THÉORIE
DES VARIATIONS PÉRIODIQUES
DES MOUVEMENTS DES PLANÈTES.

PREMIÈRE PARTIE
CONTENANT LES FORMULES GÉNÉRALES DE CES VARIATIONS.

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1783.)

Après avoir donné dans la *Théorie des variations séculaires* la partie la plus importante et la plus difficile du Calcul des perturbations des Planètes, j'ai cru devoir compléter ce Calcul, en donnant aussi l'autre partie qui concerne les variations périodiques.

Plusieurs Géomètres se sont déjà occupés de ce dernier objet; mais leurs travaux se trouvent épars dans divers Ouvrages, et les résultats de ces travaux, dépendant de méthodes et de données différentes, présentent une variété embarrassante pour les Astronomes qui voudraient en faire usage. D'ailleurs ils n'ont point tenu compte de l'effet des variations séculaires, et, quoique cet effet ne puisse être que très-petit, la rigueur ne permet pas de le négliger, sans avoir auparavant démontré qu'il n'en saurait résulter que des altérations insensibles dans le mouvement des Planètes.

L'Analyse par laquelle nous avons déterminé les variations séculaires

donne aussi directement les variations périodiques; car nous avons commencé par réduire tout l'effet des perturbations à la variation des éléments des orbites; nous avons ensuite séparé ce qui, dans ces variations, n'était que périodique de ce qui était indépendant des lieux des Planètes; et cette dernière Partie nous a donné les variations séculaires qui affectent immédiatement et continuellement les dimensions et la position des orbites elliptiques. Il ne s'agit donc que d'avoir égard à la partie périodique des variations de ces mêmes éléments, et de tenir compte des termes négligés dans le premier calcul. On aura par là les variations totales des éléments des Planètes causées par leur attraction mutuelle; et, en employant les éléments corrigés par ces variations, on pourra calculer pour chaque instant les lieux des Planètes par les règles ordinaires.

A la vérité, comme les variations périodiques demeurent toujours très-petites et n'ont, pour ainsi dire, qu'un effet passager et alternatif, il est peu important pour l'Astronomie de connaître en particulier les altérations qui en résultent dans chacun des éléments des orbites; et il suffit d'avoir l'effet total de ces variations sur les lieux des Planètes. Aussi les Astronomes sont-ils dans l'usage de regarder les orbites comme constantes relativement aux variations périodiques, et de ne traiter ces variations que comme des corrections à faire aux lieux elliptiques calculés par les règles ordinaires. Mais après avoir déterminé par nos formules générales la partie périodique des variations des éléments, rien ne sera plus facile que d'en conclure les inégalités du rayon vecteur, de la longitude et de la latitude. Il est vrai qu'on peut calculer ces inégalités d'une manière plus simple, en les déduisant immédiatement des équations différentielles de l'orbite; mais cette méthode a, d'un autre côté, l'inconvénient de ne donner les variations séculaires qu'indirectement et par des réductions particulières; et ne doit-il pas être plus satisfaisant de trouver toutes les inégalités du mouvement des Planètes par une même analyse et par des procédés directs et uniformes?

1. Nous nous proposons donc ici d'appliquer à la détermination des inégalités périodiques des Planètes les formules générales trouvées dans

la première Partie de la *Théorie des variations séculaires;* mais auparavant il est bon de faire à ces formules un changement qui servira à les rendre plus simples et plus exactes à quelques égards, sans influer d'ailleurs en rien sur les résultats trouvés pour les variations séculaires. Ce changement est relatif à la manière dont nous avons déterminé l'anomalie vraie par l'anomalie moyenne dans une ellipse dont les éléments sont variables; voici en quoi il consiste.

Après être parvenus dans le n° 30 de la Partie citée à l'équation différentielle

$$dq + \beta \sin q\, dq + \gamma \cos q\, dq + \delta \sin 2q\, dq + \varepsilon \cos 2q\, dq + \ldots = dp,$$

dans laquelle p est l'angle du mouvement moyen, q celui du mouvement vrai, et $\beta, \gamma, \delta, \ldots$ des coefficients dépendant des éléments de l'ellipse, nous avons intégré le premier membre par approximation, et nous avons obtenu la formule

$$q - (\beta)\cos q + (\gamma)\sin q - \tfrac{1}{2}(\delta)\cos 2q + \tfrac{1}{2}(\varepsilon)\sin 2q - \ldots = p,$$

d'où nous avons ensuite déduit la valeur de q en p.

J'ai reconnu depuis qu'au lieu de cette approximation il vaut mieux laisser le premier membre de l'intégrale sous la forme qu'il aurait si les éléments étaient constants, et appliquer à la valeur de p, qui constitue le second membre, les corrections résultantes de la variabilité des mêmes éléments.

Ainsi, en faisant

$$d\Sigma = -\cos q\, d\beta + \sin q\, d\gamma - \tfrac{1}{2}\cos 2q\, d\delta + \tfrac{1}{2}\sin 2q\, d\varepsilon - \ldots,$$

et ajoutant cette équation à l'équation différentielle ci-dessus, on aura, après l'intégration, cette formule

$$q - \beta\cos q + \gamma \sin q - \tfrac{1}{2}\delta\cos 2q + \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin 2q - \ldots = p + \Sigma,$$

qu'on voit être de la même forme que la précédente, les coefficients (β), (γ), (δ),... étant changés en $\beta, \gamma, \delta, \ldots$, et la variable p en $p + \Sigma$.

On fera donc ces mêmes changements dans les autres formules dépendantes de celle-ci; et par conséquent les quantités m et n des n^{os} 38 et suivants se réduiront d'abord à M et N, réduction que nous avons faite aussi dans le n° 49, mais d'après la considération de la petitesse des forces perturbatrices dont nous avons négligé les carrés. Par cette considération, on pourra donc aussi négliger dans les formules des variations des éléments la quantité Σ, ou du moins la partie périodique de cette quantité, l'autre partie proportionnelle à p se confondant avec le mouvement moyen; de sorte que les équations différentielles des n^{os} 40 et 50 demeureront les mêmes; et toute la Théorie des variations séculaires des éléments des orbites planétaires subsistera en son entier.

A l'égard de la quantité Σ, il est clair qu'elle représentera la variation du mouvement moyen due aux forces perturbatrices, variation indépendante du grand axe de l'ellipse, et qu'on pourra rapporter à l'époque du moyen mouvement, laquelle, dans les orbites invariables, contient la sixième constante arbitraire des intégrales, et par conséquent le sixième élément du mouvement elliptique.

2. Pour avoir donc la formule de cette variation, il faut d'abord connaître les valeurs des coefficients β, γ, δ,.... en M, N, P, Q, R; or, par le n° 30 de l'Ouvrage cité, on voit que la série

$$\alpha(1+\beta\sin q+\gamma\cos q+\delta\sin 2q+\varepsilon\cos 2q+\zeta\sin 3q+\eta\cos 3q+\dots)$$

résulte du développement de la fraction

$$\left[g\sqrt{R^2+(Q\sin q-P\cos q)^2}+C\sin q-B\cos q\right]^{-2},$$

dans laquelle (n^{os} 8, 29)

$$B=RN-PL,\quad C=-RM-QL$$

et

$$L=\frac{MQ-NP}{R},$$

et l'on trouve par les méthodes ordinaires, en poussant l'approximation

jusqu'aux troisièmes dimensions de M, N, P, Q, et faisant $g=1$ conformément au n° 37 du même Ouvrage,

$$\beta=2M-\frac{NPQ}{2R^3}+\frac{M(3Q^2+P^2)}{4R^2},$$

$$\gamma=2N-\frac{MPQ}{2R^3}+\frac{N(3P^2+Q^2)}{4R^2},$$

$$\delta=3MN+\frac{PQ}{R^2},$$

$$\varepsilon=\frac{3(N^2-M^2)}{2}+\frac{Q^2-P^2}{2R^2},$$

$$\zeta=3MN^2-M^3+\frac{3M(Q^2-P^2)}{4R^2}+\frac{3NPQ}{2R^2},$$

$$\eta=N^3-3NM^2+\frac{3N(Q^2-P^2)}{4R^2}-\frac{3MPQ}{2R^2}.$$

Après avoir différentié ces valeurs, on y substituera pour dM, dN, dP, dQ, dR celles que nous avons données dans les n^{os} 17 et 41 de l'Ouvrage cité; on aura ainsi les expressions de $d\beta$, $d\gamma$, $d\delta$,...., qu'il faudra substituer dans celle de $d\Sigma$ du numéro précédent.

3. Si dans cette expression de $d\Sigma$ on veut se contenter d'avoir égard aux premières dimensions des quantités M, N, P, Q, ainsi que nous l'avons fait dans les formules des variations des éléments de l'orbite, il suffira alors d'avoir égard aux secondes dimensions de ces quantités dans les valeurs de β, γ,..., ce qui les réduira à celles-ci

$$\beta=2M,\quad \gamma=2N,\quad \delta=3MN+\frac{PQ}{R^2},\quad \varepsilon=\frac{3(N^2-M^2)}{2}+\frac{Q^2-P^2}{2R^2},\quad \zeta=0,\dots;$$

et, comme les valeurs de dP et dQ contiennent déjà les premières dimensions de P et Q (ainsi qu'on le voit par les formules du n° 39), il est clair qu'on pourra négliger les différences des termes $\frac{PQ}{R^2}$ et $\frac{Q^2-P^2}{2R^2}$. On aura

ainsi, après les substitutions, et en n'employant pour $d\mathrm{N}$ et $d\mathrm{M}$ que les valeurs du n° 42 du même Ouvrage,

$$d\Sigma = 2r^2\frac{d\Omega}{dr}\,dq + 2\frac{d\Omega}{dq}\,dr + 3r\frac{d\Omega}{dq}(\mathrm{N}\sin q - \mathrm{M}\cos q)\,dq$$
$$+ \frac{3r^2}{2}\frac{d\Omega}{dr}(\mathrm{M}\sin q + \mathrm{N}\cos q)\,dq + \frac{3}{2}\frac{d\Omega}{dq}(\mathrm{M}\sin q + \mathrm{N}\cos q)\,dr;$$

et il n'y aura plus qu'à faire les autres substitutions de ce dernier numéro, en se souvenant d'y changer m, n en M, N, et p en $p+\Sigma$.

4. Dénotons par $\bar{p}$ la valeur moyenne de l'angle $p+\Sigma$, c'est-à-dire la partie indépendante des sinus et cosinus, et proportionnelle au temps; et par $\bar{r}$ le demi-grand axe de l'ellipse invariable dans laquelle le mouvement moyen serait $\bar{p}$, en sorte que l'on ait $dp = \frac{dt}{\bar{r}^{\frac{3}{2}}}$; il est clair que, dans les termes dus aux forces perturbatrices, on pourra mettre partout $\bar{p}$ au lieu de $p+\Sigma$, et $\bar{r}$ au lieu de $\frac{1}{\Delta}$ demi-grand axe de l'ellipse variable (37), du moins en tant qu'on néglige les carrés de ces forces, comme on l'a toujours pratiqué dans la Théorie des perturbations des corps célestes.

Ainsi les substitutions dont il s'agit se réduiront à faire

$$q = \bar{p} + 2\mathrm{M}\cos\bar{p} - 2\mathrm{N}\sin\bar{p}, \qquad dq = (1 - 2\mathrm{M}\sin\bar{p} - 2\mathrm{N}\cos\bar{p})\,d\bar{p},$$
$$r = \bar{r}(1 + \mathrm{M}\sin\bar{p} + \mathrm{N}\cos\bar{p}), \qquad dr = \bar{r}(\mathrm{M}\cos\bar{p} - \mathrm{N}\sin\bar{p})\,d\bar{p},$$

$$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{d\Omega}{d\bar{r}} + \bar{r}\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}^2}(\mathrm{M}\sin\bar{p} + \mathrm{N}\cos\bar{p})$$
$$+ \bar{r}'\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}\,d\bar{r}'}(\mathrm{M}'\sin\bar{p}' + \mathrm{N}'\cos\bar{p}') + \ldots$$
$$+ 2\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}\,d\bar{p}}(\mathrm{M}\cos\bar{p} - \mathrm{N}\sin\bar{p})$$
$$+ 2\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}\,d\bar{p}'}(\mathrm{M}'\cos\bar{p}' - \mathrm{N}'\sin\bar{p}') + \ldots,$$

$$\frac{d\Omega}{dq} = \frac{d\Omega}{d\bar{p}} + \bar{r}\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}\,d\bar{p}}(\mathrm{M}\sin\bar{p} + \mathrm{N}\cos\bar{p})$$
$$+ \bar{r}'\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}'\,d\bar{p}}(\mathrm{M}'\sin\bar{p}' + \mathrm{N}'\cos\bar{p}') + \ldots$$
$$+ 2\frac{d^2\Omega}{d\bar{p}^2}(\mathrm{M}\cos\bar{p} - \mathrm{N}\sin\bar{p})$$
$$+ 2\frac{d^2\Omega}{d\bar{p}\,d\bar{p}'}(\mathrm{M}'\cos\bar{p}' - \mathrm{N}'\sin\bar{p}') + \ldots,$$

$$\Omega = \mathrm{T}'\left[\frac{\bar{r}\cos(\bar{p}-\bar{p}')}{\bar{r}'^2} - \frac{1}{\sqrt{\bar{r}^2 - 2\bar{r}\bar{r}'\cos(\bar{p}-\bar{p}') + \bar{r}'^2}}\right]$$
$$+ \mathrm{T}''\left[\frac{\bar{r}\cos(\bar{p}-\bar{p}'')}{\bar{r}''^2} - \frac{1}{\sqrt{\bar{r}^2 - 2\bar{r}\bar{r}''\cos(\bar{p}-\bar{p}'') + \bar{r}''^2}}\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Négligeant donc dans ces substitutions les secondes dimensions des quantités M, N, M′, N′, ..., et changeant les lettres M, N en x, y, ainsi que nous l'avons fait dans le n° 50 de l'Ouvrage cité, on aura pour la variation de Σ cette formule

$$d\Sigma = 2\bar{r}^2\frac{d\Omega}{d\bar{r}}\,d\bar{p} + \left(2\bar{r}^2\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}^2} + \frac{3\bar{r}^2}{2}\frac{d\Omega}{d\bar{r}}\right)(x\sin\bar{p} + y\cos\bar{p})\,d\bar{p}$$
$$+ 2\bar{r}^2\bar{r}'\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}\,d\bar{r}'}(x'\sin\bar{p}' + y'\cos\bar{p}')\,d\bar{p}$$
$$+ 2\bar{r}^2\bar{r}''\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}\,d\bar{r}''}(x''\sin\bar{p}'' + y''\cos\bar{p}'')\,d\bar{p} + \ldots$$
$$+ \left(4\bar{r}^2\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}\,d\bar{p}} - \bar{r}\frac{d\Omega}{d\bar{p}}\right)(x\cos\bar{p} - y\sin\bar{p})\,d\bar{p}$$
$$+ 4\bar{r}^2\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}\,d\bar{p}'}(x'\cos\bar{p}' - y'\sin\bar{p}')\,d\bar{p}$$
$$+ 4\bar{r}^2\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}\,d\bar{p}''}(x''\cos\bar{p}'' - y''\sin\bar{p}'')\,d\bar{p} + \ldots,$$

dans laquelle il ne s'agira plus que de substituer la valeur précédente de Ω.

5. Mais, pour avoir une formule intégrable, il est nécessaire de réduire en série les radicaux qui entrent dans l'expression de Ω; on supposera donc

$$[\bar r^2 - 2\bar r\bar r'\cos(\bar p-\bar p') + \bar r'^2]^{-\frac{1}{2}} = [\bar r,\bar r'] + [\bar r,\bar r']_1\cos(\bar p-\bar p') + [\bar r,\bar r']_2\cos 2(\bar p-\bar p') + [\bar r,\bar r']_3\cos 3(\bar p-\bar p') + \dots,$$

et ainsi des autres radicaux semblables; alors l'expression de $d\Sigma$ se trouvera composée de termes tous intégrables, dont les uns, simplement proportionnels à $d\bar p$, seront

$$-2\mathrm{T}'\bar r'\,\frac{d[\bar r,\bar r']}{d\bar r'}\,d\bar p - 2\mathrm{T}''\bar r''\,\frac{d[\bar r,\bar r'']}{d\bar r''}\,d\bar p - \dots,$$

et dont les autres contiendront tous des sinus ou cosinus des angles $\bar p, \bar p', \bar p'', \dots$, et donneront par conséquent la partie périodique de la valeur de Σ.

Quant aux premiers termes, nous verrons ci-après comment, étant joints à un terme semblable provenant de la valeur de p, il en résulte le terme unique $\bar p$ que nous avons supposé représenter la partie uniforme du mouvement moyen $p+\Sigma$ dans l'ellipse variable.

Ainsi, tant qu'on n'a égard qu'aux premières dimensions des excentricités et des inclinaisons, auxquelles les quantités M, N, $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}$, $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$, ou x, y, s, u sont proportionnelles, on ne trouve point de variation séculaire dans le mouvement moyen des Planètes; mais, si l'on poussait l'approximation jusqu'aux secondes dimensions de ces quantités dans l'expression de $d\Sigma$, on trouverait alors des termes proportionnels à $d\bar p$ et indépendants des sinus et cosinus de $\bar p, \bar p', \dots$, lesquels auraient pour coefficients les quantités

$$x^2+y^2,\quad x'^2+y'^2,\quad xx'+yy',\dots,\quad s^2+u^2,\quad s'^2+u'^2,\quad ss'+uu',\dots;$$

ces termes donneraient donc, par la substitution des valeurs de x, y, x', y', ..., s, u, s', u', ... relatives à chaque Planète, des variations séculaires dans leur mouvement moyen, variations qui n'affecteraient que le

mouvement circulatoire dans l'ellipse variable, mais nullement le demi-grand axe ou la distance moyenne. Comme cet objet est de la plus grande importance dans la Théorie des Planètes, je me propose de le discuter à fond dans une autre occasion (*).

6. Si dans l'expression de $d\Sigma$ du n° 4 on néglige les termes où se trouvent les quantités $x, y, x', y', \dots$ dues aux excentricités des orbites, elle se réduit à celle-ci

$$\begin{aligned} d\Sigma &= 2\bar r^2\frac{d\Omega}{d\bar r}\,d\bar p \\ &= -2\bar r^2\mathrm{T}'\left[\frac{d[\bar r,\bar r']}{d\bar r} + \left(\frac{d[\bar r,\bar r']_1}{d\bar r} - \frac{1}{\bar r'^3}\right)\cos(\bar p-\bar p') + \frac{d[\bar r,\bar r']_2}{d\bar r}\cos 2(\bar p-\bar p') + \dots\right]d\bar p \\ &\quad -2\bar r^2\mathrm{T}''\left[\frac{d[\bar r,\bar r'']}{d\bar r} + \left(\frac{d[\bar r,\bar r'']_1}{d\bar r} - \frac{1}{\bar r''^3}\right)\cos(\bar p-\bar p'') + \frac{d[\bar r,\bar r'']_2}{d\bar r}\cos 2(\bar p-\bar p'') + \dots\right]d\bar p \\ &\quad - \dots\dots\dots\

7. Si l'on voulait aussi tenir compte des excentricités dans la valeur de Σ, il n'y aurait qu'à substituer dans l'expression de $d\Sigma$ les valeurs de x, y, x', y',... déterminées dans la Théorie des variations séculaires; ce qui ne donnerait que des termes en sinus et cosinus d'angles proportionnels à t ou p, et par conséquent tous intégrables.

Mais pour simplifier ce calcul on remarquera :

1° Que l'on peut regarder les quantités x, y, x',... comme constantes, puisque leurs différentielles étant de l'ordre des forces perturbatrices doivent être négligées, par la raison que ces quantités se trouvent ici déjà multipliées par la quantité Ω, qui est aussi du même ordre.

2° Qu'à cause de la petitesse des termes dont il s'agit, il suffira d'avoir égard à ceux qui pourront augmenter beaucoup par l'intégration; et il est clair que ce sont les termes qui contiendront des sinus ou cosinus d'angles dont la variation sera très-petite vis-à-vis de celle de l'angle $\bar{p}$: car si, par exemple, Π désigne un de ces angles, et que $d\Pi = \nu d\bar{p}$, ν étant un coefficient fort petit, la première intégration introduira au dénominateur le coefficient ν, et la seconde y introduira le carré ν^2. Comme l'angle Π ne peut être composé que de multiples des angles $\bar{p}$, $\bar{p}'$, $\bar{p}''$..., joints ensemble par les signes + ou −, ce n'est que par les rapports connus des mouvements moyens des Planètes qu'on pourra juger dans chaque cas de la valeur du coefficient ν; il faudra donc un examen particulier pour chaque Planète dont on voudra calculer les perturbations.

3° Que, s'il arrivait que le coefficient ν fût très-petit du même ordre que les coefficients de t dans les sinus ou cosinus des valeurs de x, y, x', y',..., il faudrait alors, dans les termes qui contiendraient les sinus ou cosinus de Π, substituer immédiatement ces valeurs, et intégrer ensuite, après avoir réduit les produits des sinus et cosinus en sinus et cosinus simples. Mais ce cas ne paraît pas pouvoir exister dans notre Système planétaire.

8. Considérons maintenant les variations du demi-grand axe de l'ellipse. Nous avons trouvé, dans le n° 35 de la Théorie citée, que ce grand axe est constant, relativement aux variations séculaires; mais il ne l'est plus lorsqu'on a égard aux variations périodiques. Car la quantité Δ, qui

est en raison inverse du demi-grand axe, est telle que

$$d\Delta = 2(d\Omega),$$

en désignant par $(d\Omega)$ la différentielle partielle de la fonction Ω, relativement aux seules variables de la Planète troublée; par conséquent cette quantité sera essentiellement variable, mais ses variations ne seront que périodiques, puisque l'expression de $(d\Omega)$ ne peut contenir que des termes affectés de sinus et cosinus.

Prenons pour un moment r pour dénoter le demi-grand axe de l'ellipse variable dans laquelle p est l'angle du mouvement moyen; on aura par les n^{os} 34 et 37 de la Théorie citée

$$r = \frac{1}{\Delta}, \quad \frac{dp}{dt} = \Delta^{\frac{3}{2}}.$$

Donc : 1°

$$d\frac{1}{r} = 2(d\Omega),$$

et, intégrant,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\bar{r}} + 2\int(d\Omega).$$

La quantité $\frac{1}{\bar{r}}$ est une constante arbitraire qui serait égale à la valeur moyenne de $\frac{1}{r}$, si l'intégrale $\int(d\Omega)$ ne contenait aucun terme constant. Mais nous supposerons que cette intégrale contienne encore une petite constante arbitraire, que nous déterminerons en sorte que le mouvement moyen dans l'ellipse qui aurait $\bar{r}$ pour demi-grand axe soit le même que la partie uniforme $\bar{p}$ de l'angle $p + \Sigma$, conformément à ce que nous avons supposé dans le n° 4.

Si donc on fait $r = \bar{r} + \rho$, la quantité ρ exprimant ainsi les variations périodiques du demi-grand axe, et qu'on néglige les secondes puissances de cette quantité, on aura

$$\rho = -2\bar{r}^2\int(d\Omega).$$

2° On aura par conséquent

$$dp = \frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}} = \frac{dt}{\bar{r}^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\rho\, dt}{2\bar{r}^{\frac{5}{2}}}.$$

Mais $\frac{dt}{\bar{r}^{\frac{3}{2}}}$ est la valeur de dp qui aurait lieu dans l'ellipse dont le demi-grand axe serait $\bar{r}$, et que nous avons déjà désignée par $d\bar{p}$; donc, intégrant,

$$p = \bar{p} - \frac{3}{2\bar{r}^{\frac{3}{2}}}\int \rho\, dt = \bar{p} + 3\bar{r}\int d\bar{p}\int (d\Omega).$$

Donc, si l'on fait $p + \Sigma = \bar{p} + \varpi$, la quantité ϖ exprimant la partie périodique de l'angle $p + \Sigma$, on aura

$$\varpi = \Sigma + 3\bar{r}\int d\bar{p}\int (d\Omega);$$

et il faudra que dans cette expression il n'entre aucun terme proportionnel à $\bar{p}$.

9. Il ne s'agit maintenant que d'évaluer la quantité $(d\Omega)$. Or on a vu dans le n° 41 de la Théorie citée que cette quantité est réductible à la forme

$$\frac{d\Omega}{dr}\,dr + \frac{d\Omega}{dq}\,dq + \frac{d\Omega}{dz}\,dz,$$

r étant ici le rayon vecteur de l'orbite; donc, négligeant le terme $\frac{d\Omega}{dz}\,dz$ parce qu'il contiendrait les secondes puissances des inclinaisons des orbites, et faisant dans les autres les mêmes substitutions et réductions que dans le n° 4 ci-dessus, on aura

$$\begin{aligned}(d\Omega) = {} & \frac{d\Omega}{d\bar{p}}\,d\bar{p} + \left(\bar{r}\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}\,d\bar{p}} - 2\frac{d\Omega}{d\bar{p}}\right)(x\sin\bar{p} + y\cos\bar{p})\,d\bar{p} \\ & + \bar{r}'\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}'\,d\bar{p}}(x'\sin\bar{p}' + y'\cos\bar{p}')\,d\bar{p} \\ & + \bar{r}''\frac{d^2\Omega}{d\bar{r}''\,d\bar{p}}(x''\sin\bar{p}'' + y''\cos\bar{p}'')\,d\bar{p} + \ldots \\ & + \left(2\frac{d\Omega}{d\bar{p}^2} + \bar{r}\frac{d\Omega}{d\bar{r}}\right)(x\cos\bar{p} - y\sin\bar{p})\,d\bar{p} \\ & + 2\frac{d^2\Omega}{d\bar{p}\,d\bar{p}'}(x'\cos\bar{p}' - y'\sin\bar{p}')\,d\bar{p} \\ & + 2\frac{d^2\Omega}{d\bar{p}\,d\bar{p}''}(x''\cos\bar{p}'' - y''\sin\bar{p}'')\,d\bar{p} + \ldots.\end{aligned}$$

Et l'on intégrera cette formule d'une manière semblable à celle que nous avons indiquée plus haut pour l'intégration de la différentielle $d\Sigma$.

10. Si l'on néglige les excentricités et par conséquent les quantités $x, y, x', y', \ldots$ qui en dépendent, on aura simplement

$$(d\Omega) = \frac{d\Omega}{d\bar{p}}\,d\bar{p}.$$

Cette différentielle est intégrable rigoureusement; car en substituant la valeur de Ω du n° 4 ci-dessus, et faisant comme dans le n° 6

$$d\bar{p} = \frac{d\bar{p} - d\bar{p}'}{n'} = \frac{d\bar{p} - d\bar{p}''}{n''} = \ldots,$$

on aura

$$\begin{aligned}\int (d\Omega) = {} & \frac{\mathrm{T}'}{n'}\left[\frac{\bar{r}\cos(\bar{p} - \bar{p}')}{\bar{r}'^2} - \frac{1}{\sqrt{\bar{r}^2 - 2\bar{r}\bar{r}'\cos(\bar{p} - \bar{p}') + \bar{r}'^2}}\right] \\ & + \frac{\mathrm{T}''}{n''}\left[\frac{\bar{r}\cos(\bar{p} - \bar{p}'')}{\bar{r}''^2} - \frac{1}{\sqrt{\bar{r}^2 - 2\bar{r}\bar{r}''\cos(\bar{p} - \bar{p}'') + \bar{r}''^2}}\right] \\ & + \ldots + \chi,\end{aligned}$$

χ étant une constante arbitraire.

Cette expression multipliée par $2\bar{r}^2$ et prise négativement donnera la valeur de ρ, c'est-à-dire les variations du demi-grand axe en tant qu'on néglige les excentricités des orbites. Mais pour en déduire ensuite celles du mouvement moyen qui en dépendent, il faudra une nouvelle intégration qui, n'étant pas possible en général, oblige d'avoir recours aux séries. On pourrait, à la vérité, construire l'intégrale par les méthodes connues pour la quadrature arithmétique des courbes, et l'on pourrait en faire de même pour la valeur de $d\Sigma$ dans ce même cas; mais on n'aurait pas de cette manière des formules générales qui fassent connaître la marche des variations, et l'on n'aurait pas même une plus grande exactitude que par les séries.

Employant donc les séries du n° 5 ci-dessus, on aura

$$\int(d\Omega)=-\frac{T'}{n'}\left[[\bar r,\bar r']+\left([\bar r,\bar r']_1-\frac{\bar r}{\bar r'^2}\right)\cos(\bar p-\bar p')+[\bar r,\bar r']_2\cos 2(\bar p-\bar p')+\dots\right]$$
$$-\frac{T''}{n''}\left[[\bar r,\bar r'']+\left([\bar r,\bar r'']_1-\frac{\bar r}{\bar r''^2}\right)\cos(\bar p-\bar p'')+[\bar r,\bar r'']_2\cos 2(\bar p-\bar p'')+\dots\right]$$
$$-\dots+\chi,$$

et de là

$$\int d\bar p\int(d\Omega)=-\frac{T'}{n'^2}\left[\left([\bar r,\bar r']_1-\frac{\bar r}{\bar r'^2}\right)\sin(\bar p-\bar p')+\frac12[\bar r,\bar r']_2\sin 2(\bar p-\bar p')+\dots\right]$$
$$-\frac{T''}{n''^2}\left[\left([\bar r,\bar r'']_1-\frac{\bar r}{\bar r''^2}\right)\sin(\bar p-\bar p'')+\frac12[\bar r,\bar r'']_2\sin 2(\bar p-\bar p'')+\dots\right]$$
$$-\dots+\left(\chi-\frac{T'}{n'}[\bar r,\bar r']-\frac{T''}{n''}[\bar r,\bar r'']-\dots\right)\bar p.$$

Or il faut (8) que la valeur de ϖ, c'est-à-dire

$$\Sigma+3\bar r\int d\bar p\int(d\Omega),$$

ne contienne aucun terme proportionnel à $\bar p$; égalant donc à zéro la somme des coefficients de ces sortes de termes dans Σ et dans

$$3\bar r\int d\bar p\int(d\Omega),$$

on aura l'équation

$$-2\bar r^2\left(T'\frac{d[\bar r,\bar r']}{d\bar r}+T''\frac{d[\bar r,\bar r'']}{d\bar r}+\dots\right)$$
$$+3\bar r\left(\chi-\frac{T'}{n'}[\bar r,\bar r']-\frac{T''}{n''}[\bar r,\bar r'']-\dots\right)=0;$$

d'où l'on tire

$$\chi=T'\left(\frac{[\bar r,\bar r']}{n'}+\frac{2\bar r}{3}\frac{d[\bar r,\bar r']}{d\bar r}\right)+T''\left(\frac{[\bar r,\bar r'']}{n''}+\frac{2\bar r}{3}\frac{d[\bar r,\bar r'']}{d\bar r}\right)+\dots$$

Par le moyen de ces substitutions, les expressions de ρ et de ϖ du n° 8 deviendront

$$\rho=-T'\frac{4\bar r^3}{3}\frac{d[\bar r,\bar r']}{d\bar r}-T''\frac{4\bar r^3}{3}\frac{d[\bar r,\bar r'']}{d\bar r}-\dots$$
$$+2T'\frac{\bar r^2}{n'}\left[\left([\bar r,\bar r']_1-\frac{\bar r}{\bar r'^2}\right)\cos(\bar p-\bar p')+[\bar r,\bar r']_2\cos 2(\bar p-\bar p')+\dots\right]$$
$$+2T''\frac{\bar r^2}{n''}\left[\left([\bar r,\bar r'']_1-\frac{\bar r}{\bar r''^2}\right)\cos(\bar p-\bar p'')+[\bar r,\bar r'']_2\cos 2(\bar p-\bar p'')+\dots\right]$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\varpi=T'\left[[[\bar r,\bar r']_1]\sin(\bar p-\bar p')+[[\bar r,\bar r']_2]\sin 2(\bar p-\bar p')+\dots\right]$$
$$+T''\left[[[\bar r,\bar r'']_1]\sin(\bar p-\bar p'')+[[\bar r,\bar r'']_2]\sin 2(\bar p-\bar p'')+\dots\right]$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

en supposant, pour abréger,

$$[[\bar r,\bar r']_1]=\frac{\bar r^3}{\bar r'^2}\left(\frac{3}{n'^2}+\frac{2}{n'}\right)-\frac{3\bar r}{n'^2}[\bar r,\bar r']_1-\frac{2\bar r^2}{n'}\frac{d[\bar r,\bar r']_1}{d\bar r},$$
$$[[\bar r,\bar r']_2]=-\frac{3\bar r}{2n'^2}[\bar r,\bar r']_2-\frac{2\bar r^2}{2n'}\frac{d[\bar r,\bar r']_2}{d\bar r},$$
$$[[\bar r,\bar r']_3]=-\frac{3\bar r}{3n'^2}[\bar r,\bar r']_3-\frac{2\bar r^2}{3n'}\frac{d[\bar r,\bar r']_3}{d\bar r},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

et ainsi des autres expressions semblables.

11. Après avoir vu comment on doit déterminer les variations périodiques de la distance moyenne et du mouvement moyen, passons à la recherche de celles des excentricités et des aphélies.

Celles-ci sont contenues dans les formules du n° **41** de la Théorie citée, lesquelles donnent les variations des quantités M et N ou x et y; car en nommant λ l'excentricité, φ la longitude de l'aphélie sur le plan de projection et η sa latitude, nous avons supposé

$$x=\lambda\cos\eta\sin\varphi,\quad y=\lambda\cos\eta\cos\varphi.$$

Or on a vu dans le n° **42** qu'en négligeant les carrés des excentricités

et des inclinaisons, les formules dont il s'agit se réduisent à celles-ci

$$dM = -r^2\frac{d\Omega}{dr}\cos q\,dq + \frac{d\Omega}{dq}(2r\sin q\,dq - \cos q\,dr),$$

$$dN = r^2\frac{d\Omega}{dr}\sin q\,dq + \frac{d\Omega}{dq}(2r\cos q\,dq + \sin q\,dr).$$

Faisant donc dans ces formules les substitutions du n° 4 ci-dessus, et changeant M, N en x, y, on aura des équations de cette forme

$$dx = (X\sin\bar p - Y\cos\bar p)\,d\bar p, \qquad dy = (X\cos\bar p + Y\sin\bar p)\,d\bar p,$$

dans lesquelles

$$\begin{aligned}
X = {} & 2\bar r\frac{d\Omega}{d\bar p} + \left(-2\bar r\frac{d\Omega}{d\bar p} + 2\bar r^2\frac{d^2\Omega}{d\bar p\,d\bar r}\right)(x\sin\bar p + y\cos\bar p)\\
& + 2\bar r\bar r'\frac{d^2\Omega}{d\bar p\,d\bar r'}(x'\sin\bar p' + y'\cos\bar p')\\
& + 2\bar r\bar r''\frac{d^2\Omega}{d\bar p\,d\bar r''}(x''\sin\bar p'' + y''\cos\bar p'') + \ldots\\
& + \left(2\bar r^2\frac{d\Omega}{d\bar r} + 4\bar r\frac{d^2\Omega}{d\bar p^2}\right)(x\cos\bar p - y\sin\bar p)\\
& + 4\bar r\frac{d^2\Omega}{d\bar p\,d\bar p'}(x'\cos\bar p' - y'\sin\bar p')\\
& + 4\bar r\frac{d^2\Omega}{d\bar p\,d\bar p''}(x''\cos\bar p'' - y''\sin\bar p'')\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
Y = {} & \bar r^2\frac{d\Omega}{d\bar r} + \bar r^2\frac{d^2\Omega}{d\bar r^2}(x\sin\bar p + y\cos\bar p)\\
& + \bar r^2\bar r'\frac{d^2\Omega}{d\bar r\,d\bar r'}(x'\sin\bar p' + y'\cos\bar p')\\
& + \bar r^2\bar r''\frac{d^2\Omega}{d\bar r\,d\bar r''}(x''\sin\bar p'' + y''\cos\bar p'') + \ldots\\
& + \left(-3\bar r\frac{d\Omega}{d\bar p} + 2\bar r^2\frac{d^2\Omega}{d\bar r\,d\bar p}\right)(x\cos\bar p - y\sin\bar p)\\
& + 2\bar r^2\frac{d^2\Omega}{d\bar r\,d\bar p'}(x'\cos\bar p' - y'\sin\bar p')\\
& + 2\bar r^2\frac{d^2\Omega}{d\bar r\,d\bar p''}(x''\cos\bar p'' - y''\sin\bar p'')\\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.
\end{aligned}$$

12. Si maintenant on substitue dans ces expressions de X et Y la valeur de Ω en série (4 et 5), qu'ensuite on développe les différents produits des sinus et cosinus en sinus et cosinus simples, on aura des termes proportionnels à $\sin\bar p$ et $\cos\bar p$, lesquels étant ensuite multipliés par $\sin\bar p$ et $\cos\bar p$, donneront, dans les valeurs de dx et dy, des termes sans sinus ni cosinus; ce sont ceux que nous avons déterminés à part dans les n^{os} 43 et 49 de la Théorie citée, et auxquels nous avons eu uniquement égard dans les équations différentielles en x et y du n° 50, parce que nous faisions alors abstraction des inégalités périodiques. Les autres termes de X et Y ne pourront donner dans dx et dy que des termes affectés de sinus ou cosinus d'angles composés de multiples de $\bar p$, $\bar p'$, $\bar p''$, ...; et il faudra maintenant tenir compte aussi de ces termes, pour pouvoir déterminer la partie périodique des valeurs de x et y.

Désignons, pour abréger, par (X) la totalité des termes affectés de sinus et cosinus dans la valeur de

$$X\sin\bar p - Y\cos\bar p,$$

et par (Y) la totalité des termes pareils dans la valeur de

$$X\cos\bar p + Y\sin\bar p;$$

il faudra donc ajouter respectivement aux valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ des équations différentielles citées les quantités $(X)\frac{d\bar p}{dt}$, $(Y)\frac{d\bar p}{dt}$; de sorte que ces quantités formeront maintenant les seconds membres des deux premières équations différentielles dont il s'agit.

Ainsi, puisque (4)

$$d\bar p = \frac{dt}{\bar r^{\frac{3}{2}}},$$

les équations complètes seront

$$\frac{dx}{dt} - \left((0,1) + (0,2) + \ldots\right)y + [0,1]\,y' + [0,2]\,y'' + \ldots = \frac{(X)}{\bar r^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dy}{dt} + \left((0,1) + (0,2) + \ldots\right)x - [0,1]\,x' - [0,2]\,x'' + \ldots = \frac{(Y)}{\bar r^{\frac{3}{2}}}.$$

De même, en dénotant par X′, Y′ ce que deviennent les expressions de X et Y lorsqu'on y change $\bar{r}$, $\bar{p}$, x, y en $\bar{r}'$, $\bar{p}'$, x', y', et *vice versâ*, et par (X′), (Y′) la totalité des termes affectés de sinus et cosinus dans les valeurs de

$$X' \sin\bar{p}' - Y' \cos\bar{p}', \quad X' \cos\bar{p}' + Y' \sin\bar{p}',$$

on aura les équations

$$\frac{dx'}{dt} - \Big((1,0) + (1,2) + \dots\Big) y' + [1,0]\, y + [1,2]\, y'' + \dots = \frac{(X')}{\bar{r}'^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{dy'}{dt} + \Big((1,0) + (1,2) + \dots\Big) x' - [1,0]\, x - [1,2]\, x'' - \dots = \frac{(Y')}{\bar{r}'^{\frac{3}{2}}},$$

et ainsi de suite.

13. Comme dans les premiers membres de ces équations les variations sont linéaires, et que les seconds membres peuvent être regardés comme des fonctions connues de la variable t, l'intégration est toujours possible par les méthodes connues. Dans la Théorie précédente nous avons déjà donné les intégrales complètes pour le cas où les seconds membres seraient nuls; et ces mêmes intégrales, en y faisant varier les constantes arbitraires, donneront celles des équations dont il s'agit par la méthode indiquée dans le n° 27 de la même Théorie.

Désignons, en général, par $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x}'$, $\overline{y}'$, ... les expressions de x, y, x', y', ... trouvées dans cette Théorie (51), et soient $\overline{x}+\xi$, $\overline{y}+\psi$, $\overline{x}'+\xi'$, $\overline{y}'+\psi'$, ... les valeurs de x, y, x', y', ... dans les équations ci-dessus, en ayant égard à leurs seconds membres; il est clair qu'en y substituant ces valeurs, les termes en $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x}'$, $\overline{y}'$, ... s'en iront d'eux-mêmes, et que les transformées ne seront autre chose que les mêmes équations, en y changeant x, y, x', y', ... en ξ, ψ, ξ', ψ', ...; et comme les valeurs de $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x}'$, $\overline{y}'$, ... contiennent déjà toutes les constantes arbitraires nécessaires pour l'intégration complète, il suffira que celles de ξ, ψ, ξ', ψ', ... satisfassent aux équations d'une manière quelconque.

Or les quantités qui forment les seconds membres des équations dont il s'agit étant dues aux forces perturbatrices, on peut supposer que les

valeurs des variables ξ, ψ, ξ', ψ', ... soient très-petites du même ordre, et, dans cette supposition, les termes qui renferment ces mêmes variables sous une forme finie deviendront très-petits de l'ordre des carrés de ces forces, puisque les coefficients (0, 1), [0, 1], (1, 0), [1, 0], ... sont eux-mêmes très-petits de l'ordre des mêmes forces. Ainsi, comme nous négligeons dans les recherches présentes les carrés des forces perturbatrices, et toutes les quantités du même ordre, les équations en ξ, ψ, se réduiront simplement à

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{(X)}{\bar{r}^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{(Y)}{\bar{r}^{\frac{3}{2}}},$$

d'où l'on tire, en remettant $d\bar{p}$ pour $\frac{dt}{\bar{r}^{\frac{3}{2}}}$,

$$\xi = \int (X)\, d\bar{p}, \quad \psi = \int (Y)\, d\bar{p}.$$

Et il en sera de même pour ξ', ψ', ...

14. Si dans les expressions de X, Y du n° 11 on fait d'abord abstraction des excentricités, et que par conséquent on y néglige les termes multipliés par x, y, x', y', ..., elles se réduisent aux quantités $2\bar{r}\frac{d\Omega}{d\bar{p}}$, $\bar{r}^2\frac{d\Omega}{d\bar{r}}$; et comme par la substitution de la valeur de Ω en série il ne vient aucun terme proportionnel à $\sin\bar{p}$ et $\cos\bar{p}$, on aura simplement, dans ce cas,

$$(X) = X\sin\bar{p} - Y\cos\bar{p}, \quad (Y) = X\cos\bar{p} + Y\sin\bar{p}.$$

L'intégration de $(X)\,d\bar{p}$ et $(Y)\,d\bar{p}$ ne présente aucune difficulté, puisqu'on a (6)

$$d\bar{p} - d\bar{p}' = n'\,d\bar{p}, \quad d\bar{p} - d\bar{p}'' = n''\,d\bar{p}, \dots;$$

mais on peut la simplifier beaucoup en remarquant, en général, que si $M\sin\Pi$ est un terme quelconque de X, et $N\cos\Pi$ le terme correspondant de Y, Π étant un angle tel que

$$d\Pi = \mu\, d\bar{p},$$

ces termes donneront dans l'intégrale de $(X)d\bar{p}$ deux termes de la forme

$$P\cos\Pi\sin\bar{p} - Q\sin\Pi\cos\bar{p},$$

et dans l'intégrale de $(Y)d\bar{p}$ les termes correspondants

$$P\cos\Pi\cos\bar{p} + Q\sin\Pi\sin\bar{p}.$$

En effet, en différentiant et comparant les termes analogues, on parvient aux équations

$$P - \mu Q = -N, \quad -\mu P + Q = M,$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{\mu M - N}{1-\mu^2}, \quad Q = \frac{M - \mu N}{1-\mu^2}.$$

Or dans le cas présent on a

$$\begin{aligned}
X &= 2\bar{r}\frac{d\Omega}{d\bar{p}} \\
&= 2T'\bar{r}\left[\left([\bar{r},\bar{r}']_1 - \frac{\bar{r}}{\bar{r}'^2}\right)\sin(\bar{p}-\bar{p}') + 2[\bar{r},\bar{r}']_2\sin 2(\bar{p}-\bar{p}') + \ldots\right] \\
&+ 2T''\bar{r}\left[\left([\bar{r},\bar{r}'']_1 - \frac{\bar{r}}{\bar{r}''^2}\right)\sin(\bar{p}-\bar{p}'') + 2[\bar{r},\bar{r}'']_2\sin 2(\bar{p}-\bar{p}'') + \ldots\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y &= \bar{r}^2\frac{d\Omega}{d\bar{r}} \\
&= -T'\bar{r}^2\left[\frac{d[\bar{r},\bar{r}']}{d\bar{r}} + \left(\frac{d[\bar{r},\bar{r}']_1}{d\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}'^2}\right)\cos(\bar{p}-\bar{p}') + \frac{d[\bar{r},\bar{r}']_2}{d\bar{r}}\cos 2(\bar{p}-\bar{p}') + \ldots\right] \\
&- T''\bar{r}^2\left[\frac{d[\bar{r},\bar{r}'']}{d\bar{r}} + \left(\frac{d[\bar{r},\bar{r}'']_1}{d\bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}''^2}\right)\cos(\bar{p}-\bar{p}'') + \frac{d[\bar{r},\bar{r}'']_2}{d\bar{r}}\cos 2(\bar{p}-\bar{p}'') + \ldots\right] \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.
\end{aligned}$$

Si donc on fait successivement

$$\mu = 0,\ n',\ 2n',\ldots,\ n'',\ 2n'',\ldots,$$

et qu'on prenne pour M et N les coefficients respectifs des sinus et cosinus dans les séries précédentes, on aura pour

$$\int (X)d\bar{p} \quad \text{et} \quad \int (Y)d\bar{p},$$

c'est-à-dire pour ξ et ψ, des expressions de cette forme

$$\xi = \Xi\sin\bar{p} - \Psi\cos\bar{p}, \quad \psi = \Xi\cos\bar{p} + \Psi\sin\bar{p},$$

dans lesquelles

$$\begin{aligned}
\Xi &= T'\left[[\bar{r},\bar{r}'] + [[\bar{r},\bar{r}']_1\cos(\bar{p}-\bar{p}') + [[\bar{r},\bar{r}']_2\cos 2(\bar{p}-\bar{p}') + \ldots\right] \\
&+ T''\left[[[\bar{r},\bar{r}'']] + [[\bar{r},\bar{r}'']_1\cos(\bar{p}-\bar{p}'') + [[\bar{r},\bar{r}'']_2\cos 2(\bar{p}-\bar{p}'') + \ldots\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Psi &= T'\left[[\bar{r},\bar{r}']_1\sin(\bar{p}-\bar{p}') + [\bar{r},\bar{r}']_2\sin 2(\bar{p}-\bar{p}') + \ldots\right] \\
&+ T''\left[[\bar{r},\bar{r}'']_1\sin(\bar{p}-\bar{p}'') + [\bar{r},\bar{r}'']_2\sin 2(\bar{p}-\bar{p}'') + \ldots\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

en supposant

$$\begin{aligned}
[[\bar{r},\bar{r}'] &= \bar{r}^2\frac{d[\bar{r},\bar{r}']}{d\bar{r}}, \\
[[\bar{r},\bar{r}']_1 &= \frac{\bar{r}^2\dfrac{d[\bar{r},\bar{r}']_1}{d\bar{r}} + 2n'\bar{r}[\bar{r},\bar{r}']_1 - \dfrac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}(1+2n')}{1-n'^2}, \\
[[\bar{r},\bar{r}']_2 &= \frac{\bar{r}^2\dfrac{d[\bar{r},\bar{r}']_2}{d\bar{r}} + 2.4n'\bar{r}[\bar{r},\bar{r}']_2}{1-4n'^2}, \\
[[\bar{r},\bar{r}']_3 &= \frac{\bar{r}^2\dfrac{d[\bar{r},\bar{r}']_3}{d\bar{r}} + 2.9n'\bar{r}[\bar{r},\bar{r}']_3}{1-9n'^2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
[\bar{r},\bar{r}']_1 &= \frac{n'\bar{r}^2\dfrac{d[\bar{r},\bar{r}']_1}{d\bar{r}} + 2\bar{r}[\bar{r},\bar{r}']_1 - \dfrac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}(n'+2)}{1-n'^2}, \\
[\bar{r},\bar{r}']_2 &= 2\frac{n'\bar{r}^2\dfrac{d[\bar{r},\bar{r}']_2}{d\bar{r}} + 2\bar{r}[\bar{r},\bar{r}']_2}{1-4n'^2}, \\
[\bar{r},\bar{r}']_3 &= 3\frac{n'\bar{r}^2\dfrac{d[\bar{r},\bar{r}']_3}{d\bar{r}} + 2\bar{r}[\bar{r},\bar{r}']_3}{1-9n'^2}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

et ainsi des autres fonctions semblables.

On pourra avec la même facilité tenir compte des termes multipliés par les variables x, y, x', y',... dans les expressions de X et Y; pour cela on y changera d'abord ces variables en $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x}'$, $\bar{y}'$,..., et l'on y substituera leurs valeurs trouvées dans la Théorie des variations séculaires; on n'aura ainsi à intégrer que des termes en sinus et cosinus, et l'on pourra même simplifier beaucoup le calcul par des remarques semblables à celles que nous avons faites (**7**).

15. Il ne reste plus qu'à déterminer les inégalités des nœuds et des inclinaisons, lesquelles dépendent des équations différentielles du n° 39 de la Théorie citée; mais nous réduirons auparavant ces mêmes équations à une forme plus simple et plus générale à quelques égards.

En supposant, comme nous l'avons fait,

$$s=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}=\vartheta\sin\omega,\quad u=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}=\vartheta\cos\omega,$$

où ϑ représente la tangente de l'inclinaison et ω la longitude du nœud ascendant comptée depuis un point fixe, on a

$$ds=\frac{d\mathrm{P}}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{P}\,d\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2},\quad du=\frac{d\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{Q}\,d\mathrm{R}}{\mathrm{R}^2}.$$

Or

$$d\mathrm{P}=\mathrm{T}'\left(\frac{1}{\rho'^3}-\frac{1}{\sigma'^3}\right)(y'z-yz')\,dt+\mathrm{T}''\left(\frac{1}{\rho''^3}-\frac{1}{\sigma''^3}\right)(y''z-yz'')\,dt+\ldots,$$

$$d\mathrm{Q}=\mathrm{T}'\left(\frac{1}{\rho'^3}-\frac{1}{\sigma'^3}\right)(x'z-xz')\,dt+\mathrm{T}''\left(\frac{1}{\rho''^3}-\frac{1}{\sigma''^3}\right)(x''z-xz'')\,dt+\ldots,$$

$$d\mathrm{R}=\mathrm{T}'\left(\frac{1}{\rho'^3}-\frac{1}{\sigma'^3}\right)(x'y-xy')\,dt+\mathrm{T}''\left(\frac{1}{\rho''^3}-\frac{1}{\sigma''^3}\right)(x''y-xy'')\,dt+\ldots;$$

mais

$$z=\frac{\mathrm{Q}y-\mathrm{P}x}{\mathrm{R}},\quad z'=\frac{\mathrm{Q}'y'-\mathrm{P}'x'}{\mathrm{R}'},\ldots,$$

donc

$$y'z-yz'=\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{R}'}\right)yy'-\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}xy'+\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{R}'}x'y,$$

$$x'z-xz'=-\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{R}'}\right)xx'+\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}x'y-\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{R}'}xy';$$

faisant ces substitutions dans les valeurs de ds et de du, et supposant, pour abréger,

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}&=\mathrm{T}'\left(\frac{1}{\rho'^3}-\frac{1}{\sigma'^3}\right)[(u-u')y'-(s-s')x']\\&\quad+\mathrm{T}''\left(\frac{1}{\rho''^3}-\frac{1}{\sigma''^3}\right)[(u-u'')y''-(s-s'')x'']\\&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

on aura

$$ds=\mathrm{Z}y\frac{dt}{\mathrm{R}},\quad du=\mathrm{Z}x\frac{dt}{\mathrm{R}};$$

et il n'y aura plus qu'à mettre pour x, y, x', y',... leurs valeurs

$$r\cos q,\quad r\sin q,\quad r'\cos q',\quad r'\sin q',\ldots,$$

et pour

$$\frac{1}{\rho'^3}-\frac{1}{\sigma'^3},\quad \frac{1}{\rho''^3}-\frac{1}{\sigma''^3},\ldots$$

les expressions en séries données dans le numéro cité, ensuite substituer partout les valeurs de r, q, r', q',... en $\bar{p}$, $\bar{p}'$,....

En négligeant les quantités du second ordre (s, u, s', u',... étant regardées comme du premier, ainsi que x, y, x', y',...), il suffira de changer r en $\bar{r}$, q en $\bar{p}$ et R en $\sqrt{\bar{r}}$; ainsi, à cause de

$$d\bar{p}=\frac{dt}{\bar{r}^{\frac{3}{2}}},$$

on aura alors simplement

$$ds=\bar{r}^3\mathrm{Z}\sin\bar{p}\,d\bar{p},\quad du=\bar{r}^3\mathrm{Z}\cos\bar{p}\,d\bar{p},$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}&=\mathrm{T}'\bar{r}'[(u-u')\sin\bar{p}'-(s-s')\cos\bar{p}']\\&\quad\times\left[\frac{1}{\bar{r}'^3}-(\bar{r},\bar{r}')-(\bar{r},\bar{r}')_1\cos(\bar{p}-\bar{p}')-(\bar{r},\bar{r}')_2\cos2(\bar{p}-\bar{p}')-\ldots\right]\\&\quad+\mathrm{T}''\bar{r}''[(u-u'')\sin\bar{p}''-(s-s'')\cos\bar{p}'']\\&\quad\times\left[\frac{1}{\bar{r}''^3}-(\bar{r},\bar{r}'')-(\bar{r},\bar{r}'')_1\cos(\bar{p}-\bar{p}'')-(\bar{r},\bar{r}'')_2\cos2(\bar{p}-\bar{p}'')-\ldots\right]\\&\quad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

les quantités $(\bar{r},\bar{r}')$, $(\bar{r},\bar{r}')_1$, $(\bar{r},\bar{r}')_2$,... étant les coefficients de la série

qui représente le radical $[\bar{r}^2 - 2\bar{r}\bar{r}'\cos(\bar{p}-\bar{p}') + \bar{r}'^2]^{-\frac{3}{2}}$, et ainsi des autres fonctions semblables.

16. Si dans cette expression de Z on développe les produits des sinus et cosinus, il viendra des termes proportionnels à $\sin\bar{p}$ et $\cos\bar{p}$, lesquels donneront par conséquent, dans les valeurs de ds et du, des termes exempts de sinus et cosinus. Ce seront les mêmes que nous avons trouvés dans l'endroit cité de la *Théorie des variations séculaires*, et qui nous ont donné les équations pour les variations séculaires de s et u; et comme l'analyse précédente est indépendante de la condition $d\mathrm{R} = 0$, que nous avions employée dans le même endroit, il s'ensuit que les équations dont il s'agit auraient également lieu quand même le grand axe de l'orbite serait aussi sujet à des variations séculaires; qu'ainsi notre Théorie des nœuds et des inclinaisons des orbites planétaires subsiste indépendamment de l'inaltérabilité des distances moyennes.

A l'égard des autres termes, ils ne pourront donner que des sinus et cosinus dans les valeurs de ds et du; nous les avons négligés dans les équations du n° 40 de la Théorie citée, parce qu'il n'était question alors que des variations séculaires; mais, pour avoir maintenant les valeurs complètes de ds et du, il faudra ajouter ces termes aux équations dont il s'agit.

Désignons par (S) la totalité des termes en sinus et cosinus de la valeur de $\bar{r}^2\mathrm{Z}\sin\bar{p}$, et par (U) la totalité des termes pareils dans la valeur de $\bar{r}^2\mathrm{Z}\cos\bar{p}$; il faudra donc ajouter respectivement aux valeurs de $\frac{ds}{dt}$, $\frac{du}{dt}$ les quantités $(\mathrm{S})\frac{d\bar{p}}{dt}$, $(\mathrm{U})\frac{d\bar{p}}{dt}$; de sorte que ces quantités formeront les seconds membres des équations du numéro cité, lesquelles deviendront de cette manière

$$\frac{ds}{dt} + (0,1)(u-u') + (0,2)(u-u'') + \ldots = \frac{(\mathrm{S})}{\bar{r}^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{du}{dt} - (0,1)(s-s') - (0,2)(s-s'') - \ldots = \frac{(\mathrm{U})}{\bar{r}^{\frac{5}{2}}},$$

et ainsi des autres équations semblables.

17. On appliquera à ces équations ce que nous avons dit (13) relativement aux équations en x et y, et l'on en conclura que si $\bar{s}$, $\bar{u}$, $\bar{s}'$, $\bar{u}'$,... désignent les valeurs de s, u, s', u',... déterminées dans la *Théorie des variations séculaires*, et qu'on suppose

$$s = \bar{s} + \sigma, \quad u = \bar{u} + \upsilon, \quad s' = \bar{s}' + \sigma', \quad u' = \bar{u}' + \upsilon', \ldots,$$

on aura avec assez d'exactitude

$$\sigma = \int(\mathrm{S})\,d\bar{p}, \quad \upsilon = \int(\mathrm{U})\,d\bar{p},$$

et ainsi de σ', υ',....

Au reste, comme la quantité Z du n° 15 ne contient que des termes déjà multipliés par s, u, s', u',..., il s'ensuit qu'en faisant abstraction, dans l'effet des forces perturbatrices, des inclinaisons des orbites, les quantités dont il s'agit seront nulles; par conséquent on aura aussi dans cette hypothèse (S) et (U) nuls, et de là

$$\sigma = 0, \quad \upsilon = 0,$$

et de même

$$\sigma' = 0, \quad \upsilon' = 0, \ldots.$$

Lorsqu'on voudra pousser l'exactitude plus loin, ce qui cependant ne paraît guère nécessaire dans la Théorie du système planétaire, il n'y aura qu'à substituer dans Z pour s, u, s', u',... les valeurs déjà connues $\bar{s}$, $\bar{u}$, $\bar{s}'$, $\bar{u}'$,..., et intégrer les différents termes qui en proviendront, suivant les méthodes ordinaires. Sur quoi voyez ce que nous avons dit (7).

18. La pratique ordinaire des Astronomes dans le calcul des Planètes est de chercher d'abord le lieu dans l'orbite, et de le réduire ensuite à l'écliptique. Ce lieu dépend de la longitude moyenne $p + \Sigma$ et des éléments de l'orbite, c'est-à-dire du demi-grand axe r, de l'excentricité λ et de la longitude de l'aphélie; or, quoique dans les orbites peu inclinées, comme celles des Planètes, la longitude de l'aphélie dans l'orbite soit presque la même que sa longitude dans l'écliptique, que nous avons désignée par φ, si l'on voulait néanmoins la déterminer rigoureusement

par nos formules, il faudrait faire attention que, ω étant la longitude du nœud dans le plan de projection, sa longitude doit être exprimée par $\int \cos i \, d\omega$, i étant l'angle d'inclinaison; car il est évident que, tandis que le nœud avance de l'angle $d\omega$ dans le plan de projection, il n'avance dans le plan de l'orbite que de l'angle $\cos i \, d\omega$, qui est le côté adjacent à l'angle i dans le triangle rectangle dont $d\omega$ est l'hypoténuse.

Ainsi, nommant Ω la longitude $\int \cos i \, d\omega$ du nœud dans l'orbite, Φ la longitude de l'aphélie dans la même orbite, et η la latitude de cet aphélie comme dans le n° 9 de la *Théorie des variations séculaires*, et considérant le triangle sphérique rectangle dont $\Phi - \Omega$ est l'hypoténuse, $\varphi - \omega$, η les deux côtés, et i l'angle opposé au côté η, on aura par les formules connues

$$\sin(\Phi - \Omega) = \frac{\sin\eta}{\sin i}, \quad \cos(\Phi - \Omega) = \cos(\varphi - \omega)\cos\eta;$$

faisant les substitutions du numéro cité, on aura

$$\lambda \sin(\Phi - \Omega) = \frac{L}{\sin i}, \quad \lambda\cos(\Phi - \Omega) = M\sin\omega + N\cos\omega.$$

Or

$$L = (M\cos\omega - N\sin\omega)\tang i;$$

donc, puisque

$$\frac{1}{\sin i} = \frac{1}{\tang i} + \tang\frac{i}{2},$$

la première équation deviendra

$$\lambda\sin(\Phi - \Omega) = M\cos\omega - N\sin\omega + L\tang\frac{i}{2},$$

laquelle, étant combinée avec la seconde, donnera

$$\lambda\sin\Phi = M\cos(\omega - \Omega) - N\sin(\omega - \Omega) + L\tang\frac{i}{2}\cos\Omega,$$

$$\lambda\cos\Phi = M\sin(\omega - \Omega) + N\cos(\omega - \Omega) - L\tang\frac{i}{2}\sin\Omega.$$

En ajoutant ensemble les carrés de ces équations, on aura

$$\lambda^2 = M^2 + N^2 + L^2,$$

comme cela doit être d'après nos formules primitives, et en les divisant l'une par l'autre on aura la valeur de $\tang\Phi$ en quantités toutes connues, puisque les angles ω et i sont donnés par les formules

$$s = \tang i\sin\omega, \quad u = \tang i\cos\omega.$$

Si l'on voulait au contraire déterminer les valeurs de N, M, L en λ, Φ, Ω, ω, i, ce qui pourrait être utile dans quelques occasions, on trouverait par les formules précédentes

$$N = \lambda[\cos(\Phi - \Omega)\cos\omega - \sin(\Phi - \Omega)\sin\omega\cos i],$$
$$M = \lambda[\cos(\Phi - \Omega)\sin\omega + \sin(\Phi - \Omega)\cos\omega\cos i],$$
$$L = \lambda\sin(\Phi - \Omega)\sin i.$$

19. Comme l'objet final des observations et des calculs astronomiques relativement aux Planètes se réduit toujours à la détermination de leurs lieux rapportés à l'écliptique, et que cette détermination ne dépend que de trois éléments, de la distance accourcie ou rayon vecteur de l'orbite projetée, de la longitude vraie ou angle de ce rayon avec une ligne fixe, et de la latitude ou angle du rayon vecteur de l'orbite vraie avec celui de l'orbite projetée, il suffira de connaître les altérations que ces éléments doivent subir par l'effet des variations périodiques que nous avons déterminées.

Cet effet consiste à changer les éléments de l'orbite

$$\bar{r}, \quad \bar{x}, \quad \bar{y}, \quad \bar{s}, \quad \bar{u}$$

en

$$\bar{r} + \rho, \quad \bar{x} + \xi, \quad \bar{y} + \psi, \quad \bar{s} + \sigma, \quad \bar{u} + \upsilon,$$

et la longitude moyenne $\bar{p}$ en $\bar{p} + \varpi$; ainsi il n'y aura qu'à faire ces changements dans les expressions connues de la longitude vraie, du rayon vecteur et de la latitude, calculées pour une ellipse invariable. Par conséquent, si q est la longitude vraie, r le rayon vecteur, l la tangente de

la latitude, ces quantités étant exprimées par l'angle $\bar{p}$ du mouvement moyen, et par les éléments $\bar{r}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{s}$, $\bar{u}$ supposés constants, on aura, en négligeant les carrés des corrections ρ, ξ, ... dues aux forces perturbatrices,

Correction de la longitude

$$\frac{dq}{d\bar{p}}\varpi + \frac{dq}{d\bar{x}}\xi + \frac{dq}{d\bar{y}}\psi + \frac{dq}{d\bar{s}}\sigma + \frac{dq}{d\bar{u}}\upsilon,$$

Correction du rayon vecteur

$$\frac{dr}{d\bar{p}}\varpi + \frac{dr}{d\bar{x}}\xi + \frac{dr}{d\bar{y}}\psi + \frac{dr}{d\bar{s}}\sigma + \frac{dr}{d\bar{u}}\upsilon + \frac{dr}{d\bar{r}}\rho,$$

Correction de la tangente de latitude

$$\frac{dl}{d\bar{p}}\varpi + \frac{dl}{d\bar{x}}\xi + \frac{dl}{d\bar{y}}\psi + \frac{dl}{d\bar{s}}\sigma + \frac{dl}{d\bar{u}}\upsilon.$$

20. Les expressions de q, r, l en $\bar{p}$, $\bar{r}$, $\bar{x}$,... peuvent se déduire immédiatement des formules de la Théorie citée (29 et suivants). Car, en n'ayant égard qu'aux quantités très-petites du premier et du second ordre, ce qui suffit dans la recherche présente, on aura

$$q = P + (B)\cos\bar{p} - (C)\sin\bar{p} + (D)\cos 2\bar{p} - (E)\sin 2\bar{p},$$

où

$$(B) = \beta - \tfrac{1}{4}\beta\varepsilon + \tfrac{1}{4}\gamma\delta,$$

$$(C) = \gamma + \tfrac{1}{4}\beta\delta + \tfrac{1}{4}\gamma\varepsilon,$$

$$(D) = \tfrac{1}{2}\delta - \beta\gamma,$$

$$(E) = \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{2}{1}\beta^2 - \tfrac{1}{2}\gamma^2;$$

de sorte qu'en faisant les substitutions du n° 2, et changeant M, N, $\frac{P}{R}$, $\frac{Q}{R}$ en $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{s}$, $\bar{u}$, on aura

$$q = \bar{p} + 2\bar{x}\cos\bar{p} - 2\bar{y}\sin\bar{p} - \frac{5\bar{x}\bar{y} - \bar{s}\bar{u}}{2}\cos 2\bar{p} - \frac{5(\bar{x}^2 - \bar{y}^2) + \bar{u}^2 - \bar{s}^2}{4}\sin 2\bar{p}.$$

Pour le rayon vecteur r de l'orbite projetée, on aura d'abord cette série en q

$$\bar{r}\left[1 + \bar{x}\sin q + \bar{y}\cos q - \left(\frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{2} + \frac{\bar{s}^2 - \bar{u}^2}{4}\right)\cos 2q + \left(\bar{x}\bar{y} + \frac{\bar{s}\bar{u}}{2}\right)\sin 2q - \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2} - \frac{\bar{s}^2 + \bar{u}^2}{4}\right],$$

laquelle par la substitution de la valeur précédente de q en p donnera

$$r = \bar{r}\left[1 + \bar{x}\sin\bar{p} + \bar{y}\cos\bar{p} + \left(\frac{\bar{x}^2 - \bar{y}^2}{2} - \frac{\bar{s}^2 - \bar{u}^2}{4}\right)\cos 2\bar{p} - \left(\bar{x}\bar{y} - \frac{\bar{s}\bar{u}}{2}\right)\sin 2\bar{p} + \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2} - \frac{\bar{s}^2 + \bar{u}^2}{4}\right].$$

Enfin, pour la tangente de la latitude, on a l'expression

$$\frac{z}{r} = \bar{u}\sin q - \bar{s}\cos q;$$

de sorte qu'en substituant aussi la valeur de q en $\bar{p}$, on aura

$$l = \bar{u}\sin\bar{p} - \bar{s}\cos\bar{p} + (\bar{x}\bar{u} - \bar{y}\bar{s})\cos 2\bar{p} + (\bar{x}\bar{s} - \bar{y}\bar{u})\sin 2\bar{p} + \bar{x}\bar{u} - \bar{y}\bar{s}.$$

Ainsi l'on trouvera par des différentiations partielles les valeurs des quantités d'où dépendent les corrections cherchées.

21. Si dans ces corrections on néglige d'abord les excentricités et les inclinaisons des orbites, on aura simplement par les formules précédentes

$$\frac{dq}{d\bar{p}} = 1, \quad \frac{dq}{d\bar{x}} = 2\cos\bar{p}, \quad \frac{dq}{d\bar{y}} = -2\sin\bar{p},$$

$$\frac{dr}{d\bar{r}} = 1, \quad \frac{dr}{d\bar{x}} = \bar{r}\sin\bar{p}, \quad \frac{dr}{d\bar{y}} = \bar{r}\cos\bar{p},$$

$$\frac{dl}{d\bar{s}} = -\cos\bar{p}, \quad \frac{dl}{d\bar{u}} = \sin\bar{p},$$

et toutes les autres différences partielles seront nulles.

Donc :

1° La correction de la longitude deviendra

$$\varpi + 2\xi\cos\bar{p} - 2\psi\sin\bar{p},$$

et, mettant pour ξ et ψ les valeurs trouvées dans le n° 14, elle se réduira à $\varpi - 2\Psi$;

2° La correction de la latitude sera nulle, puisque les quantités σ et υ deviennent nulles dans le cas dont il s'agit (17);

3° La correction du rayon vecteur sera

$$\rho + \bar{r}(\xi\sin\bar{p} + \psi\cos\bar{p}),$$

laquelle par la substitution des valeurs de ξ et ψ se réduit à $\rho + \bar{r}\Xi$.

Les valeurs de ρ, ϖ, Ψ, Ξ ont été données dans les n^{os} 10, 14; en les réunissant, on aura ces formules très-simples

Correction de la longitude

$$-T'\left[\frac{2}{n'}\bar{r}^2\frac{d[\bar{r},\bar{r}']_1}{d\bar{r}} + \left(1+\frac{3}{n'^2}\right)\bar{r}[\bar{r},\bar{r}']_1 - \left(1+\frac{2}{n'}+\frac{3}{n'^2}\right)\frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}\right]\frac{\sin(\bar{p}-\bar{p}')}{1-n'^2}$$

$$-T'\left[\frac{2}{2n'}\bar{r}^2\frac{d[\bar{r},\bar{r}']_2}{d\bar{r}} + \left(2+\frac{3}{2n'^2}\right)\bar{r}[\bar{r},\bar{r}']_2\right]\frac{\sin 2(\bar{p}-\bar{p}')}{1-4n'^2}$$

$$-T'\left[\frac{2}{3n'}\bar{r}^2\frac{d[\bar{r},\bar{r}']_3}{d\bar{r}} + \left(3+\frac{3}{3n'^2}\right)\bar{r}[\bar{r},\bar{r}']_3\right]\frac{\sin 3(\bar{p}-\bar{p}')}{1-9n'^2}$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Correction du rayon vecteur

$$-T'\bar{r}^3\frac{1}{3}\frac{d[\bar{r},\bar{r}']}{d\bar{r}} + T'\left[\bar{r}^3\frac{d[\bar{r},\bar{r}']_1}{d\bar{r}} + \frac{2}{n'}\bar{r}^2[\bar{r},\bar{r}']_1 - \left(1+\frac{2}{n'}\right)\frac{\bar{r}^3}{\bar{r}'^2}\right]\frac{\cos(\bar{p}-\bar{p}')}{1-n'^2}$$

$$+T'\left(\bar{r}^3\frac{d[\bar{r},\bar{r}']_2}{d\bar{r}} + \frac{2}{n'}\bar{r}^2[\bar{r},\bar{r}']_2\right)\frac{\cos 2(\bar{p}-\bar{p}')}{1-4n'^2}$$

$$+T'\left(\bar{r}^3\frac{d[\bar{r},\bar{r}']_3}{d\bar{r}} + \frac{2}{n'}\bar{r}^2[\bar{r},\bar{r}']_3\right)\frac{\cos 3(\bar{p}-\bar{p}')}{1-9n'^2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces formules représentent les inégalités périodiques d'une Planète

quelconque T troublée par une autre Planète T', la masse du Soleil étant prise pour l'unité; chaque Planète perturbatrice en donnera de pareilles, et leur somme exprimera l'effet total des perturbations, en tant qu'on fait abstraction des excentricités et des inclinaisons des orbites; ce qui suffit dans la plupart des cas. Le calcul ne sera pas plus difficile, mais seulement un peu plus long, lorsqu'on voudra tenir compte aussi des termes dus aux excentricités et aux inclinaisons.

Quant à l'application de ces formules aux Planètes, elle n'aura d'autre difficulté que celle qui consiste dans l'évaluation des fonctions $[\bar{r},\bar{r}']$, $[\bar{r},\bar{r}']_1,\ldots$ et de leurs différences; et nous avons aussi déjà donné tous les secours nécessaires pour ce calcul dans la *Théorie des variations séculaires*, à laquelle nous renvoyons.

SUR

LES VARIATIONS SÉCULAIRES

DES

MOUVEMENTS MOYENS DES PLANÈTES.

SUR

LES VARIATIONS SÉCULAIRES

DES

MOUVEMENTS MOYENS DES PLANÈTES.

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1783.)

Les observations ont fait apercevoir des variations dans les révolutions de Jupiter et de Saturne, mais on n'a pu encore les expliquer par la Théorie de la gravitation. M. de Laplace, ayant calculé en détail les termes proportionnels au carré du temps que les forces perturbatrices d'une Planète peuvent introduire dans l'expression de sa longitude, trouva que ces termes se détruisaient mutuellement, du moins dans la première approximation. Ce résultat m'a donné occasion de chercher rigoureusement, et par une méthode directe, la loi des variations du grand axe de l'orbite d'une Planète troublée par l'action de plusieurs autres; et j'ai démontré que ces variations ne pouvaient être que périodiques, et relatives aux configurations des Planètes entre elles; d'où il s'ensuit que le mouvement moyen d'une Planète ne peut être sujet à aucune variation séculaire, en tant que cette variation dépendrait du grand axe de son orbite; mais comme les autres éléments, l'excentricité, l'inclinaison, les lieux de l'aphélie et du nœud sont au contraire sujets à des variations séculaires, celles-ci ne pourraient-elles pas influer dans le mouvement moyen et y produire aussi des variations du même genre?

Dans la Théorie que je viens de donner sur les variations périodiques, j'ai fait voir que l'effet des variations des éléments de l'orbite sur le mouvement moyen n'est que périodique tant qu'on n'a égard qu'aux premières dimensions des excentricités et des inclinaisons; et j'ai avancé en même temps, qu'en portant la précision jusqu'aux secondes dimensions de ces quantités, on trouverait des termes qui donneraient des équations séculaires dans le mouvement moyen. Il ne s'agit donc, pour décider la question des variations séculaires des mouvements moyens des Planètes, que d'exécuter l'analyse que nous avons indiquée et d'en appliquer ensuite les résultats à chaque Planète; c'est l'objet du présent Mémoire, qui doit être regardé comme un supplément à la *Théorie générale des variations séculaires*.

SECTION PREMIÈRE.

FORMULES GÉNÉRALES POUR LA VARIATION SÉCULAIRE DU MOUVEMENT MOYEN.

1. L'analyse donnée dans la première Partie de la *Théorie des variations séculaires* fait voir :

1° Que l'expression du rayon vecteur, par la longitude vraie ou angle décrit par ce rayon sur un plan fixe, est la même, soit que les éléments de l'orbite soient constants ou variables; et qu'il en est de même pour l'expression différentielle de ce rayon;

2° Que la même chose a lieu pour l'expression de la latitude par la longitude, ainsi que pour la différentielle de cette expression;

3° Qu'à l'égard de l'expression de la longitude moyenne par la longitude vraie, il n'y a que sa différentielle qui soit la même pour les éléments constants ou variables; l'expression finie doit être différente à raison de la variabilité des éléments (29 et suivants).

2. L'équation différentielle entre la longitude moyenne p et la longitude vraie q est de la forme

$$dp = f(q)\,dq,$$

$f(q)$ étant une fonction algébrique de sinus et cosinus de q, dans laquelle les éléments de l'orbite entrent comme coefficients. Soit $\mathrm{F}(q)$ l'intégrale de $f(q)\,dq$, en regardant ces éléments comme constants; on aura alors

$$p = \mathrm{F}(q),$$

d'où l'on tire

$$q = \Phi(p);$$

c'est l'expression de la longitude vraie par la moyenne dans les orbites invariables.

Lorsque l'orbite est variable, $\mathrm{F}(q)$ ne sera plus l'intégrale exacte de $f(q)\,dq$; car la différentielle de $\mathrm{F}(q)$ contient, outre la partie $f(q)\,dq$ due à la variabilité de q, encore celle qui vient de la variabilité des éléments; de sorte qu'en dénotant celle-ci par la caractéristique δ, et la différentielle totale par la caractéristique ordinaire d, on aura

$$d\mathrm{F}(q) = f(q)\,dq + \delta\mathrm{F}(q);$$

donc

$$f(q)\,dq = dp = d\mathrm{F}(q) - \delta\mathrm{F}(q),$$

ou

$$dp + \delta\mathrm{F}(q) = d\mathrm{F}(q),$$

et, intégrant,

$$p + \int \delta\mathrm{F}(q) = \mathrm{F}(q),$$

équation d'où l'on tirera ensuite

$$q = \Phi\left[p + \int \delta\mathrm{F}(q)\right].$$

On voit par là que la variabilité des éléments de l'orbite ne fait qu'ajouter à la longitude moyenne p la quantité $\int \delta\mathrm{F}(q)$; c'est celle que nous avons dénotée par Σ dans le Mémoire précédent; en sorte que l'on aura, en général,

$$d\Sigma = \delta\mathrm{F}(q).$$

3. Donc la détermination du lieu d'une Planète dans une orbite variable et troublée par l'action des autres Planètes dépendra des mêmes formules que si les éléments de l'orbite étaient constants, pourvu qu'on y prenne $p + \Sigma$ pour la longitude moyenne.

Or l'angle p dépend du temps et du demi-grand axe de l'ellipse de la même manière que si cet axe était constant, puisqu'on a, en nommant r le demi-grand axe,

$$dp = \frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}};$$

et nous avons vu que la valeur de r ne saurait jamais contenir des inégalités séculaires, de sorte que la valeur de l'angle p n'en saurait contenir non plus; donc, si l'angle $p + \Sigma$, qui doit faire la fonction de longitude moyenne, peut contenir des variations séculaires, elles ne peuvent venir que de la quantité Σ; ainsi tout se réduit à examiner si cette quantité peut contenir de pareilles inégalités.

On suivra pour cela une méthode semblable à celle par laquelle nous avons recherché les inégalités séculaires des éléments de l'orbite; on développera la valeur de la différentielle $d\Sigma$ en séries de sinus et cosinus d'angles multiples des longitudes moyennes, et l'on ne retiendra, après toutes les substitutions et réductions, que les termes qui se trouveront débarrassés de tout sinus et cosinus de ces angles.

4. On commencera donc par chercher la valeur de la fonction $F(q)$; ensuite on la différentiera, en y faisant varier seulement les quantités dépendantes des éléments de l'orbite, et l'on y substituera, à la place des différentielles de ces quantités, leurs valeurs données dans la première Partie de la *Théorie des variations séculaires;* on aura ainsi l'expression générale de $d\Sigma$; et comme nous avons vu dans le Mémoire précédent que les termes qui peuvent donner des variations séculaires dépendent des secondes dimensions des excentricités et des inclinaisons, il faudra, dans le développement de la fonction $F(q)$, pousser la précision jusqu'aux troisièmes dimensions de ces quantités inclusivement; c'est ce qui rend le calcul long et épineux, par l'attention qu'il faut y avoir pour n'omettre

aucun des termes qui peuvent donner des équations séculaires. Pour le simplifier autant qu'il est possible, nous ferons d'abord abstraction de l'inclinaison de l'orbite; nous verrons ensuite comment les formules trouvées pour ce cas s'appliquent, en général, aux orbites dont la position est variable; et nous donnerons même à cette occasion une nouvelle analyse pour la détermination des variations séculaires des éléments de l'orbite.

5. Ayant déjà donné dans le Mémoire précédent (1) l'expression générale de $F(q)$, exacte jusqu'au degré de précision qui est nécessaire dans la recherche présente, nous nous contenterons de l'emprunter, en y effaçant seulement les termes affectés des quantités P et Q, lesquelles deviennent nulles dans l'hypothèse de l'orbite non inclinée.

On aura donc

$$F(q) = q - 2M\cos q + 2N\sin q - \frac{3MN}{2}\cos 2q + \frac{3(N^2 - M^2)}{4}\sin 2q$$
$$- \frac{3MN^2 - M^3}{3}\cos 3q + \frac{N^3 - 3NM^2}{3}\sin 3q,$$

et la différentielle prise en faisant varier M et N et regardant q comme constante sera la valeur de $d\Sigma$.

De sorte qu'on aura

$$d\Sigma = -2(\cos q\, dM - \sin q\, dN) - \frac{3M}{2}(\sin 2q\, dM + \cos 2q\, dN)$$
$$+ \frac{3N}{2}(\cos 2q\, dM - \sin 2q\, dN) - 2MN(\sin 3q\, dM + \cos 3q\, dN)$$
$$+ (M^2 - N^2)(\cos 3q\, dM - \sin 3q\, dN).$$

Les valeurs de dM et dN ont été données dans le n° 41 de la *Théorie des variations séculaires* (*). Dans le cas présent, les termes qui contiennent z doivent disparaître, puisque z est l'ordonnée perpendiculaire au plan de projection; les valeurs dont il s'agit se réduisent alors à la forme de celles du n° 42 de la même *Théorie;* de sorte qu'en prenant ρ pour dénoter le

(*) *Voir* à la page 176 de ce volume.

rayon vecteur à la place de la lettre r que nous conserverons pour exprimer le demi-grand axe, on aura

$$d\mathrm{M} = -\frac{d\Omega}{dq}\cos q\,d\rho + \left(2\rho\frac{d\Omega}{dq}\sin q - \rho^2\frac{d\Omega}{d\rho}\cos q\right)dq,$$

$$d\mathrm{N} = \frac{d\Omega}{dq}\sin q\,d\rho + \left(2\rho\frac{d\Omega}{dq}\cos q + \rho^2\frac{d\Omega}{d\rho}\sin q\right)dq;$$

donc, faisant ces substitutions et réduisant, on aura

$$\begin{aligned} d\Sigma = {} & 2\frac{d\Omega}{dq}\,d\rho + 2\rho^2\frac{d\Omega}{d\rho}\,dq \\ & + \frac{3\mathrm{M}}{2}\left(\frac{d\Omega}{dq}\sin q\,d\rho - 2\rho\frac{d\Omega}{dq}\cos q\,dq + \rho^2\frac{d\Omega}{d\rho}\sin q\,dq\right) \\ & + \frac{3\mathrm{N}}{2}\left(\frac{d\Omega}{dq}\cos q\,d\rho + 2\rho\frac{d\Omega}{dq}\sin q\,dq + \rho^2\frac{d\Omega}{d\rho}\cos q\,dq\right) \\ & + 2\mathrm{MN}\left(\frac{d\Omega}{dq}\sin 2q\,d\rho - 2\rho\frac{d\Omega}{dq}\cos 2q\,dq + \rho^2\frac{d\Omega}{d\rho}\sin 2q\,dq\right) \\ & + (\mathrm{N}^2-\mathrm{M}^2)\left(\frac{d\Omega}{dq}\cos 2q\,d\rho + 2\rho\frac{d\Omega}{dq}\sin 2q\,dq + \rho^2\frac{d\Omega}{d\rho}\cos 2q\,dq\right), \end{aligned}$$

expression qu'on peut mettre sous cette forme

$$d\Sigma = \mathrm{A}\left(\frac{d\Omega}{d\rho}\rho^2\,dq + \frac{d\Omega}{dq}\,d\rho\right) + \mathrm{B}\frac{d\Omega}{dq}\rho\,dq,$$

en faisant

$$\mathrm{A} = 2 + \frac{3\mathrm{M}}{2}\sin q + \frac{3\mathrm{N}}{2}\cos q + 2\mathrm{MN}\sin 2q - (\mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2)\cos 2q,$$

$$\mathrm{B} = 3\mathrm{N}\sin q - 3\mathrm{M}\cos q - 2(\mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2)\sin 2q - 4\mathrm{MN}\cos 2q.$$

6. Il faut maintenant substituer dans cette formule les valeurs de ρ et q exprimées par la distance moyenne r et par le mouvement moyen p; et comme nous tenons compte des secondes dimensions de M et N, il faudra aussi y avoir égard dans les valeurs dont il s'agit. Or nous pouvons emprunter pour cet objet les expressions données dans le n° 20 du Mémoire précédent, en y changeant x et y en M et N, et y faisant s, u nuls, puisque nous regardons l'inclinaison comme nulle.

Ainsi à la place de q il faudra substituer

$$p + 2\mathrm{M}\cos p - 2\mathrm{N}\sin p - \frac{5\mathrm{MN}}{2}\cos 2p - \frac{5(\mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2)}{4}\sin 2p,$$

et à la place de ρ

$$r\left(1 + \mathrm{M}\sin p + \mathrm{N}\cos p + \frac{\mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2}{2}\cos 2p - \mathrm{MN}\sin 2p + \frac{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}{2}\right).$$

A la vérité il faudrait, d'après ce que nous avons dit au commencement de ce Mémoire, mettre dans ces expressions $p + \Sigma$ à la place de p; mais : 1° on peut retenir pour plus de simplicité la seule lettre p, en se souvenant qu'à la rigueur elle doit être augmentée de Σ; 2° comme nous ne cherchons pas la valeur entière de $d\Sigma$, mais seulement les termes de cette valeur qui doivent être indépendants de tout sinus et cosinus de p, il est indifférent pour le résultat du calcul de mettre $p + \Sigma$ à la place de p ou non.

Pour avoir les valeurs de dq et dr, on différentiera les expressions précédentes, en n'y faisant varier que p, puisque nous avons vu que les différentielles sont les mêmes que si les éléments étaient constants.

De sorte qu'on aura pour dq

$$\left(1 - 2\mathrm{M}\sin p - 2\mathrm{N}\cos p + 5\mathrm{MN}\sin 2p - \frac{5(\mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2)}{2}\cos 2p\right)dp,$$

et pour $d\rho$

$$r(\mathrm{M}\cos p - \mathrm{N}\sin p - (\mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2)\sin 2p - 2\mathrm{MN}\cos 2p)\,dp.$$

Faisant donc ces substitutions dans les valeurs de A et B du numéro précédent, elles deviendront, aux troisièmes dimensions près de M et N,

$$\mathrm{A} = 2 + \frac{3\mathrm{M}}{2}\sin p + \frac{3\mathrm{N}}{2}\cos p - \mathrm{MN}\sin 2p + \frac{\mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2}{2}\cos 2p + \frac{3(\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2)}{2},$$

$$\mathrm{B} = 3\mathrm{N}\sin p - 3\mathrm{M}\cos p + (\mathrm{M}^2-\mathrm{N}^2)\sin 2p + 2\mathrm{MN}\cos 2p.$$

Ensuite on aura pour $\rho\,dq$ l'expression

$$r\left[1-M\sin p-N\cos p+2MN\sin 2p-(M^2-N^2)\cos 2p-\frac{M^2+N^2}{2}\right],$$

et pour $\rho^2\,dq$ celle-ci

$$r^2\left(1-\frac{M^2+N^2}{2}\right)dp.$$

De sorte que la quantité $A\rho^2\,dq$ deviendra, en négligeant toujours les troisièmes dimensions de M et N,

$$r^2\left(2+\frac{3M}{2}\sin p+\frac{3N}{2}\cos p-MN\sin 2p+\frac{M^2-N^2}{2}\cos 2p+\frac{M^2+N^2}{2}\right)dp,$$

la quantité $A\,d\rho$ deviendra

$$r\left[2M\cos p-2N\sin p-\frac{5}{4}(M^2-N^2)\sin 2p-\frac{5}{2}MN\cos 2p\right]dp,$$

et la quantité $B\rho\,dq$ deviendra

$$r\left[3N\sin p-3M\cos p+5MN\cos 2p+\frac{5}{2}(M^2-N^2)\sin 2p\right]dp.$$

Donc enfin, faisant ces substitutions dans l'expression de $d\Sigma$ du numéro précédent, on aura

$$\frac{d\Sigma}{dp}=r^2\frac{d\Omega}{d\rho}\left(2+\frac{3M}{2}\sin p+\frac{3N}{2}\cos p-MN\sin 2p+\frac{M^2-N^2}{2}\cos 2p+\frac{M^2+N^2}{2}\right)$$
$$+r\frac{d\Omega}{dq}\left[N\sin p-M\cos p+\frac{5}{4}(M^2-N^2)\sin 2p+\frac{5}{2}MN\cos 2p\right].$$

7. Il ne reste plus qu'à faire les mêmes substitutions dans la fonction Ω, qui par le n° 5 est (42, Théorie citée)

$$\Omega=T'\left[\frac{\rho\cos(q-q')}{\rho'^2}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2\rho\rho'\cos(q-q')+\rho'^2}}\right]$$
$$+T''\left[\frac{\rho\cos(q-q'')}{\rho''^2}-\frac{1}{\sqrt{\rho^2-2\rho\rho''\cos(q-q'')+\rho''^2}}\right]$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

T', T'',... étant les masses des Planètes perturbatrices exprimées en parties de celle du Soleil, ρ', q', ρ'', q'',... désignant des quantités analogues à ρ, q, pour les Planètes T', T'',....

Comme cette fonction Ω n'entre dans l'expression de $d\Sigma$ que sous la forme linéaire, et qu'elle est composée d'autant de formules semblables qu'il y a de Planètes perturbatrices, il est clair que la valeur totale de $d\Sigma$ pour plusieurs Planètes perturbatrices sera toujours la somme des valeurs particulières et semblables, dues à chacune de ces Planètes; de sorte qu'il suffira de n'avoir égard d'abord qu'à l'action d'une seule Planète.

De plus, si l'on représente par $r(1+\alpha)$ et $p+\beta$ les valeurs de ρ et de q données dans le numéro précédent, les quantités α et β seront de l'ordre de M et N, et comme dans les substitutions dont il s'agit nous n'avons besoin que d'avoir égard aux secondes dimensions de M, N, il est clair que ces substitutions se réduiront à changer d'abord dans Ω, ρ en r, q en p, et à y faire croître ensuite r de $r\alpha$, p de β, en poussant la série jusqu'aux secondes dimensions de α, β.

8. On fera donc simplement

$$\Omega=T'\left[\frac{r\cos(p-p')}{r'^2}-\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos(p-p')+r'^2}}\right],$$

les quantités r, r' étant les demi-axes ou les distances moyennes, et p, p' les angles du mouvement moyen; et l'on aura, pour la fonction Ω dont il s'agit, cette transformée

$$\Omega+r\frac{d\Omega}{dr}\alpha+r'\frac{d\Omega}{dr'}\alpha'+\frac{d\Omega}{dp}\beta+\frac{d\Omega}{dp'}\beta'$$
$$+\frac{r^2}{2}\frac{d^2\Omega}{dr^2}\alpha^2+\frac{r'^2}{2}\frac{d^2\Omega}{dr'^2}\alpha'^2+\frac{1}{2}\frac{d^2\Omega}{dp^2}\beta^2+\frac{1}{2}\frac{d^2\Omega}{dp'^2}\beta'^2$$
$$+rr'\frac{d^2\Omega}{dr\,dr'}\alpha\alpha'+r\frac{d^2\Omega}{dr\,dp}\alpha\beta+r\frac{d^2\Omega}{dr\,dp'}\alpha\beta'$$
$$+r'\frac{d^2\Omega}{dr'\,dp}\alpha'\beta+r'\frac{d^2\Omega}{dr'\,dp'}\alpha'\beta'+\frac{d^2\Omega}{dp\,dp'}\beta\beta'.$$

Pour avoir les transformées de $\frac{d\Omega}{dp}$ et $\frac{d\Omega}{dq}$, il n'y aura qu'à changer, dans la précédente, la quantité Ω en $\frac{d\Omega}{dr}$, $\frac{d\Omega}{dp}$.

Substituant ces valeurs dans la formule du numéro précédent, et négligeant les dimensions de M, N, α, β, α', β' au-dessus du second degré, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d\Sigma}{dp} &= r^2\frac{d\Omega}{dr}\left(2+\frac{3M}{2}\sin p+\frac{3N}{2}\cos p-MN\sin 2p+\frac{M^2-N^2}{2}\cos 2p+\frac{M^2+N^2}{2}\right)\\
&\quad+r^2\left(r\frac{d^2\Omega}{dr^2}\alpha+r'\frac{d^2\Omega}{dr\,dr'}\alpha'+\frac{d^2\Omega}{dr\,dp}\beta+\frac{d^2\Omega}{dr\,dp'}\beta'\right)\left(2+\frac{3M}{2}\sin p+\frac{3N}{2}\cos p\right)\\
&\quad+r^2\left(r\frac{d^3\Omega}{dr^3}\alpha^2+r'^2\frac{d^3\Omega}{dr\,dr'^2}\alpha'^2+\frac{d^3\Omega}{dr\,dp^2}\beta^2+\frac{d^3\Omega}{dr\,dp'^2}\beta'^2\right.\\
&\qquad+2rr'\frac{d^3\Omega}{dr^2\,dr'}\alpha\alpha'+2r\frac{d^3\Omega}{dr^2\,dp}\alpha\beta+2r\frac{d^3\Omega}{dr^2\,dp}\alpha\beta'\\
&\qquad\left.+2r'\frac{d^3\Omega}{dr\,dr'\,dp}\alpha'\beta+2r'\frac{d^3\Omega}{dr\,dr'\,dp'}\alpha'\beta'+2\frac{d^3\Omega}{dr\,dp\,dp'}\beta\beta'\right)\\
&\quad+r\frac{d\Omega}{dp}\left[N\sin p-M\cos p+\frac{5}{4}(M^2-N^2)\sin 2p+\frac{5}{2}MN\cos 2p\right]\\
&\quad+r\left(r\frac{d^2\Omega}{dr\,dp}\alpha+r'\frac{d^2\Omega}{dr'\,dp}\alpha'+\frac{d^2\Omega}{dp^2}\beta+\frac{d^2\Omega}{dp\,dp'}\beta'\right)(N\sin p-M\cos p).\end{aligned}$$

Or on a par le n° 6

$$\alpha=M\sin p+N\cos p+\frac{M^2-N^2}{2}\cos 2p-MN\sin 2p+\frac{M^2+N^2}{2},$$

$$\beta=2(M\cos p-N\sin p)-\frac{5MN}{2}\cos 2p-\frac{5(M^2-N^2)}{4}\sin 2p,$$

et, marquant toutes les lettres d'un trait, on aura la valeur de α', β'.

De plus, si l'on développe la fraction irrationnelle

$$[r^2-2rr'\cos(p-p')+r'^2]^{-\frac{1}{2}}$$

en une série de cosinus de multiples de $p-p'$, et qu'on représente cette

série comme dans le Mémoire précédent par

$$[r,r']+[r,r']_1\cos(p-p')+[r,r']_2\cos 2(p-p')+\ldots,$$

la fonction Ω deviendra

$$-T'\left[[r,r']+\left([r,r']_1-\frac{r}{r'^2}\right)\cos(p-p')+[r,r']_2\cos 2(p-p')+\ldots\right].$$

Ainsi il faudra encore faire ces substitutions dans la valeur précédente de $\frac{d\Sigma}{dp}$; mais comme nous ne cherchons que les termes exempts de sinus et cosinus, nous observerons que les différences de Ω, qui se trouvent dans la valeur dont il s'agit, ne peuvent donner de ces sortes de termes qu'autant que leurs multiplicateurs contiendront des termes de la forme de ceux qui entrent dans les expressions de ces différences.

Par cette considération on pourra donc, en substituant les valeurs de α, β, α', β', réduire d'abord la valeur de $\frac{d\Sigma}{dp}$ à celle-ci

$$\begin{aligned}\frac{d\Sigma}{dp} &= r^2\frac{d\Omega}{dr}\left(2+\frac{M^2+N^2}{2}\right)+r^2\frac{d^2\Omega}{dr^2}(M^2+N^2)\\
&\quad+\left(\frac{3r^2}{2}\frac{d^2\Omega}{dr^2}+r^2\frac{d^3\Omega}{dr^3}\right)(M\sin p+N\cos p)^2\\
&\quad+r^2r'\frac{d^3\Omega}{dr\,dr'}(M'^2+N'^2)+r^2r'^2\frac{d^3\Omega}{dr\,dr'^2}(M'\sin p'+N'\cos p')^2\\
&\quad+\left(\frac{3r^2r'}{2}\frac{d^2\Omega}{dr\,dr'}+2r^2r'\frac{d^3\Omega}{dr^2\,dr'}\right)(M\sin p+N\cos p)(M'\sin p'+N'\cos p')\\
&\quad+\left(3r^2\frac{d^2\Omega}{dr\,dp'}+4r^3\frac{d^3\Omega}{dr^2\,dp'}\right)(M\sin p+N\cos p)(M'\cos p'-N'\sin p')\\
&\quad+\left(4r^2r'\frac{d^3\Omega}{dr\,dr'\,dp}-rr'\frac{d^2\Omega}{dr'\,dp}\right)(M\cos p-N\sin p)(M'\sin p+N'\cos p')\\
&\quad+\left(8r^2\frac{d^2\Omega}{dr\,dp\,dp'}-2r\frac{d^2\Omega}{dp\,dp'}\right)(M\cos p-N\sin p)(M'\cos p'-N'\sin p').\end{aligned}$$

Donc enfin, substituant la valeur ci-dessus de Ω, développant les pro-

duits des sinus et cosinus, et ne retenant que les termes tout constants, on aura

$$\begin{aligned}\frac{d\Sigma}{dp} = -\mathrm{T}'\Bigg\{ & r^2\frac{d[r,r']}{dr}\left(2+\frac{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}{2}\right)+r^3\frac{d^2[r,r']}{dr^2}(\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2)\\ & +\left(\frac{3r^3}{2}\frac{d^2[r,r']}{dr^2}+r^4\frac{d^3[r,r']}{dr^3}\right)\frac{\mathrm{M}^2+\mathrm{N}^2}{2}\\ & +r^3r'\frac{d^3[r,r']}{dr\,dr'}(\mathrm{M}'^2+\mathrm{N}'^2)+r^2r'^2\frac{d^3[r,r']}{dr\,dr'^2}\frac{\mathrm{M}'^2+\mathrm{N}'^2}{2}\\ & +\left[\frac{3r^2r'}{2}\frac{d^2\left([r,r']_1-\frac{r}{r'^2}\right)}{dr\,dr'}+2r^3r'\frac{d^3\left([r,r']_1-\frac{r}{r'^2}\right)}{dr^2dr'}\right]\frac{\mathrm{MM}'+\mathrm{NN}'}{4}\\ & +\left[3r^2\frac{d\left([r,r']_1-\frac{r}{r'^2}\right)}{dr}+4r^3\frac{d^2\left([r,r']_1-\frac{r}{r'^2}\right)}{dr^2}\right]\frac{\mathrm{MM}'+\mathrm{NN}'}{4}\\ & +\left[4r^2r'\frac{d^2\left([r,r']_1-\frac{r}{r'^2}\right)}{dr\,dr'}-rr'\frac{d\left([r,r']_1-\frac{r}{r'^2}\right)}{dr'}\right]\frac{\mathrm{MM}'+\mathrm{NN}'}{4}\\ & +\left[8r^2\frac{d\left([r,r']_1-\frac{r}{r'^2}\right)}{dr}-2r\left([r,r']_1-\frac{r}{r'^2}\right)\right]\frac{\mathrm{MM}'+\mathrm{NN}'}{4}\Bigg\}.\end{aligned}$$

9. Dans cette équation les termes qui ne contiennent point les fonctions $[r,r']$, $[r,r']_1$ se détruisent mutuellement; effaçant donc ces termes, et changeant les lettres M, N en x, y, comme on en a usé dans la *Théorie des variations séculaires*, on aura une équation de cette forme

$$\frac{d\Sigma}{dp} = (0)+(1)(x^2+y^2)+(2)(x'^2+y'^2)+(3)(xx'+yy'),$$

dans laquelle

$$(0) = -\mathrm{T}'\,2r^2\frac{d[r,r']}{dr},$$

$$(1) = -\mathrm{T}'\left(\frac{r^2}{2}\frac{d[r,r']}{dr}+\frac{7r^3}{4}\frac{d^2[r,r']}{dr^2}+\frac{r^4}{2}\frac{d^3[r,r']}{dr^3}\right),$$

$$(2) = -\mathrm{T}'\left(r^2r'\frac{d^2[r,r']}{dr\,dr'}+\frac{r^3r'^2}{2}\frac{d^3[r,r']}{dr\,dr'^2}\right),$$

$$\begin{aligned}(3) = -\mathrm{T}'\Bigg(&-\frac{r[r,r']_1}{2}+\frac{11r^2}{4}\frac{d[r,r']_1}{dr}-\frac{rr'}{4}\frac{d[r,r']_1}{dr'}\\ &+r^3\frac{d^2[r,r]_1}{dr^2}+\frac{11r^2r'}{8}\frac{d^2[r,r']_1}{dr\,dr'}+\frac{r^3r'}{2}\frac{d^3[r,r']_1}{dr^2dr'}\Bigg).\end{aligned}$$

Cette équation donnera la variation séculaire Σ du mouvement moyen d'une Planète T troublée par l'action d'une autre Planète quelconque T', la masse du Soleil étant prise pour l'unité des masses des Planètes.

S'il y avait une seconde Planète perturbatrice T'', il n'y aurait qu'à ajouter à la valeur de $\frac{d\Sigma}{dp}$ une autre partie composée des mêmes termes que ceux qui répondent à la Planète T', mais dans lesquels les lettres affectées d'un accent le seraient de deux, et ainsi de suite (7).

10. Pour faire usage de l'équation précédente, il n'y aura qu'à substituer pour x, y, x', y',... les valeurs déterminées dans la *Théorie des variations séculaires*, et comme $dp = \frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}}$ (3), on aura, en multipliant par dt, une équation intégrable, puisque les distances moyennes r, r',... sont des quantités constantes.

Or nous avons vu dans la Théorie citée que les expressions de x, y, x', y',... sont, en général, de la forme

$$\begin{aligned}&\mathrm{A}\sin(at+\alpha)+\mathrm{B}\sin(bt+\beta)+\mathrm{C}\sin(ct+\gamma)+\ldots,\\ &\mathrm{A}\cos(at+\alpha)+\mathrm{B}\cos(bt+\beta)+\mathrm{C}\cos(ct+\gamma)+\ldots,\\ &\mathrm{A}'\sin(at+\alpha)+\mathrm{B}'\sin(bt+\beta)+\mathrm{C}'\sin(ct+\gamma)+\ldots,\\ &\mathrm{A}'\cos(at+\alpha)+\mathrm{B}'\cos(bt+\beta)+\mathrm{C}'\cos(ct+\gamma)+\ldots,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

le nombre des termes étant toujours égal à celui des Planètes qui agissent les unes sur les autres.

Donc, faisant ces substitutions dans la valeur de $\frac{d\Sigma}{dp}$, il en résultera :

1° des termes sans sinus ni cosinus; 2° des termes proportionnels aux cosinus des angles

$$(a-b)\,t+\alpha-\beta,\quad (a-c)\,t+\alpha-\gamma,\quad (b-c)\,t+\beta-\gamma,\ldots,$$

et qui étant multipliés par dt seront tous intégrables.

Il s'ensuit de là que la valeur de Σ se trouvera composée de deux sortes de termes, les uns rigoureusement proportionnels à p, et qui se confondront par conséquent avec le mouvement moyen et uniforme de la Planète; les autres proportionnels aux sinus des angles $(a-b)\,t+\alpha-\beta$, $(a-c)\,t+\alpha-\gamma,\ldots$, et dont les coefficients seront beaucoup plus grands que ceux des cosinus correspondants dans l'équation différentielle, puisque l'intégration les aura augmentés dans la raison de $a-b$, $a-c,\ldots$ à 1. Ces termes donneront donc de véritables équations séculaires dans le mouvement moyen de la Planète; et il ne s'agira que de voir si elles sont assez sensibles pour être aperçues par les observations.

11. Nous avons fait abstraction jusqu'ici de l'inclinaison des orbites, de sorte que la formule trouvée n'a lieu que pour le cas où la Planète troublée et les Planètes perturbatrices seraient mues dans un même plan fixe. Il faut donc, pour ne rien laisser à désirer, voir encore ce qui peut résulter de l'inclinaison mutuelle des orbites, et surtout de la variation de cette inclinaison. On pourrait pour cela employer la valeur complète de $F(q)$ donnée dans le Mémoire précédent, et avoir égard dans le calcul aux quantités $\frac{P}{R}$, $\frac{Q}{R}$ et à leurs variations déterminées dans la *Théorie des variations séculaires*; mais il sera beaucoup plus simple de considérer immédiatement l'orbite réelle de la Planète, et de chercher la variation du mouvement moyen d'après celles des éléments de cette orbite. Pour cela il faut commencer par déterminer ces variations; c'est à quoi on peut parvenir directement et facilement par les principes donnés à la fin de la première Section de la *Théorie* citée.

12. Soit ρ le rayon vecteur de l'orbite réelle de la Planète, q la longitude vraie dans cette orbite, φ la longitude de l'aphélie prise aussi sur

l'orbite, λ l'excentricité et $\varkappa$ le demi-paramètre; on aura, comme on sait, pour l'équation de l'orbite elliptique

$$\frac{\varkappa}{\rho}=1-\lambda\cos(q-\varphi),$$

laquelle, en faisant

$$\lambda\sin\varphi=m,\quad \lambda\cos\varphi=n,$$

devient

$$(a)\qquad \frac{\varkappa}{\rho}=1-m\sin q-n\cos q.$$

De plus, cette orbite étant décrite par une force centrale $\frac{1}{\rho^2}$, comme le sont celles des Planètes en prenant la somme des masses du Soleil et de la Planète pour l'unité, on aura, par la propriété connue des aires,

$$(b)\qquad \rho^2\,dq=dt\sqrt{\varkappa}.$$

La valeur de $d\rho$ doit être la même, soit que l'orbite varie ou non; ainsi, en différentiant l'équation (a), on aura d'un côté

$$(c)\qquad \frac{\varkappa\,d\rho}{\rho^2}=(m\cos q-n\sin q)\,dq,$$

et de l'autre

$$(d)\qquad \frac{d\varkappa}{\rho}=-\sin q\,dm-\cos q\,dn.$$

En substituant dans l'équation (c) la valeur de dq tirée de l'équation (b), elle devient

$$(e)\qquad \frac{d\rho\sqrt{\varkappa}}{dt}=m\cos q-n\sin q.$$

13. Pour que cette équation appartienne à l'orbite troublée, en y regardant les éléments $\varkappa$, m, n comme variables, il faudra que sa différentielle satisfasse aux équations différentio-différentielles de cette orbite,

lesquelles sont, par rapport aux coordonnées rectangles x, y, z,

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{x}{\rho^3}+X=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{y}{\rho^3}+Y=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{z}{\rho^3}+Z=0,$$

X, Y, Z étant les forces perturbatrices.

Ainsi, comme

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

et par conséquent

$$d\rho=\frac{x\,dx+y\,dy+z\,dz}{\rho},$$

il n'y aura qu'à substituer dans la différentielle de l'équation (e) pour

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2}$$

les valeurs

$$-\frac{x}{\rho}-X,\quad -\frac{y}{\rho}-Y,\quad -\frac{z}{\rho}-Z.$$

Mais, puisque la variabilité des éléments ne vient que des forces perturbatrices, il s'ensuit que les termes affectés de dx, dm, dn et de X, Y, Z doivent former une équation à part, celle composée des autres termes devant subsister d'elle-même, parce que l'équation dont il s'agit satisfait par l'hypothèse aux équations de l'orbite invariable.

Il n'y aura donc qu'à faire varier dans l'équation (e) les éléments $\varkappa$, m, n et les différences dx, dy, dz, et substituer simplement $-X$, $-Y$, $-Z$ à la place de $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$; ce qui donnera sur-le-champ celle-ci

$$-\frac{dt\sqrt{\varkappa}}{\rho}(Xx+Yy+Zz)+\frac{d\rho\,d\varkappa}{2dt\sqrt{\varkappa}}=\cos q\,dm-\sin q\,dn,$$

ou bien, en faisant, pour abréger,

$$Xx+Yy+Zz=\Phi,$$

et substituant pour $dt\sqrt{\varkappa}$ sa valeur ρ^2dq de l'équation (b),

$$\cos q\,dm-\sin q\,dn=\frac{d\rho\,d\varkappa}{2\rho^2dq}-\Phi\rho\,dq.$$

Et cette équation combinée avec l'équation (d) donnera les valeurs de dm et dn; on aura ainsi

$$(f)\qquad \begin{cases} dm=-\dfrac{d\varkappa}{\rho}\sin q+\left(\dfrac{d\rho\,d\varkappa}{2\rho^2dq}-\Phi\rho\,dq\right)\cos q,\\ dn=-\dfrac{d\varkappa}{\rho}\cos q-\left(\dfrac{d\rho\,d\varkappa}{2\rho^2dq}-\Phi\rho\,dq\right)\sin q. \end{cases}$$

14. Il ne reste plus qu'à trouver la valeur de $d\varkappa$; on la tirera de l'équation (b), en y appliquant le même raisonnement que nous venons de faire sur l'équation (e). Ainsi, comme

$$\varkappa=\frac{\rho^4dq^2}{dt^2},$$

et que

$$\rho^2dq^2+d\rho^2=dx^2+dy^2+dz^2,$$

puisque ces deux quantités expriment également le carré de l'élément de l'espace parcouru, que par conséquent

$$\rho^4dq^2=\rho^2(dx^2+dy^2+dz^2)-(\rho\,d\rho)^2,$$

il s'ensuit qu'on aura la valeur de $d\varkappa$, en faisant varier dans

$$\frac{\rho^2(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2}-\frac{(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2}{dt^2}$$

les différences dx, dy, dz seulement et substituant ensuite $-X$, $-Y$, $-Z$ pour $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$.

Donc, faisant, pour abréger,

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=(d\Omega),$$

on aura sur-le-champ

$$(g)\qquad d\varkappa=2\Phi\rho\,d\rho-2\rho^2(d\Omega),$$

valeur qu'il faudra substituer dans les deux équations (f) ci-dessus.

Cherchons maintenant les valeurs de Φ et de $(d\Omega)$. En ne supposant qu'une seule Planète perturbatrice T′, on a

$$X = T'\left(\frac{x-x'}{\sigma'^3} + \frac{x'}{\rho'^3}\right), \quad Y = T'\left(\frac{y-y'}{\sigma'^3} + \frac{y'}{\rho'^3}\right), \quad Z = T'\left(\frac{z-z'}{\sigma'^3} + \frac{z'}{\rho'^3}\right),$$

σ' exprimant la distance rectiligne d'une Planète à l'autre, et x', y', z', ρ' étant pour la Planète T′ ce que x, y, z, ρ sont pour la Planète troublée T. S'il y avait plusieurs Planètes perturbatrices T′, T″, ..., chacune donnerait des formules semblables dans les valeurs de X, Y, Z.

On aura donc, en substituant ces valeurs,

$$\Phi = T'\left[\frac{\rho'}{\sigma'^3} + \left(\frac{1}{\rho'^3} - \frac{1}{\sigma'^3}\right)(xx' + yy' + zz')\right],$$

$$(d\Omega) = T'\left[\frac{\rho\, d\rho}{\sigma'^3} + \left(\frac{1}{\rho'^3} - \frac{1}{\sigma'^3}\right)(x'dx + y'dy + z'dz)\right].$$

15. Maintenant, puisque σ' est la distance rectiligne entre la Planète T et la Planète T′, on aura, par les coordonnées rectangles,

$$\sigma'^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2(xx' + yy' + zz').$$

D'un autre côté, si l'on nomme ε l'angle intercepté entre les deux rayons ρ et ρ', en considérant le triangle rectiligne dont ρ, ρ', σ' sont les trois côtés et où ε est l'angle opposé au côté σ', on aura aussi

$$\sigma'^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\varepsilon;$$

de sorte qu'en comparant cette expression de σ'^2 à la précédente, on aura

$$xx' + yy' + zz' = \rho\rho'\cos\varepsilon;$$

et comme cette équation est indépendante d'aucune relation entre la position des deux Planètes, elle aura lieu aussi en supposant que la Planète T avance infiniment peu dans son orbite, auquel cas x, y, z, ρ deviennent

$$x + dx, \quad y + dy, \quad z + dz, \quad \rho + d\rho,$$

et $\cos\varepsilon$ deviendra

$$\cos\varepsilon + \delta\cos\varepsilon;$$

ainsi l'on aura par là

$$x'dx + y'dy + z'dz = \rho'\cos\varepsilon\, d\rho + \rho\rho'\delta\cos\varepsilon;$$

mais il faut encore déterminer la valeur de $\cos\varepsilon$ et de $\delta\cos\varepsilon$.

Pour cela, si l'on imagine que du centre des rayons vecteurs ρ, ρ' on mène au point d'intersection des deux orbites un troisième rayon, et qu'ensuite sur la surface d'une sphère décrite du même centre on trace trois arcs de grand cercle qui joignent les trois rayons dont il s'agit, il est visible que l'un de ces arcs sera ε, que les deux autres seront les distances des deux Planètes au nœud commun de leurs orbites, et dans le triangle sphérique formé par ces trois arcs, l'angle opposé au côté ε sera l'inclinaison mutuelle des orbites.

Par conséquent, si l'on nomme η cette inclinaison et ψ la longitude du nœud commun, en sorte que $q - \psi$ et $q' - \psi$ soient les distances des Planètes à ce nœud, on aura, par la propriété connue des triangles sphériques,

$$\cos\varepsilon = \cos(q-\psi)\cos(q'-\psi) + \cos\eta\sin(q-\psi)\sin(q'-\psi);$$

or, tandis que la Planète T se meut infiniment peu dans son orbite, il n'y a que l'angle q qui varie, les autres quantités ψ, η, q' demeurant constantes; d'où il suit que la variation de $\cos\varepsilon$, que nous avons désignée ci-dessus par $\delta\cos\varepsilon$, devra être exprimée par $\frac{d\cos\varepsilon}{dq}dq$.

16. Substituons les valeurs qu'on vient de trouver dans les expressions de Φ et de $(d\Omega)$ du n° 14; on aura, en retenant le $\cos\varepsilon$ pour plus de simplicité,

$$\Phi = T'\left(\frac{\rho^2 - \rho\rho'\cos\varepsilon}{\sigma'^3} + \frac{\rho\cos\varepsilon}{\rho'^2}\right)$$

$$(d\Omega) = T'\left(\frac{\rho\, d\rho - \rho'\cos\varepsilon\, d\rho - \rho\rho'\dfrac{d\cos\varepsilon}{dq}dq}{\sigma'^3} + \frac{\cos\varepsilon\, d\rho + \rho\dfrac{d\cos\varepsilon}{dq}dq}{\rho'^2}\right).$$

Si donc on fait

$$\Omega = T'\left(\frac{\rho\cos\varepsilon}{\rho'^2} - \frac{1}{\sigma'}\right),$$

on aura, à cause de

$$\sigma' = \sqrt{\rho^2 - 2\rho\rho'\cos\varepsilon + \rho'^2}$$

et de $\cos\varepsilon$ fonction de q sans ρ,

$$\Phi = \rho\frac{d\Omega}{d\rho}, \quad (d\Omega) = \frac{d\Omega}{d\rho}\,d\rho + \frac{d\Omega}{dq}\,dq.$$

Donc l'équation (g) du n° 14 donnera par ces substitutions

$$dz = -\rho^2\frac{d\Omega}{dq}\,dq;$$

et enfin, substituant cette valeur de dz ainsi que celle de Φ dans les équations (f) du même numéro, on aura

$$dm = -\frac{d\Omega}{dq}\cos q\,d\rho + \left(2\rho\frac{d\Omega}{dq}\sin q - \rho^2\frac{d\Omega}{d\rho}\cos q\right)dq,$$

$$dn = \frac{d\Omega}{dq}\sin q\,d\rho + \left(2\rho\frac{d\Omega}{dq}\cos q + \rho^2\frac{d\Omega}{d\rho}\sin q\right)dq,$$

expressions qu'on voit être de la même forme que celles de $d\mathrm{M}$ et $d\mathrm{N}$ du n° 5.

Et à l'égard de la fonction Ω, on voit qu'elle est aussi de la même forme que celle du n° 7, si ce n'est qu'à la place de l'angle $q - q'$ il y a l'angle ε; mais ces deux angles sont d'ailleurs analogues entre eux, puisqu'ils expriment également dans les deux hypothèses la distance d'une Planète à l'autre.

17. Prenant r pour représenter le demi-grand axe, comme dans les calculs ci-dessus, on a, par les propriétés de l'ellipse, le demi-paramètre

$$z = r(1 - \lambda^2) = r(1 - m^2 - n^2).$$

Ainsi l'équation (a) du n° 12 donnera

$$\rho = \frac{r(1 - m^2 - n^2)}{1 - m\sin q - n\cos q};$$

et, cette valeur substituée dans l'équation (b) du même numéro, on aura

$$\frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}} = dp = \frac{(1 - m^2 - n^2)^{\frac{3}{2}}\,dq}{(1 - m\sin q - n\cos q)^2};$$

ce sont les formules connues entre le rayon vecteur ρ, la longitude vraie q dans l'orbite et la longitude moyenne p.

La dernière équation étant intégrée en regardant m et n comme constantes donnera la valeur de la fonction $\mathrm{F}(q)$ (2), et cette valeur exprimée en série sera de la même forme que celle du n° 5, m et n étant ici à la place de M et N; de là l'expression de $\delta\mathrm{F}(q)$ ou de $d\Sigma$ sera encore de la même forme que dans ce numéro, et cela aura lieu aussi après la substitution des valeurs de dm et dn, que nous avons vu être semblables à celles de $d\mathrm{M}$ et $d\mathrm{N}$.

De plus les valeurs de ρ et q en p, tirées des équations précédentes, seront aussi de la même forme que celles qu'on a employées dans le n° 6, ce qui est d'ailleurs évident par la comparaison de ces équations et de celles d'où ces valeurs ont été déduites. Donc la valeur de $\frac{d\Sigma}{dp}$ sera encore de la même forme que celle qui se trouve à la fin du même numéro, m et n étant toujours à la place de M et N; mais la substitution de la valeur de Ω y produira une différence, à cause que l'angle ε tient la place de $q - q'$; et c'est uniquement de là que peut venir la différence des résultats dans les deux cas.

18. Pour déterminer cette différence, nous remarquerons d'abord qu'en mettant, dans l'expression de $\cos\varepsilon$ du n° 15, $1 - 2\sin^2\frac{\eta}{2}$ au lieu de $\cos\eta$, elle devient

$$\cos(q - q') - 2\sin^2\frac{\eta}{2}\sin(q - \psi)\sin(q' - \psi);$$

de sorte que tout se réduit à augmenter, dans l'expression de Ω du n° 7, $\cos(q - q')$ de la quantité

$$-2\sin^2\frac{\eta}{2}\sin(q - \psi)\sin(q' - \psi).$$

Or, comme η représente l'inclinaison réciproque des orbites que nous supposons du même ordre que l'excentricité λ et par conséquent que les quantités m et n, il est clair que la quantité dont il s'agit est déjà très-petite du second ordre, et qu'ainsi l'accroissement de Ω sera au quatrième ordre près

$$2V\sin^2\frac{\eta}{2}\sin(q-\psi)\sin(q'-\psi),$$

en faisant

$$V=-T'\left[\frac{\rho}{\rho'^2}-\frac{\rho\rho'}{[\rho^2-2\rho\rho'\cos(q-q')+\rho'^2]^{\frac{1}{2}}}\right].$$

Donc, puisque dans l'expression de $\frac{d\Sigma}{dp}$ nous avons négligé les troisièmes dimensions de M et N, il s'ensuit qu'en négligeant pareillement les troisièmes dimensions de m, n, η, il n'y aura que le premier terme $2r^2\frac{d\Omega}{dp}$ de cette expression dans lequel on doive avoir égard à l'accroissement de Ω, et qu'ainsi la valeur de $\frac{d\Sigma}{dp}$ se trouvera par là simplement augmentée de la quantité

$$\tfrac{1}{4}r^2\frac{dV}{d\rho}\sin^2\frac{\eta}{2}\sin(q-\psi)\sin(q'-\psi).$$

Par la même raison, puisque cette quantité est du second ordre, on pourra d'abord y substituer r, r', p, p' à la place de ρ, ρ', q, q', ce qui la réduira à

$$\tfrac{1}{4}r^2\frac{dV}{dr}\sin^2\frac{\eta}{2}\sin(p-\psi)\sin(p'-\psi),$$

V étant $=-T'\left[\frac{r}{r'^2}-\frac{rr'}{[r^2-2rr'\cos(p-p')+r'^2]^{\frac{1}{2}}}\right]$.

Développons en série le radical irrationnel

$$[r^2-2rr'\cos(p-p')+r'^2]^{-\frac{1}{2}},$$

et supposons, comme dans la *Théorie des variations séculaires*, cette série représentée par

$$(r,r')+(r,r')_1\cos(p-p')+(r,r')_2\cos 2(p-p')+\ldots;$$

on aura pour la valeur de $\frac{dV}{dr}$

$$-T'\left[\frac{1}{r'^2}-\frac{d[rr'(r,r')]}{dr}-\frac{d[rr'(r,r')_1]}{dr}\cos(p-p')-\ldots\right].$$

Substituant cette valeur dans la quantité dont il s'agit, développant les produits des sinus et cosinus, et ne retenant que les termes sans sinus ni cosinus, on aura enfin

$$T'r^2\frac{d[rr'(r,r')_1]}{dr}\sin^2\frac{\eta}{2}$$

pour la quantité à ajouter à la valeur de $\frac{d\Sigma}{dp}$.

Ainsi il n'y aura qu'à ajouter ce nouveau terme au second membre de la dernière équation du n° 8, en y changeant en même temps les quantités M et N en m et n.

19. Nous remarquerons maintenant que les quantités m, n sont au troisième ordre près égales à M, N; car ces quantités, étant exprimées par $\lambda\sin\varpi$, $\lambda\cos\varpi$, où ϖ est la longitude de l'aphélie dans l'orbite (12), ont par conséquent la même valeur que les quantités $\lambda\sin\Phi$, $\lambda\cos\Phi$ du n° 18 du Mémoire précédent; et il est aisé de voir que celles-ci se réduisent à M, N en négligeant les quantités du troisième ordre, puisque

$$\Omega=\int\cos i\,d\omega=\omega-\tfrac{1}{2}\int i^2 d\omega.$$

Ainsi, comme dans la *Théorie des variations séculaires* nous avons nommé x, y les quantités M, N, on pourra également, dans l'équation précédente, changer m, n en x, y.

De plus, on a aussi au troisième ordre près

$$\sin\frac{\eta}{2}=\frac{\eta}{2}=\frac{\tan\frac{\eta}{2}}{2};$$

mais nous avons démontré, dans le n° 18 de la seconde Partie de la Théo-

rie citée, que, pour des orbites peu inclinées, on a au troisième ordre près

$$\mathfrak{I}\sin\Omega = s - s', \quad \mathfrak{I}\cos\Omega = u - u',$$

$\mathfrak{I}$ étant la même chose que $\tang\eta$. Donc à la place de $\sin^2\frac{\eta}{2}$ on pourra substituer la quantité

$$\frac{(s-s')^2+(u-u')^2}{4}.$$

D'où l'on doit conclure que la considération de l'inclinaison des orbites ne fera qu'augmenter l'expression de $\frac{d\Sigma}{dp}$ du n° 9 du terme

$$(4)\times[(s-s')^2+(u-u')^2]$$

en supposant

$$(4) = \mathrm{T}'\frac{r^2}{4}\frac{d[rr'(r,r')_1]}{dr} = \mathrm{T}'\left[\frac{r^3r'(r,r')_1}{4} + \frac{r^3r'}{4}\frac{d(r,r')_1}{dr}\right].$$

Et s'il y a plusieurs Planètes perturbatrices, chacune d'elles fournira un pareil terme dans la valeur de $\frac{d\Sigma}{dp}$.

Les valeurs des quantités s, s',..., u, u',... ont aussi été données dans la *Théorie des variations séculaires* pour toutes les Planètes, et comme elles sont d'une forme semblable à celle de x, x',..., y, y',..., il en résultera des termes analogues dans l'expression de la variation séculaire Σ du mouvement moyen.

20. Pour appliquer aux Planètes les formules que nous venons de trouver, il faudra commencer par déterminer les valeurs des coefficients (0), (1),...; et l'on peut employer pour cela les méthodes et les données de la Théorie citée; mais, comme ces coefficients contiennent les différences des fonctions $[r,r']$, $[r,r']$, relativement aux deux quantités r, r', il sera à propos de réduire d'abord toutes les différences à la seule quantité r, comme nous en avons usé dans la même Théorie.

Or, par la propriété des fonctions homogènes, telles que sont nécessairement les quantités $[r,r']$, $[r,r']_1$, on a

$$r\frac{d[r,r']}{dr} + r'\frac{d[r,r']}{dr'} + [r,r'] = 0,$$

$$r\frac{d[r,r']_1}{dr} + r'\frac{d[r,r']_1}{dr'} + [r,r']_1 = 0;$$

donc

$$\frac{d[r,r']}{dr'} = -\frac{[r,r']}{r'} - \frac{r}{r'}\frac{d[r,r']}{dr},$$

et, différentiant successivement par r, r',

$$\frac{d^2[r,r']}{dr\,dr'} = -\frac{2}{r'}\frac{d[r,r']}{dr} - \frac{r}{r'}\frac{d^2[r,r']}{dr^2},$$

$$\frac{d^3[r,r']}{dr^2dr'} = -\frac{3}{r'}\frac{d^2[r,r']}{dr^2} - \frac{r}{r'}\frac{d^3[r,r']}{dr^3},$$

$$\frac{d^3[r,r']}{dr\,dr'^2} = \frac{2}{r'^2}\frac{d[r,r']}{dr} + \frac{r}{r'^2}\frac{d^2[r,r']}{dr^2} - \frac{2}{r'}\frac{d^2[r,r']}{dr\,dr'} - \frac{r}{r'}\frac{d^3[r,r']}{dr^2dr'},$$

ou bien, en substituant dans cette dernière formule les valeurs données par les deux précédentes,

$$\frac{d^3[r,r']}{dr\,dr'^2} = \frac{6}{r'^2}\frac{d[r,r']}{dr} + \frac{6r}{r'^2}\frac{d^2[r,r']}{dr^2} + \frac{r^2}{r'^2}\frac{d^3[r,r']}{dr^3}.$$

On aura de pareilles expressions pour les différences de $[r,r']_1$; et, faisant ces substitutions dans les valeurs des coefficients (2) et (3) données dans le n° 9, on aura

$$(2) = -\mathrm{T}'\left[r^2\frac{d[r,r']}{dr} + 2r^3\frac{d^2[r,r']}{dr^2} + \frac{r^4}{2}\frac{d^3[r,r']}{dr^3}\right],$$

$$(3) = -\mathrm{T}'\left[-\frac{r[r,r']_1}{4} + \frac{r^2}{4}\frac{d[r,r']_1}{dr} - \frac{15r^3}{8}\frac{d^2[r,r']_1}{dr^2} - \frac{r^4}{2}\frac{d^3[r,r']_1}{dr^3}\right].$$

21. Les quantités $[r,r']$, $[r,r']$, sont évidemment les mêmes que nous avions d'abord désignées par A', B' dans le n° 43 de la première Partie de la *Théorie des variations séculaires*, et dont nous avons ensuite, dans le n° 45, donné les valeurs exprimées par les quantités (r,r'), $(r,r')_1$, ainsi que celles de leurs différences premières et secondes. On aura donc

par les formules de ce dernier numéro

$$\begin{aligned}
[r,r'] &= (r^2+r'^2)(r,r') - rr'(r,r')_1,\\
[r,r']_1 &= 4rr'(r,r') - (r^2+r'^2)(r,r')_1,\\
\frac{d[r,r']}{dr} &= -r(r,r') + \frac{1}{2}r'(r,r')_1,\\
\frac{d[r,r']_1}{dr} &= -2r'(r,r') + \frac{r'^2}{r}(r,r')_1,\\
\frac{d^2[r,r']}{dr^2} &= 2(r,r') - \frac{r'}{2r}(r,r')_1,\\
\frac{d^2[r,r']_1}{dr^2} &= \frac{6r'}{r}(r,r') - \frac{2r'^2}{r^2}(r,r')_1,
\end{aligned}$$

les quantités (r,r'), $(r,r')_1$ étant les mêmes que nous avons déjà employées ci-dessus.

Différentiant les deux dernières équations par r, on aura

$$\begin{aligned}
\frac{d^3[r,r']}{dr^3} &= 2\frac{d(r,r')}{dr} + \frac{r'}{2r^2}(r,r')_1 - \frac{r'}{2r}\frac{d(r,r')_1}{dr},\\
\frac{d^3[r,r']_1}{dr^3} &= -\frac{6r'}{r^2}(r,r') + \frac{6r'}{r}\frac{d(r,r')}{dr} + \frac{4r'^2}{r^3}(r,r')_1 - \frac{2r'^2}{r^2}\frac{d(r,r')_1}{dr}.
\end{aligned}$$

Or, si dans les formules générales du même numéro cité on fait $s=\frac{3}{2}$, les quantités A, B deviennent (r,r'), $(r,r')_1$; ainsi l'on aura par ces formules

$$\begin{aligned}
\frac{d(r,r')}{dr} &= -\frac{6r(r,r') + r'(r,r')_1}{2(r^2-r'^2)},\\
\frac{d(r,r')_1}{dr} &= -\frac{6r'(r,r') + \left(2r - \frac{r'^2}{r}\right)(r,r')_1}{r^2-r'^2};
\end{aligned}$$

de sorte que par ces substitutions les formules précédentes deviendront

$$\begin{aligned}
\frac{d^3[r,r']}{dr^3} &= \frac{\left(-6r + \frac{3r'^2}{r}\right)(r,r') + \left(\frac{r'}{2} - \frac{r'^3}{r^2}\right)(r,r')_1}{r^2-r'^2},\\
\frac{d^3[r,r']_1}{dr^3} &= \frac{\left(-24r' + \frac{18r'^3}{r^2}\right)(r,r') + \left(\frac{5r'^2}{r} - \frac{6r'^4}{r^3}\right)(r,r')_1}{r^2-r'^2}.
\end{aligned}$$

22. On pourra donc exprimer tous les coefficients (0), (1), (2), (3), (4) par les seules quantités (r,r'), $(r,r')_1$; et l'on aura ainsi

$$\begin{aligned}
(0) &= T'\,[2r^3(r,r') - r^3r'(r,r')_1],\\
(1) &= T'\,\frac{12r^3r'^2(r,r') + (3r^4r' - r^3r'^3)(r,r')_1}{8(r^2-r'^2)},\\
(2) &= T'\,\frac{6r^3r'^2(r,r') + r^3r'^3(r,r')_1}{4(r^2-r'^2)},\\
(3) &= T'\,\frac{(3r^4r' - 15r^2r'^3)(r,r') - (r^5 + 6r^2r'^2 - 5rr'^4)(r,r')_1}{4(r^2-r'^2)},\\
(4) &= -T'\,\frac{6r^3r'^2(r,r') + r^4r'(r,r')_1}{4(r^2-r'^2)}.
\end{aligned}$$

Nous avons déjà donné, dans la *Théorie des variations séculaires* (n° 48, première Partie), la manière de calculer les valeurs des quantités (r,r'), $(r,r')_1$; et nous y avons trouvé des expressions de cette forme

$$(r,r') = \frac{M}{r^3(1-z^2)^2}, \quad (r,r')_1 = \frac{6N}{r^3(1-z^2)^2},$$

dans lesquelles $z=\frac{r'}{r}$, r' étant supposée la plus petite des deux quantités r, r', et M, N représentent les séries

$$1 + \alpha^2 z^2 + \ldots, \quad \alpha z - \alpha\beta z^3 - \ldots,$$

comme dans le n° 3 de la seconde Partie de la même Théorie.

Nous avons de plus donné dans le même endroit les valeurs numériques de z, M, N pour toutes les distances moyennes r, r',... des Planètes principales combinées deux à deux; ainsi l'on pourra partir immédiatement de ces valeurs dans le calcul des coefficients de la formule trouvée pour l'altération du mouvement moyen des Planètes; nous allons maintenant appliquer cette formule à Saturne et à Jupiter, et voir les conséquences qui en résultent relativement à leurs mouvements moyens.

SECTION SECONDE.

VARIATION SÉCULAIRE DU MOUVEMENT MOYEN DE SATURNE PRODUITE PAR L'ACTION DE JUPITER.

23. Nous supposerons ici, comme nous l'avons fait dans la *Théorie générale des variations séculaires*, que les lettres sans trait se rapportent à Saturne, qu'avec un trait elles se rapportent à Jupiter, et ainsi de suite; de cette manière T sera la masse de Saturne, T′ celle de Jupiter, ces masses étant exprimées en parties de celle du Soleil; il en sera de même des distances moyennes r, r' et des mouvements moyens p, p'.

Ainsi l'altération Σ du mouvement moyen de Saturne due à l'action de Jupiter sera déterminée par l'équation différentielle

$$\frac{d\Sigma}{dp} = (0) + (1)(x^2+y^2) + (2)(x'^2+y'^2) + (3)(xx'+yy') + (4)[(s-s')^2+(u-u')^2],$$

dont les coefficients seront exprimés par les quantités $z = \frac{r'}{r}$, M, N, de la manière suivante

$$(0) = T'\frac{2M - 6zN}{(1-z^2)^2},$$

$$(1) = T'\frac{6z^2M + 3(3z - z^3)N}{4(1-z^2)^3},$$

$$(2) = T'\frac{3z^2M + 3z^3N}{2(1-z^2)^3},$$

$$(3) = T'\frac{3(z - 5z^3)M - 6(1 + 6z^2 - 5z^4)N}{4(1-z^2)^3},$$

$$(4) = -T'\frac{3z^2M + 3zN}{2(1-z^2)^3}.$$

Ces formules, en y changeant les traits des lettres T, r,..., serviront aussi pour toute autre Planète en tant qu'elle sera troublée par une Planète inférieure, la quantité z devant toujours être une fraction moindre que l'unité pour l'exactitude des expressions de M et N.

24. L'action de Jupiter sur Saturne étant, à raison des masses et des distances, infiniment plus considérable que celle des autres Planètes, il suffira de tenir compte de cette action, comme nous l'avons fait dans la *Théorie des variations séculaires;* ainsi la formule précédente donnera l'altération totale du mouvement moyen de Saturne, en y substituant pour x, y, x', y', s, u, s', u' les valeurs dues à la même action et qui ont été calculées dans les n^{os} 50 et 53 de la deuxième Partie de cette Théorie.

Par ces substitutions on aura donc en premier lieu

$$x^2 + y^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos[(a-b)t + \alpha - \beta],$$

$$x'^2 + y'^2 = A'^2 + B'^2 + 2A'B'\cos[(a-b)t + \alpha - \beta],$$

$$xx' + yy' = AA' + BB' + (AB' + A'B)\cos[(a-b)t + \alpha - \beta].$$

En second lieu on aura

$$(s-s')^2 + (u-u')^2 = [(B) - (B')]^2,$$

en désignant par (B), (B′) les coefficients B, B′ des expressions de s, u, s', u' pour les distinguer de ceux de x, y, x', y' que nous avons représentés par les mêmes lettres.

Donc enfin, substituant ces valeurs et faisant, pour abréger,

$$[0] = (0) + (1)(A^2 + B^2) + (2)(A'^2 + B'^2) + (3)(AA' + BB') + (4)[(B) - (B')]^2,$$

$$[1] = 2(1)AB + 2(2)A'B' + (3)(AB' + A'B),$$

on aura

$$\frac{d\Sigma}{dp} = [0] + [1]\cos[(a-b)t + \alpha - \beta].$$

Or p représente l'angle du mouvement moyen de Saturne, et nous avons exprimé le temps t en années Juliennes; si donc on nomme n le nombre d'années Juliennes de la révolution de Saturne, on aura $\frac{dp}{dt} = \frac{360^o}{n}$; par conséquent la formule précédente étant multipliée par dp et intégrée donnera

$$\Sigma = [0]p + [1]\frac{360^o}{n(a-b)}\sin[(a-b)t + \alpha - \beta];$$

c'est l'expression de l'altération du mouvement moyen et qui doit être ajoutée à ce mouvement.

25. Le terme $[0]p$ ne fait qu'augmenter le mouvement moyen primitif dans la raison de 1 à $1+[0]$; de sorte que le mouvement moyen, tel que les observations doivent le donner, sera $(1+[0])p$, et répondra par conséquent à une distance moyenne égale à $\frac{r}{(1+[0])^{\frac{2}{3}}}$; ainsi, par cette distance qui est celle qui résulte de la comparaison des temps périodiques, on pourra déterminer la distance primitive r, qui entre comme élément dans le calcul des perturbations; mais la quantité $[0]$ étant une fraction infiniment petite, puisqu'elle est de l'ordre des masses des Planètes rapportées à celle du Soleil, il ne résultera de là qu'une correction insensible, et de nulle considération dans les distances moyennes. On peut donc n'avoir aucun égard à l'effet du terme dont il s'agit.

26. Il n'en est pas de même de l'autre terme qui contient le sinus de l'angle $(a-b)t+\alpha-\beta$; ce terme donnera une véritable équation séculaire périodique, dont la période sera extrêmement longue. En effet, en substituant pour a, b, α, β les valeurs données dans le n° **50** de la deuxième Partie de la *Théorie des variations séculaires*, on trouve pour l'angle dont il s'agit

$$180^\circ - 83^\circ 42' + 18'',4054\,t;$$

de sorte que la période de l'équation séculaire sera déterminée par l'équation

$$18'',4054\,t = 360^\circ,$$

laquelle donne

$$t = 70414$$

pour le nombre d'années de cette période. Mais il faut voir si la valeur de cette équation est assez forte pour pouvoir être aperçue par les observations.

Pour cela il faut commencer par calculer les valeurs des coefficients

(1), (2), (3); or, par le n° 4 de la deuxième Partie de la *Théorie des variations séculaires*, on a

$$z = \frac{r'}{r} = 0,545172, \quad M = 1,075800, \quad N = 0,262042,$$

et, substituant ces valeurs dans les formules du n° **23**, il vient

$$(1) = 2,21597\,T', \quad (2) = 1,56520\,T', \quad (3) = -3,26743\,T'.$$

De plus on a par le n° **50** du même Ouvrage

$$A = 0,04877, \qquad B = 0,03532,$$
$$A' = -0,01715, \qquad B' = 0,04321.$$

Toutes ces valeurs étant substituées dans l'expression de $[1]$, on aura

$$[1] = 0,000408\,T',$$

et il ne s'agira plus que de multiplier cette quantité par $\frac{360^\circ}{n(a-b)}$, où $a-b = 18'',4054$ par le même numéro, et de substituer en même temps pour T', masse de Jupiter, sa valeur $\frac{1}{1067,195}$, suivant le n° **15** de l'Ouvrage cité.

Le calcul fait, on trouve

$$\frac{360^\circ}{a-b}[1] = 0'',02692,$$

de sorte qu'en divisant encore par $n = 30$ à peu près, on n'aura qu'un millième de seconde pour la plus grande valeur de l'équation séculaire; quantité absolument imperceptible et inappréciable.

D'où l'on doit conclure que le mouvement moyen de Saturne est inaltérable par l'action de Jupiter; et qu'ainsi, si ce mouvement est sujet à des variations, on en doit chercher la cause ailleurs que dans la gravitation mutuelle des Planètes.

SECTION TROISIÈME.

VARIATION SÉCULAIRE DU MOUVEMENT MOYEN DE JUPITER PRODUITE PAR L'ACTION DE SATURNE.

27. Calculons de la même manière l'altération du mouvement de Jupiter due à Saturne. Suivant les dénominations établies dans la Section précédente, il faudra affecter d'un trait les lettres de l'équation différentielle qui n'en ont aucun, et réciproquement effacer le trait aux autres; de sorte que pour l'altération Σ' du mouvement moyen de Jupiter, on aura cette équation

$$\frac{d\Sigma'}{dp'} = (0) + (1)(x'^2 + y'^2) + (2)(x^2 + y^2) + (3)(xx' + yy') + (4)[(s - s')^2 + (u - u')^2],$$

dont les coefficients (0), (1), ... seront exprimés de la même manière que dans le n° **22**, mais en y changeant T' en T, r en r' et r' en r. Or, en faisant toujours $z = \frac{r'}{r}$ et observant que les valeurs des quantités (r, r'), $(r, r')_1$ ne changent point en y changeant r en r', puisque l'expression dont le développement engendre ces quantités demeure la même par les changements dont il s'agit, on trouvera les expressions suivantes en z, M, N

$$(0) = T\,\frac{2z^3M - 6z^3N}{(1-z^2)^3},$$

$$(1) = T\,\frac{-6z^3M + 3(z^2 - 3z^4)N}{4(1-z^2)^3},$$

$$(2) = -T\,\frac{3z^3M + 3z^3N}{2(1-z^2)^3},$$

$$(3) = T\,\frac{3(5z^3 - z^4)M - 6(5z - 6z^3 - z^5)N}{4(1-z^2)^3},$$

$$(4) = T\,\frac{3z^3M + 3z^4N}{2(1-z^2)^3}.$$

Et ces formules, en y changeant les traits des lettres T, r, ..., serviront aussi pour une autre Planète quelconque, en tant qu'elle sera troublée par une Planète supérieure.

28. On fera maintenant, dans l'équation différentielle, les mêmes substitutions que ci-dessus pour x, y, x', y', ...; et, intégrant ensuite de la même manière, on aura

$$\Sigma' = (0)p' + [1]\frac{360^\circ}{n'(a-b)}\sin[(a-b)t + \alpha - \beta],$$

en supposant

$$[0] = (0) + (1)(A'^2 + B'^2) + (2)(A^2 + B^2) + (3)(AA' + BB') + (4)[(B) - (B')]^2,$$

$$[1] = 2(1)A'B' + 2(2)AB + (3)(AB' + A'B),$$

et prenant n' pour le nombre d'années Juliennes de la révolution de Jupiter.

L'expression de Σ', étant entièrement analogue à celle de Σ de la Section précédente, donne lieu à des conséquences semblables; ainsi le mouvement moyen de Jupiter sera altéré par une équation de la même forme que celle du mouvement de Saturne, mais dont la quantité est différente; nous allons en déterminer la valeur numérique.

29. En conservant les données du n° **26**, on trouve

$$(1) = -0{,}735\,03\,T, \quad (2) = -1{,}089\,80\,T, \quad (3) = 1{,}317\,69\,T,$$

et de là

$$[1] = -0{,}000\,687\,T.$$

Or T, masse de Saturne, est égale à $\frac{1}{3358{,}4}$; substituant cette valeur et multipliant par $\frac{360^\circ}{a-b}$, on aura

$$\frac{360^\circ}{a-b}[1] = -0'',0144.$$

Ce nombre divisé par n', dont la valeur est à peu près 12, sera donc le coefficient de l'équation séculaire; d'où l'on voit que ce coefficient ne montera guère qu'à un millième de seconde, à peu près comme celui de l'équation de Saturne, mais avec cette différence que l'un est positif et l'autre négatif.

Donc les équations séculaires des mouvements moyens de Saturne et de Jupiter sont également insensibles, et peuvent être réputées absolument nulles.

Ce résultat nous dispensera maintenant d'examiner aussi les équations séculaires du mouvement des autres Planètes, comme nous nous l'étions proposé; car il est facile de prévoir que les valeurs de ces équations seront encore moindres que celles que nous venons de trouver. Ainsi l'on peut désormais regarder comme une vérité rigoureusement démontrée que l'attraction mutuelle des Planètes principales ne peut produire dans leurs mouvements moyens aucune altération sensible.

THÉORIE
DES VARIATIONS PÉRIODIQUES
DES MOUVEMENTS DES PLANÈTES.

SECONDE PARTIE

CONTENANT LE CALCUL DES VARIATIONS INDÉPENDANTES DES EXCENTRICITÉS ET DES INCLINAISONS POUR CHACUNE DES SIX PLANÈTES PRINCIPALES.

THÉORIE
DES VARIATIONS PÉRIODIQUES
DES MOUVEMENTS DES PLANÈTES.

SECONDE PARTIE
CONTENANT LE CALCUL DES VARIATIONS INDÉPENDANTES DES EXCENTRICITÉS ET DES INCLINAISONS POUR CHACUNE DES SIX PLANÈTES PRINCIPALES.

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1784.)

Les variations périodiques des Planètes ont déjà été calculées par plusieurs Géomètres; mais leurs calculs, épars dans différents Ouvrages, et fondés sur des formules et des données différentes, ne sauraient former un corps. D'ailleurs leurs méthodes mêmes n'ont peut-être pas toute la précision nécessaire pour ne laisser aucun doute sur les résultats; car un défaut commun à toutes ces méthodes est de donner, dès la seconde approximation, une expression inexacte du rayon vecteur, en y introduisant des termes proportionnels au temps, qui ne doivent point s'y trouver sous cette forme; et parmi les différents moyens qu'on a employés pour se débarrasser de ces sortes de termes et les faire servir à la détermination des variations séculaires, les uns sont ou trop compliqués ou trop indirects, et les autres ne sont pas assez rigoureux.

On peut donc encore désirer un Ouvrage où cette partie importante de l'Astronomie physique soit traitée avec autant de généralité que d'exactitude, et qui réunisse à une analyse directe et uniforme l'application

numérique des formules algébriques à toutes les Planètes principales. C'est le motif qui m'a déterminé à entreprendre ce nouveau travail, comme une suite de celui que j'ai donné sur les *Variations séculaires*. En les réunissant on aura une analyse complète des perturbations des Planètes principales, causées par leur attraction mutuelle; et les Astronomes y trouveront tous les secours que la Théorie peut fournir pour la perfection des Tables.

Comme nous avons déjà donné dans la première Partie de la *Théorie des variations périodiques* les formules générales de ces variations, il ne s'agit plus dans cette seconde Partie que de traduire les mêmes formules en nombres pour chacune des Planètes principales. Or, parmi les différentes espèces de variations périodiques que l'action mutuelle des Planètes peut produire dans leurs mouvements, celles qui se présentent les premières sont les variations qui dépendent uniquement de la distance ou commutation des Planètes entre elles, et qui auraient lieu également si les orbites des Planètes étaient sans excentricité et sans inclinaison. Nous commencerons donc par calculer celles-ci, pour lesquelles nous avons trouvé des formules très-simples, qui représentent directement les corrections de la longitude et du rayon vecteur; et nous pourrons même négliger entièrement les corrections du rayon vecteur, comme inutiles pour les applications astronomiques, tant à cause de leur petitesse, que parce que les observations immédiates des longitudes sont les seules dont on fasse usage et sur lesquelles on puisse compter. Nous passerons ensuite à la détermination des autres variations qui dépendent tout à la fois des distances des Planètes et de leurs excentricités et inclinaisons.

SECTION PREMIÈRE

OÙ L'ON DONNE LES VARIATIONS PÉRIODIQUES DU MOUVEMENT DE SATURNE DÉPENDANTES DE SA DISTANCE HÉLIOCENTRIQUE A JUPITER.

Quoique l'attraction soit mutuelle entre toutes les Planètes, on peut néanmoins, dans le calcul du mouvement de Saturne, n'avoir égard qu'à

l'action de Jupiter, les autres Planètes étant et trop petites et trop éloignées pour pouvoir produire dans Saturne des dérangements sensibles; et si cette action se trouve insuffisante pour expliquer tous ceux que les Astronomes y ont observés, il faudra avoir recours à d'autres causes pour en rendre raison. Mais, comme les preuves que l'on a déjà de la gravitation universelle ne permettent pas de douter de l'action réciproque de Jupiter et de Saturne, il est important de déterminer *à priori* les irrégularités dues à cette action, pour pouvoir en dépouiller les résultats des observations, et séparer d'abord les effets de cette cause générale et constante de ceux des autres causes particulières et accidentelles. Je vais donner dans cette Section les inégalités de la longitude de Saturne, dépendantes uniquement de sa distance ou commutation avec Jupiter.

1. Soit p l'angle du mouvement moyen de Saturne, et r sa distance moyenne au Soleil due au mouvement moyen p dans une orbite invariable; soit de même p' l'angle du mouvement moyen de Jupiter décrit en même temps que l'angle p du mouvement de Saturne, et r' la distance moyenne de Jupiter au Soleil due à ce mouvement moyen; enfin soit T' la masse de Jupiter en parties de celle du Soleil.

En appliquant à ces Planètes les résultats donnés dans la première Partie de la *Théorie des variations périodiques* (21), on aura pour les inégalités de la longitude de Saturne produites par l'action de Jupiter et indépendantes des excentricités et des inclinaisons, la formule suivante

$$-T'\left[\frac{1}{n(1-n^2)}2r^2\frac{d[r,r']_1}{dr}+\frac{3+n^2}{n^2(1-n^2)}r[r,r']_1-\frac{3+2n+n^2}{n^2(1-n^2)}\frac{r^2}{r'^2}\right]\sin(p-p')$$

$$-T'\left[\frac{1}{2n(1-4n^2)}2r^2\frac{d[r,r']_2}{dr}+\frac{3+4n^2}{2n^2(1-4n^2)}r[r,r']_2\right]\sin 2(p-p')$$

$$-T'\left[\frac{1}{3n(1-9n^2)}2r^2\frac{d[r,r']_3}{dr}+\frac{3+9n^2}{3n^2(1-9n^2)}r[r,r']_3\right]\sin 3(p-p')$$

$$-T'\left[\frac{1}{4n(1-16n^2)}2r^2\frac{d[r,r']_4}{dr}+\frac{3+16n^2}{4n^2(1-16n^2)}r[r,r']_4\right]\sin 4(p-p')$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dans laquelle

$$n = 1 - \frac{dp'}{dp} = 1 - \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{3}{2}},$$

et où $[r, r']_1$, $[r, r']_2$, $[r, r']_3$, ... sont les coefficients de $\cos u$, $\cos 2u$, $\cos 3u$, ... dans la série résultante du développement de la fonction irrationnelle

$$(r^2 - 2rr'\cos u + r'^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette formule exprime la correction à faire à la longitude de Saturne calculée dans son orbite elliptique. Il y en a une pareille pour la correction du rayon vecteur, mais que nous omettons comme inutile pour les usages astronomiques, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut.

2. Pour pouvoir évaluer la formule précédente, il faudra donc commencer par déterminer les valeurs des fonctions $[r, r']_1$, $[r, r']_2$, ... et de leurs différences premières relativement à r; c'est à quoi on peut employer les formules données dans le n° 45 de la première Partie de la *Théorie des variations séculaires*.

En faisant dans ces formules $s = \frac{1}{2}$, il est visible que les coefficients A, B, C, ... deviennent $[r, r']$, $[r, r']_1$, $[r, r']_2$, ...; de sorte qu'on aura d'abord

$$[r, r']_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{r}{r'} + \frac{r'}{r}\right)[r, r'] - \frac{2}{3}[r, r'],$$

et l'on trouvera de même

$$[r, r']_2 = \frac{4}{5}\left(\frac{r}{r'} + \frac{r'}{r}\right)[r, r']_1 - \frac{3}{5}[r, r'],$$

$$[r, r']_3 = \frac{6}{7}\left(\frac{r}{r'} + \frac{r'}{r}\right)[r, r']_2 - \frac{5}{7}[r, r']_1,$$

.....;

d'où, en faisant varier r, on tirera les valeurs des différences de $[r, r']_2$, ...; par conséquent il suffira de connaître les valeurs des deux premières fonctions $[r, r']$, $[r, r']$, et celles de leurs différences, pour avoir les valeurs de toutes les autres à l'infini.

3. Dans le même endroit, nous avons fait dépendre ces valeurs de celles des fonctions (r, r') et $(r, r')_1$, résultantes du développement de la quantité

$$(r^2 - 2rr'\cos u + r'^2)^{-\frac{3}{2}},$$

fonctions qui sont plus faciles à calculer, et pour lesquelles nous avons donné dans le n° 48 du même Ouvrage des séries très-convergentes; nous en userons de même ici, d'autant plus que nous avons aussi déjà donné dans la seconde Partie de la même Théorie les valeurs numériques de ces séries pour toutes les Planètes principales; et même, au lieu de faire dépendre les fonctions $[r, r']$, $[r, r']_1$, $[r, r']_2$, ... et leurs différences les unes des autres, il sera plus simple de les faire dépendre simplement et immédiatement des fonctions correspondantes (r, r'), $(r, r')_1$, $(r, r')_2$, ...

Pour cela on trouvera d'abord, en faisant dans les formules citées $s = \frac{3}{2}$ et changeant a, b, c, ... en (r, r'), $(r, r')_1$, $(r, r')_2$, ...,

$$(r, r')_2 = 3\left(\frac{r}{r'} + \frac{r'}{r}\right)(r, r')_1 - 6(r, r'),$$

$$(r, r')_3 = \frac{4}{3}\left(\frac{r}{r'} + \frac{r'}{r}\right)(r, r')_2 - \frac{5}{3}(r, r')_1,$$

$$(r, r')_4 = \frac{6}{5}\left(\frac{r}{r'} + \frac{r'}{r}\right)(r, r')_2 - \frac{7}{5}(r, r')_2,$$

.....

On trouvera ensuite

$$[r, r'] = (r^2 + r'^2)(r, r') - rr'(r, r')_1,$$

$$[r, r']_1 = \frac{rr'}{2}[2(r, r') - (r, r')_2] = 4rr'(r, r') - (r^2 + r'^2)(r, r')_1,$$

$$[r, r']_2 = \frac{rr'}{4}[(r, r')_1 - (r, r')_3] = \frac{3}{2}rr'(r, r')_1 - \frac{1}{3}(r^2 + r'^2)(r, r')_2,$$

$$[r, r']_3 = \frac{rr'}{6}[(r, r')_2 - (r, r')_4] = \frac{5}{3}rr'(r, r')_2 - \frac{1}{3}(r^2 + r'^2)(r, r')_3,$$

.....

Enfin on aura par les mêmes formules

$$2r\frac{d[r,r']}{dr} = -[r,r'] - (r^2 - r'^2)(r,r'),$$

$$2r\frac{d[r,r']_1}{dr} = -[r,r']_1 - (r^2 - r'^2)(r,r')_1,$$

$$2r\frac{d[r,r']_2}{dr} = -[r,r']_2 - (r^2 - r'^2)(r,r')_2,$$

.....

4. Or, en faisant $z = \frac{r'}{r}$ et prenant pour M et N les expressions en z du n° 3 de la seconde Partie de la Théorie citée, on a

$$(r,r') = \frac{M}{r^3(1-z^2)^2}, \quad (r,r')_1 = \frac{6N}{r^3(1-z^2)^2}.$$

Si donc on suppose

$$(0) = \frac{M}{(1-z^2)^2}, \quad (1) = \frac{6N}{(1-z^2)^2},$$

et ensuite

$$(2) = 2\left(z+\frac{1}{z}\right)(1) - 6(0),$$

$$(3) = \frac{4}{3}\left(z+\frac{1}{z}\right)(2) - \frac{5}{3}(1),$$

$$(4) = \frac{6}{5}\left(z+\frac{1}{z}\right)(3) - \frac{7}{5}(2),$$

$$(5) = \frac{8}{7}\left(z+\frac{1}{z}\right)(4) - \frac{9}{7}(3),$$

.....,

on aura

$$r[r,r'] = (1+z^2)(0) - z(1),$$

$$r[r,r']_1 = 4z(0) - (1+z^2)(1),$$

$$r[r,r']_2 = \tfrac{3}{2}z(1) - \tfrac{1}{2}(1+z^2)(2),$$

$$r[r,r']_3 = \tfrac{2}{3}z(2) - \tfrac{1}{3}(1+z^2)(3),$$

$$r[r,r']_4 = \tfrac{5}{4}z(3) - \tfrac{1}{4}(1+z^2)(4),$$

.....,

$$2r^2\frac{d[r,r']}{dr} = -r[r,r'] - (1-z^2)(0),$$

$$2r^2\frac{d[r,r']_1}{dr} = -r[r,r']_1 - (1-z^2)(1),$$

$$2r^2\frac{d[r,r']_2}{dr} = -r[r,r']_2 - (1-z^2)(2),$$

$$2r^2\frac{d[r,r']_3}{dr} = -r[r,r']_3 - (1-z^2)(3),$$

$$2r^2\frac{d[r,r']_4}{dr} = -r[r,r']_4 - (1-z^2)(4),$$

.....

Par ces substitutions la formule générale du n° 1 ne contiendra que les quantités connues z, T'; et cette formule pourra servir pour une Planète quelconque, en tant qu'elle sera dérangée par une Planète inférieure T', en prenant r pour la distance moyenne de la Planète troublée et r' pour celle de la Planète perturbatrice.

5. En employant les données du n° 4 de la seconde Partie de la Théorie citée, on aura d'abord

$$z = 0{,}545172, \quad M = 1{,}075800, \quad N = 0{,}262042;$$

et de là on trouvera

$(0) = 2{,}178132$	log.	$0{,}3380841$,
$(1) = 3{,}183280$		$0{,}5028748$,
$(2) = 2{,}080150$		$0{,}3180946$,
$(3) = 1{,}294033$		$0{,}1119453$,
$(4) = 0{,}782704$		$9{,}8935975$,
$(5) = 0{,}464710$		$9{,}6671820$,
$(6) = 0{,}271980$		$9{,}4345370$,
$(7) = 0{,}156794$		$9{,}1953295$,
$(8) = 0{,}087960$		$8{,}9442852$,
.....		.....,

ensuite

$$r[r, r'] = 1{,}090064 \qquad \log.\ 0{,}0374519,$$
$$r[r, r']_1 = 0{,}620438 \qquad 9{,}7926980,$$
$$r[r, r']_2 = 0{,}257492 \qquad 9{,}4107629,$$
$$r[r, r']_3 = 0{,}117889 \qquad 9{,}0714723,$$
$$r[r, r']_4 = 0{,}056515 \qquad 8{,}7521669,$$
$$r[r, r']_5 = 0{,}027843 \qquad 8{,}4447193,$$
$$r[r, r']_6 = 0{,}013989 \qquad 8{,}1457824,$$
$$r[r, r']_7 = 0{,}007166 \qquad 7{,}8552712,$$
$$r[r, r']_8 = 0{,}003790 \qquad 7{,}5786891,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

enfin

$$2r^2\frac{d[r, r']}{dr} = -2{,}620828 \qquad \log.\ \bar{0}{,}4184385,$$
$$2r^2\frac{d[r, r']_1}{dr} = -2{,}857608 \qquad \bar{0}{,}4560026,$$
$$2r^2\frac{d[r, r']_2}{dr} = -1{,}719395 \qquad \bar{0}{,}2353758,$$
$$2r^2\frac{d[r, r']_3}{dr} = -1{,}027319 \qquad \bar{0}{,}0117053,$$
$$2r^2\frac{d[r, r']_4}{dr} = -0{,}606589 \qquad \bar{9}{,}7828946,$$
$$2r^2\frac{d[r, r']_5}{dr} = -0{,}354435 \qquad \bar{9}{,}5495366,$$
$$2r^2\frac{d[r, r']_6}{dr} = -0{,}205133 \qquad \bar{9}{,}3120356,$$
$$2r^2\frac{d[r, r']_7}{dr} = -0{,}117359 \qquad \bar{9}{,}0695164,$$
$$2r^2\frac{d[r, r']_8}{dr} = -0{,}065607 \qquad \bar{8}{,}8169502,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

6. Maintenant, puisque

$$n = 1 - \left(\frac{r}{r'}\right)^{\frac{3}{2}} = 1 - \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}},$$

on aura

$$n = -1{,}484276.$$

Par le moyen de cette valeur et des précédentes on trouvera celles des coefficients de $\sin(p-p')$, $\sin 2(p-p')$, ... dans la formule du n° 1, et elle deviendra

$$-T'[+0{,}01835\sin(p-p') - 0{,}16250\sin 2(p-p')$$
$$-0{,}03388\sin 3(p-p') - 0{,}01015\sin 4(p-p')$$
$$-0{,}00360\sin 5(p-p') - 0{,}00141\sin 6(p-p')$$
$$-0{,}00059\sin 7(p-p') - 0{,}00026\sin 8(p-p') - \ldots].$$

7. Il ne reste donc plus qu'à substituer la valeur de T′, masse de Jupiter exprimée en parties de celle du Soleil, et de réduire les coefficients en arc, en les multipliant par l'arc égal au rayon.

Nous prendrons pour T′ la valeur que nous avons employée dans la seconde Partie de la *Théorie des variations séculaires* et qui est $\frac{1}{1067{,}195}$ (8). Multipliant cette fraction par 206264,8, nombre des secondes contenues dans l'arc égal au rayon, on a le nombre 193″,2775 pour la valeur de T en secondes qu'il faudra substituer dans la formule précédente.

Si donc, pour plus de simplicité, on désigne pour ♄ le lieu moyen de Saturne et par ♃ celui de Jupiter, on aura

Correction de la longitude de Saturne due à l'action de Jupiter et dépendante de la distance de Saturne à Jupiter

$$-3'',547\sin(♄-♃) + 31'',408\sin 2(♄-♃)$$
$$+6'',548\sin 3(♄-♃) + 1'',961\sin 4(♄-♃)$$
$$+0'',695\sin 5(♄-♃) + 0'',272\sin 6(♄-♃)$$
$$+0'',114\sin 7(♄-♃) + 0'',050\sin 8(♄-♃) + \ldots.$$

8. Cette formule, quoique composée de plusieurs termes, ne constitue cependant qu'une seule équation dépendante de la distance, ou angle au Soleil, entre Saturne et Jupiter, et peut par conséquent être renfermée dans une Table unique, qui aura cette distance pour argument.

On voit que cette équation sera nulle dans les conjonctions et les oppositions de Jupiter et Saturne, que dans les quadratures de ces Planètes elle sera $\pm 9'',512$, et que dans les octants elle montera à $\pm 32'',686$ ou $\pm 33'',230$, et sera à peu près à son maximum. D'où il s'ensuit que cette équation sera toujours beaucoup au-dessous des erreurs auxquelles les meilleures Tables connues de Saturne sont encore sujettes, et qui montent à près de 20 minutes; elle ne pourra par conséquent contribuer que très-peu à la perfection de ces Tables.

Il était cependant important de voir ce que la Théorie peut donner à cet égard, et quoique la même équation ait déjà été calculée dans les deux Pièces sur les inégalités de Saturne et Jupiter qui ont remporté le Prix de l'Académie des Sciences de Paris en 1748 et 1752; cependant, comme les résultats sont fort différents relativement au premier terme, qui dans la Pièce de 1748 a $4''$ pour coefficient et dans celle de 1752 a $-12''$, j'ai cru qu'il était nécessaire de revenir sur ces calculs pour dissiper les doutes que cette différence pourrait faire naître sur leur exactitude, et fixer ce point de la Théorie de Saturne d'une manière incontestable.

Par cette raison j'ai aussi calculé deux fois plus de termes que M. Euler n'avait fait, afin qu'on puisse être d'autant mieux assuré de la convergence de la série et du degré de précision sur lequel on pourra compter.

SECTION DEUXIÈME

OÙ L'ON DONNE LES VARIATIONS PÉRIODIQUES DU MOUVEMENT DE JUPITER, DÉPENDANTES DE SA DISTANCE HÉLIOCENTRIQUE A SATURNE, AVEC LES INÉGALITÉS QUI EN RÉSULTENT DANS LES ÉCLIPSES DE SES SATELLITES.

Comme dans le calcul des variations de Saturne nous n'avons eu égard qu'à l'effet de l'attraction de Jupiter, nous pouvons ainsi et par la même raison ne tenir compte que de l'action de Saturne dans la détermination des variations de Jupiter; car ces deux Planètes forment par la grandeur de leurs masses, et par leur éloignement du Soleil, comme un système à part et indépendant des autres Planètes.

Les inégalités du mouvement de Jupiter sont d'autant plus importantes à connaître qu'elles influent sur le temps des éclipses de ses satellites, et par conséquent sur la détermination des longitudes, un des principaux objets de l'Astronomie et un des avantages les plus sensibles qui résultent de cette science. Par cette raison il est nécessaire de calculer ces inégalités avec une précision et une étendue qui ne laissent rien à désirer; je vais remplir une partie de cet objet dans la Section présente, qui est uniquement destinée à la recherche des inégalités dépendantes de la distance ou commutation entre Jupiter et Saturne.

1. Soient, comme dans la Section précédente, p l'angle du mouvement moyen de Saturne, r sa distance moyenne, p' l'angle contemporain du mouvement moyen de Jupiter, r' sa distance moyenne, et soit de plus T la masse de Saturne exprimée en parties de celle du Soleil; on aura pour les inégalités de la longitude de Jupiter dues à l'action de Saturne, et indépendantes des excentricités et des inclinaisons, une formule semblable à celle du n° 1 de la même Section, en changeant seulement dans celle-ci les lettres p', r', T' en p, r, T, et *vice versâ*; ce qui est évident, puisque dans le cas présent ce sont les lettres affectées d'un trait qui appartiennent à la Planète troublée, tandis que celles sans trait se rapportent à la Planète perturbatrice.

Or on sait que les fonctions $[r, r']$, $[r, r']_1$,... demeurent les mêmes en y changeant r en r' et r' en r, puisque le radical $(r^2 - 2rr'\cos u + r'^2)^{-\frac{1}{2}}$, d'où elles dérivent, ne subit aucune altération par ce changement; ainsi la formule des inégalités dont il s'agit sera de cette forme

$$-T\left[\frac{1}{n(1-n^2)}\,2r'^2\frac{d[r,r']}{dr'}+\frac{3+n^2}{n^2(1-n^2)}r'[r,r'],-\frac{3+2n+n^2}{n^2(1-n^2)}\frac{r'^2}{r^2}\right]\sin(p'-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{2n(1-4n^2)}\,2r'^2\frac{d[r,r']_2}{dr'}+\frac{3+4n^2}{2n^2(1-4n^2)}r'[r,r']_2\right]\sin 2(p'-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{3n(1-9n^2)}\,2r'^2\frac{d[r,r']_3}{dr'}+\frac{3+9n^2}{3n^2(1-9n^2)}r'[r,r']_3\right]\sin 3(p'-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{4n(1-16n^2)}\,2r'^2\frac{d[r,r']_4}{dr'}+\frac{3+16n^2}{4n^2(1-16n^2)}r'[r,r']_4\right]\sin 4(p'-p)$$

—.....,

n étant $= 1-\frac{dp}{dp'} = 1-\left(\frac{r'}{r}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Quant aux inégalités du rayon vecteur, on peut les négliger, comme on l'a fait pour Saturne et par les mêmes raisons.

2. Les valeurs des fonctions $[r, r']$, $[r, r']_1$, $[r, r']_2$,... sont les mêmes ici que dans la Section précédente.

A l'égard des différences $\frac{d[r,r']}{dr'}$, $\frac{d[r,r']_1}{dr'}$,..., il n'y aura qu'à changer dans les formules du n° 3 de la même Section r en r' et r' en r, en observant que les fonctions (r, r'), $(r, r')_1$,... demeurent aussi les mêmes dans ces changements. De sorte qu'on aura

$$2r'\frac{d[r,r']}{dr'} = -[r,r'] - (r'^2 - r^2)(r,r'),$$

$$2r'\frac{d[r,r']_1}{dr'} = -[r,r']_1 - (r'^2 - r^2)(r,r')_1,$$

.....

Ainsi, en faisant, comme dans le n° 4 de la Section citée, $z = \frac{r'}{r}$, et

conservant les mêmes valeurs des quantités (0), (1), (2),..., on aura dans le cas présent

$$r'[r,r'] = z[(1+z^2)(0) - z(1)],$$
$$r'[r,r']_1 = z[4z(0) - (1+z^2)(1)],$$
$$r'[r,r']_2 = z[\tfrac{3}{2}z(1) - \tfrac{1}{2}(1+z^2)(2)],$$
$$r'[r,r']_3 = z[\tfrac{3}{4}z(2) - \tfrac{1}{4}(1+z^2)(3)],$$
.....;

$$2r'^2\frac{d[r,r']}{dr'} = -r'[r,r'] + z(1-z^2)(0),$$

$$2r'^2\frac{d[r,r']_1}{dr'} = -r'[r,r']_1 + z(1-z^2)(1),$$

$$2r'^2\frac{d[r,r']_2}{dr'} = -r'[r,r']_2 + z(1-z^2)(2),$$

.....

Mais, comme on a déjà calculé dans la Section précédente les valeurs des quantités

$$r[r,r'],\quad r[r,r']_1,\quad r[r,r']_2,\ldots,$$

ainsi que celles de

$$2r^2\frac{d[r,r']}{dr},\quad 2r^2\frac{d[r,r']_1}{dr},\quad 2r^2\frac{d[r,r']_2}{dr},\ldots,$$

on pourra déduire immédiatement de ces valeurs celles des quantités ci-dessus, en faisant

$$r'[r,r'] = z\,r[r,r'],$$
$$r'[r,r']_1 = z\,r[r,r']_1,$$
$$r'[r,r']_2 = z\,r[r,r']_2,$$
.....;

$$2r'^2\frac{d[r,r']}{dr'} = -2r'[r,r'] - z\times 2r^2\frac{d[r,r']}{dr},$$

$$2r'^2\frac{d[r,r']_1}{dr'} = -2r'[r,r']_1 - z\times 2r^2\frac{d[r,r']_1}{dr},$$

$$2r'^2\frac{d[r,r']_2}{dr'} = -2r'[r,r']_2 - z\times 2r^2\frac{d[r,r']_2}{dr},$$

.....

Telles sont les valeurs qu'il faudra substituer dans la formule générale du numéro précédent; et cette formule servira, en général, pour une Planète quelconque, en tant qu'elle sera dérangée par une Planète supérieure T, en prenant r' pour la distance moyenne de la Planète troublée et r pour celle de la Planète perturbatrice.

3. De cette manière on trouvera

$$r'[r,r'] = 0{,}594272 \qquad \log.\ 9{,}7739854,$$
$$r'[r,r']_1 = 0{,}338245 \qquad 9{,}5292315,$$
$$r'[r,r']_2 = 0{,}140377 \qquad 9{,}1472964,$$
$$r'[r,r']_3 = 0{,}064270 \qquad 8{,}8080058,$$
$$r'[r,r']_4 = 0{,}030811 \qquad 8{,}4887004,$$
$$r'[r,r']_5 = 0{,}015179 \qquad 8{,}1812527,$$
$$r'[r,r']_6 = 0{,}007626 \qquad 7{,}8823159,$$
$$r'[r,r']_7 = 0{,}003907 \qquad 7{,}5918047,$$
$$r'[r,r']_8 = 0{,}002066 \qquad 7{,}3152226,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

ensuite

$$2r'^2\frac{d[r,r']}{dr'} = 0{,}240257 \qquad \log.\ 9{,}3806766,$$
$$2r'^2\frac{d[r,r']_1}{dr'} = 0{,}881397 \qquad 9{,}9451715,$$
$$2r'^2\frac{d[r,r']_2}{dr'} = 0{,}656612 \qquad 9{,}8173089,$$
$$2r'^2\frac{d[r,r']_3}{dr'} = 0{,}431526 \qquad 9{,}6350069,$$
$$2r'^2\frac{d[r,r']_4}{dr'} = 0{,}269074 \qquad 9{,}4298726,$$
$$2r'^2\frac{d[r,r']_5}{dr'} = 0{,}162869 \qquad 9{,}2118399,$$
$$2r'^2\frac{d[r,r']_6}{dr'} = 0{,}096580 \qquad 8{,}9848869,$$

$$2r'^2\frac{d[r,r']_7}{dr'} = 0{,}056167 \qquad \log.\ 8{,}7494844,$$
$$2r'^2\frac{d[r,r']_8}{dr'} = 0{,}031635 \qquad 8{,}5001636,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

4. Or, n étant ici égal à

$$1-\left(\frac{r'}{r}\right)^{\frac{3}{2}} = 1-z^{\frac{3}{2}},$$

on trouve

$$n = 0{,}597468,$$

et la formule du n° 1 deviendra par ces substitutions

$$-T[+1{,}34704\ \sin(p'-p) - 3{,}31904\sin 2(p'-p)$$
$$-0{,}27731\sin 3(p'-p) - 0{,}06379\sin 4(p'-p)$$
$$-0{,}01968\sin 5(p'-p) - 0{,}00704\sin 6(p'-p)$$
$$-0{,}00276\sin 7(p'-p) - 0{,}00116\sin 8(p'-p) - \ldots].$$

5. Dans la première Section de la seconde Partie de la *Théorie des variations séculaires*, je suis entré dans une discussion assez étendue sur les valeurs des masses des Planètes, et j'ai trouvé pour la masse de Saturne une valeur moindre que celle qu'on avait adoptée jusqu'ici d'après Newton. Cette valeur est de $\frac{1}{3358,40}$; de sorte qu'en l'employant ici pour T, après l'avoir multipliée par 206264,8, nombre de secondes de l'arc égal au rayon, on aura 614″,1756 pour la valeur de T en secondes, qu'il faudra substituer dans la formule précédente.

On aura ainsi, en dénotant toujours par $\mathfrak{h}$ le lieu moyen de Saturne et par $\mathfrak{Z}'$ celui de Jupiter,

Correction de la longitude de Jupiter due à l'action de Saturne et dépendante de la distance de Jupiter à Saturne

$$-82'',732\ \sin(\mathfrak{Z}'-\mathfrak{h}) + 203'',847\sin 2(\mathfrak{Z}'-\mathfrak{h})$$
$$+17'',032\sin 3(\mathfrak{Z}'-\mathfrak{h}) + 3'',918\sin 4(\mathfrak{Z}'-\mathfrak{h})$$
$$+1'',209\sin 5(\mathfrak{Z}'-\mathfrak{h}) + 0'',432\sin 6(\mathfrak{Z}'-\mathfrak{h})$$
$$+0'',169\sin 7(\mathfrak{Z}'-\mathfrak{h}) + 0'',071\sin 8(\mathfrak{Z}'-\mathfrak{h}) + \ldots.$$

6. Cette formule est, comme on voit, analogue à celle que nous avons trouvée pour Saturne, et peut de même être représentée par une seule Table, dont l'argument sera la distance ou angle au Soleil entre ces deux Planètes.

Elle est pareillement nulle dans leurs conjonctions et oppositions; dans les quadratures elle sera de $\pm 98'',724$, et dans les octants elle montera à $156'',691$ ou $-250'',139$, et cette dernière valeur sera très-près du maximum. D'où l'on voit que l'équation de Jupiter est presque huit fois plus grande que celle de Saturne, quoique la masse de Saturne qui la produit ne soit qu'environ le tiers de celle de Jupiter qui produit l'équation de Saturne; ce qui vient de ce que l'action d'une Planète perturbatrice est encore plus augmentée par la lenteur de son mouvement que par la grandeur de sa masse.

Dans la seconde Pièce déjà citée, sur les *irrégularités de Jupiter et de Saturne*, l'équation dont il s'agit n'est calculée que jusqu'au quatrième terme, et les coefficients s'accordent à très-peu près avec ceux de la formule précédente, en ayant égard à la différence de la masse de Saturne, qui y est supposée, d'après Newton, de $\frac{1}{3021}$; de sorte qu'ils s'y trouvent augmentés tous dans la raison de 3558 à 3021 ou de 1,1117 à 1. Cet accord peut servir de confirmation à la bonté de nos calculs, et augmenter encore la confiance qu'on y doit avoir. Au reste notre formule, contenant deux fois plus de termes, est aussi à cet égard plus exacte et montre en même temps combien la série est convergente.

7. Les inégalités, qui altèrent le mouvement de Jupiter autour du Soleil, doivent affecter aussi les retours des satellites de cette Planète à leurs conjonctions et les intervalles des éclipses; et il n'est pas difficile de voir que chaque équation du mouvement de Jupiter produira une équation semblable pour le temps des éclipses de chacun de ses satellites, et dont la quantité en temps sera à la quantité de l'équation de Jupiter en arc comme le temps de la révolution synodique du satellite sera à l'arc de 360 degrés.

Or, pour le premier satellite, la durée de la révolution synodique, ou de ses retours aux conjonctions avec Jupiter, est de $1^j\,18^h\,28^m\,35^s,948$ ou $152915^s,948$. Divisant ce nombre par 1296000, nombre de secondes du cercle entier, on aura le nombre 0,11799, par lequel il faudra multiplier les équations de Jupiter en secondes de degrés, pour avoir les équations correspondantes du premier satellite en secondes de temps. Appliquant donc cette réduction à la correction de la longitude de Jupiter donnée ci-dessus (5), on aura

Correction du temps des éclipses du premier satellite de Jupiter, dépendante de la distance de cette Planète à Saturne

$$\begin{aligned}
&-9^s,762\,\sin(\mathcal{Z}-\mathfrak{h}) + 24^s,052\sin 2(\mathcal{Z}-\mathfrak{h})\\
&+2^s,010\sin 3(\mathcal{Z}-\mathfrak{h}) + 0^s,462\sin 4(\mathcal{Z}-\mathfrak{h})\\
&+0^s,143\sin 5(\mathcal{Z}-\mathfrak{h}) + 0^s,051\sin 6(\mathcal{Z}-\mathfrak{h})\\
&+0^s,020\sin 7(\mathcal{Z}-\mathfrak{h}) + 0^s,008\sin 8(\mathcal{Z}-\mathfrak{h}).
\end{aligned}$$

Pour le second satellite, la durée de la révolution synodique est de $3^j\,13^h\,17^m\,53^s,749$, ou de $307073^s,749$, et ce nombre divisé par 1296000 donne le nombre 0,23694, par lequel il faudra multiplier les coefficients de la correction de Jupiter pour avoir celle du second satellite en temps. Donc

Correction du temps des éclipses du second satellite, dépendante de la distance de Jupiter à Saturne

$$\begin{aligned}
&-19^s,603\,\sin(\mathcal{Z}-\mathfrak{h}) + 48^s,300\sin 2(\mathcal{Z}-\mathfrak{h})\\
&+4^s,036\sin 3(\mathcal{Z}-\mathfrak{h}) + 0^s,928\sin 4(\mathcal{Z}-\mathfrak{h})\\
&+0^s,286\sin 5(\mathcal{Z}-\mathfrak{h}) + 0^s,102\sin 6(\mathcal{Z}-\mathfrak{h})\\
&+0^s,040\sin 7(\mathcal{Z}-\mathfrak{h}) + 0^s,017\sin 8(\mathcal{Z}-\mathfrak{h}).
\end{aligned}$$

Pour le troisième satellite, la durée de la révolution synodique est de $7^j\,3^h\,59^m\,35^s,868$, ou de $619175^s,868$, et ce nombre divisé par 1296000

donne le nombre 0.47776, par lequel il faudra multiplier la correction de Jupiter pour avoir celle du troisième satellite. Ainsi l'on aura

Correction du temps des éclipses du troisième satellite, dépendante de la distance de Jupiter à Saturne.

$$\begin{aligned}
&-39^s,526\ \sin(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})+97^s,390\sin 2(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})\\
&+\ 8^s,137\sin 3(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})+\ 1^s,872\sin 4(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})\\
&+\ 0^s,577\sin 5(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})+\ 0^s,207\sin 6(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})\\
&+\ 0^s,081\sin 7(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})+\ 0^s,034\sin 8(\mathcal{Z}-\mathcal{Y}).
\end{aligned}$$

Enfin, pour le quatrième satellite, la durée de la révolution synodique étant de $16^j18^h5^m7^s,092$, ou de $1447507^s,092$, on aura, en divisant ce nombre par 1296000, le nombre 1,11690, par lequel la correction de Jupiter devra être multipliée pour obtenir celle des éclipses du quatrième satellite. Donc

Correction du temps des éclipses du quatrième satellite, dépendante de la distance de Jupiter à Saturne

$$\begin{aligned}
&-92^s,404\ \sin(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})+227^s,678\sin 2(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})\\
&+19^s,023\sin 3(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})+\ 4^s,376\sin 4(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})\\
&+\ 1^s,350\sin 5(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})+\ 0^s,483\sin 6(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})\\
&+\ 0^s,189\sin 7(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})+\ 0^s,080\sin 8(\mathcal{Z}-\mathcal{Y}).
\end{aligned}$$

Au reste ces différentes corrections étant simplement proportionnelles à celle de la longitude de Jupiter, lorsqu'on aura réduit celle-ci en Table, on n'aura plus qu'à multiplier tous les nombres de la Table par les multiplicateurs donnés pour construire les Tables des corrections des éclipses.

8. Parmi les Tables des satellites de Jupiter dressées par feu M. Wargentin, on en trouve pour chaque satellite une qui a pour titre : *Somme des équations dépendantes de l'action de Saturne sur Jupiter*, et qui est proprement composée de différentes Tables, fondées sur diverses équations de Jupiter produites par Saturne. M. de Lalande a donné dans la

Connaissance des mouvements célestes pour 1763 les Tables de ces équations pour Jupiter, et je me suis assuré que celles des satellites en dépendent uniquement. M. de Lalande dit qu'elles sont de feu M. Mayer, qui les avait déduites de la Théorie; mais il ne donne point les formules d'où elles résultent, et je ne sache pas que le travail de Mayer sur cette matière ait jamais été publié.

Cependant, comme il n'est pas difficile de retrouver ces formules d'après les Tables mêmes, les voici

Équations de Mayer pour la correction de la longitude de Jupiter due à l'action de Saturne.

$$\begin{aligned}
&-83''\sin(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})+224''\sin 2(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})+14''\sin 3(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})\\
&+143''\sin[2(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})-\text{anom. moy. }\mathcal{Z}]\\
&+\ 47''\sin[3(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})-\text{anom. moy. }\mathcal{Z}]\\
&+\ 56''\sin(\mathcal{Z}-\mathcal{Y}-\text{anom. moy. }\mathcal{Y})\\
&+\ 90''\sin[2(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})-\text{anom. moy. }\mathcal{Y}].
\end{aligned}$$

9. Il est visible que les trois premières équations dépendantes simplement de la distance de Jupiter à Saturne répondent à celles que nous venons de calculer dans cette Section, et en particulier aux trois premiers termes de la formule trouvée dans le n° 5. Aussi le coefficient de $\sin(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})$ est, aux dixièmes de seconde près, le même dans cette formule et dans la précédente; mais le coefficient du $\sin 2(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})$ est dans notre formule moindre d'un dixième que dans celle de Mayer, et le coefficient du $\sin 3(\mathcal{Z}-\mathcal{Y})$ est au contraire plus grand dans celle-là que dans celle-ci d'environ un cinquième. Or, comme le rapport des coefficients est indépendant de la masse de Saturne et n'est donné que par les rapports des distances et des temps périodiques de Saturne et de Jupiter, ainsi qu'on le voit par la formule générale du n° 1, il s'ensuit que les équations de Mayer ne sont pas exactement conformes à la Théorie de la gravitation; puisque d'un côté les distances et les temps périodiques des Planètes ne sont susceptibles d'aucune correction qui puisse avoir un effet

sensible sur les coefficients dont il s'agit, et que de l'autre on peut compter entièrement sur l'exactitude de nos calculs, laquelle se trouve d'ailleurs confirmée par l'accord de nos résultats avec ceux de la Pièce citée de 1752.

Cependant le grand mérite de l'Auteur et la précision singulière qui distingue tous ses Ouvrages ne permettent pas de douter de la justesse de ses calculs sur les inégalités de Jupiter; on peut donc présumer qu'il en aura usé à l'égard de ces inégalités comme il l'a fait pour les inégalités de la Lune, et qu'après avoir déterminé les coefficients par la Théorie, il aura cherché à les corriger d'après les observations; mais les équations trouvées de la sorte ne peuvent être regardées que comme des équations empiriques, du moins en tant qu'elles s'écartent de celles qui résultent de la Théorie, et si ces équations peuvent rapprocher les Tables des observations pendant un certain espace de temps, on doit toujours craindre qu'elles ne les en éloignent dans la suite de plus en plus, comme il arrive déjà aux équations empiriques que feu M. Lambert avait données pour détruire les erreurs des Tables de Halley dans les oppositions de Saturne et de Jupiter.

Nous croyons donc qu'il est beaucoup plus sûr de s'en tenir uniquement à la Théorie, du moins pour les équations que celle-ci peut fournir, et qu'il conviendrait par conséquent d'employer dans les Tables des satellites les corrections que nous venons de donner, à la place de celles qui résultent de la Table de Mayer pour les inégalités de Jupiter dépendantes de sa distance à Saturne.

Quant aux autres Tables de Mayer qui dépendent à la fois de la distance de Jupiter à Saturne et des anomalies de ces deux Planètes, nous nous réservons de les apprécier lorsque nous aurons calculé la partie des inégalités de Jupiter qui dépend des excentricités.

SECTION TROISIÈME

OÙ L'ON DONNE LES VARIATIONS PÉRIODIQUES DU MOUVEMENT DE MARS, DÉPENDANTES DE SES DISTANCES HÉLIOCENTRIQUES AUX AUTRES PLANÈTES.

Après avoir déterminé les variations de Jupiter et de Saturne, nous allons entreprendre le calcul de celles des autres Planètes. Ce calcul ne sera pas plus difficile, mais beaucoup plus long; car il faudra y avoir égard pour chaque Planète à l'action de toutes les autres. En effet les orbites de Mars, de la Terre, de Vénus et de Mercure sont assez proches les unes des autres pour qu'elles puissent être sensiblement dérangées par l'attraction mutuelle de ces Planètes; et en même temps elles doivent l'être aussi par l'action de Jupiter et de Saturne, dont l'éloignement se trouve compensé par la grandeur des masses. Cette Section contiendra les variations périodiques de Mars dues aux actions de Saturne, Jupiter, la Terre, Vénus et Mercure, et dépendantes simplement de sa distance héliocentrique à chacune de ces Planètes.

§ I. — *Calcul des variations de Mars dues à l'action de Saturne.*

1. La formule générale des inégalités de la longitude de Mars, provenantes de l'action de Saturne, sera la même que celle que nous avons donnée dans le n° 1 de la Section précédente pour les inégalités de Jupiter dues à la même action, en y changeant simplement les quantités relatives à Jupiter en quantités analogues pour Mars.

Ayant désigné jusqu'ici par T, r, p la masse, la distance moyenne et l'angle du mouvement moyen de Saturne, et par T′, r', p' les mêmes quantités pour Jupiter, nous désignerons pareillement par T″ la masse de Mars, par r'' sa distance moyenne et par p'' l'angle de son mouvement moyen dû à cette distance supposée constante.

Et, en général, les mêmes lettres marquées de trois, de quatre, de cinq traits se rapporteront successivement à la Terre, à Vénus, à Mercure, ainsi que nous en avons usé dans la seconde Partie de la *Théorie des variations séculaires*.

Il n'y aura donc qu'à changer dans la formule citée r' et p' en r'' et p''; et l'on aura, pour les inégalités de la longitude de Mars dépendantes de sa distance à Saturne, la formule suivante

$$-T\left[\frac{1}{n(1-n^2)}2r''^2\frac{d[r,r'']_1}{dr''}+\frac{3+n^2}{n^2(1-n^2)}r''[r,r'']_1-\frac{3+2n+n^2}{n^2(1-n^2)}\frac{r''^2}{r^2}\right]\sin(p''-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{2n(1-4n^2)}2r''^2\frac{d[r,r'']_2}{dr''}+\frac{3+4n^2}{2n^2(1-4n^2)}r''[r,r'']_2\right]\sin 2(p''-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{3n(1-9n^2)}2r''^2\frac{d[r,r'']_3}{dr''}+\frac{3+9n^2}{3n^2(1-9n^2)}r''[r,r'']_3\right]\sin 3(p''-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{4n(1-16n^2)}2r''^2\frac{d[r,r'']_4}{dr''}+\frac{3+16n^2}{4n^2(1-16n^2)}r''[r,r'']_4\right]\sin 4(p''-p)$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dans laquelle

$$n=1-\frac{dp}{dp''}=1-\left(\frac{r''}{r}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

2. On fera maintenant $z=\frac{r''}{r}$, et, prenant pour M et N les valeurs correspondantes données dans le n° 4 de la seconde Partie de la *Théorie des variations séculaires*, on aura comme dans le n° 4 de la première Section

$$(0)=\frac{M}{(1-z^2)^2},$$

$$(1)=\frac{6N}{(1-z^2)^2},$$

$$(2)=2\left(z+\frac{1}{z}\right)(1)-6(0),$$

$$(3)=\frac{4}{3}\left(z+\frac{1}{z}\right)(2)-\frac{5}{3}(1),$$

$$(4)=\frac{6}{5}\left(z+\frac{1}{z}\right)(3)-\frac{7}{5}(2),$$

$$(5)=\frac{8}{7}\left(z+\frac{1}{z}\right)(4)-\frac{9}{7}(3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et de là, par les formules du n° 2 de la Section précédente,

$$r''[r,r'']=z[(1+z^2)(0)-z(1)],$$

$$r''[r,r'']_1=z[4z(0)-(1+z^2)(1)],$$

$$r''[r,r'']_2=z[\tfrac{3}{2}z(1)-\tfrac{1}{2}(1+z^2)(2)],$$

$$r''[r,r'']_3=z[\tfrac{3}{2}z(2)-\tfrac{1}{2}(1+z^2)(3)],$$

$$r''[r,r'']_4=z[\tfrac{4}{3}z(3)-\tfrac{1}{3}(1+z^2)(4)],$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

$$2r''\frac{d[r,r'']}{dr''}=-r''[r,r'']+z(1-z^2)(0),$$

$$2r''\frac{d[r,r'']_1}{dr''}=-r''[r,r'']_1+z(1-z^2)(1),$$

$$2r''\frac{d[r,r'']_2}{dr''}=-r''[r,r'']_2+z(1-z^2)(2),$$

$$2r''\frac{d[r,r'']_3}{dr''}=-r''[r,r'']_3+z(1-z^2)(3),$$

$$2r''\frac{d[r,r'']_4}{dr''}=-r''[r,r'']_4+z(1-z^2)(4),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ainsi il n'y aura qu'à calculer ces différentes valeurs et les substituer ensuite dans la formule du numéro précedent.

3. On a d'abord, par l'endroit cité de la *Théorie des variations séculaires*,

$$z=0{,}159715,\quad M=1{,}006387,\quad N=0{,}079602;$$

et ces valeurs donnent

$(0)=1{,}059765$	log.	0,0252095,
$(1)=0{,}502944$		9,7015197,
$(2)=0{,}100085$		9,0003689,
$(3)=0{,}018603$		8,2695830,
$(4)=0{,}003218$		7,5075860,
.....		.....;

ensuite

$$r''[r, r'^0] = 0{,}160748 \quad \log. \ 9{,}2061467,$$
$$r''[r, r'^0]_1 = 0{,}025757 \quad 8{,}4108933,$$
$$r''[r, r'^0]_2 = 0{,}003089 \quad 7{,}4897829,$$
$$r''[r, r'^0]_3 = 0{,}000412 \quad 6{,}6147187,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots;$$

enfin

$$2r''^2 \frac{d[r, r'^0]}{dr''} = 0{,}004195 \quad \log. \ 7{,}6227320,$$
$$2r''^2 \frac{d[r, r'^0]_1}{dr''} = 0{,}052522 \quad 8{,}7203396,$$
$$2r''^2 \frac{d[r, r'^0]_2}{dr''} = 0{,}012489 \quad 8{,}0965140,$$
$$2r''^2 \frac{d[r, r'^0]_3}{dr''} = 0{,}002484 \quad 7{,}3950816,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

4. Maintenant, puisque

$$n = 1 - z^{\frac{3}{2}},$$

on trouvera

$$n = 0{,}936181;$$

et la formule du n° 1 deviendra par ces substitutions

$$-T[0{,}021878 \sin(p'' - p) - 0{,}007237 \sin 2(p'' - p) - 0{,}000376 \sin 3(p'' - p) - \ldots],$$

dans laquelle il ne s'agira plus que de substituer pour T sa valeur en secondes $193'',2775$, comme dans le n° 7 de la première Section.

5. Désignant donc les lieux moyens de Saturne et de Mars par les caractères de ces Planètes, ainsi que nous en userons toujours dans la suite par rapport aux autres Planètes, on aura

Correction de la longitude de Mars due à l'action de Saturne et dépendante uniquement de la distance de Mars à Saturne.

$$-1'',3437 \sin(\sigma' - \flat) + 0'',4445 \sin 2(\sigma' - \flat) + 0'',0231 \sin 3(\sigma' - \flat) + \ldots$$

On voit que cette correction, lorsqu'elle est la plus grande, ce qui n'arrive que près des quadratures, ne va qu'un peu au delà d'une seconde; ce qui étant fort au-dessous de l'incertitude qui peut rester dans les lieux de Mars déduits des observations, il s'ensuit qu'elle peut être absolument négligée; mais il était nécessaire de la calculer pour pouvoir s'assurer de sa quantité, et, comme personne n'avait jusqu'ici rempli cet objet, j'ai cru devoir, pour ne rien laisser à désirer dans la Théorie de l'attraction des Planètes, donner aussi la formule numérique de la correction dont il s'agit.

§ II. — *Calcul des variations de Mars dues à l'action de Jupiter.*

6. Pour appliquer à l'action de Jupiter les formules données dans les deux premiers numéros pour l'action de Saturne, il n'y aura qu'à changer dans ces formules les quantités r, p, T en r', p', T', puisque ces deux Planètes sont l'une et l'autre supérieures par rapport à Mars.

Faisant donc $z = \frac{r''}{r'}$ et prenant pour M et N les valeurs correspondantes du n° 4 de la seconde Partie de la *Théorie des variations séculaires*, on aura ici

$$z = 0{,}292962, \quad M = 1{,}021574, \quad N = 0{,}144893,$$

et de là, par les formules du n° 2 ci-dessus, on trouvera

$$(0) = 1{,}222399 \quad \log. \ 0{,}0872130,$$
$$(1) = 1{,}040260 \quad 0{,}0171419,$$
$$(2) = 0{,}376780 \quad 9{,}5760878,$$
$$(3) = 0{,}128217 \quad 9{,}1079455,$$
$$(4) = 0{,}042773 \quad 8{,}6311697,$$
$$(5) = 0{,}016330 \quad 8{,}2129862,$$
$$(6) = 0{,}014982 \quad 8{,}1755698,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots;$$

ensuite

$$r''[r', r''] = 0{,}299570 \quad \log.\ 9{,}4764990,$$
$$r''[r', r'']_1 = 0{,}088745 \quad 8{,}9481444,$$
$$r''[r', r'']_2 = 0{,}0195694 \quad 8{,}2915775,$$
$$r''[r', r'']_3 = 0{,}004778 \quad 7{,}6792282,$$
$$r''[r', r'']_4 = 0{,}001200 \quad 7{,}0793117,$$
$$r''[r', r'']_5 = 0{,}000239 \quad 6{,}3776848,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots;$$

enfin

$$2r''^2\frac{d[r', r'']}{dr''} = 0{,}027810 \quad \log.\ 8{,}4442010,$$
$$2r''^2\frac{d[r', r'']_1}{dr''} = 0{,}189855 \quad 9{,}2784220,$$
$$2r''^2\frac{d[r', r'']_2}{dr''} = 0{,}081339 \quad 8{,}9102988,$$
$$2r''^2\frac{d[r', r'']_3}{dr''} = 0{,}029561 \quad 8{,}4707191,$$
$$2r''^2\frac{d[r', r'']_4}{dr''} = 0{,}010255 \quad 8{,}0109357,$$
$$2r''^2\frac{d[r', r'']_5}{dr''} = 0{,}0041349 \quad 7{,}6164650,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

7. Or, n étant comme dans le n° 4 égal à

$$1 - z^{\frac{3}{2}},$$

on aura

$$n = 0{,}841432;$$

et, faisant ces substitutions dans la formule du n° 1 après y avoir changé r, p, T en r', p', $\dot{T}$, il viendra

$$-T'[0{,}126279\sin(p''-p') - 0{,}070377\sin 2(p''-p') - 0{,}006104\sin 3(p''-p')$$
$$-0{,}000883\sin 4(p''-p') - 0{,}000142\sin 5(p''-p') - \ldots].$$

où il ne faudra plus que substituer la valeur de T' en secondes 614″,1756, comme nous l'avons vu dans le n° 5 de la seconde Section.

8. De sorte qu'on aura

Correction de la longitude de Mars due à l'action de Jupiter et dépendante uniquement de la distance de Mars à Jupiter

$$-24'',4069\sin(\sigma' - \mathfrak{T}') + 13'',6023\sin 2(\sigma' - \mathfrak{T}')$$
$$+ 1'',1798\sin 3(\sigma' - \mathfrak{T}') + 0'',1707\sin 4(\sigma' - \mathfrak{T}')$$
$$+ 0'',0275\sin 5(\sigma' - \mathfrak{T}') + \ldots$$

Cette correction, quoique beaucoup plus sensible que celle qui vient de l'action de Saturne, est encore assez petite, puisque dans les quadratures où elle est à peu près à son maximum elle ne monte qu'à 26″; cependant, comme les Tables de Halley dans les oppositions de Mars au Soleil s'écartent rarement des observations au delà d'une demi-minute, on pourrait peut-être par le moyen de la correction précédente diminuer encore l'erreur de ces Tables et ajouter à l'exactitude des éléments sur lesquels elles sont fondées. Mais cet objet demande qu'on ait égard aussi aux corrections qui dépendent en même temps de la commutation des deux Planètes et de leurs anomalies, et dont nous donnerons le calcul dans la suite.

9. M. de Lalande avait déjà calculé les inégalités du mouvement de Mars dues à Jupiter, dans le volume de l'Académie de Paris pour 1761; mais je n'ai pas cru que son travail dût me dispenser de les déterminer de nouveau par mes formules, soit parce que celles-ci sont différentes de celles qu'il a employées d'après la méthode de Clairaut, soit parce que je ne pouvais pas répondre de ses calculs comme je crois pouvoir le faire des miens. D'ailleurs il n'a calculé que les deux premiers termes proportionnels au sinus de la distance simple et double de Mars à Saturne; et l'on pouvait désirer de voir ce que donneraient les autres termes de la série, ne fût-ce que pour s'assurer qu'on n'a aucune erreur sensible à craindre de leur omission.

Les termes que M. de Lalande a trouvés sont

$$-25'',74\sin(\mathcal{O}-\mathcal{T})+12'',21\sin 2(\mathcal{O}-\mathcal{T}),$$

dont les coefficients diffèrent de ceux de notre formule d'environ une seconde en plus ou en moins. Cette différence est très-petite en elle-même; cependant, comme nos calculs sont fondés sur les mêmes éléments, elle aurait dû être sinon tout à fait nulle, du moins beaucoup moindre; mais je n'ai pas cru qu'il valût la peine d'en chercher la raison dans les procédés du calcul de M. de Lalande.

§ III. — *Calcul des variations de Mars dues à l'action de la Terre.*

10. Comme l'orbite de Mars est au-dessus de celle de la Terre, il faudra employer dans ce calcul des formules analogues à celles que nous avons données dans la première Section pour les inégalités de Saturne dues à Jupiter, et que nous avons vu être générales pour toute Planète troublée par une Planète inférieure par rapport à elle.

Changeant donc dans ces formules les lettres r, p, T qui se rapportent à Saturne en r'', p'', T'' pour Mars, et les lettres r', p', T' qui répondent à Jupiter en r''', p''', T''' pour la Terre, on aura pour les inégalités de la longitude de Mars dépendantes de sa distance à la Terre

$$-T''\left[\frac{1}{n(1-n^2)}2r''^2\frac{d[r'',r''']_1}{dr''}+\frac{3+n^2}{n^2(1-n^2)}r''[r'',r''']_1-\frac{3+2n+n^2}{n^2(1-n^2)}\frac{r''^2}{r'''^2}\right]\sin(p''-p''')$$

$$-T''\left[\frac{1}{2n(1-4n^2)}2r''^2\frac{d[r'',r''']_2}{dr''}+\frac{3+4n^2}{2n^2(1-4n^2)}r''[r'',r''']_2\right]\sin 2(p''-p''')$$

$$-T''\left[\frac{1}{3n(1-9n^2)}2r''^2\frac{d[r'',r''']_3}{dr''}+\frac{3+9n^2}{3n^2(1-9n^2)}r''[r'',r''']_3\right]\sin 3(p''-p''')$$

$$-T''\left[\frac{1}{4n(1-16n^2)}2r''^2\frac{d[r'',r''']_4}{dr''}+\frac{3+16n^2}{4n^2(1-16n^2)}r''[r'',r''']_4\right]\sin 4(p''-p''')$$

—.....,

n étant égal à $1-\frac{dp'''}{dp''}=1-\left(\frac{r''}{r'''}\right)^{\frac{3}{2}}$.

11. Soit maintenant $z=\frac{r''}{r'''}$, et qu'on prenne pour M et N les valeurs correspondantes parmi celles du n° 4 de la seconde Partie de la Théorie citée, on déterminera d'abord les valeurs des quantités (0), (1), (2),... par les mêmes formules que ci-dessus (2); mais ensuite il faudra faire, comme dans le n° 4 de la Section première,

$$r''[r'',r''']=(1+z^2)(0)-z(1),$$
$$r''[r'',r''']_1=4z(0)-(1+z^2)(1),$$
$$r''[r'',r''']_2=\tfrac{3}{2}z(1)-\tfrac{1}{2}(1+z^2)(2),$$
$$r''[r'',r''']_3=\tfrac{3}{2}z(2)-\tfrac{1}{2}(1+z^2)(3),$$
$$r''[r'',r''']_4=\tfrac{3}{4}z(3)-\tfrac{1}{4}(1+z^2)(4),$$
.....;

$$2r''^2\frac{d[r'',r''']}{dr''}=-r''[r'',r''']-(1-z^2)(0),$$
$$2r''^2\frac{d[r'',r''']_1}{dr''}=-r''[r'',r''']_1-(1-z^2)(1),$$
$$2r''^2\frac{d[r'',r''']_2}{dr''}=-r''[r'',r''']_2-(1-z^2)(2),$$
$$2r''^2\frac{d[r'',r''']_3}{dr''}=-r''[r'',r''']_3-(1-z^2)(3),$$
$$2r''^2\frac{d[r'',r''']_4}{dr''}=-r''[r'',r''']_4-(1-z^2)(4),$$
.....

12. On aura donc de cette manière

$$z=0{,}656301,\quad M=1{,}110961,\quad N=0{,}309374;$$

et de là

$(0)=3{,}428182$	log.	0,5350639,
$(1)=5{,}727963$		0,7580002,
$(2)=4{,}404740$		0,6439203,
$(3)=3{,}256463$		0,5127461,
$(4)=2{,}352245$		0,3714825,

$(5) = 1,673548$ log. $0,2236382$,
$(6) = 1,178726$ $0,0714129$,
$(7) = 0,825384$ $9,9166560$,
$(8) = 0,577671$ $9,7616805$,
$(9) = 0,407838$ $9,6104877$,
$(10) = 0,295751$ $9,4709262$,
$(11) = 0,227900$ $9,3577443$,
$(12) = 0,196564$ $9,2935039$,
. . . . . ;

ensuite

$r''[r'', r'''] = 1,145540$ log. $0,0590103$,
$r''[r'', r''']_1 = 0,804502$ $9,9055269$,
$r''[r'', r''']_2 = 0,405512$ $9,6080037$,
$r''[r'', r''']_3 = 0,224510$ $9,3512348$,
$r''[r'', r''']_4 = 0,129859$ $9,1134706$,
$r''[r'', r''']_5 = 0,077018$ $8,8865936$,
$r''[r'', r''']_6 = 0,046388$ $8,6664007$,
$r''[r'', r''']_7 = 0,028177$ $8,4498881$,
$r''[r'', r''']_8 = 0,017127$ $8,2336881$,
$r''[r'', r''']_9 = 0,010279$ $8,0119568$,
$r''[r'', r''']_{10} = 0,005905$ $7,7711957$,
. . . . . ,

enfin

$2r''^2 \frac{d[r'', r''']}{dr''} = -3,097098$ log. $\bar{0},4909550$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_1}{dr''} = -4,065254$ $\bar{0},6090876$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_2}{dr''} = -2,912994$ $\bar{0},4643397$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_3}{dr''} = -2,078313$ $\bar{0},3177109$,

$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_4}{dr''} = -1,468919$ log. $\bar{0},1669979$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_5}{dr''} = -1,029717$ $\bar{0},0127178$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_6}{dr''} = -0,717400$ $\bar{9},8557614$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_7}{dr''} = -0,498042$ $\bar{9},6972659$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_8}{dr''} = -0,345977$ $\bar{9},5390471$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_9}{dr''} = -0,243449$ $\bar{9},3864080$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_{10}}{dr''} = -0,174267$ $\bar{9},2412151$,
. . . . . .

13. Or, n étant égal à $1 - \frac{1}{z^2}$ (10 et 11), on aura

$$n = -0,880812;$$

et la formule du n° 10 deviendra par ces substitutions

$$-T''[+11,166933 \sin(p'' - p''') - 1,544523 \sin 2(p'' - p''') - 0,292425 \sin 3(p'' - p''') - 0,093040 \sin 4(p'' - p''') - \ldots],$$

où il faudra encore substituer la valeur de T''', masse de la Terre, et réduire les coefficients en secondes.

14. Nous ferons, comme dans la *Théorie des variations séculaires* (deuxième Partie, n° 14),

$$T''' = \frac{1}{365361};$$

ce nombre, multiplié par celui des secondes de l'arc égal au rayon, donne

$0'',564549$ pour la valeur de T'' en secondes qu'il faudra substituer dans la formule précédente. Ainsi l'on aura

Correction de la longitude de Mars due à l'action de la Terre et dépendante uniquement de la distance de Mars à la Terre

$$-6'',3043\ \sin(\sigma'-\odot)+0'',8720\sin 2(\sigma'-\odot)$$
$$+0'',1651\sin 3(\sigma'-\odot)+0'',0525\sin 4(\sigma'-\odot)+\ldots,$$

où l'on se souviendra que le lieu moyen $\odot$ de la Terre est à 180 degrés de celui du Soleil.

Cette correction ne monte, comme on voit, qu'à environ $6''$ dans les quadratures de Mars et de la Terre, où elle est à très-peu près la plus grande; elle est donc peu importante dans l'état actuel de l'Astronomie, mais elle peut le devenir davantage lorsque la précision des observations, qui paraît augmenter de jour en jour, mettra en état de tenir compte des secondes dans les lieux des Planètes.

15. M. de Lalande ayant aussi calculé l'effet de l'attraction de la Terre sur Mars dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, année 1761, a trouvé pour la partie dépendante de la distance ou commutation de Mars à la Terre les termes

$$-13'',3\sin(\sigma'-\odot)-1'',9\sin 2(\sigma'-\odot),$$

dont les coefficients sont plus que doubles de ceux que nous venons de trouver pour les termes semblables.

Cette différence vient uniquement de ce que M. de Lalande a employé pour le rapport de la masse de la Terre à la masse du Soleil celui que Newton avait donné d'après la parallaxe du Soleil supposée de $10''\frac{1}{2}$; mais cette parallaxe ayant été rabaissée à $8''\frac{1}{2}$ par les observations des derniers passages de Vénus, le rapport dont il s'agit a dû être diminué dans la raison des cubes des parallaxes; ce rapport étant suivant Newton de 1 à 169282, et suivant nos déterminations de 1 à 365361, il s'ensuit que les coefficients de la formule de M. de Lalande doivent être

diminués dans le rapport de 365361 à 169282, ou de 2,1583 à 1; ce qui les réduira à $-6'',16$ et $0'',88$, lesquels s'accordent à très-peu près avec ceux de notre formule.

M. de Lalande rapporte dans le même endroit (page 288) une formule que feu M. Mayer lui avait communiquée pour le même objet, et dans laquelle les termes dépendants de la distance de Mars à la Terre sont

$$-10'',9\sin(\sigma'-\odot)+1'',6\sin 2(\sigma'-\odot)+0'',3\sin 3(\sigma'-\odot).$$

Les lieux de Mars et de la Terre sont, suivant les suppositions de Mayer, des lieux vrais; mais, en exprimant ces lieux par les lieux moyens, il ne peut résulter aucune différence dans les termes indépendants des excentricités.

En comparant cette formule avec la nôtre, on trouve que pour que les premiers termes deviennent les mêmes, il faut diminuer celui de la formule de Mayer dans la raison de 1,729 à 1; diminuant ensuite dans la même proportion les coefficients des deux autres termes de celle-ci, ils deviennent $0'',93$, $0'',17$, lesquels s'accordent à peu près avec ceux des termes correspondants de notre formule; d'où l'on peut conclure que Mayer avait employé pour la masse de la Terre une valeur plus grande que celle que nous avons adoptée dans la même raison de 1 à 1,729, et par conséquent une parallaxe du Soleil plus grande que $8''\frac{1}{2}$ dans la raison de 1 à 1,2; ce qui donne environ $10''$. J'ai cru ce détail nécessaire, moins pour la justification de mes calculs, que pour la satisfaction des Astronomes qui voudront faire usage de la correction dont il s'agit dans la Théorie de Mars.

§ IV. — *Calcul des variations de Mars dues à l'action de Vénus.*

16. Ce calcul dépend des mêmes formules que celui que nous venons de donner pour l'action de la Terre, puisque Vénus est aussi inférieure à Mars. Seulement il faudra changer dans ces formules (nos 10 et 11) les

lettres r''', p''', T''', qui se rapportent à la Terre, en r^{IV}, p^{IV}, T^{IV} pour Vénus (1).

Faisant donc $z = \frac{r^{IV}}{r'''}$, et prenant pour M et N les valeurs correspondantes dans la Table du n° 4 (deuxième Partie de la *Théorie des variations séculaires*), on aura d'abord

$$z = 0,474723, \quad M = 1,057182, \quad N = 0,230473,$$

et de là par les formules du n° 2 ci-dessus

$(0) = 1,761782$	log.	$0,2459522$,
$(1) = 2,304484$		$0,3625737$,
$(2) = 1,326042$		$0,1225573$,
$(3) = 0,722926$		$9,8590938$,
$(4) = 0,382775$		$9,5829436$,
$(5) = 0,199695$		$9,3003672$,
$(6) = 0,104892$		$9,0207424$,
$(7) = 0,059359$		$8,7734866$,
$(8) = 0,043975$		$8,6432058$,
.....		.....,

ensuite par les formules du n° 11

$r'''[r''', r^{IV}] = 1,064806$	log.	$0,0272705$,
$r'''[r''', r^{IV}]_1 = 0,521607$		$9,7173436$,
$r'''[r''', r^{IV}]_2 = 0,187701$		$9,2734656$,
$r'''[r''', r^{IV}]_3 = 0,074632$		$8,8729244$,
$r'''[r''', r^{IV}]_4 = 0,031049$		$8,4920437$,
$r'''[r''', r^{IV}]_5 = 0,013192$		$8,1203011$,
$r'''[r''', r^{IV}]_6 = 0,005552$		$7,7444270$,
.....		.....,

enfin

$2r'''^2 \frac{d[r''', r^{IV}]}{dr'''} = -2,4295549$	log.	$\bar{0},3855257$,
$2r'''^2 \frac{d[r''', r^{IV}]_1}{dr'''} = -2,3067748$		$\bar{0},3630001$,
$2r'''^2 \frac{d[r''', r^{IV}]_2}{dr'''} = -1,2149044$		$\bar{0},0845419$,
$2r'''^2 \frac{d[r''', r^{IV}]_3}{dr'''} = -0,6346380$		$\bar{9},8025260$,
$2r'''^2 \frac{d[r''', r^{IV}]_4}{dr'''} = -0,3275610$		$\bar{9},5152922$,
$2r'''^2 \frac{d[r''', r^{IV}]_5}{dr'''} = -0,1678830$		$\bar{9},2250068$,
$2r'''^2 \frac{d[r''', r^{IV}]_6}{dr'''} = -0,0868050$		$\bar{8},9385447$,
.....		.....

17. L'expression de n étant comme dans le paragraphe précédent

$$1 - \frac{dt}{z^{\frac{3}{2}}},$$

on aura ici

$$n = -2,057310;$$

et, ces substitutions faites dans la formule du n° 10 appliquée au cas présent, on aura celle-ci

$$-T^{IV}[0,388610\sin(p''' - p^{IV}) - 0,046276\sin 2(p''' - p^{IV}) - \dots].$$

Prenons pour T^{IV}, masse de Vénus, la valeur $\frac{1}{278777}$ adoptée dans la *Théorie des variations séculaires*; ce nombre, multiplié par celui des secondes de l'arc égal au rayon, donnera en secondes

$$T^{IV} = 0'',73989.$$

Ainsi en substituant cette valeur, et dénotant toujours les lieux moyens de Mars et de Vénus par les caractères de ces Planètes, on aura

Correction de la longitude de Mars due à l'action de Vénus, et dépendante uniquement de la distance de Mars à Vénus

$$-0'',2876\sin(\sigma-\varphi)+0'',0342\sin 2(\sigma-\varphi)+\ldots.$$

On voit que cette correction est insensible, et que, pour qu'elle pût monter à une seconde, il faudrait que la masse de Vénus fût plus que triple de celle que nous avons adoptée, ce qui ne se peut; ainsi l'on pourra toujours négliger cette correction en toute sûreté.

§ V. — *Calcul des variations de Mars dues à l'action de Mercure.*

18. Nous pourrions à la rigueur nous dispenser de calculer ces variations; car Mercure étant plus éloigné de Mars que Vénus, et ayant en même temps une masse moindre que cette Planète, on en peut d'abord conclure que l'effet de son action sur Mars sera nécessairement encore moindre que celui de l'action de Vénus, que nous avons vu être insensible. Nous donnerons cependant encore ce calcul, ne fût-ce que pour ne laisser aucun vide dans la Théorie des perturbations des Planètes principales.

On y suivra le même procédé que dans le calcul précédent, mais en prenant, à la place des quantités r^{iv}, p^{iv}, T^{iv} relatives à Vénus, les quantités r^{v}, p^{v}, T^{v} qui répondent à Mercure.

Ainsi l'on fera $z=\frac{r^{v}}{r''}$, et l'on aura

$$z=0{,}254054,\quad M=1{,}016202,\quad N=0{,}125994,$$

d'où l'on tirera

$(0)=1{,}161267$	log.	$0{,}0649321,$
$(1)=0{,}863880$		$9{,}9364534,$
$(2)=0{,}272098$		$9{,}4347254,$

$(3)=0{,}080402$	log.	$8{,}9052669,$
$(4)=0{,}023346$		$8{,}3682125,$
.....		.....,

ensuite

$r''[r'',r^{v}]=1{,}016747$	log.	$0{,}0072129,$
$r''[r'',r^{v}]_1=0{,}260461$		$9{,}4157422,$
$r''[r'',r^{v}]_2=0{,}049762$		$8{,}6968923,$
$r''[r'',r^{v}]_3=0{,}010533$		$8{,}0225428,$
$r''[r'',r^{v}]_4=0{,}002286$		$7{,}3590238,$
.....		.....,

enfin

$2r''^{2}\frac{d[r'',r^{v}]}{dr''}=-2{,}103063$	log.	$\bar{0},3228523,$
$2r''^{2}\frac{d[r'',r^{v}]_1}{dr''}=-1{,}068583$		$\bar{0},0288080,$
$2r''^{2}\frac{d[r'',r^{v}]_2}{dr''}=-0{,}304298$		$\bar{9},4832991,$
$2r''^{2}\frac{d[r'',r^{v}]_3}{dr''}=-0{,}085746$		$\bar{8},9332139,$
$2r''^{2}\frac{d[r'',r^{v}]_4}{dr''}=-0{,}024125$		$\bar{8},3824673,$
.....		.....

19. Or, n étant égal à $1-\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}$, on aura

$$n=-6{,}809280;$$

et ces substitutions donneront la formule

$$-T^{v}[0{,}247740\sin(p''-p^{v})-0{,}022278\sin 2(p''-p^{v})-\ldots].$$

La masse T^{v} de Mercure a été déterminée dans la *Théorie des variations séculaires* de $\frac{1}{2025810}$ (n° 14, seconde Partie); en la multipliant par

206264″,8 pour la réduire en secondes, on aura

$$T^{v} = 0'',101818,$$

valeur qu'il faudra substituer dans la formule précédente. On aura ainsi

Correction de la longitude de Mars due à l'action de Mercure, et dépendante simplement de la distance de Mars à Mercure.

$$-0'',0252\sin(\sigma - \mathfrak{P}) + 0'',0023\sin 2(\sigma - \mathfrak{P}) + \ldots.$$

20. Je dois remarquer, au reste, que les valeurs des quantités M et N, que j'ai employées ci-dessus (18), ne sont pas tout à fait les mêmes qui se trouvent dans la Table du n° 4 de la seconde Partie de la *Théorie des variations séculaires*; mais aussi sont-elles plus exactes que celles-là. Les valeurs des quantités M, N, P, Q de cette Table sont les seules que je n'ai pas calculées moi-même, et dont par conséquent je ne suis pas responsable à la rigueur; ayant voulu en dernier lieu m'assurer aussi de leur exactitude, j'ai trouvé qu'il s'était glissé une légère méprise dans le calcul de celles dont il s'agit, et qu'au lieu de M = 1,016565, N = 0,125947, il fallait faire

$$M = 1,016202, \quad N = 0,125994.$$

Ce changement dans les valeurs de M et N en produit un aussi dans celles de P et Q qui en dépendent; et, au lieu de P = 0,053451, Q = 0,016523, il faudra faire

$$P = 0,054868, \quad Q = 0,017282.$$

Ainsi les valeurs des quantités (2, 5), (5, 2) qui sont proportionnelles à P devront être augmentées dans la raison de 53451 à 54868, et celles de [2, 5], [5, 2] qui sont proportionnelles à Q devront l'être aussi dans la raison de 16523 à 17282.

Il faudra donc réformer ainsi la partie correspondante de la Table citée dans la *Théorie des variations séculaires* (*).

(*) Page 219 de ce volume.

Pour $z = \frac{r^{v}}{r''} = 0,254054$,

M = 1,016202,	N = 0,125994,
P = 0,054868,	Q = 0,017282,
(2, 5) = 0,029173 T^{v}	[2, 5] = 0,009189 T^{v}
8,4649745,	7,9632491,
(5, 2) = 0,057878 T''	[5, 2] = 0,018230 T''
8,7625115,	8,2607861.

Par conséquent il faudra corriger comme il suit les valeurs de (2, 5), [2, 5], (5, 2), [5, 2] dans la Table du n° 16 (*) :

(2, 5) = 0″,0187 m^{v}	[2, 5] = 0″,0059 m^{v}
8,2709734,	7,7692480,
(5, 2) = 0″,0406 m''	[5, 2] = 0″,0128 m''
8,6088577,	8,1071323.

Mais, comme ces corrections ne tombent que sur les dernières décimales des valeurs dont il s'agit, elles ne sauraient avoir une influence sensible sur les résultats que nous avons déduits pour les variations séculaires; d'autant que les dernières décimales demeurent toujours plus ou moins incertaines, et que les deux premières sont plus que suffisantes pour la détermination de ces variations. Il n'y aura donc rien à changer à cet égard, et j'aurais même pu me dispenser de donner l'errata précédent, si je ne croyais que la précision la plus scrupuleuse est indispensable dans ces sortes de calculs.

SECTION QUATRIÈME

OÙ L'ON DONNE LES VARIATIONS PÉRIODIQUES DU MOUVEMENT DE LA TERRE DÉPENDANTES DE SA DISTANCE AUX AUTRES PLANÈTES.

Parmi les inégalités dont la recherche est l'objet du travail qui nous occupe, il n'y en a pas de plus importantes à connaître que celles du

(*) Pages 238 et 239 de ce volume.

mouvement de la Terre; car elles affectent également le mouvement apparent du Soleil, et l'on sait que la détermination de ce mouvement est comme la base de toutes les autres déterminations astronomiques. Aussi les Astronomes s'y sont-ils tous appliqués particulièrement, et ils sont déjà venus à bout de donner aux Tables du Soleil une précision bien supérieure à celle des Tables des autres Planètes; mais pour pouvoir les perfectionner encore, il est nécessaire d'avoir une Théorie exacte et complète de tous les dérangements que la Terre peut éprouver de la part des Planètes. Nous allons donner, en suivant notre plan, la partie de cette Théorie qui concerne les variations périodiques, dépendantes uniquement des distances ou commutations entre la Terre et les autres Planètes principales.

§ I. — *Calcul des variations de la Terre dues à l'action de Saturne.*

1. Il est visible que la formule de ces variations sera la même que celle des variations de Mars dues à la même action de Saturne, en ne faisant qu'y substituer à la place des quantités relatives à Mars, les quantités analogues pour la Terre; ce qui revient à marquer simplement de trois traits les lettres marquées de deux dans la formule du n° 1 de la Section précédente.

Ainsi les variations qu'il s'agit de calculer seront contenues dans la formule suivante

$$-T\left[\frac{1}{n(1-n^2)}\,2r'''^2\frac{d[r,r''']_1}{dr'''}+\frac{3+n^2}{n^2(1-n^2)}\,r'''[r,r''']_1-\frac{3+2n+n^2}{n^2(1-n^2)}\,\frac{r'''^2}{r^2}\right]\sin(p'''-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{2n(1-4n^2)}\,2r'''^2\frac{d[r,r''']_2}{dr'''}+\frac{3+4n^2}{2n^2(1-4n^2)}\,r'''[r,r''']_2\right]\sin 2(p'''-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{3n(1-9n^2)}\,2r'''^2\frac{d[r,r''']_3}{dr'''}+\frac{3+9n^2}{3n^2(1-9n^2)}\,r'''[r,r''']_3\right]\sin 3(p'''-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{4n(1-16n^2)}\,2r'''^2\frac{d[r,r''']_4}{dr'''}+\frac{3+16n^2}{4n^2(1-16n^2)}\,r'''[r,r''']_4\right]\sin 4(p'''-p)$$

—.....

dans laquelle

$$n=1-\frac{dp}{dp'''}=1-\left(\frac{r'''}{r}\right)^{\frac{3}{2}},$$

r''' étant la distance moyenne de la Terre au Soleil, et r celle de Saturne au Soleil.

2. On fera $z=\frac{r'''}{r}$, et, prenant pour M et N les valeurs correspondantes données dans le n° 4 de la seconde Partie de la *Théorie des variations séculaires*, on déterminera les valeurs des quantités

$$r'''[r,r'''],\quad r'''[r,r''']_1,\ldots,\quad 2r'''^2\frac{d[r,r''']}{dr'''},\quad 2r'''^2\frac{d[r,r''']_1}{dr'''},\ldots$$

comme dans le n° 2 de la Section précédente, en changeant simplement r'' en r''' dans les formules de ce numéro.

On aura donc d'abord

$$z=0{,}104821,\quad M=1{,}002749,\quad N=0{,}052338,$$

et de là on trouvera

$(0)=1{,}025152$	log.	$0{,}0107882,$
$(1)=0{,}321044$		$9{,}5065644,$
$(2)=0{,}041950$		$8{,}6227320,$
$(3)=0{,}004397$		$7{,}6431565,$
.....		.....,

ensuite

$r'''[r,r''']=0{,}105111$	log.	$9{,}0216465,$
$r'''[r,r''']_1=0{,}011033$		$8{,}0427070,$
$r'''[r,r''']_2=0{,}000870$		$6{,}9394116,$
$r'''[r,r''']_3=0{,}000091$		$5{,}9598912,$
.....		.....,

enfin

$$2r''^2\frac{d[r,r'']}{dr''} = 0{,}001166 \qquad \log.\ 7{,}0666986,$$

$$2r''^2\frac{d[r,r'']_1}{dr''} = 0{,}022249 \qquad 8{,}3473105,$$

$$2r''^2\frac{d[r,r'']_2}{dr''} = 0{,}003479 \qquad 7{,}5414669,$$

$$2r''^2\frac{d[r,r'']_3}{dr''} = 0{,}000365 \qquad 6{,}5618762,$$

. . . . . .

3. Or, n étant égal à $1-z^{\frac{3}{2}}$, on aura

$$n = 0{,}966063,$$

et par ces substitutions la formule du n° 1 deviendra

$$-T[0{,}007151\sin(p''-p) - 0{,}001807\sin 2(p''-p) - 0{,}000067\sin 3(p''-p) - \ldots].$$

Mettant donc pour T sa valeur en secondes $61'',4176$ (n° 4, Section précédente), on aura enfin

Correction de la longitude de la Terre ou du Soleil, due à l'action de Saturne et dépendante uniquement de la distance de la Terre à Saturne

$$-0'',4392\sin(\odot - \mathfrak{h}) + 0'',1110\sin 2(\odot - \mathfrak{h}) + 0'',0041\sin 3(\odot - \mathfrak{h}) + \ldots,$$

le lieu moyen $\odot$ de la Terre étant, comme l'on sait, à 180 degrés de celui du Soleil.

4. Les inégalités du mouvement du Soleil dues à l'action des Planètes principales sur la Terre ont été calculées d'abord par feu M. Euler dans la Pièce qui a remporté le Prix de l'Académie des Sciences de Paris pour 1756. Il n'y a que la partie de ce calcul qui concerne les inégalités de la longitude, qu'on puisse regarder comme exacte, celle qui concerne les variations des aphélies et des excentricités étant fondée sur une ana-

lyse insuffisante, comme on peut s'en convaincre par notre *Théorie des variations séculaires*.

Pour les inégalités qui dépendent de Saturne, on ne trouve dans cette Pièce que le terme $-\frac{1''}{2}\sin(\odot - \mathfrak{h})$; et comme la masse de Saturne y est supposée de $\frac{1}{3021}$, tandis que nous l'avons réduite à $\frac{1}{3358}$, il faudra, pour comparer ce terme au terme correspondant $-0'',4392\sin(\odot - \mathfrak{h})$ de notre formule, diminuer le coefficient $\frac{1''}{2}$ dans le rapport de 3358 à 3021 ou de 1 à 1,1117, ce qui le réduira à $0'',4498$, lequel diffère très-peu de celui que nous avons trouvé.

Au reste on voit, par les autres termes que nous avons encore calculés, qu'en effet ce premier terme, quelque peu considérable qu'il soit, est néanmoins le seul dont l'effet puisse être sensible.

§ II. — *Calcul des variations de la Terre dues à l'action de Jupiter.*

5. Ce calcul est entièrement semblable à celui que nous venons d'exposer, et dépend des mêmes formules, en changeant seulement les lettres T, r, p, relatives à Saturne, en T', r', p' pour Jupiter.

On fera donc $z = \frac{r''}{r'}$, et l'on aura (n° 4, seconde Partie des *Variations séculaires*)

$$z = 0{,}192271, \quad M = 1{,}009263, \quad N = 0{,}095689,$$

d'où l'on tirera

$$(0) = 1{,}088236 \qquad \log.\ 0{,}0367229,$$

$$(1) = 0{,}619059 \qquad 9{,}7917319,$$

$$(2) = 0{,}148080 \qquad 9{,}1704964,$$

$$(3) = 0{,}033081 \qquad 8{,}5195786,$$

$$(4) = 0{,}0067856 \qquad 7{,}8315883,$$

. . . . . .

ensuite

$$r''[r', r''] = 0,1940\,86 \qquad \log.\ 9,2879938,$$
$$r''[r', r'']_1 = 0,0374\,93 \qquad 8,5739495,$$
$$r''[r', r'']_2 = 0,0054\,16 \qquad 7,7336483,$$
$$r''[r', r'']_3 = 0,0008\,71 \qquad 6,9398001,$$
$$r''[r', r'']_4 = 0,0002\,65 \qquad 6,4233208,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

enfin

$$2r''^2\frac{d[r', r'']}{dr''} = 0,0074\,15 \qquad \log.\ 7,8701287,$$
$$2r''^2\frac{d[r', r'']_1}{dr''} = 0,0771\,34 \qquad 8,8872459,$$
$$2r''^2\frac{d[r', r'']_2}{dr''} = 0,0200\,33 \qquad 8,3017547,$$
$$2r''^2\frac{d[r', r'']_3}{dr''} = 0,0052\,55 \qquad 7,7205579,$$
$$2r''^2\frac{d[r', r'']_4}{dr''} = 0,0009\,91 \qquad 6,9962445,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

6. Maintenant

$$n = 1 - z^{\frac{3}{2}},$$

ce qui donnera

$$n = 0,9156\,92;$$

et la formule des inégalités de la Terre dues à Jupiter deviendra

$$-T'[+0,0364\,97\sin(p'' - p') - 0,0133\,64\sin 2(p'' - p') - 0,0008\,50\sin 3(p'' - p') - 0,0001\,26\sin 4(p'' - p') - \ldots].$$

Il ne s'agira donc plus que d'y substituer pour T' sa valeur en secondes 193″,2775 (Section précédente, n° 7), ce qui donnera

Correction de la longitude de la Terre ou du Soleil, due à l'action de Jupiter et dépendante simplement de la distance de la Terre à Jupiter

$$-7'',0540\sin(\odot - \mathfrak{T}) + 2'',5829\sin 2(\odot - \mathfrak{T}) + 0'',1642\sin 3(\odot - \mathfrak{T}) + 0'',0243\sin 4(\odot - \mathfrak{T}) + \ldots.$$

7. Dans la Pièce citée (4) les inégalités de la longitude du Soleil dues à l'action de Jupiter sont représentées par ces deux termes

$$-7'',06\sin(\odot - \mathfrak{T}) + 2'',67\sin 2(\odot - \mathfrak{T}),$$

lesquels s'accordent assez bien avec les deux premiers termes de la formule précédente, la valeur de la masse de Jupiter étant d'ailleurs la même de part et d'autre, c'est-à-dire $\frac{1}{1067}$.

Ces mêmes inégalités ont de plus été calculées par Clairaut dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1754; et elles y sont exprimées par les termes

$$-7'',1\sin(\odot - \mathfrak{T}) + 2'',7\sin 2(\odot - \mathfrak{T})$$

qui s'accordent aussi à très-peu près avec les deux premiers de notre formule, quoiqu'un peu moins que ceux d'Euler.

A l'égard des autres termes de cette formule, on voit qu'ils ne sont presque d'aucune considération, mais il était nécessaire de les connaître pour être assuré de leur peu de valeur.

§ III. — *Calcul des variations de la Terre dues à l'action de Mars.*

8. On emploiera encore pour ce calcul les mêmes formules que dans le § I, en changeant seulement les quantités r, p, T, relatives à Saturne, en r'', p'', T'' pour Mars; on pourra même le simplifier beaucoup, en déduisant immédiatement les valeurs des quantités

$$r''[r'', r'''],\quad r''[r'', r''']_1, \ldots,\quad 2r''^2\frac{d[r'', r''']}{dr'''},\quad 2r''^2\frac{d[r'', r''']_1}{dr'''}, \ldots$$

de celles de

$$r''[r'', r'''],\quad r''[r'', r''']_1, \ldots,\quad 2r''^2\frac{d[r'', r''']}{dr''},\quad 2r''^2\frac{d[r'', r''']_1}{dr''}, \ldots$$

déjà données dans le § III de la Section troisième pour l'action de la Terre sur Mars; nous avons donné les formules nécessaires pour cela dans le

n° 2 de la Section deuxième; il suffira pour les appliquer au cas présent d'y changer r en r'' et r' en r'''.

Faisant donc $z = \frac{r'''}{r''} = 0{,}656301$, on aura

$r''[r'', r''']$	$= 0{,}751819$	log. $9{,}8761134$,
$r''[r'', r''']_1$	$= 0{,}527995$	$9{,}7226300$,
$r''[r'', r''']_2$	$= 0{,}266138$	$9{,}4251068$,
$r''[r'', r''']_3$	$= 0{,}147346$	$9{,}1683379$,
$r''[r'', r''']_4$	$= 0{,}085226$	$8{,}9305737$,
$r''[r'', r''']_5$	$= 0{,}050547$	$8{,}7036967$,
$r''[r'', r''']_6$	$= 0{,}030443$	$8{,}4835038$,
.....		..... ,

et ensuite

$2r''^2 \frac{d[r'', r''']}{dr''}$	$= 0{,}528991$	log. $9{,}7234483$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_1}{dr''}$	$= 1{,}612040$	$0{,}2073758$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_2}{dr''}$	$= 1{,}379525$	$0{,}1397296$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_3}{dr''}$	$= 1{,}069307$	$0{,}0291023$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_4}{dr''}$	$= 0{,}793601$	$9{,}8996022$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_5}{dr''}$	$= 0{,}574695$	$9{,}7594374$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r''']_6}{dr''}$	$= 0{,}409944$	$9{,}6127245$,
.....		.....

9. Or

$$n = 1 - z^{\frac{3}{2}} = 0{,}468315;$$

et de là on aura pour les inégalités dues à Mars,

$$-\mathrm{T}''[+3{,}881779\sin(p'' - p'') + 31{,}170190\sin 2(p''' - p'')$$
$$-1{,}925284\sin 3(p''' - p'') - 0{,}420867\sin 4(p''' - p'') - \ldots].$$

La valeur de T'' masse de Mars, telle que nous l'avons déterminée dans la *Théorie des variations séculaires*, est de $\frac{1}{1846082}$ en parties de celle du Soleil. En la multipliant par l'arc égal au rayon pour la réduire en secondes, elle devient $0'', 111731$; c'est la valeur qu'il faut substituer dans la formule précédente. On aura donc

Correction de la longitude de la Terre ou du Soleil, due à l'action de Mars et dépendante simplement de la distance de la Terre à Mars

$$-0'', 4337\sin(\odot - \sigma') - 3'', 4827\sin 2(\odot - \sigma')$$
$$+0'', 2151\sin 3(\odot - \sigma') + 0'', 0470\sin 4(\odot - \sigma') + \ldots.$$

10. Dans la même Pièce déjà citée (4), on trouve pour les inégalités de la longitude du Soleil dues à l'action de Mars ces deux termes

$$-0'', 403\sin(\odot - \sigma') - 3'', 231\sin 2(\odot - \sigma');$$

mais la masse de Mars y est supposée de $\frac{1}{3000000}$. En augmentant donc les coefficients $0'', 403$ et $3'', 231$ dans le rapport de 1846082 à 3000000, ils deviendront $0'', 437$ et $3'', 500$, lesquels s'accordent, comme on voit, à très-peu près avec les deux premiers de notre formule.

A l'égard des autres termes de cette formule, on voit qu'ils peuvent être entièrement négligés, ne pouvant jamais monter qu'à des décimales de seconde.

§ IV. — *Calcul des variations de la Terre dues à l'action de Vénus.*

11. La formule de ces variations sera encore la même que celle du § I en y changeant seulement les quantités T, r, p, relatives à Saturne, en T^{IV}, r^{IV}, p^{IV} pour Vénus. Mais Vénus étant inférieure à la Terre, il faudra, pour la détermination des valeurs de

$$r'''[r''', r^{\mathrm{IV}}], \quad r'''[r''', r^{\mathrm{IV}}]_1, \ldots, \quad 2r'''^2 \frac{d[r''', r^{\mathrm{IV}}]}{dr'''}, \quad 2r'''^2 \frac{d[r''', r^{\mathrm{IV}}]_1}{dr'''}, \ldots,$$

employer des formules semblables à celles du § III de la Section précédente, en y changeant respectivement r'' en r'' et r'' en r^{IV}, pour rapporter à la Terre et à Vénus ce qui dans cet endroit est relatif à Mars et à la Terre.

Faisant donc $z = \frac{r^{IV}}{r''}$, et prenant les valeurs correspondantes de M et N dans le n° 4 de la seconde Partie des *Variations séculaires*, on aura

$$z = 0{,}723330, \quad M = 1{,}135763, \quad N = 0{,}336131;$$

d'où l'on tire

$(0) = 4{,}996046$	log.	$0{,}6986264$,
$(1) = 8{,}871529$		$0{,}9479985$,
$(2) = 7{,}387485$		$0{,}8684966$,
$(3) = 5{,}956443$		$0{,}7749870$,
$(4) = 4{,}709397$		$0{,}6729654$,
$(5) = 3{,}675619$		$0{,}5653305$,
$(6) = 2{,}844299$		$0{,}4539753$,
$(7) = 2{,}190188$		$0{,}3404813$,
$(8) = 1{,}685046$		$0{,}2266118$,
$(9) = 1{,}302760$		$0{,}1148644$,
$(10) = 1{,}021472$		$0{,}0092265$,
$(11) = 0{,}824360$		$9{,}9161169$,
$(12) = 0{,}699867$		$9{,}8450155$,
.....		.....,

ensuite

$r''[r'', r^{IV}] = 1{,}192961$	log.	$0{,}0766261$,
$r''[r'', r^{IV}]_1 = 0{,}941995$		$9{,}9740485$,
$r''[r'', r^{IV}]_2 = 0{,}527142$		$9{,}7219282$,
$r''[r'', r^{IV}]_3 = 0{,}322858$		$9{,}5090115$,
$r''[r'', r^{IV}]_4 = 0{,}206224$		$9{,}3143386$,
$r''[r'', r^{IV}]_5 = 0{,}134908$		$9{,}1300378$,

$r''[r'', r^{IV}]_6 = 0{,}089538$	log.	$8{,}9520073$,
$r''[r'', r^{IV}]_7 = 0{,}059894$		$8{,}7773862$,
$r''[r'', r^{IV}]_8 = 0{,}040119$		$8{,}6033502$,
.....		.....,

enfin

$2r''^2 \frac{d[r'', r^{IV}]}{dr''} = -3{,}575045$	log.	$\bar{0}{,}5532815$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r^{IV}]_1}{dr''} = -5{,}171886$		$\bar{0}{,}7136489$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r^{IV}]_2}{dr''} = -4{,}049450$		$\bar{0}{,}6073961$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r^{IV}]_3}{dr''} = -3{,}162854$		$\bar{0}{,}5000790$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r^{IV}]_4}{dr''} = -2{,}451637$		$\bar{0}{,}3894561$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r^{IV}]_5}{dr''} = -1{,}887421$		$\bar{0}{,}2758688$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r^{IV}]_6}{dr''} = -1{,}445683$		$\bar{0}{,}1600731$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r^{IV}]_7}{dr''} = -1{,}104162$		$\bar{0}{,}0430328$,
$2r''^2 \frac{d[r'', r^{IV}]_8}{dr''} = -0{,}843539$		$\bar{9}{,}9261051$,
.....		.....

12. La valeur de n est ici égale à $1 - \frac{1}{z^3}$, ce qui donne

$$n = -0{,}625531.$$

Par ces substitutions la formule des inégalités dues à Vénus deviendra

$$-T^{IV}[+9{,}820869 \sin(p'' - p^{IV}) - 11{,}168298 \sin 2(p'' - p^{IV}) - 1{,}379716 \sin 3(p'' - p^{IV}) - 0{,}418198 \sin 4(p'' - p^{IV}) - 0{,}169076 \sin 5(p'' - p^{IV}) - 0{,}079229 \sin 6(p'' - p^{IV}) - \ldots].$$

Et mettant pour T^v, masse de Vénus, sa valeur en secondes $0'',73989$, comme dans le n° 17 de la Section précédente, il viendra

Correction de la longitude de la Terre ou du Soleil due à l'action de Vénus et dépendante uniquement de la distance de la Terre à Vénus

$$\begin{aligned}&-7'',2663\ \sin(\delta-\varphi)+8'',2634\sin 2(\delta-\varphi)\\&+1'',0208\sin 3(\delta-\varphi)+0'',3094\sin 4(\delta-\varphi)\\&+0'',1251\sin 5(\delta-\varphi)+0'',0586\sin 6(\delta-\varphi)+\ldots.\end{aligned}$$

13. Les inégalités du mouvement du Soleil produites par l'action de Vénus sur la Terre ont déjà été calculées plusieurs fois; nous allons rapporter ici les résultats de ces différents calculs, pour les comparer à ceux du nôtre.

On trouve d'abord dans la Pièce déjà citée (4) la formule

$$-5'',75\sin(\delta-\varphi)+6'',02\sin 2(\delta-\varphi).$$

Mais la masse de Vénus y est supposée de $\frac{1}{404762}$ en parties de celle du Soleil, au lieu que nous l'avons faite de $\frac{1}{278777}$. Il faudra donc augmenter les coefficients $5'',75$ et $6'',02$ dans la raison de ces deux valeurs, pour pouvoir comparer la formule précédente à la nôtre. Par là ils deviennent $8'',348$ et $8'',741$, lesquels sont, comme on voit, assez différents de ceux des deux premiers termes de notre formule pour qu'on ne puisse attribuer cette différence qu'à quelque erreur dans les calculs. Or j'ai mis dans le mien assez de soin et de précision pour pouvoir répondre de son exactitude.

Ces mêmes inégalités ont ensuite été calculées par Clairaut dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1754. Il y donne la formule

$$\begin{aligned}&-10''\sin(\delta-\varphi)+11'',5\sin 2(\delta-\varphi)\\&+1'',4\sin 3(\delta-\varphi)+0'',4\sin 4(\delta-\varphi),\end{aligned}$$

en supposant la masse de Vénus de $\frac{1}{198991}$ de celle du Soleil. Il faudra

donc diminuer les coefficients de cette formule dans le rapport des nombres 278777 à 198991, pour pouvoir la comparer avec la nôtre, et elle deviendra alors

$$\begin{aligned}&-7'',14\ \sin(\delta-\varphi)+8'',21\sin 2(\delta-\varphi)\\&+1'',00\sin 3(\delta-\varphi)+0'',29\sin 4(\delta-\varphi),\end{aligned}$$

laquelle s'accorde, à quelques centièmes de seconde près, avec celle que nous avons trouvée; de sorte que cet accord peut servir de confirmation à l'exactitude de toutes les deux.

Au reste Clairaut n'avait adopté pour la masse de Vénus la valeur rapportée que pour simplifier sa formule en réduisant le coefficient du premier terme à $10''$, et afin d'en faciliter par là la comparaison avec les observations. L'abbé de la Caille remarqua bientôt que la Table construite sur la formule de Clairaut donnait des résultats trop forts, et en substitua dans ses Tables du Soleil une autre qui peut se réduire à cette formule

$$\begin{aligned}&-8'',2\ \sin(\delta-\varphi)+9'',5\sin 2(\delta-\varphi)\\&+1'',2\sin 3(\delta-\varphi)+0'',3\sin 4(\delta-\varphi),\end{aligned}$$

laquelle ne diffère de celle de Clairaut qu'en ce que tous les coefficients sont diminués dans le rapport de 100 à 82.

Mayer a conservé la même Table dans son *Recueil des Tables solaires*, mais en réduisant encore les valeurs des équations aux deux cinquièmes; car la plus grande équation, qui dans la Table de la Caille est de $15''$, n'est plus que de $6''$ dans celle de Mayer.

Ainsi, suivant la Caille, la masse de Vénus serait de $\frac{1}{242672}$, et suivant Mayer elle ne serait que de $\frac{1}{606680}$. Celle que nous avons adoptée est entre ces deux-ci, mais beaucoup plus près de la première que de la seconde; et l'on peut voir, dans la seconde Partie de la *Théorie des variations séculaires*, comment nous avons été conduits à cette détermination, qui a d'ailleurs l'avantage de donner des résultats conformes aux observations relativement à un des principaux points de la Théorie du Soleil, le mouvement de son apogée.

14. Depuis, feu M. Euler a donné dans les *Commentaires de Pétersbourg* deux Mémoires dont le but est de montrer l'insuffisance de la méthode des séries dans la détermination des perturbations de la Terre causées par l'action de Vénus, et l'inexactitude des Tables que la Caille et Mayer en ont données d'après les formules que Clairaut avait trouvées par cette méthode. (*Voyez* le tome XVI des *Novi Commentarii* et la première Partie des *Acta* pour 1778.) L'Auteur y calcule les perturbations dont il s'agit par la méthode des quadratures, ou sommations arithmétiques, et il parvient à une Table toute différente de celles dont nous venons de parler, non-seulement pour la valeur des équations, mais aussi par rapport à leur marche. Il importait non-seulement à l'Astronomie, mais à l'Analyse même, de découvrir la cause d'une si grande différence entre les résultats des deux méthodes, surtout parce que la méthode des séries est comme la base de toutes les recherches sur le système du monde, et que si l'on était obligé d'abandonner cette méthode, on serait forcé aussi de renoncer à toute Théorie générale sur l'effet de l'attraction mutuelle des Planètes.

Heureusement on a reconnu que cette différence ne venait que de la manière d'appliquer la méthode des quadratures à la question dont il s'agit, et feu M. Lexell a fait voir dans la seconde Partie des *Actes de Pétersbourg* pour 1779 qu'en faisant entrer dans le calcul toutes les circonstances nécessaires, il résultait de cette méthode une Table des perturbations de la Terre assez conforme à celle que donnent les formules déduites de l'autre méthode.

Enfin M. Fuss a calculé de nouveau ces perturbations par la méthode des séries dans la première Partie des *Actes* pour 1780, et il est arrivé à des résultats qui s'accordent avec ceux de M. Lexell, ainsi qu'avec la Table de l'abbé de la Caille déduite de la formule de Clairaut.

La conformité que nous avons trouvée entre celle-ci et la nôtre peut servir de confirmation à ces conclusions, et à assurer davantage la légitimité de la méthode des séries, sur laquelle toute la Théorie des variations du mouvement des Planètes est fondée.

§ V. — *Calcul des variations de la Terre dues à l'action de Mercure.*

15. Ce calcul dépend des mêmes formules que celui du paragraphe précédent, en y changeant seulement les quantités T^{iv}, r^{iv}, p^{iv}, relatives à Vénus, dans les quantités T^{v}, r^{v}, p^{v} relatives à Mercure.

On fera donc $z = \frac{r^{v}}{r^{iv}}$, et l'on aura par le n° 4 de la seconde Partie des *Variations séculaires*

$$z = 0{,}387100, \quad M = 1{,}037828, \quad N = 0{,}189854.$$

De là on tire les valeurs suivantes

$(0) = 1{,}435919$	log.	$0{,}1571301$,
$(1) = 1{,}576071$		$0{,}1975757$,
$(2) = 0{,}747647$		$9{,}8736965$,
$(3) = 0{,}334310$		$9{,}5241494$,
$(4) = 0{,}144943$		$9{,}1611973$,
.....		.....,

ensuite

$r^{v}[r^{iv}, r^{v}] = 1{,}040991$	log.	$0{,}0174471$,
$r^{v}[r^{iv}, r^{v}]_1 = 0{,}411137$		$9{,}6139864$,
$r^{v}[r^{iv}, r^{v}]_2 = 0{,}120172$		$9{,}0798017$,
$r^{v}[r^{iv}, r^{v}]_3 = 0{,}038885$		$8{,}5897774$,
$r^{v}[r^{iv}, r^{v}]_4 = 0{,}013166$		$8{,}1194463$,
.....		.....

enfin

$2r^{v2}\frac{d[r^{iv}, r^{v}]}{dr^{v}} = -2{,}261744$	log.	$\bar{0}{,}3544435$,
$2r^{v2}\frac{d[r^{iv}, r^{v}]_1}{dr^{v}} = -1{,}751040$		$\bar{0}{,}2432960$,
$2r^{v2}\frac{d[r^{iv}, r^{v}]_2}{dr^{v}} = -0{,}755787$		$\bar{9}{,}8783995$,

$$2r^{v2}\frac{d[r^{iv}, r^{v}]_1}{dr^{v}} = -0{,}323100 \qquad \log.\ \overline{9}{,}5093370,$$

$$2r^{v2}\frac{d[r^{iv}, r^{v}]_1}{dr^{v}} = -0{,}136390 \qquad \overline{9}{,}1347825,$$

.....

16. La valeur de n est exprimée ici, comme dans le paragraphe précédent, par $1-\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}$, de sorte qu'on aura

$$n = -3{,}152075.$$

Et de là on aura pour les inégalités dues à Mercure la formule

$$-T^{v}[0{,}376404\sin(p^{iv}-p^{v}) - 0{,}009766\sin 2(p^{iv}-p^{v}) - \ldots].$$

En substituant pour T^{v}, masse de Mercure, sa valeur en secondes $0'',101818$, comme dans le n° 19 de la Section précédente, on aura

Correction de la longitude de la Terre ou du Soleil, due à l'action de Mercure et dépendante de la distance de la Terre à Mercure

$$-0'',0383\sin(\odot - \mathbb{Y}) + 0'',0010\sin 2(\odot - \mathbb{Y}) + \ldots.$$

On voit que cette correction est insensible; aussi ne l'ai-je calculée que parce qu'elle ne l'avait pas encore été, et pour ne laisser aucun vide dans la Théorie dont il s'agit.

SECTION CINQUIÈME

OÙ L'ON DONNE LES VARIATIONS PÉRIODIQUES DU MOUVEMENT DE VÉNUS DÉPENDANTES DE SA DISTANCE AUX AUTRES PLANÈTES.

La Théorie de Vénus est une des plus importantes après celle de la Terre. Car cette Planète paraissant très-souvent et avec beaucoup d'éclat, elle peut être d'un grand usage pour y comparer la Lune dans l'observation des longitudes en mer. D'ailleurs la célébrité de ses derniers

passages sur le disque du Soleil, et les recherches nombreuses que les observations de ces passages ont occasionnées relativement à la détermination de la parallaxe du Soleil, ont augmenté encore l'intérêt que cette partie de l'Astronomie peut inspirer par elle-même. Elles ont surtout fait souhaiter de connaître parfaitement les inégalités du mouvement de Vénus, pour être en état de mettre dans la détermination dont il s'agit toute la précision dont elle peut être susceptible. C'est donc une recherche très-nécessaire aux progrès de l'Astronomie que celle des dérangements que cette Planète peut éprouver de la part des autres Planètes en vertu de leur attraction mutuelle; et les Astronomes ne pourront que me savoir gré du travail dont je vais exposer les résultats dans cette Section.

§ I. — *Calcul des variations de Vénus dues à l'action de Saturne.*

1. Nous pouvons emprunter des Sections précédentes les formules nécessaires pour ce calcul. Ainsi, en changeant seulement, dans celle du n° 1 de la Section quatrième, les quantités r^{v}, p^{v}, relatives à la Terre, dans les quantités analogues r^{iv}, p^{iv}, relatives à Vénus, on aura pour les variations dont il s'agit la formule générale

$$-T\left[\frac{1}{n(1-n^2)}2r^{iv2}\frac{d[r, r^{iv}]_1}{dr^{iv}} + \frac{3+n^2}{n^2(1-n^2)}r^{iv}[r, r^{iv}]_1 - \frac{3+2n+n^2}{n^2(1-n^2)}\frac{r^{iv2}}{r^2}\right]\sin(p^{iv}-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{2n(1-4n^2)}2r^{iv2}\frac{d[r, r^{iv}]_2}{dr^{iv}} + \frac{3+4n^2}{2n^2(1-4n^2)}r^{iv}[r, r^{iv}]_2\right]\sin 2(p^{iv}-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{3n(1-9n^2)}2r^{iv2}\frac{d[r, r^{iv}]_3}{dr^{iv}} + \frac{3+9n^2}{3n^2(1-9n^2)}r^{iv}[r, r^{iv}]_3\right]\sin 3(p^{iv}-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{4n(1-16n^2)}2r^{iv2}\frac{d[r, r^{iv}]_4}{dr^{iv}} + \frac{3+16n^2}{4n^2(1-16n^2)}r^{iv}[r, r^{iv}]_4\right]\sin 4(p^{iv}-p)$$

$-$ .....,

dans laquelle

$$n = 1 - \frac{dp}{dp^{iv}} = 1 - \left(\frac{r^{iv}}{r}\right)^{\frac{3}{2}},$$

r^{IV} étant la distance moyenne de Vénus au Soleil, et r celle de Saturne au Soleil.

2. Pour la détermination des quantités

$$r^{IV}[r, r^{IV}]_0, \quad r^{IV}[r, r^{IV}]_1, \ldots, \quad 2r^{IV2}\frac{d[r, r^{IV}]_1}{dr^{IV}}, \quad 2r^{IV2}\frac{d[r, r^{IV}]_2}{dr^{IV}}, \ldots,$$

on aura les mêmes formules que dans le n° 2 de la Section troisième, en changeant r'' en r^{IV}.

Faisant donc $z = \frac{r^{IV}}{r}$, on aura par la Table du n° 4 de la seconde Partie des *Variations séculaires*

$$z = 0{,}075820, \quad M = 1{,}001437, \quad N = 0{,}037883,$$

et de là on trouvera

$(0) = 1{,}0130516$	log.	$0{,}0056316$,
$(1) = 0{,}229934$		$9{,}3616037$,
$(2) = 0{,}02182\,46$		$8{,}3389464$,
$(3) = 0{,}0027794$		$7{,}4439510$,
.....		.....,

ensuite

$r^{IV}[r, r^{IV}] = 0{,}0759293$	log.	$8{,}8804096$,
$r^{IV}[r, r^{IV}]_1 = 0{,}005761$		$7{,}7604952$,
$r^{IV}[r, r^{IV}]_2 = 0{,}000327$		$6{,}5138292$,
.....		.....,

enfin

$2r^{IV2}\frac{d[r, r^{IV}]}{dr^{IV}} = 0{,}000439$	log.	$6{,}6421676$,
$2r^{IV2}\frac{d[r, r^{IV}]_1}{dr^{IV}} = 0{,}011572$		$8{,}0634084$,
$2r^{IV2}\frac{d[r, r^{IV}]_2}{dr^{IV}} = 0{,}001319$		$7{,}1201460$,
.....		.....

3. Or

$$n = 1 - z^{\frac{3}{2}} = 0{,}979123;$$

ainsi la formule ci-dessus deviendra par ces substitutions

$$-T[0{,}003074\sin(p^{IV} - p) - 0{,}000648\sin 2(p^{IV} - p) - \ldots].$$

De sorte qu'en y mettant pour T sa valeur en secondes $61'',4176$, on aura

Correction de la longitude de Vénus due à l'action de Saturne et dépendante de la distance héliocentrique de ces Planètes

$$-0'',1888\sin(\varphi - b) + 0'',0398\sin 2(\varphi - b) + \ldots.$$

Cette correction étant fort au-dessous d'une seconde peut être négligée dans tous les cas; mais il était nécessaire de s'assurer par le calcul qu'elle pouvait toujours l'être, ce que personne n'avait encore fait.

§ II. — *Calcul des variations de Vénus dues à l'action de Jupiter.*

4. Pour ce calcul il n'y a qu'à changer dans la formule du n° 1 les quantités r, p et T, relatives à Saturne, en r', p', T' pour Jupiter.

Faisant donc $z = \frac{r^{IV}}{r'}$, on aura par la Table citée

$$z = 0{,}139076, \quad M = 1{,}004841, \quad N = 0{,}069370,$$

et de là on trouvera

$(0) = 1{,}044870$	log.	$0{,}0190622$,
$(1) = 0{,}432801$		$9{,}6362879$,
$(2) = 0{,}075106$		$8{,}8756746$,
$(3) = 0{,}012641$		$8{,}1017814$,
$(4) = 0{,}0060326$		$7{,}7805045$,
.....		.....,

ensuite

$$r^{1v}[r', r^{1v}] = 0{,}139756 \quad \log.\ 9{,}1453697,$$
$$r^{1v}[r', r^{1v}]_1 = 0{,}019484 \quad 8{,}2896697,$$
$$r^{1v}[r', r^{1v}]_2 = 0{,}002032 \quad 7{,}3078605,$$
$$r^{1v}[r', r^{1v}]_3 = 0{,}000223 \quad 6{,}3476703,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots,$$

enfin

$$2r^{1v2}\frac{d[r', r^{1v}]}{dr^{1v}} = 0{,}002750 \quad \log.\ 7{,}4393327,$$
$$2r^{1v2}\frac{d[r', r^{1v}]_1}{dr^{1v}} = 0{,}039544 \quad 8{,}5970850,$$
$$2r^{1v2}\frac{d[r', r^{1v}]_2}{dr^{1v}} = 0{,}008212 \quad 7{,}9144331,$$
$$2r^{1v2}\frac{d[r', r^{1v}]_3}{dr^{1v}} = 0{,}001501 \quad 7{,}1764906,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

5. La valeur de n étant toujours exprimée par $1 - z^{\frac{3}{2}}$, elle sera dans le cas présent

$$n = 0{,}948135,$$

et la formule des inégalités dues à Jupiter deviendra

$$-T'[0{,}015067\sin(p^{1v} - p') - 0{,}004474\sin 2(p^{1v} - p') - 0{,}001100\sin 3(p^{1v} - p') - \ldots].$$

Mettant donc pour T′ sa valeur en secondes $193'',2775$, il viendra

Correction de la longitude de Vénus due à l'action de Jupiter et dépendante de la distance héliocentrique de ces Planètes

$$-2'',9121\sin(\varphi - \mathfrak{V}) + 0'',8647\sin 2(\varphi - \mathfrak{V}) + 0'',2126\sin 3(\varphi - \mathfrak{V}) + \ldots.$$

On voit qu'il n'y a que le premier terme, qui dépend de la distance simple de Vénus à Jupiter, qui puisse être sensible; encore, étant au-dessous de 3 secondes, il pourra être négligé tant que l'exactitude des observations ne pourra pas atteindre à la précision des secondes.

§ III. — *Calcul des variations de Vénus dues à l'action de Mars.*

6. On changera dans la même formule du n° 1 les quantités r, p, T, relatives à Saturne, dans les quantités r'', p'', T″ relatives à Mars, et l'on suivra du reste le même procédé dans le calcul.

Mais on pourra abréger ce calcul en partant des quantités que nous avons déjà calculées dans le § IV de la Section troisième pour l'action de Vénus sur Mars, et employant les formules données dans le n° 2 de la Section deuxième, comme nous en avons usé dans le § III de la Section précédente.

Ainsi, faisant

$$z = \frac{r''}{r^{1v}} = 0{,}139076,$$

on aura

$$r^{1v}[r'', r^{1v}] = 0{,}505488 \quad \log.\ 9{,}7037108,$$
$$r^{1v}[r'', r^{1v}]_1 = 0{,}247619 \quad 9{,}3937839,$$
$$r^{1v}[r'', r^{1v}]_2 = 0{,}089106 \quad 8{,}9499059,$$
$$r^{1v}[r'', r^{1v}]_3 = 0{,}035429 \quad 8{,}5493647,$$
$$r^{1v}[r'', r^{1v}]_4 = 0{,}014739 \quad 8{,}1684840,$$
$$r^{1v}[r'', r^{1v}]_5 = 0{,}006262 \quad 7{,}7967414,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

ensuite

$$2r^{1v2}\frac{d[r'', r^{1v}]}{dr^{1v}} = 0{,}142387 \quad \log.\ 9{,}1534703,$$
$$2r^{1v2}\frac{d[r'', r^{1v}]_1}{dr^{1v}} = 0{,}599828 \quad 9{,}7780267,$$
$$2r^{1v2}\frac{d[r'', r^{1v}]_2}{dr^{1v}} = 0{,}398531 \quad 9{,}6004621,$$
$$2r^{1v2}\frac{d[r'', r^{1v}]_3}{dr^{1v}} = 0{,}230419 \quad 9{,}3625183,$$
$$2r^{1v2}\frac{d[r'', r^{1v}]_4}{dr^{1v}} = 0{,}126023 \quad 9{,}1004499,$$
$$2r^{1v2}\frac{d[r'', r^{1v}]_5}{dr^{1v}} = 0{,}067174 \quad 8{,}8272012,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots$$

7. La valeur de n étant encore exprimée par $1-z^{\frac{3}{2}}$, elle sera ici

$$n = 0{,}672915,$$

et la formule des inégalités dues à Mars deviendra

$$-T''[0{,}715104\sin(p^{IV}-p'') - 0{,}948534\sin 2(p^{IV}-p'') - \ldots].$$

De sorte qu'en y substituant pour T'', masse de Mars, sa valeur en secondes 0'',1117, on aura

Correction de la longitude de Vénus due à l'action de Mars et dépendante de la distance héliocentrique de ces Planètes

$$-0'',0799\sin(\varphi-\sigma) + 0'',1060\sin 2(\varphi-\sigma) + \ldots.$$

Cette correction ne montant pas même à une seconde, on pourra toujours la regarder comme nulle.

§ IV. — *Calcul des variations de Vénus dues à l'action de la Terre.*

8. On suivra encore dans ce calcul le même procédé et les mêmes formules que dans celui du paragraphe précédent, en changeant seulement les quantités r'', p'', T'', relatives à Mars, en r'', p'', T'', et faisant usage des valeurs déjà calculées dans le § IV de la Section précédente pour l'action de Vénus sur la Terre, d'après les formules données dans le n° 2 de la Section deuxième.

On aura donc

$$z = \frac{r^{IV}}{r''} = 0{,}723330;$$

et de-là on trouvera

$r^{IV}[r'', r^{IV}] = 0{,}862904$	log.	9,9359626,
$r^{IV}[r'', r^{IV}]_1 = 0{,}681373$		9,8333850,
$r^{IV}[r'', r^{IV}]_2 = 0{,}381298$		9,5812645,
$r^{IV}[r'', r^{IV}]_3 = 0{,}233533$		9,3683480,

$r^{IV}[r'', r^{IV}]_4 = 0{,}1491\,68$	log.	9,1736751,
$r^{IV}[r'', r^{IV}]_5 = 0{,}097583$		8,9893743,
$r^{IV}[r'', r^{IV}]_6 = 0{,}064765$		8,8113438,
$r^{IV}[r'', r^{IV}]_7 = 0{,}043323$		8,6367227,
$r^{IV}[r'', r^{IV}]_8 = 0{,}029019$		8,4626867,
.....		.....,

ensuite

$2r^{IV2}\frac{d[r'', r^{IV}]}{dr^{IV}} = 0{,}860130$	log.	9,9345641,
$2r^{IV2}\frac{d[r'', r^{IV}]_1}{dr^{IV}} = 2{,}378234$		0,3762546,
$2r^{IV2}\frac{d[r'', r^{IV}]_2}{dr^{IV}} = 2{,}166493$		0,3357567,
$2r^{IV2}\frac{d[r'', r^{IV}]_3}{dr^{IV}} = 1{,}820720$		0,2602432,
$2r^{IV2}\frac{d[r'', r^{IV}]_4}{dr^{IV}} = 1{,}475006$		0,1687938,
$2r^{IV2}\frac{d[r'', r^{IV}]_5}{dr^{IV}} = 1{,}170062$		0,0682088,
$2r^{IV2}\frac{d[r'', r^{IV}]_6}{dr^{IV}} = 0{,}916176$		9,9619790,
$2r^{IV2}\frac{d[r'', r^{IV}]_7}{dr^{IV}} = 0{,}712027$		9,8524965,
$2r^{IV2}\frac{d[r'', r^{IV}]_8}{dr^{IV}} = 0{,}552119$		9,7420326,
.....		.....

9. Or

$$n = 1 - z^{\frac{3}{2}} = 0{,}384817;$$

donc, en faisant ces différentes substitutions, la formule des variations dues à la Terre deviendra

$$-T''[+\,8{,}009396\,\sin(p^{IV}-p'') + 18{,}250004\sin 2(p^{IV}-p'') - 11{,}584334\sin 3(p^{IV}-p'') - 1{,}687239\sin 4(p^{IV}-p'') - 0{,}551945\sin 5(p^{IV}-p'') - 0{,}231833\sin 6(p^{IV}-p'') - \ldots].$$

Ainsi, en mettant pour T''', masse de la Terre, sa valeur en secondes o'', 5645, on aura

Correction de la longitude de Vénus due à l'action de la Terre et dépendante de la distance héliocentrique de ces Planètes

$$\begin{aligned}&-4'',5217\ \sin(\varphi-\delta)-10'',3030\sin 2(\varphi-\delta)\\&+6'',5399\sin 3(\varphi-\delta)+0'',9525\sin 4(\varphi-\delta)\\&+0'',3116\sin 5(\varphi-\delta)+0'',1308\sin 6(\varphi-\delta)+\dots.\end{aligned}$$

10. M. de Lalande était jusqu'à présent le seul qui eût cherché à déterminer les inégalités périodiques de Vénus; encore s'était-il contenté de calculer celles qui dépendent de l'action de la Terre, comme les plus sensibles, à cause de la proximité des orbites de ces deux Planètes.

Son calcul se trouve parmi les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1760, et il donne pour résultat ces deux termes

$$-9'',6\sin(\varphi-\delta)-22'',0\sin 2(\varphi-\delta),$$

qui répondent, comme on voit, aux deux premiers termes de la formule que nous venons de trouver, mais avec des coefficients presque deux fois plus grands.

Cette différence dans les coefficients vient de celle dans les valeurs adoptées pour la masse de la Terre. M. de Lalande s'en est tenu à la valeur donnée par Newton, laquelle est de $\frac{1}{169282}$ en parties de la masse du Soleil, au lieu que nous l'avons réduite à $\frac{1}{365361}$ d'après les déterminations les plus exactes des parallaxes du Soleil et de la Lune. (*Voyez* le n° 6 de la seconde Partie de la *Théorie des variations séculaires*.) Il faudra donc, pour comparer les deux premiers termes de notre formule à ceux que M. de Lalande a trouvés, augmenter les coefficients de ceux-là dans le rapport de 169282 à 365361, ce qui les réduira à ceux-ci

$$-9'',759\sin(\varphi-\delta)-22'',237\sin 2(\varphi-\delta),$$

qui s'accordent, comme on voit, aux dixièmes de seconde près, avec ceux de la formule de M. de Lalande.

Mais, outre les deux termes dont il s'agit, notre formule en contient encore un dont le coefficient est assez considérable pour ne pouvoir pas être négligé, comme M. de Lalande l'a fait. C'est le terme

$$6'',5399\sin 3(\varphi-\delta),$$

qui doit influer d'autant plus dans la valeur de la formule, qu'il est de signe contraire aux deux premiers. Ainsi la Table, que M. de Lalande a donnée dans les *Mémoires* cités et dans la *Connaissance des Temps* de 1762 pour les inégalités de Vénus dues à l'action de la Terre, doit être recalculée d'après la formule que nous venons de trouver.

§ V. — *Calcul des variations de Vénus dues à l'action de Mercure.*

11. La formule du n° 1 servira encore pour Mercure, en y changeant seulement les quantités r, p, T en r^{v}, p^{v}, T^{v}; mais, comme cette Planète est inférieure à Vénus, il faudra déterminer les valeurs des quantités

$$r^{iv}[r^{iv},r^{v}],\quad r^{iv}[r^{iv},r^{v}]_{1},\dots,\quad 2r^{iv2}\frac{d[r^{iv},r^{v}]}{dr^{iv}},\quad 2r^{iv2}\frac{d[r^{iv},r^{v}]_{1}}{dr^{iv}},\dots,$$

par des formules analogues à celles du § III de la Section troisième, après y avoir changé les quantités r'' en r^{iv} et r''' en r^{v}, pour les rapporter au cas présent.

On fera donc $z=\frac{r^{v}}{r^{iv}}$, et l'on aura d'abord par la Table du n° 4 de la seconde Partie des *Variations séculaires*

$$z=0,535164,\quad M=1,072986,\quad N=0,257625;$$

d'où l'on trouvera

$$\begin{aligned}(0)&=2,107096 && \log.\ 0,3236844,\\(1)&=3,035496 && 0,4822297,\\(2)&=1,950567 && 0,2901609,\end{aligned}$$

$(3) = 1,192407$ log. 0,0764244,
$(4) = 0,708704$ 9,8504648,
$(5) = 0,413817$ 9,6168083,
$(6) = 0,239042$ 9,3784742,
. . . . . ,

ensuite

$r^{iv}[r^{iv}, r^v] = 1,086081$ log. 0,0358622,
$r^{iv}[r^{iv}, r^v]_1 = 0,605705$ 9,7822615,
$r^{iv}[r^{iv}, r^v]_2 = 0,246589$ 9,3919731,
$r^{iv}[r^{iv}, r^v]_3 = 0,110767$ 9,0444097,
$r^{iv}[r^{iv}, r^v]_4 = 0,052084$ 8,7167062,
. . . . . ,

enfin

$$2r^{iv2}\frac{d[r^{iv}, r^v]}{dr^{iv}} = -2,589705 \quad \log.\ \bar{0},4132503,$$

$$2r^{iv2}\frac{d[r^{iv}, r^v]_1}{dr^{iv}} = -2,771835 \quad \bar{0},4427674,$$

$$2r^{iv2}\frac{d[r^{iv}, r^v]_2}{dr^{iv}} = -1,638514 \quad \bar{0},2144502,$$

$$2r^{iv2}\frac{d[r^{iv}, r^v]_3}{dr^{iv}} = -0,961669 \quad \bar{9},9830257,$$

$$2r^{iv2}\frac{d[r^{iv}, r^v]_4}{dr^{iv}} = -0,557815 \quad \bar{9},7464901,$$

. . . . . .

12. La valeur de n sera ici

$$n = 1 - \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = -1,554288;$$

et la formule des inégalités dues à Mercure deviendra

$$-T^v[0,136642\sin(p^v - p^{iv}) - 0,066733\sin 2(p^v - p^{iv}) - \ldots].$$

Substituant pour T^v, masse de Mercure, sa valeur en secondes $0'',1018$, on aura donc

Correction de la longitude de Vénus due à l'action de Mercure et dépendante de la distance héliocentrique entre ces Planètes

$$-0'',0139\sin(\varphi - \mathbb{V}) + 0'',0068\sin 2(\varphi - \mathbb{V}) + \ldots$$

Comme cette correction est toujours au-dessous d'un dixième de seconde, elle peut être réputée nulle dans tous les cas.

SECTION SIXIÈME

OÙ L'ON DONNE LES VARIATIONS PÉRIODIQUES DU MOUVEMENT DE MERCURE, DÉPENDANTES DE SES DISTANCES HÉLIOCENTRIQUES AUX AUTRES PLANÈTES.

Mercure, par sa petitesse et par sa proximité du Soleil, est de toutes les Planètes principales celle qui attire le moins notre attention. Mais les Astronomes, occupés à examiner toutes les parties du grand édifice du Système du monde, et pour qui tout phénomène céleste est également précieux, mettent la Théorie de Mercure sur la même ligne que celle des autres Planètes, et y attachent même d'autant plus d'importance qu'elle présente plus de difficultés. La rareté des observations de cette Planète, qui ne peuvent être faites que dans ses passages sur le Soleil, et surtout l'insuffisance de celles que les anciens nous ont transmises, ont retenu jusqu'ici la Théorie de Mercure dans un état d'imperfection que l'observation du dernier passage n'a que trop confirmé. Cette Théorie demande donc encore les recherches des Astronomes, et celles qui font l'objet de cette Section pourront y être utiles, en offrant le calcul des principales inégalités périodiques dues à la gravitation universelle.

§ I. — *Calcul des variations de Mercure dues à Saturne.*

1. Mercure étant comme Vénus inférieur à Saturne, on aura pour les variations cherchées une formule semblable à celle du § I de la Section précédente, en y changeant seulement les quantités r^{iv}, p^{iv}, relatives à

Vénus, dans les quantités analogues r^{ν}, p^{ν} relatives à Mercure. Cette formule sera donc

$$-T\left[\frac{1}{n(1-n^2)}\,2r^{\nu 2}\frac{d[r,r^{\nu}]_1}{dr^{\nu}}+\frac{3+n^2}{n^2(1-n^2)}\,r^{\nu}[r,r^{\nu}]_1-\frac{3+2n+n^2}{n^2(1-n^2)}\,\frac{r^{\nu 2}}{r^2}\right]\sin(p^{\nu}-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{2n(1-4n^2)}\,2r^{\nu 2}\frac{d[r,r^{\nu}]_2}{dr^{\nu}}+\frac{3+4n^2}{2n^2(1-4n^2)}\,r^{\nu}[r,r^{\nu}]_2\right]\sin 2(p^{\nu}-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{3n(1-9n^2)}\,2r^{\nu 2}\frac{d[r,r^{\nu}]_3}{dr^{\nu}}+\frac{3+9n^2}{3n^2(1-9n^2)}\,r^{\nu}[r,r^{\nu}]_3\right]\sin 3(p^{\nu}-p)$$

$$-T\left[\frac{1}{4n(1-16n^2)}\,2r^{\nu 2}\frac{d[r,r^{\nu}]_4}{dr^{\nu}}+\frac{3+16n^2}{4n^2(1-16n^2)}\,r^{\nu}[r,r^{\nu}]_4\right]\sin 4(p^{\nu}-p)$$

—.....,

dans laquelle

$$n=1-\frac{dp}{dp^{\nu}}=1-\left(\frac{r^{\nu}}{r}\right)^{\frac{3}{2}},$$

r^{ν} étant la distance moyenne de Mercure au Soleil, et r celle de Saturne au Soleil.

2. On déterminera toujours les quantités

$$r^{\nu}[r,r^{\nu}]_0,\quad r^{\nu}[r,r^{\nu}]_2,\ldots,\quad 2r^{\nu 2}\frac{d[r,r^{\nu}]}{dr^{\nu}},\quad 2r^{\nu 2}\frac{d[r,r^{\nu}]_1}{dr^{\nu}},\ldots$$

par des formules semblables à celles du n° 2 de la Section troisième, en y changeant r'' en r^{ν}.

Ainsi, en faisant $z=\frac{r^{\nu}}{r}$, on aura d'abord par la Table du n° 4 de la seconde Partie de la *Théorie des variations séculaires*

$$z=0{,}040576,\quad M=1{,}000411,\quad N=0{,}020284,$$

de là on trouvera

$(0)=1{,}003714$	log.	0,0016099,
$(1)=0{,}122106$		9,0867364,
$(2)=0{,}006252$		7,7959912,
$(3)=0{,}002257$		7,3535316,
.....		.....,

ensuite

$r^{\nu}[r,r^{\nu}]=0{,}040593$	log.	8,6084480,
$r^{\nu}[r,r^{\nu}]_1=0{,}001647$		7,2167936,
$r^{\nu}[r,r^{\nu}]_2=0{,}000049$		5,6931140,
.....		.....,

enfin

$2r^{\nu 2}\frac{d[r,r^{\nu}]}{dr^{\nu}}=0{,}000167$	log.	6,2224563,
$2r^{\nu 2}\frac{d[r,r^{\nu}]_1}{dr^{\nu}}=0{,}003299$		7,5183862,
$2r^{\nu 2}\frac{d[r,r^{\nu}]_2}{dr^{\nu}}=0{,}000204$		6,3094172,
.....		.....

3. Or

$$n=1-z^{\frac{3}{2}}=0{,}991827;$$

donc, faisant ces substitutions dans la formule précédente, elle deviendra

$$-T[0{,}000625\sin(p^{\nu}-p)-0{,}000094\sin 2(p^{\nu}-p)-\ldots];$$

de sorte qu'en mettant pour T sa valeur en secondes 61″,4176, on aura

Correction de la longitude de Mercure due à l'action de Saturne et dépendante de la distance héliocentrique de ces Planètes

$$-0'',0384\sin(\mathfrak{Y}-\mathfrak{h})+0'',0058\sin 2(\mathfrak{Y}-\mathfrak{h})+\ldots$$

§ II. — *Calcul des variations de Mercure dues à Jupiter.*

4. On changera dans la formule du n° 1 les quantités r, p, T, relatives à Saturne, dans les quantités r', p', T′ relatives à Jupiter, et l'on suivra du reste le même procédé.

Faisant donc $z=\frac{r^{\nu}}{r'}$, on aura par la Table citée

$$z=0{,}074428,\quad M=1{,}001385,\quad N=0{,}037188,$$

et de là on trouvera

$$\begin{aligned}
(0) &= 1{,}012573 && \log.\ 0{,}00542\,63,\\
(1) &= 0{,}225621 && 9{,}3533794,\\
(2) &= 0{,}020948 && 8{,}3211426,\\
(3) &= 0{,}001315 && 7{,}1189588,\\
&\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots,
\end{aligned}$$

ensuite

$$\begin{aligned}
r^{\nu}[r', r^{\nu}] &= 0{,}074531 && \log.\ 8{,}8723395,\\
r^{\nu}[r', r^{\nu}]_1 &= 0{,}005551 && 7{,}7443831,\\
r^{\nu}[r', r^{\nu}]_2 &= 0{,}000311 && 6{,}4922547,\\
&\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots,
\end{aligned}$$

enfin

$$\begin{aligned}
2r'^2\frac{d[r', r^{\nu}]}{dr^{\nu}} &= 0{,}000415 && \log.\ 6{,}6179434,\\
2r'^2\frac{d[r', r^{\nu}]_1}{dr^{\nu}} &= 0{,}011148 && 8{,}0471970,\\
2r'^2\frac{d[r', r^{\nu}]_2}{dr^{\nu}} &= 0{,}001240 && 7{,}0933516,\\
&\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots
\end{aligned}$$

5. La valeur de n étant

$$n = 1 - z^{\frac{3}{2}} = 0{,}979695,$$

on trouvera pour la formule des variations dont il s'agit

$$-\mathrm{T}'[0{,}002944\sin(p^{\nu} - p') - 0{,}000613\sin 2(p^{\nu} - p') - \ldots].$$

En mettant pour T′, masse de Jupiter, sa valeur en secondes $193'',2775$, on aura enfin

Correction de la longitude de Mercure due à l'action de Jupiter et dépendante de la distance héliocentrique de ces Planètes

$$-0'',5690\sin(\breve{\varphi} - \breve{\mathcal{C}}) + 0'',1184\sin 2(\breve{\varphi} - \breve{\mathcal{C}}) + \ldots.$$

§ III. — *Calcul des variations de Mercure dues à Mars.*

6. On emploiera toujours les mêmes formules que dans le § I, en y changeant simplement r, p, T en r'', p'', T″, pour substituer aux quantités relatives à Saturne les quantités analogues relatives à Mars; et, comme les valeurs de

$$r''[r'', r^{\nu}],\quad r''[r'', r^{\nu}]_1, \ldots,\quad 2r''^2\frac{d[r'', r^{\nu}]}{dr''},\quad 2r''^2\frac{d[r'', r^{\nu}]_1}{dr''}, \ldots$$

ont déjà été calculées dans le § V de la Section troisième, on en pourra déduire immédiatement celles de

$$r^{\nu}[r'', r^{\nu}],\quad r^{\nu}[r'', r^{\nu}]_1, \ldots,\quad 2r^{\nu 2}\frac{d[r'', r^{\nu}]}{dr^{\nu}},\quad 2r^{\nu 2}\frac{d[r'', r^{\nu}]_1}{dr^{\nu}}, \ldots$$

par les formules données dans le n° **2** de la Section deuxième.

Ainsi faisant

$$z = \frac{r^{\nu}}{r''} = 0{,}254054,$$

on aura d'abord

$$\begin{aligned}
r^{\nu}[r'', r^{\nu}] &= 0{,}258309 && \log.\ 9{,}4121389,\\
r^{\nu}[r'', r^{\nu}]_1 &= 0{,}066171 && 8{,}8206682,\\
r^{\nu}[r'', r^{\nu}]_2 &= 0{,}012642 && 8{,}1018183,\\
&\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots,
\end{aligned}$$

ensuite

$$\begin{aligned}
2r^{\nu 2}\frac{d[r'', r^{\nu}]}{dr^{\nu}} &= 0{,}017675 && \log.\ 8{,}2473594,\\
2r^{\nu 2}\frac{d[r'', r^{\nu}]_1}{dr^{\nu}} &= 0{,}139136 && 9{,}1434395,\\
2r^{\nu 2}\frac{d[r'', r^{\nu}]_2}{dr^{\nu}} &= 0{,}052024 && 8{,}7162037,\\
&\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots
\end{aligned}$$

7. Or

$$n = 1 - z^{\frac{3}{2}} = 0,871947;$$

donc, faisant ces différentes substitutions dans la formule générale, elle deviendra

$$-T''[0,081663\sin(p^{v} - p'') - 0,039223\sin 2(p^{v} - p'') - \ldots];$$

par conséquent, en mettant pour T'', masse de Mars, sa valeur en secondes $0'',1117$, il viendra pour la

Correction de la longitude de Mercure due à l'action de Mars et dépendante de la distance héliocentrique de ces Planètes

$$-0'',0091\sin(☿ - ♂) + 0'',0044\sin 2(☿ - ♂) + \ldots.$$

§ IV. — *Calcul des variations de Mercure dues à la Terre.*

8. Ce calcul dépend encore des mêmes formules que celui du paragraphe précédent, en changeant seulement les quantités r'', p'', T'' en r''', p''', T''', et faisant usage des valeurs déjà calculées dans le § V de la Section quatrième.

On fera donc, comme dans cet endroit,

$$z = \frac{r^{v}}{r'''} = 0,387100,$$

et l'on aura

$r^{v}[r''', r^{v}] = 0,402968$	log.	9,6052703,
$r^{v}[r''', r^{v}]_1 = 0,159151$		9,2018096,
$r^{v}[r''', r^{v}]_2 = 0,046518$		8,6676249,
$r^{v}[r''', r^{v}]_3 = 0,015052$		8,1776006,
.....		.....,

ensuite

$2r^{v2}\frac{d[r''', r^{v}]}{dr^{v}} = 0,069585$	log.	8,8425156,
$2r^{v2}\frac{d[r''', r^{v}]_1}{dr^{v}} = 0,359525$		9,5557291,

$2r^{v2}\frac{d[r''', r^{v}]_2}{dr^{v}} = 0,199528$	log.	9,3000038,
$2r^{v2}\frac{d[r''', r^{v}]_3}{dr^{v}} = 0,094868$		8,9775773,
.....		.....

9. Mais

$$n = 1 - z^{\frac{3}{2}} = 0,759157;$$

donc, faisant ces substitutions dans la formule des variations de Mercure, elle deviendra

$$-T'''[0,092134\sin(p^{v} - p''') - 0,834493\sin 2(p^{v} - p''') - \ldots].$$

D'où, en mettant pour T''', masse de la Terre, sa valeur en secondes $0'',564549$, on aura

Correction de la longitude de Mercure due à l'action de la Terre et dépendante de la distance héliocentrique de Mercure à la Terre

$$-0'',0520\sin(☿ - ♁) + 0'',4711\sin 2(☿ - ♁) + \ldots.$$

§ V. — *Calcul des variations de Mercure dues à l'action de Vénus.*

10. Les formules qu'on a employées jusqu'ici serviront encore pour ce calcul, puisque Mercure est également inférieur à Vénus. On changera donc simplement, dans la formule du § I, les quantités r, p, T en r^{iv}, p^{iv}, T^{iv}, et l'on partira des valeurs déjà calculées dans le § V de la Section cinquième, pour avoir celles de

$$r^{v}[r^{iv}, r^{v}], \quad r^{v}[r^{iv}, r^{v}]_1, \ldots,$$

comme on en a usé ci-dessus.

On fera ainsi

$$z = \frac{r^{v}}{r^{iv}} = 0,535164,$$

et l'on trouvera d'abord

$$r^{v}[r^{iv}, r^{v}] = 0{,}581231 \qquad \log.\ 9{,}7643490,$$
$$r^{v}[r^{iv}, r^{v}]_1 = 0{,}324152 \qquad 9{,}5107483,$$
$$r^{v}[r^{iv}, r^{v}]_2 = 0{,}131965 \qquad 9{,}1204599,$$
$$r^{v}[r^{iv}, r^{v}]_3 = 0{,}059278 \qquad 8{,}7728965,$$
$$r^{v}[r^{iv}, r^{v}]_4 = 0{,}027873 \qquad 8{,}4451930,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots,$$

ensuite

$$2r^{v2}\frac{d[r^{iv}, r^{v}]}{dr^{v}} = 0{,}223454 \qquad \log.\ 9{,}3491882,$$
$$2r^{v2}\frac{d[r^{iv}, r^{v}]_1}{dr^{v}} = 0{,}835079 \qquad 9{,}9217276,$$
$$2r^{v2}\frac{d[r^{iv}, r^{v}]_2}{dr^{v}} = 0{,}612944 \qquad 9{,}7874209,$$
$$2r^{v2}\frac{d[r^{iv}, r^{v}]_3}{dr^{v}} = 0{,}396095 \qquad 9{,}5977994,$$
$$2r^{v2}\frac{d[r^{iv}, r^{v}]_4}{dr^{v}} = 0{,}242776 \qquad 9{,}3851950,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

11. Or

$$n = 1 - z^{\frac{1}{3}} = 0{,}608502;$$

donc la formule des variations dont il s'agit deviendra

$$-T^{iv}[+1{,}339359\sin(p^{v} - p^{iv}) - 2{,}706669\sin 2(p^{v} - p^{iv}) - 0{,}237901\sin 3(p^{v} - p^{iv}) - \ldots].$$

De sorte qu'en substituant pour T^{iv}, masse de Vénus, sa valeur en secondes $0'',739892$, on aura

Correction de la longitude de Mercure due à l'action de Vénus et dépendante de la distance héliocentrique entre ces Planètes

$$-0'',9910\sin(\mathbb{\u263F} - \mathbb{\u2640}) + 2'',0026\sin 2(\mathbb{\u263F} - \mathbb{\u2640}) + 0'',1760\sin 3(\mathbb{\u263F} - \mathbb{\u2640}) + \ldots.$$

12. Les inégalités de Mercure dont nous venons de donner le calcul sont, comme l'on voit, trop petites pour qu'on y puisse avoir égard dans l'état d'imperfection où les Tables de cette Planète se trouvent encore. Mais ce calcul était nécessaire pour s'assurer de la véritable valeur de ces inégalités, et il sert d'ailleurs à compléter la Théorie que nous nous sommes engagé de donner sur les variations périodiques des Planètes dépendantes uniquement de leurs distances héliocentriques.

Dans plusieurs passages du Mémoire qui précède, Lagrange laisse entrevoir le projet qu'il avait formé de compléter son travail par le calcul des inégalités périodiques des Planètes, qui dépendent des excentricités et des inclinaisons. L'illustre Auteur n'a pas donné suite à ce projet, et il en fait comprendre la raison dans la seconde des deux Notes suivantes qu'il a publiées dans le Recueil de l'Académie de Berlin, et que nous croyons devoir reproduire ici.

(*Note de l'Éditeur.*)

AVERTISSEMENT DE M. DE LAGRANGE SUR UN MÉMOIRE DE M. DU VAL LE ROI.

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1787.)

Ce Mémoire doit être regardé comme un Supplément à ceux que j'ai donnés en 1782 et 1784, et qui contiennent l'application de la *Théorie des variations séculaires et périodiques* aux anciennes Planètes principales. J'avais entrepris depuis d'étendre cette application à la nouvelle Planète découverte par M. Herschel; mais, pendant que je m'occupais de ce travail, M. du Val le Roi me fit l'honneur de m'envoyer celui qu'il venait de faire sur le même objet; et je vis avec plaisir que son Ouvrage remplissait le but que je m'étais proposé et rendait le mien inutile. C'est par cette raison que je prends la liberté de le présenter à l'Académie; je désire qu'elle le trouve assez intéressant pour mériter d'avoir place dans le Recueil qu'elle publie.

AVERTISSEMENT SUR UN SECOND MÉMOIRE DE M. DU VAL LE ROI.

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, années 1792 et 1793.)

Dans la première Partie de la *Théorie des variations périodiques des Planètes*, imprimée dans le volume de 1783, je me suis contenté de donner le développement de mes formules générales pour les variations indépendantes des excentricités et des inclinaisons; et dans la seconde Partie, imprimée dans le volume de 1784, j'en ai fait l'application aux six anciennes Planètes principales. La découverte d'une septième Planète exigeait une Addition à ce travail, ainsi qu'à celui sur les équations séculaires. Cet objet se trouve rempli dans le Mémoire de M. du Val le Roi imprimé dans le volume de 1787. Dans le suivant, le même Auteur donne d'abord un développement complet de mes formules pour les variations périodiques, et il en fait ensuite l'application à la nouvelle Planète; de sorte que ce Mémoire contient en même temps une Addition à son premier Mémoire et un Supplément à mon Mémoire de 1784; c'est à ce double titre que je l'offre à l'Académie, et que je désire qu'il puisse aussi avoir place dans son Recueil.

SUR LA MANIÈRE DE RECTIFIER LES MÉTHODES ORDINAIRES D'APPROXIMATION POUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES PLANÈTES.