桑木文庫
洋書

桑木文庫
洋書
0565

物理
08
L
1.5

九州帝國大學理學部
8428
物理學教室

理学部 洋 遡及
022232002008834
九州大学蔵書

801895

ŒUVRES

DE LAGRANGE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

ŒUVRES
DE LAGRANGE,

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE M. J.-A. SERRET,

SOUS LES AUSPICES

DE SON EXCELLENCE

LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME CINQUIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXX

高商書

物
0
L
1.

DEUXIÈME SECTION.

(SUITE.)

MÉMOIRES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES

DE BERLIN.

THÉORIE

DE LA LIBRATION DE LA LUNE,

ET

DES AUTRES PHÉNOMÈNES QUI DÉPENDENT DE LA FIGURE NON SPHÉRIQUE DE CETTE PLANÈTE.

THÉORIE

DE LA LIBRATION DE LA LUNE,

ET

DES AUTRES PHÉNOMÈNES QUI DÉPENDENT DE LA FIGURE NON SPHÉRIQUE DE CETTE PLANÈTE.

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1780.)

C'est un phénomène reconnu depuis longtemps que la Lune nous présente toujours la même face; mais ce n'est que depuis l'invention des lunettes qu'on a pu déterminer les lois de la libration, c'est-à-dire de ces balancements que la Lune paraît faire autour de son centre, et par lesquels, dans le cours de chaque mois, elle nous cache et nous découvre alternativement, vers ses bords, quelque partie de sa surface. Galilée est le premier qui ait observé la libration, mais il paraît n'en avoir bien connu qu'une partie, celle qui se fait perpendiculairement à l'écliptique, et qu'on nomme *libration en latitude*. Hévélius découvrit ensuite la libration en longitude; mais il était réservé à Dominique Cassini de donner une explication générale et complète de ce phénomène. Il trouva qu'on pouvait satisfaire à toutes les apparences de la libration, en supposant : 1° que la Lune tourne uniformément autour d'un axe dont les pôles, fixes

sur sa surface, soient constamment élevés sur l'écliptique de $87°\frac{1}{2}$, et sur le plan de l'orbite, de $82°\frac{1}{2}$, et soient toujours sur un grand cercle du globe de la Lune, parallèle au grand cercle qui passe par les pôles de l'orbite et par ceux de l'écliptique; 2° que la rotation de cette Planète autour de son axe s'achève dans l'espace de 25 jours et 5 heures, par une période égale à celle du retour de la Lune au nœud de son orbite avec l'écliptique.

Cette Théorie ne parut qu'après la mort de Cassini. Son fils Jacques Cassini la donna, en 1721, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, mais sans aucun détail des observations qui avaient servi à l'établir. Elle avait donc besoin d'être vérifiée par de nouvelles observations, et c'est de feu Tobie Mayer qu'elle a reçu la perfection qui lui manquait encore. Cet Astronome publia en 1750, dans les *Kosmographische Nachrichten* de Nuremberg, la première Partie d'un *Traité sur la rotation de la Lune et le mouvement apparent de ses taches*, destiné à servir de base à une nouvelle Sélénographie. On doit regretter que l'Auteur ne l'ait pas achevé; mais ce qu'il nous en a laissé peut être regardé comme un Ouvrage complet sur la Théorie astronomique de la libration.

Par une suite d'observations de plusieurs taches de la Lune, faites avec soin pendant les années 1748 et 1749, et calculées avec toute la précision et l'élégance qu'on peut désirer, Mayer trouve que le plan de l'équateur lunaire est incliné sur le plan de l'écliptique de 1 degré et 29 minutes, que la section de ces deux plans est toujours à peu près parallèle à la ligne des nœuds moyens de l'orbite de la Lune, en sorte que le plan de l'écliptique tombe entre les deux plans de l'équateur et de l'orbite de la Lune, et que la Lune tourne sur l'axe de son équateur, d'Occident en Orient, de manière que chaque point de cet équateur revient au point équinoxial lunaire dans un temps précisément égal à celui dans lequel la Lune revient au nœud par son mouvement moyen, c'est-à-dire dans l'espace de 1 mois *draconitique*, lequel est, comme on sait, de $27^j\,5^h\,6^m\,56^s$. Ces déterminations s'accordent avec celles de Cassini, à l'exception de l'inclinaison de l'équateur lunaire, que Cassini a faite de 2 degrés et demi, et que Mayer a diminuée de 1 degré. Cela pourrait faire croire que cette

inclinaison est variable et va en diminuant; mais Mayer prétend qu'on peut prouver, par des observations faites du temps de Cassini, que cet Astronome s'est en effet trompé de 1 degré dans la détermination de l'inclinaison de l'équateur lunaire, et il promet d'en donner la démonstration dans une autre Partie de son Ouvrage. Enfin les déterminations de Mayer se trouvent confirmées par les observations que M. de la Lande a faites en 1763, et dont il a donné les détails et les résultats dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1764; il est vrai que M. de la Lande trouve 1 degré et 43 minutes pour l'inclinaison de l'équateur lunaire; mais cette différence pouvant être attribuée aux erreurs des observations, on n'en saurait encore rien conclure par rapport à la variabilité de cette inclinaison.

Telles sont les lois de la rotation de la Lune qu'on a déduites des observations, et qui étant combinées avec celles du mouvement de cette Planète autour de la Terre suffisent pour déterminer à chaque instant la position apparente du disque lunaire; mais si la connaissance de ces lois suffit pour les besoins de l'Astronomie, l'Astronomie physique exige de plus la connaissance de leurs causes; et cette dernière connaissance est d'autant plus intéressante qu'elle peut fournir les moyens non-seulement de constater et de rectifier les lois déjà connues, mais encore d'en découvrir de nouvelles. L'accord des nœuds de l'équateur de la Lune avec ceux de son orbite, et l'égalité entre la révolution de l'équateur de la Lune par rapport à ses nœuds et la révolution de cette Planète dans son orbite par rapport aux nœuds de cette orbite, sont peut-être les phénomènes les plus singuliers du Système du monde. Il résulte de leur combinaison que la durée de la rotation entière de la Lune doit être parfaitement égale à celle du temps périodique de cette Planète; et cette égalité est évidemment une suite nécessaire de ce que la Lune nous montre toujours la même face; phénomène qui pour être connu depuis longtemps n'en est pas moins extraordinaire, quoique d'ailleurs il ne paraisse pas unique dans le Système du monde. En effet il semble qu'on puisse conclure quelque chose de semblable, à l'égard du premier satellite de Saturne et du quatrième satellite de Jupiter, des observations faites par

Cassini et Maraldi sur les taches de ces satellites (*voyez* l'*Histoire de l'Astronomie moderne*, livre X, § XIII, et livre XI, § XVI); ce qui porterait à regarder cette égalité entre la rotation et la révolution comme une loi générale des Planètes secondaires.

Quoi qu'il en soit, comme le système de l'attraction universelle ne rend jusqu'à présent aucune raison de la rotation des Planètes autour de leurs axes, il n'en peut rendre aucune de l'égalité dont il s'agit. Le mouvement de rotation d'un corps est indépendant de son mouvement de translation; ces deux mouvements résultent d'une impulsion primitive et arbitraire, et peuvent être par conséquent entre eux dans tel rapport que l'on veut. Si donc la rotation de la Lune est uniforme et parfaitement égale à sa révolution autour de la Terre, il est nécessaire de supposer que la vitesse de rotation primitive, imprimée à cette Planète, est exactement égale à sa vitesse moyenne de translation autour de la Terre; et il est clair que cette égalité doit être tout à fait rigoureuse; autrement la différence entre les angles décrits par les méridiens de la Lune autour de son axe et les angles parcourus en même temps par le centre de la Lune autour de la Terre irait continuellement en augmentant; d'où il s'ensuivrait que cette Planète devrait à la longue présenter successivement ses faces à la Terre. Mais cette égalité rigoureuse n'est plus nécessaire si l'on suppose que le mouvement de rotation de la Lune soit sujet à quelques inégalités dépendantes de l'attraction de la Terre sur cette Planète supposée non sphérique. Il suffit en ce cas que la Lune ait reçu une vitesse de rotation primitive peu différente de sa vitesse moyenne de translation, et qu'ensuite l'action de la Terre détruise l'effet de cette petite différence, en empêchant le côté de la Lune qui est tourné vers la Terre de s'en écarter au delà d'un certain terme, à peu près comme l'action de la gravité retient autour de la perpendiculaire un pendule qui n'a reçu qu'une impulsion assez petite.

Cette manière d'expliquer pourquoi la Lune nous montre toujours à peu près la même face est assez simple et naturelle; je l'avais déjà proposée dans mes *Recherches sur la libration de la Lune* présentées à l'Académie des Sciences de Paris en 1763 [*voyez* le tome IX des *Prix* de cette

Académie (*)]. M. d'Alembert l'a confirmée depuis par une analyse encore plus exacte de ce Problème; et elle ne paraît rien laisser à désirer sur le phénomène de l'égalité entre la révolution de la Lune autour de son centre, et sa révolution autour de la Terre, du moins en tant que l'attraction universelle peut en rendre raison.

Mais, si l'on est parvenu à trouver une explication satisfaisante de ce phénomène, il paraît qu'on n'a pas été si heureux à l'égard de l'autre phénomène de la rotation de la Lune, qui concerne l'égalité entre le mouvement des nœuds de l'équateur lunaire et celui des nœuds de l'orbite de la Lune. En considérant cette Planète comme non sphérique, il est clair que l'action de la Terre doit continuellement changer la position de son équateur, comme l'action de la Lune et celle du Soleil déplacent à chaque instant l'équateur de la Terre; mais le mouvement des points équinoxiaux de la Terre est très-lent (n'étant que de 50″ par an) et paraît n'avoir aucun rapport aux mouvements du Soleil et de la Lune; il n'y a que l'inégalité périodique de ce mouvement, qu'on appelle l'*équation de la précession des équinoxes*, et la petite variation de l'obliquité de l'écliptique, qu'on nomme la *nutation de l'axe de la Terre*, qui dépendent du mouvement des nœuds de la Lune. Aussi M. d'Alembert, qui s'est occupé le premier de la Théorie physique de la libration de la Lune, en appliquant à cette Planète les formules qu'il avait données pour la Terre, a d'abord trouvé des résultats peu conformes aux observations (*voyez* le XV^me^ Mémoire de ses *Opuscules*, tome II). Je tâchai dans mes *Recherches sur la libration* de suppléer ce qui manquait à cet égard à la Théorie de M. d'Alembert, en faisant voir que la circonstance de l'égalité entre le temps de la rotation de cette Planète et celui de sa révolution autour de la Terre empêche que les formules du mouvement de l'axe de la Terre ne puissent avoir lieu par rapport à celui de la Lune, et en donnant les véritables équations qui doivent servir à déterminer le vrai mouvement de cet axe; mais voyant que ces équations, qui sont au nombre de deux, et du second ordre, étaient trop compliquées pour pouvoir être

(*) Le Mémoire dont il est ici question appartient à la troisième Section des *Œuvres de Lagrange*. (*Note de l'Éditeur.*)

intégrées rigoureusement par les méthodes connues, je me contentai de les traiter comme M. d'Alembert avait fait celles du mouvement de l'axe de la Terre, en les réduisant au premier ordre par l'omission des termes qui contiennent les différences secondes des variables, et que je supposai pouvoir être négligés sans erreur sensible. J'obtins de cette manière de nouvelles formules pour les mouvements de l'axe lunaire, mais dans lesquelles le mouvement des nœuds de l'orbite de la Lune n'avait aucun rapport au mouvement des nœuds de son équateur; l'égalité de ces deux mouvements étant ensuite supposée, je trouvai qu'il résultait de là que l'axe de la Lune devait s'approcher insensiblement du plan de l'écliptique, ce qui paraît contraire aux observations. M. d'Alembert ayant repris cette matière dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1768, et l'ayant discutée avec beaucoup plus de profondeur et de détail qu'on n'avait encore fait, est parvenu à des résultats analogues aux miens, mais plus généraux; il a déterminé de plus, par des équations et des constructions géométriques fort simples, les cas où les mouvements des points équinoxiaux lunaires et des nœuds de l'orbite de la Lune doivent être égaux, et ceux où leur plus grande différence en longitude peut être égale ou moindre que la circonférence, mais toujours dans la supposition que les équations différentielles des mouvements de l'axe de la Lune puissent être regardées et traitées comme des équations différentielles du premier ordre.

On voit par là que le Problème des mouvements de l'axe lunaire n'a été résolu jusqu'ici d'une manière satisfaisante ni du côté de l'Analyse, ni par rapport à l'observation; et que le système de la gravitation universelle, qui a si bien rendu raison des différents mouvements de la Lune autour de la Terre, n'a pas encore expliqué le point le plus remarquable de la Théorie de cette Planète, la coïncidence des nœuds de l'équateur lunaire avec ceux de l'orbite de la Lune. J'ai donc cru devoir revenir sur cette question et la traiter avec toute l'exactitude et tout le détail qui sont dus à son importance et à sa difficulté; et, pour ne rien laisser à désirer sur les phénomènes qui peuvent dépendre de l'attraction de la Terre sur la Lune supposée non sphérique, je me suis proposé d'examiner non-

seulement ceux qui ont rapport à la rotation de cette Planète, mais aussi ceux qui regardent le mouvement de translation de la Lune autour de la Terre.

Tel est l'objet des Recherches que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie; elles sont partagées en cinq Sections.

La première est destinée à l'exposition d'une méthode générale et analytique pour résoudre tous les Problèmes de la Dynamique. Cette méthode, que j'ai employée le premier dans ma Pièce sur la libration de la Lune, a l'avantage singulier de ne demander aucune construction ni aucun raisonnement géométrique ou mécanique, mais seulement des opérations analytiques assujetties à une marche simple et uniforme. Elle n'est autre chose que le principe de Dynamique de M. d'Alembert, réduit en formule au moyen du principe de l'équilibre appelé communément *loi des vitesses virtuelles*. Mais la combinaison de ces deux principes est un pas qui n'avait pas été fait, et c'est peut-être le seul degré de perfection qui, après la découverte de M. d'Alembert, manquait encore à la Théorie de la Dynamique.

Dans la seconde Section, je considère, en général, le mouvement d'un corps de figure quelconque, et je donne les formules nécessaires pour déterminer ce mouvement. J'indique ensuite une transformation très-utile pour faciliter le calcul, dans le cas où le mouvement de rotation se fait autour d'un axe fixe dans le corps et mobile dans l'espace, mais qui demeure toujours à peu près perpendiculaire à un plan immobile; ce qui est le cas de la Lune par rapport à l'écliptique. On pourrait aussi s'en servir pour déterminer les oscillations d'un pendule de figure quelconque, lorsque l'axe du pendule ne s'écarte que très-peu de la verticale, et que le pendule a en même temps un mouvement quelconque de rotation autour de l'axe; Problème jusqu'ici non résolu.

Dans la troisième Section, j'applique les formules au mouvement de la Lune, en tant qu'elle est attirée par la Terre et par le Soleil, et je parviens directement à six équations différentielles du second ordre, dont trois donnent le mouvement du centre de gravité de la Lune autour de la Terre, et les trois autres donnent son mouvement de rotation autour de

ce centre. Ces équations sont présentées sous la forme la plus simple, et les trois dernières ont surtout l'avantage que les variables n'y sont que linéaires; à l'égard des trois premières, elles sont analogues à celles que M. Euler a employées dans sa nouvelle Théorie de la Lune, mais elles contiennent de plus les termes dus à la non-sphéricité de cette Planète et que M. Euler a négligés. Je termine cette Section par des considérations sur la figure de la Lune, que je regarde d'abord pour plus de simplicité comme un sphéroïde elliptique homogène dont l'équateur et les méridiens seraient des ellipses très-peu excentriques; je prouve ensuite que cette figure est en effet celle que la Lune aurait dû prendre, en vertu de la force centrifuge de ses parties, combinée avec l'attraction de la Terre, si elle avait été primitivement fluide, et je détermine dans cette hypothèse les véritables dimensions de cette figure par une méthode et des formules plus simples à quelques égards que celles qu'on avait déjà données pour cet objet : il en résulte que la Lune devrait être élevée sous son équateur, mais quatre fois plus dans le sens du diamètre de cet équateur qui est dirigé vers la Terre, et qui passe par conséquent par le centre apparent de la Lune, que dans le sens du diamètre perpendiculaire à celui-ci et qui passe par les bords apparents de cette Planète.

Dans la quatrième Section, je traite en particulier des mouvements de la Lune autour de son centre; ces mouvements se réduisent à la rotation de la Lune autour d'un axe fixe dans l'intérieur de cette Planète, et aux mouvements de cet axe, ou du plan de l'équateur lunaire qui lui est perpendiculaire, par rapport au plan de l'écliptique. Suivant la Théorie de la libration donnée par Mayer, le lieu moyen de la Terre vue du centre de la Lune et rapportée à l'équateur de cette Planète doit toujours répondre à un même point de cet équateur; et le méridien lunaire qui passe par ce point est celui que Mayer prend pour le premier méridien de la Lune, et auquel il rapporte les longitudes sélénographiques de ses taches. Mais cette Théorie suppose l'uniformité du mouvement de rotation de la Lune; si donc ce mouvement n'est pas uniforme, le lieu moyen de la Terre rapportée à l'équateur de la Lune ne répondra pas toujours à un méridien fixe; mais il y aura une petite différence qui exprimera la libration réelle et physique de la Lune; cette petite quantité est une des variables du Problème et se trouve déterminée par une équation différentielle linéaire du second ordre dont l'intégration est très-facile. Intégrant donc cette équation, on a directement la valeur de la libration réelle de la Lune, toute séparée de sa libration optique; et cette valeur contient un terme proportionnel au sinus d'un angle qui croit très-lentement, dont l'effet est analogue au mouvement d'un pendule qui fait de très-petites oscillations. Ce terme ayant un coefficient arbitraire sert à expliquer comment la Lune peut nous présenter toujours à peu près la même face, sans qu'on soit obligé de supposer que la vitesse primitive de rotation, imprimée à cette Planète, soit exactement égale à sa vitesse moyenne de translation autour de la Terre. Je fais d'ailleurs plusieurs remarques importantes sur la nature et la quantité de cette partie de la libration, la seule qui soit l'effet de la non-sphéricité de la Lune; l'autre partie de la libration, c'est-à-dire la libration optique, n'a par elle-même aucune difficulté, n'étant produite que par le mouvement non uniforme de la Lune autour de la Terre.

Je considère ensuite les mouvements de l'axe lunaire, et pour cela j'intègre les deux équations différentielles qui renferment la loi de ces mouvements. Cette intégration y introduit quatre constantes arbitraires; et l'on voit d'abord qu'en supposant ces constantes nulles, ce qui est le cas le plus simple du Problème, les nœuds de l'équateur lunaire doivent coïncider exactement avec les nœuds moyens de l'orbite de la Lune; mais rien n'oblige à regarder ces constantes comme tout à fait nulles; je suppose donc qu'elles aient seulement une valeur fort petite, et je trouve qu'alors les nœuds de l'équateur lunaire peuvent s'écarter des nœuds moyens de l'orbite d'un angle plus ou moins grand, mais qui sera toujours au-dessous de 90 degrés, en sorte que leur mouvement moyen sera néanmoins exactement égal au mouvement moyen des nœuds de l'orbite; ce qui est parfaitement conforme aux observations.

A l'égard de l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique, elle serait constante dans le cas de la coïncidence exacte des nœuds de l'équateur et de l'orbite de la Lune, mais dans l'autre cas elle est sujette à quel-

ques variations périodiques; ce qui paraît s'accorder aussi avec les observations, et ce qui étant en même temps contraire aux résultats des autres Théories, données jusqu'ici, prouve l'insuffisance de ces Théories et la nécessité où l'on était de traiter le Problème de la libration de la Lune par des méthodes nouvelles et plus rigoureuses.

Comme la valeur moyenne de l'inclinaison de l'équateur lunaire est à peu près connue par les observations, je m'en sers pour déterminer à très-peu près une des constantes qui dépendent de la figure de la Lune, laquelle, dans le cas où cette figure est supposée elliptique, exprime précisément l'allongement de la Lune dans le sens du diamètre de l'équateur qui est dirigé vers la Terre. Je trouve que cette quantité est nécessairement renfermée entre ces limites 0,0006746, 0,0005149, le demi-axe de la Lune étant pris pour l'unité; mais la supposition de la fluidité primitive de la Lune donne pour la même quantité une valeur beaucoup plus petite; d'où il suit, ou que la Lune n'est pas homogène, ainsi qu'on l'a supposé, ou que sa figure actuelle n'est pas celle qu'elle devrait avoir si ayant été originairement fluide elle eût conservé, en se durcissant, la figure qu'elle aurait dû prendre par les lois de l'Hydrostatique. Il n'y a au reste à cela rien de surprenant; car M. d'Alembert a trouvé aussi par rapport à la Terre que les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation ne peuvent s'accorder avec l'hypothèse de l'homogénéité de la Terre et de sa figure elliptique telle qu'elle résulte de la Théorie.

La dernière Section est destinée à l'examen des inégalités que la non-sphéricité de la Lune peut causer dans le mouvement de cette Planète autour de la Terre. Je fais abstraction dans cette recherche des quantités qui ne produiraient que des inégalités de la forme de celles qu'on connaît déjà, parce qu'il ne pourrait résulter de là que des corrections presque insensibles dans les formules du mouvement de la Lune, lesquelles sont encore trop éloignées d'avoir la précision nécessaire pour demander de pareilles corrections; et je me borne à avoir égard aux termes qui peuvent donner des inégalités nouvelles et d'une forme particulière. Je trouve que les inégalités qui altèrent le mouvement de la

Lune autour de son centre peuvent influer aussi dans son mouvement autour de la Terre; je détermine l'effet de ces inégalités tant dans la longitude que dans la latitude de la Lune; mais je démontre que cet effet ne peut qu'être insensible, et qu'il est impossible d'expliquer par là, comme on pourrait d'abord le croire, l'accélération que feu M. Mayer a supposée dans le mouvement de la Lune, pour satisfaire à la fois aux observations anciennes des Chaldéens, et à celles des Arabes, faites dans le IX^e^ siècle. J'ai fait voir ailleurs que cette accélération ne pouvait être produite par la non-sphéricité de la Terre; mais il était nécessaire d'examiner en particulier l'effet de la non-sphéricité de la Lune, à cause de la circonstance de l'égalité entre la rotation et la révolution de cette Planète; et cet examen achève de prouver l'impossibilité d'expliquer l'équation séculaire de la Lune par la Théorie de la gravitation.

SECTION PREMIÈRE.

EXPOSITION D'UNE MÉTHODE ANALYTIQUE POUR RÉSOUDRE TOUS LES PROBLÈMES DE DYNAMIQUE.

1. Le principe donné par M. d'Alembert réduit les lois de la Dynamique à celles de la Statique; mais la recherche de ces dernières lois par les principes ordinaires de l'équilibre du levier, ou de la composition des forces, est souvent longue et pénible. Heureusement il y a un autre principe de Statique plus général, et qui a surtout l'avantage de pouvoir être représenté par une équation analytique, laquelle renferme seule les conditions nécessaires pour l'équilibre d'un système quelconque de puissances. Tel est le principe connu sous la dénomination de *loi des vitesses virtuelles;* on l'énonce ordinairement ainsi : *Quand des puissances se font équilibre, les vitesses des points où elles sont appliquées, estimées suivant la direction de ces puissances, sont en raison inverse de ces mêmes puissances.* Mais ce principe peut être rendu très-général de la manière suivante.

2. Si un système quelconque de corps, réduits à des points et tirés par des puissances quelconques, est en équilibre, et qu'on donne à ce système un petit mouvement quelconque en vertu duquel chaque corps parcoure un espace infiniment petit, la somme des puissances multipliées chacune par l'espace que le point où elle est appliquée parcourt suivant la direction de cette puissance est toujours égale à zéro.

D'où il suit que si m, m', m'',... sont les masses des corps, P, Q, R,... les forces accélératrices qui sollicitent le corps m vers des centres quelconques dont les distances soient p, q, r,...; et de même P', Q', R',... les forces qui sollicitent le corps m' vers des centres dont les distances soient p', q', r',..., et ainsi de suite; et qu'on suppose que les lignes

$$p,\ q,\ r,\ldots,\quad p',\ q',\ r',\ldots,\ldots$$

deviennent

$$p-\partial p,\ q-\partial q,\ r-\partial r,\ldots,\quad p'-\partial p',\ q'-\partial q',\ r'-\partial r',\ldots,\ldots,$$

par une variation quelconque infiniment petite dans la position des corps; on aura pour l'équilibre cette équation générale

$$m(\mathrm{P}\partial p+\mathrm{Q}\partial q+\mathrm{R}\partial r+\ldots)+m'(\mathrm{P}'\partial p'+\mathrm{Q}'\partial q'+\mathrm{R}'\partial r'+\ldots)+m''(\mathrm{P}''\partial p''+\mathrm{Q}''\partial q''+\mathrm{R}''\partial r''+\ldots)+\ldots=0.$$

3. Pour avoir les valeurs des variations ou différences

$$\partial p,\ \partial q,\ \partial r,\ldots,\ \partial p',\ \partial q',\ \partial r',\ldots,$$

on différentiera à l'ordinaire les expressions des distances p, q, r,..., p', q', r',..., mais en regardant les centres des forces comme fixes, et en faisant varier seulement les quantités relatives à la position de chaque corps dans l'espace, et l'on marquera les différentielles par la caractéristique ∂ pour les distinguer des différentielles ordinaires. On réduira ainsi les valeurs de toutes ces différences à un certain nombre de pareilles différences qui dépendront uniquement du changement de position du système, et qui demeureront par conséquent indéterminées; et comme l'équation précédente doit avoir lieu quel que puisse être ce changement, il faudra la vérifier indépendamment des différences indéterminées dont il s'agit, et par conséquent égaler séparément à zéro la somme des termes multipliés par chacune de ces indéterminées; ce qui donnera précisément autant d'équations particulières et finies qu'il en faudra pour la détermination de l'équilibre du système proposé.

4. Supposons maintenant que le même système de corps soit en mouvement, et que x, y, z soient les coordonnées rectangles de la courbe décrite par le corps m; x', y', z' les coordonnées rectangles de la courbe décrite par le corps m', et ainsi de suite; ces coordonnées étant rapportées à trois axes fixes dans l'espace, et ayant une origine commune. Il est clair que le mouvement ou la vitesse du corps m dans l'instant dt peut être regardée comme composée de trois autres vitesses exprimées par

$$\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt},$$

et dirigées parallèlement aux axes des x, y, z. Il est de plus évident que si le corps était libre et qu'aucune force étrangère n'agit sur lui, chacune de ces trois vitesses demeurerait constante; mais dans l'instant suivant elles se changent réellement en celles-ci

$$\frac{dx}{dt}+d\frac{dx}{dt},\quad \frac{dy}{dt}+d\frac{dy}{dt},\quad \frac{dz}{dt}+d\frac{dz}{dt};$$

donc, si l'on regarde les vitesses précédentes comme composées de ces dernières et des vitesses

$$-d\frac{dx}{dt},\quad -d\frac{dy}{dt},\quad -d\frac{dz}{dt},$$

ou bien (en prenant dt constant)

$$-\frac{d^2x}{dt},\quad -\frac{d^2y}{dt},\quad -\frac{d^2z}{dt},$$

il s'ensuit que celles-ci doivent être détruites par l'action des forces qui

agissent sur les corps. Mais ces vitesses sont dues à des forces accélératrices égales à

$$-\frac{d^2x}{dt^2},\quad -\frac{d^2y}{dt^2},\quad -\frac{d^2z}{dt^2},$$

et dirigées parallèlement aux axes des x, y, z (en exprimant, suivant l'usage reçu, la force accélératrice par l'élément de la vitesse divisé par l'élément du temps), ou, ce qui revient au même, à des forces égales à

$$\frac{d^2x}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

et dirigées en sens contraire, c'est-à-dire suivant les lignes mêmes x, y, z; donc il faudra que ces forces, étant supposées appliquées au corps m, soient détruites par l'action de toutes les autres forces du système. Il faudra par la même raison que les forces

$$\frac{d^2x'}{dt^2},\quad \frac{d^2y'}{dt^2},\quad \frac{d^2z'}{dt^2},$$

étant supposées appliquées au corps m' suivant les lignes x', y', z', soient aussi détruites; et ainsi de suite. D'où il suit qu'il doit y avoir équilibre entre ces différentes forces et les autres forces qui sollicitent les corps, et qu'ainsi les lois du mouvement du système se réduisent à celles de son équilibre; c'est en quoi consiste le beau principe de Dynamique de M. d'Alembert.

5. Donc, pour avoir les équations du mouvement du système proposé, il n'y aura qu'à chercher celles de l'équilibre des corps m, m', m'',... sollicités par les forces

$$\mathrm{P},\ \mathrm{Q},\ \mathrm{R},\ldots,\quad \mathrm{P}',\ \mathrm{Q}',\ \mathrm{R}',\ldots,\quad \mathrm{P}'',\ \mathrm{Q}'',\ \mathrm{R}'',\ldots,$$

suivant les lignes

$$p,\ q,\ r,\ldots,\quad p',\ q',\ r',\ldots,\quad p'',\ q'',\ r'',\ldots,$$

comme dans le cas du n° 2, et de plus par les forces

$$\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{d^2z}{dt^2};\quad \frac{d^2x'}{dt^2},\ \frac{d^2y'}{dt^2},\ \frac{d^2z'}{dt^2};\quad \frac{d^2x''}{dt^2},\ \frac{d^2y''}{dt^2},\ \frac{d^2z''}{dt^2};\ldots,$$

suivant les lignes

$$x,\ y,\ z;\quad x',\ y',\ z';\quad x'',\ y'',\ z'';\ldots.$$

Ainsi il ne faudra qu'ajouter au premier membre de l'équation générale du numéro cité les termes dus à ces dernières forces.

Or les lignes x étant toujours parallèles entre elles, on peut les regarder comme concurrentes à un point infiniment éloigné et prendre ce point pour le centre des forces $\frac{d^2x}{dt^2}$. Soit h la distance infinie de ce point au plan auquel les lignes x sont terminées et qui les rencontre à angles droits, on aura $x+h$ pour la distance du corps m au centre des forces dont il s'agit, et δx sera la variation de cette distance, en supposant que la position du corps varie et que celle du centre demeure fixe, parce qu'à cause de la perpendicularité de la ligne h sur le plan, la variation de cette ligne est nulle. Donc le terme dû à la force $\frac{d^2x}{dt^2}$ agissant suivant la ligne x sera $m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x$; et ainsi des autres.

Ainsi il faudra ajouter au premier membre de l'équation du n° 2 les termes suivants

$$\begin{aligned}
&m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)\\
&+m'\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\,\delta x'+\frac{d^2y'}{dt^2}\,\delta y'+\frac{d^2z'}{dt^2}\,\delta z'\right)\\
&+m''\left(\frac{d^2x''}{dt^2}\,\delta x''+\frac{d^2y''}{dt^2}\,\delta y''+\frac{d^2z''}{dt^2}\,\delta z''\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Et l'on aura cette équation générale pour le mouvement du système

$$\begin{aligned}
0=&\,m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z+\mathrm{P}\,\delta p+\mathrm{Q}\,\delta q+\mathrm{R}\,\delta r+\ldots\right)\\
&+m'\left(\frac{d^2x'}{dt^2}\,\delta x'+\frac{d^2y'}{dt^2}\,\delta y'+\frac{d^2z'}{dt^2}\,\delta z'+\mathrm{P}'\,\delta p'+\mathrm{Q}'\,\delta q'+\mathrm{R}'\,\delta r'+\ldots\right)\\
&+m''\left(\frac{d^2x''}{dt^2}\,\delta x''+\frac{d^2y''}{dt^2}\,\delta y''+\frac{d^2z''}{dt^2}\,\delta z''+\mathrm{P}''\,\delta p''+\mathrm{Q}''\,\delta q''+\mathrm{R}''\,\delta r''+\ldots\right)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

6. Pour en faire usage, on remarquera d'abord que, si l'on dénote par x_1, y_1, z_1 les coordonnées rectangles qui déterminent la position du centre des forces P, par x_2, y_2, z_2 celles du centre des forces Q, par x_3, y_3, z_3 celles du centre des forces R, et ainsi des autres, ces coordonnées étant rapportées aux mêmes axes que les coordonnées des corps, on aura

$$p = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2},$$
$$q = \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2},$$
$$r = \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + (z-z_3)^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

de sorte qu'en différentiant on aura les valeurs de δp, δq,... exprimées en δx, δy, δz. Et l'on trouvera de même celles de $\delta p'$, $\delta q'$,... en $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$, et ainsi de suite.

De plus, en ayant égard à la disposition mutuelle des corps, on aura une ou plusieurs équations de condition entre les variables x, y, z, x', y', z',..., par le moyen desquelles on pourra exprimer toutes ces variables par quelques-unes d'entre elles, ou bien par d'autres variables en moindre nombre et telles, qu'elles soient entièrement indépendantes et répondent aux différents mouvements que le système peut recevoir. Nommant donc ces variables indépendantes φ, ψ, ω,..., on aura, par la substitution et la différentiation, les différences δx, δy, δz, $\delta x'$, $\delta y'$,... exprimées par celles-ci $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\omega$,..., et l'équation générale du numéro précédent prendra cette forme

$$\Phi\,\delta\varphi + \Psi\,\delta\psi + \Omega\,\delta\omega + \ldots = 0.$$

Or les variables φ, ψ, ω,... étant (hypothèse) indépendantes les unes des autres, leurs différences $\delta\varphi$, $\delta\psi$, $\delta\omega$,... seront absolument indéterminées; donc pour satisfaire, en général, à l'équation précédente il faudra faire séparément

$$\Phi = 0, \quad \Psi = 0, \quad \Omega = 0, \ldots.$$

Ces équations particulières étant en même nombre que les variables indéterminées φ, ψ, ω,... serviront à déterminer ces mêmes variables, et par conséquent le mouvement de tout le système.

7. Telle est la méthode générale; mais elle est susceptible de différentes simplifications que nous exposerons ailleurs. Nous nous contenterons ici de montrer comment on peut abréger le calcul nécessaire pour réduire les quantités

$$d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z$$

en fonctions de φ, ψ, ω,....

Pour cet effet je remarque que, puisque les deux caractéristiques d et δ représentent des différences ou variations indépendantes entre elles, toute quantité affectée de ces deux caractéristiques à la fois doit avoir la même valeur, dans quelque ordre qu'elles soient placées, ce qui est facile à démontrer et forme le principe fondamental du *Calcul des variations*. Ainsi $d\,\delta x$ sera la même chose que $\delta\,dx$, $d^2\,\delta x$ la même chose que $\delta\,d^2x$, et ainsi du reste.

Il s'ensuit de là que la quantité

$$d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z$$

sera la même chose que celle-ci

$$d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z) - \frac{1}{2}\delta(dx^2 + dy^2 + dz^2);$$

de sorte qu'il ne s'agira que de trouver la valeur des deux quantités

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z, \quad dx^2 + dy^2 + dz^2$$

en φ, ψ, ω,..., et leurs différences, et de différentier ensuite la première par d et la seconde par δ, c'est-à-dire en affectant les différences des caractéristiques d ou δ.

8. Or x étant une fonction de φ, ψ, ω,..., on aura

$$dx = \frac{dx}{d\varphi}\,d\varphi + \frac{dx}{d\psi}\,d\psi + \frac{dx}{d\omega}\,d\omega + \ldots,$$

et de même

$$\delta x = \frac{dx}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{dx}{d\psi}\delta\psi + \frac{dx}{d\omega}\delta\omega + \dots.$$

Donc

$$dx^2 = \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 d\varphi^2 + 2\,\frac{dx}{d\varphi}\,\frac{dx}{d\psi}\,d\varphi\,d\psi + \left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 d\psi^2 + \dots,$$

$$dx\,\delta x = \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 d\varphi\,\delta\varphi + \frac{dx}{d\varphi}\,\frac{dx}{d\psi}\,(d\varphi\,\delta\psi + d\psi\,\delta\varphi) + \left(\frac{dx}{d\psi}\right)^2 d\psi\,\delta\psi + \dots;$$

et ainsi des autres quantités semblables dy^2, $dy\,\delta y$, dz^2, $dz\,\delta z$.

Ainsi la quantité

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$

sera de la forme

$$\mathrm{L}\,d\varphi^2 + 2\,\mathrm{M}\,d\varphi\,d\psi + \mathrm{N}\,d\psi^2 + \dots,$$

L, M, N,... étant des fonctions connues des variables finies φ, ψ,...; et de même la quantité

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z$$

sera de la forme

$$\mathrm{L}\,d\varphi\,\delta\varphi + \mathrm{M}\,(d\varphi\,\delta\psi + d\psi\,\delta\varphi) + \mathrm{N}\,d\psi\,\delta\psi + \dots.$$

Donc, en différentiant la première de ces quantités par δ, on aura

$$\frac{1}{2}\delta(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$
$$= \frac{1}{2}\,\delta\mathrm{L}\,d\varphi^2 + \mathrm{L}\,d\varphi\,\delta\,d\varphi + \delta\mathrm{M}\,d\varphi\,d\psi + \mathrm{M}\,d\psi\,\delta\,d\varphi + \mathrm{M}\,d\varphi\,\delta\,d\psi + \dots,$$

et en différentiant la seconde par d, on aura pareillement

$$d(dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z)$$
$$= d(\mathrm{L}\,d\varphi)\,\delta\varphi + \mathrm{L}\,d\varphi\,d\,\delta\varphi + d(\mathrm{M}\,d\varphi)\,\delta\psi + \mathrm{M}\,d\varphi\,d\,\delta\psi + d(\mathrm{M}\,d\psi)\,\delta\varphi + \mathrm{M}\,d\psi\,d\,\delta\varphi + \dots.$$

Retranchant donc la quantité précédente de cette dernière, en se souvenant que $\delta\,d\varphi$ est la même chose que $d\,\delta\varphi$,..., on aura la valeur de

$$d^2x\,\delta x + d^2y\,\delta y + d^2z\,\delta z,$$

laquelle sera exprimée ainsi

$$d(\mathrm{L}\,d\varphi)\,\delta\varphi - \frac{\delta\mathrm{L}\,d\varphi^2}{2} + d(\mathrm{M}\,d\varphi)\,\delta\psi + d(\mathrm{M}\,d\psi)\,\delta\varphi - \delta\mathrm{M}\,d\varphi\,d\psi + \dots.$$

Cette quantité résulte évidemment de celle qui exprime la valeur de

$$\frac{1}{2}\delta(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

si l'on y change les signes de tous les termes qui contiennent des différences affectées de la simple caractéristique δ, et que, dans les autres termes où se trouvent les différences affectées de la double caractéristique δd, on efface la d après la δ, et qu'on l'applique aux quantités par lesquelles ces différences sont multipliées.

Ainsi l'on changera le terme $\frac{1}{2}\delta\mathrm{L}\,d\varphi^2$ en $-\frac{1}{2}\delta\mathrm{L}\,d\varphi^2$, le terme $\mathrm{L}\,d\varphi\,\delta\,d\varphi$ en $d(\mathrm{L}\,d\varphi)\,\delta\varphi$, et ainsi des autres.

Cette règle est, comme on voit, très-simple, et facilite extrêmement le mécanisme du calcul que notre méthode demande. On pourrait la démontrer *à priori;* mais nous avons préféré la démonstration précédente, comme étant plus sensible et plus convaincante.

9. A l'égard des termes

$$\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \dots$$

et de leurs semblables, on remarquera que dans le cas de la nature les forces P, Q, R,... sont ordinairement des fonctions des distances p, q, r,..., en sorte que les termes dont il s'agit sont tous intégrables; ce qui fournit aussi un moyen de simplifier beaucoup le calcul de ces termes; car il n'y aura qu'à intégrer d'abord à l'ordinaire la quantité

$$\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dq + \mathrm{R}\,dr + \dots$$

et la redifférentier ensuite relativement à la caractéristique δ.

Dans le Système du monde on a

$$\mathrm{P} = \frac{f}{p^2}, \quad \mathrm{Q} = \frac{g}{q^2}, \quad \mathrm{R} = \frac{h}{r^2}, \dots,$$

f, g, h,... étant des constantes; donc on aura dans ce cas

$$\mathrm{P}\,\delta p + \mathrm{Q}\,\delta q + \mathrm{R}\,\delta r + \dots = -\,\delta\left(\frac{f}{p} + \frac{g}{q} + \frac{h}{r} + \dots\right).$$

10. De ce que nous venons de démontrer résulte une méthode fort simple pour transformer l'équation générale du n° 5 par la substitution d'autres variables quelconques à la place de $x, y, z; x', y', z'; \ldots$.

Soit, pour abréger,

$$T = m\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2dt^2} + m'\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{2dt^2} + m''\frac{dx''^2+dy''^2+dz''^2}{2dt^2} + \ldots,$$

$$\begin{aligned} V = {} & m\int(P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots) \\ & + m'\int(P'dp' + Q'dq' + R'dr' + \ldots) \\ & + m''\int(P''dp'' + Q''dq'' + R''dr'' + \ldots) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Et supposons $x, y, z; x', y', \ldots$, exprimées par d'autres variables quelconques $\varphi, \psi, \omega, \ldots$. On substituera les valeurs données de $x, y, z; x', y', \ldots$ en $\varphi, \psi, \omega, \ldots$ dans les deux quantités T et V; on différentiera ensuite suivant δ, en regardant $\varphi, \psi, \omega, \ldots$ et $d\varphi, d\psi, d\omega, \ldots$ comme des variables particulières; et l'équation générale deviendra

$$\left(d\frac{\delta T}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta\varphi} + \frac{\delta V}{\delta\varphi}\right)\delta\varphi + \left(d\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta\psi} + \frac{\delta V}{\delta\psi}\right)\delta\psi + \left(d\frac{\delta T}{\delta d\omega} - \frac{\delta T}{\delta\omega} + \frac{\delta V}{\delta\omega}\right)\delta\omega + \ldots = 0,$$

en entendant par $\frac{\delta T}{\delta\varphi}$ le coefficient de $\delta\varphi$ dans la différentielle de T, par $\frac{\delta T}{\delta d\varphi}$ le coefficient de $\delta d\varphi$ dans la même différentielle; et ainsi du reste.

11. Si les variables $\varphi, \psi, \omega, \ldots$ sont indépendantes entre elles (et l'on peut toujours les prendre telles, qu'elles le soient), on aura sur-le-champ (6), pour le mouvement du système, ces équations particulières

$$d\frac{\delta T}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta\varphi} + \frac{\delta V}{\delta\varphi} = 0,$$

$$d\frac{\delta T}{\delta d\psi} - \frac{\delta T}{\delta\psi} + \frac{\delta V}{\delta\psi} = 0,$$

$$d\frac{\delta T}{\delta d\omega} - \frac{\delta T}{\delta\omega} + \frac{\delta V}{\delta\omega} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Mais, si ces variables ne sont pas indépendantes, alors il faudra réduire les différences $\delta\varphi, \delta\psi, \delta\omega, \ldots$ au plus petit nombre possible, et, égalant ensuite à zéro le coefficient de chacune de celles qui resteront, on aura les équations du Problème.

12. Si l'on multiplie les équations précédentes respectivement par $d\varphi$, $d\psi, d\omega, \ldots$, qu'ensuite on les ajoute ensemble, on aura une équation intégrable. En effet, puisque

$$\begin{aligned} d\varphi\, d\frac{\delta T}{\delta d\varphi} + d\psi\, d\frac{\delta T}{\delta d\psi} + d\omega\, d\frac{\delta T}{\delta d\omega} + \ldots = {} & d\left(\frac{\delta T}{\delta d\varphi}d\varphi + \frac{\delta T}{\delta d\psi}d\psi + \frac{\delta T}{\delta d\omega}d\omega + \ldots\right) \\ & - \frac{\delta T}{\delta d\varphi}d^2\varphi - \frac{\delta T}{\delta d\psi}d^2\psi - \frac{\delta T}{\delta d\omega}d^2\omega - \ldots, \end{aligned}$$

l'équation dont il s'agit sera

$$\begin{aligned} & d\left(\frac{\delta T}{\delta d\varphi}d\varphi + \frac{\delta T}{\delta d\psi} + d\psi\,\frac{\delta T}{\delta d\omega}\,d\omega + \ldots\right) \\ & - \frac{\delta T}{\delta d\varphi}d^2\varphi - \frac{\delta T}{\delta d\psi}d^2\psi - \frac{\delta T}{\delta d\omega}d^2\omega - \ldots \\ & - \frac{\delta T}{\delta\varphi}\,d\varphi - \frac{\delta T}{\delta\psi}\,d\psi - \frac{\delta T}{\delta\omega}\,d\omega - \ldots \\ & + \frac{\delta V}{\delta\varphi}\,d\varphi + \frac{\delta V}{\delta\psi}\,d\psi + \frac{\delta V}{\delta\omega}\,d\omega + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Or, V étant une fonction finie de $\varphi, \psi, \omega, \ldots$, on aura

$$dV = \frac{dV}{d\varphi}d\varphi + \frac{dV}{d\psi}d\psi + \frac{dV}{d\omega}d\omega + \ldots;$$

mais

$$\frac{dV}{d\varphi} = \frac{\delta V}{\delta\varphi}, \quad \frac{dV}{d\psi} = \frac{\delta V}{\delta\psi}, \ldots,$$

ce qui est évident par la nature du Calcul différentiel. Donc on aura aussi

$$\frac{\delta V}{\delta\varphi}d\varphi + \frac{\delta V}{\delta\psi}d\psi + \frac{\delta V}{\delta\omega}d\omega + \ldots = dV.$$

On démontrera de même que, puisque T est une fonction des quantités finies $\varphi, \psi, \omega, \ldots$ et de leurs différences premières $d\varphi, d\psi, d\omega, \ldots$, en re-

gardant φ, ψ, ω,..., $d\varphi$, $d\psi$, $d\omega$,... comme autant de variables indépendantes les unes des autres, on aura

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial T}{\partial \psi} d\psi + \frac{\partial T}{\partial \omega} d\omega + \ldots + \frac{\partial T}{\partial d\varphi} dd\varphi + \frac{\partial T}{\partial d\psi} dd\psi + \frac{\partial T}{\partial d\omega} dd\omega + \ldots = dT.$$

Ainsi l'équation précédente prendra cette forme

$$d\left(\frac{\partial T}{\partial d\varphi} d\varphi + \frac{\partial T}{\partial d\psi} d\psi + \frac{\partial T}{\partial d\omega} d\omega + \ldots\right) - dT + dV = 0,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{\partial T}{\partial d\varphi} d\varphi + \frac{\partial T}{\partial d\psi} d\psi + \frac{\partial T}{\partial d\omega} d\omega + \ldots - T + V = \text{const.}$$

Je remarque maintenant que par la nature de la quantité T on a nécessairement

$$\frac{\partial T}{\partial d\varphi} d\varphi + \frac{\partial T}{\partial d\psi} d\psi + \frac{\partial T}{\partial d\omega} d\omega + \ldots = 2T.$$

Car T étant une fonction homogène de deux dimensions des différences dx, dy, dz, dx', dy', dz',... (10), elle sera aussi une pareille fonction des différences $d\varphi$, $d\psi$, $d\omega$,...; donc, regardant ces différences comme des variables particulières, on aura par la propriété connue de ces sortes de fonctions

$$\frac{dT}{dd\varphi} d\varphi + \frac{dT}{dd\psi} d\psi + \frac{dT}{dd\omega} d\omega + \ldots = 2T,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{\partial T}{\partial d\varphi} d\varphi + \frac{\partial T}{\partial d\psi} d\psi + \frac{\partial T}{\partial d\omega} d\omega + \ldots = 2T.$$

L'intégrale trouvée deviendra donc

$$T + V = \text{const.},$$

équation qui n'est autre chose que celle qui renferme le principe connu de la *conservation des forces vives;* car il est visible que 2T exprime la somme des forces vives actuelles de tous les corps du système, et que

$$\text{const.} - 2V$$

est égal à la valeur de ces forces en supposant les corps libres et isolés (numéro cité).

Notre méthode donne ainsi une démonstration directe et générale de ce fameux principe, mais on aurait tort de la confondre pour cela avec ce même principe; car ce principe ne donne de lui-même qu'une seule équation, et ne suffit seul que pour résoudre les Problèmes qui ne demandent qu'une seule équation; au lieu que notre méthode donne toujours toutes les équations nécessaires pour la solution du Problème.

On aurait pu au reste déduire immédiatement le principe de la conservation des forces vives de l'équation générale du n° 5, en y changeant la caractéristique ∂ en d (ce qui est évidemment permis, puisque les différences marquées par ∂ sont indéterminées et arbitraires) et intégrant ensuite; mais nous avons cru qu'il n'était pas inutile de faire voir comment les différentes équations différentielles du mouvement du système fournissent toujours une équation intégrable, qui n'est autre chose que celle de la conservation des forces vives.

13. Si le système donné était composé d'une infinité de particules animées par des forces quelconques proportionnelles à des fonctions des distances; nommant, en général, dm la masse de chaque particule, P, Q, R,... les forces qui la sollicitent vers des centres donnés et qu'on suppose proportionnelles à des fonctions des distances p, q, r,... à ces centres, x, y, z les coordonnées rectangles qui déterminent la position de cette particule dans l'espace; et dénotant par le signe $\mathbf{S}$ des intégrations relatives à la somme de toutes les particules du système; il est clair que les quantités T et V du n° 10 deviendront

$$T = \frac{\mathbf{S}(dx^2 + dy^2 + dz^2)\,dm}{2dt^2},$$

$$V = \mathbf{S}\,dm \int (P\,dp + Q\,dq + R\,dr + \ldots).$$

Et l'on pourra après les substitutions faire sortir hors du signe $\mathbf{S}$ les variables φ, ψ, ω,... qui sont censées ne dépendre que de la position du système en général

Dans le Système du monde on aura

$$P=\frac{f}{p^2},\quad Q=\frac{g}{q^2},\quad R=\frac{h}{r^2},\ldots;$$

donc

$$V=-f\mathbf{S}\frac{dm}{p}-g\mathbf{S}\frac{dm}{q}-h\mathbf{S}\frac{dm}{r}-\ldots.$$

SECTION DEUXIÈME.

APPLICATION DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE A LA RECHERCHE DES ÉQUATIONS POUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE DE FIGURE QUELCONQUE, ATTIRÉ PAR DES FORCES QUELCONQUES.

14. Il faut commencer par chercher les conditions qui résultent de la solidité du corps; or ces conditions consistent évidemment en ce que les distances mutuelles de tous les points du corps demeurent invariables. Nommant donc, en général, x, y, z les coordonnées rectangles d'un point quelconque du corps, et x_1, y_1, z_1 les coordonnées rectangles d'un autre point du même corps, il faudra que la quantité

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

soit toujours la même, et soit par conséquent indépendante du mouvement du corps.

Cela posé, soient x', y', z' les coordonnées d'un autre point du corps pris à volonté et que nous appellerons dans la suite le *centre* du corps, et soit, en général,

$$x=x'+\xi,\quad y=y'+\eta,\quad z=z'+\zeta;$$

il est visible que ξ, η, ζ seront les coordonnées du même élément du corps auxquelles appartiennent les x, y, z, mais rapportées à des axes passant par le centre du corps et parallèles aux axes des x', y', z'. Si donc ξ_1, η_1, ζ_1 sont les valeurs de ξ, η, ζ pour l'élément qui appartient aux coordonnées x_1, y_1, z_1, on aura aussi

$$x_1=x'+\xi_1,\quad y_1=y'+\eta_1,\quad z_1=z'+\zeta_1,$$

et la distance

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

sera exprimée par

$$\sqrt{(\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2+(\zeta-\zeta_1)^2}.$$

De sorte que les conditions provenantes de la solidité ne pourront regarder que les coordonnées ξ, η, ζ, et nullement les coordonnées x', y', z', lesquelles demeureront par conséquent indéterminées. C'est ce qui est d'ailleurs évident de soi-même, puisque ces dernières coordonnées se rapportent à un point déterminé de la masse du corps, dont la position dans l'espace peut être quelconque.

15. Toute la difficulté se réduit donc à déterminer la forme des quantités ξ, η, ζ, en sorte qu'elles satisfassent aux conditions de la solidité. Or je remarque, en général, que si l'on imagine dans l'intérieur du corps trois axes fixes et perpendiculaires entre eux qui se coupent dans le centre du corps, et qu'on rapporte à ces axes la position de chaque point du corps par de nouvelles coordonnées rectangles a, b, c, ces coordonnées serviront à déterminer la position et la distance mutuelle de tous les points du corps; de sorte que le corps sera solide lorsque ces coordonnées seront constantes pour chaque point du corps, et par conséquent indépendantes du temps; mais si elles peuvent varier d'un instant à l'autre, le corps changera alors de figure, comme les corps flexibles ou fluides. Il n'y aura donc qu'à chercher les valeurs des premières coordonnées ξ, η, ζ exprimées par les dernières a, b, c, et les conditions de la solidité seront remplies en regardant ces dernières comme constantes.

Or, comme ces différentes coordonnées se rapportent aux mêmes points du corps, et ont d'ailleurs leur origine dans le même point qu'on prend pour le centre du corps, mais ne diffèrent que par la position de leurs axes, il n'est pas difficile de trouver les valeurs dont il s'agit, soit à l'aide de la Trigonométrie, ou par des constructions géométriques, ou, ce qui est encore plus simple, par la Théorie connue de la transformation des coordonnées; nous les donnerons plus bas, et nous commencerons ici par faire des remarques générales sur les expressions de ces valeurs.

16. Sans chercher ces expressions on peut d'abord conclure, soit de la Théorie de la transformation des coordonnées, soit de cette considération qu'en supposant ξ, ou η, ou ζ constantes (ce qui donne des plans perpendiculaires aux axes de ces mêmes coordonnées) on doit avoir toujours des équations linéaires entre a, b, c; on peut, dis-je, conclure de là que les valeurs de ξ, η, ζ en a, b, c ne peuvent être que de la forme suivante

$$\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi''',$$
$$\eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta''',$$
$$\zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''',$$

les quantités ξ', ξ'', ξ''', η', η'',... étant les mêmes pour tous les points du corps et dépendant uniquement de la position de ses axes par rapport aux axes fixes des coordonnées x, y, z.

Or les conditions de la solidité du corps consistent en ce que la distance entre deux points quelconques doit être constante, et par conséquent indépendante des quantités ξ', η', ζ', ξ'', η'',...; donc, si l'on suppose que les coordonnées a, b, c et ξ, η, ζ répondent à un point du corps, et que pour un autre point elles deviennent a_1, b_1, c_1, ξ_1, η_1, ζ_1, il est clair que la distance entre ces deux points sera exprimée également par

$$\sqrt{(a-a_1)^2 + (b-b_1)^2 + (c-c_1)^2}$$

et par

$$\sqrt{(\xi-\xi_1)^2 + (\eta-\eta_1)^2 + (\zeta-\zeta_1)^2};$$

en sorte qu'il faudra qu'on ait cette équation identique

$$(\xi-\xi_1)^2 + (\eta-\eta_1)^2 + (\zeta-\zeta_1)^2 = (a-a_1)^2 + (b-b_1)^2 + (c-c_1)^2.$$

Mais il est visible que pour avoir ξ_1, η_1, ζ_1, il n'y a qu'à changer a, b, c en a_1, b_1, c_1 dans les expressions précédentes de ξ, η, ζ, et qu'ainsi pour avoir $\xi - \xi_1$, $\eta - \eta_1$, $\zeta - \zeta$, il n'y aura qu'à mettre dans les mêmes expressions $a - a_1$, $b - b_1$, $c - c_1$ au lieu de a, b, c.

Substituant donc ces valeurs dans l'équation précédente et comparant

les termes semblables, on aura ces six équations de condition

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1, \quad \xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = 0,$$
$$\xi''^2 + \eta''^2 + \zeta''^2 = 1, \quad \xi'\xi''' + \eta'\eta''' + \zeta'\zeta''' = 0,$$
$$\xi'''^2 + \eta'''^2 + \zeta'''^2 = 1, \quad \xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''' = 0,$$

entre les neuf variables ξ', η', ζ', ξ'',...; en sorte que ces variables se réduiront à trois indéterminées.

17. Si l'on voulait avoir les valeurs de a, b, c en ξ, η, ζ, il suffirait d'ajouter ensemble les trois équations ci-dessus

$$\xi = a\xi' + \ldots, \quad \eta = a\eta' + \ldots, \quad \zeta = a\zeta' + \ldots,$$

après avoir multiplié respectivement ces équations par ξ', η', ζ', par ξ'', η'', ζ'' et par ξ''', η''', ζ'''; car en vertu de ces six équations de condition trouvées on aura sur-le-champ

$$a = \xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta',$$
$$b = \xi\xi'' + \eta\eta'' + \zeta\zeta'',$$
$$c = \xi\xi''' + \eta\eta''' + \zeta\zeta'''.$$

Or, comme ces expressions de a, b, c doivent satisfaire également à l'équation identique

$$(a-a_1)^2 + (b-b_1)^2 + (c-c_1)^2 = (\xi-\xi_1)^2 + (\eta-\eta_1)^2 + (\zeta-\zeta_1)^2,$$

en les substituant dans cette équation et comparant les termes homologues, on aura ces six autres équations de condition

$$\xi'^2 + \xi''^2 + \xi'''^2 = 1, \quad \xi'\eta' + \xi''\eta'' + \xi'''\eta''' = 0,$$
$$\eta'^2 + \eta''^2 + \eta'''^2 = 1, \quad \xi'\zeta' + \xi''\zeta'' + \xi'''\zeta''' = 0,$$
$$\zeta'^2 + \zeta''^2 + \zeta'''^2 = 1, \quad \eta'\zeta' + \eta''\zeta'' + \eta'''\zeta''' = 0;$$

lesquelles doivent être une suite nécessaire de celles qu'on a trouvées ci-dessus, puisqu'elles résultent de la même équation identique.

18. Substituons maintenant dans les expressions de T et V du n° 13, pour x, y, z, leurs valeurs $x' + \xi$, $y' + \eta$, $z' + \zeta$ (14).

On aura d'abord

$$dx^2+dy^2+dz^2=dx'^2+dy'^2+dz'^2+2(dx'd\xi+dy'd\eta+dz'd\zeta)+d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2;$$

multipliant par dm et intégrant par rapport à la caractéristique $\mathbf{S}$, laquelle ne regarde que la variabilité des coordonnées a, b, c contenues dans les valeurs de ξ, η, ζ, puisque ces coordonnées sont les seules quantités qui varient d'un point du corps à l'autre, on aura

$$T=\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{2dt}\mathbf{S}dm+\frac{dx'\mathbf{S}d\xi dm+dy'\mathbf{S}d\eta dm+dz'\mathbf{S}d\zeta dm}{dt^2}+\frac{\mathbf{S}(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2)dm}{2dt^2},$$

et il ne restera plus qu'à substituer les valeurs de $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$.

Or, ξ étant égal à $a\xi'+b\xi''+c\xi'''$, on aura, en regardant a, b, c comme constantes dans la différentiation de ξ, et ensuite comme seules variables dans l'intégration marquée par $\mathbf{S}$, on aura, dis-je,

$$\mathbf{S}d\xi dm=d\xi'\mathbf{S}a dm+d\xi''\mathbf{S}b dm+d\xi'''\mathbf{S}c dm,$$

et l'on aura de même les valeurs de $\mathbf{S}d\eta dm$, $\mathbf{S}d\zeta dm$ en changeant dans la précédente la lettre ξ en η ou ζ.

19. Mais je remarque que, si l'on suppose (ce qui est permis et même très-naturel) que le point que nous avons pris pour le centre du corps (14) en soit le véritable *centre de gravité*, les valeurs des intégrales

$$\mathbf{S}a dm,\quad \mathbf{S}b dm,\quad \mathbf{S}c dm,$$

qui expriment les sommes des moments de chaque particule dm du corps par rapport à trois axes passant par son centre, seront nulles par les propriétés connues du centre de gravité. De sorte qu'on aura dans cette hypothèse

$$\mathbf{S}d\xi dm=0,\quad \mathbf{S}d\eta dm=0,\quad \mathbf{S}d\zeta dm=0,$$

ce qui simplifie beaucoup la valeur de T, et la réduit à

$$T=\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{2dt^2}\mathbf{S}dm+\frac{\mathbf{S}(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2)dm}{2dt^2}.$$

Cette expression de T est, comme on voit, composée de deux parties,

dont la première dépend uniquement des variables x', y', z' qui se rapportent au centre de gravité du corps, et dont la seconde dépend seulement des variables ξ, η, ζ qui donnent la position de toutes les particules du corps autour de ce centre; ainsi ces deux parties sont indépendantes entre elles et peuvent être traitées séparément. La première n'est autre chose que la valeur de T qui aurait lieu dans le cas où l'on supposerait tout le corps, dont la masse est $\mathbf{S}dm$, concentré dans son centre de gravité, et où l'on chercherait le mouvement de ce centre; la seconde partie exprime au contraire la valeur de T qui aurait lieu dans le cas où l'on supposerait le centre du corps fixe (soit que ce centre soit celui de gravité ou non), ce qui donnerait

$$dx'=0,\quad dy'=0,\quad dz'=0,$$

et où l'on chercherait seulement le mouvement de tous les autres points du corps autour de ce centre.

20. Je désigne la valeur de $\mathbf{S}dm$ ou la masse du corps par m. Ainsi la première partie de la quantité T sera représentée par

$$\frac{dx'^2+dy'^2+dz'^2}{2dt^2}m.$$

Comme cette expression ne contient que les variables x', y', z' qui sont (hypothèse) indépendantes tant entre elles que des autres variables du Problème, elle n'a pas besoin d'autre préparation; ainsi, en l'employant à la place de T dans les équations du n° 11 et prenant x', y', z' pour φ, ψ, ω, on aura les trois équations nécessaires pour le mouvement du centre du corps.

Mais, si au lieu des coordonnées x', y' de l'orbite projetée on veut employer à l'ordinaire le rayon vecteur ρ et l'angle σ parcouru par ce rayon, on fera

$$x'=\rho\cos\sigma,\quad y'=\rho\sin\sigma,$$

et l'on aura, en substituant,

$$dx'^2+dy'^2=\rho^2d\sigma^2+d\rho^2.$$

Cette dernière manière de représenter l'orbite du corps est surtout utile lorsqu'elle est peu différente d'un cercle et en même temps peu inclinée au plan des coordonnées x', y', comme cela a lieu à l'égard de toutes les Planètes par rapport à l'écliptique; car alors ρ est une quantité à peu près constante, σ est à peu près proportionnel au temps, et z' est toujours une quantité très-petite, ce qui fournit des moyens d'approximation pour la détermination du mouvement du corps.

Si l'on veut éviter les angles, on considérera qu'en représentant, pour plus de simplicité, le temps t par l'angle du mouvement moyen, c'est-à-dire par la valeur moyenne de σ, la différence $\sigma - t$ sera toujours un angle fort petit dans l'hypothèse précédente; d'où il s'ensuit que $\rho \sin(\sigma - t)$ sera une quantité fort petite et $\rho \cos(\sigma - t)$ une quantité peu variable.

Faisons donc

$$\rho \sin(\sigma - t) = \mathrm{Y}, \quad \rho \cos(\sigma - t) = \mathrm{X},$$

on aura

$$\rho \sin\sigma = \mathrm{Y}\cos t + \mathrm{X}\sin t = y', \quad \rho\cos\sigma = \mathrm{X}\cos t - \mathrm{Y}\sin t = x';$$

et de là on tirera

$$dx'^2 + dy'^2 = (d\mathrm{X} - \mathrm{Y}dt)^2 + (d\mathrm{Y} + \mathrm{X}dt)^2.$$

Il est aisé de voir que les variables X, Y introduites à la place de x', y' ne sont autre chose que de nouvelles coordonnées rectangles ayant la même origine que celles-ci, et couchées sur le même plan, mais placées de manière que l'axe des X soit mobile et passe toujours par le lieu moyen du corps, et que l'axe des Y soit toujours perpendiculaire à celui-là. C'est ainsi que M. Euler a représenté le mouvement de la Lune dans sa nouvelle Théorie de cette Planète; et notre méthode donnera immédiatement les mêmes équations que M. Euler n'a trouvées qu'à l'aide de plusieurs substitutions et réductions.

En employant d'autres substitutions on trouvera des formules différentes, et l'on sera assuré d'avoir toujours par cette méthode les équations les plus simples dont chaque manière de représenter le mouvement

du corps est susceptible; ce qui n'est pas un des moindres avantages de notre méthode.

21. Venons maintenant à l'autre partie de la valeur de T, laquelle contient les quantités relatives au mouvement de rotation du corps autour de son centre de gravité, et qui est représentée par la formule

$$\frac{\mathbf{S}(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)\,dm}{2dt^2}.$$

On y substituera donc à la place de $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ leurs valeurs tirées des expressions du n° **16**. Mais je remarque qu'on rendra les résultats beaucoup plus simples, si à la place de la quantité

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

on prend celle-ci

$$(\xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta)^2 + (\xi'' d\xi + \eta'' d\eta + \zeta'' d\zeta)^2 + (\xi''' d\xi + \eta''' d\eta + \zeta''' d\zeta)^2,$$

qui lui est équivalente en vertu des équations de condition du n° **17**.

En effet, puisque

$$d\xi = a\,d\xi' + b\,d\xi'' + c\,d\xi''', \quad d\eta = a\,d\eta' + b\,d\eta'' + c\,d\eta''', \quad d\zeta = a\,d\zeta' + b\,d\zeta'' + c\,d\zeta''',$$

si l'on fait, pour abréger,

$$d\mathrm{P} = \xi''' d\xi'' + \eta''' d\eta'' + \zeta''' d\zeta'',$$
$$d\mathrm{Q} = \xi' d\xi''' + \eta' d\eta''' + \zeta' d\zeta''',$$
$$d\mathrm{R} = \xi'' d\xi' + \eta'' d\eta' + \zeta'' d\zeta',$$

et qu'on ait égard aux équations de condition du n° **16** différentiées, on trouvera

$$\xi' d\xi + \eta' d\eta + \zeta' d\zeta = c\,d\mathrm{Q} - b\,d\mathrm{R},$$
$$\xi'' d\xi + \eta'' d\eta + \zeta'' d\zeta = a\,d\mathrm{R} - c\,d\mathrm{P},$$
$$\xi''' d\xi + \eta''' d\eta + \zeta''' d\zeta = b\,d\mathrm{P} - a\,d\mathrm{Q}.$$

Ajoutant ensemble les carrés de ces trois quantités, on aura donc

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = (c\,d\mathrm{Q} - b\,d\mathrm{R})^2 + (a\,d\mathrm{R} - c\,d\mathrm{P})^2 + (b\,d\mathrm{P} - a\,d\mathrm{Q})^2$$
$$= (a^2 + b^2)\,d\mathrm{R}^2 + (a^2 + c^2)\,d\mathrm{Q}^2 + (b^2 + c^2)\,d\mathrm{P}^2 - 2bc\,d\mathrm{Q}\,d\mathrm{R} - 2ac\,d\mathrm{P}\,d\mathrm{R} - 2ab\,d\mathrm{P}\,d\mathrm{Q}.$$

Ainsi la quantité

$$\frac{\mathbf{S}(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2)\,dm}{2dt^2}$$

deviendra

$$\frac{A\,dR^2+B\,dQ^2+C\,dP^2}{2dt^2}-\frac{F\,dQ\,dR+G\,dP\,dR+H\,dP\,dQ}{dt^2}$$

en faisant, pour abréger,

$$A=\mathbf{S}(a^2+b^2)\,dm,\quad B=\mathbf{S}(a^2+c^2)\,dm,\quad C=\mathbf{S}(b^2+c^2)\,dm,$$
$$F=\mathbf{S}bc\,dm,\qquad G=\mathbf{S}ac\,dm,\qquad H=\mathbf{S}ab\,dm.$$

Ces intégrations sont relatives à toute la masse du corps, en sorte que A, B, C, F, G, H doivent être maintenant regardées et traitées comme des constantes données par la figure du corps.

22. Il est à présent nécessaire de réduire les neuf variables ξ', η', ζ', ξ'',... à trois indéterminées, ce qu'on peut obtenir par le moyen des six équations de condition du n° 16, ou plus simplement encore en cherchant directement les valeurs de ces mêmes variables par la méthode connue de la transformation des coordonnées.

En effet, puisque ξ, η, ζ sont les coordonnées rectangles d'un point quelconque de la masse du corps par rapport à trois axes passant par son centre et parallèles aux axes fixes des coordonnées x, y, z, et que a, b, c sont les coordonnées rectangles du même point par rapport à trois autres axes passant par le même centre, mais fixes au dedans du corps et par conséquent variables à l'égard des axes des ξ, η, ζ, il s'ensuit que pour avoir les expressions de ξ, η, ζ en a, b, c il n'y aura qu'à transformer de la manière la plus générale ces dernières coordonnées dans les autres.

Pour cela nous nommerons ω l'angle que le plan des a, b fait avec celui des ξ, η, et ψ l'angle que l'intersection de ces deux plans fait avec l'axe des ξ; enfin nous désignerons par φ l'angle que l'axe des a fait avec la même ligne d'intersection; ces trois quantités ω, ψ, φ serviront, comme on voit, à déterminer la position des axes des coordonnées a, b, c

relativement aux axes des coordonnées ξ, η, ζ; par conséquent on peut par leur moyen exprimer ces dernières par les autres.

Il est clair que, si l'on imagine que le corps proposé soit la Terre, que le plan des a, b, soit celui de l'équateur, et que l'axe des a passe par un méridien donné; que de plus le plan des ξ, η soit celui de l'écliptique, et que l'axe des ξ soit dirigé vers le premier point d'Aries; il est clair, dis-je, que ω sera l'obliquité de l'écliptique, ψ la longitude de l'équinoxe d'automne ou du nœud ascendant de l'équateur sur l'écliptique, et φ sera la distance du méridien donné à cet équinoxe. Mais, si l'on transporte ces dénominations à la Lune, en prenant cette Planète pour le corps dont il s'agit, on aura ω pour l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique, ψ pour la longitude du nœud ascendant de cet équateur, et φ pour la distance d'un méridien lunaire à ce nœud.

En général φ sera l'angle que le corps décrit en tournant autour de l'axe des coordonnées c, axe qu'on pourra appeler, à cause de cela, *axe de rotation du corps*, $90°-\omega$ sera l'angle d'inclinaison de cet axe sur le plan fixe des coordonnées ξ et η, et $\psi-90°$ sera l'angle entre la projection de ce même axe et l'axe des coordonnées ξ.

23. Cela posé, supposons d'abord qu'on change les deux coordonnées a et b en deux autres a', b' placées dans le même plan, mais telles, que l'axe des a' tombe dans l'intersection des deux plans et celui des b' soit perpendiculaire à cette intersection; on aura

$$a'=a\cos\varphi-b\sin\varphi,\quad b'=b\cos\varphi+a\sin\varphi.$$

Supposons ensuite que les deux coordonnées b' et c soient changées en deux autres b'', c', dont l'une b'' soit toujours perpendiculaire à l'intersection des plans, mais soit placée dans le plan des ξ et η, et dont l'autre c' soit perpendiculaire à ce dernier plan; on trouvera de la même manière

$$b''=b'\cos\omega-c\sin\omega,\quad c'=c\cos\omega+b'\sin\omega.$$

Enfin supposons encore qu'on change les coordonnées a' et b'' qui sont déjà dans le plan des ξ et η en deux autres a'', b'' placées dans ce même

plan, mais telles, que l'axe des a'' coïncide avec l'axe des ξ; on trouvera pareillement

$$a''' = a' \cos\psi - b'' \sin\psi, \quad b''' = b'' \cos\psi + a' \sin\psi.$$

Et il est visible que les trois coordonnées a'', b''', c' seront la même chose que les ξ, η, ζ, puisqu'elles sont rapportées aux mêmes axes; de sorte qu'en substituant successivement les valeurs de a', b'', b', on aura les expressions cherchées de ξ, η, ζ, en a, b, c, lesquelles se trouveront de la même forme que celles du n° 16, en supposant

$$\begin{aligned}
\xi' &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\omega,\\
\xi'' &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\omega,\\
\xi''' &= \sin\psi\sin\omega;\\
\eta' &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\omega,\\
\eta'' &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\omega,\\
\eta''' &= -\cos\psi\sin\omega;\\
\zeta' &= \sin\varphi\sin\omega,\\
\zeta'' &= \cos\varphi\sin\omega,\\
\zeta''' &= \cos\omega.
\end{aligned}$$

Ces valeurs satisfont aussi aux six équations de condition du même numéro, ainsi qu'à celles du n° 17, et résolvent ces équations dans toute leur étendue, puisqu'elles renferment trois variables indéterminées φ, ψ, ω.

Si maintenant on fait ces substitutions dans les valeurs de dP, dQ, dR du n° 21, on trouvera, après quelques réductions, ces expressions fort simples

$$\begin{aligned}
d\mathrm{P} &= \sin\varphi\sin\omega\, d\psi + \cos\varphi\, d\omega,\\
d\mathrm{Q} &= \cos\varphi\sin\omega\, d\psi - \sin\varphi\, d\omega,\\
d\mathrm{R} &= d\varphi + \cos\omega\, d\psi.
\end{aligned}$$

24. Puisque les variables φ, ψ, ω sont indéterminées et indépendantes entre elles, il ne s'agira donc plus que d'avoir les quantités T et V en fonctions de ces variables; ensuite, différentiant par rapport à la caractéristique δ, on aura trois équations de la forme de celles du n° 11, les-

quelles serviront à déterminer ces variables par le temps t, et par conséquent à connaître les lois de la rotation du corps.

Si l'on développe ces équations, on les trouvera analogues à celles que j'ai données autrefois dans ma pièce sur la Libration; mais elles se présenteront ici sous une forme encore plus simple, ce qui est dû à la manière dont nous avons exprimé la quantité

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

par le moyen des trois quantités dP, dQ, dR. Mais quoique ces équations aient peut-être toute la simplicité que la nature du sujet peut comporter, elles sont néanmoins, comme toutes celles qu'on avait déjà trouvées, peu propres pour la solution du Problème de la libration de la Lune, à cause des sinus et cosinus d'angles qui se trouvent mêlés avec les différentielles de ces angles, et qui rendent l'intégration fort difficile et l'approximation peu exacte.

25. Comme ce Problème ne peut être résolu que d'une manière approchée, on doit s'appliquer principalement à donner aux équations différentielles la forme la plus convenable pour l'approximation, et il n'est pas difficile de se convaincre que les formules les plus propres à cela seraient celles qui ne contiendraient aucun sinus ou cosinus, du moins dans les termes différentiels et indépendants des forces perturbatrices, et dans lesquelles ces termes seraient des fonctions de quelques variables, qui par la nature de la question devraient demeurer très-petites; en sorte que dans la première approximation on pût réduire ces fonctions à la forme linéaire, qui est, comme on sait, la seule susceptible d'intégration, en général, et quel que soit le nombre des variables et l'ordre de leurs différences. Or, s'il est possible de remplir ces conditions, ce ne peut être qu'à l'aide de quelques substitutions convenables; mais il serait peut-être difficile de découvrir ces substitutions *à posteriori* d'après les équations différentielles déjà trouvées; heureusement notre méthode fournit pour cette recherche des moyens directs : ils dépendent des considérations suivantes.

26. On voit, par la forme des équations du n° 11, que les termes différentiels et indépendants des forces perturbatrices viennent uniquement de la quantité T; ainsi la difficulté se réduit à faire en sorte que cette quantité soit elle-même exprimée par des fonctions sans sinus et cosinus de quelques variables, qui doivent rester très-petites; pour cela il faudra que la quantité T, et par conséquent chacune des trois quantités dP, dQ, dR, soit de la forme dont il s'agit. Or je remarque qu'en appliquant à la Lune les formules du n° 23, l'angle ω qui exprime l'inclinaison de l'équateur lunaire sur le plan de l'écliptique sera toujours très-petit et au-dessous de 2 degrés d'après les observations; d'où il s'ensuit que, si l'on prenait pour inconnues à la place de deux des trois angles φ, ψ, ω les deux quantités ζ', ζ'', ou les deux ξ''', η''', ces nouvelles variables auraient la condition demandée, et il ne resterait plus qu'à faire en sorte que les sinus et cosinus du troisième angle disparaissent entièrement des trois quantités dP, dQ, dR.

Il est vrai que si l'on voulait appliquer les mêmes formules à la Terre, à l'égard de laquelle ω serait égal à l'obliquité de l'écliptique, qui est de $23^\circ\frac{1}{2}$, les quantités ζ', ζ'', ξ''', η''' ne seraient plus si petites, par conséquent la première approximation ne serait pas à beaucoup près aussi exacte que pour la Lune; mais il n'y aurait alors qu'à pousser l'approximation plus loin par les méthodes connues.

Quant à l'autre condition qui regarde l'évanouissement des sinus et cosinus, pour peu que l'on considère nos formules, on s'apercevra aisément qu'elle se trouvera remplie en prenant pour inconnues les deux quantités

$$\zeta' = \sin\omega\sin\varphi, \quad \zeta'' = \sin\omega\cos\varphi,$$

avec la somme des deux angles φ et ψ; car il arrivera nécessairement que les sinus et cosinus de $\varphi+\psi$ s'en iront des expressions de dP, dQ, dR.

Mais au lieu de prendre pour inconnues les deux quantités $\sin\omega\sin\varphi$ et $\sin\omega\cos\varphi$, il vaudra mieux, pour éviter les radicaux, prendre ces deux-ci

$$\tang\frac{\omega}{2}\sin\varphi, \quad \tang\frac{\omega}{2}\cos\varphi,$$

qui ont en même temps l'avantage d'être toujours plus petites que celles-là.

27. Je ferai donc

$$s = \tang\frac{\omega}{2}\sin\varphi, \quad u = \tang\frac{\omega}{2}\cos\varphi, \quad \theta = \varphi + \psi,$$

et, substituant d'abord dans les formules du n° 23

$$\frac{2\tang\frac{\omega}{2}}{1+\tang^2\frac{\omega}{2}}, \quad 1-\frac{2\tang^2\frac{\omega}{2}}{1+\tang^2\frac{\omega}{2}},$$

à la place de $\sin\omega$, $\cos\omega$, ensuite $\theta-\varphi$, s, u à la place de ψ, $\tang\frac{\omega}{2}\sin\varphi$, $\tang\frac{\omega}{2}\cos\varphi$ et s^2+u^2 à la place de $\tang^2\frac{\omega}{2}$, on aura

$$\xi' = \frac{(1+u^2-s^2)\cos\theta + 2su\sin\theta}{1+s^2+u^2},$$

$$\xi'' = -\frac{(1+s^2-u^2)\sin\theta + 2su\cos\theta}{1+s^2+u^2},$$

$$\xi''' = \frac{2u\sin\theta - 2s\cos\theta}{1+s^2+u^2};$$

$$\eta' = \frac{(1+u^2-s^2)\sin\theta - 2su\cos\theta}{1+s^2+u^2},$$

$$\eta'' = \frac{(1+s^2-u^2)\cos\theta - 2su\sin\theta}{1+s^2+u^2},$$

$$\eta''' = -\frac{2u\cos\theta + 2s\sin\theta}{1+s^2+u^2};$$

$$\zeta' = \frac{2s}{1+s^2+u^2},$$

$$\zeta'' = \frac{2u}{1+s^2+u^2},$$

$$\zeta''' = \frac{1-s^2-u^2}{1+s^2+u^2}.$$

28. Substituant ensuite ces valeurs dans les expressions de $d\mathrm{P}$, $d\mathrm{Q}$, $d\mathrm{R}$ du n° 21, on aura, après les réductions, celles-ci

$$d\mathrm{R} = \frac{(1-s^2-u^2)\,d\vartheta - 2(s\,du - u\,ds)}{1+s^2+u^2},$$

$$d\mathrm{Q} = \frac{2(u\,d\vartheta - ds)}{1+s^2+u^2},$$

$$d\mathrm{P} = \frac{2(s\,d\vartheta + du)}{1+s^2+u^2},$$

lesquelles ne contiennent, comme on voit, ni sinus ni cosinus d'angles, mais seulement les variables finies s, u, avec leurs différentielles premières ds, du, et la différence $d\vartheta$ de l'angle ϑ.

29. Il ne restera plus qu'à faire les mêmes substitutions dans la quantité V, laquelle dépend des forces particulières qui agissent sur le corps (13); mais ce calcul n'ayant par lui-même aucune difficulté, nous remettrons à la Section suivante à le développer relativement à la Lune, en tant qu'elle est attirée par la Terre et par le Soleil.

30. Mais avant de terminer celle-ci, nous croyons devoir faire remarquer que l'axe autour duquel nous avons considéré la rotation du corps (22), et qui est fixe dans l'intérieur du corps, mais mobile dans l'espace, n'est pas le vrai axe autour duquel le corps tourne à chaque instant et qu'on peut nommer *axe spontané de rotation*. Celui-ci est mobile tant à l'égard du corps que dans l'espace, et sa position dans le corps dépend des trois quantités $d\mathrm{P}$, $d\mathrm{Q}$, $d\mathrm{R}$. En effet la formule

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = (c\,d\mathrm{Q} - b\,d\mathrm{R})^2 + (a\,d\mathrm{R} - c\,d\mathrm{P})^2 + (b\,d\mathrm{P} - a\,d\mathrm{Q})^2$$

du n° 21 fait voir que si l'on prend les coordonnées a, b, c proportionnelles respectivement à $d\mathrm{P}$, $d\mathrm{Q}$, $d\mathrm{R}$, la quantité

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$$

devient nulle pour tous les points qui répondent à ces coordonnées; de sorte qu'il y a par rapport au centre du corps une suite de points en

repos, formant une ligne droite qui passe par ce centre et fait avec les axes des coordonnées a, b, c des angles dont les cosinus sont respectivement

$$\frac{d\mathrm{P}}{\sqrt{d\mathrm{P}^2+d\mathrm{Q}^2+d\mathrm{R}^2}},\quad \frac{d\mathrm{Q}}{\sqrt{d\mathrm{P}^2+d\mathrm{Q}^2+d\mathrm{R}^2}},\quad \frac{d\mathrm{R}}{\sqrt{d\mathrm{P}^2+d\mathrm{Q}^2+d\mathrm{R}^2}};$$

c'est l'axe spontané dont il s'agit. On peut démontrer aussi que

$$\frac{\sqrt{d\mathrm{P}^2+d\mathrm{Q}^2+d\mathrm{R}^2}}{dt}$$

exprimera la vitesse de rotation autour de cet axe, et que

$$\frac{d\mathrm{P}}{dt},\quad \frac{d\mathrm{Q}}{dt},\quad \frac{d\mathrm{R}}{dt}$$

seront les vitesses particulières de rotation que le corps peut être supposé avoir à la fois autour des axes des coordonnées a, b, c, et qui par leur composition donnent la vitesse

$$\frac{\sqrt{d\mathrm{P}^2+d\mathrm{Q}^2+d\mathrm{R}^2}}{dt}$$

autour de l'axe spontané.

SECTION TROISIÈME.

DÉVELOPPEMENT DES FORMULES NÉCESSAIRES POUR DÉTERMINER LES MOUVEMENTS DE LA LUNE QUI DÉPENDENT DE LA NON-SPHÉRICITÉ DE CETTE PLANÈTE.

31. Nous venons de donner les formules qui renferment la solution générale de ce Problème; ainsi il ne s'agit que d'appliquer ces formules au cas particulier de la Lune, en tant qu'on la regarde comme non sphérique, et que chacune de ses particules est attirée par la Terre et par le Soleil en raison inverse des carrés des distances.

32. Quelle que soit la manière dont on représente le mouvement d'un corps de figure quelconque, nous avons vu que ce mouvement dépend de

six variables, dont trois déterminent la position d'un point quelconque donné du corps (point que nous appelons en général le *centre* du corps) et dont les trois autres déterminent la position même du corps autour de son centre; et nous avons montré que chacune de ces variables fournit pour le mouvement du corps (**11**) une équation de la forme

$$d\frac{\delta T}{\delta d\varphi} - \frac{\delta T}{\delta \varphi} + \frac{\delta V}{\delta \varphi} = 0,$$

φ étant une de ces six variables, et T, V des fonctions de ces mêmes variables; ainsi tout se réduit à déterminer ces fonctions.

33. La fonction T ne dépend que des forces accélératrices qui proviennent de l'inertie du corps, et la fonction V dépend uniquement des forces accélératrices extérieures qui sont supposées agir sur le corps.

En nommant t le temps dont l'élément est supposé constant, x', y', z' les trois coordonnées rectangles du centre du corps, qu'on suppose être son centre de gravité (ces coordonnées étant rapportées à des axes fixes dans l'espace), ξ, η, ζ les coordonnées rectangles de chaque particule dm du corps par rapport à trois axes passant par son centre et parallèles aux mêmes axes fixes, p, q, ... les distances rectilignes de la particule dm au centre des forces $\frac{f}{p^2}$, $\frac{g}{q^2}$, ..., on a trouvé, en général, (**13**, **19**)

$$T = \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{2dt^2} m + \frac{\mathbf{S}(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)\, dm}{2dt^2},$$

$$V = -f\mathbf{S}\frac{dm}{p} - g\mathbf{S}\frac{dm}{q} - \ldots,$$

la caractéristique $\mathbf{S}$ dénotant des intégrales totales et relatives à la masse entière du corps.

Examinons successivement les différents termes de ces formules et voyons ce qu'ils deviennent par rapport à la Lune.

34. Nous regarderons la Terre comme en repos, et nous prendrons x', y', z' pour les coordonnées de l'orbite décrite par le centre de gravité de

la Lune autour de la Terre; les deux premières x', y' seront prises dans le plan de l'écliptique, l'axe des x' étant dirigé vers le premier point d'*Aries*, et l'axe des y' vers le point qui répond à 90 degrés de longitude; et l'axe de la troisième coordonnée z' sera perpendiculaire à l'écliptique et dirigé vers son pôle boréal.

Comme la latitude de la Lune est toujours assez petite, il est clair que la variable z' sera aussi très-petite; mais il n'en est pas de même des deux autres variables x', y'; cependant si l'on considère que le mouvement de la Lune autour de la Terre est à peu près circulaire et uniforme, on verra qu'en introduisant à la place de ces coordonnées le rayon vecteur ρ de l'orbite projetée sur l'écliptique et l'angle σ de la longitude vraie, on aura

$$x' = \rho\cos\sigma, \quad y' = \rho\sin\sigma,$$

expressions dans lesquelles ρ sera presque constant et σ à peu près proportionnel au temps.

Supposons pour plus de simplicité que la distance moyenne de la Lune à la Terre soit représentée par l'unité, et que le temps t soit représenté par l'angle du mouvement moyen, c'est-à-dire par la longitude moyenne de la Lune; on aura

$$\rho = 1 + \rho', \quad \sigma = t + \sigma',$$

ρ' et σ' étant des quantités fort petites.

Mais au lieu de ces substitutions il vaudra mieux employer celles que nous avons indiquées dans le n° **20**, et qui consistent à faire

$$\rho\sin(\sigma - t) = Y, \quad \rho\cos(\sigma - t) = X,$$

où Y est, comme on voit, une quantité fort petite et X une quantité peu différente de l'unité. De cette manière on aura

$$x' = \rho\cos\sigma = X\cos t - Y\sin t,$$
$$y' = \rho\sin\sigma = Y\cos t + X\sin t,$$

et de là on tirera

$$dx'^2 + dy'^2 = (dY + X\,dt)^2 + (dX - Y\,dt)^2.$$

35. Nous mettrons pour plus de simplicité $1+x$ à la place de X, y à la place de Y et z à la place de z'. Ainsi les trois coordonnées rectangles x', y' et z' de l'orbite du centre de gravité de la Lune autour de la Terre seront représentées par

$$(1+x)\cos t - y\sin t, \quad y\cos t + (1+x)\sin t, \quad z;$$

et l'on aura

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = [dy + (1+x)\,dt]^2 + (dx - y\,dt)^2 + dz^2,$$

expressions dans lesquelles les trois variables x, y, z seront toujours fort petites; et ces trois variables seront les mêmes que M. Euler a employées et désignées par les mêmes lettres dans sa *Nouvelle Théorie de la Lune*.

Nous adoptons ici cette manière de représenter le mouvement de la Lune d'autant plus volontiers qu'on trouve dans cet Ouvrage de M. Euler les valeurs des quantités x, y, z, en tant qu'elles dépendent de l'action de la Terre et du Soleil sur la Lune, regardée comme un point, déjà exprimées par les mouvements moyens et calculées avec une grande précision; et nous ferons usage de ces valeurs dans nos recherches sur l'effet de la non-sphéricité de la Lune.

36. Ainsi la première partie de l'expression de T, celle qui se rapporte au mouvement progressif du centre de la Lune, sera (en nommant m la masse de la Lune)

$$\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt} - y\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} + 1 + x\right)^2 + \frac{dz^2}{dt^2}\right].$$

Je dénoterai dans la suite cette quantité par T′.

37. Pour représenter le mouvement de rotation de la Lune autour de son centre de gravité, on imaginera dans l'intérieur de la masse de cette Planète trois axes fixes, perpendiculaires entre eux, qui passent par ce centre et qui demeurent toujours fixes au dedans du corps; et l'on rapportera à ces trois axes la position de chaque particule dm de la masse de la Lune par le moyen de trois coordonnées a, b, c. On aura (ainsi

qu'on l'a vu dans la Section précédente, n° 16) pour les coordonnées ξ, η, ζ de cette particule les formules

$$\xi = a\xi' + b\xi'' + c\xi''', \quad \eta = a\eta' + b\eta'' + c\eta''', \quad \zeta = a\zeta' + b\zeta'' + c\zeta''',$$

dans lesquelles ξ', ξ'', ... sont indépendantes de la position de cette particule dans l'intérieur du corps, et sont uniquement des fonctions des variables qui déterminent la position du corps autour de son centre.

38. Maintenant je regarde le plan qui passe par les deux axes des coordonnées a et b comme l'équateur de la Lune, et par conséquent le troisième axe des coordonnées c comme l'axe de rotation de cette Planète. Je nomme ω l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique, ψ la longitude du nœud ascendant de cet équateur, lequel est en même temps le nœud descendant de l'écliptique par rapport au même équateur, c'est-à-dire l'équinoxe d'automne de la Lune, cette longitude étant vue du centre de la Lune et prise à l'ordinaire sur l'écliptique, ou sur un plan parallèle à l'écliptique et passant par le centre de la Lune; enfin je nomme φ la distance du point de l'équateur lunaire, par lequel passe l'axe des abscisses a, au nœud ascendant de cet équateur, c'est-à-dire l'angle formé au pôle de la Lune par le méridien fixe qui passe par cet axe, et par le méridien mobile qui passe par le nœud ascendant de l'équateur, et qui est par rapport à la Lune le colure de l'équinoxe d'automne. Il est visible que ces trois angles ω, ψ, φ suffisent pour déterminer dans un instant quelconque la position du corps de la Lune par rapport à l'écliptique; ainsi l'on pourrait les prendre pour les variables dont nous avons parlé plus haut, et réduire par conséquent la détermination du mouvement de la Lune sur son centre à trois équations entre ces variables, comme on en a usé jusqu'ici dans toutes les recherches de ce genre. Mais nous avons déjà indiqué les inconvénients auxquels les équations trouvées de la sorte sont sujettes, et nous avons donné dans le n° 26 un moyen de les éviter, lequel consiste à employer au lieu des angles ω, φ, ψ, les fonctions

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\sin\varphi = s, \quad \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\cos\varphi = u, \quad \psi + \varphi = 0,$$

dont les deux premières ont, par rapport à la Lune, l'avantage d'être toujours très-petites, puisqu'on sait par les observations que l'inclinaison ω est fort petite, cette inclinaison ayant été trouvée par Cassini de $2^\circ\frac{1}{2}$, par Mayer de $1^\circ 29'$, et par M. de Lalande de $1^\circ 47'$.

39. A l'égard de l'angle ϑ, son emploi a aussi un avantage particulier par rapport à la Lune; en effet, puisque t est la longitude moyenne de la Lune (34), $t+180^\circ$ sera la longitude moyenne de la Terre vue du centre de la Lune, et retranchant l'angle ψ, on aura $t+180^\circ-\psi$ pour la longitude moyenne de la Terre comptée depuis le nœud ascendant de l'équateur lunaire; donc $t-\psi$ sera cette longitude comptée depuis le nœud descendant de cet équateur, c'est-à-dire depuis l'équinoxe du printemps de la Lune. Or il résulte des observations exactes de la libration de la Lune faites par Mayer que, si l'on transporte cette longitude $t-\psi$ sur l'équateur lunaire en partant du même équinoxe lunaire, elle doit répondre toujours à un même point de cet équateur, en sorte que le méridien lunaire qui passera par ce point sera fixe sur la surface de la Lune. Mayer prend ce méridien pour le premier méridien de la Lune, et y rapporte les longitudes sélénographiques des taches de la Lune; nous le nommerons aussi d'après lui le *premier méridien* lunaire, et nous supposerons, ce qui est permis, qu'il coïncide avec le méridien fixe par lequel passe l'axe des coordonnées a, et qui fait avec le colure de l'équinoxe d'automne de la Lune l'angle φ; or nous venons de voir que le premier méridien fait avec le colure de l'équinoxe du printemps l'angle $t-\psi$; ainsi il fera avec celui de l'équinoxe d'automne l'angle $t-\psi+180^\circ$; donc on aura $\varphi=t-\psi+180^\circ$, et de là

$$\varphi+\psi=\vartheta=180^\circ+t.$$

Cette détermination est fondée sur le phénomène connu de la non-rotation apparente de la Lune, et sur l'hypothèse de l'uniformité de la rotation réelle de cette Planète autour de son axe, et du mouvement des nœuds de l'équateur lunaire sur l'écliptique; si ces mouvements sont sujets à quelques inégalités, alors la distance du premier méridien à l'équinoxe du printemps ne sera plus exactement égale à $t-\psi$, mais elle sera $t-\psi+r$, r étant une quantité dépendante de ces inégalités, et par conséquent très-petite, puisque jusqu'ici les observations n'ont pu la faire connaître. Dans ce cas la valeur de $\varphi+\psi$ ou de ϑ deviendra $180^\circ+t+r$.

40. De cette manière donc le mouvement de la Lune autour de son centre sera déterminé par les trois variables très-petites r, s, u, de même que celui de son centre autour de la Terre l'est par les trois variables x, y, z, aussi fort petites. Mais les trois premières sont beaucoup plus petites que ces dernières, et l'on pourra les regarder comme des quantités très-petites du premier ordre, vis-à-vis desquelles il sera permis de négliger celles des ordres suivants; cependant il faudra tenir compte des quantités du second ordre dans les expressions de T et de V, parce que celles de $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\cdots$ se trouveront rabaissées au premier.

41. Nous avons déjà donné dans la Section précédente (27) les valeurs exactes des quantités ξ', ξ'', $\ldots$ en fonctions de ϑ, s, u; ainsi il ne s'agira que d'y substituer pour ϑ sa valeur $180^\circ+t+r$, et par conséquent pour $\sin\vartheta$

$$-\sin(t+r) \quad \text{ou} \quad -\sin t\cos r-\cos t\sin r,$$

et pour $\cos\vartheta$

$$-\cos(t+r) \quad \text{ou} \quad -\cos t\cos r+\sin t\sin r,$$

et de négliger les termes où les quantités r, s, u formeraient ensemble des produits de plus de deux dimensions, en mettant pour cet effet à la place de $\sin r$ et $\cos r$ leurs valeurs approchées r et $1-\frac{r^2}{2}$.

Nous donnerons d'abord les expressions des valeurs dont il s'agit en y conservant les $\sin r$ et $\cos r$, parce que nous pourrons avoir occasion d'en faire usage sous cette forme; on aura ainsi, en négligeant les dimensions de s et u au-dessus de la seconde,

$$\xi'=-[(1-2s^2)\cos r+2su\sin r]\cos t+[(1-2s^2)\sin r-2su\cos r]\sin t,$$

$$\xi''=[(1-2u^2)\cos r-2su\sin r]\sin t+[(1-2u^2)\sin r+2su\cos r]\cos t,$$

$$\xi'''=-2(u\cos r+s\sin r)\sin t-2(u\sin r-s\cos r)\cos t;$$

$$\eta' = -[(1-2s^2)\cos r + 2su\sin r]\sin t - [(1-2s^2)\sin r - 2su\cos r]\cos t,$$
$$\eta'' = -[(1-2u^2)\cos r - 2su\sin r]\cos t + [(1-2u^2)\sin r + 2su\cos r]\sin t,$$
$$\eta''' = 2(u\cos r + s\sin r)\cos t - 2(u\sin r - s\cos r)\sin t;$$

$$\zeta' = 2s, \quad \zeta'' = 2u, \quad \zeta''' = 1 - 2s^2 - 2u^2.$$

42. Substituant maintenant $1 - \frac{r^2}{2}$ à la place de $\cos r$, et r à la place de $\sin r$, et négligeant toujours les produits de r, s, u au delà de deux dimensions, les expressions précédentes se changeront en celles-ci

$$\xi' = -\left(1 - \frac{r^2}{2} - 2s^2\right)\cos t + (r - 2su)\sin t,$$
$$\xi'' = \left(1 - \frac{r^2}{2} - 2u^2\right)\sin t + (r + 2su)\cos t,$$
$$\xi''' = -2(u + rs)\sin t + 2(s - ru)\cos t;$$

$$\eta' = -\left(1 - \frac{r^2}{2} - 2s^2\right)\sin t - (r - 2su)\cos t,$$
$$\eta'' = -\left(1 - \frac{r^2}{2} - 2u^2\right)\cos t + (r + 2su)\sin t,$$
$$\eta''' = 2(u + rs)\cos t + 2(s - ru)\sin t;$$

$$\zeta' = 2s, \quad \zeta'' = 2u, \quad \zeta''' = 1 - 2s^2 - 2u^2.$$

Si l'on fait les mêmes substitutions dans les expressions des quantités $d\mathrm{P}$, $d\mathrm{Q}$, $d\mathrm{R}$ du n° 28, et qu'on y néglige aussi les troisièmes dimensions de r, s, u, on aura

$$d\mathrm{R} = \left(1 + \frac{dr}{dt} - 2s^2 - 2u^2\right)dt - 2(s\,du - u\,ds),$$
$$d\mathrm{Q} = 2\left(u - \frac{ds}{dt} + \frac{u\,dr}{dt}\right)dt,$$
$$d\mathrm{P} = 2\left(s + \frac{du}{dt} + \frac{s\,dr}{dt}\right)dt.$$

43. Or nous avons déjà réduit la quantité

$$\frac{\mathbf{S}(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2)\,dm}{2dt^2},$$

qui est la seconde partie de la valeur de T, à une simple fonction de $d\mathrm{P}$, $d\mathrm{Q}$, $d\mathrm{R}$ (**21**); ainsi, faisant les substitutions précédentes et négligeant toujours les mêmes dimensions, on aura pour la quantité dont il s'agit et que je désignerai par T'' la formule

$$\mathrm{T}'' = \frac{\mathrm{A}}{2}\left(1 + \frac{2dr}{dt} + \frac{dr^2}{dt^2} - 4s^2 - 4u^2 - \frac{4s\,du}{dt} + \frac{4u\,ds}{dt}\right)$$
$$+ 2\mathrm{B}\left(u - \frac{ds}{dt}\right)^2 + 2\mathrm{C}\left(s + \frac{du}{dt}\right)^2 - 2\mathrm{F}\left(u - \frac{ds}{dt} + \frac{2u\,dr}{dt} - \frac{dr\,ds}{dt^2}\right)$$
$$- 2\mathrm{G}\left(s + \frac{du}{dt} + \frac{2s\,dr}{dt} + \frac{dr\,du}{dt^2}\right) - 4\mathrm{H}\left(u - \frac{ds}{dt}\right)\left(s + \frac{du}{dt}\right).$$

44. Réunissant donc les deux quantités T' et T'', on aura la valeur complète de la quantité T, laquelle aura ainsi l'avantage d'être une fonction rationnelle et entière des six variables très-petites x, y, z, r, s, u et de leurs différences premières, sans aucun mélange de sinus et cosinus d'angles.

45. Il faut chercher maintenant la valeur de la fonction V qui dépend uniquement des forces accélératrices qu'on suppose agir sur le corps.

Ces forces dans la question présente ne peuvent être que l'attraction de la Terre et celle du Soleil, lesquelles étant exprimées par $\frac{f}{p^2}$ et $\frac{g}{q^2}$ relativement à chaque particule dm de la Lune, on aura (**33**)

$$\mathrm{V} = -f\mathbf{S}\frac{dm}{p} - g\mathbf{S}\frac{dm}{q}.$$

46. Considérons d'abord le terme $-f\mathbf{S}\frac{dm}{p}$ venant de l'attraction de la Terre, p sera la distance rectiligne de la particule dm de la Lune au centre de la Terre, par conséquent elle sera exprimée ainsi

$$p = \sqrt{(x' + \xi)^2 + (y' + \eta)^2 + (z' + \zeta)^2},$$

car x', y', z' étant les coordonnées rectangles du centre de la Lune par rapport au centre de la Terre, et ξ, η, ζ celles de la particule dm de la Lune par rapport au centre de cette Planète, il est visible que $x' + \xi$,

$y'+\eta$, $z'+\zeta$ seront celles de la même particule dm par rapport au centre de la Terre.

Or, par le n° 35, on a

$$x'=(1+x)\cos t-y\sin t,\quad y'=y\cos t+(1+x)\sin t,\quad z'=z;$$

et si dans les formules

$$\xi=a\xi'+b\xi''+c\xi''',\quad \eta=a\eta'+b\eta''+c\eta''',\quad \zeta=a\zeta'+b\zeta''+c\zeta''',$$

du n° 37, on substitue les valeurs de ξ', ξ'',... du n° 42, on trouvera

$$\xi=-\lambda\cos t+\mu\sin t,\quad \eta=-\lambda\sin t-\mu\cos t,\quad \zeta=\nu,$$

en faisant, pour abréger,

$$\lambda=a\left(1-\frac{r^2}{2}-2s^2\right)-b(r+2su)-2c(s-ru),$$

$$\mu=a(r-2su)+b\left(1-\frac{r^2}{2}-2u^2\right)-2c(u+rs),$$

$$\nu=2as+2bu+c(1-2s^2-2u^2);$$

ainsi l'on aura

$$x'+\xi=(1+x-\lambda)\cos t-(y-\mu)\sin t,$$
$$y'+\eta=(1+x-\lambda)\sin t+(y-\mu)\cos t,$$
$$z'+\zeta=z+\nu;$$

donc

$$p=\sqrt{(1+x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z+\nu)^2},$$

expression qui a l'avantage d'être délivrée de l'angle t.

47. Comme dans l'expression intégrale $\mathbf{S}\frac{dm}{p}$ le signe $\mathbf{S}$ se rapporte uniquement à la variabilité des coordonnées a, b, c de la particule dm par rapport aux axes du corps, il est nécessaire de développer la valeur de $\frac{1}{p}$ relativement aux quantités a, b, c renfermées dans λ, μ, ν; or ce développement n'a point de difficulté; car les quantités a, b, c ne pouvant jamais surpasser le demi-diamètre de la Lune, elles seront toujours des fractions très-petites (la distance moyenne de la Lune à la Terre étant

prise pour l'unité), et même beaucoup plus petites que les quantités du premier ordre x, y, z, r, s, u; et il en sera de même des quantités λ, μ, ν.

Soit p' la valeur de p lorsque a, b et c sont nuls, c'est-à-dire la distance du centre de la Lune à la Terre, ou le rayon vecteur de l'orbite réelle de la Lune, on aura

$$p'=\sqrt{(1+x)^2+y^2+z^2},$$

et par conséquent

$$p=\sqrt{p'^2-2\lambda(1+x)-2\mu y+2\nu z+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}.$$

Donc, en ne poussant l'approximation que jusqu'aux secondes dimensions de λ, μ, ν, on aura

$$\frac{1}{p}=\frac{1}{p'}+\frac{\lambda(1+x)+\mu y-\nu z}{p'^3}-\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{2p'^3}+\frac{3[\lambda(1+x)+\mu y-\nu z]^2}{2p'^5};$$

multipliant par dm et ensuite intégrant relativement à la caractéristique $\mathbf{S}$, laquelle ne regarde que la variabilité de a, b, c, on aura

$$\mathbf{S}\frac{dm}{p}=\frac{\mathbf{S}dm}{p'}+\frac{(1+x)\mathbf{S}\lambda dm+y\mathbf{S}\mu dm-z\mathbf{S}\nu dm}{p'^3}-\frac{\mathbf{S}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)dm}{2p'^3}$$
$$+\frac{3}{2p'^5}\Big[(1+x)^2\mathbf{S}\lambda^2dm+y^2\mathbf{S}\mu^2dm+z^2\mathbf{S}\nu^2dm$$
$$+2(1+x)y\mathbf{S}\lambda\mu dm-2(1+x)z\mathbf{S}\lambda\nu dm-2yz\mathbf{S}\mu\nu dm\Big].$$

Il ne s'agit donc plus que de remettre à la place de λ, μ, ν leurs valeurs du numéro précédent, en faisant sortir hors du signe $\mathbf{S}$ les quantités r, s, u qui doivent être regardées comme constantes dans ces intégrations.

48. On voit d'abord que les valeurs des trois intégrales $\mathbf{S}\lambda dm$, $\mathbf{S}\mu dm$, $\mathbf{S}\nu dm$ renfermeront dans tous leurs termes les quantités $\mathbf{S}adm$, $\mathbf{S}bdm$, $\mathbf{S}cdm$, qui sont nulles par les propriétés du centre de gravité, puisqu'on suppose que ce centre est l'origine des coordonnées a, b, c; ainsi l'on aura

$$\mathbf{S}\lambda dm=0,\quad \mathbf{S}\mu dm=0,\quad \mathbf{S}\nu dm=0.$$

Pour avoir la valeur des autres intégrales il faut commencer par chercher celles de λ^2, μ^2, ν^2, $\lambda\mu$, ...; et comme les valeurs de λ, μ, ν ne sont

exactes qu'à la troisième dimension près de r, s et u, il faudra également négliger cette dimension dans les valeurs dont il s'agit. On trouvera ainsi

$$\lambda^2 = a^2(1-r^2-4s^2)+b^2r^2+4c^2s^2-2ab(r+2su)-4ac(s-ru)+4bcrs,$$
$$\mu^2 = a^2r^2+b^2(1-r^2-4u^2)+4c^2u^2+2ab(r-2su)-4acru-4bc(u+rs),$$
$$\nu^2 = 4a^2s^2+4b^2u^2+c^2(1-4s^2-4u^2)+8absu+4acs+4bcu,$$

$$\lambda\mu = a^2(r-2su)-b^2(r+2su)+4c^2su + ab(1-2r^2-2s^2-2u^2)-2ac(u+2rs)-2bc(s-2ru),$$

$$\lambda\nu = 2a^2s-2b^2ru-2c^2(s-ru) + 2ab(u-rs)+ac\left(1-\frac{r^2}{2}-8s^2-2u^2\right)-bc(r+6su),$$

$$\mu\nu = 2a^2rs+2b^2u-2c^2(u+rs) + 2ab(s+ru)+ac(r-6su)+bc\left(1-\frac{r^2}{2}-2s^2-8u^2\right).$$

Or nous avons déjà supposé (21)

$$\mathbf{S}(a^2+b^2)\,dm = \mathrm{A}, \quad \mathbf{S}(a^2+c^2)\,dm = \mathrm{B}, \quad \mathbf{S}(b^2+c^2)\,dm = \mathrm{C},$$
$$\mathbf{S}ab\,dm = \mathrm{H}, \quad \mathbf{S}ac\,dm = \mathrm{G}, \quad \mathbf{S}bc\,dm = \mathrm{F};$$

d'où

$$\mathbf{S}a^2dm = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}, \quad \mathbf{S}b^2dm = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}}{2}, \quad \mathbf{S}c^2dm = \frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2};$$

donc, multipliant les valeurs précédentes par dm, intégrant et substituant ces dernières valeurs, on aura

$$\mathbf{S}\lambda^2dm = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}+(\mathrm{C}-\mathrm{B})r^2+4(\mathrm{C}-\mathrm{A})s^2-2\mathrm{H}(r+2su)-4\mathrm{G}(s-ru)+4\mathrm{F}rs,$$

$$\mathbf{S}\mu^2dm = \frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}}{2}+(\mathrm{B}-\mathrm{C})r^2+4(\mathrm{B}-\mathrm{A})u^2+2\mathrm{H}(r-2su)-4\mathrm{G}ru-4\mathrm{F}(u+rs),$$

$$\mathbf{S}\nu^2dm = \frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}+4(\mathrm{A}-\mathrm{C})s^2+4(\mathrm{A}-\mathrm{B})u^2+8\mathrm{H}su+4\mathrm{G}s+4\mathrm{F}u,$$

$$\mathbf{S}\lambda\mu\,dm = (\mathrm{B}-\mathrm{C})r+2(\mathrm{B}+\mathrm{C}-2\mathrm{A})su + \mathrm{H}(1-2r^2-2s^2-2u^2)-2\mathrm{G}(u+2rs)-2\mathrm{F}(s-2ru),$$

$$\mathbf{S}\lambda\nu\,dm = 2(\mathrm{A}-\mathrm{C})s+2(\mathrm{B}-\mathrm{A})ru + 2\mathrm{H}(u-rs)+\mathrm{G}\left(1-\frac{r^2}{2}-8s^2-2u^2\right)-\mathrm{F}(r+6su),$$

$$\mathbf{S}\mu\nu\,dm = 2(\mathrm{A}-\mathrm{B})u+2(\mathrm{A}-\mathrm{C})rs + 2\mathrm{H}(s+ru)+\mathrm{G}(r-6su)+\mathrm{F}\left(1-\frac{r^2}{2}-2s^2-8u^2\right).$$

On fera donc ces substitutions dans l'expression de $\mathbf{S}\frac{dm}{p}$ trouvée ci-dessus, et multipliant ensuite tous les termes par $-f$, on aura la partie de la fonction V qui est due à l'attraction de la Terre sur la Lune.

49. Cette partie de V sera donc représentée de la manière suivante, en mettant m à la place de $\mathbf{S}dm$,

$$\begin{aligned}
-f\mathbf{S}\frac{dm}{p} = &-\frac{fm}{p'}+\frac{f(\mathrm{A}+\mathrm{B}+\mathrm{C})}{p'^3}\\
&-\frac{3f(1+x)^2}{2p'^3}\left[\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}-\mathrm{C}}{2}+(\mathrm{C}-\mathrm{B})r^2+4(\mathrm{C}-\mathrm{A})s^2\right.\\
&\qquad\left.-2\mathrm{H}(r+2su)-4\mathrm{G}(s-ru)+4\mathrm{F}rs\right]\\
&-\frac{3fy^2}{2p'^3}\left[\frac{\mathrm{A}+\mathrm{C}-\mathrm{B}}{2}+(\mathrm{B}-\mathrm{C})r^2+4(\mathrm{B}-\mathrm{A})u^2\right.\\
&\qquad\left.+2\mathrm{H}(r-2su)-4\mathrm{G}ru-4\mathrm{F}(u+rs)\right]\\
&-\frac{3fz^2}{2p'^3}\left[\frac{\mathrm{B}+\mathrm{C}-\mathrm{A}}{2}+4(\mathrm{A}-\mathrm{C})s^2+4(\mathrm{A}-\mathrm{B})u^2\right.\\
&\qquad\left.+8\mathrm{H}su+4\mathrm{G}s+4\mathrm{F}u\right]\\
&-\frac{3f(1+x)y}{p'^3}\left[(\mathrm{B}-\mathrm{C})r+2(\mathrm{B}+\mathrm{C}-2\mathrm{A})su+\mathrm{H}(1-2r^2-2s^2-2u^2)\right.\\
&\qquad\left.-2\mathrm{G}(u+2rs)-2\mathrm{F}(s-2ru)\right]\\
&+\frac{3f(1+x)z}{p'^3}\left[2(\mathrm{A}-\mathrm{C})s+2(\mathrm{B}-\mathrm{A})ru+2\mathrm{H}(u-rs)\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{G}\left(1-\frac{r^2}{2}-8s^2-2u^2\right)-\mathrm{F}(r+6su)\right]\\
&+\frac{3fyz}{p'^3}\left[2(\mathrm{A}-\mathrm{B})u+2(\mathrm{A}-\mathrm{C})rs+2\mathrm{H}(s+ru)\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{G}(r-6su)+\mathrm{F}\left(1-\frac{r^2}{2}-2s^2-8u^2\right)\right].
\end{aligned}$$

Cette formule est encore susceptible de quelques réductions, à cause

de la petitesse des quantités x, y, z; mais nous avons cru devoir donner d'abord la valeur complète, pour qu'on puisse ensuite mieux voir quels sont les termes qu'on y peut négliger.

50. Il reste à examiner l'autre partie de la fonction V, laquelle doit provenir de l'action du Soleil sur la Lune. Or, en désignant par q la distance rectiligne du Soleil à chaque particule dm de la Lune, l'action directe du premier de ces deux astres sur toute la masse de l'autre donne dans la fonction V la quantité $-g\mathbf{S}\frac{dm}{q}$; et pour avoir la valeur de q il suffit de se rappeler que $x'+\xi$, $y'+\eta$, $z'+\zeta$ sont les coordonnées rectangles de chaque particule dm de la Lune par rapport aux axes fixes passant par le centre de la Terre; de sorte que, si l'on nomme X et Y les deux coordonnées du lieu du Soleil dans l'écliptique par rapport aux mêmes axes, on aura évidemment

$$q=\sqrt{(\mathrm{X}-x'-\xi)^2+(\mathrm{Y}-y'-\eta)^2+(z'+\zeta)^2}.$$

Soit R la distance du Soleil à la Terre, c'est-à-dire le rayon vecteur de son orbite, et Σ la longitude de la Terre vue du Soleil, en sorte que $\Sigma+180^\circ$ soit la longitude vraie du Soleil, on aura

$$\mathrm{X}=-\mathrm{R}\cos\Sigma,\quad \mathrm{Y}=-\mathrm{R}\sin\Sigma;$$

et ces valeurs étant substituées dans l'expression précédente de q, ainsi que celles de $x'+\xi$, $y'+\eta$, $z'+\zeta$ trouvées dans le n° 46, on aura

$$q=\sqrt{\mathrm{R}^2+2\mathrm{R}(1+x-\lambda)\cos(t-\Sigma)-2\mathrm{R}(y-\mu)\sin(t-\Sigma)+(1+x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z+\nu)^2};$$

d'où l'on déduira la valeur de $\frac{1}{q}$, et ensuite celle de $\mathbf{S}\frac{dm}{q}$ par des opérations semblables à celles des numéros précédents; mais il y a ici une remarque importante à faire.

51. Nous avons supposé jusqu'ici la Terre en repos pour n'avoir à considérer que les différents mouvements de la Lune par rapport à la Terre, lesquels sont les seuls qu'il nous importe de connaître; cette supposition est permise, mais elle demande qu'on retranche de la force directe du Soleil sur la Lune la partie employée à lui donner le mouvement qui lui est commun avec la Terre, et par lequel ces deux corps circulent autour du Soleil; or cette force est évidemment égale à l'attraction du Soleil sur la Terre; par conséquent il faudra joindre à la force $\frac{g}{q^2}$, provenant de l'action directe du Soleil sur chaque particule dm de la Lune, une force égale et directement contraire à celle du Soleil sur la Terre. Or il est visible que la force $\frac{g}{q^2}$ deviendra celle dont il s'agit, en y faisant g négatif, et en supposant que dans l'expression de q les quantités $x'+\xi$, $y'+\eta$, $z'+\zeta$ s'évanouissent vis-à-vis de X et Y, ou, ce qui revient au même, en y regardant le rayon R de l'orbite du Soleil comme infiniment grand. Donc, puisque la force $\frac{g}{q^2}$ donne dans la fonction V le terme $-g\mathbf{S}\frac{dm}{q}$, la nouvelle force dont il s'agit y donnera un autre terme égal à $g\mathrm{Q}$, en dénotant par Q ce que devient la fonction $\mathbf{S}\frac{dm}{q}$ lorsqu'on y regarde R comme infiniment grand. Mais dans cette hypothèse on a, en réduisant la valeur de $\frac{1}{q}$ en série,

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{\mathrm{R}}-\frac{(1+x-\lambda)\cos(t-\Sigma)-(y-\mu)\sin(t-\Sigma)}{\mathrm{R}^2}$$

(il est nécessaire de tenir compte du second terme, parce que le premier $\frac{1}{\mathrm{R}}$ disparaît dans les différentiations de V); multipliant donc cette quantité par dm et intégrant par rapport à la caractéristique $\mathbf{S}$, on aura, en remarquant (48) que $\mathbf{S}dm=m$, $\mathbf{S}\lambda dm=0$, $\mathbf{S}\mu dm=0$,

$$\mathrm{Q}=m\left[\frac{1}{\mathrm{R}}-\frac{(1+x)\cos(t-\Sigma)-y\sin(t-\Sigma)}{\mathrm{R}^2}\right].$$

Et la valeur exacte de la fonction V, en tant qu'elle est due à l'action du Soleil sur la Lune, sera exprimée par

$$g\left(\mathrm{Q}-\mathbf{S}\frac{dm}{q}\right).$$

52. Avant d'aller plus loin, il est bon de déterminer le rapport entre les deux constantes f et g qui expriment les forces absolues de la Terre et du Soleil à la distance égale à 1, et qui sont par conséquent proportionnelles aux masses de ces deux corps. Or ces masses sont à très-peu près, par les Théorèmes connus, en raison directe des cubes des distances moyennes de la Lune et du Soleil, et en raison inverse des carrés des temps périodiques de ces deux astres, ou bien en raison directe des carrés de leurs mouvements moyens. Donc ayant supposé la distance moyenne de la Lune à la Terre égale à 1, si l'on nomme k celle du Soleil, et qu'on désigne par n le rapport du mouvement moyen du Soleil à celui de la Lune, on aura

$$f : g = 1 : k^3 n^2,$$

et par conséquent

$$g = k^3 n^2 f.$$

Ainsi la partie de la fonction V qui dépend de l'action du Soleil sera représentée par la formule

$$f k^2 n^2 \left(Q - S \frac{dm}{q} \right).$$

53. Il ne s'agit plus que de développer la quantité $S \frac{dm}{q}$; mais j'observe d'abord que les termes provenant des quantités λ, μ, ν qui dépendent de la figure de la Lune se trouveront divisés par q'^3, en désignant par q' la valeur de q lorsqu'on y suppose ces quantités nulles, c'est-à-dire la distance rectiligne du centre de la Lune à celui du Soleil; donc ces termes seront multipliés par $\frac{f k^3 n^2}{q'^3}$, et seront par conséquent aux termes semblables provenant de l'action de la Terre sur la Lune dans le rapport de $\frac{f k^3 n^2}{q'^3}$ à $\frac{f}{p'^3}$; mais p' est à peu près égal à 1 (47) et q' est aussi à peu près égal à k, à cause du peu d'excentricité de l'orbite du Soleil et de la grandeur de la distance du Soleil vis-à-vis de celle de la Lune; d'où il s'ensuit que le rapport dont il s'agit sera à très-peu près égal à celui de n^2 à 1. Or on a par les Tables, en prenant les mouvements moyens qui

répondent à une année commune,

$$n = \frac{11^s 29^o 44' 50''}{13^{rev} 4^s 9^o 23' 5''} = \frac{359^o,7472}{4809^o,3847} = 0,074\,8010;$$

donc

$$n^2 = 0,005\,595\,20 = \frac{1}{178,724};$$

donc le rapport cherché sera à très-peu près de 1 à 179.

Je conclus de là qu'on peut négliger en toute sûreté les inégalités de l'action du Soleil sur la Lune dues à la non-sphéricité de cette Planète vis-à-vis de celles de l'action de la Terre sur la Lune dues à la même cause. Par conséquent on pourra substituer partout q' à la place de q, ce qui donnera

$$S \frac{dm}{q} = S \frac{dm}{q'} = \frac{m}{q'},$$

q' étant la valeur de q lorsque λ, μ, ν sont nulles, c'est-à-dire

$$q' = \sqrt{R^2 + 2R(1+x)\cos(t-\Sigma) - 2Ry\sin(t-\Sigma) + (1+x)^2 + y^2 + z^2}.$$

54. Rassemblant ce que nous venons de trouver depuis le n° 45, on aura la valeur complète de la fonction V, laquelle sera composée de deux parties, l'une V′ indépendante de la figure de la Lune, et qui se trouvera toute multipliée par la masse m de cette Planète, l'autre V″ due entièrement à la non-sphéricité de la Lune, et dont chaque terme sera multiplié par une des six constantes A, B, C, F, G, H, qui dépendent uniquement de la figure de la Lune (21).

La première partie sera

$$V' = -fm\left[\frac{1}{p'} + \frac{n^2 k^3}{q'} - \frac{n^2 k^3}{R} + n^2 k^3 \frac{(1+x)\cos(t-\Sigma) - y\sin(t-\Sigma)}{R^2}\right],$$

et, à cause de

$$p'^2 = (1+x)^2 + y^2 + z^2,$$

la seconde partie sera

$$V'' = \frac{f(A+B+C)}{4p^{\frac{3}{2}}}$$
$$+\frac{3f(1+x)^2}{2p^{\frac{5}{2}}}\left[C-(C-B)r^2-4(C-A)s^2+2H(r+2su)+4G(s-ru)-4Frs\right]$$
$$-\frac{3f(1+x)y}{p^{\frac{5}{2}}}\left[(B-C)r+2(B+C-2A)su+H(1-2r^2-2s^2-2u^2)-2G(u+2rs)-2F(s-2ru)\right]$$
$$+\frac{3f(1+x)z}{p^{\frac{5}{2}}}\left[2(A-C)s+2(B-A)ru+2H(u-rs)+G\left(1-\frac{r^2}{2}-8s^2-2u^2\right)-F(r+6su)\right]$$
$$+\frac{3fy^2}{2p^{\frac{5}{2}}}\left[B-(B-C)r^2-4(B-A)u^2-2H(r-2su)+4Gru+4F(u+rs)\right]$$
$$+\frac{3fz^2}{2p^{\frac{5}{2}}}\left[A-4(A-C)s^2-4(A-B)u^2-8Hsu-4Gs-4Fu\right]$$
$$+\frac{3fyz}{p^{\frac{5}{2}}}\left[2(A-B)u+2(A-C)rs+2H(s+ru)+G(r-6su)+F\left(1-\frac{r^2}{2}-2s^2-8u^2\right)\right].$$

55. Ayant donc par ces formules les valeurs de V' et de V'', ainsi que celles de T' et de T'' par les formules des n^{os} 36 et 43, on aura les valeurs complètes de $T = T' + T''$ et de $V = V' + V''$ en fonctions des six variables x, y, z, r, s, u, dont les trois premières déterminent le mouvement du centre de la Lune autour de la Terre, et dont les trois dernières déterminent le mouvement de cette Planète autour de son centre de gravité; et l'on aura par rapport à chacune de ces variables une équation de la forme

$$d\frac{\delta T}{\delta dx} - \frac{\delta T}{\delta x} + \frac{\delta V}{\delta x} = 0,$$

en faisant varier séparément dans les fonctions T et V les quantités $x, dx, y, dy, z, dz, r, dr, \ldots$, et marquant ces variations par la caractéristique δ.

56. Comme T' et V' sont des fonctions de x, y, z sans r, s, u, et que T'' est une fonction de r, s, u sans x, y, z, il est clair que les trois équations dues aux variations de x, y, z et de leurs différentielles seront de la forme

$$d\frac{\delta T'}{\delta dx} - \frac{\delta T'}{\delta x} + \frac{\delta V'}{\delta x} + \frac{\delta V''}{\delta x} = 0,$$
$$d\frac{\delta T'}{\delta dy} - \frac{\delta T'}{\delta y} + \frac{\delta V'}{\delta y} + \frac{\delta V''}{\delta y} = 0,$$
$$d\frac{\delta T'}{\delta dz} - \frac{\delta T'}{\delta z} + \frac{\delta V'}{\delta z} + \frac{\delta V''}{\delta z} = 0,$$

et que les trois autres provenant des variations de r, s, u et de leurs différentielles seront de la forme

$$d\frac{\delta T''}{\delta dr} - \frac{\delta T''}{\delta r} + \frac{\delta V''}{\delta r} = 0,$$
$$d\frac{\delta T''}{\delta ds} - \frac{\delta T''}{\delta s} + \frac{\delta V''}{\delta s} = 0,$$
$$d\frac{\delta T''}{\delta du} - \frac{\delta T''}{\delta u} + \frac{\delta V''}{\delta u} = 0.$$

Les trois premières serviront donc à déterminer x, y, z, c'est-à-dire le mouvement de la Lune autour de la Terre, et les trois dernières serviront à déterminer r, s, u, et par conséquent à connaître la rotation de cette Planète.

57. Puisque

$$T' = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt} - y\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} + 1 + x\right)^2 + \frac{dz^2}{dt^2}\right]$$

par le n° 36, on aura par la différentiation

$$\frac{\delta T'}{\delta dx} = \frac{m}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - y\right), \qquad \frac{\delta T'}{\delta x} = m\left(\frac{dy}{dt} + 1 + x\right),$$
$$\frac{\delta T'}{\delta dy} = \frac{m}{dt}\left(\frac{dy}{dt} + 1 + x\right), \qquad \frac{\delta T'}{\delta y} = -m\left(\frac{dx}{dt} - y\right),$$
$$\frac{\delta T'}{\delta dz} = m\frac{dz}{dt^2}, \qquad \frac{\delta T'}{\delta z} = 0;$$

ensuite ayant

$$V' = -fm\left[\frac{1}{p'} + \frac{n^2h^2}{q'} - \frac{n^2h^2}{R} + n^2h^2\frac{(1+x)\cos(t-\Sigma) - y\sin(t-\Sigma)}{R^2}\right],$$

où

$$p' = \sqrt{(1+x)^2 + y^2 + z^2}$$

et

$$q' = \sqrt{R^2 + 2R(1+x)\cos(t-\Sigma) - 2Ry\sin(t-\Sigma) + p'^2},$$

on trouvera par la différentiation

$$\frac{\partial V'}{\partial x} = fm\left[\frac{1+x}{p'^3} + n^2h^2\left(\frac{R\cos(t-\Sigma)+1+x}{q'^3} - \frac{\cos(t-\Sigma)}{R^2}\right)\right],$$

$$\frac{\partial V'}{\partial y} = fm\left[\frac{y}{p'^3} + n^2h^2\left(\frac{-R\sin(t-\Sigma)+y}{q'^3} + \frac{\sin(t-\Sigma)}{R^2}\right)\right],$$

$$\frac{\partial V'}{\partial z} = fm\left(\frac{z}{p'^3} + n^2h^2\frac{z}{q'^3}\right).$$

58. Substituant ces valeurs dans les trois premières des équations du n° 56 et divisant par m, on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} - 1 - x + f(1+x)\left(\frac{1}{p'^3} + \frac{n^2h^2}{q'^3}\right) + fn^2h^2\left(\frac{R}{q'^3} - \frac{1}{R^2}\right)\cos(t-\Sigma) + \frac{1}{m}\frac{\partial V''}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2dx}{dt} - y + fy\left(\frac{1}{p'^3} + \frac{n^2h^2}{q'^3}\right) - fn^2h^2\left(\frac{R}{q'^3} - \frac{1}{R^2}\right)\sin(t-\Sigma) + \frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + fz\left(\frac{1}{p'^3} + \frac{n^2h^2}{q'^3}\right) + \frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial z} = 0.$$

Ce sont les équations qui doivent servir à déterminer l'orbite de la Lune, et elles s'accordent avec celles de M. Euler, dans sa *Nouvelle Théorie de la Lune*, aux quantités $\frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial x}$, $\frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial y}$, $\frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial z}$ près, lesquelles résultent de la non-sphéricité de cette Planète (54) et que M. Euler a négligées.

59. Pour faire usage de ces équations, on commencera par réduire en série les quantités irrationnelles p' et q' ainsi que leurs puissances, ce qui n'a aucune difficulté à cause de la petitesse des quantités x, y, z et $\frac{1}{R}$ vis-à-vis de l'unité; ensuite on intégrera par les méthodes connues; l'Ouvrage cité de M. Euler ne laisse rien à désirer sur cet objet, du moins en tant qu'on fait abstraction de la figure de la Lune; ainsi nous pourrons prendre les valeurs de x, y, z trouvées dans cet Ouvrage, pour celles qui satisfont aux trois équations précédentes dans le cas où l'on néglige les quantités extrêmement petites $\frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial x}$, $\frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial y}$, $\frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial z}$, et il ne restera qu'à chercher l'effet de ces quantités.

Voici ces valeurs, dans lesquelles je n'ai conservé que les termes dont les coefficients sont au-dessus de $\frac{1}{1000}$, et où j'ai nommé α, β, γ, ε les arguments que M. Euler désigne par q, r, p, t, c'est-à-dire l'anomalie moyenne de la Lune, l'argument moyen de sa latitude, la distance moyenne de la Lune au Soleil, et l'anomalie moyenne du Soleil,

$$x = -0{,}003\,587\,1 - 0{,}006\,374\,6.\cos 2\gamma + 0{,}054\,500\,0.\cos\alpha + 0{,}001\,513\,9.\cos 2\alpha + 0{,}010\,167\,5.\cos(2\gamma-\alpha) + 0{,}001\,987\,0.\cos 2\beta,$$

$$y = 0{,}010\,330\,4.\sin 2\gamma - 0{,}109\,467\,8.\sin\alpha - 0{,}022\,260\,1.\sin(2\gamma-\alpha) + 0{,}003\,164\,3.\sin\varepsilon - 0{,}001\,980\,3.\sin 2\beta,$$

$$z = 0{,}089\,640\,0.\sin\beta + 0{,}003\,326\,5.\sin(2\gamma-\beta) - 0{,}002\,466\,9.\sin(\alpha+\beta) - 0{,}007\,246\,0.\sin(\alpha-\beta) - 0{,}001\,178\,7.\sin(2\gamma-\alpha-\beta).$$

Les angles α, β, γ, ε croissent proportionnellement au temps, en sorte que $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{d\varepsilon}{dt}$ sont des quantités constantes, et égales aux rapports des mouvements moyens de l'anomalie de la Lune, de son argument de latitude, de sa distance au Soleil, et de l'anomalie du Soleil, au mouvement moyen de la longitude de la Lune, à cause que nous exprimons le

temps t par ce dernier mouvement (34); ainsi l'on aura par les Tables de Mayer, en prenant les mouvements moyens qui répondent à une année Julienne,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{13^{\text{rev}}2^{\text{s}}28^{\circ}43'15''}{13^{\text{rev}}4^{\text{s}}9^{\circ}23'5''} = \frac{476872}{480938} = 0{,}991544,$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{13^{\text{rev}}4^{\text{s}}28^{\circ}42'48''}{13^{\text{rev}}4^{\text{s}}9^{\circ}23'5''} = \frac{482871}{480938} = 1{,}004018,$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{12^{\text{rev}}4^{\text{s}}9^{\circ}37'24''}{13^{\text{rev}}4^{\text{s}}9^{\circ}23'5''} = \frac{444962}{480938} = 0{,}925196,$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{11^{\text{s}}29^{\circ}44'35''}{13^{\text{rev}}4^{\text{s}}9^{\circ}23'5''} = \frac{35974}{480938} = 0{,}074800.$$

60. Avant de quitter ces équations, il est bon de déterminer par leur moyen la constante f qui exprime l'attraction absolue de la Terre, et qui multiplie aussi tous les termes de la quantité V''.

Pour cela il suffit de considérer la première équation, laquelle devant avoir lieu dans l'hypothèse que x, y, z soient des quantités assez petites, il faudra aussi qu'elle ait lieu, à très-peu près, en supposant ces quantités nulles; or dans ce cas, si l'on néglige les termes venant du Soleil et affectés du coefficient très-petit n^2, ainsi que ceux qui proviendraient de la non-sphéricité de la Lune, le premier membre de l'équation dont il s'agit se réduira à $-1+f$, à cause que p' devient égal à 1; par conséquent on aura à très-peu près $f=1$.

Si l'on veut aussi avoir égard aux termes dus au Soleil, on considérera qu'à cause de R très-grand, on a à peu près

$$\frac{1}{q'^3} = \frac{1}{R^3} - 3\frac{(1+x)\cos(t-\Sigma) - y\sin(t-\Sigma)}{R^4};$$

substituant cette valeur, mettant pour R sa valeur moyenne k, et ne retenant que les termes tout constants, le premier membre de la même équation se réduira à

$$-1+f(1+n^2)-\frac{3fn^2}{2},$$

savoir

$$-1+f\left(1-\frac{n^2}{2}\right),$$

ce qui étant égalé à zéro donnera

$$f = \frac{1}{1-\frac{n^2}{2}},$$

quantité très-peu différente de l'unité, à cause de $n^2 = \frac{1}{179}$ environ (53).

61. A l'égard des constantes A, B, C, F, G, H, on ne saurait les déterminer sans connaître la figure et la constitution intérieure de la Lune.

En général, puisque (21)

$$A = \mathbf{S}(a^2+b^2)\,dm, \quad B = \mathbf{S}(a^2+c^2)\,dm, \quad C = \mathbf{S}(b^2+c^2)\,dm,$$
$$F = \mathbf{S}bc\,dm, \qquad G = \mathbf{S}ac\,dm, \qquad H = \mathbf{S}ab\,dm,$$

il est visible que les trois constantes A, B, C ne sont autre chose que les *moments d'inertie* de la masse de la Lune autour des axes des coordonnées c, b, a, c'est-à-dire autour de son axe de rotation, du diamètre de son équateur, perpendiculaire au premier méridien, et du diamètre de l'équateur qui est dans ce méridien; et que les trois autres constantes F, G, H sont proportionnelles aux sommes des moments des forces centrifuges par rapport à ces mêmes axes, en sorte qu'en supposant ces dernières constantes nulles on a les conditions nécessaires pour que les trois axes dont il s'agit soient des axes naturels de rotation. Cela est assez connu par la Théorie des axes de rotation, pour que nous soyons dispensé d'entrer là-dessus dans aucun détail.

Si la Lune était homogène et sphérique, il est clair qu'on aurait

$$A = B = C, \quad \text{et} \quad F = 0, \quad G = 0, \quad H = 0;$$

et la même chose aura lieu aussi en supposant la Lune composée de couches sphériques de différentes densités; ce n'est donc qu'autant que la figure de la Lune et celle de ses couches s'écartent de la sphérique, que les constantes A, B, C peuvent être inégales, et les constantes F, G, H, différentes de zéro.

Soient R la distance d'une particule quelconque dm au centre de la

Lune, P l'angle du rayon R avec le plan des a et b, Q l'angle de la projection de R sur ce plan avec l'axe des a, on aura

$$c = \mathrm{R}\sin\mathrm{P}, \quad b = \mathrm{R}\cos\mathrm{P}\sin\mathrm{Q}, \quad a = \mathrm{R}\cos\mathrm{P}\cos\mathrm{Q};$$

de plus on aura

$$\mathrm{R}^2\cos\mathrm{P}\,d\mathrm{P}\,d\mathrm{Q}\,d\mathrm{R}$$

pour le volume de la particule dm; de sorte qu'en nommant D la densité de cette particule on aura

$$dm = \mathrm{D}\mathrm{R}^2 d\mathrm{R}\cos\mathrm{P}\,d\mathrm{P}\,d\mathrm{Q};$$

ainsi l'on aura

$$m = \mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}^2 d\mathrm{R}\, d\sin\mathrm{P}\, d\mathrm{Q};$$

$$\mathrm{A} = \mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}^4 d\mathrm{R}\cos^2\mathrm{P}\, d\sin\mathrm{P}\, d\mathrm{Q},$$

$$\mathrm{B} = \mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}^4 d\mathrm{R}(\sin^2\mathrm{P} + \cos^2\mathrm{P}\cos^2\mathrm{Q})\, d\sin\mathrm{P}\, d\mathrm{Q},$$

$$\mathrm{C} = \mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}^4 d\mathrm{R}(\sin^2\mathrm{P} + \cos^2\mathrm{P}\sin^2\mathrm{Q})\, d\sin\mathrm{P}\, d\mathrm{Q};$$

$$\mathrm{F} = \mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}^4 d\mathrm{R}\sin\mathrm{P}\cos\mathrm{P}\sin\mathrm{Q}\, d\sin\mathrm{P}\, d\mathrm{Q},$$

$$\mathrm{G} = \mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}^4 d\mathrm{R}\sin\mathrm{P}\cos\mathrm{P}\cos\mathrm{Q}\, d\sin\mathrm{P}\, d\mathrm{Q},$$

$$\mathrm{H} = \mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}^4 d\mathrm{R}\cos^2\mathrm{P}\sin\mathrm{Q}\cos\mathrm{Q}\, d\sin\mathrm{P}\, d\mathrm{Q}.$$

Il y a ici trois intégrations consécutives à exécuter, la première par rapport à R, et l'on prendra cette intégrale depuis $\mathrm{R} = 0$ jusqu'à $\mathrm{R} = \mathrm{R}'$ (en nommant R' la valeur de R à la surface de la Lune); ayant ensuite substitué pour R' sa valeur en P et Q donnée par la figure de la Lune, on exécutera les deux autres intégrations, l'une par rapport à P depuis $\mathrm{P} = -90°$ jusqu'à $\mathrm{P} = 90°$, l'autre par rapport à Q depuis $\mathrm{Q} = 0$ jusqu'à $\mathrm{Q} = 360°$, et comme ces intégrations sont indépendantes, il sera libre de commencer par celle qu'on voudra.

La densité D doit être donnée en fonction de R, P et Q, et si elle est constante, ou du moins constante dans chaque rayon, en sorte que D ne contienne point R, il est clair qu'on pourra exécuter d'abord, en général,

la première intégration, et il viendra

$$m = \tfrac{1}{3}\mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}'^3 d\sin\mathrm{P}\, d\mathrm{Q};$$

$$\mathrm{A} = \tfrac{1}{5}\mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}'^5\cos^2\mathrm{P}\, d\sin\mathrm{P}\, d\mathrm{Q},$$

$$\mathrm{B} = \tfrac{1}{5}\mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}'^5(\sin^2\mathrm{P} + \cos^2\mathrm{P}\cos^2\mathrm{Q})\, d\sin\mathrm{P}\, d\mathrm{Q},$$

$$\mathrm{C} = \tfrac{1}{5}\mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}'^5(\sin^2\mathrm{P} + \cos^2\mathrm{P}\sin^2\mathrm{Q})\, d\sin\mathrm{P}\, d\mathrm{Q};$$

$$\mathrm{F} = -\tfrac{1}{5}\mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}'^5\sin\mathrm{P}\cos\mathrm{P}\, d\sin\mathrm{P}\, d\cos\mathrm{Q},$$

$$\mathrm{G} = +\tfrac{1}{5}\mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}'^5\sin\mathrm{P}\cos\mathrm{P}\, d\sin\mathrm{P}\, d\sin\mathrm{Q},$$

$$\mathrm{il} = -\tfrac{1}{5\times 4}\mathbf{S}\mathrm{D}\mathrm{R}'^5\cos^2\mathrm{P}\, d\sin\mathrm{P}\, d\cos 2\mathrm{Q}.$$

62. La supposition la plus simple et la plus naturelle qu'on puisse faire à l'égard de la figure de la Lune est de la regarder comme un sphéroïde elliptique homogène, dont les méridiens et l'équateur soient des ellipses telles, que l'un des axes de l'équateur passe par le premier méridien, en sorte qu'il en résulte une figure elliptique élevée sous l'équateur et allongée vers la Terre, cette figure étant en effet celle que la Lune aurait dû prendre naturellement en vertu de sa rotation et de l'action de la Terre, si cette Planète avait été primitivement fluide.

Qu'on désigne par a', b', c' les coordonnées a, b, c pour la surface de la Lune, et qu'on nomme f, g, h les trois demi-axes de l'ellipsoïde, lesquels sont en même temps les axes des coordonnées a, b, c, en sorte que h soit le demi-axe proprement dit de la Lune, f le demi-axe de l'équateur qui passe par le premier méridien, et g l'autre demi-axe de l'équateur; on aura pour l'équation d'un pareil sphéroïde, entre les coordonnées a', b', c', celle-ci

$$\frac{a'^2}{f^2} + \frac{b'^2}{g^2} + \frac{c'^2}{h^2} = 1.$$

Or, si R′ est la valeur de R à la surface, on aura pour a', b', c' les mêmes expressions que pour a, b, c, en y changeant seulement R en R′; donc, substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on en tirera

$$R' = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2 P}{h^2} + \frac{\cos^2 P \sin^2 Q}{g^2} + \frac{\cos^2 P \cos^2 Q}{f^2}}}.$$

Telle est la valeur de R′ qu'il faudrait substituer dans les formules précédentes, pour pouvoir procéder ensuite aux intégrations relatives à P et Q; mais les intégrations générales étant sujettes à trop de difficultés, nous nous contenterons d'examiner le cas où le sphéroïde est à très-peu près sphérique, en sorte que les différences entre les trois demi-axes h, g, f soient très-petites; ce qui paraît être le cas de la Lune.

63. Nous ferons donc

$$\frac{f}{h} = 1 + e, \quad \frac{g}{h} = 1 + i,$$

e et i étant deux constantes très-petites, qui expriment les ellipticités du premier méridien de la Lune et de celui qui le coupe à angles droits, et dont nous négligerons les produits et les puissances qui passent la première dimension.

Substituant donc ces valeurs dans l'expression précédente de R′, on aura à très-peu près

$$R' = h(1 + e\cos^2 P \cos^2 Q + i\cos^2 P \sin^2 Q);$$

donc

$$R'^3 = h^3(1 + 3e\cos^2 P \cos^2 Q + 3i\cos^2 P \sin^2 Q),$$

$$R'^5 = h^5(1 + 5e\cos^2 P \cos^2 Q + 5i\cos^2 P \sin^2 Q);$$

et faisant ces dernières substitutions dans les expressions des quantités m, A, B, C, on trouvera après les intégrations, qui n'ont aucune difficulté en supposant la densité D constante,

$$m = \frac{2Dh^3 \times 360^\circ}{3}(1 + e + i);$$

$$A = \frac{4Dh^3 \times 360^\circ}{3.5}(1 + 2e + 2i),$$

$$B = \frac{4Dh^3 \times 360^\circ}{3.5}(1 + 2e + i),$$

$$C = \frac{4Dh^3 \times 360^\circ}{3.5}(1 + e + 2i);$$

donc

$$A = \frac{2h^2 m}{5}(1 + e + i),$$

$$B = \frac{2h^2 m}{5}(1 + e),$$

$$C = \frac{2h^2 m}{5}(1 + i),$$

m étant la masse entière de la Lune, et h son demi-axe.

A l'égard des constantes F, G, H on les trouvera égales à zéro; en sorte que les trois axes du sphéroïde seront des axes naturels de rotation.

64. Voyons maintenant quelles sont les forces qui pourraient donner à la Lune supposée fluide une figure telle que celle que nous venons d'examiner. Dénotons par α, β, γ les forces qui agissent sur chaque particule dm suivant les trois coordonnées a, b, c de cette particule; on sait, par la Théorie de l'équilibre des fluides, que l'équilibre aura lieu dans toute la masse du fluide, si les quantités α, β, γ sont des fonctions de a, b, c, telles que

$$\alpha da + \beta db + \gamma dc$$

soit une quantité intégrable; et alors l'intégrale de cette quantité, égalée à une constante, sera l'équation de la surface extérieure, en supposant que a, b, c deviennent a', b', c', que nous prenons pour les coordonnées de la surface. Donc, si α', β', γ' sont ce que deviennent les fonctions α,

β, γ lorsque a, b, c y deviennent a', b', c', on aura

$$\alpha' da' + \beta' db' + \gamma' dc' = 0$$

pour l'équation différentielle de la surface du fluide. Mais nous supposons que cette surface est représentée (62) par l'équation

$$\frac{a'^2}{f^2} + \frac{b'^2}{g^2} + \frac{c'^2}{h^2} = 1,$$

dont la différentielle est

$$\frac{a'da'}{f^2} + \frac{b'db'}{g^2} + \frac{c'dc'}{h^2} = 0;$$

donc il faudra que cette équation soit identique avec la précédente, et par conséquent que les quantités α', β', γ' soient respectivement proportionnelles à $\frac{a'}{f^2}$, $\frac{b'}{g^2}$, $\frac{c'}{h^2}$; donc, en général, les forces α, β, γ devront être proportionnelles respectivement à $\frac{a}{f^2}$, $\frac{b}{g^2}$, $\frac{c}{h^2}$. Donc, faisant successivement $a=f$, $b=g$, $c=h$, on aura les forces qui doivent agir aux extrémités des trois axes de l'ellipsoïde, lesquelles devront par conséquent être proportionnelles à $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{h}$, c'est-à-dire en raison réciproque de ces demi-axes; donc aussi les trois demi-axes de l'ellipsoïde devront être réciproquement proportionnels aux forces qui agissent à leurs extrémités.

65. Pour appliquer cette Théorie à la Lune, il ne s'agit que de déterminer les forces qui peuvent agir sur chacune des particules de sa masse; or ces forces sont : 1° l'attraction de toute la masse de la Lune; 2° l'attraction de la Terre; 3° la force centrifuge provenant du mouvement de la Lune.

Quant à la première de ces forces, en supposant la densité égale à 1, et la force attractive de chaque particule égale à sa masse divisée par le carré de la distance, on trouve, par les formules que j'ai données dans

mon *Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes elliptiques*, année 1773 (*), que l'attraction d'un sphéroïde représenté par l'équation

$$z^2 + mx^2 + ny^2 = k,$$

sur un point quelconque pris dans l'intérieur de ce sphéroïde et déterminé par les coordonnées a, b, c parallèles à x, y, z, se réduit à trois forces dirigées suivant a, b, c, et exprimées par $2mBa$, $2nFb$, $2Gc$; les quantités B, F, G étant des fonctions de m et n, telles qu'en faisant

$$\mu^2 = \frac{1-m}{m}, \quad \nu = n - m,$$

$$Q = \frac{2(1+\mu^2)}{m\mu^3}\operatorname{arc\,tang}\mu - \frac{2}{m\mu^2}, \quad Q' = \frac{2}{m\mu^2} - \frac{2\operatorname{arc\,tang}\mu}{m\mu^3},$$

on ait

$$B = \left(\frac{1}{2}Q + \frac{\nu}{8}\frac{dQ}{dm} + \frac{3\nu^2}{32}\frac{1}{2}\frac{d^2Q}{dm^2} + \ldots\right)180^\circ,$$

$$F = \left(\frac{1}{2}Q + \frac{3\nu}{8}\frac{dQ}{dm} + \frac{10\nu^2}{32}\frac{1}{2}\frac{d^2Q}{dm^2} + \ldots\right)180^\circ,$$

$$G = \left(Q' + \frac{\nu}{2}\frac{dQ'}{dm} + \frac{3\nu^2}{8}\frac{1}{2}\frac{d^2Q'}{dm^2} + \ldots\right)180^\circ.$$

Or l'équation du sphéroïde du numéro précédent étant

$$\frac{x^2}{f^2} + \frac{y^2}{g^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1$$

(en changeant a', b', c' en x, y, z), on aura par la comparaison de cette équation avec la précédente

$$m = \frac{h^2}{f^2}, \quad n = \frac{h^2}{g^2},$$

et mettant pour $\frac{f}{h}$, $\frac{g}{h}$ leurs valeurs $1+e$, $1+i$ (63), e et i étant des quantités très-petites, on aura

$$m = 1 - 2e, \quad n = 1 - 2i;$$

donc

$$\mu^2 = 2e, \quad \nu = 2(e - i);$$

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. III, p. 640.

donc, puisque μ est une quantité fort petite, on aura

$$\text{arc tang}\,\mu = \mu - \frac{\mu^3}{3} + \frac{\mu^5}{5} - \dots,$$

et de là

$$Q = \frac{4}{3m}\left(1 - \frac{\mu^2}{5}\right) = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{8e}{5}\right), \quad Q' = \frac{2}{m}\left(\frac{1}{3} - \frac{\mu^2}{5}\right) = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{4e}{5}\right);$$

donc

$$\frac{dQ}{dm} = -\frac{1}{2}\frac{dQ}{de} = -\frac{16}{3.5}, \quad \frac{dQ'}{dm} = -\frac{1}{2}\frac{dQ'}{de} = -\frac{4}{3.5};$$

donc

$$B = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{6e}{5} + \frac{2i}{5}\right)180^\circ, \quad F = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{2e}{5} + \frac{6i}{5}\right)180^\circ, \quad G = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{2e}{5} + \frac{2i}{5}\right)180^\circ.$$

Donc enfin les forces suivant a, b, c seront représentées par les formules

$$\frac{2a}{3}\left(1 - \frac{4e}{5} + \frac{2i}{5}\right)360^\circ, \quad \frac{2b}{3}\left(1 + \frac{2e}{5} - \frac{4i}{5}\right)360^\circ, \quad \frac{2c}{3}\left(1 + \frac{2e}{5} + \frac{2i}{5}\right)360^\circ,$$

et si l'on voulait que la densité du sphéroïde fût exprimée, en général, par D, il n'y aurait qu'à multiplier ces mêmes expressions par D. Or on a trouvé plus haut (63) que la masse m d'un pareil sphéroïde est exprimée par

$$\frac{2\mathrm{D}h^3}{3}(1 + e + i)360^\circ;$$

donc, multipliant les valeurs précédentes par

$$\frac{3m}{2\mathrm{D}h^3(1 + e + i)360^\circ},$$

on aura, en général, pour les forces qui agissent suivant a, b, c sur un point quelconque pris dans l'intérieur de la Lune et déterminé par les coordonnées a, b, c, ces expressions

$$\frac{m}{h^3}\left(1 - \frac{9e}{5} - \frac{3i}{5}\right)a, \quad \frac{m}{h^3}\left(1 - \frac{3e}{5} - \frac{9i}{5}\right)b, \quad \frac{m}{h^3}\left(1 - \frac{3e}{5} - \frac{3i}{5}\right)c,$$

m étant la masse totale de la Lune et h son demi-axe.

66. Pour déterminer les autres forces venant de l'attraction de la Terre et des forces centrifuges de la Lune, nous ferons abstraction des inclinaisons de l'orbite de cette Planète et de son équateur sur l'écliptique, ainsi que des inégalités de ses mouvements périodiques et de rotation; moyennant quoi l'axe des coordonnées a, c'est-à-dire le demi-axe f de l'équateur étant prolongé passera toujours par la Terre; en sorte que chaque point de la Lune répondant aux coordonnées a, b, c décrira autour de l'axe de l'écliptique un cercle dont le rayon sera $\sqrt{(1+a)^2+b^2}$, et avec une vitesse angulaire égale à 1, puisque nous avons pris la distance moyenne du centre de la Lune à la Terre pour l'unité, et l'angle du mouvement moyen de la Lune pour représenter le temps. Donc cette particule aura une force centrifuge pour s'éloigner de l'axe dont il s'agit, égale à $\sqrt{(1+a)^2+b^2}$, laquelle donnera dans la direction de la ligne a la force $-1-a$, et dans la direction de la ligne b la force $-b$. Ensuite nommant M la masse de la Terre, et exprimant l'attraction de la Terre par sa masse divisée par le carré de la distance, on aura

$$\frac{\mathrm{M}}{(1+a)^2+b^2+c^2}$$

pour la force avec laquelle la même particule tend vers le centre de la Terre, et qui donnera par la décomposition une force suivant a égale à

$$\frac{\mathrm{M}(1+a)}{\left[(1+a)^2+b^2+c^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

une force suivant b égale à

$$\frac{\mathrm{M}b}{\left[(1+a)^2+b^2+c^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

et une force suivant c égale à

$$\frac{\mathrm{M}c}{\left[(1+a)^2+b^2+c^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Donc chaque particule de la Lune répondant aux coordonnées a, b, c se

trouvera soumise à trois forces, l'une suivant a et égale à

$$\frac{M(1+a)}{[(1+a)^2+b^2+c^2]^{\frac{3}{2}}}-1-a,$$

l'autre suivant b et égale à

$$\frac{Mb}{[(1+a)^2+b^2+c^2]^{\frac{3}{2}}}-b,$$

la troisième suivant c et égale à

$$\frac{Mc}{[(1+a)^2+b^2+c^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Or il faut que ces forces se contre-balancent, et soient par conséquent nulles dans le centre de la Lune, où $a=0$, $b=0$, $c=0$; donc on aura $M-1=0$, savoir $M=1$; en sorte que la masse de la Terre devra être prise pour l'unité par rapport à la masse m de la Lune. Faisant donc $M=1$, et regardant a, b, c comme des quantités très-petites, les trois forces précédentes deviendront $-3a$ suivant a, o suivant b, et c suivant c.

67. Joignant ces forces à celles que nous avons trouvées plus haut, on aura, pour chaque particule de la Lune dont a, b, c sont les coordonnées, trois forces dirigées suivant a, b, c et exprimées par ces formules

$$\frac{m}{h^3}\left(1-\frac{9e}{5}-\frac{3i}{5}\right)a-3a,\quad \frac{m}{h^3}\left(1-\frac{3e}{5}-\frac{9i}{5}\right)b,\quad \frac{m}{h^3}\left(1-\frac{3e}{5}-\frac{3i}{5}\right)c+c,$$

lesquelles ont, comme on voit, la forme requise pour l'équilibre d'un sphéroïde elliptique. Il ne s'agira donc que de faire en sorte que ces forces soient proportionnelles à $\frac{a}{f^2}$, $\frac{b}{g^2}$, $\frac{c}{h^2}$ (64), ou bien, à cause de

$$f=h(1+e)\quad\text{et}\quad g=h(1+i),$$

proportionnelles à

$$\frac{a}{h^2}(1-2e),\quad \frac{b}{h^2}(1-2i),\quad \frac{c}{h^2};$$

ce qui donnera ces deux équations

$$\frac{\frac{m}{h^3}\left(1-\frac{9e}{5}-\frac{3i}{5}\right)-3}{\frac{m}{h^3}\left(1-\frac{3e}{5}-\frac{3i}{5}\right)+1}=1-2e,\qquad \frac{\frac{m}{h^3}\left(1-\frac{3e}{5}-\frac{9i}{5}\right)}{\frac{m}{h^3}\left(1-\frac{3e}{5}-\frac{3i}{5}\right)+1}=1-2i,$$

lesquelles se réduisent à

$$\frac{m}{h^3}\frac{4e}{5}=4-2e,\quad \frac{m}{h^3}\frac{4i}{5}=1-2i;$$

d'où l'on tire

$$e=\frac{2}{1+\frac{2m}{5h^3}},\quad i=\frac{1}{2+\frac{4m}{5h^3}}.$$

Mais h étant le demi-axe de la Lune exprimé en parties de sa distance moyenne de la Terre, et m la masse de la Lune exprimée en parties de celle de la Terre, il est clair que $\frac{m}{h^3}$ sera un nombre très-grand, et qu'ainsi l'on aura sans erreur sensible

$$e=\frac{5h^3}{m},\quad i=\frac{5h^3}{4m}.$$

68. La valeur de h est assez bien connue, étant égale au sinus du demi-diamètre apparent et moyen de la Lune, lequel est de $15'45''$; donc substituant pour h la valeur de $\sin(15'45'')$, on aura

$$e=\frac{0{,}000000\,4808}{m},\quad i=\frac{0{,}000000\,1202}{m}.$$

69. A l'égard de la valeur de m, il n'y a encore rien de bien décidé; on n'a pu la déduire jusqu'ici que du rapport entre les forces de la Lune et du Soleil pour produire les marées ou la précession des équinoxes. Ces forces sont proportionnelles aux masses de la Lune et du Soleil divisées respectivement par les cubes de leurs distances à la Terre; par conséquent le rapport dont il s'agit sera composé de la raison des masses de la Lune et de la Terre, et de la raison des masses de la Terre et du Soleil divisées respectivement par les cubes des distances de la Terre à la Lune

et du Soleil à la Terre; mais cette dernière raison est égale à celle des carrés des vitesses angulaires moyennes de la Lune et du Soleil autour de la Terre; donc si l'on exprime par 1 ; n le rapport de ces vitesses ou des mouvements moyens de ces deux Planètes, on aura $\frac{m}{n^2}$ pour le rapport des forces en question de la Lune et du Soleil, lequel, à cause de $n^2 = \frac{1}{178}$ à très-peu près, devient égal à $178m$.

Or Newton a trouvé, par quelques phénomènes de la hauteur des marées, ce rapport égal à $4\frac{1}{2}$, ce qui donne $m = \frac{9}{356} = \frac{1}{39}$ à très-peu près; mais M. Daniel Bernoulli a trouvé, par quelques observations des marées qu'il croit plus exactes que celles de Newton, le même rapport égal à $2\frac{1}{2}$, ce qui donne $m = \frac{5}{356} = \frac{1}{71}$ à peu près. M. d'Alembert, d'après les formules de la précession des équinoxes et de la nutation de l'axe de la Terre, fixe ce rapport à $2\frac{1}{3}$ en supposant la nutation totale de 18″, ce qui donne $m = \frac{7}{534} = \frac{1}{76}$ à peu près; mais il observe en même temps que la valeur de ce rapport peut varier beaucoup en supposant une erreur de quelques secondes dans la quantité de la nutation. (*Voyez* la deuxième Partie des *Recherches sur le Système du monde*, page 182.)

Au reste comme le rapport du diamètre de la Lune à celui de la Terre est égal à $\frac{3}{11}$, en nommant D celui de leurs densités, on aura, en regardant ces deux corps comme sphériques, ou à très-peu près sphériques,

$$m = \left(\frac{3}{11}\right)^3 \mathrm{D} = 0{,}020285\,5\,\mathrm{D};$$

en sorte qu'en supposant les densités égales et par conséquent D = 1, on aura à très-peu près $m = \frac{1}{50}$, valeur qui tient le milieu entre celles de Newton et de M. d'Alembert. Et en adoptant cette valeur de m, on aura

$$e = 0{,}000\,024\,04, \quad i = 0{,}000\,006\,01.$$

70. En général quelles que soient la figure de la Lune et la loi de sa densité, comme on a, par les formules du n° 61,

$$A = \mathbf{S}R^2\cos^2 P\,dm, \quad B = \mathbf{S}R^2(\sin^2 P + \cos^2 P\cos^2 Q)\,dm, \quad C = \mathbf{S}R^2(\sin^2 P + \cos^2 P\sin^2 Q)\,dm,$$

$$F = \tfrac{1}{2}\mathbf{S}R^2\sin 2P\sin Q\,dm, \quad G = \tfrac{1}{2}\mathbf{S}R^2\sin 2P\cos Q\,dm, \quad H = \tfrac{1}{2}\mathbf{S}R^2\cos^2 P\sin 2Q\,dm,$$

il est visible que si l est la plus grande valeur de R, c'est-à-dire le plus grand rayon de la Lune, on aura nécessairement pour les valeurs de A, B, C ces limites o et ml^2, et pour les valeurs de F, G, H celles-ci $\pm\frac{ml^2}{2}$. Or le demi-axe h de la Lune est connu par les observations, étant égal à $\frac{3}{11\times 60}$ (en prenant la distance moyenne de la Lune à la Terre pour l'unité, ainsi que nous en usons toujours); donc

$$l = \frac{l}{h}\frac{1}{220} \quad \text{et} \quad l^2 = \left(\frac{l}{h}\right)^2\frac{1}{48400}.$$

Si la Lune était sphérique, on aurait $l = h$; or le disque apparent de la Lune étant à très-peu près circulaire, il est clair qu'on ne peut supposer $l > h$ qu'en admettant un allongement dans le diamètre qui est dirigé vers la Terre, et il serait hors de toute vraisemblance que l'on eût $l = 2h$. Ainsi on est comme certain que

$$l^2 < \frac{1}{12100};$$

d'où il s'ensuit que les valeurs de $\frac{A}{m}$, $\frac{B}{m}$, $\frac{C}{m}$ seront nécessairement moindres que $\frac{1}{12100}$, et celles de $\frac{F}{m}$, $\frac{G}{m}$, $\frac{H}{m}$ moindres que $\frac{1}{24200}$.

Donc, puisque ces quantités multiplient tous les termes des fonctions $\frac{1}{m}\frac{\delta V''}{\delta x}$, $\frac{1}{m}\frac{\delta V''}{\delta y}$, $\frac{1}{m}\frac{\delta V''}{\delta z}$ qui expriment l'effet de la non-sphéricité de la Lune dans les équations du mouvement de cette Planète (58), on voit combien ces termes doivent être petits, et combien par conséquent on est en droit de les négliger vis-à-vis des autres termes des équations de l'orbite de la Lune, ainsi qu'on en a usé jusqu'à présent. Il y a cependant

quelques-uns de ces termes auxquels il est à propos d'avoir égard, à cause de leur forme d'où pourraient résulter des équations séculaires; c'est ce que nous discuterons à part, après avoir analysé dans la Section suivante les équations qui donnent les lois de la rotation de la Lune autour de son axe.

SECTION QUATRIÈME.

DÉTERMINATION DE LA LIBRATION DE LA LUNE ET DES MOUVEMENTS DE L'AXE DE CETTE PLANÈTE.

71. Cette détermination est renfermée dans les trois équations suivantes (56)

$$d\frac{\partial T''}{\partial dr} - \frac{\partial T''}{\partial r} + \frac{\partial V''}{\partial r} = 0,$$

$$d\frac{\partial T''}{\partial ds} - \frac{\partial T''}{\partial s} + \frac{\partial V''}{\partial s} = 0,$$

$$d\frac{\partial T''}{\partial du} - \frac{\partial T''}{\partial u} + \frac{\partial V''}{\partial u} = 0,$$

dans lesquelles il faut substituer à la place de T'' et de V'' leurs valeurs données dans les nos 43 et 54.

En différentiant successivement la valeur de T'' par rapport aux dr, r, ds, s, du, u, on aura

$$\frac{\partial T''}{\partial dr} = \frac{A}{dt}\left(1+\frac{dr}{dt}\right) - \frac{2F}{dt}\left(2u-\frac{ds}{dt}\right) - \frac{2G}{dt}\left(2s+\frac{du}{dt}\right),$$

$$\frac{\partial T''}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial T''}{\partial ds} = \frac{2A}{dt}u - \frac{4B}{dt}\left(u-\frac{ds}{dt}\right) + \frac{2F}{dt}\left(1+\frac{dr}{dt}\right) + \frac{4H}{dt}\left(s+\frac{du}{dt}\right),$$

$$\frac{\partial T''}{\partial s} = -2A\left(2s+\frac{du}{dt}\right) + 4C\left(s+\frac{du}{dt}\right) - 2G\left(1+\frac{2dr}{dt}\right) - 4H\left(u-\frac{ds}{dt}\right),$$

$$\frac{\partial T''}{\partial du} = -\frac{2A}{dt}s + \frac{4C}{dt}\left(s+\frac{du}{dt}\right) - \frac{2G}{dt}\left(1+\frac{dr}{dt}\right) - \frac{4H}{dt}\left(u-\frac{ds}{dt}\right),$$

$$\frac{\partial T''}{\partial u} = -2A\left(2u-\frac{ds}{dt}\right) - 4B\left(u-\frac{ds}{dt}\right) - 2F\left(1+\frac{2dr}{dt}\right) - 4H\left(s+\frac{du}{dt}\right).$$

En différentiant de même la valeur de V'' par rapport à r, s, u, on aura

$$\begin{aligned}\frac{\partial V''}{\partial r} = {} & \frac{3f(1+x)^2}{p'^3}[-2(C-B)r+2H-4Gu-4Fs] \\ & -\frac{3f(1+x)y}{p'^5}(B-C-4Hr-4Gs+4Fu) \\ & +\frac{3f(1+x)z}{p'^5}[2(B-A)u-2Hs-Gr-F] \\ & -\frac{3fy^2}{2p'^5}[-2(B-C)r-2H+4Gu+4Fs] \\ & +\frac{3fyz}{p'^5}[2(A-C)s+2Hu+G-Fr],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V''}{\partial s} = {} & \frac{3f(1+x)^2}{2p'^3}[-8(C-A)s+4Hu+4G-4Fr] \\ & -\frac{3f(1+x)y}{p'^5}[2(B+C-2A)u-4Hs-4Gr-2F] \\ & +\frac{3f(1+x)z}{p'^5}[2(A-C)-2Hr-16Gs-6Fu] \\ & +\frac{3fy^2}{2p'^5}(4Hu+4Fr) \\ & +\frac{3fz^2}{2p'^5}[-8(A-C)s-8Hu-4G] \\ & +\frac{3fyz}{p'^5}[2(A-C)r+2H-6Gu-4Fs],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V''}{\partial u} = {} & \frac{3f(1+x)^2}{2p'^3}(4Hs-4Gr) \\ & -\frac{3f(1+x)y}{p'^5}[2(B+C-2A)s-4Hu-2G+4Fr] \\ & +\frac{3f(1+x)z}{p'^5}[2(B-A)r+2H-4Gu-6Fs] \\ & +\frac{3fy^2}{2p'^5}[-8(B-A)u+4Hs+4Gr+4F] \\ & +\frac{3fz^2}{2p'^5}[-8(A-B)u-8Hs-4F] \\ & +\frac{3fyz}{p'^5}[2(A-B)+2Hr-6Gs-16Fu].\end{aligned}$$

72. Faisant ces substitutions dans les trois équations dont il s'agit, et mettant pour f sa valeur approchée 1 (60), on aura les trois équations suivantes, dans lesquelles $p' = \sqrt{(1+x)^2+y^2+z^2}$.

Première équation.

$$\begin{aligned}
&A\frac{d^2r}{dt^2} - 2F\left(\frac{2du}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2}\right) - 2G\left(\frac{2ds}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2}\right)\\
&+\frac{3(1+x)^2}{2p'^5}[-2(C-B)r + 2H - 4Gu - 4Fs]\\
&-\frac{3(1+x)y}{p'^5}(B-C-4Hr-4Gs+4Fu)\\
&+\frac{3(1+x)z}{p'^5}[2(B-A)u - 2Hs - Gr - F]\\
&+\frac{3yz}{p'^5}[2(A-C)s + 2Hu + G - Fr] = 0.
\end{aligned}$$

Deuxième équation.

$$\begin{aligned}
&4(A-C)\left(s+\frac{du}{dt}\right) - 4B\left(\frac{du}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2}\right)\\
&+2F\frac{d^2r}{dt^2} + 2G\left(1+\frac{2dr}{dt}\right) + 4H\left(u+\frac{d^2u}{dt^2}\right)\\
&+\frac{3(1+x)^2}{2p'^5}[-8(C-A)s + 4Hu + 4G - 4Fr]\\
&-\frac{3(1+x)y}{p'^5}[2(B+C-2A)u - 4Hs - 4Gr - 2F]\\
&+\frac{3(1+x)z}{p'^5}[2(A-C) - 2Hr - 16Gs - 6Fu]\\
&+\frac{3y^2}{2p'^5}(4Hu + 4Fr)\\
&+\frac{3z^2}{2p'^5}[-8(A-C)s - 8Hu - 4G]\\
&+\frac{3yz}{p'^5}[2(A-C)r + 2H - 6Gu - 4Fs] = 0.
\end{aligned}$$

Troisième équation.

$$\begin{aligned}
&4(A-B)\left(u-\frac{ds}{dt}\right) + 4C\left(\frac{ds}{dt} + \frac{d^2u}{dt^2}\right)\\
&+2F\left(1+\frac{2dr}{dt}\right) - 2G\frac{d^2r}{dt^2} + 4H\left(s+\frac{d^2s}{dt^2}\right)\\
&+\frac{3(1+x)^2}{2p'^5}(4Hs - 4Gr)\\
&-\frac{3(1+x)y}{p'^5}[2(B+C-2A)s - 4Hu - 2G + 4Fr]\\
&+\frac{3(1+x)z}{p'^5}[2(B-A)r + 2H - 4Gu - 6Fs]\\
&+\frac{3y^2}{2p'^5}[-8(B-A)u + 4Hs + 4Gr + 4F]\\
&+\frac{3z^2}{2p'^5}[-8(A-B)u - 8Hs - 4F]\\
&+\frac{3yz}{p'^5}[2(A-B) + 2Hr - 6Gs - 16Fu] = 0.
\end{aligned}$$

73. Il ne s'agit donc plus que d'intégrer ces équations; or cette intégration n'a aucune difficulté; car : 1° les variables inconnues r, s, u ne paraissent que sous la forme linéaire; 2° les quantités x, y, z sont déjà connues en t par les formules du mouvement de la Lune (59); 3° comme les quantités r, s, u doivent être très-petites, et que les quantités x, y, z sont aussi assez petites, on pourra dans la première approximation rejeter tous les termes où les trois premières se trouveraient multipliées par les trois dernières; 4° enfin on pourra mettre partout, à la place de $\frac{1}{p'^5}$, sa valeur approchée

$$1 - 5x + 15x^2 - \frac{5}{2}y^2 - \frac{5}{2}z^2,$$

en négligeant toujours les termes où x, y, z formeraient ensemble des produits de plus de deux dimensions.

De cette manière on aura ces trois équations approchées

$$A\frac{d^2r}{dt^2}-2F\left(\frac{2du}{dt}-\frac{d^2s}{dt^2}\right)-2G\left(\frac{2ds}{dt}+\frac{d^2u}{dt^2}\right)$$
$$-3(C-B)r-6Gu-6Fs+3H\left(1-3x+6x^2-\frac{5}{2}y^2-\frac{5}{2}z^2\right)$$
$$-3(B-C)(1-4x)y-3F(1-4x)z+3Gyz=0,$$

$$4(A-C)\left(s+\frac{du}{dt}\right)-4B\left(\frac{du}{dt}-\frac{d^2s}{dt^2}\right)+2F\frac{d^2r}{dt^2}+2G\left(1+\frac{2dr}{dt}\right)$$
$$+4H\left(u+\frac{d^2u}{dt^2}\right)-12(C-A)s+6Hu-6Fr$$
$$+6G\left(1-3x+6x^2-\frac{5}{2}y^2-\frac{5}{2}z^2\right)+6F(1-4x)y+6(A-C)(1-4x)z$$
$$-6Gz^2+6Hyz=0,$$

$$4(A-B)\left(u-\frac{ds}{dt}\right)+4C\left(\frac{ds}{dt}+\frac{d^2u}{dt^2}\right)+2F\left(1+\frac{2dr}{dt}\right)-2G\frac{d^2r}{dt^2}$$
$$+4H\left(s+\frac{d^2s}{dt^2}\right)+6Hs-6Gr+6G(1-4x)y+6H(1-4x)z$$
$$+6F(y^2-z^2)+6(A-B)yz=0.$$

74. On peut encore simplifier ces équations par les considérations suivantes. On voit que leurs premiers membres renferment les termes tout constants 3H, 6G, 2F; il faut donc que ces termes soient nuls, ou à-peu près nuls, pour que les variables r, s, u puissent être très-petites. Or on a vu dans le n° 61 que les équations $F=0$, $G=0$, $H=0$ renferment les conditions nécessaires pour que l'axe de rotation de la Lune, et les deux diamètres de son équateur qui sont, l'un dans le premier méridien, et l'autre perpendiculaire à ce méridien, soient des axes naturels de rotation; ainsi, sans connaître la figure et la constitution intérieure de la Lune, on est d'abord assuré que son axe de rotation, et les deux diamètres de son équateur dont nous venons de parler, sont, ou exactement, ou à très-peu près, des axes naturels de rotation de cette Planète, c'est-à-dire tels, qu'elle pourrait tourner librement et uniformément autour de chacun d'eux. Mais on sait que dans tout corps il y a toujours

trois axes de rotation possibles, qui sont perpendiculaires entre eux, et qu'on nomme les *axes principaux du corps;* donc il faudra que l'axe de la Lune et les deux diamètres de son équateur coïncident exactement, ou à très-peu près, avec les axes principaux de cette Planète; dans le premier cas les constantes F, G, H seront nulles, et dans le second elles seront seulement très-petites. Or il est naturel de supposer le premier cas : 1° parce qu'en faisant $F=0$, $G=0$, $H=0$, les trois équations du numéro précédent se simplifient beaucoup, en sorte que le mouvement de rotation de la Lune autour de son axe, et le mouvement de cet axe par rapport à l'écliptique, deviennent les plus simples, et en même temps les plus indépendants entre eux qu'il est possible; circonstance qu'on suppose tacitement avoir lieu, lorsqu'on cherche à déterminer ces mouvements d'après les observations; 2° parce qu'en supposant que la Lune ait la figure qu'elle aurait prise étant fluide, en vertu des lois de l'Hydrostatique, les constantes F, G, H sont nulles, comme nous l'avons vu plus haut (63).

Par ces raisons donc, nous ferons dans les trois équations du numéro précédent $F=0$, $G=0$, $H=0$, ce qui les réduira à ces trois-ci

$$A\frac{d^2r}{dt^2}+3(B-C)(r-y+4xy)=0,$$
$$B\frac{d^2s}{dt^2}+(A-B-C)\frac{du}{dt}+(A-C)\left(4s+\frac{3}{2}z-6xz\right)=0,$$
$$C\frac{d^2u}{dt^2}-(A-B-C)\frac{ds}{dt}+(A-B)\left(u+\frac{3}{2}yz\right)=0,$$

dont la première donnera immédiatement la valeur de r, et dont les deux autres donneront celles de s et u; les valeurs de x, y, z étant déjà connues par les formules du n° 59.

De la libration de la Lune.

75. Il ne sera question ici que de la libration *physique* et *réelle* de la Lune, c'est-à-dire de celle qui vient des inégalités réelles de la rotation de cette Planète autour de son axe; la libration connue des Astronomes

est purement optique, et n'a par elle-même aucune difficulté, n'étant produite que par le mouvement non uniforme de la Lune autour de la Terre, et par l'inclinaison de l'orbite de la Lune à l'égard de son équateur; cette libration aurait également lieu quand la Lune serait absolument sphérique, et quand son mouvement de rotation serait uniforme; mais la libration physique dépend de l'action de la Terre sur la Lune supposée non sphérique; elle est représentée par l'angle très-petit r, lequel exprime de combien le premier méridien de la Lune est plus ou moins avancé dans sa révolution, qu'il ne devrait l'être s'il répondait toujours au lieu moyen de la Terre vue de la Lune (39).

Pour déterminer cet angle il faut donc intégrer l'équation

$$A\frac{d^2r}{dt^2}+3(B-C)(r-y+4xy)=0;$$

laquelle, en faisant d'abord abstraction des termes sans r, donnera

$$r=L\sin\lambda,$$

L étant une constante indéterminée et λ un angle qui augmente uniformément, en sorte que $\frac{d\lambda}{dt}$ soit une quantité constante.

En effet, substituant pour r cette expression dans l'équation

$$A\frac{d^2r}{dt^2}+3(B-C)r=0,$$

on aura (après avoir divisé par $L\sin\lambda$) celle-ci

$$-A\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2+3(B-C)=0;$$

d'où l'on tire

$$\frac{d\lambda}{dt}=\sqrt{\frac{3(B-C)}{A}},$$

et la constante L demeurera arbitraire.

Qu'on substitue maintenant dans les termes tout connus de l'équation

proposée les valeurs de x et y du n° 59, on aura pour $y-4xy$ une suite de termes de cette forme

$$a\sin\alpha+b\sin\beta+\ldots,$$

dans lesquels a, b,... sont des coefficients numériques, et α, β,... des angles qui croissent uniformément, en sorte que $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$,... sont des nombres donnés. Or soient

$$P\sin\alpha+Q\sin\beta+\ldots$$

les termes correspondants dans la valeur de r, on aura par la substitution et la comparaison des termes analogues ces équations

$$-AP\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2+3(B-C)(P-a)=0,$$

$$-AQ\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2+3(B-C)(Q-b)=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on tire

$$P=-\frac{3(B-C)a}{A\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2-3(B-C)},\qquad Q=-\frac{3(B-C)b}{A\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2-3(B-C)},\ldots.$$

Ainsi la valeur complète de r sera, par la Théorie connue des équations linéaires,

$$r=L\sin\lambda+P\sin\alpha+Q\sin\beta+\ldots;$$

les deux constantes arbitraires étant l'une L, et l'autre renfermée dans l'angle λ.

76. Telle est l'expression générale de la libration réelle et physique de la Lune; si cette libration pouvait être sensible, elle devrait altérer également toutes les longitudes sélénographiques des taches de la Lune, déterminées par la méthode de Mayer, dont nous avons parlé plus haut (39); mais en examinant la Table que cet Astronome donne à la fin de son *Traité sur la rotation de la Lune*, et qui renferme les longitudes et les latitudes sélénographiques des taches ou points lumineux nommés *Ma-*

nilius, *Dionysius* et *Censorinus*, déduites de plusieurs observations faites pendant toute l'année 1748, on voit que les différentes déterminations des longitudes de ces taches s'accordent assez entre elles, pour qu'on doive rejeter sur les erreurs des observations les différences qui s'y trouvent, et qui sont presque toutes au-dessous d'un demi-degré; d'ailleurs comme ces différences ne sont pas les mêmes pour les trois taches, et qu'il se trouve des différences presque aussi grandes entre les différentes déterminations des latitudes, il s'ensuit qu'on ne peut attribuer les différences dont il s'agit à la libration réelle de la Lune; et l'on en doit plutôt conclure que cette libration est nécessairement très-petite.

Ainsi donc il faudra : 1° que les coefficients L, P, Q,... soient très-petits; 2° que les angles λ, α, β,... soient tous réels, et cette seconde condition est la plus essentielle; car autrement l'expression de r contiendrait l'angle même t, lequel croît à l'infini. Or les angles α, β,... sont réels par leur nature, mais l'angle λ n'est réel qu'autant que la valeur de $\frac{d\lambda}{dt}$, savoir $\sqrt{\frac{3(B-C)}{A}}$, est réelle. Donc il faudra que $\frac{B-C}{A}$ soit une quantité positive.

A l'égard des coefficients L, P, Q,..., comme le premier L est arbitraire, on pourra lui supposer une valeur aussi petite qu'on voudra; mais pour les autres il faudra, pour les rendre très-petits, supposer une valeur fort petite à la quantité $\frac{B-C}{A}$.

77. En effet, en examinant l'expression de y du n° 59, on voit que le terme

$$-0,109467\,8\sin\alpha$$

(α étant l'anomalie moyenne de la Lune) est beaucoup plus considérable que les autres; de sorte qu'on pourra sans erreur sensible réduire à ce seul terme la valeur de $y - 4xy$, que nous avons représentée ci-dessus (75) par la série

$$a\sin\alpha + b\sin\beta + \ldots;$$

ainsi l'on aura

$$a = -0,109467\,8, \quad b = 0, \ldots,$$

ou plus exactement (en ayant égard au terme tout constant $-0,003\,587\,1$ de la valeur de x)

$$a = -0,109467\,8 \times 1,014\,348\,4 = -0,111038.$$

D'ailleurs on a, par le même n° 59,

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0,991544, \quad \text{et par conséquent} \quad \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = 0,983\,16.$$

Donc on aura (75)

$$P = \frac{3(B-C)}{A}\,\frac{0,111038}{0,983\,16 - \frac{3(B-C)}{A}}.$$

Or, pour que le terme $P\sin\alpha$ de la valeur de r soit beaucoup plus petit que le terme $a\sin\alpha$ de la valeur de y, lequel renfermant la principale partie de l'équation du centre de la Lune produit un effet très-sensible dans la libration optique en longitude, il est visible qu'il faut que $\frac{3(B-C)}{A}$ soit une fraction assez petite; en sorte qu'on aura à très-peu près

$$P = 0,338\,82\,\frac{B-C}{A}.$$

Et si l'on veut que la valeur de P soit au-dessous d'un demi-degré, ce qui paraît devoir être d'après les observations (76), il faudra qu'on ait

$$0,338\,82\,\frac{B-C}{A} < 30' < 0,008\,726,$$

et par conséquent

$$\frac{B-C}{A} < 0,025\,754.$$

78. Il faut pourtant remarquer que, quoique le terme $a\sin\alpha$ soit le plus considérable de tous ceux qui peuvent entrer dans la valeur de $y - 4xy$, cependant si cette valeur contenait un terme de la forme $p\sin\varpi$, dans lequel l'argument ϖ serait tel, que $\frac{d\varpi}{dt}$ fût un nombre fort petit, alors quand même p serait un coefficient fort petit, il en pourrait

résulter dans l'expression de r un terme tel que $\Pi \sin \varpi$, dans lequel Π serait assez grand, à cause que, Π étant égal à

$$-\frac{3(B-C)p}{A\left(\frac{d\varpi}{dt}\right)^2 - 3(B-C)},$$

le dénominateur de Π deviendrait très-petit. Or l'expression de y contient le terme

$$0{,}003\,164\,3 \sin \varepsilon$$

(ε étant l'anomalie moyenne du Soleil), dans lequel

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0{,}074\,800, \quad \text{et par conséquent} \quad \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)^2 = 0{,}005\,595;$$

de plus la quantité xy contiendra un terme proportionnel à $\sin(2\gamma - 2\alpha)$, dans lequel

$$2\left(\frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\alpha}{dt}\right) = -0{,}132\,696,$$

et dont le coefficient sera moindre que celui de $\sin\varepsilon$ dans y. On trouverait peut-être encore d'autres termes de cette espèce, mais il paraît que le terme proportionnel à $\sin\varepsilon$ est celui qui peut donner la plus grande valeur de Π; ainsi il suffira d'examiner l'effet de ce terme.

Faisant donc

$$p = 0{,}003\,164\,3 \quad \text{et} \quad \varpi = \varepsilon,$$

on aura

$$\Pi = \frac{3(B-C)}{A} \cdot \frac{0{,}003\,164\,3}{\frac{3(B-C)}{A} - 0{,}005\,595}.$$

Cette expression de Π devient

$$0{,}003\,164\,3 = 11' \text{ environ},$$

lorsque $\frac{B-C}{A}$ est une quantité infinie; ensuite la valeur de Π augmente, à mesure que $\frac{B-C}{A}$ diminue, jusqu'à devenir infinie lorsque

$$\frac{B-C}{A} = 0{,}001\,865;$$

elle passe après cela à l'infini négatif, et va en diminuant (étant toujours négative) jusqu'à devenir nulle lorsque

$$\frac{B-C}{A} = 0.$$

Si maintenant on suppose

$$\Pi = 30' = 0{,}008\,726,$$

on trouve

$$\frac{B-C}{A} = 0{,}002\,925\,9,$$

et si l'on fait

$$\Pi = -30',$$

on trouve

$$\frac{B-C}{A} = 0{,}001\,368\,7;$$

ainsi, pour que la valeur du coefficient Π tombe entre ces limites $\pm 30'$, il faudra que celle de $\frac{B-C}{A}$ soit $> 0{,}002\,925\,9$, ou $< 0{,}001\,368\,7$.

79. Mais nous avons vu ci-dessus que pour que le terme proportionnel à $\sin\alpha$ soit au-dessous de $30'$, il faut que $\frac{B-C}{A}$ soit $< 0{,}025\,754$; donc, pour que le terme proportionnel à $\sin\varepsilon$ soit en même temps moindre que $30'$, il faudra que la valeur de $\frac{B-C}{A}$ soit renfermée entre ces deux limites $0{,}025\,754$ et $0{,}002\,926$, ou entre ces deux-ci $0{,}001\,369$ et 0, à cause que cette valeur doit être nécessairement positive.

On peut conclure de tout ceci que la valeur de $\frac{B-C}{A}$ doit être effectivement une fraction assez petite, afin que la partie de la libration réelle, due aux inégalités du mouvement de la Lune autour de la Terre, soit peu considérable, ainsi que les observations paraissent le démontrer. Au reste, quand même cette partie de la libration aurait une valeur sensible, elle ne pourra jamais être bien reconnue ni déterminée par les observations, parce qu'elle se trouvera toujours comme fondue dans la libration optique de la Lune, qui est égale à l'équation du centre de cette Planète.

80. A l'égard du premier terme $L\sin\lambda$ de l'expression de r (75), puisque

$$\frac{d\lambda}{dt}=\sqrt{\frac{3(B-C)}{A}},$$

et par conséquent fort petite, l'argument λ sera fort lent; et par cette raison ce terme pourrait être considérable sans qu'il pût être sensible, dans des observations faites dans un court espace de temps dans lequel l'angle λ varierait très-peu, parce qu'alors toute l'influence de ce terme dans les longitudes sélénographiques des taches de la Lune se réduirait à avancer ou à reculer, d'une quantité à peu près constante, la position du premier méridien lunaire. Ainsi ce n'est que par des observations faites à des intervalles assez grands pour que les variations de l'angle λ soient sensibles, qu'on pourra connaître et déterminer l'équation $L\sin\lambda$ de la libration réelle de la Lune.

Au reste il est clair que cette équation doit produire dans la Lune une libration analogue aux balancements d'un pendule, qui ferait de petites oscillations isochrones dont l'étendue serait $2L$ et dont la durée serait

$$\frac{180^\circ}{\frac{d\lambda}{dt}}=180^\circ\sqrt{\frac{A}{3(B-C)}},$$

savoir de $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{3(B-C)}}$ mois périodiques, puisque nous représentons le temps par l'angle du mouvement moyen de la Lune.

81. En regardant la Lune comme un sphéroïde homogène et elliptique peu différent d'une sphère, suivant l'hypothèse du n° 63, on aura

$$\frac{B-C}{A}=\frac{e-i}{1+e+i}=e-i,$$

puisque nous négligeons les puissances et les produits de e et i; donc il faudra que $e-i>0$, et par conséquent $e>i$; mais e est l'ellipticité du premier méridien de la Lune, et i l'ellipticité du méridien qui le coupe à angles droits, l'axe de rotation de la Lune étant le petit axe commun

de tous les méridiens; ainsi la Lune aura, dans cette hypothèse, une figure allongée dans le sens du diamètre de l'équateur qui répond au premier méridien, et qui est dirigé vers la Terre; de sorte que ce diamètre sera le grand axe de l'ellipse qui forme l'équateur lunaire, et $e-i$ sera l'ellipticité de cette ellipse.

La durée des balancements de la Lune provenant du terme $L\sin\lambda$ sera donc, dans l'hypothèse présente, de $\frac{1}{2\sqrt{3(e-i)}}$ mois périodiques, et ne dépendra par conséquent que de la seule ellipticité de son équateur.

Si l'on veut que la Lune ait été originairement fluide, et qu'elle ait conservé en se durcissant la figure qu'elle aurait dû prendre par les lois de l'Hydrostatique, on aura, d'après ce que nous avons trouvé dans le n° 68,

$$e-i=\frac{0{,}000\,000\,360\,6}{m},$$

et faisant $m=\frac{1}{50}$ (69) on aura

$$e-i=0{,}000\,018\,03,$$

quantité, comme on voit, renfermée entre les limites 0 et 0,001 369 du n° 79. Dans ce cas la durée des balancements de la Lune sera de 67,98 mois périodiques; mais ces déterminations sont trop hypothétiques pour qu'on doive s'y arrêter.

En général, quelles que puissent être la figure et la constitution intérieure de la Lune, on pourra toujours supposer

$$\frac{B-C}{A}=e-i,$$

cette quantité $e-i$ étant très-petite et positive, et les lois de sa libration réelle seront les mêmes que si cette Planète était homogène et ellipsoïdique, $e-i$ étant l'ellipticité de son équateur.

82. Au reste le terme $L\sin\lambda$ de la libration réelle de la Lune est nécessaire dans la Théorie pour expliquer comment la Lune peut nous pré-

senter toujours à peu près la même face, sans qu'on soit obligé de supposer que la vitesse de rotation primitive, imprimée à cette Planète, a été exactement égale à sa vitesse moyenne de translation autour de la Terre.

En effet, en faisant abstraction de l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique, laquelle est très-petite, il est visible que la rotation totale et réelle de la Lune autour de son axe doit être représentée par la somme des deux angles φ et ψ, dont l'un φ représente la révolution de la Lune autour de son axe par rapport au point équinoxial ou au nœud de son équateur, et dont l'autre ψ représente le mouvement en longitude de ce nœud. Or, par la Théorie de Cassini et de Mayer, on a simplement (39)

$$\varphi + \psi = \theta = 180^\circ + t;$$

de sorte que dans cette Théorie on aurait $\frac{d\theta}{dt}$ vitesse de la rotation de la Lune $= 1$, vitesse moyenne de la Lune autour de la Terre. Mais, en ayant égard à la quantité r, on a par notre Théorie

$$\theta = 180^\circ + t + r,$$

et par conséquent

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 + \frac{dr}{dt} = 1 + L\frac{d\lambda}{dt}\cos\lambda + \ldots;$$

de sorte qu'à cause de la constante arbitraire L, la valeur primitive de la vitesse de rotation $\frac{d\theta}{dt}$ peut être supposée quelconque, pourvu qu'elle soit peu différente de l'unité ou de la vitesse moyenne de la Lune autour de la Terre, à cause que la constante L doit être très-petite, et qu'elle se trouve de plus ici multipliée par la quantité très-petite $\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{\frac{3(B-C)}{A}}$.

J'ai donné le premier cette explication de la libration de la Lune dans la Pièce qui a remporté en 1764 le prix de l'Académie des Sciences de Paris sur ce sujet; et elle a été adoptée par ceux qui ont depuis traité la même matière.

Du mouvement des points équinoxiaux de la Lune, et de l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique.

83. La détermination de ces deux points de la Théorie de la Lune dépend de l'intégration des deux dernières équations du n° 74, savoir

$$B\frac{d^2s}{dt^2} + (A-B-C)\frac{du}{dt} + (A-C)\left(4s + \frac{3}{2}z - 6xz\right) = 0,$$

$$C\frac{d^2u}{dt^2} - (A-B-C)\frac{ds}{dt} + (A-B)\left(u + \frac{3}{2}yz\right) = 0.$$

Commençons par faire abstraction des termes tout connus qui contiennent les variables x, y, z, et ne considérons d'abord que les deux équations

$$B\frac{d^2s}{dt^2} + (A-B-C)\frac{du}{dt} + 4(A-C)s = 0,$$

$$C\frac{d^2u}{dt^2} - (A-B-C)\frac{ds}{dt} + (A-B)u = 0;$$

il est visible par la forme de ces équations qu'on y peut satisfaire en supposant

$$s = M\sin\mu, \quad u = M'\cos\mu,$$

M et M′ étant des constantes indéterminées, et μ un angle tel, que $\frac{d\mu}{dt}$ soit aussi une quantité constante.

Faisant ces substitutions, et divisant la première équation par $\sin\mu$, la seconde par $\cos\mu$, on aura ces deux-ci

$$-BM\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 - (A-B-C)M'\frac{d\mu}{dt} + 4(A-C)M = 0,$$

$$-CM'\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 - (A-B-C)M\frac{d\mu}{dt} + (A-B)M' = 0.$$

La seconde donne

$$M' = \frac{M(A-B-C)\frac{d\mu}{dt}}{A-B-C\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2};$$

cette valeur étant substituée dans la première, la quantité M s'en ira par la division, et l'on aura cette équation

$$\left[4(A-C)-B\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2\right]\left[A-B-C\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2\right]-(A-B-C)^2\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2=0,$$

laquelle servira à déterminer la constante $\frac{d\mu}{dt}$, l'autre constante M demeurant indéterminée et par conséquent arbitraire.

Si l'on fait pour plus de simplicité

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2=\rho,$$

on aura, en ordonnant les termes, cette équation du second degré

$$BC\rho^2-[(A-B-C)^2+(A-B)B+4(A-C)C]\rho+4(A-B)(A-C)=0,$$

laquelle aura par conséquent deux racines que nous dénoterons par ρ' et ρ''.

De là et de la Théorie connue des équations linéaires, il s'ensuit que si l'on prend deux angles μ et ν, tels que

$$\frac{d\mu}{dt}=\sqrt{\rho'},\quad \frac{d\nu}{dt}=\sqrt{\rho''},$$

avec deux constantes arbitraires M et N, on aura

$$s=M\sin\mu+N\sin\nu,$$
$$u=M'\cos\mu+N'\cos\nu,$$

en supposant

$$M'=\frac{(A-B-C)\frac{d\mu}{dt}}{A-B-C\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2}M,\quad N'=\frac{(A-B-C)\frac{d\nu}{dt}}{A-B-C\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2}N;$$

et il est visible que ces valeurs de s et u sont complètes, puisqu'elles renferment quatre constantes arbitraires, dont deux sont M et N, et dont les deux autres sont renfermées dans les angles μ et ν.

84. Il ne s'agit plus maintenant que d'avoir égard aux termes tout connus des équations proposées, savoir aux termes

$$(A-C)\left(\frac{3}{2}z-6xz\right)$$

de la première équation, et

$$(A-B)\times\frac{3}{2}yz$$

de la seconde. Pour cela nous observerons qu'en substituant pour x, y, z leurs valeurs données plus haut (59), la quantité $\frac{3}{2}z-6xz$ se réduit à une suite de termes de la forme

$$a\sin\alpha+b\sin\beta+\ldots,$$

et que la quantité $\frac{3}{2}yz$ se réduit de même à une suite de termes de la forme

$$a'\cos\alpha+b'\cos\beta+\ldots,$$

a, a', b, b',... étant des coefficients donnés, et α, β,... des angles tels que $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$,... sont aussi des quantités données; cela est évident à cause que la valeur de x est exprimée par une suite de cosinus, et celles de y et z par des suites de sinus de pareils angles.

Soient maintenant

$$P\sin\alpha+Q\sin\beta+\ldots$$

les termes qui en résultent dans l'expression de s, et

$$P'\cos\alpha+Q'\cos\beta+\ldots$$

les termes qui en résultent dans l'expression de u; il n'y aura qu'à faire ces substitutions dans les deux équations proposées (numéro précédent) et égaler séparément à zéro les parties affectées de $\sin\alpha$, $\sin\beta$,... dans la première équation et de $\cos\alpha$, $\cos\beta$,... dans la seconde. On aura par

rapport à l'angle α ces deux équations

$$-BP\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2-(A-B-C)P'\frac{d\alpha}{dt}+(A-C)(4P+a)=0,$$

$$-CP'\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2-(A-B-C)P\frac{d\alpha}{dt}+(A-B)(P'+a')=0,$$

d'où l'on tire

$$P=\frac{\left[A-B-C\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right](A-C)a+(A-B-C)\frac{d\alpha}{dt}(A-B)a'}{(A-B-C)^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2-\left[4(A-C)-B\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right]\left[A-B-C\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right]},$$

$$P'=\frac{(A-B-C)\frac{d\alpha}{dt}(A-C)a+\left[4(A-C)-B\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right](A-B)a'}{(A-B-C)^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2-\left[4(A-C)-B\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right]\left[A-B-C\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\right]}.$$

On aura de semblables équations par rapport à l'angle β, lesquelles donneront pour Q et Q' des valeurs pareilles à celles de P et P', en y changeant seulement $\frac{d\alpha}{dt}$ en $\frac{d\beta}{dt}$, et a, a', en b, b'; et ainsi de suite.

85. Joignant donc ces différents termes à ceux qu'on a trouvés dans le numéro précédent, on aura les valeurs suivantes de s et u, savoir

$$s=M\sin\mu+N\sin\nu+P\sin\alpha+Q\sin\beta+\ldots,$$

$$u=M'\cos\mu+N'\cos\nu+P'\cos\alpha+Q'\cos\beta+\ldots,$$

lesquelles résolvent les équations proposées dans toute leur étendue, et renferment par conséquent les véritables lois du mouvement des points équinoxiaux de la Lune et de l'inclinaison de son équateur.

En effet, puisque (38)

$$s=\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\sin\varphi,\quad u=\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\cos\varphi,$$

on aura

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}=\sqrt{s^2+u^2},\quad \operatorname{tang}\varphi=\frac{s}{u},$$

ω étant l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique, et φ la distance du premier méridien de la Lune au nœud ascendant de l'équateur, c'est-à-dire au point équinoxial d'automne par rapport à la Lune. Or on a, par le même numéro,

$$\theta \text{ ou } \varphi+\psi=180^\circ+t+r;$$

donc

$$\psi=180^\circ+t-\varphi+r;$$

mais ψ est la longitude du nœud ascendant de l'équateur lunaire; donc $\psi-180^\circ$ sera celle de son nœud descendant, ou bien de l'équinoxe du printemps de la Lune. Donc la longitude de cet équinoxe, ou bien sa distance à l'équinoxe de la Terre, sera exprimée par

$$t-\varphi+r,$$

l'angle r étant celui de la libration réelle de la Lune (75).

86. On voit par les expressions précédentes de s et u que, pour que ces quantités soient et demeurent toujours fort petites (ce qui est nécessaire pour l'exactitude de la solution, et qui est en même temps conforme aux observations suivant lesquelles l'inclinaison ω est toujours très-petite), il ne suffit pas que les coefficients M, N, P, P',... soient eux-mêmes fort petits, mais qu'il faut de plus que les angles μ, ν, α, β,... soient réels; or les angles α, β,... sont réels par leur nature, mais les angles μ et ν demandent, pour être réels, que les valeurs de $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$, c'est-à-dire de $\sqrt{\rho'}$, $\sqrt{\rho''}$, soient réelles; ainsi il faudra que les racines ρ', ρ'' de l'équation en ρ (83) soient non-seulement réelles, mais encore positives; ce qui donne ces trois conditions

$$(A-B-C)^2+(A-B)B+4(A-C)C>0,$$

$$(A-B)(A-C)>0,$$

$$[(A-B-C)^2+(A-B)B+4(A-C)C]^2>16BC(A-B)(A-C).$$

Si l'une de ces conditions manque, les valeurs de s et u renfermeront

l'angle t, et pourront augmenter à l'infini, ce qui est contraire aux observations.

En joignant à ces trois conditions celle que nous avons trouvée plus haut (76), savoir $B - C > o$, et qui est nécessaire pour que la libration réelle r soit toujours très-petite, on a quatre conditions entre les trois constantes A, B, C, c'est-à-dire entre les moments d'inertie de la Lune autour de ses trois axes principaux, lesquelles doivent nécessairement avoir lieu, quelle que puisse être d'ailleurs la figure de cette Planète; et si ces conditions ne suffisent pas pour déterminer la vraie figure de la Lune, elles pourront néanmoins servir à donner l'exclusion à une infinité de figures; mais c'est un détail qui nous mènerait trop loin.

87. Examinons maintenant plus particulièrement les expressions que nous venons de trouver pour s et u, et voyons surtout les conséquences qui en résultent par rapport aux mouvements de l'axe lunaire.

On remarquera d'abord que le premier terme de la valeur de z (59), lequel est $0{,}089\,64\sin\beta$, β étant l'argument moyen de latitude de la Lune, on remarquera, dis-je, que ce terme est beaucoup plus considérable que tous les autres de la même quantité; de sorte que dans la première approximation on pourra réduire à ce seul terme toute la quantité z, et négliger en même temps les quantités xz et yz comme fort petites par rapport à z. Ainsi les termes tout connus $\frac{3}{2}z - 6xz$ de la première équation se réduiront à $\frac{3}{2}\times 0{,}089\,64\sin\beta$, ou plus exactement (en tenant compte aussi du terme constant $-0{,}003\,587$ de la valeur de x) à

$$\left(\frac{3}{2}\times 0{,}089\,64 + 6\times 0{,}003\,583\right)\sin\beta, \quad \text{savoir à} \quad 0{,}155\,98\sin\beta;$$

et les termes tout connus de la seconde équation pourront être négligés.

On aura donc, dans les formules du n° 84,

$$b = 0{,}155\,98,$$

et tous les autres coefficients seront nuls. De sorte que les expressions

de s et u du n° 85 se réduiront à celles-ci

$$s = M\sin\mu + N\sin\nu + Q\sin\beta,$$
$$u = M'\cos\mu + N'\cos\nu + Q'\cos\beta,$$

dans lesquelles on aura

$$Q = \frac{\left[A - B - C\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right](A - C)\,b}{R},$$

$$Q' = \frac{(A - B - C)\frac{d\beta}{dt}(A - C)\,b}{R};$$

en supposant, pour abréger,

$$R = (A - B - C)^2\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^4 - \left[4(A - C) - B\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right]\left[A - B - C\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right].$$

Or la valeur de $\frac{d\beta}{dt}$ est égale à $1{,}004\,018$ par le n° 59; d'où il s'ensuit d'abord qu'on a à très-peu près

$$Q = Q' = \frac{(A - B - C)(A - C)\,b}{R}.$$

A l'égard du dénominateur R, j'observe qu'en faisant, pour abréger,

$$\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 = 1 + \varpi,$$

en sorte que

$$\varpi = 0{,}008\,052,$$

on peut le mettre sous cette forme

$$R = (A - B - C)[A\varpi - 3(A - C)] + 3C(A - C)\varpi - BC\varpi^2,$$

laquelle, à cause de la petitesse de ϖ, peut se réduire à celle-ci

$$R = (A - B - C)[A\varpi - 3(A - C)];$$

en sorte qu'on aura à très-peu près

$$Q = Q' = \frac{(A - C)\,b}{A\varpi - 3(A - C)}.$$

88. Maintenant je remarque que puisque

$$s^2 + u^2 = \operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2},$$

on aura, en ajoutant ensemble les carrés des valeurs précédentes de s et u, et ne retenant que les termes tout constants et sans sinus et cosinus, la quantité

$$\frac{M^2 + M'^2 + N^2 + N'^2}{2} + Q^2$$

pour la valeur moyenne de $\operatorname{tang}^2 \frac{\omega}{2}$, ω étant l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique. Or on sait par les observations que cette inclinaison est très-petite, et l'on ne s'écartera pas beaucoup de la vérité en prenant 2 degrés pour la valeur moyenne de ω, ce qui tient le milieu entre les déterminations de Cassini et de Mayer; ainsi l'on aura pour la valeur moyenne de $\operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$,

$$\operatorname{tang} 1^\circ = 0{,}017\,455.$$

Si les valeurs des constantes arbitraires M et N étaient nulles, et par conséquent aussi celles des constantes M′ et N′ qui en dépendent (83), il est clair que la quantité que nous venons d'assigner pour la valeur moyenne de $\operatorname{tang} \frac{\omega}{2}$ devrait être égale à Q; mais en supposant que M, N, M′ et N′ ne soient point nulles, la même quantité devra être plus grande que Q (abstraction faite des signes); par conséquent on aura nécessairement

$$Q = \text{ou} < 0{,}017\,455,$$

abstraction faite du signe de Q.

Or ayant trouvé, dans le numéro précédent,

$$Q = \frac{(A - C)\, b}{A\varpi - 3(A - C)},$$

on aura

$$\frac{A - C}{A} = \frac{\varpi Q}{b + 3Q},$$

où

$$\varpi = 0{,}008\,052 \quad \text{et} \quad b = 0{,}155\,98;$$

d'où l'on voit que $\frac{A - C}{A}$ doit être un très-petit nombre. En effet, en mettant pour Q sa plus grande valeur positive ou négative, c'est-à-dire en faisant

$$Q = \pm 0{,}017\,455,$$

on aura ces deux valeurs de $\frac{A - C}{A}$, savoir

$$0{,}000\,674\,60 \quad \text{et} \quad -0{,}001\,356\,51,$$

lesquelles seront donc les limites de la quantité $\frac{A - C}{A}$; mais nous donnerons plus bas des limites plus exactes pour cette quantité.

89. Nous remarquerons ici que, ϖ étant un nombre très-petit, ainsi que $\frac{A - C}{A}$ (comme nous venons de le voir), le dénominateur R des coefficients Q et Q′ devient aussi très-petit du même ordre, et que les termes $3C(A - C)\varpi - BC\varpi^2$ que nous avons négligés dans la valeur de R sont alors très-petits du second ordre, en sorte qu'on peut les négliger avec raison.

Si la valeur de ϖ n'était pas très-petite, celle de R ne le serait pas non plus, et les valeurs de Q et Q′ seraient au contraire beaucoup plus petites qu'elles ne le sont; mais la circonstance de ϖ très-petite, laquelle vient de ce que $\frac{d\beta}{dt}$ est un nombre très-peu différent de l'unité (59), en rendant le dénominateur R fort petit, augmente considérablement la valeur des coefficients Q et Q′ des termes $Q \sin\beta$ et $Q' \cos\beta$ des expressions de s et u; d'où l'on voit que le terme $b \sin\beta$ auquel nous avons réduit la valeur de z, outre qu'il est par son coefficient b le plus grand de tous les autres termes de z, est encore par la nature de l'angle β celui qui doit

donner les plus grands termes dans s et u; car quoique la valeur de z, ainsi que celle de xz que nous avons entièrement négligée, puissent contenir encore d'autres termes pour lesquels ϖ soit aussi un fort petit nombre, tels, par exemple, que les termes qui auraient pour argument l'angle $2\gamma - \beta$, ou $2\alpha - \beta$, ces termes ne donneraient pourtant pas une valeur de ϖ aussi petite que celle qui vient du terme $\sin\beta$, puisque

$$2\frac{d\gamma}{dt} - \frac{d\beta}{dt} = 0{,}846\,380 = 1 - 0{,}153\,620,$$

$$2\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt} = 0{,}979\,076 = 1 - 0{,}020\,924;$$

par conséquent la valeur du dénominateur R serait toujours plus grande pour ces termes que pour ceux qui viennent du terme $\sin\beta$. D'où il s'ensuit que ce terme est en effet le seul auquel on doive avoir égard.

90. En supposant la Lune un sphéroïde elliptique homogène peu différent d'une sphère, suivant l'hypothèse du n° 63, on a

$$A = \frac{2h^2m}{5}(1 + e + i), \quad B = \frac{2h^2m}{5}(1 + e), \quad C = \frac{2h^2m}{5}(1 + i),$$

e et i étant des quantités fort petites; ces valeurs étant substituées dans l'équation en ρ du n° 83, on aura, en faisant attention que les valeurs de A, B, C ne sont exactes qu'aux secondes dimensions près de e et i,

$$(1 + e + i)\rho^2 - (1 + 4e + i)\rho + 4ei = 0,$$

laquelle donne, par approximation, ces deux valeurs de ρ, $1 + 3e$ et $4ei$, en sorte qu'on aura

$$\rho' = 1 + 3e, \quad \rho'' = 4ei;$$

et par conséquent

$$\frac{d\mu}{dt} = 1 + \frac{3e}{2}, \quad \frac{d\nu}{dt} = 2\sqrt{ei};$$

de sorte qu'il faudra que e et i soient des quantités toutes deux positives ou toutes deux négatives pour que $\frac{d\nu}{dt}$ ait une valeur réelle.

Substituant ces valeurs dans les expressions de M′ et de N′ du même n° 83, on aura (à cause de la petitesse de e et i)

$$M' = M, \quad N' = -2N\sqrt{\frac{e}{i}} \quad \text{à très-peu près.}$$

Mais, en général, quelles que soient la figure de la Lune et sa constitution intérieure, nous pouvons toujours supposer

$$\frac{A - C}{A} = e,$$

e étant un nombre très-petit par le n° 88; d'ailleurs on a déjà (81)

$$\frac{B - C}{A} = e - i,$$

$e - i$ étant une quantité positive et fort petite; donc on aura

$$\frac{A - B}{A} = i,$$

et par conséquent

$$B = A(1 - i), \quad C = A(1 - e),$$

e et i étant des quantités très-petites, et ces valeurs étant substituées dans l'équation en ρ donneront les mêmes résultats que ci-dessus; en sorte que ces résultats seront de cette manière indépendants de la figure de la Lune.

91. De ce que nous venons de démontrer il s'ensuit donc que les valeurs de s et u, c'est-à-dire de $\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\sin\varphi$ et $\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\cos\varphi$, se réduisent à cette forme

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\sin\varphi = M\sin\mu + N\sin\nu + Q\sin\beta,$$

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\cos\varphi = M\cos\mu - 2N\sqrt{\frac{e}{i}}\cos\nu + Q\cos\beta,$$

M et N étant deux coefficients arbitraires, μ et ν étant deux angles tels que

$$\frac{d\mu}{dt} = 1 + \frac{3e}{2}, \quad \frac{d\nu}{dt} = 2\sqrt{ei},$$

Q étant égal à $\frac{0,15598e}{0,00802 - 3e}$, β étant l'argument moyen de latitude de la Lune, et e, i étant deux nombres fort petits qui doivent être tels que ei et $e - i$ soient positifs, et qui dans le cas où la Lune est supposée un ellipsoïde homogène représentent les ellipticités du premier méridien et de celui qui le coupe à angles droits.

Ainsi il ne reste plus pour connaître les angles ω et φ, c'est-à-dire l'inclinaison de l'équateur lunaire sur l'écliptique, et la distance du premier méridien au nœud ascendant de cet équateur, ou à l'équinoxe lunaire d'automne, qu'à résoudre les équations que nous venons de trouver. La connaissance de l'angle φ donnera celle de la longitude des nœuds de l'équateur lunaire, puisque nous avons déjà vu (85) que la longitude du nœud descendant ou de l'équinoxe du printemps lunaire est représentée par $t - \varphi + r$; ainsi l'on connaîtra les deux éléments d'où dépend la position de l'équateur ou de l'axe lunaire à chaque instant.

92. Considérons d'abord le cas le plus simple, celui où les deux constantes arbitraires M et N seraient nulles. On aura donc dans ce cas

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\sin\varphi = Q\sin\beta, \quad \operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\cos\varphi = Q\cos\beta;$$

or $\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}$ est une quantité positive par l'hypothèse du calcul; donc, si Q est une quantité positive, on aura

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = Q, \quad \varphi = \beta;$$

mais, si Q est une quantité négative, on aura

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2} = -Q, \quad \varphi = 180^\circ + \beta.$$

Voyons donc lequel de ces deux cas peut s'accorder avec les observations.

Si $\varphi = \beta$, on aura $t - \beta + r$ pour la longitude du nœud descendant de l'équateur lunaire; et comme r est une quantité très-petite qui ne peut renfermer que des sinus et des cosinus d'angles (cette quantité r représentant la libration réelle de la Lune que nous avons examinée plus haut), il est visible que $t - \beta$ sera la longitude moyenne de ce nœud; mais β étant l'argument moyen de latitude de la Lune, c'est-à-dire la distance du nœud moyen de la Lune à son nœud ascendant moyen, et t étant (hypothèse) la longitude moyenne de la Lune, $t - \beta$ sera la longitude moyenne du nœud ascendant de l'orbite lunaire. Donc, dans le cas dont il s'agit, le lieu moyen du nœud descendant de l'équateur lunaire coïncidera avec le lieu moyen du nœud ascendant de l'orbite de la Lune. Or c'est précisément ce qui s'accorde avec la Théorie établie par Cassini sur des observations faites dans le siècle passé, et confirmée par Mayer et par M. de Lalande d'après des observations faites depuis trente ans. De sorte qu'on est assuré que le cas dont il s'agit donne, par rapport au lieu moyen des nœuds de l'équateur lunaire, des résultats exactement conformes aux observations.

Dans l'autre cas on aurait $t - \beta - 180^\circ$ pour la longitude moyenne du nœud descendant, ce qui ferait coïncider le nœud ascendant de l'équateur avec le nœud ascendant de l'orbite; ce cas pourrait, comme on voit, avoir lieu également si Q était une quantité négative; mais puisque les observations répondent parfaitement au cas précédent, il en faut conclure que Q est nécessairement une quantité positive.

93. Mais la supposition de $M = 0$ et $N = 0$ étant trop limitée, examinons maintenant l'influence de ces quantités dans la valeur de l'angle $\varphi - \beta$. Pour cela je déduis des deux équations du n° 91 ces deux transformées

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\sin(\varphi-\beta) = M\sin(\mu-\beta) + N\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{e}{i}}\right)\sin(\nu-\beta) + N\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{e}{i}}\right)\sin(\nu+\beta),$$

$$\operatorname{tang}\frac{\omega}{2}\cos(\varphi-\beta) = M\cos(\mu-\beta) + N\left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{e}{i}}\right)\cos(\nu-\beta) + N\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{e}{i}}\right)\cos(\nu+\beta) + Q,$$

lesquelles, en faisant, pour abréger,

$$\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{e}{i}} = p, \quad \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{e}{i}} = q,$$

donnent

$$\operatorname{tang}(\varphi-\beta)=\frac{M\sin(\mu-\beta)+pN\sin(\nu-\beta)+qN\sin(\nu+\beta)}{Q+M\cos(\mu-\beta)+pN\cos(\nu-\beta)+qN\cos(\nu+\beta)}.$$

On voit par cette formule que l'angle $\varphi-\beta$ ne pourra jamais être $\pm 90^{\circ}$, si la valeur de $\operatorname{tang}(\varphi-\beta)$ ne peut pas devenir infinie positive ou négative, et comme le numérateur de cette valeur est toujours fini, il s'ensuit qu'on n'aura jamais $\varphi-\beta=\pm 90^{\circ}$, si le dénominateur ne peut pas devenir nul; de sorte que dans ce cas on aura $\varphi=\beta\pm$ un angle au-dessous de 90 degrés, et par conséquent la valeur moyenne de φ sera encore égale à β.

Il n'en sera pas de même si le dénominateur de la valeur de $\operatorname{tang}(\varphi-\beta)$ peut devenir nul; car puisque les sinus et cosinus qui entrent tant dans le numérateur que dans le dénominateur peuvent recevoir successivement toutes les valeurs possibles comprises entre $+1$ et -1, la valeur de $\operatorname{tang}(\varphi-\beta)$ pourra aussi recevoir toutes les valeurs possibles comprises entre $+\infty$ et $-\infty$; par conséquent l'angle même $\varphi-\beta$ pourra aller au delà de 90 degrés et devenir égal à plusieurs circonférences en tel nombre qu'on voudra.

94. Donc, puisque les observations ont appris que le nœud descendant de l'équateur lunaire ne s'éloigne jamais beaucoup du nœud moyen ascendant de l'orbite de la Lune, et qu'ainsi $\varphi-\beta$ doit toujours être un angle peu considérable, il s'ensuit que la quantité

$$Q+M\cos(\mu-\beta)+pN\cos(\nu-\beta)+qN\cos(\nu+\beta)$$

ne doit jamais devenir nulle, quels que puissent être les angles μ, ν et β. Or pour cela il est clair qu'il faut que la valeur de Q soit plus grande que la somme des coefficients M, pN, qN, abstraction faite des signes de Q, M, pN, qN. Or nous avons déjà vu que, lorsque M et N sont nuls, Q doit avoir une valeur positive pour que $\varphi-\beta$ soit nul; donc, lorsque M et N ne sont pas nuls, il faudra que Q ait une valeur positive et plus grande que la somme des valeurs de M, pN, qN (ces quantités étant aussi prises

positivement) pour que $\varphi-\beta$ soit toujours un angle assez petit ou du moins au-dessous de 90 degrés, comme les observations le demandent; or comme les constantes M et N sont arbitraires, cette dernière condition est toujours facile à remplir, et l'on doit la regarder comme une donnée fournie par les observations.

95. Soit, pour abréger, $\varphi-\beta=\xi$, en sorte que $\varphi=\beta+\xi$; on aura (85) $t-\beta-\xi+r$ pour la longitude du nœud descendant de l'équateur lunaire, mais $t-\beta$ est le lieu moyen du nœud ascendant de l'orbite; donc, pour avoir le lieu vrai du nœud descendant de l'équateur, il n'y aura qu'à corriger le lieu moyen du nœud ascendant de l'orbite par les équations $r-\xi$, r étant la libration réelle de la Lune, et ξ un angle toujours au-dessous de 90 degrés, déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang}\xi=\frac{M\sin(\mu-\beta)+pN\sin(\nu-\beta)+qN\sin(\nu+\beta)}{Q+M\cos(\mu-\beta)+pN\cos(\nu-\beta)+qN\cos(\nu+\beta)}.$$

Comme la valeur de Q est supposée plus grande que la somme de M, pN, qN, on pourra, si l'on veut, réduire le dénominateur du second membre de cette équation en une série convergente; de plus, comme ξ est au-dessous de 90 degrés, on pourra réduire aussi $\operatorname{tang}\xi$ en série et de là on pourra déduire la valeur même de l'angle ξ exprimée par une suite de différents sinus; mais on peut trouver directement cette série par la méthode que j'ai donnée dans les *Mémoires* de cette Académie de 1776, et que j'avais déjà employée avec succès dans mes *Recherches sur le mouvement des nœuds des Planètes* (*).

Suivant cette méthode, on aura

$$\xi=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{1+\operatorname{tang}\xi\sqrt{-1}}{1-\operatorname{tang}\xi\sqrt{-1}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\left(1+\frac{Me^{(\nu-\beta)\sqrt{-1}}+pNe^{(\nu-\beta)\sqrt{-1}}+qNe^{(\nu+\beta)\sqrt{-1}}}{Q}\right)$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\left(1+\frac{Me^{-(\nu-\beta)\sqrt{-1}}+pNe^{-(\nu-\beta)\sqrt{-1}}+qNe^{-(\nu+\beta)\sqrt{-1}}}{Q}\right);$$

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. IV, p. 275.

ces logarithmes peuvent se réduire en séries convergentes, puisque (hypothèse) Q est plus grande que la somme des coefficients M, pN, qN pris positivement; et l'on aura, en substituant les sinus correspondants aux exponentielles imaginaires,

$$\delta = \frac{M}{Q}\sin(\mu-\beta) + \frac{pN}{Q}\sin(\nu-\beta) + \frac{qN}{Q}\sin(\nu+\beta)$$
$$-\frac{M^2}{2Q^2}\sin 2(\mu-\beta) - \frac{pMN}{Q^2}\sin(\mu+\nu-2\beta) - \frac{p^2N^2}{2Q^2}\sin 2(\nu-\beta) + \ldots.$$

96. Considérons maintenant l'inclinaison ω de l'équateur lunaire sur l'écliptique; pour en déterminer la valeur, il n'y aura qu'à ajouter ensemble les carrés des deux équations du n° 93; on aura

$$\tang^2\frac{\omega}{2} = [M\sin(\mu-\beta) + pN\sin(\nu-\beta) + qN\sin(\nu+\beta)]^2$$
$$+ [M\cos(\mu-\beta) + pN\cos(\nu-\beta) + qN\cos(\nu+\beta) + Q]^2,$$

savoir, en développant les termes, et réduisant les produits des sinus et cosinus en cosinus simples,

$$\tang^2\frac{\omega}{2} = Q^2 + M^2 + p^2N^2 + q^2N^2$$
$$+ 2QM\cos(\mu-\beta) + 2pQN\cos(\nu-\beta)$$
$$+ 2qQN\cos(\nu+\beta) + 2pMN\cos(\mu-\nu)$$
$$+ 2qMN\cos(\mu-\nu-2\beta) + 2pqN^2\cos 2\beta.$$

97. Les termes constants

$$Q^2 + M^2 + (p^2+q^2)N^2$$

donnent la valeur moyenne de $\tang^2\frac{\omega}{2}$, laquelle est à peu près connue par les observations, et que nous pouvons supposer comme ci-dessus (88) égale à $\tang^2(1^\circ)$.

Mais si l'on suppose, pour plus de généralité, que la valeur moyenne de $\tang\frac{\omega}{2}$ soit égale à k, on aura (93)

$$k^2 = Q^2 + M^2 + (p^2+q^2)N^2 = Q^2 + M^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{2e}{i}\right)N^2.$$

Or nous avons vu ci-dessus (94) que Q doit être une quantité positive plus grande que la somme des coefficients M, pN, qN pris positivement; donc à plus forte raison on aura

$$Q^2 > M^2 + p^2N^2 + q^2N^2 > k^2 - Q^2.$$

Donc on aura

$$Q^2 < k^2 \quad \text{et} \quad > \frac{k^2}{2},$$

et par conséquent

$$Q < k \quad \text{et} \quad > \frac{k}{\sqrt{2}}.$$

Mais on a (91)

$$Q = \frac{0,15598e}{0,008052 - 3e};$$

donc

$$e = \frac{0,008052Q}{0,15598 + 3Q};$$

substituant ici les deux limites de Q qu'on vient de trouver, on aura ces deux limites de e, savoir

$$\frac{0,008052k}{0,15598 + 3k} \quad \text{et} \quad \frac{0,008052k}{0,22059 + 3k}.$$

Si l'on fait $k = \tang 1^\circ = 0,017455$, les deux limites précédentes deviennent

$$0,0006746 \quad \text{et} \quad 0,0005149,$$

entre lesquelles la valeur de e sera nécessairement renfermée.

98. Quelles que puissent donc être la figure de la Lune et la densité de ses parties, il faudra que la quantité $e = \frac{A-C}{A}$ (90) soit positive et renfermée entre ces limites 0,0006746 et 0,0005149; et la quantité $i = \frac{A-B}{A}$ (numéro cité) devra par conséquent être aussi positive, mais $< e$, pour que ei et $e-i$ soient des quantités positives, comme nous avons vu qu'elles doivent l'être (81 et 90). Et comme ces quantités e et i sont les seuls éléments dépendants de la figure de la Lune, qui entrent

dans les formules des mouvements de cette Planète autour de son centre, il s'ensuit que ces mouvements seront toujours les mêmes pour toutes les figures pour lesquelles les valeurs de e et i seront les mêmes. Donc ils seront aussi les mêmes que si la Lune était un sphéroïde homogène et elliptique, dans lequel l'axe de rotation serait le petit axe commun de tous les méridiens, et où l'ellipticité du premier méridien qui passe à peu près par le centre apparent serait e, et l'ellipticité du méridien perpendiculaire à celui-là et qui passe par les bords apparents serait i (63).

99. Dans l'hypothèse de l'homogénéité et de la fluidité primitive de la Lune on aurait (68)

$$e = \frac{0,0000004808}{m} \quad \text{et} \quad i = \frac{0,0000001202}{m},$$

m étant le rapport de la masse de la Lune à celle de la Terre; égalant donc cette valeur de e aux deux limites de e qu'on vient de trouver, on aura deux valeurs de m, savoir

$$0,0007127 \quad \text{et} \quad 0,0009337,$$

qui seront donc les limites du rapport des masses de la Lune et de la Terre, dans les suppositions dont il s'agit. Ainsi la masse de la Lune devrait être moindre qu'un millième de celle de la Terre, ce qui ne peut se concilier avec les résultats des phénomènes des marées et de la précession des équinoxes (69). D'où l'on peut conclure, ou que la Lune n'est pas homogène, ou que sa figure actuelle est différente de celle qu'elle aurait dû prendre en vertu de la force centrifuge de ses parties combinée avec l'attraction de la Terre, si elle avait été primitivement fluide.

100. Revenons maintenant à l'expression générale de $\tang^2\frac{\omega}{2}$ du n° 96; il est facile de voir que cette quantité deviendra un maximum ou un minimum lorsque les sinus des différents angles $\mu - \beta$, $\nu - \beta$, ... seront nuls; alors leurs cosinus seront ± 1, et la valeur de $\tang^2\frac{\omega}{2}$ deviendra

$$(Q \pm M \pm pN \pm qN)^2,$$

en sorte qu'on aura pour les plus grandes ou plus petites inclinaisons ω de l'orbite lunaire

$$\tang\frac{\omega}{2} = Q \pm M \pm pN \pm qN.$$

Donc, si l'on nomme E la somme des trois coefficients M, pN et qN chacun pris positivement, on aura pour la plus grande valeur de ω

$$\tang\frac{\omega}{2} = Q + E,$$

et pour la plus petite

$$\tang\frac{\omega}{2} = Q - E,$$

E étant toujours $< Q$ par le n° 88. Si donc on pouvait, par les observations, déterminer avec assez de précision la plus grande et la plus petite inclinaison de l'équateur lunaire, on déterminerait en même temps les valeurs de Q et de E; mais il n'y a pas d'apparence qu'on puisse y parvenir sitôt.

101. Au reste, à cause des coefficients inconnus M et N, et des quantités e et i, dont la première n'est connue qu'à peu près et dont la seconde est encore inconnue, il ne sera guère possible de faire usage des équations qui expriment les variations de $\tang^2\frac{\omega}{2}$ (96), non plus que de celles qui expriment les variations de l'angle φ (95), pour déterminer avec précision la position de l'équateur lunaire à chaque instant; ces équations servent seulement à faire voir que le lieu du nœud descendant de l'équateur lunaire et l'inclinaison de cet équateur sur l'écliptique peuvent faire des oscillations plus ou moins grandes autour du lieu moyen et de l'inclinaison moyenne, sans néanmoins que les nœuds vrais puissent s'éloigner de 90 degrés des nœuds moyens, et que l'inclinaison puisse devenir nulle; ce qui suffit pour expliquer les irrégularités que l'on a trouvées, dans les résultats des différentes observations relativement à ces deux éléments. (*Voyez* le Traité de Mayer dans les *Kosmographische Nachrichten* de Nurenberg, et le Mémoire de M. de Lalande dans le volume de l'Académie des Sciences de Paris pour 1764.)

SECTION CINQUIÈME.

RECHERCHE DES INÉGALITÉS DU MOUVEMENT DE LA LUNE AUTOUR DE LA TERRE, QUI PROVIENNENT DE LA FIGURE NON SPHÉRIQUE DE CETTE PLANÈTE.

102. Après avoir examiné l'effet de l'attraction de la Terre sur la Lune supposée non sphérique, par rapport aux différents mouvements que cette Planète peut avoir autour de son centre de gravité, il ne reste plus qu'à examiner l'effet de la même action, relativement au mouvement de ce centre autour de la Terre. Cet examen n'a aucune difficulté, et se réduit simplement à chercher, d'après les équations différentielles du n° 58, les termes des valeurs de x, y, z, dus aux quantités $\frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial x}$, $\frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial y}$, $\frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial z}$, qui expriment l'effet de la non-sphéricité de la Lune dans les équations de son mouvement autour de la Terre. On commencera donc par chercher les valeurs de ces quantités par la différentiation de l'expression de V'' du n° 54, et pour réduire d'abord le calcul le plus qu'il est possible, on remarquera : 1° que les trois constantes F, G, H doivent être nulles suivant la supposition du n° 74; 2° que, les quantités r, s, u étant très-petites, il suffira d'avoir égard aux termes où elles ne passent pas la première dimension, puisque les différentiations qu'il s'agit de faire sont indépendantes de ces quantités; 3° que, les variables x, y, z étant aussi assez petites, il suffira, du moins dans la première approximation, de n'avoir égard qu'aux termes où ces variables ne montent pas au delà du premier degré.

De cette manière l'expression de V'' se réduira à cette forme

$$V''=\frac{f(A+B+C)}{4p^3}+\frac{3f(1+x)^2}{2p^5}C+\frac{3fy^2}{2p^5}B+\frac{3fz^2}{2p^5}A-3fy(B-C)r+6fz(A-C)s;$$

d'où, en faisant varier séparément x, y, z, on tirera les valeurs cherchées de $\frac{\partial V''}{\partial x}$, $\frac{\partial V''}{\partial y}$, $\frac{\partial V''}{\partial z}$.

103. On remarquera maintenant que les termes de V'' qui ne sont que des fonctions de x, y, z, sans r, s, ne donneront que de pareilles fonc-

tions dans les valeurs dont il s'agit, d'où il ne pourra résulter dans les équations du mouvement de la Lune, que des termes de la même forme que ceux qui entrent déjà dans ces équations, mais avec des coefficients extrêmement petits, à cause de la petitesse des quantités $\frac{A}{m}$, $\frac{B}{m}$, $\frac{C}{m}$ (**70**).

L'effet de ces termes ne consisterait donc qu'à altérer infiniment peu les coefficients de quelques-unes des équations lunaires, ainsi que les mouvements de l'apogée et du nœud déterminés par la Théorie; mais ces altérations ne sauraient être d'aucune importance dans la Théorie de la Lune, dont les résultats ne peuvent être qu'approchés, à cause de la multitude des quantités qu'on est déjà forcé d'y négliger. Ainsi l'on pourra dans la recherche présente négliger tous ces termes, et n'avoir égard par conséquent dans la valeur de V'' qu'aux termes qui renferment les quantités r et s, et qui peuvent donner dans le mouvement de la Lune des équations particulières et différentes de toutes celles que l'on connaît déjà.

On négligera donc dans l'expression de V'' les termes qui ne sont que de simples fonctions de x, y, z, et l'on réduira par là cette expression à celle-ci

$$V''=-3f(B-C)yr+6f(A-C)zs,$$

laquelle donnera par la différentiation

$$\frac{\partial V''}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial V''}{\partial y}=-3f(B-C)r,\quad \frac{\partial V''}{\partial z}=6f(A-C)s.$$

104. On substituera ces quantités dans les trois équations de l'orbite de la Lune du n° 58, et comme il ne s'agit pas ici de déterminer les valeurs complètes des variables x, y, z, mais seulement les parties très-petites de ces valeurs, lesquelles peuvent résulter des quantités dont il s'agit, il suffira d'avoir égard aux termes où ces variables seront linéaires et ne se trouveront multipliées par aucun sinus ou cosinus.

On mettra donc simplement $1-3x$ à la place de $\frac{1}{p^3}$ et

$$\frac{1}{l^3}-3\frac{(1+x)\cos(t-\Sigma)-y\sin(t-\Sigma)}{l^4}$$

à la place de $\frac{1}{q^3}$, et l'on aura ces trois équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} - 1 - x + f(1-2x) + fn^2(1+x) + fn^2\frac{-3(1+x)}{2} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2dx}{dt} - y + fy(1+n^2) - fn^2\frac{3y}{2} - \frac{3f(B-C)}{m}r = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + fz(1+n^2) + \frac{6f(A-C)}{m}s = 0.$$

Mais (60)

$$f = \frac{1}{1-\frac{n^2}{2}} = 1 + \frac{n^2}{2}$$

à très-peu près, n^2 étant une quantité très-petite, égale à $\frac{1}{178}$ environ; on fera donc cette substitution, et l'on pourra négliger partout les n^4 et même les n^2 dans les termes très-petits qui contiennent r et s; on aura ainsi les équations suivantes

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} - 3\left(1+\frac{n^2}{2}\right)x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2dx}{dt} - \frac{3(B-C)}{m}r = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(1+\frac{3n^2}{2}\right)z + \frac{6(A-C)}{m}s = 0,$$

dans lesquelles il ne s'agira plus que de substituer les valeurs de r et s, trouvées dans la Section précédente.

105. Mais nous remarquerons encore, à l'égard de cette substitution, qu'il serait inutile d'y tenir compte des termes de r et s, qui sont proportionnels à $\sin\alpha$, $\sin\beta$,..., c'est-à-dire qui sont semblables aux termes des expressions complètes de x, y, z, parce qu'il ne pourrait résulter de là que de très-petites corrections pour ces mêmes termes, corrections qu'on doit négliger par les raisons alléguées ci-dessus. Ainsi il suffira de substituer pour r le seul terme $L\sin\lambda$ (**75**) et pour s les deux termes $M\sin\mu + N\sin\nu$ (**85**).

De plus, comme nous avons déjà fait (**90**)

$$\frac{B-C}{A} = e - i \quad \text{et} \quad \frac{A-C}{A} = e,$$

on mettra $A(e-i)$ à la place de $B-C$ et Ae à la place de $A-C$; et, faisant pour plus de simplicité

$$\frac{A}{m} = \Delta,$$

on aura

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} - 3\left(1+\frac{n^2}{2}\right)x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2dx}{dt} - 3\Delta(e-i)L\sin\lambda = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(1+\frac{3n^2}{2}\right)z + 6\Delta e(M\sin\mu + N\sin\nu) = 0.$$

Dans ces équations les angles λ, μ, ν croissent uniformément, et l'on a (**75**, **90**)

$$\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{3(e-i)}, \quad \frac{d\mu}{dt} = 1 + \frac{3e}{2}, \quad \frac{d\nu}{dt} = 2\sqrt{ei};$$

les constantes e et i dépendent de la figure de la Lune et sont inconnues, mais très-petites et positives; e doit être renfermée entre les limites 0,000 6746 et 0,000 5149, et i doit être $< e$; les constantes L, M, N sont encore indéterminées, mais doivent être aussi fort petites; la constante Δ dépend aussi de la figure de la Lune et est pareillement inconnue, mais très-petite et positive; si la Lune était homogène et à très-peu près sphérique, on aurait à très-peu près $\Delta = \frac{2h^2}{5}$ (**63**), h étant le demi-diamètre apparent de la Lune, lequel est égal à $\frac{3}{11\times 60}$; mais si la Lune n'est pas homogène, alors la valeur de Δ sera différente, mais sera nécessairement $< 4h^2 < \frac{1}{12100}$ (**70**).

106. Pour intégrer ces équations on remarquera que, comme on ne demande pas les valeurs complètes de x, y, z, mais seulement les parties

de ces valeurs qui dépendent des termes en $\sin\lambda$, $\sin\mu$, $\sin\nu$, il suffira de supposer

$$x = \mathrm{E}\cos\lambda, \quad y = \mathrm{F}\sin\lambda, \quad z = \mathrm{G}\sin\mu + \mathrm{H}\sin\nu,$$

les coefficients E, F, G, H étant constants et indéterminés; en effet, en faisant ces substitutions et ayant égard à ce que $\frac{d\lambda}{dt}$, $\frac{d\mu}{dt}$, $\frac{d\nu}{dt}$ sont des quantités constantes, on trouvera ces quatre équations

$$-\mathrm{E}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - 2\mathrm{F}\frac{d\lambda}{dt} - 3\left(1+\frac{n^2}{2}\right)\mathrm{E} = 0,$$

$$-\mathrm{F}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - 2\mathrm{E}\frac{d\lambda}{dt} - 3\Delta(e-i)\,\mathrm{L} = 0,$$

$$-\mathrm{G}\left(\frac{d\mu}{dt}\right)^2 + \left(1+\frac{3n^2}{2}\right)\mathrm{G} + 6\Delta e\,\mathrm{M} = 0,$$

$$-\mathrm{H}\left(\frac{d\nu}{dt}\right)^2 + \left(1+\frac{3n^2}{2}\right)\mathrm{H} + 6\Delta e\,\mathrm{N} = 0,$$

par lesquelles on déterminera les quatre inconnues E, F, G, H.

La première équation donne

$$\mathrm{F}\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{2}\mathrm{E}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - \frac{3}{2}\left(1+\frac{n^2}{2}\right)\mathrm{E};$$

substituant cette valeur dans la seconde, on aura

$$\mathrm{E}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}-\frac{3n^2}{4}\right)\frac{d\lambda}{dt}\right] - 3\Delta(e-i)\,\mathrm{L} = 0;$$

mais

$$\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{3(e-i)};$$

donc, puisque n^2 et $e-i$ sont des quantités fort petites, on aura à très-peu près

$$\mathrm{E} = -2\Delta\mathrm{L}\sqrt{3(e-i)},$$

et de là

$$\mathrm{F} = 3\Delta\mathrm{L}, \text{ à très-peu près.}$$

La troisième et la quatrième équation donneront immédiatement, en

substituant pour $\frac{d\mu}{dt}$ et $\frac{d\nu}{dt}$ leurs valeurs $1+\frac{3e}{2}$ et $2\sqrt{ei}$,

$$\mathrm{G} = \frac{4\Delta e\,\mathrm{M}}{e-n^2}, \quad \mathrm{H} = 6\Delta e\,\mathrm{N}, \text{ à très-peu près.}$$

107. Si donc on dénote par x', y', z' les parties des valeurs de x, y, z qui résultent des termes proportionnels à $\sin\lambda$, $\sin\mu$, $\sin\nu$, et dus à la non-sphéricité de la Lune, on aura

$$x' = -2\Delta\mathrm{L}\sqrt{3(e-i)}\cos\lambda,$$

$$y' = 3\Delta\mathrm{L}\sin\lambda,$$

$$z' = \frac{4\Delta e\,\mathrm{M}}{e-n^2}\sin\mu + 6\Delta e\,\mathrm{N}\sin\nu.$$

Ainsi il faudra ajouter ces quantités x', y', z' aux expressions de x, y, z données par M. Euler dans sa Théorie de la Lune, pour avoir les valeurs complètes de ces variables. Mais pour mieux connaître l'effet des quantités dont il s'agit, dans le mouvement de la Lune, nous remarquerons que nommant ρ la distance de la Lune à la Terre, réduite à l'écliptique, σ sa longitude vraie et υ sa latitude, on a

$$1+x = \rho\cos(\sigma-t), \quad y = \rho\sin(\sigma-t), \quad z = \rho\,\mathrm{tang}\,\upsilon;$$

d'où l'on tire

$$\rho = \sqrt{(1+x)^2+y^2}, \quad \mathrm{tang}(\sigma-t) = \frac{y}{1+x}, \quad \mathrm{tang}\,\upsilon = \frac{z}{\sqrt{(1+x)^2+y^2}}.$$

De sorte que, si l'on désigne par ρ', σ', υ' les petites parties des valeurs de ρ, σ, υ dues aux parties x', y', z' des valeurs de x, y, z, on trouvera

$$\rho' = x', \quad \sigma' = y', \quad \upsilon' = z'$$

à très-peu près, à cause de la petitesse de x, y, z vis-à-vis de l'unité, et de x', y', z' vis-à-vis de x, y, z.

D'où il s'ensuit que x' exprimera l'altération de la distance de la Lune à la Terre, y' l'altération de la longitude de la Lune, et z' l'altération de la latitude de cette Planète.

108. Comme les arguments λ et ν croissent très-lentement, à cause de

$$\frac{d\lambda}{dt} = \sqrt{3(e-i)} \quad \text{et} \quad \frac{d\nu}{dt} = 2\sqrt{ei},$$

e et i étant des quantités très-petites, il est clair que les équations qui dépendent de ces arguments doivent être des espèces d'équations séculaires, qui ne peuvent devenir sensibles qu'au bout d'un temps fort long.

Il n'en est pas de même de l'équation qui dépend de l'argument μ, lequel, à cause de

$$\frac{d\mu}{dt} = 1 + \frac{3e}{2},$$

augmente à peu près comme la longitude moyenne de la Lune; de sorte que cette équation doit disparaître et se renouveler à chaque période de la Lune.

Voyons donc si ces équations peuvent avoir un effet sensible dans le mouvement de la Lune, et examinons principalement celle de la longitude, laquelle est d'autant plus essentielle à considérer qu'elle paraît pouvoir donner l'équation séculaire de Mayer, dont la cause a été vainement cherchée jusqu'à présent.

Cette équation est représentée par le terme y', dont la valeur est $3\Delta L \sin\lambda$, $L\sin\lambda$ étant celle de l'angle r de la libration réelle de la Lune, abstraction faite des termes qui dépendent des inégalités du mouvement périodique. On peut donc représenter l'équation dont il s'agit par $3\Delta r$; or nous avons déjà vu que la quantité $\Delta = \frac{A}{m}$ est nécessairement $< \frac{1}{12100}$ (**105**); donc on aura $y' < \frac{r}{4000}$. Si donc la plus grande valeur de r est d'un degré, la plus grande valeur de y' sera au-dessous d'une seconde; de sorte que, quand on supposerait que l'angle r pût aller jusqu'à 60 degrés, ce qui serait d'ailleurs contraire aux observations de la libration, l'angle y' ne pourrait pas même monter à une minute, et serait par conséquent toujours insensible.

A l'égard des autres équations on prouvera de même, en employant

les valeurs trouvées, dans la Section précédente, pour les quantités e, M, N, que ces équations doivent être tout à fait insensibles.

109. Comme l'équation proportionnelle à l'angle r de la libration serait très-propre à expliquer l'équation séculaire de Mayer, si elle avait un coefficient assez considérable pour cela, il est bon de calculer ce coefficient avec plus d'exactitude, d'autant plus que, recevant de l'intégration un diviseur très-petit, il ne serait pas impossible qu'il eût à la seconde approximation une valeur assez différente de ce qu'elle est à la première.

Je reprends pour cela les deux équations en x et y du n° **104**, mais je remets dans la seconde, à la place du terme $-\frac{3(B-C)}{m}r$, la quantité $\frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial y}$ qui l'a produit; j'aurai ainsi

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{2dy}{dt} - 3\left(1+\frac{n^2}{2}\right)x = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2dx}{dt} + \frac{1}{m}\frac{\partial V''}{\partial y} = 0.$$

Je reprends de même l'équation en r du n° **75**, et je la remets sous sa forme primitive (**71**)

$$A\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{\partial V''}{\partial r} = 0;$$

et il ne s'agira que d'avoir égard dans l'expression de V'' aux termes qui contiennent r^2 et ry.

Or on voit par les formules des n^os^ **54** et précédents que la quantité V'' n'est autre chose que la partie de la quantité $-f\mathbf{S}\frac{dm}{p}$, où entrent les quantités λ, μ, ν, p étant égal à

$$\sqrt{(1+x-\lambda)^2+(y-\mu)^2+(z-\nu)^2}.$$

Ainsi, comme on ne veut avoir égard qu'aux termes qui peuvent renfermer r^2 et yr, on pourra d'abord réduire la valeur de p à celle-ci

$$\sqrt{1-2\lambda-2\mu y+\lambda^2+\mu^2+y^2},$$

et celle de $\frac{1}{P}$ à

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda+\lambda^2+\mu^2+\nu^2}}+\frac{\mu y}{(1-2\lambda+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Maintenant on a, en général, par les formules du n° 46,

$$\lambda=-(\eta\sin t+\xi\cos t),\quad \mu=\xi\sin t-\eta\cos t,\quad \zeta=\nu;$$

donc

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2=a^2+b^2+c^2;$$

de plus, en substituant les valeurs rigoureuses de ξ', η',... données dans le n° 41, on aura

$$\lambda=a[(1-2s^2)\cos r+2su\sin r]-b[(1-2u^2)\sin r+2su\cos r]+2c(u\sin r-s\cos r),$$
$$\mu=a[(1-2s^2)\sin r-2su\cos r]+b[(1-2u^2)\cos r-2su\sin r]-2c(u\cos r+s\sin r);$$

d'où l'on voit que

$$\mu=-\frac{d\lambda}{dr}.$$

La valeur de $\frac{1}{P}$ trouvée ci-dessus deviendra donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda+a^2+b^2+c^2}}-\frac{y}{(1-2\lambda+a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{d\lambda}{dr},$$

c'est-à-dire

$$\Lambda-\frac{d\Lambda}{dr}y,$$

en supposant

$$\Lambda=\frac{1}{\sqrt{1-2\lambda+a^2+b^2+c^2}}.$$

Si donc on fait

$$\Pi=-f\mathbf{S}\Lambda dm,$$

on aura

$$\Pi-\frac{d\Pi}{dr}y$$

pour les termes de la quantité V'' dont on doit tenir compte dans la recherche présente; ainsi l'on aura dans les équations différentielles ci-dessus

$$\frac{\delta V''}{\delta y}=-\frac{d\Pi}{dr},\quad \frac{\delta V''}{\delta r}=\frac{d\Pi}{dr}-y\frac{d^2\Pi}{dr^2},$$

où l'on pourra négliger encore le terme $y\frac{d^2\Pi}{dr^2}$, parce que nous faisons abstraction, dans la valeur de r, des termes venant des inégalités du mouvement de la Lune autour de la Terre.

110. Ces équations seront donc par ces substitutions

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{2dy}{dt}-3\left(1+\frac{n^2}{2}\right)x=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2dx}{dt}-\frac{d\Pi}{mdr}=0,\quad \mathrm{A}\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{d\Pi}{dr}=0.$$

Substituant dans la seconde la valeur de $\frac{d\Pi}{dr}$ tirée de la troisième, on aura donc ces deux-ci

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{2dy}{dt}-3\left(1+\frac{n^2}{2}\right)x=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{2dx}{dt}+\Delta\frac{d^2r}{dt^2}=0,$$

à cause de $\frac{\mathrm{A}}{m}=\Delta$.

Je suppose maintenant

$$y=\mathrm{P}r,\quad x=\mathrm{Q}\frac{dr}{dt}$$

(P et Q étant des constantes); on aura par ces substitutions

$$\mathrm{Q}\left[\frac{d^3r}{dt^2}-3\frac{dr}{dt}\left(1+\frac{n^2}{2}\right)\right]-\frac{2\mathrm{P}dr}{dt}=0,\quad (\mathrm{P}+2\mathrm{Q}+\Delta)\frac{d^2r}{dt^2}=0;$$

mais r étant (hypothèse) exprimé par des sinus d'angles qui croissent très-lentement, il est visible que $\frac{d^2r}{dt^2}$ sera une quantité beaucoup plus petite que $\frac{dr}{dt}$; ainsi négligeant $\frac{d^2r}{dt^2}$ vis-à-vis de $\frac{dr}{dt}$, on aura ces deux équations

$$-3\mathrm{Q}\left(1+\frac{n^2}{2}\right)-2\mathrm{P}=0,\quad \mathrm{P}+2\mathrm{Q}+\Delta=0;$$

d'où l'on tire

$$P = \frac{3\Delta\left(1+\frac{n^2}{2}\right)}{1-\frac{3n^2}{2}}, \quad Q = -\frac{2\Delta}{1-\frac{3n^2}{2}};$$

et, négligeant le nombre très-petit n^2,

$$P = 3\Delta, \quad Q = -2\Delta,$$

précisément comme dans les formules du n° 106; d'où l'on voit que ces formules, ainsi que les conclusions que nous en avons tirées, ont toute l'exactitude qu'on peut désirer.

111. Nous remarquerons ici, en finissant, que l'équation

$$A\frac{d^2r}{dt^2} + \frac{d\Pi}{dr} = 0$$

pourrait servir à déterminer plus exactement la libration de la Lune dans le cas où l'on ne voudrait pas la supposer très-petite; cette équation étant intégrée donne

$$\frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2\Pi}{A} = \frac{2k}{A},$$

en désignant par k la valeur de Π lorsque $\frac{dr}{dt} = 0$, c'est-à-dire lorsque r a sa plus grande valeur; et il ne restera plus qu'à intégrer l'équation

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2k}{A} - \frac{2\Pi}{A}}},$$

dans laquelle Π est une fonction de $\sin r$ et $\cos r$. Mais nous ne nous arrêterons pas sur ce point, qui n'est que de pure curiosité.

THÉORIE
DES VARIATIONS SÉCULAIRES
DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES.

PREMIÈRE PARTIE
CONTENANT LES PRINCIPES ET LES FORMULES GÉNÉRALES POUR DÉTERMINER CES VARIATIONS.

THÉORIE
DES VARIATIONS SÉCULAIRES
DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES.

PREMIÈRE PARTIE
CONTENANT LES PRINCIPES ET LES FORMULES GÉNÉRALES POUR DÉTERMINER CES VARIATIONS.

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1781.)

Si les Planètes étaient simplement attirées par le Soleil, et n'agissaient point les unes sur les autres, elles décriraient autour de cet astre des ellipses invariables suivant les lois de Képler, comme Newton l'a démontré le premier, et une foule d'Auteurs après lui. Mais les observations ont prouvé que le mouvement elliptique des Planètes est sujet à de petites variations, et le calcul a démontré que leur attraction mutuelle peut en être la cause. Ces variations sont de deux espèces : les unes périodiques et qui ne dépendent que de la configuration des Planètes entre elles; celles-ci sont les plus sensibles, et le calcul en a déjà été donné par différents Auteurs; les autres séculaires et qui paraissent aller toujours en augmentant, ce sont les plus difficiles à déterminer tant par les observations que par la Théorie. Les premières ne dérangent point l'orbite primitive de la Planète; ce ne sont, pour ainsi dire, que des écarts passagers

qu'elle fait dans sa course régulière, et il suffit d'appliquer ces variations au lieu de la Planète calculé par les Tables ordinaires du mouvement elliptique. Il n'en est pas de même des variations séculaires. Ces dernières altèrent les éléments mêmes de l'orbite, c'est-à-dire la position et les dimensions de l'ellipse décrite par la Planète; et quoique leur effet soit insensible dans un court espace de temps, il peut néanmoins devenir à la longue très-considérable.

C'est une Théorie complète de ces sortes de variations que j'entreprends de donner; objet qui intéresse également les Astronomes par son utilité pour la perfection des Tables, et les Géomètres par les recherches nouvelles d'analyse auxquelles il donne lieu. Quoique j'aie déjà rempli une partie de cet objet dans les Mémoires sur les équations séculaires des nœuds et des inclinaisons des Planètes (*), et sur l'altération de leurs mouvements moyens (**); et que j'aie même donné, il y a longtemps, dans les Recherches sur les Satellites de Jupiter (***), et dans celles sur Jupiter et Saturne (****), des méthodes et des formules générales pour déterminer ce genre d'inégalités, dont on n'avait encore qu'une connaissance imparfaite et peu exacte; je crois cependant devoir reprendre cette matière en entier, pour la traiter à fond et d'une manière plus directe et plus rigoureuse que je ne l'ai fait. C'est à quoi sont destinées ces nouvelles Recherches, que je divise en deux Parties. Je donnerai dans la première les formules nécessaires pour déterminer les variations des éléments d'une Planète, réduites à la forme la plus générale et la plus simple; et j'en ferai, dans la seconde, l'application aux variations séculaires des excentricités, des aphélies, des nœuds et des inclinaisons des six Planètes principales.

(*) Les Recherches *Sur les équations séculaires du mouvement des nœuds et des inclinaisons des orbites des Planètes* ont été insérées dans le Recueil des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, année 1774; elles appartiennent à la troisième Section des *OEuvres de Lagrange*. (*Note de l'Éditeur.*)

(**) *OEuvres de Lagrange*, t. IV, p. 255.

(***) Ces Recherches insérées dans les Recueils de l'Académie des Sciences de Paris appartiennent à la troisième Section des *OEuvres de Lagrange*. (*Note de l'Éditeur.*)

(****) *OEuvres de Lagrange*, t. I, p. 609.

SECTION PREMIÈRE.

MÉTHODE GÉNÉRALE POUR DÉTERMINER LES VARIATIONS DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES, CAUSÉES PAR LEUR ACTION MUTUELLE.

1. On entend par éléments de l'orbite elliptique d'une Planète la moitié du grand axe de l'ellipse, ou la distance moyenne de la Planète au Soleil; la position de ce grand axe sur le plan de l'orbite, ou le lieu des apsides; le rapport de la distance des deux foyers au grand axe, ou l'excentricité; l'angle que fait avec l'écliptique le plan de l'orbite, ou son inclinaison; et l'angle que fait avec une ligne fixe, donnée de position sur l'écliptique, l'intersection de ces deux plans, ou la position de la ligne des nœuds. Ces cinq quantités déterminent complétement la grandeur et la position de l'ellipse; elles sont par conséquent différentes pour les diverses Planètes; mais elles demeurent les mêmes pour chaque Planète en particulier, du moins tant qu'on fait abstraction des dérangements qu'elle peut éprouver de la part des autres Planètes. Ainsi les quantités dont nous parlons n'entrent point dans les équations différentielles des orbites des Planètes, parce que ces équations sont générales pour toutes les Planètes; mais elles entrent ensuite comme constantes arbitraires dans les intégrales de ces équations, c'est-à-dire dans les équations algébriques des orbites.

Pour déterminer l'effet des forces perturbatrices d'une Planète sur ses éléments, il n'y aura donc qu'à traiter les équations différentielles de son orbite comme on ferait si ces forces n'existaient pas, et l'on parviendra ainsi à des équations intégrales semblables à celles de l'orbite non troublée, mais dans lesquelles chaque constante arbitraire se trouvera augmentée d'une quantité variable, provenant des forces perturbatrices, et qui exprimera les dérangements causés par ces forces à l'élément de l'orbite représenté par la même constante. De cette manière l'effet total des perturbations sera renfermé dans les variations des éléments; et pour avoir la partie séculaire de ces variations, il suffira de rejeter tous les termes qui contiendraient des sinus et cosinus, comme ne pouvant don-

ner que des variations périodiques. Tel est, en général, l'esprit de la méthode que je vais développer et appliquer aux Planètes.

2. Considérons d'abord le mouvement d'un corps mû autour d'un centre fixe en vertu d'une force réciproquement proportionnelle au carré de la distance, et dérangé en même temps par des forces perturbatrices données, et très-petites vis-à-vis de la force principale; ce qui est le cas de toutes les Planètes.

Soient x, y, z les trois coordonnées rectangles qui déterminent la position du corps à chaque instant, et dont l'origine est supposée dans le centre de la force principale; nommant g la quantité de cette force à la distance 1, et ρ la distance du corps au centre, c'est-à-dire le rayon vecteur de l'orbite, en sorte que

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

on aura $\frac{g}{\rho^2}$ pour l'expression générale de cette force, laquelle étant décomposée suivant les trois coordonnées x, y, z, donnera ces trois-ci

$$-\frac{gx}{\rho^3}, \quad \frac{gy}{\rho^3}, \quad \frac{gz}{\rho^3}.$$

Soient de plus toutes les forces perturbatrices réduites à trois, dirigées suivant les mêmes coordonnées, et représentées par X, Y, Z.

Enfin soit t le temps écoulé depuis une époque donnée, et dont les éléments dt soient pris pour constants.

On aura, par les premiers principes de la Dynamique, ces trois équations différentielles du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{gx}{\rho^3} + \mathrm{X} = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{gy}{\rho^3} + \mathrm{Y} = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{gz}{\rho^3} + \mathrm{Z} = 0,$$

lesquelles serviront à déterminer le mouvement du corps, en vertu des forces $\frac{g}{\rho^2}$, X, Y, Z.

3. Il faut maintenant intégrer ces équations de manière que, si l'on faisait abstraction des quantités X, Y, Z, il en résultât pour l'orbite des équations algébriques.

Pour cela je fais d'abord ces trois combinaisons, qui servent à chasser les termes divisés par ρ^3,

$$\frac{x\,d^2y - y\,d^2x}{dt^2} = \mathrm{X}y - \mathrm{Y}x,$$

$$\frac{x\,d^2z - z\,d^2x}{dt^2} = \mathrm{X}z - \mathrm{Z}x,$$

$$\frac{y\,d^2z - z\,d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y.$$

Il est visible que les premiers membres de ces équations sont intégrables. Je fais donc

$$(\mathrm{A}) \qquad \begin{cases} d\mathrm{P} = (\mathrm{Y}z - \mathrm{Z}y)\,dt, \\ d\mathrm{Q} = (\mathrm{X}z - \mathrm{Z}x)\,dt, \\ d\mathrm{R} = (\mathrm{X}y - \mathrm{Y}x)\,dt, \end{cases}$$

substituant ces valeurs et intégrant, j'aurai

$$(\mathrm{B}) \qquad \begin{cases} \frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = \mathrm{R}, \\ \frac{x\,dz - z\,dx}{dt} = \mathrm{Q}, \\ \frac{y\,dz - z\,dy}{dt} = \mathrm{P}. \end{cases}$$

Les constantes nécessaires pour compléter ces intégrales sont évidemment contenues dans les quantités P, Q, R, lesquelles le deviennent elles-mêmes lorsque les forces perturbatrices X, Y, Z s'évanouissent.

4. En chassant de ces dernières équations les différences dx, dy, dz, ce qui ne demande que de les ajouter ensemble après les avoir multipliées

respectivement par z, $-y$, x, on aura sur-le-champ cette équation finie

$$Px - Qy + Rz = 0, \tag{C}$$

laquelle sous cette forme appartient à un plan passant par l'origine des coordonnées, et dont la position dépend des quantités P, Q, R. Car il est facile de démontrer que l'inclinaison de ce plan sur celui des x et y aura pour tangente la quantité $\frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{R}$, et que l'intersection des deux plans fera avec l'axe des x un angle dont la tangente sera $\frac{P}{Q}$.

Le corps se trouvera donc toujours dans ce plan. Or lorsqu'il n'y a point de forces perturbatrices, et que par conséquent les quantités P, Q, R sont constantes, la position du plan est invariable, et le corps décrit alors une orbite plane. Mais si ces quantités sont variables, la position du plan doit l'être aussi; cependant elle peut être censée constante pendant que le corps décrit chaque élément de sa trajectoire. Car les équations (B), étant multipliées respectivement par dz, $-dy$, dx, donnent celle-ci

$$Pdx - Qdy + Rdz = 0,$$

qu'on voit n'être autre chose que la différentielle de l'équation (C) au plan, en y regardant les quantités P, Q, R comme constantes.

5. Ainsi le plan dont il s'agit passera par chaque élément de l'orbite du corps, et sera celui dont l'intersection avec le plan de l'écliptique se nomme en Astronomie la *ligne des nœuds*. De sorte que, si l'on nomme θ la tangente de l'inclinaison de l'orbite sur le plan de projection que nous supposons être celui des x et y, et ω l'angle de la ligne des nœuds avec une ligne fixe qui est en même temps l'axe des x, on aura

$$\theta = \frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{R}, \quad \text{tang}\,\omega = \frac{P}{Q},$$

et de là

$$\theta \sin\omega = \frac{P}{R}, \quad \theta\cos\omega = \frac{Q}{R}.$$

On connaîtra donc les variations des éléments θ et ω par le moyen des

formules différentielles (A); c'est le chemin que nous avons suivi dans le *Mémoire sur les nœuds et les inclinaisons des Planètes*, imprimé parmi ceux de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1774.

6. Pour déterminer les variations des autres éléments, il faut trouver de nouvelles intégrales des équations proposées, en sorte qu'on puisse en déduire l'équation algébrique de l'orbite. A cet effet je remarque que la différentiation des quantités $\frac{x}{\rho}$, $\frac{y}{\rho}$, $\frac{z}{\rho}$, dans lesquelles

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

donne ces formules

$$d\frac{x}{\rho} = \frac{y(ydx-xdy)+z(zdx-xdz)}{\rho^3},$$

$$d\frac{y}{\rho} = \frac{x(xdy-ydx)+z(zdy-ydz)}{\rho^3},$$

$$d\frac{z}{\rho} = \frac{x(xdz-zdx)+y(ydz-zdy)}{\rho^3}.$$

Or, par les équations (B), on a déjà

$$ydx - xdy = -Rdt, \quad zdx - xdz = -Qdt, \quad zdy - ydz = -Pdt;$$

donc on aura

$$d\frac{x}{\rho} = -\frac{Ry+Qz}{\rho^3}dt,$$

$$d\frac{y}{\rho} = \frac{Rx-Pz}{\rho^3}dt,$$

$$d\frac{z}{\rho} = \frac{Qx+Py}{\rho^3}dt.$$

Si maintenant, dans ces équations multipliées par g, on substitue à la place des quantités $\frac{gx}{\rho^3}$, $\frac{gy}{\rho^3}$, $\frac{gz}{\rho^3}$ leurs valeurs tirées des équations différentielles données, savoir (2)

$$-\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad -\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad -\frac{d^2z}{dt^2} = Z,$$

on aura les transformées suivantes

$$g d\frac{x}{\rho} = \frac{\mathrm{R}\,d^2y + \mathrm{Q}\,d^2z}{dt} + (\mathrm{RY} + \mathrm{QZ})\,dt,$$

$$g d\frac{y}{\rho} = \frac{\mathrm{P}\,d^2z - \mathrm{R}\,d^2x}{dt} + (\mathrm{PZ} - \mathrm{RX})\,dt,$$

$$g d\frac{z}{\rho} = -\frac{\mathrm{Q}\,d^2x + \mathrm{P}\,d^2y}{dt} - (\mathrm{QX} + \mathrm{PY})\,dt.$$

Ces équations sont évidemment intégrables lorsque les forces perturbatrices X, Y, Z sont nulles, auquel cas les quantités P, Q, R deviennent constantes (3). Je fais donc, en général,

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} (\mathrm{RY} + \mathrm{QZ})\,dt - \dfrac{d\mathrm{R}\,dy + d\mathrm{Q}\,dz}{dt} = d\mathrm{N}, \\ (\mathrm{PZ} - \mathrm{RX})\,dt - \dfrac{d\mathrm{P}\,dz - d\mathrm{R}\,dx}{dt} = d\mathrm{M}, \\ -(\mathrm{QX} + \mathrm{PY})\,dt + \dfrac{d\mathrm{Q}\,dx + d\mathrm{P}\,dy}{dt} = d\mathrm{L}, \end{cases}$$

équations qui étant ajoutées respectivement aux précédentes les rendent intégrables, en sorte qu'on aura les intégrales suivantes

$$\text{(E)} \quad \begin{cases} \dfrac{gx}{\rho} = \dfrac{\mathrm{R}\,dy + \mathrm{Q}\,dz}{dt} + \mathrm{N}, \\ \dfrac{gy}{\rho} = \dfrac{\mathrm{P}\,dz - \mathrm{R}\,dx}{dt} + \mathrm{M}, \\ \dfrac{gz}{\rho} = -\dfrac{\mathrm{Q}\,dx + \mathrm{P}\,dy}{dt} + \mathrm{L}. \end{cases}$$

Les constantes arbitraires que l'intégration introduit sont renfermées dans les quantités L, M, N, lesquelles le deviennent elles-mêmes dans le cas où X, Y, Z sont nulles.

7. Les intégrales qu'on vient de trouver en donnent immédiatement une algébrique, en éliminant les différences dx, dy, dz; et pour cela je

les ajoute ensemble après les avoir multipliées respectivement par x, y, z; ce qui, à cause de

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

donne celle-ci

$$g\rho = \mathrm{R}\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} + \mathrm{Q}\frac{x\,dz - z\,dx}{dt} + \mathrm{P}\frac{y\,dz - z\,dy}{dt} + \mathrm{N}x + \mathrm{M}y + \mathrm{L}z;$$

laquelle, en vertu des équations (B), devient

$$\text{(F)} \qquad g\rho = \mathrm{N}x + \mathrm{M}y + \mathrm{L}z + \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2.$$

Cette équation considérée sous cette forme est évidemment du second degré, à cause de

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

de sorte qu'en la combinant avec l'équation linéaire (C), on aura pour la projection de l'orbite une section conique; et l'orbite elle-même en sera une aussi, tant que les quantités P, Q, R, L, M, N seront constantes.

8. Pour déterminer dans ce cas la nature et la position de l'orbite, je commence par remarquer que des six constantes dont nous parlons il n'y en a que cinq d'arbitraires. Car, si l'on multiplie les équations intégrales (E) respectivement par P, $-$Q, R, et qu'ensuite on les ajoute ensemble, on aura, en vertu de l'équation déjà trouvée (C), celle-ci

$$\text{(G)} \qquad 0 = \mathrm{NP} - \mathrm{MQ} + \mathrm{LR},$$

laquelle exprime un rapport général qui doit subsister entre les six quantités P, Q, R, N, M, L, soit qu'elles soient constantes ou non.

Cela posé, je fais, pour abréger,

$$\Pi^2 = \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 + \mathrm{R}^2,$$
$$\lambda^2 = \mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2,$$

et, prenant trois autres quantités A, B, C telles que

$$\mathrm{A} = \mathrm{PM} + \mathrm{QN}, \quad \mathrm{B} = \mathrm{RN} - \mathrm{PL}, \quad \mathrm{C} = -\mathrm{RM} - \mathrm{QL},$$

je suppose

$$(H)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{P}{\Pi}\zeta + \dfrac{N}{\lambda}\xi + \dfrac{C}{\Pi\lambda}\psi, \\ y = -\dfrac{Q}{\Pi}\zeta + \dfrac{M}{\lambda}\xi + \dfrac{B}{\Pi\lambda}\psi, \\ z = \dfrac{R}{\Pi}\zeta + \dfrac{L}{\lambda}\xi + \dfrac{A}{\Pi\lambda}\psi, \end{cases}$$

ζ, ξ, ψ étant de nouvelles variables; j'aurai d'abord, en vertu de l'équation de condition (G),

$$Px - Qy + Rz = \Pi\zeta,$$
$$Nx + My + Lz = \lambda\xi.$$

De sorte que les deux équations de l'orbite (C) et (F) se réduiront à cette forme très-simple

$$\zeta = 0, \quad g\rho = \lambda\xi + \Pi^2.$$

Or

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

et si l'on substitue les expressions précédentes de x, y, z, qu'on ait égard à l'équation de condition, et qu'on observe que

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 + C^2 &= (PM + QN)^2 + (RN - PL)^2 + (RM + QL)^2 \\ &= (P^2 + Q^2 + R^2)(L^2 + M^2 + N^2) - (PN - QM + RL)^2 \\ &= \Pi^2\lambda^2, \end{aligned}$$

on aura

$$\rho^2 = \zeta^2 + \xi^2 + \psi^2;$$

d'où l'on peut conclure que les quantités ζ, ξ, ψ sont aussi des coordonnées rectangles, qui répondent aux mêmes points que les coordonnées x, y, z, et qui ont la même origine, mais une position différente.

9. L'équation

$$\zeta = 0$$

fait voir que la courbe est toute dans le plan des coordonnées ξ et ψ; et l'équation

$$g\rho = \lambda\xi + \Pi^2,$$

dans laquelle

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \psi^2},$$

à cause de $\zeta = 0$, montre que cette courbe est une ellipse dans laquelle $\frac{\Pi^2}{g}$ est le paramètre du grand axe, $\frac{\lambda}{g}$ est l'excentricité, ou la distance des foyers divisée par le grand axe, ρ est le rayon vecteur partant de l'un des foyers, et ξ l'abscisse prise sur le grand axe depuis le même foyer et dirigée vers l'apside supérieure.

Et pour connaître la position de cet axe relativement au plan de projection, il n'y a qu'à supposer, dans les formules (H), les coordonnées ψ nulles, ce qui, à cause de $\zeta = 0$, donne

$$x = \frac{N}{\lambda}\xi, \quad y = \frac{M}{\lambda}\xi, \quad z = \frac{L}{\lambda}\xi;$$

or il est visible que, si l'on nomme φ l'angle que la projection de cet axe sur le plan des coordonnées x, y fait avec l'axe des x, et η l'angle que le même axe fait avec ce plan, on aura

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{tang}\eta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{M}{N}, \quad \operatorname{tang}\eta = \frac{L}{\sqrt{M^2 + N^2}};$$

d'où, à cause de

$$\lambda = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

on tire

$$\sin\eta = \frac{L}{\lambda}, \quad \cos\eta\sin\varphi = \frac{M}{\lambda}, \quad \cos\eta\cos\varphi = \frac{N}{\lambda}.$$

Au reste, si l'on substitue ces valeurs de L, M, N, ainsi que celles de P et Q tirées des formules du n° 5, dans l'équation de condition (G), on aura

$$\theta\cos\eta(\cos\varphi\sin\omega - \sin\varphi\cos\omega) + \sin\eta = 0;$$

d'où résulte la formule

$$\operatorname{tang}\eta = \theta\sin(\varphi - \omega).$$

10. Lorsqu'on veut avoir égard à l'effet des forces perturbatrices, les quantités que nous avons supposées constantes ne le sont plus, et l'orbite telle que nous venons de la déterminer variera d'un instant à l'autre, mais elle pourra néanmoins être prise pour invariable pendant que le corps décrit chacun de ses éléments. En effet les équations (E) du n° 6 étant multipliées respectivement par dx, dy, dz, et ajoutées ensemble, donnent, à cause de $\rho\,d\rho = x\,dx + y\,dy + z\,dz$,

$$g\,d\rho = \mathrm{N}\,dx + \mathrm{M}\,dy + \mathrm{L}\,dz;$$

or cette équation est évidemment la différentielle de l'équation (F), en y regardant les quantités L, M, N, P, Q, R comme constantes.

Ainsi, dans le cas de la variabilité de ces quantités, les deux équations (C) et (F) de l'orbite du corps ont la propriété que ces mêmes quantités y peuvent être regardées comme constantes dans la différentiation de ces équations (4). D'où l'on peut conclure que le corps sera mû à chaque instant comme s'il décrivait réellement l'ellipse déterminée par ces équations; mais cette ellipse variera continuellement de position et de grandeur, et l'on connaîtra les variations de ses éléments au moyen des formules différentielles (A) et (D) des n^{os} 3 et 6.

11. Les réductions que nous avons faites ci-dessus (8) étant générales, soit que les éléments de l'orbite soient constants ou non, comme on peut s'en convaincre aisément par la nature de nos formules, il s'ensuit que, si dans les formules (H) on substitue pour ζ, ξ, ψ leurs valeurs tirées des équations

$$\zeta = 0, \quad g\rho = \lambda\xi + \Pi^2, \quad \xi^2 + \psi^2 = \rho^2,$$

on aura, en général,

$$x = \frac{\mathrm{N}}{\lambda^2}(g\rho - \Pi^2) + \frac{\mathrm{C}}{\lambda^2}\sqrt{-\Delta\rho^2 + 2g\rho - \Pi^2},$$

$$y = \frac{\mathrm{M}}{\lambda^2}(g\rho - \Pi^2) + \frac{\mathrm{B}}{\lambda^2}\sqrt{-\Delta\rho^2 + 2g\rho - \Pi^2},$$

$$z = \frac{\mathrm{L}}{\lambda^2}(g\rho - \Pi^2) + \frac{\mathrm{A}}{\lambda^2}\sqrt{-\Delta\rho^2 + 2g\rho - \Pi^2},$$

en faisant, pour abréger,

$$\Delta = \frac{g^2 - \lambda^2}{\Pi^2}.$$

Ces expressions de x, y, z en ρ sont les résultats des deux équations (C) et (F) combinées avec la formule

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

(ρ étant le rayon vecteur); or, comme les quantités L, M, N, P, Q, R demeurent constantes dans la différentiation de ces équations (numéro précédent), il s'ensuit que, pour avoir les différences dx, dy, dz, il suffira de faire varier dans les expressions précédentes la quantité ρ, en regardant toutes les autres quantités comme constantes, telles qu'elles le seraient dans le cas de l'orbite invariable.

12. Puisqu'on a déjà x, y, z en ρ, il ne s'agira plus que d'avoir ρ en t pour connaître le lieu du corps dans un instant quelconque. Pour cela on peut se servir d'une quelconque des intégrales trouvées (B) ou (E); nous choisirons la première des intégrales (B), savoir

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = \mathrm{R},$$

dont le premier membre, en y substituant les valeurs précédentes de x, y et de leurs différentielles, et remarquant que (8)

$$\begin{aligned}\mathrm{NB} - \mathrm{MC} &= \mathrm{R}(\mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2) - \mathrm{L}(\mathrm{NP} - \mathrm{MQ})\\ &= \mathrm{R}(\mathrm{L}^2 + \mathrm{M}^2 + \mathrm{N}^2) - \mathrm{L}(\mathrm{NP} - \mathrm{MQ} + \mathrm{LR})\\ &= \mathrm{R}\lambda^2,\end{aligned}$$

devient

$$-\frac{\mathrm{R}\rho\,d\rho}{dt\sqrt{-\Delta\rho^2 + 2g\rho - \Pi^2}};$$

de sorte qu'on aura

$$dt = -\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{-\Delta\rho^2 + 2g\rho - \Pi^2}}.$$

Cette équation peut aussi se déduire directement des intégrales (B) et (E) sans aucune substitution auxiliaire.

Car :

1° En ajoutant ensemble les carrés des équations (B), on a

$$\frac{(x\,dy-y\,dx)^2}{dt^2}+\frac{(x\,dz-z\,dx)^2}{dt^2}+\frac{(y\,dz-z\,dy)^2}{dt^2}$$

$$=\frac{(x^2+y^2+z^2)(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2}-\frac{(x\,dx+y\,dy+z\,dz)^2}{dt^2}=\mathrm{P}^2+\mathrm{Q}^2+\mathrm{R}^2=\Pi^2,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\rho^2(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2}-\frac{\rho^2 d\rho^2}{dt^2}=\Pi^2;$$

d'où l'on tire

$$dx^2+dy^2+dz^2=\frac{\Pi^2}{\rho^2}dt^2+d\rho^2.$$

2° En ajoutant aussi ensemble les carrés des équations (E), mais après y avoir transposé les termes N, M, L, on a

$$\left(\frac{g\,x}{\rho}-\mathrm{N}\right)^2+\left(\frac{g\,y}{\rho}-\mathrm{M}\right)^2+\left(\frac{g\,z}{\rho}-\mathrm{L}\right)^2=g^2-\frac{2g}{\rho}(\mathrm{N}x+\mathrm{M}y+\mathrm{L}z)+\lambda^2$$

$$=\frac{(\mathrm{R}\,dy+\mathrm{Q}\,dz)^2}{dt^2}+\frac{(\mathrm{P}\,dz-\mathrm{R}\,dx)^2}{dt^2}+\frac{(\mathrm{Q}\,dx+\mathrm{P}\,dy)^2}{dt^2}$$

$$=\frac{\Pi^2(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2}-\frac{(\mathrm{P}\,dx-\mathrm{Q}\,dy+\mathrm{R}\,dz)^2}{dt^2};$$

mais on a (4)

$$\mathrm{P}\,dx-\mathrm{Q}\,dy+\mathrm{R}\,dz=0,$$

et (7)

$$\mathrm{N}x+\mathrm{M}y+\mathrm{L}z=g\rho-\Pi^2;$$

donc

$$dx^2+dy^2+dz^2=\left(\frac{2g}{\rho}-\Delta\right)dt^2.$$

Égalant ces deux valeurs de $dx^2+dy^2+dz^2$, on en tire comme ci-dessus l'équation

$$dt=-\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{-\Delta\rho^2+2g\rho-\Pi^2}}.$$

13. Cette équation a donc lieu, en général, soit que les éléments de l'orbite soient invariables ou non; et elle fait voir que les apsides de l'orbite sont rigoureusement dans les points dont les rayons vecteurs sont les racines de l'équation

$$-\Delta\rho^2-2g\rho-\Pi^2=0;$$

de sorte que $\frac{g}{\Delta}$, moitié de la somme des deux racines, sera la distance moyenne. C'est aussi ce qui résulte de l'expression même de Δ (11), en regardant l'orbite comme une ellipse dont $\frac{\Pi^2}{\rho}$ est le paramètre et $\frac{\lambda}{g}$ l'excentricité (9).

14. Il ne reste donc plus qu'à intégrer l'équation trouvée, pour en déduire la valeur de ρ en t; c'est ce qui est facile dans le cas où les quantités Δ et Π sont constantes. Car la quantité sous le signe peut se mettre sous cette forme

$$\frac{g^2}{\Delta}-\Pi^2-\Delta\left(\rho-\frac{g}{\Delta}\right)^2,$$

ou bien $\left(\text{à cause de } \Pi^2=\frac{g^2-\lambda^2}{\Delta}\right)$ sous celle-ci

$$\Delta\left[\frac{\lambda^2}{\Delta^2}-\left(\rho-\frac{g}{\Delta}\right)^2\right];$$

or on sait que

$$-\frac{d\rho}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\Delta^2}-\left(\rho-\frac{g}{\Delta}\right)^2}}$$

est l'élément de l'angle dont le cosinus est $\rho-\frac{g}{\Delta}$ divisé par $\frac{\lambda}{\Delta}$; si donc on nomme ψ cet angle, on aura

$$\rho=\frac{g+\lambda\cos\psi}{\Delta},$$

et l'équation dont il s'agit deviendra

$$dt=\frac{(g+\lambda\cos\psi)\,d\psi}{\Delta^{\frac{3}{2}}},$$

laquelle donne en intégrant

$$t + T = \frac{g\psi + \lambda \sin\psi}{\Delta^{\frac{3}{2}}},$$

T étant la constante arbitraire.

C'est la formule ordinaire qui sert de fondement aux solutions du Problème de Képler, et où l'angle ψ est ce qu'on nomme en Astronomie l'*anomalie excentrique*.

Lorsque les quantités Δ et Π sont variables, on peut aussi employer la même substitution de

$$\rho = \frac{g + \lambda\cos\psi}{\Delta};$$

et l'on trouvera alors

$$dt = \frac{g + \lambda\cos\psi}{\Delta^{\frac{3}{2}}}\left(d\psi + \frac{\cos\psi\, d\lambda}{\lambda\sin\psi}\right) + \frac{(g + \lambda\cos\psi)^2 d\Delta}{\Delta^{\frac{3}{2}}\lambda\sin\psi};$$

mais cette formule est peu commode pour le calcul, à cause qu'elle contient $\sin\psi$ au dénominateur.

On pourrait remédier à cet inconvénient en substituant directement la valeur de ρ dans les expressions de x, y du n° 11, ce qui donnera

$$x = \frac{N}{\Delta\lambda}(\lambda + g\cos\psi) + \frac{C}{\sqrt{\Delta.\lambda}}\sin\psi,$$

$$y = \frac{M}{\Delta\lambda}(\lambda + g\cos\psi) + \frac{B}{\sqrt{\Delta.\lambda}}\sin\psi,$$

et mettant ensuite ces valeurs de x et y dans l'équation

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{dt} = R.$$

Mais il sera beaucoup plus simple, surtout dans le cas où l'excentricité et l'inclinaison sont fort petites (qui est celui de toutes les Planètes de notre système), d'employer d'abord dans cette même équation la substitution de

$$x = r\cos q, \quad y = r\sin q,$$

r étant le rayon vecteur de l'orbite projetée et q l'angle décrit par ce rayon; car on aura par là

$$dt = \frac{r^2 dq}{R},$$

et il n'y aura plus qu'à mettre pour r^2 sa valeur en q tirée des deux équations de l'orbite (C) et (F). C'est ainsi que nous en userons dans la suite.

15. Pour appliquer aux Planètes les formules générales que nous venons de trouver, il y faudra substituer les valeurs des forces perturbatrices X, Y, Z qui résultent de l'attraction que chaque Planète éprouve de la part de toutes les autres.

Soit S la masse du Soleil, T celle de la Planète dont on cherche le mouvement, T′, T″,... les masses des Planètes perturbatrices; on sait que la Planète T est attirée vers le Soleil par une force égale à $\frac{S+T}{\rho^2}$, ρ étant sa distance au Soleil, et qu'en vertu de cette force elle doit décrire autour du Soleil la même orbite que si le Soleil était immobile. On peut donc regarder le Soleil comme fixe par rapport à la Planète T, mais il faut alors tenir compte de l'action des autres Planètes T′, T″,... sur le Soleil, en transportant l'effet de cette action à la Planète T en sens contraire.

Ainsi, prenant le centre du Soleil pour l'origine des coordonnées, et nommant x, y, z celles de l'orbite de la Planète T autour du Soleil, on aura d'abord dans les formules du n° 2

$$g = S + T.$$

Ensuite, si l'on marque d'un trait toutes les quantités qui se rapportent à la planète T′, de deux traits celles qui se rapportent à la Planète T″,...; qu'enfin on désigne par σ' la distance rectiligne entre les corps T et T′, par σ'' la distance rectiligne entre les corps T et T″, et ainsi du reste; on trouvera :

1° Que la force $\frac{T'}{\sigma'^2}$, avec laquelle le corps T′ attire le corps T suivant la direction de la ligne σ', produira ces trois forces suivant les directions

des coordonnées x, y, z, savoir

$$\frac{T'(x-x')}{\sigma'^3}, \quad \frac{T'(y-y')}{\sigma'^3}, \quad \frac{T'(z-z')}{\sigma'^3};$$

2° Que la force $\frac{T'}{\rho'^2}$, avec laquelle la Planète T′ attire le Soleil S, étant transportée en sens contraire à la Planète T′, donnera encore ces trois autres forces suivant les mêmes directions, savoir

$$\frac{T'x'}{\rho'^3}, \quad \frac{T'y'}{\rho'^3}, \quad \frac{T'z'}{\rho'^3}.$$

On trouvera de pareilles formules pour les forces résultantes de l'attraction des autres Planètes T″, T‴, ...; et, rassemblant respectivement ces différentes forces, on aura les valeurs des forces perturbatrices X, Y, Z de la Planète T, lesquelles seront donc exprimées ainsi

$$X = T'\left(\frac{x-x'}{\sigma'^3} + \frac{x'}{\rho'^3}\right) + T''\left(\frac{x-x''}{\sigma''^3} + \frac{x''}{\rho''^3}\right) + T'''\left(\frac{x-x'''}{\sigma'''^3} + \frac{x'''}{\rho'''^3}\right) + \ldots$$

$$Y = T'\left(\frac{y-y'}{\sigma'^3} + \frac{y'}{\rho'^3}\right) + T''\left(\frac{y-y''}{\sigma''^3} + \frac{y''}{\rho''^3}\right) + T'''\left(\frac{y-y'''}{\sigma'''^3} + \frac{y'''}{\rho'''^3}\right) + \ldots,$$

$$Z = T'\left(\frac{z-z'}{\sigma'^3} + \frac{z'}{\rho'^3}\right) + T''\left(\frac{z-z''}{\sigma''^3} + \frac{z''}{\rho''^3}\right) + T'''\left(\frac{z-z'''}{\sigma'''^3} + \frac{z'''}{\rho'''^3}\right) + \ldots.$$

16. Or on a

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sigma' = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2},$$

$$\sigma'' = \sqrt{(x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc, si l'on fait

$$\Omega = T'\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{\rho'^3} - \frac{1}{\sigma'}\right) + T''\left(\frac{xx''+yy''+zz''}{\rho''^3} - \frac{1}{\sigma''}\right) + T'''\left(\frac{xx'''+yy'''+zz'''}{\rho'''^3} - \frac{1}{\sigma'''}\right) + \ldots,$$

et qu'on dénote à l'ordinaire par $\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{d\Omega}{dy}$, $\frac{d\Omega}{dz}$ les coefficients de dx, dy, dz, dans la différentielle de la quantité Ω regardée comme fonction des variables x, y, z; il est clair que les expressions précédentes de X, Y, Z se réduiront à celles-ci

$$X = \frac{d\Omega}{dx}, \quad Y = \frac{d\Omega}{dy}, \quad Z = \frac{d\Omega}{dz}.$$

17. On substituera donc ces valeurs dans les équations différentielles (A) et (D), et l'on aura en premier lieu

$$dP = \left(\frac{d\Omega}{dy}z - \frac{d\Omega}{dz}y\right)dt,$$

$$dQ = \left(\frac{d\Omega}{dx}z - \frac{d\Omega}{dz}x\right)dt,$$

$$dR = \left(\frac{d\Omega}{dx}y - \frac{d\Omega}{dy}x\right)dt.$$

Ces formules serviront à déterminer les variations de la longitude ω du nœud et de la tangente ϑ de l'inclinaison, en faisant (5)

$$P = R\vartheta\sin\omega, \quad Q = R\vartheta\cos\omega,$$

et de plus la variation du paramètre $\frac{\Pi^2}{g}$ de l'orbite (9), Π^2 étant égal à $P^2 + Q^2 + R^2$.

18. Si l'on voulait déterminer directement les variations de Π, il n'y aurait qu'à ajouter ensemble les équations précédentes, après les avoir multipliées respectivement par P, Q, R. On aura ainsi en ordonnant les termes

$$\Pi\,d\Pi = \frac{d\Omega}{dx}(Qz + Ry)\,dt + \frac{d\Omega}{dy}(Pz - Rx)\,dt - \frac{d\Omega}{dz}(Py + Qx)\,dt.$$

Or, en substituant pour P, Q, R les valeurs données par les équa-

tions (B) du n° 3, on a

$$\begin{aligned}(\mathrm{Q}z+\mathrm{R}y)\,dt&=(x\,dz-z\,dx)\,z+(x\,dy-y\,dx)\,y\\&=x(y\,dy+z\,dz)-dx(y^2+z^2)=x\rho\,d\rho-\rho^2dx,\\(\mathrm{P}z-\mathrm{R}x)\,dt&=(y\,dz-z\,dy)\,z-(x\,dy-y\,dx)\,x\\&=y(x\,dx+z\,dz)-dy(x^2+z^2)=y\rho\,d\rho-\rho^2dy,\\(\mathrm{P}y+\mathrm{Q}x)\,dt&=(y\,dz-z\,dy)\,y+(x\,dz-z\,dx)\,x\\&=-z(x\,dx+y\,dy)+dz(x^2+y^2)=-z\rho\,d\rho+\rho^2dz.\end{aligned}$$

Donc si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{d\Omega}{dx}x+\frac{d\Omega}{dy}y+\frac{d\Omega}{dz}z=\Phi,\quad \frac{d\Omega}{dx}dx+\frac{d\Omega}{dy}dy+\frac{d\Omega}{dz}dz=(d\Omega)$$

[l'expression $(d\Omega)$ indique la différentielle partielle de Ω, en n'y faisant varier que les x, y, z relatives à la Planète T], on aura

$$\Pi\,d\Pi=\Phi\rho\,d\rho-\rho^2(d\Omega).$$

19. En second lieu, les équations (D) deviendront, par la substitution des valeurs précédentes de $d\mathrm{P}$, $d\mathrm{Q}$, $d\mathrm{R}$,

$$\begin{aligned}-\frac{d\Omega}{dx}(y\,dy+z\,dz)+\frac{d\Omega}{dy}(x\,dy+\mathrm{R}\,dt)+\frac{d\Omega}{dz}(x\,dz+\mathrm{Q}\,dt)&=d\mathrm{N},\\\frac{d\Omega}{dx}(y\,dx-\mathrm{R}\,dt)-\frac{d\Omega}{dy}(x\,dx+z\,dz)+\frac{d\Omega}{dz}(y\,dz+\mathrm{P}\,dt)&=d\mathrm{M},\\\frac{d\Omega}{dx}(z\,dx-\mathrm{Q}\,dt)+\frac{d\Omega}{dy}(z\,dy-\mathrm{P}\,dt)-\frac{d\Omega}{dz}(y\,dy+x\,dx)&=d\mathrm{L},\end{aligned}$$

et si l'on y substitue encore les valeurs de $\mathrm{P}\,dt$, $\mathrm{Q}\,dt$, $\mathrm{R}\,dt$ (3), elles se réduiront à la forme suivante

$$\begin{aligned}d\mathrm{N}&=2x(d\Omega)-\Phi dx-\frac{d\Omega}{dx}\rho d\rho,\\d\mathrm{M}&=2y(d\Omega)-\Phi dy-\frac{d\Omega}{dy}\rho d\rho,\\d\mathrm{L}&=2z(d\Omega)-\Phi dz-\frac{d\Omega}{dz}\rho d\rho,\end{aligned}$$

les quantités Φ et $(d\Omega)$ étant les mêmes que dans le numéro précédent.

Par ces équations, on aura les variations de l'excentricité $\frac{\lambda}{g}$, de la longitude de l'aphélie φ, et de la latitude η de cet aphélie par rapport au plan de projection, au moyen des formules (10)

$$\mathrm{L}=\lambda\sin\eta,\quad \mathrm{M}=\lambda\cos\eta\sin\varphi,\quad \mathrm{N}=\lambda\cos\eta\cos\varphi.$$

20. Au reste il n'est pas nécessaire d'employer ces trois équations pour la détermination des éléments dont il s'agit; car nous avons vu (8) qu'il y a entre les quantités L, M, N cette équation de condition

$$\mathrm{NP}-\mathrm{MQ}+\mathrm{LR}=0,$$

au moyen de laquelle on peut déterminer une quelconque d'entre elles par les deux autres. On pourrait peut-être douter si en effet les formules différentielles trouvées satisfont à cette équation; pour lever ce doute et confirmer en même temps la justesse de nos formules, nous allons faire voir comment elles y satisfont; à cet effet nous ajouterons d'abord ensemble les trois formules du numéro précédent, après les avoir multipliées respectivement par P, $-$Q, R; ce qui, en ayant égard (4) aux équations

$$\mathrm{P}x-\mathrm{Q}y+\mathrm{R}z=0,\quad \mathrm{P}\,dx-\mathrm{Q}\,dy+\mathrm{R}\,dz=0,$$

donnera

$$\mathrm{P}\,d\mathrm{N}-\mathrm{Q}\,d\mathrm{M}+\mathrm{R}\,d\mathrm{L}=-\left(\mathrm{P}\frac{d\Omega}{dx}-\mathrm{Q}\frac{d\Omega}{dy}+\mathrm{R}\frac{d\Omega}{dz}\right)\rho\,d\rho;$$

ensuite les trois formules du n° 17, étant multipliées respectivement par N, $-$M, L et ajoutées ensemble, donneront

$$\mathrm{N}\,d\mathrm{P}-\mathrm{M}\,d\mathrm{Q}+\mathrm{L}\,d\mathrm{R}=\frac{d\Omega}{dx}(\mathrm{L}y-\mathrm{M}z)\,dt+\frac{d\Omega}{dy}(\mathrm{N}z-\mathrm{L}x)\,dt+\frac{d\Omega}{dz}(\mathrm{M}x-\mathrm{N}y)\,dt;$$

mais, en substituant les valeurs de L, M, N résultantes des formules (E) du n° 6, on a

$$\begin{aligned}(\mathrm{L}y-\mathrm{M}z)\,dt&=(\mathrm{Q}\,dx+\mathrm{P}\,dy)\,y-(\mathrm{R}\,dx-\mathrm{P}\,dz)\,z,\\(\mathrm{N}z-\mathrm{L}x)\,dt&=-(\mathrm{R}\,dy+\mathrm{Q}\,dz)\,z-(\mathrm{Q}\,dx+\mathrm{P}\,dy)\,x,\\(\mathrm{M}x-\mathrm{N}y)\,dt&=(\mathrm{R}\,dx-\mathrm{P}\,dz)\,x+(\mathrm{R}\,dy+\mathrm{Q}\,dz)\,y,\end{aligned}$$

ce qui, à cause de

$$Px - Qy + Rz = 0,$$

se réduit à

$$(Ly - Mz)dt = P\rho\, d\rho, \quad (Nz - Lx)dt = -Q\rho\, d\rho, \quad (Mx - Ny)dt = R\rho\, d\rho;$$

de sorte qu'on aura

$$N\,dP - M\,dQ + L\,dR = \left(P\frac{d\Omega}{dx} - Q\frac{d\Omega}{dy} + R\frac{d\Omega}{dz}\right)\rho\, d\rho.$$

Donc enfin

$$N\,dP - M\,dQ + L\,dR + P\,dN - Q\,dM + R\,dL = 0,$$

équation qui est, comme on voit, la différentielle de celle qu'il s'agissait de vérifier.

21. Puisque

$$\lambda^2 = L^2 + M^2 + N^2,$$

on aura, en ajoutant ensemble les trois équations du n° 19, après les avoir respectivement multipliées par N, M, L,

$$\lambda\, d\lambda = 2(Nx + My + Lz)(d\Omega) - \Phi(N\,dx + M\,dy + L\,dz) - \left(N\frac{d\Omega}{dx} + M\frac{d\Omega}{dy} + L\frac{d\Omega}{dz}\right)\rho\, d\rho;$$

or l'équation de l'orbite donne (7, 10)

$$Nx + My + Lz = g\rho - \Pi^2, \quad N\,dx + M\,dy + L\,dz = g\,d\rho;$$

de plus, les équations (E) donnent, en substituant pour P, Q, R leurs valeurs tirées des équations (B),

$$(I)\qquad \begin{cases} N = x\left(\dfrac{g}{\rho} - \dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + \dfrac{\rho\, d\rho\, dx}{dt^2}, \\ M = y\left(\dfrac{g}{\rho} - \dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + \dfrac{\rho\, d\rho\, dy}{dt^2}, \\ L = z\left(\dfrac{g}{\rho} - \dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}\right) + \dfrac{\rho\, d\rho\, dz}{dt^2}, \end{cases}$$

et les mêmes équations donnent aussi, comme on l'a vu dans le n° 12,

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \frac{2g}{\rho} - \Delta;$$

donc, faisant ces substitutions, on aura

$$\lambda\, d\lambda = \left(2g\rho - 2\Pi^2 - \frac{\rho^2 d\rho^2}{dt^2}\right)(d\Omega) - \Delta\Phi\rho\, d\rho;$$

mais on a par les formules du même numéro cité

$$\frac{\rho^2 d\rho^2}{dt^2} = -\Delta\rho^2 + 2g\rho - \Pi^2;$$

donc

$$\lambda\, d\lambda = (\Delta\rho^2 - \Pi^2)(d\Omega) - \Delta\Phi\rho\, d\rho,$$

Δ étant égal à $\frac{g^2 - \lambda^2}{\Pi^2}$ (11). Ainsi l'on aura directement par cette équation la variation de l'excentricité $\frac{\lambda}{g}$.

22. Enfin, puisque

$$\lambda^2 = g^2 - \Delta\Pi^2,$$

on aura, en substituant la valeur de $\Pi\, d\Pi$ du n° 18,

$$\lambda\, d\lambda = -\Delta\Pi\, d\Pi - \Pi^2\frac{d\Delta}{2} = -\Delta\Phi\rho\, d\rho + \Delta\rho^2(d\Omega) - \Pi^2\frac{d\Delta}{2};$$

et, cette valeur de $\lambda\, d\lambda$ étant comparée à celle que nous venons de trouver dans le numéro précédent, il viendra cette formule très-simple

$$\frac{d\Delta}{2} = (d\Omega),$$

laquelle servira à déterminer les variations de la distance moyenne $\frac{g}{\Delta}$ (13).

23. La méthode que j'ai suivie pour trouver les formules différentielles des variations des éléments des Planètes est, ce me semble, la plus directe et la plus naturelle qu'il est possible, étant déduite des principes mêmes de la chose; mais j'aurais pu y parvenir plus simplement par la

méthode générale dont je me suis servi pour déterminer les variations de la distance moyenne, dans les Mémoires de 1776 (*), méthode qui a l'avantage d'être applicable à toutes les questions du même genre.

Suivant cette méthode, si $V = a$ est une intégrale quelconque des équations différentio-différentielles de l'orbite non troublée, V étant une fonction connue de t, x, y, z et de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et a une constante arbitraire, et qu'on veuille supposer a variable pour l'orbite troublée, il n'y aura qu'à différentier, en faisant varier d'un côté la quantité a, et de l'autre les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ contenues dans V, et substituer ensuite à la place des différences de celles-ci les valeurs de $\frac{d^2x}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt}$, $\frac{d^2z}{dt}$, dues uniquement aux forces perturbatrices. Car la différentielle de V, prise en faisant tout varier, doit devenir nulle d'elle-même, lorsqu'on y substitue pour $d\frac{dx}{dt}$, $d\frac{dy}{dt}$, $d\frac{dz}{dt}$ les valeurs tirées des équations de l'orbite non troublée, puisque $V = a$ est (hypothèse) une intégrale de ces équations. De sorte qu'en ajoutant à ces valeurs les termes $-X\,dt$, $-Y\,dt$, $-Z\,dt$ dus aux forces perturbatrices (2), on aura simplement

$$dV = \frac{dV}{d\frac{dx}{dt}}(-X\,dt) + \frac{dV}{d\frac{dy}{dt}}(-Y\,dt) + \frac{dV}{d\frac{dz}{dt}}(-Z\,dt);$$

les quantités $\frac{dV}{d\frac{dx}{dt}}, \cdots$ exprimant suivant la notation reçue les coefficients de $d\frac{dx}{dt}, \cdots$ dans la différentielle de V.

De cette manière, si l'on change, suivant le n° 16, les quantités X, Y, Z en $\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{d\Omega}{dy}$, $\frac{d\Omega}{dz}$, on aura, pour la variation de a, cette équation

$$da = -\frac{dV}{d\frac{dx}{dt}}\frac{d\Omega}{dx}\,dt - \frac{dV}{d\frac{dy}{dt}}\frac{d\Omega}{dy}\,dt - \frac{dV}{d\frac{dz}{dt}}\frac{d\Omega}{dz}\,dt.$$

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. IV, p. 255.

Or on sait que les éléments de l'orbite ne sont autre chose que les constantes arbitraires introduites par l'intégration des équations différentielles primitives, ou des fonctions de ces constantes; on aura donc les formules différentielles de la variation des éléments, pourvu qu'on ait les valeurs de ces éléments exprimées par les variables de l'orbite non troublée et par leurs différences premières; valeurs qui peuvent se trouver immédiatement par l'intégration même des équations différentielles de l'orbite, ou bien se déduire des équations finies de l'orbite combinées avec les différences premières de ces équations.

Ayant déterminé ainsi la valeur variable de chaque constante ou élément de l'orbite, on aura, entre ces constantes et t, x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, des équations de la même forme pour l'orbite troublée que pour l'orbite non troublée; de sorte que les équations finies déduites de celle-ci, ainsi que les différences premières de ces équations seront encore de la même forme dans les deux cas; par conséquent les constantes dont nous parlons pourront toujours être regardées et traitées comme invariables dans la différentiation des équations finies de l'orbite; ce qui rend raison de la remarque faite dans les n^os^ 4 et 10 sur les équations (C) et (F).

24. Cela posé, si dans les équations différentielles du n° 3 on suppose X, Y, Z nulles, on a celles de l'orbite non troublée; et, intégrant ces équations par la méthode des n^os^ 3 et 6, on aura des intégrales de la forme (B) et (C), dans lesquelles P, Q, R, L, M, N seront des constantes arbitraires et invariables. Or les intégrales (B) ont déjà la forme demandée $V = a$; donc il n'y aura, suivant la méthode précédente, qu'à les différentier, en y faisant varier P, Q, R et $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et substituer ensuite $-\frac{d\Omega}{dx}\,dt$, $-\frac{d\Omega}{dy}\,dt$, $-\frac{d\Omega}{dz}\,dt$ à la place de $d\frac{dx}{dt}$, $d\frac{dy}{dt}$, $d\frac{dz}{dt}$; on aura ainsi sur-le-champ les formules différentielles du n° 17.

A l'égard des intégrales (E), pour les réduire à la forme dont il s'agit, il ne faut qu'y substituer les valeurs de P, Q, R données par les intégrales précédentes; on aura ainsi les équations (I) du n° 21, lesquelles,

étant différentiées en y faisant varier L, M, N et $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, donneront immédiatement les formules différentielles du n° 19, en se souvenant que

$$\rho\, d\rho = x\,dx + y\,dy + z\,dz.$$

On peut de même déterminer directement les variations des éléments Π et Δ par le moyen des formules trouvées dans le n° 12. Car :

1° On a

$$\Pi^2 = \frac{\rho^2(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2} - \frac{(\rho\, d\rho)^2}{dt^2},$$

et cette équation, en y faisant varier Π de $d\Pi$ et $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ comme ci-dessus, donne immédiatement la formule différentielle trouvée à la fin du n° 18;

2° On a

$$\Delta = \frac{2g}{\rho} - \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2},$$

et il est visible qu'il en naîtra sur-le-champ la formule différentielle du n° 22, par la variation de Δ, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

25. Il n'est pas nécessaire au reste, pour l'usage de la méthode précédente, que les intégrales soient réduites à la forme $V = a$, ainsi que nous l'avons supposé; mais cette réduction, qui est d'ailleurs toujours possible, sert à rendre le calcul plus direct et les formules plus simples. Comme cette méthode peut être d'une grande utilité dans plusieurs autres occasions, je crois qu'on me permettra d'ajouter encore quelques mots sur cet objet, quoique ce ne soit pas ici le lieu d'en traiter.

Pour présenter la méthode dont il s'agit de la manière la plus simple et en même temps la plus générale qu'il est possible, considérons une ou plusieurs équations différentielles telles que

$$\frac{d^m x}{dt^m} = \Xi, \quad \frac{d^n y}{dt^n} = \Psi, \ldots,$$

dans lesquelles Ξ, Ψ,... soient des fonctions données des variables t, x, y,... et des différences $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$,..., $\frac{d^2x}{dt^2}$,... des ordres inférieurs à $\frac{d^m x}{dt^m}$, $\frac{d^n y}{dt^n}$,....

Supposons que l'on connaisse une intégrale quelconque de ces équations, laquelle soit représentée par

$$V = o,$$

V étant une fonction des mêmes variables et de leurs différences, et contenant de plus une constante arbitraire a. On sait que, si l'on différentie cette intégrale en y faisant tout varier excepté a, et qu'on y substitue ensuite pour $\frac{d^m x}{dt^{m-1}}$, $\frac{d^n y}{dt^{n-1}}$,... leurs valeurs $\Xi\, dt$, $\Psi\, dt$,... tirées des équations différentielles, on doit avoir une équation identique avec l'équation $V = o$, ou du moins qui aura lieu en même temps que celle-ci, indépendamment d'aucune relation entre a, t, x, y,..., $\frac{dx}{dt}$,...; de sorte que, l'équation $V = o$ étant posée, la différence dV deviendra identiquement nulle après les substitutions dont il s'agit.

Soient maintenant proposées les équations

$$\frac{d^m x}{dt^m} = \Xi + \Xi', \quad \frac{d^n y}{dt^n} = \Psi + \Psi', \ldots,$$

Ξ', Ψ',... étant de même des fonctions de t, x, y,..., $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$,..., jusqu'à $\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}$, $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$,...; il est clair que la même équation $V = o$ pourra satisfaire aussi à ces équations, pourvu que la quantité a, étant supposée variable, soit telle que la différentielle dV devienne nulle en même temps que V, après la substitution des valeurs précédentes de $\frac{d^m x}{dt^m}$, $\frac{d^n y}{dt^n}$,.... Or nous venons de voir que la partie de dV, qui ne contient point la différence da, devient identiquement nulle avec la fonction V par la substitution des Ξ, Ψ,... à la place de $\frac{d^m x}{dt^m}$, $\frac{d^n y}{dt^n}$,.... Donc il n'y aura qu'à

rendre nulle la partie restante de dV, c'est-à-dire les termes provenant de la différence de a, et de la substitution des quantités Ξ', Ψ',... au lieu de $\frac{d^m x}{dt^m}$, $\frac{d^n y}{dt^n}$,..., ce qui donnera l'équation

$$\frac{dV}{da}da + \frac{dV}{d\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}}\Xi' dt + \frac{dV}{d\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}}\Psi' dt + \ldots = 0.$$

C'est l'équation qui servira à déterminer la valeur convenable de la quantité a devenue variable.

Si l'on avait deux équations intégrales

$$V = 0, \quad U = 0,$$

des mêmes équations différentielles

$$\frac{d^m x}{dt^m} = \Xi, \quad \frac{d^n y}{dt^n} = \Psi, \ldots,$$

et que ces intégrales continssent deux constantes arbitraires a, b, on prouverait de la même manière qu'elles pourraient l'être aussi des équations

$$\frac{d^m x}{dt^m} = \Xi + \Xi', \quad \frac{d^n y}{dt^n} = \Psi + \Psi', \ldots,$$

en y supposant a et b variables, et déterminées par ces équations

$$\frac{dV}{da}da + \frac{dV}{db}db + \frac{dV}{d\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}}\Xi' dt + \frac{dV}{d\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}}\Psi' dt + \ldots = 0,$$

$$\frac{dU}{da}da + \frac{dU}{db}db + \frac{dU}{d\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}}\Xi' dt + \frac{dU}{d\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}}\Psi' dt + \ldots = 0.$$

Et ainsi de suite si l'on avait un plus grand nombre d'intégrales.

26. Au reste, quand on connait une intégrale qui renferme deux constantes arbitraires, on en peut d'abord déduire une seconde par la seule différentiation, en substituant, s'il est nécessaire, à la place des plus

hautes différences des variables, leurs valeurs tirées des équations différentielles données. De la même manière une intégrale qui renferme trois constantes arbitraires fournira, par deux différentiations successives, deux autres intégrales, et ainsi de suite. Donc, si les intégrales connues renferment autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans la somme des exposants des équations différentielles, ce qui est le cas des intégrales finies et complètes, on trouvera par leur moyen autant d'intégrales différentes qu'il y a d'arbitraires; et l'on aura par la méthode précédente toutes les équations nécessaires pour déterminer les valeurs de ces constantes devenues variables.

De plus on pourra dans ce cas déterminer les variables finies x, y,..., ainsi que leurs différences $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$,... jusqu'à $\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}$, $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$,... en fonction de t et des constantes arbitraires a, b,...; et il est visible que ces fonctions seront les mêmes, soit que ces arbitraires soient variables ou non; de sorte que, dans les différentiations de x, y,... jusqu'à $d^{m-1}x$, $d^{n-1}y$,..., on pourra toujours regarder et traiter les quantités a, b, c,... comme des constantes invariables.

27. La méthode que j'avais donnée dans les Mémoires de 1775 (*) rentre aussi dans celle que je viens d'exposer, et l'on peut généraliser ainsi l'application que j'en avais faite aux équations linéaires. En effet, lorsque Ξ, Ψ,... sont des fonctions linéaires des variables x, y,... et de leurs différences, il est facile de prouver que V, U,... seront aussi des fonctions linéaires des mêmes variables et des constantes arbitraires a, b,.... Donc $\frac{dV}{da}$, $\frac{dV}{db}$, $\frac{dV}{d\frac{d^{m-1}x}{dt}}$,... seront des fonctions de t. Par conséquent si Ξ', Ψ',... sont données en t seul, on déterminera facilement les valeurs de a, b,... en t.

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. IV, p. 159 et suivantes.