



SUR LA MANIÈRE DE RECTIFIER

LES

MÉTHODES ORDINAIRES D'APPROXIMATION

POUR L'INTÉGRATION

DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1783.)

La détermination du mouvement des Planètes est non-seulement le Problème le plus grand par son objet, mais encore celui auquel le calcul s'applique avec le plus de succès: parce que les Planètes sont si éloignées les unes des autres qu'on peut faire abstraction de leurs qualités physiques, et ne les regarder que comme des points qui s'attirent dans la simple raison du carré inverse de la distance.

Newton, auteur de ce Problème, l'a résolu complètement pour le cas où l'on ne considère que l'attraction de deux Planètes; il a trouvé qu'elles décrivent alors l'une autour de l'autre une ellipse dont les aires sont proportionnelles au temps. La masse du Soleil est si grande relativement à celle des Planètes principales, que l'attraction mutuelle de celles-ci ne peut avoir qu'un effet très-petit en comparaison de celui de l'action du Soleil. Aussi le mouvement de ces Planètes autour du Soleil est-il sensiblement le même que si elles n'éprouvaient que l'attraction de cet astre. Mais la comparaison des observations anciennes avec les modernes, et

surtout la précision qu'on a mise dans les dernières ont fait apercevoir dans ce mouvement des inégalités qu'il est naturel de rapporter aux attractions particulières des Planètes; et la détermination de ces inégalités est devenue dans ces derniers temps l'objet principal des recherches des Géomètres.

Si le Problème de deux corps qui s'attirent en raison inverse du carré de la distance est susceptible d'une solution rigoureuse, celui de trois corps qui s'attirent de la même manière s'y refuse entièrement. Mais les orbites des Planètes sont non-seulement à très-peu près elliptiques, elles approchent encore beaucoup de la figure circulaire; et cette circonstance fournit le moyen de les calculer par approximation; car la supposition de l'orbite circulaire et du mouvement uniforme donne les premiers termes des séries, et les suivants se déduisent successivement les uns des autres, en employant à chaque correction les valeurs trouvées par les corrections précédentes.

Cependant il se rencontre, dans l'application de cette méthode aux Planètes, une difficulté qui peut en rendre l'usage inexact; c'est qu'elle introduit dans l'expression du rayon vecteur de l'orbite des termes qui ne renferment pas seulement des sinus ou cosinus de l'angle parcouru, ou de l'angle proportionnel au temps, mais encore des puissances entières de ces angles. Or, si ces termes devaient entrer dans la valeur du rayon vecteur, il s'ensuivrait que ce rayon serait susceptible d'augmenter à l'infini, ce qui étant contraire aux observations jetterait des doutes sur la Théorie de la gravitation. D'ailleurs le même inconvénient a lieu dans des cas plus simples que celui de l'orbite des Planètes, et dans lesquels on peut démontrer rigoureusement que la valeur de la quantité cherchée est resserrée entre des limites. Cette expression du rayon vecteur est donc fautive en général, et ne pourrait servir tout au plus que pour un temps plus ou moins long, au bout duquel les termes qui renferment des arcs de cercle seraient encore assez petits pour que la série ne cessât pas d'être convergente.

La difficulté dont il s'agit se présente aussi dans la Théorie de la Lune; mais les Géomètres, qui ont travaillé les premiers après Newton à cette

Théorie, reconnurent d'abord qu'elle ne venait que du mouvement de l'apogée de cette Planète, et parvinrent facilement, d'après cette considération, à se débarrasser des arcs de cercle par le secours de la méthode des coefficients indéterminés.

Dans la Théorie des Planètes principales, les arcs de cercle du rayon vecteur dérivent encore de la même cause, c'est-à-dire des mouvements de leurs aphélies; mais ces mouvements n'étant pas uniformes, comme celui de l'apogée de la Lune, sont bien plus difficiles à déterminer, surtout parce qu'ils se trouvent combinés avec la variation des excentricités, et qu'il y a entre tous ces éléments une dépendance mutuelle qui empêche qu'on ne puisse les calculer séparément pour chaque Planète. Feu M. Euler, dans la Pièce de 1748 sur la *Théorie de Jupiter et de Saturne*, a regardé les arcs de cercle qu'il avait trouvés dans le rayon de l'orbite de Saturne comme dus à une équation séculaire; dans celle de 1752 sur le même sujet, mais qui n'a paru qu'en 1769, ayant eu égard à la fois aux mouvements des aphélies de Saturne et de Jupiter, il n'a plus rencontré d'arcs de cercle, mais l'analyse par laquelle il cherche à déterminer ces mouvements est néanmoins incomplète et insuffisante.

Lorsque je travaillais en 1765 à la Théorie des satellites de Jupiter, je fus arrêté par la même difficulté; et j'imaginai, pour la résoudre, une méthode particulière d'intégrer par approximation les équations différentielles, laquelle me donna directement les rayons vecteurs des orbites sans arcs de cercle. Je découvris ainsi les vraies lois du mouvement des aphélies et des variations des excentricités, pour un nombre quelconque de Planètes qui agissent les unes sur les autres; et je trouvai de la même manière celles du mouvement des nœuds et des variations des inclinaisons. J'en fis ensuite l'application à Jupiter et à Saturne. Enfin je cherchai à déterminer directement les variations de ces éléments; et j'ai rempli cet objet dans toute son étendue dans la *Théorie des variations séculaires des éléments des Planètes*, que je viens de donner.

Cependant, comme la méthode ordinaire d'approximation a l'avantage de la simplicité et de la facilité du calcul dans la recherche des inégalités périodiques des Planètes, il était à désirer qu'on pût la délivrer de l'in-

convénient de donner des arcs de cercle dans les intégrales qui ne doivent point en avoir, ou du moins qu'on trouvât moyen de chasser les termes qui contiendraient ces arcs, et de les faire servir à la détermination des variations séculaires des éléments de l'orbite.

M. de Laplace s'est occupé de cet objet, et il a donné dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* une méthode ingénieuse pour faire disparaître, par la variation des constantes arbitraires, les arcs de cercle qui paraissent dans les intégrales approchées des équations différentielles, et qui ne se trouvent point dans ces équations. Mais cette méthode est fondée sur une métaphysique qui ne me paraît pas porter dans l'esprit toute la satisfaction qu'on pourrait désirer; et elle se trouve d'ailleurs en défaut lorsque dans l'intégrale une des constantes arbitraires multiplie l'arc sous les signes de sinus, de cosinus ou d'exponentielles; ce qui est le cas des équations du mouvement des Planètes, considérées dans toute leur généralité.

J'ai reconnu néanmoins qu'on pouvait toujours éliminer rigoureusement les arcs de cercle des équations dont il s'agit, en faisant varier les constantes arbitraires suivant les principes que j'ai employés dans la *Théorie des intégrales particulières*; et, comme la méthode que j'ai trouvée pour ce Problème peut s'étendre à d'autres questions du même genre et servir, en général, à l'avancement de l'Analyse, j'ai cru devoir la développer à part et indépendamment de son application aux orbites des Planètes. C'est à quoi est destiné ce Mémoire.

1. Soit proposée une équation différentielle d'un ordre quelconque n entre deux variables y et x , dans laquelle la variable x , dont la différence est constante, n'entre point sous une forme algébrique; et supposons que son intégrale complète soit

$$y = X + Yx + Zx^2 + Vx^3 + \dots,$$

$X, Y, Z, \dots$ étant des fonctions de x en sinus, cosinus et exponentielles, et de n constantes arbitraires $a, b, c, \dots$; en sorte que les différences de ces fonctions relativement à x ne contiennent jamais cette variable sous

une forme algébrique, soit d'ailleurs que cette intégrale soit rigoureuse, ou seulement approchée, pourvu que dans ce dernier cas elle satisfasse à l'équation différentielle, sans qu'il soit nécessaire de réduire en série ses fonctions transcendentes.

Différentiant successivement n fois cette intégrale, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dX}{dx} + Y \right) + \left(\frac{dY}{dx} + 2Z \right) x + \left(\frac{dZ}{dx} + 3V \right) x^2 + \dots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{d^2X}{dx^2} + 2 \frac{dY}{dx} + 2Z \right) + \left(\frac{d^2Y}{dx^2} + 4 \frac{dZ}{dx} + 6V \right) x + \dots$$

Et ces valeurs de $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$ satisferont à l'équation différentielle, quelles que soient d'ailleurs celles des constantes arbitraires $a, b, c, \dots$.

2. Or, comme cette équation ne contient point x sous une forme algébrique, il faudra que dans la substitution des valeurs précédentes, les termes qui se trouveront multipliés par les différentes puissances de x disparaissent d'eux-mêmes; donc aussi les premiers termes de ces valeurs, lesquels ne sont point multipliés par x et ne contiennent point x sous une forme algébrique, devront satisfaire seuls à la même équation.

Donc elle sera satisfaite par ces valeurs

$$y = X,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dX}{dx} + Y,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2X}{dx^2} + 2 \frac{dY}{dx} + 2Z,$$

Et comme les quantités $a, b, c, \dots$ qui entrent dans ces valeurs demeurent indéterminées, elles pourront y être supposées constantes ou variables à volonté. En les supposant constantes, les valeurs dont il s'agit ne peuvent subsister ensemble, puisque celle de $\frac{dy}{dx}$ n'est point la différentielle de celle de y , et ainsi des autres; mais en rendant les mêmes quantités $a,$

498 RECTIFICATION DES MÉTHODES POUR L'INTÉGRATION

$b, c, \dots$ variables, on peut satisfaire à ces conditions; et il ne s'agira que de faire en sorte que la différentielle de la valeur de y , en y faisant tout varier, soit égale à la valeur de $\frac{dy}{dx} dx$, que la différentielle de la valeur de $\frac{dy}{dx}$, en faisant tout varier, soit égale à la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2} dx$, et ainsi de suite jusqu'à la différentielle de $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, qui devra être égale à la valeur de $\frac{d^ny}{dx^n} dx$; ce qui donnera n équations de condition, qui serviront par conséquent à déterminer les n arbitraires $a, b, c, \dots$ devenues variables. Alors $y = X$ sera également l'intégrale de l'équation différentielle proposée.

3. Les équations de condition seront donc

$$\begin{aligned} dy &= \frac{dX}{dx} dx + \frac{dX}{da} da + \frac{dX}{db} db + \dots \\ &= \left(\frac{dX}{dx} + Y \right) dx, \\ d\frac{dy}{dx} &= \frac{d^2X}{dx^2} dx + \frac{d^2Y}{dx} dx + \frac{d^2X}{dx da} da + \frac{d^2X}{dx db} db + \dots + \frac{d^2Y}{da} da + \frac{d^2Y}{db} db + \dots \\ &= \left(\frac{d^2X}{dx^2} + 2 \frac{dY}{dx} + 2Z \right) dx, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Effaçant les termes qui se détruisent dans ces équations, elles deviennent

$$\begin{aligned} \frac{dX}{da} da + \frac{dX}{db} db + \dots &= Y dx, \\ \left(\frac{d^2X}{dx da} + \frac{dY}{da} \right) da + \left(\frac{d^2X}{dx db} + \frac{dY}{db} \right) db + \dots &= \left(\frac{dY}{dx} + 2Z \right) dx, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

4. En considérant la forme des équations précédentes et leur dérivation de l'intégrale

$$y = X + Yx + Zx^2 + Vx^3 + \dots,$$

DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES. 499

on verra que pour les trouver il suffit : 1° d'égaliser la différentielle de l'intégrale, prise en faisant varier seulement les constantes arbitraires $a, b, \dots$, à la différentielle de la même intégrale, prise en ne faisant varier que l'arc de cercle x ; 2° de différentier successivement cette équation $n-1$ fois en faisant varier x partout et regardant $a, b, \dots$ comme constantes; 3° d'effacer partout les termes multipliés par l'arc de cercle x et ses puissances.

Ainsi l'on aura d'abord

$$\begin{aligned} \left(\frac{dX}{da} + \frac{dY}{da} x + \frac{dZ}{da} x^2 + \dots \right) da + \left(\frac{dX}{db} + \frac{dY}{db} x + \frac{dZ}{db} x^2 + \dots \right) db + \dots \\ = (X + 2Zx + 3Vx^2 + \dots) dx, \end{aligned}$$

ensuite

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2X}{dx da} + \frac{d^2Y}{dx da} x + \left(\frac{d^2Y}{dx da} + 2 \frac{dZ}{da} \right) x + \dots \right] da + \left[\frac{d^2X}{dx db} + \frac{d^2Y}{dx db} x + \left(\frac{d^2Y}{dx db} + 2 \frac{dZ}{db} \right) x + \dots \right] db + \dots \\ = \left[\frac{d^2Y}{dx} + 2Z + \left(2 \frac{dZ}{dx} + 6V \right) x + \dots \right] dx, \\ \left(\frac{d^3X}{dx^2 da} + 2 \frac{d^2Y}{dx da} + 2 \frac{dZ}{da} + \dots \right) da + \left(\frac{d^3X}{dx^2 db} + 2 \frac{d^2Y}{dx db} + 2 \frac{dZ}{db} + \dots \right) db + \dots \\ = \left(\frac{d^3Y}{dx^2} + 4 \frac{dZ}{dx} + 6V + \dots \right) dx, \end{aligned}$$

et ainsi de suite jusqu'à la $n-1^{\text{ème}}$ différentielle.

Effaçant donc partout les termes multipliés par x , l'intégrale se réduira à $y = X$; et l'on aura, pour la détermination des n quantités $a, b, c, \dots$, les équations du premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{dX}{da} da + \frac{dX}{db} db + \dots &= Y dx, \\ \left(\frac{d^2X}{dx da} + \frac{dY}{da} \right) da + \left(\frac{d^2X}{dx db} + \frac{dY}{db} \right) db + \dots &= \left(\frac{dY}{dx} + 2Z \right) dx, \\ \left(\frac{d^3X}{dx^2 da} + 2 \frac{d^2Y}{dx da} + 2 \frac{dZ}{da} \right) da + \left(\frac{d^3X}{dx^2 db} + 2 \frac{d^2Y}{dx db} + 2 \frac{dZ}{db} \right) db + \dots &= \left(\frac{d^2Y}{dx^2} + 4 \frac{dZ}{dx} + 6V \right) dx, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, le nombre de ces équations étant égal à l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle.

Lorsque cette équation n'est que du premier ordre, il suffira donc de n'avoir égard dans l'intégrale qu'au terme qui contient la première puissance de l'arc x , puisque la première équation de condition ne dépend que des quantités X et Y ; lorsque l'équation différentielle sera du second ordre, il faudra avoir égard de plus dans l'intégrale au terme multiplié par x^2 , puisque la seconde équation de condition dépend aussi de la quantité Z ; et ainsi de suite.

5. Selon M. de Laplace (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1777, page 387), les équations de condition seraient simplement

$$\begin{aligned} \frac{dX}{da} da + \frac{dX}{db} db + \dots &= Y dx, \\ \frac{d^2X}{dx da} da + \frac{d^2X}{dx db} db + \dots &= \frac{dY}{dx} dx, \\ \frac{d^3X}{dx^2 da} da + \frac{d^3X}{dx^2 db} db + \dots &= \frac{d^2Y}{dx^2} dx, \\ &\dots \end{aligned}$$

Donc sa méthode ne donne des résultats exacts que lorsque ces équations se trouvent avoir lieu en même temps que celles-ci

$$\begin{aligned} \frac{dY}{da} da + \frac{dY}{db} db + \dots &= 2Z dx, \\ \left(\frac{d^2Y}{dx da} + \frac{dZ}{da} \right) da + \left(\frac{d^2Y}{dx db} + \frac{dZ}{db} \right) db &= \left(2 \frac{dZ}{dx} + 3Y \right) dx, \\ &\dots \end{aligned}$$

6. La méthode que nous venons d'exposer peut s'appliquer également à plusieurs équations différentielles du même genre entre plusieurs variables $x, y, z, \dots$. Les valeurs complètes de $y, z, \dots$ fourniront alors chacune autant d'équations de condition entre les différentes constantes arbitraires $a, b, c, \dots$ devenues variables, qu'il y aura d'unités dans l'exposant de la plus haute différence de chacune de ces variables dans les équations différentielles proposées. De sorte que le nombre des équations de condition égalera toujours celui des quantités $a, b, c, \dots$.

Il est visible aussi que ces équations seront toutes différentielles du premier ordre; par conséquent leur intégration entraînera de nouveau un pareil nombre de constantes arbitraires, de manière que les intégrales trouvées seront toujours complètes après l'évanouissement des arcs de cercle et la substitution des nouvelles valeurs de $a, b, c, \dots$.

Toute la difficulté consistera donc à déterminer ces valeurs par l'intégration des équations de condition; mais dans plusieurs cas, et surtout lorsqu'on ne demande que des intégrales approchées, cette intégration dépendra des méthodes connues.

Au reste, quoique de cette manière les arcs de cercle disparaissent d'abord, ils pourront néanmoins reparaitre dans les nouvelles valeurs de $a, b, c, \dots$; et cela arrivera même nécessairement toutes les fois que, par la nature des équations différentielles, ces arcs devront se trouver dans les intégrales.

7. Enfin, pour le succès de l'élimination des arcs de cercle, on doit éviter le cas où l'une des constantes arbitraires se trouverait jointe à la variable x dans les fonctions algébriques de l'intégrale; cette forme de l'intégrale est toujours possible puisque, la variable x des fonctions algébriques disparaissant dans l'équation différentielle, la constante qui y serait jointe disparaîtrait aussi d'elle-même; mais en y appliquant la méthode que nous venons de donner, on trouverait une intégrale de la même forme. En effet soit

$$y = X' + Y'(x+a) + Z'(x+a)^2 + \dots$$

l'intégrale trouvée, a étant une des constantes arbitraires, et les autres $b, c, \dots$ étant renfermées dans les fonctions $X', Y', \dots$

Par la règle du n° 4, on aura d'abord l'équation

$$\begin{aligned} [Y' + 2Z'(x+a) + \dots] da + \left[\frac{dX'}{db} + \frac{dY'}{db}(x+a) + \frac{dZ'}{db}(x+a)^2 + \dots \right] db + \dots \\ = [Y' + 2Z'(x+a) + \dots] dx, \end{aligned}$$

ensuite les différentielles de celles-ci en faisant varier x seule, etc.

502 RECTIFICATION DES MÉTHODES POUR L'INTÉGRATION

Or il est visible qu'on satisfera à toutes ces équations, en général, en faisant

$$da = dx, \quad db = 0, \quad dc = 0, \dots$$

ce qui donnera

$$a = A + x, \quad \text{et} \quad b, c, \dots \text{ constantes;}$$

et ces valeurs substituées dans

$$y = X' + Y'a + Z'a' + \dots$$

reproduiront la même expression de y trouvée d'abord.

8. Les équations différentielles des mouvements des Planètes, dans le système de la gravitation, sont du genre de celles dont nous venons de traiter; ainsi, par la variation des constantes arbitraires de leurs intégrales, on pourra faire disparaître de ces intégrales les arcs de cercle que la méthode ordinaire d'approximation y introduira. Or ces constantes arbitraires ne sont, comme on sait, que les éléments des orbites elliptiques; par conséquent on aura de cette manière la variation de ces éléments. Pour mettre dans ce calcul toute l'exactitude nécessaire, il faudra faire varier à la fois toutes les constantes arbitraires dont le nombre est double de celui des équations différentielles primitives, puisque celles-ci sont toutes du second ordre; et comme dans les expressions des coordonnées par le temps, la variable qui exprime le temps se trouve multipliée sous les signes de sinus et cosinus par un coefficient qui dépend de la distance moyenne, il faudra par conséquent faire varier aussi ce coefficient en faisant varier la distance moyenne; ce n'est que de cette manière qu'on pourra, par l'élimination des arcs de cercle, bien déterminer les variations séculaires de la distance moyenne, et s'assurer qu'elles doivent être nulles, comme nous l'avons trouvé par des principes directs et rigoureux. Nous nous bornerons ici à appliquer la méthode précédente à quelques autres équations.

DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES. 503

9. Soit proposée l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y} \frac{dy^2}{dx^2} - \frac{i}{(1+iy)} \frac{dy^2}{dx^2} + 2iy(1+iy) = 0,$$

dans laquelle i est un coefficient fort petit.

En cherchant à l'intégrer par approximation suivant les méthodes ordinaires, on rejettera d'abord les termes affectés de i , et l'on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{y} \frac{dy^2}{dx^2} = 0,$$

dont l'intégrale complète est

$$y = ae^{bx},$$

a et b étant deux constantes arbitraires.

On fera maintenant

$$y = ae^{bx} + iy',$$

et, substituant, on aura après la division par i une équation du même ordre en y' , pour laquelle il suffira de trouver une valeur satisfaisante de cette variable, puisque l'expression de y contient déjà les deux constantes arbitraires a et b .

En négligeant de nouveau les termes affectés de i on trouvera

$$y' = a^2 e^{2bx} - a e^{bx} x.$$

Faisant ensuite

$$y' = a^2 e^{2bx} - a e^{bx} x + iy'',$$

et opérant de la même manière, on trouvera

$$y'' = a^2 e^{2bx} - 2a^2 e^{2bx} x^2 + \frac{a e^{bx} x^3}{2},$$

et ainsi de suite.

On aura donc pour la valeur de y la série

$$ae^{bx} + iy' + iy'' + \dots,$$

laquelle contient, comme on voit, l'arc de cercle x qui ne se trouve point dans l'équation différentielle.

10. Pour le faire disparaître s'il est possible, on remarquera d'abord que, l'équation différentielle n'étant que du second ordre, il suffit d'avoir égard, dans l'intégrale, aux termes qui contiennent x et x^2 . Et, comparant celle qu'on vient de trouver avec la formule générale du n° 1, on aura

$$X = ae^{bx} + ia^2e^{3bx} + i^2a^3e^{5bx} + \dots, \quad Y = 0, \quad Z = -iae^{bx} - 2i^2a^2e^{3bx} - \dots,$$

d'où l'on tire (3) ces deux équations de condition en a et b

$$(e^{bx} + 2ia^2e^{3bx} + 3i^2a^3e^{5bx} + \dots)da + (axe^{bx} + 2ia^2xe^{3bx} + 3i^2a^3xe^{5bx} + \dots)db = 0, \\ (e^{bx} + 4ia^2e^{3bx} + 9i^2a^3e^{5bx} + \dots)bda + (axe^{bx} + 4ia^2xe^{3bx} + 9i^2a^3xe^{5bx} + \dots)bdb \\ + (ae^{bx} + 2ia^2e^{3bx} + 3i^2a^3e^{5bx} + \dots)db = -2(iae^{bx} + 2i^2a^2e^{3bx} + \dots)dx.$$

La première se réduit à

$$da + axdb = 0,$$

et la seconde devient par là

$$(ae^{bx} + 2ia^2e^{3bx} + 3i^2a^3e^{5bx} + \dots)db = -2i(iae^{bx} + 2i^2a^2e^{3bx} + \dots)dx,$$

laquelle donne évidemment

$$db = -2idx,$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$b = B - 2ix.$$

Substituant dans la première valeur de db , on aura

$$\frac{da}{a} = 2ixdx,$$

et de là

$$a = Ae^{ix^2},$$

A et B étant les deux nouvelles constantes arbitraires.

L'intégrale sans arcs de cercle sera donc

$$y = X,$$

savoir, en mettant pour a et b les valeurs qu'on vient de trouver,

$$y = Ae^{Bx - ix^2} + iA^2e^{3Bx - 3ix^2} + i^2A^3e^{5Bx - 5ix^2} + \dots$$

En effet l'intégrale exacte de la proposée est

$$y = \frac{\Lambda e^{Bx - ix^2}}{1 - i\Lambda e^{Bx - ix^2}}.$$

On voit donc que, si B a une valeur négative et i une valeur positive $< \frac{1}{\Lambda}$, la valeur de y sera toujours positive et $< \frac{\Lambda}{1 - i\Lambda}$, tant que x sera positive, quoique la première intégrale avec des arcs de cercle eût pu d'abord faire croire que cette valeur ne serait point renfermée dans des bornes.

11. Lorsque l'équation différentielle contient elle-même des arcs de cercle, il semble que l'intégrale devrait en contenir nécessairement; il y a cependant des cas où cette conclusion serait fautive; ainsi il est important d'avoir aussi un moyen pour les faire disparaître des intégrales de ces sortes d'équations différentielles.

Il est évident que, si l'on a une équation différentielle d'un ordre quelconque n entre y et x , dans laquelle x entre sous la forme algébrique, on pourra toujours en déduire une équation de l'ordre $n+1$, qui ne contiendra aucune fonction algébrique de x ; car il n'y aura qu'à éliminer l' x de ces fonctions, par le moyen de la proposée et de sa différentielle. Il n'y aura donc qu'à regarder cette équation de l'ordre $n+1$ comme l'équation donnée, et appliquer à son intégrale la méthode exposée.

Mais, sans chercher cette nouvelle équation, il suffira de considérer que, dans la différentielle de l'équation proposée, les fonctions algébriques de x ne peuvent venir que des fonctions de la même espèce qui se trouvent dans la proposée; car on suppose toujours que l'intégrale ne

contient point de fonctions transcendentes de x qui puissent en donner d'algébriques par la différentiation (1); or, si la proposée contenait de pareilles fonctions, elles devraient aussi se rencontrer dans l'intégrale. Ainsi, en éliminant l' x des fonctions algébriques à l'aide de l'équation proposée et de sa différentielle, on aura le même résultat que si dans ces fonctions, il y avait $x+h$ à la place de x , h étant une constante quelconque. D'où il s'ensuit que, si dans l'équation différentielle donnée de l'ordre n on change l' x des fonctions algébriques en $x+h$, on aura une équation qui sera l'intégrale complète de celle de l'ordre $n+1$ sans fonctions algébriques, h étant la constante arbitraire. La valeur complète de y , qui satisfera à la proposée après la substitution dont il s'agit, sera donc aussi l'intégrale finie et complète de celle qui n'aurait contenu aucune fonction algébrique de x , les constantes arbitraires étant $h, a, b, c, \dots$. Ainsi le Problème rentre dans celui que nous avons résolu.

Il est clair au reste qu'on aurait également l'intégrale complète dont il s'agit en substituant immédiatement $x+h$ à la place de x dans les fonctions algébriques de l'intégrale de la proposée; mais on tomberait alors dans le cas dont nous avons parlé dans le n° 7, et qu'il faut éviter.

12. Lors donc que l'arc x entrera dans l'équation différentielle de x et y , et qu'on voudra éliminer cet arc de l'expression complète de y , il faudra commencer par substituer dans les fonctions algébriques de x de l'équation différentielle $x+h$ au lieu de x , h étant une constante arbitraire; ensuite on en cherchera l'intégrale à l'ordinaire, ayant soin de faire en sorte que la constante h entre aussi dans les fonctions transcendentes qui multiplient les puissances de x ; on opérera enfin sur cette intégrale par la règle du n° 4, en faisant varier toutes les constantes arbitraires $h, a, b, c, \dots$ et supposant que l'équation différentielle qui y répond soit d'un ordre plus élevé d'une unité que la proposée.

Si l'on avait deux ou plusieurs équations différentielles en $x, y, z, \dots$, lesquelles contiennent aussi l'arc x sous la forme algébrique, on substituerait pareillement $x+h$ à la place de x dans les fonctions algébriques, et l'on traiterait les intégrales par la même méthode, en supposant seu-

lement qu'une des équations différentielles soit d'un ordre plus élevé d'une unité qu'elle n'est sous la forme donnée. Car il est visible qu'on pourrait toujours éliminer des équations proposées les fonctions algébriques de x par le moyen de la différentielle d'une quelconque de ces équations, et que l'élimination aura lieu également, en y changeant x en $x+h$.

Cette méthode sera utile dans la Théorie des Planètes pour déterminer les variations de leurs éléments en ayant égard à l'action d'un milieu peu résistant.

13. Pour en montrer l'usage par un exemple très-simple, soient les deux équations

$$\frac{dy}{dx} = (1 + 2ix)z, \quad \frac{dz}{dx} = -(1 + 2ix)y,$$

dont on sait que les intégrales exactes et complètes sont de la forme

$$y = A \sin(x + ix^2 + z), \quad z = A \cos(x + ix^2 + z).$$

Si on les intègre par approximation, en regardant i comme un coefficient très-petit, et négligeant d'abord les termes affectés de i , on trouvera que les intégrales contiendront des puissances de x . Pour pouvoir donc faire disparaître ces fonctions algébriques, on commencera par substituer $x+h$ au lieu de x , et faisant, pour abrégér,

$$1 + 2ih = m,$$

on aura ces transformées

$$\frac{dy}{dx} = mz + 2ixz, \quad \frac{dz}{dx} = -my + 2ixy.$$

En intégrant d'abord celles-ci

$$\frac{dy}{dx} = mz, \quad \frac{dz}{dx} = -my,$$

on trouve

$$y = a \sin mx + b \cos mx, \quad z = a \cos mx - b \sin mx.$$

Faisant ensuite

$$y = a \sin mx + b \cos mx + iy', \quad z = a \cos mx - b \sin mx + iz',$$

on trouvera, aux quantités de l'ordre de i près,

$$y' = x^2(a \cos mx - b \sin mx), \quad z' = -x^2(a \sin mx + b \cos mx),$$

et ainsi de suite.

Pour éliminer de ces expressions de y et z les arcs x , on fera varier les trois constantes a, b, h , en regardant l'une des deux équations différentielles comme du second ordre. On aura donc d'abord pour l'expression de y , comparée avec celle du n° 4,

$$X = a \sin mx + b \cos mx, \quad Y = 0, \quad Z = i(a \cos mx - b \sin mx),$$

et, supposant l'équation en y du second ordre, on aura, par les formules du même numéro, ces deux équations de condition, dans lesquelles $dm = 2i dh$,

$$\begin{aligned} \sin mx da + \cos mx db + 2ix(a \cos mx - b \sin mx) dh &= 0, \\ m \cos mx da - m \sin mx db - 2imx(a \sin mx + b \cos mx) dh \\ + 2i(a \cos mx - b \sin mx) dh &= 2i(a \cos mx - b \sin mx) dx. \end{aligned}$$

Ensuite l'expression de z comparée avec la même formule du n° 4 donnera

$$X = a \cos mx - b \sin mx, \quad Y = 0, \quad Z = -i(a \sin mx + b \cos mx),$$

d'où l'on tire l'équation de condition

$$\cos mx da - \sin mx db - 2ix(a \sin mx + b \cos mx) dh = 0.$$

Cette équation comparée à la seconde des deux précédentes la réduit à

$$2i(a \cos mx - b \sin mx) dh = 2i(a \cos mx - b \sin mx) dx,$$

savoir

$$dh = dx.$$

Et la même équation étant ajoutée à la première, ou retranchée après les avoir multipliées respectivement par $\sin mx$, $\cos mx$, ou réciproquement, il viendra ces deux-ci

$$da - 2ixb dh = 0, \quad db + 2ixa dh = 0.$$

Donc, en intégrant, on aura

$$h = H + x, \quad a = B \sin(ix^2 + \beta), \quad b = B \cos(ix^2 + \beta),$$

H, B, β étant des constantes arbitraires.

Ces valeurs étant substituées dans les expressions de y et z sans arcs de cercle, savoir

$$\begin{aligned} y &= a \sin[(1 + 2ih)x] + b \cos[(1 + 2ih)x], \\ z &= a \cos[(1 + 2ih)x] - b \sin[(1 + 2ih)x], \end{aligned}$$

les transforment en celles-ci

$$y = B \cos[(1 + 2iH)x + ix^2 - \beta], \quad z = -B \sin[(1 + 2iH)x + ix^2 - \beta].$$

Il y a ici une constante arbitraire de plus qu'il ne faut; pour la déterminer, il suffit de substituer ces valeurs de y et z dans une des deux équations différentielles. Cette substitution donnera

$$1 + 2iH + 2ix = 1 + 2ix;$$

done

$$H = 0.$$

Par conséquent les vraies valeurs seront

$$y = B \cos(x + ix^2 - \beta), \quad z = -B \sin(x + ix^2 - \beta),$$

lesquelles s'accordent avec les intégrales exactes données ci-dessus, en faisant

$$B = A, \quad \beta = 90^\circ - \alpha.$$

On pourrait être surpris que des intégrales simplement approchées aient donné des intégrales rigoureuses par l'élimination des arcs de cercle; la raison en est qu'en continuant l'approximation, on n'aurait trouvé que

510 RECTIFICATION DES MÉTHODES POUR L'INTÉGRATION

des termes multipliés par $x^1, x^2, \dots$, qui n'auraient par conséquent rien ajouté aux résultats précédents (4).

14. Non-seulement on peut, par la variation des constantes arbitraires, faire disparaître l'arc dans les fonctions algébriques de l'intégrale, comme on vient de le voir; on peut aussi par ce moyen substituer au même arc une quantité quelconque à volonté; pour cela il n'y a qu'à donner aux principes de la méthode précédente toute l'étendue dont ils sont susceptibles.

Soit une équation différentielle entre les variables y et x , dont l'une x ne s'y trouve point sous la forme algébrique; et soit

$$U = 0$$

son intégrale complète et finie ou seulement d'un ordre inférieur de n unités à celui de l'équation différentielle, en sorte que le nombre des constantes arbitraires $a, b, c, \dots$ soit aussi n ; enfin supposons que cette intégrale ne contienne x que sous la forme algébrique, et sous celle de sinus, cosinus et exponentielles, de manière que par rapport à ces fonctions transcendentes elle soit assujettie aux mêmes conditions que la formule du n° 1.

On sait que l'équation différentielle dont $U = 0$ est l'intégrale complète ne peut être autre chose que le résultat de l'élimination des n constantes arbitraires $a, b, c, \dots$ par le moyen des $n + 1$ équations

$$U = 0, \quad dU = 0, \quad d^2U = 0, \dots, \quad d^nU = 0.$$

Or, puisque les fonctions algébriques de x qui entrent dans U et dans ses différences ne se trouvent plus dans l'équation différentielle, elles doivent disparaître d'elles-mêmes dans cette élimination. Par conséquent elles disparaîtront aussi si l'on y met $x + \xi$ à la place de x , ξ étant une quantité quelconque. Donc l'intégrale $U = 0$ satisfera également à l'équation différentielle proposée, en augmentant la variable x des fonctions algébriques de cette intégrale d'une quantité indéterminée ξ , pourvu que les équations $dU = 0, d^2U = 0, \dots, d^nU = 0$ subsistent aussi

DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES. 511

en y faisant la même substitution. Or c'est ce qu'on peut obtenir par la variation des n constantes arbitraires $a, b, c, \dots$.

15. Dénotons, en général, par la caractéristique δ les différences prises en faisant varier seulement ces constantes ainsi que l'indéterminée ξ , tandis que la caractéristique ordinaire d représentera les différences relatives aux variables y et x . Il est clair que l'équation

$$U = 0,$$

après la substitution de $x + \xi$ à la place de x dans les fonctions algébriques, donnera par une différentiation complète

$$dU + \delta U = 0.$$

Or, puisque par l'hypothèse les fonctions transcendentes de x qui se trouvent dans U ne peuvent donner de fonctions algébriques dans la différentiation, il s'ensuit qu'on doit avoir le même résultat, soit qu'on substitue d'abord, dans les fonctions algébriques de x qui entrent dans U , $x + \xi$ à la place de x , et qu'on différentie ensuite par rapport à x et y , soit qu'on différentie d'abord par rapport à ces variables, et qu'on substitue, dans la différence dU , $x + \xi$ à la place des x algébriques. Donc il faudra que l'équation précédente

$$dU + \delta U = 0$$

se réduise à celle-ci

$$dU = 0,$$

et par conséquent que l'on ait en même temps

$$\delta U = 0.$$

De même la différentiation complète de l'équation

$$dU = 0$$

donnera celle-ci

$$d^2U + \delta dU = 0,$$

laquelle devra se réduire à

$$d^2U = 0;$$

de sorte qu'il faudra que l'on ait en même temps

$$\partial dU = 0.$$

En continuant ce raisonnement pour les différences des ordres suivants jusqu'au $n^{\text{ième}}$, on trouvera de la même manière les équations

$$\partial d^2U = 0, \quad \partial d^3U = 0, \dots, \quad \partial d^{n-1}U = 0.$$

Or on sait par la *Théorie des variations* que ∂dU est la même chose que $d\partial U$, que ∂d^2U est la même chose que $d^2\partial U$, et ainsi de suite, puisque les caractéristiques d et ∂ se rapportent à des variables indépendantes entre elles.

Donc les équations de condition pour que l'intégrale $U = 0$ satisfasse encore à l'équation différentielle proposée, après la substitution de $x + \xi$ à la place de x dans les fonctions algébriques de cette intégrale, seront

$$\partial U = 0, \quad d\partial U = 0, \quad d^2\partial U = 0, \dots, \quad d^{n-1}\partial U = 0;$$

et comme le nombre de ces équations est n , et par conséquent égal à celui des constantes arbitraires $a, b, c, \dots$ devenues maintenant variables, on y pourra satisfaire par la détermination de ces variables; et la quantité ξ demeurera par conséquent indéterminée, et pourra être supposée tout ce qu'on voudra.

16. En supposant

$$U = X + Yx + \dots - y$$

comme dans le n° 4, et faisant après toutes les différentiations

$$\xi = -x,$$

on aura les mêmes résultats que dans ce numéro.

En général, si l'on fait

$$\xi = -x + \psi,$$

et que ψ ne contienne que des sinus et cosinus, l'arc de cercle x disparaîtra toujours, quelle que soit la fonction ψ ; et l'introduction de cette indéterminée pourra quelquefois faciliter l'intégration des équations en $a, b, c, \dots$

17. Il est visible au reste que cette méthode s'applique, en général, à autant d'équations intégrales qu'on voudra; chacune de ces équations telle que $U = 0$ donnera, après la substitution de $x + \xi$ à la place de x dans les fonctions algébriques, les équations de condition $\partial U = 0, d\partial U = 0, \dots$, en continuant les différentiations de ∂U jusqu'à ce que les plus hautes différences des autres variables $y, z, \dots$ soient d'un ordre immédiatement inférieur à celui dont elles sont dans les équations différentielles. Le nombre de ces équations sera ainsi égal à celui de toutes les constantes arbitraires, et la quantité ξ demeurera toujours indéterminée.

Enfin, si les équations différentielles contenaient aussi x sous la forme algébrique, on prouverait également par les principes exposés dans le n° 11 qu'il n'y aurait qu'à substituer $x + h$ au lieu de x dans les fonctions algébriques de ces équations, en regardant une des intégrales comme due à une équation différentielle d'un ordre plus élevé d'une unité que n'est celle qui répond directement à cette intégrale, et faire varier ensuite la constante h en même temps que les autres constantes arbitraires introduites par les intégrations.

18. Nous avons supposé jusqu'ici que les fonctions transcendentes de x dans les intégrales sont telles que leurs différentielles ne contiennent jamais cette variable sous la forme algébrique; c'est ce qui a toujours lieu lorsque ces fonctions ne renferment que des sinus, des cosinus et des exponentielles d'arcs proportionnels à x . Mais, si la variable x se trouvait sous ces mêmes signes élevée à d'autres puissances que la première, ou si des logarithmes de cette variable entraient aussi dans les

fonctions dont il s'agit, il est clair que la même variable se trouverait sous la forme algébrique dans les différentielles de ces fonctions; par conséquent on ne pourrait plus supposer, en général, comme nous l'avons fait, que les valeurs des différentielles sont les mêmes, soit que la substitution de $x + \xi$ au lieu de x dans les fonctions algébriques se fasse avant ou après la différentiation. Il faudrait donc alors avoir égard dans l'analyse du n° 15 à la différence de ces valeurs; ce qui ne sera pas difficile d'après les principes que nous avons exposés.

SUR UNE

MÉTHODE PARTICULIÈRE D'APPROXIMATION

ET

D'INTERPOLATION.



SUR UNE

MÉTHODE PARTICULIÈRE D'APPROXIMATION

ET

D'INTERPOLATION.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1783.)

Lorsque l'inconnue qu'on cherche est donnée par une équation d'une forme déterminée, on peut toujours la trouver, soit rigoureusement, soit par différentes méthodes d'approximation. Mais il peut arriver que la forme de l'équation soit elle-même indéterminée; en ce cas aucune des méthodes connues ne peut servir; c'est pourquoi je me flatte que les Géomètres me sauront quelque gré de leur en communiquer une qui a l'avantage de pouvoir être pratiquée, non-seulement en employant des opérations analytiques, mais aussi à l'aide de simples opérations mécaniques, et qui renferme d'ailleurs une méthode d'interpolation applicable à un grand nombre de questions.

1. Soit $\varphi(x)$ une fonction inconnue de x , pour la détermination de laquelle on ait une équation quelconque entre $\varphi(x)$ et $\varphi(X)$, en supposant X donnée en x d'une manière quelconque. On suppose que pour une valeur donnée de x on connaisse celle de $\varphi(x)$, et l'on demande la valeur de $\varphi(x)$ correspondante à une autre valeur donnée de x .

2. Soit

$$\varphi(x) = y, \quad \varphi(X) = Y;$$

on aura donc une équation entre x et X , et une autre entre y et Y ; et l'on pourra représenter ces équations par deux courbes, dans l'une desquelles x sera l'abscisse, X l'ordonnée, et dans l'autre y sera l'abscisse et Y l'ordonnée.

3. Si l'on fait $X = x$, il est clair qu'on aura aussi $Y = y$; alors l'équation entre x et X se changera en une équation en x seul, par laquelle on déterminera x ; et de même l'équation entre y et Y se réduira en une équation en y seul, laquelle servira à déterminer y . Nous noterons par α et β les valeurs de x et y trouvées par ces deux équations.

4. Si la relation entre x et X , au lieu d'être donnée par une équation algébrique, était simplement représentée par une courbe dont x et X fussent les deux coordonnées, alors, pour avoir la valeur de x , il faudra chercher mécaniquement le point de la courbe dont l'abscisse et l'ordonnée seront égales. On trouvera de même la valeur de β dans la courbe dont y et Y seront les coordonnées.

5. Donc, puisque $x = \alpha$ donne $y = \beta$, il s'ensuit que $x = \alpha + \xi$ (en supposant ξ une quantité assez petite) donnera

$$y = \beta + \gamma\xi + \delta\xi^2 + \dots;$$

et, prenant ξ assez petite pour que $\xi^2, \xi^3, \dots$ puissent être négligées, on aura simplement

$$y = \beta + \gamma\xi.$$

Ainsi, pour

$$x = \alpha + \xi,$$

on aura

$$y = \beta + \gamma\xi.$$

en supposant ξ si petite que les puissances $\xi^2, \xi^3, \dots$ puissent être censées nulles, eu égard au degré de précision auquel on veut porter le calcul. Mais il faudra déterminer le coefficient γ ; et pour cela il est nécessaire

de supposer connue une valeur de y correspondante à une valeur quelconque donnée de x . Voici donc comment on parviendra à cette détermination.

6. Soient a et b les valeurs connues et données de x et y , en sorte que

$$x = a$$

donne

$$y = b.$$

Qu'on cherche la valeur de X répondante à $x = a$, et qu'on la désigne par A ; qu'on fasse ensuite

$$x = A$$

et qu'on cherche la valeur correspondante de X , laquelle soit A' ; qu'on fasse de nouveau

$$x = A'$$

et qu'on désigne par A'' la valeur correspondante de X ; qu'on continue à faire

$$x = A'',$$

et ainsi de suite.

Qu'on fasse les mêmes opérations par rapport à y et Y ; c'est-à-dire que $y = b$ donne

$$Y = B,$$

qu'ensuite $y = B$ donne

$$Y = B',$$

que de plus $y = B'$ donne

$$Y = B'',$$

et ainsi de suite.

On aura de cette manière deux suites correspondantes

$$a, A, A', A'', \dots,$$

$$b, B, B', B'', \dots,$$

telles que, si x est supposé égal à un terme quelconque de la première, le terme correspondant de la seconde sera la valeur correspondante de y .

7. Or je remarque que, si les termes de la série

$$a, A, A', A'', A''', \dots$$

approchent peu à peu de l'égalité, ils doivent approcher en même temps de la quantité α trouvée ci-dessus (3); car, puisque α est la valeur de x qui rend $X=x$, il s'ensuit que si par exemple $A'=x$ on aura aussi $A''=x$, par conséquent $A'=A''$ et *vice versa*.

Et comme, lorsque $x=X=z$, on a aussi $y=Y=\beta$, il s'ensuit encore que les termes de la série

$$b, B, B', B'', \dots$$

approcheront aussi en même temps de l'égalité et de la quantité β .

En poussant donc les deux séries assez loin pour qu'on parvienne à des termes A'''' , B'''' peu différents de α et de β , on pourra supposer (5)

$$A'''' = \alpha + \xi, \quad B'''' = \beta + \gamma\xi.$$

De là on aura

$$\xi = A'''' - \alpha, \quad B'''' = \beta + \gamma(A'''' - \alpha);$$

d'où l'on tire

$$\gamma = \frac{B'''' - \beta}{A'''' - \alpha}.$$

Ainsi l'on connaîtra la valeur du coefficient γ .

8. Si la série

$$a, A, A', A'', \dots$$

était divergente, alors elle serait convergente de l'autre côté; il faudrait donc continuer cette série en sens contraire suivant la même loi, c'est-à-dire en sorte que chaque terme soit une fonction de celui qui le précède à gauche, telle que X l'est de x .

Ainsi l'on fera dans ce cas

$$X = a,$$

et l'on cherchera la valeur de x qui en résulte et qu'on nommera a' ; on fera ensuite

$$X = a',$$

et l'on cherchera la valeur résultante de x , qu'on nommera a'' , et ainsi de suite. On fera de même

$$Y = b, \quad y = b',$$

ensuite

$$Y = b', \quad y = b'',$$

et ainsi du reste.

On aura ainsi les deux séries

$$a, a', a'', a''', \dots$$

$$b, b', b'', b''', \dots$$

qui seront convergentes vers les quantités α et β , et serviront par conséquent à déterminer la valeur de γ , en faisant

$$a'''' = \alpha + \xi \quad \text{et} \quad b'''' = \beta + \gamma\xi;$$

d'où

$$\gamma = \frac{b'''' - \beta}{a'''' - \alpha}.$$

9. Au reste, lorsque les relations entre x et X , et entre y et Y , sont données algébriquement, on pourra trouver les valeurs arithmétiques des termes des séries proposées aussi exactement qu'on voudra par les règles connues. Mais, si ces relations ne sont représentées que par des courbes, il faudra alors chercher mécaniquement les termes dont il s'agit, en prenant les ordonnées correspondantes aux abscisses données, ou les abscisses correspondantes aux ordonnées données; opération qui n'a aucune difficulté lorsque les courbes sont tracées avec exactitude.

10. Cela posé, qu'on cherche maintenant la valeur de y correspondante à une valeur quelconque donnée de x .

Soit m la valeur donnée de x ; qu'on fasse

$$x = m,$$

et qu'on cherche la valeur correspondante de X qu'on nommera M ; qu'on fasse ensuite

$$x = M,$$

V.

et que M' soit la valeur correspondante de X ; qu'on fasse encore

$$x = M',$$

et que M'' soit la valeur de X , et ainsi de suite.

On aura de cette manière la série

$$m, M, M', M'', \dots$$

laquelle, si elle tend vers l'égalité, sera nécessairement convergente vers la quantité α par la même raison que nous avons vue plus haut (7). On parviendra donc dans ce cas à un terme tel que M'' , lequel sera peu différent de α ; en sorte qu'on pourra faire

$$M'' = \alpha + \xi;$$

et alors, ce terme étant pris pour x , la valeur correspondante de y sera $\beta + \gamma\xi$ (5). Ainsi lorsque M'' sera presque égal à α , on aura, pour $x = M''$,

$$y = \beta + \gamma(M'' - \alpha).$$

Supposons que n soit la valeur cherchée de y correspondante à $x = m$, que de même N soit la valeur qui en résulte pour Y , et que

$$y = N$$

donne

$$Y = N',$$

qu'ensuite

$$y = N''$$

donne

$$Y = N''',$$

et ainsi de suite. Il est clair que les termes de la série

$$n, N, N', N'', \dots$$

seront les valeurs de y répondantes aux valeurs

$$m, M, M', M'', \dots$$

de x . Donc aussi N'' sera la valeur de y qui répond à $x = M''$; par conséquent on aura

$$N'' = \beta + \gamma(M'' - \alpha).$$

Cette valeur de N'' sera donc connue, et de là, en remontant par des opérations contraires, on trouvera tous les termes précédents de la série

$$n, N, N', N'', \dots, N''';$$

et l'on parviendra ainsi à la valeur cherchée n .

11. Si la série

$$m, M, M', M'', \dots$$

ne tend pas vers l'égalité, et par conséquent ne converge pas vers la valeur de α , il faudra alors la continuer en sens contraire, c'est-à-dire former la série

$$m, m', m'', \dots$$

en faisant, comme dans le n° 8 ci-dessus,

$$X = m,$$

et de là

$$x = m',$$

ensuite

$$X = m'',$$

et de là

$$x = m''',$$

et ainsi de suite. La série

$$m, m', m'', \dots$$

étant convergente vers α , on la poussera jusqu'à un terme m'' peu différent de α , et, faisant

$$x = m'' = \alpha + \xi,$$

on aura

$$y = \beta + \gamma\xi = \beta + \gamma(m'' - \alpha);$$

c'est le terme correspondant dans la série

$$n, n', n'', \dots, n''';$$

formée suivant cette loi, que

$$Y = n$$

donne

$$y = n',$$

ensuite

$$Y = n'$$

donne

$$y = n'',$$

et ainsi de suite. Ainsi, en remontant de ce terme connu vers le précédent, on trouvera la valeur cherchée de m .

12. Nous avons supposé que l'équation donnée entre $\varphi(x)$ et $\varphi(X)$, c'est-à-dire entre y et Y (2), était indépendante de x ; mais il n'est pas difficile de voir que la même méthode peut servir également lorsque cette équation contiendra aussi x d'une manière quelconque : seulement on ne pourra pas dans ce cas représenter la relation entre y et Y par une courbe; mais il faudra nécessairement que cette relation soit exprimée algébriquement. Il ne s'agira alors que de substituer, à chaque opération, dans l'équation entre x , y et Y , la valeur de x déjà trouvée dans l'opération correspondante et relative à x ; ainsi, après avoir trouvé la valeur α de x , laquelle rend $x = X$, on mettra cette valeur pour x dans l'équation en y et Y , et, faisant $y = Y$, on en tirera la valeur β de y ; et ainsi du reste.

Enfin il pourrait arriver que γ se trouvât $= 0$; alors pour

$$x = \alpha + \xi$$

on aurait (5)

$$y = \beta + \delta \xi,$$

et le Problème serait toujours résoluble par les mêmes principes.

13. La méthode que nous venons d'exposer n'est autre chose dans le fond qu'une généralisation de celle qui a été employée par Briggs dans la construction de sa *Table des logarithmes*. (Voyez son Ouvrage intitulé: *Arithmetica logarithmica*.) Cette méthode de Briggs est peu connue, et

dans la foule des Auteurs qui, dans ce siècle-ci, ont traité des logarithmes, il n'y en a peut-être pas un qui en ait fait usage, ou même mention; ils ont presque tous suivi la méthode indirecte et de tâtonnement, qui est à la vérité préférable lorsqu'il s'agit de construire des Tables; mais celle de Briggs a l'avantage d'être tout à fait directe et de donner immédiatement le logarithme de chaque nombre sans le faire dépendre d'aucun autre logarithme. Comme elle est applicable à plusieurs questions qui pourraient échapper aux méthodes connues, j'ai cru devoir en enrichir l'Analyse, en la généralisant et la présentant, ainsi que je viens de le faire, avec toute l'étendue dont elle est susceptible.

Application aux logarithmes.

14. Pour donner un exemple de cette méthode, nous choisirons la question même des logarithmes, comme renfermant l'application la plus simple qu'on en puisse faire; et nous partirons aussi de la propriété la plus simple des logarithmes, celle que le logarithme d'un carré est égal au double du logarithme de sa racine.

On aura donc dans ce cas (1)

$$\varphi(x) = \log x,$$

et, comme la propriété donnée consiste en ce que

$$\log x^2 = 2 \log x,$$

l'équation entre $\varphi(x)$ et $\varphi(X)$ sera

$$\varphi(x^2) = 2\varphi(x),$$

done

$$X = x^2;$$

et, faisant (2)

$$\varphi(x) = y, \quad \varphi(X) = Y,$$

on aura

$$Y = 2y.$$

Ainsi le lieu de l'équation entre x et X est une parabole, et celui de l'équation entre y et Y est une simple ligne droite.

Faisant maintenant $X = x$, on a

$$x = x^2, \text{ donc } x = 1 = \alpha;$$

et, faisant $Y = y$, on a (3)

$$y = 2y, \text{ donc } y = 0 = \beta.$$

15. A l'égard des valeurs de x et y qu'on doit supposer connues et que nous avons désignées par a et b (6), elles dépendent du système de logarithmes qu'on veut adopter. Dans celui de Briggs, qui est le système reçu généralement, on fait $\log 10 = 1$; donc $x = 10$ donne $y = 1$; par conséquent

$$a = 10, \quad b = 1.$$

Ainsi la série

$$a, A, A', A'', \dots$$

deviendra

$$10, 10^2, 10^4, 10^8, \dots,$$

et la série correspondante

$$b, B, B', B'', \dots$$

sera

$$1, 2, 4, 8, \dots$$

Et réciproquement la série

$$a, a', a'', a''', \dots$$

sera

$$10, \sqrt{10}, \sqrt[4]{10}, \sqrt[8]{10}, \dots,$$

et la correspondante

$$b, b', b'', b''', \dots$$

sera

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

On voit ici que la série

$$a, A, A', A'', \dots$$

est divergente, mais qu'au contraire la série

$$a, a', a'', a''', \dots$$

est convergente et approche de plus en plus de la valeur de $\alpha = 1$. Ainsi il faudra employer cette dernière série pour trouver la valeur de γ (8).

16. On extraira donc la racine carrée de 10, ensuite la racine carrée de cette racine, et puis la racine carrée de celle-ci, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à une racine très-peu différente de l'unité. On formera ensuite les termes correspondants de la série

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

par une continuelle bissection de l'unité. On poussera ces séries jusqu'aux termes $a^{2^{20}}$ et $b^{2^{20}}$ tels que $a^{2^{20}} = 1$ et $b^{2^{20}}$ soient des fractions assez petites pour que leurs carrés soient comme nuls. Ainsi, en employant le calcul décimal, si l'on a fixé le nombre des décimales auquel on veut porter la précision, il faudra que les quantités dont il s'agit se trouvent exprimées par des nombres qui aient avant les chiffres ou notes significatives autant de zéros qu'il y aura de ces chiffres, afin que les carrés de ces nombres tombent hors des limites fixées.

Briggs, ayant employé 32 décimales, a poussé le nombre des extractions successives jusqu'à 54, et il a eu pour dernière racine le nombre

$$1,00000\ 00000\ 00000\ 12781\ 91493\ 20032\ 35,$$

c'est le terme $a^{2^{20}}$ de notre série $a, a', a'', \dots$

Il a trouvé ensuite par 54 bisections continuelles de l'unité le nombre

$$0,00000\ 00000\ 00000\ 05551\ 11512\ 31257\ 837,$$

qui est par conséquent le terme $b^{2^{20}}$ de la série $b, b', b'', \dots$

Ainsi, puisque

$$\alpha = 1, \quad \beta = 0,$$

on aura

$$\gamma = \frac{b^{2^{20}}}{a^{2^{20}} - 1}.$$

le logarithme n^{hyp} d'un nombre m^{hyp} , très-peu différent de l'unité, sera simplement $m^{\text{hyp}} - 1$ (17), c'est-à-dire qu'on aura

$$\log(1 + \xi) = \xi,$$

lorsque ξ est une quantité infiniment petite. C'est la propriété connue des logarithmes hyperboliques. Et de là on voit en même temps comment ces sortes de logarithmes, qu'on appelle aussi *naturels*, ont pu se présenter les premiers à leur inventeur Neper, quoique d'ailleurs notre système décimal paraisse indiquer naturellement les logarithmes tabulaires ou de Briggs, dans lesquels l'unité est le logarithme de 10.

Ainsi, dans les formules du n° 16, $a^{\text{hyp}} - 1$ sera le logarithme hyperbolique de a^{hyp} , et si l'on nomme h le logarithme hyperbolique de a ou de 10, le terme h^{hyp} de la série

$$h, h', h'', \dots$$

des logarithmes correspondants aux nombres

$$a, a', a'', \dots$$

sera évidemment $b^{\text{hyp}} h$, puisque ces termes procèdent par une bissection continue. On aura donc

$$b^{\text{hyp}} h = a^{\text{hyp}} - 1,$$

et de là

$$h = \frac{a^{\text{hyp}} - 1}{b^{\text{hyp}}} = \frac{1}{\gamma};$$

de sorte que le nombre réciproque du nombre γ du système tabulaire sera le logarithme hyperbolique de 10; et l'on aura par ce moyen

$$\log \text{hyp } 10 = 2,30258\ 50929\ 94045.$$

20. Au reste cette méthode de trouver les logarithmes peut être facilement traduite en formule au moyen du Théorème de Newton pour la formation des puissances des binômes. Car, suivant le n° 17, on a

$$n = \log m = 2^x \times \gamma \left(\sqrt[n]{m} - 1 \right),$$

lorsque 2^x est un très-grand nombre. Donc, si l'on fait

$$\frac{1}{2^x} = i,$$

en sorte que i soit une fraction fort petite, on aura

$$\log m = \frac{\gamma(m^i - 1)}{i}.$$

Soit

$$m = 1 + z;$$

on aura par le Théorème cité

$$m^i = 1 + iz + \frac{i(i-1)}{2} z^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{2 \cdot 3} z^3 + \dots,$$

et lorsque i est un nombre très-petit, on a, en rejetant les termes affectés de $i^2, i^3, \dots$,

$$m^i = 1 + i \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \right);$$

done

$$\log(1 + z) = \gamma \left(z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots \right),$$

et si l'on fait $\gamma = 1$, on a

$$\log \text{hyp}(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

comme on le trouve par le Calcul intégral.

21. Réciproquement donc, puisque

$$\log m = \frac{\gamma(m^i - 1)}{i},$$

on aura

$$m^i = 1 + \frac{i \log m}{\gamma},$$

et de là

$$m = \left(1 + \frac{i \log m}{\gamma} \right)^{\frac{1}{i}};$$

donc, développant cette puissance par la même formule et faisant en même temps t infiniment petit, on aura

$$m = 1 + \frac{\log m}{\gamma} + \frac{(\log m)^2}{2\gamma^2} + \frac{(\log m)^3}{2.3\gamma^3} + \dots,$$

ce qui s'accorde avec ce que l'on sait d'ailleurs.

Halley est, je crois, le premier qui ait donné cette manière également simple et ingénieuse de parvenir aux expressions analytiques des logarithmes par les nombres, et des nombres par les logarithmes. (Voyez les *Transactions philosophiques*, n° 216.)

22. Je finirai par faire remarquer que si l'on élève la quantité $1+z$ à une puissance quelconque t , et qu'on veuille avoir la série qui exprime cette puissance, ordonnée par rapport aux puissances mêmes de l'exposant t , on aura

$$(1+z)^t = 1 + t\zeta + \frac{t^2\zeta^2}{2} + \frac{t^3\zeta^3}{2.3} + \dots,$$

ζ étant le logarithme hyperbolique de $1+z$.

Car, faisant dans la série du numéro précédent

$$m = (1+z)^t, \quad \gamma = 1,$$

on aura

$$\log m = \log \text{hyp}(1+z)^t = t \log \text{hyp}(1+z) = t\zeta;$$

donc, etc.

SUR

UNE NOUVELLE PROPRIÉTÉ

DU

CENTRE DE GRAVITÉ.



SUR

UNE NOUVELLE PROPRIÉTÉ

DE

CENTRE DE GRAVITÉ.

*(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1783.)*

On sait que le centre de gravité d'un corps, ou d'un système ou assemblage quelconque de corps, est un point autour duquel le système est toujours en équilibre en vertu de la gravité, quelle que soit sa situation autour de ce point; et suivant les principes de Statique il faut que la somme des moments de tous les poids élémentaires du système par rapport à un plan quelconque passant par le point dont il s'agit, c'est-à-dire la somme des produits de ces poids par leurs distances au plan, soit nulle. Or on démontre facilement par la Géométrie que, si cette propriété a lieu par rapport à trois plans perpendiculaires entre eux, elle aura lieu aussi par rapport à un autre plan quelconque; ainsi la recherche du centre de gravité se réduit uniquement à trouver un point tel que la somme des moments par rapport à trois plans perpendiculaires et passant par ce plan soit nulle. C'est aussi de cette manière qu'on détermine le centre de gravité; mais quoique la considération des plans par rapport auxquels la somme des moments doit être nulle facilite extrêmement cette détermination, on n'en doit pas moins la regarder comme

étrangère en quelque façon à la nature du centre de gravité; et puisque ce centre est un point unique, dont la position dépend simplement de celle que les différents poids ont entre eux, c'est-à-dire de leurs distances mutuelles, il serait naturel de chercher à le déterminer aussi par le moyen de ces distances. C'est l'objet de la nouvelle propriété que nous allons exposer.

THÉORÈME I.

Soit un système ou assemblage quelconque de plusieurs corps ou masses dont chacune soit considérée comme un point; qu'on multiplie toutes ces masses deux à deux, et ensuite chaque produit de deux masses par le carré de la distance entre elles; qu'enfin on divise la somme de ces différents produits par la somme de toutes les masses; on aura une quantité égale à la somme des produits de chaque masse par le carré de sa distance au centre de gravité du système.

Démonstration.

Soient m une quelconque des masses du système, et p, q, r les trois coordonnées rectangles qui déterminent la position de cette masse dans l'espace, ces coordonnées ayant leur origine commune dans le centre de gravité de tout le système. Soient de même $m', m'', \dots$ les autres masses du système; p', q', r' les coordonnées rectangles de la masse m' ; p'', q'', r'' celles de la masse m'' ; et ainsi des autres.

Comme $p, p', p'', \dots$ sont les distances des masses $m, m', m'', \dots$ à un plan passant par le centre de gravité, que de même $q, q', q'', \dots$ et $r, r', r'', \dots$ sont les distances des mêmes masses à deux autres plans perpendiculaires à celui-là et passant de même par le centre de gravité, on aura par la propriété connue de ce centre les trois équations

$$mp + m'p' + m''p'' + \dots = 0,$$

$$mq + m'q' + m''q'' + \dots = 0,$$

$$mr + m'r' + m''r'' + \dots = 0.$$

On aura donc

$$(mp + m'p' + m''p'' + \dots)^2 = 0,$$

savoir, en développant les termes

$$m^2p^2 + m'^2p'^2 + m''^2p''^2 + \dots = -2mm'pp' - 2mm''pp'' - 2m'm''p'p'' - \dots;$$

qu'on ajoute de part et d'autre les termes

$$m(m' + m'' + \dots)p^2 + m'(m + m'' + \dots)p'^2 + m''(m + m' + \dots)p''^2 + \dots,$$

on aura

$$\begin{aligned} & (m + m' + m'' + \dots)(mp^2 + m'p'^2 + m''p''^2 + \dots) \\ & = mm'(p - p')^2 + mm''(p - p'')^2 + m'm''(p' - p'')^2 + \dots \end{aligned}$$

On trouvera de même, d'après l'équation

$$(mq + m'q' + m''q'' + \dots)^2 = 0,$$

celle-ci

$$\begin{aligned} & (m + m' + m'' + \dots)(mq^2 + m'q'^2 + m''q''^2 + \dots) \\ & = mm'(q - q')^2 + mm''(q - q'')^2 + m'm''(q' - q'')^2 + \dots \end{aligned}$$

Et pareillement l'équation

$$(mr + m'r' + m''r'' + \dots)^2 = 0$$

donnera

$$\begin{aligned} & (m + m' + m'' + \dots)(mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \dots) \\ & = mm'(r - r')^2 + mm''(r - r'')^2 + m'm''(r' - r'')^2 + \dots \end{aligned}$$

Done, ajoutant ces trois équations ensemble, et faisant, pour abrégér,

$$p^2 + q^2 + r^2 = a^2,$$

$$p'^2 + q'^2 + r'^2 = a'^2,$$

$$p''^2 + q''^2 + r''^2 = a''^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(p - p')^2 + (q - q')^2 + (r - r')^2 = b^2,$$

$$(p - p'')^2 + (q - q'')^2 + (r - r'')^2 = b'^2,$$

$$(p' - p'')^2 + (q' - q'')^2 + (r' - r'')^2 = b''^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

V.

on aura

$$(m + m' + m'' + \dots)(ma^2 + m'a'^2 + m''a''^2 + \dots) \\ = mm'b^2 + mm''b'^2 + m'm''b''^2 + \dots$$

Or il est visible que $a, a', a'', \dots$ sont les distances des masses $m, m', m'', \dots$ au centre de gravité, et $b, b', b'', \dots$ sont les distances entre les masses m et m', m et m'', m' et $m'', \dots$. Donc, en divisant l'équation précédente par $m + m' + m'' + \dots$, on aura le Théorème proposé.

COROLLAIRE.

Puisque

$$mp + m'p' + m''p'' + \dots = 0,$$

on aura

$$m(p-f)^2 + m'(p'-f)^2 + m''(p''-f)^2 + \dots \\ = mp^2 + m'p'^2 + m''p''^2 + \dots + (m + m' + m'' + \dots)f^2,$$

quelle que soit la quantité f . Donc aussi

$$(m + m' + m'' + \dots)[m(p-f)^2 + m'(p'-f)^2 + m''(p''-f)^2 + \dots] \\ = (m + m' + m'' + \dots)(mp^2 + m'p'^2 + m''p''^2 + \dots) + (m + m' + m'' + \dots)^2 f^2;$$

et, mettant pour

$$(m + m' + m'' + \dots)(mp^2 + m'p'^2 + m''p''^2 + \dots)$$

sa valeur

$$mm'(p-p')^2 + mm''(p-p'')^2 + m'm''(p'-p'')^2 + \dots$$

trouvée dans le numéro précédent, on aura l'équation

$$(m + m' + m'' + \dots)[m(p-f)^2 + m'(p'-f)^2 + m''(p''-f)^2 + \dots] \\ = mm'(p-p')^2 + mm''(p-p'')^2 + m'm''(p'-p'')^2 + \dots + (m + m' + m'' + \dots)^2 f^2.$$

On trouvera de même, en prenant une autre quantité quelconque g , l'équation

$$(m + m' + m'' + \dots)[m(q-g)^2 + m'(q'-g)^2 + m''(q''-g)^2 + \dots] \\ = mm'(q-q')^2 + mm''(q-q'')^2 + m'm''(q'-q'')^2 + \dots + (m + m' + m'' + \dots)^2 g^2.$$

Et pareillement on aura

$$(m + m' + m'' + \dots)[m(r-h)^2 + m'(r'-h)^2 + m''(r''-h)^2 + \dots] \\ = mm'(r-r')^2 + mm''(r-r'')^2 + m'm''(r'-r'')^2 + \dots + (m + m' + m'' + \dots)^2 h^2.$$

De sorte qu'en ajoutant ensemble ces trois équations et faisant, pour abréger,

$$(p-f)^2 + (q-g)^2 + (r-h)^2 = \alpha^2,$$

$$(p'-f)^2 + (q'-g)^2 + (r'-h)^2 = \alpha'^2,$$

$$(p''-f)^2 + (q''-g)^2 + (r''-h)^2 = \alpha''^2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$f^2 + g^2 + h^2 = \delta^2,$$

on aura

$$(m + m' + m'' + \dots)(m\alpha^2 + m'\alpha'^2 + m''\alpha''^2 + \dots) \\ = mm'b^2 + mm''b'^2 + m'm''b''^2 + \dots + (m + m' + m'' + \dots)^2 \delta^2.$$

Or il est clair que les quantités f, g, h peuvent représenter les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque pris à volonté; alors $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots$ seront évidemment les distances des masses $m, m', m'', \dots$ à ce point, et δ sera la distance de ce point au centre de gravité des corps $m, m', m'', \dots$. Donc l'équation précédente donnera ce nouveau Théorème.

THÉORÈME II.

La somme des produits de chaque masse par le carré de sa distance à un point quelconque donné est égale au produit de la somme des masses par le carré de la distance de ce point au centre de gravité de toutes ces masses, plus à la somme des produits des masses multipliées deux à deux entre elles et par le carré de leurs distances respectives, cette dernière somme étant divisée par la somme même des masses.

COROLLAIRE.

De là résulte une nouvelle manière de trouver le centre de gravité d'un système ou assemblage quelconque de tant de corps qu'on voudra,

considérés comme des points. On cherchera la somme des produits de la masse de chaque corps par le carré de sa distance à un point donné quelconque, et l'on divisera cette somme par celle de toutes les masses; on cherchera ensuite la somme des produits des mêmes masses multipliées ensemble deux à deux, et multipliées en même temps par le carré de la distance entre les deux masses, et l'on divisera cette somme par le carré de la somme des masses; on retranchera cette seconde quantité de la première, et l'on aura la valeur du carré de la distance du centre de gravité du système, au point donné; de sorte qu'en tirant la racine carrée de la différence des deux quantités dont il s'agit, on aura la distance du centre cherché au point donné.

Ainsi l'on pourra trouver la distance du centre de gravité du système à trois points quelconques donnés, et par ces trois distances on aura évidemment la position du même centre. Si les corps étaient tous dans un même plan, il est visible qu'il suffirait de considérer deux points; et il n'en faudrait qu'un seul, si tous les corps étaient sur une même ligne droite.

Au reste, comme la position de ces points est arbitraire, on peut les prendre dans quelques-uns des corps du système; alors il suffira de connaître les masses des corps et leurs distances mutuelles, pour avoir immédiatement la distance du centre de gravité à chacun de ces corps.

Cette manière de déterminer le centre de gravité par les seules distances des corps entre eux est, je crois, nouvelle, et peut être utile dans quelques occasions.

MÉTHODE GÉNÉRALE

POUR INTÉGRER

LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE,

LORSQUE CES DIFFÉRENCES NE SONT QUE LINÉAIRES.

MÉTHODE GÉNÉRALE

POUR INTÉGRER

LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES

DU PREMIER ORDRE,

LORSQUE CES DIFFÉRENCES NE SONT QUE LINÉAIRES.

*(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1785.)*

Si la naissance du Calcul intégral appartient au siècle dernier, il y a une branche importante de ce Calcul qui n'a été inventée qu'au milieu de celui-ci; c'est celle qui concerne les équations aux différences partielles, c'est-à-dire ces équations qui contiennent les différentielles d'une fonction de plusieurs variables, prises relativement à chacune de ces variables en particulier.

Tous les Problèmes de Géométrie où l'on considère des surfaces, et tous ceux de Mécanique où l'on considère des corps ou flexibles ou fluides, dépendent de la Théorie de ces équations. Les solutions qu'on peut trouver indépendamment de cette Théorie sont nécessairement incomplètes ou hypothétiques; et, si l'on est souvent obligé de se contenter de ces solutions limitées, c'est faute de pouvoir intégrer les équations aux différences partielles dans lesquelles les solutions rigoureuses et générales sont renfermées.

La plupart des recherches analytiques qu'on a faites depuis vingt-ans

ont eu pour objet l'intégration de ce genre d'équations; et elles ont produit différentes méthodes plus ou moins générales et plus ou moins utiles. Une des plus étendues et des plus simples tout à la fois est, je crois, celle que j'ai donnée dans les *Mémoires de l'Académie* pour l'année 1779 (*), et qui apprend à intégrer toutes les équations aux différences partielles du premier ordre, dans lesquelles ces différences ne paraissent que sous la forme linéaire. Mais, comme cette méthode n'y est exposée qu'en passant et presque sans démonstration, j'ai cru qu'il serait avantageux aux progrès du Calcul intégral de la présenter de nouveau de la manière la plus directe et avec toute la généralité dont elle est susceptible. C'est l'objet de ce Mémoire, qui contiendra aussi de nouvelles recherches sur le Problème des trajectoires.

1. On appelle *différences partielles* celles qui résultent de la différentiation d'une fonction de plusieurs variables, en y faisant varier chacune des variables à part. Ainsi, regardant u comme une fonction des variables $x, y, z, \dots$, la différentielle complète du sera de la forme

$$p dx + q dy + r dz + \dots,$$

et les différents termes $p dx, q dy, r dz, \dots$ de cette différentielle seront les différences partielles de u du premier ordre. On a coutume de représenter les coefficients $p, q, r, \dots$ des différences $dx, dy, dz, \dots$ dans la différentielle de u par $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \dots$; de sorte que l'expression complète de du sera

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots$$

Si donc on a une équation entre

$$u, x, y, z, \dots, \frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \dots,$$

ce sera une équation aux différences partielles du premier ordre; et, si

(*) *OEuvres de Lagrange*, t. IV, p. 585.

cette équation ne contient que les premières dimensions des quantités $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}, \dots$, en sorte qu'elle soit représentée ainsi

$$X \frac{du}{dx} + Y \frac{du}{dy} + Z \frac{du}{dz} + \dots = U,$$

les quantités $X, Y, Z, \dots, U$ étant des fonctions quelconques de $x, y, z, \dots, u$, on aura la forme générale des équations intégrables par la méthode que nous allons exposer.

2. Supposons d'abord que l'équation ne contienne que trois variables u, x, y , dont la première soit regardée comme une fonction des deux autres; en employant pour plus de simplicité les quantités p et q à la place de $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$, on aura donc cette équation

$$Xp + Yq = U,$$

dans laquelle X, Y, U seront des fonctions quelconques de u, x, y .

Or les quantités p et q doivent satisfaire à l'équation différentielle

$$du = p dx + q dy;$$

par conséquent il faudra qu'en éliminant, par le moyen de l'équation donnée entre p et q , l'une de ces inconnues, l'autre soit telle, que l'équation différentielle dont il s'agit puisse venir de la différentiation d'une équation finie; et cette équation finie donnera alors la valeur de u en fonction de x et y .

Mais, sans employer l'élimination, on obtiendra le même but d'une manière plus simple en multipliant ensemble les deux équations

$$Xp + Yq = U, \quad du = p dx + q dy;$$

car on aura ainsi

$$(Xp + Yq) du = U(p dx + q dy),$$

ou bien

$$p(X du - U dx) + q(Y du - U dy) = 0,$$

V.

équation qui étant divisée par p ne contiendra plus qu'une seule inconnue $\frac{q}{p}$.

3. Je suppose maintenant

$$X du - U dx = 0, \quad Y du - U dy = 0;$$

j'ai deux équations différentielles du premier ordre entre les trois variables u, x, y ; et les intégrales complètes de ces équations contiendront deux constantes arbitraires α et β , en sorte qu'on aura

$$\alpha = A, \quad \beta = B,$$

A et B étant des fonctions données des trois variables x, y, u . Ainsi, en différentiant et regardant α et β comme variables, on aura

$$d\alpha = \frac{dA}{du} du + \frac{dA}{dx} dx + \frac{dA}{dy} dy,$$

$$d\beta = \frac{dB}{du} du + \frac{dB}{dx} dx + \frac{dB}{dy} dy.$$

Mais, puisque

$$A = \alpha \quad \text{et} \quad B = \beta$$

sont les intégrales des équations

$$X du - U dx = 0, \quad Y du - U dy = 0,$$

α et β étant les constantes arbitraires, il faudra que ces équations coïncident avec les précédentes en y faisant

$$d\alpha = 0, \quad d\beta = 0;$$

par conséquent il faudra qu'en substituant pour dx et dy leurs valeurs

$\frac{X du}{U}, \frac{Y du}{U}$, tirées des mêmes équations, dans celles-ci

$$\frac{dA}{du} du + \frac{dA}{dx} dx + \frac{dA}{dy} dy = 0,$$

$$\frac{dB}{du} du + \frac{dB}{dx} dx + \frac{dB}{dy} dy = 0,$$

on ait des équations identiques qui seront

$$\frac{dA}{du} + \frac{dA}{dx} \frac{X}{U} + \frac{dA}{dy} \frac{Y}{U} = 0,$$

$$\frac{dB}{du} + \frac{dB}{dx} \frac{X}{U} + \frac{dB}{dy} \frac{Y}{U} = 0,$$

et qui donneront

$$\frac{dA}{du} = -\frac{dA}{dx} \frac{X}{U} - \frac{dA}{dy} \frac{Y}{U},$$

$$\frac{dB}{du} = -\frac{dB}{dx} \frac{X}{U} - \frac{dB}{dy} \frac{Y}{U}.$$

Ainsi les différentielles dx et $d\beta$ se trouveront exprimées de cette manière

$$dx = \frac{1}{U} \frac{dA}{dx} (U dx - X du) + \frac{1}{U} \frac{dA}{dy} (U dy - Y du),$$

$$d\beta = \frac{1}{U} \frac{dB}{dx} (U dx - X du) + \frac{1}{U} \frac{dB}{dy} (U dy - Y du),$$

d'où l'on tirera

$$X du - U dx = \frac{U}{T} \left(\frac{dB}{dy} dx - \frac{dA}{dy} d\beta \right),$$

$$Y du - U dy = \frac{U}{T} \left(\frac{dA}{dx} d\beta - \frac{dB}{dx} dx \right),$$

en supposant

$$T = \frac{dA}{dy} \frac{dB}{dx} - \frac{dB}{dy} \frac{dA}{dx}.$$

Je conclus de là que, si à la place des variables x et y on veut introduire les variables α et β telles que

$$\alpha = A, \quad \beta = B,$$

dans les formules

$$X du - U dx, \quad Y du - U dy,$$

elles deviendront de la forme précédente, dans laquelle il ne paraît que les deux différences dx et $d\beta$.

4. Faisant donc cette substitution dans l'équation

$$p(X du - U dx) + q(Y du - U dy) = 0$$

à laquelle il s'agit de satisfaire, elle deviendra

$$\left(p \frac{dB}{dy} - q \frac{dB}{dx}\right) dx + \left(q \frac{dA}{dx} - p \frac{dA}{dy}\right) d\beta = 0,$$

ou bien

$$dx + \frac{q \frac{dA}{dx} - p \frac{dA}{dy}}{p \frac{dB}{dy} - q \frac{dB}{dx}} d\beta = 0.$$

Comme cette équation ne contient que les deux différences dx et $d\beta$, elle ne peut subsister à moins que le coefficient de $d\beta$ ne soit aussi une simple fonction de α et β ; par conséquent il faudra qu'en substituant dans ce coefficient pour x et y leurs valeurs en α , β , u , tirées des équations

$$A = \alpha, \quad B = \beta,$$

la quantité u disparaisse d'elle-même.

On aura donc, en dénotant par la caractéristique f une fonction quelconque,

$$\frac{q \frac{dA}{dx} - p \frac{dA}{dy}}{p \frac{dB}{dy} - q \frac{dB}{dx}} = f(\alpha, \beta),$$

condition à laquelle on pourra toujours satisfaire par le moyen de la quantité arbitraire $\frac{q}{p}$; alors l'équation

$$dx + f(\alpha, \beta) d\beta = 0$$

sera toujours intégrable, étant multipliée par un facteur convenable; et l'intégrale sera

$$F(\alpha, \beta) = 0,$$

en dénotant par F une autre fonction de α et β ; et, comme la fonction

$f(\alpha, \beta)$ peut être quelconque, la fonction $F(\alpha, \beta)$ pourra être aussi quelconque.

Mais on a supposé

$$\alpha = A, \quad \beta = B;$$

done, remettant ces valeurs à la place de α et β , on aura l'équation finie

$$F(A, B) = 0,$$

laquelle donnera la valeur cherchée de u en x et y , la fonction désignée par F demeurant arbitraire.

5. L'intégration de toute équation de la forme

$$X \frac{du}{dx} + Y \frac{du}{dy} = U,$$

X , Y , U étant des fonctions quelconques de u , x , y , se réduit donc à ce procédé fort simple.

On intégrera par les règles connues les équations différentielles

$$X du - U dx = 0, \quad Y du - U dy = 0,$$

et, ayant réduit les deux intégrales à la forme

$$A = \alpha, \quad B = \beta,$$

où A , B sont des fonctions de u , x , y , et α , β sont les deux constantes arbitraires introduites par l'intégration, on établira une équation quelconque entre A et B , qu'on pourra désigner par

$$F(A, B) = 0, \quad \text{ou bien par } A = \varphi(B),$$

les caractéristiques F , φ désignant des fonctions quelconques, et cette équation sera l'intégrale complète de la proposée.

De cette manière l'intégration de l'équation aux différences partielles est réduite à celle de deux équations aux différences ordinaires; c'est tout ce qu'on peut désirer, dans le Calcul intégral des différences partielles, de le ramener à celui des différences totales et ordinaires.

6. Considérons à présent l'équation à quatre variables u, x, y, z , dont la forme est

$$Xp + Yq + Zr = U,$$

en désignant par p, q, r les différences partielles $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}, \frac{du}{dz}$, et par X, Y, Z, U des fonctions quelconques de u, x, y, z .

On aura ici

$$du = p dx + q dy + r dz;$$

donc, multipliant cette équation par celle qui est donnée entre p, q, r , on aura

$$(Xp + Yq + Zr) du = U(p dx + q dy + r dz),$$

ou bien

$$p(X du - U dx) + q(Y du - U dy) + r(Z du - U dz) = 0,$$

laquelle étant divisée par p ne contiendra plus réellement que deux inconnues $\frac{q}{p}, \frac{r}{p}$; et la question sera réduite à déterminer ces deux inconnues en sorte que l'équation dont il s'agit devienne intégrable.

Supposons, à l'imitation de ce que nous avons fait plus haut,

$$X du - U dx = 0, \quad Y du - U dy = 0, \quad Z du - U dz = 0;$$

en intégrant ces équations, on aura trois équations finies entre u, x, y, z qui contiendront trois constantes arbitraires α, β, γ ; de sorte qu'on pourra mettre ces équations sous la forme

$$A = \alpha, \quad B = \beta, \quad C = \gamma,$$

où A, B, C seront des fonctions connues de u, x, y, z .

Il est clair qu'on peut, à la place des variables x, y, z , introduire dans l'équation qu'il s'agit de rendre intégrable les quantités α, β, γ , regardées maintenant comme variables, et supposées telles que

$$\alpha = A, \quad \beta = B, \quad \gamma = C;$$

or, en différentiant, on aura

$$dz = \frac{dA}{du} du + \frac{dA}{dx} dx + \frac{dA}{dy} dy + \frac{dA}{dz} dz,$$

$$d\beta = \frac{dB}{du} du + \frac{dB}{dx} dx + \frac{dB}{dy} dy + \frac{dB}{dz} dz,$$

$$d\gamma = \frac{dC}{du} du + \frac{dC}{dx} dx + \frac{dC}{dy} dy + \frac{dC}{dz} dz;$$

mais, en faisant

$$dz = 0, \quad d\beta = 0, \quad d\gamma = 0,$$

on doit avoir des équations identiques avec celles-ci

$$X du - U dx = 0, \quad Y du - U dy = 0, \quad Z du - U dz = 0,$$

dont

$$A = \alpha, \quad B = \beta, \quad C = \gamma$$

sont supposées être les intégrales complètes; donc, en substituant pour

dx, dy, dz les valeurs $\frac{X du}{U}, \frac{Y du}{U}, \frac{Z du}{U}$, on aura

$$\frac{dA}{du} + \frac{dA}{dx} \frac{X}{U} + \frac{dA}{dy} \frac{Y}{U} + \frac{dA}{dz} \frac{Z}{U} = 0,$$

$$\frac{dB}{du} + \frac{dB}{dx} \frac{X}{U} + \frac{dB}{dy} \frac{Y}{U} + \frac{dB}{dz} \frac{Z}{U} = 0,$$

$$\frac{dC}{du} + \frac{dC}{dx} \frac{X}{U} + \frac{dC}{dy} \frac{Y}{U} + \frac{dC}{dz} \frac{Z}{U} = 0;$$

d'où l'on tirera les valeurs de $\frac{dA}{du}, \frac{dB}{du}, \frac{dC}{du}$, lesquelles donneront par la substitution

$$U dx = \frac{dA}{dx} (U dx - X du) + \frac{dA}{dy} (U dy - Y du) + \frac{dA}{dz} (U dz - Z du),$$

$$U d\beta = \frac{dB}{dx} (U dx - X du) + \frac{dB}{dy} (U dy - Y du) + \frac{dB}{dz} (U dz - Z du),$$

$$U d\gamma = \frac{dC}{dx} (U dx - X du) + \frac{dC}{dy} (U dy - Y du) + \frac{dC}{dz} (U dz - Z du);$$

et de là on aura celles de

$$Xdu - Udx, \quad Ydu - Udy, \quad Zdu - Udz$$

en $dx, d\beta, d\gamma$, valeurs qui seront de la forme

$$Xdu - Udx = Ldx + Md\beta + Nd\gamma,$$

$$Ydu - Udy = L'dx + M'd\beta + N'd\gamma,$$

$$Zdu - Udz = L''dx + M''d\beta + N''d\gamma.$$

Ainsi l'équation

$$p(Xdu - Udx) + q(Ydu - Udy) + r(Zdu - Udz) = 0$$

deviendra, par l'introduction des quantités α, β, γ à la place de x, y, z ,

$$(pL + qL' + rL'')dx + (pM + qM' + rM'')d\beta + (pN + qN' + rN'')d\gamma = 0,$$

ou bien

$$dx + \frac{pM + qM' + rM''}{pL + qL' + rL''}d\beta + \frac{pN + qN' + rN''}{pL + qL' + rL''}d\gamma = 0,$$

équation qui contient, comme l'on voit, les deux indéterminées $\frac{q}{p}$ et $\frac{r}{p}$. Cette équation ne peut subsister, c'est-à-dire résulter de la différentiation d'une équation finie, qu'en n'y admettant pour variables que les trois quantités α, β, γ . Soit donc

$$F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

l'équation finie; la différentielle sera de la forme

$$Pdx + Qd\beta + Rd\gamma = 0,$$

ou bien

$$dx + \frac{Q}{P}d\beta + \frac{R}{P}d\gamma = 0;$$

ainsi il faudra que l'on ait

$$\frac{pM + qM' + rM''}{pL + qL' + rL''} = \frac{Q}{P}, \quad \frac{pN + qN' + rN''}{pL + qL' + rL''} = \frac{R}{P},$$

équations auxquelles on pourra toujours satisfaire par le moyen des deux

arbitraires $\frac{q}{p}, \frac{r}{p}$, quelles que soient les valeurs de P, Q, R ; de sorte que ces valeurs, et par conséquent aussi la fonction finie $F(\alpha, \beta, \gamma)$, demeureront à volonté. Donc, puisque les quantités α, β, γ sont des fonctions des variables x, y, z, u , représentées par A, B, C , on aura l'équation

$$F(A, B, C) = 0,$$

pour la valeur cherchée de u en x, y, z .

7. De là résulte cette méthode fort simple d'intégrer toute équation de la forme

$$X \frac{du}{dx} + Y \frac{du}{dy} + Z \frac{du}{dz} = U,$$

dans laquelle X, Y, Z, U sont des fonctions quelconques de u, x, y, z .

On intégrera par les méthodes ordinaires les trois équations différentielles

$$Xdu - Udx = 0, \quad Ydu - Udy = 0, \quad Zdu - Udz = 0;$$

on réduira les trois intégrales à la forme

$$A = \alpha, \quad B = \beta, \quad C = \gamma,$$

α, β, γ étant les trois constantes arbitraires introduites par les trois intégrations; et l'on supposera entre A, B, C une équation quelconque à volonté qu'on pourra désigner par

$$F(A, B, C) = 0, \quad \text{ou par } A = \varphi(B, C),$$

les caractéristiques F, φ , dénotant des fonctions arbitraires; ce sera l'intégrale demandée.

En général, quelle que soit la forme sous laquelle les trois intégrales des équations

$$Xdu - Udx = 0, \quad Ydu - Udy = 0, \quad Zdu - Udz = 0$$

se présenteront, si α, β, γ sont les trois constantes arbitraires, on y supposera $\alpha = \varphi(\beta, \gamma)$, et l'on éliminera ensuite les inconnues α, β, γ ;

l'équation résultante sera l'intégrale de la proposée, laquelle contiendra toujours la fonction arbitraire désignée par φ .

8. Il est aisé maintenant d'appliquer la même méthode à toute équation qui contiendra autant de différences linéaires qu'on voudra; on en trouvera toujours l'intégrale par des procédés semblables, à l'aide des intégrales de différentes équations aux différences ordinaires. Il serait superflu d'entrer là-dessus dans un plus grand détail.

9. Par la méthode que nous venons d'exposer on pourra résoudre tout Problème qui conduira à une équation aux différences partielles du premier ordre, lorsque la fonction cherchée sera, par la nature même de la question, une quantité très-petite.

Car, en négligeant les dimensions de u plus hautes que la première, on parviendra toujours à une équation de la forme

$$X \frac{du}{dx} + Y \frac{du}{dy} + Z \frac{du}{dz} + \dots = S + Tu,$$

dans laquelle $X, Y, Z, \dots, S, T$ seront des fonctions de $x, y, z, \dots$ sans u . Or cette équation n'est qu'un cas particulier de celles que nous avons intégrées.

La difficulté d'intégrer l'équation dont il s'agit se réduira à intégrer celles-ci aux différences ordinaires

$$X du - (S + Tu) dx = 0,$$

$$Y du - (S + Tu) dy = 0,$$

$$Z du - (S + Tu) dz = 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

En combinant la première avec chacune des autres, on aura celles-ci

$$Y dx - X dy = 0, \quad Z dx - X dz = 0, \dots,$$

dans lesquelles la variable u n'entre plus; ainsi l'on en tirera par l'inté-

gration les valeurs de $y, z, \dots$ en x et en autant de constantes arbitraires $\beta, \gamma, \dots$

Ensuite la première donnera

$$u e^{-\int \frac{T dx}{X}} = \int \frac{e^{-\int \frac{T dx}{X}} S dx}{X} + x;$$

de sorte qu'on aura aussi u en x après la substitution des valeurs précédentes de $y, z, \dots$

Ayant ainsi toutes les intégrales particulières, on en tirera par la règle générale du n° 7 l'intégrale complète de la proposée.

Application de la méthode précédente à la question des trajectoires rectangles considérées par rapport aux surfaces.

10. Parmi les Problèmes qui occupèrent les Géomètres dans les premières années après la naissance des nouveaux Calculs, un des plus fameux est celui des trajectoires, lequel consiste à trouver une courbe, ou plutôt une famille de courbes qui coupent à angles droits ou sous des angles donnés une infinité d'autres courbes toutes du même genre, comme des cercles, des paraboles, des ellipses, etc.

La première idée de ce Problème est due à Jean Bernoulli, comme on le voit par la lettre sixième du *Commercium epistolicum*; il le proposa à Leibnitz en 1694, en y joignant la solution de quelques cas particuliers, et celui-ci en donna immédiatement après une solution générale pour tous les cas où les courbes à couper sont données par des équations en termes finis. Jean Bernoulli le proposa ensuite publiquement dans les *Actes de Leipzig* de 1698 avec toute la généralité dont il est susceptible. La plupart des Géomètres de ce temps-là s'en occupèrent, mais aucun ne le résolut complètement; de sorte qu'en 1716, à l'occasion de la fameuse contestation sur la découverte du Calcul différentiel, Leibnitz crut pouvoir se servir de ce Problème pour attaquer les Géomètres anglais et leur fit là-dessus un défi dans les mêmes *Actes de Leipzig*.

En effet, ce Problème étant d'un genre supérieur aux Problèmes ordi-

naires des tangentes, et demandant des méthodes et des artifices particuliers qui ne se présentent pas facilement, il paraissait très-propre à embarrasser tous ceux qui n'auraient pas inventé eux-mêmes le Calcul infinitésimal, ou qui du moins ne le posséderaient pas comme s'ils l'eussent inventé. Newton, à qui le défi était indirectement adressé, était aussi plus en état que personne d'y satisfaire; mais l'esquisse de solution qu'il a cru pouvoir en donner en deux mots dans les *Transactions philosophiques* de 1716 ne prouve, ce me semble, autre chose, sinon qu'il n'en avait pas connu les difficultés. Taylor est, à proprement parler, le seul parmi les Anglais qui ait résolu le Problème des trajectoires d'une manière suffisante; mais sa méthode, fondée sur les séries, est indirecte et peu lumineuse. Nicolas Bernoulli et Hermann en ont donné des solutions plus satisfaisantes et plus générales, qu'on peut lire dans le second volume des *Œuvres* de Jean Bernoulli. Enfin feu M. Euler, pour réveiller l'attention des Géomètres sur les trajectoires qu'on avait presque déjà oubliées, a donné dans les derniers volumes des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg* une nouvelle Théorie qui paraît ne rien laisser à désirer sur cette matière.

Quoique la question des trajectoires ne soit dans le fond que de pure curiosité, on aurait tort cependant de regarder les recherches dont nous venons de parler comme des spéculations arides et inutiles; il faut même convenir que peu de Problèmes ont autant contribué que celui-ci à l'avancement et à la perfection de l'Analyse. La méthode de différentier sous le signe et de trouver les équations nommées *modulaires*, où l'on suppose le paramètre variable; les Théorèmes sur les équations de condition pour l'intégrabilité des équations différentielles du premier ordre à deux variables, et pour la possibilité de celles à trois variables, sont autant de Théories dont on est redevable au Problème des trajectoires; et l'on sait que ces Théories ont été le germe des plus belles découvertes analytiques qui aient été faites dans ce siècle.

Par ces raisons j'ai cru qu'il ne serait pas inutile d'attirer de nouveau les regards des Géomètres sur ce Problème, en le traitant d'une manière nouvelle et sous un point de vue plus étendu qu'on ne l'a fait. On n'avait

jusqu'ici considéré les trajectoires que relativement aux lignes courbes; mon dessein est de les transporter aux surfaces, et par conséquent de chercher la nature de celles qui pourront couper sous des angles donnés une infinité d'autres surfaces du même genre et représentées par des équations données en termes finis ou différentiels. Cette question conduit naturellement à une équation aux différences partielles, laquelle, dans le cas des trajectoires rectangles, est intégrable par la méthode générale que nous avons exposée. Elle servira donc d'exemple pour l'usage de cette méthode, et donnera peut-être occasion d'en découvrir de plus générales encore.

11. Soient x, y, z les coordonnées rectangles des surfaces données, on aura une équation entre les trois variables x, y, z et une autre quantité qui sera constante pour chaque surface, mais qui variera d'une surface à l'autre, et que nous appellerons le *paramètre*. Cette équation étant donnée, le Problème consiste à trouver celle de la surface qui coupera partout à angle droit, ou sous un angle quelconque donné, toutes les surfaces représentées par l'équation dont il s'agit; et il est clair qu'il n'y aura pour cela qu'à faire en sorte que la perpendiculaire menée à un point quelconque d'une des surfaces à couper fasse un angle donné avec la perpendiculaire menée par le même point à la surface coupante; ainsi tout se réduit à déterminer la position de la perpendiculaire à une surface donnée.

12. Soit

$$dz = Xdx + Ydy$$

l'équation différentielle de la surface proposée, et supposons que la perpendiculaire menée par un point quelconque de cette surface rencontre le plan des coordonnées x, y dans un point auquel répondent les coordonnées a, b ; il est facile de voir qu'en nommant cette perpendiculaire f , on aura

$$f = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + z^2}.$$

Or, comme la perpendiculaire à une surface quelconque doit être la

plus petite ou la plus grande de toutes les lignes qui d'un point donné peuvent être menées à la même surface, il s'ensuit que la valeur de f devra être un maximum ou un minimum en faisant varier les coordonnées x, y, z et regardant les quantités a, b comme constantes. Ainsi l'on aura l'équation différentielle

$$-(a-x)dx - (b-y)dy + zdz = 0;$$

mais l'équation à la surface donne

$$dz = Xdx + Ydy;$$

donc on aura

$$[Xz - (a-x)]dx + [Yz - (b-y)]dy = 0,$$

d'où l'on tire les deux équations

$$Xz - a + x = 0, \quad Yz - b + y = 0,$$

lesquelles donnent

$$a = x + Xz, \quad b = y + Yz,$$

et par conséquent

$$f = z\sqrt{1+X^2+Y^2}.$$

Maintenant, comme dans les points où les deux surfaces se coupent, elles doivent avoir les mêmes coordonnées, on pourra prendre aussi x, y, z pour les coordonnées de la surface qui doit couper la proposée, et, si l'on représente par

$$dz = pdx + qdy$$

l'équation différentielle de cette surface, on aura de même, en nommant r la perpendiculaire et m, n les coordonnées qui déterminent le point où cette perpendiculaire coupe le plan des x et y , on trouvera, dis-je,

$$m = x + pz, \quad n = y + qz, \quad r = z\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Donc, si l'on désigne par h la distance des deux points où les perpen-

diculaires f et r rencontrent le plan des coordonnées x, y , on aura

$$h = \sqrt{(a-m)^2 + (b-n)^2},$$

et, substituant les valeurs de a, b, m, n ,

$$h = z\sqrt{(X-p)^2 + (Y-q)^2}.$$

13. Or soit ω l'angle sous lequel on veut que les deux surfaces se coupent, il faudra que les deux perpendiculaires f et r fassent entre elles l'angle ω ; donc, dans le triangle rectiligne dont les côtés sont f, r , et la base est h , il faudra que ω soit l'angle du sommet; de sorte que par le Théorème connu on aura

$$h^2 = f^2 + r^2 - 2fr \cos \omega,$$

ce qui donne, par la substitution des valeurs de h, f, r , l'équation

$$(X-p)^2 + (Y-q)^2 = 2 + X^2 + Y^2 + p^2 + q^2 - 2 \cos \omega \sqrt{1+X^2+Y^2} \sqrt{1+p^2+q^2},$$

c'est-à-dire, en développant les termes et effaçant ce qui se détruit,

$$1 + Xp + Yq - \cos \omega \sqrt{1+X^2+Y^2} \sqrt{1+p^2+q^2} = 0.$$

C'est l'équation qui renferme la condition du Problème.

14. Lorsque les surfaces à couper sont données par une équation finie, la formule précédente servira pour résoudre le Problème; car, en éliminant le paramètre par la différentiation, on aura une équation différentielle de la forme supposée

$$dz = Xdx + Ydy,$$

dans laquelle X et Y seront des fonctions connues de x, y, z ; alors, l'équation des surfaces coupantes étant

$$dz = pdx + qdy,$$

il ne s'agit que de trouver z en fonction de x et y d'après la condition

$$1 + Xp + Yq = \cos \omega \sqrt{1 + X^2 + Y^2} \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

ω étant un angle donné constant ou variable.

Ainsi, en mettant $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ pour p et q , on aura pour le Problème proposé cette équation aux différences partielles du premier ordre

$$1 + X \frac{dz}{dx} + Y \frac{dz}{dy} = \cos \omega \sqrt{1 + X^2 + Y^2} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Il en sera de même lorsque les surfaces à couper ne seront données que par une équation différentielle, mais dans laquelle le paramètre n'entrera pas.

15. Mais cette équation n'est intégrable, en général, par aucune méthode connue; pour qu'elle le devienne, il faut supposer $\cos \omega = 0$ et par conséquent $\omega = 90^\circ$, ce qui est le cas des trajectoires rectangles; elle se réduit alors à cette forme plus simple

$$X \frac{dz}{dx} + Y \frac{dz}{dy} + 1 = 0,$$

laquelle est susceptible de la méthode exposée ci-dessus.

Suivant la règle du n° 5, on intégrera donc les deux équations

$$X dz + dx = 0, \quad Y dz + dy = 0,$$

et, ayant réduit les intégrales à la forme

$$A = \alpha, \quad B = \beta,$$

où α et β sont les constantes arbitraires, on aura

$$F(A, B) = 0$$

pour l'intégrale de l'équation proposée, et par conséquent aussi pour l'équation finie des surfaces coupantes, la fonction désignée par la caractéristique F demeurant arbitraire.

16. Supposons, pour donner un exemple, que les surfaces à couper soient des sphéroïdes elliptiques semblables et ayant le même centre. L'équation finie d'un tel sphéroïde est, comme l'on sait,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

a, b, c étant les trois demi-axes auxquels les coordonnées x, y, z sont supposées parallèles.

Comme tous les sphéroïdes doivent être semblables, les rapports entre les axes a, b, c seront constants; ainsi

$$a = mc, \quad b = nc,$$

m et n étant des quantités constantes pour tous les sphéroïdes, et c étant variable de l'un à l'autre; donc l'équation générale de ces sphéroïdes sera

$$\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} + z^2 = c^2,$$

où c sera le paramètre.

On différenciera donc en sorte que c disparaisse, pour avoir l'équation différentielle commune à toutes les surfaces à couper; et cette équation sera

$$\frac{x dx}{m^2} + \frac{y dy}{n^2} + z dz = 0,$$

laquelle, étant comparée à la formule générale

$$dz = X dx + Y dy,$$

donne

$$X = -\frac{x}{m^2 z}, \quad Y = -\frac{y}{n^2 z}$$

Par conséquent les équations à intégrer seront

$$-\frac{x dz}{m^2 z} + dx = 0, \quad -\frac{y dz}{n^2 z} + dy = 0,$$

V.

lesquelles sont intégrables chacune en particulier, et leurs intégrales seront

$$\frac{x^{m+1}}{z} = \alpha, \quad \frac{y^{n+1}}{z} = \beta.$$

Donc l'équation générale des surfaces coupantes sera

$$F\left(\frac{x^{m+1}}{z}, \frac{y^{n+1}}{z}\right) = 0.$$

Lorsque les sphéroïdes deviennent des sphères, les axes a , b , c sont égaux, et par conséquent $m = 1$, $n = 1$; dans ce cas l'équation des surfaces coupantes sera

$$F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0,$$

c'est-à-dire une équation quelconque homogène entre les trois variables x , y , z .

Or il est aisé de prouver que cette équation renferme toutes les surfaces composées de lignes droites qui partent du centre des coordonnées; car en prenant y proportionnel à x , ce qui donne une ligne droite dans le plan des x et y , on aura aussi z proportionnel à x , en sorte que la ligne tracée sur la surface et qui aura pour projection la droite dont il s'agit sera aussi elle-même une ligne droite; cette propriété générale est évidemment celle des surfaces coniques; par conséquent ces sortes de surfaces seront les seules trajectoires rectangulaires des sphères dont le centre coïncidera avec le sommet des cônes.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

DU

MOUVEMENT DES APHÉLIES DES PLANÈTES

POUR SERVIR D'ADDITION

AUX PRINCIPES DE NEWTON.



THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

DE

MOUVEMENT DES APHÉLIES DES PLANÈTES

POUR SERVIR D'ADDITION

AUX PRINCIPES DE NEWTON.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1786.)

La Théorie du mouvement des aphélies est une des parties les plus importantes du Système du monde. Si les Planètes n'étaient soumises qu'à l'action du Soleil, leurs aphélies seraient immobiles. Mais l'observation a montré que les aphélies changent de place; et il est naturel de regarder ce déplacement comme un effet de l'attraction mutuelle des Planètes. La détermination précise de cet effet est un Problème dont les difficultés n'ont pu être vaincues que dans ces derniers temps par le moyen d'une analyse aussi délicate que pénible (*). Si cette analyse ne laisse rien à désirer pour la solution complète de la question, on peut néanmoins désirer encore une solution plus simple, plus à portée des Astronomes, une solution surtout du genre de celles des *Principes mathématiques*, et qui puisse servir de supplément à ce grand Ouvrage. Un siècle s'est bientôt écoulé depuis qu'il a vu le jour, et un grand nombre

(*) Voyez la *Théorie des variations séculaires*, page 125 de ce volume.

d'Auteurs ont travaillé pour l'éclaircir et pour le compléter; mais il ne paraît pas que les parties, qui ont en effet besoin d'être perfectionnées, l'aient encore été d'une manière propre à former un véritable Commentaire. Ce sont surtout celles qui traitent du mouvement des fluides, et de l'effet de l'attraction mutuelle des Planètes, c'est-à-dire une partie du second Livre et presque tout le troisième, où l'on ne trouve plus cette rigueur et cette précision qui caractérisent le reste de l'Ouvrage.

Les Problèmes, que Newton n'avait pu résoudre avec les secours que son siècle et son génie lui avaient fournis, l'ont été ensuite en grande partie par les Géomètres de ce siècle; mais leurs solutions, fondées sur des principes différents et sur des analyses plus ou moins longues et compliquées, sont peu propres à servir de suite à un Ouvrage qui brille surtout par l'élégance et la simplicité des démonstrations.

Ce serait donc un travail très-intéressant, de traduire, pour ainsi dire, ces mêmes solutions dans la langue des *Principes mathématiques*, d'y ajouter celles qui manquent encore et de donner ainsi à la plus grande production de l'esprit humain la perfection dont elle est susceptible.

Je n'aurai pas la témérité de me charger de ce travail; mon objet est simplement de préparer les matériaux pour un Ouvrage dont l'exécution ferait peut-être autant d'honneur à notre siècle que l'Ouvrage même de Newton en a fait au siècle dernier.

1. Il n'y a dans les *Principes mathématiques* que deux endroits relatifs au mouvement des aphélies. L'un est la Proposition XLV du premier Livre, dans laquelle Newton donne une méthode générale de déterminer le mouvement des apsides dans les orbites décrites par une force tendante à un point fixe et proportionnelle à une fonction quelconque de la distance, lorsque ces orbites sont supposées presque circulaires; mais cette méthode ne s'applique point aux Planètes, parce que leurs forces perturbatrices ne sont point dirigées vers le Soleil, et ne sont point exprimées par de simples fonctions de leurs distances à cet astre.

L'autre endroit est le Scolie de la Proposition XIV du troisième Livre, où Newton avance sans démonstration que l'action réciproque des Pla-

nètes doit donner à leurs aphélies un mouvement direct en raison sesquiplée des distances moyennes, c'est-à-dire proportionnel aux temps périodiques. Halley et d'autres Astronomes ont adopté cette loi dans les Tables des Planètes; mais elle se trouve contredite par le calcul rigoureux des effets de l'attraction.

2. Si l'Ouvrage de Newton n'offre pas une Théorie exacte du mouvement des aphélies, il en contient néanmoins le germe; mais la difficulté de le développer a peut-être empêché qu'on en ait encore profité. On le trouve dans la Proposition XVII du premier Livre, laquelle enseigne à déterminer les éléments de la section conique que doit décrire un corps lancé avec une certaine vitesse de projection suivant une direction donnée, et soumis à l'action contingente d'une force centrale en raison réciproque du carré des distances. Dans le troisième Corollaire de cette Proposition, Newton remarque que, si le corps se meut dans une section conique et qu'il soit dérangé de son orbite par une impulsion quelconque, on pourra connaître la nouvelle orbite dans laquelle il circulera ensuite, en composant le mouvement que ce corps a déjà avec le mouvement que cette impulsion seule lui aurait imprimé; car par ce moyen on aura le mouvement du corps, lorsqu'il part du lieu donné dans lequel il a reçu l'impulsion suivant une ligne droite donnée de position.

Or, comme les éléments de la section conique, c'est-à-dire ses dimensions et sa position, ne dépendent que du mouvement que le corps a dans un lieu quelconque, il s'ensuit que l'effet de l'impulsion qui dérange le corps de son orbite ne consistera qu'à changer les éléments de cette orbite, et qu'on pourra toujours déterminer ce changement par la Proposition dont il s'agit; et, si les dérangements sont continus, on aura les changements continus des éléments par la même Proposition.

Mais on peut regarder les forces perturbatrices qui résultent de l'attraction mutuelle des Planètes comme des impulsions instantanées et continues, qui dérangent l'orbite que chaque Planète décrirait sans elles autour du Soleil; par conséquent on peut déduire de la Proposition, que nous venons de citer, la méthode générale de déterminer les varia-

tion XVII du même Livre, l'angle RPH égal au complément à deux droits de l'angle RPS, et l'on aura ainsi la position de la ligne PH qui passera par l'autre foyer H. Pour déterminer la longueur PH, on tirera SK perpendiculaire à PH, et, nommant L le paramètre déjà connu, on fera cette proportion

$$SP + PH : PH = 2SP + 2KP : L.$$

Ainsi PH sera donnée tant de longueur que de position, et la section conique sera par là entièrement déterminée.

4. Telle est la construction donnée par Newton; on peut la simplifier un peu en considérant que l'angle SPN est égal à l'angle RPH, puisqu'ils sont l'un et l'autre compléments de l'angle SPR à deux droits, que par conséquent, si l'on mène la perpendiculaire VPF à la droite NPR, elle divisera en deux parties égales l'angle SPH, ainsi que la droite SG tirée du point S parallèlement à la droite NPR et terminée à la ligne PH; d'où il est aisé de conclure que SF sera égale à PN, SG égale à 2PN, PG égale à PS; donc

$$\begin{aligned} \overline{SG}^2 \text{ ou } 4\overline{PN}^2 &= \overline{SK}^2 + \overline{KG}^2 = \overline{SK}^2 + \overline{PS}^2 - \overline{PK}^2 \\ &= \overline{SK}^2 + \overline{PK}^2 - 2\overline{PS} \times \overline{PK} + \overline{PS}^2 = 2\overline{PS}^2 - 2\overline{PS} \times \overline{PK}; \end{aligned}$$

donc

$$\overline{PS} \times \overline{PK} = \overline{PS}^2 - 2\overline{PN}^2,$$

et

$$\overline{PS} \times (\overline{PS} + \overline{PK}) = 2\overline{PS}^2 - 2\overline{PN}^2 = 2\overline{SN}^2.$$

Substituant donc dans la proportion donnée par Newton pour SP + KP sa valeur $\frac{2\overline{SN}^2}{\overline{PS}}$, elle deviendra

$$SP + PH : PH = \frac{4\overline{SN}^2}{\overline{PS}} : L;$$

d'où l'on tire

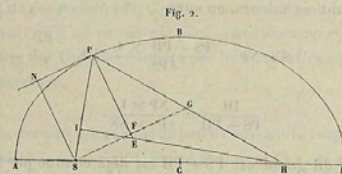
$$L = \frac{4\overline{SN}^2 \times PH}{(\overline{SP} + \overline{PH}) \times \overline{SP}} = 4\overline{SN}^2 \left(\frac{1}{\overline{SP}} - \frac{1}{\overline{SP} + \overline{PH}} \right);$$

et de là on aura directement

$$\frac{1}{\overline{SP} + \overline{PH}} = \frac{1}{\overline{SP}} - \frac{L}{4\overline{SN}^2},$$

ce qui donne le grand axe SP + PH, ainsi que la longueur de PH en quantités connues.

5. On peut au reste déterminer la position de l'autre foyer H d'une manière plus directe, que nous donnerons ici, parce qu'elle nous sera utile pour notre objet. Elle consiste à trouver la valeur de la ligne HI (fig. 2), menée du foyer H perpendiculairement au rayon SP, ainsi que la valeur de la partie SI de ce rayon.



Pour cela on considérera que, puisque HI est perpendiculaire sur SP, comme SK est perpendiculaire sur PH dans la fig. 1, la proportion de Newton

$$SP + PH : PH = 2SP + 2KP : L,$$

étant transportée à la fig. 2, deviendra

$$SP + PH : PS = 2PH + 2PI : L;$$

mais

$$PI = PS - SI;$$

donc

$$PS + PH : PS = 2(PS + PH - SI) : L,$$

d'où l'on tire aisément

$$\frac{SI}{\overline{PS} + \overline{PH}} = 1 - \frac{L}{2\overline{PS}}.$$

Maintenant, si E est le point où la droite PF qui coupe l'angle SPH en deux parties égales rencontre la droite IH, on aura par la propriété connue

$$PI : IE = PH : EH = PI + PH : IH;$$

mais PE étant perpendiculaire à PH, le triangle IPE sera semblable au triangle NSP, et l'on aura

$$PI : IE = SN : NP;$$

d'ailleurs par la proportion donnée plus haut on a

$$PI + PH = \frac{(SP + PH) \times L}{2PS};$$

donc, substituant ces valeurs, on aura

$$SN : NP = \frac{(PS + PH) \times L}{2PS} : IH,$$

d'où l'on tire

$$\frac{IH}{PS + PH} = \frac{NP \times L}{2PS \times SN}.$$

Or la valeur du grand axe $PS + PH$ est déjà connue par l'expression trouvée dans le n° 5; donc on aura aussi les lignes SI, IH en quantités toutes connues.

6. Considérons maintenant l'effet des forces perturbatrices.

D'abord, quelles que soient ces forces dans le lieu P, on peut les réduire par la décomposition à trois, dont l'une agisse dans la direction de la tangente PR, l'autre agisse dans la direction PV perpendiculaire à la tangente dans le plan SPR qui passe par cette tangente et par le foyer S, et la troisième agisse perpendiculairement à ce plan.

Il est clair que la première de ces forces n'aura d'effet que sur la vitesse du corps, que la seconde et la troisième n'en auront que sur sa direction, et en particulier la seconde y produira une déviation dans le plan de la tangente et du foyer, et la troisième y produira une déviation perpendiculaire au même plan. Or, ce plan étant celui de l'orbite que le

corps décrirait sans les forces perturbatrices, il s'ensuit que la troisième des forces dont il s'agit ne fera que changer la position de l'orbite, tandis que les deux premières en changeront la figure même. D'où l'on peut conclure qu'il est permis de considérer séparément l'effet de ces deux forces réunies et celui de la troisième force; l'un consistera à faire varier le paramètre, l'excentricité et la position de l'aphélie; l'autre se réduira à faire varier l'inclinaison et la ligne des nœuds par rapport à un plan fixe. Newton a donné dans la Proposition XXXI du troisième Livre et dans les suivantes la méthode de déterminer ces dernières variations relativement à la Lune; cette méthode est générale et s'applique facilement aux Planètes; elle contient de plus les principes nécessaires pour la détermination des autres variations que Newton n'a point examinées et qui font l'objet de ces recherches. C'est ce que nous allons développer, pour remplir autant qu'il est possible le plan, que nous nous sommes proposé, de faire naître des Théories données par Newton celles qui manquent encore à son Ouvrage.

7. Supposons que la force perturbatrice suivant la tangente PR (*fig. 1*, page 568) soit à la force centripète en P comme f à 1, et que la force perturbatrice suivant la perpendiculaire PV à la tangente soit à la même force centripète comme g à 1; comme ces forces sont toutes de la même nature et que RQ est l'espace que la force centripète fait décrire d'un mouvement accéléré dans le temps que le corps avec la vitesse qu'il a en P décrirait uniformément la ligne PR, il s'ensuit que $f \times RQ$ et $g \times RQ$ seront aussi les espaces que les forces perturbatrices feront décrire dans le même temps d'un mouvement accéléré dans les directions PR et PV. Mais on peut supposer que les vitesses imprimées par ces forces durant ce temps soient imprimées dans le premier instant; alors les espaces décrits en vertu de ces vitesses seront doubles, comme l'on sait par la Théorie de Galilée, et le corps, au lieu de décrire uniformément la ligne PR, décrira uniformément dans le même temps la ligne Pt, telle que

$$Pt = PR + 2f \times RQ \quad \text{et} \quad Rr = 2g \times RQ,$$

en supposant la petite ligne Rr perpendiculaire à PR . De sorte que la tangente NPr sera transportée en nPr , et la perpendiculaire SN , devenant Sn , sera diminuée de la partie $Nm = \frac{Rr \times PN}{PR}$, à cause des triangles semblables RPr et NPm .

D'où il suit que, pour tenir compte des forces perturbatrices dont il s'agit, il n'y aura qu'à mettre, dans la construction donnée dans le n° 3,

$$PR + 2f \times RQ$$

à la place de PR , et

$$SN - \frac{2g \times PN \times RQ}{PR}$$

à la place de SN .

8. Donc, en premier lieu, le paramètre L de la section conique, qu'on a trouvé (3) égal à $\frac{\overline{SN}^2 \times \overline{PR}^2}{\overline{PS}^2 \times QR}$, deviendra par l'effet des forces perturbatrices

$$\frac{\left(SN - \frac{2g \times PN \times RQ}{PR} \right)^2 (PR + 2f \times RQ)^2}{\overline{PS}^2 \times QR};$$

par conséquent l'incrément du paramètre sera

$$\frac{\left(SN - \frac{2g \times PN \times RQ}{PR} \right)^2 (PR + 2f \times RQ)^2 - \overline{SN}^2 \times \overline{PR}^2}{\overline{PS}^2 \times QR};$$

c'est-à-dire, en développant les termes du numérateur et faisant attention que la flèche QR est infiniment plus petite que la tangente PR ,

$$\frac{\overline{SN}^2 \times 4f \times PR \times RQ - PR \times 4g \times SN \times PN \times RQ}{\overline{PS}^2 \times QR},$$

ce qui se réduit à

$$\frac{(4f \times SN - 4g \times PN) \times SN \times PR}{\overline{PS}^2}.$$

Ainsi le paramètre, qui sans les forces perturbatrices serait L , deviendra par l'action de ces forces

$$L + \frac{4(f \times SN - g \times PN) \times SN \times PR}{\overline{PS}^2}.$$

9. On peut déterminer de même la variation du grand axe. Car, comme dans l'ellipse cet axe est toujours égal à la somme des distances aux foyers $SP + PH$, si on le nomme A , on aura, par la formule du n° 4,

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{SP} - \frac{L}{4SN}.$$

Or la distance SP étant donnée demeure la même; mais les quantités L et SN deviennent par l'action des forces perturbatrices (5 et 6)

$$L + \frac{4(f \times SN - g \times PN) \times SN \times PR}{\overline{PS}^2}, \quad SN - \frac{2g \times PN \times RQ}{PR};$$

donc le terme $\frac{L}{4SN}$ de l'équation précédente deviendra

$$\frac{L + \frac{4(f \times SN - g \times PN) \times SN \times PR}{\overline{PS}^2}}{4 \left(SN - \frac{2g \times PN \times RQ}{PR} \right)^2},$$

c'est-à-dire, en développant les termes et négligeant ce qu'on doit négliger à cause de la quantité PR infiniment petite et de la RQ infiniment plus petite que PR ,

$$\frac{L}{4SN} + \frac{f \times PR}{\overline{PS}^2} - \frac{g \times PN \times PR}{\overline{PS}^2 \times SN} + \frac{Lg \times PN \times RQ}{\overline{SN}^3 \times PR}.$$

Mais (6)

$$L = \frac{\overline{SN}^2 \times \overline{PR}^2}{\overline{PS}^2 \times RQ};$$

donc

$$L \times RQ = \frac{\overline{SN}^2 \times \overline{PR}^2}{\overline{PS}^2};$$

substituant cette valeur dans le dernier terme de l'expression précédente, ce terme détruira le précédent, et elle se réduira à $\frac{L}{4SN} + \frac{f \times PR}{PS^2}$; de sorte que $\frac{f \times PR}{PS^2}$ sera l'incrément de la quantité $\frac{L}{4SN}$; par conséquent $\frac{f \times PR}{PS^2}$ sera le décrement de $\frac{1}{A}$, puisque le terme $\frac{1}{SP}$ demeure invariable.

Ainsi la quantité $\frac{1}{A}$ deviendra $\frac{1}{A} - \frac{f \times PR}{PS^2}$, et par conséquent la quantité A deviendra

$$\frac{1}{\frac{1}{A} - \frac{f \times PR}{PS^2}} \quad \text{ou bien} \quad \frac{A}{1 - \frac{f \times A \times PR}{PS^2}}$$

c'est-à-dire, à cause de PR infiniment petite,

$$A + \frac{f \times A^2 \times PR}{PS^2}$$

D'où il s'ensuit que le grand axe de l'orbite, qui sans les forces perturbatrices serait A , sera augmenté par l'action de ces forces de la quantité $f \times \frac{A^2 \times PR}{PS^2}$.

10. Voyons maintenant les changements que cette même action doit produire dans l'excentricité de l'orbite et dans la position même du grand axe.

Il est clair que tout se réduit à déterminer ceux qui en résultent dans le lieu du second foyer H .

D'abord, puisque le grand axe A , dont nous venons de déterminer la variation, est égal à la somme des deux rayons PS et PH , et que le rayon PS est constant, les points S et P étant censés donnés, il s'ensuit que la variation de A sera aussi celle de la ligne PH ; par conséquent cette ligne recevra par l'action des forces perturbatrices une augmentation exprimée par la quantité $f \times \frac{A^2 \times PR}{PS^2}$.

Ensuite, comme l'angle SPH est toujours le complément à deux droits du double de l'angle NPS fait par le rayon et la tangente, le premier de ces angles augmentera d'une quantité double de celle dont le second sera diminué.

Or, la tangente NP étant transportée par l'action des forces perturbatrices en nP , en sorte que la perpendiculaire SN devienne (7)

$$Sn = SN - 2g \frac{PN \times RQ}{PR},$$

il est clair que l'angle NPS se trouvera diminué de l'angle

$$NPn = \frac{Nm}{PN} = \frac{NS - nS}{PN} = 2g \frac{RQ}{PR};$$

done, puisque (3)

$$\frac{RQ}{PR} = \frac{SN^2 \times PR}{L \times PS^2},$$

l'incrément de l'angle SPH sera exprimé par

$$4g \times \frac{SN^2 \times PR}{L \times PS^2}.$$

11. Ainsi, dans le triangle SPH , le côté SP étant constant, le côté PH augmentant de $f \times \frac{A^2 \times PR}{PS^2}$, et l'angle SPH augmentant de $4g \times \frac{SN^2 \times PR}{L \times PS^2}$,

il s'agira de déterminer les variations du côté SH et de l'angle PSH ; l'une sera la variation de l'excentricité et l'autre celle du lieu de l'aphélie.

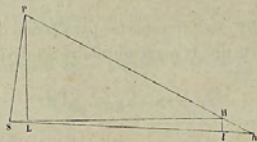
Comme ces variations sont infiniment petites à cause de la PR supposée infiniment petite, on pourra les considérer chacune à part, et la somme des variations partielles sera la variation totale.

Ainsi :

1^o Ayant (*fig. 3*) pris dans le prolongement de PH la partie infiniment petite $Hh = f \times \frac{A^2 \times PR}{PS^2}$, et mené la Sh , ainsi que la Hl perpen-

diculaire sur SH, on aura ih pour l'incrément de SH, et hSH pour celui de l'angle PSH en vertu de l'incrément hH du côté PH.

Fig. 3.



Ayant abaissé la perpendiculaire PL sur le côté SH, les triangles semblables hHl et PHL donneront

$$ih = \frac{LH \times hH}{PH}, \quad iH = \frac{PL \times hH}{PH};$$

et, comme $\frac{iH}{SL}$ ou $\frac{iH}{SH}$ est la mesure de l'angle infiniment petit hSH , cet angle sera exprimé par

$$\frac{PL \times hH}{SH \times PH}.$$

Donc l'incrément de SH sera

$$f \times \frac{A^2 \times LH \times PR}{PH \times PS^2}.$$

et celui de l'angle PSH sera

$$f \times \frac{A^2 \times PL \times PR}{SH \times PH \times PS^2}.$$

2° Ayant tiré la ligne Ph égale à la PH (fig. 4), et faisant avec elle l'angle infiniment petit $HPh = 4g \frac{\overline{SN}^2 \times PR}{L \times PS^2}$, la ligne Sh sera ce que devient la SH par la variation de l'angle SPH. Si donc on abaisse la perpendiculaire Hi sur SH, on aura ih pour l'incrément de SH et iH pour le

décroissement de l'angle PSH. Or, ayant joint la Hh et abaissé la perpendiculaire PL sur la base SH, on a le triangle infiniment petit hHi semblable au triangle PHL; par conséquent

$$ih = \frac{PL \times Hh}{PH}, \quad iH = \frac{LH \times Hh}{PH}.$$

Mais, $\frac{Hh}{PH}$ étant la mesure de l'angle HPh , on aura

$$Hh = 4g \times \frac{\overline{SN}^2 \times PH \times PR}{L \times PS^2}.$$

Donc l'incrément de SH sera exprimé par

$$4g \times \frac{\overline{SN}^2 \times PL \times PR}{L \times PS^2},$$

et le décroissement de l'angle PSH le sera par

$$4g \times \frac{\overline{SN}^2 \times LH \times PR}{L \times PS^2 \times SH};$$

ou bien, en mettant pour $\frac{\overline{SN}^2}{L}$ sa valeur $\frac{(SP + PH) \times SP}{PH}$ tirée de l'équation du n° 4, c'est-à-dire (7) $\frac{A \times PS}{PH}$, on aura

$$g \times \frac{A \times PL \times PR}{PH \times PS^2}.$$

pour l'incrément de SH, et

$$g \times \frac{A \times LH \times PR}{SH \times PH \times PS}$$

pour le décrément de l'angle PSH.

De sorte que, réunissant les incréments et les décréments des mêmes quantités dus aux variations de PH et de l'angle PSH, on aura enfin pour l'incrément total de la ligne SH

$$f \times \frac{A^2 \times LH \times PR}{PH \times PS^2} + g \times \frac{A \times PL \times PR}{PH \times PS},$$

et pour celui de l'angle PSH

$$f \times \frac{A^2 \times PL \times PR}{SH \times PH \times PS} - g \times \frac{A \times LH \times PR}{SH \times PH \times PS}.$$

La première de ces deux quantités représentera la variation du double de l'excentricité CS (*fig. 1*, page 568), et la seconde exprimera celle du lieu de l'aphélie D.

12. La manière dont nous venons de déterminer ces variations est celle qui se présente naturellement d'après la construction donnée par Newton; mais on y peut parvenir plus facilement par les formules que nous avons trouvées dans le n° 5.

Ces formules sont, en mettant A pour PS + PH (*fig. 2*, page 571),

$$\frac{SI}{A} = 1 - \frac{L}{2PS}, \quad \frac{IH}{A} = \frac{L}{2PS} \times \frac{NP}{SN}.$$

Ainsi :

1° Comme PS est censée constante, l'incrément de $\frac{SI}{A}$ sera égal à $-\frac{L}{2PS}$, en représentant par L l'incrément de L; mais cet incrément a été trouvé dans le n° 8 de

$$\frac{4(f \times SN - g \times PN) \times SN \times PR}{PS^2}.$$

done, substituant cette quantité pour L, on aura l'incrément de $\frac{SI}{A}$ égal à

$$-\frac{2(f \times SN - g \times PN) \times SN \times PR}{PS^2}.$$

2° L'incrément de $\frac{IH}{A}$ sera exprimé par

$$\frac{NP}{SN} \times \frac{L}{2PS} + \frac{L}{2PS} \left[\frac{nm}{SN} - \frac{NP \times (-Nm)}{SN^2} \right],$$

puisque nm et -Nm sont les incréments des lignes NP, SN (*fig. 1*, page 568); je donne à Nm le signe -, parce que c'est la quantité dont SN diminue, au lieu d'augmenter, par le changement de position de la tangente NR. Or il est clair que les triangles semblables Npm et nSm donnent

$$NP : NS = Nm : nm,$$

et par conséquent

$$nm = \frac{NS \times Nm}{NP},$$

de plus on a trouvé dans le n° 7

$$Nm = \frac{PN \times Rr}{PR}, \quad Rr = 2g \times RQ;$$

d'ailleurs, puisque

$$L = \frac{\overline{SN}^2 \times \overline{PR}}{\overline{PS}^2 \times \overline{QR}},$$

on aura

$$QR = \frac{\overline{SN}^2 \times \overline{PR}}{L \times \overline{PS}^2}.$$

Ainsi la seconde partie de la valeur de l'incrément dont il s'agit se réduira d'abord à

$$\frac{L}{2PS} \left(\frac{1}{NP} + \frac{NP}{SN^2} \right) \times Nm,$$

ou bien, à cause de $\overline{SN}^2 + \overline{NP}^2 = \overline{SP}^2$, à

$$\frac{L \times PS \times Nm}{2 NP \times SN},$$

et, mettant pour Nm sa valeur

$$\frac{2g \times PN \times RQ}{PR}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{2g \times \overline{SN}^2 \times PN \times PR}{L \times PS^2},$$

elle deviendra

$$\frac{g \times PR}{PS}.$$

A l'égard de la première partie de la même valeur, il n'y a qu'à y substituer la valeur de l déjà trouvée, ce qui la change en

$$\frac{2(f \times SN - g \times NP) \times NP \times PR}{PS}.$$

Donc la valeur totale de l'incrément de $\frac{IH}{A}$ sera

$$\left[\frac{2(f \times SN - g \times PN) \times PN}{PS^2} + \frac{Q}{PS} \right] \times PR;$$

et cette expression, à cause de $\overline{PS}^2 = \overline{SN}^2 + \overline{NP}^2$, peut encore se changer en celle-ci

$$\left[(f \times SN - g \times PN) \times PN + (f \times PN + g \times SN) \times SN \right] \frac{PR}{PS}.$$

13. Si l'on voulait comparer ces formules avec celles qu'on a trouvées dans le numéro précédent, et en montrer l'accord, on y parviendrait facilement en employant le calcul algébrique.

Soit r le rayon SP, E la distance des foyers SH, φ l'angle PSH, ψ l'angle PHS et ds le petit espace parcouru PR; il est aisé de traduire les formules du n° 11 en celles-ci, dans lesquelles j'emploie la caractéristique δ

pour représenter les incréments relatifs aux variations des éléments de l'orbite,

$$\delta E = f \frac{A^2 \cos \theta ds}{r^2} + g \frac{A \sin \theta ds}{r}, \quad \delta \varphi = f \frac{A^2 \sin \theta ds}{Er^2} - g \frac{A \cos \theta ds}{Er}.$$

Ces formules donnent directement les transformées suivantes

$$\delta(E \sin \varphi) = f \frac{A^2 \sin(\varphi + \theta) ds}{r^2} - g \frac{A \cos(\varphi + \theta) ds}{r},$$

$$\delta(E \cos \varphi) = f \frac{A^2 \cos(\varphi + \theta) ds}{r^2} + g \frac{A \sin(\varphi + \theta) ds}{r}.$$

Mais la somme des angles φ et θ étant le complément à deux droits de l'angle SPH, si l'on nomme ce dernier angle ψ , on a

$$\sin(\varphi + \theta) = \sin \psi, \quad \cos(\varphi + \theta) = -\cos \psi;$$

par conséquent on aura

$$\delta(E \sin \varphi) = f \frac{A^2 \sin \psi ds}{r^2} + g \frac{A \cos \psi ds}{r},$$

$$\delta(E \cos \varphi) = -f \frac{A^2 \cos \psi ds}{r^2} + g \frac{A \sin \psi ds}{r}.$$

Or on a trouvé dans le n° 9

$$\delta A = f \frac{A^2 ds}{r};$$

ainsi l'on aura

$$\delta \left(\frac{E \sin \varphi}{A} \right) = f \frac{A \sin \psi ds}{r^2} + g \frac{\cos \psi ds}{r} - f \frac{E \sin \varphi ds}{r^2},$$

$$\delta \left(\frac{E \cos \varphi}{A} \right) = -f \frac{A \cos \psi ds}{r^2} + g \frac{\sin \psi ds}{r} - f \frac{E \cos \varphi ds}{r^2}.$$

Si maintenant on nomme R le rayon PH, on aura, par la propriété connue,

$$A = r + R,$$

et l'on pourra mettre les équations précédentes sous la forme

$$\begin{aligned}\partial \left(\frac{E \sin \varphi}{A} \right) &= \frac{f \sin \psi + g \cos \psi}{r} ds - f \frac{E \sin \varphi - R \sin \psi}{r^2} ds, \\ \partial \left(\frac{E \cos \varphi}{A} \right) &= - \frac{f \cos \psi - g \sin \psi}{r} ds - f \frac{E \cos \varphi + R \cos \psi}{r^2} ds.\end{aligned}$$

Or dans le triangle PSH on a évidemment

$$E \sin \varphi - R \sin \psi = 0, \quad E \cos \varphi + R \cos \psi = r;$$

donc

$$\begin{aligned}\partial \left(\frac{E \sin \varphi}{A} \right) &= \frac{f \sin \psi + g \cos \psi}{r} ds, \\ \partial \left(\frac{E \cos \varphi}{A} \right) &= - \frac{f (1 + \cos \psi) - g \sin \psi}{r} ds.\end{aligned}$$

Enfin on sait que l'angle ψ ou SPH est le complément à deux droits du double de l'angle NPS; de sorte qu'en nommant ω ce dernier angle, on aura

$$\begin{aligned}\sin \psi &= \sin 2\omega = 2 \sin \omega \cos \omega, \quad \cos \psi = - \cos 2\omega = \sin^2 \omega - \cos^2 \omega, \\ 1 + \cos \psi &= 2 \sin^2 \omega;\end{aligned}$$

par ces substitutions, les équations trouvées en dernier lieu deviendront

$$\begin{aligned}\partial \left(\frac{E \sin \varphi}{A} \right) &= \frac{2f \sin \omega \cos \omega + g (\sin^2 \omega - \cos^2 \omega)}{r} ds, \\ \partial \left(\frac{E \cos \varphi}{A} \right) &= - \frac{2f \sin^2 \omega - 2g \sin \omega \cos \omega}{r} ds,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\partial \left(\frac{E \sin \varphi}{A} \right) &= \frac{f \sin \omega - g \cos \omega}{r} \cos \omega ds + \frac{f \cos \omega + g \sin \omega}{r} \sin \omega ds, \\ \partial \left(\frac{E \cos \varphi}{A} \right) &= - 2 \frac{f \sin \omega - g \cos \omega}{r} \sin \omega ds.\end{aligned}$$

Il est visible qu'on a dans la *fig. 2*, page 571,

$$IH = E \sin \varphi, \quad SI = E \cos \varphi, \quad \frac{SN}{SP} = \sin \omega, \quad \frac{PN}{SP} = \cos \omega;$$

ainsi les formules précédentes sont identiques avec celles du n° 12.

14. On peut au reste mettre ces formules sous une forme plus simple, en réduisant les forces perturbatrices à la direction du rayon et à la perpendiculaire à ce rayon.

Supposons donc ces forces réduites à deux, l'une suivant PX et l'autre suivant PT (*fig. 1*, page 568); que la première soit à la force centripète en φ comme ρ à 1, et que la seconde soit à la même force centripète comme π à 1, il est aisé de prouver par les Théorèmes connus sur la composition et la décomposition des forces, que les deux forces suivant PR et suivant PV (7), étant réduites aux directions PX et PT, donneront

$$\rho = f \cos \omega + g \sin \omega, \quad \pi = f \sin \omega - g \cos \omega.$$

De plus il est clair que

$$\sin \omega ds = PT, \quad \cos \omega ds = TR,$$

puisque $ds = PR$; mais PS étant égal à r , TR sera dr , et, si l'on nomme dq le petit angle PSQ décrit autour du foyer S, on aura $PT = r dq$. Par le moyen de ces substitutions, les formules ci-dessus deviendront

$$\partial \left(\frac{E \sin \varphi}{A} \right) = \frac{\pi dr}{r} + \rho dq, \quad \partial \left(\frac{E \cos \varphi}{A} \right) = - 2 \pi dq.$$

15. Puisque dq est l'angle élémentaire décrit par le rayon r , q sera l'angle que ce rayon fait avec une ligne fixe; soit α l'angle que le grand axe AD fait avec la même ligne, on aura

$$\varphi = \alpha - q,$$

et, supposant

$$\frac{E \sin \alpha}{A} = m, \quad \frac{E \cos \alpha}{A} = n,$$

on aura

$$\frac{E \sin \varphi}{A} = m \cos q - n \sin q, \quad \frac{E \cos \varphi}{A} = n \cos q + m \sin q;$$

et, comme la caractéristique ∂ ne se rapporte qu'à la variation des éléments de l'ellipse et nullement à celle de l'angle q qui est censé constant.

stant relativement à ces variations, on aura

$$\delta \left(\frac{E \sin \varphi}{A} \right) = \cos q \delta m - \sin q \delta n, \quad \delta \left(\frac{E \cos \varphi}{A} \right) = \cos q \delta n + \sin q \delta m,$$

d'où l'on tire

$$\delta m = \cos q \times \delta \left(\frac{E \sin \varphi}{A} \right) + \sin q \times \delta \left(\frac{E \cos \varphi}{A} \right),$$

$$\delta n = \cos q \times \delta \left(\frac{E \cos \varphi}{A} \right) - \sin q \times \delta \left(\frac{E \sin \varphi}{A} \right).$$

Donc, en substituant les valeurs du numéro précédent, et changeant la caractéristique δ en d , puisque, les quantités m et n étant maintenant regardées comme variables en même temps que r et q , leurs variations sont de la même nature que les différences de celles-ci, on aura ces formules

$$dm = \frac{\varpi \cos q dr}{r} + (\rho \cos q - 2\varpi \sin q) dq,$$

$$dn = -\frac{\varpi \sin q dr}{r} - (\rho \sin q + 2\varpi \cos q) dq,$$

lesquelles s'accordent avec celles que nous avons trouvées dans la *Théorie des variations séculaires*, en observant que dans cette Théorie les quantités $\frac{d\Omega}{dr}$ et $\frac{1}{r} \frac{d\Omega}{dq}$ représentent les forces perturbatrices suivant PS et suivant TP (fig. 1, page 568), et que la force centripète en ρ y est supposée $\frac{1}{r^2}$, en sorte que $-r^2 \frac{d\Omega}{dr}$ et $-r \frac{d\Omega}{dq}$ y sont ce que nous avons désigné par ρ et ϖ .

16. Si l'on voulait introduire ces quantités ρ et ϖ à la place des quantités f et g dans les premières formules du n° 11, il n'y aurait qu'à tirer des équations

$$\rho = f \cos \omega + g \sin \omega, \quad \varpi = f \sin \omega - g \cos \omega,$$

les valeurs de f et g , lesquelles seront

$$f = \rho \cos \omega + \varpi \sin \omega, \quad g = \rho \sin \omega - \varpi \cos \omega,$$

et les substituer dans les formules dont il s'agit.

Puisque

$$\sin \omega ds = r dq, \quad \cos \omega ds = dr,$$

on aura

$$f ds = \rho dr + \varpi r dq, \quad g ds = \rho r dq - \varpi dr,$$

et l'on aura par le n° 13

$$\frac{\delta E}{A} = \frac{A \cos \theta (\rho dr + \varpi r dq)}{r^2} + \frac{\sin \theta (\rho r dq - \varpi dr)}{r},$$

$$\frac{E \delta \varphi}{A} = \frac{A \sin \theta (\rho dr + \varpi r dq)}{r^2} - \frac{\cos \theta (\rho r dq - \varpi dr)}{r}.$$

Mais on pourra avoir des formules plus simples à quelques égards, en les déduisant immédiatement de celles du n° 14. Car, puisque

$$\delta \left(\frac{E \sin \varphi}{A} \right) = \sin \varphi \delta \frac{E}{A} + \frac{E}{A} \cos \varphi \delta \varphi,$$

$$\delta \left(\frac{E \cos \varphi}{A} \right) = \cos \varphi \delta \frac{E}{A} - \frac{E}{A} \sin \varphi \delta \varphi,$$

on aura sur-le-champ

$$\delta \frac{E}{A} = \sin \varphi \left(\frac{\varpi dr}{r} + \rho dq \right) - 2 \cos \varphi \times \varpi dq,$$

$$\frac{E \delta \varphi}{A} = \cos \varphi \left(\frac{\varpi dr}{r} + \rho dq \right) + 2 \sin \varphi \times \varpi dq.$$

Enfin, si l'on voulait aussi exprimer par des formules analytiques les variations du paramètre L et du grand axe A , on aurait par les n° 8 et 9

$$\delta L = 4 \varpi \rho dq, \quad \delta A = \frac{A^2 (\rho dr + \varpi r dq)}{r^2}.$$



DEUX ENDROITS DES PRINCIPES DE NEWTON

RELATIFS

A LA PROPAGATION DU SON ET AU MOUVEMENT DES ONDES.



SUR LA MANIÈRE DE RECTIFIER

DEUX ENDROITS DES PRINCIPES DE NEWTON

RELATIFS

A LA PROPAGATION DU SON ET AU MOUVEMENT DES ONDES.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1786.)

Parmi les différentes Théories que Newton a données dans le fameux Ouvrage des *Principes mathématiques*, les unes sont entièrement rigoureuses et ont toute la perfection dont elles sont susceptibles, les autres ne sont qu'approchées et laissent plus ou moins à désirer du côté de l'exactitude et de la généralité.

A la première classe appartiennent les Propositions sur le mouvement des corps isolés et regardés comme des points, c'est-à-dire toutes celles du premier Livre et une partie de celles du second. On doit rapporter à la seconde classe les Propositions qui concernent la résistance et le mouvement des fluides, et surtout celles qui ont pour objet l'explication des phénomènes des marées, de la précession des équinoxes et des différentes inégalités du mouvement de la Lune.

Ce n'est pas que Newton ne se montre aussi grand dans ces sujets que dans les autres; on peut même dire que son génie inventeur y brille davantage. Mais, comme l'Analyse et la Mécanique de son temps ne pou-

vaient lui suffire pour résoudre des questions aussi compliquées, il s'est vu dans la nécessité de les simplifier par des hypothèses et des limitations précaires; et il n'est parvenu ainsi qu'à des résultats incomplets et peu exacts. C'est ce qui a lieu surtout à l'égard des Théories de la propagation du son et du mouvement des ondes.

A mesure que ces deux sciences ont acquis de nouveaux degrés de perfection, on a été en état de suppléer plus ou moins au défaut des Théories que Newton avait laissées imparfaites; et les sujets du Système du monde, comme les plus importants, ont déjà été discutés avec tant de soin par les premiers Géomètres de ce siècle, qu'il paraît difficile de pouvoir ajouter quelque chose à leurs travaux, si ce n'est peut-être plus de facilité dans les procédés et de simplicité dans les résultats. La Théorie des fluides a été également l'objet de leurs recherches, et, s'ils n'y ont pas fait des progrès aussi marqués, on doit l'attribuer uniquement aux grandes difficultés dont la matière est hérissée. Les lois générales du mouvement des fluides ont été découvertes et réduites à des équations analytiques; mais ces équations sont si composées par la nature même de la chose, que leur résolution complète sera peut-être toujours au-dessus des forces de l'Analyse; et il n'y a guère que le cas des mouvements infiniment petits qui soit susceptible d'un calcul rigoureux.

Heureusement les vibrations des particules de l'air dans la production du son, et celles des particules de l'eau dans la formation des ondes sont à peu près dans ce cas; et par conséquent il est possible de déterminer les lois de ces vibrations d'une manière plus exacte que Newton ne l'a fait dans la Section VIII du second Livre des *Principes*. C'est ce que j'ai déjà fait voir ailleurs; mais je me propose ici de faciliter aux Commentateurs les moyens d'éclaircir et de corriger cet endroit, qui a été regardé jusqu'ici comme un des plus obscurs et les plus difficiles de l'Ouvrage de Newton.

Je divise ce Mémoire en deux Sections. Dans la première, j'examine la Théorie de la propagation du son, telle qu'elle est contenue dans les Propositions XLVII et XLIX du second Livre; j'en montre l'insuffisance, et j'y donne l'exactitude et la généralité qui y manquent. Dans la se-

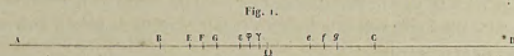
conde, je fais voir comment cette même Théorie peut s'appliquer aussi au mouvement des ondes.

SECTION PREMIÈRE.

DE LA PROPAGATION DU SON.

1. Newton considère une ligne physique d'air ou d'un milieu élastique quelconque dont l'élasticité soit en raison directe de la densité; et il imagine que tous les points physiques de cette ligne soient ébranlés successivement et agités par des mouvements semblables, en sorte qu'ils fassent chacun une oscillation entière, composée de l'allée et du retour. Il suppose ensuite que ces oscillations suivent les mêmes lois que celles des pendules suspendus entre les cycloïdes, et, comparant la force accélératrice de chaque point physique du milieu, due à l'élasticité, avec la force accélératrice du pendule correspondant, due à la gravité, il conclut de l'égalité de ces forces que la supposition est légitime, et que par conséquent le milieu doit être en effet mû de la sorte. C'est le sujet de la Proposition XLVII; et voici comment il la démontre.

2. Soient B, C (*fig. 1*) deux points physiques de la ligne AD, tels que le point C ne commence à s'ébranler que lorsque B a fini son oscillation:



et soient E, F, G trois points quelconques intermédiaires, et placés à des distances égales EF, FG supposées très-petites.

Soient maintenant Ee, Ff, Gg les espaces égaux très-petits dans lesquels ces points vont et viennent à chaque oscillation par un mouvement réciproque, et e, f, g les lieux quelconques intermédiaires de ces mêmes points; de manière que les petites lignes physiques EF, FG, ou les par-

Mais cette différence (c'est-à-dire l'excès de la force élastique du point ε sur la force élastique du point γ) est la force par laquelle la petite ligne physique $\varepsilon\gamma$ du milieu, laquelle est entre deux, est accélérée dans l'allée et dans le retour; et par conséquent la force accélératrice de la petite ligne physique $\varepsilon\gamma$ est comme sa distance au point du milieu Ω de la vibration.

Donc le temps est exprimé exactement par l'arc PI selon la Proposition XXXVIII du Livre premier; et la partie linéaire $\varepsilon\gamma$ du milieu se mouvra suivant la loi prescrite, c'est-à-dire comme les pendules oscillants. Il en est de même de toutes les parties linéaires dont le milieu entier est composé.

3. Dans la Proposition XLIX, Newton détermine ensuite la longueur du pendule simple, dont les oscillations répondent à celles des particules du milieu élastique; pour cela il suppose que ce milieu soit comprimé comme notre air par son propre poids, et que A soit la hauteur du milieu homogène dont le poids est égal au poids comprimant, et dont la densité soit la même que celle du milieu; et il trouve que le temps de l'oscillation de ce pendule est à celui d'une vibration des particules du milieu comme A à V; de sorte que, puisque les longueurs des pendules sont comme les carrés des durées des oscillations, le pendule isochrone aux particules du milieu élastique aura pour longueur $\frac{V^2}{A}$.

Car, dit-il, les constructions de la Proposition XLVII étant conservées, si une ligne physique quelconque EF, en décrivant à chaque vibration un espace PS, est pressée dans les extrémités P et S de son allée et de son retour par une force élastique égale à son poids, elle achèvera chacune de ses vibrations dans le temps que cette même ligne pourrait osciller dans une cycloïde dont le périmètre serait égal à toute la longueur PS, et cela parce que des forces égales doivent faire parcourir dans le même temps à des corpuscules égaux des espaces égaux. C'est pourquoi, comme les temps des oscillations sont en raison sous-doublée de la longueur des pendules, et que la longueur du pendule est égale à

la moitié de l'arc de la cycloïde entière, le temps d'une vibration sera au temps de l'oscillation du pendule, dont la longueur est A, en raison sous-doublée de la longueur $\frac{1}{2}$ PS, ou PO, à la longueur A. Mais la force élastique qui presse la petite ligne physique EG lorsqu'elle est dans les extrémités P et S était, dans la démonstration de la Proposition XLVII, à la force élastique entière comme HL — KN à V, c'est-à-dire (lorsque le point K tombe sur P) comme HK à V; et cette force entière, c'est-à-dire le poids par lequel la petite ligne EG est comprimée, est au poids de cette petite ligne comme la hauteur A du poids comprimant est à la longueur EG de la petite ligne; donc la force, par laquelle la petite ligne EG est pressée dans les lieux P et S, est au poids de cette petite ligne comme HK $\times$ A à EG $\times$ V, ou comme PO $\times$ A à V²; car HK était à EG comme PO à V. Ainsi, comme les temps dans lesquels les corps égaux sont poussés dans des espaces égaux sont réciproquement en raison sous-doublée des forces, le temps d'une vibration produite par la pression de la force élastique sera au temps d'une vibration produite par la force du poids en raison sous-doublée de V² à PO $\times$ A, et ce temps est par conséquent au temps de l'oscillation du pendule dont la longueur est A en raison sous-doublée de V² à PO $\times$ A et en raison sous-doublée de PO à A conjointement, c'est-à-dire dans la raison entière de V à A.

4. Maintenant, puisque le point C ne doit commencer sa vibration que dans le moment où le point B finira la sienne, ce qui est évident par la construction générale du n° 2, suivant laquelle, si la circonférence entière PHSAP représente le temps écoulé depuis le commencement du mouvement du point B, l'arc qui représentera le temps écoulé depuis le commencement du mouvement du point C sera nul; il s'ensuit que dans le temps d'une vibration entière le mouvement se trouvera propagé de la particule B à la particule C, par l'espace BC, et il est visible par la même construction que cette propagation se fait d'une manière uniforme.

Donc le temps de la propagation par BC sera à celui d'une oscillation du pendule A, comme V est à A, c'est-à-dire comme BC est à la circon-

férence du cercle dont le rayon est A; donc aussi, dans le temps d'une oscillation du pendule A, la propagation des ébranlements des particules se fera par un espace égal à la circonférence du cercle qui aurait la longueur A pour rayon; mais on sait par la Théorie des pendules que cette circonférence est égale à l'espace qu'un corps pourrait parcourir uniformément pendant une oscillation du pendule A, en se mouvant avec une vitesse égale à celle qu'il aurait acquise s'il était tombé librement de la hauteur $\frac{1}{2}A$. Donc cette vitesse sera celle de la propagation des ébranlements dans le milieu élastique; et par conséquent ce sera la vitesse du son, en prenant pour A la hauteur de l'atmosphère supposée homogène.

5. Telle est la Théorie que Newton a donnée de la propagation du son. Théorie que les uns ont regardée comme inintelligible, que d'autres ont trouvée contradictoire, et qui dans le fond n'est défectueuse que parce qu'elle est trop particulière, mais qui renferme en même temps le germe de la véritable Théorie, découverte dans ces derniers temps par le moyen de l'Analyse. C'est ce que nous allons montrer avec tout le détail que la difficulté de la matière exige.

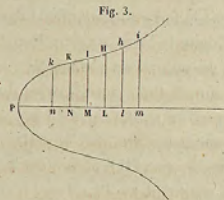
Et d'abord je remarque que les raisonnements de Newton sont exacts, et que si les particules du milieu élastique se meuvent dans un instant suivant la loi qu'il suppose, elles doivent continuer à se mouvoir suivant cette même loi, en faisant des oscillations analogues à celles de plusieurs pendules égaux, qu'on aurait mis successivement en mouvement. Mais si sa solution est bonne, mathématiquement parlant, on voit aussi qu'elle n'est guère applicable à la nature; car comment imaginer que les ébranlements imprimés par le corps sonore aux particules de l'air suivent toujours la loi dont il s'agit? D'ailleurs par la Théorie des pendules il est clair que les oscillations de ces particules devraient durer toujours, ou du moins jusqu'à ce que des obstacles étrangers les détruisent; et même il est aisé de se convaincre, d'après la construction générale du n° 2, que toutes les particules de la ligne physique AD prolongée indéfiniment de part et d'autre devraient être en mouvement à la fois, puisqu'on peut toujours prendre dans la circonférence d'un cercle des arcs de telle grandeur

que l'on veut. Or c'est ce qui est contraire aux phénomènes connus de la production et de la propagation du son.

Il s'ensuit de là que, pour avoir une Théorie conforme à l'expérience et propre à expliquer les principales propriétés du son, on ne doit pas supposer que la courbe PHSAP soit un cercle, ni même que ce soit une autre courbe rentrante quelconque; au contraire il faudrait que cette courbe demeurât indéterminée et arbitraire, pour pouvoir représenter les ébranlements primitifs de la ligne sonore et fournir une solution générale, quels que puissent être ces ébranlements.

6. Il s'agit donc de voir jusqu'à quel point les propositions de Newton peuvent subsister, abstraction faite de la nature particulière de la courbe PHSAP.

Pour cela nous supposons donc, en général, avec lui que les points E, F, G de la ligne sonore BC parviennent en ε , φ , γ au bout d'un temps quelconque, représenté par l'arc PH de la courbe PH (fig. 3), en sorte



qu'ayant pris dans cet arc les parties égales HI, IK, lesquelles soient dans une raison constante avec les petites lignes égales EF, FG, et ayant mené les ordonnées HL, IM, KN, on ait

$$E\varepsilon = PL, \quad F\varphi = PM, \quad G\gamma = PN;$$

on aura ainsi

$$\varepsilon\gamma = EG + G\gamma - E\varepsilon = EG + PN - PL = EG - NL;$$

de sorte que l'expansion de la partie EG dans le lieu $\varepsilon\gamma$ sera à son expansion moyenne comme $EG - NL$ à EG; et par conséquent la force élastique

du point F ou de la particule EG dans le lieu $\varepsilon\gamma$ sera à sa force élastique moyenne dans le lieu EG comme $\frac{1}{EG - NL}$ à $\frac{1}{EG}$, puisque l'élasticité du milieu est supposée en raison directe de la densité.

Par le même raisonnement (ayant mené encore les ordonnées hl et kn qui interceptent les arcs Hh , kK égaux à Kl et lH) les forces élastiques des points physiques E, G seront à la force élastique moyenne comme $\frac{1}{EG - Ml}$ et $\frac{1}{EG - nM}$ à $\frac{1}{EG}$; et la différence des forces à la force élastique moyenne du milieu comme $\frac{Ml - nM}{EG - EG \times Ml - EG \times nM + Ml \times nM}$ à $\frac{1}{EG}$, c'est-à-dire comme $\frac{Ml - nM}{EG}$ à $\frac{1}{EG}$, ou comme $Ml - nM$ à EG, en suppo-

sant (à cause des limites étroites dans laquelle se font les vibrations) Ml et nM indéfiniment plus petites que EG. Puisque la quantité EG est donnée, la différence des forces est comme $Ml - nM$; or cette différence, c'est-à-dire l'excès de la force élastique du point ε sur la force élastique du point γ , est la force par laquelle la particule physique $\varepsilon\gamma$ du milieu est accélérée; donc la force accélératrice de cette particule, ou du point physique ε du milieu, est comme $Ml - nM$. Et l'on prouvera de la même manière que la force accélératrice du point ε , c'est-à-dire celle du point E dans le lieu ε , sera comme $Lm - NL$, ayant mené l'ordonnée im qui intercepte la portion d'arc $hi = Hh$.

Mais, par l'hypothèse, les arcs PH représentent les temps que le point E emploie à décrire les espaces $E\varepsilon = PL$; donc, suivant cette hypothèse, ayant pris les portions d'arc Hi , KH , égales entre elles et données, les portions de l'axe Lm , NL seront comme les vitesses dans les points L et N, et leur différence $Lm - NL$ sera comme l'accroissement de la vitesse, et par conséquent proportionnelle à la force accélératrice qui doit agir en L. Or nous venons de démontrer que la force accélératrice provenant de l'élasticité du milieu est effectivement proportionnelle à $Lm - NL$. Donc l'hypothèse est légitime, et les particules E, F, G, ... peuvent se mouvoir suivant la loi supposée.

Comme cette démonstration est indépendante de la nature de la courbe

PH, on voit que cette courbe demeure arbitraire, comme nous avons trouvé que cela était nécessaire pour la bonté et la généralité de la solution. Ainsi la Théorie de Newton, présentée de cette manière, ne laisse rien à désirer.

7. A l'égard de la vitesse de la propagation, ou communication du mouvement, d'une particule à l'autre de la ligne sonore, il est clair que puisqu'au bout du temps PH le point E a décrit $E\varepsilon = PL$, et le point F a décrit $F\varepsilon = PM$, ce dernier point, dont le mouvement est représenté aussi, en général, par la même courbe PH, aura décrit un espace égal à PL au bout du temps PH; par conséquent le point F aura après le temps Hh le même mouvement que le point E; donc pendant ce temps le mouvement se propage de E en F par l'espace EF, et la vitesse de cette propagation sera exprimée par le rapport constant de EF à Hh ou lH .

8. Pour évaluer cette vitesse on se rappellera que la force, par laquelle la particule physique EG est mue dans le lieu $\varepsilon\gamma$, est à la force élastique moyenne du milieu comme $Ml - nM$ à EG; mais cette force élastique est égale au poids compriment, et ce poids est à celui de la particule EG comme la hauteur A de l'atmosphère supposée homogène à la longueur EG; donc la force motrice de la particule EG en $\varepsilon\gamma$ sera au poids de cette particule en raison composée de $Ml - nM$ à EG et de A à EG, savoir en raison de $(Ml - nM) \times A$ à EG^2 ; or la force motrice, divisée par la masse à mouvoir, donne la force accélératrice, et si l'on prend la force de la gravité pour l'unité, les masses sont égales aux poids; donc la force accélératrice de $\varepsilon\gamma$, ou du point du milieu ε , sera exprimée par

$$\frac{(Ml - nM)A}{EG^2};$$

et par le même raisonnement la force accélératrice du point E en ε sera représentée par

$$\frac{(Lm - NL)A}{EG^2}, \text{ ou par } \frac{Lm - NL}{KH} \times \left(\frac{KH}{EG}\right)^2 \times A.$$

Mais, par les principes de Mécanique, la force accélératrice nécessaire pour faire décrire les espaces PL dans les temps PH est exprimée par le rapport de la différence des vitesses $\frac{Lm}{Hi} - \frac{NL}{KH}$ à l'élément du temps Hi; donc, puisque KH = Hi, cette force sera exprimée simplement par

$$\frac{Lm - NL}{KH};$$

laquelle devant être identique à celle que nous venons de trouver, il faudra que l'on ait

$$\left(\frac{KH}{EG}\right)^2 \times A = 1;$$

d'où l'on tire

$$\frac{EG}{KH} \text{ ou } \frac{EF}{IH} = \sqrt{A};$$

c'est l'expression de la vitesse du son. En regardant cette vitesse comme engendrée par l'action constante de la force de la gravité que nous avons supposée égale à 1, on sait que son carré est égal au double de la hauteur nécessaire pour la produire; donc $\frac{A}{2}$ sera la hauteur due à la vitesse de la propagation du son; ce qui s'accorde avec ce que Newton a trouvé dans l'hypothèse particulière des oscillations de l'air analogues à celles des pendules.

On voit par là que cette vitesse est constante et indépendante des ébranlements primitifs de la fibre sonore; ce qui est parfaitement d'accord avec l'expérience.

9. En supposant avec la plupart des Physiciens l'air 850 fois plus léger que l'eau, et l'eau 14 fois plus légère que le mercure, on a 1 à 11900 pour le rapport entre le poids spécifique de l'air et celui du mercure. Or, prenant la hauteur moyenne du baromètre de 28 pouces de France, il vient 333200 pouces ou 27766 $\frac{2}{3}$ pieds pour la hauteur A d'une colonne d'air uniformément dense et faisant équilibre à la colonne de mercure dans le baromètre. Donc la vitesse du son sera due à une hauteur de 13883 $\frac{1}{3}$ pieds, et sera par conséquent de 915 pieds par seconde.

L'expérience en donne environ 1088; ce qui fait une différence de près d'un sixième; mais cette différence ne peut être attribuée qu'à l'incertitude des résultats fournis par l'expérience.

Sur quoi voyez un Mémoire de M. Lambert dans le Recueil de cette Académie pour 1768. On trouvera au reste une Théorie générale et complète sur la propagation du son dans les deux premiers volumes des *Mémoires de la Société des Sciences de Turin*, auxquels je me contenterai ici de renvoyer (*). On peut voir aussi les *Mémoires* de cette Académie pour les années 1759 et 1765.

SECTION SECONDE.

DE LA PROPAGATION DES ONDES.

1. Newton détermine d'abord dans la Proposition XLIV du second Livre le mouvement d'un fluide qui balance dans un siphon ou canal très-étroit et qui a ses deux branches verticales.

Il y démontre que ce mouvement est analogue à celui d'un pendule qui oscille entre des arcs cycloïdes, et dont la longueur serait égale à la moitié de celle de la colonne de fluide contenue dans le siphon. Car, dit-il, la force, par laquelle le mouvement de l'eau est alternativement accéléré et retardé, est l'excès du poids de l'eau dans l'une ou l'autre branche; donc, lorsque l'eau monte dans l'une des branches au-dessus du niveau, et qu'en même temps elle descend d'autant dans l'autre, cette force est double du poids de l'eau qui est au-dessus du niveau, et est par conséquent au poids de toute l'eau comme la longueur de la colonne supérieure au niveau, à la moitié de la longueur de la colonne entière d'eau contenue dans le tube.

Mais la force, par laquelle un corps est accéléré et retardé dans la cycloïde à un lieu quelconque, est à son poids total comme l'arc compris entre ce lieu et le lieu le plus bas à l'arc entier ou à la demi-longueur de la cycloïde, c'est-à-dire à la longueur du pendule oscillant. Donc les

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. I. p. 39.

forces motrices de l'eau et du pendule, lorsqu'ils parcourent des espaces égaux, sont comme les poids à mouvoir; par conséquent, si l'eau et le pendule sont en repos dans le commencement, ces forces les feront mouvoir également dans des temps égaux, et feront que par un mouvement réciproque l'eau et le pendule aillent et reviennent dans le même temps.

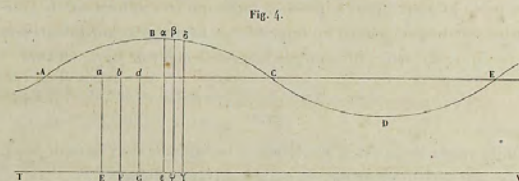
2. Cela posé, Newton compare dans la Proposition XLVI les élévations et les abaissements alternatifs de l'eau dans les ondes qui se forment à la surface d'une eau stagnante aux oscillations perpendiculaires de l'eau dans un siphon. Car, dit-il, comme le mouvement des ondes se fait par la montée et la descente successive de l'eau, en sorte que les parties qui sont les plus hautes deviennent ensuite les plus basses, et que la force motrice qui fait monter les parties les plus basses et descendre les plus hautes est le poids de l'eau élevée, ces montées et descentes alternatives seront analogues au mouvement d'oscillation de l'eau dans un siphon dont la longueur horizontale serait égale aux distances entre les lieux les plus hauts et les plus bas des ondes; et par conséquent, si ces distances sont égales au double de la longueur du pendule, les parties les plus hautes deviendront les plus basses dans le temps d'une oscillation, et dans le temps d'une autre oscillation elles deviendront les plus hautes. Donc il y aura le temps de deux oscillations entre chacune de ces ondes; de sorte que chaque onde parcourra sa largeur dans le temps que le pendule emploiera à faire deux oscillations; mais dans ce même temps un pendule dont la longueur serait quadruple, et qui par conséquent serait égale à la largeur des ondes, c'est-à-dire à l'espace transversal qui est entre leurs moindres ou leurs plus grandes élévations, ferait une oscillation; donc, dans le temps d'une oscillation d'un pendule égal à la largeur des ondes, elles parcourront en avançant un espace égal à cette largeur.

3. Cette Théorie est, comme l'on voit, susceptible de beaucoup de difficultés, dont la principale est que Newton n'y tient compte que du mouvement vertical de l'eau et nullement du mouvement horizontal, qui doit nécessairement s'y joindre, puisque l'eau est supposée libre de se

mouvoir en tout sens. Cette difficulté paraît même n'avoir pas échappé à Newton; car, dans le Corollaire second de la Proposition citée, il remarque que cela est ainsi dans l'hypothèse que les parties de l'eau montent et descendent en ligne droite, mais que ces montées et descentes se font plutôt par des cercles, et qu'ainsi par cette Proposition le temps n'est déterminé qu'à peu près. Mais, en supposant même que l'eau se meuve par un arc de cercle ou d'une autre courbe quelconque, on n'approcherait pas davantage de la vérité; car la comparaison du mouvement de l'eau dans les ondes avec les oscillations de l'eau dans des siphons est purement précaire, et ne saurait subsister avec les lois générales du mouvement des fluides dans des vases ou des canaux.

4. Il serait peut-être impossible d'établir une Théorie générale et rigoureuse sur les ondes; mais, si l'on suppose d'un côté que les élévations et les abaissements successifs de l'eau au-dessus et au-dessous de son niveau soient infiniment petits, ce qui paraît conforme à l'expérience, et que de l'autre la profondeur du canal dans lequel les ondes se forment et se propagent soit assez petite, on peut déterminer les mouvements de l'eau qui les produisent, d'une manière approchée, et analogue à celle que nous venons de donner relativement aux mouvements de l'air dans le son.

Car soit TV (fig. 4) le fond horizontal d'un canal ou bassin rempli d'eau à une hauteur très-petite, AE la surface supérieure de l'eau en repos ou



sa ligne de niveau, et ABCD cette surface lorsque l'eau a été mise en mouvement par quelque cause que ce soit. Si l'on imagine toute la masse de

l'eau stagnante partagée en une infinité d'éléments rectangulaires égaux $aEfb$, $bFGd$, ..., dont les hauteurs aE , bF , ... soient verticales, et dont les largeurs EF , FG , ... soient infiniment petites; on pourra supposer sans erreur sensible que dans le mouvement de l'eau ces éléments parviennent en $\alpha\epsilon\beta$, $\beta\gamma\delta$, ..., en conservant leur forme rectangulaire et leur capacité, à cause de l'incompressibilité de l'eau; et il ne s'agira que de déterminer la loi du mouvement horizontal de chacun de ces éléments.

5. Pour cela je suppose que la courbe PKH (fig. 3, page 599) renferme cette loi d'une manière semblable à celle qui a lieu pour les particules de l'air, en sorte que pendant un temps quelconque représenté par l'arc PH, le point E ait décrit l'espace très-petit $E\epsilon = PL$, et que les points F, G aient décrit les espaces très-petits $F\varphi = PM$, $G\gamma = PN$, en prenant les parties HI, IK dans une raison constante avec EF , FG .

Or, en considérant les deux colonnes contiguës $\alpha\epsilon\beta$, $\beta\gamma\delta$, je remarque que, si leurs hauteurs étaient égales, elles exerceraient par l'action de la gravité une pression égale l'une contre l'autre, d'où il ne pourrait résulter aucun mouvement; mais si la hauteur $\alpha\epsilon$ de l'une est plus grande que la hauteur $\beta\gamma$ de l'autre, l'excès $\alpha\epsilon - \beta\gamma$ doit produire, selon les lois hydrostatiques connues, dans tous les points de la ligne $\beta\gamma$, une pression contre le rectangle $\beta\gamma\delta$, exprimée par cette même différence de hauteur $\alpha\epsilon - \beta\gamma$, en faisant la pression ou la force accélératrice de la gravité égale à l'unité. Ainsi la pression totale qui en résultera contre l'élément $\beta\gamma\delta$, et qui tendra à lui imprimer un mouvement horizontal, sera $(\alpha\epsilon - \beta\gamma) \times \beta\gamma$; donc, divisant par la masse à mouvoir $\beta\gamma\delta$, on aura

$$\frac{(\alpha\epsilon - \beta\gamma) \times \beta\gamma}{\beta\gamma\delta}$$

pour la valeur de la force accélératrice horizontale de l'élément $\beta\gamma\delta$, ou, ce qui revient au même, du point φ suivant la ligne φV .

Maintenant, puisque

$$\alpha\epsilon\beta = aEfb, \quad \beta\gamma\delta = bFGd,$$

et que

$$aEfb = bFGd,$$

on aura

$$\alpha\epsilon = \frac{aEfb}{\epsilon\varphi}, \quad \beta\gamma = \frac{aEfb}{\varphi\gamma};$$

done

$$\alpha\epsilon - \beta\gamma = \frac{aEfb \times (\varphi\gamma - \epsilon\varphi)}{\varphi\gamma \times \epsilon\varphi}, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad = \frac{aEfb \times (\varphi\gamma - \epsilon\varphi)}{EF^2},$$

puisque la différence des hauteurs $\alpha\epsilon$, $\beta\gamma$ sur les hauteurs primitives aE , bF est supposée très-petite, et qu'ainsi $\epsilon\varphi$, $\varphi\gamma$ ne diffèrent qu'infiniment peu de EF . Donc, à cause de $\beta\gamma\delta = aEfb$ et de $\beta\gamma$ égal à très-peu près à aE , on aura pour la force accélératrice du point φ l'expression

$$\frac{(\varphi\gamma - \epsilon\varphi) \times aE}{EF^2}.$$

Mais

$$\epsilon\varphi = EF + F\varphi - E\epsilon = EF + PM - PL = EF - ML,$$

$$\varphi\gamma = FG + G\gamma - F\varphi = FG + PN - PM = EF - NM;$$

done la force dont il s'agit sera

$$\frac{ML - NM}{EF^2} \times aE.$$

Et par le même raisonnement on trouvera la force accélératrice du point ϵ , c'est-à-dire du point E dans le lieu ϵ , exprimée par

$$\frac{(LI - ML)aE}{EF^2}$$

(ayant pris l'arc $Hh = IH$ et abaissé l'ordonnée hl), c'est-à-dire par

$$\frac{LI - ML}{HI} \times \left(\frac{HI}{EF}\right)^2 \times aE;$$

c'est la force qui fait parcourir l'espace PL dans le temps PH suivant l'hypothèse. Donc, pour que cette hypothèse soit légitime, il faut, selon les principes de Mécanique, que cette force soit égale au rapport de la

différence des vitesses $\frac{Ll}{Hh} - \frac{ML}{HI}$ à l'élément du temps HI , c'est-à-dire (à cause de $Hh = HI$) égale à

$$\frac{Ll - ML}{HI}.$$

Ces deux expressions de la force accélératrice étant comparées donnent l'équation

$$\left(\frac{HI}{EF}\right)^2 \times aE = 1,$$

laquelle est, comme l'on voit, indépendante de la figure de la courbe PH , et sert seulement à déterminer le rapport constant $\frac{EF}{HI}$, lequel devient $\sqrt{aE}$. Ainsi la loi supposée est exacte, et la courbe PH demeure arbitraire, comme dans la Théorie de la propagation du son.

6. Il est visible que la détermination de la courbe PH dépend des ébranlements primitifs de l'eau, c'est-à-dire des déplacements des colonnes $aEFb$, $bFGd$,... dus à la cause qui produit les ondes. La solution est donc générale, quels que puissent être ces ébranlements; et la vitesse des ondes en est entièrement indépendante, comme celle du son: car il n'est pas difficile de voir que cette vitesse sera exprimée aussi par le rapport constant de EF à HI , puisque, selon la construction, après le temps HI les points F et G se trouveront avoir parcouru des espaces respectivement égaux à ceux que les points E et F avaient parcourus au commencement de ce temps, et qu'ainsi leur distance, et par conséquent la hauteur de la colonne qui y répond, sera la même après ce temps que celle de la colonne qui répondait aux points E , F au commencement de ce temps; de sorte que celle-ci pourra être censée avoir avancé pendant le temps HI d'un espace égal à sa base, qui est à très-peu près égale à EF .

Or, ayant trouvé (numéro précédent)

$$\frac{EF}{HI} = \sqrt{aE},$$

il s'ensuit que la vitesse de la propagation des ondes sera celle qu'un

corps grave acquerrait en tombant de la moitié de la hauteur aE (n° 8, Section première), c'est-à-dire de la moitié de la hauteur de l'eau dans le canal. De sorte qu'il y a à cet égard une parfaite analogie entre la propagation du son et celle des ondes, la vitesse de celle-là étant due à la hauteur de l'air supposé homogène, et la vitesse de celle-ci étant due à la hauteur de l'eau dans le canal.

7. Au reste, quoique la Théorie précédente soit fondée sur la supposition que la profondeur de l'eau dans le canal soit très-petite, elle pourra néanmoins toujours avoir lieu, si dans la formation des ondes l'eau n'est ébranlée et remuée qu'à une profondeur très-petite; ce qui paraît très-naturel à cause de la ténacité et de l'adhérence mutuelle des parties de l'eau, et ce qui se trouve d'ailleurs confirmé par l'expérience, même à l'égard des grandes ondes de la mer. Ainsi, la vitesse des ondes étant connue par l'expérience, on pourra déterminer réciproquement la profondeur à laquelle l'eau sera agitée dans leur formation, cette profondeur étant toujours double de la hauteur due à la vitesse observée. (*Voyez nos Recherches sur le mouvement des fluides* dans le volume de cette Académie pour l'année 1781 (*), où la Théorie des ondes est traitée d'une manière plus directe et plus générale que nous ne l'avons fait ici.)

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. IV, p. 695.