SECTION SECONDE.

FORMULES GÉNÉRALES POUR LES VARIATIONS SÉCULAIRES DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES.

28. Les formules que nous venons de donner, dans la Section précédente, pour représenter les variations des éléments des Planètes, causées par leur action mutuelle, expriment l'effet total de cette action, et pourraient servir à déterminer toutes les inégalités qu'elle doit produire dans leur mouvement. Mais notre objet est simplement de déterminer les variations séculaires des éléments des Planètes, c'est-à-dire celles qui n'ont aucune période fixe, ou du moins qui en ont de très-longues et indépendantes du retour des Planètes aux mêmes points de leurs orbites. Ces variations sont nécessairement renfermées dans les formules trouvées, et, pour les démêler, il n'y aura qu'à développer ces formules et les débarrasser ensuite de tout ce qu'elles peuvent renfermer de périodique. Or la petitesse des excentricités et des inclinaisons des Planètes fait qu'on peut exprimer leurs coordonnées par des séries très-convergentes de sinus et cosinus d'angles proportionnels au temps. Il faudra donc faire ces substitutions à la place de x, y, z, x', y', z', ..., et rejeter ensuite tous les termes qui se trouveront contenir des sinus et des cosinus. Ainsi il faut commencer par chercher les valeurs convenables de x, y, z en t.

29. Nous avons déjà remarqué plus haut (**14**) que, pour faciliter cette recherche, il est à propos d'employer les substitutions

$$x = r\cos q, \quad y = r\sin q,$$

r étant le rayon de l'orbite projetée sur le plan des x, y, et q l'angle de ce rayon avec l'axe des x.

Ces substitutions ont d'ailleurs l'avantage d'être conformes aux usages astronomiques, puisqu'en prenant le plan des x et y pour celui de l'écliptique, et supposant l'axe des x dirigé vers le premier point d'*Aries*,

r sera la distance accourcie de la Planète au Soleil, et q sa longitude héliocentrique.

En mettant ces expressions de x et y dans l'équation

$$Px - Qy + Rz = 0$$

du n° 4, on en tire

$$z = \frac{r}{R}(Q\sin q - P\cos q).$$

De là on aura

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{r}{R}\sqrt{R^2 + (Q\sin q - P\cos q)^2};$$

et l'équation

$$g\rho = Nx + My + Lz + \Pi^2$$

du n° 7 donnera, en faisant

$$B = RN - PL, \quad C = -RM - QL,$$

comme dans le n° 8,

$$r = \frac{R\Pi^2}{g\sqrt{R^2 + (Q\sin q - P\cos q)^2} + C\sin q - B\cos q}.$$

Et comme les mêmes équations ont lieu aussi en y faisant varier simplement x, y, z, et regardant les autres quantités comme constantes (**10**), il s'ensuit que, pour avoir les valeurs des différences dz et dr, il suffira de faire varier dans les formules précédentes les quantités z, r, q, en prenant P, Q, R, Π, B, C pour constantes.

Enfin l'équation

$$x\,dy - y\,dx = R\,dt$$

du n° 3 donnera

$$r^2\,dq = R\,dt,$$

de sorte qu'en substituant pour r^2 sa valeur en q on aura

$$\frac{R\Pi^4 dq}{\left[g\sqrt{R^2 + (Q\sin q - P\cos q)^2} + C\sin q - B\cos q\right]^2} = dt.$$

Par cette équation on déterminera donc q en t; ensuite on aura, par la substitution de cette valeur de q, celles de x, y, z en t.

30. Lorsque l'inclinaison et l'excentricité sont l'une et l'autre fort petites, comme cela a lieu dans notre système planétaire, les quantités P et Q sont nécessairement toujours très-petites vis-à-vis de R, et les quantités L, M, N le sont aussi (4, 9), de sorte que B et C seront pareillement très-petites par rapport à R. On pourra donc dans ce cas développer la fraction

$$\frac{1}{\left[g\sqrt{R^2+(Q\sin q-P\cos q)^2}+C\sin q-B\cos q\right]^{\frac{1}{2}}}$$

en une suite fort convergente, laquelle, étant ordonnée relativement aux sinus et cosinus de q et de ses multiples, sera de la forme

$$\alpha(1+\beta\sin q+\gamma\cos q+\delta\sin 2q+\varepsilon\cos 2q+\ldots),$$

α étant une quantité finie; β, γ étant des quantités très-petites du premier ordre; δ, ε étant très-petites du second ordre, et ainsi de suite.

Par ce moyen, l'équation précédente deviendra

$$R\Pi^4\alpha(1+\beta\sin q+\gamma\cos q+\delta\sin 2q+\varepsilon\cos 2q+\ldots)\,dq=dt,$$

ou bien, en divisant par $R\Pi^4\alpha$,

$$dq+\beta\sin q\,dq+\gamma\cos q\,dq+\delta\sin 2q\,dq+\varepsilon\cos 2q\,dq+\ldots=\frac{dt}{R\Pi^4\alpha}.$$

Le premier membre de cette équation est intégrable exactement lorsque β, γ,... sont des quantités constantes; mais, lorsque ces quantités sont variables, il faut avoir recours aux séries; et l'on trouve, en employant l'opération connue des intégrations par parties, et regardant β, γ,... comme des fonctions de q,

$$\int\beta\sin q\,dq=-\beta\cos q+\int\frac{d\beta}{dq}\cos q\,dq,$$

$$\int\frac{d\beta}{dq}\cos q\,dq=\frac{d\beta}{dq}\sin q-\int\frac{d^2\beta}{dq^2}\sin q\,dq,$$

$$\int\frac{d^2\beta}{dq^2}\sin q\,dq=-\frac{d^2\beta}{dq^2}\cos q+\int\frac{d^3\beta}{dq^3}\cos q\,dq,$$

et ainsi de suite.

On aura de même

$$\int\gamma\cos q\,dq=\gamma\sin q-\int\frac{d\gamma}{dq}\sin q\,dq,$$

$$\int\frac{d\gamma}{dq}\sin q\,dq=-\frac{d\gamma}{dq}\cos q+\int\frac{d^2\gamma}{dq^2}\cos q\,dq,$$

.....

Donc, si l'on fait ces substitutions successives, et qu'on suppose, pour abréger,

$$(\beta)=\beta-\frac{d\gamma}{dq}-\frac{d^2\beta}{dq^2}+\frac{d^3\gamma}{dq^3}+\frac{d^4\beta}{dq^4}-\ldots,$$

$$(\gamma)=\gamma+\frac{d\beta}{dq}-\frac{d^2\gamma}{dq^2}-\frac{d^3\beta}{dq^3}+\frac{d^4\gamma}{dq^4}+\ldots,$$

on aura

$$\int(\beta\sin q\,dq+\gamma\cos q\,dq)=-(\beta)\cos q+(\gamma)\sin q.$$

Et, supposant pareillement

$$(\delta)=\delta-\frac{1}{2}\frac{d\varepsilon}{dq}-\frac{1}{4}\frac{d^2\delta}{dq^2}+\frac{1}{8}\frac{d^3\varepsilon}{dq^3}+\frac{1}{16}\frac{d^4\delta}{dq^4}-\ldots,$$

$$(\varepsilon)=\varepsilon+\frac{1}{2}\frac{d\delta}{dq}-\frac{1}{4}\frac{d^2\varepsilon}{dq^2}-\frac{1}{8}\frac{d^3\delta}{dq^3}+\frac{1}{16}\frac{d^4\varepsilon}{dq^4}+\ldots,$$

on trouvera

$$\int(\delta\sin 2q\,dq+\varepsilon\cos 2q\,dq)=-\frac{1}{2}(\delta)\cos q+\frac{1}{2}(\varepsilon)\sin q,$$

et ainsi de suite.

A l'égard du second membre de l'équation, il est évidemment intégrable en y regardant R, Π, α comme des fonctions de t.

Soit, pour plus de simplicité,

$$dp=\frac{dt}{R\Pi^4\alpha},$$

et l'intégrale de l'équation en question sera

$$q-(\beta)\cos q+(\gamma)\sin q-\frac{1}{2}(\delta)\cos 2q+\frac{1}{2}(\varepsilon)\sin 2q+\ldots=p,$$

de laquelle, puisque (β), (γ) sont supposées très-petites du premier ordre, (δ), (ε) très-petites du second ordre, et ainsi de suite, il est facile de tirer la valeur de q en p, exprimée par une suite fort convergente.

31. En général, si l'on a l'équation

$$q + f(q) = p,$$

$f(q)$ dénotant une fonction quelconque de q, on aura, par le Théorème que j'ai donné ailleurs,

$$q = p - f(p) + \frac{1}{2}\frac{d[f(p)]^2}{dp} - \frac{1}{2.3}\frac{d^2[f(p)]^3}{dp^2} + \ldots,$$

et même, en dénotant par φ une autre fonction quelconque et faisant $\varphi'(p) = \frac{d\varphi(p)}{dp}$,

$$\varphi(q) = \varphi(p) - f(p)\varphi'(p) + \frac{1}{2}\frac{d\left[[f(p)]^2\varphi'(p)\right]}{dp} - \ldots.$$

Ainsi, dans notre cas, il n'y aura qu'à faire

$$f(q) = -(\beta)\cos q + (\gamma)\sin q - \ldots,$$

et par conséquent

$$f(p) = -(\beta)\cos p + (\gamma)\sin p - \tfrac{1}{2}(\delta)\cos 2p + \tfrac{1}{2}(\varepsilon)\sin 2p - \ldots,$$

et exécuter ensuite relativement à p les différentiations indiquées.

On trouvera de cette manière

$$q = p + (\mathrm{B})\cos p - (\mathrm{C})\sin p + (\mathrm{D})\cos 2p - (\mathrm{E})\sin 2p + \ldots.$$

en supposant

$$(\mathrm{B}) = (\beta) - \tfrac{1}{4}(\beta)(\varepsilon) + \tfrac{1}{4}(\gamma)(\delta) + \ldots,$$

$$(\mathrm{C}) = (\gamma) + \tfrac{1}{4}(\beta)(\delta) + \tfrac{1}{4}(\gamma)(\varepsilon) + \ldots,$$

$$(\mathrm{D}) = \tfrac{1}{2}(\delta) - (\beta)(\gamma) + \ldots,$$

$$(\mathrm{E}) = \tfrac{1}{2}(\varepsilon) + \tfrac{1}{2}(\beta)^2 - \tfrac{1}{2}(\gamma)^2 + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

32. Dans les orbites non troublées la quantité p est proportionnelle au temps t, parce que les quantités R, Π, α y sont constantes, en sorte que

$$p = \frac{t}{\mathrm{R}\Pi^2\alpha}.$$

Ainsi p est alors la valeur moyenne de q; et puisque q est la longitude vraie de la Planète, p en sera la longitude moyenne.

Il n'en est pas de même pour les orbites troublées, où les quantités R, Π, α sont variables; cependant on peut toujours, par analogie, y regarder la quantité p comme la longitude moyenne; mais alors le mouvement moyen ne sera plus uniforme, et la vitesse de ce mouvement se trouvera exprimée par la quantité variable $\frac{1}{\mathrm{R}\Pi^2\alpha}$.

Si cette quantité ne contenait que des termes proportionnels aux sinus ou cosinus de t et de ses multiples, il est clair que les variations de p qui en proviendraient ne seraient que périodiques; elles rentreraient par conséquent dans les inégalités périodiques du mouvement des Planètes, inégalités dont nous faisons abstraction dans ces Recherches. Mais si la quantité $\frac{1}{\mathrm{R}\Pi^2\alpha}$ renferme des termes qui croissent en même temps que t, ou qui aient une période très-longue, ces termes donneront des variations séculaires dans le mouvement moyen, et la détermination de ces variations est un des points les plus importants de la Théorie que nous traitons. Il est donc nécessaire de déterminer rigoureusement la loi de la variation de la quantité dont il s'agit, et pour cela il faut connaître la valeur de la quantité α qui représente le terme tout constant de la fraction

$$\frac{1}{\left[g\sqrt{\mathrm{R}^2 + (\mathrm{Q}\sin q - \mathrm{P}\cos q)^2} + \mathrm{C}\sin q - \mathrm{B}\cos q\right]^2},$$

développée suivant les sinus et cosinus des multiples de q; c'est de quoi nous allons nous occuper.

33. Commençons par faire disparaître le radical du dénominateur, en multipliant le haut et le bas de la fraction par la quantité

$$\left[g\sqrt{\mathrm{R}^2 + (\mathrm{Q}\sin q - \mathrm{P}\cos q)^2} - \mathrm{C}\sin q + \mathrm{B}\cos q\right]^2,$$

on aura cette transformée

$$\frac{\left[g\sqrt{R^2+(Q\sin q-P\cos q)^2}-C\sin q+B\cos q\right]^2}{\left[g^2R^2+g^2(Q\sin q-P\cos q)^2-(C\sin q-B\cos q)^2\right]^2};$$

laquelle se réduit à cette forme

$$\frac{a+b\cos 2q-c\sin 2q+2g(B\cos q-C\sin q)V}{(h+m\cos 2q-n\sin 2q)^2},$$

en faisant, pour abréger,

$$a=g^2\left(R^2+\frac{Q^2+P^2}{2}\right)+\frac{C^2+B^2}{2},$$

$$b=g^2\,\frac{P^2-Q^2}{2}+\frac{B^2-C^2}{2},$$

$$c=g^2PQ+BC,$$

$$h=g^2\left(R^2+\frac{Q^2+P^2}{2}\right)-\frac{C^2+B^2}{2},$$

$$m=g^2\,\frac{P^2-Q^2}{2}-\frac{B^2-C^2}{2},$$

$$n=g^2PQ-BC,$$

$$V=\sqrt{R^2+(Q\sin q-P\cos q)^2}.$$

A considérer cette formule, il est facile de voir que la partie qui a pour numérateur $a+b\cos 2q-c\sin 2q$ ne donnera par le développement que des termes proportionnels à des sinus ou cosinus de multiples pairs de q, et que l'autre partie dont le numérateur est $2g(B\cos q-C\sin q)V$ donnera seulement des termes proportionnels aux sinus et cosinus des multiples impairs de q. De sorte qu'on aura (30)

$$\frac{a+b\cos 2q-c\sin 2q}{(h+m\cos 2q-n\sin 2q)^2}=\alpha(1+\delta\sin 2q+\varepsilon\cos 2q+\ldots),$$

$$\frac{2g(B\cos q-C\sin q)V}{(h+m\cos 2q-n\sin 2q)^2}=\alpha(\beta\sin q+\gamma\cos q+\zeta\sin 3q+\eta\cos 3q+\ldots).$$

Ainsi la question se réduit à trouver le terme tout constant α de la

fraction rationnelle

$$\frac{a+b\cos 2q-c\sin 2q}{(h+m\cos 2q-n\sin 2q)^2},$$

développée suivant les sinus et cosinus des multiples de $2q$.

Or, si au lieu de cette fraction on considère celle-ci plus simple

$$\frac{a+b\cos 2q-c\sin 2q}{h+m\cos 2q-n\sin 2q},$$

et qu'on la développe en une série de la forme

$$A+D\sin 2q+E\cos 2q+F\sin 4q+G\cos 4q+\ldots,$$

il est clair qu'en faisant varier de part et d'autre la quantité h, et divisant par dh, on aura

$$-\frac{a+b\cos 2q-c\sin 2q}{(h+m\cos 2q-n\sin 2q)^2}=\frac{dA}{dh}+\frac{dD}{dh}\sin 2q+\frac{dE}{dh}\cos 2q+\frac{dF}{dh}\sin 4q+\ldots.$$

De sorte qu'on aura par la comparaison des termes

$$\alpha=-\frac{dA}{dh},\quad \alpha\delta=-\frac{dD}{dh},\quad \alpha\varepsilon=-\frac{dE}{dh},\ldots,$$

Il ne s'agit donc que de développer la dernière fraction; c'est ce qu'on peut faire par différentes méthodes; mais aucune ne me paraît plus simple que celle que je vais exposer, et qui peut d'ailleurs être utile aussi dans d'autres occasions.

34. Je fais pour plus de simplicité $2q=u$, et substituant dans la fraction proposée, à la place de $\sin u$ et $\cos u$, leurs valeurs en exponentielles imaginaires, je la réduis à cette forme

$$\frac{2a+(b+c\sqrt{-1})\,e^{u\sqrt{-1}}+(b-c\sqrt{-1})\,e^{-u\sqrt{-1}}}{2h+(m+n\sqrt{-1})\,e^{u\sqrt{-1}}+(m-n\sqrt{-1})\,e^{-u\sqrt{-1}}}.$$

Cette fraction peut se partager en ces deux-ci

$$\frac{\lambda+(\mu+\nu\sqrt{-1})\,e^{u\sqrt{-1}}}{\varpi+(\rho+\sigma\sqrt{-1})\,e^{u\sqrt{-1}}}+\frac{\lambda+(\mu-\nu\sqrt{-1})\,e^{-u\sqrt{-1}}}{\varpi+(\rho-\sigma\sqrt{-1})\,e^{-u\sqrt{-1}}};$$

car en multipliant en croix et comparant les termes, on aura ces six équations

$$\varpi^2+\rho^2+\sigma^2=2h,\quad \varpi\rho=m,\quad \varpi\sigma=n,$$
$$\lambda\varpi+\mu\rho+\nu\sigma=a,\quad \lambda\rho+\mu\varpi=b,\quad \lambda\sigma+\nu\varpi=c,$$

lesquelles serviront à déterminer les six inconnues λ, μ, ν, ϖ, ρ, σ.

En effet la seconde et la troisième donnent d'abord

$$\rho=\frac{m}{\varpi},\quad \sigma=\frac{n}{\varpi},$$

valeurs qui étant substituées dans la première donneront cette transformée

$$\varpi^4-2h\varpi^2+m^2+n^2=0,$$

d'où l'on tire

$$\varpi^2=h+\sqrt{h^2-m^2-n^2};$$

ensuite les trois autres équations deviendront par les mêmes substitutions

$$\lambda\varpi^2+m\mu+n\nu=a\varpi,\quad \lambda m+\mu\varpi^2=b\varpi,\quad \lambda n+\nu\varpi^2=c\varpi;$$

ces deux dernières donnent

$$\mu=\frac{b\varpi-m\lambda}{\varpi^2},\quad \nu=\frac{c\varpi-n\lambda}{\varpi^2},$$

et l'on aura par la première, en y substituant ces valeurs,

$$\lambda=\frac{(a\varpi^2-bm-cn)\varpi}{\varpi^4-m^2-n^2},$$

où il ne s'agira plus que de substituer la valeur déjà trouvée de ϖ.

Maintenant il est visible que la fraction

$$\frac{\lambda+(\mu+\nu\sqrt{-1})e^{u\sqrt{-1}}}{\varpi+(\rho+\sigma\sqrt{-1})e^{u\sqrt{-1}}}$$

se développe naturellement en une série de la forme

$$H+(I+K\sqrt{-1})e^{u\sqrt{-1}}+(L+M\sqrt{-1})e^{2u\sqrt{-1}}+\ldots,$$

et que de même l'autre fraction se développe dans la série correspondante

$$H+(I-K\sqrt{-1})e^{-u\sqrt{-1}}+(L-M\sqrt{-1})e^{-2u\sqrt{-1}}+\ldots;$$

donc, ajoutant ensemble ces deux séries et remettant les sinus et cosinus à la place des exponentielles imaginaires, on aura la série toute réelle

$$2H+2I\cos u-2K\sin u+2L\cos 2u-2M\sin 2u+\ldots$$

pour le développement de la fraction proposée

$$\frac{a+b\cos u-c\sin u}{h+m\cos u-n\sin u}.$$

Ainsi l'on aura (numéro précédent)

$$A=2H,\quad D=-2K,\quad E=2I,\quad F=-2M,\quad G=2L,\ldots,$$

et par conséquent

$$\alpha=-2\frac{dH}{dh},\quad \alpha\delta=2\frac{dK}{dh},\quad \alpha\varepsilon=-2\frac{dI}{dh},\ldots,$$

et il ne s'agira plus que d'avoir les valeurs de H, I, K,... en fonction de h, ce qui est facile d'après les formules du numéro précédent.

Nous n'avons besoin pour notre objet que de la valeur H; or il est visible que l'on a

$$H=\frac{\lambda}{\varpi}=\frac{a\varpi^2-bm-cn}{\varpi^4-m^2-n^2};$$

et, substituant pour ϖ^2 et ϖ^4 leurs valeurs,

$$H=\frac{a\left(h+\sqrt{h^2-m^2-n^2}\right)-bm-cn}{2\left(h^2-m^2-n^2\right)+2h\sqrt{h^2-m^2-n^2}};$$

or le dénominateur est égal à

$$2\left(h+\sqrt{h^2-m^2-n^2}\right)\sqrt{h^2-m^2-n^2};$$

donc, multipliant le haut et le bas de la fraction par $h-\sqrt{h^2-m^2-n^2}$,

on aura

$$H = \frac{a(m^2+n^2)-(bm+cn)(h-\sqrt{h^2-m^2-n^2})}{2(m^2+n^2)\sqrt{h^2-m^2-n^2}}$$
$$= \frac{a(m^2+n^2)-(bm+cn)h}{2(m^2+n^2)\sqrt{h^2-m^2-n^2}} + \frac{bm+cn}{2(m^2+n^2)}.$$

Faisons maintenant varier h; il viendra en différentiant

$$\frac{dH}{dh} = -\frac{ah-bm-cn}{2(h^2-m^2-n^2)^{\frac{3}{2}}},$$

donc enfin

$$\alpha = \frac{ah-bm-cn}{(h^2-m^2-n^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on substitue maintenant pour a, b, c, h, m, n leurs valeurs (33), on trouvera

$$ah-bm-cn = g^4\left[\left(R^2+\frac{P^2+Q^2}{2}\right)^2-\left(\frac{P^2+Q^2}{2}\right)^2\right] = g^4R^2(R^2+P^2+Q^2),$$

$$h^2-m^2-n^2 = g^4R^2(R^2+P^2+Q^2)-g^2[R^2(B^2+C^2)+(PC-QB)^2];$$

et, mettant pour B et C leurs valeurs $RN-PL$, $-RM-QL$ (29), on aura

$$R^2(B^2+C^2)+(PC-QB)^2 = R^4(M^2+N^2)-2R^2L(PN-MQ)$$
$$+R^2L^2(P^2+Q^2)+R^2(PM+QN)^2;$$

mais on a, par l'équation de condition (G) du n° 8,

$$LR = MQ-NP;$$

donc le terme $-2R^2L(PN-MQ)$ deviendra $R^4L^2+R^2(PN-MQ)^2$; faisant cette substitution et remarquant que

$$(PM+QN)^2+(PN-MQ)^2 = (P^2+Q^2)(M^2+N^2),$$

on aura

$$R^2(B^2+C^2)+(PC-QB)^2 = R^4(L^2+M^2+N^2)+R^2(P^2+Q^2)(L^2+M^2+N^2)$$
$$= R^2(R^2+P^2+Q^2)(L^2+M^2+N^2);$$

donc

$$h^2-m^2-n^2 = g^2R^2(g^2-L^2-M^2-N^2)(R^2+P^2+Q^2).$$

Ainsi, en mettant Π^2 pour $R^2+P^2+Q^2$ et λ^2 pour $L^2+M^2+N^2$ (8), on aura

$$\alpha = \frac{g^4R^2\Pi^2}{g^3R^3\Pi^3(g^2-\lambda^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou bien, en mettant encore $\Pi^2\Delta$ à la place de $g^2-\lambda^2$ (11),

$$\alpha = \frac{g}{R\Pi^4\Delta^{\frac{5}{2}}}.$$

Il s'ensuit de là que la quantité $\frac{1}{R\Pi^4\alpha}$ deviendra $\frac{\Delta^{\frac{5}{2}}}{g}$; c'est la valeur de $\frac{dp}{dt}$ (30), c'est-à-dire de la vitesse du mouvement de la longitude moyenne. Or, puisque $\frac{g}{\Delta}$ est la distance moyenne dans l'ellipse (13), on voit que cette vitesse sera proportionnelle inversement à la racine carrée du cube de la distance moyenne, comme on sait que cela a lieu dans les ellipses invariables. On aurait pu à la vérité supposer cette proposition comme une suite de l'invariabilité instantanée des éléments de l'orbite; mais nous avons cru que, vu sa grande importance, il valait mieux la démontrer directement et rigoureusement, pour ne laisser aucun scrupule sur les conséquences que nous allons en déduire, relativement à l'altération du mouvement moyen des Planètes.

35. Nous avons trouvé (22), pour la variation de la quantité Δ, cette formule très-simple

$$d\Delta = 2(d\Omega),$$

dans laquelle $(d\Omega)$ représente la différentielle partielle de Ω, en y faisant varier seulement les variables x, y, z relatives à la Planète troublée T. Si donc on substitue dans l'expression de Ω (16), à la place de ces variables, leurs valeurs en fonction de $\sin q$ et $\cos q$ (29), et qu'ensuite on substitue encore à la place de q sa valeur en p (31), il suffira, pour avoir l'expression de $(d\Omega)$, de prendre la différentielle de Ω, en y faisant va-

rier simplement la quantité p. Or, si l'on fait en même temps des substitutions analogues pour les variables x', y', z', x'', y'', z'',... relatives aux Planètes perturbatrices T', T'',..., on changera la quantité Ω en une fonction de sinus et cosinus des angles p, p', p'',... et de leurs multiples; et cette fonction sera réductible à une série de termes de cette forme

$$A \times \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (\lambda p + \mu p' + \nu p'' + \ldots),$$

A étant composée uniquement des éléments des orbites des différentes Planètes, et λ, μ, ν,... étant des nombres entiers positifs, ou négatifs, ou zéro. Donc chacun de ces termes donnera dans la valeur de $d\Delta$ le terme

$$\pm 2\lambda A \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (\lambda p + \mu p' + \nu p'' + \ldots),$$

en sorte qu'on aura facilement de cette manière l'expression complète de la variation de la quantité Δ.

On voit par là que cette expression ne saurait contenir aucun terme sans sinus ou cosinus; car les termes de cette espèce, qui pourront se trouver dans l'expression de Ω, s'en iront nécessairement par la différentiation relative à p; et il ne restera dans l'expression de $2(d\Omega)$ ou $d\Delta$ que des termes proportionnels à des sinus ou cosinus d'angles qui contiennent p.

36. Il s'ensuit de cette analyse fort simple que les variations de la quantité Δ ne peuvent être que périodiques; par conséquent ni la distance moyenne, qui est exprimée par $\frac{g}{\Delta}$, ni la vitesse du moyen mouvement, laquelle l'est par $\frac{\Delta^2}{g}$ (34), ne seront sujettes à aucune espèce de variation séculaire. Ainsi, tant qu'on n'a égard qu'à ces sortes de variations, on est fondé à regarder ces éléments comme constants et inaltérables par l'action mutuelle des Planètes. Si donc le mouvement de Saturne se ralentit de siècle en siècle, et celui de Jupiter s'accélère, comme les observations semblent le prouver, il faut attribuer ces variations à

d'autres causes qu'à leur action mutuelle; mais par là même on doit regarder ces phénomènes comme fort douteux, et ne se résoudre à les admettre que lorsqu'ils seront suffisamment constatés par une longue suite d'observations.

37. On a donc, relativement aux variations séculaires, $d\Delta = 0$, et par conséquent $\Delta =$ à une constante. Cette constante est différente pour les diverses Planètes, et se détermine par leurs distances moyennes et par les moyens mouvements. Nous prendrons pour plus de simplicité, dans les Recherches suivantes, la distance moyenne de la Terre au Soleil pour l'unité des distances, et la vitesse du mouvement angulaire moyen de la Terre autour du Soleil pour l'unité des vitesses; en sorte que nous représenterons le temps t par l'angle p de ce mouvement moyen. On aura ainsi pour la Terre (numéro précédent)

$$\frac{g}{\Delta} = 1, \quad \frac{\Delta^2}{g} = 1,$$

d'où il résulte

$$g = 1, \quad \Delta = 1.$$

Or (15)

$$g = S + T;$$

et comme la masse de la plus grosse Planète, c'est-à-dire de Jupiter, est moindre qu'un millième de celle du Soleil, on pourra toujours négliger T vis-à-vis de S, et prendre simplement $g = S$; ainsi la quantité g sera la même à l'égard de toutes les Planètes, et sera par conséquent toujours égale à 1; de sorte que la masse même du Soleil deviendra l'unité des masses de toutes les Planètes.

A l'égard de la valeur de Δ, elle sera égale à

$$\frac{1}{\text{dist. moy.}} \quad \text{ou} \quad (\text{vitesse moyenne})^2,$$

et sera ainsi connue par les *Tables astronomiques*.

38. Venons maintenant aux variations séculaires des autres éléments, c'est-à-dire des inclinaisons, des nœuds, des excentricités et des aphélies.

En regardant les inclinaisons et les excentricités comme des quantités très-petites, ainsi qu'elles le sont en effet pour toutes les Planètes de notre système, nous n'aurons égard, du moins dans la première approximation, qu'aux premières dimensions de ces quantités; mais nos formules primitives étant rigoureuses et générales, il sera facile d'en pousser le développement plus loin, si on le juge nécessaire.

Or, comme on a

$$P = R\theta\sin\omega, \quad Q = R\theta\cos\omega,$$

θ étant la tangente de l'inclinaison de l'orbite et ω la longitude du nœud ascendant (5), et

$$L = \lambda\sin\pi, \quad M = \lambda\cos\pi\sin\varphi, \quad N = \lambda\cos\pi\cos\varphi,$$

λ étant l'excentricité (à cause de $g = 1$), φ la longitude de l'aphélie et π la latitude de cet aphélie, laquelle est déterminée (9) par l'équation

$$\text{tang}\,\pi = \theta\sin(\varphi - \omega),$$

il est évident qu'en supposant θ et λ très-petites du premier ordre, les quantités $\frac{P}{R}$, $\frac{Q}{R}$, M, N seront aussi très-petites de ce même ordre, et que la quantité L sera très-petite du second ordre, puisque l'angle π est lui-même très-petit du premier.

Donc, en négligeant les quantités très-petites du second ordre, on aura

$$R = \Pi = \frac{1}{\sqrt{\Delta}};$$

car

$$\Pi = \sqrt{R^2 + P^2 + Q^2} = R\sqrt{1 + \frac{P^2}{R^2} + \frac{Q^2}{R^2}},$$

et

$$\Delta = \frac{g^2 - \lambda^2}{\Pi^2} = \frac{1}{R^2},$$

à cause de $g = 1$. Ainsi, comme Δ est toujours un nombre fini, puisque $\frac{1}{\Delta}$ exprime la distance moyenne de la Planète au Soleil, celle de la Terre

étant prise pour l'unité, les quantités P et Q seront elles-mêmes très-petites du premier ordre.

Ainsi, puisque nous avons déjà trouvé, relativement aux variations séculaires, $d\Delta = 0$, on aura aussi $dR = 0$; et il ne restera qu'à chercher les valeurs de dP, dQ, dM, dN, d'après les formules des n^{os} 17, 19.

Or, en négligeant toujours les quantités très-petites des ordres supérieurs au premier, on aura (29)

$$B = RN, \quad C = -RM;$$

donc, à cause de $g = 1$,

$$r = \frac{\Pi^2}{1 - M\sin q - N\cos q} = \frac{1 + M\sin q + N\cos q}{\Delta},$$

et

$$dr = \frac{M\cos q - N\sin q}{\Delta}\,dq.$$

On aura ensuite (30) cette fraction

$$\frac{1}{R^2(1 - M\sin q - N\cos q)^2}$$

à réduire en une série de la forme

$$\alpha(1 + \beta\sin q + \gamma\cos q + \delta\sin 2q + \ldots);$$

de sorte qu'en n'ayant égard qu'aux premières dimensions de M et N, on aura sur-le-champ

$$\beta = 2M, \quad \gamma = 2N, \quad \delta = 0, \ldots.$$

On substituera donc ces valeurs dans les expressions de (β) et (γ); et comme la valeur de q est, aux quantités très-petites près, égale à p, on y changera simplement q en p.

De cette manière, si l'on fait

$$m = M - \frac{dN}{dp} - \frac{d^2M}{dp^2} + \frac{d^3N}{dp^3} + \ldots,$$

$$n = N + \frac{dM}{dp} - \frac{d^2N}{dp^2} - \frac{d^3M}{dp^3} + \ldots,$$

on aura

$$(\beta)=2m,\quad (\gamma)=2n,\quad (\delta)=0,\ldots;$$

donc (31)

$$(B)=2m,\quad (C)=2n,\quad (D)=0,\ldots;$$

par conséquent

$$q=p+2m\cos p-2n\sin p,$$

et, différentiant,

$$dq=dp-2M\sin p\,dp-2N\cos p\,dp,$$

à cause de

$$dn=(M-m)dp,\quad dm=(n-N)dp.$$

A l'égard de la valeur de p, elle dépendra (34) de l'équation

$$dp=\Delta^{-2}dt;$$

de sorte que, comme $d\Delta=0$, on aura, en intégrant,

$$p=\Delta^{-2}t,$$

comme dans les orbites invariables.

On fera donc ces différentes substitutions dans les formules dont il s'agit, après y avoir mis pour x, y, z les valeurs $r\cos q$, $r\sin q$, $\frac{r}{R}(Q\sin q-P\cos q)$, et pour x', y', z', x'',... des valeurs semblables, où toutes les lettres soient marquées par un ou plusieurs traits. On développera ensuite les différents termes, et l'on ne retiendra que ceux où les quantités P, Q, M, N ne passeront pas la première dimension et qui en même temps ne contiendront aucun sinus ou cosinus d'angles proportionnels à t.

39. Commençons par les formules

$$dP=\left(\frac{d\Omega}{dy}z-\frac{d\Omega}{dz}y\right)dt,$$

$$dQ=\left(\frac{d\Omega}{dx}z-\frac{d\Omega}{dz}x\right)dt.$$

En substituant pour $\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{d\Omega}{dy}$, $\frac{d\Omega}{dz}$ leurs valeurs (16), on aura

$$\frac{d\Omega}{dy}z-\frac{d\Omega}{dz}y=T'\left(\frac{1}{\rho'^3}-\frac{1}{\sigma'^3}\right)(y'z-yz')+T''\left(\frac{1}{\rho''^3}-\frac{1}{\sigma''^3}\right)(y''z-yz'')+\ldots,$$

$$\frac{d\Omega}{dx}z-\frac{d\Omega}{dz}x=T'\left(\frac{1}{\rho'^3}-\frac{1}{\sigma'^3}\right)(x'z-xz')+T''\left(\frac{1}{\rho''^3}-\frac{1}{\sigma''^3}\right)(x''z-xz'')+\ldots,$$

et l'on trouvera d'abord ces transformations

$$\begin{aligned}y'z-yz'&=rr'\left(\frac{Q\sin q-P\cos q}{R}\sin q'-\frac{Q'\sin q'-P'\cos q'}{R'}\sin q\right)\\&=\frac{rr'}{2}\left(\frac{Q}{R}-\frac{Q'}{R'}\right)[\cos(q-q')-\cos(q+q')]\\&\quad+\frac{rr'}{2}\left(\frac{P}{R}+\frac{P'}{R'}\right)\sin(q-q')-\frac{rr'}{2}\left(\frac{P}{R}-\frac{P'}{R'}\right)\sin(q+q');\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x'z-xz'&=rr'\left(\frac{Q\sin q-P\cos q}{R}\cos q'-\frac{Q'\sin q'-P'\cos q'}{R'}\cos q\right)\\&=-\frac{rr'}{2}\left(\frac{P}{R}-\frac{P'}{R'}\right)[\cos(q-q')+\cos(q+q')]\\&\quad+\frac{rr'}{2}\left(\frac{Q}{R}+\frac{Q'}{R'}\right)\sin(q-q')+\frac{rr'}{2}\left(\frac{Q}{R}-\frac{Q'}{R'}\right)\sin(q+q'),\end{aligned}$$

et ainsi des autres expressions semblables.

Or, puisque les quantités P, Q, P', Q',... qui multiplient tous les termes de ces expressions sont très-petites du premier ordre, il faudra rejeter toutes les quantités de cet ordre et des suivants dans les valeurs de r, r',... et de q, q',....

Ainsi l'on fera simplement (numéro précédent)

$$r=\frac{1}{\Delta},\quad r'=\frac{1}{\Delta'},\ldots,\quad q=p,\quad q'=p',\ldots;$$

mais, pour plus de simplicité, nous retiendrons les quantités r, r',... en les regardant comme constantes et égales aux distances moyennes des Planètes T, T',....

Il faudra ensuite faire les mêmes substitutions dans les quantités

$$\frac{1}{\rho^{\prime 3}}-\frac{1}{\sigma^{\prime 3}},\quad \frac{1}{\rho^{\prime\prime 3}}-\frac{1}{\sigma^{\prime\prime 3}},\ldots,$$

et y négliger aussi par la même raison toutes les quantités très-petites.

On aura donc (16)

$$\rho=r,\quad \rho'=r',\ldots,$$

$$\sigma'=\sqrt{r^2-2rr'\cos(q-q')+r'^2},\quad \sigma''=\sqrt{r^2-2rr''\cos(q-q'')+r''^2},\ldots$$

Or la quantité irrationnelle

$$[r^2-2rr'\cos(q-q')+r'^2]^{-\frac{3}{2}}$$

peut se développer, comme on sait, dans une série de la forme

$$(r,r')+(r,r')_1\cos(q-q')+(r,r')_2\cos 2(q-q')+\ldots,$$

dans laquelle

$$(r,r'),\quad (r,r')_1,\quad (r,r')_2,\ldots$$

sont des fonctions de r, r' sans q, q' (*voyez* plus bas le n° 46); de même la quantité

$$[r^2-2rr''\cos(q-q'')+r''^2]^{-\frac{3}{2}}$$

se développera dans la série

$$(r,r'')+(r,r'')_1\cos(q-q'')+(r,r'')_2\cos 2(q-q'')+\ldots,$$

et ainsi des autres quantités semblables.

Donc on aura par ces substitutions

$$\frac{1}{\rho^{\prime 3}}-\frac{1}{\sigma^{\prime 3}}=\frac{1}{r'^3}-(r,r')-(r,r')_1\cos(q-q')-(r,r')_2\cos 2(q-q')-\ldots,$$

$$\frac{1}{\rho^{\prime\prime 3}}-\frac{1}{\sigma^{\prime\prime 3}}=\frac{1}{r''^3}-(r,r'')-(r,r'')_1\cos(q-q'')-(r,r'')_2\cos 2(q-q'')-\ldots,$$

et ainsi des autres.

On multipliera maintenant ces quantités par celles que nous avons trouvées ci-dessus, en changeant dans les unes et les autres les lettres q, q',... en p, p',...; et l'on ne retiendra, après la multiplication et le développement des sinus et cosinus, que les termes qui ne contiendront ni sinus ni cosinus.

De cette manière on aura simplement

$$\left(\frac{1}{\rho^{\prime 3}}-\frac{1}{\sigma^{\prime 3}}\right)(y'z-yz')=-\frac{rr'}{4}\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{R}'}\right)(r,r')_1,$$

$$\left(\frac{1}{\rho^{\prime 3}}-\frac{1}{\sigma^{\prime 3}}\right)(x'z-xz')=\frac{rr'}{4}\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{R}'}\right)(r,r')_1,$$

et pareillement

$$\left(\frac{1}{\rho^{\prime\prime 3}}-\frac{1}{\sigma^{\prime\prime 3}}\right)(y''z-yz'')=-\frac{rr''}{4}\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{Q}''}{\mathrm{R}''}\right)(r,r'')_1,$$

$$\left(\frac{1}{\rho^{\prime\prime 3}}-\frac{1}{\sigma^{\prime\prime 3}}\right)(x''z-xz'')=\frac{rr''}{4}\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{P}''}{\mathrm{R}''}\right)(r,r'')_1,$$

et ainsi de suite.

Donc enfin on aura pour les variations séculaires de P et Q ces formules différentielles

$$d\mathrm{P}=-\frac{\mathrm{T}'rr'(r,r')_1}{4}\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{R}'}\right)dt-\frac{\mathrm{T}''rr''(r,r'')_1}{4}\left(\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{Q}''}{\mathrm{R}''}\right)dt-\ldots,$$

$$d\mathrm{Q}=\frac{\mathrm{T}'rr'(r,r')_1}{4}\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{R}'}\right)dt+\frac{\mathrm{T}''rr''(r,r'')_1}{4}\left(\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}-\frac{\mathrm{P}''}{\mathrm{R}''}\right)dt+\ldots.$$

On aura des formules semblables pour les variations séculaires de P', Q', P'', Q'',..., en changeant seulement dans celles-ci les quantités P, Q, R, r, T en P', Q', R', r', T', ou en P'', Q'', R'', r'', T'',..., et *vice versâ*.

40. On peut simplifier ces formules en faisant

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}=s,\quad \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}=u,$$

et de même

$$\frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{R}'}=s',\quad \frac{\mathrm{Q}'}{\mathrm{R}'}=u',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

car, comme $dR = 0$ (38), on aura simplement

$$dP = R\,ds, \quad dQ = R\,du;$$

d'ailleurs (39)

$$R = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \sqrt{r}.$$

Donc si l'on fait, pour abréger,

$$(0,1) = \frac{T'rr'(r,r')_1}{4\sqrt{r}}, \quad (0,2) = \frac{T''rr''(r,r'')_1}{4\sqrt{r}}, \ldots,$$

on aura ces équations linéaires

$$\frac{ds}{dt} + (0,1)(u-u') + (0,2)(u-u'') + \ldots = 0,$$

$$\frac{du}{dt} - (0,1)(s-s') + (0,2)(s-s'') - \ldots = 0;$$

en faisant de même

$$(1,0) = \frac{Tr'r(r',r)_1}{4\sqrt{r'}}, \quad (1,2) = \frac{T''r'r''(r',r'')_1}{4\sqrt{r'}}, \ldots,$$

$$(2,0) = \frac{Tr''r(r'',r)_1}{4\sqrt{r''}}, \quad (2,1) = \frac{T'r''r'(r'',r')_1}{4\sqrt{r''}}, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on aura aussi

$$\frac{ds'}{dt} + (1,0)(u'-u) + (1,2)(u'-u'') + \ldots = 0,$$

$$\frac{du'}{dt} - (1,0)(s'-s) - (1,2)(s'-s'') - \ldots = 0,$$

$$\frac{ds''}{dt} + (2,0)(u''-u) + (2,1)(u''-u') + \ldots = 0,$$

$$\frac{du''}{dt} - (2,0)(s''-s) - (2,1)(s''-s') - \ldots = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et les variables $s, s', s'', \ldots, u, u', u'', \ldots$ de ces équations exprimeront les quantités

$$\theta \sin\omega, \quad \theta' \sin\omega', \quad \theta'' \sin\omega'', \ldots,$$

$$\theta \cos\omega, \quad \theta' \cos\omega', \quad \theta'' \cos\omega'', \ldots,$$

dans lesquelles $\theta, \theta', \theta'', \ldots$ sont les tangentes des inclinaisons des orbites des Planètes T, T', T'', ..., et $\omega, \omega', \omega'', \ldots$ les longitudes des nœuds ascendants de ces orbites.

Telles sont les formules les plus simples pour déterminer les variations séculaires de la position des orbites planétaires; nous les avions déjà données dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, page 109, année 1774 (*); mais nous avons cru devoir les redonner ici pour ne rien laisser à désirer sur la Théorie des variations séculaires.

41. Il ne reste plus qu'à développer et à réduire d'une manière semblable les formules

$$dN = 2x(d\Omega) - \Phi dx - \frac{d\Omega}{dx}\rho d\rho,$$

$$dM = 2y(d\Omega) - \Phi dy - \frac{d\Omega}{dy}\rho d\rho.$$

Pour cela nous ferons d'abord dans la fonction Ω (16) les substitutions de $r\cos q$, $r\sin q$, $r'\cos q'$, $r'\sin q'$, ... pour $x, y, x', y', \ldots$; ce qui donnera une fonction de $r, q, z, r', q', z', \ldots$. Or, en ne considérant que la variabilité de x, y et de r, q, il est visible qu'on a cette équation identique

$$\frac{d\Omega}{dx}dx + \frac{d\Omega}{dy}dy = \frac{d\Omega}{dr}dr + \frac{d\Omega}{dq}dq;$$

laquelle, en substituant pour dx, dy leurs valeurs

$$\cos q\,dr - r\sin q\,dq, \quad \sin q\,dr + r\cos q\,dq,$$

(*) Le Mémoire auquel il est fait ici allusion appartient, comme nous avons déjà eu occasion de le mentionner, à la troisième Section des *Œuvres de Lagrange*.

(*Note de l'Éditeur.*)

et comparant les termes affectés de dr et dq, donnera ces deux-ci

$$\frac{d\Omega}{dx}\cos q + \frac{d\Omega}{dy}\sin q = \frac{d\Omega}{dr},$$

$$r\frac{d\Omega}{dy}\cos q - r\frac{d\Omega}{dx}\sin q = \frac{d\Omega}{dq},$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{d\Omega}{dr}\cos q - \frac{d\Omega}{dq}\frac{\sin q}{r},$$

$$\frac{d\Omega}{dy} = \frac{d\Omega}{dr}\sin q + \frac{d\Omega}{dq}\frac{\cos q}{r}.$$

De sorte que les fonctions Φ et $(d\Omega)$ deviendront (18)

$$\Phi = r\frac{d\Omega}{dr} + z\frac{d\Omega}{dz},$$

$$(d\Omega) = \frac{d\Omega}{dr}dr + \frac{d\Omega}{dq}dq + \frac{d\Omega}{dz}dz.$$

Substituant ces valeurs dans les formules ci-dessus, et mettant aussi pour $\rho d\rho = x\,dx + y\,dy + z\,dz$ sa transformée $r\,dr + z\,dz$, on aura, après avoir ordonné les termes,

$$dN = \left(\frac{d\Omega}{dq}\sin q - z\frac{d\Omega}{dz}\cos q\right)dr + \left(2r\frac{d\Omega}{dq}\cos q + r^2\frac{d\Omega}{dr}\sin q - rz\frac{d\Omega}{dz}\sin q\right)dq + \left(2r\frac{d\Omega}{dz}\cos q - z\frac{d\Omega}{dr}\cos q + \frac{z}{r}\frac{d\Omega}{dq}\sin q\right)dz,$$

$$dM = -\left(\frac{d\Omega}{dq}\cos q + z\frac{d\Omega}{dz}\sin q\right)dr + \left(2r\frac{d\Omega}{dq}\sin q - r^2\frac{d\Omega}{dr}\cos q - rz\frac{d\Omega}{dz}\cos q\right)dq + \left(2r\frac{d\Omega}{dz}\sin q - z\frac{d\Omega}{dr}\sin q - \frac{z}{r}\frac{d\Omega}{dq}\cos q\right)dz.$$

42. Comme nous ne voulons pas pousser la précision au delà des quantités très-petites du premier ordre, et que les variables x, y, z,... sont déjà elles-mêmes très-petites de cet ordre, puisque

$$z = \frac{r}{R}(Q\sin q - P\cos q),\ldots;$$

il est clair qu'on pourra d'abord simplifier les formules précédentes, en y négligeant tous les termes où z, z',... formeront des produits de deux ou de plus de deux dimensions.

Donc, puisque tous les termes de la valeur de $\frac{d\Omega}{dz}$ sont eux-mêmes déjà multipliés par z, ou z', ou z'',... (15 et 16), il s'ensuit que les formules dont il s'agit se réduiront à celles-ci

$$dN = \frac{d\Omega}{dq}\sin q\,dr + \left(2r\frac{d\Omega}{dq}\cos q + r^2\frac{d\Omega}{dr}\sin q\right)dq,$$

$$dM = -\frac{d\Omega}{dq}\cos q\,dr + \left(2r\frac{d\Omega}{dq}\sin q - r^2\frac{d\Omega}{dr}\cos q\right)dq;$$

et que la fonction Ω deviendra de cette forme

$$\Omega = T'\left[\frac{r\cos(q-q')}{r'^2} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r'r\cos(q-q') + r'^2}}\right] + T''\left[\frac{r\cos(q-q'')}{r''^2} - \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2r''r\cos(q-q'') + r''^2}}\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On fera, dans ces formules, les substitutions indiquées plus haut (38), en ayant soin de rejeter tous les termes qui contiendraient des produits ou des puissances de m, n, M, N, m', n', M',..., ainsi que ceux qui se trouveraient multipliés par des sinus ou cosinus des angles p, p',... ou des combinaisons quelconques de ces angles.

Donc, puisque

$$q = p + 2m\cos p - 2n\sin p, \quad dq = dp\,(1 - 2M\sin p - 2N\cos p),$$

on aura

$$\sin q = \sin p + m(1+\cos 2p) - n\sin 2p,$$
$$\cos q = \cos p - m\sin 2p + n(1-\cos 2p),$$
$$\sin q\,dq = [\sin p + m - \mathrm{M} + (m+\mathrm{M})\cos 2p - (n+\mathrm{N})\sin 2p]\,dp,$$
$$\cos q\,dq = [\cos p - (m+\mathrm{M})\sin 2p + n - \mathrm{N} - (n+\mathrm{N})\cos 2p]\,dp.$$

Ensuite, en conservant la lettre r pour représenter la distance moyenne $\frac{1}{\Delta}$, comme on en a usé ci-dessus, on mettra $r(1+\mathrm{M}\sin p+\mathrm{N}\cos p)$ au lieu de r, et $r(\mathrm{M}\cos p-\mathrm{N}\sin p)\,dp$ au lieu de dr.

De sorte qu'on aura

$$\sin q\,dr = rdp\left[m - \frac{\mathrm{N}}{2} + \left(\frac{\mathrm{M}}{2} - n\right)\sin 2p + \left(m + \frac{\mathrm{N}}{2}\right)\cos 2p\right],$$
$$\cos q\,dr = rdp\left[n + \frac{\mathrm{M}}{2} + \left(\frac{\mathrm{M}}{2} - n\right)\cos 2p - \left(m + \frac{\mathrm{N}}{2}\right)\sin 2p\right],$$
$$r\sin q\,dq = rdp\left[\sin p + m - \frac{\mathrm{M}}{2} + \left(m + \frac{\mathrm{M}}{2}\right)\cos 2p - \left(n + \frac{\mathrm{N}}{2}\right)\sin 2p\right],$$
$$r\cos q\,dq = rdp\left[\cos p + n - \frac{\mathrm{N}}{2} - \left(m + \frac{\mathrm{M}}{2}\right)\sin 2p - \left(n + \frac{\mathrm{N}}{2}\right)\cos 2p\right],$$
$$r^2\sin q\,dq = r^2dp[\sin p + m + m\cos 2p - n\sin 2p],$$
$$r^2\cos q\,dq = r^2dp[\cos p + n - m\sin 2p - n\cos 2p].$$

Enfin, comme Ω est fonction de r, r', r'',..., q, q', q'',..., il y faudra aussi substituer $r(1+\mathrm{M}\sin p+\mathrm{N}\cos p)$ et $p+2m\cos p-2n\sin p$ à la place de r et q, et ainsi des autres quantités analogues r', q', r'', q'',... en marquant simplement toutes les lettres d'un, de deux,... traits.

On changera donc, dans la fonction Ω, les quantités q, q',... en p, p',..., et l'on substituera, au lieu de $\frac{d\Omega}{dr}$,

$$\frac{d\Omega}{dr} + r\frac{d^2\Omega}{dr^2}(\mathrm{M}\sin p + \mathrm{N}\cos p) + r'\frac{d^2\Omega}{dr\,dr'}(\mathrm{M}'\sin p' + \mathrm{N}'\cos p') + r''\frac{d^2\Omega}{dr\,dr''}(\mathrm{M}''\sin p'' + \mathrm{N}''\cos p'') + \ldots$$
$$+ 2\frac{d^2\Omega}{dr\,dp}(m\cos p - n\sin p) + 2\frac{d^2\Omega}{dr\,dp'}(m'\cos p' - n'\sin p') + 2\frac{d^2\Omega}{dr\,dp''}(m''\cos p'' - n''\sin p'') + \ldots,$$

et, à la place de $\frac{d\Omega}{dq}$,

$$\frac{d\Omega}{dp} + r\frac{d^2\Omega}{dr\,dp}(\mathrm{M}\sin p + \mathrm{N}\cos p) + r'\frac{d^2\Omega}{dr'\,dp}(\mathrm{M}'\sin p' + \mathrm{N}'\cos p') + r''\frac{d^2\Omega}{dr''\,dp}(\mathrm{M}''\sin p'' + \mathrm{N}''\cos p'') + \ldots$$
$$+ 2\frac{d^2\Omega}{dp^2}(m\cos p - n\sin p) + 2\frac{d^2\Omega}{dp\,dp'}(m'\cos p' - n'\sin p') + 2\frac{d^2\Omega}{dp\,dp''}(m''\cos p'' - n''\sin p'') + \ldots.$$

Ces substitutions faites, il n'y aura plus qu'à changer la fonction Ω en une série de cosinus d'angles multiples de $p-p'$, $p-p''$,...; et comme des termes résultants on ne veut conserver que ceux qui se trouveront sans sinus et cosinus, on remarquera d'abord que les fonctions $\frac{d\Omega}{dr}$, $\frac{d^2\Omega}{dr^2}$, $\frac{d^2\Omega}{dr\,dr'}$, $\frac{d^2\Omega}{dr\,dr''}$,... ne pourront donner de ces sortes de termes qu'autant qu'elles ne seront multipliées par aucun sinus ni cosinus, ou qu'elles le seront par des cosinus de $p-p'$, $p-p''$,... ou de leurs multiples quelconques; que $\frac{d\Omega}{dp}$, $\frac{d^2\Omega}{dr\,dp}$, $\frac{d^2\Omega}{dr'\,dp}$,..., $\frac{d^2\Omega}{dr\,dp'}$,... ne donneront de pareils termes qu'autant qu'elles seront multipliées par des sinus de $p-p'$, $p-p''$,... ou de leurs multiples; qu'enfin $\frac{d^2\Omega}{dp^2}$, $\frac{d^2\Omega}{dp\,dp'}$,... n'en donneront qu'autant qu'elles se trouveront multipliées par des cosinus de $p-p'$, $p-p''$,... ou de leurs multiples. D'où il suit que ces quantités seront les seules auxquelles il sera nécessaire d'avoir égard dans les substitutions dont il s'agit, et qu'ainsi l'on pourra d'abord réduire les équations en question à celles-ci

$$\begin{aligned} dN = {} & \left(\frac{r^3}{2}\frac{d^2\Omega}{dr^2}\mathrm{M} + r^2\frac{d\Omega}{dr}m\right)dp \\ & + \left[-rr'\frac{d^2\Omega}{dr'\,dp}\sin(p-p') + \frac{r^2r'}{2}\frac{d^2\Omega}{dr\,dr'}\cos(p-p')\right]\mathrm{M}'dp \\ & + \left[2r\frac{d^2\Omega}{dp\,dp'}\cos(p-p') + r^2\frac{d^2\Omega}{dr\,dp'}\sin(p-p')\right]m'dp \\ & + \left[-rr''\frac{d^2\Omega}{dr''\,dp}\sin(p-p'') + \frac{r^2r''}{2}\frac{d^2\Omega}{dr\,dr''}\cos(p-p'')\right]\mathrm{M}''dp \\ & + \left[2r\frac{d^2\Omega}{dp\,dp''}\cos(p-p'') + r^2\frac{d^2\Omega}{dr\,dp''}\sin(p-p'')\right]m''dp \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

$$d\mathrm{M} = -\left(\frac{r^2}{2}\frac{d^2\Omega}{dr^2}\mathrm{N} + r^2\frac{d\Omega}{dr}n\right)dp$$
$$-\left[-rr'\frac{d^2\Omega}{dr'dp}\sin(p-p') + \frac{r^2r'}{2}\frac{d^2\Omega}{drdr'}\cos(p-p')\right]\mathrm{N}'dp$$
$$-\left[2r\frac{d^2\Omega}{dpdp'}\cos(p-p') + r^2\frac{d^2\Omega}{drdp'}\sin(p-p')\right]n'dp$$
$$-\left[-rr''\frac{d^2\Omega}{dr''dp}\sin(p-p'') + \frac{r^2r''}{2}\frac{d^2\Omega}{drdr''}\cos(p-p'')\right]\mathrm{N}''dp$$
$$-\left[2r\frac{d^2\Omega}{dpdp''}\cos(p-p'') + r^2\frac{d^2\Omega}{drdp''}\sin(p-p'')\right]n''dp$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

43. Développons maintenant par les méthodes connues les fractions irrationnelles

$$[r^2 - 2rr'\cos(p-p') + r'^2]^{-\frac{1}{2}},\quad [r^2 - 2rr''\cos(p-p'') + r''^2]^{-\frac{1}{2}},\ \ldots$$

en séries rationnelles de la forme

$$\mathrm{A}' + \mathrm{B}'\cos(p-p') + \mathrm{C}'\cos 2(p-p') + \ldots,$$
$$\mathrm{A}'' + \mathrm{B}''\cos(p-p'') + \mathrm{C}''\cos 2(p-p'') + \ldots,$$

et ainsi de suite.

On aura alors, en changeant dans Ω la lettre q en p,

$$\Omega = -\mathrm{T}'\left[\mathrm{A}' + \left(\mathrm{B}' - \frac{r}{r'^2}\right)\cos(p-p') + \mathrm{C}'\cos 2(p-p') + \ldots\right]$$
$$-\mathrm{T}''\left[\mathrm{A}'' + \left(\mathrm{B}'' - \frac{r}{r''^2}\right)\cos(p-p'') + \mathrm{C}''\cos 2(p-p'') + \ldots\right]$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On substituera cette valeur dans les équations précédentes, et l'on fera attention que A′, B′,... sont fonctions de r et r' seulement, que A″, B″,... sont fonctions de r et r'', et ainsi de suite. En ne retenant que les termes sans sinus ni cosinus, on aura enfin ces équations, dans lesquelles

$\frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}}$ est mis à la place de dp,

$$d\mathrm{N} = -\left(\mathrm{T}'\frac{r^3}{2}\frac{d^3\mathrm{A}'}{dr^3} + \mathrm{T}''\frac{r^3}{2}\frac{d^3\mathrm{A}''}{dr^3} + \ldots\right)\frac{\mathrm{M}\,dt}{r^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\left(\mathrm{T}'r^2\frac{d\mathrm{A}'}{dr} + \mathrm{T}''r^2\frac{d\mathrm{A}''}{dr} + \ldots\right)\frac{m\,dt}{r^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\mathrm{T}'\left(\frac{rr'}{2}\frac{d\mathrm{B}'}{dr'} + \frac{r^2r'}{4}\frac{d^2\mathrm{B}'}{drdr'} + \frac{3r^2}{r'^2}\right)\frac{\mathrm{M}'dt}{r^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\mathrm{T}'\left(r\mathrm{B}' + \frac{r^2}{2}\frac{d\mathrm{B}'}{dr} - \frac{3r^2}{2r'^2}\right)\frac{m'dt}{r^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\mathrm{T}''\left(\frac{rr''}{2}\frac{d\mathrm{B}''}{dr''} + \frac{r^2r''}{4}\frac{d^2\mathrm{B}''}{drdr''} + \frac{3r^2}{r''^2}\right)\frac{\mathrm{M}''dt}{r^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\mathrm{T}''\left(r\mathrm{B}'' + \frac{r^2}{2}\frac{d\mathrm{B}''}{dr} - \frac{3r^2}{2r''^2}\right)\frac{m''dt}{r^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$d\mathrm{M} = \left(\mathrm{T}'\frac{r^3}{2}\frac{d^3\mathrm{A}'}{dr^3} + \mathrm{T}''\frac{r^3}{2}\frac{d^3\mathrm{A}''}{dr^3} + \ldots\right)\frac{\mathrm{N}\,dt}{r^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\left(\mathrm{T}'r^2\frac{d\mathrm{A}'}{dr} + \mathrm{T}''r^2\frac{d\mathrm{A}''}{dr} + \ldots\right)\frac{n\,dt}{r^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\mathrm{T}'\left(\frac{rr'}{2}\frac{d\mathrm{B}'}{dr'} + \frac{r^2r'}{4}\frac{d^2\mathrm{B}'}{drdr'} + \frac{3r^2}{r'^2}\right)\frac{\mathrm{N}'dt}{r^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\mathrm{T}'\left(r\mathrm{B}' + \frac{r^2}{2}\frac{d\mathrm{B}'}{dr} - \frac{3r^2}{r'^2}\right)\frac{n'dt}{r^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\mathrm{T}''\left(\frac{rr''}{2}\frac{d\mathrm{B}''}{dr''} + \frac{r^2r''}{4}\frac{d^2\mathrm{B}''}{drdr''} + \frac{3r^2}{r''^2}\right)\frac{\mathrm{N}''dt}{r^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\mathrm{T}''\left(r\mathrm{B}'' + \frac{r^2}{2}\frac{d\mathrm{B}''}{dr} - \frac{3r^2}{r''^2}\right)\frac{n''dt}{r^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ce sont les équations qui servent à déterminer les variations séculaires des éléments M et N; et l'on aura des équations semblables pour les variations séculaires de M′ et N′, de M″ et N″, ...; en marquant simplement

d'un, de deux,... traits les lettres qui n'en ont aucun, à l'exception de t, et réciproquement effaçant les traits de celles qui en ont un, deux,....

A l'égard des quantités m, n, on aura, pour leur détermination, les équations

$$dn = (\mathrm{M} - m)\frac{dt}{r^3}, \quad dm = (n - \mathrm{N})\frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}},$$

comme il résulte des expressions de ces quantités (38); et, marquant les lettres m, n, M, N, et r d'un, deux,... traits, on aura les équations de m', n', de m'', n'',....

44. Comme dans les formules précédentes il entre non-seulement les quantités A′, B′, A″, B″,.... mais encore leurs différences premières et secondes, nous allons donner la manière de faire disparaître ces différences.

Et d'abord, puisque les coefficients A′, B′,... résultent du développement d'une fonction homogène de r et r' de la dimension -1, ils sont aussi nécessairement de pareilles fonctions de r et r' de la dimension -1, de sorte que, par la propriété connue de ces sortes de fonctions, on aura

$$r\frac{d\mathrm{B}'}{dr} + r'\frac{d\mathrm{B}'}{dr'} = -\mathrm{B}';$$

par conséquent

$$r'\frac{d\mathrm{B}'}{dr'} = -\mathrm{B}' - r\frac{d\mathrm{B}'}{dr},$$

$$r'\frac{d^2\mathrm{B}'}{dr'^2} = -2\frac{d\mathrm{B}'}{dr} - r^2\frac{d^2\mathrm{B}'}{dr^2}$$

Ainsi la quantité

$$\frac{rr'}{2}\frac{d\mathrm{B}'}{dr'} + \frac{r^2r'}{4}\frac{d^2\mathrm{B}'}{dr\,dr'}$$

deviendra

$$-\frac{r}{2}\mathrm{B}' - r^2\frac{d\mathrm{B}'}{dr} - \frac{r^3}{4}\frac{d^2\mathrm{B}'}{dr^2}.$$

De même, et par la même raison, la quantité

$$\frac{rr''}{2}\frac{d\mathrm{B}''}{dr''} + \frac{r^2r''}{4}\frac{d^2\mathrm{B}''}{dr\,dr''}$$

deviendra

$$-\frac{r}{2}\mathrm{B}'' - r^2\frac{d\mathrm{B}''}{dr} - \frac{r^3}{4}\frac{d^2\mathrm{B}''}{dr^2},$$

et ainsi des autres; moyennant quoi il n'y aura plus que des différentielles relatives à r.

Au reste, quoique la propriété des fonctions homogènes dont nous venons de faire usage soit assez connue, en voici une démonstration bien simple. Si φ est une fonction homogène de plusieurs variables x, y, z,..., qui forment partout la même dimension du degré m, il est clair qu'en substituant ax, ay, az,... au lieu de x, y, z,..., la fonction φ deviendra $a^m\varphi$, a étant une quantité quelconque; si donc on fait $a = 1 + \alpha$, α étant une quantité infiniment petite, il faudra qu'en faisant croître les variables x, y, z,... de αx, αy, αz,..., la fonction φ croisse en même temps de $m\alpha\varphi$; ce qui donne évidemment l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx}x + \frac{d\varphi}{dy}y + \frac{d\varphi}{dz}z + \ldots = m\varphi.$$

45. Voyons ensuite comment on peut déterminer les valeurs de A′, B′, A″, B″,... et de leurs différentielles relatives à r. Pour cela je fais, en général,

$$\mathrm{V} = r^2 - 2rr'\cos u + r'^2, \ldots,$$

$$\frac{1}{\mathrm{V}^t} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\cos u + \mathrm{C}\cos 2u + \ldots;$$

en différentiant relativement à u, on aura

$$\frac{2trr'\sin u}{\mathrm{V}^{t+1}} = \mathrm{B}\sin u + 2\mathrm{C}\sin 2u + \ldots;$$

donc, multipliant par V et substituant la valeur de V ainsi que celle de V^{-t}, il viendra cette équation identique

$$2trr'\sin u(\mathrm{A} + \mathrm{B}\cos u + \mathrm{C}\cos 2u + \ldots)$$
$$= (r^2 - 2rr'\cos u + r'^2)(\mathrm{B}\sin u + 2\mathrm{C}\sin 2u + \ldots),$$

laquelle, en développant les termes et comparant, donnera d'abord

$$trr'(2\mathrm{A} - \mathrm{C}) = (r^2 + r'^2)\mathrm{B} - 2rr'\mathrm{C},$$

d'où l'on tire

$$C = \frac{(r^2 + r'^2)B - 2srr'A}{(2-s)rr'};$$

et l'on trouvera de même, par la comparaison des autres termes, les valeurs de D, E, ..., en A et B.

Supposons à présent

$$\frac{1}{V^{s+1}} = a + b\cos u + c\cos 2u + \ldots;$$

donc : 1° multipliant par $r^2 - 2rr'\cos u + r'^2$, et comparant avec l'expression ci-dessus de $\frac{1}{V^s}$, on aura

$$(r^2 + r'^2)a - rr'b = A;$$

2° multipliant par $2srr'\sin u$ et comparant avec l'expression ci-dessus de $\frac{2srr'\sin u}{V^{s+1}}$, on aura

$$2srr'\left(a - \frac{c}{2}\right) = B;$$

mais il doit y avoir entre a, b, c la même relation qu'entre A, B, C, en changeant seulement s en $s+1$, en sorte que

$$c = \frac{(r^2 + r'^2)b - 2(s+1)rr'a}{(1-s)rr'};$$

donc, substituant cette valeur de c, on aura

$$\frac{s}{1-s}[4rr'a - (r^2 + r'^2)b] = B.$$

De ces deux équations on tirera les valeurs de a et de b, et l'on aura

$$a = \frac{(r^2 + r'^2)A - \frac{1-s}{s}rr'B}{(r^2 - r'^2)^2},$$

$$b = \frac{4rr'A - \frac{1-s}{s}(r^2 + r'^2)B}{(r^2 - r'^2)^2}.$$

Cela posé, différentions l'équation

$$\frac{1}{V^s} = A + B\cos u + \ldots,$$

en y faisant varier r seul; il viendra

$$\frac{-2s(r - r'\cos u)}{V^{s+1}} = \frac{dA}{dr} + \frac{dB}{dr}\cos u + \frac{dC}{dr}\cos 2u + \ldots;$$

donc

$$\frac{2r^2 - 2rr'\cos u}{V^{s+1}} = -\frac{r}{s}\frac{dA}{dr} - \frac{r}{s}\frac{dB}{dr}\cos u - \frac{r}{s}\frac{dC}{dr}\cos 2u - \ldots;$$

or

$$2r^2 - 2rr'\cos u = V^2 + r^2 - r'^2;$$

donc

$$\frac{1}{V^s} + \frac{r^2 - r'^2}{V^{s+1}} = -\frac{r}{s}\frac{dA}{dr} - \frac{r}{s}\frac{dB}{dr}\cos u - \frac{r}{s}\frac{dC}{dr}\cos 2u - \ldots$$

$$= A + B\cos u + C\cos 2u + \ldots + (r^2 - r'^2)(a + b\cos u + c\cos 2u + \ldots),$$

équation qui devant être identique donnera par la comparaison des termes semblables

$$-\frac{r}{s}\frac{dA}{dr} = A + (r^2 - r'^2)a, \quad -\frac{r}{s}\frac{dB}{dr} = B + (r^2 - r'^2)b, \ldots,$$

savoir, en mettant pour a et b leurs valeurs trouvées ci-dessus, et réduisant,

$$\frac{dA}{dr} = \frac{(1-s)r'B - 2srA}{r^2 - r'^2},$$

$$\frac{dB}{dr} = \frac{\left[(1-2s)r + \frac{r'^2}{r}\right]B - 4sr'A}{r^2 - r'^2}.$$

On trouvera de là, par la simple différentiation et substitution, les valeurs de $\frac{d^2A}{dr^2}$, $\frac{d^2B}{dr^2}$, $\frac{d^3A}{dr^3}$, ...

Les formules précédentes étant générales pour quelque exposant s que ce soit, nous ferons $s = \frac{1}{2}$ pour les appliquer à notre objet; et il est vi-

sible qu'alors les quantités A, B, C,... deviendront celles que nous avons désignées par A′, B′, C′,... (43).

Nous aurons donc ainsi

$$\frac{dA'}{dr} = \frac{r'B' - 2rA'}{2(r^2 - r'^2)},$$

$$\frac{dB'}{dr} = \frac{\frac{r'^2}{r}B' - 2r'A'}{r^2 - r'^2} = \frac{2r'}{r}\frac{dA'}{dr};$$

et de là, en différentiant et substituant,

$$\frac{d^2A'}{dr^2} = -\frac{rr'B' - (r^2 + r'^2)A'}{(r^2 - r'^2)^2} - \frac{1}{r}\frac{dA'}{dr}$$
$$= \frac{2r^2A'}{(r^2 - r'^2)^2} - \frac{(3r^2 - r'^2)r'B'}{2r(r^2 - r'^2)^2},$$

$$\frac{d^2B'}{dr^2} = -\frac{2r'}{r^2}\frac{dA'}{dr} + \frac{2r'}{r}\frac{d^2A'}{dr^2}$$
$$= \frac{2r'(3r^2 - r'^2)A'}{r(r^2 - r'^2)^2} - \frac{2r'^3(2r^2 - r'^2)B'}{r^2(r^2 - r'^2)^2}.$$

Mais on aura des formules plus simples en introduisant à la place des quantités A, B les quantités a, b qui résultent du développement de la fonction $\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. Car, en faisant $s = \frac{1}{2}$ et dénotant par a', b' les valeurs de a, b, dans ce cas on aura d'abord (numéro précédent)

$$A' = (r^2 + r'^2)a' - rr'b', \quad B' = 4rr'a' - (r^2 + r'^2)b',$$

et, substituant ces valeurs, il viendra

$$\frac{dA'}{dr} = \frac{r'b' - 2ra'}{2}, \quad \frac{dB'}{dr} = \frac{r'^2b' - 2rr'a'}{r},$$

$$\frac{d^2A'}{dr^2} = a' - \frac{1}{r}\frac{dA'}{dr} = \frac{4ra' - r'b'}{2r}, \quad \frac{d^2B'}{dr^2} = \frac{6rr'a' - 2r'^2b'}{r^2}.$$

Or il est visible que les quantités a', b' ne sont autre chose que celles que nous avons représentées par (r, r'), $(r, r')_1$ dans le n° 39; ainsi, en

conservant ces dernières expressions, on aura

$$A' = (r^2 + r'^2)(r, r') - rr'(r, r')_1,$$

$$B' = 4rr'(r, r') - (r^2 + r'^2)(r, r')_1,$$

$$\frac{dA'}{dr} = -r(r, r') + \frac{1}{2}r'(r, r')_1,$$

$$\frac{dB'}{dr} = -2r'(r, r') + \frac{r'^2}{r}(r, r')_1,$$

$$\frac{d^2A'}{dr^2} = 2(r, r') - \frac{r'}{2r}(r, r')_1,$$

$$\frac{d^2B'}{dr^2} = \frac{6r'}{r}(r, r') - \frac{2r'^2}{r^2}(r, r')_1;$$

et, pour avoir les valeurs de A″, B″, $\frac{dA''}{dr}$, $\frac{dB''}{dr}$, ..., il n'y aura qu'à changer r' en r'', et ainsi de suite.

En substituant donc ces valeurs dans les coefficients des équations de M et N (43), ces coefficients deviendront des fonctions finies des quantités r, r', r'',... qui représentent les distances moyennes des Planètes, et qui doivent être regardées comme constantes et données par les observations.

46. Mais il reste encore à trouver les valeurs mêmes des fonctions (r, r') et $(r, r')_1$; or c'est à quoi l'on ne saurait parvenir que par les séries ou les quadratures. L'un et l'autre de ces moyens a déjà été employé par les Géomètres qui se sont occupés de la Théorie des inégalités périodiques des Planètes, et l'on trouve dans leurs recherches les valeurs des fonctions dont il s'agit pour la plupart des cas que nous aurons à discuter; de sorte que nous pourrions faire usage de ces valeurs, sans prendre la peine de les calculer de nouveau. Cependant, pour ne rien laisser à désirer dans la Théorie que nous avons entrepris de donner, voici une méthode fort simple et très-sûre pour déterminer les valeurs dont il s'agit avec tel degré d'exactitude qu'on voudra.

Cette méthode consiste à regarder la quantité

$$V = r^2 - 2rr'\cos u + r'^2$$

comme le produit de ces deux-ci

$$r - r'e^{u\sqrt{-1}}, \quad r - r'e^{-u\sqrt{-1}};$$

à élever ensuite chacun de ces binômes à la puissance $-s$, ce qui fournira ces deux séries

$$\frac{1}{r^s} + \frac{sr'e^{u\sqrt{-1}}}{r^{s+1}} + \frac{s(s+1)r'^2e^{2u\sqrt{-1}}}{2r^{s+2}} + \frac{s(s+1)(s+2)r'^3e^{3u\sqrt{-1}}}{2.3r^{s+3}} + \ldots,$$

$$\frac{1}{r^s} + \frac{sr'e^{-u\sqrt{-1}}}{r^{s+1}} + \frac{s(s+1)r'^2e^{-2u\sqrt{-1}}}{2r^{s+2}} + \frac{s(s+1)(s+2)r'^3e^{-3u\sqrt{-1}}}{2.3.r^{s+3}} + \ldots;$$

enfin à multiplier ensemble ces deux séries, en ordonnant les termes relativement aux puissances de $e^{u\sqrt{-1}}$ et de $e^{-u\sqrt{-1}}$, et à remettre après cela $2\cos u$ à la place de $e^{u\sqrt{-1}} + e^{-u\sqrt{-1}}$ et, en général, $2\cos mu$ à la place de $e^{mu\sqrt{-1}} + e^{-mu\sqrt{-1}}$. De cette manière la valeur de $\frac{1}{V^s}$ se trouvera naturellement exprimée par la série

$$A + B\cos u + C\cos 2u + \ldots,$$

dans laquelle, en faisant

$$\alpha = s, \quad \beta = \frac{s(s+1)}{2}, \quad \gamma = \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}, \ldots,$$

on aura

$$A = \frac{1}{r'^{2s}}\left(1 + \alpha^2\frac{r'^2}{r^2} + \beta^2\frac{r'^4}{r^4} + \gamma^2\frac{r'^6}{r^6} + \ldots\right),$$

$$B = \frac{2}{r'^{2s}}\left(\alpha\frac{r'}{r} + \alpha\beta\frac{r'^3}{r^3} + \beta\gamma\frac{r'^5}{r^5} + \ldots\right),$$

$$C = \frac{2}{r'^{2s}}\left(\beta\frac{r'^2}{r^2} + \beta\gamma\frac{r'^4}{r^4} + \gamma\delta\frac{r'^6}{r^6} + \ldots\right),$$

.....

Or, comme la quantité V est aussi bien le produit de ces deux-ci $r' - re^{u\sqrt{-1}}$, $r' - re^{-u\sqrt{-1}}$, il s'ensuit qu'on pourra changer, dans les expressions précédentes de A, B, C,..., r en r' et réciproquement; et il est clair que, pour avoir des séries convergentes, il faudra toujours choisir celles où la plus grande des deux quantités r, r' se trouvera en dénominateur.

47. Si dans ces formules on fait $s = \frac{3}{2}$, les expressions de A, B, C,... deviendront celles des fonctions (r, r'), $(r, r')_1$, $(r, r')_2$,...; mais comme alors les coefficients α, β, γ,... ne forment pas une série décroissante, pour avoir les valeurs de (r, r') et $(r, r')_1$ exprimées par des séries toujours convergentes, il vaudra mieux donner d'abord à s une autre valeur, pourvu qu'elle soit telle, que des valeurs qui en résulteront pour A et B on puisse ensuite déduire immédiatement celles qui répondent à $s = \frac{3}{2}$.

Or nous avons donné plus haut (45) les formules par lesquelles, connaissant les valeurs de A et B pour un exposant quelconque s, on peut avoir celles qui conviendront à l'exposant $s+1$; si donc on y fait d'abord $s = -\frac{1}{2}$, et qu'on désigne par A et B les valeurs des séries A et B qui se rapportent à cet exposant, et par a, b celles qui se rapportent à l'exposant $-\frac{1}{2} + 1$ ou $\frac{1}{2}$, on aura

$$a = \frac{(r^2 + r'^2)A + 3rr'B}{(r^2 - r'^2)^2}, \quad b = \frac{4rr'A + 3(r^2 + r'^2)B}{(r^2 - r'^2)^2};$$

si ensuite on fait dans les mêmes formules $s = \frac{1}{2}$ et qu'on y substitue a et b au lieu de A et B, il est clair que les valeurs de a et b, qui en résulteront, seront celles de (r, r') et $(r, r')_1$, puisque $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$; on aura donc ainsi

$$(r, r') = \frac{(r^2 + r'^2)a - rr'b}{(r^2 - r'^2)^2}, \quad (r, r')_1 = \frac{4rr'a - (r^2 + r'^2)b}{(r^2 - r'^2)^2}.$$

De sorte qu'en mettant pour a et b les valeurs précédentes et réduisant, on aura

$$(r, r') = \frac{A}{(r^2 - r'^2)^2}, \quad (r, r')_1 = -\frac{3B}{(r^2 - r'^2)^2}.$$

48. Ainsi, en faisant

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}, \quad \delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{7}{10}, \ldots,$$

on aura

$$(r, r') = \frac{r}{(r^2 - r'^2)^2}\left(1 + \alpha^2\frac{r'^2}{r^2} + \beta^2\frac{r'^4}{r^4} + \gamma^2\frac{r'^6}{r^6} + \delta^2\frac{r'^8}{r^8} + \ldots\right),$$

$$(r, r')_1 = \frac{6r}{(r^2 - r'^2)^2}\left(\alpha\frac{r'}{r} - \alpha\beta\frac{r'^3}{r^3} - \beta\gamma\frac{r'^5}{r^5} - \gamma\delta\frac{r'^7}{r^7} - \ldots\right),$$

où l'on pourra changer à volonté r en r' et réciproquement.

Ici les coefficients α, β, γ,... forment une série assez décroissante, en sorte que le dixième terme de cette série est déjà $< \frac{1}{100}$; mais ces termes approchent ensuite de plus en plus de l'égalité; d'où il suit qu'après avoir pris la somme d'un certain nombre de termes des séries ci-dessus, on pourra regarder les termes suivants comme formant à très-peu près une progression géométrique.

En général soit T le terme auquel on se sera arrêté; la somme de tous les termes suivants à l'infini sera nécessairement moindre que $T\frac{r'^2}{r^2 - r'^2}$. Or la plus grande valeur de $\frac{r'}{r}$ a lieu lorsque l'on compare la distance moyenne de Vénus à celle de la Terre, auquel cas on a à très-peu près $\frac{r'}{r} = \frac{7}{10}$; par conséquent $\frac{r'^2}{r^2} < \frac{1}{2}$ et $\frac{r'^2}{r^2 - r'^2} < 1$. Ainsi dans ce cas, qui est le plus défavorable pour le calcul, la somme de tous les termes qui suivent T sera toujours $< T$; et elle le sera d'autant plus que le rapport des deux distances moyennes sera un plus petit nombre. Or je trouve dans ce cas que, si T est le dixième terme de l'une ou de l'autre série, il sera $< \frac{1}{1\,000\,000}$; par conséquent la somme des dix premiers termes donnera la valeur de la série exacte jusqu'à la sixième décimale; ce qui est plus que suffisant pour notre objet. Dans les autres un plus petit nombre de termes suffira pour avoir ce même degré de précision.

49. Jusqu'à présent nous n'avons mis aux formules des variations séculaires qu'une seule limitation; c'est que les inclinaisons et les excentricités des orbites soient assez petites pour qu'on puisse en négliger les carrés et les produits de plusieurs dimensions; ce qui a effectivement lieu dans notre système planétaire. Cela supposé, nos équations sont entièrement rigoureuses et ont lieu également quelles que puissent être les masses des Planètes; et comme ces équations ne sont que linéaires et ont tous leurs coefficients constants, elles peuvent toujours être intégrées exactement par les méthodes connues; et la solution complète du Problème n'a plus d'autre difficulté que la longueur du calcul.

Mais lorsqu'on applique cette solution au système solaire, elle devient susceptible de nouvelles simplifications, dues à la petitesse des masses de toutes les Planètes vis-à-vis de celle du Soleil, et à la petitesse des masses de quelques-unes d'entre elles par rapport aux autres. On sait que Jupiter, la plus grosse de toutes les Planètes, a environ mille fois moins de masse que le Soleil; donc, puisque nous prenons la masse du Soleil pour l'unité (37), les masses T, T', T''.... des Planètes seront toujours des nombres au-dessous d'un millième; par conséquent ayant négligé, dans les équations différentielles des variations séculaires, les termes où se trouveraient les carrés et les produits des inclinaisons et des excentricités, on pourra à plus forte raison y négliger aussi ceux où les quantités T, T', T'',... monteraient au-dessus de la première dimension.

Or, puisque (38)

$$m = M - \frac{dN}{dp} - \frac{d^2M}{dp^2} + \ldots,$$

$$n = N + \frac{dM}{dp} - \frac{d^2N}{dp^2} - \ldots,$$

il est visible qu'en substituant successivement pour dM, dN, d^2M,...

leurs valeurs tirées des équations différentielles du n° 43, on aura

$$m = \mathrm{M} + \mu, \quad n = \mathrm{N} + \nu,$$

les quantités μ et ν ayant tous leurs termes multipliés par T′, ou T″, ... ou par T′², ou par T′T″, ..., ou .... Si donc on fait ces substitutions dans les seconds membres des mêmes équations, il faudra y négliger les quantités μ et ν, parce qu'elles s'y trouveraient encore multipliées par T′, ou T″, ou ....

D'où il s'ensuit qu'il suffira de mettre, dans les équations dont il s'agit, M au lieu de m, et N au lieu de n; et par la même raison on y pourra changer m', m'', ... en M′, M″, ..., et n', n'', ... en N′, N″, ...; ce qui, d'après les réductions du n° 44, les réduira d'abord à cette formule plus simple

$$d\mathrm{N} = -\mathrm{T}'(\alpha'\mathrm{M} + \beta'\mathrm{M}')\frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}} - \mathrm{T}''(\alpha''\mathrm{M} + \beta''\mathrm{M}'')\frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}} - \ldots,$$

$$d\mathrm{M} = \mathrm{T}'(\alpha'\mathrm{N} + \beta'\mathrm{N}')\frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}} + \mathrm{T}''(\alpha''\mathrm{N} + \beta''\mathrm{N}'')\frac{dt}{r^{\frac{3}{2}}} + \ldots,$$

en faisant, pour abréger,

$$\alpha' = r^2\frac{d\mathrm{A}'}{dr} + \frac{r^3}{2}\frac{d^2\mathrm{A}'}{dr^2}, \quad \beta' = r\frac{\mathrm{B}'}{2} - \frac{r^2}{2}\frac{d\mathrm{B}'}{dr} - \frac{r^3}{4}\frac{d^2\mathrm{B}'}{dr^2},$$

$$\alpha'' = r^2\frac{d\mathrm{A}''}{dr} + \frac{r^3}{2}\frac{d^2\mathrm{A}''}{dr^2}, \quad \beta'' = \frac{r}{2}\mathrm{B}'' - \frac{r^2}{2}\frac{d\mathrm{B}''}{dr} - \frac{r^3}{4}\frac{d^2\mathrm{B}''}{dr^2},$$

....., ...

Et, si l'on substitue enfin les valeurs trouvées à la fin du n° 45, on aura

$$\alpha' = \frac{r^2r'}{4}(r, r')_1, \quad \beta' = \frac{3r^2r'}{2}(r, r') - \frac{r^3(r^2 + r'^2)}{2}(r, r')_1,$$

$$\alpha'' = \frac{r^2r''}{4}(r, r'')_1, \quad \beta'' = \frac{3r^2r''}{2}(r, r'') - \frac{r^3(r^2 + r''^2)}{2}(r, r'')_1,$$

....., ...

50. Changeons, pour plus de simplicité, les lettres M, N en x, y (il ne faut pas confondre ces x, y avec celles qui représentaient les coordonnées rectangles dans le plan de projection, dont nous n'avons plus besoin dans nos calculs); et, conservant les caractères (0, 1), (0, 2), (1, 0), ... pour désigner les mêmes quantités que dans le n° 40, faisons de plus

$$[0, 1] = \mathrm{T}'\frac{(r^2 + r'^2)(r, r')_1 - 3rr'(r, r')}{2\sqrt{r}},$$

$$[0, 2] = \mathrm{T}''\frac{(r^2 + r''^2)(r, r'')_1 - 3rr''(r, r'')}{2\sqrt{r}},$$

.....;

nous aurons ces équations

$$\frac{dx}{dt} - \Big[(0, 1) + (0, 2) + \ldots\Big]y + [0, 1]y' + [0, 2]y'' + \ldots = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} + \Big[(0, 1) + (0, 2) + \ldots\Big]x - [0, 1]x' - [0, 2]x'' - \ldots = 0;$$

et, faisant pareillement

$$[1, 0] = \mathrm{T}\frac{(r'^2 + r^2)(r', r)_1 - 3r'r(r', r)}{2\sqrt{r'}},$$

$$[1, 2] = \mathrm{T}''\frac{(r'^2 + r''^2)(r', r'')_1 - 3r'r''(r', r'')}{2\sqrt{r'}},$$

.....,

$$[2, 0] = \mathrm{T}\frac{(r''^2 + r^2)(r'', r)_1 - 3r''r(r'', r)}{2\sqrt{r''}},$$

$$[2, 1] = \mathrm{T}'\frac{(r''^2 + r'^2)(r'', r')_1 - 3r''r'(r'', r')}{2\sqrt{r''}},$$

.....,

on aura aussi

$$\frac{dx'}{dt} - \Big[(1, 0) + (1, 2) + \ldots\Big]y' + [1, 0]y + [1, 2]y'' + \ldots = 0,$$

$$\frac{dy'}{dt} + \Big[(1, 0) + (1, 2) + \ldots\Big]x' - [1, 0]x - [1, 2]x'' - \ldots = 0,$$

$$\frac{dx''}{dt} - \Big[(2, 0) + (2, 1) + \ldots\Big]y'' + [2, 0]y + [2, 1]y' + \ldots = 0,$$

$$\frac{dy''}{dt} + \Big[(2, 0) + (2, 1) + \ldots\Big]x'' - [2, 0]x - [2, 1]x' - \ldots = 0,$$

.....

Ces équations, analogues, comme on voit, à celles du n° 40, serviront à déterminer les variations séculaires des excentricités et des aphélies, comme celles-là servent à déterminer les variations séculaires des inclinaisons et des nœuds. Car on aura ici

$$x = \lambda \cos\eta \sin\varphi, \quad y = \lambda \cos\eta \cos\varphi,$$

λ étant l'excentricité, φ la longitude de l'aphélie et η sa latitude dépendante de l'équation

$$\operatorname{tang}\eta = \theta \sin(\varphi - \omega);$$

et à cause de la petitesse de η et de ce que nous négligeons les quantités très-petites au-dessus du premier ordre, on aura simplement $\lambda\sin\varphi$, $\lambda\cos\varphi$ pour les valeurs de x, y, et de même $\lambda'\sin\varphi'$, $\lambda'\cos\varphi'$, $\lambda''\sin\varphi''$, $\lambda''\cos\varphi''$,... pour celles de x', y', x'', y'',..., où λ, λ', λ'',... sont les excentricités et φ, φ', φ'',... les longitudes des aphélies des Planètes T, T', T'',....

Si dans ces équations on change les quantités

$$[0, 1], \quad [0, 2], \quad [1, 0], \ldots$$

en

$$(0, 1), \quad (0, 2), \quad (1, 0), \ldots,$$

et qu'on y prenne t négatif, elles se réduisent à celles du n° 40, les variables x, y,..., x', y',... répondant à s, u, s', u',... Ainsi les excentricités λ, λ',... deviendront alors les tangentes θ, θ',... des inclinaisons, et les longitudes φ, φ',... des aphélies deviendront celles des nœuds ω, ω',....

51. Le Problème des variations séculaires est donc résolu analytiquement, puisqu'il est réduit à des équations dont l'intégration est connue. Celles du n° 40 ont déjà été intégrées dans le Mémoire cité *Sur les variations séculaires des nœuds et des inclinaisons*; et l'on peut intégrer de la même manière les équations du numéro précédent.

On fera pour cela

$$x = A\sin(at + \alpha), \quad y = A\cos(at + \alpha),$$
$$x' = A'\sin(at + \alpha), \quad y' = A'\cos(at + \alpha),$$
$$x'' = A''\sin(at + \alpha), \quad y'' = A''\cos(at + \alpha),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

a, α, A, A', A'',... étant des quantités constantes indéterminées; on substituera ces valeurs, et il viendra ces équations de condition entre les constantes

$$aA - \big[(0, 1) + (0, 2) + \ldots\big]A + [0, 1]A' + [0, 2]A'' + \ldots = 0,$$
$$aA' - \big[(1, 0) + (1, 2) + \ldots\big]A' + [1, 0]A + [1, 2]A'' + \ldots = 0,$$
$$aA'' - \big[(2, 0) + (2, 1) + \ldots\big]A'' + [2, 0]A + [2, 1]A' + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont le nombre sera égal à celui des coefficients indéterminés A, A', A'',...; mais, puisque tous les termes de ces équations sont multipliés par un de ces coefficients, il s'ensuit que par leur moyen on ne peut déterminer que le rapport des mêmes coefficients, en sorte qu'il en demeurera toujours un, comme A, indéterminé; en effet, en éliminant successivement ces coefficients, on parviendra à une équation finale où il n'y aura plus d'inconnue que la constante a, et qui servira par conséquent à déterminer cette constante. Cette équation se trouvera toujours d'un degré égal au nombre des coefficients A, A', A'',..., qui est égal à celui des Planètes dont on considère l'action mutuelle, et aura en conséquence autant de racines.

Soient a, b, c,... ces différentes racines; et prenant autant de coefficients arbitraires A, B, C,... et d'angles indéterminés α, β, γ,..., on aura par la Théorie des équations linéaires ces expressions complètes de x, y, x', y',...

$$x = A\sin(at + \alpha) + B\sin(bt + \beta) + C\sin(ct + \gamma) + \ldots,$$
$$y = A\cos(at + \alpha) + B\cos(bt + \beta) + C\cos(ct + \gamma) + \ldots,$$
$$x' = A'\sin(at + \alpha) + B'\sin(bt + \beta) + C'\sin(ct + \gamma) + \ldots,$$
$$y' = A'\cos(at + \alpha) + B'\cos(bt + \beta) + C'\cos(ct + \gamma) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les constantes B, B', B'',... devant avoir entre elles des rapports exprimés par des fonctions de b semblables aux fonctions de a qui expriment les

rapports des constantes A, A′, A″,... entre elles; et ainsi des constantes C, C′, C″,....

A l'égard des quantités A, B, C,..., α, β, γ,... qui ne sont pas encore déterminées, elles doivent l'être d'après les valeurs supposées connues des variables x, y, x', y',..., qui sont en même nombre que ces quantités, pour une époque quelconque donnée dans laquelle on fera pour plus de simplicité $t = 0$. J'ai donné, dans le Mémoire cité, pour cet objet, une méthode générale qui s'applique également au cas dont il s'agit, ainsi qu'à tous les cas semblables; mais comme elle est peut-être plus curieuse pour l'Analyse qu'utile pour la pratique, je ne la rappellerai point ici.

Après avoir ainsi trouvé les intégrales des équations en x, y, x', y',..., on aura tout de suite, et sans aucun autre calcul, les intégrales des équations en s, u, s', u',..., en changeant seulement les lettres x, y en s, u, les crochets carrés en crochets ronds, et mettant $-a$ au lieu de a dans l'équation en a; c'est ce qui suit évidemment de l'analogie déjà remarquée (numéro précédent) entre les deux systèmes d'équations dont il s'agit.

52. Si maintenant on substitue ces valeurs de x, y à la place de M, N, dans l'expression du rayon vecteur r, que nous avons vu être (38), aux quantités du second ordre près,

$$1 + \mathrm{M}\sin q + \mathrm{N}\cos q,$$

on aura, en conservant, ainsi que nous en avons usé plus haut, la lettre r pour dénoter la distance moyenne $\frac{1}{\Delta}$, et représentant, en général, le rayon vecteur par $r(1+\xi)$, on aura, dis-je,

$$\xi = \mathrm{A}\cos(q - at - \alpha) + \mathrm{B}\cos(q - bt - \beta) + \mathrm{C}\cos(q - ct - \gamma) + \dots.$$

De même, puisque

$$z = \frac{r}{\mathrm{R}}(\mathrm{Q}\sin q - \mathrm{P}\cos q),$$

comme on l'a vu dans le n° 29, si l'on fait

$$z = r\zeta,$$

(r est ici le rayon vecteur), et qu'on substitue pour $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{R}}$, $\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{R}}$ les valeurs de s, u, qui sont exprimées d'une manière semblable à celles de x, y, on aura aussi

$$\zeta = \mathrm{A}\sin(q - at - \alpha) + \mathrm{B}\sin(q - bt - \beta) + \mathrm{C}\sin(q - ct - \gamma) + \dots,$$

les constantes A, B,..., a, b,..., α, β,... étant différentes de celles de l'expression de ξ. Ce sont les premières valeurs approchées de ξ et ζ.

On aurait donc pu chercher d'abord ces valeurs par l'intégration immédiate des équations différentielles de ξ et ζ, et puis en déduire la loi des variations séculaires des excentricités des aphélies, des inclinaisons et des nœuds. C'est ainsi que j'en ai usé il y a longtemps dans ma Pièce sur les Satellites de Jupiter (*), où j'ai donné le premier la véritable Théorie de ces valeurs, en résolvant d'une manière particulière les difficultés que l'intégration renferme et qui avaient échappé à tous ceux qui s'étaient occupés avant moi de la Théorie des Planètes. M. de Laplace a donné depuis, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1772, d'autres moyens de lever ces difficultés et d'arriver à la vraie forme des intégrales; et, pour ne rien laisser à désirer sur le sujet que je traite, je vais faire voir ici, le plus simplement qu'il me sera possible, l'accord des formules, qui résultent de l'intégration des équations de ξ et ζ, avec celles que je viens de trouver.

53. Commençons par chercher ces équations d'après celles du n° 2. En y substituant $r\cos q$, $r\sin q$ à la place de x, y et $\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{d\Omega}{dy}$, ou bien

$$\frac{d\Omega}{dr}\cos q - \frac{d\Omega}{dq}\frac{\sin q}{r}, \quad \frac{d\Omega}{dr}\sin q + \frac{d\Omega}{dq}\frac{\cos q}{r},$$

(*) Cette Pièce, déjà citée, appartient à la troisième Section des *Œuvres de Lagrange*. (*Note de l'Éditeur.*)

à la place de X, Y (16, 29, 41), les deux premières se changent en

$$\left(\frac{d^2r-rdq^2}{dt^2}+\frac{gr}{\rho^3}+\frac{d\Omega}{dr}\right)\cos q-\left(\frac{2drdq+rd^2q}{dt^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Omega}{dq}\right)\sin q=0,$$

$$\left(\frac{d^2r-rdq^2}{dt^2}+\frac{gr}{\rho^3}+\frac{d\Omega}{dr}\right)\sin q+\left(\frac{2drdq+rd^2q}{dt^2}+\frac{1}{r}\frac{d\Omega}{dq}\right)\cos q=0,$$

d'où l'on tire ces deux-ci

$$\frac{d^2r-rdq^2}{dt^2}+\frac{gr}{\rho^3}+\frac{d\Omega}{dt}=0,$$

$$\frac{d.(r^2dq)}{dt^2}+\frac{d\Omega}{dq}=0,$$

lesquelles serviront à déterminer le rayon vecteur r et la longitude q en t.

Ces équations se rapportent à la Planète T; on en aura de semblables pour chacune des autres Planètes T', T'',..., en marquant seulement toutes les lettres d'un, deux,... traits.

Prenons maintenant la lettre r pour désigner la distance moyenne, et représentons, comme plus haut, le rayon vecteur par $r(1+\xi)$; soit aussi p la longitude moyenne et $p+\psi$ l'expression de la longitude vraie; il faudra : 1° que ξ ne renferme aucun terme constant, mais seulement des sinus et cosinus; 2° que $\frac{dp}{dt}$ soit une quantité constante et que $\frac{d\psi}{dt}$ ne contienne au contraire aucun terme tout constant.

On fera donc ces substitutions, et comme on suppose les orbites peu excentriques et peu inclinées, les quantités ξ, ψ et z seront toujours très-petites, et nous en négligerons les puissances et les produits de deux ou de plusieurs dimensions. Or la fonction Ω se réduit dans cette hypothèse à une fonction de $r, r', \ldots, q, q', \ldots$ seulement (42); donc si, comme on en a usé dans ce numéro, on y change d'abord la lettre q en p, la quantité $\frac{d\Omega}{dr}$ deviendra

$$\frac{d\Omega}{dr}+\frac{d^2\Omega}{dr^2}r\xi+\frac{d^2\Omega}{drdr'}r'\xi'+\ldots+\frac{d^2\Omega}{drdp}\psi+\frac{d^2\Omega}{drdp'}\psi'+\ldots;$$

et la quantité $\frac{d\Omega}{dq}$ deviendra

$$\frac{d\Omega}{dp}+\frac{d^2\Omega}{drdp}r\xi+\frac{d^2\Omega}{dr'dp}r'\xi'+\ldots+\frac{d^2\Omega}{dp^2}\psi+\frac{d^2\Omega}{dpdp'}\psi'+\ldots.$$

Ainsi, en faisant $g=1$, comme dans le n° 37, les équations précédentes deviendront

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}-\frac{dp^2}{dt^2}(1+\xi)-\frac{2dpd\psi}{dt^2}+\frac{1-2\xi}{r^3}$$
$$+\frac{1}{r}\frac{d\Omega}{dr}+\frac{d^2\Omega}{dr^2}\xi+\frac{1}{r}\frac{d^2\Omega}{drdr'}r'\xi'+\ldots+\frac{1}{r}\frac{d^2\Omega}{drdp}\psi+\frac{1}{r}\frac{d^2\Omega}{drdp'}\psi'+\ldots=0,$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+\frac{2dpd\xi}{dt^2}+\frac{1}{r^2}\frac{d\Omega}{dp}+\frac{1}{r}\frac{d^2\Omega}{drdp}\xi+\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Omega}{dr'dp}r'\xi'+\ldots$$
$$+\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Omega}{dp^2}\psi+\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Omega}{dpdp'}\psi'+\ldots=0;$$

et les quantités $r, r', \ldots$ seront désormais constantes.

Pour rapporter ces équations aux Planètes T', T'',..., on n'aura besoin que d'y changer r, p, ξ, ψ en r', p', ξ', ψ', ou r'', p'', ξ'', ψ'', ou ..., et réciproquement ces quantités-ci en celles-là.

54. Si l'on supposait les forces perturbatrices nulles, on aurait, en effaçant les termes qui contiennent Ω et ses différences,

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}-\frac{dp^2}{dt^2}(1+\xi)-\frac{2dpd\psi}{dt^2}+\frac{1-2\xi}{r^3}=0,$$

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}+\frac{2dpd\xi}{dt^2}=0.$$

La seconde donne

$$\frac{d\psi}{dt}=-\frac{2dp}{dt}\xi;$$

il ne faut point de constante ici, puisque $\frac{d\psi}{dt}$ et ξ n'en doivent renfermer aucune; cette valeur étant substituée dans la première, elle deviendra

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+\left(\frac{3dp^2}{dt^2}-\frac{2}{r^3}\right)\xi-\frac{dp^2}{dt^2}+\frac{1}{r^3}=0;$$

on égalera d'abord à zéro les termes tout constants $\frac{1}{r^3} - \frac{dp^2}{dt^2}$, parce que ξ n'en doit renfermer aucun de ce genre; on aura

$$\frac{1}{r^3} = \frac{dp^2}{dt^2},$$

ce qui réduira l'équation à

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{dp^2}{dt^2}\xi = 0,$$

laquelle a évidemment pour intégrale

$$\xi = F\cos(p - \alpha);$$

et de là on aura

$$\psi = -2F\sin(p - \alpha),$$

F et α étant des constantes arbitraires.

On aura de pareilles expressions pour ξ', ψ', ξ'', ψ'',... en marquant simplement les termes d'un, deux,... traits.

Supposons à présent qu'en ayant égard aux forces perturbatrices les termes que nous venons de trouver dans les expressions de ξ et ψ deviennent

$$\xi = F\cos(p - at - \alpha), \quad \psi = f\sin(p - at - \alpha),$$

F, f étant des constantes indéterminées ainsi que α et a; et comme dans ce cas les équations de ξ et ψ renferment aussi ξ', ψ', ξ'', ψ'',..., supposons qu'il entre aussi dans les expressions de ces dernières variables des termes analogues, en sorte qu'on ait en même temps

$$\xi' = F'\cos(p' - at - \alpha), \quad \psi' = f'\sin(p' - at - \alpha),$$
$$\xi'' = F''\cos(p'' - at - \alpha), \quad \psi'' = f''\sin(p'' - at - \alpha),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

F', F'',..., f', f'',... étant de nouvelles constantes indéterminées.

Pour vérifier ces suppositions et déterminer en même temps les constantes arbitraires, on fera d'abord les substitutions précédentes dans les équations de ξ et de ψ, et l'on y égalera à zéro les coefficients des sinus et cosinus de $p - at - \alpha$; on les fera ensuite de même dans les équations

de ξ' et de ψ', et l'on égalera à zéro les coefficients des sinus et cosinus de $p' - at - \alpha$, et ainsi de suite.

Or il est visible que les quantités ξ et ψ ne peuvent donner des sinus ou cosinus de $p - at - \alpha$ qu'autant qu'elles ne sont multipliées par aucun sinus ni cosinus; qu'au contraire les quantités ξ', ψ' ne donneront de pareils sinus ou cosinus qu'autant qu'elles se trouveront multipliées par le sinus ou cosinus de $p - p'$, et ainsi de suite. D'où il suit qu'en substituant dans les équations de ξ et de ψ la valeur de la fonction Ω (43), il suffira d'avoir égard aux termes de la forme dont nous venons de parler. Ainsi l'on pourra d'abord les réduire à celles-ci

$$0 = \frac{d^2\xi}{dt^2} - \left(\frac{dp^2}{dt^2} + \frac{2}{r^3}\right)\xi - \frac{2dp\,d\frac{1}{r}}{dt^2} - \frac{dp^2}{dt^2} + \frac{1}{r^3}$$
$$- T'\left[\frac{1}{r}\frac{d\Lambda'}{dr} + \frac{d^2\Lambda'}{dr^2}\xi + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2B'}{drdr'} + \frac{2}{rr'^3}\right)r'\cos(p - p')\times\xi' + \left(\frac{1}{r}\frac{dB'}{dr} - \frac{1}{rr'^3}\right)\sin(p - p')\times\psi'\right]$$
$$- T''\left[\frac{1}{r}\frac{d\Lambda''}{dr} + \frac{d^2\Lambda''}{dr^2}\xi + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2B''}{drdr''} + \frac{2}{rr''^3}\right)r''\cos(p - p'')\times\xi'' + \left(\frac{1}{r}\frac{dB''}{dr} - \frac{1}{rr''^3}\right)\sin(p - p'')\times\psi''\right]$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$0 = \frac{d^2\psi}{dt^2} + \frac{2dp\,d\xi}{dt^2}$$
$$+ T'\left[\left(\frac{1}{r^3}\frac{dB'}{dr'} + \frac{2}{rr'^3}\right)r'\sin(p - p')\times\xi' - \left(\frac{B'}{r^3} - \frac{1}{rr'^3}\right)\cos(p - p')\times\psi'\right]$$
$$+ T''\left[\left(\frac{1}{r^3}\frac{dB''}{dr''} + \frac{2}{rr''^3}\right)r''\sin(p - p'')\times\xi'' - \left(\frac{B''}{r^3} - \frac{1}{rr''^3}\right)\cos(p - p'')\times\psi''\right]$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

J'ai conservé dans la première les termes constants, parce qu'ils doivent former une équation à part servant à déterminer la relation entre $\frac{dp}{dt}$ et r, et à satisfaire à la condition que ξ ne renferme aucun terme constant. Cette équation de condition sera donc

$$-\frac{dp^2}{dt^2} + \frac{1}{r^3} - T'\frac{1}{r}\frac{d\Lambda'}{dr} - T''\frac{1}{r}\frac{d\Lambda''}{dr} - \ldots = 0,$$

laquelle donne

$$\frac{1}{r^3} = \frac{dp^2}{dt^2} + T'\frac{1}{r}\frac{d\Lambda'}{dr} + T''\frac{1}{r}\frac{d\Lambda''}{dr} + \ldots,$$

valeur qu'on substituera dans la première des deux équations précédentes.

Si maintenant on substitue aussi dans l'une et dans l'autre, à la place de ξ, ψ, ξ', ψ', ... les expressions indiquées ci-dessus, et qu'après avoir développé les produits des sinus et cosinus en sinus et cosinus simples, on égale à zéro dans la première la somme des coefficients de $\cos(p-at-\alpha)$, et dans la seconde la somme des coefficients de $\sin(p-at-\alpha)$, on aura

$$\begin{aligned}
0 = &-\left(\frac{dp}{dt}-a\right)^2 \mathrm{F} - \frac{3dp^2}{dt^2}\mathrm{F} - \frac{2dp}{dt}\left(\frac{dp}{dt}-a\right) f \\
&- \mathrm{T}'\left[\left(\frac{2}{r}\frac{d\Lambda'}{dr}+\frac{d^2\Lambda'}{dr^2}\right)\mathrm{F} + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2\mathrm{B}'}{dr\,dr'}+\frac{2}{rr'^2}\right)\frac{r'\mathrm{F}'}{2} - \left(\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{B}'}{dr}-\frac{1}{rr'^2}\right)\frac{f'}{2}\right] \\
&- \mathrm{T}''\left[\left(\frac{2}{r}\frac{d\Lambda''}{dr}+\frac{d^2\Lambda''}{dr^2}\right)\mathrm{F} + \left(\frac{1}{r}\frac{d^2\mathrm{B}''}{dr\,dr''}+\frac{2}{rr''^2}\right)\frac{r''\mathrm{F}''}{2} - \left(\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{B}''}{dr}-\frac{1}{rr''^2}\right)\frac{f''}{2}\right] \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 = &-\left(\frac{dp}{dt}-a\right)^2 f - \frac{2dp}{dt}\left(\frac{dp}{dt}-a\right)\mathrm{F} \\
&+ \mathrm{T}'\left[\left(\frac{1}{r^2}\frac{d\mathrm{B}'}{dr'}+\frac{2}{rr'^2}\right)\frac{r'\mathrm{F}'}{2} - \left(\frac{\mathrm{B}'}{r^2}-\frac{1}{rr'^2}\right)\frac{f'}{2}\right] \\
&+ \mathrm{T}''\left[\left(\frac{1}{r^2}\frac{d\mathrm{B}''}{dr''}+\frac{2}{rr''^2}\right)\frac{r''\mathrm{F}''}{2} - \left(\frac{\mathrm{B}''}{r^2}-\frac{1}{rr''^2}\right)\frac{f''}{2}\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

On trouvera des équations analogues d'après les équations différentielles de ξ' et de ψ', et d'après celles de ξ'' et de ψ'', et ainsi de suite; et ces équations ne différeront des précédentes qu'en ce que les lettres qui n'ont aucun trait en auront respectivement un, deux,... (à l'exception de a et de t qui demeurent les mêmes pour toutes les équations), et qu'en même temps les traits manqueront à celles qui en ont un, deux,....

55. Je remarque maintenant que les quantités T, T', T'',... doivent être supposées très-petites, et qu'on en doit négliger les puissances et les produits de deux ou de plusieurs dimensions (49). Or, si l'on regarde d'abord ces quantités comme nulles, les équations précédentes donnent

$$a = 0, \quad f = -2\mathrm{F},$$

et l'on aura de même par les autres équations

$$f' = -2\mathrm{F}', \ldots.$$

Donc les quantités a, $f+2\mathrm{F}$, $f'+2\mathrm{F}'$,... seront très-petites de l'ordre de T, T',...; par conséquent il faudra rejeter partout les carrés, les cubes,... de a, et dans les termes qui sont déjà multipliés par T, T',... il faudra faire

$$a = 0, \quad f = -2\mathrm{F}, \quad f' = -2\mathrm{F}', \ldots.$$

De cette manière la seconde des deux équations ci-dessus donnera d'abord

$$f = -2\left(1+a\frac{dt}{dp}\right)\mathrm{F} + \mathrm{T}'\frac{dt^2}{dp^2}\left(\frac{r'}{2r^2}\frac{d\mathrm{B}'}{dr'}+\frac{\mathrm{B}'}{r^2}\right)\mathrm{F}' + \mathrm{T}''\frac{dt^2}{dp^2}\left(\frac{r''}{2r^2}\frac{d\mathrm{B}''}{dr''}+\frac{\mathrm{B}''}{r^2}\right)\mathrm{F}'' + \ldots,$$

et la première deviendra ensuite

$$\begin{aligned}
0 = &\,2a\frac{dp}{dt}\mathrm{F} \\
&- \mathrm{T}'\left[\left(\frac{2}{r}\frac{d\Lambda'}{dr}+\frac{d^2\Lambda'}{dr^2}\right)\mathrm{F} + \left(\frac{r'}{2r}\frac{d^2\mathrm{B}'}{dr\,dr'}+\frac{r'}{r^2}\frac{d\mathrm{B}'}{dr'}+\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{B}'}{dr}+\frac{2\mathrm{B}'}{r^2}\right)\mathrm{F}'\right] \\
&- \mathrm{T}''\left[\left(\frac{2}{r}\frac{d\Lambda''}{dr}+\frac{d^2\Lambda''}{dr^2}\right)\mathrm{F} + \left(\frac{r''}{2r}\frac{d^2\mathrm{B}''}{dr\,dr''}+\frac{r''}{r^2}\frac{d\mathrm{B}''}{dr''}+\frac{1}{r}\frac{d\mathrm{B}''}{dr}+\frac{2\mathrm{B}''}{r^2}\right)\mathrm{F}''\right] \\
&- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Or on a vu dans le n° 44 que

$$r'\frac{d\mathrm{B}'}{dr'}+\frac{rr'}{2}\frac{d^2\mathrm{B}'}{dr\,dr'} = -\mathrm{B}' - 2r\frac{d\mathrm{B}'}{dr} - \frac{r^2}{2}\frac{d^2\mathrm{B}'}{dr^2},$$

et de même

$$r''\frac{d\mathrm{B}''}{dr''}+\frac{rr''}{2}\frac{d^2\mathrm{B}''}{dr\,dr''} = -\mathrm{B}'' - 2r\frac{d\mathrm{B}''}{dr} - \frac{r^2}{2}\frac{d^2\mathrm{B}''}{dr^2},$$

et ainsi des autres quantités analogues; donc, faisant ces substitutions et employant les quantités α', α'',..., β', β'',... du n° 49, l'équation précédente deviendra

$$0 = a\frac{dp}{dt}\mathrm{F} - \mathrm{T}'\frac{\alpha'\mathrm{F}+\beta'\mathrm{F}'}{r^3} - \mathrm{T}''\frac{\alpha''\mathrm{F}+\beta''\mathrm{F}''}{r^3} - \ldots.$$

Mais on a (54), aux quantités de l'ordre de T', T'', ... près,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\sqrt{r^3}};$$

donc, puisque d'après les suppositions des nos 40 et 50 on a

$$\frac{T'\alpha'}{\sqrt{r^3}} = (0,1), \quad \frac{T''\alpha''}{\sqrt{r^3}} = (0,2), \ldots,$$

et

$$\frac{T'\beta'}{\sqrt{r^3}} = -[0,1], \quad \frac{T''\beta''}{\sqrt{r^3}} = -[0,2], \ldots,$$

il est visible que l'équation dont il s'agit étant divisée par $\frac{dp}{dt}$ se réduira à cette forme

$$a\mathrm{F} - \big[(0,1)+(0,2)+\ldots\big]\mathrm{F} + [0,1]\mathrm{F}' + [0,2]\mathrm{F}'' + \ldots = 0,$$

et les équations analogues se réduiront de la même manière à celles-ci

$$a\mathrm{F}' - \big[(1,0)+(1,2)+\ldots\big]\mathrm{F}' + [1,0]\mathrm{F} + [1,2]\mathrm{F}'' + \ldots = 0,$$
$$a\mathrm{F}'' - \big[(2,0)+(2,1)+\ldots\big]\mathrm{F}'' + [2,0]\mathrm{F} + [2,1]\mathrm{F}' + \ldots = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces équations, en y changeant, si l'on veut, les lettres F en A, sont les mêmes que celles du n° 51; d'où il suit que les quantités A, A', ... et a seront aussi les mêmes de part et d'autre. Et, comme les équations différentielles de ξ et ψ sont linéaires, il est clair que l'expression de ξ sera composée d'autant de termes semblables que la quantité a aura de valeurs différentes; par conséquent cette expression sera de la même forme absolument que celle que nous avons trouvée plus haut dans le n° 52, en mettant dans celle-ci, au lieu de q, sa valeur $p+\psi$, et négligeant la quantité ψ, parce qu'elle produirait des termes du second ordre que nous rejetons; ce qui montre l'accord des deux méthodes à cet égard.

56. Pour faire voir aussi cet accord relativement aux expressions de ζ, je commence par substituer, dans l'équation différentielle de z (2),

$r\zeta$ à la place de z, ce qui la transforme en

$$\frac{rd^2\zeta + 2dr\,d\zeta + \zeta d^2r}{dt^2} + \frac{gr\zeta}{\rho^3} + \mathrm{Z} = 0,$$

et, mettant pour $\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{gr}{\rho^3}$ sa valeur $\frac{r\,dq^2}{dt^2} - \frac{d\Omega}{dr}$ tirée de l'équation de r (53), on aura, après avoir divisé par r, cette équation de ζ

$$\frac{d^2\zeta + \zeta dq^2}{dt^2} + \frac{2dr\,d\zeta}{r\,dt^2} + \frac{\mathrm{Z}}{r} - \frac{\zeta}{r}\frac{d\Omega}{dr} = 0.$$

On fera maintenant ici les substitutions de $r(1+\xi)$ et $p+\psi$ à la place de r et q, et ainsi des quantités analogues, comme on en a usé plus haut (53); et comme on suppose les orbites non-seulement peu excentriques, mais encore peu inclinées, on regardera les quantités ξ, ψ, ζ et leurs analogues comme très-petites du même ordre, et l'on en négligera toutes les dimensions plus hautes que la première. On aura donc de cette manière la réduite

$$\frac{d^2\zeta + \zeta dp^2}{dt^2} + \frac{\mathrm{Z}}{r} - \frac{\zeta}{r}\frac{d\Omega}{dr} = 0,$$

où, à cause que tous les termes de la valeur de Z (15) sont déjà multipliés par les quantités très-petites z, z', ..., il suffira de mettre partout, tant dans Z que dans Ω, p à la place de q, et d'y regarder en même temps r comme constante.

Maintenant, puisqu'en faisant abstraction des forces perturbatrices on avait

$$\frac{d^2\zeta + \zeta dp^2}{dt^2} = 0,$$

ce qui donne

$$\zeta = \mathrm{F}\sin(p-\alpha),$$

on supposera, en général, à l'imitation de ce que nous avons fait plus haut,

$$\zeta = \mathrm{F}\sin(p - at - \alpha),$$

et de même

$$\zeta' = \mathrm{F}'\sin(p' - at - \alpha),$$
$$\zeta'' = \mathrm{F}''\sin(p'' - at - \alpha),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et, après avoir fait ces substitutions, on égalera à zéro la somme des coefficients de $\sin(p-at-\alpha)$; c'est pourquoi il suffira d'avoir égard dans l'équation ci-dessus aux termes qui peuvent donner de ces sinus, et qui se réduisent évidemment à ceux qui contiendront ζ seul, ou ζ' multiplié par $\cos(p-p')$, ou ζ'' multiplié par $\cos(p-p'')$, et ainsi de suite.

Ainsi l'on aura, d'après les formules des n^{os} 15, 39, 43,

$$\begin{aligned}0 = {}& \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \zeta\frac{dp^2}{dt^2}\\ &+ \mathrm{T}'\left[(r,r')\zeta - \frac{r'(r,r')_1\cos(p-p')}{r}\zeta' + \frac{1}{r}\frac{d\Lambda'}{dr}\zeta\right]\\ &+ \mathrm{T}''\left[(r,r'')\zeta - \frac{r''(r,r'')_1\cos(p-p'')}{r}\zeta'' + \frac{1}{r}\frac{d\Lambda''}{dr}\zeta\right]\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

équation qui, en faisant les substitutions indiquées, donnera sur-le-champ celle-ci

$$\begin{aligned}0 = {}& -\left(\frac{dp}{dt}-a\right)^2\mathrm{F} + \frac{dp^2}{dt^2}\mathrm{F}\\ &+ \mathrm{T}'\left[(r,r')\mathrm{F} - \frac{r'(r,r')_1}{2r}\mathrm{F}' + \frac{1}{r}\frac{d\Lambda'}{dr}\mathrm{F}\right]\\ &+ \mathrm{T}''\left[(r,r'')\mathrm{F} - \frac{r''(r,r'')_1}{2r}\mathrm{F}'' + \frac{1}{r}\frac{d\Lambda''}{dr}\mathrm{F}\right]\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

laquelle, en négligeant le carré de a, parce que a est, comme on voit, de l'ordre de T', T'',..., et substituant pour $\frac{d\Lambda'}{dr}$, $\frac{d\Lambda''}{dr}$,... leurs valeurs (45)

$$-r(r,r') + \frac{1}{2}r'(r,r')_1, \quad -r(r,r'') + \frac{1}{2}r''(r,r'')_1, \ldots,$$

se réduit à cette forme

$$2a\frac{dp}{dt}\mathrm{F} + \mathrm{T}'\frac{r'(r,r')_1}{2r}(\mathrm{F}-\mathrm{F}') + \mathrm{T}''\frac{r''(r,r'')_1}{2r}(\mathrm{F}-\mathrm{F}'') + \ldots = 0.$$

Or (40)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{\sqrt{r^3}},$$

et

$$\frac{\mathrm{T}'rr'(r,r')_1}{4\sqrt{r}} = (0,1), \quad \frac{\mathrm{T}''rr''(r,r'')_1}{4\sqrt{r}} = (0,2), \ldots;$$

donc enfin on aura

$$a\mathrm{F} + (0,1)(\mathrm{F}-\mathrm{F}') + (0,2)(\mathrm{F}-\mathrm{F}'') + \ldots = 0,$$

et l'on trouvera de la même manière, d'après les équations de ζ', ζ'',....

$$\begin{aligned}&a\mathrm{F}' + (1,0)(\mathrm{F}'-\mathrm{F}) + (1,2)(\mathrm{F}'-\mathrm{F}'') + \ldots = 0,\\ &a\mathrm{F}'' + (2,0)(\mathrm{F}''-\mathrm{F}) + (2,1)(\mathrm{F}''-\mathrm{F}') + \ldots = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Ces équations s'accordent, comme on voit (en changeant F en Λ), avec celles que donnent les intégrales des équations de s, u, s', u',... (51); ainsi l'on aura pour ζ une expression conforme à celle du n^o 52, en négligeant la différence ψ entre les angles p et q, laquelle ne produirait ici que des termes du second ordre dont on ne tient point compte.

57. Cette manière de résoudre le Problème des variations séculaires par l'intégration immédiate des équations différentielles de l'orbite, est, comme on voit, plus courte et plus facile que celle que nous avons suivie; mais d'un autre côté elle ne paraît pas tout à fait si lumineuse ni si directe : d'ailleurs elle demande qu'on connaisse déjà la forme générale des intégrales, et si l'on voulait chercher directement cette forme, ainsi que nous l'avons fait dans le Chapitre IV des *Recherches sur les Satellites de Jupiter*, on retomberait dans une analyse plus ou moins longue et compliquée.

THÉORIE
DES VARIATIONS SÉCULAIRES
DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES.

SECONDE PARTIE
CONTENANT LA DÉTERMINATION DE CES VARIATIONS
POUR CHACUNE DES PLANÈTES PRINCIPALES.

THÉORIE
DES VARIATIONS SÉCULAIRES
DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES.

SECONDE PARTIE
CONTENANT LA DÉTERMINATION DE CES VARIATIONS POUR CHACUNE DES PLANÈTES PRINCIPALES.

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1782.)

Newton avait démontré que les inégalités elliptiques du mouvement des Planètes sont l'effet de leur gravitation vers le Soleil, et il avait indiqué en même temps leur attraction mutuelle comme la cause de toutes les irrégularités qu'on y pourrait observer. Ses successeurs, Euler, Clairaut, d'Alembert, ont recherché et calculé les altérations des mouvements elliptiques, dues à cette attraction. Il restait à déterminer les changements qu'elle produit dans les éléments mêmes des ellipses, et qui influent sur la forme du système planétaire. C'est l'objet qui nous occupe, et que nous nous sommes proposé de remplir dans toute son étendue.

On ne compte encore que deux siècles d'observations exactes; et il en faudrait une suite très-longue pour démêler et fixer *à posteriori* les petites inégalités qui altèrent insensiblement les dimensions et la position

des orbites des Planètes. Cependant l'accord qui s'est déjà trouvé dans les principaux phénomènes célestes, entre les observations et la Théorie fondée sur le système de la gravitation universelle, autorise à penser que le même accord aura lieu aussi dans les autres phénomènes moins sensibles, et à profiter par conséquent des secours que cette Théorie offre pour prédire les variations que les éléments des Planètes doivent éprouver à la longue, et qui empêchent que les Tables actuelles, quelque exactes qu'on les suppose, ne puissent servir avec la même précision pour des temps fort éloignés. Par cette raison, après avoir donné les formules les plus générales et les plus simples pour déterminer ces variations, j'ai cru devoir donner aussi une application détaillée de ces formules à chacune des Planètes principales, afin de mettre les Astronomes à portée d'en faire usage dans la construction des Tables et dans la comparaison des observations anciennes avec les modernes. C'est le but de cette seconde Partie de mon travail, dans laquelle j'aurai soin de donner aux résultats numériques toute l'exactitude possible et la forme la plus commode pour le calcul astronomique.

SECTION PREMIÈRE.

APPLICATION DES FORMULES DIFFÉRENTIELLES DES VARIATIONS SÉCULAIRES AUX ORBITES DES PLANÈTES PRINCIPALES.

1. Cette application n'aurait d'autre difficulté que la longueur des calculs arithmétiques, si les *données* astronomiques qu'elle demande étaient toutes bien connues et déterminées avec une précision suffisante. Ces données sont : 1° les distances moyennes des Planètes au Soleil, exprimées en parties de la distance moyenne du Soleil à la Terre; 2° les rapports des masses des Planètes à celle du Soleil, ou la valeur de leurs masses, en prenant celle du Soleil pour l'unité; 3° les excentricités et les inclinaisons des orbites, ainsi que les lieux des aphélies et des nœuds pour une époque donnée. Les données de la première et de la seconde

espèce entrent dans les équations différentielles mêmes, et sont par conséquent la base de tout le calcul; les autres ne sont nécessaires que pour déterminer les constantes arbitraires des intégrales, et ce n'est qu'après l'intégration qu'on en a besoin.

Or, de ces différentes données, il n'y a guère que les premières et les dernières sur l'exactitude desquelles on puisse compter jusqu'à un certain point. Nous les prendrons dans les Tables de Halley, qui sont les plus généralement suivies pour les Planètes; d'ailleurs elles sont à peu près les mêmes dans les autres Tables; et si elles ont encore besoin de quelque correction, ce ne sera qu'après une longue suite d'observations qu'on sera en état de leur donner toute la précision dont elles sont susceptibles.

A l'égard des masses des Planètes, on sait qu'il n'y a de connues que celles de la Terre, de Jupiter et de Saturne, parce que ces Planètes sont les seules qui aient des satellites; mais la détermination de ces masses dépend d'éléments trop délicats pour qu'il n'y reste pas encore beaucoup d'incertitude; aussi les trouve-t-on déterminées différemment dans divers Ouvrages, et nous aurons soin de les déterminer de nouveau d'après les éléments qui paraîtront les plus sûrs. Quant aux masses des autres Planètes, nous les conclurons d'abord, par une espèce d'analogie, de leurs volumes et de leurs densités; mais nous donnerons ensuite le moyen de rectifier les unes et les autres par la comparaison de notre Théorie avec les observations.

2. Pour mettre dans nos calculs le plus de liaison et de netteté qu'il est possible, nous conserverons les noms employés jusqu'ici; mais, comme nous avons représenté les mêmes quantités relativement aux différentes Planètes par les mêmes lettres, sans trait, ou marquées d'un, deux,... traits, nous supposerons désormais que toutes les lettres qui n'ont point de trait se rapportent à Saturne, que celles qui n'ont qu'un trait se rapportent à Jupiter, que celles qui en ont deux se rapportent à Mars, et ainsi de suite à la Terre, à Vénus, à Mercure, en suivant l'ordre contraire des distances au Soleil.

Ainsi r sera la distance moyenne de Saturne au Soleil, T sa masse, ou plutôt le rapport de cette masse à celle du Soleil, λ son excentricité en parties de sa distance moyenne, φ la longitude de son aphélie, comptée depuis un point fixe dans le ciel, θ la tangente de l'inclinaison de son orbite sur l'écliptique regardée comme un plan fixe, et ω la longitude de son nœud ascendant sur ce même plan. Ces mêmes lettres marquées d'un trait représenteront les mêmes quantités pour Jupiter, et ainsi de suite.

On aura donc à considérer six orbites mobiles et variables en même temps, et par conséquent on aura à résoudre deux systèmes d'équations semblables à celles des nos 40 et 50 de la première Partie, et qui dans chaque système seront au nombre de douze et contiendront trente coefficients différents qu'il faudra calculer numériquement. Ces coefficients, suivant la notation des mêmes numéros, seront représentés par les symboles (m, n) et $[m, n]$, en prenant pour m et n deux termes quelconques de la série 0, 1, 2, 3, 4, 5; et voici la suite des opérations qu'il faudra faire pour en trouver les valeurs.

3. Soient, en général,

$$M = 1 + \alpha^2 z^2 + \beta^2 z^4 + \gamma^2 z^6 + \delta^2 z^8 + \ldots,$$
$$N = \alpha z - \alpha\beta z^3 - \beta\gamma z^5 - \gamma\delta z^7 - \ldots,$$

en désignant par α, β, γ, δ,... les coefficients de la série qui exprime la racine carrée d'un binôme, c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}, \quad \gamma = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}, \quad \delta = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{5}{8}, \ldots.$$

On calculera les valeurs de M et N, en faisant successivement

$$z = \frac{r'}{r}, \ \frac{r''}{r}, \ldots, \ \frac{r''}{r'}, \ \frac{r'''}{r'}, \ldots,$$

et ainsi de suite, suivant toutes les combinaisons des six distances moyennes

$$r, r', r'', r''', r^{IV}, r^{V}$$

prises deux à deux, de manière que la plus grande soit toujours au dénominateur et la plus petite au numérateur; le nombre de ces combinaisons monte à quinze, de sorte que les valeurs qu'il faudra déterminer de cette manière seront au nombre de trente.

Soient ensuite

$$P = \frac{\frac{3}{2} z N}{(1 - z^2)^2}, \quad Q = \frac{3(1 + z^2) N - \frac{3}{2} z M}{(1 - z^2)^3}.$$

On calculera de même les valeurs de P et Q qui répondent aux quinze valeurs de z ci-dessus.

On aura alors

$$(0, 1) = \frac{P}{\sqrt{r^3}} T', \quad [0, 1] = \frac{Q}{\sqrt{r^3}} T', \quad z \text{ étant } = \frac{r'}{r};$$
$$(0, 2) = \frac{P}{\sqrt{r^3}} T'', \quad [0, 2] = \frac{Q}{\sqrt{r^3}} T'', \quad z \text{ étant } = \frac{r''}{r};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$(1, 2) = \frac{P}{\sqrt{r'^3}} T'', \quad [1, 2] = \frac{Q}{\sqrt{r'^3}} T'', \quad z \text{ étant } = \frac{r''}{r'};$$
$$(1, 3) = \frac{P}{\sqrt{r'^3}} T''', \quad [1, 3] = \frac{Q}{\sqrt{r'^3}} T''', \quad z \text{ étant } = \frac{r'''}{r'};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ainsi de suite pour toutes les quantités où des deux nombres renfermés entre les crochets le premier est moindre que le second.

Quant à celles où le premier des deux nombres renfermés entre des crochets est plus grand que le second, il suffit de remarquer que, comme dans les fonctions (r, r'), $(r, r')_1$,..., les quantités r, r',... sont permutables (46), si dans les expressions des quantités dont il s'agit on échange entre elles les lettres r, r', r'',..., il viendra

$$(1, 0) = (0, 1)\sqrt{\frac{r}{r'}}\frac{T}{T'}, \quad (2, 0) = (0, 2)\sqrt{\frac{r}{r''}}\frac{T}{T''}, \ldots,$$

et de même

$$[1, 0] = [0, 1]\sqrt{\frac{r}{r'}}\frac{T}{T'}, \quad [2, 0] = [0, 2]\sqrt{\frac{r}{r''}}\frac{T}{T''}, \ldots,$$

et ainsi de suite; de sorte qu'on aura, en général,

$$(n, m) = \frac{(m, n)}{\sqrt{z}}\,\frac{T^{(m)}}{T^{(n)}}, \quad [n, m] = \frac{[m, n]}{\sqrt{z}}\,\frac{T^{(m)}}{T^{(n)}},$$

z étant $= \frac{r^{(m)}}{r^{(n)}}$, où les lettres m, n en exposant représentent des traits et non des puissances.

4. Les Tables de Halley nous donnent les valeurs suivantes des distances moyennes r, r', r'', r''', r^{IV}, r^{V},

r	$= 9{,}54007,$	log. $0{,}9795515,$
r'	$= 5{,}20098,$	$0{,}7160852,$
r''	$= 1{,}52369,$	$0{,}1828966,$
r'''	$= 1{,}00000,$	$0{,}0000000,$
r^{IV}	$= 0{,}72333,$	$9{,}8593365,$
r^{V}	$= 0{,}38710,$	$9{,}5878232.$

Par le moyen de ces valeurs on a calculé celles des quantités M et N pour les quinze valeurs de z, en poussant l'exactitude jusqu'à six décimales; on a cherché ensuite les valeurs correspondantes des quantités P et Q, et enfin celles des quantités représentées par des crochets ronds et carrés. On a trouvé ainsi les valeurs suivantes, sur l'exactitude desquelles on peut compter.

Pour $z = \frac{r'}{r} = 0{,}545172$:

$M = 1{,}075800,$	$N = 0{,}262042,$
$P = 0{,}433858,$	$Q = 0{,}283512,$
$(0, 1) = 0{,}014724\,T'$	$[0, 1] = 0{,}009622\,T'$
$8{,}1680204,$	$7{,}9832443,$
$(1, 0) = 0{,}019941\,T$	$[1, 0] = 0{,}013031\,T$
$8{,}2997537,$	$8{,}1149776.$

Pour $z = \frac{r''}{r} = 0{,}159715$:

$M = 1{,}006387,$	$N = 0{,}079602,$
$P = 0{,}020082,$	$Q = 0{,}003964,$
$(0, 2) = 0{,}000682\,T''$	$[0, 2] = 0{,}000135\,T''$
$6{,}8334798,$	$6{,}1288064,$
$(2, 0) = 0{,}001705\,T$	$[2, 0] = 0{,}000337\,T$
$7{,}2318070,$	$6{,}5271336.$

Pour $z = \frac{r'''}{r} = 0{,}104821$:

$M = 1{,}002749,$	$N = 0{,}052338,$
$P = 0{,}008412,$	$Q = 0{,}001099,$
$(0, 3) = 0{,}000285\,T'''$	$[0, 3] = 0{,}000037\,T'''$
$6{,}4555721,$	$5{,}5716705,$
$(3, 0) = 0{,}000882\,T$	$[3, 0] = 0{,}000115\,T$
$6{,}9453479,$	$6{,}0614463.$

Pour $z = \frac{r^{IV}}{r} = 0{,}075820$:

$M = 1{,}001437,$	$N = 0{,}037883,$
$P = 0{,}004359,$	$Q = 0{,}000412,$
$(0, 4) = 0{,}000148\,T^{IV}$	$[0, 4] = 0{,}000014\,T^{IV}$
$6{,}1700597,$	$5{,}1455700,$
$(4, 0) = 0{,}000537\,T$	$[4, 0] = 0{,}000051\,T$
$6{,}7301678,$	$5{,}7056781.$

Pour $z = \frac{r^{V}}{r} = 0{,}040576$:

$M = 1{,}000411,$	$N = 0{,}020284,$
$P = 0{,}001239,$	$Q = 0{,}000063,$
$(0, 5) = 0{,}000042\,T^{V}$	$[0, 5] = 0{,}000002\,T^{V}$
$5{,}6237441,$	$4{,}3300133,$
$(5, 0) = 0{,}000209\,T$	$[5, 0] = 0{,}000011\,T$
$6{,}3196095,$	$5{,}0258787.$

Pour $z = \frac{r''}{r} = 0,292962$:

$M = 1,621574$, $N = 0,144893$,
$P = 0,076189$, $Q = 0,027598$,
$(1,2) = 0,006423T''$ $[1,2] = 0,002327T''$
$7,8077645$, $7,3667498$,
$(2,1) = 0,011867T'$ $[2,1] = 0,004299T'$
$8,0743589$. $7,6333442$.

Pour $z = \frac{r'''}{r'} = 0,192271$:

$M = 1,009263$, $N = 0,095689$,
$P = 0,029757$, $Q = 0,007116$,
$(1,3) = 0,002509T'''$ $[1,3] = 0,000600T'''$
$7,3994613$, $6,7781081$,
$(3,1) = 0,005721T'$ $[3,1] = 0,001368T'$
$7,7575044$, $7,1361512$.

Pour $z = \frac{r^{IV}}{r'} = 0,139076$:

$M = 1,004841$, $N = 0,069370$,
$P = 0,015048$, $Q = 0,002611$,
$(1,4) = 0,001269T^{IV}$ $[1,4] = 0,000220T^{IV}$
$7,1033510$, $6,3426791$,
$(4,1) = 0,003402T^{v}$ $[4,1] = 0,000590T'$
$7,5317249$. $6,7710530$.

Pour $z = \frac{r^{v}}{r'} = 0,074428$:

$M = 1,001385$, $N = 0,037188$,
$P = 0,004198$, $Q = 0,000390$,
$(1,5) = 0,000354T^{v}$ $[1,5] = 0,000033T^{v}$
$6,5489146$, $5,5169368$,
$(5,1) = 0,001297T'$ $[5,1] = 0,000121T^{v}$
$7,1130465$, $6,0810687$.

Pour $z = \frac{r'''}{r''} = 0,656301$:

$M = 1,110961$, $N = 0,309374$,
$P = 0,939816$, $Q = 0,722709$,
$(2,3) = 0,499687T'''$ $[2,3] = 0,384256T'''$
$9,6986980$, $9,5846187$,
$(3,2) = 0,616803T''$ $[3,2] = 0,474315T''$
$9,7901465$, $9,6760672$.

Pour $z = \frac{r^{IV}}{r'''} = 0,474723$:

$M = 1,057182$, $N = 0,230473$,
$P = 0,273498$, $Q = 0,157378$,
$(2,4) = 0,145415T^{IV}$ $[2,4] = 0,083675T^{IV}$
$9,1626092$, $8,9225991$,
$(4,2) = 0,211052T''$ $[4,2] = 0,121445T''$
$9,3243891$, $9,0843790$.

Pour $z = \frac{r^{v}}{r''} = 0,254054$:

$M = 1,016565$, $N = 0,125947$,
$P = 0,053451$, $Q = 0,016523$,
$(2,5) = 0,028420T^{v}$ $[2,5] = 0,008785T^{v}$
$8,4536109$, $7,9437440$,
$(5,2) = 0,056383T''$ $[5,2] = 0,017429T''$
$8,7511479$, $8,2412810$.

Pour $z = \frac{r^{VI}}{r'''} = 0,723330$:

$M = 1,135763$, $N = 0,336131$,
$P = 1,604256$, $Q = 1,335909$,
$(3,4) = 1,604256T^{IV}$ $[3,4] = 1,335909T^{IV}$
$0,2052730$, $0,1257768$,
$(4,3) = 1,886275T'''$ $[4,3] = 1,570756T'''$
$0,2756048$, $0,1961086$.

Pour $z = \frac{r^{v}}{r^{iv}} = 0,38710$:

$$M = 1,037828, \qquad N = 0,189854,$$
$$P = 0,152524, \qquad Q = 0,072352,$$
$$(3,5) = 0,152524\,T^{v} \qquad [3,5] = 0,072352\,T^{v}$$
$$9,1833382, \qquad 8,8594505,$$
$$(5,3) = 0,245147\,T^{iv} \qquad [5,3] = 0,116289\,T^{iv}$$
$$9,3894266, \qquad 9,0655389.$$

Pour $z = \frac{r^{v}}{r^{vi}} = 0,535164$:

$$M = 1,072986, \qquad N = 0,257625,$$
$$P = 0,406122, \qquad Q = 0,260961,$$
$$(4,5) = 0,660164\,T^{v} \qquad [4,5] = 0,424200\,T^{v}$$
$$9,8196518, \qquad 9,6275709,$$
$$(5,4) = 0,902419\,T^{iv} \qquad [5,4] = 0,579866\,T^{iv}$$
$$9,9554084, \qquad 9,7633275.$$

Les nombres placés sous les valeurs des quantités marquées par des crochets sont les logarithmes des coefficients numériques qui se trouvent au-dessus; j'ai cru devoir donner aussi ces logarithmes, non-seulement pour servir de confirmation aux nombres qui leur répondent, mais encore parce qu'étant plus exacts que ces nombres, ils pourraient servir, s'il était nécessaire, à pousser la précision plus loin.

5. Il reste encore à déterminer les valeurs des six quantités T, T', T'', ..., T^{v}, c'est-à-dire des rapports des masses, ou forces attractives absolues des Planètes principales, à celle du Soleil; mais cette détermination est sujette à beaucoup de difficultés. D'abord il n'y a que trois Planètes, Saturne, Jupiter et la Terre, pour lesquelles on ait les données qu'elle demande, parce que ce sont les seules qui aient des satellites: encore ces données sont-elles peu sûres. A l'égard des autres Planètes, on n'en peut connaître par observation que le volume; et, pour en déduire la masse, il faut ensuite adopter quelque hypothèse sur la densité, ce qui rend les résultats douteux et précaires. Cet objet mérite donc une discussion particulière; elle est même d'autant plus nécessaire qu'on trouve dans plusieurs Ouvrages des valeurs assez différentes des masses des Planètes et de leurs densités, sans que les Auteurs y aient donné les détails convenables pour justifier ces différences.

On sait par les Théorèmes de Newton que la force attractive absolue d'un corps, autour duquel un autre corps décrit une ellipse quelconque, est en raison directe du cube de la distance moyenne et inverse du carré du temps périodique; et cette Proposition, que Newton a démontrée pour les corps qui décrivent des ellipses invariables, est vraie aussi lorsqu'on a égard aux variations séculaires des éléments. Car nous avons vu dans la première Partie (34) que dans ce cas la vitesse de la longitude moyenne est toujours représentée par $\frac{\Delta^{\frac{3}{2}}}{g}$, et la distance moyenne par $\frac{g}{\Delta}$, g étant la force attractive absolue du centre, c'est-à-dire la force centrale à la distance 1; ainsi, en nommant r la distance moyenne et m la vitesse du mouvement moyen, on a

$$\Delta = \frac{g}{r}, \quad \frac{\sqrt{g}}{r^{\frac{3}{2}}} = m;$$

donc

$$g = m^{2} r^{3};$$

mais il est évident que la vitesse m est toujours réciproquement proportionnelle au temps périodique; par conséquent, si l'on nomme t ce temps, on aura, en général,

$$g = \frac{r^{3}}{t^{2}}.$$

Soient maintenant S la masse du Soleil, P celle d'une Planète principale, r la distance moyenne de cette Planète au Soleil, et t son temps périodique; soient de plus ρ la distance moyenne d'un satellite de la même Planète à cette Planète, et ϑ son temps périodique. Les forces attractives

absolues étant proportionnelles aux masses ou quantités de matière, on aura

$$S = \frac{r^3}{t^2},$$

et par la même raison

$$P = \frac{\rho^3}{\theta^2};$$

donc

$$\frac{P}{S} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^3 \left(\frac{t}{\theta}\right)^2.$$

Soit de plus D la densité de la Planète P, et d son demi-diamètre: comme les volumes des sphères sont en raison triplée des rayons, on aura d^3 proportionnelle au volume de la planète P; donc D sera proportionnelle à $\left(\frac{\rho}{d}\right)^3 \frac{1}{\theta^2}$.

Appliquons ces formules aux Planètes.

6. Pour la Terre on a

$$t = \text{année sidérale} = 365^j\, 6^h\, 9^m\, 15^s$$

suivant la Caille, et

$$\theta = \text{mois périodique} = 27^j\, 7^h\, 43^m\, 12^s$$

suivant Mayer. Réduisant en décimales de jour, on a donc

$$t = 365^j,2563g, \quad \theta = 27^j,321675,$$

et de là on trouve

$$\log\left(\frac{t}{\theta}\right) = 1,1260907.$$

Ces valeurs ne sont sujettes à aucune incertitude; par conséquent les résultats ne sauraient pécher de ce côté-là.

Soit p la parallaxe horizontale du Soleil et ϖ celle de la Lune; on aura, comme on sait,

$$\frac{d}{r} = \sin p, \quad \frac{d}{\rho} = \sin\varpi,$$

pourvu qu'on prenne pour ϖ la parallaxe qui répond à la distance moyenne de la Lune à la Terre. Or, comme il ne s'agit ici que de comparer les effets de la force attractive du Soleil sur la Terre et de la force attractive de la Terre sur la Lune, il est clair qu'il ne faut considérer que le simple mouvement elliptique de la Lune, qui dépend uniquement de cette dernière force, et faire abstraction de toutes les inégalités dues à l'action du Soleil. Ainsi, dans les Tables de la parallaxe de la Lune, on ne considérera que celle qui a pour argument l'anomalie de la Lune; et voici comment on déterminera la parallaxe ϖ.

Soient ρ' et ρ'' les distances qui répondent à zéro et à 180 degrés d'anomalie, et ϖ', ϖ'' les parallaxes correspondantes; on aura, par les propriétés connues des orbites elliptiques,

$$\rho = \frac{\rho' + \rho''}{2};$$

d'ailleurs

$$\frac{d}{\rho'} = \sin\varpi', \quad \frac{d}{\rho''} = \sin\varpi'';$$

donc

$$\frac{\rho' + \rho''}{2} = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{\sin\varpi'} + \frac{1}{\sin\varpi''}\right) = \frac{d}{2}\,\frac{\sin\varpi'' + \sin\varpi'}{\sin\varpi'\sin\varpi''} = d\,\frac{\sin\frac{\varpi' + \varpi''}{2}\cos\frac{\varpi'' - \varpi'}{2}}{\sin\varpi'\sin\varpi''}.$$

Donc

$$\frac{d}{\rho} = \frac{\sin\varpi'\sin\varpi''}{\sin\frac{\varpi' + \varpi''}{2}\cos\frac{\varpi'' - \varpi'}{2}} = \sin\varpi.$$

La Table XI de Mayer pour la parallaxe de la Lune donne

$$\varpi' = 54'\,13'', \quad \varpi'' = 60'\,29'';$$

de là on trouve

$$\log\sin\varpi = 8,2209410, \quad \text{et} \quad \varpi = 57'\,10'',3;$$

c'est la parallaxe sous l'équateur. Pour la réduire à la latitude moyenne de 45 degrés, il en faut retrancher $7''\frac{1}{2}$. Ainsi l'on aura en nombres ronds

$$\varpi = 57'\,3''.$$

A l'égard de la parallaxe du Soleil, les Astronomes ne sont pas encore bien décidés sur sa quantité, les uns la faisant de $8''{,}5$, les autres de $8''{,}6$; nous supposerons donc successivement

$$p = 8''{,}5 \quad \text{et} \quad = 8''{,}6.$$

On aura d'abord

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\sin 8''{,}5}{\sin 57'\,3''},$$

dont le logarithme est égal à $7{,}3950320$; donc le logarithme de $\left(\frac{\rho}{r}\right)^3 \left(\frac{t}{\theta}\right)^2$ sera $4{,}4372774$, auquel répond la fraction $\frac{1}{365361}$. C'est la valeur de la masse de la Terre, exprimée en parties de celle du Soleil, c'est-à-dire de la quantité T''. Ainsi, en supposant la parallaxe du Soleil de $8''\frac{1}{2}$, on a

$$\log T'' = 4{,}4372774, \quad T'' = \frac{1}{365361}.$$

Si l'on fait cette parallaxe de $8''{,}6$, la valeur de T'' se trouve augmentée dans la raison de 1 à $\left(\frac{86}{85}\right)^3$, et l'on aura alors

$$\log T'' = 4{,}4487158, \quad T'' = \frac{1}{355864}.$$

Dans la suite nous nous en tiendrons simplement à la première de ces valeurs de T''.

7. Évaluons maintenant la quantité D d'après la formule

$$D = \left(\frac{\rho}{d}\right)^3 \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2 \sin^3 \varpi};$$

en employant les mêmes éléments que ci-dessus, on trouve

$$\log D = 2{,}4671004.$$

Cette valeur est, comme on voit, indépendante de la parallaxe du Soleil, et étant comparée avec les valeurs de D pour les autres Planètes, elle donnera les rapports de leurs densités à celle de la Terre.

8. Pour Jupiter, on a suivant Halley

$$t = 4332^j\,8^h\,28^m\,1'',$$

et, réduisant en décimales de jour,

$$t = 4332^j{,}35279.$$

A l'égard de la valeur de θ, nous prendrons celle qui convient au quatrième satellite, dont la révolution périodique et la distance étant plus grandes que celles des autres satellites sont aussi plus faciles à déterminer exactement; et nous aurons d'après les déterminations de M. Wargentin

$$\theta = 16^j\,16^h\,32^m\,8^s = 16^j{,}68898.$$

De là on trouvera

$$\log \frac{t}{\theta} = 2{,}4142939,$$

valeur qui peut être regardée comme aussi exacte que la valeur analogue trouvée pour la Terre.

On ne peut pas s'attendre à un pareil degré d'exactitude relativement à la valeur de $\frac{\rho}{r}$ qui exprime le rapport entre la distance moyenne du satellite à Jupiter, et celle de Jupiter au Soleil. Il est clair que ce rapport est égal au sinus de la plus grande digression du satellite vu du Soleil, à la distance moyenne de Jupiter; et cette digression héliocentrique est toujours facile à conclure de la plus grande digression géocentrique observée dans un temps quelconque. Mais ces sortes d'observations sont très-rares; et je ne connais que celles que Newton rapporte au commencement du troisième Livre des *Principes* (Phén. I) et qu'il dit avoir été faites par Pound avec d'excellents micromètres.

La plus grande élongation héliocentrique du quatrième satellite, réduite à la distance moyenne de Jupiter, a été trouvée par cet Astronome, avec une lunette de 15 pieds, de $8'\,16''$; et celle du troisième satellite, réduite de même, a été trouvée de $4'\,42''$ avec une lunette de 123 pieds. Ces deux observations sont si bien d'accord avec la loi des temps périodiques que l'une confirme l'autre tout à fait. Car la révolution périodique

du troisième satellite étant par les Tables de Wargentin de $7^j 3^h 42^m 33^s$, ou bien en décimales de jour de $7^j,15455$, on a pour le rapport des temps périodiques du quatrième et du troisième le nombre 2,33264, dont le carré est 5,44121; or le rapport de leurs distances à Jupiter est évidemment égal à celui des sinus des élongations $8'16''$ et $4'42''$, lequel se trouve de 1,75886, dont le cube est 5,44123.

Les Cassini avaient sans doute fait beaucoup d'observations sur les satellites de Jupiter; mais on n'en trouve que les résultats dans les *Éléments d'Astronomie;* encore les élongations n'y sont pas déterminées directement, mais par le moyen du diamètre apparent de Jupiter et des distances des satellites évaluées en parties de ce diamètre. La distance du quatrième y est supposée de 25,3 demi-diamètres de Jupiter, et le diamètre apparent de cette Planète, vu du Soleil dans sa moyenne distance, y est de $41''\frac{1}{2}$; ce qui donne $8'45''$ pour la plus grande élongation. Mais la détermination de Pound me paraît plus sûre.

Faisant donc

$$\frac{\rho}{r} = \sin 8'16'',$$

et employant la valeur de $\frac{t}{\theta}$ trouvée ci-dessus, on a

$$\log\left(\frac{\rho}{r}\right)^3 \left(\frac{t}{\theta}\right)^3 = \log T' = 6{,}9717561,$$

et de là

$$T' = \frac{1}{1067{,}195},$$

valeur de la masse de Jupiter en parties de celle du Soleil. Cette valeur s'accorde avec celle que Newton avait trouvée (Livre III, Proposition VIII) et dont tous les Géomètres ont fait usage jusqu'ici.

9. Cherchons maintenant la densité de Jupiter ou plutôt le rapport de cette densité à celle de la Terre. Il faut pour cela évaluer la formule

$$D = \left(\frac{\rho}{d}\right)^3 \frac{1}{\theta^2},$$

où θ a la même valeur que ci-dessus, et où $\frac{\rho}{d}$ exprime la distance du satellite à Jupiter en demi-diamètres de cette Planète. Suivant Cassini cette distance est de 25,3 pour le quatrième satellite. Or Newton rapporte dans l'endroit cité des *Principes*, que le diamètre de Jupiter observé par Pound avec la même lunette de 123 pieds, et réduit à la distance moyenne de Jupiter, s'est toujours trouvé plus petit que $40''$, jamais au-dessous de $38''$, mais le plus souvent de $39''$. Supposons-le donc de $39''$; il est clair qu'en le comparant à la plus grande élongation de $8'16''$ du quatrième satellite, on aura

$$\frac{\rho}{d} = \frac{\sin 8'16''}{\sin 19''\frac{1}{2}} = 25{,}436;$$

valeur qui s'éloigne peu de celle de Cassini, mais que nous adopterons de préférence à celle-ci, comme plus exacte, vu la longueur des lunettes avec lesquelles elle a été trouvée. Nous aurons ainsi

$$\log D = 1{,}7714800,$$

et, retranchant la valeur de logD trouvée pour la Terre (7), il viendra pour le logarithme du rapport cherché

$$9{,}3043796,$$

auquel répond le nombre

$$0{,}20155;$$

c'est la densité de Jupiter, en prenant celle de la Terre pour l'unité.

Au reste Newton préfère déduire le diamètre de Jupiter de l'observation des passages du premier et du troisième satellite sur le disque de Jupiter, et il le conclut de $37''\frac{1}{4}$; mais, outre que cette valeur s'éloigne trop de celles que Cassini et Pound ont trouvées, il est clair que, comme il ne s'agit ici que du rapport du diamètre de Jupiter à la distance du quatrième satellite, il est plus sûr de s'en tenir aux observations immédiates du diamètre apparent et de l'élongation; surtout parce que ces observations ont été faites avec la même lunette, du moins relativement

au troisième satellite, dont l'élongation observée s'accorde d'ailleurs entièrement avec celle du quatrième, d'après la loi des temps périodiques et des distances, ainsi qu'on l'a vu plus haut.

10. Venons à Saturne; nous aurons d'abord par les Tables de Halley

$$t = 10762^{j}\,20^{h}\,33^{m}\,41^{s} = (\text{en décimales de jour})\ 10762^{j},85673;$$

ensuite on aura d'après Cassini pour le quatrième satellite, qui étant le plus gros de tous est aussi le plus facile à observer,

$$\theta = 15^{j}\,22^{h}\,41^{m}\,23^{s} = (\text{en décimales de jour})\ 15^{j},94541.$$

De là on tire

$$\log \frac{t}{\theta} = 2,8292920.$$

Pour ce qui concerne la valeur de $\frac{\rho}{r}$, c'est-à-dire du rapport entre la distance du satellite à Saturne et la distance moyenne de Saturne au Soleil, nous pouvons la déduire des observations de Pound rapportées par Newton (Phén. II). Pound trouva, avec une lunette de 123 pieds armée d'un bon micromètre, la plus grande élongation du quatrième satellite, de 8,7 demi-diamètres de l'anneau, et le diamètre de l'anneau à celui de Saturne comme 7 à 3; il trouva de plus avec la même lunette le diamètre de l'anneau de 43″ les 28 et 29 mai 1719, vieux style. En multipliant 43″ par 8,7, on a 374″ dont la moitié est 187″, ou bien 3′7″; ainsi d'après ces observations la plus grande élongation du quatrième satellite aurait été les mêmes jours de 3′7″. M. de Lalande dit en effet dans son *Astronomie* que Pound avait observé cette élongation le 9 juin 1719 à 10 heures; mais, comme il ne cite point la source d'où il a tiré cette observation de Pound, on pourrait soupçonner qu'il l'a simplement déduite, comme nous venons de le faire, de celles que Newton avait rapportées.

Quoi qu'il en soit, Newton réduit le diamètre observé de l'anneau à 42″ et celui de Saturne à 18″ pour la moyenne distance de Saturne à la Terre; ensuite il réduit encore ce dernier à 16″ à cause de l'irradiation; enfin dans la Proposition VIII, où il calcule les masses de la Terre, de Jupiter

et de Saturne en parties de celle du Soleil, il prend 3′4″ pour la plus grande élongation du quatrième satellite de Saturne, réduite à la moyenne distance de cette Planète; ce qui ne s'accorde pas avec le diamètre apparent de l'anneau supposé de 42″; car, en multipliant 21″ par 8,7, on a 182″,7, c'est-à-dire 3′2″,7 seulement; et l'on trouverait moins encore si l'on avait égard à la correction due à l'irradiation supposée par Newton.

D'ailleurs, en calculant les lieux de Saturne et de la Terre pour le 29 mai 1719, vieux style, c'est-à-dire pour le 9 juin de la même année, on trouve que la distance de Saturne à la Terre était alors à la distance moyenne de Saturne au Soleil dans le rapport de 953 à 1000; par là le diamètre de l'anneau, observé par Pound de 43″, se réduit à 40″,97 pour la distance moyenne de Saturne; et, ce diamètre étant multiplié par la moitié de 8,7, il vient 178″,3, ou 2′58″,3 pour la plus grande élongation du quatrième satellite réduite à la même distance moyenne.

Suivant les déterminations de Bradley rapportées dans l'*Astronomie* de M. de Lalande, la distance de ce satellite est, en demi-diamètres de Saturne, de 20,295, et en demi-diamètres de l'anneau, de 8,698; ainsi, en multipliant 40″,97 par 4,359, on aurait 178″,18, ou bien 2′58″,18 pour la plus grande élongation du même satellite.

Cassini établit, dans ses *Éléments d'Astronomie*, la distance du quatrième satellite de Saturne, en demi-diamètres de l'anneau, de 8 seulement; mais il donne ensuite 45″ au diamètre apparent de l'anneau, ce qui rend la plus grande élongation de 3′. Il y a peut-être lieu de croire que ces éléments sont moins exacts que ceux qui résultent des observations de Pound, d'autant plus que suivant Cassini le diamètre apparent de Saturne est de 20″, ce qui donne le rapport de ce diamètre à celui de l'anneau dans la proportion de 4 à 9, tandis que par les observations de Pound et de Bradley faites avec de très-longues lunettes cette proportion est de 3 à 7.

Nous supposerons cependant par un milieu la plus grande élongation du satellite en question de 2′59″; nous aurons ainsi

$$\frac{\rho}{r} = \sin 2'59'';$$

et, employant la valeur de $\frac{t}{\theta}$ donnée ci-dessus, il viendra

$$\log\left(\frac{\rho}{r}\right)^3\left(\frac{t}{\theta}\right)^2 = \log T = 6,4738674;$$

d'où

$$T = \frac{1}{3358,40},$$

valeur de la masse de Saturne en parties de celle du Soleil.

Si l'on supposait avec Newton

$$\frac{\rho}{r} = \sin 3' 4'',$$

on trouverait

$$\log T = 6,5097618,$$

et par conséquent

$$T = \frac{1}{3091,9},$$

valeur très-peu différente de celle qu'il a donnée dans la Proposition VIII, du Livre III. Mais, d'après la discussion où nous sommes entrés sur la vraie élongation du quatrième satellite de Saturne, on ne peut que regarder cette valeur comme beaucoup trop forte.

Au reste il est surprenant que dans ces derniers temps, où le nombre des Observatoires et des Observateurs s'est si fort accru, et où les instruments optiques ont été portés à une si grande perfection, on n'ait pas cherché à rectifier de nouveau des éléments si essentiels pour la Théorie du système du monde; nous exhortons les Astronomes à réparer cette omission et à déterminer par de nouvelles observations les distances des satellites de Jupiter et de Saturne à leurs Planètes principales avec toute l'exactitude que l'on peut attendre dans l'état actuel de l'Astronomie.

11. Quant à la densité de Saturne, laquelle dépend de la formule

$$D = \left(\frac{\rho}{d}\right)^3 \frac{1}{\theta^2},$$

en prenant pour $\frac{\rho}{d}$ la valeur trouvée par Bradley de 20,295, il vient

$$\log D = 1,5168958;$$

d'où, retranchant la valeur de logD pour la Terre (7), on a

$$9.0497954$$

pour le logarithme du rapport de la densité de Saturne à celle de la Terre; en sorte que la densité de Saturne sera

$$0,11215,$$

celle de la Terre étant prise pour l'unité.

Au reste cette détermination suppose que l'on fasse abstraction de l'attraction de l'anneau sur les satellites, et que la force centrale de ceux-ci soit due uniquement à la masse de Saturne. Si une partie $m^{ième}$ de cette force provenait de l'anneau, alors la valeur que nous venons de trouver pour la densité devrait être diminuée de la $m^{ième}$ partie.

12. A l'égard des masses des autres Planètes qui n'ont point de satellites, il faut, comme nous l'avons dit plus haut, les conclure de leurs volumes combinés avec leurs densités. C'est ainsi que M. Euler en a usé le premier dans ses *Recherches sur les perturbations des Planètes* (*Prix de l'Académie des Sciences de Paris*, tome VIII, page 123). Newton avait trouvé que les densités de la Terre, de Jupiter et de Saturne étaient dans la proportion des nombres 400, 94$\frac{1}{2}$ et 67 (Livre III, Proposition VIII), ou bien en divisant par 400, de ceux-ci : 1, 0,23625, 0,1675. M. Euler a remarqué que ces nombres sont presque comme les racines des mouvements moyens de ces Planètes; en effet, comme les carrés des mouvements moyens sont en raison inverse des cubes des distances moyennes, il s'ensuit que les racines des mouvements moyens seront en raison inverse des puissances $\frac{3}{4}$ de ces mêmes distances; or d'après les valeurs du n° 4 on trouve

$$\frac{1}{r^{\frac{3}{4}}} = 1, \quad \frac{1}{r'^{\frac{3}{4}}} = 0,29036, \quad \frac{1}{r''^{\frac{3}{4}}} = 0,18422;$$

et l'on voit que ces deux derniers nombres ne s'éloignent pas beaucoup de ceux qui expriment, suivant Newton, les densités de Jupiter et de Saturne en parties de celle de la Terre. De là M. Euler a conclu qu'on pouvait supposer que les densités inconnues de Mars, Vénus et Mercure suivent la même loi des racines des mouvements moyens; et c'est d'après cette hypothèse qu'ont été calculées les densités et les masses de ces Planètes qu'on trouve dans la *Connaissance des Temps*, et dont nous avons fait usage dans nos *Recherches sur les équations séculaires des nœuds et des inclinaisons*, quoique d'ailleurs les densités de la Terre, de Jupiter et de Saturne y soient assez différentes de celles de Newton, et s'éloignent considérablement de la loi supposée.

Suivant les déterminations précédentes, les densités de la Terre, de Jupiter et de Saturne sont comme les nombres 1, 0,20155 et 0,11215. Or ces nombres sont à peu près en raison inverse des distances moyennes; car on a

$$\frac{1}{r''} = 1, \quad \frac{1}{r'} = 0{,}19228, \quad \frac{1}{r} = 0{,}10482.$$

Pour Jupiter la différence est moindre qu'un vingtième de la densité; pour Saturne elle est environ d'un quinzième; mais nous avons remarqué que la force attractive de l'anneau doit diminuer la densité de Saturne; ainsi cette considération peut l'approcher davantage de la valeur $\frac{1}{r}$. Dans la *Connaissance des Temps* cette densité est seulement de 0,1045, et par conséquent presque égale à $\frac{1}{r}$; mais, comme j'ignore sur quelles données elle a été calculée, je ne puis savoir quel degré de confiance elle mérite.

Quoi qu'il en soit, s'il y a une loi entre les densités des Planètes et leurs distances au Soleil, on peut regarder celle que nous venons de découvrir et qui fait ces densités réciproquement proportionnelles aux distances, comme la plus plausible par sa simplicité et par son accord avec les densités connues; nous l'adopterons donc aussi pour Mars, Vénus et Mercure, et nous supposerons leurs densités égales respectivement aux

quantités $\frac{1}{r''}$, $\frac{1}{r^{IV}}$, $\frac{1}{r^{V}}$, c'est-à-dire, à

0,65630, 1,38250, 2,58331,

d'après les valeurs du n° 4.

13. Comme ces densités sont exprimées en parties de celle de la Terre, il est clair que si on les multiplie respectivement par les cubes des diamètres exprimés pareillement en parties de celui de la Terre, on aura les masses correspondantes, exprimées aussi en parties de la masse de la Terre; car on sait que les volumes des sphères et de tous les corps semblables sont en raison triplée des côtés homologues. Il ne s'agit donc que d'avoir les diamètres des trois Planètes Mars, Vénus et Mercure; mais le manque d'observations rend de nouveau cette détermination difficile et incertaine.

M. le Monnier rapporte dans les *Institutions astronomiques* que Picard avait observé, le 5 septembre 1672, le diamètre de Mars de 26″; mais que Flamsteed l'avait trouvé à peu près dans le même temps tantôt de 2″, tantôt de 7″ plus grand; ainsi, suivant Flamsteed, ce diamètre aurait été alors par un milieu d'environ 30″; sur quoi M. de Lalande observe dans son *Astronomie* que Picard lui-même dit l'avoir trouvé de 30″ dans le temps de l'opposition qui a eu lieu le 8 septembre 1672. Or la distance de Mars à la Terre était alors de 0,3815 en parties de la distance moyenne de la Terre au Soleil; ainsi le diamètre apparent de Mars vu à cette dernière distance sera de 11″,4; c'est ainsi qu'il se trouve dans la *Connaissance des Temps*. Mais dans les Suppléments à l'*Astronomie*, M. de Lalande réduit ce diamètre à 10″,175 d'après les observations faites par M. l'Abbé Rochon en 1777 avec son nouveau micromètre. Nous le supposerons cependant encore de 11″,4 avec Picard et Flamsteed.

Le passage de Vénus sur le disque du Soleil, arrivé le 6 juin 1761, a fourni aux Astronomes l'occasion de rectifier le diamètre de Vénus, que les observations d'Horroccius avaient donné d'environ 20″ à la distance moyenne du Soleil. M. de Lalande l'a déterminé de 16″,7 à cette même

distance, tant par ses propres observations que par celles que Short avait faites en Angleterre; et il ne paraît pas que les observations du passage de 1769 aient rien changé à cette détermination (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1762, page 260).

Le diamètre de Mercure ayant été mesuré par Bradley en 1723, dans le temps du passage de cette Planète sur le disque du Soleil, avec un micromètre appliqué à un télescope d'Huyghens de 120 pieds, fut trouvé de $10''45'''$ (*Transactions philosophiques*, n° 386). Or le calcul donne pour la distance de Mercure à la Terre à cette époque 0,67657; de sorte que ce diamètre, réduit à la distance moyenne du Soleil, devient $7'',27$. Mais M. de Lalande, dans le passage de 1753, ne l'a trouvé pour cette même distance que de $6''\frac{1}{2}$; et il le fixe en conséquence par une espèce de milieu à $6'',9$. Nous le supposerons en nombres ronds de $7''$, tel qu'il se trouve dans la *Connaissance des Temps*.

14. Les valeurs que nous venons d'assigner aux diamètres de Mars, Vénus et Mercure, réduits à la distance moyenne du Soleil à la Terre, étant maintenant divisés par $17''$, diamètre de la Terre vue du Soleil dans la supposition de la parallaxe de cet astre de $8''\frac{1}{4}$, on a les nombres suivants

0,67059, 0,98235, 0,41176

pour les valeurs de ces diamètres exprimées en parties de celui de la Terre. Les cubes de ces nombres, étant multipliés respectivement par les densités (12)

0,65630, 1,38250, 2,58331,

donneront les masses en parties de celle de la Terre; et ces masses étant ensuite multipliées par $\frac{1}{365361}$, rapport de la masse de la Terre à celle du Soleil, donneront enfin les rapports des masses de Mars, de Vénus et Mercure à celle du Soleil, ou, ce qui revient au même, les masses de ces Planètes exprimées en parties de celle du Soleil, c'est-à-dire, les valeurs des

quantités T'', T^{iv}, T^{v}. D'après ce calcul on trouve

$$\log T'' = 3,7337488, \quad T'' = \frac{1}{1846082},$$

$$\log T^{iv} = 4,5547437, \quad T^{iv} = \frac{1}{278777},$$

$$\log T^{v} = 3,6934015, \quad T^{v} = \frac{1}{2025810}.$$

Et les autres masses seront, comme on les a trouvées ci-dessus,

$$\log T = 6,4738674, \quad T = \frac{1}{3358,40},$$

$$\log T' = 6,9717561, \quad T' = \frac{1}{10677,195},$$

$$\log T''' = 4,4372774, \quad T''' = \frac{1}{365361}.$$

15. Après avoir ainsi déterminé les valeurs des quantités $T, T', \ldots, T^{v}$, il n'y a plus qu'à les substituer dans les expressions des quantités marquées par des crochets ronds et carrés (4); mais avant de faire cette substitution nous remarquerons que, dans les équations différentielles dont ces quantités doivent être les coefficients, la variable t est censée représentée par l'angle du mouvement moyen de la Terre autour du Soleil. Or il est beaucoup plus commode pour le calcul et pour les usages astronomiques d'exprimer le temps en années Juliennes de 365 jours et 6 heures. Soit donc α l'angle que la Terre ou le Soleil parcourt relativement aux étoiles fixes dans l'espace d'une année Julienne, il est clair qu'il n'y a qu'à changer t en αt pour que la quantité t se trouve exprimée en années et en parties d'année. Mettant ainsi αt à la place de t, et par conséquent αdt à la place de dt, dans les équations dont il s'agit, et les multipliant ensuite par α, elles ne recevront d'autre changement, si ce n'est que tous leurs coefficients représentés par des crochets ronds et carrés se trouveront eux-mêmes multipliés par α. D'où il s'ensuit que, pour faire en sorte que le temps t se trouve exprimé en nombres qui représentent des années Juliennes, il suffira de multiplier par α les valeurs de toutes les quantités

marquées par des crochets, ou encore de multiplier simplement par α les valeurs des six quantités T, T′, T″,..., T^{v}, puisque chacune de celles-là est multipliée par une de celles-ci.

Mais il faut déterminer la valeur de α; pour cela je prends dans les Tables de Mayer pour le Soleil le mouvement pour 100 années Juliennes, que je trouve de cent circonférences complètes plus 46′23″, ce qui fait 129602783″; j'en retranche le mouvement séculaire des équinoxes, qui est, suivant les mêmes Tables, de 1°23′50″, ou bien de 5030″; reste 129597753″ pour le mouvement séculaire du Soleil ou de la Terre relativement aux étoiles fixes; d'où l'on a

$$1295977'',53$$

pour le mouvement annuel que nous avons dénoté par α.

Je multiplie donc les valeurs des quantités T, T′, T″,..., T^{v} trouvées dans les numéros précédents par le nombre 1295977″,53; j'ai comme il suit

$\log T = 2,5864648,$	$T = 385'',891,$
$\log T' = 3,0843535,$	$T' = 1214'',376,$
$\log T'' = 9,8463462,$	$T'' = 0'',702,$
$\log T''' = 0,5498748,$	$T''' = 3'',547,$
$\log T^{iv} = 0,6673411,$	$T^{iv} = 4'',649,$
$\log T^{v} = 9,8059989,$	$T^{v} = 0'',640.$

Ce sont les valeurs des masses des six Planètes Saturne, Jupiter, Mars, la Terre, Vénus et Mercure, en supposant la masse du Soleil représentée par l'angle que cet astre décrit dans l'espace d'une année Julienne.

16. On substituera maintenant ces valeurs dans celles des quantités marquées par des crochets (4); mais, comme les masses que nous venons de trouver pourraient encore avoir besoin de quelque correction, surtout celles de Mars, Vénus et Mercure qui n'ont été déterminées qu'hypothétiquement, il sera bon de multiplier auparavant les valeurs précédentes de T, T′, T″, T‴, T^{iv}, T^{v}, par des coefficients indéterminés, m, m', m'', m''', m^{iv}, m^{v}, qui seront par conséquent censés représenter des nombres peu différents de l'unité. On verra dans la Section suivante comment on peut déterminer ces coefficients d'après les observations.

On aura donc comme il suit

$(0,1) = 17'',8804\,m'$	$[0,1] = 11'',6842\,n'$
$1,2523739,$	$1,0675978,$
$(0,2) = 0'',0005\,m''$	$[0,2] = 0'',0001\,m''$
$6,6798260,$	$5,9751526,$
$(0,3) = 0'',0010\,m'''$	$[0,3] = 0'',0001\,m'''$
$7,0054469,$	$6,1215453,$
$(0,4) = 0'',0007\,m^{iv}$	$[0,4] = 0'',0001\,m^{iv}$
$6,8374008,$	$5,8129111,$
$(0,5) = 0'',0000\,m^{v}$	$[0,5] = 0'',0000\,m^{v}$
$5,4297430,$	$4,1360122,$
$(1,0) = 7'',6952\,m$	$[1,0] = 5'',0286\,m$
$0,8862185,$	$0,7014424,$
$(1,2) = 0'',0045\,m''$	$[1,2] = 0'',0016\,m''$
$7,6541107,$	$7,2130960,$
$(1,3) = 0'',0089\,m'''$	$[1,3] = 0'',0021\,m'''$
$7,9493361,$	$7,3279829,$
$(1,4) = 0'',0059\,m^{iv}$	$[1,4] = 0'',0010\,m^{iv}$
$7,7706921,$	$7,0100202,$
$(1,5) = 0'',0002\,m^{v}$	$[1,5] = 0'',0000\,m^{v}$
$6,3549135,$	$5,3229357,$
$(2,0) = 0'',6581\,m$	$[2,0] = 0'',1299\,m$
$9,8182718,$	$9,1135984,$
$(2,1) = 14'',4116\,m'$	$[2,1] = 5'',2203\,m'$
$1,1587124,$	$0,7176977,$
$(2,3) = 1'',7724\,m'''$	$[2,3] = 1'',3630\,m'''$
$0,2485728,$	$0,1344935,$

$(2,4) = 0'',6760\,m^{IV}$	$[2,4] = 0'',3889\,m^{IV}$
$9,8299503,$	$9,5899402,$
$(2,5) = 0'',8182\,m^{V}$	$[2,5] = 0'',0056\,m^{V}$
$8,2596098,$	$7,7497429,$
$(3,0) = 0'',3403\,m$	$[3,0] = 0'',0445\,m$
$9,5318127,$	$8,6479111,$
$(3,1) = 6'',9480\,m'$	$[3,1] = 1'',6615\,m'$
$0,8418589,$	$0,2205047,$
$(3,2) = 0'',4330\,m''$	$[3,2] = 0'',3330\,m''$
$9,6364927,$	$9,5224134,$
$(3,4) = 7'',4579\,m^{IV}$	$[3,4] = 6'',2104\,m^{IV}$
$0,8726141,$	$0,7931179,$
$(3,5) = 0'',0976\,m^{V}$	$[3,5] = 0'',0463\,m^{V}$
$8,9893371,$	$8,6654494,$
$(4,0) = 0'',2073\,m$	$[4,0] = 0'',0196\,m$
$9,3166326,$	$8,2921429,$
$(4,1) = 4'',1312\,m'$	$[4,1] = 0'',7168\,m'$
$0,6160784,$	$9,8554065,$
$(4,2) = 0'',1482\,m''$	$[4,2] = 0'',0853\,m''$
$9,1707353,$	$8,9307252,$
$(4,3) = 6'',6908\,m'''$	$[4,3] = 5'',5716\,m'''$
$0,8254796,$	$0,7459834,$
$(4,5) = 0'',4223\,m^{V}$	$[4,5] = 0'',2714\,m^{V}$
$9,6256507,$	$9,4335698.$
$(5,0) = 0'',0806\,m$	$[5,0] = 0'',0041\,m$
$8,9060743,$	$7,6123435,$

$(5,1) = 1'',5754\,m'$	$[5,1] = 0'',1464\,m'$
$0,1974000,$	$9,1654222,$
$(5,2) = 0'',0396\,m''$	$[5,2] = 0'',0122\,m''$
$8,5974941,$	$8,0876272,$
$(5,3) = 0'',8696\,m'''$	$[5,3] = 0'',4125\,m'''$
$9,9393014,$	$9,6154137,$
$(5,4) = 4'',1952\,m^{IV}$	$[5,4] = 2'',6957\,m^{IV}$
$0,6227495,$	$0,4306686.$

J'ai placé aussi sous les coefficients numériques leurs logarithmes, comme je l'ai déjà fait plus haut (4), et par la même raison. C'est ainsi que j'en userai toujours dans la suite.

17. Voilà donc les valeurs numériques de tous les coefficients des différentes équations différentielles qui doivent servir à déterminer les variations séculaires des aphélies, des excentricités, des nœuds et des inclinaisons des six Planètes principales. Ces équations, au nombre de vingt-quatre, auront la forme que voici.

1° Pour les variations des aphélies et des excentricités, en nommant φ, φ', ... les longitudes des aphélies de Saturne, Jupiter, ..., λ, λ', ... les excentricités de leurs orbites, en parties de leurs moyennes distances au Soleil, et supposant $x = \lambda\sin\varphi$, $y = \lambda\cos\varphi$, $x' = \lambda'\sin\varphi'$, $y' = \lambda'\cos\varphi'$, ...,

$$\frac{dx}{dt} - \Big[(0,1)+(0,2)+(0,3)+(0,4)+(0,5)\Big]y + [0,1]y' + [0,2]y'' + [0,3]y''' + [0,4]y^{IV} + [0,5]y^{V} = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} + \Big[(0,1)+(0,2)+(0,3)+(0,4)+(0,5)\Big]x - [0,1]x' - [0,2]x'' - [0,3]x''' - [0,4]x^{IV} - [0,5]x^{V} = 0;$$

$$\frac{dx'}{dt} - \Big[(1,0)+(1,2)+(1,3)+(1,4)+(1,5)\Big]y' + [1,0]y + [1,2]y'' + [1,3]y''' + [1,4]y^{IV} + [1,5]y^{V} = 0,$$

$$\frac{dy'}{dt} + \Big[(1,0)+(1,2)+(1,3)+(1,4)+(1,5)\Big]x' - [1,0]x - [1,2]x'' - [1,3]x''' - [1,4]x^{IV} - [1,5]x^{V} = 0;$$

$$\frac{dx''}{dt} - \Big[(2,0)+(2,1)+(2,3)+(2,4)+(2,5)\Big]y'' + [2,0]y + [2,1]y' + [2,3]y''' + [2,4]y^{IV} + [2,5]y^{V} = 0,$$

$$\frac{dy''}{dt} + \Big[(2,0)+(2,1)+(2,3)+(2,4)+(2,5)\Big]x'' - [2,0]x - [2,1]x' - [2,3]x''' - [2,4]x^{IV} - [2,5]x^{V} = 0;$$

$$\frac{dx'''}{dt} - \Big[(3,0)+(3,1)+(3,2)+(3,4)+(3,5)\Big]y''' + [3,0]y + [3,1]y' + [3,2]y'' + [3,4]y^{IV} + [3,5]y^{V} = 0,$$

$$\frac{dy'''}{dt} + \Big[(3,0)+(3,1)+(3,2)+(3,4)+(3,5)\Big]x''' - [3,0]x - [3,1]x' - [3,2]x'' - [3,4]x^{IV} - [3,5]x^{V} = 0;$$

$$\frac{dx^{IV}}{dt} - \Big[(4,0)+(4,1)+(4,2)+(4,3)+(4,5)\Big]y^{IV} + [4,0]y + [4,1]y' + [4,2]y'' + [4,3]y''' + [4,5]y^{V} = 0,$$

$$\frac{dy^{IV}}{dt} + \Big[(4,0)+(4,1)+(4,2)+(4,3)+(4,5)\Big]x^{IV} - [4,0]x - [4,1]x' - [4,2]x'' - [4,3]x''' - [4,5]x^{V} = 0;$$

$$\frac{dx^{V}}{dt} - \Big[(5,0)+(5,1)+(5,2)+(5,3)+(5,4)\Big]y^{V} + [5,0]y + [5,1]y' + [5,2]y'' + [5,3]y''' + [5,4]y^{IV} = 0,$$

$$\frac{dy^{V}}{dt} + \Big[(5,0)+(5,1)+(5,2)+(5,3)+(5,4)\Big]x^{V} - [5,0]x - [5,1]x' - [5,2]x'' - [5,3]x''' - [5,4]x^{IV} = 0.$$

2° Pour les variations des nœuds et des inclinaisons, en nommant $\omega, \omega', \ldots$ les longitudes des nœuds ascendants de Saturne, Jupiter, ... $\vartheta, \vartheta', \ldots$ les tangentes des inclinaisons de leurs orbites sur le plan de

l'écliptique supposée fixe, et faisant $s = \vartheta \sin\omega$, $u = \vartheta\cos\omega$, $s' = \vartheta' \sin\omega'$, $u' = \vartheta'\cos\omega', \ldots$,

$$\frac{ds}{dt} + \Big[(0,1)+(0,2)+(0,3)+(0,4)+(0,5)\Big]u - (0,1)u' - (0,2)u'' - (0,3)u''' - (0,4)u^{IV} - (0,5)u^{V} = 0,$$

$$\frac{du}{dt} - \Big[(0,1)+(0,2)+(0,3)+(0,4)+(0,5)\Big]s + (0,1)s' + (0,2)s'' + (0,3)s''' + (0,4)s^{IV} + (0,5)s^{V} = 0;$$

$$\frac{ds'}{dt} + \Big[(1,0)+(1,2)+(1,3)+(1,4)+(1,5)\Big]u' - (1,0)u - (1,2)u'' - (1,3)u''' - (1,4)u^{IV} - (1,5)u^{V} = 0,$$

$$\frac{du'}{dt} - \Big[(1,0)+(1,2)+(1,3)+(1,4)+(1,5)\Big]s' + (1,0)s + (1,2)s'' + (1,3)s''' + (1,4)s^{IV} + (1,5)s^{V} = 0;$$

$$\frac{ds''}{dt} + \Big[(2,0)+(2,1)+(2,3)+(2,4)+(2,5)\Big]u'' - (2,0)u - (2,1)u' - (2,3)u''' - (2,4)u^{IV} - (2,5)u^{V} = 0,$$

$$\frac{du''}{dt} - \Big[(2,0)+(2,1)+(2,3)+(2,4)+(2,5)\Big]s'' + (2,0)s + (2,1)s' + (2,3)s''' + (2,4)s^{IV} + (2,5)s^{V} = 0;$$

$$\frac{ds'''}{dt} + \Big[(3,0)+(3,1)+(3,2)+(3,4)+(3,5)\Big]u''' - (3,0)u - (3,1)u' - (3,2)u'' - (3,4)u^{IV} - (3,5)u^{V} = 0,$$

$$\frac{du'''}{dt} - \Big[(3,0)+(3,1)+(3,2)+(3,4)+(3,5)\Big]s''' + (3,0)s + (3,1)s' + (3,2)s'' + (3,4)s^{IV} + (3,5)s^{V} = 0;$$

$$\frac{ds^{IV}}{dt} + \Big[(4,0)+(4,1)+(4,2)+(4,3)+(4,5)\Big]u^{IV} - (4,0)u - (4,1)u' - (4,2)u'' - (4,3)u''' - (4,5)u^{V} = 0,$$

$$\frac{du^{IV}}{dt} - \Big[(4,0)+(4,1)+(4,2)+(4,3)+(4,5)\Big]s^{IV} + (4,0)s + (4,1)s' + (4,2)s'' + (4,3)s''' + (4,5)s^{V} = 0;$$

$$\frac{ds^{\mathrm{v}}}{dt} + \Big[(5,0)+(5,1)+(5,2)+(5,3)+(5,4)\Big]u^{\mathrm{v}} - (5,0)u - (5,1)u' - (5,2)u'' - (5,3)u''' - (5,4)u^{\mathrm{iv}} = 0,$$

$$\frac{du^{\mathrm{v}}}{dt} - \Big[(5,0)+(5,1)+(5,2)+(5,3)+(5,4)\Big]s^{\mathrm{v}} + (5,0)s + (5,1)s' + (5,2)s'' + (5,3)s''' + (5,4)s^{\mathrm{iv}} = 0.$$

Quant à la variable t, elle représente, dans ces équations, le nombre entier ou fractionnaire des années Juliennes écoulées depuis une époque fixe qui est encore arbitraire, de sorte que t sera positif pour les temps postérieurs à cette époque et négatif pour les antérieurs.

18. Nous avons supposé jusqu'ici que les orbites des Planètes étaient rapportées à une écliptique fixe, c'est-à dire au plan dans lequel la Terre s'est mue à une époque donnée; et nous avons rapporté également à ce même plan la position variable de l'écliptique réelle ou de la vraie orbite de la Terre, pour un instant quelconque. Mais en Astronomie on a coutume de rapporter immédiatement les orbites des Planètes à cette écliptique réelle; on rapporte ensuite la position variable de celle-ci à celle de l'équateur, en tenant compte des changements auxquels ce dernier plan est lui-même sujet. Ainsi, pour rapprocher autant qu'il est possible nos formules des méthodes astronomiques, il faut encore faire voir comment elles peuvent servir à déterminer directement la position des orbites des Planètes par rapport au vrai plan de l'écliptique.

Pour cela on se rappellera que la tangente de la latitude correspondante à une longitude q, pour un point quelconque d'une orbite dont la tangente d'inclinaison est θ et la longitude du nœud est ω, est exprimée, en général, par $\theta\sin(q-\omega)$, comme on l'a vu dans la première Partie; ce qui est d'ailleurs connu par les propriétés des triangles sphériques rectangles. Ainsi, en supposant deux orbites rapportées premièrement à l'écliptique fixe, et ensuite l'une à l'autre, et nommant θ, θ' les tangentes de leurs inclinaisons à l'écliptique, ω, ω' les longitudes de leurs nœuds ascendants sur ce plan, ϑ la tangente de l'inclinaison de l'une à l'autre, et Ω la longitude du nœud ascendant de la première sur la seconde,

comptée sur celle-ci, les tangentes des latitudes correspondantes à une même longitude q seront, pour les deux orbites relativement à l'écliptique, $\theta\sin(q-\omega)$, $\theta'\sin(q-\omega')$, et pour la première orbite relativement à la seconde $\vartheta\sin(q-\Omega)$.

Or, si l'inclinaison des deux orbites à l'écliptique est supposée très-petite, en sorte que θ et θ' soient des quantités fort petites, ainsi que ϑ, les tangentes des latitudes seront à très-peu près égales aux latitudes elles-mêmes, et le cercle de latitude correspondant à la longitude q comptée sur l'écliptique se confondra à très-peu près avec le cercle de latitude correspondant à la même longitude q comptée sur l'une des orbites. D'où il est aisé de conclure que la latitude $\vartheta\sin(q-\Omega)$ sera à très-peu près égale à la différence des deux latitudes $\theta\sin(q-\omega)$ et $\theta'\sin(q-\omega')$; ce qui donnera cette équation

$$\vartheta\sin(q-\Omega) = \theta\sin(q-\omega) - \theta'\sin(q-\omega'),$$

laquelle sera vraie quelle que soit la longitude q. De sorte qu'en développant les sinus et comparant séparément les termes qui contiennent $\sin q$ et $\cos q$, on aura ces deux équations

$$\vartheta\sin\Omega = \theta\sin\omega - \theta'\sin\omega' = s - s',$$
$$\vartheta\cos\Omega = \theta\cos\omega - \theta'\cos\omega' = u - u',$$

par lesquelles on déterminera facilement le lieu du nœud commun et l'inclinaison mutuelle des deux orbites.

Or, puisque $\vartheta\sin\Omega$ et $\vartheta\cos\Omega$ sont des quantités analogues à s et u, pour l'orbite rapportée non à l'écliptique fixe, mais à une autre orbite dépendante de s' et u', il s'ensuit, en général, que si des éléments s et u relatifs à une orbite quelconque on retranche les éléments correspondants pour une autre orbite, on aura sur-le-champ ceux de la première orbite rapportée à la seconde.

Ainsi, pour rapporter les orbites de Saturne, Jupiter,... à l'écliptique vraie ou à l'orbite de la Terre, il n'y aura qu'à prendre, à la place des éléments s, u, s', u',..., les différences $s-s'''$, $u-u'''$, $s'-s'''$, $u'-u'''$,... de ces mêmes éléments avec les éléments analogues s''', u''' pour cette dernière orbite.

Quant au degré de précision de ces réductions, il n'est pas difficile de se convaincre qu'elles sont exactes aux quantités du troisième ordre près, en regardant les inclinaisons à l'écliptique comme des quantités du premier ordre; ainsi, vu la petitesse effective de ces inclinaisons pour les Planètes de notre système, on pourra toujours employer les réductions dont il s'agit comme si elles étaient tout à fait rigoureuses.

19. A l'égard du changement de position de l'écliptique vraie par rapport à l'équateur, on le déterminera facilement d'après celui qui a lieu relativement à l'écliptique fixe, et qui dépend des quantités $s''' = \vartheta''' \sin\omega'''$, $u''' = \vartheta''' \cos\omega'''$.

En effet, comme ϑ''' est la tangente d'inclinaison, ou l'inclinaison elle-même (à cause de sa petitesse) de l'écliptique vraie avec l'écliptique fixe, et ω''' la longitude du nœud ou du point d'intersection de ces écliptiques; si l'on nomme de plus I l'inclinaison ou l'obliquité de l'écliptique fixe de 1700 sur l'équateur, $\mathrm{I} + i$ l'obliquité de l'écliptique vraie, $\omega''' - \eta$ la longitude du nœud des deux écliptiques comptée sur l'écliptique vraie, tandis que la longitude ω''' du même nœud est comptée sur l'écliptique fixe; enfin ε l'arc de l'équateur compris entre les deux écliptiques; on aura évidemment un triangle sphérique formé par les trois côtés ε, ω''', $\omega''' - \eta$, et dans lequel les angles opposés à ces côtés seront ϑ''', $180° - \mathrm{I} - i$, I. De sorte que par les propriétés connues on aura ces formules

$$\cos(\mathrm{I}+i) = \cos\mathrm{I}\cos\vartheta''' - \sin\mathrm{I}\sin\vartheta'''\cos\omega''',$$

$$\frac{\sin\omega'''}{\sin(\mathrm{I}+i)} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\vartheta'''} = \frac{\sin(\omega''' - \eta)}{\sin\mathrm{I}},$$

d'où l'on tirera i, ε et η.

Or, en regardant ϑ''' comme très-petit, i et η seront également très-petits du même ordre, et l'on trouvera par la méthode différentielle

$$i = \vartheta''' \cos\omega''', \quad \varepsilon = \frac{\vartheta''' \sin\omega'''}{\sin\mathrm{I}}, \quad \eta = \frac{i\,\mathrm{tang}\,\omega'''}{\mathrm{tang}\,\mathrm{I}} = \frac{\vartheta''' \sin\omega'''}{\mathrm{tang}\,\mathrm{I}};$$

donc

$$i = u''', \quad \varepsilon = \frac{s'''}{\sin\mathrm{I}}, \quad \eta = \frac{s'''}{\mathrm{tang}\,\mathrm{I}}.$$

Il est clair, d'après les dénominations précédentes, que i sera l'accroissement de l'obliquité de l'écliptique, ε le mouvement des points équinoxiaux en ascension droite, et η leur mouvement en longitude.

Ces éléments étant connus, on déterminera facilement les variations séculaires de la latitude et de la longitude des étoiles, dues au déplacement de l'écliptique; et il n'est pas difficile de voir que, si X est la longitude d'une étoile, Y sa latitude supposée boréale, l'une et l'autre rapportées à l'écliptique fixe de 1700, on aura à très-peu près

$$\vartheta''' \sin(\mathrm{X} - \omega'''),$$

pour la quantité dont la latitude sera diminuée, et

$$\vartheta''' \cos(\mathrm{X} - \omega)\,\mathrm{tang}\,\mathrm{Y} - \eta,$$

pour celle dont la longitude se trouvera augmentée.

De sorte que l'augmentation de la latitude sera représentée par

$$s''' \cos\mathrm{X} - u''' \sin\mathrm{X}, \quad \text{ou} \quad \eta\,\mathrm{tang}\,\mathrm{I}\cos\mathrm{X} - i\sin\mathrm{X},$$

et l'augmentation de la longitude sera

$$(u''' \cos\mathrm{X} + s''' \sin\mathrm{X})\,\mathrm{tang}\,\mathrm{Y} - \eta, \quad \text{ou} \quad i\cos\mathrm{X}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{Y} - \eta(1 - \mathrm{tang}\,\mathrm{I}\sin\mathrm{X}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{Y}).$$

Au reste, comme nous avons supposé que les longitudes étaient comptées depuis un point fixe de l'écliptique fixe, pour avoir égard à la précession des équinoxes, provenant du mouvement rétrograde de l'équateur, et qu'on estime communément de $50''\frac{1}{3}$ par an, il faudra augmenter ces longitudes de $50''\frac{1}{3} \times t$; c'est pourquoi il faudra mettre dans les formules que nous venons de donner $\omega''' + 50''\frac{1}{3} \times t$ au lieu de ω''', ce qui changera la quantité s''' en

$$s''' \cos(50''\tfrac{1}{3} \times t) + u''' \sin(50''\tfrac{1}{3} \times t),$$

et u''' en

$$u''' \cos(50''\tfrac{1}{3} \times t) - s''' \sin(50''\tfrac{1}{3} \times t).$$

Il en sera de même pour les longitudes des nœuds et des aphélies de toutes les Planètes.

20. On sera peut-être surpris de ce que dans les calculs précédents nous n'avons point tenu compte de l'action de la nouvelle Planète. Mais:

1° il n'est peut-être pas encore suffisamment constaté que c'en soit une; 2° sa distance au Soleil est trop grande, et sa masse paraît être trop petite pour pouvoir produire des effets sensibles sur les autres Planètes.

En effet, quant à la distance moyenne de cette Planète, d'après les derniers calculs appuyés sur les observations faites depuis deux ans, elle est à peu près double de celle de Saturne, et son diamètre apparent n'est, suivant les observations de M. Herschel, que d'environ 4″; ainsi ce diamètre n'est que $\frac{2}{9}$ de celui de Saturne; de sorte que le diamètre vrai de la nouvelle Planète sera $\frac{4}{9}$ de celui de Saturne, et son volume $\frac{64}{729}$, à peu près $\frac{1}{11\frac{1}{2}}$ de celui de Saturne. Ce rapport serait aussi celui de leurs masses, si la densité était la même de part et d'autre; mais, suivant la loi des densités trouvée dans le n° 12, celle de la nouvelle Planète serait la moitié moindre que celle de Saturne, et par conséquent sa masse ne serait qu'environ $\frac{1}{23}$ de la masse même de Saturne. D'après ces données il est facile de se convaincre que l'action de la nouvelle Planète doit être très-peu sensible sur Saturne même, et à plus forte raison sur les autres Planètes plus éloignées d'elle; et cette raison, jointe à l'incertitude qui peut rester encore sur les éléments de cet astre, nous a paru suffisante pour nous déterminer à faire quant à présent entièrement abstraction de son action, dans la Théorie des variations séculaires des éléments des Planètes.

SECTION SECONDE.

VALEURS DES VARIATIONS ANNUELLES DES ÉLÉMENTS DES SIX PLANÈTES PRINCIPALES, POUR L'ÉPOQUE DE 1700. COMPARAISON DE CES VALEURS AVEC CELLES QUI RÉSULTENT DES OBSERVATIONS.

21. Nous venons de présenter les équations différentielles qui renferment la loi des variations séculaires des éléments des six Planètes principales; et ces équations n'ont besoin que d'être intégrées pour donner

cette loi sous une forme finie et générale pour un temps quelconque; mais dans l'état où elles sont, elles peuvent servir à déterminer les variations annuelles des mêmes éléments, puisque, ces variations étant très-petites, il est permis de les supposer égales aux rapports de leurs différentielles à celle du temps, que nous exprimons en années Juliennes. Quoique la quantité de ces variations change d'une année à l'autre, on pourra cependant la regarder et la traiter comme constante pendant plusieurs années, et même pendant un ou deux siècles; ainsi, si l'on détermine les variations dont il s'agit pour le commencement de ce siècle, on pourra y comparer les résultats des observations faites depuis le renouvellement de l'Astronomie, et fixer par là jusqu'à un certain point l'incertitude qui reste encore dans les rapports des masses des Planètes.

Cette époque a de plus l'avantage de répondre à peu près au milieu de l'intervalle dans lequel Flamsteed et Halley ont fait les observations qui ont servi à ce dernier pour calculer ses Tables des Planètes; de sorte qu'il est à présumer que les éléments de ces Tables ont été principalement établis pour l'époque dont nous parlons, ou que du moins ils sont, par rapport à elle, les résultats moyens de toutes les observations sur lesquelles les Tables sont fondées; et qu'ainsi ils peuvent être employés avec confiance comme des données fournies immédiatement par l'observation.

22. Pour avoir les expressions des variations annuelles des aphélies et des excentricités, il ne s'agit donc que de trouver celles des quantités $\frac{d\varpi}{dt}, \frac{d\varpi'}{dt}, \ldots, \frac{d\lambda}{dt}, \frac{d\lambda'}{dt}, \ldots$; or, ayant supposé dans les équations du n° 17

$$x = \lambda \sin\varpi, \quad y = \lambda\cos\varpi, \quad x' = \lambda'\sin\varpi', \quad y' = \lambda'\cos\varpi', \ldots,$$

on aura

$$y\,dx - x\,dy = \lambda^2 d\varpi, \quad x^2 + y^2 = \lambda^2,$$

$$xx' + yy' = \lambda\lambda'\cos(\varpi' - \varpi), \quad x'y - y'x = \lambda\lambda'\sin(\varpi - \varpi'),$$

et ainsi de suite; ainsi ces équations donneront :

1° Pour les mouvements annuels des aphélies

$$\frac{d\varphi}{dt} = (0,1) + (0,2) + (0,3) + (0,4) + (0,5)$$
$$- [0,1]\frac{\lambda' \cos(\varphi' - \varphi)}{\lambda} - [0,2]\frac{\lambda'' \cos(\varphi'' - \varphi)}{\lambda} - [0,3]\frac{\lambda''' \cos(\varphi''' - \varphi)}{\lambda}$$
$$- [0,4]\frac{\lambda^{IV} \cos(\varphi^{IV} - \varphi)}{\lambda} - [0,5]\frac{\lambda^{V} \cos(\varphi^{V} - \varphi)}{\lambda},$$

$$\frac{d\varphi'}{dt} = (1,0) + (1,2) + (1,3) + (1,4) + (1,5)$$
$$- [1,0]\frac{\lambda \cos(\varphi - \varphi')}{\lambda'} - [1,2]\frac{\lambda'' \cos(\varphi'' - \varphi')}{\lambda'} - [1,3]\frac{\lambda''' \cos(\varphi''' - \varphi')}{\lambda'}$$
$$- [1,4]\frac{\lambda^{IV} \cos(\varphi^{IV} - \varphi')}{\lambda'} - [1,5]\frac{\lambda^{V} \cos(\varphi^{V} - \varphi')}{\lambda'},$$

$$\frac{d\varphi''}{dt} = (2,0) + (2,1) + (2,3) + (2,4) + (2,5)$$
$$- [2,0]\frac{\lambda \cos(\varphi - \varphi'')}{\lambda''} - [2,1]\frac{\lambda' \cos(\varphi' - \varphi'')}{\lambda''} - [2,3]\frac{\lambda''' \cos(\varphi''' - \varphi'')}{\lambda''}$$
$$- [2,4]\frac{\lambda^{IV} \cos(\varphi^{IV} - \varphi'')}{\lambda''} - [2,5]\frac{\lambda^{V} \cos(\varphi^{V} - \varphi'')}{\lambda''},$$

$$\frac{d\varphi'''}{dt} = (3,0) + (3,1) + (3,2) + (3,4) + (3,5)$$
$$- [3,0]\frac{\lambda \cos(\varphi - \varphi''')}{\lambda'''} - [3,1]\frac{\lambda' \cos(\varphi' - \varphi''')}{\lambda'''} - [3,2]\frac{\lambda'' \cos(\varphi'' - \varphi''')}{\lambda'''}$$
$$- [3,4]\frac{\lambda^{IV} \cos(\varphi^{IV} - \varphi''')}{\lambda'''} - [3,5]\frac{\lambda^{V} \cos(\varphi^{V} - \varphi''')}{\lambda'''},$$

$$\frac{d\varphi^{IV}}{dt} = (4,0) + (4,1) + (4,2) + (4,3) + (4,5)$$
$$- [4,0]\frac{\lambda \cos(\varphi - \varphi^{IV})}{\lambda^{IV}} - [4,1]\frac{\lambda' \cos(\varphi' - \varphi^{IV})}{\lambda^{IV}} - [4,2]\frac{\lambda'' \cos(\varphi'' - \varphi^{IV})}{\lambda^{IV}}$$
$$- [4,3]\frac{\lambda''' \cos(\varphi''' - \varphi^{IV})}{\lambda^{IV}} - [4,5]\frac{\lambda^{V} \cos(\varphi^{V} - \varphi^{IV})}{\lambda^{IV}},$$

$$\frac{d\varphi^{V}}{dt} = (5,0) + (5,1) + (5,2) + (5,3) + (5,4)$$
$$- [5,0]\frac{\lambda \cos(\varphi - \varphi^{V})}{\lambda^{V}} - [5,1]\frac{\lambda' \cos(\varphi' - \varphi^{V})}{\lambda^{V}} - [5,2]\frac{\lambda'' \cos(\varphi'' - \varphi^{V})}{\lambda^{V}}$$
$$- [5,3]\frac{\lambda''' \cos(\varphi''' - \varphi^{V})}{\lambda^{V}} - [5,4]\frac{\lambda^{IV} \cos(\varphi^{IV} - \varphi^{V})}{\lambda^{V}}.$$

2° Pour les variations annuelles des excentricités

$$\frac{d\lambda}{dt} = [0,1]\lambda' \sin(\varphi' - \varphi) + [0,2]\lambda'' \sin(\varphi'' - \varphi)$$
$$+ [0,3]\lambda''' \sin(\varphi''' - \varphi) + [0,4]\lambda^{IV} \sin(\varphi^{IV} - \varphi) + [0,5]\lambda^{V} \sin(\varphi^{V} - \varphi),$$

$$\frac{d\lambda'}{dt} = [1,0]\lambda \sin(\varphi - \varphi') + [1,2]\lambda'' \sin(\varphi'' - \varphi')$$
$$+ [1,3]\lambda''' \sin(\varphi''' - \varphi') + [1,4]\lambda^{IV} \sin(\varphi^{IV} - \varphi') + [1,5]\lambda^{V} \sin(\varphi^{V} - \varphi'),$$

$$\frac{d\lambda''}{dt} = [2,0]\lambda \sin(\varphi - \varphi'') + [2,1]\lambda' \sin(\varphi' - \varphi'')$$
$$+ [2,3]\lambda''' \sin(\varphi''' - \varphi'') + [2,4]\lambda^{IV} \sin(\varphi^{IV} - \varphi'') + [2,5]\lambda^{V} \sin(\varphi^{V} - \varphi''),$$

$$\frac{d\lambda'''}{dt} = [3,0]\lambda \sin(\varphi - \varphi''') + [3,1]\lambda' \sin(\varphi' - \varphi''')$$
$$+ [3,2]\lambda'' \sin(\varphi'' - \varphi''') + [3,4]\lambda^{IV} \sin(\varphi^{IV} - \varphi''') + [3,5]\lambda^{V} \sin(\varphi^{V} - \varphi'''),$$

$$\frac{d\lambda^{IV}}{dt} = [4,0]\lambda \sin(\varphi - \varphi^{IV}) + [4,1]\lambda' \sin(\varphi' - \varphi^{IV})$$
$$+ [4,2]\lambda'' \sin(\varphi'' - \varphi^{IV}) + [4,3]\lambda''' \sin(\varphi''' - \varphi^{IV}) + [4,5]\lambda^{V} \sin(\varphi^{V} - \varphi^{IV}),$$

$$\frac{d\lambda^{V}}{dt} = [5,0]\lambda \sin(\varphi - \varphi^{V}) + [5,1]\lambda' \sin(\varphi' - \varphi^{V})$$
$$+ [5,2]\lambda'' \sin(\varphi'' - \varphi^{V}) + [5,3]\lambda''' \sin(\varphi''' - \varphi^{V}) + [5,4]\lambda^{IV} \sin(\varphi^{IV} - \varphi^{V}).$$

On substituera donc, dans ces formules, les valeurs de φ, φ',..., λ, λ',... pour l'époque donnée, et comme les coefficients marqués par des crochets sont déjà exprimés en secondes, on aura aussi en secondes les variations annuelles des aphélies et des excentricités relativement à la même époque; mais on sait que la plus grande équation pour une excentricité peu considérable λ, est à très-peu près $2\lambda + \frac{11}{48}\lambda^3$; donc les quantités $\frac{2d\lambda}{dt}$, $\frac{2d\lambda'}{dt}$,... exprimeront elles-mêmes les variations annuelles des plus grandes équations des Planètes, en négligeant les quantités du troisième ordre.

23. Si l'on voulait avoir ces variations plus exactement, il n'y aurait qu'à chercher, par des différentiations et des substitutions successives, les valeurs des différences secondes, troisièmes,... de φ, φ',..., λ, λ',... en fonction de ces variables; et regardant ensuite ces mêmes variables comme des fonctions du temps, on aurait par le Théorème connu leurs variations pour un temps quelconque t peu considérable, exprimées en séries de t.

Il faut seulement remarquer que, comme dans les valeurs des différences secondes, les coefficients marqués par des crochets formeront partout des produits de deux dimensions, que dans celles des différences troisièmes, ils formeront des produits de trois dimensions, et ainsi de suite, il sera nécessaire pour l'homogénéité, à cause que ces coefficients sont exprimés en secondes, de diviser les différences secondes par le nombre de secondes de l'arc égal au rayon, les différences troisièmes par le carré de ce nombre, et ainsi de suite.

Ainsi, en faisant, pour abréger,

$$n = 206264{,}8,$$

et supposant connues les valeurs de $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$,... pour une époque donnée, on aura pour un nombre quelconque d'années Juliennes écoulées depuis cette époque la variation de φ exprimée par la série

$$\frac{d\varphi}{dt}\,t + \frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\frac{t^2}{2n} + \frac{d^3\varphi}{dt^3}\,\frac{t^3}{2.3n^2} + \ldots,$$

laquelle servira également pour les années qui précèdent l'époque en prenant t négatif. Il en sera de même pour la variation des autres éléments.

Or, en faisant $t = 100$, on aura $\frac{t^2}{2n} = \frac{1}{40}$ à très-peu près, et le second terme de la série précédente ne pourra donner tout au plus que quelques secondes; mais les suivants ne donneront que des fractions de seconde. C'est pourquoi on pourra sans scrupule s'en tenir au premier

terme $\frac{d\varphi}{dt}\,t$ pendant la durée d'un siècle et même de deux; et la variation annuelle de φ sera représentée avec une exactitude suffisante par la différentielle $\frac{d\varphi}{dt}$; et ainsi des autres, comme nous l'avons supposé plus haut.

24. Venons maintenant aux variations annuelles des nœuds et des inclinaisons. Elles seront exprimées par $\frac{d\omega}{dt}$, $\frac{d\omega'}{dt}$,..., $\frac{d\vartheta}{dt}$, $\frac{d\vartheta'}{dt}$,... si l'on rapporte les orbites des Planètes à l'écliptique supposée fixe; mais en les rapportant à l'écliptique vraie et mobile, ces variations devront être représentées par $\frac{d\Omega}{dt}$, $\frac{d\Omega'}{dt}$,..., $\frac{d\Im}{dt}$, $\frac{d\Im'}{dt}$,..., en supposant

$$\vartheta \sin\Omega = s - s''', \quad \vartheta\cos\Omega = u - u''', \quad \vartheta' \sin\Omega' = s' - s''', \quad \vartheta'\cos\Omega' = u' - u''', \ldots,$$

d'après ce que nous avons démontré dans le n° 18. Ainsi l'on aura

$$d\Omega = \frac{(u-u''')(ds-ds''') - (s-s''')(du-du''')}{(s-s''')^2 + (u-u''')^2},$$

$$d\Im = \frac{(s-s''')(ds-ds''') + (u-u''')(du-du''')}{\sqrt{(s-s''')^2 + (u-u''')^2}};$$

mais en prenant pour l'écliptique fixe le plan dans lequel la vraie écliptique s'est trouvée à l'époque donnée, on a $\vartheta''' = 0$, et par conséquent $s''' = 0$, $u''' = 0$; ce qui simplifie les formules précédentes, et les réduit à celles-ci

$$d\Omega = \frac{u(ds-ds''') - s(du-du''')}{\vartheta^2}, \quad d\Im = \frac{s(ds-ds''') + u(du-du''')}{\vartheta};$$

et l'on aura de pareilles formules pour $d\Omega'$, $d\Im'$,....

Substituant donc les valeurs de ds, ds',..., du, du',... tirées des équations différentielles du n° 17, en faisant toujours $s''' = 0$, $u''' = 0$, et remettant pour s, u,... leurs valeurs $\vartheta\sin\omega$, $\vartheta\cos\omega$,..., on aura :

1° Pour les mouvements annuels des nœuds par rapport à l'écliptique vraie

$$\frac{d\Omega}{dt} = -(0,1)-(0,2)-(0,3)-(0,4)-(0,5)-(3,0)$$
$$+\left[(0,1)-(3,1)\right]\frac{\theta'\cos(\omega'-\omega)}{\theta}+\left[(0,2)-(3,2)\right]\frac{\theta''\cos(\omega''-\omega)}{\theta}$$
$$+\left[(0,4)-(3,4)\right]\frac{\theta^{\text{IV}}\cos(\omega^{\text{IV}}-\omega)}{\theta}+\left[(0,5)-(3,5)\right]\frac{\theta^{\text{V}}\cos(\omega^{\text{V}}-\omega)}{\theta},$$

$$\frac{d\Omega'}{dt} = -(1,0)-(1,2)-(1,3)-(1,4)-(1,5)-(3,1)$$
$$+\left[(1,0)-(3,0)\right]\frac{\theta\cos(\omega-\omega')}{\theta'}+\left[(1,2)-(3,2)\right]\frac{\theta''\cos(\omega''-\omega')}{\theta'}$$
$$+\left[(1,4)-(3,4)\right]\frac{\theta^{\text{IV}}\cos(\omega^{\text{IV}}-\omega')}{\theta'}+\left[(1,5)-(3,5)\right]\frac{\theta^{\text{V}}\cos(\omega^{\text{V}}-\omega')}{\theta'},$$

$$\frac{d\Omega''}{dt} = -(2,0)-(2,1)-(2,3)-(2,4)-(2,5)-(3,2)$$
$$+\left[(2,0)-(3,0)\right]\frac{\theta\cos(\omega-\omega'')}{\theta''}+\left[(2,1)-(3,1)\right]\frac{\theta'\cos(\omega'-\omega'')}{\theta''}$$
$$+\left[(2,4)-(3,4)\right]\frac{\theta^{\text{IV}}\cos(\omega^{\text{IV}}-\omega'')}{\theta''}+\left[(2,5)-(3,5)\right]\frac{\theta^{\text{V}}\cos(\omega^{\text{V}}-\omega'')}{\theta''},$$

$$\frac{d\Omega^{\text{IV}}}{dt} = -(4,0)-(4,1)-(4,2)-(4,3)-(4,5)-(3,4)$$
$$+\left[(4,0)-(3,0)\right]\frac{\theta\cos(\omega-\omega^{\text{IV}})}{\theta^{\text{IV}}}+\left[(4,1)-(3,1)\right]\frac{\theta'\cos(\omega'-\omega^{\text{IV}})}{\theta^{\text{IV}}}$$
$$+\left[(4,2)-(3,2)\right]\frac{\theta''\cos(\omega''-\omega^{\text{IV}})}{\theta^{\text{IV}}}+\left[(4,5)-(3,5)\right]\frac{\theta^{\text{V}}\cos(\omega^{\text{V}}-\omega^{\text{IV}})}{\theta^{\text{IV}}},$$

$$\frac{d\Omega^{\text{V}}}{dt} = -(5,0)-(5,1)-(5,2)-(5,3)-(5,4)-(3,5)$$
$$+\left[(5,0)-(3,0)\right]\frac{\theta\cos(\omega-\omega^{\text{V}})}{\theta^{\text{V}}}+\left[(5,1)-(3,1)\right]\frac{\theta'\cos(\omega'-\omega^{\text{V}})}{\theta^{\text{V}}}$$
$$+\left[(5,2)-(3,2)\right]\frac{\theta''\cos(\omega''-\omega^{\text{V}})}{\theta^{\text{V}}}+\left[(5,4)-(3,4)\right]\frac{\theta^{\text{IV}}\cos(\omega^{\text{IV}}-\omega^{\text{V}})}{\theta^{\text{V}}}.$$

2° Pour les variations annuelles des inclinaisons par rapport à l'écliptique vraie

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \left[(3,1)-(0,1)\right]\theta'\sin(\omega'-\omega)+\left[(3,2)-(0,2)\right]\theta''\sin(\omega''-\omega)$$
$$+\left[(3,4)-(0,4)\right]\theta^{\text{IV}}\sin(\omega^{\text{IV}}-\omega)+\left[(3,5)-(0,5)\right]\theta^{\text{V}}\sin(\omega^{\text{V}}-\omega),$$

$$\frac{d\vartheta'}{dt} = \left[(3,0)-(1,0)\right]\theta\sin(\omega-\omega')+\left[(3,2)-(1,2)\right]\theta''\sin(\omega''-\omega')$$
$$+\left[(3,4)-(1,4)\right]\theta^{\text{IV}}\sin(\omega^{\text{IV}}-\omega')+\left[(3,5)-(1,5)\right]\theta^{\text{V}}\sin(\omega^{\text{V}}-\omega'),$$

$$\frac{d\vartheta''}{dt} = \left[(3,0)-(2,0)\right]\theta\sin(\omega-\omega'')+\left[(3,1)-(2,1)\right]\theta'\sin(\omega'-\omega'')$$
$$+\left[(3,4)-(2,4)\right]\theta^{\text{IV}}\sin(\omega^{\text{IV}}-\omega'')+\left[(3,5)-(2,5)\right]\theta^{\text{V}}\sin(\omega^{\text{V}}-\omega''),$$

$$\frac{d\vartheta^{\text{IV}}}{dt} = \left[(3,0)-(4,0)\right]\theta\sin(\omega-\omega^{\text{IV}})+\left[(3,1)-(4,1)\right]\theta'\sin(\omega'-\omega^{\text{IV}})$$
$$+\left[(3,2)-(4,2)\right]\theta''\sin(\omega''-\omega^{\text{IV}})+\left[(3,5)-(4,5)\right]\theta^{\text{V}}\sin(\omega^{\text{V}}-\omega^{\text{IV}}),$$

$$\frac{d\vartheta^{\text{V}}}{dt} = \left[(3,0)-(5,0)\right]\theta\sin(\omega-\omega^{\text{V}})+\left[(3,1)-(5,1)\right]\theta'\sin(\omega'-\omega^{\text{V}})$$
$$+\left[(3,2)-(5,2)\right]\theta''\sin(\omega''-\omega^{\text{V}})+\left[(3,4)-(5,4)\right]\theta^{\text{IV}}\sin(\omega^{\text{IV}}-\omega^{\text{V}}).$$

Au reste, si dans ces expressions des variations annuelles relativement à la vraie écliptique on suppose nuls les coefficients $(3,0)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(3,4)$, $(3,5)$, ce qui ne demande que d'y effacer tous les termes où ces coefficients se trouvent, elles donneront les variations annuelles par rapport à l'écliptique fixe; les quantités $d\Omega, d\Omega', \ldots, d\vartheta, d\vartheta', \ldots$ se changeant alors en $d\omega, d\omega', \ldots, d\theta, d\theta', \ldots$, comme on le voit par les formules ci-dessus, puisque dans cette hypothèse les différences ds'' et du'' disparaissent.

25. Enfin, pour déterminer les variations annuelles de l'obliquité de l'écliptique et du lieu des équinoxes, on remarquera que $\frac{ds''}{dt}$ et $\frac{du''}{dt}$ sont

les variations annuelles des quantités s''' et u'''; par conséquent, suivant les formules du n° 19, l'accroissement annuel de l'obliquité de l'écliptique sera représenté par $\frac{du'''}{dt}$, et le mouvement annuel des équinoxes en longitude sera $\frac{1}{\tang I}\frac{ds'''}{dt}$, en nommant I l'obliquité de l'écliptique.

Il est vrai que nous avons dit dans le même numéro qu'il fallait, à raison de la précession des équinoxes, substituer $u''\cos(50''\frac{1}{3}\times t) - s'''\sin(50''\frac{1}{3}\times t)$ au lieu de u''', et $s'''\cos(50''\frac{1}{3}\times t) + u'''\sin(50''\frac{1}{3}\times t)$ au lieu de s'''; mais il est aisé de voir que les différences du'' et ds'' demeurent les mêmes pour l'époque de $t = 0$, puisque s''' et u''' y sont supposés nuls.

Donc, en faisant, dans les valeurs de $\frac{du'''}{dt}$, $\frac{ds'''}{dt}$ du n° 17, $s''' = 0$, $u''' = 0$, et mettant pour s, u, ... leurs valeurs $\vartheta\sin\omega$, $\vartheta\cos\omega$, ..., on aura

Variation annuelle de l'obliquité de l'écliptique.

$$\frac{du'''}{dt} = -(3,0)\vartheta\sin\omega - (3,1)\vartheta'\sin\omega' - (3,2)\vartheta''\sin\omega'' - (3,4)\vartheta^{IV}\sin\omega^{IV} - (3,5)\vartheta^{V}\sin\omega^{V}.$$

Mouvement annuel des équinoxes en longitude.

$$\frac{ds'''}{dt}\cot I = (3,0)\frac{\vartheta\cos\omega}{\tang I} + (3,1)\frac{\vartheta'\cos\omega'}{\tang I} + (3,2)\frac{\vartheta''\cos\omega''}{\tang I} + (3,4)\frac{\vartheta^{IV}\cos\omega^{IV}}{\tang I} + (3,5)\frac{\vartheta^{V}\cos\omega^{V}}{\tang I}.$$

Et, si dans cette dernière formule on change $\tang I$ en $\sin I$, on aura le mouvement annuel des équinoxes en ascension droite.

26. Il s'agit maintenant d'évaluer ces différentes expressions en y substituant pour φ, φ', ..., λ, λ', ..., ω, ω', ..., ϑ, ϑ', ... les longitudes des aphélies, les excentricités, les longitudes des nœuds, et les tangentes des inclinaisons des orbites de Saturne, Jupiter,... pour 1700.

Voici d'abord ces éléments tirés des Tables de Halley, à l'exception

seulement de l'aphélie de la Terre et de son excentricité, que nous avons préféré déduire des Tables de Mayer comme les plus exactes pour cette Planète; les époques sont réduites au méridien de l'Observatoire de Berlin.

$\varphi = 8^s\ 28^\circ 33'\ 18''$,	$\lambda = 0{,}057002$.
$\varphi' = 6\ \ 9\ 33\ 46$,	$\lambda' = 0{,}048220$.
$\varphi'' = 5\ \ 0\ 33\ 18$,	$\lambda'' = 0{,}092998$,
$\varphi''' = 9\ \ 7\ 42\ 34$,	$\lambda''' = 0{,}016802\,1$.
$\varphi^{IV} = 10\ \ 6\ 31\ 27$,	$\lambda^{IV} = 0{,}006\,3816$,
$\varphi^{V} = 8\ \ 12\ 43\ 23$,	$\lambda^{V} = 0{,}205890$,
$\omega = 3^s\ 21^\circ\ 5'\ 6''$,	$\vartheta = \tang 2^\circ 30'\ 10''$,
$\omega' = 3\ \ 7\ 34\ 9$,	$\vartheta' = \tang 1\ 19\ 10$,
$\omega'' = 1\ \ 17\ 24\ 41$,	$\vartheta'' = \tang 1\ 51\ 0$,
$\omega^{IV} = 2\ \ 13\ 57\ 52$,	$\vartheta^{IV} = \tang 3\ 23\ 20$,
$\omega^{V} = 1\ \ 14\ 40\ 18$,	$\vartheta^{V} = \tang 6\ 59\ 20$.

A l'égard de l'obliquité de l'écliptique I, je la prendrai en nombres ronds de 23° 29', telle qu'elle a dû être à très-peu près au commencement du siècle, d'après les nouvelles déterminations de M. Cassini.

Par ces valeurs et par celles du n° 16, j'ai donc trouvé les suivantes

$[0,1]\frac{\lambda'\cos(\varphi'-\varphi)}{\lambda} = 1'',8873\,m'$ — $0{,}2758508$,
$[0,1]\lambda'\sin(\varphi'-\varphi) = -0'',5530\,m'$ — $9{,}7427571$,

$[0,2]\frac{\lambda''\cos(\varphi''-\varphi)}{\lambda} = -0'',0001\,m''$ — $5{,}8593395$,
$[0,2]\lambda''\sin(\varphi''-\varphi) = -0'',0000\,m''$ — $4{,}8956o8$,

$[0,3]\frac{\lambda'''\cos(\varphi'''-\varphi)}{\lambda} = 0'',0000\,m'''$ — $5{,}5854447$,
$[0,3]\lambda'''\sin(\varphi'''-\varphi) = 0'',0000\,m'''$ — $3{,}5486212$,

$[0,4]\frac{\lambda^{IV}\cos(\varphi^{IV}-\varphi)}{\lambda} = 0'',0000\,m^{IV}$ — $4{,}7976833$,
$[0,4]\lambda^{IV}\sin(\varphi^{IV}-\varphi) = 0'',0000\,m^{IV}$ — $3{,}4459114$,

$[0,5]\ \frac{\lambda^{v}\cos(\varphi^{v}-\varphi)}{\lambda}=0'',0000\,m^{v}$ $\quad 4,6769535,$

$[0,5]\ \lambda^{v}\sin(\varphi^{v}-\varphi)=-0'',0000\,m^{v}$ $\quad 2,8855182,$

$[1,0]\ \frac{\lambda\cos(\varphi-\varphi')}{\lambda'}=1'',1351\,m$ $\quad 0,0550368,$

$[1,0]\ \lambda\sin(\varphi-\varphi')=0'',2814\,m$ $\quad 9,4492724,$

$[1,2]\ \frac{\lambda''\cos(\varphi''-\varphi')}{\lambda'}=0'',0024\,m''$ $\quad 7,3887957,$

$[1,2]\ \lambda''\sin(\varphi''-\varphi')=-0'',0001\,m''$ $\quad 5,9805191,$

$[1,3]\ \frac{\lambda'''\cos(\varphi'''-\varphi')}{\lambda'}=0'',0000\,m'''$ $\quad 5,3798767,$

$[1,3]\ \lambda'''\sin(\varphi'''-\varphi')=0'',0000\,m'''$ $\quad 5,5531194,$

$[1,4]\ \frac{\lambda^{iv}\cos(\varphi^{iv}-\varphi')}{\lambda'}=-0'',0001\,m^{iv}$ $\quad 5,8272179,$

$[1,4]\ \lambda^{iv}\sin(\varphi^{iv}-\varphi')=0'',0000\,m^{iv}$ $\quad 4,8040061,$

$[1,5]\ \frac{\lambda^{v}\cos(\varphi^{v}-\varphi')}{\lambda'}=0'',0000\,m^{v}$ $\quad 5,6079875,$

$[1,5]\ \lambda^{v}\sin(\varphi^{v}-\varphi')=0'',0000\,m^{v}$ $\quad 4,5870718,$

$[2,0]\ \frac{\lambda\cos(\varphi-\varphi'')}{\lambda''}=-0'',0374\,m$ $\quad 8,5726301,$

$[2,0]\ \lambda\sin(\varphi-\varphi'')=0'',0065\,m$ $\quad 7,8154290,$

$[2,1]\ \frac{\lambda'\cos(\varphi'-\varphi'')}{\lambda''}=2'',1033\,m'$ $\quad 0,3229008,$

$[2,1]\ \lambda'\sin(\varphi'-\varphi'')=0'',1584\,m'$ $\quad 9,1998725,$

$[2,3]\ \frac{\lambda'''\cos(\varphi'''-\varphi'')}{\lambda''}=-0'',1487\,m'''$ $\quad 9,1724071,$

$[2,3]\ \lambda'''\sin(\varphi'''-\varphi'')=0'',0183\,m'''$ $\quad 8,2613147,$

$[2,4]\ \frac{\lambda^{iv}\cos(\varphi^{iv}-\varphi'')}{\lambda''}=-0'',0267\,m^{iv}$ $\quad 8,4260488,$

$[2,4]\ \lambda^{iv}\sin(\varphi^{iv}-\varphi'')=0'',0011\,m^{iv}$ $\quad 7,0437282,$

$[2,5]\ \frac{\lambda^{v}\cos(\varphi^{v}-\varphi'')}{\lambda''}=-0'',0026\,m^{v}$ $\quad 7,4186849,$

$[2,5]\ \lambda^{v}\sin(\varphi^{v}-\varphi'')=0'',0011\,m^{v}$ $\quad 7,0535119,$

$[3,0]\ \frac{\lambda\cos(\varphi-\varphi''')}{\lambda'''}=0'',1489\,m$ $\quad 9,1728747,$

$[3,0]\ \lambda\sin(\varphi-\varphi''')=-0'',0004\,m$ $\quad 6,6055191,$

$[3,1]\ \frac{\lambda'\cos(\varphi'-\varphi''')}{\lambda'''}=0'',1542\,m'$ $\quad 9,1881213,$

$[3,1]\ \lambda'\sin(\varphi'-\varphi''')=-0'',0801\,m'$ $\quad 8,9035026,$

$[3,2]\ \frac{\lambda''\cos(\varphi''-\varphi''')}{\lambda'''}=-1'',1131\,m''$ $\quad 0,0465464,$

$[3,2]\ \lambda''\sin(\varphi''-\varphi''')=-0'',0247\,m''$ $\quad 8,3923443,$

$[3,4]\ \frac{\lambda^{iv}\cos(\varphi^{iv}-\varphi''')}{\lambda'''}=2'',2610\,m^{iv}$ $\quad 0,3543074,$

$[3,4]\ \lambda^{iv}\sin(\varphi^{iv}-\varphi''')=-0'',0209\,m^{iv}$ $\quad 8,3200893,$

$[3,5]\ \frac{\lambda^{v}\cos(\varphi^{v}-\varphi''')}{\lambda'''}=0'',5141\,m^{v}$ $\quad 9,7110457,$

$[3,5]\ \lambda^{v}\sin(\varphi^{v}-\varphi''')=-0'',0040\,m^{v}$ $\quad 7,6048069,$

$[4,0]\ \frac{\lambda\cos(\varphi-\varphi^{iv})}{\lambda^{iv}}=0'',1261\,m$ $\quad 9,1007967,$

$[4,0]\ \lambda\sin(\varphi-\varphi^{iv})=-0'',0007\,m$ $\quad 6,8370840,$

$[4,1]\ \frac{\lambda'\cos(\varphi'-\varphi^{iv})}{\lambda^{iv}}=-2'',2446\,m'$ $\quad 0,3511444,$

$[4,1]\ \lambda'\sin(\varphi'-\varphi^{iv})=-0'',0308\,m'$ $\quad 8,4886625,$

$[4,2]\ \frac{\lambda''\cos(\varphi''-\varphi^{iv})}{\lambda^{iv}}=-1'',0372\,m''$ $\quad 0,0158706,$

$[4,2]\ \lambda''\sin(\varphi''-\varphi^{iv})=-0'',0032\,m''$ $\quad 7,5090316,$

$[4,3]\ \frac{\lambda'''\cos(\varphi'''-\varphi^{iv})}{\lambda^{iv}}=11'',7487\,m'''$ $\quad 1,0699903,$

$[4,3]\ \lambda'''\sin(\varphi'''-\varphi^{iv})=-0'',0451\,m'''$ $\quad 8,6543635,$

$[4,5]\ \frac{\lambda^{v}\cos(\varphi^{v}-\varphi^{iv})}{\lambda^{iv}}=4'',7266\,m^{v}$ $\quad 0,6745476,$

$[4,5]\ \lambda^{v}\sin(\varphi^{v}-\varphi^{iv})=-0'',0451\,m^{v}$ $\quad 8,6540571,$

$[5,0]\ \frac{\lambda\cos(\varphi-\varphi^{v})}{\lambda^{v}}=0'',0011\,m$ $\quad 7,0378060,$

$[5,0]\ \lambda\sin(\varphi-\varphi^{v})=0'',0001\,m$ $\quad 5,8041101,$

$[5,1]\ \frac{\lambda'\cos(\varphi'-\varphi^{v})}{\lambda^{v}} = o'',0155\,m'$ $\quad 8,1896538,$ $\qquad [5,1]\,\lambda'\sin(\varphi'-\varphi^{v}) = -o'',0063\,m'$ $\quad 7,7991482,$

$[5,2]\ \frac{\lambda''\cos(\varphi''-\varphi^{v})}{\lambda^{v}} = -o'',0012\,m''$ $\quad 7,0662456,$ $\qquad [5,2]\,\lambda''\sin(\varphi''-\varphi^{v}) = -o'',0011\,m''$ $\quad 7,0462344,$

$[5,3]\ \frac{\lambda'''\cos(\varphi'''-\varphi^{v})}{\lambda^{v}} = o'',0305\,m'''$ $\quad 8,4844670,$ $\qquad [5,3]\,\lambda'''\sin(\varphi'''-\varphi^{v}) = o'',0029\,m'''$ $\quad 7,4664997,$

$[5,4]\ \frac{\lambda^{iv}\cos(\varphi^{iv}-\varphi^{v})}{\lambda^{v}} = o'',0540\,m^{iv}$ $\quad 8,7322860,$ $\qquad [5,4]\,\lambda^{iv}\sin(\varphi^{iv}-\varphi^{v}] = o'',0152\,m^{iv}$ $\quad 8,1814757,$

$(0,1)\ \frac{\theta'\cos(\omega'-\omega)}{\theta} = 9'',1610\,m'$ $\quad 0,9619444,$ $\qquad (0,1)\,\theta'\sin(\omega'-\omega) = -o'',0963\,m'$ $\quad 8,9834303,$

$(3,1)\ \frac{\theta'\cos(\omega'-\omega)}{\theta} = 3'',5598\,m'$ $\quad 0,5514294,$ $\qquad (3,1)\,\theta'\sin(\omega'-\omega) = -o'',0374\,m'$ $\quad 8,5729153,$

$(0,2)\ \frac{\theta''\cos(\omega''-\omega)}{\theta} = o'',0002\,m''$ $\quad 6,1953068,$ $\qquad (0,2)\,\theta''\sin(\omega''-\omega) = -o'',0000\,m''$ $\quad 5,1414765,$

$(3,2)\ \frac{\theta''\cos(\omega''-\omega)}{\theta} = o'',1419\,m''$ $\quad 9,1519735,$ $\qquad (3,2)\,\theta''\sin(\omega''-\omega) = -o'',0125\,m''$ $\quad 8,0981432,$

$(0,4)\ \frac{\theta^{iv}\cos(\omega^{iv}-\omega)}{\theta} = o'',0007\,m^{iv}$ $\quad 6,8709313,$ $\qquad (0,4)\,\theta^{iv}\sin(\omega^{iv}-\omega) = -o'',0000\,m^{iv}$ $\quad 5,4905043,$

$3,4)\ \frac{\theta^{iv}\cos(\omega^{iv}-\omega)}{\theta} = 8'',0564\,m^{iv}$ $\quad 0,9061446,$ $\qquad (3,4)\,\theta^{iv}\sin(\omega^{iv}-\omega) = -o'',2665\,m^{iv}$ $\quad 9,4257176,$

$(0,5)\ \frac{\theta^{v}\cos(\omega^{v}-\omega)}{\theta} = o'',0000\,m^{v}$ $\quad 5,4798117,$ $\qquad (0,5)\,\theta^{v}\sin(\omega^{v}-\omega) = -o'',0000\,m^{v}$ $\quad 4,4803034,$

$(3,5)\ \frac{\theta^{v}\cos(\omega^{v}-\omega)}{\theta} = o'',1095\,m^{v}$ $\quad 9,0394058,$ $\qquad (3,5)\,\theta^{v}\sin(\omega^{v}-\omega) = -o'',0110\,m^{v}$ $\quad 8,0398975,$

$(1,0)\ \frac{\theta\cos(\omega-\omega')}{\theta'} = 14'',1988\,m$ $\quad 1,1522504,$ $\qquad (1,0)\,\theta\sin(\omega-\omega') = o'',0786\,m$ $\quad 8,8955056,$

$(3,0)\ \frac{\theta\cos(\omega-\omega')}{\theta'} = o'',6278\,m$ $\quad 9,7978446,$ $\qquad (3,0)\,\theta\sin(\omega-\omega') = o'',0035\,m$ $\quad 7,5410998,$

$(1,2)\ \frac{\theta''\cos(\omega''-\omega')}{\theta'} = o'',0041\,m''$ $\quad 7,6075987,$ $\qquad (1,2)\,\theta''\sin(\omega''-\omega') = -o'',0001\,m''$ $\quad 6,0485690,$

$(3,2)\ \frac{\theta''\cos(\omega''-\omega')}{\theta'} = o'',3890\,m''$ $\quad 9,5899807,$ $\qquad (3,2)\,\theta''\sin(\omega''-\omega') = -o'',0107\,m''$ $\quad 8,0309510,$

$(1,4)\ \frac{\theta^{iv}\cos(\omega^{iv}-\omega')}{\theta'} = o'',0139\,m^{iv}$ $\quad 8,1428374,$ $\qquad (1,4)\,\theta^{iv}\sin(\omega^{iv}-\omega') = -o'',0001\,m^{iv}$ $\quad 6,1456689,$

$(3,4)\ \frac{\theta^{iv}\cos(\omega^{iv}-\omega')}{\theta'} = 17'',5695\,m^{iv}$ $\quad 1,2447594,$ $\qquad (3,4)\,\theta^{iv}\sin(\omega^{iv}-\omega') = -o'',1768\,m^{iv}$ $\quad 9,2475909,$

$(1,5)\ \frac{\theta^{v}\cos(\omega^{v}-\omega')}{\theta'} = o'',0007\,m^{v}$ $\quad 6,8615101,$ $\qquad (1,5)\,\theta^{v}\sin(\omega^{v}-\omega') = -o'',0000\,m^{v}$ $\quad 5,3451210,$

$(3,5)\ \frac{\theta^{v}\cos(\omega^{v}-\omega')}{\theta'} = o'',3133\,m^{v}$ $\quad 9,4959337,$ $\qquad (3,5)\,\theta^{v}\sin(\omega^{v}-\omega') = -o'',0095\,m^{v}$ $\quad 7,9795446,$

$(2,0)\ \frac{\theta\cos(\omega-\omega'')}{\theta''} = o'',3949\,m$ $\quad 9,5965044,$ $\qquad (2,0)\,\theta\sin(\omega-\omega'') = o'',0258\,m$ $\quad 8,4112978,$

$(3,0)\ \frac{\theta\cos(\omega-\omega'')}{\theta''} = o'',2042\,m$ $\quad 9,3100453,$ $\qquad (3,0)\,\theta\sin(\omega-\omega'') = o'',0133\,m$ $\quad 8,1248387,$

$(2,1)\ \frac{\theta' \cos(\omega' - \omega'')}{\theta''} = 6'',5840\, m'$ $\quad 0,8184908,$

$(2,1)\ \theta' \sin(\omega' - \omega'') = 0'',2549\, m'$ $\quad 9,4063159,$

$(3,1)\ \frac{\theta' \cos(\omega' - \omega'')}{\theta''} = 3'',1742\, m'$ $\quad 0,5016373,$

$(3,1)\ \theta' \sin(\omega' - \omega'') = 0'',1229\, m'$ $\quad 9,0894624.$

$(2,4)\ \frac{\theta^{IV} \cos(\omega^{IV} - \omega'')}{\theta''} = 1'',1086\, m^{IV}$ $\quad 0,0447833,$

$(2,4)\ \theta^{IV} \sin(\omega^{IV} - \omega'') = 0'',0179\, m^{IV}$ $\quad 8,2527208,$

$(3,4)\ \frac{\theta^{IV} \cos(\omega^{IV} - \omega'')}{\theta''} = 12'',2306\, m^{IV}$ $\quad 1,0874471,$

$(3,4)\ \theta^{IV} \sin(\omega^{IV} - \omega'') = 0'',1974\, m^{IV}$ $\quad 9,2953846,$

$(2,5)\ \frac{\theta^{V} \cos(\omega^{V} - \omega'')}{\theta''} = 0'',0688\, m^{V}$ $\quad 8,8376803,$

$(2,5)\ \theta^{V} \sin(\omega^{V} - \omega'') = -0'',0001\, m^{V}$ $\quad 6,0274752,$

$(3,5)\ \frac{\theta^{V} \cos(\omega^{V} - \omega'')}{\theta''} = 0'',3693\, m^{V}$ $\quad 9,5674076,$

$(3,5)\ \theta^{V} \sin(\omega^{V} - \omega'') = -0'',0006\, m^{V}$ $\quad 6,7572025,$

$(4,0)\ \frac{\theta \cos(\omega - \omega^{IV})}{\theta^{IV}} = 0'',1220\, m$ $\quad 9,0864319,$

$(4,0)\ \theta \sin(\omega - \omega^{IV}) = 0'',0055\, m$ $\quad 7,7378705,$

$(3,0)\ \frac{\theta \cos(\omega - \omega^{IV})}{\theta^{IV}} = 0'',2003\, m$ $\quad 9,3016120,$

$(3,0)\ \theta \sin(\omega - \omega^{IV}) = 0'',0090\, m$ $\quad 7,9530506,$

$(4,1)\ \frac{\theta' \cos(\omega' - \omega^{IV})}{\theta^{IV}} = 1'',4724\, m'$ $\quad 0,1680311,$

$(4,1)\ \theta' \sin(\omega' - \omega^{IV}) = 0'',0381\, m'$ $\quad 8,5809589,$

$(3,1)\ \frac{\theta' \cos(\omega' - \omega^{IV})}{\theta^{IV}} = 2'',4764\, m'$ $\quad 0,3938116,$

$(3,1)\ \theta' \sin(\omega' - \omega^{IV}) = 0'',0641\, m'$ $\quad 8,8067394,$

$(4,2)\ \frac{\theta'' \cos(\omega'' - \omega^{IV})}{\theta^{IV}} = 0'',0723\, m''$ $\quad 8,8590853,$

$(4,2)\ \theta'' \sin(\omega'' - \omega^{IV}) = -0'',0021\, m''$ $\quad 7,3302643,$

$(3,2)\ \frac{\theta'' \cos(\omega'' - \omega^{IV})}{\theta^{IV}} = 0'',2113\, m''$ $\quad 9,3248427,$

$(3,2)\ \theta'' \sin(\omega'' - \omega^{IV}) = -0'',0063\, m''$ $\quad 7,7960217,$

$(4,5)\ \frac{\theta^{V} \cos(\omega^{V} - \omega^{IV})}{\theta^{IV}} = 0'',7625\, m^{V}$ $\quad 9,8822425,$

$(4,5)\ \theta^{V} \sin(\omega^{V} - \omega^{IV}) = -0'',0253\, m^{V}$ $\quad 8,4036335,$

$(3,5)\ \frac{\theta^{V} \cos(\omega^{V} - \omega^{IV})}{\theta^{IV}} = 0'',1762\, m^{V}$ $\quad 9,2459289,$

$(3,5)\ \theta^{V} \sin(\omega^{V} - \omega^{IV}) = -0'',0059\, m^{V}$ $\quad 7,7673199,$

$(5,0)\ \frac{\theta \cos(\omega - \omega^{V})}{\theta^{V}} = 0'',0115\, m$ $\quad 8,0604010,$

$(5,0)\ \theta \sin(\omega - \omega^{V}) = 0'',0032\, m$ $\quad 7,5087637,$

$(3,0)\ \frac{\theta \cos(\omega - \omega^{V})}{\theta^{V}} = 0'',0485\, m$ $\quad 8,6861394,$

$(3,0)\ \theta \sin(\omega - \omega^{V}) = 0'',0136\, m$ $\quad 8,1345025,$

$(5,1)\ \frac{\theta' \cos(\omega' - \omega^{V})}{\theta^{V}} = 0'',1786\, m'$ $\quad 9,2517932,$

$(5,1)\ \theta' \sin(\omega' - \omega^{V}) = 0'',0289\, m'$ $\quad 8,4615058,$

$(3,1)\ \frac{\theta' \cos(\omega' - \omega^{V})}{\theta^{V}} = 0'',7875\, m'$ $\quad 9,8962521,$

$(3,1)\ \theta' \sin(\omega' - \omega^{V}) = 0'',1276\, m'$ $\quad 9,1059647,$

$(5,2)\ \frac{\theta'' \cos(\omega'' - \omega^{V})}{\theta^{V}} = 0'',0104\, m''$ $\quad 8,0177508,$

$(5,2)\ \theta'' \sin(\omega'' - \omega^{V}) = 0'',0001\, m''$ $\quad 5,7861126,$

$(3,2)\ \frac{\theta'' \cos(\omega'' - \omega^{V})}{\theta^{V}} = 0'',1139\, m''$ $\quad 9,0567494,$

$(3,2)\ \theta'' \sin(\omega'' - \omega^{V}) = 0'',0007\, m''$ $\quad 6,8251112,$

$(5,4)\ \frac{\theta^{IV} \cos(\omega^{IV} - \omega^{V})}{\theta^{V}} = 1'',7674\, m^{IV}$ $\quad 0,2473305,$

$(5,4)\ \theta^{IV} \sin(\omega^{IV} - \omega^{V}) = 0'',1215\, m^{IV}$ $\quad 9,0847269,$

$(3,4)\ \frac{\theta^{IV} \cos(\omega^{IV} - \omega^{V})}{\theta^{V}} = 3'',1420\, m^{IV}$ $\quad 0,4971951,$

$(3,4)\ \theta^{IV} \sin(\omega^{IV} - \omega^{V}) = 0'',2161\, m^{IV}$ $\quad 9,3345915,$

$$(3,0)\ \frac{\theta\cos\omega}{\operatorname{tang} I} = -0'',0123m \qquad (3,0)\ \theta\sin\omega = 0'',0139m$$
$$8,0904581, \qquad 8,1422893,$$

$$(3,1)\ \frac{\theta'\cos\omega'}{\operatorname{tang} I} = -0'',0485m' \qquad (3,1)\ \theta'\sin\omega' = 0'',1586m'$$
$$8,6859252, \qquad 9,2004031,$$

$$(3,2)\ \frac{\theta''\cos\omega''}{\operatorname{tang} I} = 0'',0218m'' \qquad (3,2)\ \theta''\sin\omega'' = 0'',0103m''$$
$$8,3381540, \qquad 8,0127053,$$

$$(3,4)\ \frac{\theta^{IV}\cos\omega^{IV}}{\operatorname{tang} I} = 0'',2808m^{IV} \qquad (3,4)\ \theta^{IV}\sin\omega^{IV} = 0'',4244m^{IV}$$
$$9,4483909, \qquad 9,6278188,$$

$$(3,5)\ \frac{\theta^{V}\cos\omega^{V}}{\operatorname{tang} I} = 0'',0196m^{V} \qquad (3,5)\ \theta^{V}\sin\omega^{V} = 0'',0084m^{V}$$
$$8,2917832, \qquad 7,9247703.$$

27. De là j'ai eu les résultats que voici.

Mouvements annuels des aphélies.

$$\frac{d\varpi}{dt} = 15'',9931m' + 0'',0006m'' + 0'',0010m''' + 0'',0007m^{IV},$$

$$\frac{d\varpi'}{dt} = 6'',5601m + 0'',0021m'' + 0'',0089m''' + 0'',0060m^{IV} + 0'',0002m^{V},$$

$$\frac{d\varpi''}{dt} = 0'',6955m + 12'',3083m' + 1'',9211m''' + 0'',7027m^{IV} + 0'',0208m^{V},$$

$$\frac{d\varpi'''}{dt} = 0'',1914m + 6'',7938m' + 1'',5461m'' + 5'',1969m^{IV} - 0'',4165m^{V},$$

$$\frac{d\varpi^{IV}}{dt} = 0'',0812m + 6'',3758m' + 1'',1854m'' - 5'',0579m''' - 4'',3043m^{V},$$

$$\frac{d\varpi^{V}}{dt} = 0'',0795m + 1'',5599m' + 0'',0408m'' + 0'',8391m''' + 4'',1412m^{IV}.$$

Variations annuelles des plus grandes équations.

$$\frac{2d\lambda}{dt} = -1'',1060m',$$

$$\frac{2d\lambda'}{dt} = 0'',5628m - 0'',0002m'',$$

$$\frac{2d\lambda''}{dt} = 0'',0130m + 0'',3168m' + 0'',0366m''' + 0'',0022m^{IV} + 0'',0022m^{V},$$

$$\frac{2d\lambda'''}{dt} = -0'',0008m - 0'',1602m' - 0'',0494m'' + 0'',0418m^{IV} - 0'',0080m^{V},$$

$$\frac{2d\lambda^{IV}}{dt} = -0'',0014m - 0'',0616m' - 0'',0064m'' - 0'',0902m''' - 0'',0902m^{V},$$

$$\frac{2d\lambda^{V}}{dt} = 0'',0002m - 0'',0126m' - 0'',0022m'' + 0'',0058m''' + 0'',0304m^{IV}.$$

Mouvements annuels des nœuds sur l'écliptique vraie.

$$\frac{d\Omega}{dt} = -0'',3403m - 12'',2792m' - 0'',1422m'' - 0'',0010m''' - 8'',0564m^{IV} - 0'',1095m^{V},$$

$$\frac{d\Omega'}{dt} = 5'',8758m - 6'',9480m' - 0'',3894m'' - 0'',0089m''' - 17'',5615m^{IV} - 0'',3128m^{V},$$

$$\frac{d\Omega''}{dt} = -0'',4674m - 11'',0018m' - 0'',4330m'' - 1'',7724m''' - 11'',7980m^{IV} - 0'',3187m^{V},$$

$$\frac{d\Omega^{IV}}{dt} = -0'',2856m - 5'',1352m' - 0'',2872m'' - 6'',6908m''' - 7'',4579m^{IV} + 0'',1640m^{V},$$

$$\frac{d\Omega^{V}}{dt} = -0'',1176m - 2'',1843m' - 0'',1431m'' - 0'',8696m''' - 5'',5698m^{IV} - 0'',0976m^{V}.$$

Variations annuelles des inclinaisons sur l'écliptique vraie.

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0'',0589\,m' - 0'',0125\,m'' - 0'',2665\,m^{IV} - 0'',0110\,m^{V},$$

$$\frac{d\vartheta'}{dt} = -0'',0751\,m - 0'',0106\,m'' - 0'',1767\,m^{IV} - 0'',0095\,m^{V},$$

$$\frac{d\vartheta''}{dt} = -0'',0125\,m - 0'',1320\,m' + 0'',1795\,m^{IV} - 0'',0005\,m^{V},$$

$$\frac{d\vartheta^{IV}}{dt} = 0'',0035\,m + 0'',0260\,m' - 0'',0042\,m'' + 0'',0194\,m^{V},$$

$$\frac{d\vartheta^{V}}{dt} = 0'',0104\,m + 0'',0987\,m' + 0'',0006\,m'' + 0'',0946\,m^{IV}.$$

Mouvements annuels des nœuds sur l'écliptique fixe de 1700.

$$\frac{d\omega}{dt} = -8'',7194\,m' - 0'',0003\,m'' - 0'',0010\,m''',$$

$$\frac{d\omega'}{dt} = 6'',5036\,m - 0'',0004\,m'' - 0'',0089\,m''' + 0'',0080\,m^{IV} - 0'',0005\,m^{V},$$

$$\frac{d\omega''}{dt} = -0'',2632\,m - 7'',8276\,m' - 1'',7724\,m''' + 0'',4326\,m^{IV} + 0'',0506\,m^{V},$$

$$\frac{d\omega^{IV}}{dt} = -0'',0853\,m - 2'',6588\,m' - 0'',0759\,m'' - 6'',6908\,m''' + 0'',3402\,m^{V},$$

$$\frac{d\omega^{V}}{dt} = -0'',0691\,m - 1'',3968\,m' - 0'',0292\,m'' - 0'',8696\,m''' - 2'',4278\,m^{IV}.$$

Variations annuelles des inclinaisons sur l'écliptique fixe de 1700.

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0'',0963\,m',$$

$$\frac{d\vartheta'}{dt} = -0'',0786\,m + 0'',0001\,m'' + 0'',0001\,m^{IV},$$

$$\frac{d\vartheta''}{dt} = -0'',0258\,m - 0'',2549\,m' - 0'',0179\,m^{IV} + 0'',0001\,m^{V},$$

$$\frac{d\vartheta^{IV}}{dt} = -0'',0055\,m - 0'',0381\,m' + 0'',0021\,m'' + 0'',0253\,m^{V},$$

$$\frac{d\vartheta^{V}}{dt} = -0'',0032\,m - 0'',0289\,m' + 0'',0006\,m'' - 0'',1215\,m^{IV}.$$

Mouvement annuel des équinoxes en longitude.

$$\frac{ds''}{dt}\cot I = -0'',0123\,m - 0'',0485\,m' + 0'',0218\,m'' + 0'',2808\,m^{IV} + 0'',0196\,m^{V}.$$

Variation annuelle de l'obliquité de l'écliptique.

$$\frac{du''}{dt} = -0'',0139\,m - 0'',1586\,m' - 0'',0103\,m'' - 0'',4244\,m^{IV} - 0'',0084\,m^{V}.$$

Si l'on fait cette dernière quantité $= i$ et la précédente $= \eta$, on aura les variations annuelles de la latitude et de la longitude des étoiles, en substituant ces valeurs dans les formules de ces variations, que nous avons données dans le n° 19.

28. Telles sont les valeurs que la Théorie donne pour les variations annuelles des éléments des Planètes; et, quoique ces valeurs ne se rapportent qu'au commencement de ce siècle, elles peuvent néanmoins, comme nous l'avons fait voir plus haut, servir pour quelques siècles, avant ou après cette époque.

Les quantités m, m', m'',..., contenues dans ces valeurs, expriment les rapports des véritables masses des Planètes à celles que nous avons déterminées dans la Section précédente (14) par la considération des satellites, et par la comparaison des volumes et des densités; comme ces déterminations peuvent être sujettes à des incertitudes de la part des éléments qui y servent de base, pour n'en laisser aucune dans les résultats de nos calculs, nous avons encore multiplié les masses trouvées par les coefficients indéterminés m, m', m'',..., afin d'avoir par là des formules générales pour des masses quelconques. Mais, quelques corrections que

ces masses puissent demander, il paraît certain qu'elles ne sauraient être que fort petites, et qu'ainsi les coefficients dont il s'agit ne peuvent différer que très-peu de l'unité. De sorte que, si l'on fait

$$m = 1 + \mu, \quad m' = 1 + \mu', \quad m'' = 1 + \mu'', \ldots,$$

les quantités μ, μ', μ'',... seront nécessairement des fractions fort petites et exprimeront les corrections à faire aux masses que nous avons adoptées.

Nous ferons donc ces substitutions dans les expressions précédentes, et, comme nous avons jusqu'ici compté les longitudes depuis un point fixe, qui dans ces expressions répond à l'équinoxe de 1700, il faudra, par rapport aux aphélies et aux nœuds, ajouter à leurs variations annuelles le mouvement rétrograde annuel des équinoxes qu'on sait être de $50''\frac{1}{2}$, pour avoir les changements entiers de ces éléments pendant une année.

29. De cette manière on aura les variations annuelles totales des éléments des six Planètes principales, comme il suit

Saturne.

Aphélie..... $66'',3287 + 15'',9931\mu' + 0'',0006\mu'' + 0'',0010\mu''' + 0'',0007\mu^{IV}$,

Équation..... $-1'',1060 - 1'',1060\mu'$,

Nœud vrai..... $29'',4047 - 0'',3403\mu - 12'',2792\mu' - 0'',1422\mu'' - 0'',0010\mu''' - 8'',0564\mu^{IV} - 0'',1095\mu^{V}$,

Inclin. vraie..... $-0'',2311 + 0'',0589\mu' - 0'',0125\mu'' - 0'',2665\mu^{IV} - 0'',0110\mu^{V}$,

Nœud moyen.... $41'',6126 - 8'',7194\mu' - 0'',0003\mu'' - 0'',0010\mu'''$,

Inclin. moyenne. $0'',0963 + 0'',0963\mu'$.

Jupiter.

Aphélie..... $56'',9106 + 6'',5601\mu + 0'',0021\mu'' + 0'',0089\mu''' + 0'',0060\mu^{IV} + 0'',0002\mu^{V}$,

Équation..... $0'',5626 + 0'',5628\mu - 0'',0003\mu''$,

Nœud vrai ..... $30'',9885 + 5'',8758\mu - 6'',9480\mu' - 0'',3894\mu'' - 0'',0089\mu''' - 17'',5615\mu^{IV} - 0'',3128\mu^{V}$,

Inclin. vraie..... $-0'',2719 - 0'',0751\mu - 0'',0106\mu'' - 0'',1767\mu^{IV} - 0'',0095\mu^{V}$,

Nœud moyen.... $56'',8351 + 6'',5036\mu - 0'',0004\mu'' - 0'',0089\mu''' + 0'',0080\mu^{IV} - 0'',0005\mu^{V}$,

Inclin. moyenne. $-0'',0784 - 0'',0786\mu + 0'',0001\mu'' + 0'',0001\mu^{IV}$.

Mars.

Aphélie..... $65'',9817 + 0'',6955\mu + 12'',3083\mu' + 1'',9211\mu'' + 0'',7027\mu^{IV} + 0'',0208\mu^{V}$,

Équation..... $0'',3708 + 0'',0130\mu + 0'',3168\mu' + 0'',0366\mu''' + 0'',0022\mu^{IV} + 0'',0022\mu^{V}$,

Nœud vrai ..... $24'',5420 - 0'',4674\mu - 11'',0018\mu' - 0'',4330\mu'' - 1'',7724\mu''' - 11'',7980\mu^{IV} - 0'',3187\mu^{V}$,

Inclin. vraie..... $0'',0345 - 0'',0125\mu - 0'',1320\mu' + 0'',1795\mu^{IV} - 0'',0005\mu^{V}$,

Nœud moyen.... $40'',9533 - 0'',2632\mu - 7'',8276\mu' - 1'',7724\mu'' + 0'',4326\mu^{IV} + 0'',0506\mu^{V}$,

Inclin. moyenne. $-0'',2985 - 0'',0258\mu - 0'',2549\mu' - 0'',0179\mu^{IV} + 0'',0001\mu^{V}$.

Vénus.

Aphélie..... $48'',6135 + 0'',0812\mu + 6'',3758\mu' + 1'',1854\mu'' - 5'',0579\mu''' - 4'',3043\mu^{V}$,

Équation..... $-0'',2498 - 0'',0014\mu - 0'',0616\mu' - 0'',0064\mu'' - 0'',0902\mu''' - 0'',0902\mu^{V}$,

Nœud vrai..... $30'',6406 - 0'',2856\mu - 5'',1352\mu' - 0'',2872\mu'' - 6'',6908\mu''' - 7'',4579\mu^{IV} + 0'',1640\mu^{V}$,

Inclin. vraie..... $0'',0447 + 0'',0035\mu + 0'',0260\mu' - 0'',0042\mu'' + 0'',0194\mu^{V}$,

Nœud moyen.... $41'',1627 - 0'',0853\mu - 2'',6588\mu' - 0'',0759\mu'' - 6'',6908\mu''' + 0'',3402\mu^{iv}$,

Inclin. moyenne. $-0'',0162 - 0'',0055\mu - 0'',0381\mu' + 0'',0021\mu'' + 0'',0253\mu^{iv}$.

Mercure.

Aphélie..... $56'',9938 + 0'',0795\mu + 1'',5599\mu' + 0'',0408\mu'' + 0'',8391\mu''' + 4'',1412\mu^{iv}$,

Équation..... $0'',0216 + 0'',0002\mu - 0'',0126\mu' - 0'',0022\mu'' + 0'',0058\mu''' + 0'',0304\mu^{iv}$,

Nœud vrai..... $41'',3513 - 0'',1176\mu - 2'',1843\mu' - 0'',1431\mu'' - 0'',8696\mu''' - 5'',5698\mu^{iv} - 0'',0976\mu^{v}$,

Inclin. vraie.... $0'',2043 + 0'',0104\mu + 0'',0987\mu' + 0'',0006\mu'' + 0'',0946\mu^{iv}$,

Nœud moyen.... $45'',5408 - 0'',0691\mu - 1'',3988\mu' - 0'',0292\mu'' - 0'',8696\mu''' - 2'',4278\mu^{iv}$,

Inclin. moyenne. $-0'',1530 - 0'',0032\mu - 0'',0289\mu' + 0'',0006\mu'' - 0'',1215\mu^{iv}$.

Soleil.

Apogée..... $63'',6450 + 0'',1914\mu + 6'',7938\mu' + 1'',5461\mu'' + 5'',1969\mu^{iv} - 0'',4165\mu^{v}$,

Équation..... $-0'',1766 - 0'',0008\mu - 0'',1602\mu' - 0'',0494\mu'' + 0'',0418\mu^{iv} - 0'',0080\mu^{v}$.

Mouvement des points équinoxiaux en longitude. $0'',2614 - 0'',0123\mu - 0'',0485\mu' + 0'',0218\mu'' + 0,2809\mu^{iv} + 0'',0196\mu^{v}$,

Diminution de l'obliquité de l'écliptique. $0'',6156 + 0'',0139\mu + 0'',1586\mu' + 0'',0103\mu'' + 0'',4244\mu^{iv} + 0'',0084\mu^{v}$.

Ces valeurs, étant multipliées par 100, donneront les variations séculaires, et pour cela il n'y aura qu'à faire avancer de deux chiffres la virgule qui sépare les décimales.

J'entends, au reste, par nœud et inclinaison vrais le nœud et l'inclinaison de la Planète sur le plan mobile de l'orbite réelle de la Terre, et par nœud et inclinaison moyens le nœud et l'inclinaison sur l'écliptique de 1700 regardée comme fixe.

30. Il ne reste plus maintenant qu'à comparer les quantités que nous venons de trouver par la Théorie, avec celles qui résultent des observations. Il y a longtemps qu'on a reconnu que les aphélies et les nœuds des Planètes ont des mouvements propres; mais les Astronomes ne sont point d'accord sur la quantité de ces mouvements; il en est de même de la diminution de l'obliquité de l'écliptique dont l'existence est hors de doute, mais dont la quantité paraît encore incertaine. Quant aux équations du centre et aux inclinaisons, quoique les observations y semblent indiquer aussi quelques changements, elles sont encore en trop petit nombre et trop peu d'accord entre elles pour servir à déterminer les variations annuelles de ces éléments; d'ailleurs ces variations sont trop petites pour pouvoir être aperçues, même dans l'espace d'un ou de deux siècles, et l'on ne peut pas assez compter sur l'exactitude des anciennes observations pour les employer à des recherches aussi délicates. Nous nous contenterons donc ici de considérer les mouvements des aphélies et des nœuds, et la diminution de l'obliquité de l'écliptique; encore par rapport aux mouvements des nœuds y a-t-il une difficulté considérable, qui rend incertaine toute comparaison de la Théorie avec les observations : c'est qu'on ignore si les mouvements donnés par les observations doivent être rapportés au plan de la véritable écliptique ou route de la Terre, lequel est mobile comme celui des autres Planètes, ou bien à une écliptique supposée fixe. Nous avons calculé, pour plus de généralité, les mouvements des nœuds et les variations des inclinaisons dans l'une et dans l'autre hypothèse, en prenant pour l'écliptique fixe celle du commencement de 1700, époque à laquelle nous avons rapporté tous les autres éléments; et l'on voit que les résultats sont assez différents dans les deux hypothèses pour qu'il ne soit pas permis de les confondre et de les employer indistinctement. Mais comme ce n'est que dans ces derniers

temps que les Astronomes se sont convaincus de la mobilité de l'écliptique qu'ils avaient toujours prise pour fixe dans le ciel, ils n'ont pas tenu compte jusqu'ici de cette circonstance dans la détermination des nœuds et des inclinaisons des Planètes; et il faudrait peut-être discuter de nouveau les observations originales qui ont servi à déterminer ces éléments, pour pouvoir en déduire des résultats exempts d'incertitude.

En général, il paraît que les Planètes inférieures, qui se comparent immédiatement au Soleil, doivent se trouver rapportées naturellement à l'écliptique vraie; mais quant aux Planètes supérieures, qu'on ne compare immédiatement qu'aux étoiles, tout dépend de la manière dont on aura déterminé les longitudes et les latitudes des étoiles auxquelles on les compare; cependant, comme on peut toujours corriger ces longitudes et latitudes, relativement aux variations de l'écliptique, il est possible d'avoir aussi la position des orbites des Planètes supérieures relativement à l'écliptique vraie, comme celle des inférieures. C'est un point auquel nous exhortons les Astronomes à se rendre attentifs.

Quoi qu'il en soit, nous rapporterons ici succinctement ce que les Astronomes ont découvert relativement aux éléments dont il s'agit; mais nous croyons devoir nous borner aux résultats des observations faites depuis Tycho jusqu'ici, d'un côté parce que les observations plus anciennes méritent peu de confiance par la manière vague et inexacte avec laquelle elles paraissent avoir été faites, ou du moins nous avoir été transmises; de l'autre parce que les variations annuelles déduites de la Théorie ne sont rigoureusement exactes que pour l'espace d'un ou de deux siècles tout au plus, à compter de l'époque pour laquelle elles sont calculées, et que nous avons fixée au commencement de 1700.

31. Commençons par considérer les mouvements des aphélies, et d'abord celui de Saturne.

On voit par les *Éléments d'Astronomie* de Cassini et par l'*Astronomie* de M. de Lalande que les observations de Tycho, comparées à celles du siècle passé et de celui-ci, donnent, à raison des différents intervalles de temps, les mouvements annuels suivants

De 1590 à 1694..... 1′ 55″,
1590 à 1708..... 1′ 23″,5,
1590 à 1769..... 1′ 34″,7.

Si l'on consulte les *Tables Astronomiques*, on trouve ceux-ci

Cassini..... 1′ 18″,
Halley..... 1′ 20″,
De Lalande..... 1′ 30″.

Enfin la Théorie donne, en négligeant les centièmes de seconde, $66'',3 + 16'',0\mu'$.

Il paraît donc que, pour accorder la Théorie avec les observations, il faudrait supposer μ' égal à l'unité ou même plus grand, ce qui reviendrait à faire la masse de Jupiter une fois plus grande que nous ne l'avons déterminée d'après les temps périodiques et les distances observées de ses satellites; or c'est ce qui ne paraît en aucune manière admissible. Il est donc extrêmement probable que les grands dérangements auxquels on sait que le mouvement de Saturne est sujet, et dont on ignore encore la loi et la cause, produisent ces différences entre la Théorie et les observations relativement au mouvement de l'aphélie; et par cette raison il me semble qu'il conviendrait peut-être de donner sur ce point la préférence à la Théorie, en réduisant dans les Tables le mouvement de l'aphélie de Saturne à 1′6″, puisque, de toutes les masses des Planètes, celle de Jupiter est peut-être une des mieux déterminées par les observations des satellites.

32. Passons à l'aphélie de celle-ci : nous avons sur les éléments de Jupiter, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, un beau travail de M. Bailly qui nous dispense de recourir ailleurs pour notre objet.

M. Bailly, ayant choisi et combiné trois à trois un certain nombre d'observations de Jupiter, en a conclu les éléments de cette Planète pour

différentes époques, et de là il a trouvé, à raison des intervalles de temps entre ces époques, ces mouvements annuels de l'aphélie

De 1590 à 1762	65″,9.
1661 à 1762	60″,7.
1703 à 1762	60″,1.

Selon les *Tables Astronomiques* on a

Cassini	57″24‴.
Halley	72″,
Wargentin, de Lalande	62″.

La Théorie donne $56'',9 + 6'',6\mu$.

Il faudrait donc ici de nouveau supposer μ égal ou presque égal à l'unité pour accorder la Théorie avec les observations, et par conséquent rendre la masse de Saturne presque double de ce que nous l'avons faite. Quoique la masse de Saturne ne soit pas aussi bien connue que celle de Jupiter par l'incertitude qui reste encore sur les distances des satellites, il ne paraît cependant pas possible qu'elle soit susceptible d'une si forte correction. Il est vrai que nous avons cru devoir faire cette masse plus petite que Newton ne l'avait déterminée, par les raisons détaillées dans la Section précédente; mais la différence n'est pas d'un dixième; et, faisant seulement $\mu = \frac{1}{10}$ dans la formule ci-dessus, on n'augmenterait par là le mouvement de l'aphélie que d'environ une demi-seconde.

Au reste, M. Bailly donne lui-même la préférence au mouvement annuel des Tables de Cassini, qui n'est que de 57″, par la raison qu'il s'accorde mieux qu'aucun autre avec les anciennes observations de Ptolémée; ainsi, en adoptant ce mouvement, on peut supposer à très-peu près nulle la correction μ de la masse de Saturne.

M. Bailly a examiné aussi les variations de l'équation du centre de Jupiter, et il a trouvé que toutes les observations concourent à y montrer une augmentation continuelle; mais elles ne s'accordent pas sur la quantité de cette augmentation : par les unes on trouve 1′56″ d'augmentation

séculaire, par d'autres 1′43″, et M. Wargentin la suppose de 2′15″; mais M. Bailly remarque que ces différences dépendent beaucoup des petites équations de Mayer dont l'exactitude n'est peut-être pas encore assez constatée.

La Théorie ne donne pour cette augmentation séculaire que $56'' + 56''\mu$; et l'on peut en conclure qu'elle est nécessairement moindre que les déterminations précédentes, puisqu'il faudrait faire presque $\mu = 1$ pour la porter à 1′40″.

33. A l'égard de l'aphélie de Mars, Cassini l'a trouvé pour le commencement de 1696 à 5ˢ0°31′34″. M. de Lalande l'a trouvé en 1748 à 5ˢ1°26′10″; ces deux époques comparées ensemble donnent pour mouvement annuel 63″. Mais si l'on compare l'époque de M. de Lalande avec celle de Kepler pour 1592, laquelle est de 4ˢ28°49′50″, on a 1′ de mouvement annuel.

Par les Tables on a

Cassini	1′12″,
Halley	1′10″,
De Lalande	1′ 7″.

La Théorie donne, en rejetant les corrections des masses, 66″; ce qui tient le milieu entre les déterminations précédentes, et s'approche fort de celle de M. de Lalande.

34. Pour ce qui est de l'aphélie de Vénus, Cassini a trouvé que les lieux déterminés par les observations de Tycho, de Byrgius, d'Horoccius, et par les siennes, donnent ces mouvements annuels à raison des intervalles suivants

De 1596 à 1716	2′28″,
1639 à 1716	1′26″;

et, joignant à ces observations celles de M. de Lalande, on a

De 1596 à 1768	2′28″.

Selon les Tables Astronomiques, on a

Cassini	$1'26''$,
Halley	$56''\frac{1}{2}$,
De Lalande	$1'27''$.

La Théorie donne, en négligeant les centièmes de seconde,

$$48'',6 + 6'',4\mu' + 1'',2\mu'' - 5'',1\mu''' - 4'',3\mu^{v};$$

ainsi, pour que cette quantité allât au delà d'une minute, il faudrait donner des valeurs assez grandes positives à μ' et μ'', et assez grandes négatives à μ''', μ^{v}; mais en faisant μ' et μ'' égaux à 1, et μ''', μ^{v} égaux à -1, ce qui reviendrait à supposer les masses de Jupiter et de Mars doubles, et celles de la Terre et de Mercure nulles, on n'aurait qu'environ $1'3''$, ce qui est encore assez éloigné des observations.

De là, et du peu d'accord qu'il y a entre les résultats des différentes observations et les éléments des différentes Tables, je conclus que le mouvement de l'aphélie de Vénus est encore trop peu connu, et qu'il serait peut-être mieux de le déterminer uniquement d'après la Théorie en le réduisant à $48''$ ou à peu près.

35. Il n'y a guère plus d'accord entre les Astronomes relativement à l'aphélie de Mercure.

Cassini, l'ayant fixé à $8^{s}12^{o}22'25''$ pour le 9 novembre 1690, a trouvé que cette époque, combinée avec un mouvement annuel de $1'20''$, répondait assez bien aux passages observés dans le dernier siècle et au commencement de celui-ci.

M. de Lalande, par les passages de 1740, 1743 et 1753, a déterminé cet aphélie pour le 6 mai 1753 à $8^{s}13^{o}55'8''$; et cette époque, comparée à la précédente, donne un mouvement annuel de $1'29''$. Cependant M. de Lalande le réduit à $1'10''$ pour mieux accorder les observations modernes avec celles de Ptolémée.

Enfin Halley ne fait ce mouvement que de $52''\frac{1}{2}$; et il paraît néanmoins que ses Tables représentent assez bien les différents passages arrivés dans ces deux derniers siècles.

La Théorie donne $57''$, en négligeant les corrections des masses, quantité qui tient le milieu entre celles de Halley et de M. de Lalande, et, comme la seule correction un peu sensible est celle qui pourrait venir de la masse de Vénus, et qui est de $4''\times\mu^{iv}$, il s'ensuit que le mouvement annuel de l'aphélie de Mercure ne saurait être plus grand que $61''$ ni moindre que $53''$, qui sont les valeurs que l'on aurait en faisant $\mu^{iv}=1$ ou $\mu^{iv}=-1$, c'est-à-dire en doublant la masse de Vénus ou en la réduisant à zéro.

36. Venons enfin à l'apogée du Soleil. L'Abbé de la Caille, qui s'est occupé avec tant de succès de la Théorie de cette Planète, a trouvé que la plupart des observations s'accordaient à donner à cet apogée un mouvement annuel entre $1'6''$ et $1'5''$, et il a en conséquence adopté $1'5''\frac{1}{2}$; mais Mayer le fait dans ses Tables de $1'6''$, et M. Lemonnier ne le suppose que de $1'3''$.

La Théorie donne, en négligeant les corrections des masses, $63'',645$, valeur qui s'accorde assez avec les précédentes; et, comme les principales corrections sont celles qui viendraient des masses de Jupiter et de Vénus, et qu'elles sont l'une et l'autre positives, il s'ensuit qu'il faudrait augmenter ces masses pour rendre le mouvement de l'apogée plus considérable; en les augmentant l'une et l'autre d'un dixième, ce mouvement serait alors à très-peu près de $65''$, comme la Caille l'a trouvé.

A l'égard de la plus grande équation du Soleil, on voit par notre formule qu'elle va en diminuant; mais comme cette diminution n'est guère que de $18''$ par siècle, elle ne pourra être aperçue qu'au bout d'un temps très-considérable. Cependant l'existence de cette diminution paraît déjà confirmée par les anciennes déterminations, qui donnent toutes une équation du centre du Soleil plus grande que celle d'aujourd'hui, comme M. Bailly l'observe dans l'*Astronomie moderne*, tome III, page 251.

37. Considérons maintenant les variations de l'obliquité de l'écliptique. L'observation et la Théorie s'accordent à prouver que cette obliquité va en diminuant; mais les Astronomes sont encore partagés sur la quantité de sa diminution séculaire. Cependant les recherches que

M. Cassini le fils a faites en dernier lieu sur ce sujet, et dont il a donné les résultats en 1778 à l'Académie des Sciences de Paris, paraissent très-propres, par la précision et la finesse qui les distinguent, à décider cette question, du moins jusqu'à ce qu'une plus longue suite d'observations exactes nous apporte de nouvelles lumières sur les lois de ce phénomène.

M. Cassini, persuadé avec raison que, dans les points d'Astronomie de la nature de celui-ci, des observations faites avec une grande exactitude pendant l'espace d'un seul siècle doivent l'emporter sur plusieurs siècles d'observations inexactes, s'est contenté de discuter celles qui ont été faites à l'Observatoire de Paris, et qu'il a trouvées consignées dans les Registres originaux; il en déduit les résultats suivants

ANNÉES.	INTERVALLE.	PAR LES OBSERVATIONS	DIMINUTION DE L'OBLIQUITÉ	
			observée.	par siècle.
De 1755 à 1778	23 ans.	du solstice d'été.	14″	60″
» »	»	d'Arcturus.	14	60
De 1743 à 1778	35 ans.	du solstice d'été.	29,3	83
» »	»	d'Arcturus.	31	88
De 1743 à 1774	31 ans.	des solstices.	22	71
De 1739 à 1778	39 ans.	du solstice d'été.	32	82
De 1689 à 1778	89 ans.	de β d'Hercule.	56,5	63
De 1669 à 1778	109 ans.	de β d'Hercule.	66,4	61

M. Cassini remarque en même temps que les observations dans lesquelles on compare le Soleil à une fixe ont de l'avantage sur celles des hauteurs immédiates du Soleil; et les observations relatives à l'étoile β d'Hercule paraissent en avoir aussi sur celles qui ont rapport à Arcturus, à cause du mouvement particulier de cette étoile, dont il faut tenir compte, et qu'on doit par conséquent connaître d'ailleurs. Par cette raison il paraît que le dernier des résultats que nous venons de rapporter

mérite la préférence sur tous les autres, comme étant en même temps celui qui répond au plus grand intervalle entre les observations. D'ailleurs ce résultat, qui est de 61″ par siècle, tient presque le milieu entre ceux qui paraissent les plus certains et qui s'accordent le mieux ensemble. Ainsi nous croyons qu'on peut regarder la diminution séculaire de 61″ dans l'obliquité de l'écliptique comme aussi prouvée par les observations qu'on puisse le désirer dans l'état actuel de l'Astronomie.

Or cette quantité est à très-peu près celle qui résulte de notre Théorie en supposant nulles les corrections des masses; car, ayant dans ce cas 0″,6156 pour la diminution annuelle, on aura 61″,56 pour la séculaire.

Quant à ces corrections, on voit qu'elles sont toutes positives, de sorte qu'en augmentant les valeurs des masses des Planètes on augmenterait la quantité de la diminution de l'écliptique, et réciproquement en diminuant celles-là on rendrait celle-ci moindre. On voit aussi que les principales de ces corrections sont celles qui dépendent des masses de Jupiter et de Vénus; elles sont représentées par les termes $15'',86\mu' + 42'',44\mu^{IV}$; en sorte que, si l'on voulait augmenter chacune de ces masses d'un dixième, pour rendre le mouvement de l'apogée plus conforme à celui que l'Abbé de la Caille a établi, on augmenterait en même temps d'environ 5″ la quantité séculaire de la diminution de l'écliptique; ce qui paraît trop fort.

Il résulte encore de là qu'on ne saurait rabaisser cette quantité à près de 30″, comme des Astronomes célèbres le prétendent, sans diminuer la masse de Vénus d'environ trois quarts, puisque celle de Jupiter, qui est donnée par les observations immédiates des satellites, ne paraît guère susceptible de correction; mais, outre qu'une si grande diminution dans la masse de Vénus paraît hors de toute vraisemblance, il s'ensuivrait que le mouvement annuel de l'apogée du Soleil se trouverait encore par là diminué d'environ 4″, et par conséquent d'autant plus éloigné de la quantité adoptée généralement par tous les Astronomes.

38. A l'égard du mouvement des points équinoxiaux résultant du déplacement de l'écliptique, les observations ne peuvent le faire connaître

en particulier, parce qu'il s'y trouve confondu avec celui des mêmes points qui résulte du déplacement de l'équateur; la différence de ces deux mouvements, dont le premier est direct et l'autre rétrograde, forme la rétrogradation totale des points équinoxiaux, qui est evaluée à $50''\frac{1}{3}$ par an. On voit donc seulement par notre Théorie que cette quantité n'est qu'une partie de celle qui est due au mouvement de l'axe de la Terre autour des pôles de l'écliptique; et qu'il y faut ajouter environ un quart de seconde pour avoir l'effet entier de l'action du Soleil et de la Lune sur l'équateur.

39. Il resterait encore à examiner les mouvements des nœuds des Planètes; mais il y a ici, comme sur les mouvements des aphélies, trop peu d'accord entre les résultats des différentes observations, pour en pouvoir rien conclure pour ou contre la Théorie; l'incertitude est même beaucoup plus grande relativement aux nœuds que par rapport aux aphélies, à cause de la mobilité de l'écliptique elle-même, à laquelle il ne parait pas que les Astronomes aient encore eu égard. Ainsi, jusqu'à ce que de nouvelles recherches de leur part jointes à de nouvelles observations aient fixé ces éléments avec plus de précision, il serait peut-être mieux de s'en rapporter là-dessus uniquement à la Théorie, et d'adopter pour les mouvements des aphélies et des nœuds les quantités que nous avons trouvées d'après les valeurs les plus probables des masses des Planètes.

SECTION TROISIÈME.

EXPRESSIONS GÉNÉRALES ET COMPLÈTES DES VARIATIONS SÉCULAIRES DES ÉLÉMENTS DES SIX PLANÈTES PRINCIPALES, POUR UN TEMPS INDÉFINI.

40. Les résultats trouvés, dans la Section précédente, pour les variations annuelles des éléments des six Planètes principales ne peuvent servir, comme nous l'avons remarqué, que pendant quelques siècles avant ou après l'époque de 1700, à laquelle ils se rapportent; ainsi l'on ne saurait connaitre par leur moyen la période de ces variations, ni par conséquent déterminer quelle sera au bout d'un temps quelconque la valeur des éléments.

A la vérité cette détermination indéfinie n'est point nécessaire pour l'Astronomie dans son état actuel, parce que le petit nombre d'observations exactes, sur lesquelles elle peut compter, ne lui permet pas d'embrasser des phénomènes aussi délicats dans l'étendue de plusieurs siècles; mais il n'en est pas de même de l'Astronomie physique, dont le but est de suppléer aux observations, en découvrant, d'après elles, les lois qui règlent la marche des phénomènes; et parmi ces lois il n'en est peut-être point de plus intéressantes à connaitre que celles des variations lentes et insensibles des orbites des Planètes, puisque cette connaissance peut seule nous mettre en état de prononcer sur l'importante question de la stabilité de notre Système planétaire.

Nous avons déjà décidé le point principal de cette question, en démontrant rigoureusement que les distances moyennes des Planètes au Soleil et leurs temps périodiques autour de cet astre ne peuvent, en vertu de l'attraction mutuelle, être sujets à aucune espèce de variation séculaire (première Partie, n° 36); mais comme les excentricités et les inclinaisons des orbites sont au contraire, par l'effet de cette attraction, nécessairement variables, il est clair que le système pourrait cependant changer de forme, et que la permanence de sa constitution actuelle dépend de plus de la condition que ces éléments demeurent toujours fort petits, tels que nous les observons; or cette condition, si elle a lieu, ne peut se conclure que des expressions générales des variations séculaires, et demande par conséquent l'intégration des équations différentielles qui renferment la loi de ces variations. Cette intégration est donc une des parties les plus essentielles de l'objet que nous nous sommes proposé, et c'est aussi la seule qui nous reste encore à remplir pour compléter la Théorie des variations séculaires; elle va faire la matière de cette Section.

41. Avant d'entrer dans le détail de l'intégration dont il s'agit, nous commencerons par quelques considérations générales sur la forme des intégrales.

Nous avons déjà vu dans la première Partie (51) que les valeurs complètes des variables x, y pour chaque Planète sont de cette forme

$$A\sin(at+\alpha)+B\sin(bt+\beta)+C\sin(ct+\gamma)+\ldots,$$
$$A\cos(at+\alpha)+B\cos(bt+\beta)+C\cos(ct+\gamma)+\ldots,$$

les coefficients a, b, c,... étant les racines d'une équation déterminée d'un degré égal au nombre des Planètes qui altèrent mutuellement leurs orbites, et A, B, C,..., α, β, γ,... étant des constantes arbitraires dont la détermination dépend des valeurs de x et y pour chaque Planète à une époque donnée. Il faut donc, pour que ces expressions ne contiennent point d'arcs de cercle, mais seulement des sinus et cosinus d'angles, que les racines de l'équation dont il s'agit soient toutes réelles et inégales; les racines égales y feraient entrer l'arc t et ses puissances hors du signe de sinus ou cosinus, et les racines imaginaires y donneraient, au lieu de sinus et cosinus, des exponentielles réelles. Dans l'un et dans l'autre cas, les valeurs de x et y ne seraient plus resserrées entre de certaines bornes, mais pourraient augmenter continuellement; et comme les équations qui déterminent ces valeurs sont fondées sur la supposition qu'elles soient fort petites, ces équations cesseraient alors d'être exactes au bout de quelque temps, lorsque les valeurs dont il s'agit seraient parvenues à une certaine grandeur.

Donc, puisque

$$x=\lambda\sin\varphi,\quad y=\lambda\cos\varphi,$$

en nommant λ l'excentricité et φ la longitude de l'aphélie, il est visible que la valeur de $\lambda=\sqrt{x^2+y^2}$ pourra être sujette à des variations considérables si l'équation d'où dépendent les quantités a, b, c,... n'a pas toutes ses racines réelles et inégales; au contraire, si les racines de cette équation sont toutes réelles et inégales, la valeur de λ ne pourra passer certaines limites.

En effet, en substituant les expressions de x et y, on aura

$$\lambda=\sqrt{A^2+B^2+C^2+\ldots+2AB\cos[(a-b)t+\alpha-\beta]+2AC\cos[(a-c)t+\alpha-\gamma]+2BC\cos[(b-c)t+\beta-\gamma]+\ldots},$$

quantité dont la valeur, tant que les cosinus sont tous réels, ne peut jamais surpasser la somme de tous les coefficients A, B, C,... pris avec le même signe.

De là il s'ensuit donc que, si pour les Planètes on trouve non-seulement que les racines a, b, c,... sont toutes réelles et inégales, mais encore que les quantités A, B, C,... sont fort petites, on sera assuré que leurs excentricités demeureront toujours fort petites; autrement elles pourront devenir considérablement différentes de ce qu'elles sont actuellement.

On pourrait au reste trouver des limites plus étroites pour les valeurs de λ en cherchant ses maximum et minimum par la différentiation; mais il faudrait pour cela résoudre l'équation

$$AB(a-b)\sin[(a-b)t+\alpha-\beta]+AC(a-c)\sin[(a-c)t+\alpha-\gamma]+BC(b-c)\sin[(b-c)t+\beta-\gamma]+\ldots=0,$$

ce qui n'est pas facile lorsqu'il y a plus d'un terme.

42. Ce que nous venons de dire relativement aux excentricités doit s'appliquer aussi aux inclinaisons. Car, en nommant θ la tangente de l'inclinaison et ω la longitude du nœud et faisant

$$s=\theta\sin\omega,\quad u=\theta\cos\omega,$$

nous avons trouvé, dans l'endroit cité, pour les valeurs de s et u, des expressions semblables à celles de x, y, dans lesquelles les quantités a, b, c,... sont aussi les racines d'une équation d'un degré égal au nombre des orbites, mais différente de celle qui répond aux x et y, et où les constantes A, B, C,..., α, β, γ,... dépendent de la position des orbites à une époque donnée. Donc aussi les expressions de λ et de θ seront semblables, ainsi que celles de φ et ω.

Par conséquent, si les racines a, b, c,... sont toutes réelles et inégales, et que de plus les constantes A, B, C,... se trouvent très-petites, on sera assuré pareillement que les inclinaisons des orbites des Planètes sur l'écliptique fixe seront toujours fort petites; autrement elles pour-

ront varier beaucoup, et l'on ne pourra rien connaître de certain à leur égard que pour un temps plus ou moins long.

43. A l'égard des aphélies et des nœuds, comme on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{x}{y}, \quad \operatorname{tang}\omega = \frac{s}{u},$$

on en connaîtra la position par les tangentes de leurs longitudes, qui seront exprimées, en général, par la formule

$$\frac{A\sin(at+\alpha)+B\sin(bt+\beta)+C\sin(ct+\gamma)+\dots}{A\cos(at+\alpha)+B\cos(bt+\beta)+C\cos(ct+\gamma)+\dots};$$

mais il n'est pas facile de déduire, en général, de cette expression de la tangente, celle de l'arc correspondant, ni par conséquent de déterminer le mouvement moyen des aphélies et des nœuds.

Cette détermination n'est même possible par les méthodes connues que lorsqu'il n'y a que deux termes, et lorsque, le nombre des termes étant quelconque, il y a un des coefficients A, B, C,... qui surpasse en grandeur la somme de tous les autres pris positivement.

44. Examinons d'abord le premier cas, et considérons pour cela l'équation

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{A\sin(at+\alpha)+B\sin(bt+\beta)}{A\cos(at+\alpha)+B\cos(bt+\beta)}.$$

Si $A = B$, cette équation devient

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang}\left(\frac{a+b}{2}t+\frac{\alpha+\beta}{2}\right);$$

donc

$$\varphi = \frac{a+b}{2}t+\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Et, si $A = -B$, elle devient

$$\operatorname{tang}\varphi = -\cot\left(\frac{a+b}{2}t+\frac{\alpha+\beta}{2}\right);$$

donc

$$\varphi = \frac{a+b}{2}t+\frac{\alpha+\beta}{2}-90^\circ.$$

Mais, si $A > \pm B$, alors en retranchant de l'angle φ l'angle $at+\alpha$ qui répond au plus grand coefficient A, je la réduis à cette forme

$$\operatorname{tang}(\varphi-at-\alpha) = \frac{B\sin[(b-a)t+\beta-\alpha]}{A+B\cos[(b-a)t+\beta-\alpha]};$$

de sorte que, si l'on prend un angle ψ tel que

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{B\sin[(b-a)t+\beta-\alpha]}{A+B\cos[(b-a)t+\beta-\alpha]},$$

on aura

$$\varphi-at-\alpha = \psi,$$

et par conséquent

$$\varphi = at+\alpha+\psi.$$

Or, puisque $B < \pm A$, il est clair que le dénominateur de l'expression de tang ψ ne peut jamais devenir nul; donc tang ψ ne pourra jamais devenir infinie, et par conséquent ψ ne pourra jamais atteindre à l'angle droit. Ainsi l'angle ψ sera nécessairement resserré dans ces limites $+90^\circ$ et -90°, entre lesquelles il ne pourra faire que des oscillations plus ou moins grandes.

D'où il s'ensuit que $at+\alpha$ représentera le mouvement moyen de l'angle φ, et que ψ exprimera les inégalités de cet angle.

Pour déterminer ces inégalités, il faudra résoudre l'équation précédente, ce qui ne se peut que par le moyen des séries; et la meilleure méthode pour cela me paraît celle dont je me suis déjà servi dans plusieurs occasions semblables, et qui consiste à employer les exponentielles imaginaires.

Suivant cette méthode on aura

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\operatorname{tang}\psi\sqrt{-1}}{1-\operatorname{tang}\psi\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{A+Be^{\psi\sqrt{-1}}}{A+Be^{-\psi\sqrt{-1}}},$$

en faisant, pour abréger,

$$\sigma = (b-a)t + \beta - \alpha.$$

Donc

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log\left(1 + \frac{B}{A} e^{\sigma\sqrt{-1}}\right) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log\left(1 + \frac{B}{A} e^{-\sigma\sqrt{-1}}\right),$$

et, réduisant ces logarithmes en séries,

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\frac{B}{A}(e^{\sigma\sqrt{-1}} - e^{-\sigma\sqrt{-1}}) - \frac{B^2}{2A^2}(e^{2\sigma\sqrt{-1}} - e^{-2\sigma\sqrt{-1}}) + \frac{B^3}{3A^3}(e^{3\sigma\sqrt{-1}} - e^{-3\sigma\sqrt{-1}}) - \ldots\right],$$

c'est-à-dire

$$\psi = \frac{B}{A}\sin\sigma - \frac{B^2}{2A^2}\sin 2\sigma + \frac{B^3}{3A^3}\sin 3\sigma - \ldots,$$

série qui sera toujours convergente à cause de $\frac{B}{A} < \pm 1$ par l'hypothèse.

45. On peut résoudre de la même manière l'équation générale

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{A\sin(at+\alpha) + B\sin(bt+\beta) + C\sin(ct+\gamma) + \ldots}{A\cos(at+\alpha) + B\cos(bt+\beta) + C\cos(ct+\gamma) + \ldots},$$

lorsqu'un des coefficients, comme A, est plus grand que la somme de tous les autres pris positivement.

On aura ainsi d'abord

$$\varphi = at + \alpha + \psi,$$

et

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{B\sin[(b-a)t+\beta-\alpha] + C\sin[(c-a)t+\gamma-\alpha] + \ldots}{A + B\cos[(b-a)t+\beta-\alpha] + C\cos[(c-a)t+\gamma-\alpha] + \ldots};$$

par où l'on voit que, le dénominateur de $\operatorname{tang}\psi$ ne pouvant jamais devenir nul dans le cas supposé, l'angle ψ sera nécessairement renfermé entre $+90^\circ$ et -90°, et qu'ainsi $at+\alpha$ sera le mouvement moyen de l'angle φ, et ψ n'en exprimera que les inégalités.

Ensuite, employant la même formule

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \frac{1 + \operatorname{tang}\psi\sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang}\psi\sqrt{-1}},$$

et faisant, pour abréger,

$$\sigma = (b-a)t + \beta - \alpha, \quad \rho = (c-a)t + \gamma - \alpha, \ldots,$$

on aura pareillement

$$\psi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log\left(1 + \frac{Be^{\sigma\sqrt{-1}} + Ce^{\rho\sqrt{-1}} + \ldots}{A}\right) - \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log\left(1 + \frac{Be^{-\sigma\sqrt{-1}} + Ce^{-\rho\sqrt{-1}} + \ldots}{A}\right),$$

d'où l'on tire, par la réduction en séries et la substitution des sinus,

$$\psi = \frac{B\sin\sigma + C\sin\rho + \ldots}{A} - \frac{B^2\sin 2\sigma + 2BC\sin(\sigma+\rho) + C^2\sin 2\rho + \ldots}{2A^2} + \ldots,$$

série toujours convergente dans le cas dont il s'agit.

46. Hors de ces deux cas, il est fort difficile et peut-être même impossible de prononcer, en général, sur la nature de l'angle φ; mais on peut dans tous les cas construire la valeur de cet angle, ainsi que celle de la quantité λ, par le moyen des épicycles.

En effet soient décrits différents cercles qui aient pour rayons les constantes A, B, C, ...; ayant mené dans le premier de ces cercles un diamètre fixe, qu'on prenne depuis ce diamètre un arc qui comprenne l'angle $at+\alpha$; qu'ensuite on place à l'extrémité de cet arc le centre du second cercle et qu'on y prenne, depuis un diamètre mené parallèlement à celui du cercle précédent, un arc qui réponde à l'angle $bt+\beta$; que de même on place à l'extrémité de cet arc le centre du troisième cercle, et qu'on y prenne aussi, depuis un diamètre parallèle aux précédents, un nouvel arc qui sous-tende l'angle $ct+\gamma$, et ainsi de suite. Je dis que, si du centre du premier cercle on tire une ligne droite ou rayon vecteur à l'extrémité de l'arc pris sur la circonférence du dernier épicycle, ce rayon vecteur sera égal à λ et fera avec le diamètre du premier cercle l'angle φ.

Car il est visible, d'après cette construction, que, si l'on abaisse de

l'extrémité du dernier arc une ordonnée rectangle au diamètre du premier cercle, cette ordonnée se trouvera exprimée par

$$A\sin(at+\alpha)+B\sin(bt+\beta)+C\sin(ct+\gamma)+\ldots,$$

et que l'abscisse correspondante prise du centre du cercle sera

$$A\cos(at+\alpha)+B\cos(bt+\beta)+C\cos(ct+\gamma)+\ldots.$$

Ces deux coordonnées seront donc égales à y et x; et, comme

$$\lambda=\sqrt{x^2+y^2},\quad \operatorname{tang}\varphi=\frac{y}{x},$$

on voit que λ sera le rayon vecteur et φ l'angle de ce rayon avec l'axe des abscisses.

Il s'ensuit de là que, si l'on imagine que le Soleil soit au centre du premier cercle et que le diamètre de ce cercle soit dirigé vers le premier point d'*Aries* d'où l'on compte les longitudes, le centre de l'orbite de chaque Planète se trouvera sur la circonférence du dernier épicycle à l'extrémité de l'arc qu'on y aura marqué.

La construction précédente servira également à trouver les valeurs de δ et de ω; par conséquent on pourra par son moyen déterminer pour un temps donné les éléments variables de chaque Planète, dès qu'on connaitra par le calcul les valeurs des différentes constantes A, B, C, ..., $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ qui entrent dans les expressions générales de ces éléments.

47. Au reste, par la construction que nous venons de donner, on voit clairement que, lorsque le rayon du premier cercle surpasse la somme des rayons de tous les épicycles, les angles $bt+\beta$, $ct+\gamma,\ldots$ décrits autour des centres de ceux-ci ne peuvent qu'augmenter ou diminuer l'angle $at+\alpha$ décrit autour du centre du premier cercle, sans jamais le rendre nul; et qu'ainsi dans ce cas le rayon vecteur doit avoir un mouvement angulaire continuel, dont $at+\alpha$ sera la valeur moyenne.

Il n'en est pas de même lorsque la somme des rayons des épicycles est

égale ou plus grande que le rayon du cercle principal; car alors il est facile de concevoir que les mouvements autour des épicycles peuvent détruire le mouvement autour du cercle principal; et, s'il y a quelque cas où celui-ci soit seulement altéré, mais jamais totalement anéanti, cela doit dépendre des rapports entre ces mouvements et entre les rayons des différents cercles; de sorte que la détermination du mouvement moyen doit être dans ces cas extrêmement difficile.

48. Venons maintenant aux équations différentielles qu'il s'agit d'intégrer et que nous avons données plus haut (17). Ces équations forment, comme on voit, deux systèmes indépendants, l'un relatif aux excentricités et aux aphélies, l'autre relatif aux inclinaisons et aux nœuds; et chacun de ces systèmes est composé de douze équations qui contiennent autant de variables mêlées ensemble, mais dont chacune n'y paraît que sous la forme linéaire; de sorte que l'intégration de ces équations, quoique toujours possible, entraînerait néanmoins dans des calculs fort longs, s'il fallait, comme cela paraît nécessaire au premier aspect, traiter à la fois toutes les équations d'un même système. Mais heureusement, à cause de la petitesse excessive de plusieurs coefficients, on peut séparer chaque système en deux et même trois systèmes partiels; car en supposant les masses des Planètes telles que nous les avons déterminées (14), et faisant par conséquent tous les nombres m, m', m'', m''', m^{IV}, m^{V} égaux à l'unité dans les valeurs du n° 16, il est visible que tous les coefficients qui contiennent, entre des crochets ronds ou carrés, les chiffres 0 ou 1 avant la virgule, et 2, 3, 4, 5 après, sont au-dessous d'un centième de seconde; de sorte qu'on peut sans erreur sensible regarder et traiter ces coefficients comme nuls, et négliger ainsi dans les équations tous les termes qui en seront multipliés. De cette manière les quatre premières équations de chaque système deviendront indépendantes de toutes les autres et pourront par conséquent être traitées séparément; ce qui en simplifie beaucoup le calcul.

Cette simplification revient à calculer séparément l'effet de l'attraction mutuelle de Saturne et de Jupiter, en faisant abstraction de l'action des

autres Planètes, qui sont effectivement trop petites et trop éloignées de celles-ci pour pouvoir y causer des dérangements sensibles. Ainsi nous commencerons par donner séparément la Théorie des variations séculaires de Saturne et de Jupiter; nous donnerons ensuite celle des variations des quatre autres Planètes.

Théorie des variations séculaires de Saturne et de Jupiter.

49. Cette Théorie est renfermée dans les deux systèmes suivants d'équations différentielles

Premier système, pour les excentricités et les aphélies.

$$\frac{dx}{dt} - (0,1)y + [0,1]y' = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} + (0,1)x - [0,1]x' = 0,$$

$$\frac{dx'}{dt} - (1,0)y' + [1,0]y = 0,$$

$$\frac{dy'}{dt} + (1,0)x' - [1,0]x = 0.$$

Deuxième système, pour les inclinaisons et les nœuds.

$$\frac{ds}{dt} + (0,1)(u - u') = 0,$$

$$\frac{du}{dt} - (0,1)(s - s') = 0,$$

$$\frac{ds'}{dt} + (1,0)(u' - u) = 0,$$

$$\frac{du'}{dt} - (1,0)(s' - s) = 0.$$

Nous supposerons les masses de Saturne et de Jupiter égales à $\frac{1}{3358,40}$, et $\frac{1}{1067,195}$ de celle du Soleil, comme nous les avons déterminées dans

la première Section, et nous ferons en conséquence $m = 1$, $m' = 1$, dans les valeurs des coefficients (16); de sorte qu'on aura

$$(0,1) = 17'',8804 \qquad [0,1] = 11'',6842$$
$$1,2523739, \qquad 1,0675978,$$

$$(1,0) = 7'',6952 \qquad [1,0] = 5'',0286$$
$$0,8862185, \qquad 0,7014424.$$

A l'égard des valeurs de x, y,... pour l'époque donnée, on trouvera, en employant les éléments du n° 26 pour 1700,

$$x = \lambda \sin\varphi = -0,05698 \qquad y = \lambda\cos\varphi = -0,00144$$
$$8,7557577, \qquad 7,1575949,$$

$$x' = \lambda' \sin\varphi' = -0,00801 \qquad y' = \lambda'\cos\varphi' = -0,04755$$
$$7,9037182, \qquad 8,6771464,$$

$$s = \theta \sin\omega = 0,04078 \qquad u = \theta\cos\omega = -0,01573$$
$$8,6104766, \qquad 8,1966017,$$

$$s' = \theta' \sin\omega' = 0,02283 \qquad u' = \theta'\cos\omega' = -0,00303$$
$$8,3585442, \qquad 7,4820226.$$

Par les logarithmes placés au-dessous des valeurs numériques on peut augmenter l'exactitude de celles-ci d'une décimale; il en sera de même pour tous les calculs de cette Section.

Excentricités et aphélies.

50. Pour intégrer les équations du premier système, on supposera d'abord

$$x = A\sin(at + \alpha), \quad y = A\cos(at + \alpha),$$
$$x' = A'\sin(at + \alpha), \quad y' = A'\cos(at + \alpha);$$

les substitutions faites, on aura, entre les trois coefficients A, A', a, ces deux équations

$$A\left[a - (0,1)\right] + A'[0,1] = 0,$$
$$A'\left[a - (1,0)\right] + A\,[1,0] = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{A'}{A} = \frac{(0,1) - a}{[0,1]} = \frac{[1,0]}{(1,0) - a};$$

donc

$$[a - (0,1)] \times [a - (1,0)] = [0,1] \times [1,0];$$

ce qui donne cette équation en a du second degré

$$a^2 - [(0,1) + (1,0)]a + (0,1) \times (1,0) - [0,1] \times [1,0] = 0,$$

dont les racines sont

$$a = \frac{(0,1) + (1,0)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(0,1) + (1,0)}{2}\right]^2 + [0,1] \times [1,0]},$$

et par conséquent toutes deux réelles; par où l'on est assuré que les expressions des variables ne contiennent point d'arcs de cercle.

En nommant ces deux racines a et b, on trouve

$$a = 21'',9905, \quad b = 3'',5851;$$

et les expressions complètes de x, y, x', y' seront

$$x = A \sin(at + \alpha) + B \sin(bt + \beta),$$
$$y = A \cos(at + \alpha) + B \cos(bt + \beta),$$
$$x' = A' \sin(at + \alpha) + B' \sin(bt + \beta),$$
$$y' = A' \cos(at + \alpha) + B' \cos(bt + \beta),$$

en faisant

$$\frac{A'}{A} = \frac{(0,1) - a}{[0,1]} = -0,3518 \qquad 9,5462518,$$

$$\frac{B'}{B} = \frac{(0,1) - b}{[0,1]} = 1,2235 \qquad 0,0875927.$$

Il reste ainsi quatre arbitraires A, B, α, β qu'il faudra déterminer par les valeurs données de x, y, x', y' pour l'époque de 1700. De sorte

qu'en faisant $t = 0$ pour cette époque, on aura à résoudre ces quatre équations

$$-0,05698 = A \sin\alpha + B \sin\beta,$$
$$-0,00144 = A \cos\alpha + B \cos\beta,$$
$$-0,00801 = -0,3518 A \sin\alpha + 1,2235 B \sin\beta,$$
$$-0,04755 = -0,3518 A \cos\alpha + 1,2235 B \cos\beta;$$

d'où l'on tire

$$A \sin\alpha = -0,03916 \qquad 8,5928609,$$
$$A \cos\alpha = 0,02906 \qquad 8,4632971,$$
$$B \sin\beta = -0,01781 \qquad 8,2505522,$$
$$B \cos\beta = -0,03050 \qquad 8,4842651,$$

et de là on conclut

$$\alpha = 360° - 53°25'20'', \qquad \beta = 180° + 30°16'40'',$$

$$A = 0,04877 \qquad 8,6881165, \qquad B = 0,03532 \qquad 8,5479562,$$

$$A' = -0,01715 \qquad 8,2343683, \qquad B' = 0,04321 \qquad 8,6355489.$$

Or

$$x = \lambda \sin\varphi, \quad y = \lambda \cos\varphi, \quad x' = \lambda' \sin\varphi', \quad y' = \lambda' \cos\varphi',$$

en nommant λ, λ' les excentricités de Saturne et de Jupiter, et φ, φ' les longitudes de leurs aphélies comptées sur le plan de l'écliptique de 1700; ainsi les formules précédentes feront connaître les valeurs de ces éléments pour un nombre indéfini t d'années Juliennes, après ou avant 1700, en prenant dans le second cas t négatif.

51. Soit, pour abréger,

$$z = 83°42' - 18'',4054 \times t.$$

On aura d'abord pour Saturne

$$\lambda = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos z} = 0{,}06021\sqrt{1 - 0{,}95009\cos z};$$

c'est l'expression générale de l'excentricité de son orbite.

Cette excentricité sera donc la plus grande lorsque

$$\cos z = -1,$$

par conséquent, lorsque

$$z = 180^\circ + 360^\circ \times n,$$

n étant un nombre entier quelconque positif ou négatif, et elle sera alors

$$A + B = 0{,}08408.$$

Elle sera au contraire la plus petite lorsque $\cos z = 1$, et par conséquent lorsque

$$z = 360^\circ \times n;$$

elle sera alors

$$A - B = 0{,}01345.$$

L'intervalle entre ces époques est déterminé par l'équation

$$18'',4054\,t = 180^\circ,$$

laquelle donne

$$t = 35207{,}10;$$

c'est donc par une période de ce nombre d'années Juliennes que les maxima et minima de l'excentricité de Saturne sont ramenés successivement.

Ensuite on aura pour la longitude de l'aphélie de cette même Planète les formules

$$\varphi = at + \alpha - p, \quad \operatorname{tang} p = \frac{B\sin z}{A - B\cos z},$$

à cause de $A > B$.

Ainsi le lieu moyen de son aphélie sera, en ayant égard à la précession des équinoxes de $50'',3333$ par an, à

$$10^s 6^\circ 34' 40'' + 1'12'',3234\,t;$$

et pour avoir le lieu vrai il faudra y appliquer une équation soustractive p, déterminée par la formule

$$\operatorname{tang} p = \frac{\sin z}{1{,}38090 - \cos z}, \quad \text{ou} \quad \cot p = 1{,}38090\operatorname{cosec} z - \cot z.$$

Cette équation sera la plus grande lorsque

$$\cos z = \frac{B}{A} = 0{,}72416,$$

et elle sera alors déterminée par

$$\sin p = \pm\frac{B}{A}.$$

Ainsi les plus grandes équations p seront de $\pm 46^\circ 24'$, et répondront aux angles z de

$$360^\circ \times n \pm 43^\circ 36'.$$

L'équation sera au contraire nulle lorsque $\sin z = 0$; ce qui répond aux époques des plus grandes et plus petites excentricités.

Pour réduire facilement cette équation en Tables, il conviendra de transformer la formule

$$\operatorname{tang} p = \frac{B\sin z}{A - B\cos z}$$

en celle-ci

$$\operatorname{tang}\left(\frac{z}{2} + p\right) = \frac{A + B}{A - B}\operatorname{tang}\frac{z}{2}.$$

De cette manière il n'y aura qu'à calculer l'angle P par la formule

$$\operatorname{tang} P = 6{,}25091\operatorname{tang}\frac{z}{2},$$

et l'on aura

$$p = P - \frac{z}{2}.$$

Enfin, si l'on voulait avoir la valeur de p directement en série, on trouverait, par la méthode du n° 44,

$$p = \frac{B}{A}\sin z + \frac{B^2}{2A^2}\sin 2z + \frac{B^3}{3A^3}\sin 3z + \ldots;$$

mais l'usage de cette série est moins commode que celui de la formule précédente.

52. On aura pareillement, pour l'excentricité de Jupiter, l'expression générale

$$\lambda' = \sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos z} = 0{,}04649\sqrt{1 + 0{,}68592\cos z}.$$

Cette excentricité sera donc la plus grande lorsque $\cos z = 1$, et sa valeur sera alors

$$B' - A' = 0{,}06036;$$

au contraire elle sera la plus petite lorsque $\cos z = -1$, et deviendra alors

$$B' + A' = 0{,}02605.$$

D'où l'on voit que les maxima et minima de l'excentricité de Jupiter répondent exactement, mais en sens contraire, à ceux de l'excentricité de Saturne, en sorte que l'une de ces excentricités est la plus grande lorsque l'autre est la plus petite, et *vice versâ*; par conséquent la période qui ramène ces époques est la même pour les deux Planètes.

De même on aura pour la longitude de l'aphélie de Jupiter les formules

$$\varphi' = bt + \beta - p', \quad \operatorname{tang} p' = \frac{-A'\sin z}{B' - A'\cos z},$$

à cause de $B' > A'$.

Donc le lieu moyen de cet aphélie sera, eu égard à la précession des équinoxes, à

$$7^s\,0^o\,16'\,40'' + 53'',9184 \times t;$$

et pour avoir son lieu vrai il y faudra appliquer une équation soustractive p' déterminée par la formule

$$\operatorname{tang} p' = \frac{\sin z}{2{,}51872 + \cos z} \quad \text{ou} \quad \cot p' = 2{,}51872\operatorname{cosec} z + \cot z.$$

Le maximum de cette équation aura lieu lorsque

$$\cos z = \frac{A'}{B'} = -0{,}39703;$$

et sa valeur se trouvera par l'équation

$$\sin p' = \pm\frac{A'}{B'}.$$

Donc les plus grandes équations p' seront de

$$\pm 23^o\,23'\,30'',$$

et elles répondront aux angles z de

$$180^o(2n+1) \mp 66^o\,36'\,30''.$$

Au contraire l'équation sera nulle lorsque $\sin z = 0$; ce qui répond aux époques des plus grandes et plus petites excentricités.

On peut au reste déterminer l'angle p' par cette formule plus simple

$$\operatorname{tang}\left(\frac{z}{2} - p'\right) = \frac{B' + A'}{B' - A'}\operatorname{tang}\frac{z}{2};$$

de sorte que si l'on cherche un angle P′ tel que

$$\operatorname{tang} P' = 0{,}43163\operatorname{tang}\frac{z}{2},$$

on aura sur-le-champ

$$p' = \frac{z}{2} - P';$$

ce qui est très-commode pour construire une Table de l'équation p'.

Enfin, si l'on voulait employer les séries, on aurait directement

$$p' = -\frac{A'}{B'}\sin z - \frac{A'^2}{2B'^2}\sin 2z - \frac{A'^3}{3B'^2}\sin 3z - \ldots.$$

Inclinaisons et nœuds.

53. Passons aux équations du second système. On y supposera pareillement

$$s = A\sin(at+\alpha), \quad u = A\cos(at+\alpha),$$
$$s' = A'\sin(at+\alpha), \quad u' = A'\cos(at+\alpha);$$

et l'on aura, après les substitutions, ces deux équations-ci

$$Aa + (0,1)(A - A') = 0, \quad A'a + (1,0)(A' - A) = 0,$$

lesquelles donnent

$$\frac{A'}{A} = \frac{a + (0,1)}{(0,1)} = \frac{(1,0)}{a + (1,0)};$$

donc

$$\big[a + (0,1)\big] \times \big[a + (1,0)\big] - (0,1) \times (1,0) = 0,$$

équation qui se réduit à cette forme

$$a^2 + \big[(0,1) + (1,0)\big]a = 0,$$

et dont les racines sont 0 et $-(0,1)-(1,0)$; ainsi, ces racines étant toutes deux réelles, on n'a point à craindre les arcs de cercle.

Nous aurons donc

$$a = 0, \quad b = -(0,1) - (1,0),$$

c'est-à-dire

$$b = -25'',5756;$$

et les expressions complètes de s, u, s', u' seront, à cause de $A' = A$,

$$s = A \sin\alpha + B \sin(bt + \beta),$$
$$u = A \cos\alpha + B \cos(bt + \beta),$$
$$s' = A \sin\alpha + B' \sin(bt + \beta),$$
$$u' = A \cos\alpha + B' \cos(bt + \beta),$$

en faisant

$$\frac{B'}{B} = \frac{b + (0,1)}{(0,1)} = -0,4304$$
$$9,6338420.$$

Pour déterminer maintenant les quatre arbitraires A, B, α, β, on fera $t = 0$, relativement à l'époque de 1700 pour laquelle les valeurs de s, u, s', u' sont données; on aura ainsi ces quatre équations

$$0,04078 = A \sin\alpha + B \sin\beta,$$
$$-0,01573 = A \cos\alpha + B \cos\beta,$$
$$0,02283 = A \sin\alpha - 0,4304\,B \sin\beta,$$
$$-0,00303 = A \cos\alpha - 0,4304\,B \cos\beta,$$

lesquelles donnent

$$A \sin\alpha = 0,02823 \qquad A \cos\alpha = -0,00685$$
$$8,4507463, \qquad 7,8358628,$$
$$B \sin\beta = 0,01255 \qquad B \cos\beta = -0,00887$$
$$8,0986126, \qquad 7,9480439,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = 180° - 76°21'20'', \qquad \beta = 180° - 54°44'20'',$$
$$A = 0,02905 \qquad B = 0,01537$$
$$8,4631770, \qquad 8,1866402,$$
$$B' = -0,00661$$
$$7,8204822.$$

Donc, puisque

$$s = \theta \sin\omega, \quad u = \theta \cos\omega, \quad s' = \theta' \sin\omega', \quad u' = \theta' \cos\omega',$$

en nommant θ, θ' les tangentes des inclinaisons des orbites de Saturne et de Jupiter, et ω, ω' les longitudes de leurs nœuds ascendants, relativement à l'écliptique et à l'équinoxe de l'époque 1700, on pourra, à l'aide des formules précédentes, trouver la position des orbites de ces Planètes au bout d'un nombre quelconque t d'années Juliennes, écoulées depuis l'époque, ou qui la précèdent, en faisant dans ce dernier cas t négatif.

54. En effet, si, pour abréger, on fait

$$r = 21^\circ 37' - 25'',5756t,$$

on aura pour Saturne

$$\theta = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos r} = 0{,}03287\sqrt{1 + 0{,}82665\cos r};$$

c'est l'expression générale de la tangente de son inclinaison, de sorte que l'inclinaison elle-même sera représentée à très-peu près par la formule

$$1^\circ 52' 55'' \times \sqrt{1 + 0{,}82665\cos r}.$$

Le maximum aura lieu lorsque

$$\cos r = 1;$$

alors

$$\theta = A + B = 0{,}04442,$$

et la plus grande inclinaison sera de

$$2^\circ 32' 40''.$$

Le minimum aura lieu lorsque

$$\cos r = -1;$$

la valeur de θ sera alors

$$\theta = A - B = 0{,}01368,$$

et la plus petite inclinaison sera de

$$0^\circ 47'.$$

L'intervalle entre l'une et l'autre de ces deux époques sera déterminé par l'équation

$$25'',5756t = 180'',$$

et sera par conséquent de

25336,65 années Juliennes.

Quant au nœud de Saturne, sa longitude sera donnée par les formules

$$\omega = \alpha + q, \quad \operatorname{tang} q = \frac{B\sin r}{A + B\cos r},$$

à cause de $A > B$.

Donc le lieu moyen de ce nœud sera, en ayant égard à la précession des équinoxes, à

$$3^s 13^\circ 38' 40'' + 50'',3333t;$$

et pour en déduire le lieu vrai, il n'y aura qu'à y appliquer une équation additive q, déterminée par la formule

$$\operatorname{tang} q = \frac{\sin r}{1{,}89033 + \cos r}, \quad \text{ou} \quad \cot q = 1{,}89033\operatorname{cosec} r + \cot r.$$

Le maximum de cette équation aura lieu lorsque

$$\cos r = -\frac{B}{A} = 0{,}52901,$$

et sa valeur se déterminera par

$$\sin q = \pm\frac{B}{A}.$$

Donc les plus grandes équations q seront de

$$\pm 31^\circ 56' 20'',$$

et répondront aux angles r de

$$180^\circ \times (2n+1) \mp 58^\circ 3' 40''.$$

Au contraire l'équation q sera nulle lorsque

$$\sin r = 0,$$

ce qui répond aux époques des plus grandes et plus petites inclinaisons.

Au reste la formule

$$\operatorname{tang} q = \frac{B\sin r}{A + B\cos r}$$

peut se réduire à cette forme plus simple

$$\operatorname{tang}\left(\frac{r}{2}-q\right)=\frac{A-B}{A+B}\operatorname{tang}\frac{r}{2},$$

laquelle donne un moyen facile de réduire l'équation q en Table. Car il n'y aura qu'à calculer les angles Q par la formule

$$\operatorname{tang} Q = 0{,}308303 \operatorname{tang}\frac{r}{2},$$

et l'on aura

$$q=\frac{r}{2}-Q.$$

Mais si l'on voulait avoir directement la valeur de q en série, on trouverait, par la méthode du n° 45,

$$q=\frac{B}{A}\sin r-\frac{B^2}{2A^2}\sin 2r+\frac{B^3}{3A^3}\sin 3r-\ldots.$$

55. Pour Jupiter on trouvera de la même manière

$$\vartheta'=\sqrt{A^2+B'^2+2AB'\cos r}=0{,}029805\sqrt{1-0{,}432900\cos r},$$

expression générale de la tangente de l'inclinaison de son orbite; de sorte que l'inclinaison elle-même sera représentée à très-peu près par la formule

$$1^\circ 42' 25'' \times \sqrt{1-0{,}432900\cos r}.$$

Le maximum a lieu lorsque

$$\cos r=-1;$$

alors

$$\vartheta=A-B'=0{,}03567,$$

et la plus grande inclinaison sera de

$$2^\circ 2' 30''.$$

Le minimum au contraire aura lieu lorsque

$$\cos r=1,$$

et la valeur de ϑ sera alors

$$\vartheta=A+B'=0{,}02244,$$

laquelle donne la plus petite inclinaison de

$$1^\circ 17' 10''.$$

Ainsi les plus grandes et plus petites inclinaisons de Jupiter répondent aux plus petites et plus grandes inclinaisons de Saturne, et réciproquement; en sorte que la période qui ramène ces époques est la même pour l'une et pour l'autre Planète. Nous avons vu que la même chose a lieu aussi à l'égard des excentricités.

Quant à la longitude du nœud ascendant de Jupiter, on aura de même les formules

$$\omega'=\alpha-q,\quad \operatorname{tang} q'=-\frac{B'\sin r}{A+B'\cos r},$$

à cause de $A>B'$.

Ainsi le lieu moyen de ce nœud sera, eu égard à la précession des équinoxes, à

$$3^s\,13^\circ\,38'\,40'' + 50'',3333\,t,$$

c'est-à-dire qu'il coïncidera avec celui de Saturne; mais pour avoir son lieu vrai il faudra appliquer au lieu moyen une équation soustractive q' déterminée par la formule

$$\operatorname{tang} q'=\frac{\sin r}{4{,}392332-\cos r},\quad \text{ou}\quad \cot q'=4{,}392332\operatorname{cosec} r-\cot r.$$

Le maximum de cette équation aura lieu lorsque

$$\cos r=-\frac{B'}{A}=0{,}22767,$$

et sa valeur sera déterminée par

$$\sin q'=\pm\frac{B'}{A}.$$

Donc les plus grandes équations q' seront de

$$\pm 13^{\circ}9'40'',$$

et répondront aux angles r de

$$360^{\circ} \times n \pm 76^{\circ}50'30''.$$

L'équation q' sera au contraire nulle lorsque

$$\sin r = 0,$$

ce qui répond aux plus grandes et plus petites inclinaisons.

La formule

$$\operatorname{tang} q' = -\frac{B' \sin r}{A + B' \cos r}$$

est réductible à cette forme plus simple

$$\operatorname{tang}\left(\frac{r}{2} + q'\right) = \frac{A - B'}{A + B'} \operatorname{tang} \frac{r}{2}.$$

Si donc on calcule les angles Q', tels que

$$\operatorname{tang} Q' = 1,58954 \operatorname{tang} \frac{r}{2},$$

on aura

$$q' = Q' - \frac{r}{2};$$

et par ce moyen on construira facilement une Table de l'équation q'.

Si l'on voulait déterminer directement la valeur de q' en r, on pourrait faire usage de la série

$$q' = -\frac{B'}{A}\sin r + \frac{B'^2}{2A^2}\sin 2r - \frac{B'^3}{3A^3}\sin 3r + \ldots.$$

56. Au reste il ne faut pas oublier que, dans ces déterminations, les orbites de Saturne et Jupiter sont rapportées au plan de l'écliptique ou de l'orbite de la Terre pour le commencement de 1700. Comme ce dernier plan est lui-même variable, ce ne sera qu'en combinant les formules

que nous venons de donner pour la variabilité des plans des orbites de Saturne et de Jupiter avec celles que nous donnerons ci-après pour la variabilité du plan de l'écliptique, qu'on pourra déterminer la position des mêmes orbites relativement à l'écliptique vraie pour un temps quelconque, comme nous l'avons enseigné plus haut (18). *Voyez* plus bas le n° 75.

57. On voit donc, par les résultats que nous venons de trouver, que les excentricités et les inclinaisons des orbites de Saturne et de Jupiter doivent demeurer toujours très-petites, et que leurs variations ne consistent que dans des espèces d'oscillations par lesquelles ces éléments deviennent alternativement plus grands et plus petits que leurs valeurs moyennes, mais sans s'en écarter jamais que de quantités très-petites. On voit aussi par nos formules que les coefficients de t sous les signes de sinus et cosinus sont nécessairement toujours réels, quelques valeurs qu'on donne aux masses des deux Planètes, parce qu'en augmentant ou diminuant ces masses on ne fait qu'augmenter ou diminuer proportionnellement les coefficients marqués par des crochets ronds ou carrés, sans en changer les signes. D'où il s'ensuit que le système de Saturne et de Jupiter, en tant qu'on le regarde comme indépendant des autres Planètes, ce qui est toujours permis, comme nous l'avons montré plus haut, est de lui-même dans un état stable et permanent, du moins en faisant abstraction de l'action de toute cause étrangère, comme serait celle d'une Comète, ou d'un milieu résistant dans lequel les Planètes nageraient, ou, ...

Théorie des variations séculaires de Mars, de la Terre, de Vénus et de Mercure.

58. Après avoir donné séparément la Théorie des variations séculaires de Saturne et de Jupiter, il nous reste encore à donner celle des variations séculaires de Mars, de la Terre, de Vénus et de Mercure; mais celle-ci demande beaucoup plus de travail, si l'on veut considérer à la

fois, ainsi que nous nous le sommes proposé, l'action mutuelle de ces quatre dernières Planètes, qui à cause de l'éloignement des deux premières paraissent en effet constituer un système à part.

Les variations séculaires des excentricités et des aphélies sont indépendantes de celles des inclinaisons et des nœuds; leurs lois sont renfermées dans deux systèmes séparés d'équations différentielles dont le nombre égale le double de celui des Planètes dont on considère le mouvement. Nous avons donné dans le n° 17 les deux systèmes complets pour les six Planètes, et, comme nous venons d'intégrer séparément les quatre premières équations de chaque système, ils se réduisent maintenant à ceux-ci plus simples, dans lesquels je fais, pour abréger,

$$(2) = (2,0) + (2,1) + (2,3) + (2,4) + (2,5),$$
$$(3) = (3,0) + (3,1) + (3,2) + (3,4) + (3,5),$$
$$(4) = (4,0) + (4,1) + (4,2) + (4,3) + (4,5),$$
$$(5) = (5,0) + (5,1) + (5,2) + (5,3) + (5,4).$$

Premier système pour les excentricités et les aphélies.

$$\frac{dx''}{dt} - (2)\,y'' + [2,0]\,y + [2,1]\,y' + [2,3]\,y''' + [2,4]\,y^{IV} + [2,5]\,y^{V} = 0,$$

$$\frac{dy''}{dt} + (2)\,x'' - [2,0]\,x - [2,1]\,x' - [2,3]\,x''' - [2,4]\,x^{IV} - [2,5]\,x^{V} = 0,$$

$$\frac{dx'''}{dt} - (3)\,y''' + [3,0]\,y + [3,1]\,y' + [3,2]\,y'' + [3,4]\,y^{IV} + [3,5]\,y^{V} = 0,$$

$$\frac{dy'''}{dt} + (3)\,x''' - [3,0]\,x - [3,1]\,x' - [3,2]\,x'' - [3,4]\,x^{IV} - [3,5]\,x^{V} = 0,$$

$$\frac{dx^{IV}}{dt} - (4)\,y^{IV} + [4,0]\,y + [4,1]\,y' + [4,2]\,y'' + [4,3]\,y''' + [4,5]\,y^{V} = 0,$$

$$\frac{dy^{IV}}{dt} + (4)\,x^{IV} - [4,0]\,x - [4,1]\,x' - [4,2]\,x'' - [4,3]\,x''' - [4,5]\,x^{V} = 0,$$

$$\frac{dx^{V}}{dt} - (5)\,y^{V} + [5,0]\,y + [5,1]\,y' + [5,2]\,y'' + [5,3]\,y''' + [5,4]\,y^{IV} = 0,$$

$$\frac{dy^{V}}{dt} + (5)\,x^{V} - [5,0]\,x - [5,1]\,x' - [5,2]\,x'' - [5,3]\,x''' - [5,4]\,x^{IV} = 0.$$

Deuxième système pour les inclinaisons et les nœuds.

$$\frac{ds''}{dt} + (2)\,u'' - (2,0)\,u - (2,1)\,u' - (2,3)\,u''' - (2,4)\,u^{IV} - (2,5)\,u^{V} = 0,$$

$$\frac{du''}{dt} - (2)\,s'' + (2,0)\,s + (2,1)\,s' - (2,3)\,s''' - (2,4)\,s^{IV} - (2,5)\,s^{V} = 0,$$

$$\frac{ds'''}{dt} + (3)\,u''' - (3,0)\,u - (3,1)\,u' - (3,2)\,u'' - (3,4)\,u^{IV} - (3,5)\,u^{V} = 0,$$

$$\frac{du'''}{dt} - (3)\,s''' + (3,0)\,s + (3,1)\,s' + (3,2)\,s'' + (3,4)\,s^{IV} + (3,5)\,s^{V} = 0,$$

$$\frac{ds^{IV}}{dt} + (4)\,u^{IV} - (4,0)\,u - (4,1)\,u' - (4,2)\,u'' - (4,3)\,u''' - (4,5)\,u^{V} = 0,$$

$$\frac{du^{IV}}{dt} - (4)\,s^{IV} + (4,0)\,s + (4,1)\,s' + (4,2)\,s'' + (4,3)\,s''' + (4,5)\,s^{V} = 0,$$

$$\frac{ds^{V}}{dt} + (5)\,u^{V} - (5,0)\,u - (5,1)\,u' - (5,2)\,u'' - (5,3)\,u''' - (5,4)\,u^{IV} = 0,$$

$$\frac{du^{V}}{dt} - (5)\,s^{V} + (5,0)\,s + (5,1)\,s' + (5,2)\,s'' + (5,3)\,s''' + (5,4)\,s^{IV} = 0.$$

Nous prendrons ici, comme nous l'avons fait ci-dessus, les masses des Planètes telles que nous les avons déterminées dans la première Section; c'est pourquoi nous ferons m, m', m'', m''', m^{IV}, $m^{V} = 1$ dans les valeurs des coefficients de ces équations (16). Ainsi l'on aura comme il suit

$[2,0] = 0'',1999$	$[3,0] = 0'',0445$	$[4,0] = 0'',0196$	$[5,0] = 0'',0041$
$9,1135984,$	$8,6479111,$	$8,2921429,$	$7,6123435,$
$[2,1] = 5'',2263$	$[3,1] = 1'',6615$	$[4,1] = 0'',7168$	$[5,1] = 0'',1464$
$0,7176977,$	$0,2205047,$	$9,8554065,$	$9,1654222,$
$[2,3] = 1'',3631$	$[3,2] = 0'',3330$	$[4,2] = 0'',0853$	$[5,2] = 0'',0122$
$0,1344935,$	$9,5224134,$	$8,9307252,$	$8,0876272,$
$[2,4] = 0'',3889$	$[3,4] = 6'',2104$	$[4,3] = 5'',5716$	$[5,3] = 0'',4125$
$9,5899402,$	$0,7931179,$	$0,7459834,$	$9,6154137,$
$[2,5] = 0'',0056$	$[3,5] = 0'',0463$	$[4,5] = 0'',2714$	$[5,4] = 2'',6957$
$7,7497429.$	$8,6654494,$	$9,4335698,$	$0,4306686,$

$(2, 0) = 0'',6581$	$(3, 0) = 0'',3403$	$(4, 0) = 0'',2073$	$(5, 0) = 0'',0806$
9,8182718,	9,5318127,	9,3166326,	8,9060743,
$(2, 1) = 14'',4116$	$(3, 1) = 6'',9480$	$(4, 1) = 4'',1312$	$(5, 1) = 1'',5754$
1,1587124,	0,8418589,	0,6160784,	0,1974000,
$(2, 3) = 1'',7724$	$(3, 2) = 0'',4330$	$(4, 2) = 0'',1482$	$(5, 2) = 0'',0396$
0,2485728,	9,6364927,	9,1707353,	8,5974941,
$(2, 4) = 0'',6760$	$(3, 4) = 7'',4579$	$(4, 3) = 6'',6908$	$(5, 3) = 0'',8696$
9,8299503,	0,8726141,	0,8254796,	9,9393014,
$(2, 5) = 0'',0182$	$(3, 5) = 0'',0976$	$(4, 5) = 0'',4223$	$(5, 4) = 4'',1952$
8,2596098,	8,9893371,	9,6256507,	0,6227495,
$(2) = 17'',5363$	$(3) = 15'',2767$	$(4) = 11'',5999$	$(5) = 6'',7603$
1,2443g386,	1,1840290,	1,0644529,	0,8299660.

Et si l'on détermine, d'après les éléments du n° 26, les valeurs des variables x'', y'', x''',..., s'', u'', s''',... pour l'époque de 1700, on trouvera celles-ci.

Pour 1700 :

$x'' = \lambda'' \sin\varphi'' = 0,04572$	$y'' = \lambda'' \cos\varphi'' = -0,08099$
8,6600670,	8,9084081,
$x''' = \lambda''' \sin\varphi''' = -0,01665$	$y''' = \lambda''' \cos\varphi''' = 0,00225$
8,2214213,	7,3528905,
$x^{IV} = \lambda^{IV} \sin\varphi^{IV} = -0,00561$	$y^{IV} = \lambda^{IV} \cos\varphi^{IV} = 0,00416$
7,7489933,	7,6185985,
$x^{V} = \lambda^{V} \sin\varphi^{V} = -0,19660$	$y^{V} = \lambda^{V} \cos\varphi^{V} = -0,06115$
9,2935821,	8,7863982,
$s'' = \theta'' \sin\omega'' = 0,02378$	$u'' = \theta'' \cos\omega'' = 0,02186$
8,3762126,	8,3396176,
$s''' = \theta''' \sin\omega''' = 0,$	$u''' = \theta''' \cos\omega''' = 0,$
$s^{IV} = \theta^{IV} \sin\omega^{IV} = 0,05691$	$u^{IV} = \theta^{IV} \cos\omega^{IV} = 0,01636$
8,7552047,	8,2137331,
$s^{V} = \theta^{V} \sin\omega^{V} = 0,08619$	$u^{V} = \theta^{V} \cos\omega^{V} = 0,08718$
8,9354332,	8,9404024.

Ce sont là tous les éléments nécessaires pour le calcul des variations séculaires des Planètes dont il s'agit. Nous allons en exposer le procédé et les résultats avec le détail dû à l'importance du sujet.

Excentricités et aphélies.

59. Commençons par le premier système, et remarquons d'abord que les variables x, y, x', y' ayant déjà été déterminées ci-dessus (**50**), les termes qui contiennent ces variables doivent être regardés comme tout connus. Or ayant trouvé

$$x = A \sin(at + \alpha) + B \sin(bt + \beta),$$
$$y = A \cos(at + \alpha) + B \cos(bt + \beta),$$
$$x' = A' \sin(at + \alpha) + B' \sin(bt + \beta),$$
$$y' = A' \cos(at + \alpha) + B' \cos(bt + \beta),$$

il est facile de se convaincre, par la nature des équations à intégrer, que toutes les variables x'', x''', x^{IV}, x^{V} doivent contenir aussi les sinus des mêmes angles déjà connus $at + \alpha$, $bt + \beta$, et les variables y'', y''', y^{IV}, y^{V} les cosinus correspondants.

On supposera donc, pour satisfaire à ces équations,

$$x'' = A'' \sin(at + \alpha) + B'' \sin(bt + \beta) + C'' \sin(ct + \gamma),$$
$$y'' = A'' \cos(at + \alpha) + B'' \cos(bt + \beta) + C'' \cos(ct + \gamma),$$
$$x''' = A''' \sin(at + \alpha) + B''' \sin(bt + \beta) + C''' \sin(ct + \gamma),$$
$$y''' = A''' \cos(at + \alpha) + B''' \cos(bt + \beta) + C''' \cos(ct + \gamma),$$
$$x^{IV} = A^{IV} \sin(at + \alpha) + B^{IV} \sin(bt + \beta) + C^{IV} \sin(ct + \gamma),$$
$$y^{IV} = A^{IV} \cos(at + \alpha) + B^{IV} \cos(bt + \beta) + C^{IV} \cos(ct + \gamma),$$
$$x^{V} = A^{V} \sin(at + \alpha) + B^{V} \sin(bt + \beta) + C^{V} \sin(ct + \gamma),$$
$$y^{V} = A^{V} \cos(at + \alpha) + B^{V} \cos(bt + \beta) + C^{V} \cos(ct + \gamma),$$

les coefficients A'', B'', C'', A''', B''',... étant tous constants et indéterminés, ainsi que les deux quantités c et γ.

Les substitutions faites, on égalera séparément à zéro les coefficients des différents sinus et cosinus; il en résultera trois systèmes d'équations de cette forme

$$(A)\quad\begin{cases}[2,0]A+[2,1]A'+[a-(2)]A''+[2,3]A'''+[2,4]A^{IV}+[2,5]A^{V}=0,\\ [3,0]A+[3,1]A'+[3,2]A''+[a-(3)]A'''+[3,4]A^{IV}+[3,5]A^{V}=0,\\ [4,0]A+[4,1]A'+[4,2]A''+[4,3]A'''+[a-(4)]A^{IV}+[4,5]A^{V}=0,\\ [5,0]A+[5,1]A'+[5,2]A''+[5,3]A'''+[5,4]A^{IV}+[a-(5)]A^{V}=0;\end{cases}$$

$$(B)\quad\begin{cases}[2,0]B+[2,1]B'+[b-(2)]B''+[2,3]B'''+[2,4]B^{IV}+[2,5]B^{V}=0,\\ [3,0]B+[3,1]B'+[3,2]B''+[b-(3)]B'''+[3,4]B^{IV}+[3,5]B^{V}=0,\\ [4,0]B+[4,1]B'+[4,2]B''+[4,3]B'''+[b-(4)]B^{IV}+[4,5]B^{V}=0,\\ [5,0]B+[5,1]B'+[5,2]B''+[5,3]B'''+[5,4]B^{IV}+[b-(5)]B^{V}=0;\end{cases}$$

$$(C)\quad\begin{cases}[c-(2)]C''+[2,3]C'''+[2,4]C^{IV}+[2,5]C^{V}=0,\\ [3,2]C''+[c-(3)]C'''+[3,4]C^{IV}+[3,5]C^{V}=0,\\ [4,2]C''+[4,3]C'''+[c-(4)]C^{IV}+[4,5]C^{V}=0,\\ [5,2]C''+[5,3]C'''+[5,4]C^{IV}+[c-(5)]C^{V}=0.\end{cases}$$

60. Comme les quantités A, A′, B, B′, ainsi que a et b sont déjà connues, il est clair que les quatre équations (A) serviront à déterminer les quatre constantes A″, A‴, A^{IV}, A^{V}; que de même les équations (B) détermineront les constantes B″, B‴, B^{IV}, B^{V}. Commençons par ces déterminations; nous aurons d'abord, par les valeurs de A, A′, B, B′ du n° 50,

$$[2,0]A+[2,1]A'=-0,083215,\quad [2,0]B+[2,1]B'=0,230139,$$
$$[3,0]A+[3,1]A'=-0,026334,\quad [3,0]B+[3,1]B'=0,073359,$$
$$[4,0]A+[4,1]A'=-0,011340,\quad [4,0]B+[4,1]B'=0,031663,$$
$$[5,0]A+[5,1]A'=-0,002311,\quad [5,0]B+[5,1]B'=0,006469;$$

ensuite, à cause de $a=21'',9905$, $b=3'',5851$ (même numéro), on aura

$$a-(2)=4'',4542,\qquad b-(2)=-13'',9512,$$
$$a-(3)=6,7136,\qquad b-(3)=-11,6916,$$
$$a-(4)=10,3906,\qquad b-(4)=-8,0148,$$
$$a-(5)=15,2302,\qquad b-(5)=-3,1752.$$

Substituant ces valeurs ainsi que celles des autres coefficients données plus haut, et résolvant les équations à la manière ordinaire, on trouve

$$A''=0,01748\qquad B''=0,01837$$
$$8,2424843,\qquad 8,2641896,$$
$$A'''=0,00433\qquad B'''=0,01485$$
$$7,6366283,\qquad 8,1718434,$$
$$A^{IV}=-0,00138\qquad B^{IV}=0,01504$$
$$7,1403509,\qquad 8,1772767,$$
$$A^{V}=0,00027\qquad B^{V}=0,01681$$
$$6,4234834,\qquad 8,2255003.$$

61. A l'égard des équations (C), comme elles ne contiennent aucun terme tout connu, il est visible qu'elles ne suffisent point pour déterminer les quatre inconnues C″, C‴, C^{IV}, C^{V}: car, si l'on divise chacune de ces équations par C^{V}, on n'a plus que trois inconnues $\frac{C''}{C^{V}}$, $\frac{C'''}{C^{V}}$, $\frac{C^{IV}}{C^{V}}$, qu'on pourra déterminer par trois quelconques de ces mêmes équations; alors la quatrième servira à déterminer l'inconnue c.

Par les règles ordinaires de l'élimination on trouve que les valeurs des inconnues $\frac{C''}{C^{V}}$, $\frac{C'''}{C^{V}}$, $\frac{C^{IV}}{C^{V}}$, déduites des trois premières équations, sont de cette forme $\frac{M}{N}$, $\frac{M'}{N}$, $\frac{M''}{N}$, en faisant, pour abréger,

$$\begin{aligned}M=&-[2,5]\times[c-(3)]\times[c-(4)]+[2,3]\times[3,5]\times[c-(4)]\\&+[2,4]\times[4,5]\times[c-(3)]+[3,4]\times[4,3]\times[2,5]\\&-[2,3]\times[3,4]\times[4,5]-[3,5]\times[4,3]\times[3,4],\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M' = &-[3,5]\times[c-(2)]\times[c-(4)]+[3,2]\times[2,5]\times[c-(4)]\\
&+[3,4]\times[4,5]\times[c-(2)]+[2,4]\times[4,2]\times[3,5]\\
&-[2,5]\times[3,4]\times[4,2]-[3,2]\times[4,5]\times[2,4],\\
M'' = &-[4,5]\times[c-(2)]\times[c-(3)]+[2,5]\times[4,2]\times[c-(3)]\\
&+[3,5]\times[4,3]\times[c-(2)]+[2,3]\times[3,2]\times[4,5]\\
&-[2,3]\times[3,5]\times[4,2]-[3,2]\times[4,3]\times[2,5],\\
N = &[c-(2)]\times[c-(3)]\times[c-(4)]-[2,3]\times[3,2]\times[c-(4)]\\
&-[2,4]\times[4,2]\times[c-(3)]-[3,4]\times[4,3]\times[c-(2)]\\
&+[2,3]\times[3,4]\times[4,2]+[3,2]\times[4,3]\times[2,4];
\end{aligned}
$$

et ces valeurs étant substituées dans la quatrième équation, elle deviendra

$$[5,2]M+[5,3]M'+[5,4]M''+[c-(5)]N=0.$$

Cette équation dont c est la seule inconnue, en ordonnant les termes et faisant, pour abréger,

$$
\begin{aligned}
A &= [2,3]\times[3,2],\\
B &= [2,4]\times[4,2],\\
C &= [2,5]\times[5,2],\\
D &= [3,4]\times[4,3],\\
E &= [3,5]\times[5,3],\\
F &= [4,5]\times[5,4],\\
G &= [2,3]\times[3,4]\times[4,2]+[3,2]\times[4,3]\times[2,4],\\
H &= [2,3]\times[3,5]\times[5,2]+[3,2]\times[5,3]\times[2,5],\\
I &= [2,4]\times[4,5]\times[5,2]+[4,2]\times[5,4]\times[2,5],\\
K &= [3,4]\times[4,5]\times[5,3]+[4,3]\times[5,4]\times[3,5],\\
L &= [2,3]\times[3,2]\times[4,5]\times[5,4]+[2,4]\times[4,2]\times[3,5]\times[5,3]\\
&\quad+[3,4]\times[4,3]\times[2,5]\times[5,2]-[2,3]\times[3,4]\times[4,5]\times[5,2]\\
&\quad-[2,4]\times[4,3]\times[3,5]\times[5,2]-[3,2]\times[2,4]\times[4,5]\times[5,3]\\
&\quad-[3,2]\times[4,3]\times[5,4]\times[2,5]-[4,2]\times[3,4]\times[5,3]\times[2,5]\\
&\quad-[2,3]\times[4,2]\times[5,4]\times[3,5],
\end{aligned}
$$

se réduit à cette forme, où j'ai changé c en x,

$$
(X)\quad \left\{
\begin{aligned}
&[x-(2)]\times[x-(3)]\times[x-(4)]\times[x-(5)]\\
&-A[x-(4)]\times[x-(5)]-B[x-(3)]\times[x-(5)]\\
&-C[x-(3)]\times[x-(4)]-D[x-(2)]\times[x-(5)]\\
&-E[x-(2)]\times[x-(4)]-F[x-(2)]\times[x-(3)]\\
&+G[x-(5)]+H[x-(4)]+I[x-(3)]\\
&+K[x-(2)]+L
\end{aligned}
\right\}=0.
$$

Étant développée, elle montera au quatrième degré, et donnera par conséquent quatre valeurs de x, qui pourront être également employées pour c; et c'est de la réalité et de l'inégalité de ces racines que dépend l'exclusion des arcs de cercle dans les variables du Problème, et par conséquent la permanence de la forme actuelle des orbites des Planètes que nous considérons (41).

Il importe donc de résoudre cette équation rigoureusement. Pour cela, après l'avoir ordonnée par rapport aux puissances de x, il faudra commencer par lui ôter le second terme. Or, à l'inspection seule de cette équation, il est visible que le second terme sera

$$-[(2)+(3)+(4)+(5)]x^3;$$

ainsi il n'y aura qu'à y substituer d'abord

$$y+\frac{(2)+(3)+(4)+(5)}{4}$$

à la place de x, ou, ce qui revient au même, retrancher de chacune des quantités (2), (3), (4), (5), la quantité

$$\frac{(2)+(3)+(4)+(5)}{4}$$

et changer en même temps x en y.

Si donc on fait

$$x = y + \frac{(2)+(3)+(4)+(5)}{4},$$

et

$$[2] = (2) - \frac{(2)+(3)+(4)+(5)}{4},$$

$$[3] = (3) - \frac{(2)+(3)+(4)+(5)}{4},$$

$$[4] = (4) - \frac{(2)+(3)+(4)+(5)}{4},$$

$$[5] = (5) - \frac{(2)+(3)+(4)+(5)}{4},$$

on aura une transformée en y de la même forme que l'équation en x, mais dans laquelle les crochets ronds seront changés en crochets carrés, et qui étant ordonnée par rapport à y se trouvera privée du second terme, et sera de cette forme

$$y^4 + Py^2 + Qy + R = 0,$$

dans laquelle on aura

$$\begin{aligned} P = {} & [2]\times[3] + [2]\times[4] + [2]\times[5] + [3]\times[4] \\ & + [3]\times[5] + [4]\times[5] \\ & - A - B - C - D - E - F, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q = {} & -[2]\times[3]\times[4] - [2]\times[3]\times[5] - [2]\times[4]\times[5] \\ & - [3]\times[4]\times[5] \\ & + A\big[[4]+[5]\big] + B\big[[3]+[5]\big] + C\big[[3]+[4]\big] \\ & + D\big[[2]+[5]\big] + E\big[[2]+[4]\big] + F\big[[2]+[3]\big] \\ & + G + H + I + K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R = {} & [2]\times[3]\times[4]\times[5] - A[4]\times[5] - B[3]\times[5] \\ & - C[3]\times[4] - D[2]\times[5] - E[2]\times[4] \\ & - F[2]\times[3] - G[5] - H[4] - I[3] \\ & - K[2] + L. \end{aligned}$$

On formera maintenant cette réduite en z du troisième degré

$$z^3 + 2Pz^2 + (P^2 - 4R)z - Q^2 = 0,$$

et désignant ses trois racines par z', z'', z''', on aura sur-le-champ, pour les quatre racines ou valeurs de y, ces expressions fort simples

$$\frac{\sqrt{z'} + \sqrt{z''} + \sqrt{z'''}}{2}, \quad \frac{\sqrt{z'} - \sqrt{z''} - \sqrt{z'''}}{2},$$

$$\frac{\sqrt{z''} - \sqrt{z'} - \sqrt{z'''}}{2}, \quad \frac{\sqrt{z'''} - \sqrt{z'} - \sqrt{z''}}{2},$$

dans lesquelles il faudra avoir soin de prendre les trois radicaux, chacun avec un signe contraire à celui de la valeur du coefficient Q.

Cette manière de déterminer les racines des équations du quatrième degré est plus commode que la manière ordinaire qui n'emploie qu'une seule racine de la réduite, mais qui demande en même temps la résolution d'une équation du second degré. Elle résulte aussi directement de la nature de la réduite, dont les racines expriment les carrés des sommes des racines de la proposée prises deux à deux; et quant au signe qu'on doit donner aux radicaux, il suffit de remarquer que la somme des produits des quatre racines ci-dessus multipliées trois à trois se trouve exprimée par $\sqrt{z'}\sqrt{z''}\sqrt{z'''}$, quantité qui doit par conséquent être égale à $-Q$ par la nature des équations. *Voyez* là-dessus les *Mémoires de* 1770 (*).

Pour ce qui regarde la résolution de l'équation en z du troisième degré, ce qu'il y a de plus simple, lorsque les racines sont toutes réelles, comme elles le sont dans notre cas, c'est de la ramener à la trisection de l'angle, et d'y employer les Tables trigonométriques. Pour cela, après avoir privé l'équation du second terme, il n'y aura qu'à la comparer à celle-ci

$$u^3 - 3r^2u - 2r^3\cos\varphi = 0,$$

dont les racines sont

$$2r\cos\frac{\varphi}{3}, \quad -2r\cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right), \quad -2r\cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right).$$

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. III, p. 269.

62. Voici maintenant les résultats numériques de ces formules. J'ai calculé d'abord les valeurs des coefficients A, B,..., et j'ai trouvé

$$A = 0{,}45384 \qquad G = 1{,}44334$$
$$9{,}6569069, \qquad 0{,}1593668,$$
$$B = 0{,}03316 \qquad H = 0{,}00154$$
$$8{,}5206654, \qquad 7{,}1886001,$$
$$C = 0{,}00007 \qquad I = 0{,}00258$$
$$5{,}8373701, \qquad 7{,}4121670,$$
$$D = 34{,}60200 \qquad K = 1{,}39038$$
$$1{,}5391013, \qquad 0{,}1431314,$$
$$E = 0{,}01909 \qquad L = 0{,}24730$$
$$8{,}2808631, \qquad 9{,}3932241.$$
$$F = 0{,}73154$$
$$9{,}8642384,$$

J'ai fait ensuite

$$x = y + 12{,}7933$$

et

$$[2] = 4{,}7430 \qquad [4] = -1{,}1934$$
$$0{,}6760531, \qquad 0{,}0767860,$$
$$[3] = 2{,}4834 \qquad [5] = -6{,}0330$$
$$0{,}3950467, \qquad 0{,}7805333.$$

De là j'ai calculé les valeurs de P, Q, R, comme il suit

$$P = -69{,}0824, \quad Q = -6{,}7522, \quad R = 1066{,}0018,$$

et j'ai trouvé cette réduite en z

$$z^3 - 3mz^2 + nz - p = 0,$$

dans laquelle

$$m = -\frac{2P}{3} = 46{,}0549,$$
$$n = P^2 - 4R = 508{,}3708,$$
$$p = Q^2 = 45{,}5922.$$

En faisant

$$z = m(u+1),$$

elle se réduit à cette forme

$$u^3 - \left(3 - \frac{n}{m^2}\right)u - \left(2 - \frac{n}{m^2} + \frac{p}{m^3}\right) = 0,$$

de sorte qu'en la comparant à

$$u^3 - 3r^2u - 2r^3\cos\varphi = 0,$$

on a

$$r^2 = 1 - \frac{n}{3m^2} = 0{,}92011,$$

$$r^3\cos\varphi = 1 - \frac{n}{2m^2} + \frac{p}{2m^3} = 0{,}88039;$$

ce qui donne

$$r = 0{,}95922, \quad \varphi = 4^\circ 3', \quad \frac{\varphi}{3} = 1^\circ 21'$$

(il est inutile de porter ici la précision jusqu'aux secondes, puisque la valeur de $\cos\varphi$ n'est exacte qu'à la cinquième décimale près).

Ainsi les trois racines ou valeurs de u seront

$$1{,}91791, \quad -0{,}91990, \quad -0{,}99802;$$

et de là on trouvera

$$z' = 134{,}384, \quad z'' = 3{,}6892, \quad z''' = 0{,}09124.$$

Donc, puisque $-Q$ est un nombre positif, on aura

$$\sqrt{z'} = 11{,}594, \quad \sqrt{z''} = 1{,}9207, \quad \sqrt{z'''} = 0{,}3021.$$

Par conséquent les quatre racines ou valeurs de y seront

$$6{,}9076, \quad 4{,}6848, \quad -4{,}9869, \quad -6{,}6055.$$

Mais, quoique ces valeurs soient poussées jusqu'à la quatrième décimale, on ne peut cependant compter que sur la troisième; c'est pourquoi, afin de les vérifier et de leur donner en même temps une plus grande exactitude, je les ai substituées successivement dans l'équation

$$y^4 + Py^2 + Qy + R = 0,$$

et, employant la méthode ordinaire de tâtonnement, j'ai trouvé celles-ci corrigées et exactes jusqu'à la quatrième décimale inclusivement

$$y = 6{,}9081, \quad 4{,}6843, \quad -4{,}9876, \quad -6{,}6048;$$

ainsi, en y ajoutant 12,7933, on aura

$$x = 19{,}7014, \quad 17{,}4776, \quad 7{,}8057, \quad 6{,}1885.$$

Telles sont les racines de l'équation qui détermine la quantité c; d'où l'on voit que cette quantité peut avoir quatre valeurs différentes toutes réelles, que nous désignerons par c, d, e, f, et qui donneront par conséquent autant de sinus et de cosinus dans les expressions des variables du Problème. Ainsi nous sommes déjà assurés que ces expressions ne sauraient contenir des arcs de cercle, et que par conséquent leur exactitude ne sera pas bornée à un temps limité, mais aura toujours lieu à l'infini.

Mais, comme les racines que nous venons de trouver dépendent des valeurs supposées aux masses des Planètes, on pourrait douter si, en changeant ces valeurs, on ne tomberait peut-être pas dans des racines égales ou imaginaires. Pour lever tout à fait ce doute, il faudrait pouvoir démontrer, en général, que, quelles que soient les valeurs des masses, pourvu seulement qu'elles soient positives, les racines de l'équation dont il s'agit sont toujours nécessairement réelles et inégales. Cela est facile lorsqu'on ne considère à la fois que l'action mutuelle de deux Planètes, comme nous l'avons vu plus haut relativement à Saturne et Jupiter, parce qu'alors l'équation n'est que du second degré; mais cette équation se complique et s'élève à mesure que le nombre des Planètes augmente; c'est pourquoi il devient de plus en plus difficile de juger *à priori* de la qualité des racines. Cependant il ne paraît pas impossible de parvenir, par quelque artifice particulier, à décider cette question d'une manière générale; et comme c'est un objet également intéressant pour l'Analyse et pour l'Astronomie physique, je me propose de m'en occuper. En attendant, je me contenterai de remarquer que, dans le cas présent, les racines trouvées sont trop différentes entre elles pour qu'un petit changement dans les masses adoptées puisse les rendre égales, et

encore moins imaginaires. En effet, les expressions générales des racines de y font voir que l'égalité de deux de ces racines ne peut avoir lieu sans celle des racines de z; or l'inégalité de celles-ci est assez grande pour ne pouvoir être détruite que par une altération considérable des coefficients. Il faudrait pour cela que l'angle φ, que nous avons trouvé de 4°3′, devînt nul ou de 180 degrés; ce qui, vu la nature des formules, demanderait, dans les éléments, des changements beaucoup trop grands pour pouvoir être admis.

63. Nous ferons donc

$$c = 19'',7014, \quad d = 17'',4776, \quad e = 7'',8057, \quad f = 6'',1885$$

(les valeurs de ces coefficients sont censées exprimées en secondes, puisque celles des coefficients marqués par des crochets sont exprimées ainsi); et nous aurons pour les valeurs complètes des variables x'', y'', x''', ..., des expressions de cette forme

$$\begin{aligned}
x'' &= A'' \sin(at+\alpha) + B'' \sin(bt+\beta) + C'' \sin(ct+\gamma) \\
&\quad + D'' \sin(dt+\delta) + E'' \sin(et+\varepsilon) + F'' \sin(ft+\varpi),\\
y'' &= A'' \cos(at+\alpha) + B'' \cos(bt+\beta) + C'' \cos(ct+\gamma) \\
&\quad + D'' \cos(dt+\delta) + E'' \cos(et+\varepsilon) + F'' \cos(ft+\varpi),\\
x''' &= A''' \sin(at+\alpha) + B''' \sin(bt+\beta) + C''' \sin(ct+\gamma) \\
&\quad + D''' \sin(dt+\delta) + E''' \sin(et+\varepsilon) + F''' \sin(ft+\varpi),\\
y''' &= A''' \cos(at+\alpha) + B''' \cos(bt+\beta) + C''' \cos(ct+\gamma) \\
&\quad + D''' \cos(dt+\delta) + E''' \cos(et+\varepsilon) + F''' \cos(ft+\varpi),\\
x^{IV} &= A^{IV} \sin(at+\alpha) + B^{IV} \sin(bt+\beta) + C^{IV} \sin(ct+\gamma) \\
&\quad + D^{IV} \sin(dt+\delta) + E^{IV} \sin(et+\varepsilon) + F^{IV} \sin(ft+\varpi),\\
y^{IV} &= A^{IV} \cos(at+\alpha) + B^{IV} \cos(bt+\beta) + C^{IV} \cos(ct+\gamma) \\
&\quad + D^{IV} \cos(dt+\delta) + E^{IV} \cos(et+\varepsilon) + F^{IV} \cos(ft+\varpi),\\
x^{V} &= A^{V} \sin(at+\alpha) + B^{V} \sin(bt+\beta) + C^{V} \sin(ct+\gamma) \\
&\quad + D^{V} \sin(dt+\delta) + E^{V} \sin(et+\varepsilon) + F^{V} \sin(ft+\varpi),\\
y^{V} &= A^{V} \cos(at+\alpha) + B^{V} \cos(bt+\beta) + C^{V} \cos(ct+\gamma) \\
&\quad + D^{V} \cos(dt+\delta) + E^{V} \cos(et+\varepsilon) + F^{V} \cos(ft+\varpi),
\end{aligned}$$

qui, étant substituées dans les équations du *premier système* (58), donneront (en égalant à zéro les coefficients des différents sinus et cosinus), outre les trois équations (A), (B), (C) déjà trouvées (59), ces trois autres-ci semblables aux équations (C)

$$(D)\quad \begin{cases} [d-(2)]\,D'' + [2,3]\,D''' + [2,4]\,D^{IV} + [2,5]\,D^{V} = 0, \\ [3,2]\,D'' + [d-(3)]\,D''' + [3,4]\,D^{IV} + [3,5]\,D^{V} = 0, \\ [4,2]\,D'' + [4,3]\,D''' + [d-(4)]\,D^{IV} + [4,5]\,D^{V} = 0, \\ [5,2]\,D'' + [5,3]\,D''' + [5,4]\,D^{IV} + [d-(5)]\,D^{V} = 0; \end{cases}$$

$$(E)\quad \begin{cases} [e-(2)]\,E'' + [2,3]\,E''' + [2,4]\,E^{IV} + [2,5]\,E^{V} = 0, \\ [3,2]\,E'' + [e-(3)]\,E''' + [3,4]\,E^{IV} + [3,5]\,E^{V} = 0, \\ [4,2]\,E'' + [4,3]\,E''' + [e-(4)]\,E^{IV} + [4,5]\,E^{V} = 0, \\ [5,2]\,E'' + [5,3]\,E''' + [5,4]\,E^{IV} + [e-(5)]\,E^{V} = 0; \end{cases}$$

$$(F)\quad \begin{cases} [f-(2)]\,F'' + [2,3]\,F''' + [2,4]\,F^{IV} + [2,5]\,F^{V} = 0, \\ [3,2]\,F'' + [f-(3)]\,F''' + [3,4]\,F^{IV} + [3,5]\,F^{V} = 0, \\ [4,2]\,F'' + [4,3]\,F''' + [f-(4)]\,F^{IV} + [4,5]\,F^{V} = 0, \\ [5,2]\,F'' + [5,3]\,F''' + [5,4]\,F^{IV} + [f-(5)]\,F^{V} = 0. \end{cases}$$

Les équations (A) et (B) ont été résolues ci-dessus (60) et ont donné les valeurs des coefficients A'', A''', ..., B'', B''', ... Les équations (C) ne donnent, comme nous l'avons vu (61), que les rapports entre les coefficients C'', C''', C^{IV}, C^{V}; mais elles donnent en même temps la valeur de la constante c par une équation déterminée du quatrième degré; et, comme les équations précédentes (D), (E), (F) sont en tout semblables aux équations (C), il est clair que les équations résultantes en d, e, f seront les mêmes que l'équation en c; de sorte que ces équations seront satisfaites en prenant, comme nous le faisons, pour c, d, e, f les racines de

l'équation trouvée en c. Ainsi il suffira d'employer trois des équations de chacun des quatre systèmes (C), (D), (E), (F), pour déterminer les valeurs des rapports $\frac{C''}{C'''}, \frac{C^{IV}}{C'''}, \frac{C^{V}}{C'''}, \frac{D''}{D'''}, \frac{D^{IV}}{D'''}, \ldots$.

On pourrait, dans cette détermination, faire usage des expressions générales trouvées dans le numéro cité, en y changeant successivement les lettres C, c, en D, d, en E, e et en F, f; mais, pour éviter l'inconvénient des fractions dont le numérateur et le dénominateur sont des nombres très-petits, il est à propos de résoudre immédiatement les équations dont il s'agit, par la méthode ordinaire; d'autant que, comme il y a dans chaque système une équation de plus qu'il ne faut, on a par là l'avantage de pouvoir choisir celles qui déterminent les inconnues par des nombres plus grands, et par conséquent avec plus de précision.

De cette manière donc j'ai trouvé les valeurs suivantes exactes jusqu'à la quatrième décimale inclusivement

$$\frac{C''}{C'''} = -1{,}9742 \qquad \frac{C^{IV}}{C'''} = 1{,}3545 \qquad \frac{C^{V}}{C'''} = -0{,}2202$$
$$0{,}2953823, \qquad 0{,}1317950, \qquad 9{,}3427808_{n},$$

$$\frac{D''}{D'''} = 0{,}0649 \qquad \frac{D^{IV}}{D'''} = -0{,}0767 \qquad \frac{D^{V}}{D'''} = 0{,}0157$$
$$8{,}8123116, \qquad 8{,}8850218, \qquad 8{,}1949552_{n},$$

$$\frac{E''}{E'''} = 5{,}3541 \qquad \frac{E^{IV}}{E'''} = 6{,}5286 \qquad \frac{E^{V}}{E'''} = -18{,}9587$$
$$0{,}7286857, \qquad 0{,}8148187, \qquad 1{,}2778090_{n},$$

$$\frac{F''}{F'''} = 5{,}8237 \qquad \frac{F^{IV}}{F'''} = 8{,}1506 \qquad \frac{F^{V}}{F'''} = 42{,}6478$$
$$0{,}7651967, \qquad 0{,}9111875, \qquad 1{,}6298968_{n}.$$

64. Il reste donc encore huit constantes arbitraires, C'', D'', E'', F'', γ, δ, ε, ϖ, lesquelles, étant en même nombre que les équations différentielles, prouvent que les expressions adoptées pour les variables en sont les intégrales complètes. Pour les déterminer, on fera dans ces expres-

sions $t = 0$, et on les égalera aux valeurs données par les Tables pour cette époque, et que nous avons rapportées plus haut (58).

Or d'après les valeurs de A'', A''', A^{IV}, A^{V}, B'', B''', B^{IV}, B^{V} trouvées dans le n° 60, combinées avec celles des angles α et β déterminées dans le n° 50, on trouve

$$A'' \sin\alpha + B'' \sin\beta = -0{,}02330,$$

$$A'' \cos\alpha + B'' \cos\beta = -0{,}00545,$$

$$A''' \sin\alpha + B''' \sin\beta = -0{,}01097,$$

$$A''' \cos\alpha + B''' \cos\beta = -0{,}01025,$$

$$A^{IV} \sin\alpha + B^{IV} \sin\beta = -0{,}00648,$$

$$A^{IV} \cos\alpha + B^{IV} \cos\beta = -0{,}01381,$$

$$A^{V} \sin\alpha + B^{V} \sin\beta = -0{,}00869,$$

$$A^{V} \cos\alpha + B^{V} \cos\beta = -0{,}01436.$$

Donc, retranchant respectivement de ces valeurs celles de x'', y'', x''',... pour 1700, et substituant les valeurs de C''', C^{IV}, C^{V}, D'',..., on aura à résoudre ces huit équations

$$C'' \sin\gamma + D'' \sin\delta + E'' \sin\varepsilon + F'' \sin\varpi - 0{,}06902 = 0,$$

$$-1{,}9742\, C'' \sin\gamma + 0{,}0649\, D'' \sin\delta + 5{,}3541\, E'' \sin\varepsilon + 5{,}8237\, F'' \sin\varpi + 0{,}00568 = 0,$$

$$1{,}3545\, C'' \sin\gamma - 0{,}0767\, D'' \sin\delta + 6{,}5286\, E'' \sin\varepsilon + 8{,}1506\, F'' \sin\varpi + 0{,}00087 = 0,$$

$$-0{,}2202\, C'' \sin\gamma + 0{,}0157\, D'' \sin\delta - 18{,}9587\, E'' \sin\varepsilon + 42{,}6478\, F'' \sin\varpi + 0{,}18791 = 0,$$

$$C'' \cos\gamma + D'' \cos\delta + E'' \cos\varepsilon + F'' \sin\varpi + 0{,}07553 = 0,$$

$$-1{,}9742\, C'' \cos\gamma + 0{,}0649\, D'' \cos\delta + 5{,}3541\, E'' \cos\varepsilon + 5{,}8237\, F'' \cos\varpi - 0{,}01250 = 0,$$

$$1{,}3545\, C'' \cos\gamma - 0{,}0767\, D'' \cos\delta + 6{,}5286\, E'' \cos\varepsilon + 8{,}1506\, F'' \cos\varpi - 0{,}01797 = 0,$$

$$-0{,}2202\, C'' \cos\gamma + 0{,}0157\, D'' \cos\delta - 18{,}9587\, E'' \cos\varepsilon + 42{,}6478\, F'' \cos\varpi + 0{,}04679 = 0,$$

lesquelles donnent

$C'' \sin\gamma = 0{,}00550$	$C'' \cos\gamma = -0{,}00240$
$7{,}7399993,$	$7{,}3799035,$
$D'' \sin\delta = 0{,}06307$	$D'' \cos\delta = -0{,}07550$
$8{,}7997863,$	$8{,}8779688,$
$E'' \sin\varepsilon = 0{,}00336$	$E'' \cos\varepsilon = 0{,}00239$
$7{,}5265433,$	$7{,}3780671,$
$F'' \sin\varpi = -0{,}00291$	$F'' \cos\varpi = -0{,}00002$
$7{,}4633944,$	$5{,}3029756.$

De là on tire aisément les déterminations suivantes

$$\gamma = 180° - 66°\,25'\,20'',$$
$$\delta = 180° - 39°\,52'\,10'',$$
$$\varepsilon = 54°\,36'\,30'',$$
$$\varpi = 180° + 89°\,36'\,10'',$$

$C'' = 0{,}00600$	$D'' = 0{,}09838$	$E'' = 0{,}00412$	$F'' = 0{,}00291$
$7{,}7778566,$	$8{,}9928923,$	$7{,}6152702,$	$7{,}4634043;$

et, multipliant ces valeurs de C'', D'',... respectivement par celles de $\frac{C'''}{C''}$, $\frac{C^{IV}}{C''}$,... trouvées dans le numéro précédent, on aura celles de C''', C^{IV},... comme il suit

$C''' = -0{,}01184$	$D''' = 0{,}00639$	$E''' = 0{,}02208$	$F''' = 0{,}01693$
$8{,}0732389,$	$7{,}8052039,$	$8{,}3439559,$	$8{,}2286010,$
$C^{IV} = 0{,}00812$	$D^{IV} = -0{,}00755$	$E^{IV} = 0{,}02692$	$F^{IV} = 0{,}02369,$
$7{,}9096516,$	$7{,}8779141,$	$8{,}4300889,$	$8{,}3745918.$
$C^{V} = -0{,}00132$	$D^{V} = 0{,}00154$	$E^{V} = -0{,}07818$	$F^{V} = 0{,}12397$
$7{,}1206374,$	$7{,}1878475,$	$8{,}8930792,$	$0{,}0933011.$

65. Si l'on joint ces valeurs à celles de A'', B'', A''',... du n° 60, et à celles de a, b et de α, β trouvées dans la théorie de Saturne et Jupi-

ter (50), on connaîtra toutes les constantes qui entrent dans les expressions complètes des variables x'', y'', x''',... (63); ainsi l'on pourra déterminer les valeurs de ces variables pour un temps quelconque; et comme

$$x''=\lambda''\sin\varphi'', \quad y''=\lambda''\cos\varphi'', \quad x'''=\lambda'''\sin\varphi''', \quad y'''=\lambda'''\cos\varphi''', \ldots,$$

on aura par là les excentricités λ'', λ''', λ^{IV}, λ^{V} des quatre Planètes, Mars, la Terre, Vénus et Mercure, ainsi que les longitudes φ'', φ''', φ^{IV}, φ^{V} de leurs aphélies, pour le temps donné.

Mais ces longitudes sont supposées comptées depuis le lieu de l'équinoxe de 1700 regardé comme fixe dans le ciel; de sorte que, pour avoir les vraies longitudes comptées depuis l'équinoxe mobile, il faudra augmenter celles-là de la précession des équinoxes, qui, à raison de $50''\frac{1}{3}$ par an, donne l'angle $50'',3333\,t$ à ajouter aux angles φ'', φ''',....

Or

$$\sin(\varphi''+50'',3333\,t)=\sin\varphi''\cos(50'',3333\,t)+\cos\varphi''\sin(50'',3333\,t),$$

et

$$\cos(\varphi''+50'',3333\,t)=\cos\varphi''\cos(50'',3333\,t)-\sin\varphi''\sin(50'',3333\,t);$$

donc, en augmentant φ'' de $50'',3333\,t$, les quantités x'' et y'' deviendront

$$x''\cos(50'',3333\,t)+y''\sin(50'',3333\,t),$$

et

$$y''\cos(50'',3333\,t)-x''\sin(50'',3333\,t);$$

et il est aisé de voir qu'en substituant pour x'', y'' leurs expressions (63), il en résultera de nouveau des expressions semblables, mais dans lesquelles tous les angles sous les signes de sinus et cosinus se trouveront aussi augmentés du même angle $50'',3333\,t$. D'où il s'ensuit que, pour augmenter l'angle φ'' de l'angle dû à la précession des équinoxes, ou, en général, d'un autre angle quelconque, il suffira d'augmenter en même temps de ce même angle tous ceux qui se trouvent sous sinus et cosinus dans les expressions générales de x'', y''; ce qui est évidemment une suite de la forme de ces expressions; et il en sera par conséquent de même pour les autres angles φ''', φ^{IV},....

Donc, en général, pour que les longitudes soient comptées depuis le point mobile de l'équinoxe, suivant l'usage ordinaire des Astronomes, il n'y aura qu'à augmenter de $50'',3333$ les valeurs de tous les coefficients a, b, c,... de la variable t.

66. Voici donc les formules générales par lesquelles on pourra déterminer les excentricités et les aphélies de Mars, de la Terre, de Vénus et de Mercure, pour un nombre quelconque d'années Juliennes t comptées depuis le commencement de 1700, ou avant cette époque, en faisant t négatif.

Soit, pour abréger,

$$\mathrm{L}=53^\circ 25'\,20''-72'',3238\,t,$$
$$\mathrm{M}=30^\circ 16'\,40''+53'',9184\,t,$$
$$\mathrm{N}=66^\circ 25'\,20''-70'',0347\,t,$$
$$\mathrm{P}=39^\circ 52'\,10''-67'',8109\,t,$$
$$\mathrm{Q}=54^\circ 36'\,30''+58'',1390\,t,$$
$$\mathrm{R}=89^\circ 36'\,10''+56'',5218\,t,$$

on aura

Pour Mars.

$$\text{excent.}\times\sin(\text{long. aph.})=-0,01748\sin\mathrm{L}-0,01837\sin\mathrm{M}+0,00600\sin\mathrm{N}+0,09838\sin\mathrm{P}+0,00412\sin\mathrm{Q}-0,00291\sin\mathrm{R},$$

$$\text{excent.}\times\cos(\text{long. aph.})=+0,01748\cos\mathrm{L}-0,01837\cos\mathrm{M}-0,00600\cos\mathrm{N}-0,09838\cos\mathrm{P}+0,00412\cos\mathrm{Q}-0,00291\cos\mathrm{R};$$

Pour la Terre.

$$\text{excent.}\times\sin(\text{long. aph.})=-0,00433\sin\mathrm{L}-0,01485\sin\mathrm{M}-0,01184\sin\mathrm{N}+0,00639\sin\mathrm{P}+0,02208\sin\mathrm{Q}-0,01693\sin\mathrm{R},$$

$$\text{excent.}\times\cos(\text{long. aph.})=+0,00433\cos\mathrm{L}-0,01485\cos\mathrm{M}+0,01184\cos\mathrm{N}-0,00639\cos\mathrm{P}+0,02208\cos\mathrm{Q}-0,01693\cos\mathrm{R};$$

Pour Vénus.

$$\text{excent.} \times \sin(\text{long. aph.}) = +0{,}00138\sin L - 0{,}01504\sin M + 0{,}00812\sin N - 0{,}00755\sin P + 0{,}02692\sin Q - 0{,}02369\sin R,$$

$$\text{excent.} \times \cos(\text{long. aph.}) = -0{,}00138\cos L - 0{,}01504\cos M - 0{,}00812\cos N + 0{,}00755\cos P + 0{,}02692\cos Q - 0{,}02369\cos R;$$

Pour Mercure.

$$\text{excent.} \times \sin(\text{long. aph.}) = -0{,}00027\sin L - 0{,}01681\sin M - 0{,}00132\sin N + 0{,}00154\sin P - 0{,}07818\sin Q - 0{,}12397\sin R,$$

$$\text{excent.} \times \cos(\text{long. aph.}) = +0{,}00027\cos L - 0{,}01681\cos M + 0{,}00132\cos N - 0{,}00154\cos P - 0{,}07818\cos Q - 0{,}12397\cos R.$$

Il est visible que la racine carrée de la somme des carrés des deux formules relatives à chaque Planète donnera la valeur de l'excentricité, et que le quotient des mêmes formules divisées l'une par l'autre donnera la tangente de la longitude de l'aphélie.

Mais, quoiqu'on puisse avoir de cette manière des expressions générales et directes de ces éléments, il serait fort difficile, peut-être même impossible, de déterminer exactement leurs valeurs moyennes, leurs maxima et minima, les périodes de leurs variations,..., comme nous l'avons fait pour Saturne et Jupiter. Cependant on peut, du moins relativement aux excentricités, fixer des limites au delà desquelles il sera impossible qu'elles puissent croître, et ces limites sont données par la somme des coefficients de tous les sinus ou cosinus, pris chacun positivement, comme nous l'avons fait voir dans le n° 41.

Ainsi nous aurons, pour les limites des excentricités de Mars, de la Terre, de Vénus et de Mercure, les valeurs suivantes

$$0{,}14726,\quad 0{,}07641,\quad 0{,}08271,\quad 0{,}22208,$$

qu'on voit être encore assez petites pour que les orbites demeurent toujours des ellipses peu excentriques. De sorte qu'à cet égard on peut prononcer décisivement que la constitution du système solaire est inaltérable par le simple effet de l'attraction mutuelle des six Planètes principales.

Inclinaisons et nœuds.

67. Venons enfin aux équations différentielles du second système (58), lesquelles étant, comme on voit, analogues à celles du premier, peuvent être traitées d'une manière semblable. Ainsi, puisque les variables s, u, s', u' sont déjà connues (53), et contiennent les sinus et cosinus des angles α et $bt+\beta$, nous supposerons d'abord

$$\begin{aligned}
s'' &= A''\sin\alpha + B''\sin(bt+\beta) + C''\sin(ct+\gamma),\\
u'' &= A''\cos\alpha + B''\cos(bt+\beta) + C''\cos(ct+\gamma),\\
s''' &= A'''\sin\alpha + B'''\sin(bt+\beta) + C'''\sin(ct+\gamma),\\
u''' &= A'''\cos\alpha + B'''\cos(bt+\beta) + C'''\cos(ct+\gamma),\\
s^{IV} &= A^{IV}\sin\alpha + B^{IV}\sin(bt+\beta) + C^{IV}\sin(ct+\gamma),\\
u^{IV} &= A^{IV}\cos\alpha + B^{IV}\cos(bt+\beta) + C^{IV}\cos(ct+\gamma),\\
s^{V} &= A^{V}\sin\alpha + B^{V}\sin(bt+\beta) + C^{V}\sin(ct+\gamma),\\
u^{V} &= A^{V}\cos\alpha + B^{V}\cos(bt+\beta) + C^{V}\cos(ct+\gamma),
\end{aligned}$$

et nous aurons, après les substitutions, ces trois systèmes d'équations de condition

$$(a)\quad \begin{cases}
(2,0)A + (2,1)A - (2)A'' + (2,3)A''' + (2,4)A^{IV} + (2,5)A^{V} = 0,\\
(3,0)A + (3,1)A + (3,2)A'' - (3)A''' + (3,4)A^{IV} + (3,5)A^{V} = 0,\\
(4,0)A + (4,1)A + (4,2)A'' + (4,3)A''' - (4)A^{IV} + (4,5)A^{V} = 0,\\
(5,0)A + (5,1)A + (5,2)A'' + (5,3)A''' + (5,4)A^{IV} - (5)A^{V} = 0;
\end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases}
(2,0)B + (2,1)B' - [b+(2)]B'' + (2,3)B''' + (2,4)B^{IV} + (2,5)B^{V} = 0,\\
(3,0)B + (3,1)B' + (3,2)B'' - [b+(3)]B''' + (3,4)B^{IV} + (3,5)B^{V} = 0,\\
(4,0)B + (4,1)B' + (4,2)B'' + (4,3)B''' - [b+(4)]B^{IV} + (4,5)B^{V} = 0,\\
(5,0)B + (5,1)B' + (5,2)B'' + (5,3)B''' + (5,4)B^{IV} - [b+(5)]B^{V} = 0;
\end{cases}$$

$$(c)\quad\begin{cases}-\big[c+(2)\big]C''+(2,3)C'''+(2,4)C^{IV}+(2,5)C^{V}=0,\\ (3,2)C''-\big[c+(3)\big]C'''+(3,4)C^{IV}+(3,5)C^{V}=0,\\ (4,2)C''+(4,3)C'''-\big[c+(4)\big]C^{IV}+(4,5)C^{V}=0,\\ (5,2)C''+(5,3)C'''+(5,4)C^{IV}-\big[c+(5)\big]C^{V}=0.\end{cases}$$

68. On voit d'abord, par rapport aux équations (a), que, puisque les coefficients (2), (3),... sont égaux chacun à la somme de tous les autres coefficients de la même équation, on satisfera à ces équations en faisant tous les coefficients égaux. De sorte qu'on aura $A''=A$, $A'''=A$,.... Donc (53)

$$A''=A'''=A^{IV}=A^{V}=0,02905$$
$$\log 8,4631770.$$

Quant aux équations (b), il faudra commencer par y substituer les valeurs de b et de B, B', trouvées dans le même numéro, valeurs qui donnent

$$(2,0)B+(2,1)B'=-0,085208,\quad b+(2)=-8,0393,$$
$$(3,0)B+(3,1)B'=-0,040727,\quad b+(3)=-10,2989,$$
$$(4,0)B+(4,1)B'=-0,024139,\quad b+(4)=-13,9757,$$
$$(5,0)B+(5,1)B'=-0,009182,\quad b+(5)=-18,8153;$$

et, résolvant ensuite ces équations à la manière ordinaire, on trouvera

$$B''=0,00981 \qquad B'''=0,00363$$
$$7,9916247, \qquad 7,5597870,$$
$$B^{IV}=-0,00012 \qquad B^{V}=0,00033$$
$$6,0920185, \qquad 6,5142785.$$

69. Les équations (c) donneront les rapports entre les quatre constantes C'', C''', C^{IV}, C^{V}; et, éliminant ces rapports, on aura une équation

déterminée en c, qui, en suivant le procédé du n° 61, et faisant, pour abréger,

$$A=(2,3)\times(3,2),$$
$$B_{i}=(2,4)\times(4,2),$$
$$C=(2,5)\times(5,2),$$
$$D=(3,4)\times(4,3),$$
$$E=(3,5)\times(5,3),$$
$$F=(4,5)\times(5,4),$$
$$G=(2,3)\times(3,4)\times(4,2)+(3,2)\times(4,3)\times(2,4),$$
$$H=(2,3)\times(3,5)\times(5,2)+(3,2)\times(5,3)\times(2,5),$$
$$I=(2,4)\times(4,5)\times(5,2)+(4,2)\times(5,4)\times(2,5),$$
$$K=(3,4)\times(4,5)\times(5,3)+(4,3)\times(5,4)\times(3,5),$$
$$\begin{aligned}L=&(2,3)\times(3,2)\times(4,5)\times(5,4)+(2,4)\times(4,2)\times(3,5)\times(5,3)\\&+(3,4)\times(4,3)\times(2,5)\times(5,2)-(2,3)\times(3,4)\times(4,5)\times(5,2)\\&-(2,4)\times(4,3)\times(3,5)\times(5,2)-(3,2)\times(2,4)\times(4,5)\times(5,3)\\&-(3,2)\times(4,3)\times(5,4)\times(2,5)-(4,2)\times(3,4)\times(5,3)\times(2,5)\\&-(2,3)\times(4,2)\times(5,4)\times(3,5),\end{aligned}$$

sera (après avoir changé c en $-x$) de la même forme que l'équation en x du numéro que nous venons de citer, et pourra par conséquent être traitée de la même manière et par les mêmes formules.

Commençons par chercher les valeurs numériques des quantités A, B,...; nous trouvons les suivantes

$$A=0,76748 \qquad D=49,89920$$
$$9,8850655, \qquad 1,6980937,$$
$$B=0,10016 \qquad E=0,08485$$
$$9,0006856, \qquad 8,9286385,$$
$$C=0,00072 \qquad F=1,77174$$
$$6,8571039, \qquad 0,2484002,$$

$$G = 3,91699 \qquad K = 5,47766$$
$$0,5929524, \qquad 0,7385692,$$
$$H = 0,01369 \qquad L = 0,712306$$
$$8,1364340, \qquad 9,8526666.$$
$$I = 0,02260$$
$$8,3541250,$$

Faisons ensuite, comme dans le n° 62,

$$x = y + 12,7933,$$

et calculons les valeurs des coefficients P, Q, R de la transformée en y d'après les mêmes expressions données dans le n° 61, en conservant les valeurs des quantités [2], [3], [4], [5] (62), mais en employant pour celles de A, B, C,... les précédentes. Nous aurons ainsi

$$P = -85,8669, \quad Q = -14,6457, \quad R = 1486,5581;$$

et de là nous trouverons cette réduite en z

$$z^3 - 3mz^2 + nz - p = 0,$$

dans laquelle

$$m = -\frac{2P}{3} = 57,3113,$$
$$n = P^2 - 4R = 1426,8896,$$
$$p = Q^2 = 214,4984.$$

Faisant donc

$$z = m(u+1),$$

et, comparant avec

$$u^3 - 3r^2u - 2r^3\cos\varphi = 0,$$

il viendra

$$r^2 = 0,8552, \quad \text{et} \quad r^3\cos\varphi = 0,78336;$$

ce qui donne

$$r = 0,9248, \quad \varphi = 7^\circ 54', \quad \frac{\varphi}{3} = 2^\circ 38'.$$

Donc, puisque les trois racines ou valeurs de u sont représentées par

$$2r\cos\frac{\varphi}{3}, \quad -2r\cos\left(60^\circ + \frac{\varphi}{3}\right), \quad -2r\cos\left(60^\circ - \frac{\varphi}{3}\right),$$

elles deviendront

$$1,8476, \quad -0,8503, \quad -0,9973;$$

et de là on aura ces trois valeurs de z

$$z' = 163,199, \quad z'' = 8,581, \quad z''' = 0,1546.$$

Or Q étant négatif, il faudra prendre les racines carrées de ces valeurs positivement, en sorte qu'on aura

$$\sqrt{z'} = 12,775, \quad \sqrt{z''} = 2,929, \quad \sqrt{z'''} = 0,393;$$

faisant ces substitutions dans les expressions générales des racines ou valeurs de y (61), il viendra enfin celles-ci

$$8,048, \quad 4,726, \quad -5,119, \quad -7,655,$$

qui ne sont, à proprement parler, exactes qu'à la troisième décimale près.

Mais il est facile par leur moyen de pousser l'approximation aussi loin qu'on veut, en opérant directement sur l'équation

$$y^4 + Py^2 + Qy + R = 0,$$

selon les méthodes connues. J'ai trouvé ainsi les valeurs suivantes exactes jusqu'à la quatrième décimale inclusivement

$$y = 8,0447, \quad 4,7219, \quad -5,1132, \quad -7,6534;$$

et de là, en ajoutant 12,7933, j'ai eu ces valeurs ou racines de x

$$x = 20,8380, \quad 17,5152, \quad 7,6801, \quad 5,1399.$$

En prenant ces valeurs négativement, on aura donc celles de la constante c, laquelle multiplie la variable t sous les signes de sinus et co-

sinus; de sorte que ces valeurs pourront fournir autant de différents sinus et cosinus dans les expressions des variables s'', u'', s''',..., mais aucun arc de cercle.

On peut, au reste, faire ici sur la réalité et sur l'inégalité de ces racines, et par conséquent sur l'exclusion des arcs de cercle dans les variables du Problème, des remarques analogues à celles du n° 62, auquel nous renvoyons.

70. Faisant donc, à l'imitation du n° 63,

$$c=-20'',8380,\quad d=-17'',5152,\quad e=-7'',6801,\quad f=-5'',1399,$$

on aura ces expressions complètes des variables s'', u'', s''',...

$$\begin{aligned}
s'' &= A\sin\alpha + B''\sin(bt+\beta) + C''\sin(ct+\gamma) + D''\sin(dt+\delta)\\
&\quad + E''\sin(et+\varepsilon) + F''\sin(ft+\varpi),\\
u'' &= A\cos\alpha + B''\cos(bt+\beta) + C''\cos(ct+\gamma) + D''\cos(dt+\delta)\\
&\quad + E''\cos(et+\varepsilon) + F''\cos(ft+\varpi),\\
s''' &= A\sin\alpha + B'''\sin(bt+\beta) + C'''\sin(ct+\gamma) + D'''\sin(dt+\delta)\\
&\quad + E'''\sin(et+\varepsilon) + F'''\sin(ft+\varpi),\\
u''' &= A\cos\alpha + B'''\cos(bt+\beta) + C'''\cos(ct+\gamma) + D'''\cos(dt+\delta)\\
&\quad + E'''\cos(et+\varepsilon) + F'''\cos(ft+\varpi),\\
s^{IV} &= A\sin\alpha + B^{IV}\sin(bt+\beta) + C^{IV}\sin(ct+\gamma) + D^{IV}\sin(dt+\delta)\\
&\quad + E^{IV}\sin(et+\varepsilon) + F^{IV}\sin(ft+\varpi),\\
u^{IV} &= A\cos\alpha + B^{IV}\cos(bt+\beta) + C^{IV}\cos(ct+\gamma) + D^{IV}\cos(dt+\delta)\\
&\quad + E^{IV}\cos(et+\varepsilon) + F^{IV}\cos(ft+\varpi),\\
s^{V} &= A\sin\alpha + B^{V}\sin(bt+\beta) + C^{V}\sin(ct+\gamma) + D^{V}\sin(dt+\delta)\\
&\quad + E^{V}\sin(et+\varepsilon) + F^{V}\sin(ft+\varpi),\\
u^{V} &= A\cos\alpha + B^{V}\cos(bt+\beta) + C^{V}\cos(ct+\gamma) + D^{V}\cos(dt+\delta)\\
&\quad + E^{V}\cos(et+\varepsilon) + F^{V}\cos(ft+\varpi),
\end{aligned}$$

dont la substitution dans les équations du *second système* (58) donnera, outre les équations (a), (b), (c) trouvées plus haut (67), encore les trois suivantes semblables aux équations (c)

$$(d)\quad\begin{cases}
-\big[d+(2)\big]D'' + (2,3)D''' + (2,4)D^{IV} + (2,5)D^{V} = 0,\\
(3,2)D'' - \big[d+(3)\big]D''' + (3,4)D^{IV} + (3,5)D^{V} = 0,\\
(4,2)D'' + (4,3)D''' - \big[d+(4)\big]D^{IV} + (4,5)D^{V} = 0,\\
(5,2)D'' + (5,3)D''' + (5,4)D^{IV} - \big[d+(5)\big]D^{V} = 0;
\end{cases}$$

$$(e)\quad\begin{cases}
-\big[e+(2)\big]E'' + (2,3)E''' + (2,4)E^{IV} + (2,5)E^{V} = 0,\\
(3,2)E'' - \big[e+(3)\big]E''' + (3,4)E^{IV} + (3,5)E^{V} = 0,\\
(4,2)E'' + (4,3)E''' - \big[e+(4)\big]E^{IV} + (4,5)E^{V} = 0,\\
(5,2)E'' + (5,3)E''' + (5,4)E^{IV} - \big[e+(5)\big]E^{V} = 0;
\end{cases}$$

$$(f)\quad\begin{cases}
-\big[f+(2)\big]F'' + (2,3)F''' + (2,4)F^{IV} + (2,5)F^{V} = 0,\\
(3,2)F'' - \big[f+(3)\big]F''' + (3,4)F^{IV} + (3,5)F^{V} = 0,\\
(4,2)F'' + (4,3)F''' - \big[f+(4)\big]F^{IV} + (4,5)F^{V} = 0,\\
(5,2)F'' + (5,3)F''' + (5,4)F^{IV} - \big[f+(5)\big]F^{V} = 0.
\end{cases}$$

Ainsi les équations finales en d, e, f, qu'on en déduira, seront identiques avec l'équation en c déjà trouvée, et auront par conséquent lieu en même temps que celle-ci, puisque les valeurs de c, d, e, f en sont les racines. De sorte qu'il ne restera qu'à déterminer les valeurs des neuf inconnues $\frac{C''}{C'''}$, $\frac{C^{IV}}{C''}$, $\frac{C^{V}}{C^{IV}}$, $\frac{D''}{D'''}$,... au moyen des équations (c), (d), (e), (f); et, comme cette détermination ne demande que trois équations de chaque système, on sera le maître de choisir et d'employer celles qui pourront donner une plus grande exactitude.

Voici les valeurs que j'ai trouvées et qui sont exactes jusqu'à la qua-

trième décimale inclusivement

$$\frac{C''}{C'} = -2,5693 \qquad \frac{C^{IV}}{C''} = 1,8631 \qquad \frac{C^{V}}{C^{IV}} = -0,3993$$
$$0,4098080, \qquad 0,2702292, \qquad 9,6013200,$$

$$\frac{D''}{D'} = 0,0383 \qquad \frac{D^{IV}}{D''} = -0,0698 \qquad \frac{D^{V}}{D^{IV}} = 0,0205$$
$$8,5835841, \qquad 8,8440047, \qquad 8,3107647,$$

$$\frac{E''}{E'} = 4,1127 \qquad \frac{E^{IV}}{E''} = 4,4481 \qquad \frac{E^{V}}{E^{IV}} = -24,2205$$
$$0,6141312, \qquad 0,6481736, \qquad 1,3841831,$$

$$\frac{F''}{F'} = 4,5591 \qquad \frac{F^{IV}}{F''} = 5,9063 \qquad \frac{F^{V}}{F^{IV}} = 17,7634$$
$$0,6588800, \qquad 0,7713140, \qquad 1,2495253.$$

71. A l'égard des huit constantes C'', D'', E'', F'', γ, δ, ε, ϖ, qui sont encore arbitraires, elles sont dues à l'intégration; et il faudra les déterminer par les valeurs données des variables pour l'époque de 1700, dans laquelle nous supposons $t = 0$.

Or nous trouvons d'abord, en employant les valeurs connues de A, α, β (53) et de B'', B''', B^{IV}, B^{V} (68),

$$A\sin\alpha + B''\sin\beta = 0,03624, \quad A\cos\alpha + B''\cos\beta = -0,01252,$$
$$A\sin\alpha + B'''\sin\beta = 0,03120, \quad A\cos\alpha + B'''\cos\beta = -0,00895,$$
$$A\sin\alpha + B^{IV}\sin\beta = 0,02813, \quad A\cos\alpha + B^{IV}\cos\beta = -0,00678,$$
$$A\sin\alpha + B^{V}\sin\beta = 0,02850, \quad A\cos\alpha + B^{V}\cos\beta = -0,00704;$$

retranchant donc respectivement les valeurs de s'', u'', s''', ... du n° 58, nous aurons ces huit équations

$$C''\sin\gamma + D''\sin\delta + E''\sin\varepsilon + F''\sin\varpi + 0,01246 = 0,$$
$$-2,5693\,C''\sin\gamma + 0,0383\,D''\sin\delta + 4,1127\,E''\sin\varepsilon + 4,5591\,F''\sin\varpi + 0,03120 = 0,$$
$$1,8631\,C''\sin\gamma - 0,0698\,D''\sin\delta + 4,4481\,E''\sin\varepsilon + 5,9063\,F''\sin\varpi + 0,02878 = 0,$$
$$-0,3993\,C''\sin\gamma + 0,0205\,D''\sin\delta - 24,2205\,E''\sin\varepsilon + 17,7634\,F''\sin\varpi - 0,05769 = 0;$$

$$C''\cos\gamma + D''\cos\delta + E''\cos\varepsilon + F''\cos\varpi - 0,03437 = 0,$$
$$-2,5693\,C''\cos\gamma + 0,0383\,D''\cos\delta + 4,1127\,E''\cos\varepsilon + 4,5591\,F''\cos\varpi - 0,00895 = 0,$$
$$1,8631\,C''\cos\gamma - 0,0698\,D''\cos\delta + 4,4481\,E''\cos\varepsilon + 5,9063\,F''\cos\varpi - 0,02314 = 0,$$
$$-0,3993\,C''\cos\gamma + 0,0205\,D''\cos\delta - 24,2205\,E''\cos\varepsilon + 17,7634\,F''\cos\varpi - 0,09422 = 0;$$

d'où l'on tire

$$C''\sin\gamma = 0,01251 \qquad C''\cos\gamma = 0,00273$$
$$8,0973614, \qquad 7,4353346,$$

$$D''\sin\delta = -0,02526 \qquad D''\cos\delta = 0,02848$$
$$8,4024162, \qquad 8,4545400,$$

$$E''\sin\varepsilon = -0,00139 \qquad E''\cos\varepsilon = -0,00092$$
$$7,1412930, \qquad 6,9615682,$$

$$F''\sin\varpi = 0,00167 \qquad F''\cos\varpi = 0,00409$$
$$7,2227479, \qquad 7,6111361,$$

et de là

$$\gamma = 77^{\circ}43'0'',$$
$$\delta = 360^{\circ} - 41^{\circ}34'10'',$$
$$\varepsilon = 180^{\circ} + 56^{\circ}31'50'',$$
$$\varpi = 22^{\circ}14'20'',$$

$C'' = 0,01281$ $D'' = 0,03807$ $E'' = 0,00166$ $F'' = 0,00441$
$8,1074203,$ $8,5805533,$ $7,2200506,$ $7,6447084;$

enfin, multipliant ces dernières valeurs respectivement par celles du n° 70, on aura

$C'' = -0,03290$ $D'' = 0,00146$ $E'' = 0,00683$ $F'' = 0,02012$
$8,5172283,$ $7,1641374,$ $7,8341818,$ $8,3035884,$

$C^{IV} = 0,02386$ $D^{IV} = -0,00266$ $E^{IV} = 0,00738$ $F^{IV} = 0,02606$
$8,3776495,$ $7,4245580,$ $7,8682242,$ $8,4160224,$

$C^{V} = -0,00511$ $D^{V} = 0,00078$ $E^{V} = -0,04020$ $F^{V} = 0,07839$
$7,7087403,$ $6,8913180,$ $8,6042337,$ $8,8942337.$

72. Les déterminations précédentes, jointes à celles de A, α, β du n° 53, et de B″, B‴,... du n° 68, fixent les valeurs de toutes les constantes qui entrent dans les expressions complètes des variables s'', u'', s''',... (70); de sorte qu'on pourra calculer les valeurs particulières de ces variables pour un temps donné, et connaître par là la position instantanée des orbites de Mars, de la Terre, de Vénus et de Mercure, par rapport au plan de l'écliptique de 1700 supposé fixe; car on a

$$s'' = 6'' \sin\omega'', \quad u'' = 6'' \cos\omega'', \quad s''' = 6''' \sin\omega''', \quad u''' = 6''' \cos\omega''', \ldots,$$

où $6''$, $6'''$,... sont les tangentes des inclinaisons, et ω'', ω''',... les longitudes des nœuds ascendants.

Mais ces longitudes sont comptées aussi depuis l'équinoxe de 1700, et par conséquent elles doivent être augmentées toutes de l'angle $50'',3333\,t$, dû à la précession des équinoxes, pour être rapportées au vrai point de l'équinoxe; or on prouve aisément par un raisonnement semblable à celui du n° 65, qu'il suffit pour cela d'augmenter de ce même angle tous ceux qui se trouvent sous les signes de sinus et cosinus dans les expressions de s'', u'', s''', u''',....

73. Voici donc les formules générales pour les inclinaisons et les nœuds des orbites de Mars, de la Terre, de Vénus et de Mercure, rapportées au plan fixe de l'écliptique de 1700, t étant le nombre des années Juliennes écoulées depuis cette époque, ou qui la précèdent si t est négatif.

Soit

$$l = 76°\,21'\,20'' - 50'',3333\,t,$$

$$m = 54°\,44'\,20'' - 24'',7577\,t,$$

$$n = 77°\,43'\,\;0'' + 29'',4953\,t,$$

$$p = 41°\,34'\,10'' - 32'',8181\,t,$$

$$q = 56°\,31'\,50'' + 42'',6532\,t,$$

$$r = 22°\,14'\,20'' + 45'',1934\,t,$$

on aura

Pour Mars.

$$\text{tang(incl.)} \times \sin(\text{long. nœud}) = +0{,}02905\sin l + 0{,}00981\sin m + 0{,}01281\sin n - 0{,}03807\sin p - 0{,}00166\sin q + 0{,}00441\sin r,$$

$$\text{tang(incl.)} \times \cos(\text{long. nœud}) = -0{,}02905\cos l - 0{,}00981\cos m + 0{,}01281\cos n + 0{,}03807\cos p - 0{,}00166\cos q + 0{,}00441\cos r;$$

Pour la Terre.

$$\text{tang(incl.)} \times \sin(\text{long. nœud}) = +0{,}02905\sin l + 0{,}00363\sin m - 0{,}03290\sin n - 0{,}00146\sin p - 0{,}00683\sin q + 0{,}02012\sin r,$$

$$\text{tang(incl.)} \times \cos(\text{long. nœud}) = -0{,}02905\cos l - 0{,}00363\cos m - 0{,}03290\cos n + 0{,}00146\cos p - 0{,}00683\cos q + 0{,}02012\cos r;$$

Pour Vénus.

$$\text{tang(incl.)} \times \sin(\text{long. nœud}) = +0{,}02905\sin l - 0{,}00012\sin m + 0{,}02386\sin n + 0{,}00266\sin p - 0{,}00738\sin q + 0{,}02606\sin r,$$

$$\text{tang(incl.)} \times \cos(\text{long. nœud}) = -0{,}02905\cos l + 0{,}00012\cos m + 0{,}02386\cos n - 0{,}00266\cos p - 0{,}00738\cos q + 0{,}02606\cos r;$$

Pour Mercure.

$$\text{tang(incl.)} \times \sin(\text{long. nœud}) = +0{,}02905\sin l + 0{,}00033\sin m - 0{,}00511\sin n - 0{,}00078\sin p - 0{,}02606\sin q + 0{,}07839\sin r,$$

$$\text{tang(incl.)} \times \cos(\text{long nœud}) = -0{,}02905\cos l - 0{,}00033\cos m - 0{,}00511\cos n + 0{,}00078\cos p - 0{,}02606\cos q + 0{,}07839\cos r.$$

Quoique ces formules ne donnent pas immédiatement les inclinaisons et les nœuds des Planètes, il n'en est pas moins facile de déterminer la valeur de ces éléments pour un temps donné; car on voit que la racine de la somme des carrés des deux formules relatives à chaque Planète donnera la tangente de son inclinaison, et que le quotient des mêmes formules, divisées la première par la seconde, donnera celle de la longitude du nœud. Mais il n'est pas aisé de déterminer, en général, la marche

des variations de ces éléments, ni par conséquent d'en fixer les valeurs moyennes, les maxima et minima, les périodes, etc., comme on l'a fait pour Saturne et Jupiter. Ces formules étant semblables à celles des excentricités et des aphélies sont sujettes à cet égard aux mêmes difficultés; mais de même qu'on a trouvé des limites pour les excentricités, on en peut trouver aussi pour les inclinaisons, en prenant simplement la somme de tous les coefficients des sinus ou cosinus sans égard aux signes.

De cette manière on trouvera pour les limites des tangentes des inclinaisons de Mars, de la Terre, de Vénus et de Mercure, les nombres suivants

$$0{,}09581,\quad 0{,}09399,\quad 0{,}08914,\quad 0{,}13972,$$

auxquels répondent les angles

$$5^\circ 29',\quad 5^\circ 23',\quad 5^\circ 6',\quad 7^\circ 58'.$$

Ainsi l'on est assuré que les orbites de ces Planètes, quelque variation qu'elles puissent éprouver dans leur position, ne peuvent s'écarter du plan de l'écliptique de 1700 que par des angles d'inclinaison moindres que ceux que nous venons de trouver; et comme le plus grand de ces angles est au-dessous de 8 degrés, largeur ordinaire du zodiaque, il s'ensuit que les Planètes dont il s'agit doivent demeurer éternellement renfermées dans cette enceinte, et que par conséquent la constitution du système solaire est à cet égard aussi inaltérable qu'à celui de la forme des orbites.

On voit aussi par là que l'obliquité de l'écliptique ne pourra jamais différer, de celle qui avait lieu en 1700, que d'un angle moindre que $5^\circ 23'$; car en considérant le triangle sphérique formé par l'équateur, par l'écliptique fixe de 1700 et par l'écliptique mobile d'une autre époque quelconque, il est aisé de démontrer par les formules connues que l'angle de cette écliptique mobile avec l'équateur, ou son obliquité, aura pour maximum et minimum la somme et la différence de l'angle de l'écliptique fixe avec l'équateur ou de l'obliquité de 1700, et de l'angle de l'écliptique mobile avec la même écliptique fixe, angle que nous avons vu

devoir toujours être au-dessous de $5^\circ 23'$; de sorte que cet angle sera en même temps la limite des variations de l'obliquité de l'écliptique par rapport à l'obliquité qui avait lieu en 1700.

74. Les inclinaisons et les nœuds, qui résultent des formules précédentes, répondent aux inclinaisons et aux nœuds que nous avons appelés *moyens*, et dont nous avons déterminé les variations annuelles dans le n° 29. Pour avoir les inclinaisons et les nœuds vrais suivant la dénomination du même numéro, il faut rapporter les orbites des Planètes à l'orbite mobile de la Terre; ce qui est facile d'après ce que nous avons démontré dans le n° 18. Car il ne faut que prendre, pour les valeurs des quantités $\tan(\text{incl.})\times\sin(\text{long. nœud})$ et $\tan(\text{incl.})\times\cos(\text{long. nœud})$, les différences des valeurs données par les formules précédentes et de celles qui appartiennent à la Terre. Et de même on aura les inclinaisons et les nœuds vrais de Saturne et Jupiter en retranchant ces dernières valeurs de celles de s, u, s', u' trouvées plus haut (53), après y avoir augmenté tous les angles sous les sinus et cosinus, de l'angle $50'',3333\,t$ dû à la précession des équinoxes.

On aura de cette manière les formules suivantes relatives à l'écliptique vraie et mobile.

Pour Saturne.

$$\begin{aligned}\tan(\text{incl.})\times\sin(\text{long. nœud}) = {}&+0{,}01174\sin m+0{,}03290\sin n+0{,}00146\sin p\\&+0{,}00683\sin q-0{,}02012\sin r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\text{incl.})\times\cos(\text{long. nœud}) = {}&-0{,}01174\cos m+0{,}03290\cos n-0{,}00146\cos p\\&+0{,}00683\cos q-0{,}02012\cos r;\end{aligned}$$

Pour Jupiter.

$$\begin{aligned}\tan(\text{incl.})\times\sin(\text{long. nœud}) = {}&-0{,}01024\sin m+0{,}03290\sin n+0{,}00146\sin p\\&+0{,}00683\sin q-0{,}02012\sin r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\text{incl.})\times\cos(\text{long. nœud}) = {}&+0{,}01024\cos m+0{,}03290\cos n-0{,}00146\cos p\\&+0{,}00683\cos q-0{,}02012\cos r;\end{aligned}$$

Pour Mars.

$$\begin{aligned}\text{tang(incl.)}\times\sin(\text{long. nœud}) = &+0{,}00618\sin m + 0{,}04571\sin n - 0{,}03661\sin p\\ &+0{,}00517\sin q - 0{,}01571\sin r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{tang(incl.)}\times\cos(\text{long. nœud}) = &-0{,}00618\cos m + 0{,}04571\cos n + 0{,}03661\cos p\\ &+0{,}00517\cos q - 0{,}01571\cos r;\end{aligned}$$

Pour Vénus.

$$\begin{aligned}\text{tang(incl.)}\times\sin(\text{long. nœud}) = &-0{,}00375\sin m + 0{,}05676\sin n + 0{,}00412\sin p\\ &-0{,}00056\sin q + 0{,}00595\sin r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{tang(incl.)}\times\cos(\text{long. nœud}) = &+0{,}00375\cos m + 0{,}05676\cos n - 0{,}00412\cos p\\ &-0{,}00056\cos q + 0{,}00595\cos r;\end{aligned}$$

Pour Mercure.

$$\begin{aligned}\text{tang(incl.)}\times\sin(\text{long. nœud}) = &-0{,}00330\sin m + 0{,}02779\sin n + 0{,}00068\sin p\\ &-0{,}01924\sin q + 0{,}05827\sin r,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{tang(incl.)}\times\cos(\text{long. nœud}) = &+0{,}00330\cos m + 0{,}02779\cos n - 0{,}00068\cos p\\ &-0{,}01924\cos q + 0{,}05827\cos r.\end{aligned}$$

Déplacement de l'écliptique.

75. Comme les formules du n° **73** donnent la position que l'écliptique doit avoir dans un instant quelconque par rapport à l'écliptique fixe de 1700, rien n'est plus facile que d'en déduire sa position sur l'équateur; mais, vu la petitesse des variations de cette position, on peut les exprimer directement par des formules générales, comme nous l'avons déjà fait voir dans le n° **19**, où nous avons trouvé que l'accroissement de l'obliquité est représenté par

$$u''\cos 50'',3333\,t - s''\sin 50'',3333\,t,$$

et que le mouvement des points équinoxiaux en longitude l'est par

$$\frac{s''\cos 50'',3333\,t + u''\sin 50'',3333\,t}{\text{tang}\,\mathrm{I}},$$

en nommant I l'obliquité de 1700, qui était de 23° 29′ à très-peu près; et il est clair par ce que nous avons observé dans le n° **72**, que ces deux quantités se réduisent à u'' et $\frac{s''}{\text{tang}\,\mathrm{I}}$, en augmentant de $50'',3333\,t$ tous les angles sous les signes de sinus et cosinus dans les expressions de u'' et s''.

Ainsi, en employant les formules du n° **73** relatives à la Terre, on aura

$$\text{variation de l'obliquité} = \text{tang(incl.)}\times\cos(\text{long. nœud}),$$

$$\text{mouv. des équin. en long.} = \frac{\text{tang(incl.)}\times\sin(\text{long. nœud})}{\text{tang. obliq. de 1700}},$$

où il faudra réduire les coefficients numériques en angles, en les multipliant par l'arc égal au rayon.

Voici ces formules réduites en secondes, et présentées de manière que les parties constantes des angles se trouvent en coefficients, ce qui est plus commode à quelques égards.

Diminution de l'obliquité de l'écliptique.

$$\begin{aligned}&1414''\cos(50'',3333\,t) + 5823''\sin(50'',3333\,t)\\ +\ &432''\cos(24'',7577\,t) + 611''\sin(24'',7577\,t)\\ +\ &1444''\cos(29'',4953\,t) - 6631''\sin(29'',4953\,t)\\ -\ &225''\cos(32'',8181\,t) - 200''\sin(32'',8181\,t)\\ +\ &776''\cos(42'',6532\,t) - 1174''\sin(42'',6532\,t)\\ -\ &3841''\cos(45'',1934\,t) + 1571''\sin(45'',1934\,t).\end{aligned}$$

Mouvement des équinoxes en longitude.

$$\begin{aligned}&13404''\cos(50'',3333\,t) - 3253''\sin(50'',3333\,t)\\ +\ &1407''\cos(24'',7577\,t) - 995''\sin(24'',7577\,t)\\ -\ &15263''\cos(29'',4953\,t) - 3324''\sin(29'',4953\,t)\\ -\ &460''\cos(32'',8181\,t) + 518''\sin(32'',8181\,t)\\ -\ &2703''\cos(42'',6532\,t) - 1787''\sin(42'',6532\,t)\\ +\ &3615''\cos(45'',1934\,t) + 8841''\sin(45'',1934\,t).\end{aligned}$$

La quantité t exprime toujours le nombre entier ou fractionnaire d'années Juliennes écoulées depuis le commencement de 1700, ou qui ont précédé cette époque en faisant t négatif. Ainsi, comme les formules précédentes sont nulles pour $t = 0$, elles donnent immédiatement les corrections à faire à l'obliquité, et au lieu des équinoxes de 1700 pour avoir la valeur de ces éléments dans une autre époque quelconque éloignée de t années.

76. Ce mouvement des équinoxes produit par le déplacement de l'écliptique doit donc se retrancher du mouvement de précession dû à la rétrogradation de l'équateur; et leur différence formera la précession totale, qui, d'après les observations de Copernic et de Tycho-Brahé, est évaluée à $50''\frac{1}{3}$ par an. Or la formule précédente donne (en y faisant $t = 1$), pour le commencement du siècle, le mouvement annuel des équinoxes de $0'',261$, ce qui s'accorde avec les résultats du n° 29, en y supposant μ, μ',... nuls; ainsi la précession due au seul mouvement de l'équateur sera de $50'',594$ par an, et, pour avoir la précession totale pour un temps quelconque, il faudra retrancher de la quantité $50'',594\,t$ celle qui résulte du mouvement des équinoxes. Mais, comme la quantité $0'',261$ est plus petite que l'incertitude qui reste encore sur le mouvement annuel des équinoxes déduit des observations, on peut la négliger entièrement, et prendre simplement $50''\frac{1}{3}$ pour la rétrogradation annuelle et uniforme de l'équateur, suivant l'usage ordinaire.

Ainsi, pour réduire les longitudes du Soleil et des autres Planètes au vrai point de l'équinoxe, il suffira de les corriger par la formule que nous venons de trouver pour le mouvement de l'équinoxe en longitude, en retranchant ce mouvement des longitudes calculées à l'ordinaire, mais en ayant égard à la variation des éléments.

Quant aux étoiles fixes, il faudra de plus, pour les rapporter à la vraie écliptique, tenir compte de l'effet de son déplacement relativement aux étoiles; et nous avons donné, dans le n° 19, les formules pour calculer cet effet, dans lesquelles il n'y aura qu'à mettre pour η le mouvement des équinoxes, et pour $-i$ la diminution de l'obliquité de l'écliptique.

On aura donc les corrections suivantes à faire aux longitudes et aux latitudes calculées par rapport à l'écliptique de 1700.

Augmentation de la latitude boréale.

mouvem. des équin. × cos long. × tang obliq. de 1700 + dimin. obliq. × sin long.

Diminution de la longitude.

mouvem. des équin. × (1 − sin long. × tang lat. × tang obliq. 1700)
+ dimin. obliq. × cos long. × tang lat.

77. Comme l'année tropique commence exactement dans l'instant que le Soleil traverse le plan de l'équateur, il est clair que le mouvement des équinoxes en longitude, que nous avons déterminé ci-dessus, doit influer aussi sur le commencement de l'année, ainsi que sur sa durée, à raison des inégalités de ce mouvement; et il est aisé de voir que ce mouvement, réduit en temps en raison du mouvement du Soleil, donnera la quantité dont le commencement de l'année sera retardé; ensuite, la différence de cette quantité d'une année à l'autre exprimera la variation de la durée de l'année.

Pour avoir donc l'expression générale de la variation de l'année, on différentiera la formule donnée ci-dessus pour le mouvement des équinoxes, en faisant varier t et supposant $dt = 1$; mais il faudra auparavant réduire de nouveau les coefficients des sinus et cosinus en parties du rayon, parce que la variable t se trouve elle-même multipliée par des angles, lesquels deviennent coefficients par la différentiation; ensuite il faudra réduire les secondes de degré en secondes de temps, en les multipliant par le rapport de 24^h ou 86400^s au mouvement journalier moyen du Soleil, qui est de $59'8'',3$; ce qui donne le nombre $24,3497$ pour le rapport dont il s'agit. Il faudrait, à la rigueur, prendre, au lieu du mouvement journalier moyen, le mouvement vrai au temps de l'équinoxe, lequel dans ce siècle est plus grand d'environ $3''$; mais, comme cette différence est variable à raison du mouvement de l'apogée du Soleil, nous préférons de la négliger, d'autant plus que sa plus grande valeur n'étant

que de 20″, il n'en résulterait pas une seconde de différence dans les coefficients de la formule générale. Il serait, au reste, très-facile d'y avoir égard si on le jugeait nécessaire. Il faudrait aussi, pour plus d'exactitude, comme t est exprimé en nombres d'années Juliennes, faire dt égal au rapport de l'année tropique de $365^j5^h48^m45^s$ à l'année Julienne de 365^j6^h; mais, outre que l'année tropique est variable, il ne pourrait jamais résulter de là que des corrections tout à fait insensibles. On aura ainsi la formule suivante

Diminution de l'année.

$$\begin{aligned}
&19^s,331\cos(50'',3333\,t) + 79^s,641\sin(50'',3333\,t)\\
&+\ 2^s,907\cos(24'',7577\,t) + 4^s,112\sin(24'',7577\,t)\\
&+ 11^s,573\cos(29'',4953\,t) - 53^s,144\sin(29'',4953\,t)\\
&-\ 2^s,008\cos(32'',8181\,t) - 1^s,781\sin(32'',8181\,t)\\
&+\ 8^s,999\cos(42'',6532\,t) - 13^s,612\sin(42'',6532\,t)\\
&-47^s,166\cos(45'',1934\,t) + 19^s,286\sin(45'',1934\,t).
\end{aligned}$$

La valeur de cette formule étant retranchée de la longueur moyenne de l'année, on aura la longueur vraie, donnée par l'observation. Or, en faisant $t = 0$, ce qui répond à 1700, la formule donne $-6^s,364$; ainsi $6^s,364$, ajoutées à l'année moyenne, donneront la longueur de l'année 1700, et réciproquement si on les retranche de celle-ci on aura celle-là.

D'où je conclus qu'en ajoutant $6^s,364$ à la formule précédente, on aura la quantité dont l'année tropique doit diminuer dans l'espace de t années Juliennes comptées depuis 1700 en prenant t positif, ou avant cette époque en faisant t négatif, c'est-à-dire la quantité qu'on doit retrancher de la longueur de l'année 1700 pour avoir celle de l'année $t^{ième}$.

Cette formule donne, pour l'espace de plusieurs siècles, une diminution dans la longueur de l'année, laquelle peut aller à deux minutes et au delà; ce qui paraît conforme aux observations anciennes, qui, comme l'a remarqué M. Bailly, s'accordent toutes à faire l'année plus longue de quelques minutes qu'elle ne l'est aujourd'hui; mais, en général, elle n'indique que des alternatives de diminution et d'augmentation, dont il

serait difficile de fixer les périodes et les maxima et minima. On peut cependant avoir une limite de ces variations en ajoutant ensemble les racines de la somme des carrés des coefficients des sinus et cosinus correspondants; car on sait que le maximum de toute expression de la forme $A\sin\varphi + B\cos\varphi$ est $\sqrt{A^2+B^2}$. De cette manière on trouve, pour la limite cherchée, $217^s,7$; de sorte qu'on est assuré que la longueur de l'année ne peut varier que d'une quantité moindre que 3^m40^s.

Au reste le moyen, par lequel nous venons de déterminer les variations de l'année, est le seul que la Théorie de la gravitation puisse fournir pour expliquer ce phénomène; car, quant à l'année sidérale, ou la durée de la révolution même de la Terre autour du Soleil, nous avons démontré rigoureusement qu'elle n'est susceptible d'aucune inégalité séculaire et indépendante de la situation respective des Planètes (première Partie, n° 36); si donc les observations pouvaient jamais découvrir dans la longueur de l'année des changements plus grands ou d'un autre genre que ceux que nous venons d'assigner, il en faudrait chercher la cause ailleurs que dans la gravitation des corps célestes; mais ce point est un de ceux dont la décision est réservée aux générations futures.

78. Telles sont les formules générales des variations séculaires pour les six Planètes principales. Ces formules ne sont point limitées à un certain espace de temps, mais ont lieu pour un temps indéfini, parce que, ne s'y trouvant aucun terme qui soit susceptible d'augmenter à l'infini, les variables supposées très-petites dans les équations différentielles, telles que les excentricités et les inclinaisons des orbites, restent en effet toujours fort petites; et comme cette supposition est la seule que nous nous soyons permise dans ces équations pour les simplifier, qu'ensuite leur intégration est entièrement rigoureuse, il ne peut rester aucun doute sur la légitimité et la généralité de notre solution appliquée au système solaire. Il n'y a qu'une seule circonstance qui puisse empêcher que les formules que nous venons de trouver n'aient toute la perfection dont elles sont susceptibles : c'est l'incertitude qui reste encore dans les valeurs des masses des Planètes, dont quelques-unes n'ont pu être déter-

minées que d'une manière hypothétique. Un petit changement dans ces déterminations en produirait un du même ordre dans les coefficients numériques des formules; et il faudrait chercher les nouveaux coefficients par un calcul semblable à celui que nous avons fait; mais la forme des expressions n'en serait point altérée, et il n'y aurait point à craindre, comme nous l'avons prouvé, que des arcs de cercle pussent s'y glisser et les rendre insuffisantes. Quant aux autres données du Problème, les distances moyennes des Planètes au Soleil et leur position dans une époque donnée, elles sont connues avec assez de précision pour n'avoir besoin d'aucune correction sensible; et comme nous avons rigoureusement démontré que ces distances sont invariables, on peut regarder la solution précédente comme à l'abri de toute atteinte de ce côté.

Cette constance des distances moyennes, et celle des moyens mouvements qui en est la suite, sont le résultat le plus intéressant de notre analyse, et le point le plus remarquable du Système du monde. Les Planètes, en vertu de leur attraction mutuelle, changent insensiblement la forme et la position de leurs orbites, mais sans sortir de certaines limites; leurs grands axes seuls demeurent inaltérables; du moins la Théorie de la gravitation n'y montre que des altérations périodiques et dépendantes des positions respectives des Planètes, et n'en indique aucune du genre des séculaires, soit constamment croissantes, soit simplement périodiques, mais d'une période très-longue et indépendante de la situation des Planètes, comme celles que la même Théorie donne dans les autres éléments de l'orbite, et que nous venons de déterminer. Nous avions déjà démontré cette propriété des grands axes dans les *Mémoires* de 1776; mais la démonstration que nous en avons donnée dans la première Partie de ces Recherches est en quelque manière plus générale et plus complète, parce que nous y avons considéré tous les éléments de l'orbite comme variables à la fois, et que nous avons eu égard aux effets de cette variabilité avec tout le scrupule nécessaire dans une matière si délicate.

THÉORIE
DES VARIATIONS PÉRIODIQUES
DES MOUVEMENTS DES PLANÈTES.

PREMIÈRE PARTIE
CONTENANT LES FORMULES GÉNÉRALES DE CES VARIATIONS.