\alpha^4} = 3.4 \frac{d^2P'}{d\alpha^2};$$

et ainsi de suite. D'où l'on tire

$$P' = \frac{1}{2} \frac{d^2P}{d\alpha^2}, \quad \frac{dP'}{d\alpha} = \frac{1}{2.3} \frac{d^3P}{d\alpha^3}, \quad \frac{d^2P'}{d\alpha^2} = \frac{1}{3.4} \frac{d^4P}{d\alpha^4}, \dots;$$

3° Si $\alpha = \beta = \gamma$, on a

$$P = N(\gamma - \alpha)^3(\gamma - \delta)(\gamma - \epsilon) \dots$$

Soit

$$P'' = N(\gamma - \delta)(\gamma - \epsilon) \dots,$$

on aura

$$P = (\gamma - \alpha)^3 P''.$$

Différenciant et faisant ensuite $\gamma = \alpha$, on aura

$$\frac{dP}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2P}{d\alpha^2} = 0, \quad \frac{d^3P}{d\alpha^3} = 2.3 P'', \quad \frac{d^4P}{d\alpha^4} = 2.3.4 \frac{dP''}{d\alpha}, \quad \frac{d^5P}{d\alpha^5} = 3.4.5 \frac{d^2P''}{d\alpha^2}, \dots,$$

d'où l'on tire

$$P'' = \frac{1}{2.3} \frac{d^3P}{d\alpha^3}, \quad \frac{dP''}{d\alpha} = \frac{1}{2.3.4} \frac{d^4P}{d\alpha^4}, \quad \frac{d^2P''}{d\alpha^2} = \frac{1}{3.4.5} \frac{d^5P}{d\alpha^5}, \quad \frac{d^3P''}{d\alpha^3} = \frac{1}{4.5.6} \frac{d^6P}{d\alpha^6}, \dots;$$

et ainsi de suite.

On aura donc par ces substitutions, en supposant qu'on ait mis α à la place de y dans P' , P'' , ...,

$$f(\alpha) = \frac{N\alpha^r}{P^r}, \quad f'(\alpha) = \frac{N\alpha^r}{P^r},$$

et ainsi de suite (2). Donc enfin, substituant ces valeurs dans les formules du n° 3, on trouvera :

1° Que, lorsque $\alpha = \beta$, les deux termes

$$a\alpha^r + b\beta^r$$

de l'expression du terme général y_x se réduiront à cette expression

$$\frac{d \left(\frac{Qy^r + Ry^r + Sy^r + \dots}{P^r} \alpha^r \right)}{d\alpha},$$

en faisant

$$P' = \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{d\alpha^2}, \quad \frac{dP'}{d\alpha} = \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3 P}{d\alpha^3}, \dots;$$

2° Que, lorsque $\alpha = \beta = \gamma$, les trois termes

$$a\alpha^r + b\beta^r + c\gamma^r$$

se réduiront à

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \left(\frac{Qy^r + Ry^r + Sy^r + \dots}{P^r} \alpha^r \right)}{d\alpha^2},$$

en faisant

$$P'' = \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3 P}{d\alpha^3}, \quad \frac{dP''}{d\alpha} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^4 P}{d\alpha^4}, \quad \frac{d^2 P''}{d\alpha^2} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{d^5 P}{d\alpha^5};$$

3° Que, lorsque $\alpha = \beta = \gamma = \delta$, les quatre termes

$$a\alpha^r + b\beta^r + c\gamma^r + d\delta^r$$

se réduiront à

$$\frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3 \left(\frac{Qy^r + Ry^r + Sy^r + \dots}{P^r} \alpha^r \right)}{d\alpha^3},$$

en faisant

$$P''' = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{d^4 P}{d\alpha^4}, \quad \frac{dP'''}{d\alpha} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \frac{d^5 P}{d\alpha^5}, \quad \frac{d^2 P'''}{d\alpha^2} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \frac{d^6 P}{d\alpha^6},$$

$$\frac{d^3 P'''}{d\alpha^3} = \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \frac{d^7 P}{d\alpha^7};$$

et ainsi de suite.

7. Ces formules sont un peu différentes de celles que j'avais données sans démonstration dans le Mémoire cité pour le cas de l'égalité des racines.

Je m'étais aperçu de leur inexactitude après l'impression du Mémoire; mais entraîné par d'autres objets, j'avais toujours différé à revenir sur celui-ci que je regardais comme moins important; et j'ai été prévenu à cet égard par un Membre de la Société Italienne, Jean François Malfatti, qui a donné sur ce sujet un savant Mémoire dans le tome III du *Recueil* de cette Société. Comme l'analyse de cet Auteur est fort longue et conduit à des résultats un peu compliqués, j'ai cru devoir chercher à résoudre cette question d'une manière plus directe et plus conforme à la simplicité de la méthode générale exposée dans mon Mémoire de 1775; c'est ce qui a occasionné les recherches précédentes; mais, quoique les formules auxquelles je suis parvenu ne paraissent rien laisser à désirer pour la simplicité et la généralité, néanmoins, comme ces formules sont différentes pour les différents cas de l'égalité de deux racines, de trois, de quatre, ..., on pourrait désirer encore une formule qui renfermât tous ces cas; et voici celle que j'ai trouvée, et que je présente aux Géomètres en les invitant à la démontrer directement.

En conservant les valeurs de P , Q , R , ... des n° 3 et 6, savoir, en faisant

$$P = A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + E\alpha^4 + \dots,$$

$$Q = B + C\alpha + D\alpha^2 + E\alpha^3 + \dots,$$

$$R = C + D\alpha + E\alpha^2 + \dots,$$

$$\dots \dots \dots$$

je fais, pour abréger,

$$(Qy_0 + Ry_1 + Sy_2 + Ty_3 + \dots)\alpha^x = F(\alpha),$$

$F(\alpha)$ dénotant, comme l'on voit, une fonction donnée de α .

Je considère ensuite la formule

$$\frac{F(\alpha) + \omega \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2} + \dots}{\frac{dP}{d\alpha} + \frac{\omega}{2} \frac{d^2P}{d\alpha^2} + \frac{\omega^2}{2 \cdot 3} \frac{d^3P}{d\alpha^3} + \dots},$$

et, après l'avoir développée en série suivant les puissances ascendantes de ω , je ne retiens que les termes où la quantité ω ne se trouve point, en rejetant ceux qui se trouveront divisés ou multipliés par des puissances de ω ; je dis que ces termes seront ceux de l'expression du terme général y_x , qui proviendront de la racine α , soit que cette racine soit une racine simple, ou double, ou triple, ...

Ainsi, si α est une racine simple, on aura tout de suite

$$\frac{F(\alpha)}{\frac{dP}{d\alpha}}$$

pour le terme dû à cette racine.

Si α est une racine double, alors $\frac{dP}{d\alpha} = 0$, et la formule se réduira à

$$\frac{F(\alpha) + \omega \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} + \dots}{\frac{\omega}{2} \frac{d^2P}{d\alpha^2} + \frac{\omega^2}{2 \cdot 3} \frac{d^3P}{d\alpha^3} + \dots} = \frac{F(\alpha)}{\frac{\omega}{2} \frac{d^2P}{d\alpha^2}} + \frac{\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}}{\frac{1}{2} \frac{d^2P}{d\alpha^2}} - \frac{F(\alpha) \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3P}{d\alpha^3}}{\left(\frac{1}{2} \frac{d^2P}{d\alpha^2}\right)^2} + \omega \times \dots$$

Donc les termes dus à la racine double α seront

$$\frac{\frac{dF(\alpha)}{d\alpha}}{\frac{1}{2} \frac{d^2P}{d\alpha^2}} - F(\alpha) \frac{\frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3P}{d\alpha^3}}{\left(\frac{1}{2} \frac{d^2P}{d\alpha^2}\right)^2},$$

ou bien (6)

$$\frac{1}{P'} \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} - \frac{F(\alpha)}{P'^2} \frac{dP'}{d\alpha},$$

ou bien encore

$$\frac{d \frac{F(\alpha)}{P'}}{\frac{d\alpha}{d\alpha}},$$

comme on l'a trouvé dans le numéro cité.

Si α est une racine triple, alors on aura

$$\frac{dP}{d\alpha} = 0, \quad \frac{d^2P}{d\alpha^2} = 0,$$

ce qui réduira la formule à celle-ci

$$\frac{F(\alpha) + \omega \frac{dF(\alpha)}{d\alpha} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2} + \dots}{\frac{\omega^3}{2 \cdot 3} \left(\frac{d^3P}{d\alpha^3} + \frac{\omega}{4} \frac{d^4P}{d\alpha^4} + \frac{\omega^2}{4 \cdot 5} \frac{d^5P}{d\alpha^5} + \dots \right)}$$

Faisant le développement suivant les méthodes ordinaires, on trouvera que les termes indépendants de ω seront les mêmes que ceux qui résultent des formules données ci-dessus pour le cas de trois racines égales; et ainsi de suite.



LES SPHÉROÏDES ELLIPTIQUES.

MÉMOIRE

SUR

LES SPHÉROÏDES ELLIPTIQUES.



MÉMOIRE

SUR

LES SPHÉROÏDES ELLIPTIQUES.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, années 1792 et 1793.)

J'entends par *sphéroïdes elliptiques* ceux dont toutes les sections sont des ellipses, et dont l'équation générale, réduite à la forme la plus simple, est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

J'ai donné dans le volume de l'année 1773 un Mémoire sur l'attraction de ces sortes de sphéroïdes (*). Je me propose dans celui-ci de présenter aux Géomètres quelques formules générales, qui pourront être utiles pour la solution de différentes questions relatives à ces mêmes sphéroïdes.

1. Supposons

$$z = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi \sin \varphi, \quad x = r \sin \psi \cos \varphi;$$

r sera le rayon partant du centre qui est l'origine des trois coordonnées

(*) Œuvres de Lagrange, t. III, p. 619.

x, y, z ; ψ sera l'angle fait par ce rayon avec l'une des ordonnées z , et φ sera l'angle que la projection du même rayon sur le plan des coordonnées x et y fait avec l'une des ordonnées x . En substituant ces valeurs dans l'équation du sphéroïde, on en tirera

$$\frac{1}{r^2} = \frac{\sin^2 \psi \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \psi \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \psi}{c^2};$$

et de là on aura les valeurs de x, y, z en ψ et φ .

2. Designons par M la masse totale ou plutôt le volume du sphéroïde: on aura, comme l'on sait,

$$dM = r^3 dr \sin \psi d\psi d\varphi;$$

et pour avoir la valeur de M il faudra intégrer d'abord depuis $r = 0$ jusqu'à r égal au rayon du sphéroïde, c'est-à-dire en donnant à r la valeur trouvée ci-dessus; on intégrera ensuite depuis $\psi = 0$ jusqu'à $\psi = 180^\circ$, et enfin depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 360^\circ$.

Intégrant d'abord suivant la variable r , on aura

$$dM = \frac{r^3 \sin \psi d\psi d\varphi}{3},$$

où il faudra substituer pour r sa valeur en φ et ψ .

Soit pour plus de simplicité

$$a = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\gamma}};$$

on aura

$$r = (\alpha \sin^2 \psi \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \psi \sin^2 \varphi + \gamma \cos^2 \psi)^{-\frac{1}{2}}.$$

Supposons de plus

$$R = \alpha \sin^2 \psi \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \psi \sin^2 \varphi + \gamma \cos^2 \psi,$$

en sorte que

$$r = \frac{1}{\sqrt{R}},$$

on aura

$$dM = \frac{\sin \psi d\psi d\varphi}{3R^{\frac{3}{2}}}.$$

3. Considérons maintenant les formules

$$x^3 dM, \quad y^3 dM, \quad z^3 dM, \quad x^2 y dM, \quad x^2 z dM, \quad y^2 x dM, \dots;$$

en substituant pour x, y, z leurs valeurs $r \sin \psi \cos \varphi, r \sin \psi \sin \varphi, r \cos \psi$, et pour dM l'élément $r^3 dr \sin \psi d\psi d\varphi$, intégrant ensuite suivant r , et faisant $r = \frac{1}{\sqrt{R}}$, on aura après cette première intégration

$$x^3 dM = \frac{\sin^3 \psi \cos^3 \varphi \sin \psi d\psi d\varphi}{5R^{\frac{5}{2}}},$$

$$y^3 dM = \frac{\sin^3 \psi \sin^3 \varphi \sin \psi d\psi d\varphi}{5R^{\frac{5}{2}}},$$

$$z^3 dM = \frac{\cos^3 \psi \sin \psi d\psi d\varphi}{5R^{\frac{5}{2}}},$$

$$x^2 y dM = \frac{\sin^4 \psi \cos^2 \varphi \sin \varphi d\psi d\varphi}{7R^{\frac{7}{2}}},$$

$$x^2 z dM = \frac{\sin^4 \psi \cos^2 \varphi \sin \psi d\psi d\varphi}{7R^{\frac{7}{2}}},$$

$$y^2 x dM = \frac{\sin^4 \psi \sin^2 \varphi \cos \varphi d\psi d\varphi}{7R^{\frac{7}{2}}},$$

Si maintenant on compare ces différentes expressions à celle de dM trouvée ci-dessus, il est facile de voir qu'elles peuvent toutes se déduire de celle-ci par la simple variation des constantes α, β, γ . Ainsi, dénotant

par δ les différentielles relatives à ces quantités, on aura

$$dM = \frac{\sin \psi \, d\psi \, d\varphi}{3R^3},$$

$$x^2 dM = -\frac{2}{5} \frac{\partial dM}{\partial \alpha},$$

$$y^2 dM = -\frac{2}{5} \frac{\partial dM}{\partial \beta},$$

$$z^2 dM = -\frac{2}{5} \frac{\partial dM}{\partial \gamma},$$

$$x^4 dM = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \frac{\partial^2 dM}{\partial \alpha^2},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x^2 y^2 dM = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \frac{\partial^2 dM}{\partial \alpha \partial \beta},$$

$$\dots\dots\dots$$

et, en général,

$$x^{2m} y^{2n} z^{2l} dM = \pm \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} \dots (m+n+l) \frac{\partial^{m+n+l} dM}{\partial \alpha^m \partial \beta^n \partial \gamma^l};$$

la quantité $(m+n+l)$ indique le nombre des facteurs $\frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \dots$ qu'il faut prendre, et le signe supérieur doit avoir lieu lorsque ce nombre sera pair, l'inférieur lorsqu'il sera impair.

Pour avoir les valeurs totales de ces différentes formules, il ne faudra plus que les intégrer relativement à ψ et φ ; et, comme les variations de α, β, γ sont indépendantes des variations de ψ et φ , il est clair que les intégrations dont il s'agit le seront aussi. Dénotant donc ces intégrations totales par le signe $\int$, on aura d'abord

$$M = \int \frac{\sin \psi \, d\psi \, d\varphi}{3R^3},$$

et ensuite

$$\int x^{2m} y^{2n} z^{2l} dM = \pm \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{9} \dots (m+n+l) \frac{\partial^{m+n+l} M}{\partial \alpha^m \partial \beta^n \partial \gamma^l}.$$

Ainsi, lorsqu'on aura trouvé la valeur de la masse M en fonction de α, β, γ , on pourra, par de simples différentiations relatives à ces constantes, trouver les valeurs des intégrales de $x^2 dM, y^2 dM, \dots$, et généralement de $x^{2m} y^{2n} z^{2l} dM$ pour toute la masse du sphéroïde.

A l'égard des quantités où dM serait multiplié par des puissances impaires de x, y, z , il est facile de voir que leur intégrale totale serait toujours nulle, les mêmes éléments se trouvant avec des signes contraires et se détruisant par conséquent réciproquement.

4. Cherchons donc la valeur de M . Soit $\cos \psi = u$; on aura

$$dM = -\frac{1}{3} \frac{du \, d\varphi}{[\alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi + (\gamma - \alpha \cos^2 \varphi - \beta \sin^2 \varphi) u^2]^{\frac{3}{2}}},$$

dont l'intégrale relative à u est (en prenant une constante k)

$$k \, d\varphi - \frac{1}{3} \frac{u \, d\varphi}{(\alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi) \sqrt{[\alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi + (\gamma - \alpha \cos^2 \varphi - \beta \sin^2 \varphi) u^2]}}.$$

Comme cette intégrale doit commencer à $\psi = 0$ et finir à $\psi = 180^\circ$, il faudra qu'elle soit nulle lorsque $u = 1$, et complète lorsque $u = -1$. Donc on aura d'abord

$$k = \frac{d\varphi}{3(\alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi) \sqrt{\gamma}},$$

et l'intégrale complète sera

$$\frac{2}{3} \frac{d\varphi}{(\alpha \cos^2 \varphi + \beta \sin^2 \varphi) \sqrt{\gamma}},$$

laquelle devra encore être intégrée depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 360^\circ$. Disant le haut et le bas de la fraction par $\alpha \cos^2 \varphi$, et observant que $\frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} = d \tan \varphi$, cette différentielle deviendra (en faisant $t = \sqrt{\beta} \tan \varphi$),

$$\frac{2}{3} \frac{dt}{\sqrt{\alpha \beta} (1+t^2)},$$

V.

dont l'intégrale est

$$\frac{2}{3} \frac{\arctan t}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}.$$

Lorsque $\varphi = 0$ on a $t = 0$, et lorsque $\varphi = 360^\circ$ on a de nouveau $t = 0$; donc $\arctan t$ est dans le premier cas $= 0$ et dans le second $= 360^\circ$.

Donc la valeur complète de cette dernière intégrale sera $\frac{2}{3} \frac{360^\circ}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}$. Donc enfin on aura

$$M = \frac{2}{3} \frac{360^\circ}{\sqrt{\alpha\beta\gamma}}.$$

5. Cette quantité différenciée successivement donnera

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2} \frac{M}{\alpha}, \quad \frac{\partial M}{\partial \beta} = -\frac{1}{2} \frac{M}{\beta}, \quad \frac{\partial M}{\partial \gamma} = -\frac{1}{2} \frac{M}{\gamma},$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{M}{\alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \alpha \partial \beta} = -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{M}{\alpha\beta},$$

et ainsi de suite. De sorte qu'on aura, en général,

$$\frac{\partial^{m+n+l} M}{\partial \alpha^m \partial \beta^n \partial \gamma^l} = \pm \left[\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \dots (m) \right] \left[\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \dots (n) \right] \left[\frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \dots (l) \right] \frac{M}{\alpha^m \beta^n \gamma^l};$$

le signe supérieur a lieu lorsque $m+n+l$ est pair, l'inférieur lorsque ce nombre est impair, et les quantités (m) , (n) , (l) dénotent le nombre des facteurs $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ... qu'il faut multiplier ensemble.

Donc enfin, faisant cette substitution dans la formule intégrale du n° 3 et remettant pour α , β , γ leurs valeurs $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, on aura, en général, cette formule très-remarquable

$$\int x^{2m} y^{2n} z^{2l} dM = \frac{[1.3.5\dots(m)][1.3.5\dots(n)][1.3.5\dots(l)]}{5.7.9\dots(m+n+l)} M a^{2m} b^{2n} c^{2l},$$

où $M = \frac{2}{3} 360^\circ \times abc$.

6. De ce que (3)

$$\int xy dM = 0, \quad \int xz dM = 0, \quad \int yz dM = 0,$$

il s'ensuit que les axes des coordonnées x , y , z sont les trois axes principaux du sphéroïde. Les moments d'inertie autour de ces axes, dont la détermination est nécessaire pour le calcul de la rotation, seront donc exprimés par les formules

$$\int (y^2 + z^2) dM, \quad \int (x^2 + z^2) dM, \quad \int (x^2 + y^2) dM,$$

dont les valeurs sont par la formule générale

$$\frac{M(b^2 + c^2)}{5}, \quad \frac{M(a^2 + c^2)}{5}, \quad \frac{M(a^2 + b^2)}{5}.$$

Dans la Théorie de la libration de la Lune [*Mémoires de 1780* (*)], on a fait

$$\frac{a}{c} = 1 + e, \quad \frac{b}{c} = 1 + i,$$

et regardant e et i comme des quantités très-petites vis-à-vis de l'unité, ce qui suffisait alors pour mon objet, on a trouvé pour les moments dont il s'agit les quantités

$$\frac{2M}{5} c^2(1+i), \quad \frac{2M}{5} c^2(1+e), \quad \frac{2M}{5} c^2(1+e+i),$$

M étant $= \frac{2}{3} 360^\circ \times c^3(1+e+i)$. En comparant ces valeurs avec les précédentes, il est aisé d'en conclure qu'on peut rendre les formules de la Théorie citée rigoureuses, en prenant d'abord pour M sa vraie valeur $\frac{2}{3} 360^\circ \times abc$, et faisant ensuite

$$e = \frac{a^2 - c^2}{2c^2}, \quad i = \frac{b^2 - c^2}{2c^2}.$$

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. V, p. 1.

Au reste les quantités que nous désignons ici par a, b, c, M le sont dans l'endroit cité par f, g, h, m .

7. On sait que l'attraction du sphéroïde sur un point quelconque dont la position dans l'espace serait déterminée par les coordonnées f, g, h rapportées aux mêmes axes que les coordonnées x, y, z dépend de la formule

$$\int \frac{dM}{\sqrt{(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2}}$$

que j'appelle V , l'intégration étant rapportée à toute la masse du sphéroïde. Car, si dans la quantité V regardée comme fonction de f, g, h on fait varier séparément ces dernières quantités, on aura $\frac{dV}{df}, \frac{dV}{dg}, \frac{dV}{dh}$ pour les attractions totales parallèlement aux axes des coordonnées f, g, h . Et si l'on change ces coordonnées en un rayon vecteur ρ avec deux angles λ et μ , tels que

$$h = \rho \cos \lambda, \quad g = \rho \sin \lambda \sin \mu, \quad f = \rho \sin \lambda \cos \mu,$$

on aura $\frac{dV}{d\rho}$ pour l'attraction suivant le rayon ρ , et $\frac{1}{\rho} \frac{dV}{d\lambda}, \frac{1}{\rho \sin \lambda} \frac{dV}{d\mu}$ pour les deux attractions perpendiculaires au rayon, l'une dans le plan qui passe par l'axe des ordonnées h , et l'autre perpendiculaire à ce plan.

La recherche de l'attraction du sphéroïde dépend donc simplement de la détermination de la quantité V en fonction de a, b, c, f, g, h . Dans le *Mémoire* déjà cité sur l'attraction des sphéroïdes, j'ai résolu la question pour le cas où le point attiré est dans l'intérieur ou à la surface; et dans une Addition à ce *Mémoire*, imprimée dans le volume de l'année 1775, je l'ai résolue aussi pour le cas où le point attiré est sur le prolongement d'un des trois axes. Les autres cas ont été résolus d'abord par Legendre pour les seuls sphéroïdes de révolution, ensuite par Laplace et Legendre pour des sphéroïdes quelconques. On ne peut regarder leurs solutions que comme des chefs-d'œuvre d'analyse, mais on peut désirer encore une solution plus directe et plus simple; et les progrès naturels de l'Ana-

lyse donnent lieu de l'espérer. En attendant, voici l'usage qu'on pourrait faire des formules précédentes dans cette recherche.

8. Si l'on réduit le radical

$$\sqrt{(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2}$$

en série ascendante relativement aux quantités x, y, z , la quantité V se trouvera composée de termes de la forme $k \int x^{2m} y^{2n} z^{2l} dM$, dont on aura la valeur par la formule du n° 5, le coefficient k ne dépendant que des quantités f, g, h .

Si le point attiré est assez éloigné relativement aux dimensions du sphéroïde, ce qui est le cas des corps célestes, cette réduction en série sera toujours assez exacte, et il suffira de ne tenir compte que des premiers termes, comme dans les Problèmes de la précession des équinoxes, de la libration de la Lune ou des autres Planètes.

En substituant $\rho \cos \lambda, \rho \sin \lambda \sin \mu, \rho \sin \lambda \cos \mu$ à la place de h, g, f (7), on pourra réduire le radical dont il s'agit en une série de la forme

$$\frac{1}{\rho} + \frac{(1)}{\rho^3} + \frac{(2)}{\rho^5} + \frac{(3)}{\rho^7} + \dots,$$

les quantités (1), (2), (3), ... étant des fonctions homogènes de x, y, z des dimensions 1, 2, 3, ... Ainsi, en multipliant par dM et intégrant, on aura

$$V = \frac{M}{\rho} + \frac{\int (1) dM}{\rho^3} + \frac{\int (2) dM}{\rho^5} + \frac{\int (3) dM}{\rho^7} + \dots$$

Mais, par ce que nous avons observé plus haut (3), il est clair que les valeurs de

$$\int (1) dM, \quad \int (3) dM, \dots$$

seront nulles; que, de plus, dans les valeurs de

$$\int (2) dM, \quad \int (4) dM, \dots,$$

les quantités provenant des termes de (2), (4), ... qui contiendraient des puissances impaires de x , y , z seront nulles aussi. D'où il s'ensuit que l'on aura simplement

$$V = \frac{M}{\rho} + \frac{\int (2) dM}{\rho^2} + \frac{\int (4) dM}{\rho^3} + \frac{\int (6) dM}{\rho^4} + \dots,$$

les quantités (2), (4), ... étant de la forme

$$(2) = Ax^2 + By^2 + Cz^2,$$

$$(4) = A'x^4 + B'y^4 + C'z^4 + D'x^2y^2 + E'x^2z^2 + F'y^2z^2,$$

$$(6) = A''x^6 + B''y^6 + C''z^6 + D''x^4y^2 + E''x^4z^2 + F''x^2y^4 + G''x^2z^4 + H''y^4z^2 + I''y^2z^4 + K''x^2y^2z^2;$$

et ainsi de suite

Les coefficients $A, B, C, A', B', \dots$ seront des fonctions des angles λ et μ qu'on déterminera facilement par différents moyens.

Appliquant donc à ces quantités la formule générale du n° 5 ci-dessus, on aura sur-le-champ

$$\int (2) dM = \frac{M}{5} (Aa^2 + Bb^2 + Cc^2),$$

$$\int (4) dM = \frac{M}{5 \cdot 7} (3A'a^4 + 3B'b^4 + 3C'c^4 + D'a^2b^2 + E'a^2c^2 + F'b^2c^2),$$

$$\int (6) dM = \frac{M}{5 \cdot 7 \cdot 9} (3 \cdot 5 A''a^6 + 3 \cdot 5 B''b^6 + 3 \cdot 5 C''c^6 + 3 D''a^4b^2 + 3 E''a^4c^2 + 3 F''a^2b^4 + 3 G''a^2c^4 + 3 H''b^4c^2 + 3 I''b^2c^4 + K''a^2b^2c^2);$$

et ainsi de suite.

9. J'observe maintenant qu'il y a nécessairement entre les différents coefficients $A, B, C, \dots$ des relations indépendantes des angles λ et μ dont ils sont fonctions, et qui viennent de ce que la série

$$\frac{1}{\rho} + \frac{(1)}{\rho^2} + \frac{(2)}{\rho^3} + \dots$$

résulte du développement de la fraction irrationnelle

$$\frac{1}{\sqrt{(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2}},$$

dans laquelle f, g, h sont données en ρ, λ, μ (numéro précédent). On sait qu'en nommant cette fraction u , elle satisfait à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} = 0,$$

quelles que soient les valeurs de f, g, h , comme on peut s'en assurer par la différentiation. Donc, substituant à la place de u la série dont il s'agit, il faudra qu'on ait autant d'équations semblables pour chacune des quantités (1), (2), (3), ... c'est-à-dire

$$\frac{d^2(1)}{dx^2} + \frac{d^2(1)}{dy^2} + \frac{d^2(1)}{dz^2} = 0, \quad \frac{d^2(2)}{dx^2} + \frac{d^2(2)}{dy^2} + \frac{d^2(2)}{dz^2} = 0, \dots;$$

et, comme ces équations doivent être indépendantes d'aucune relation entre x, y, z , il faudra évaluer à zéro les termes qui après la différentiation resteront affectés des mêmes produits de ces variables.

Ainsi l'équation

$$\frac{d^2(2)}{dx^2} + \frac{d^2(2)}{dy^2} + \frac{d^2(2)}{dz^2} = 0$$

donnera l'équation

$$A + B + C = 0.$$

L'équation

$$\frac{d^2(4)}{dx^2} + \frac{d^2(4)}{dy^2} + \frac{d^2(4)}{dz^2} = 0$$

donnera ces trois équations

$$4 \cdot 3 A' + 2 D' + 2 E' = 0,$$

$$4 \cdot 3 B' + 2 D' + 2 F' = 0,$$

$$4 \cdot 3 C' + 2 E' + 2 F' = 0.$$

L'équation

$$\frac{d^2(6)}{dx^2} + \frac{d^2(6)}{dy^2} + \frac{d^2(6)}{dz^2} = 0$$

donnera ces six équations

$$\begin{aligned} 6.5 A'' + 2 D'' + 2 E'' &= 0, & 4.3 D'' + 4.3 F'' + 2 K'' &= 0, \\ 6.5 B'' + 2 F'' + 2 H'' &= 0, & 4.3 E'' + 4.3 G'' + 2 K'' &= 0, \\ 6.5 C'' + 2 G'' + 2 I'' &= 0, & 4.3 H'' + 4.3 I'' + 2 K'' &= 0; \end{aligned}$$

et ainsi des autres.

Donc :

1° On aura $A = -B - C$; cette valeur, substituée dans l'expression de $\int (2) dM$, donnera

$$\int (2) dM = \frac{M}{5} [B(b^2 - a^2) + C(c^2 - a^2)].$$

2° On aura

$$2.3 A' = -D' - E', \quad 2.3 B' = -D' - F', \quad 2.3 C' = -E' - F';$$

ces valeurs, substituées dans l'expression de $\int (4) dM$, la réduiront à cette forme

$$\int (4) dM = \frac{M}{2.5.7} [-D'(b^2 - a^2)^2 - E'(c^2 - a^2)^2 - F'(c^2 - b^2)^2].$$

3° On aura d'abord

$$3.5 A'' = -D'' - E'', \quad 3.5 B'' = -F'' - H'', \quad 3.5 C'' = -G'' - I'';$$

ensuite, tirant des trois dernières conditions les valeurs de E'', G'', K'' , on aura

$$K'' = -2.3 H'' - 2.3 I'', \quad G'' = H'' + I'' - E'', \quad F'' = H'' + I'' - D'';$$

et par conséquent

$$3.5 B'' = -2 H'' - I'' + D'', \quad 3.5 C'' = -H'' - 2 I'' + E''.$$

Les coefficients $A'', B'', C'', F'', G'', K''$ sont donc donnés en D'', E'', H'', I'' , et, ces substitutions étant faites dans l'expression de $\int (6) dM$,

elle se réduira à cette forme

$$\int (6) dM = \frac{M}{5.7.9} [D''(b^2 - a^2)^2 + E''(c^2 - a^2)^2 - H''(c^2 - b^2)^2 - 3H''(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)^2 + I''(c^2 - b^2)^2 - 3I''(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)^2];$$

et ainsi de suite.

10. Comme

$$c^2 - b^2 = c^2 - a^2 - (b^2 - a^2),$$

il est visible que les valeurs de $\int (2) dM$, $\int (4) dM$, ... se trouvent exprimées par M multipliée par des fonctions de $b^2 - a^2$ et $c^2 - a^2$. Si l'on pouvait tirer de l'induction précédente une conclusion générale, il s'ensuivrait que la quantité V du n° 7 ci-dessus pourrait toujours s'exprimer par M multipliée par une fonction de $b^2 - a^2$ et de $c^2 - a^2$; que par conséquent, à cause de $M = \frac{2}{3} 360^\circ \times abc$ (5), on aurait, en général, relativement aux quantités a, b, c qui entrent dans la valeur de V ,

$$V = abcF(b^2 - a^2, c^2 - a^2);$$

la caractéristique F dénotant une fonction des deux quantités renfermées entre les crochets et séparées par une virgule.

Supposons qu'en mettant $a^2 + e, b^2 + e, c^2 + e$ à la place de a^2, b^2, c^2 dans la quantité V , elle devienne V' , e étant une quantité arbitraire, on aura donc pareillement

$$V' = \sqrt{(a^2 + e)(b^2 + e)(c^2 + e)} F(b^2 - a^2, c^2 - a^2);$$

donc

$$\frac{V'}{V} = \sqrt{\left(1 + \frac{e}{a^2}\right) \left(1 + \frac{e}{b^2}\right) \left(1 + \frac{e}{c^2}\right)}.$$

Ainsi, si l'on peut trouver la valeur de V' pour une valeur quelconque de e , on en tirera celle de V .

11. Pour appliquer à cette recherche les formules données dans le Mémoire cité de 1773, et pour rendre les dénominations employées dans ces formules conformes à celles des formules précédentes, nous change-

rons dans celles-là k en c^2 , m en $\frac{c^2}{a^2}$, et n en $\frac{c^2}{b^2}$, pour que l'équation de l'ellipsoïde soit comme ci-dessus

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

nous y changerons ensuite les quantités a, b, c , qui représentaient les coordonnées du point attiré en f, g, h ; et nous conserverons l'emploi des quantités r, p, q , dont la première représente la distance du point attiré à la molécule dM ; les deux autres représentent les angles décrits par ce rayon.

D'après ces dénominations on aura, par la méthode du Problème III du même Mémoire,

$$f - x = r \sin p \cos q, \quad g - y = r \sin p \sin q, \quad h - z = r \cos p,$$

et

$$dM = r^2 \sin p \, dp \, dq \, dr,$$

et par conséquent

$$dV = \frac{dM}{\sqrt{(f-x)^2 + (g-y)^2 + (h-z)^2}} = r \, dr \sin p \, dp \, dq.$$

Intégrant d'abord relativement à r suivant les procédés du Problème IV pour les points extérieurs, on aura

$$\frac{(r'^2 - r''^2) \sin p \, dp \, dq}{2},$$

r' et r'' étant les deux racines de l'équation en r , résultante de la substitution, de

$$f - r \sin p \cos q, \quad g - r \sin p \sin q, \quad h - r \cos p$$

à la place de x, y, z dans l'équation du sphéroïde. On intégrera ensuite relativement à p et q , et l'on prendra les intégrales entre les limites données par l'égalité des racines r' et r'' ; mais lorsque l'équation n'aura qu'une racine, alors on intégrera depuis $p = 0$ jusqu'à $p = 180^\circ$ et depuis $q = 0$ jusqu'à $q = 180^\circ$, suivant les règles prescrites dans le n° 5 du Mémoire cité.

L'équation en r devient

$$M r^3 - 2 N r + P = 0,$$

en supposant

$$M = \frac{\sin^2 p \cos^2 q}{a^2} + \frac{\sin^2 p \sin^2 q}{b^2} + \frac{\cos^2 p}{c^2},$$

$$N = \frac{f \sin p \cos q}{a^2} + \frac{g \sin p \sin q}{b^2} + \frac{h \cos p}{c^2},$$

$$P = \frac{f^2}{a^2} + \frac{g^2}{b^2} + \frac{h^2}{c^2} - 1.$$

Les deux racines r' et r'' sont donc

$$\frac{N \pm \sqrt{N^2 - MP}}{M},$$

de sorte qu'on aura

$$r'^2 - r''^2 = \frac{4 N \sqrt{N^2 - MP}}{M^2},$$

par conséquent la valeur de dV sera

$$dV = \frac{2 N \sqrt{N^2 - MP}}{M^2} \sin p \, dp \, dq.$$

Ce qui rend les intégrations qui restent à faire très-difficiles, c'est le radical; mais ce radical disparaîtrait si $P = 0$. Or on peut prendre $P = 0$ dans la valeur de dV en déterminant convenablement l'arbitraire e .

12. Supposons donc que dans les expressions de M, N, P on mette partout $a^2 + e, b^2 + e, c^2 + e$ à la place de a^2, b^2, c^2 , et que ces expressions deviennent alors M', N', P' ; on aura de même (10)

$$dV' = \frac{2 N' \sqrt{N'^2 - M' P'}}{M'^2} \sin p \, dp \, dq.$$

Donc, si l'on prend e , en sorte que $P' = 0$, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{f^2}{a^2 + e} + \frac{g^2}{b^2 + e} + \frac{h^2}{c^2 + e} - 1 = 0,$$

alors la valeur de dV' se simplifiera et deviendra

$$dV' = \frac{2N'^2}{M'^2} \sin p \, dp \, dq.$$

De plus, dans ce cas l'équation en r deviendra

$$M'r - 2N' = 0$$

et n'aura plus qu'une seule racine; de sorte que les intégrations relatives à p et q seront indépendantes et devront se faire depuis $p = 0$ jusqu'à $p = 180^\circ$, et depuis $q = 0$ jusqu'à $q = 180^\circ$. Ainsi l'on aura la valeur complète de V' par cette double intégration de la formule suivante

$$\frac{2 \left(\frac{f \sin p \cos q}{a^2 + e} + \frac{g \sin p \sin q}{b^2 + e} + \frac{h \cos p}{c^2 + e} \right)^2 \sin p \, dp \, dq}{\left(\frac{\sin^2 p \cos^2 q}{a^2 + e} + \frac{\sin^2 p \sin^2 q}{b^2 + e} + \frac{\cos^2 p}{c^2 + e} \right)^2},$$

qu'on peut réduire à celle-ci plus simple

$$2 \frac{\left(\frac{f \cos q}{a^2 + e} + \frac{g \sin q}{a^2 + e} \right)^2 \sin^3 p + \left(\frac{h}{c^2 + e} \right)^2 \cos^3 p}{\left(\frac{\sin^2 p \cos^2 q}{a^2 + e} + \frac{\sin^2 p \sin^2 q}{b^2 + e} + \frac{\cos^2 p}{c^2 + e} \right)^2} \sin p \, dp \, dq,$$

par la raison que toute formule telle que $Q \cos p \, dp$, où Q serait une fonction rationnelle de $\sin^2 p$ et $\cos^2 q$, étant intégrée depuis $p = 0$ jusqu'à $p = 180^\circ$, donne un résultat nul.

L'intégrale relative à p n'a aucune difficulté; il n'y a qu'à faire $\cos p = u$, et l'on aura une différentielle rationnelle en u , mais dont l'intégrale renfermera un arc de cercle; l'intégrale relative à q se trouvera de la même manière en faisant $\tan q = t$, et sa valeur complète sera algébrique; ainsi il y a de l'avantage à commencer par cette dernière; mais l'intégration suivante relative à q dépendra alors de la rectification des sections coniques.

Au reste, comme la propriété que nous avons trouvée par induction dans le n° 10 a été démontrée rigoureusement par Laplace et Legendre, les résultats précédents doivent aussi être regardés comme rigoureux.

MÉMOIRE

SUR

LA MÉTHODE D'INTERPOLATION.

MÉMOIRE

SUR

LA MÉTHODE D'INTERPOLATION.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, années 1792 et 1793.)

La méthode d'interpolation est, après les logarithmes, la découverte la plus utile qu'on ait faite dans le calcul; elle est surtout, comme les logarithmes, d'un usage immense dans l'Astronomie, où elle sert non-seulement pour remplir dans les Tables les lieux intermédiaires entre ceux qu'on a calculés directement, mais encore pour suppléer dans une suite d'observations à celles qui manquent. Lorsque les nombres donnés, entre lesquels il s'agit d'insérer des nombres intermédiaires, sont en progression arithmétique, il est naturel de supposer que les termes intermédiaires forment aussi une même progression arithmétique avec les nombres donnés. Il n'y a donc alors qu'à insérer des moyens arithmétiques entre les nombres donnés : c'est en quoi consiste la méthode des parties proportionnelles dont l'usage paraît connu de tout temps.

Mais cette méthode si simple ne peut avoir lieu qu'autant que les nombres donnés croissent ou décroissent également, c'est-à-dire par des différences constantes. Si ces différences ne sont pas constantes, on ne peut pas supposer non plus que celles des termes intermédiaires le soient, et la question se réduit alors à trouver la loi de l'augmentation

ou diminution des nombres donnés pour pouvoir y assujettir aussi les nombres intermédiaires : c'est l'objet de la méthode d'interpolation.

Ce qui se présente de plus simple dans cette recherche, c'est d'examiner si les différences des nombres donnés forment elles-mêmes une progression arithmétique; dans ce cas il est visible qu'on peut appliquer la méthode des parties proportionnelles à la suite des différences, ensuite il n'y aura qu'à remonter de cette suite à celle des nombres cherchés. De même, si les différences des nombres donnés ne forment pas une progression arithmétique, les différences de ces différences, qu'on appelle *différences secondes*, en forment elles-mêmes une, on pourra trouver les termes intermédiaires de cette dernière suite, et remonter de là successivement à celle des différences premières et enfin à celle des nombres à interpoler. C'est sur ce principe qu'est fondée la Théorie ordinaire de l'interpolation, laquelle se réduit ainsi à la solution de ce Problème :

Étant donnée une suite de termes dont les différences d'un ordre quelconque soient constantes, trouver un nombre quelconque de termes intermédiaires qui suivent la même loi.

Mouton, Astronome de Lyon, est le premier qui ait envisagé l'interpolation sous ce point de vue, dans son Ouvrage intitulé : *Observationes diametrorum Solis et Lunæ*, etc., et imprimé à Lyon en 1670. Ayant entrepris de calculer une Table des déclinaisons du Soleil pour chaque degré et minute de longitude, il a vu qu'on pouvait se contenter de la calculer directement de degré en degré, et de l'étendre ensuite de minute en minute par la méthode des différences. Il explique par différents exemples l'usage de cette méthode, et il donne d'après François Regnaud, à qui il avait proposé cette question, un procédé général, mais très-long, pour trouver la loi des termes à interpoler dans une Table dont les termes ont des différences constantes d'un ordre donné.

Il paraît néanmoins que la Théorie de l'interpolation est plus ancienne; et il est bien naturel de penser en effet qu'elle a dû se présenter aux premiers calculateurs des Tables trigonométriques et logarithmi-

ques, vu les secours prodigieux qu'elle offre dans ces sortes de calculs. Aussi je trouve que Henri Briggs, qui a calculé le premier les logarithmes des nombres naturels depuis l'unité jusqu'à 20 000, et depuis 90 000 jusqu'à 100 000, propose, pour remplir la lacune, une méthode d'interpolation fondée sur la considération des différences successives, qu'il dit avoir employée avec succès dans la construction du Canon trigonométrique pour les sinus et tangentes des degrés et centièmes de degré. (Voyez le Chapitre XIII de son *Arithmetica logarithmica*, et le XII^e de sa *Trigonometria Britannica*.) Cette méthode, dont Briggs donne les résultats sans démonstration, a été ensuite généralisée par Cotes dans sa *Canonotechnia sive constructio tabularum per differentias*; mais ce dernier a également supprimé la démonstration de ses formules, et je ne connais personne qui jusqu'ici ait entrepris d'y suppléer; ce qui vient peut-être de ce que d'un côté ces formules sont un peu compliquées, et de l'autre, de ce que l'usage en a été abandonné depuis que Newton en a proposé de plus simples, fondées sur la considération des courbes paraboliques.

Tout le monde connaît la formule de Newton pour trouver une ordonnée quelconque d'une courbe parabolique, par les différences successives des ordonnées équidistantes; c'est celle dont on se sert journellement en Astronomie pour interpoler les lieux des Planètes. Cette formule donne en effet tout de suite le terme que l'on cherche, et est par conséquent très-utile pour calculer la valeur de quelques termes; mais, comme elle demande un calcul particulier pour chaque terme, elle est peu commode pour construire des Tables, où l'on aurait un grand nombre de termes consécutifs à interpoler; au lieu que la méthode de Mouton, qui consiste à déterminer par les différences de la série donnée celles de la série interpolée, et à remonter de celles-ci aux termes de cette série, a l'avantage de réduire tout le calcul à des additions successives; ce qui doit la rendre aussi propre pour la construction des Tables que celle de Newton l'est peu.

Mais la difficulté est de trouver ces différences, quel que soit le nombre des termes à interpoler et l'ordre des différences constantes de la série primitive. Mouton a fait le premier cette remarque importante que, dans

une série qui conduit à des différences constantes d'un ordre quelconque, si l'on prend les termes de deux en deux, ou de trois en trois, ou...., on a une série du même genre, mais dont la différence constante est égale à la différence constante de la première série multipliée par le nombre 2, ou 3, ou 4, ... élevé à une puissance égale à l'exposant de l'ordre de la différence constante. D'où il a conclu réciproquement, qu'en insérant dans une série à différences constantes des termes intermédiaires qui divisent chaque intervalle en 2, 3, 4, ... parties, la nouvelle série aura des différences constantes du même ordre que celles de la série donnée, et qui seront égales à celles-ci divisées par les nombres 2, 3, 4, ... élevés à la puissance dont l'exposant indiquera l'ordre des différences constantes. On peut donc trouver ainsi la différence constante de la série interpolée, et il ne s'agit plus que d'avoir les différences des ordres inférieurs, et même il suffit d'avoir les premiers termes des suites de ces différences. Mouton ne donne pour cela que quelques règles particulières sans démonstration, et il renvoie pour la solution générale à la méthode de Regnaud, qui consiste à construire une série dont les différences d'un ordre donné soient constantes, à prendre cette série pour la série interpolée, et à comparer ses termes pris de deux en deux, de trois en trois, ou.... avec ceux de la série donnée à interpoler, suivant qu'on veut partager l'intervalle d'un terme à l'autre en deux, en trois ou en un nombre plus grand de parties; mais, quoiqu'on puisse toujours de cette manière résoudre la question dans chaque cas, il reste néanmoins à trouver des formules générales. Lalande est, je crois, le seul qui en ait cherché pour les cas de la seconde et de la troisième différence constante, dans un *Mémoire sur les interpolations* imprimé parmi ceux de l'Académie des Sciences de Paris pour 1761. Sa méthode est à proprement parler celle de Regnaud réduite en Analyse, et, si l'on voulait l'appliquer aux séries dont les différences constantes seraient d'un ordre supérieur au troisième, on tomberait dans des calculs longs et peut-être impraticables; à plus forte raison serait-il comme impossible de parvenir par cette voie à la solution générale pour des différences constantes d'un ordre quelconque. J'ai donné en 1772 une formule qui renferme cette solution dans

un Mémoire qui a pour titre : *Sur une nouvelle espèce de calcul*, et qui est imprimé dans le volume de cette année (*); mais, comme je ne pensais pas alors à l'usage dont elle pouvait être pour les interpolations, je ne cherchai pas à développer cette formule.

Je crois donc devoir revenir sur cet objet, et donner ici une solution complète du Problème dont il s'agit, pour servir de Supplément au Mémoire cité. La méthode que j'ai employée dans ce Mémoire est fondée sur une analogie singulière qui a lieu entre les exposants des puissances et les indices du rang des termes dans une série, ou de l'ordre des différences de ces termes, en vertu de laquelle on peut traiter ces indices comme si c'étaient des exposants, et y appliquer les mêmes règles. Je ne m'arrêterai pas ici à démontrer cette analogie, dont on peut aisément vérifier les résultats par les méthodes connues; je me contenterai de m'en servir, ainsi que je l'ai déjà fait, comme d'un instrument propre à découvrir des formules qu'on ne pourrait trouver par les moyens ordinaires qu'en connaissant leur forme d'avance; je l'emploierai même ici d'une manière plus simple et plus uniforme, ce qui servira à donner encore à ce nouvel instrument d'Analyse un plus grand degré de perfection.

1. Pour distinguer les indices des exposants, je les placerais au bas des quantités, comme ceux-ci le sont au haut; on suivra d'ailleurs le même algorithme pour les uns et les autres.

Soient donc

$$T_0, T_1, T_2, T_3, \dots, T_n, T_{n+1}, T_{n+2}, \dots,$$

les termes consécutifs d'une série quelconque, et

$$D_1, D_2, D_3, \dots,$$

les différences successives de ces termes, c'est-à-dire D_1 la différence première $T_1 - T_0$, D_2 la différence seconde $T_2 - 2T_1 + T_0$, D_3 la différence troisième $T_3 - 3T_2 + 3T_1 - T_0$, et ainsi de suite. On aura sur-le-champ l'expression de la différence $m^{\text{ème}}$ par l'opération suivante.

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. III, p. 441.

Puisque

$$D_1 = T_1 - T_0,$$

en élevant les deux membres à l'indice m , on aura

$$D_m = (T_1 - T_0)_m;$$

développant le second membre comme un binôme, en mettant les exposants au bas pour servir d'indices, on aura

$$(A) \quad D_m = T_m - m T_{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} T_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} T_{m-3} + \dots,$$

formule connue et qu'on peut trouver par induction.

Si l'on fait $m = 0$, on a

$$D_0 = T_0,$$

d'où il s'ensuit que le terme D_0 qui doit précéder le terme D_1 dans la série des différences est égal à T_0 .

Si l'on fait m négatif, les différences se changent en sommes; de sorte que désignant les sommes de différents ordres par

$$S_1, S_2, S_3, \dots,$$

on aura

$$S_1 = D_{-1}, \quad S_2 = D_{-2}, \dots, \quad S_m = D_{-m};$$

par conséquent, en changeant m en $-m$, on aura

$$S_m = T_{-m} + m T_{-m-1} + \frac{m(m+1)}{2} T_{-m-2} + \dots,$$

formule connue aussi.

2. Si au contraire on veut avoir l'expression d'un terme quelconque T_n par le moyen des différences, on reprendra l'équation

$$D_1 = T_1 - T_0,$$

laquelle donne

$$T_1 = T_0 + D_1,$$

ou bien, en mettant pour T_0 le terme D_0 qui lui est égal,

$$T_1 = D_0 + D_1;$$

élevant à l'exposant ou indice n , on aura de même

$$T_n = (D_0 + D_1)_n,$$

et développant par la formule du binôme, en ayant soin de mettre les exposants au bas pour servir d'indices,

$$(B) \quad T_n = D_0 + n D_1 + \frac{n(n-1)}{2} D_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} D_3 + \dots,$$

où l'on se souviendra que D_0 est la même chose que T_0 . C'est la formule différentielle de Newton, dont on se sert communément pour les interpolations, en donnant à l'indice n des valeurs fractionnaires.

Lorsque n est un nombre entier, on peut construire cette formule par des additions successives; la manière la plus simple est de ranger les différences

$$D_0, D_1, D_2, D_3, \dots$$

dans une ligne horizontale, et de former au-dessous successivement d'autres lignes correspondantes, en faisant chaque terme de ces lignes égal à la somme de celui qui est au-dessus et de celui qui est à la droite de celui-ci dans la ligne immédiatement supérieure; la première ligne verticale contiendra par ordre les termes D_0 ou T_0 , T_1 , T_2 , T_3 , ... On peut ainsi, quand la série des différences se termine, ce qui a lieu pour toutes les suites qui conduisent à des différences constantes, construire une Table aussi étendue que l'on voudra, pour avoir successivement tous les termes de la suite proposée.

Mais ce moyen mécanique ne peut plus être employé lorsque le nombre n est fractionnaire. Alors il faut calculer chaque terme séparément par la formule (B), en donnant successivement à n les valeurs convenables; ainsi, s'il était question d'interpoler partout un terme entre deux termes consécutifs de la série

$$T_1, T_2, T_3, \dots,$$

il faudrait trouver les valeurs des termes

$$T_{\frac{1}{2}}, T_{\frac{3}{2}}, T_{\frac{5}{2}}, \dots,$$

en faisant successivement

$$n = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots,$$

et ainsi des autres cas semblables. La méthode de Mouton a l'avantage de réduire tous ces cas au premier, et de rendre par conséquent le procédé des additions successives applicable aux interpolations, comme nous le verrons plus bas.

3. Si l'on voulait que la formule (B) fût ordonnée suivant les puissances mêmes de n , ce qui en rendrait peut-être l'usage plus commode dans le cas de n fractionnaire, rien ne serait plus aisé que de lui donner cette forme par le moyen de notre Analyse.

On n'a qu'à reprendre l'équation

$$T_1 = D_1 + D_0,$$

et l'écrire d'abord ainsi

$$T_1 = D_0(1 + D_1);$$

ce qui est la même chose, puisque

$$D_1 \times D_1 = D_{2+1} = D_2,$$

en observant pour les indices les lois des exposants; on transformera ensuite $1 + D_1$ en $e^{\log(1+D_1)}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique désigné par $\log$ est l'unité; ce qui donnera

$$T_1 = D_0 \times e^{\log(1+D_1)},$$

et, élevant les deux membres à l'exposant ou indice n ,

$$T_n = D_0 \times e^{n \log(1+D_1)};$$

or on a par les formules connues

$$e^{n \log(1+D_1)} = 1 + n \log(1+D_1) + \frac{n^2}{2} [\log(1+D_1)]^2 + \frac{n^3}{2 \cdot 3} [\log(1+D_1)]^3 + \dots;$$

done on aura

$$(C) \quad T_n = D_0 + n \log(1+D_1) + \frac{n^2}{2} [\log(1+D_1)]^2 + \frac{n^3}{2 \cdot 3} [\log(1+D_1)]^3 + \dots,$$

j'ai négligé ici de multiplier par D_0 les termes qui contiennent des puissances de $\log(1+D_1)$, parce que cette multiplication n'y apporterait aucun changement, l'indice n ne pouvant rien changer à ceux auxquels il se trouverait ajouté.

Maintenant il n'y aura qu'à développer $\log(1+D_1)$ par les formules ordinaires, et l'on aura

$$\begin{aligned} T_n = D_0 + n \left(D_1 - \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{3} D_1 - \frac{1}{4} D_1 + \dots \right) \\ + \frac{n^2}{2} \left(D_1 - \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{3} D_1 - \dots \right)^2 \\ + \frac{n^3}{2 \cdot 3} \left(D_1 - \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{3} D_1 - \dots \right)^3 \\ + \dots \end{aligned}$$

où il reste encore à développer les puissances de

$$D_1 - \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{3} D_1 - \dots$$

à la manière ordinaire, en traitant les indices comme des exposants. Cette formule ne sera donc que le développement de la formule (B) en effectuant les multiplications et ordonnant suivant les puissances de n ; mais, de la manière dont elle est présentée, on y voit la loi des termes qu'il serait très-difficile de découvrir par le développement dont il s'agit.

4. Au reste la formule (C) donne le moyen de trouver d'une manière générale l'expression de la différence d'un ordre quelconque de toute

série algébrique dont le terme général T_n serait de la forme

$$T_n = P_0 + nP_1 + \frac{n^2}{2}P_2 + \frac{n^3}{2.3}P_3 + \dots,$$

$P_0, P_1, P_2, \dots$ étant des coefficients donnés, et n étant supposé successivement 0, 1, 2, 3, ... Car, en comparant cette expression de T_n à celle de la formule (C), on aura

$$P_0 = D_0 = T_0, \quad P_1 = \log(1 + D_1), \quad P_2 = [\log(1 + D_1)]^2, \dots,$$

et, en général,

$$P_n = [\log(1 + D_1)]^n.$$

Cette équation donne

$$P_1 = \log(1 + D_1), \quad 1 + D_1 = e^{P_1} = 1 + P_1 + \frac{1}{2}P_1^2 + \frac{1}{2.3}P_1^3 + \dots;$$

done

$$D_1 = P_1 + \frac{1}{2}P_1^2 + \frac{1}{2.3}P_1^3 + \dots,$$

et de là, pour un indice quelconque s ,

$$D_s = \left(P_1 + \frac{1}{2}P_1^2 + \frac{1}{2.3}P_1^3 + \frac{1}{2.3.4}P_1^4 + \dots \right)^s,$$

où il n'y aura qu'à développer la puissance s , en convertissant les exposants de P en indices, et observant relativement à ces indices les mêmes lois que pour les exposants. Cette formule peut être utile dans quelques occasions; elle l'est surtout pour transformer une série de la forme

$$P_0 + nP_1 + \frac{n^2}{2}P_2 + \frac{n^3}{2.3}P_3 + \dots$$

en une série équivalente de la forme

$$D_0 + nD_1 + \frac{n(n-1)}{2}D_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}D_3 + \dots$$

5. Considérons maintenant deux séries correspondantes, l'une représentée par

$$T_0, T_1, T_2, T_3, \dots$$

dont les différences successives soient

$$D_0, D_1, D_2, D_3, \dots$$

comme plus haut, l'autre représentée par

$$t_0, t_1, t_2, t_3, \dots$$

et dont les différences successives soient

$$d_0, d_1, d_2, d_3, \dots;$$

supposons que les termes de la première série soient identiques avec les termes de la seconde pris à des intervalles égaux, de manière que l'on ait, en général,

$$T_s = t_m,$$

c'est-à-dire que si par exemple $m = 2$ on ait

$$T_0 = t_0, \quad T_1 = t_2, \quad T_2 = t_4, \quad T_3 = t_6, \dots;$$

si $m = 3$ on ait

$$T_0 = t_0, \quad T_1 = t_3, \quad T_2 = t_6, \quad T_3 = t_9, \dots;$$

et ainsi de suite; on propose de trouver la relation entre les différences $D_0, D_1, D_2, \dots$ et les différences $d_0, d_1, d_2, \dots$.

L'équation

$$T_s = t_m$$

se réduit, en extrayant la racine s , à

$$T_1 = t_m,$$

et, mettant pour T_1 sa valeur $D_0 + D_1$ (2) de même que pour t_1 sa valeur $d_0 + d_1$, elle donnera

$$D_0 + D_1 = (d_0 + d_1)_m;$$

d'où l'on tirera la valeur de D_1 en d_1 , ou de d_1 en D_1 suivant qu'on voudra.

dra avoir les différences de la première série exprimées par celles de la seconde, ou réciproquement.

6. Nous aurons d'abord

$$D_1 = (d_s + d_t)_m - D_s;$$

mais

$$D_s = T_s = t_s = d_s;$$

done

$$D_1 = (d_s + d_t)_m - d_s,$$

et, élevant à l'indice s ,

$$D_s = [(d_s + d_t)_m - d_s]_s.$$

Or $(d_s + d_t)_m$ se développe dans la série

$$d_s + m d_t + \frac{m(m-1)}{2} d_t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} d_t^3 + \dots;$$

done, faisant cette substitution, on aura

$$(D) \quad D_s = \left[m d_t + \frac{m(m-1)}{2} d_t^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} d_t^3 + \dots \right]_s;$$

on développera le second membre de cette équation comme si c'était la puissance $s^{\text{ième}}$ d'un polynôme en d_t , en ayant soin de placer toujours au bas de la lettre d les exposants qui devraient affecter la quantité d suivant les règles des exposants.

Ainsi, si l'on suppose, pour abrégér,

$$\left[m x + \frac{m(m-1)}{2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} x^3 + \dots \right]^s \\ = A x^s + B x^{s+1} + C x^{s+2} + E x^{s+3} + \dots,$$

on aura sur-le-champ

$$D_s = A d_s + B d_{s+1} + C d_{s+2} + E d_{s+3} + \dots$$

Cette formule peut servir, comme l'on voit, à trouver les différences

de tous les ordres d'une série proposée dans laquelle on ne prendrait les termes que de deux en deux, ou de trois en trois, ou, en général, de m en m .

A l'égard des coefficients $A, B, C, \dots$, on peut les trouver par le développement de la puissance s du polynôme, ou bien par la comparaison des termes qui contiendront les mêmes puissances de x , après avoir pris les différentielles logarithmiques des deux membres. Ce dernier procédé donne les formules suivantes dont la loi se présente d'elle-même

$$A = m^s,$$

$$B = s \frac{m-1}{2} A,$$

$$C = \frac{2s}{2} \frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} A + \frac{s-1}{2} \frac{m-1}{2} B,$$

$$E = \frac{3s}{3} \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} A + \frac{2s-1}{3} \frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} B + \frac{s-2}{3} \frac{m-1}{2} C,$$

7. La même équation

$$D_s + D_t = (d_s + d_t)_m,$$

en extrayant pour ainsi dire la racine m , donnera celle-ci

$$d_s + d_t = (D_s + D_t)_{\frac{1}{m}},$$

d'où l'on tire, à cause de $d_s = D_s$,

$$d_t = (D_s + D_t)_{\frac{1}{m}} - D_s,$$

et de là

$$d_s = [(D_s + D_t)_{\frac{1}{m}} - D_s]_s,$$

formule qu'on développera comme la précédente; et il est clair qu'il n'y

aura pour cela qu'à changer, dans les formules du numéro précédent, D en d et m en $\frac{1}{m}$. Ainsi l'on aura, en général,

$$d_s = aD_s + bD_{s+1} + cD_{s+2} + dD_{s+3} + \dots,$$

en faisant

$$a = \frac{1}{m'},$$

$$b = s \frac{1-m}{2m} a,$$

$$c = \frac{2s(1-m)(1-2m)}{2 \cdot 3 m^2} a + \frac{s-1}{2} \frac{1-m}{2m} b,$$

$$d = \frac{3s(1-m)(1-2m)(1-3m)}{2 \cdot 3 \cdot 4 m^3} a + \frac{2s-1}{3} \frac{(1-m)(1-2m)}{2 \cdot 3 m^2} b + \frac{s-2}{3} \frac{1-m}{2m} c,$$

Ces formules renferment la solution générale du Problème de Mouton. En effet, si l'on a à interpoler la série

$$T_s, T_1, T_2, \dots,$$

dont les différences

$$D_s, D_1, D_2, \dots$$

sont connues, et qu'on veuille partager en m parties chaque intervalle d'un terme à l'autre en y insérant $m-1$ termes intermédiaires qui soient liés entre eux et avec ceux de la série donnée par une même loi, en supposant que

$$t_s, t_1, t_2, t_3, \dots$$

soit la nouvelle série interpolée, il faudra par les conditions du Problème que les termes de cette série, pris de m en m , coïncident avec les termes de la série donnée, en sorte qu'on ait

$$t_s = T_s, \quad t_{sm} = T_1, \quad t_{2m} = T_2, \quad t_{3m} = T_3, \dots, \quad t_{sm} = T_s;$$

ce qui est l'équation fondamentale d'où nous sommes partis pour la so-

lution du Problème que nous venons de traiter (5). Ainsi l'on aura par les formules ci-dessus l'expression de la différence d'un ordre quelconque s de la série interpolée, au moyen des différences données de la série proposée. On connaîtra donc par là les différences successives

$$d_s, d_1, d_2, d_3, \dots$$

de la série

$$t_s, t_1, t_2, t_3, \dots$$

dont le premier terme $t_s = T_s$, et au moyen de ces différences on pourra trouver successivement tous les termes de cette série par des additions successives, comme nous l'avons vu dans le n° 2, parce qu'en employant ces différences, un terme quelconque t_n de la série dont il s'agit sera exprimé par la formule

$$t_s + n d_s + \frac{n(n-1)}{2} d_1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} d_2 + \dots,$$

dans laquelle n sera un nombre entier comme dans le n° 2.

8. Si D_r est la dernière différence de la série donnée

$$T_s, T_1, T_2, \dots,$$

en sorte que

$$D_{r+1} = 0, \quad D_{r+2} = 0, \dots,$$

on aura :

1° En faisant $s = r$,

$$d_r = aD_r \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{m'};$$

ce qui s'accorde avec ce que Mouton avait trouvé par induction.

2° En faisant $s = r-1$,

$$d_{r-1} = aD_{r-1} + bD_r, \quad \text{et} \quad a = \frac{1}{m'^{-1}}, \quad b = \frac{(r-1)(1-m)}{2m'}.$$

3° En faisant $s = r-2$,

$$d_{r-2} = aD_{r-2} + bD_{r-1} + cD_r,$$

et

$$a = \frac{1}{m^{r-2}}, \quad b = \frac{(r-2)(1-m)}{2m^{r-1}},$$

$$c = \frac{(r-2)(1-m)(1-2m)}{2 \cdot 3 m^2} + \frac{(r-2)(r-3)(1-m)^2}{8m^3},$$

et ainsi de suite. A l'égard des différences plus hautes que la $r^{\text{ième}}$, elles seront toutes nulles, comme on le voit par la formule en faisant $s > r$. Ainsi il suffira de chercher les valeurs de $d_1, d_2, d_3, \dots$ jusqu'à d_r ; et l'on pourra ensuite employer les additions successives pour former et continuer aussi loin qu'on voudra la Table des termes $t_0, t_1, t_2, \dots$.

9. Si dans la formule (D) du n° 6 on fait m infiniment grand, et par conséquent les différences représentées par d infiniment petites, on aura la relation entre les différences finies et les différentielles d'une fonction quelconque. Considérant donc une fonction y de x , dont les différences finies soient désignées par Dy , et les différentielles par dy , celles de x l'étant de même par Dx et dx ; il n'y aura qu'à faire $m = \frac{Dx}{dx}$, et écrire Dy, dy au lieu de D et d , en plaçant suivant l'usage les indices de l'ordre des différences et des différentielles au haut des lettres D et d . On aura ainsi

$$(E) \quad D^s y = \left(\frac{Dx dy}{dx} + \frac{Dx^2 d^2 y}{2 dx^2} + \frac{Dx^3 d^3 y}{2 \cdot 3 dx^3} + \dots \right)^s,$$

où il n'y aura qu'à développer le second membre comme une puissance s du polynôme $\frac{Dx dy}{dx} + \dots$, en ayant soin d'écrire $d^m y$ au lieu de $(d^m y)^n$.

Par cette formule on peut trouver les différences finies de tous les ordres au moyen des différentielles, et, si l'on fait s négatif, ce qui changera les différences en sommes et les différentielles en intégrales, on aura la somme d'un ordre quelconque des termes d'une série par les intégrales, et les différentielles de la fonction qui exprime le terme général de la série.

10. Réciproquement, si dans la même formule (D) on change D en d et m en $\frac{1}{m}$ comme nous l'avons dit dans le n° 7, et que par conséquent suivant l'hypothèse du numéro précédent, on écrive $d'y$ au lieu de Dy , $D'y$ au lieu de d , et $\frac{dx}{Dx}$ au lieu de m qui devient alors une quantité infiniment petite, on aura

$$(F) \quad \frac{d'y}{dx} = \frac{1}{Dx} \left(Dy - \frac{1}{2} D^2 y + \frac{1}{3} D^3 y - \dots \right),$$

où il faudra de même développer le second membre comme une puissance s , en ayant soin d'écrire $D^m y$ au lieu de $(D^m y)^n$.

Cette formule donnera les différentielles de tous les ordres d'une fonction quelconque par le moyen de ses différences finies, et, si l'on fait s négatif, elle donnera les intégrales de la fonction par le moyen des sommes et des différences des valeurs de la même fonction répondantes aux valeurs de x dont Dx est la différence finie; ce qui revient à la détermination des aires par les ordonnées équidistantes. [Voyez là-dessus le Mémoire cité dans le volume de 1772 (*).]

11. On peut traiter par les mêmes principes les séries doubles, triples, ... c'est-à-dire celles dont les termes varient de deux ou de plusieurs manières différentes, et qui forment des Tables à double, à triple entrée, ... Soit, par exemple, la série double

$T_{1,1}$	$T_{1,2}$	$T_{1,3}$	$T_{1,4}$	$T_{1,5}$	...
$T_{2,1}$	$T_{2,2}$	$T_{2,3}$	$T_{2,4}$	$T_{2,5}$	...
$T_{3,1}$	$T_{3,2}$	$T_{3,3}$	$T_{3,4}$	$T_{3,5}$	...
$T_{4,1}$	$T_{4,2}$	$T_{4,3}$	$T_{4,4}$	$T_{4,5}$	...
$T_{5,1}$	$T_{5,2}$	$T_{5,3}$	$T_{5,4}$	$T_{5,5}$	...

dans laquelle un terme quelconque comme $T_{m,n}$ a deux indices, le premier m pour marquer son rang dans la direction horizontale, et le second n pour marquer son rang dans la direction verticale.

(*) Œuvres de Lagrange, t. III, p. 441.

Si l'on désigne de même par

$$D_{1,s}, D_{1,s}, D_{2,s}, \dots, D_{s,s}, D_{1,s}, D_{2,s}, \dots, D_{s,s}, D_{1,s}, D_{2,s}, \dots, \dots,$$

et, en général, par $D_{m,n}$ les différences successives de ces termes, de manière que le premier indice m indique des différences prises dans le sens horizontal, et le second n des différences prises dans le sens vertical, on aura

$$D_{1,s} = T_{1,s} - T_{s,s}$$

$$D_{2,s} = T_{2,s} - 2T_{1,s} + T_{s,s}$$

$$\dots$$

$$D_{s,s} = T_{s,s} - T_{s,s}$$

$$D_{s,s} = T_{s,s} - 2T_{s,s} + T_{s,s}$$

$$\dots$$

$$D_{1,1} = T_{1,1} - T_{s,1} - (T_{1,s} - T_{s,s}) = T_{1,1} - T_{1,s} - T_{s,1} + T_{s,s}$$

$$\dots$$

et ainsi de suite; et l'on pourra trouver tout de suite l'expression de $D_{m,n}$ par une opération semblable à celle du n° 1.

12. Car, puisque

$$D_{1,s} = T_{1,s} - T_{s,s} \quad \text{et} \quad D_{s,1} = T_{s,1} - T_{s,s},$$

on aura d'abord, en élevant aux indices m et n ,

$$D_{m,s} = (T_{1,s} - T_{s,s})_m, \quad D_{s,n} = (T_{s,1} - T_{s,s})_n,$$

et, multipliant ces équations l'une par l'autre, en observant de rapporter toujours les premiers indices aux premiers et les seconds aux seconds, il viendra

$$D_{m,n} = (T_{1,s} - T_{s,s})_m (T_{s,1} - T_{s,s})_n,$$

c'est-à-dire, en développant d'abord les deux facteurs,

$$(G) \quad \begin{cases} D_{m,n} = \left[T_{m,s} - mT_{m-1,s} + \frac{m(m-1)}{2} T_{m-2,s} - \dots \right] \\ \times \left[T_{s,n} - nT_{s,n-1} + \frac{n(n-1)}{2} T_{s,n-2} - \dots \right]. \end{cases}$$

Maintenant il n'y aura plus qu'à faire le produit de ces quantités, en observant la règle prescrite, et l'on aura

$$\begin{aligned} D_{m,n} = & T_{m,n} - mT_{m-1,n} + \frac{m(m-1)}{2} T_{m-2,n} - \dots \\ & - nT_{m,n-1} + nmT_{m-1,n-1} - n\frac{m(m-1)}{2} T_{m-2,n-1} + \dots \\ & + \frac{n(n-1)}{2} T_{m,n-2} - \frac{n(n-1)}{2} mT_{m-1,n-2} + \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

13. Réciproquement on aura l'expression d'un terme quelconque $T_{m,n}$ par les différences, au moyen des équations

$$T_{1,s} = D_{1,s} + D_{1,s} \quad \text{et} \quad T_{s,1} = D_{s,1} + D_{s,1},$$

à cause de

$$T_{s,s} = D_{s,s},$$

comme il résulte de la formule précédente; car, en élevant d'abord la première à l'indice m et la seconde à l'indice n , les multipliant ensuite l'une par l'autre, on aura

$$T_{m,n} = (D_{1,s} + D_{1,s})_m (D_{s,1} + D_{s,1})_n,$$

d'où l'on tirera comme dans le numéro précédent

$$\begin{aligned} T_{m,n} = & \left[D_{1,s} + mD_{1,s} + \frac{m(m-1)}{2} D_{1,s} + \dots \right] \\ & \times \left[D_{s,1} + nD_{s,1} + \frac{n(n-1)}{2} D_{s,1} + \dots \right] \\ = & D_{1,s} + mD_{1,s} + \frac{m(m-1)}{2} D_{1,s} + \dots \\ & + nD_{s,1} + nmD_{s,1} + n\frac{m(m-1)}{2} D_{s,1} + \dots \\ & + \frac{n(n-1)}{2} D_{s,1} + \frac{n(n-1)}{2} mD_{s,1} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{m(m-1)}{2} D_{s,1} + \dots \\ & \dots \end{aligned}$$

14. On peut aussi étendre par des opérations semblables les formules des nos 6 et 7 pour les interpolations aux séries doubles. En effet, si l'on imagine la nouvelle série

$$t_{0,0}, t_{1,0}, t_{2,0}, \dots, t_{0,1}, t_{1,1}, t_{2,1}, \dots, t_{0,2}, t_{1,2}, t_{2,2}, \dots, \dots,$$

dont les différences soient désignées par

$$d_{0,0}, d_{1,0}, d_{2,0}, \dots, \dots,$$

et qui soit telle qu'un terme quelconque $t_{m,r}$ soit égal à $T_{s,r}$; en faisant $s = 1$ et $r = 0$, on aura

$$t_{m,0} = T_{1,0},$$

et, faisant $s = 0$, $r = 1$, on aura

$$t_{0,n} = T_{0,n}$$

deux équations qui, étant élevées l'une à l'indice s et l'autre à l'indice r , et multipliées ensuite l'une par l'autre, redonnent l'équation générale. Or ces deux équations, en y substituant $D_{0,0} + D_{1,0}$ à la place de $T_{1,0}$, $D_{0,0} + D_{0,1}$ à la place de $T_{0,1}$, et de même $d_{0,0} + d_{1,0}$ à la place de $t_{1,0}$ et $d_{0,0} + d_{0,1}$ à la place de $t_{0,1}$, par conséquent $(d_{0,0} + d_{1,0})_m$ à la place de $t_{m,0}$ et $(d_{0,0} + d_{0,1})_n$ à la place de $t_{0,n}$, deviennent

$$D_{0,s} + D_{1,s} = (d_{0,s} + d_{1,s})_m \quad \text{et} \quad D_{0,s} + D_{0,1} = (d_{0,s} + d_{0,1})_n;$$

d'où, à cause de

$$D_{0,s} = T_{0,s} = t_{0,s} = d_{0,0}$$

comme il résulte des formules ci-dessus, on aura

$$D_{1,s} = (d_{0,s} + d_{1,s})_m - d_{0,s}, \quad D_{1,s} = [(d_{0,s} + d_{1,s})_m - d_{0,s}]_r,$$

$$D_{0,1} = (d_{0,0} + d_{0,1})_n - d_{0,0}, \quad D_{0,1} = [(d_{0,0} + d_{0,1})_n - d_{0,0}]_s;$$

par conséquent, en multipliant l'une par l'autre,

$$D_{1,r} = [(d_{0,s} + d_{1,s})_m - d_{0,s}]_r \times [(d_{0,s} + d_{0,1})_n - d_{0,0}]_s,$$

et, développant les deux facteurs,

$$(H) \quad \begin{cases} D_{1,r} = \left[m d_{1,s} + \frac{m(m-1)}{2} d_{1,s} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} d_{1,s} + \dots \right]_r \\ \times \left[n d_{0,1} + \frac{n(n-1)}{2} d_{0,1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} d_{0,1} + \dots \right]_s. \end{cases}$$

De sorte qu'il n'y aura plus qu'à développer suivant les indices s et r , comme on l'a fait dans le n° 6, et ensuite effectuer la multiplication comme dans les deux numéros précédents. On aura ainsi pour les séries doubles une formule semblable à celle du n° 6 pour les séries simples.

Pareillement, par l'extraction des indices m et n , on aura

$$d_{0,s} + d_{1,s} = (D_{0,s} + D_{1,s})_{\frac{1}{m}},$$

$$d_{0,s} + d_{0,1} = (D_{0,s} + D_{0,1})_{\frac{1}{n}};$$

et de là on tirera par un procédé semblable au précédent

$$d_{1,r} = [(D_{0,s} + D_{1,s})_{\frac{1}{m}} - D_{0,s}]_r \times [(D_{0,s} + D_{0,1})_{\frac{1}{n}} - D_{0,s}]_s,$$

savoir

$$(I) \quad \begin{cases} d_{1,r} = \left[\frac{1}{m} D_{1,s} + \frac{1}{2m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) D_{2,s} + \frac{1}{2 \cdot 3m} \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \left(\frac{1}{m} - 2 \right) D_{3,s} + \dots \right]_r \\ \times \left[\frac{1}{n} D_{0,1} + \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) D_{0,2} + \frac{1}{2 \cdot 3n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \left(\frac{1}{n} - 2 \right) D_{0,3} + \dots \right]_s, \end{cases}$$

où il faudra encore développer le second membre comme dans la formule (H) ci-dessus. Cette expression de $d_{1,r}$ sera analogue à celle de $d_{1,r}$ du n° 7, et pourra servir aux mêmes usages pour l'interpolation des Tables à double entrée.

15. Enfin, si l'on suppose m et n infinis, les différences désignées par d deviendront infiniment petites, et l'on aura pour les fonctions à deux variables des formules analogues à celles des nos 9 et 10. Ainsi, en regardant z comme fonction de x et y , et désignant par la caractéris-

tique D les différences finies et par la caractéristique d les différentielles, on fera

$$m = \frac{Dx}{dx}, \quad n = \frac{Dy}{dy},$$

et la formule (H) se transformera en celle-ci

$$(K) D^r z = \left(\frac{Dx dz}{dx} + \frac{Dx^2 d^2 z}{2 dx^2} + \frac{Dx^3 d^3 z}{2,3 dx^3} + \dots \right)^r \left(\frac{Dy dz}{dy} + \frac{Dy^2 d^2 z}{2 dy^2} + \frac{Dy^3 d^3 z}{2,3 dy^3} + \dots \right)^r,$$

dont il faudra développer le second membre par les méthodes ordinaires, en regardant et traitant les exposants des différentielles de z comme des exposants de puissances. Cette formule donnera la valeur de la différence finie de z de l'ordre s par rapport à x , et de l'ordre r par rapport à y , exprimée par les différentielles de z relativement à x et y .

16. Faisant les mêmes substitutions dans la formule (I), et écrivant les indices de l'ordre des différences et des différentielles en forme d'exposants suivant la notation reçue, on aura cette transformée

$$\frac{d^{r+s} z}{dx^s dy^r} = \left(\frac{D^{1,s} z - \frac{1}{2} D^{2,s} z + \frac{1}{2,3} D^{3,s} z - \dots}{Dx} \right)^r \left(\frac{D^{r,1} z - \frac{1}{2} D^{r,2} z + \frac{1}{2,3} D^{r,3} z - \dots}{Dy} \right)^s,$$

qu'on développera suivant les méthodes ordinaires, en observant relativement aux exposants des différences les mêmes règles que pour ceux des puissances, et ayant soin de calculer séparément les premiers exposants qui sont relatifs à la variable x et les seconds qui se rapportent à la variable y .

MÉMOIRE

SUR

L'ÉQUATION SÉCULAIRE DE LA LUNE.



MÉMOIRE

sur

L'ÉQUATION SÉCULAIRE DE LA LUNE.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, années 1792 et 1793.)

Dans la *Théorie des variations séculaires des éléments des Planètes* qui est imprimée dans les volumes des années 1781 et 1782 (*), je n'avais point considéré les variations des mouvements moyens, parce que j'avais cru pouvoir les regarder comme invariables à cause de l'invariabilité des grands axes, que j'avais démontrée d'une manière directe et générale. Ayant ensuite examiné plus scrupuleusement ce point important de la *Théorie des Planètes*, j'ai reconnu que les mouvements moyens pouvaient être sujets à des variations séculaires dépendantes des carrés des excentricités et des inclinaisons, et j'ai donné le premier dans un Mémoire imprimé dans le volume de 1783, la *Théorie* et les formules de ces variations (**). J'en fis alors l'application à Jupiter et à Saturne; mais, n'ayant trouvé pour les variations de leurs mouvements moyens que des quantités presque insensibles, je pensai qu'il était inutile d'étendre cette recherche aux autres Planètes. D'autres objets m'ayant ensuite fait perdre celui-ci de vue, je négligeai d'appliquer aussi mes formules à la Lune, ce qui ne

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. V, p. 125 et 211.

(**) *Oeuvres de Lagrange*, t. V, p. 381.

demandait que des substitutions numériques très-faciles et plus simples que pour les Planètes principales. Vers la fin de 1787, Laplace annonça à l'Académie des Sciences de Paris qu'il avait trouvé moyen d'expliquer l'équation séculaire de la Lune par la variation de l'excentricité du Soleil; et, par le Mémoire qu'il a donné ensuite sur ce sujet et qui est imprimé dans le volume de 1786, on voit que cette équation est produite par les mêmes termes qui composent ma formule des variations du mouvement moyen. Comme ce résultat est un des plus intéressants de la Théorie générale des variations séculaires, j'ai cru devoir le développer dans ce Mémoire, pour compléter mon travail sur une partie si importante de l'Astronomie physique.

1. En regardant la Terre, la Lune et le Soleil comme formant un système particulier de trois Planètes qui s'attirent mutuellement et dont les deux dernières tournent autour de la première, il est clair que ce système peut être comparé à celui du Soleil, de Jupiter et de Saturne, que nous avons considéré à part dans notre Théorie des variations séculaires, et pour lequel nous avons donné des formules générales. Ainsi il suffira de substituer dans ces formules la Terre au Soleil, la Lune à Jupiter et le Soleil à Saturne; de sorte que, comme les lettres sans trait s'y rapportent à Saturne et celles avec un trait à Jupiter, nous rapporterons ici les premières à l'orbite du Soleil autour de la Terre et les secondes à l'orbite de la Lune. Quant aux masses, nous remarquerons que nous avons pris pour plus de simplicité dans nos formules la masse du Soleil pour l'unité des masses; mais il est facile de voir, en remontant aux équations fondamentales, qu'à la rigueur c'est la masse du Soleil augmentée de celle de la Planète dont on cherche le mouvement, qui doit être prise pour l'unité des masses des Planètes perturbatrices, parce que son mouvement autour du Soleil n'est pas simplement dû à l'action du Soleil, mais à la somme des actions mutuelles du Soleil et de la Planète; ainsi, pour appliquer à la Lune, en tant qu'elle est dérangée par le Soleil, les équations de Jupiter dérangé par Saturne, il n'y aura qu'à regarder comme relatives à la Lune les quantités désignées par les lettres affectées d'un trait,

et comme relatives au Soleil celles qui le sont par des lettres sans trait; et quant à la masse T qui dans ces équations exprime le rapport de la masse de Saturne à celle du Soleil, ou plus exactement à la somme des masses de Jupiter et du Soleil, il faudra la supposer égale au rapport de la masse du Soleil à la somme des masses de la Terre et de la Lune, c'est-à-dire, à cause de la petitesse de la masse de la Lune à l'égard de celle de la Terre, simplement égale au rapport de la masse du Soleil à celle de la Terre; ce qui revient encore, comme l'on voit, à substituer le Soleil à Saturne et la Terre au Soleil.

2. Cela posé, voici d'abord la formule que nous avons trouvée dans la troisième Section du Mémoire cité de 1783 pour la variation séculaire du mouvement moyen de Jupiter produite par l'action de Saturne (*).

$$\frac{d\Sigma'}{dt} = (0) + (1)(x'^2 + y'^2) + (2)(x''^2 + y''^2) + (3)(xx' + yy') + (4)[(s-s')^2 + (u-u')^2].$$

Pour l'appliquer à la variation séculaire du mouvement moyen de la Lune, causée par l'action du Soleil, il n'y aura donc qu'à supposer que p' est l'angle décrit par le mouvement moyen et uniforme de la Lune autour de la Terre, que Σ' est l'altération de son mouvement moyen, et que les quantités x' , y' , s' , u' se rapportent à la Lune et les quantités x , y , s , u au Soleil, de manière qu'en faisant suivant les dénominations de notre Théorie des variations séculaires [n° 17 de la deuxième Partie, Mémoire de 1782 (**)]

$$x = \lambda \sin \varphi, \quad y = \lambda \cos \varphi, \quad s = \varrho \sin \omega, \quad u = \varrho \cos \omega,$$

$$x' = \lambda' \sin \varphi', \quad y' = \lambda' \cos \varphi', \quad s' = \varrho' \sin \omega', \quad u' = \varrho' \cos \omega'$$

on ait λ et λ' pour les excentricités du Soleil et de la Lune, φ , φ' pour les lieux de leurs apogées, ϱ , ϱ' pour les tangentes de leurs inclinaisons sur l'écliptique fixe de 1700, et ω , ω' pour les lieux de leurs nœuds sur cette écliptique. A l'égard des coefficients (0), (1), (2), ..., ils sont des fonc-

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. V, p. 412.

(**) *Oeuvres de Lagrange*, t. V, p. 239.

tions données de la quantité $z = \frac{r'}{r}$, où r sera maintenant la distance moyenne du Soleil et r' la distance moyenne de la Lune à la Terre.

Mais avant de donner les valeurs de ces coefficients nous devons rectifier une inexactitude qui s'est glissée dans l'expression du coefficient (2) du n° 22 du Mémoire cité (*). Dans le numérateur de cette formule le second terme est $r^2 r'^3 (r, r')$, au lieu qu'il doit être $r^3 r' (r, r')$, comme il est aisé de s'en convaincre en faisant les substitutions indiquées dans le numéro précédent. Au moyen de cette correction la valeur générale du coefficient (2) devient égale à celle du coefficient (4) prise avec un signe contraire; et c'est ainsi qu'il faut corriger les expressions du coefficient (2) des n°s 23 et 27 pour-Saturne et Jupiter. De cette manière l'équation pour la détermination de la quantité Σ' se simplifie et devient

$$\frac{d\Sigma'}{dp'} = (0) + (1)(x'^2 + y'^2) + (3)(xx' + yy') + (4)[(s-s')^2 + (u-u')^2 - x^2 - y^2],$$

où l'on aura (n° 27 du Mémoire cité)

$$(0) = T \frac{2z^2 M - 6z^2 N}{(1-z^2)^2},$$

$$(1) = T \frac{-6z^2 M + 3(z^2 - 3z^4)N}{4(1-z^2)^2},$$

$$(3) = T \frac{3(5z^2 - z^4)M - 6(5z - 6z^3 - z^5)N}{4(1-z^2)^2},$$

$$(4) = T \frac{3z^2 M + 3z^4 N}{2(1-z^2)^2},$$

$$M = 1 + \alpha^2 z^2 + \beta^2 z^4 + \gamma^2 z^6 + \dots,$$

$$N = \alpha z - \alpha\beta z^3 - \beta\gamma z^5 - \dots,$$

en supposant

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6}, \dots$$

A l'égard de la quantité T qui représentait la masse de Saturne, ou plutôt le rapport de cette masse à celle du Soleil, elle devra, comme

(*) Oeuvres de Lagrange, t. V, p. 407.

nous l'avons vu ci-dessus, être supposée égale au rapport de la masse du Soleil à celle de la Terre. Or, nommant n le rapport du mois périodique à l'année sidérale, on sait que le rapport de la masse de la Terre à celle du Soleil est exprimé par $\frac{z^2}{n^2}$, de sorte qu'on aura $T = \frac{n^2}{z^2}$; et, suivant les déterminations que nous avons données dans le n° 6 de la deuxième Partie de la *Théorie des variations séculaires* (Mémoire de 1782), on a

$$\log n = 8,8739093, \quad n = 0,074801,$$

$$\log z = 7,3950320, \quad z = 0,002483.$$

Ainsi, z étant une fraction fort petite, on pourra, en développant les expressions des coefficients (0), (1), ..., s'en tenir aux termes qui contiendront les puissances de z les moins élevées. On fera donc

$$M = 1 + \frac{z^2}{4}, \quad N = \frac{z}{2} - \frac{z^3}{16},$$

et, substituant ces valeurs, on trouvera en ne retenant que le premier terme

$$(0) = -n^2, \quad (1) = -\frac{9n^2}{8}, \quad (3) = \frac{165}{32} n^2 z, \quad (4) = \frac{3n^2}{2}.$$

3. Il reste encore à déterminer les quantités x, y, s, u, s', u' . Comme les quantités x, y, s, u se rapportent maintenant à l'orbite du Soleil autour de la Terre, il est visible qu'elles ne sont autre chose que celles que nous avons désignées par x'', y'', s'', u'' prises avec un signe contraire (parce que celles-ci se rapportaient à l'orbite de la Terre autour du Soleil), et dont nous avons donné les expressions générales et complètes dans la deuxième Partie de la *Théorie* citée.

Mais, pour les quantités x', y', s', u' qui se rapportent maintenant à l'orbite de la Lune autour de la Terre, il faudra les déterminer par des équations analogues à celles qui ont servi à déterminer ces quantités pour Jupiter en tant qu'il est dérangé par Saturne. Il n'y aura donc qu'à appliquer ici les équations différentielles du n° 49 de la deuxième Partie de la *Théorie* citée [*Mémoire* de 1782 (*)] ; mais, comme dans les formules

(*) Oeuvres de Lagrange, t. V, p. 288.

primitives de la première Partie on avait substitué simplement $r^{-\frac{3}{2}} dt$, $r^{-\frac{3}{2}} dt, \dots$ pour $dp, dp', \dots$ parce que les Planètes étant toutes retenues dans leurs orbites par l'attraction du Soleil leurs vitesses angulaires moyennes sont simplement en raison inverse des racines carrées des cubes des distances moyennes, il faudra ici restituer $r^{-\frac{3}{2}} dp'$ pour dt , puisque le Soleil et la Lune, quoique décrivant leurs orbites autour de la Terre, sont cependant retenus dans ces orbites par des forces différentes, la Lune par l'attraction de la Terre et le Soleil par sa propre attraction sur la Terre; de sorte que leurs vitesses angulaires moyennes ne sont plus simplement dans le rapport inverse des racines carrées des cubes des distances. On aura donc de cette manière les quatre équations

$$\frac{dx'}{dp'} - r^{\frac{3}{2}}(1,0)y' + r^{\frac{3}{2}}[1,0]y = 0,$$

$$\frac{dy'}{dp'} + r^{\frac{3}{2}}(1,0)x' - r^{\frac{3}{2}}[1,0]x = 0,$$

$$\frac{ds'}{dp'} + r^{\frac{3}{2}}(1,0)(u' - u) = 0,$$

$$\frac{du'}{dp'} - r^{\frac{3}{2}}(1,0)(s' - s) = 0.$$

Les valeurs des coefficients $(1,0)$ et $[1,0]$ sont données par ces formules [n° 3 de la deuxième Partie citée (*)]

$$(1,0) = \frac{PT}{\sqrt{r^3 p'}} = -\frac{\frac{1}{2} z^2 N}{(1 - z^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{r^3}} T,$$

$$[1,0] = \frac{3z(1 + z^2)N - \frac{1}{2} z^2 M}{(1 - z^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{r^3}} T,$$

les quantités M, N, z et T étant les mêmes que ci-dessus; de sorte qu'à

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. V, p. 215.

cause de la petitesse de la valeur de z , on aura simplement

$$(1,0) = \frac{3}{4} \frac{n^2}{\sqrt{r^3}}, \quad [1,0] = \frac{15}{16} \frac{n^2 z}{\sqrt{r^3}}.$$

4. Si donc on fait ces substitutions, et que, pour éviter toute confusion, on désigne par $\rho, \varpi, \phi, \xi, \eta$ les valeurs de r', p', Σ', x', y' qui se rapportent maintenant à la Lune, qu'on fasse de plus, pour abréger,

$$s' - s = \sigma, \quad u' - u = \nu,$$

on aura ces équations relatives aux variations séculaires de la Lune

$$\frac{d\xi}{d\varpi} - \frac{3}{4} n^2 \eta - \frac{15}{16} n^2 \rho y'' = 0, \quad \frac{d\eta}{d\varpi} + \frac{3}{4} n^2 \xi + \frac{15}{16} n^2 \rho x'' = 0,$$

$$\frac{d\sigma}{d\varpi} + \frac{3}{4} n^2 \nu - \frac{ds''}{d\varpi} = 0, \quad \frac{d\nu}{d\varpi} - \frac{3}{4} n^2 \sigma - \frac{du''}{d\varpi} = 0,$$

$$\frac{d\psi}{d\varpi} = -n^2 - \frac{9n^2}{8} (\xi' + \eta') - \frac{165}{32} n^2 \rho (\xi x'' + \eta y'') + \frac{3n^2}{2} (\sigma' + \nu' - x'' - y''),$$

dans lesquelles ϖ sera l'angle du mouvement moyen uniforme de la Lune, ψ la variation séculaire de ce mouvement, ρ la distance moyenne de la Lune à la Terre, celle du Soleil étant prise pour l'unité, en sorte que $\rho = z$, et n la longueur du mois périodique en prenant l'année périodique pour l'unité.

Les valeurs des quantités x'', y'', s'', u'' ont été données dans la deuxième Partie de la *Théorie des variations séculaires* [n° 63 et 70 du *Mémoire* de 1782 (*)], et elles sont de cette forme

$$x'' = A'' \sin(at + \alpha) + B'' \sin(bt + \beta) + \dots,$$

$$y'' = A'' \cos(at + \alpha) + B'' \cos(bt + \beta) + \dots,$$

$$s'' = \bar{A}'' \sin \bar{\alpha} + \bar{B}'' \sin(\bar{b}t + \bar{\beta}) + \dots,$$

$$u'' = \bar{A}'' \cos \bar{\alpha} + \bar{B}'' \cos(\bar{b}t + \bar{\beta}) + \dots,$$

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. V, p. 317 et 330.

les termes de chacune de ces valeurs étant au nombre de six. La variable t représente dans ces formules le temps compté depuis l'époque de 1700 et exprimé en années Juliennes; de sorte que, comme nous avons désigné par l'angle ϖ le mouvement moyen de la Lune, on aura à peu près

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{360^\circ}{n},$$

ou rigoureusement

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{\Pi}{n},$$

en désignant par Π l'angle que le Soleil parcourt relativement aux étoiles fixes dans l'espace d'une année Julienne, et que nous avons trouvé $\approx 1295977''.53$ (n° 15 de la deuxième Partie de la Théorie citée).

5. Voilà les formules et les données nécessaires pour déterminer les variations séculaires de la Lune. Nous remarquerons d'abord que, comme la valeur de ρ ou de z est très-petite, on pourra dans la première approximation négliger dans les équations ci-dessus les termes multipliés par $n^2 \rho$ vis-à-vis de ceux qui sont simplement multipliés par n^2 . De plus les termes $\frac{ds''}{d\varpi}$ et $\frac{du''}{d\varpi}$ se trouveront multipliés par $\frac{nb}{\Pi}$ ou $\frac{nc}{\Pi}$ ou ..., et, comme la plus grande des valeurs $\bar{b}, \bar{c}, \dots$ est moindre que $26''$ (n° 53 et 70 de la deuxième Partie citée), il s'ensuit que les multiplicateurs de ces termes deviendront extrêmement petits, de sorte qu'on pourra aussi les négliger sans crainte d'erreur.

Par ces réductions nos équations deviendront

$$\frac{d\xi}{d\varpi} - \frac{3}{4} n^2 \eta = 0, \quad \frac{d\eta}{d\varpi} + \frac{3}{4} n^2 \xi = 0,$$

$$\frac{d\sigma}{d\varpi} + \frac{3}{4} n^2 \nu = 0, \quad \frac{d\nu}{d\varpi} - \frac{3}{4} n^2 \sigma = 0,$$

$$\frac{d\psi}{d\varpi} = -n^2 - \frac{9n^2}{8} (\xi^2 + \eta^2) + \frac{3n^2}{2} (\sigma^2 + \nu^2 - x''^2 - y''^2).$$

Les quatre premières donnent d'abord

$$\xi d\xi + \eta d\eta = 0, \quad \sigma d\sigma + \nu d\nu = 0;$$

d'où l'on tire

$$\xi^2 + \eta^2 = \text{const.}, \quad \sigma^2 + \nu^2 = \text{const.}$$

Comme les termes constants de la valeur de $\frac{d\psi}{d\varpi}$ ne peuvent donner dans celle de l'angle ψ que des termes proportionnels à ϖ , et qui doivent par conséquent se fondre dans le mouvement moyen, il est clair qu'on peut les rejeter dans la détermination de la variation séculaire ψ ; de sorte que cette détermination se réduira à l'équation

$$\frac{d\psi}{d\varpi} = -\frac{3n^2}{2} (x''^2 + y''^2),$$

dans laquelle (n° 2 ci-dessus)

$$x''^2 + y''^2 = \lambda''^2,$$

λ'' étant l'excentricité de l'orbite de la Terre ou du Soleil. Ainsi l'on aura simplement

$$\psi = -\frac{3n^2}{2} \int \lambda''^2 d\varpi,$$

où il ne faudra plus que substituer la valeur de λ''^2 tirée de la Théorie citée.

6. Nous y avons donné deux formules, l'une pour trouver la variation annuelle de cette quantité, l'autre pour trouver sa valeur au bout d'un temps indéfini. Si a et b sont les valeurs de λ'' et $\frac{d\lambda''}{dt}$ pour 1700, on aura, pour un nombre t d'années comptées de cette époque,

$$\lambda'' = a + bt,$$

pourvu que ce nombre ne soit pas trop grand. Or on a (n° 26 et suivants

de la deuxième Partie citée)

$$a = 0,0168021$$

et

$$2b = -0'',1766 - 0'',0008\mu - 0'',1602\mu' - 0'',0494\mu'' + 0'',0418\mu''' - 0'',0080\mu^2,$$

les quantités $\mu, \mu', \mu'', \mu''', \mu^2$ étant les corrections qu'on pourrait faire aux masses que nous avons déterminées de Saturne, Jupiter, Mars, Vénus et Mercure, de manière que ces masses soient augmentées dans les raisons de 1 à $1 + \mu, 1 + \mu', 1 + \mu'', \dots$. Donc, substituant $a^2 + 2abt$ pour λ^2 , et négligeant le terme tout constant a^2 qui ne donnerait dans ψ qu'un terme proportionnel au mouvement moyen π , on aura, à cause de

$$d\pi = \frac{\Pi dt}{n},$$

cette valeur de l'équation séculaire comptée de 1700

$$\psi = -\frac{3n\Pi}{4} \times 2abt;$$

où l'on remarquera que, comme la valeur de $2b$ est exprimée en secondes, ainsi que celle de Π , il faudra diviser l'une ou l'autre par 206264,8 nombre de secondes de l'arc égal au rayon. De cette manière on trouve pour l'équation séculaire du mouvement moyen de la Lune, la formule

$$\psi = 0'',0010459t + 0'',0000047\mu t + 0'',0009488\mu' t \\ + 0'',0002326\mu'' t - 0'',0002476\mu''' t + 0'',0000474\mu^2 t,$$

t étant le nombre des années Juliennes écoulées avant ou après l'époque de 1700.

Ainsi l'on aura pour le premier siècle, en faisant $t = 100$,

$$\psi = 10'',459 + 9'',488\mu + 2'',926\mu' - 2'',476\mu''.$$

Mayer l'a établie de $9''$, ce qui s'accorde assez bien avec notre détermination en rejetant les corrections des masses. On voit aussi que, s'il fallait diminuer beaucoup la masse de Vénus, comme quelques Astronomes le

prétendent, l'équation séculaire en serait augmentée; par exemple, si l'on voulait réduire cette masse à la moitié, il faudrait faire $\mu'' = -\frac{1}{2}$, ce qui donnerait $1'',238$ d'augmentation pour l'équation du premier siècle.

7. Quoique la formule précédente puisse servir pour plusieurs siècles sans erreur sensible, il est néanmoins important pour l'Astronomie physique d'avoir la véritable loi de cette inégalité séculaire de la Lune. On la trouvera en substituant pour λ^2 sa valeur donnée par les formules du n° 63 (Partie citée). Car, puisque

$$\lambda^2 = x''^2 + y''^2,$$

il n'y aura qu'à ajouter ensemble les carrés de x'' et de y'' , en négligeant les termes tout constants par la raison donnée ci-dessus. On aura ainsi après l'intégration

$$\psi = -\frac{3n\Pi A'' B''}{a-b} \sin[(a-b)t + \alpha - \beta] \\ -\frac{3n\Pi A'' C''}{a-c} \sin[(a-c)t + \alpha - \gamma] \\ \dots\dots\dots$$

en faisant toutes les combinaisons deux à deux des six coefficients $A'', B'', C'', D'', E'', F''$, ainsi que des six angles $at + \alpha, bt + \beta, ct + \gamma, dt + \delta, et + \epsilon, ft + \pi$; mais, comme les valeurs de $a, b, \dots$ sont données en secondes, il faudra, de plus, multiplier chaque terme de la formule précédente par l'angle égal au rayon, pour avoir ψ exprimé en angles. Nous nous dispenserons de donner ici la valeur numérique de cette expression de l'équation séculaire de la Lune, parce qu'elle paraît peu nécessaire dans l'état actuel de l'Astronomie, et qu'elle est facile à trouver d'ailleurs, puisqu'on a les valeurs numériques de toutes les quantités d'où elle dépend. Peut-être serait-il utile d'avoir égard à ces équations dans la comparaison des lieux de la Lune très-éloignés, pour en déduire le vrai mouvement moyen, c'est-à-dire la partie de ce mouvement qui est

réellement uniforme, et qui dans le mouvement moyen des Tables de cette Planète est encore combinée avec la partie de l'équation séculaire qui croît proportionnellement au temps, tant que les angles $(a-b)t$, $(a-c)t$,... sont peu considérables.

Enfin cette formule pourrait servir pour avoir une valeur de ψ plus approchée que celle que nous avons donnée plus haut, en résolvant les sinus en série suivant les puissances de $(a-b)t$, $(a-c)t$,..., négligeant les termes constants, ainsi que ceux qui ne contiendraient que la première puissance de t , et qui sont déjà compris dans le mouvement moyen des Tables.

MÉMOIRE

SUR

UNE LOI GÉNÉRALE D'OPTIQUE.



MÉMOIRE

sur

UNE LOI GÉNÉRALE D'OPTIQUE^(*).

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1803.)

Le *Mémoire sur la Théorie des lunettes*, qui est imprimé dans le Recueil de l'année 1778 (**), contient des formules générales pour déterminer la route des rayons qui traversent un nombre quelconque de lentilles dont les foyers sont donnés. Ces formules donnent un résultat remarquable par sa simplicité et sa généralité, que je n'ai fait qu'indiquer dans le *Mémoire* que je viens de citer, et qui mérite particulièrement l'attention des savants, parce qu'il offre une loi aussi utile en Optique que la loi des vitesses virtuelles l'est en Mécanique. C'est ce que je vais développer dans ce nouveau *Mémoire*.

Je commencerai par rappeler les formules principales, relatives à l'objet dont il s'agit. Si l'on considère un rayon qui traverse successivement plusieurs lentilles rangées sur un même axe, et qui change de direction à la rencontre de chaque lentille; et qu'on nomme, comme dans le *Mémoire* cité,

$$x, x', x'', \dots, x^{(2n)}$$

(*) Lu à l'Académie, le 17 mars 1803.

(**) *OEuvres de Lagrange*, t. IV, p. 535.

les tangentes des angles que la direction du rayon fait successivement avec l'axe, et

$$x', x'', x''', \dots, x^{(2n-1)}$$

les distances à l'axe des points des lentilles par lesquels passe le rayon, distances que nous prendrons pour les demi-diamètres des ouvertures des lentilles, on aura ces relations entre les quantités $x, x', x'', \dots$

$$x'' = P'' x' + Q'' x,$$

$$x''' = P''' x' + Q''' x,$$

$$x^{(4)} = P^{(4)} x' + Q^{(4)} x,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$(A) \quad x^{(n)} = P^{(n)} x' + Q^{(n)} x,$$

dans lesquelles les quantités $P'', P''', \dots, P^{(n)}, Q'', Q''', \dots, Q^{(n)}$ sont des fonctions des distances entre les lentilles et des distances focales des lentilles, c'est-à-dire des distances de leurs foyers pour les rayons parallèles et infiniment proches de l'axe, en faisant abstraction de l'épaisseur des lentilles et de la différente réfrangibilité des rayons.

Nous avons donné dans le Mémoire cité les valeurs de ces fonctions; mais il suffira ici de rappeler la loi qui règne entre elles, et qui est renfermée dans cette formule générale

$$(B) \quad P^{(n)} Q^{(n-1)} - Q^{(n)} P^{(n-1)} = 1.$$

[Dans le Mémoire dont il s'agit, on avait trouvé la formule

$$P^{(\lambda+1)} Q^{(\lambda)} - Q^{(\lambda+1)} P^{(\lambda)} = \pm 1,$$

où le signe supérieur était pour le cas de λ pair et l'inférieur pour celui de λ impair; mais on s'était trompé sur les signes; car les deux équations d'où l'on avait déduit cette formule étant (15)

$$P^{(\lambda+1)} - m^2 P^{(\lambda)} + P^{(\lambda-1)} = 0,$$

$$Q^{(\lambda+1)} - m^2 Q^{(\lambda)} + Q^{(\lambda-1)} = 0,$$

elles donnent évidemment

$$(P^{(\lambda+1)} + P^{(\lambda-1)}) Q^{(\lambda)} - (Q^{(\lambda+1)} + Q^{(\lambda-1)}) P^{(\lambda)} = 0,$$

et par conséquent

$$P^{(\lambda+1)} Q^{(\lambda)} - Q^{(\lambda+1)} P^{(\lambda)} = P^{(\lambda)} Q^{(\lambda-1)} - Q^{(\lambda)} P^{(\lambda-1)};$$

d'où l'on voit que la valeur de $P^{(\lambda+1)} Q^{(\lambda)} - Q^{(\lambda+1)} P^{(\lambda)}$ est constante pour toutes les valeurs de λ . Or, faisant $\lambda = 0$, on a

$$P' Q - Q' P = 1,$$

puisque

$$P' = 1, \quad Q = 1, \quad P = 0, \quad Q' = 0.$$

Donc on a, en général,

$$P^{(\lambda+1)} Q^{(\lambda)} - Q^{(\lambda+1)} P^{(\lambda)} = 1;$$

et, mettant $(m-1)$ à la place de λ , on aura

$$P^{(m)} Q^{(m-1)} - Q^{(m)} P^{(m-1)} = 1.$$

Au reste cette méprise sur les signes n'influe en rien sur la suite du Mémoire, mais je suis bien aise de profiter de cette occasion pour la réparer.]

Quoique ces formules n'aient été trouvées que pour les rayons qui sont réfractés par des lentilles, elles s'appliquent également aux rayons réfléchés par des miroirs; car, les fonctions $P'', P''', \dots, Q'', Q''', \dots$ ne dépendant que des distances focales des lentilles et de leurs distances entre elles, il n'y aura, pour changer une lentille en miroir, qu'à prendre la distance focale du miroir à la place de celle de la lentille, en lui donnant le signe $-$, pour que le foyer se trouve au devant du miroir.

Ainsi l'on peut regarder les formules précédentes comme contenant toute la Théorie de la Dioptrique et Catoptrique, en tant qu'on fait abstraction des effets de l'aberration, soit de réfrangibilité, soit de sphéricité.

Cela posé, considérons, en général, un télescope ou un microscope

quelconque composé de n lentilles, dont la première soit l'objectif et dont la $n^{\text{ième}}$ soit l'oculaire. Soit un objet considéré comme un point placé à la distance a au devant de l'objectif, et à la distance b de l'axe qui passe par les centres de toutes les lentilles; et soit un rayon qui, partant de cet objet, entre dans l'objectif à la distance x' de son centre. Il est facile de voir que ce rayon fera avec l'axe un angle dont la tangente sera $\frac{x' - b}{a}$; de sorte qu'on aura

$$x = \frac{x' - b}{a}.$$

A la sortie de ce rayon par l'oculaire, la tangente x deviendra $x^{(2n)}$, puisque l'oculaire est supposé être la $n^{\text{ième}}$ lentille. Or, en faisant $m = 2n$ dans la formule générale (A), on a

$$x^{(2n)} = P^{(2n)} x' + Q^{(2n)} x,$$

et, substituant pour x la valeur qu'on a trouvée ci-dessus, on aura

$$x^{(2n)} = \left(P^{(2n)} + \frac{Q^{(2n)}}{a} \right) x' - \frac{b}{a} Q^{(2n)}.$$

Cette valeur de $x^{(2n)}$ exprime la tangente de l'angle que le rayon fait avec l'axe après sa sortie de l'oculaire; et l'on voit qu'elle est différente pour les différents rayons qui, partant du même point de l'objet, entrent dans l'objectif à différentes distances x' de l'axe. Mais, pour que tous ces rayons puissent former dans l'œil une image distincte, il faut qu'ils y entrent parallèles ou à très-peu près parallèles; or ils ne peuvent être parallèles entre eux qu'autant que la valeur de $x^{(2n)}$ sera la même pour tous les rayons; ainsi il faudra que cette valeur soit indépendante de la quantité x' , et que par conséquent on ait

$$(C) \quad P^{(2n)} + \frac{Q^{(2n)}}{a} = 0.$$

C'est la condition nécessaire pour que l'assemblage des n lentilles

puisse former un télescope ou un microscope. Pour le microscope la distance a est ordinairement très-petite, et l'on peut la prendre à volonté; mais pour les télescopes cette distance doit être fort grande, et l'on peut la supposer infinie. Alors la condition se réduit simplement à

$$P^{(2n)} = 0.$$

La valeur de $x^{(2n)}$ deviendra donc $-\frac{b}{a} Q^{(2n)}$. Or $\frac{b}{a}$ est la tangente de l'angle sous lequel l'œil placé au centre de l'objectif verrait la ligne b perpendiculaire à l'axe; mais, par le télescope ou le microscope, cette même ligne sera vue sous l'angle dont la tangente sera $x^{(2n)}$, égale à $-\frac{b}{a} Q^{(2n)}$; donc le diamètre des objets vus par le télescope ou le microscope sera augmenté dans la raison de 1 à $-Q^{(2n)}$. Ainsi l'amplification des diamètres apparents, ou le grossissement linéaire produit par l'instrument, sera exprimé par la fonction $-Q^{(2n)}$.

Voyons maintenant comment on peut déterminer la valeur de cette fonction sans connaître sa composition ni les quantités dont elle dépend.

L'équation (C) donne

$$P^{(2n)} = -\frac{Q^{(2n)}}{a};$$

substituant cette valeur dans l'équation (B) après y avoir fait $m = 2n$, on aura

$$-Q^{(2n)} \left(\frac{Q^{(2n-1)}}{a} + P^{(2n-1)} \right) = 1,$$

d'où l'on tire

$$-Q^{(2n)} = \frac{1}{\frac{Q^{(2n-1)}}{a} + P^{(2n-1)}}.$$

Considérons l'expression de $x^{(2n-1)}$, en faisant, dans la formule (A), $m = 2n - 1$, on aura

$$x^{(2n-1)} = P^{(2n-1)} x' + Q^{(2n-1)} x.$$

Substitutions pour x sa valeur en x' donnée ci-dessus $\frac{x'-b}{a}$, on aura

$$x^{(2n-1)} = x' \left(p^{(2n-1)} + \frac{Q^{(2n-1)}}{a} \right) - \frac{b}{a} Q^{(2n-1)}.$$

Supposons maintenant $b = 0$, on aura simplement

$$x^{(2n-1)} = x' \left(p^{(2n-1)} + \frac{Q^{(2n-1)}}{a} \right);$$

donc

$$p^{(2n-1)} + \frac{Q^{(2n-1)}}{a} = \frac{x^{(2n-1)}}{x'};$$

par conséquent

$$-Q^{(2n)} = \frac{x'}{x^{(2n-1)}}.$$

Ainsi l'amplification des diamètres des objets apparents, que nous avons vu être proportionnelle à $-Q^{(2n)}$, sera aussi exprimée par le rapport $\frac{x'}{x^{(2n-1)}}$.

Or x' est dans ce cas la distance au centre de l'objectif du point où un rayon parti de l'axe traverse l'objectif, et $x^{(2n-1)}$ est de même la distance au centre de l'oculaire, du point où le même rayon traverse l'oculaire; ainsi l'augmentation du diamètre de l'objet sera dans la proportion de la première distance à la seconde.

Si l'on suppose un point lumineux placé dans l'axe, à l'endroit où est l'objet vu par le télescope ou le microscope, il est visible qu'il enverra dans l'objectif un cône de lumière dont la base sera l'aire de l'objectif; et cette lumière, si elle ne rencontre aucun obstacle dans le passage de l'objectif à l'oculaire, sortira tout entière par l'oculaire en formant un cylindre autour de l'axe. Car la valeur de $x^{(2n)}$, qui est la tangente de l'inclinaison des rayons à l'axe en sortant de l'oculaire, étant $-\frac{b}{a} Q^{(2n)}$, devient nulle lorsque $b = 0$; de sorte que tous les rayons doivent sortir parallèles à l'axe.

Dans ce cas donc, en considérant les rayons qui passent par les bords

de l'objectif, il est clair que, si l'on prend le demi-diamètre de l'objectif pour x' , la valeur correspondante de $x^{(2n-1)}$ sera le demi-diamètre de la section du cylindre de lumière qui sortira par l'oculaire. D'où il s'ensuit que les diamètres des objets apparents seront toujours augmentés dans la raison du diamètre de l'objectif au diamètre de la section du cylindre lumineux sortant de l'oculaire: de sorte qu'il n'y aura qu'à mesurer ce diamètre et le comparer à celui de l'objectif, pour avoir l'augmentation du diamètre des objets produite par l'instrument optique.

Pour les télescopes, l'objet étant à une distance très-grande, les rayons sont censés entrer parallèles dans l'objectif. Le cône lumineux devient alors un cylindre dont la base est l'aire même de l'objectif, et ce cylindre, sort de nouveau par l'oculaire sous la forme de cylindre.

On peut donc établir cette conclusion générale, que dans un télescope ou microscope quelconque, quels que soient le nombre, l'arrangement et la force des lentilles ou des miroirs qui le composent, l'augmentation des diamètres des objets, qui constitue le grossissement produit par l'instrument, est toujours dans le rapport du diamètre de l'ouverture de l'objectif au diamètre de l'ouverture de l'oculaire, en prenant pour cette ouverture la section du cylindre lumineux qui sort de l'oculaire, et supposant que le faisceau de lumière que l'objet envoie dans l'objectif n'est intercepté nulle part dans son trajet et peut ressortir tout entier par l'oculaire.

La bonté d'un télescope ou d'un microscope exige que tous les rayons qui entrent directement par l'objectif sortent par l'oculaire, pour que les objets y paraissent aussi éclairés qu'ils peuvent l'être; c'est pourquoi on fait ordinairement l'ouverture du dernier oculaire, et même celles des oculaires précédents, plus grandes qu'il n'est nécessaire pour le passage de tous les rayons. Leurs limites à cet égard sont déterminées par les valeurs des quantités x'' , x''' , ..., en y faisant $x = 0$ pour les télescopes, ou $x = \frac{x'}{a}$ pour les microscopes, où a est la distance de l'objet à l'objectif. Mais, pour pouvoir juger *à posteriori* si la condition dont il s'agit est remplie, il suffira de diminuer à volonté l'ouverture de l'objectif par le

moyen d'un anneau de carton, et d'observer si l'ouverture proprement dite du dernier oculaire, c'est-à-dire la section du cylindre lumineux qui en sort, est diminuée dans la même proportion; car la valeur de $x^{(2a-1)}$

est toujours proportionnelle à x' , en faisant $x = 0$, ou $x = \frac{x'}{a}$.

Or rien n'est plus facile que de mesurer le diamètre de cette section. Pour les télescopes, il n'y a qu'à les diriger vers le Soleil, et recevoir la lumière qui en sort, sur un carton perpendiculaire à l'axe du télescope; le diamètre du cercle lumineux, formé sur le carton, sera le diamètre cherché. Mais, comme on ne veut tenir compte que des rayons qui entrent parallèlement à l'axe, il sera bon d'allonger le tuyau du télescope du côté de l'objectif, pour intercepter les rayons qui viendraient des bords du Soleil et qui seraient inclinés à l'axe. Pour les microscopes, il n'y aura qu'à placer une lumière au lieu de l'objet, ou plutôt, pour éviter l'effet de la grosseur de la lumière, la placer un peu plus loin, et la faire ensuite passer par un petit trou placé dans l'axe à l'endroit où l'objet doit être situé; ensuite recevoir de même sur un carton le cylindre lumineux sortant par l'oculaire, et mesurer le diamètre du cercle lumineux formé sur le carton.

Le rapport du diamètre de l'objectif à celui du cercle lumineux donnera sans autre connaissance le grossissement linéaire de l'instrument.

Je crois que cette manière de juger du grossissement d'une lunette n'est pas tout à fait inconnue aux artistes opticiens; mais j'ignore si elle a été démontrée jusqu'ici d'une manière générale.

Comme il y a en Mécanique la loi générale des vitesses virtuelles, par laquelle on peut connaître l'augmentation de force produite par une machine, sans connaître la nature ni la construction de la machine, mais par le simple rapport des vitesses simultanées du point où est appliquée la puissance et du point auquel cette puissance est transmise par la machine; de même on peut dire qu'il y a en Optique une loi analogue, par laquelle, sans connaître la disposition intérieure d'un télescope ou d'un microscope, on peut juger de sa force par le simple rapport du diamètre de l'ouverture de l'objectif au diamètre de l'ouverture de l'oculaire.

Une conséquence très-importante de cette loi générale d'Optique est qu'un objet vu par un instrument quelconque d'Optique doit toujours paraître aussi éclairé qu'il paraîtrait à la vue simple, en faisant abstraction de toute perte de lumière occasionnée par les lentilles ou les miroirs.

Car il est évident que la densité des rayons qui sortent de l'oculaire est à leur densité, en entrant dans l'objectif, en raison inverse des espaces qu'ils occupent dans l'oculaire et dans l'objectif, c'est-à-dire des aires de leurs ouvertures; par conséquent la densité des rayons, en sortant de l'instrument, sera à leur densité, en y entrant, comme l'ouverture de l'objectif est à l'ouverture de l'oculaire. D'un autre côté, nous venons de démontrer que l'amplification des diamètres apparents des objets vus par un instrument optique est mesurée par le rapport du diamètre de l'objectif au diamètre de l'oculaire; par conséquent les surfaces apparentes seront augmentées dans la raison des carrés de ces diamètres ou dans celle des aires des ouvertures de l'objectif et de l'oculaire.

Donc la densité des rayons est augmentée dans la même raison que les surfaces des objets vus par l'instrument optique. D'où il est aisé de conclure que la clarté doit rester la même. Si l'instrument diminuait les objets, la densité de la lumière serait diminuée dans la même proportion que les surfaces apparentes, et la clarté demeurerait encore la même. C'est ainsi que, sans la perte de lumière qui se fait dans le passage par l'air, la clarté ou l'éclat d'un même corps lumineux vu à une distance quelconque doit être constant; car la densité des rayons et la grandeur de l'image apparente diminuent dans la même proportion inverse des carrés des distances, de sorte que la force de la lumière dans chaque point de l'image est toujours la même.

Suivant la plupart des opticiens, la clarté dans les télescopes et les microscopes est simplement en raison directe de l'ouverture de l'objectif, et en raison inverse du carré des amplifications linéaires; ils paraissent croire que la clarté augmente à mesure que l'ouverture de l'objectif augmente, parce qu'en effet la quantité de lumière reçue par cette ouverture est aussi plus grande dans la même proportion; mais sa densité n'augmente pas, tant que la disposition des surfaces réfringentes ou ré-

fléchissantes reste la même. L'augmentation de l'ouverture de l'objectif produit une augmentation proportionnelle dans l'ouverture de l'oculaire; et, si l'oculaire est trop petit, le surcroît de lumière fourni par l'objectif est perdu.

Il est important de détruire une erreur qui me paraît accréditée chez les opticiens et dans plusieurs Ouvrages d'Optique: c'est le but principal de ce Mémoire.

RAPPORTS.

RAPPORTS^(*).

(*Histoire de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin,*
années 1781 et 1782.)

Rapport d'une quadrature du cercle.

L'Académie m'ayant chargé de lui rendre compte de cet Ouvrage sur la quadrature du cercle, je l'ai examiné avec toute l'attention dont je suis capable; mais je suis obligé d'avouer qu'il ne m'a pas été possible de découvrir les principes de l'Auteur, ni la marche de ses opérations. Je n'y ai trouvé nulle trace de démonstrations géométriques, et moins encore de calculs algébriques; et je n'ai pas pu comprendre ce que signifient les Tables des progressions arithmétiques de la quadrature du cercle, lesquelles paraissent servir de fondement à tout l'Ouvrage.

Je n'entends pas non plus ce que l'Auteur nomme *points carrés mathématiques*, ni ce qu'il appelle *liaison du diamètre et de la périphérie*, et qu'il fait consister dans la somme de leurs valeurs.

Ne pouvant donc rien dire de la méthode et des raisonnements de l'Auteur, je me contenterai d'en examiner le résultat, c'est-à-dire la valeur qu'il donne pour le rapport de la circonférence au diamètre. Cette valeur est exprimée par la fraction $\frac{207\frac{1}{2}}{66}$, laquelle se réduit à celle-ci plus

(*) Nous reproduisons ici les deux seuls Rapports de Lagrange que l'*Histoire de l'Académie de Berlin* nous ait transmis. Bien que les Mémoires dont l'illustre Géomètre avait à rendre compte soient absolument dépourvus d'intérêt, nous avions le devoir de conserver les Rapports qui les concernent.

(Note de l'Éditeur.)

simple $\frac{311}{99}$, et l'Auteur la donne pour exacte et rigoureuse; de sorte que par cette seule raison on est déjà en droit de la regarder comme fausse.

Mais, pour pouvoir mieux juger de combien elle s'éloigne de la vérité, je la réduis en décimales, ce qui me donne 3,1414..., où les deux chiffres 14 reviennent à l'infini. Cette valeur étant comparée avec la valeur connue 3,14159..., on voit qu'elle est fautive dès la quatrième décimale, et qu'elle est nécessairement moindre que la véritable valeur du rapport de la circonférence au diamètre. Ainsi il existe nécessairement une infinité de polygones inscrits au cercle dont les périmètres sont plus grands que la prétendue valeur que l'Auteur assigne à la circonférence, ce qui doit suffire pour en prouver la fausseté.

Snellius, à l'exemple d'Archimède et pour renchérir sur le travail de ce grand homme, a pris la peine de calculer en nombres la valeur des périmètres de quelques polygones inscrits et circonscrits au cercle, en partant des polygones de 5 côtés et doublant continuellement le nombre des côtés. Et l'on voit par les Tables qu'il en donne dans son *Cyclometricus*, page 17, que le polygone inscrit de 640 côtés a son périmètre plus grand que 3,14157, ce qui est, comme l'on voit, plus grand que la valeur prétendue de la circonférence.

Mais on peut trouver des polygones inscrits d'un moindre nombre de côtés dont les périmètres soient aussi plus grands que cette valeur. Il n'y a pour cela qu'à consulter les Tables que M. Nicole a données dans les *Mémoires de Paris* pour l'année 1747, à l'occasion d'une nouvelle prétendue quadrature du cercle.

Dans ces Tables on trouve les valeurs numériques des aires et des périmètres des polygones inscrits et circonscrits au cercle, dans lesquels le nombre des côtés augmente dans la progression double depuis le triangle équilatéral jusqu'au polygone régulier de $3 \cdot 2^{17}$ ou 393216 côtés, valeurs qui sont poussées par l'extraction des racines carrées jusqu'à 15 décimales.

On voit donc par ces Tables que le polygone inscrit de 96 côtés a pour périmètre (en supposant le diamètre 1) 3,14103195..., ce qui est moins

que la valeur proposée; mais que le polygone suivant de 192 côtés a pour périmètre 3,14145247..., quantité plus grande que cette valeur.

Ainsi la prétendue valeur de la circonférence du cercle se trouve moindre que le périmètre du polygone régulier de 192 côtés; ce qui est une preuve palpable de sa fausseté, puisqu'il saute aux yeux que la périphérie du cercle est nécessairement plus grande que le périmètre de tout polygone inscrit.

Si l'Auteur savait assez de Géométrie et d'Arithmétique pour faire lui-même le calcul de ce polygone, il pourrait se convaincre de la vérité de ce que je viens d'avancer. Et, s'il voulait se fier pour cet effet aux Tables trigonométriques déjà calculées, il n'aurait qu'à remarquer que le côté du polygone inscrit de 192 côtés étant la corde de l'angle $\frac{360^\circ}{192}$, et par conséquent le double du sinus de la moitié de cet angle, c'est-à-dire de l'angle $\frac{360^\circ}{384} = 56'15''$, il suffit de multiplier le sinus de $56'15''$ par 384 pour avoir le périmètre cherché du polygone de 192 côtés.

Faisant donc le calcul par les logarithmes, on a

$$\begin{aligned}\log \sin 56'15'' &= 8,2138293 \\ \log 384 &= 2,5843312 \\ \hline &0,7981605\end{aligned}$$

Nombre : 6,28290.

Ainsi 6,28290 est la valeur approchée de ce périmètre en prenant le rayon pour l'unité; donc, si l'on prend le diamètre pour l'unité, on a 3,14145 pour la valeur dont il s'agit, laquelle s'accorde, comme l'on voit, avec celle de M. Nicole, et qui est évidemment plus grande que celle de la prétendue quadrature.

Je dois remarquer au reste que la fraction $\frac{311}{99}$, adoptée par l'Auteur, est une de celles de la suite des fractions convergentes vers le rapport de la périphérie au diamètre, mais plus petites que ce rapport, comme on le voit par la Table que j'en ai donnée dans les *Additions à l'Algèbre de M. Euler*, page 440.

Ainsi cette fraction a l'avantage qu'elle approche plus de la vérité que ne pourrait faire aucune autre fraction plus petite que la vraie valeur et dont le dénominateur serait moindre que 99; mais elle approche moins que la fraction qui la suit immédiatement et qui est $\frac{333}{106}$; et moins encore que la fraction $\frac{355}{113}$ qui est celle de Metius, mais qui est plus grande que la vraie valeur. Je conclus donc :

1^o Que la quadrature proposée est fautive, parce qu'elle diffère des résultats connus, et qu'elle donne pour la circonférence du cercle une valeur moindre que le périmètre du polygone inscrit de 192 côtés;

2^o Que l'on ne peut porter aucun jugement sur la méthode et les raisonnements de l'Auteur, parce qu'ils sont intelligibles;

3^o Qu'il conviendrait d'exhorter cet Auteur, qui paraît d'ailleurs assez laborieux, à employer son temps et son travail à des objets qui soient plus à sa portée et surtout qui puissent être d'une plus grande utilité; car, outre qu'il n'y a aucune récompense promise ou à espérer pour celui qui carrera le cercle, il ne résulterait même de cette quadrature aucun avantage réel pour la Géométrie. En effet, s'il était possible de trouver une expression finie du rapport de la circonférence au diamètre, cette expression serait nécessairement si compliquée de radicaux, que pour en faire usage il faudrait toujours la réduire en décimales, et par conséquent à une valeur seulement approchée; or on a déjà des valeurs qui approchent si près de la vraie mesure de la circonférence du cercle, que l'erreur est moindre qu'une fraction qui aurait l'unité pour numérateur, et pour dénominateur l'unité suivie de 126 zéros; car telle est la valeur trouvée par M. Lagny dans les *Mémoires de Paris* de 1719.

Rapport fait à l'Académie le 3 août 1782 d'un Mémoire intitulé :

Méthode pour connaître si la Terre est aplatie vers les pôles et renflée sous l'équateur.

La méthode que l'Auteur de ce Mémoire propose pour déterminer la figure de la Terre avec plus de précision et moins de peine qu'on ne l'a

fait jusqu'ici consiste à placer verticalement différents styles, les uns sous l'équateur, les autres sous un même méridien quelconque, en sorte que les premiers soient éloignés de ce méridien de 15, 30, 45 degrés, et que les seconds soient pareillement éloignés de 15, 30, 45 degrés de l'équateur. L'Auteur veut que l'on observe l'ombre de chacun de ces styles sur un plan horizontal, lorsque le Soleil sera à la fois dans l'équateur et dans le méridien donné, ce qui a lieu le jour de l'équinoxe à midi par rapport à ce méridien; et il prétend pouvoir conclure la figure du méridien de la comparaison de l'ombre des styles avec celle des styles de l'équateur.

« Car, dit-il, si le méridien était parfaitement semblable et égal à l'équateur, qui dans une Planète qui roule sur elle-même ne peut ne pas être un cercle parfait, les styles plantés sur l'équateur et sur le méridien seraient également obliques aux rayons solaires, et les ombres projetées par les styles du méridien seraient alors rigoureusement égales aux ombres projetées par les styles correspondants de l'équateur. Il est donc de la dernière évidence que si les ombres des styles du méridien sont respectivement plus longues que les ombres des styles correspondants de l'équateur, les styles du méridien sont plus obliques que ceux de l'équateur aux rayons du Soleil. Or les styles du méridien ne peuvent être plus obliques aux rayons du Soleil que ceux de l'équateur, que parce que le méridien est une circonférence qui va en s'aplatissant de l'équateur aux pôles. »

Quant à la distance des styles, l'Auteur ne trouve pas la moindre difficulté à la déterminer : « L'élévation du pôle, dit-il, pour déterminer les points différents où les styles doivent être plantés sur les méridiens, et l'élévation du Soleil, pour déterminer les points également distants où doivent être plantés sur l'équateur les styles correspondants, sont une règle qui ne saurait manquer. »

Telle est la méthode que l'Auteur a imaginée, et qu'il croit préférable à celles qui ont été employées dans ces derniers temps pour déterminer la figure de la Terre. Or, sans parler de la difficulté de placer exactement les styles, ni de la difficulté encore plus grande d'y faire les observations

demandées avec une précision assez grande pour pouvoir en déduire des conséquences bien justes sur la courbure des méridiens et de l'équateur, il est facile de se convaincre que la méthode est en elle-même illusoire, du moins sous le point de vue où l'Auteur la présente. En effet, puisqu'on y suppose que les lieux des styles du méridien y soient déterminés par les hauteurs du pôle, déduites à l'ordinaire de l'observation de l'élévation des astres sur l'horizon, il n'est pas difficile de concevoir que l'inclinaison des styles aux rayons du Soleil dépendra uniquement de leurs distances en latitude, et que si ces distances sont égales aux distances en longitude des styles de l'équateur, les ombres des styles correspondants seront nécessairement les mêmes, quelle que puisse être la figure du méridien. Il faudrait, pour que la méthode de l'Auteur pût servir à la détermination de la figure de la Terre, que les distances en latitude des styles du méridien fussent déterminées par la mesure immédiate des degrés; alors les observations de l'ombre projetée par ces styles tiendraient lieu des observations astronomiques nécessaires pour déterminer l'amplitude des arcs du méridien compris entre les styles. Mais cette méthode rentrerait ainsi dans celle qui a été mise en usage par les Académiciens français; seulement elle serait moins exacte et moins sûre, car il est impossible que des observations faites avec des styles puissent jamais atteindre au degré de précision de celles qui ont été faites avec de très-grands secteurs, et avec tant de soin et de scrupule.

Il paraît donc par là que l'Auteur de ce Mémoire n'a pas une idée nette de la question, et encore moins des difficultés qu'elle renferme; et que le nouveau moyen qu'il propose pour la décider ne peut en aucune manière mériter l'attention des Savants.

FIN DU TOME CINQUIÈME.

TABLE DES MATIÈRES

DU TOME CINQUIÈME.

SECTION DEUXIÈME.

(SUITE.)

MÉMOIRES EXTRAITS DES RECUEILS DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES
ET BELLES-LETTRES DE BERLIN.

	Pages.
XL. Théorie de la libration de la Lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette Planète.....	5
XLII. Théorie des variations séculaires des éléments des Planètes. (Première Partie.).....	125
XLIII. Théorie des variations séculaires des éléments des Planètes. (Seconde Partie.).....	211
XLIII. Théorie des variations périodiques des mouvements des Planètes. (Première Partie.).....	347
XLIV. Sur les variations séculaires des mouvements moyens des Planètes.....	381
XLV. Théorie des variations périodiques des mouvements des Planètes. (Seconde Partie.).....	417
XLVI. Sur la manière de rectifier les méthodes ordinaires d'approximation pour l'intégration des équations du mouvement des Planètes.....	493
XLVII. Sur une méthode particulière d'approximation et d'interpolation.....	517
XLVIII. Sur une nouvelle propriété du centre de gravité.....	535
XLIX. Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires.....	543
L. Théorie géométrique du mouvement des aphélies des Planètes pour servir d'addition aux Principes de Newton.....	565
LI. Sur la manière de rectifier deux endroits des Principes de Newton relatifs à la propagation du son et au mouvement des ondes.....	591
LII. Mémoire sur une question concernant les annuités.....	613

	Pages.
LIII. Mémoire sur l'expression du terme général des séries récurrentes, lorsque l'équation génératrice a des racines égales.....	627
LIV. Mémoire sur les sphéroïdes elliptiques.....	645
LV. Mémoire sur la méthode d'interpolation.....	663
LVI. Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune.....	687
LVII. Mémoire sur une loi générale d'optique.....	701
LVIII. Rapports.....	713



