

SUR LA

THÉORIE DES LUNETTES.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1778.)

Deux grands Géomètres, feu M. Cotes et M. Euler, ont entrepris de ramener la Théorie des lunettes à des formules générales. Le premier a donné le beau Théorème qu'on lit dans le Chapitre V du second Livre de l'*Optique* de Smith, et qui sert à déterminer la route d'un rayon qui traverse autant de lentilles que l'on veut, disposées sur le même axe. M. Cotes mourut peu de temps après avoir fait cette découverte, en sorte qu'il ne put en profiter pour perfectionner la Théorie des lunettes; et M. Smith rapporte que Newton dit à cette occasion : « Si M. Cotes avait vécu, nous saurions quelque chose. »

M. Euler s'est occupé après lui du même objet et a trouvé des formules très-belles et très-générales, qu'on peut voir dans différents Mémoires insérés parmi ceux de cette Académie pour les années 1757 et 1761, et parmi ceux de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1765. Ce grand Géomètre a donné ensuite un *Traité* complet sur cette matière, lequel contient les mêmes formules exposées avec tout le détail qu'on peut désirer, et appliquées à un grand nombre de cas relatifs aux télescopes et aux microscopes.

Comme les formules de ces deux Auteurs sont présentées sous des formes différentes, j'ai été curieux de les rapprocher et de les comparer; et cette comparaison a donné lieu à quelques recherches qui m'ont paru

pouvoir encore intéresser les Géomètres, et que, par cette raison, je vais présenter aujourd'hui à l'Académie.

1. J'appellerai dans la suite *foyer* d'une lentille, tout court, le point de l'axe de la lentille où se réunissent les rayons qui tombent sur la lentille parallèlement à l'axe et très-près de l'axe; et *distance focale* de la lentille, la distance de son foyer au centre de la lentille.

J'appellerai de plus *foyers conjugués* d'une lentille, les deux points de l'axe dans l'un desquels concourent les rayons qui partent de l'autre; et *distances des foyers conjugués*, les distances de ces points au centre de la lentille.

Enfin j'appellerai *foyers conjugués* d'une lunette, ou d'un système de plusieurs lentilles parallèles entre elles et placées sur un même axe à des distances quelconques, les deux points de l'axe dans l'un desquels vont se réunir les rayons qui étant partis de l'autre point traversent toutes les lentilles; et *distances des foyers conjugués*, les distances de ces points à la première et à la dernière lentille.

Au reste je prendrai toujours les distances des foyers conjugués affirmativement, lorsque ces foyers tombent des deux côtés opposés des lentilles; par conséquent, lorsqu'une des distances deviendra négative, ce sera une marque que les deux foyers conjugués tombent du même côté des lentilles.

2. Cela posé, soit d'abord une lentille quelconque pour laquelle la distance focale soit f , et les distances des foyers conjugués a et b ; on aura, par les Théorèmes connus, l'équation

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Et cette équation a lieu aussi lorsqu'au lieu d'une lentille on a un miroir.

3. Supposons maintenant qu'on ait plusieurs lentilles disposées sur le même axe à des distances quelconques, lesquelles forment une lunette ou, en général, un instrument dioptrique quelconque, et considérons la

route d'un rayon qui traverserait toutes ces lentilles à peu de distance de l'axe et dans un plan passant par le même axe. Il est clair que si ce rayon n'est pas parallèle à l'axe avant d'entrer dans la première lentille, il doit couper l'axe dans quelque point, et l'on pourra alors regarder ce point comme celui d'où le rayon est censé partir; ce point sera par conséquent le premier foyer conjugué de la première lentille et de toute la lunette. Ce même rayon ensuite, après avoir été réfracté par la première lentille, coupera de nouveau l'axe, et ira tomber sur la seconde lentille, comme s'il partait de ce second point d'intersection; ainsi ce même point sera à la fois le second foyer conjugué de la première lentille et le premier foyer conjugué de la seconde lentille; et ainsi de suite, jusqu'à ce que le rayon, ayant été réfracté par toutes les lentilles, sorte de la lunette et coupe pour la dernière fois l'axe dans un point qui sera le second foyer conjugué de la dernière lentille et de toute la lunette.

4. Soient donc $f, f', f'', \dots$ les distances focales de ces différentes lentilles; a, b les distances des deux foyers conjugués de la première lentille; a'', b'' celles des foyers conjugués de la seconde lentille; a''', b''' les distances des foyers conjugués de la troisième lentille, et ainsi des autres; a' sera en même temps la distance du premier foyer conjugué de la lunette, et la dernière des quantités $b, b', b'', \dots$ que je désignerai, en général, par b'''' sera la distance du second foyer conjugué de la lunette; enfin soient $h, h', h'', \dots$ les distances entre la première lentille et la seconde, entre la seconde et la troisième, etc.

Il est clair qu'on aura d'abord, par l'hypothèse,

$$(A) \quad h' = b' + a'', \quad h'' = b'' + a''', \quad h''' = b''' + a'''', \dots$$

Ensuite, par le n° 1, on aura pour chaque lentille

$$(B) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{a''} + \frac{1}{b''} = \frac{1}{f'}, \quad \frac{1}{a'''} + \frac{1}{b'''} = \frac{1}{f''}, \dots$$

Par le moyen de ces équations on pourra donc déterminer les distances de tous les foyers conjugués, et par conséquent la route entière du rayon.

Les lentilles et leur arrangement étant donnés, les distances focales $f', f'', f''', \dots$ et les distances $h', h'', h''', \dots$ seront aussi données; il n'y aura donc d'inconnues que les quantités $a', b', a'', b'', a''', b''', \dots$, et tout se réduira à déterminer successivement ces différentes inconnues. Cette détermination n'a à proprement parler aucune difficulté; mais en s'y prenant par les voies ordinaires, on tombe bientôt dans des formules assez compliquées et dans lesquelles il est difficile d'apercevoir la loi de la progression; il est donc nécessaire d'y employer des méthodes particulières, et c'est en quoi consiste le principal mérite des Théories de Cotes et de M. Euler. Voici ce que j'ai trouvé de plus simple pour cet objet.

5. Je prends une suite de quantités inconnues

$$x, x', x'', x''', x^{(4)}, \dots,$$

et je suppose

$$a' = \frac{x'}{x}, \quad b' = \frac{x'}{x^2}, \quad a'' = \frac{x''}{x^2}, \quad b'' = \frac{x''}{x^3}, \quad a''' = \frac{x'''}{x^3}, \quad b''' = \frac{x'''}{x^4}, \dots;$$

je substitue ces quantités dans les équations (A) et (B) du numéro précédent, et, chassant les dénominateurs, j'obtiens celles-ci

$$(C) \quad h'x'' = x' + x'', \quad h''x''' = x'' + x''', \quad h'''x^{(4)} = x''' + x^{(4)}, \dots,$$

$$(D) \quad x + x'' = \frac{x'}{f'}, \quad x'' + x^{(4)} = \frac{x''}{f''}, \quad x^{(4)} + x^{(6)} = \frac{x'''}{f'''}, \dots$$

Ces équations sont, comme l'on voit, toutes réduites à la même forme, et si pour les simplifier davantage on fait

$$\frac{1}{f'} = m', \quad h' = m'', \quad \frac{1}{f''} = m'', \quad h'' = m''', \quad \frac{1}{f'''} = m''', \quad h''' = m^{(4)}, \dots,$$

on aura celles-ci

$$(E) \quad \begin{cases} x - m'x' + x'' = 0, \\ x' - m''x'' + x''' = 0, \\ x'' - m'''x''' + x^{(4)} = 0, \\ x''' - m^{(4)}x^{(4)} + x^{(5)} = 0, \\ \dots \end{cases}$$

D'où l'on voit que les inconnues $x, x', x'', \dots$ forment une série récurrente du second ordre; de sorte que la question est réduite à trouver le terme général d'une série de ce genre.

6. Si les coefficients $m', m'', m''', \dots$ étaient tous égaux, on aurait tout d'un coup le terme général dont il s'agit par les méthodes connues; mais lorsque ces coefficients sont inégaux, je ne connais point d'autre moyen, pour avoir les valeurs des différents termes de la série récurrente, que de les déterminer successivement l'un après l'autre.

Pour cela on remarquera que, quelque nombre d'équations qu'on prenne à résoudre, il y aura toujours deux inconnues de plus qu'il n'y a d'équations; ainsi les deux premiers termes x et x' doivent demeurer indéterminés, et comme les équations (E) sont linéaires et ne contiennent aucun terme sans x , il est facile de prévoir que l'expression d'une inconnue quelconque sera composée de deux parties, l'une toute multipliée par x , et l'autre toute multipliée par x' , en sorte qu'on pourra chercher séparément chacune de ces parties en faisant, dans les équations (E), $x = 0$ ou $x' = 0$.

1° On aura donc

$$x = 0,$$

$$x' = x',$$

$$x'' = m'x',$$

$$x''' = (-1 + m'm'')x',$$

$$x^{(4)} = (-m' - m'' + m'm''m''')x',$$

$$x^{(5)} = (1 - m'm'' - m'm''' - m''m^{(4)} + m'm'm''m''')x',$$

$$x^{(6)} = (m' + m'' + m''' - m'm''m''' - m'm^{(4)}m''' - m'm^{(5)}m'' -$$

$$- m''m^{(5)}m''' + m'm'm''m^{(4)}m''')x',$$

$$\dots \dots \dots ;$$

2° On aura de même

$$x = x,$$

$$x' = 0,$$

$$x'' = -x,$$

$$x''' = -m''x,$$

$$x^{(4)} = (1 - m''m''')x,$$

$$x' = (m'' + m''' - m''m''m''')x,$$

$$x'' = (-1 + m''m'' + m''m''' + m'''m'' - m''m''m''m''')x,$$

$$\dots\dots\dots$$

Et pour avoir la valeur complète d'un x quelconque, il n'y aura qu'à ajouter ensemble les valeurs de la même quantité dans les deux cas.

7. Si dans les expressions précédentes on remet pour m' , m'' , m''' , ... leurs valeurs (5), qu'on ordonne ensuite les termes par rapport aux quantités f' , f'' , f''' , ..., et qu'on fasse, pour abréger,

$$P = 0,$$

$$P' = 1,$$

$$P'' = \frac{1}{f'},$$

$$P''' = -1 + \frac{h'}{f'},$$

$$P^{(4)} = -\frac{1}{f'} - \frac{1}{f''} + \frac{h'}{f'f''},$$

$$P' = 1 - \frac{h' + h''}{f'} - \frac{h''}{f''} + \frac{h'h''}{f'f''},$$

$$P'' = \frac{1}{f'} + \frac{1}{f''} + \frac{1}{f'''} - \frac{h'}{f'f''} - \frac{h' + h''}{f'f'''} - \frac{h''}{f''f'''} + \frac{h'h''}{f'f''f'''},$$

$$P^{(4)} = -1 + \frac{h' + h'' + h'''}{f'} + \frac{h'' + h'''}{f''} + \frac{h'''}{f'''} - \frac{h'(h'' + h''')}{f'f''} - \frac{(h' + h'')h'''}{f'f''f'''} - \frac{h'h''h'''}{f'f''f'''},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Q = 1,$$

$$Q' = 0,$$

$$Q'' = -1,$$

$$Q''' = -h',$$

$$Q^{(4)} = 1 - \frac{h'}{f'},$$

$$Q' = h' + h'' - \frac{h'h''}{f''},$$

$$Q'' = -1 + \frac{h'}{f'} + \frac{h' + h''}{f''} - \frac{h'h''}{f'f''},$$

$$Q^{(4)} = -h' - h'' - h''' + \frac{h'(h'' + h''')}{f''} + \frac{(h' + h'')h'''}{f''f'''} + \frac{h'h''h'''}{f'f''f'''},$$

$$\dots\dots\dots$$

on aura

$$x_s = P x' + Q x,$$

$$x' = P' x' + Q' x,$$

$$x'' = P'' x' + Q'' x,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x^{(s)} = P^{(s)} x' + Q^{(s)} x.$$

8. Comme $a' = \frac{x'}{x}$ (5), si l'on change a' en h pour mieux conserver l'analogie, en sorte que h représente la distance du premier foyer conjugué de la lunette à la première lentille, et qu'on substitue dans les formules précédentes $h x$ à la place de x' , on aura

$$x^{(s)} = [h P^{(s)} + Q^{(s)}] x;$$

et faisant, pour abréger,

$$h P^{(s)} + Q^{(s)} = R^{(s)},$$

on aura, en général,

$$x^{(s)} = R^{(s)} x.$$

Et, développant les expressions des quantités $R, R', R'', \dots$, on trouvera

$$\begin{aligned} R &= 1, \\ R' &= h, \\ R'' &= -1 + \frac{h}{f'}, \\ R''' &= -h - h' + \frac{hh'}{f'}, \\ R^{(4)} &= 1 - \frac{h}{f'} - \frac{h+h'}{f''} + \frac{hh'}{f'f''}, \\ R^{(5)} &= h + h' + h'' - \frac{h(h'+h'')}{f'} - \frac{(h+h')h''}{f''} + \frac{hh'h''}{f'f''}, \\ R^{(6)} &= -1 + \frac{h}{f'} + \frac{h+h'}{f''} + \frac{h+h'+h''}{f'''} - \frac{hh'}{f'f''} - \frac{h(h'+h'')}{f'f''} - \frac{(h+h')h''}{f''f'''} + \frac{hh'h''}{f'f''f'''}, \\ R^{(7)} &= -h - h' - h'' - h''' + \frac{h(h'+h'')}{f'} + \frac{(h+h')(h''+h''')}{f''} \\ &\quad + \frac{(h+h'+h'')h'''}{f'''} - \frac{hh'(h'+h'')}{f'f''} - \frac{h(h'+h'')h'''}{f'f'''} - \frac{(h+h')h'h'''}{f''f'''} + \frac{hh'h'h'''}{f'f''f'''}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Il est facile d'apercevoir la loi de ces termes, si l'on considère séparément les termes qui occupent les places paires, et ceux qui occupent les places impaires.

9. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que les points où le rayon qui passe au travers de toutes les lentilles coupe successivement l'axe de ces lentilles; considérons maintenant les angles sous lesquels ce rayon coupe l'axe, ainsi que les distances de l'axe aux différents points dans lesquels le rayon traverse les lentilles, distances qu'on nomme communément *semi-diamètres des ouvertures des lentilles*.

Il est facile de concevoir, même sans figures, que si l'on nomme $\vartheta', \vartheta'', \dots$ les demi-diamètres des ouvertures de la première lentille, de la seconde, de la troisième, etc., et qu'on appelle $\varphi', \varphi'', \dots$ les angles sous lesquels le rayon coupe l'axe aux premiers foyers conjugués de la

première lentille, de la seconde, de la troisième, etc.; il est aisé de concevoir, dis-je, qu'on aura

$$\vartheta' = a' \tan \varphi', \quad \vartheta'' = a'' \tan \varphi'', \quad \vartheta''' = a''' \tan \varphi''', \dots;$$

et comme le second foyer conjugué de la première lentille coïncide avec le premier foyer conjugué de la seconde lentille, et ainsi de suite, et que le rayon, en coupant l'axe dans ces foyers conjugués communs, fait avec lui des angles égaux de part et d'autre, il s'ensuit qu'on aura aussi

$$\vartheta' = b' \tan \varphi'', \quad \vartheta'' = b'' \tan \varphi''', \dots.$$

Donc on aura

$$a' = \frac{\vartheta'}{\tan \varphi'}, \quad b' = \frac{\vartheta'}{\tan \varphi''}, \quad a'' = \frac{\vartheta''}{\tan \varphi'}, \quad b'' = \frac{\vartheta''}{\tan \varphi''}, \quad a''' = \frac{\vartheta'''}{\tan \varphi''}, \dots$$

Si l'on compare ces expressions avec celles du n° 5, on verra que les quantités $\vartheta', \vartheta'', \dots$ sont proportionnelles aux quantités $x', x'', x''', \dots$, et que les quantités $\tan \varphi', \tan \varphi'', \tan \varphi''', \dots$ sont en même temps proportionnelles aux quantités $x, x', x'', \dots$; et comme les équations (E), qui doivent avoir lieu entre ces dernières quantités, ne déterminent pas leurs valeurs absolues, mais seulement leurs proportions mutuelles, il s'ensuit qu'on peut supposer

$$x = \tan \varphi',$$

et alors on aura

$$x' = \vartheta', \quad x'' = \tan \varphi'',$$

$$x'' = \vartheta'', \quad x''' = \tan \varphi''',$$

$$x''' = \vartheta''', \quad x^{(4)} = \tan \varphi^{(4)},$$

$$\dots\dots\dots$$

10. Ainsi les quantités $x, x', x'', \dots$, dont les valeurs ont été déterminées ci-dessus, ne servent pas seulement à déterminer les distances des foyers $a', a'', a''', \dots, b', b'', b''', \dots$, mais elles représentent elles-mêmes les tangentes des angles aux foyers et les demi-diamètres des ouvertures: les quantités $x, x', x'', \dots$, qui occupent les places paires, sont les tan-

gents des angles aux différents foyers conjugués, et les quantités $x', x'', x''', \dots$ sont les demi-diamètres des ouvertures des lentilles. D'où l'on voit que les quantités dont il s'agit donnent en même temps tous les éléments de la Théorie des lunettes, puisqu'elles déterminent toutes les circonstances de la route d'un rayon qui traverse autant de lentilles qu'on veut, dont on connaît les distances focales $f', f'', f''', \dots$ et les distances respectives de l'une à l'autre $h', h'', h''', \dots$.

Il faut seulement remarquer que, suivant les dénominations et les hypothèses précédentes, le rayon devant traverser l'axe dans tous les foyers, les angles aux foyers et les demi-diamètres des ouvertures doivent être alternativement positifs et négatifs; donc, en général, on aura pour les tangentes des angles aux foyers les quantités $x, -x', x'', -x''', \dots$, et pour les demi-diamètres des ouvertures $x', -x'', x''', -x''', \dots$.

11. Comme il est indifférent dans quel sens on suppose que le rayon traverse les lentilles, on peut imaginer que l'œil soit placé au point de l'axe que nous avons nommé le *premier foyer conjugué de la lunette*, et qu'il reçoive le rayon qui concourt dans ce point après avoir traversé toutes les lentilles. Dans cette hypothèse la quantité a' ou h sera la distance de l'œil au premier oculaire, et φ' sera l'angle sous lequel le rayon entre dans l'œil. De plus on peut regarder le demi-diamètre de l'ouverture ϕ'''' de la dernière lentille comme un objet de l'extrémité duquel part le rayon dont il s'agit. Ainsi cet objet sera vu à travers les autres lentilles sous un angle égal à φ' ; mais si cet objet était vu avec l'œil nu, il est clair qu'il faudrait qu'il fût placé à la distance $\frac{\phi''''}{\tan \varphi'}$ de l'œil pour qu'il fût vu sous le même angle φ' ; donc $\frac{\phi''''}{\tan \varphi'}$ sera la distance apparente de l'objet vu à travers toutes les lentilles.

Or $\tan \varphi'$ est égal à x et ϕ'''' est égal au dernier terme de la série $x', -x'', x''', -x''', \dots$, dont le quantième doit être égal au nombre des lentilles augmenté de l'unité, à cause que la dernière lentille n'entre plus ici en considération.

Donc, si un objet est vu par un nombre μ de lentilles, sa distance apparente sera (8)

$$\frac{\pm x^{(\mu+1)}}{x} = \pm R^{(\mu+1)},$$

le signe supérieur étant pour le cas où μ est pair, et l'inférieur pour celui où μ est impair.

Le Théorème de Cotes, dont on a parlé au commencement de ce Mémoire, donne précisément la distance apparente d'un objet vu à travers un nombre quelconque de lentilles, et la valeur de cette distance, suivant ce Théorème, s'accorde parfaitement avec l'expression précédente.

12. Reprenons les équations (E), ou plutôt les équations (C) et (D) du n° 5, et, éliminant premièrement les quantités $x', x'', x''', \dots$, on aura celles-ci entre les quantités $x, x', x'', \dots$

$$\begin{aligned} -x' + f'x + f'x'' &= 0, \\ f'x + (f' + f'' - h')x' + f''x'' &= 0, \\ f''x' + (f'' + f''' - h'')x'' + f'''x''' &= 0, \\ f'''x'' + (f''' + f'''' - h''')x''' + f''''x'''' &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Mais, si l'on élimine les quantités $x'', x''', x''', \dots$, on aura ces autres-ci entre les quantités $x, x', x'', x''', \dots$

$$\begin{aligned} x + \left(\frac{1}{h'} - \frac{1}{f'}\right)x' + \frac{x''}{h'} &= 0, \\ \frac{x'}{h'} + \left(\frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} - \frac{1}{f''}\right)x'' + \frac{x'''}{h''} &= 0, \\ \frac{x''}{h''} + \left(\frac{1}{h''} + \frac{1}{h'''} - \frac{1}{f'''}\right)x''' + \frac{x''''}{h'''} &= 0, \\ \frac{x'''}{h'''} + \left(\frac{1}{h'''} + \frac{1}{h''''} - \frac{1}{f''''}\right)x'''' + \frac{x'''''}{h''''} &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

par lesquelles on pourra déterminer séparément les quantités qui occupent

occupent les places paires et celles qui occupent les places impaires dans la série $x, x', x'', x''', \dots$

13. Soit

$$x'' = \alpha' x, \quad x^{iv} = \alpha' x'', \quad x^{vi} = \alpha'' x^{iv}, \dots,$$

et par conséquent

$$x^{iv} = \alpha' \alpha' x, \quad x^{vi} = \alpha' \alpha' \alpha' x, \dots;$$

substituant ces valeurs dans la première suite d'équations, on aura celles-ci

$$-x' + (1 + \alpha') f' x = 0,$$

$$f' + (f' + f'' - h') \alpha' + f'' \alpha' \alpha' = 0,$$

$$f'' + (f'' + f''' - h'') \alpha' + f''' \alpha' \alpha' = 0,$$

$$f''' + (f''' + f^{iv} - h''') \alpha' + f^{iv} \alpha' \alpha' = 0,$$

$$\dots\dots\dots,$$

d'où l'on tire

$$x' = (1 + \alpha') f' x,$$

ensuite

$$h' = \frac{\alpha' + 1}{\alpha'} f' + (\alpha'' + 1) f'',$$

$$h'' = \frac{\alpha'' + 1}{\alpha''} f'' + (\alpha''' + 1) f''',$$

$$h''' = \frac{\alpha''' + 1}{\alpha'''} f''' + (\alpha^{iv} + 1) f^{iv},$$

$$\dots\dots\dots,$$

et, à cause de $\alpha' = \frac{x'}{x}$ (5), si l'on change α' en h , comme dans le n° 8, la première équation deviendra

$$h = (\alpha' + 1) f'.$$

Ensuite, si l'on fait

$$x' = f' w, \quad x'' = f'' w, \quad x''' = f''' w, \dots,$$

et qu'on substitue ces valeurs dans la seconde série d'équations du numéro précédent, on aura, en ordonnant les termes par rapport aux lettres $h', h'', \dots$,

$$\frac{f' w' + f'' w''}{h'} = w' - x,$$

$$\frac{f' w' + f'' w''}{h'} + \frac{f'' w'' + f''' w'''}{h''} = w'',$$

$$\frac{f'' w'' + f''' w'''}{h''} + \frac{f''' w''' + f^{iv} w^{iv}}{h'''} = w''',$$

$$\dots\dots\dots,$$

et, soustrayant ces équations successivement les unes des autres,

$$\frac{f' w' + f'' w''}{h'} = w' - x,$$

$$\frac{f'' w'' + f''' w'''}{h''} = w'' - w' + x,$$

$$\frac{f''' w''' + f^{iv} w^{iv}}{h'''} = w''' - w'' + w' - x,$$

$$\dots\dots\dots,$$

Donc, substituant ici les valeurs trouvées ci-dessus de $h', h'', h''', \dots$, on en tirera les valeurs de $f'', f''', \dots$

On aura ainsi

$$\frac{f''}{f'} = - \frac{w' - (w' - x) \left(1 + \frac{1}{\alpha'}\right)}{w' - (w' - x) (1 + \alpha')},$$

$$\frac{f'''}{f''} = - \frac{w'' - (w'' - w' + x) \left(1 + \frac{1}{\alpha''}\right)}{w'' - (w'' - w' + x) (1 + \alpha'')},$$

$$\frac{f^{iv}}{f'''} = - \frac{w''' - (w''' - w'' + w' - x) \left(1 + \frac{1}{\alpha'''}\right)}{w''' - (w''' - w'' + w' - x) (1 + \alpha''')},$$

$$\dots\dots\dots,$$

c'est-à-dire, en réduisant,

$$\begin{aligned} \frac{f''}{f'} &= \frac{1}{\alpha'} \frac{\varpi' - x(1 + \alpha')}{\varpi' - (\varpi' - x)(1 + \alpha')}, \\ \frac{f'''}{f''} &= \frac{1}{\alpha''} \frac{\varpi' - (\varpi' - x)(1 + \alpha')}{\varpi'' - (\varpi'' - \varpi' + x)(1 + \alpha'')}, \\ \frac{f^{(4)}}{f'''} &= \frac{1}{\alpha'''} \frac{\varpi'' - (\varpi'' - \varpi' + x)(1 + \alpha'')}{\varpi''' - (\varpi''' - \varpi'' + \varpi' - x)(1 + \alpha''')}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Donc, à cause de $f' = \frac{h}{1 + \alpha'}$, on aura, en substituant successivement les valeurs de $f, f', \dots$,

$$\begin{aligned} f' &= \frac{h}{1 + \alpha'} \frac{\varpi' - x(1 + \alpha')}{\varpi' - (\varpi' - x)(1 + \alpha')}, \\ f'' &= \frac{h}{\alpha'(1 + \alpha')} \frac{\varpi' - x(1 + \alpha')}{\varpi'' - (\varpi'' - \varpi' + x)(1 + \alpha'')}, \\ f''' &= \frac{h}{\alpha'\alpha''(1 + \alpha')} \frac{\varpi' - x(1 + \alpha')}{\varpi''' - (\varpi''' - \varpi'' + \varpi' - x)(1 + \alpha''')}, \\ f^{(4)} &= \frac{h}{\alpha'\alpha''\alpha'''(1 + \alpha')} \frac{\varpi' - x(1 + \alpha')}{\varpi^{(4)} - (\varpi^{(4)} - \varpi''' + \varpi'' - \varpi' + x)(1 + \alpha^{(4)})}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Substituant enfin ces valeurs dans les expressions de $h', h'', \dots$ et réduisant, on aura

$$\begin{aligned} h' &= \frac{h}{\alpha'(1 + \alpha')} \frac{[\varpi' - x(1 + \alpha')][(1 + \alpha')\varpi'' - \alpha'(1 + \alpha'')\varpi']}{[\varpi' - x(1 + \alpha')][\varpi'' - (\varpi'' - \varpi' + x)(1 + \alpha'')]}, \\ h'' &= \frac{h}{\alpha'\alpha''(1 + \alpha')} \frac{[\varpi' - x(1 + \alpha')][(1 + \alpha')\varpi'' - \alpha'(1 + \alpha'')\varpi']}{[\varpi'' - (\varpi'' - \varpi' + x)(1 + \alpha'')][\varpi''' - (\varpi''' - \varpi'' + \varpi' - x)(1 + \alpha''')]}, \\ h''' &= \frac{h}{\alpha'\alpha''\alpha'''(1 + \alpha')} \frac{[\varpi' - x(1 + \alpha')][(1 + \alpha'')\varpi''' - \alpha''(1 + \alpha^{(4)})\varpi^{(4)}]}{[\varpi''' - (\varpi''' - \varpi'' + \varpi' - x)(1 + \alpha''')][\varpi^{(4)} - (\varpi^{(4)} - \varpi''' + \varpi'' - \varpi' + x)(1 + \alpha^{(4)})]}, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Ainsi les distances focales $f', f'', \dots$ et les intervalles entre les len-

tilles $h', h'', \dots$ sont exprimés par les quantités $\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \varpi', \varpi'', \varpi''', \dots$, et comme on a supposé

$$x' = f'\varpi', \quad x'' = x'x, \quad x''' = f''\varpi'', \quad x^{(4)} = \alpha'\alpha''x, \quad x^{(5)} = f'''\varpi''', \quad x^{(6)} = \alpha'\alpha''\alpha'''x, \dots,$$

on aura aussi les quantités $x', x'', x''', \dots$ exprimées par les mêmes quantités $\alpha', \alpha'', \alpha''', \dots, \varpi', \varpi'', \varpi''', \dots$.

14. Les quantités $\varpi', \varpi'', \dots$ sont égales aux demi-diamètres des ouvertures des lentilles divisés par les distances focales des mêmes lentilles; ce sont par conséquent les mêmes quantités que M. Euler nomme *raisons des ouvertures*, et qui dans ses formules sont désignées aussi par ces mêmes lettres.

À l'égard des quantités $\alpha', \alpha'', \dots$, elles sont égales à $\frac{x'}{x}, \frac{x''}{x}, \dots$, et par conséquent à $\frac{\alpha'}{\beta}, \frac{\alpha''}{\beta}, \dots$ (5); or M. Euler désigne par les lettres majuscules A, B, C, ... les quantités $\frac{\beta'}{\alpha'}, \frac{\beta''}{\alpha''}, \dots$; ainsi l'on aura

$$\alpha' = \frac{1}{A}, \quad \alpha'' = \frac{1}{B}, \quad \alpha''' = \frac{1}{C}, \dots$$

Enfin M. Euler suppose que l'ouverture de la première lentille est nulle, pour ne considérer que la route du rayon qui passe par le centre de cette lentille; ainsi, suivant lui, ϖ' doit être nul.

Si l'on fait ces différentes substitutions dans les formules trouvées ci-dessus, on en verra naître celles de M. Euler, dont on a parlé au commencement de ce Mémoire.

15. Après avoir fait voir comment le Théorème de Cotes et les formules de M. Euler se déduisent directement de nos formules primitives, nous allons revenir sur celles-ci et les considérer plus particulièrement.

Et d'abord, puisque nous avons déjà vu que les équations récurrentes (E) donnent, en général (7),

$$x^{(n)} = P^{(n)}x' + Q^{(n)}x,$$

il est bon d'examiner de plus près la loi qu'observent les quantités $P, P', P'', \dots, Q, Q', Q'', \dots$.

Par la formation de ces quantités il est visible qu'il y a entre elles les mêmes rapports qu'entre les quantités correspondantes $x, x', x'', \dots$, de sorte qu'on aura aussi, en général, en vertu des équations (E),

$$P^{(\lambda+1)} - m^{(\lambda)} P^{(\lambda)} + P^{(\lambda-1)} = 0,$$

$$Q^{(\lambda+1)} - m^{(\lambda)} Q^{(\lambda)} + Q^{(\lambda-1)} = 0;$$

done, on aura

$$P^{(\lambda+1)} Q^{(\lambda)} - Q^{(\lambda+1)} P^{(\lambda)} = Q^{(\lambda)} P^{(\lambda-1)} - P^{(\lambda)} Q^{(\lambda-1)};$$

mais, lorsque $\lambda = 1$, on a

$$P'Q - Q'P = 1;$$

done

$$P''Q' - Q''P' = -1, \quad P''Q'' - Q''P'' = 1, \dots;$$

done, en général,

$$P^{(\lambda+1)} Q^{(\lambda)} - Q^{(\lambda+1)} P^{(\lambda)} = \pm 1,$$

le signe supérieur étant pour le cas où λ est pair, et l'inférieur pour celui où λ est impair.

16. Or on voit par les formules du n° 7 que les expressions des quantités $Q, Q', Q'', \dots$ ne contiennent point la quantité f' ; donc, si dans l'équation précédente on fait varier f' , les quantités $Q^{(\lambda)}$ et $Q^{(\lambda+1)}$ doivent demeurer constantes; et l'on aura en divisant par df'

$$Q^{(\lambda)} \frac{dP^{(\lambda+1)}}{df'} - Q^{(\lambda+1)} \frac{dP^{(\lambda)}}{df'} = 0;$$

d'où il s'ensuit que les quantités $Q^{(\lambda)}$ sont proportionnelles aux quantités $\frac{dP^{(\lambda)}}{df'}$; de sorte qu'on aura, en général,

$$Q^{(\lambda)} = k \frac{dP^{(\lambda)}}{df'},$$

k étant un coefficient constant. Pour le déterminer, on fera, par exemple,

$\lambda = 2$, auquel cas on a (7)

$$Q'' = -1, \quad P'' = \frac{1}{f^2};$$

done

$$\frac{dP''}{df'} = -\frac{1}{f^3};$$

par conséquent $k = f^3$.

Done enfin on aura, en général,

$$Q^{(\lambda)} = f^3 \frac{dP^{(\lambda)}}{df'}.$$

Ainsi, dès qu'on connaîtra les quantités $P, P', P'', \dots$, on en pourra déduire immédiatement par une simple différentiation les quantités correspondantes $Q, Q', Q'', \dots$.

17. Maintenant, si l'on considère les expressions des quantités $P, P', \dots$ du n° 7, on voit d'abord que les termes $P', P'', \dots$, qui occupent les places paires, forment une série dont la loi est assez claire et dont le terme général peut être représenté de cette manière

$$\begin{aligned} \pm P^{(2v+1)} = & 1 - \frac{h' + h'' + h''' + \dots + h^{(v)}}{f'} - \frac{h' + h'' + \dots + h^{(v)}}{f''} - \frac{h'' + \dots + h^{(v)}}{f'''} - \dots \\ & + \frac{h' [h'' + h''' + \dots + h^{(v)}]}{f' f''} + \frac{(h' + h'') [h''' + \dots + h^{(v)}]}{f' f'''} + \frac{h'' [h''' + \dots + h^{(v)}]}{f' f'' f'''} + \dots \\ & - \frac{h' h'' [h''' + \dots + h^{(v)}]}{f' f'' f'''} - \frac{(h' + h'') h''' [h^{(v)} + \dots + h^{(v)}]}{f' f'' f'''} - \dots \end{aligned}$$

le signe supérieur de $P^{(2v+1)}$ étant pour le cas où v est un nombre pair, et l'inférieur pour celui où v est un nombre impair.

Il ne reste donc plus qu'à trouver les termes intermédiaires $P'', P''', \dots$; or la formule générale donne, en mettant $h^{(v)}$ à la place de $m^{(2v)}$,

$$P^{(2v)} = \frac{P^{(2v+1)} + P^{(2v-1)}}{h^{(v)}}.$$

On peut encore simplifier cette expression en faisant attention que les

valeurs de $P^{(2v)}$ et de $P^{(2v-1)}$ ne dépendent point de la quantité $h^{(v)}$, ainsi qu'on le voit par les formules du n° 7; d'où il s'ensuit que l'équation précédente étant multipliée par $h^{(v)}$, et ensuite différenciée en regardant $h^{(v)}$ comme la seule variable, on aura

$$P^{(2v)} dh^{(v)} = dP^{(2v+1)}.$$

Donc

$$P^{(2v)} = \frac{dP^{(2v+1)}}{dh^{(v)}}.$$

18. Soit maintenant une lunette composée d'un nombre quelconque v de lentilles; un rayon, qui coupant l'axe sous l'angle x entrera dans la première lentille à la distance x' de l'axe, coupera successivement l'axe sous les angles $x'', x''', \dots, x^{(2v)}$, et traversera les autres lentilles aux distances $-x'', x''', \dots, \pm x^{(2v-1)}$ de l'axe; le signe supérieur étant pour le cas où v est impair, et l'inférieur pour celui où v est pair.

L'angle x est donc changé par l'effet des lentilles dans l'angle $x^{(2v)}$, et la distance ou ouverture x' est changée en $\pm x^{(2v-1)}$; du premier changement dépend l'amplification ou la force de la lunette, laquelle est par conséquent exprimée par $\frac{x^{(2v)}}{x'}$; et du second dépend la clarté apparente qui étant en raison inverse de la densité des rayons sera exprimée par $\frac{x'}{\pm x^{(2v-1)}}$, pourvu qu'on suppose $x = 0$ dans l'expression de $x^{(2v-1)}$, pour que les rayons entrent parallèles à l'axe dans la lunette; car alors il est visible que tous les rayons, qui tombent sur l'ouverture x' , doivent sortir par l'ouverture $x^{(2v-1)}$; par conséquent leurs densités en entrant et en sortant de la lunette seront en raison réciproque de ces ouvertures.

De plus, le signe de la quantité $\frac{x'}{\pm x^{(2v-1)}}$ indiquera la situation apparente de l'objet; si cette quantité est positive, l'objet paraîtra droit, et si elle est négative, l'objet paraîtra renversé.

19. Comme dans les lunettes il faut que les rayons qui entrent parallèles en sortent aussi parallèles, la valeur de $x^{(2v)}$ doit demeurer la même

tant que x demeure le même, quelque variation que x' subisse. Or

$$x^{(2v)} = P^{(2v)} x' + Q^{(2v)} x;$$

donc il faudra que $P^{(2v)} = 0$; c'est la condition fondamentale de toute lunette.

On aura donc simplement

$$x^{(2v)} = Q^{(2v)} x;$$

donc l'amplification sera représentée par $Q^{(2v)}$.

De plus on a

$$x^{(2v-1)} = P^{(2v-1)} x' + Q^{(2v-1)} x;$$

donc, dans le cas de $x = 0$, on aura simplement

$$x^{(2v-1)} = P^{(2v-1)} x';$$

par conséquent la clarté apparente sera représentée par $\frac{1}{\pm P^{(2v-1)}}$.

Je remarque maintenant qu'on a, en général (15), l'équation

$$P^{(2v)} Q^{(2v-1)} - Q^{(2v)} P^{(2v-1)} = -1;$$

donc, à cause de $P^{(2v)} = 0$, on aura

$$\frac{1}{P^{(2v-1)}} = Q^{(2v)}.$$

Donc la clarté apparente est proportionnelle à l'amplification; d'où il résulte que, si tous les rayons qui entrent dans l'objectif sont transmis à l'œil, l'objet paraîtra à travers les verres aussi brillant qu'à l'œil nu, mais jamais plus brillant, de quelque largeur que soit l'objectif.

Enfin on jugera de la situation apparente de l'objet par le signe de la quantité $\pm Q^{(2v)}$, en y prenant le signe supérieur lorsque v est impair, et l'inférieur lorsque v est pair.

20. Le champ apparent est évidemment égal à l'angle x , pourvu que l'œil soit placé dans le second foyer conjugué de la lunette lequel tombe

dans l'axe à la distance

$$b^{(2)} = \frac{x^{(2-1)}}{x^{(2)}}$$

de l'oculaire (4 et 5). Cette distance est donc exprimée [à cause de $P^{(2)} = 0$] par

$$\frac{P^{(2-1)} \frac{x'}{x} + Q^{(2-1)}}{Q^{(2)}};$$

et elle détermine le lieu de l'œil pour qu'il puisse découvrir par la lunette le champ apparent x . Il faut donc que cette distance soit positive, pour qu'elle tombe hors de la lunette; car si elle devient négative, alors le lieu de l'œil tombant dans la lunette même, il sera impossible d'y placer l'œil, et par conséquent aussi d'embrasser le champ x .

Si l'on fait $x' = 0$, alors la distance de l'œil est exprimée simplement par $\frac{Q^{(2-1)}}{Q^{(2)}}$; donc, si cette quantité est positive, l'œil placé à cette distance de la lunette embrassera le champ apparent x , en supposant même l'ouverture de l'objectif réduite à un point; par conséquent dans ce cas l'ouverture de l'objectif n'influera point sur la grandeur du champ; c'est le cas des lunettes à verres convexes.

Mais si la quantité $\frac{Q^{(2-1)}}{Q^{(2)}}$ est négative, alors on ne pourra supposer $x' = 0$, mais il faudra prendre x' tel que

$$\frac{P^{(2-1)} \frac{x'}{x} + Q^{(2-1)}}{Q^{(2)}} > 0 \text{ ou } = 0.$$

Dans ce cas donc, quelque part que l'on place l'œil, le champ apparent x dépendra de l'ouverture de l'objectif x' .

Si la quantité $\frac{P^{(2-1)}}{Q^{(2)}}$ est en même temps négative, alors la distance de l'œil serait toujours négative; par conséquent on ne pourrait découvrir par la lunette aucun champ apparent, parce qu'aucun des rayons qui entreraient par l'objectif ne ressortirait par l'oculaire.

Ainsi c'est aussi une condition essentielle des lunettes que $\frac{P^{(2-1)}}{Q^{(2)}}$ soit > 0 , lorsque $\frac{Q^{(2-1)}}{Q^{(2)}} < 0$. Or en supposant la première de ces quantités A

et la seconde $-B$, on aura $A \frac{x'}{x} - B$ pour la distance de l'œil à la lunette, nécessaire pour embrasser le champ apparent x ; et l'on voit que cette distance diminue à mesure que x augmente; de sorte que pour embrasser le plus grand champ apparent, il faudra faire la distance dont il s'agit nulle, et par conséquent appliquer l'œil tout contre l'oculaire. On aura donc dans ce cas

$$A \frac{x'}{x} - B = 0,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{Ax'}{B};$$

ce qui montre que le champ apparent est proportionnel à l'ouverture de l'objectif. C'est le cas des lunettes de Galilée à deux lentilles, l'une convexe, l'autre concave.



SUR

UNE MANIÈRE PARTICULIÈRE

D'EXPRIMER LE TEMPS DANS LES SECTIONS CONIQUES,

DÉCRITES PAR DES FORCES TENDANTES AU Foyer ET RÉCIPROQUEMENT PROPORTIONNELLES
AUX CARRÉS DES DISTANCES.



SUR

UNE MANIÈRE PARTICULIÈRE

D'EXPRIMER LE TEMPS DANS LES SECTIONS CONIQUES,

DÉCRITES PAR DES FORCES TENDANTES AU Foyer ET RÉCIPROQUEMENT PROPORTIONNELLES
AUX CARRÉS DES DISTANCES.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1778.)

1. Feu M. Lambert, dans son excellent *Traité sur les Propriétés des Orbites des Comètes*, a démontré ce beau Théorème, que dans les ellipses décrites par des forces tendantes vers l'un des foyers, et agissantes en raison inverse du carré des distances, le temps employé à parcourir un arc quelconque ne dépend que du grand axe, de la corde qui sous-tend l'arc parcouru, et de la somme des rayons vecteurs qui joignent les deux extrémités de cet arc; en sorte que ces trois éléments étant supposés les mêmes, le temps sera aussi le même, quelle que soit d'ailleurs la forme de l'ellipse.

La démonstration qu'il en donne est purement synthétique, et dépend d'une transformation ingénieuse des secteurs elliptiques de laquelle il résulte que si, dans différentes ellipses qui aient le même grand axe, on prend des secteurs tels que les cordes et les sommes des deux rayons vecteurs soient les mêmes, ces secteurs sont proportionnels aux racines carrées des paramètres respectifs; d'où il s'ensuit que les temps employés à parcourir les arcs de ces secteurs doivent être les mêmes, puis-

qu'en général le temps est comme l'aire du secteur divisée par la racine carrée du paramètre.

Ce Théorème offre, comme l'on voit, un moyen de ramener la détermination du temps par un arc d'une ellipse donnée à celle du temps par un arc d'une autre ellipse quelconque qui ait le même grand axe, et même au temps par une partie de ce grand axe, en supposant que l'ellipse se confonde avec l'axe par l'évanouissement de l'axe conjugué, et qu'un corps tombe par le même axe en partant d'une de ses extrémités, et étant continuellement attiré vers l'autre par la même force centrale par laquelle il circulerait dans l'ellipse; et comme dans ce dernier cas l'arc se confond avec sa corde, qui devient égale à la différence des deux rayons vecteurs, il s'ensuit que si l'on nomme a le grand axe de l'ellipse proposée, b la somme des deux rayons vecteurs qui répondent aux deux bouts de l'arc parcouru, c la corde sous-tendue par cet arc, le temps employé à parcourir ce même arc sera égal au temps qu'un corps, qui parcourrait l'axe a de la manière que nous avons dite, mettrait à s'approcher de l'extrémité inférieure de cet axe, depuis la distance $\frac{b+c}{2}$ jusqu'à la distance $\frac{b-c}{2}$. Or en considérant la chute rectiligne d'un corps poussé vers un point fixe par une force $\frac{F}{z^2}$, z étant la distance du corps à ce point, on trouve aisément que si ce corps part du repos à la distance a , le temps employé à arriver à la distance z sera exprimé par

$$\frac{1}{\sqrt{2F}} \int \frac{z dz}{\sqrt{z^2 - a^2}};$$

donc, si l'on fait

$$\frac{b+c}{2} = p, \quad \frac{b-c}{2} = q,$$

on aura, pour le temps employé à décrire l'arc d'ellipse qui sous-tend la corde c , la différence de ces deux intégrales

$$\frac{1}{\sqrt{2F}} \int \frac{p dp}{\sqrt{p^2 - \frac{p^2}{a}}} - \frac{1}{\sqrt{2F}} \int \frac{q dq}{\sqrt{q^2 - \frac{q^2}{a}}};$$

expression qui est surtout remarquable en ce qu'elle ne dépend que du grand axe de l'ellipse proposée et nullement de son excentricité, et qui fournit par conséquent un moyen facile de réduire en Table la détermination du temps employé à parcourir un arc d'une orbite elliptique quelconque; car si l'on fait

$$\frac{b+c}{2a} = r, \quad \frac{b-c}{2a} = s,$$

en sorte que

$$p = ar, \quad q = as,$$

le temps répondant à la corde c dans l'ellipse dont le grand axe est a sera exprimé par

$$\frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2F}} \left(\int \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - 1}} - \int \frac{s ds}{\sqrt{s^2 - 1}} \right);$$

or lorsque $c = a$, auquel cas on a aussi $b = a$, r devient $= 1$ et $s = 0$, et l'on a le temps depuis une apside à l'autre, c'est-à-dire le temps de la demi-révolution; donc, si l'on construit une Table qui, pour chaque valeur de y , depuis $y = 0$ jusqu'à $y = 1$, donne la valeur correspondante de

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

divisée par le double de la valeur qui répond à $y = 1$, on n'aura qu'à prendre dans cette Table la différence des nombres qui répondent à

$$y = \frac{b+c}{2a} \quad \text{et} \quad y = \frac{b-c}{2a}$$

et multiplier ensuite cette différence par le temps de la révolution entière dans l'ellipse proposée, pour avoir sur-le-champ le temps répondant à l'arc sous-tendu par la corde c .

Dans le troisième Volume des *Tables Astronomiques de l'Académie*, page 25, on trouve une pareille Table sous le nom de *Chute elliptique des Comètes*, dans laquelle la première colonne, intitulée *Distances*, représente les valeurs de y en millièmes parties, et la seconde colonne, intitulée *Temps*, donne les nombres correspondants en parties millionnièmes.

Ce que je viens de dire suffit pour faire sentir l'utilité du Théorème dont il s'agit; mais ce Théorème mérite particulièrement l'attention des Géomètres par lui-même, et parce qu'il paraît difficile d'y parvenir par le calcul; en sorte qu'on pourrait le mettre dans le petit nombre de ceux pour lesquels l'Analyse géométrique semble avoir de l'avantage sur l'Analyse algébrique. Il est vrai que dans mes Recherches sur le mouvement d'un corps attiré à la fois vers deux centres fixes par des forces en raison inverse des carrés des distances [voyez le tome IV des *Mémoires de Turin* (*)], j'ai été conduit à ce même Théorème, en supposant que la force qui agit vers l'un des centres s'évanouisse, et que ce même centre soit placé sur la circonférence de la section conique que le corps décrit alors; mais cette méthode est indirecte et demande des calculs assez compliqués; elle est par conséquent peu convenable pour démontrer un Théorème qui se distingue surtout par sa simplicité. J'ai donc cru qu'il serait avantageux aux progrès de l'Analyse d'avoir une voie plus simple et plus naturelle pour parvenir à ce but, et je me flatte que celle que je vais proposer ne laissera rien à désirer sur ce sujet et pourra même être utile dans plusieurs autres occasions.

2. Soient a le demi-grand axe de l'ellipse proposée, e son excentricité, φ l'anomalie excentrique qui répond à une anomalie vraie quelconque u , t le temps employé à décrire l'angle u ; on sait que

$$t = a^{\frac{3}{2}} (\varphi + e \sin \varphi),$$

le rapport entre φ et u étant donné par l'équation

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{u}{2},$$

et le rayon vecteur r étant exprimé ainsi par φ

$$r = a(1 + e \cos \varphi).$$

Ces propositions sont démontrées dans tous les livres d'Astronomie.

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. II, p. 84.

Par le Théorème de M. Lambert, le temps par un arc quelconque de cette ellipse est réduit à la différence des temps par deux arcs d'une autre ellipse qui ait le même grand axe $2a$, mais dont l'excentricité e soit égale à 1, ce qui réduit l'ellipse au grand axe en y faisant évanouir l'axe conjugué dont la valeur est $a\sqrt{1-e^2}$, et par conséquent zéro lorsque $e = 1$.

Soit α la valeur de φ qui répond au commencement de l'arc pour lequel on demande le temps, on aura

$$a^{\frac{3}{2}} [\varphi - \alpha + e(\sin \varphi - \sin \alpha)]$$

pour le temps par l'arc dont le commencement répond à l'anomalie excentrique α , et dont la fin répond à l'anomalie excentrique φ . Il faut donc réduire cette expression à la différence de deux expressions de la forme

$$a^{\frac{3}{2}} (\varphi + \sin \varphi);$$

donc, si l'on dénote par x et y les deux anomalies excentriques dans l'ellipse où $e = 1$, on aura

$$a^{\frac{3}{2}} [\varphi - \alpha + e(\sin \varphi - \sin \alpha)] = a^{\frac{3}{2}} (x + \sin x) - a^{\frac{3}{2}} (y + \sin y).$$

Donc, comparant ensemble les parties algébriques et les parties transcendentes, on aura ces deux équations

$$\varphi - \alpha = x - y,$$

$$e(\sin \varphi - \sin \alpha) = \sin x - \sin y;$$

d'où l'on tirera x et y en φ , ce qui n'a point de difficulté.

En effet, si l'on met la deuxième sous cette forme

$$e(\sin \varphi - \sin \alpha) = 2 \cos \frac{x+\alpha}{2} \sin \frac{x-\alpha}{2},$$

qu'ensuite on y substitue pour $\frac{x-\alpha}{2}$ sa valeur $\frac{\varphi-\alpha}{2}$ tirée de la première équation, on aura

$$e(\sin \varphi - \sin \alpha) = 2 \sin \frac{\varphi-\alpha}{2} \cos \frac{x+\alpha}{2};$$

mais

$$\sin \varphi - \sin \alpha = 2 \cos \frac{\varphi + \alpha}{2} \sin \frac{\varphi - \alpha}{2};$$

done, divisant de part et d'autre par $2 \sin \frac{\varphi - \alpha}{2}$, on aura

$$\cos \frac{x+y}{2} = e \cos \frac{\varphi + \alpha}{2};$$

d'où l'on tire

$$\sin \frac{x+y}{2} = \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{\varphi + \alpha}{2}};$$

de là, et de ce que

$$\sin \frac{x-y}{2} = \sin \frac{\varphi - \alpha}{2}, \quad \cos \frac{x-y}{2} = \cos \frac{\varphi - \alpha}{2},$$

on tirera sur-le-champ

$$\sin x = \cos \frac{\varphi - \alpha}{2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{\varphi + \alpha}{2}} + e \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \cos \frac{\varphi + \alpha}{2},$$

$$\sin y = \cos \frac{\varphi - \alpha}{2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{\varphi + \alpha}{2}} - e \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \cos \frac{\varphi + \alpha}{2},$$

$$\cos x = e \cos \frac{\varphi + \alpha}{2} \cos \frac{\varphi - \alpha}{2} - \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{\varphi + \alpha}{2}},$$

$$\cos y = e \cos \frac{\varphi + \alpha}{2} \cos \frac{\varphi - \alpha}{2} + \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{\varphi + \alpha}{2}}.$$

Ainsi l'on connaîtra par ces formules les arcs cherchés x et y en φ et α .

3. Je remarque maintenant que r étant le rayon vecteur qui répond à l'anomalie excentrique φ dans l'ellipse proposée, si l'on nomme pareillement ρ le rayon vecteur qui répond à l'anomalie excentrique α dans la même ellipse, on aura

$$r = a(1 + e \cos \varphi), \quad \rho = a(1 + e \cos \alpha),$$

d'où l'on tire

$$e \cos \frac{\varphi + \alpha}{2} \cos \frac{\varphi - \alpha}{2} = e \frac{\cos \varphi + \cos \alpha}{2} = \frac{r + \rho}{2a} - 1.$$

De plus, u étant l'anomalie vraie qui répond à l'anomalie excentrique φ , si l'on nomme aussi v l'anomalie vraie qui répond à l'anomalie excentrique α , on aura

$$\tan \frac{u}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\varphi}{2}, \quad \tan \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\alpha}{2},$$

et il est clair que $u - v$ sera l'angle intercepté entre les rayons r et ρ ; de sorte que, si l'on nomme encore δ la corde qui joint les extrémités des rayons r et ρ , on aura, par la Trigonométrie,

$$\delta^2 = r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(u - v).$$

Qu'on substitue dans cette expression à la place de r , ρ et de u , v leurs valeurs en φ et α ; et pour cela on remarquera que les expressions ci-dessus de $\tan \frac{u}{2}$ et $\tan \frac{v}{2}$ donnent

$$\sin u = \frac{a \sqrt{1-e^2} \sin \varphi}{r}, \quad \cos u = a \frac{e + \cos \varphi}{r},$$

et de même

$$\sin v = \frac{a \sqrt{1-e^2} \sin \alpha}{\rho}, \quad \cos v = a \frac{e + \cos \alpha}{\rho},$$

de sorte que, comme

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v,$$

on trouvera

$$\begin{aligned} r\rho \cos(u - v) &= a^2 [(e + \cos \varphi)(e + \cos \alpha) + (1 - e^2) \sin \varphi \sin \alpha] \\ &= a^2 [\cos(\varphi - \alpha) + e(\cos \varphi + \cos \alpha) + e^2(1 - \sin \varphi \sin \alpha)]; \\ r^2 + \rho^2 &= a^2 [(1 + e \cos \varphi)^2 + (1 + e \cos \alpha)^2] \\ &= a^2 [2 + 2e(\cos \varphi + \cos \alpha) + e^2(\cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha)]; \end{aligned}$$

done enfin, on aura

$$\begin{aligned} \delta^2 &= a^2 [2 - 2\cos(\varphi - \alpha) + e^2(\cos^2 \varphi + \cos^2 \alpha - 2 + 2\sin \varphi \sin \alpha)] \\ &= a^2 [2 - 2\cos(\varphi - \alpha) - e^2(\sin \varphi - \sin \alpha)^2] \\ &= 4a^2 \left(\sin^2 \frac{\varphi - \alpha}{2} - e^2 \sin^2 \frac{\varphi - \alpha}{2} \cos^2 \frac{\varphi + \alpha}{2} \right), \end{aligned}$$

et, tirant la racine carrée,

$$\delta = 2a \sin \frac{\varphi - \alpha}{2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \frac{\varphi + \alpha}{2}}.$$

Faisant donc ces substitutions dans les expressions ci-dessus de $\cos x$ et $\cos y$, on aura

$$\cos x = \frac{r + \rho - \delta}{2a} - 1,$$

$$\cos y = \frac{r + \rho + \delta}{2a} - 1,$$

et de là

$$a(1 + \cos x) = \frac{r + \rho - \delta}{2},$$

$$a(1 + \cos y) = \frac{r + \rho + \delta}{2}.$$

Or x et y étant deux anomalies excentriques dans l'ellipse où $e = 1$, si l'on nomme p et q les rayons vecteurs correspondants, on aura

$$p = a(1 + \cos x), \quad q = a(1 + \cos y),$$

donc

$$p = \frac{r + \rho - \delta}{2}, \quad q = \frac{r + \rho + \delta}{2},$$

et le temps employé à parcourir l'arc sous-tendu par la corde δ dans l'ellipse dont l'excentricité est e sera égal à la différence des temps qui répondent aux rayons vecteurs p et q dans l'ellipse où $e = 1$; mais nous avons déjà vu que cette ellipse se confond avec l'axe, et que ses deux foyers tombent aux extrémités de l'axe $2a$; donc le temps dont il s'agit sera égal au temps employé à parcourir dans cet axe la partie interceptée entre les abscisses p et q ; ce qui est le Théorème de M. Lambert.

4. Quoique la démonstration précédente soit assez simple, il semble qu'on pourrait la simplifier encore, en employant immédiatement le rayon vecteur à la place de l'anomalie excentrique; nous allons donc envisager la question de cette manière, et sans faire usage des propriétés connues de l'anomalie excentrique.

Pour cela nous remarquerons que le temps employé à décrire un arc quelconque d'une section conique, par un corps attiré vers l'un des foyers de cette section en vertu d'une force en raison inverse du carré de la distance, est toujours proportionnel à l'aire du secteur compris par l'arc dont il s'agit et les deux rayons vecteurs menés du foyer aux extrémités de cet arc, divisée par la racine carrée du paramètre de la section conique; c'est ce que Newton a démontré le premier, et une foule d'Auteurs après lui.

Or, si l'on nomme r le rayon vecteur, φ l'angle de ce rayon avec le grand axe, p le demi-paramètre de l'orbite, e son excentricité, on a par la nature de l'ellipse

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi};$$

donc, comme l'élément du secteur décrit par le rayon r est exprimé par $\frac{r^2 d\varphi}{2}$, si l'on substitue dans cette expression la valeur de $d\varphi$ en r tirée de l'équation précédente, et qu'on la divise par $\frac{\sqrt{p}}{2}$, on aura l'élément du temps employé à parcourir l'arc $d\varphi$ égal à la quantité

$$\frac{\sqrt{p} dr}{\sqrt{e^2 - 1 + \frac{2p}{r} - \frac{p^2}{r^2}}}.$$

Mais, en nommant a le demi-grand axe de l'ellipse, on a

$$p = a(1 - e^2);$$

substituant donc $\frac{p}{a}$ à la place de $1 - e^2$, et multipliant le haut et le bas de la fraction par $\frac{r}{\sqrt{p}}$, on aura, pour l'élément dont il s'agit,

$$\frac{r dr}{\sqrt{-p + 2r - \frac{r^2}{a}}}.$$

Donc, si l'on fait

$$r = az,$$

et qu'on remette $1 - e^2$ à la place de $\frac{p}{a}$, on aura cette formule différentielle

$$\frac{a^3 z dz}{\sqrt{e^3 - 1 + 2z - z^2}},$$

dont l'intégrale prise, par exemple, depuis $z = m$ jusqu'à $z = n$, donnera le temps employé à parcourir l'angle compris entre les rayons vecteurs ma et na .

5. Soit

$$z = 1 - u,$$

la formule précédente deviendra

$$\frac{a^3 (u du - du)}{\sqrt{e^3 - u^2}},$$

dont l'intégrale est évidemment

$$a^3 \left(\arccos \frac{u}{e} - \sqrt{e^2 - u^2} \right);$$

et la question se réduira à faire en sorte que la différence de deux intégrales de cette espèce pour deux différentes valeurs de u soit égale à la différence de deux autres intégrales semblables, mais dans lesquelles la constante e soit $= 1$. Ainsi il faudra satisfaire à l'équation

$$\begin{aligned} \arccos \frac{u}{e} - \sqrt{e^2 - u^2} - \arccos \frac{s}{e} + \sqrt{e^2 - s^2} \\ = \arccos x - \sqrt{1 - x^2} - \arccos y + \sqrt{1 - y^2}, \end{aligned}$$

laquelle, en comparant la partie algébrique avec la partie algébrique et la transcendante avec la transcendante, se partage en ces deux-ci

$$\begin{aligned} \sqrt{e^2 - u^2} - \sqrt{e^2 - s^2} &= \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2}, \\ \arccos \frac{u}{e} - \arccos \frac{s}{e} &= \arccos x - \arccos y, \end{aligned}$$

dont la seconde donne par les Théorèmes connus

$$\frac{us + \sqrt{e^2 - u^2} \sqrt{e^2 - s^2}}{e^3} = xy + \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2};$$

et ces deux équations serviront à déterminer x et y en s et u .

6. Faisons, pour abrégé,

$$\sqrt{e^2 - u^2} - \sqrt{e^2 - s^2} = m,$$

$$\frac{us + \sqrt{e^2 - u^2} \sqrt{e^2 - s^2}}{e^3} = n,$$

et les équations dont il s'agit deviendront

$$(1) \quad \sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - y^2} = m,$$

$$(2) \quad xy + \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 - y^2} = n.$$

Or l'équation (1) étant carrée et ensuite ajoutée à l'équation (2) multipliée par 2, on aura

$$2 - x^2 - y^2 + 2xy = m^2 + 2n;$$

d'où l'on tire sur-le-champ

$$x - y = \sqrt{2 - 2n - m^2}.$$

Ensuite l'équation (1) étant multipliée par $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$ et divisée par m donne

$$\frac{\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}}{m} = \frac{y^2 - x^2}{m};$$

cette équation étant carrée et ensuite retranchée de l'équation (2) multipliée par 2, on a

$$2xy - 2 + x^2 + y^2 = 2n - \frac{(y^2 - x^2)^2}{m^2},$$

savoir

$$(x + y)^2 = 2 + 2n - \frac{(x + y)^2 (x - y)^2}{m^2},$$

et, substituant pour $(x-y)^2$ sa valeur ci-dessus,

$$(x+y)^2 = 2 + 2n - (x+y)^2 \frac{2-2n-m^2}{m^2},$$

d'où l'on tire immédiatement

$$x+y = m \sqrt{\frac{1+n}{1-n}}.$$

Ainsi, connaissant la somme et la différence de x et y , on aura chacune de ces deux quantités.

Donc le temps employé à parcourir l'arc compris entre les rayons vecteurs $a(1-u)$, $a(1-s)$, dans une ellipse dont le demi-grand axe serait a et l'excentricité e , sera égal au temps employé à parcourir l'arc compris entre les rayons vecteurs $a(1-x)$, $a(1-y)$, dans une autre ellipse qui aurait le même grand axe et où l'excentricité serait 1, c'est-à-dire égale au temps employé à parcourir dans le grand axe même la différence de ces rayons.

7. Il reste encore à prouver qu'en nommant aq la corde qui joint les deux rayons vecteurs $a(1-u)$ et $a(1-s)$, on aura

$$a(1-x) = \frac{a(1-u) + a(1-s) - aq}{2}, \quad a(1-y) = \frac{a(1-u) + a(1-s) + aq}{2},$$

savoir

$$x = \frac{u+s+q}{2}, \quad y = \frac{u+s-q}{2}.$$

Pour cela je remarque d'abord que l'on a entre $\frac{u}{e}$, $\frac{s}{e}$, $\frac{m}{e}$, n les mêmes équations qu'entre x , y , m , n , ce qui est visible par les premières formules du numéro précédent; donc, en changeant ces dernières quantités en celles-là dans les formules finales du même numéro, on aura aussi

$$\frac{u-s}{e} = \sqrt{2-2n-\frac{m^2}{e^2}}, \quad \frac{u+s}{e} = \frac{m}{e} \sqrt{\frac{1+n}{1-n}},$$

savoir

$$u-s = \sqrt{(2-2n)e^2 - m^2}, \quad u+s = m \sqrt{\frac{1+n}{1-n}}.$$

mais on a

$$x-y = \sqrt{2-2n-m^2}, \quad x+y = m \sqrt{\frac{1+n}{1-n}};$$

donc

$$x+y = u+s, \quad x-y = \frac{\sqrt{(u-s)^2 + (1-e^2)m^2}}{e}.$$

Pour introduire maintenant la corde aq , je remarque que si l'on nomme ξ et η les coordonnées rectangulaires de l'ellipse prises depuis le foyer et dont l'une ξ soit dans le grand axe, on aura

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2, \quad \xi = r \cos \varphi;$$

de sorte que, par l'équation de l'ellipse

$$p = r(1 + e \cos \varphi),$$

on aura

$$p = r + e\xi;$$

donc

$$\xi = \frac{p-r}{e}, \quad \eta = \sqrt{r^2 - \left(\frac{p-r}{e}\right)^2};$$

mettant $a(1-e^2)$ à la place de p et $az = a(1-u)$ à la place de r , on aura

$$\xi = \frac{a}{e}(u-e^2), \quad \eta = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e} \sqrt{e^2-u^2};$$

nommant de même ξ' , η' les coordonnées qui répondent au rayon vecteur $a(1-s)$, on aura

$$\xi' = \frac{a}{e}(s-e^2), \quad \eta' = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{e} \sqrt{e^2-s^2};$$

or il est évident que la corde qui joint les extrémités des deux rayons est

$$\sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2};$$

donc, ayant déjà nommé cette corde aq , on aura

$$q = \frac{\sqrt{(u-s)^2 + (1-e^2)(\sqrt{e^2-u^2} - \sqrt{e^2-s^2})^2}}{e}.$$

et par conséquent

$$q = x - y.$$

Ayant donc

$$x + y = u + s, \quad x - y = q,$$

on aura

$$x = \frac{u + s + q}{2}, \quad y = \frac{u + s - q}{2}.$$

Cette démonstration du Théorème dont il s'agit a, ce me semble, toute la simplicité qu'on y peut désirer.

8. De là résulte donc ce Théorème analytique assez remarquable.

$$\frac{r dr}{\sqrt{-p + 2r - \frac{r^2}{a}}} - \frac{\rho d\rho}{\sqrt{-p + 2\rho - \frac{\rho^2}{a}}} = \frac{z dz}{\sqrt{2z - \frac{z^2}{a}}} - \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{2\zeta - \frac{\zeta^2}{a}}},$$

en supposant

$$r = a(1 - u), \quad \rho = a(1 - s), \quad z = a(1 - x), \quad \zeta = a(1 - y),$$

$$x = \frac{u + s + q}{2}, \quad y = \frac{u + s - q}{2}$$

et

$$q = \frac{1}{e} \sqrt{(u - s)^2 + (1 - e^2)(\sqrt{e^2 - u^2} - \sqrt{e^2 - s^2})^2},$$

ce qui donne

$$u = 1 - \frac{r}{a}, \quad s = 1 - \frac{\rho}{a}, \quad x = 1 - \frac{r + \rho + aq}{2a}, \quad y = 1 - \frac{r + \rho - aq}{2a};$$

donc

$$z = \frac{r + \rho + aq}{2}, \quad \zeta = \frac{r + \rho - aq}{2}$$

et

$$aq = \frac{1}{e} \sqrt{(r - \rho)^2 + p \left(\sqrt{-p + 2r - \frac{r^2}{a}} - \sqrt{-p + 2\rho - \frac{\rho^2}{a}} \right)^2}.$$

9. Voyons maintenant comment on peut généraliser ce Théorème. et.

considérant pour cela la formule différentielle

$$\frac{r dr}{\sqrt{H + Mr + Nr^2}},$$

cherchons à la réduire à la somme ou à la différence d'autres formules semblables qui contiennent des coefficients arbitraires. Pour y parvenir de la manière la plus générale et la plus simple, je suppose

$$\sqrt{H + Mr + Nr^2} = A + Br + Cs,$$

s étant une nouvelle variable, et A, B, C des coefficients constants quelconques; il est clair qu'en ôtant l'irrationalité, on aura une équation du second degré entre r et s . De cette manière la différentielle proposée se changera d'abord en celle-ci

$$\frac{r dr}{A + Br + Cs}.$$

Maintenant je prends deux autres variables x et y et je suppose

$$r = x + y, \quad s = xy,$$

en sorte que les quantités r et s demeurent les mêmes en échangeant x et y entre elles: on aura ainsi

$$s = rx - x^2 = ry - y^2.$$

Or l'équation entre r et s étant carrée et ensuite différentiée donne

$$[M + 2Nr - 2B(A + Br + Cs)] dr - 2C(A + Br + Cs) ds = 0;$$

mais

$$ds = x dr + (r - 2x) dx = x dr + (y - x) dx;$$

done, substituant,

$$[M + 2Nr - 2(B + Cx)(A + Br + Cs)] dr - 2C(y - x)(A + Br + Cs) dx = 0;$$

done, à cause de

$$r = x + y,$$

on aura

$$\frac{r dr}{A + Br + Cs} = \frac{2C(y^2 - x^2) dx}{M + 2Nr - 2(B + Cx)(A + Br + Cs)}.$$

Changeant x en y , on aura donc aussi

$$\frac{r dr}{A + Br + Cs} = \frac{2C(x^2 - y^2) dy}{M + 2Nr - 2(B + Cy)(A + Br + Cs)},$$

par conséquent

$$0 = \frac{dx}{M + 2Nr - 2(B + Cx)(A + Br + Cs)} + \frac{dy}{M + 2Nr - 2(B + Cy)(A + Br + Cs)};$$

done, en prenant une quantité quelconque h , on aura, en général,

$$\begin{aligned} \frac{r dr}{A + Br + Cs} &= \frac{r dr}{\sqrt{H + Mr + Nr^2}} \\ &= -\frac{2C(x^2 + h) dx}{M + 2Nr - 2(B + Cx)(A + Br + Cs)} - \frac{2C(y^2 + h) dy}{M + 2Nr - 2(B + Cy)(A + Br + Cs)}. \end{aligned}$$

Maintenant j'ai, à cause de $s = rx - x^2$,

$$\sqrt{H + Mr + Nr^2} = A + (B + Cx)r - Cx^2,$$

d'où l'on tirera r en x .

Pour cela je carre cette équation et je l'ordonne par rapport à r ; j'ai

$$[N - (B + Cx)^2] r^2 + [M - 2(B + Cx)(A - Cx^2)] r + H - (A - Cx^2)^2 = 0;$$

d'où je tire, en multipliant par $4N - 4(B + Cx)^2$, complétant le carré et extrayant la racine,

$$2[N - (B + Cx)^2] r + M - 2(B + Cx)(A - Cx^2) = \sqrt{X},$$

en faisant, pour abrégér,

$$X = [M - 2(B + Cx)(A - Cx^2)]^2 - 4[N - (B + Cx)^2][H - (A - Cx^2)^2];$$

or le premier membre de l'équation précédente se réduit à

$$M + 2Nr - 2(B + Cx)(Br + Crx + A - Cx^2),$$

savoir à

$$M + 2Nr - 2(B + Cx)(A + Br + Cs).$$

Ainsi l'on a

$$M + 2Nr - 2(B + Cx)(A + Br + Cs) = \sqrt{X},$$

et, changeant x en y , on aura pareillement

$$M + 2Nr - 2(B + Cy)(A + Br + Cs) = \sqrt{Y},$$

où Y sera une fonction de y semblable à la fonction X de x , en sorte que l'on aura

$$Y = [M - 2(B + Cy)(A - Cy^2)]^2 - 4[N - (B + Cy)^2][H - (A - Cy^2)^2],$$

et l'on remarquera que l'on peut prendre dans les équations précédentes les radicaux en $+$ ou en $-$ à volonté.

Faisant donc ces substitutions dans l'équation ci-dessus, et prenant le radical $\sqrt{X}$ en $-$ et le radical $\sqrt{Y}$ en $+$, on aura enfin

$$\frac{r dr}{\sqrt{H + Mr + Nr^2}} = \frac{2C(x^2 + h) dx}{\sqrt{X}} - \frac{2C(y^2 + h) dy}{\sqrt{Y}},$$

h étant une quantité quelconque; où l'on voit qu'en supposant h constante, la différentielle proposée est réduite à la différence de deux autres différentielles analogues, mais beaucoup plus générales.

10. Si l'on développe la quantité X , et qu'on fasse, pour plus de simplicité,

$$a = \frac{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - HN - ABM - A^2N - HB^2}{C^2},$$

$$b = -\frac{MA + 2HB}{C},$$

$$c = \frac{MB - 2NA}{C} - 4H,$$

on aura

$$X = 4C^2(a + bx + cx^2 + Mx^3 + Nx^4),$$

et pareillement

$$Y = 4C^2(a + by + cy^2 + My^3 + Ny^4);$$

donc, substituant dans la formule du numéro précédent, on aura

$$\frac{r dr}{\sqrt{H + Mr + Nr^2}} = \frac{(x^2 + h) dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + Mx^3 + Nx^4}} - \frac{(y^2 + h) dy}{\sqrt{a + by + cy^2 + My^3 + Ny^4}};$$

et, comme les quantités a, b, c renferment les trois constantes arbitraires A, B, C , on pourra regarder ces quantités elles-mêmes comme des constantes arbitraires; et la constante h sera pareillement arbitraire.

11. En regardant les quantités a, b, c comme données, on aura par les formules ci-dessus

$$\frac{A}{C} = -\frac{Mb + 2H(c + 4H)}{M^2 + 4HN}, \quad \frac{B}{C} = \frac{M(c + 4H) - 2Nb}{M^2 + 4HN},$$

ensuite

$$C = \frac{\sqrt{\left(\frac{M}{2}\right)^2 - HN}}{\sqrt{a + M\frac{A}{C} + N\frac{B}{C}}};$$

ainsi l'on connaîtra les trois quantités A, B, C en a, b, c, M, N, H .

Ensuite, pour la détermination de x et y en r , on aura d'abord

$$s = \frac{\sqrt{H + Mr + Nr^2} - A - Br}{C};$$

mais

$$x + y = r, \quad xy = s;$$

done

$$x = \frac{r + \sqrt{r^2 - 4s}}{2}, \quad y = \frac{r - \sqrt{r^2 - 4s}}{2}.$$

Si donc on fait

$$\sqrt{r^2 - 4s} = u,$$

on aura

$$x = \frac{r+u}{2}, \quad y = \frac{r-u}{2},$$

et la quantité u sera

$$u = \sqrt{\frac{4A + 4Br + Cr^2 - 4\sqrt{H + Mr + Nr^2}}{C}}.$$

12. Comme les constantes a, b, c, h sont arbitraires, on peut les supposer nulles; on aura alors

$$\frac{r dr}{\sqrt{H + Mr + Nr^2}} = \frac{x dx}{\sqrt{Mx + Nx^2}} - \frac{y dy}{\sqrt{My + Ny^2}}.$$

Ainsi la différentielle proposée est réduite à la différence de deux autres différentielles semblables dans lesquelles $H = 0$; ce qui revient au cas du Théorème de M. Lambert.

Mais on peut faire cette même réduction d'une manière plus générale en supposant

$$h = -k^2,$$

$$a + bx + cx^2 + Mx^3 + Nx^4 = (x - k)^2[l + M(x + k) + N(x + k)^2];$$

ce qui donne (*)

$$a + bx + cx^2 = l(x - k)^2 + M(-kx^2 - k^2x + k^3) + N(-2k^2x^2 + k^4),$$

et par conséquent

$$a = lk^2 + Mk^3 + Nk^4, \quad b = -2lk - Mk^2, \quad c = l - Mk - 2Nk^2;$$

de cette manière, si l'on fait, pour abréger,

$$x + k = x', \quad y + k = y',$$

on aura

$$\frac{r dr}{\sqrt{H + Mr + Nr^2}} = \frac{x' dx'}{\sqrt{l + Mx' + Nx'^2}} - \frac{y' dy'}{\sqrt{l + My' + Ny'^2}};$$

et supposant $l = 0$, ce qui donne

$$a = Mk^2 + Nk^4, \quad b = 0, \quad c = -Mk - 2Nk^2,$$

(*) Dans le texte primitif les formules qui suivent sont affectées d'erreurs légères que nous avons cru devoir faire disparaître.

on aura les mêmes formules que ci-dessus, mais avec cette différence que les variables x' et y' contiendront encore la constante arbitraire k .

13. Je vais faire voir maintenant que l'équation entre u et r du n° 11 est celle d'une ellipse dans laquelle r serait le rayon vecteur partant d'un des foyers, et où u serait un autre rayon vecteur partant d'un autre point fixe quelconque placé dans le plan de l'ellipse ou non.

En nommant, comme plus haut, p le paramètre, e l'excentricité, r le rayon vecteur, ξ et η les coordonnées rectangulaires, on a, comme on sait, cette équation à l'ellipse

$$r + e\xi = p;$$

d'où l'on tire, à cause de $r^2 = \xi^2 + \eta^2$,

$$\xi = \frac{p-r}{e}, \quad \eta = \frac{\sqrt{-p^2 + 2pr - (1-e^2)r^2}}{e}.$$

Soient maintenant α, β, γ les coordonnées rectangulaires qui déterminent la position du centre des rayons vecteurs u , on aura évidemment

$$u^2 = (\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 + \gamma^2, \quad \text{savoir} \quad u^2 = r^2 - 2\alpha\xi - 2\beta\eta + \delta^2;$$

en faisant, pour abréger,

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

et substituant pour ξ et η leurs valeurs en r ,

$$u^2 = r^2 + \frac{2\alpha}{e}r - \frac{2\alpha p}{e} + \delta^2 - \frac{2\beta}{e}\sqrt{-p^2 + 2pr - (1-e^2)r^2}.$$

Cette expression de u^2 en r est, comme on voit, tout à fait semblable à celle du n° 11, et, comparant les termes homologues, on aura

$$\frac{2\alpha}{e} = \frac{4B}{C}, \quad -\frac{2\alpha p}{e} + \delta^2 = \frac{4A}{C}, \quad -\frac{\beta^2 p^2}{e^2} = \frac{4H}{C}, \quad \frac{\beta^2 p}{e^2} = \frac{2M}{C}, \quad -\frac{\beta^2(1-e^2)}{e^2} = \frac{4N}{C};$$

et ces cinq équations serviront à déterminer les cinq quantités $p, e, \alpha, \beta, \gamma$, dont les deux premières déterminent l'ellipse, et dont les trois dernières déterminent la position du centre des rayons u par rapport au plan de l'ellipse et au foyer des rayons r .

Dans ce cas le radical $\sqrt{H + Mr + Nr^2}$ devient

$$\frac{C\beta}{2e}\sqrt{-p^2 + 2pr - (1-e^2)r^2},$$

ou, nommant le demi-grand axe π , et mettant $\frac{p}{\pi}$ à la place de $1 - e^2$,

$$\frac{C\beta\sqrt{p}}{2e}\sqrt{-p + 2r - \frac{r^2}{\pi}};$$

de sorte que la différentielle

$$\frac{rdr}{\sqrt{H + Mr + Nr^2}}$$

deviendra

$$\frac{2e}{C\beta\sqrt{p}} \frac{rdr}{\sqrt{-p + 2r - \frac{r^2}{\pi}}},$$

c'est-à-dire proportionnelle à l'élément du temps dans la même ellipse (4).

Donc on peut représenter ce temps par la différence de deux expressions de la forme

$$\int \frac{(z^2 + h)dz}{\sqrt{a + bz + cz^2 + \frac{z^3}{\pi}}},$$

les quantités a, b, c, h étant des constantes arbitraires, et la variable z étant dans l'une des deux expressions la somme, et dans l'autre la différence de deux rayons vecteurs de l'ellipse, dont l'un parte à l'ordinaire du foyer, et dont l'autre parte d'un autre point fixe quelconque dépendant des constantes a, b, c .

14. Si l'on suppose que le centre des rayons u tombe sur la circonférence même de l'ellipse, alors on aura $\gamma = 0$ et entre α, β la même équation qu'entre ξ et η ; ainsi il faudra substituer $\frac{p-\delta}{e}$ à la place de α , et $\sqrt{\delta^2 - \left(\frac{p-\delta}{e}\right)^2}$ à la place de β dans les formules du n° 13; mais comme

ces substitutions mènent à des formules un peu compliquées, voici une manière plus simple et plus directe d'analyser le cas dont il s'agit.

Je remarque qu'en faisant $r = \delta$ (δ étant $= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ par le n° 13, et par conséquent égale à la distance du centre des rayons u au foyer des rayons r) on doit avoir $u = 0$, et par conséquent $x = y$ (11).

Je reprends maintenant les deux formules du n° 9,

$$M + 2Nr - 2(B + Cx)(A + Br + Cs) = -\sqrt{X},$$

$$M + 2Nr - 2(B + Cy)(A + Br + Cs) = \sqrt{Y};$$

dans la première desquelles je donne le signe $-$ au radical $\sqrt{X}$, conformément à ce que j'ai dit dans le même numéro. Soustrayant la première de la seconde, j'ai celle-ci

$$-2C(y - x)(A + Br + Cs) = \sqrt{Y} + \sqrt{X};$$

et il faudra qu'en faisant $r = \delta$ on ait $x = y$; par conséquent, à cause de $r = x + y$,

$$x = \frac{\delta}{2}, \quad y = \frac{\delta}{2}$$

sont deux valeurs de x et de y qui doivent satisfaire à l'équation précédente. Or par ces suppositions le premier membre devient nul, et le second devient $4C\sqrt{\Delta}$ en supposant

$$\Delta = a + b\frac{\delta}{2} + c\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + M\left(\frac{\delta}{2}\right)^3 + N\left(\frac{\delta}{2}\right)^4;$$

done on doit avoir $\Delta = 0$; par conséquent $\frac{\delta}{2}$ doit être une racine des équations semblables $X = 0$, $Y = 0$. Mais cela ne suffit pas encore pour satisfaire à l'équation ci-dessus; il faut encore qu'en supposant x et y très-peu différent de $\frac{\delta}{2}$, l'équation puisse subsister et donne une relation possible entre x et y ; donc il faudra qu'en faisant

$$x = \frac{\delta}{2} + \mu, \quad y = \frac{\delta}{2} + \nu,$$

et regardant μ et ν comme très-petites, on ait une équation possible entre μ et ν .

Or, faisant ces substitutions et rejetant les termes du second ordre, on a, en supposant $\Delta' = \frac{d\Delta}{d\frac{\delta}{2}}$,

$$-\left(A + B\delta + \frac{C\delta^2}{4}\right)(\nu - \mu) = \sqrt{\Delta + \Delta'\nu} + \sqrt{\Delta + \Delta'\mu};$$

mais $\Delta = 0$, donc l'équation devient

$$-\left(A + B\delta + \frac{C\delta^2}{4}\right)(\nu - \mu) = \sqrt{\Delta'}(\sqrt{\nu} + \sqrt{\mu}),$$

laquelle, étant divisée par $\sqrt{\nu} + \sqrt{\mu}$, donne

$$-\left(A + B\delta + \frac{C\delta^2}{4}\right)(\sqrt{\nu} - \sqrt{\mu}) = \sqrt{\Delta'};$$

done la quantité $\sqrt{\Delta'}$ doit être infiniment petite de l'ordre $\sqrt{\nu}$; donc Δ' doit être $= 0$.

De là il est aisé de conclure, par la théorie connue, que $\frac{\delta}{2}$ doit être une racine double de l'équation $X = 0$, ainsi que de l'équation $Y = 0$.

De sorte que les quantités X et Y seront de la forme

$$X = \left(x - \frac{\delta}{2}\right)^2(l + mx + nx^2),$$

$$Y = \left(y - \frac{\delta}{2}\right)^2(l + my + ny^2),$$

ou, ce qui revient au même, de la forme

$$X = 4C^2 \left(x - \frac{\delta}{2}\right)^2 \left[l + m \left(x + \frac{\delta}{2}\right) + n \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2\right],$$

$$Y = 4C^2 \left(y - \frac{\delta}{2}\right)^2 \left[l + m \left(y + \frac{\delta}{2}\right) + n \left(y + \frac{\delta}{2}\right)^2\right];$$

et comparant cette forme avec la forme générale des quantités X et Y du n° 10, on trouvera

$$n = N, \quad m = M, \quad l = c + N\frac{\delta}{2} + M\frac{\delta^2}{2},$$

de sorte que la constante l demeurera arbitraire, à cause qu'elle contient l'arbitraire c .

On aura donc précisément le cas du n° 12 en prenant $k = \frac{\delta}{2}$; de sorte qu'en supposant de plus $l = 0$, on aura

$$\frac{r dr}{\sqrt{H + Mr + Nr^2}} = \frac{x' dx'}{\sqrt{Mx' + Nx'^2}} - \frac{y' dy'}{\sqrt{My' + Ny'^2}},$$

savoir (13)

$$\frac{r dr^*}{\sqrt{-p + 2r - \frac{r^2}{a}}} = \frac{x' dx'}{\sqrt{2x' - \frac{x'^2}{a}}} - \frac{y' dy'}{\sqrt{2y' - \frac{y'^2}{a}}},$$

où (11)

$$x' = x + \frac{\delta}{2} = \frac{r + \delta + u}{2}, \quad y' = y + \frac{\delta}{2} = \frac{r + \delta - u}{2}.$$

Or il est visible que r et δ sont deux rayons vecteurs, et que u est alors la corde qui joint ces rayons; donc, puisque $x' = y'$, lorsque $u = 0$, auquel cas $r = \delta$, il s'ensuit que la différence des intégrales de

$$\frac{x' dx'}{\sqrt{2x' - \frac{x'^2}{a}}} \quad \text{et} \quad \frac{y' dy'}{\sqrt{2y' - \frac{y'^2}{a}}}$$

exprimera justement le temps employé à parcourir l'angle compris entre les deux rayons vecteurs δ et r , c'est-à-dire l'arc sous-tendu par la corde u ; ce qui est le Théorème de M. Lambert.

SUR

DIFFÉRENTES QUESTIONS D'ANALYSE

RELATIVES À LA

THÉORIE DES INTÉGRALES PARTICULIÈRES.

SUR

DIFFÉRENTES QUESTIONS D'ANALYSE

RELATIVES A LA

THÉORIE DES INTÉGRALES PARTICULIÈRES.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1779.)

La Théorie des intégrales particulières est une branche aussi importante que féconde du Calcul intégral; et je crois être le premier qui ait donné les vrais principes de cette Théorie. On entend par intégrales particulières ces intégrales qui satisfont à des équations différentielles sans être pour cela des cas particuliers de leurs intégrales complètes, et qui échappent par conséquent aux règles générales du Calcul intégral. De très-grands Géomètres avaient depuis longtemps remarqué cette singularité et cette espèce de défaut de l'Analyse ordinaire, et avaient cherché des moyens d'y suppléer; on était même déjà parvenu à trouver des règles plus ou moins générales, non-seulement pour reconnaître *à priori* si une intégrale donnée d'une équation différentielle en est une intégrale particulière, ou seulement un cas de son intégrale complète, mais aussi pour découvrir toutes les intégrales particulières dont une équation différentielle est susceptible; mais personne, que je sache, n'avait encore expliqué la nature et l'origine de ces sortes d'intégrales, ni fait voir que, loin

de former une exception à la Théorie générale du Calcul intégral, elles sont une conséquence immédiate et naturelle des premiers principes de ce Calcul. C'est ce que je crois avoir démontré et développé avec tout le détail nécessaire dans mon Ouvrage sur les *intégrales particulières*, imprimé parmi les *Mémoires* de l'année 1774 (*).

Je vais maintenant appliquer la Théorie des intégrales particulières à la solution de différentes questions d'Analyse qui n'avaient pas encore été traitées, ou du moins qui ne l'avaient pas été sous le point de vue sous lequel on les considère dans ce Mémoire. Cette application donnera en même temps le dénouement de quelques paradoxes qui se présentent naturellement dans la solution de ces mêmes questions, et servira de plus en plus à montrer l'utilité et la nécessité de la Théorie dont il s'agit dans le Calcul intégral.

ARTICLE I^{er}. — Sur les développées.

1. On sait que la développée d'une courbe est le lieu des centres de tous les cercles osculateurs de cette courbe; on sait aussi que le cercle osculateur est celui qui coupe la courbe proposée dans trois points infiniment proches. Or soient x l'abscisse, y l'ordonnée rectangulaire, et p, q, r des constantes; on a pour l'équation générale au cercle

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

dans laquelle r est le rayon, et p, q sont l'abscisse et l'ordonnée qui déterminent la position du centre.

Soit maintenant une courbe quelconque rapportée aux mêmes coordonnées x, y , et qui ait pour cercle osculateur celui dont nous venons de donner l'équation; comme ce cercle doit couper la courbe dont il s'agit dans trois points infiniment proches, il faudra que non-seulement l'équation

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

(*) *OEuvres de Lagrange*, t. IV, p. 5.

mais encore que les différences premières et secondes de cette équation aient lieu par rapport à la même courbe, c'est-à-dire en supposant que les valeurs de x, y et de leurs différences soient les mêmes pour le cercle et pour la courbe. Alors r deviendra le rayon du cercle osculateur de la courbe proposée au point qui répond aux coordonnées x, y ; et p, q seront les coordonnées qui déterminent le lieu du centre de cercle; ce seront par conséquent les coordonnées de la développée de la même courbe.

On aura donc ces trois équations

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

$$x-p + (y-q) \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-q) \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

au moyen desquelles on déterminera p, q, r en x, y , et ses différences; et l'on trouvera successivement

$$q = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad p = x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx}, \quad r = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Ces valeurs sont les mêmes que celles que l'on trouve par d'autres voies; mais la méthode précédente est plus appropriée au but de ces recherches.

2. On voit par les expressions précédentes de p et q que le Problème de trouver la développée d'une courbe se résout par le seul Calcul différentiel, et demande une double différentiation de l'équation de la courbe proposée; d'où il s'ensuit que lorsque cette courbe est algébrique, sa développée ne saurait manquer de l'être aussi; c'est ce qui est connu depuis longtemps.

Réciproquement donc il paraît naturel d'en conclure que lorsque la développée est donnée et qu'on demande la courbe qui résulterait de son

développement, c'est-à-dire dont elle serait la développée, le Problème doit dépendre du Calcul intégral et exiger une double intégration. En effet, la méthode la plus naturelle de résoudre ce dernier Problème est de substituer dans l'équation de la développée entre p et q les valeurs précédentes de ces quantités; ce qui donnera, si l'équation entre p et q est algébrique, une équation différentielle du second ordre entre x et y , et qui sera celle de la courbe cherchée; en sorte qu'il faudra une double intégration pour avoir l'équation finie de cette courbe. Mais voici une difficulté à laquelle il ne me paraît pas que personne ait encore pensé.

3. Comme chaque intégration peut introduire une constante arbitraire, il s'ensuit que l'équation finie entre x et y doit renfermer deux constantes arbitraires; cependant il est facile de voir par la Théorie des développées que la courbe engendrée par le développement d'une courbe donnée ne peut renfermer qu'une seule constante arbitraire, laquelle dépend du point où le développement commence. Car il est visible qu'on ne peut faire passer la développante (ou courbe formée par le développement de celle qu'on nomme la *développée*) que par un seul point arbitraire. En effet, un point étant donné par lequel la développante doit passer, on tirera par ce point une tangente à la développée, et, regardant cette tangente comme une partie de la courbe déjà développée, on continuera le développement suivant la loi connue; moyennant quoi la développante sera entièrement déterminée.

Il s'ensuit de ce raisonnement que lorsque l'équation de la développée est algébrique, celle de la développante doit être différentielle du premier ordre seulement, au lieu que la méthode précédente la donne du second ordre. C'est aussi ce que l'on trouve directement en considérant le Problème sous un autre point de vue que voici.

4. Comme les quantités p, q, r sont variables d'un point à l'autre de la développée, on peut aussi les considérer comme telles dans les équations du n° 1. Or la seconde et la troisième de ces équations n'étant que les différentielles respectives de la première et de la seconde, en n'y re-

gardant que x et y comme variables, il est visible que la supposition de la variabilité de p, q, r donnera ces deux autres équations différentielles

$$-(x-p)dp - (y-q)dq = r dr,$$

$$-dp - \frac{dy}{dx} dq = 0,$$

lesquelles devront avoir lieu en même temps que celles du numéro cité.

5. On aura donc de cette manière ces quatre équations

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

$$x-p + (y-q) \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$(x-p)dp + (y-q)dq + r dr = 0,$$

$$dp + \frac{dy}{dx} dq = 0,$$

au moyen desquelles, en éliminant $x, y, \frac{dy}{dx}$, on aura une équation différentielle du premier ordre entre p, q, r ; ensuite on aura x, y exprimées algébriquement en p, q, r et leurs différences premières. Ainsi, q étant donnée en p par l'équation de la développée, il ne faudra qu'une seule intégration pour trouver r et de là x et y .

A l'égard de la troisième équation du n° 1, elle devient inutile puisqu'elle est renfermée dans la seconde et dans la quatrième des précédentes; en effet, en différentiant la seconde et en effaçant, en vertu de la quatrième, les termes qui contiendront dp et dq , on aura l'équation dont il s'agit.

6. Éliminant d'abord la quantité $\frac{dy}{dx}$ de la seconde et de la quatrième des équations précédentes, on aura celle-ci

$$(y-q)dp - (x-p)dq = 0,$$

laquelle étant combinée avec la troisième servira à déterminer x et y ,

de manière que l'on aura

$$x = p - \frac{r dr dp}{dp^2 + dq^2}, \quad y = q - \frac{r dr dq}{dp^2 + dq^2}.$$

Substituant maintenant ces valeurs dans la première équation, on aura

$$\frac{r^3 dr^2 (dp^2 + dq^2)}{(dp^2 + dq^2)^2} = r^2,$$

savoir

$$dr^2 = dp^2 + dq^2,$$

et, tirant la racine carrée,

$$dr = \pm \sqrt{dp^2 + dq^2}.$$

Cette dernière formule fait voir que le rayon osculateur r varie par des différences égales à celles de l'arc de la développée dont l'élément est $\sqrt{dp^2 + dq^2}$. Désignant donc cet élément par ds , on aura

$$dr = \pm ds,$$

et, intégrant,

$$r = h \pm s.$$

k étant une constante arbitraire qui dépend du point où est supposé commencer le développement. Cela s'accorde avec la Théorie connue des développées, et l'on voit en même temps que le signe supérieur répond au cas où le fil qui par son extrémité décrit la développante se développe en effet de la courbe qu'on nomme la *développée*, et que le signe inférieur répond au cas contraire dans lequel le fil est supposé s'envelopper à la même courbe.

7. L'analyse précédente donne, comme on voit, les mêmes résultats qui se déduisent de la considération synthétique du développement des courbes; mais ne pourrait-on pas y parvenir aussi par la première méthode, qui est d'ailleurs la plus directe et la plus naturelle? Voici comment.

L'équation de la développée étant donnée entre ses coordonnées rec-

tangles p et q , on aura q égale à une fonction donnée de p , que je dénoterai, en général, par $f(p)$; donc, puisque

$$q = f(p),$$

on aura, en différenciant,

$$dq = f'(p) dp.$$

Or je remarque que les valeurs de p et q du n° 1 sont telles, que

$$dp + \frac{dy}{dx} dq = 0,$$

comme on le voit par la quatrième équation du n° 5; et l'on peut aussi s'en assurer directement par la différenciation actuelle de ces valeurs; car on aura

$$dq = dy + d \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \quad dp = -\frac{dy^2}{dx} - \frac{dy}{dx} d \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}};$$

donc

$$dq dy + dp dx = 0.$$

Donc, substituant dans l'équation différentielle

$$dq = f'(p) dp$$

à la place de dq sa valeur $-\frac{dp dx}{dy}$, on aura

$$\left[\frac{dx}{dy} + f'(p) \right] dp = 0,$$

équation qui se décompose d'elle-même en ces deux-ci

$$dp = 0, \quad \frac{dx}{dy} + f'(p) = 0.$$

8. Considérons ces deux équations séparément; et d'abord l'équation

$$dp = 0$$

étant intégrée donnera

$$p = \text{une constante arbitraire};$$

ainsi $q=f(p)$ sera aussi une constante. Or, chassant des expressions

de p et q du n° 1 la quantité $\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{d^2y}$, on a

$$(x-p) + (y-q) \frac{dy}{dx} = 0;$$

donc, multipliant par dx et intégrant, on aura

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

r étant une nouvelle constante arbitraire.

C'est, comme on voit, la même équation d'où nous sommes partis d'abord (1); en sorte que cette solution ne donne autre chose qu'un cercle quelconque ayant le centre placé sur la circonférence de la courbe donnée. Il est clair en effet que le cercle résout la question, considérée sous le point de vue où nous l'avons d'abord envisagée; et il est visible aussi que l'on peut faire passer le cercle dont il s'agit par deux points arbitraires; car en joignant ces deux points par une droite et élevant sur le point du milieu de cette droite une perpendiculaire, il suffira que le centre du cercle soit dans le point où cette perpendiculaire coupera la développée donnée. D'où l'on doit conclure que cette solution a toute la généralité que la question peut comporter (2).

9. Venons maintenant à l'autre équation

$$\frac{dx}{dy} + f'(p) = 0;$$

cette équation étant combinée avec l'équation

$$(x-p) + (y-q) \frac{dy}{dx} = 0,$$

laquelle résulte de l'élimination de la seconde différence d^2y des expressions de p et q , donnera, à cause de $q=f(p)$, celle-ci

$$(x-p)f'(p) = y - f(p);$$

d'où, éliminant p au moyen de l'équation

$$\frac{dx}{dy} + f'(p) = 0,$$

on aura une équation du premier ordre entre x et y , et qui étant intégrée ne contiendra par conséquent qu'une constante arbitraire.

Au lieu d'éliminer p , il sera plus simple d'éliminer y ; pour cela il n'y aura qu'à différentier l'équation

$$y = f(p) + (x-p)f'(p),$$

ce qui donnera

$$dy = dx f'(p) + (x-p)f''(p) dp,$$

et, substituant pour dy sa valeur $-\frac{dx}{f'(p)}$, il viendra l'équation

$$[1 + f''(p)] dx = -(x-p)f'(p)f''(p) dp,$$

dont l'intégration est facile par les méthodes connues. Cette solution revient à celle que l'on a déjà trouvée (5).

Pour s'en convaincre on n'a qu'à supposer, ce qui est permis,

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

r étant ici une variable indéterminée, et combiner cette équation avec les deux équations

$$(x-p) + (y-q) \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dx}{dy} + f'(p) = 0, \quad \text{ou bien} \quad \frac{dx}{dy} + \frac{dq}{dp} = 0;$$

car, en différentiant l'équation dont il s'agit, on aura, à cause de

$$(x-p) dx + (y-q) dy = 0,$$

celle-ci

$$-(x-p) dp - (y-q) dq = r dr.$$

En sorte qu'on aura les mêmes quatre équations du n° 5, et par conséquent aussi les mêmes résultats.

10. Quoique la méthode que nous venons d'exposer ne laisse rien à désirer relativement à la solution du Problème proposé, il faut avouer néanmoins que cette méthode, considérée analytiquement et indépendamment de toute considération géométrique, n'est pas aussi directe qu'on pourrait le désirer; car elle demande qu'on commence par différentier l'équation qu'il s'agit d'intégrer, ce qui est peu naturel et peu conforme à la marche ordinaire du Calcul intégral. En effet, supposons qu'il soit proposé d'intégrer l'équation du second ordre

$$y + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{d^2y} = \varphi \left[x - \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{d^2y} \frac{dy}{dx} \right],$$

qui n'est autre chose, comme on voit, que l'équation de la développée

$$q = \varphi(p),$$

sans qu'on sache comment on est parvenu à cette équation, il ne serait pas facile de prévoir que l'intégration d'une telle équation peut être facilitée beaucoup par une différentiation préliminaire. Voyons donc comment on pourrait parvenir au but en ne faisant usage que des artifices ordinaires du Calcul intégral. Un des artifices les plus ordinaires de ce Calcul est celui des substitutions, et il est clair que la substitution qui paraît la plus naturelle dans l'équation proposée est celle de supposer la quantité affectée du signe φ , lequel dénote une fonction arbitraire égale à une nouvelle variable p , ce qui donnera ces deux équations

$$x - \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{d^2y} = p, \quad y + \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{d^2y} = \varphi(p),$$

au moyen desquelles on pourra éliminer par exemple la variable y , et

obtenir une équation entre x et p qui aura l'avantage que le signe φ n'affectera plus que la seule variable finie p .

11. Faisons, pour plus de simplicité,

$$\frac{dy}{dx} = z;$$

les deux équations précédentes deviendront

$$x - \frac{(1+z^2)z}{dz} = p, \quad y + \frac{(1+z^2)dx}{dz} = \varphi(p);$$

la première donne

$$\frac{(1+z^2)dx}{dz} = \frac{x-p}{z},$$

ce qui étant substitué dans la seconde donne celle-ci

$$y + \frac{x-p}{z} = \varphi(p);$$

laquelle étant différentiée, pour en chasser la variable finie y , donne

$$z dx - \frac{x-p}{z^2} dz + \frac{dx-dp}{z} = \varphi'(p) dp;$$

équation d'où l'on chassera z au moyen de la précédente

$$\frac{x-p}{z} = \frac{(1+z^2)dx}{dz}.$$

Substituons-y d'abord la valeur de dz tirée de cette dernière, savoir

$$dz = \frac{(1+z^2)z}{x-p},$$

elle deviendra

$$z dx - \frac{1+z^2}{z} dx + \frac{dx-dp}{z} = \varphi'(p) dp,$$

savoir

$$-\frac{dp}{z} = \varphi'(p) dp;$$

596 SUR DIFFÉRENTES QUESTIONS D'ANALYSE RELATIVES
laquelle donne immédiatement

$$\text{ou } dp = 0, \text{ ou } -\frac{1}{z} = \varphi'(p).$$

L'équation

$$dp = 0$$

donne

$$p = \text{une constante arbitraire,}$$

et z restera indéterminée. On reprendra donc dans ce cas l'équation

$$y + \frac{x-p}{z} = \varphi(p),$$

et l'on y substituera pour z sa valeur primitive $\frac{dy}{dx}$; on aura une équation entre x et y dont l'intégrale sera

$$(x-p)^2 + [y - \varphi(p)]^2 = r^2.$$

C'est la même équation au cercle trouvée (8).

L'autre équation

$$-\frac{1}{z} = \varphi'(p)$$

donne

$$z = -\frac{1}{\varphi'(p)},$$

moyennant quoi on chassera z de l'équation

$$dz = \frac{(1+z^2)z dx}{x-p},$$

et l'on aura une équation du premier ordre entre x et p . Au lieu de chasser z , il est plus simple de chasser p ; car, ayant

$$\varphi'(p) = -\frac{1}{z},$$

on aura p égal à une fonction donnée de z que nous dénoterons par Z ;

A LA THÉORIE DES INTÉGRALES PARTICULIÈRES. 597
alors on aura cette équation entre z et x

$$dx = \frac{x-Z}{(1+z^2)z} dz,$$

laquelle est intégrable par les méthodes connues; pour l'intégrer il n'y a qu'à la multiplier par $\frac{\sqrt{1+z^2}}{z}$, et l'on aura cette intégrale

$$\frac{x\sqrt{1+z^2}}{z} = -\int \frac{Z dz}{z^2\sqrt{1+z^2}} + \text{const.}$$

On aura ainsi x en z ; ensuite on chassera z au moyen de l'équation

$$y + \frac{x-p}{z} = \varphi(p),$$

en y substituant pour p sa valeur Z . Cette dernière solution répond, comme on voit, à celle du n° 9.

12. On peut encore intégrer la même équation par une autre méthode que voici.

Ayant égalé la quantité sous le signe φ à une nouvelle variable p , ce qui donne

$$x - \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \frac{dy}{dx} = p,$$

ou bien, en faisant $\frac{dy}{dx} = z$,

$$x - \frac{(1+z^2)z dx}{dz} = p,$$

comme dans le n° 11, j'intègre cette dernière équation en y regardant p comme une constante. Pour cela il n'y a qu'à la multiplier par $\frac{dz}{z^2\sqrt{1+z^2}}$, et intégrant on aura

$$\frac{(x-p)\sqrt{1+z^2}}{z} = r,$$

d'où l'on tire

$$z = \frac{dy}{dx} = \frac{x-p}{\sqrt{r^2 - (x-p)^2}};$$

multipliant par dx et intégrant de nouveau, on aura

$$y = q - \sqrt{r^2 - (x-p)^2},$$

r et q étant deux nouvelles constantes arbitraires.

Cette expression de y serait la véritable si la quantité p était effectivement constante, comme nous l'avons supposée; mais, quelle que soit la quantité p , comme elle est indéterminée, on peut toujours supposer que l'expression précédente de y ait lieu, en y regardant p comme une nouvelle variable; on y peut de plus regarder aussi les quantités q et r comme variables, et, comme elles sont indéterminées, on pourra établir entre elles telles relations qu'on voudra; on pourra donc aussi faire en sorte que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ et de $\frac{d^2y}{dx^2}$ soient les mêmes que si les trois quantités p , q , r ne variaient point; et cela en égalant à zéro séparément la partie de chacune de ces valeurs qui résultera des variations de p , q , r ; ce qui donnera deux équations différentielles du premier ordre entre p , q , r , x et dp , dq , dr . On substituera maintenant les valeurs de y , $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$ ou de y , z , $\frac{dz}{dx}$ exprimées en p , q , r , x dans l'équation proposée

$$y + \frac{(1+z^2)dx}{dz} = \varphi \left[x - \frac{(1+z^2)zdx}{dz} \right],$$

et l'on aura une équation finie entre p , q , r et x , au moyen de laquelle on pourra chasser une des variables des deux équations différentielles trouvées auparavant. En voici le calcul.

13. Puisque

$$y = q - \sqrt{r^2 - (x-p)^2},$$

on aura d'abord, en faisant varier p , q , r et en égalant la variation de y à zéro,

$$dq - \frac{rdr + (x-p)dp}{\sqrt{r^2 - (x-p)^2}} = 0;$$

alors la valeur de $\frac{dy}{dx}$ ou z sera

$$\frac{x-p}{\sqrt{r^2 - (x-p)^2}},$$

comme dans le cas où p , q , r sont constantes.

Faisant varier de nouveau p , r dans cette expression de z , et égalant à zéro la variation résultante de z , on aura l'équation

$$\frac{r^2 dp + (x-p)rdr}{[r^2 - (x-p)^2]^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

et la valeur de $\frac{dz}{dx}$ sera

$$\frac{r^2}{[r^2 - (x-p)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

comme dans le cas de p et r constantes.

Qu'on substitue maintenant les valeurs précédentes de y , z , $\frac{dz}{dx}$ dans l'équation proposée; il est d'abord visible que la partie

$$x - \frac{(1+z^2)zdx}{dz}$$

redeviendra égale à p , comme on peut aussi s'en assurer par les substitutions; quant à l'autre partie

$$y + \frac{(1+z^2)dx}{dz},$$

elle deviendra par les mêmes substitutions égale à q .

De sorte que l'on aura cette équation entre les seules variables p et q ; savoir $q = \varphi(p)$, laquelle servira à déterminer q en p . Et il n'y aura plus qu'à déterminer p et r en x , au moyen des deux équations

$$dq - \frac{rdr + (x-p)dp}{\sqrt{r^2 - (x-p)^2}} = 0,$$

$$r dp + (x-p)dr = 0.$$

Si l'on substitue dans la première la valeur de $x - p$ tirée de la seconde, elle deviendra

$$dq - \sqrt{dr^2 - dp^2} = 0;$$

d'où

$$dr = \sqrt{dp^2 + dq^2},$$

et, à cause de $dq = \varphi'(p)dp$,

$$dr = dp \sqrt{1 + [\varphi'(p)]^2};$$

d'où l'on tirera par l'intégration r en p . Cette même valeur de dr étant substituée dans la seconde équation ci-dessus, elle deviendra

$$[r + (x - p)\sqrt{1 + [\varphi'(p)]^2}] dp = 0,$$

laquelle donne, ou $dp = 0$, et par conséquent p égal à une constante arbitraire, auquel cas on aura immédiatement l'équation finie

$$y = q - \sqrt{r^2 - (x - p)^2}$$

où $q = \varphi(p)$, et r sera une autre constante arbitraire (12). Ou bien l'équation précédente donnera

$$r + (x - p)\sqrt{1 + [\varphi'(p)]^2} = 0,$$

d'où l'on tirera p en x , ou x en p à cause que r est déjà déterminé en p par l'équation

$$dr = \sqrt{1 + [\varphi'(p)]^2} dp.$$

On aura ainsi

$$x = p - \frac{r}{\sqrt{1 + [\varphi'(p)]^2}},$$

et, substituant cette valeur dans l'expression de y ci-dessus, on aura

$$y = \varphi(p) - \frac{r}{\sqrt{1 + [\varphi'(p)]^2}}.$$

Il est visible que cette dernière solution revient au même que celle du n° 6; aussi est-elle déduite de principes analogues. A l'égard de l'autre solution qui donne un cercle quelconque, on l'aurait trouvée également par les formules du numéro cité, si l'on y avait substitué $\varphi'(p)dp$ à la place de dq ; car l'équation

$$dp + \frac{dy}{dx} dq = 0$$

aurait donné sur-le-champ,

$$\text{ou } dp = 0, \text{ ou } 1 + \frac{dy}{dx} \varphi'(p) = 0,$$

qui est la seule dont nous ayons fait usage dans ce numéro.

ARTICLE II. — Sur les roulettes.

1. J'appelle, en général, *roulette* toute courbe décrite par le roulement ou révolution d'une courbe quelconque donnée autour de la circonférence d'une autre courbe donnée, comme la roulette ou cycloïde ordinaire est formée par la révolution d'un cercle sur une ligne droite, et les épicycloïdes le sont par la révolution d'un cercle sur la circonférence d'un autre cercle.

Il est évident, par la génération de ces roulettes : 1° que les arcs révolus en même temps, soit de la courbe mobile, soit de la courbe immobile, doivent toujours être égaux; 2° que, si du point décrivant de la courbe mobile on mène au point d'attouchement des deux courbes une droite que nous appellerons le *rayon*, ce rayon sera nécessairement perpendiculaire à la roulette; en sorte que, si l'on décrit un cercle avec ce même rayon, ce cercle coïncidera avec l'arc de la roulette en deux points infiniment proches.

2. Cela posé, soient p, q l'abscisse et l'ordonnée de la courbe immobile, s l'arc correspondant de cette courbe, lequel doit être égal à l'arc révolu

en même temps de la courbe mobile, r le rayon de la courbe mobile, qui répond à cet arc, x et y l'abscisse et l'ordonnée de la roulette qui en résulte. En prenant ces mêmes coordonnées x et y pour celles du cercle décrit du rayon r , il est facile de voir qu'on aura pour l'équation de cercle

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2.$$

Or ce cercle devant coïncider avec la roulette dans deux points infiniment proches, il faudra que tant l'équation précédente que sa différentielle première ait lieu par rapport à la courbe dont il s'agit, c'est-à-dire en regardant les coordonnées x et y comme appartenant à cette courbe.

On aura de cette manière, pour la roulette, les deux équations

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

$$x-p + (y-q) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Maintenant la courbe immobile étant donnée, on aura, par l'équation de cette courbe, l'ordonnée q et l'arc s donnés par l'abscisse p . De plus, par la nature de la courbe mobile, le rayon r sera aussi donné par l'arc révolu de la même courbe, lequel devant être égal à s , on aura donc aussi r donné en p .

Soit donc

$$q = \varphi(p), \quad r = f(p),$$

φ et f dénotant des fonctions données; on substituera ces valeurs dans les deux équations précédentes, et éliminant p , on aura une équation différentielle du premier ordre entre x et y , qui sera celle de la roulette cherchée.

3. Cette équation étant intégrée admettra donc une constante arbitraire; en sorte qu'il sera possible de faire passer la roulette par un point donné. Cependant, si l'on considère la génération de cette courbe, il n'est pas difficile de se convaincre que tout y est déterminé, dès que les deux courbes, la mobile et l'immobile, sont données, et que le point décrivant

est aussi donné dans le plan de la courbe mobile, ainsi que notre analyse le suppose. D'où il s'ensuit que l'équation de la roulette ne saurait renfermer aucune constante arbitraire, et que la courbe elle-même ne saurait être décrite de manière qu'elle passe par un point donné à volonté.

Il se présente donc ici une difficulté analogue à celle que nous avons rencontrée dans le Problème des développées, et qu'on pourra par conséquent résoudre d'une manière semblable. En effet, si l'on considère d'abord les quantités p , q , r comme variables, ainsi qu'elles le sont en effet, il est clair que la différentielle de l'équation

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

prise en faisant varier seulement ces mêmes quantités p , q , r , devra avoir lieu aussi, puisque la différentielle de cette même équation, en faisant varier x et y , a déjà lieu d'elle-même en vertu de la seconde équation

$$x-p + (y-q) \frac{dy}{dx} = 0.$$

Ainsi l'on aura l'équation

$$-(x-p)dp - (y-q)dq = rdr,$$

laquelle, en mettant pour dq et dr leurs valeurs $\varphi'(p)dp$ et $f'(p)dp$, devient

$$[x-p + (y-q)\varphi'(p) + rf'(p)]dp = 0.$$

Cette équation se décompose, comme on voit, en ces deux-ci

$$dp = 0 \quad \text{et} \quad x-p + (y-q)\varphi'(p) + rf'(p) = 0.$$

La première $dp = 0$ étant intégrée donne

$$p = \text{une constante arbitraire.}$$

Ainsi $q = \varphi(p)$ et $r = f(p)$ seront aussi constantes; et l'on aura sur-le-champ pour la roulette l'équation finie

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

qui n'exprime, comme on voit, qu'un cercle décrit du rayon r égal à la distance du point décrivant au point d'attouchement des deux courbes. Cette solution satisfait, comme il est aisé de le voir, au Problème envisagé analytiquement, et, de ce qu'elle renferme une constante arbitraire, il s'ensuit qu'elle a toute l'étendue que demande l'équation différentielle trouvée plus haut; mais il est visible en même temps qu'elle ne satisfait pas à la question envisagée mécaniquement et sous le point de vue où on l'a proposée.

Ce dernier objet se trouve rempli par l'autre équation, savoir

$$x - p + (y - q) \varphi'(p) + r f'(p) = 0,$$

laquelle, en éliminant p au moyen de l'équation finie

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

[q et r étant égaux à $\varphi(p)$ et $f(p)$], donnera une équation finie en x et y dans laquelle il n'y aura aucune constante arbitraire, et qui sera la véritable équation de la roulette décrite par la révolution d'une courbe donnée sur une autre courbe donnée.

4. En combinant les deux équations

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2, \quad -(x - p) dp - (y - q) dq = r dr,$$

on en tire les valeurs de x et y , lesquelles, en mettant ds^2 à la place de sa valeur $dp^2 + dq^2$, se trouveront exprimées ainsi

$$x = p - \frac{r dr dp + r dq \sqrt{ds^2 - dr^2}}{ds^2},$$

$$y = q - \frac{r dr dq - r dp \sqrt{ds^2 - dr^2}}{ds^2}.$$

Pour faire usage de ces formules, il sera plus simple d'exprimer les coordonnées p et q de la courbe immobile, ainsi que le rayon r de la courbe mobile, par l'arc s qui est commun aux deux courbes. On trouvera

de cette manière les valeurs de x et y exprimées en s , d'où, éliminant s , on aura l'équation de la roulette.

5. Pour donner quelques exemples de l'application des formules précédentes, considérons d'abord le cas de la roulette ou cycloïde ordinaire. Ici la courbe immobile n'est autre chose que l'axe même des abscisses p , en sorte qu'on aura

$$q = 0, \quad p = s.$$

Ensuite la courbe mobile est un cercle dont nous ferons le rayon égal à a ; or, en prenant le point décrivant sur la circonférence de ce cercle, il est visible que r sera la corde de l'arc s , en sorte qu'on aura

$$r = 2a \sin \frac{s}{2a}, \quad \text{d'où} \quad dr = \cos \frac{s}{2a} ds;$$

substituant ces valeurs, il viendra

$$x = s - 2a \sin \frac{s}{2a} \cos \frac{s}{2a} = s - a \sin \frac{s}{a},$$

$$y = 2a \sin^2 \frac{s}{2a} = a \left(1 - \cos \frac{s}{a} \right).$$

Si le point décrivant n'était pas sur la circonférence du cercle, mais à la distance b du centre, alors il est facile de prouver qu'on aurait

$$r = \sqrt{\left(b - a \cos \frac{s}{a} \right)^2 + a^2 \sin^2 \frac{s}{a}},$$

ou bien

$$r = \sqrt{b^2 - 2ab \cos \frac{s}{a} + a^2},$$

d'où

$$r dr = b \sin \frac{s}{a} ds, \quad r^2 ds^2 - r^2 dr^2 = \left(a - b \cos \frac{s}{a} \right)^2 ds^2;$$

de sorte qu'après les substitutions on aura

$$x = s - b \sin \frac{s}{a}, \quad y = a - b \cos \frac{s}{a}.$$

Enfin, si dans ce dernier cas on voulait que la courbe immobile fût aussi un cercle dont le rayon $= h$, il est facile de voir qu'on aurait pour lors

$$p = h \left(1 - \cos \frac{s}{h}\right), \quad q = h \sin \frac{s}{h},$$

en supposant que l'axe des abscisses passe par le centre du cercle immobile. De là on trouvera, après les réductions,

$$x = h - (h + a) \cos \frac{s}{h} + b \cos \left[\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{a} \right) s \right],$$

$$y = (h + a) \sin \frac{s}{h} - b \sin \left[\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{a} \right) s \right];$$

d'où l'on voit que la roulette sera géométrique toutes les fois que h sera à a comme nombre à nombre.

6. Si la courbe immobile étant quelconque, la courbe mobile devenait une ligne droite, et que le point décrivant fût pris dans cette même droite, il est visible qu'on aurait alors $r = s$, ou plus généralement $r = k + s$, k étant une constante quelconque. Les formules de la roulette (4) deviendront alors

$$x = p - \frac{r dp}{dr}, \quad y = q - \frac{r dq}{dr},$$

lesquelles sont, comme l'on voit, identiques avec celles que nous avons trouvées dans le n° 6 de l'Article I pour la développante de la courbe dont p et q sont les coordonnées. Il est facile de concevoir en effet que dans ce cas la roulette ne saurait être autre chose que la développante de la courbe immobile; c'est ce que d'autres Géomètres ont déjà remarqué.

ARTICLE III. — *Des différents ordres de contact des courbes, et de la manière de trouver des courbes qui aient avec une infinité de courbes données des contacts d'un ordre donné.*

1. On sait que, dans le point d'attouchement de deux courbes, il y a une réunion de deux points d'intersection des mêmes courbes; on sait de plus que, dans le point où deux courbes se touchent en sorte qu'elles

aient la même courbure, il y a une réunion de trois points d'intersection; et si outre cela la variation de la courbure est encore la même, alors il y aura une réunion de quatre points d'intersection; et ainsi de suite.

Nous appellerons, en général, *contact du premier ordre* tout attouchement de deux courbes où il y a réunion de deux intersections, *contact du second ordre* tout attouchement dans lequel il y aura réunion de trois points d'intersection, *contact du troisième ordre* celui où quatre points d'intersection seront réunis; et ainsi de suite.

De cette manière l'attouchement ordinaire sera un contact du premier ordre, l'osculation sera un contact du second ordre, etc.

2. Cela posé, soit proposée une courbe dont l'équation soit

$$V = 0,$$

V étant une fonction donnée des coordonnées x, y et de deux constantes arbitraires p et q ; et qu'on demande les valeurs de ces arbitraires pour que la courbe proposée ait un contact du premier ordre avec une autre courbe quelconque. Il faudra que, dans ce contact, non-seulement les valeurs de x et y , mais aussi celles de dx et dy soient les mêmes pour les deux courbes; donc non-seulement l'équation $V = 0$, mais encore sa différentielle $dV = 0$, devra avoir lieu par rapport à la nouvelle courbe. Ainsi il n'y aura qu'à tirer de ces deux équations

$$V = 0, \quad dV = 0$$

les valeurs de p et q , lesquelles se trouveront exprimées en x, y et $\frac{dy}{dx}$.

Si V est une fonction de x, y et de trois constantes arbitraires p, q, r , on pourra déterminer les valeurs de p, q, r en sorte que la courbe proposée ait un contact du second ordre avec une autre courbe quelconque; car la nature de ce contact exigeant que non-seulement x et y , mais aussi $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, soient les mêmes pour les deux courbes, il n'y aura qu'à supposer que les trois équations

$$V = 0, \quad dV = 0, \quad d^2V = 0$$

608 SUR DIFFÉRENTES QUESTIONS D'ANALYSE RELATIVES
aient lieu en même temps relativement à ces deux courbes, et l'on tirera de ces équations les valeurs de p, q, r , lesquelles seront exprimées en $x, y, \frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$; et ainsi de suite.

Nous nommerons, en général, *courbe touchante* la courbe proposée par rapport à laquelle les quantités $p, q, r, \dots$ sont constantes; et nous nommerons ensuite *courbe touchée* l'autre courbe par rapport à laquelle ces mêmes quantités sont variables, étant des fonctions de ses coordonnées x, y et de leurs différentielles $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$.

Enfin nous nommerons ces mêmes quantités $p, q, r, \dots$ *éléments du contact*; de sorte qu'un contact du premier ordre n'aura que deux éléments, un contact du second ordre n'en aura que trois, etc.

3. Supposons que la courbe touchante soit un cercle quelconque, dont l'équation soit

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2,$$

p et q étant les coordonnées qui déterminent le lieu du centre et r le rayon. Si l'on veut que ce cercle ait un contact du second ordre avec une courbe quelconque, c'est-à-dire qu'il en devienne le cercle osculateur, il faudra déterminer les trois éléments p, q, r du contact au moyen des trois équations

$$V=0, \quad dV=0, \quad d^2V=0,$$

en faisant

$$V=(x-p)^2 + (y-q)^2 - r^2;$$

et l'on retrouvera les mêmes expressions de ces quantités que l'on a déjà trouvées dans l'Article I^{er} (1).

Si l'on fait tomber le centre du cercle dans l'axe des abscisses, on aura $q=0$, et l'équation

$$(x-p)^2 + y^2 = r^2$$

ne renfermera plus que deux constantes p et r . Ce cercle ne pourra donc

plus avoir qu'un contact du premier ordre avec une autre courbe quelconque; et il est clair que dans ce point de contact le rayon r deviendra la normale à la courbe touchée, et que la quantité p sera la partie de l'axe interceptée entre l'origine des abscisses et le concours de la normale, partie qu'on nomme quelquefois la *resecte*.

On déterminera donc ces deux éléments p et r au moyen des deux équations $V=0$ et $dV=0$, lesquelles donneront

$$p = x + \frac{y \, dy}{dx}, \quad r = \frac{y \sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}.$$

On peut supposer aussi que le centre du cercle tombe sur la circonférence d'une courbe donnée; alors r deviendra la partie de la normale interceptée par cette courbe. Dans ce cas on aura une équation entre p et q qui sera celle de la courbe donnée, et au moyen de cette équation et des deux équations $V=0$ et $dV=0$ on déterminera p, q, r . On en a un exemple dans le n° 2 de l'Article II.

L'équation générale de l'ellipse rapportée au foyer est

$$u + px + qy = r,$$

dans laquelle u est le rayon vecteur égal à $\sqrt{x^2 + y^2}$, r est le demi-paramètre du grand axe, $\sqrt{p^2 + q^2}$ est l'excentricité, et $\frac{q}{p}$ est la tangente de l'angle que le grand axe de l'ellipse fait avec l'axe des abscisses x dont l'origine est dans le foyer, et qui sont supposées positives en allant vers l'apside le plus proche.

Si donc on veut que cette ellipse ait un contact du second ordre avec une courbe quelconque, c'est-à-dire qu'elle devienne osculatrice de cette courbe, il n'y aura qu'à déterminer les éléments p, q, r au moyen des mêmes équations

$$V=0, \quad dV=0, \quad d^2V=0,$$

mais en faisant

$$V = u + px + qy - r.$$

On trouvera ainsi

$$q = -\frac{d\frac{du}{dx}}{\frac{dy}{dx}}, \quad p = -\frac{du}{dx} + \frac{d\frac{du}{dx}}{\frac{dy}{dx}} \frac{dy}{dx},$$

$$r = u - x \frac{du}{dx} + \frac{d\frac{du}{dx}}{\frac{dy}{dx}} \left(x \frac{dy}{dx} - y \right).$$

Si la position du foyer de l'ellipse osculatrice n'était pas donnée, nommant m, n l'abscisse et l'ordonnée qui répondent à ce foyer, on aura alors pour l'équation générale de l'ellipse

$$u + p(x-m) + q(y-n) = r,$$

dans laquelle

$$u = \sqrt{(x-m)^2 + (y-n)^2},$$

la signification des autres quantités p, q, r demeurant la même qu'auparavant.

Comme cette équation renferme cinq constantes arbitraires, il s'ensuit que l'ellipse dont il s'agit pourra avoir un contact du quatrième ordre avec une autre courbe quelconque, et pour cela on déterminera les cinq éléments de ce contact p, q, r, m, n au moyen des cinq équations

$$V=0, \quad dV=0, \quad d^2V=0, \quad d^3V=0, \quad d^4V=0,$$

en faisant

$$V = u + p(x-m) + q(y-n) - r$$

4. Imaginons maintenant qu'il y ait une relation donnée entre les éléments du contact $p, q, r, \dots$ et qu'on demande la courbe touchée dans laquelle cette relation aura lieu. Il n'y aura pour cela qu'à substituer dans l'équation donnée entre $p, q, r, \dots$ les valeurs de ces quantités exprimées en $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots$ (2).

On aura ainsi, si le contact est du premier ordre, une équation différentielle du premier ordre entre les coordonnées x et y de la courbe

cherchée; si le contact est du second ordre, on aura une équation différentielle du second ordre entre les mêmes coordonnées; et ainsi de suite. Il ne s'agira donc plus que d'intégrer ces différentes équations, et pour cela je remarquerai d'abord qu'on peut supposer que les quantités $p, q, r, \dots$ soient constantes; car, comme l'équation donnée entre ces quantités est supposée ne renfermer que ces mêmes quantités sans les variables x, y , il est visible que cette équation pourra toujours subsister dans l'hypothèse que les quantités dont il s'agit soient constantes; et l'effet de cette équation consistera alors à déterminer une de ces constantes par toutes les autres, lesquelles demeureront par conséquent arbitraires. Ainsi le nombre des constantes arbitraires sera égal à celui des éléments du contact moins un, et par conséquent égal à l'exposant de l'ordre de ce contact (2); donc ce nombre sera aussi égal à celui de l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle qu'il s'agit d'intégrer (3).

Cela posé, puisque les expressions des quantités $p, q, r, \dots$ en $x, y, \frac{dy}{dx}, \dots$ ont été déduites de l'équation $V=0$ et de ses différentielles $dV=0, d^2V=0, \dots$ en y regardant ces quantités comme constantes (2), il est visible que la même équation finie $V=0$ satisfera, dans l'hypothèse présente, à l'équation différentielle proposée; et comme parmi les constantes $p, q, r, \dots$, que l'équation $V=0$ renferme, il en reste toujours autant d'arbitraires qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle dont il s'agit, il s'ensuit que cette équation $V=0$ sera l'intégrale finie et complète de la même équation différentielle. Or l'équation $V=0$ est celle de la courbe touchante; donc l'intégrale complète de l'équation différentielle proposée ne donnera jamais autre chose que la même courbe touchante que l'on connaissait déjà, et ne donnera nullement la courbe touchée qu'il s'agit de trouver. Cependant il est facile de se convaincre que l'équation différentielle en question appartient également à la courbe touchée; donc, puisque cette courbe n'est pas renfermée dans l'intégrale complète de la même équation, il faudra nécessairement qu'elle le soit dans une intégrale particulière. C'est ce que nous allons examiner.

5. Nous commencerons par rappeler ici les principes de la Théorie des intégrales particulières que nous avons exposée en détail dans notre Mémoire sur cette matière [*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Berlin* pour 1774 (*)]; et nous les présenterons même d'une manière plus simple et plus générale à quelques égards que nous ne l'avons fait dans ce Mémoire.

Soit

$$Z = 0$$

une équation différentielle d'un ordre quelconque n entre deux ou plusieurs variables; et soit

$$V = 0$$

une équation différentielle d'un ordre inférieur m entre les mêmes variables, laquelle soit une intégrale complète de l'équation $Z = 0$. Par la Théorie connue du Calcul intégral on sait que l'équation $V = 0$ doit renfermer autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans la différence $n - m$ des exposants des ordres des deux équations, en sorte que si $m = 0$, de manière que l'intégrale complète $V = 0$ soit finie, le nombre des constantes arbitraires doit égaler le nombre n de l'ordre de l'équation différentielle $Z = 0$. On sait de plus que l'équation différentielle $Z = 0$ ne peut être autre chose que le résultat de l'élimination de toutes ces constantes arbitraires au moyen de l'équation $V = 0$ et de ses différences $dV = 0, d^2V = 0, \dots$ jusqu'à $d^{n-m}V = 0$ inclusivement: en effet, ces équations étant au nombre de $n - m + 1$, et les constantes arbitraires n'étant qu'au nombre de $n - m$, on aura par l'élimination de ces constantes une équation finale de l'ordre de $n - m$, laquelle devra être identique, ou du moins équivalente à l'équation $Z = 0$.

Or, comme l'élimination dont il s'agit est indépendante de la valeur particulière des constantes arbitraires, il est clair qu'on aura toujours le même résultat, soit que ces quantités arbitraires soient constantes ou non, pourvu que l'on ait les mêmes équations

$$V = 0, \quad dV = 0, \quad d^2V = 0, \dots, \quad d^{n-m}V = 0.$$

(*) *OEuvres de Lagrange*, t. IV, p. 5.

D'où il s'ensuit que l'équation $V = 0$ satisfera toujours à l'équation $Z = 0$ d'un ordre supérieur, même en supposant que les constantes arbitraires qui entrent dans la fonction V deviennent variables, pourvu que les différences de cette fonction $dV, d^2V, \dots$, jusqu'à $d^{n-m}V$ restent les mêmes que dans le cas où ces arbitraires seraient constantes. Or c'est ce qui aura lieu si l'on fait disparaître dans chacune de ces différences la partie qui viendrait de la variation des arbitraires supposées variables.

Désignons, en général, par la caractéristique ∂ la différence prise en faisant varier uniquement les constantes arbitraires de la fonction V , et conservons la caractéristique d pour représenter les différences ordinaires, relatives aux variables de la même fonction V . Il est clair que, dans l'hypothèse où les constantes arbitraires deviendront variables, la différence totale de l'équation $V = 0$ sera

$$dV + \partial V = 0;$$

done, pour que l'on ait

$$dV = 0,$$

il faudra que l'on ait en même temps

$$\partial V = 0.$$

Par la même raison la différence totale de l'équation $dV = 0$ sera

$$d^2V + \partial dV = 0;$$

done, pour que l'on ait

$$d^2V = 0,$$

il faudra que l'on ait en même temps

$$\partial dV = 0.$$

On continuera ce raisonnement pour les différences des ordres suivants, et l'on trouvera de la même manière

$$\partial d^2V = 0, \quad \partial^2 dV = 0, \dots$$

jusqu'à

$$\partial d^{n-m-1}V = 0$$

inclusivement.

Or par la Théorie connue des variations on sait que δdV est la même chose que $d\delta V$, que δd^2V est la même chose que $d^2\delta V$; et ainsi des autres.

Donc les équations de condition pour que l'équation $V=0$ satisfasse à l'équation $Z=0$ d'un ordre supérieur de $n-m$ unités, en y supposant variables les $n-m$ constantes arbitraires, seront

$$\delta V=0, \quad d\delta V=0, \quad d^2\delta V=0, \dots, \quad d^{n-m-1}\delta V=0,$$

dont le nombre est, comme on voit, égal à $n-m$, et par conséquent égal à celui de ces mêmes quantités.

Il n'y aura donc qu'à déterminer les valeurs de ces quantités au moyen des équations de condition dont il s'agit, et à les substituer ensuite dans l'équation $V=0$; ou, ce qui revient au même, il n'y aura qu'à éliminer les mêmes quantités, au moyen de cette équation $V=0$ et des équations de condition

$$\delta V=0, \quad d\delta V=0, \dots, \quad d^{n-m-1}\delta V=0;$$

l'équation résultante satisfera également à l'équation différentielle proposée $Z=0$, et, comme elle sera toujours d'un ordre moins élevé d'une unité que cette dernière équation, elle en sera l'intégrale particulière.

6. Pour éclaircir davantage cette Théorie, soient $x, y, z, \dots$ les différentes variables qui avec leurs différences jusqu'à l'ordre m entrent dans l'intégrale complète $V=0$, et soient $p, q, r, \dots$ les constantes arbitraires au nombre de $n-m$ que cette intégrale renferme. En différentiant la fonction V dans la supposition que les quantités $p, q, r, \dots$ varient seules, on aura

$$\delta V = P dp + Q dq + R dr + \dots;$$

ensuite, faisant varier seulement les quantités $x, y, z, \dots$, on aura

$$d\delta V = dP dp + dQ dq + dR dr + \dots,$$

$$d^2\delta V = d^2P dp + d^2Q dq + d^2R dr + \dots,$$

$$\dots\dots\dots d^{n-m-1}\delta V = d^{n-m-1}P dp + d^{n-m-1}Q dq + d^{n-m-1}R dr + \dots;$$

Ainsi les $n-m$ équations de condition seront

$$P dp + Q dq + R dr + \dots = 0,$$

$$dP dp + dQ dq + dR dr + \dots = 0,$$

$$d^2P dp + d^2Q dq + d^2R dr + \dots = 0,$$

jusqu'à

$$d^{n-m-1}P dp + d^{n-m-1}Q dq + d^{n-m-1}R dr + \dots = 0;$$

où l'on remarquera que les quantités $P, Q, R, \dots$ et leurs différences jusqu'à l'ordre $n-m-1$, ne renferment que les quantités finies $p, q, r, \dots$ et les variables $x, y, z, \dots$ avec leurs différences jusqu'à l'ordre $m+n-m-1$, ou $n-1$. Or comme ces différentes équations ne renferment aucun terme qui ne soit multiplié par dp , ou dq , ou, etc., il est visible qu'en éliminant ces différences $dp, dq, dr, \dots$, dont le nombre est le même que celui des équations, on aura une équation finale qui sera divisible par la dernière de ces inconnues, et qui ne renfermera plus que les quantités finies $p, q, r, \dots$ et les variables $x, y, z, \dots$ avec leurs différences jusqu'à l'ordre $n-1$.

Que l'on combine donc cette équation avec l'équation $V=0$ et avec ses différentielles $dV=0, d^2V=0, \dots$ jusqu'à $d^{n-m-1}V=0$, lesquelles ne renferment aussi que les mêmes quantités finies $p, q, r, \dots$ et les variables $x, y, z, \dots$ avec leurs différences jusqu'à l'ordre $n-1$; on aura de cette manière $n-m+1$ équations, au moyen desquelles on pourra éliminer les $n-m$ inconnues $p, q, r, \dots$; et l'on obtiendra une équation finale entre les variables x, y, z et leurs différences jusqu'à l'ordre $n-1$, laquelle sera par conséquent d'un ordre moins élevé d'une unité que l'équation $Z=0$, qu'on suppose de l'ordre n . Ce sera donc l'intégrale particulière de l'équation proposée $Z=0$.

7. Qu'on applique maintenant cette méthode au Problème du n° 4, et qu'on cherche l'intégrale particulière de l'équation proposée, au moyen de son intégrale complète $V=0$, en y faisant varier les constantes arbitraires $p, q, r, \dots$, on verra aisément que cette intégrale particulière représentera précisément la courbe touchée, puisqu'il est évident que dans

cette courbe les éléments du contact $p, q, r, \dots$ doivent être en effet variables; et c'est la raison qui empêche que cette courbe, quoique contenue dans la même équation différentielle, ne puisse être renfermée dans l'intégrale complète de cette équation dans laquelle les quantités $p, q, r, \dots$ sont constantes.

Les Problèmes que nous avons résolus dans les Articles I et II peuvent servir d'exemples au Problème général que nous traitons ici, et pour peu qu'on examine la manière dont nous avons intégré les équations différentielles des courbes développantes et des roulettes en regardant comme variables les éléments du contact $p, q, r, \dots$, on s'apercevra aisément que nous n'avons fait autre chose que chercher l'intégrale particulière de cette équation suivant les principes établis plus haut.

8. De ce que nous venons de démontrer il s'ensuit, en général, que l'intégrale particulière d'une équation différentielle quelconque entre deux variables n'est autre chose que l'équation de la courbe touchée par toutes les courbes qui peuvent être représentées par les différentes intégrales complètes de la même équation différentielle, en faisant varier dans ces intégrales les constantes arbitraires qu'elles renferment; de manière que le contact sera toujours du même ordre que celui de l'équation différentielle proposée.

9. Nous avons supposé jusqu'ici que les courbes touchantes étaient connues et qu'on cherchait les courbes touchées; mais, si ces dernières étaient données et qu'on cherchât les premières, le Problème serait l'inverse du précédent et serait même en quelque sorte indéterminé. Pour en donner une solution aussi générale qu'il est possible, soit $T=0$ l'équation de la courbe touchée que nous supposerons d'abord finie, en sorte que T soit une fonction des deux coordonnées x et y . On prendra pour les courbes touchantes une équation quelconque $V=0$, entre les mêmes coordonnées x et y , et dans laquelle il entre deux constantes arbitraires p et q , si le contact ne doit être que du premier ordre, ou trois constantes arbitraires p, q, r , si le contact doit être du second ordre; et ainsi de suite.

Dans le premier cas on combinera les deux équations

$$T=0, \quad V=0$$

avec leurs différentielles

$$dT=0, \quad dV=0,$$

et chassant x, y et $\frac{dy}{dx}$, il viendra une équation entre p et q , qui servira à déterminer l'une de ces constantes par l'autre.

Dans le second cas on combinera les mêmes équations

$$T=0, \quad V=0$$

avec leurs différentielles premières

$$dT=0, \quad dV=0,$$

et avec leurs différentielles secondes

$$d^2T=0, \quad d^2V=0,$$

en éliminant par leur moyen les quantités $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, il en résultera deux équations entre les trois constantes p, q, r , au moyen desquelles on déterminera deux de ces constantes par la troisième; et ainsi de suite.

Il restera donc toujours une constante arbitraire dans l'équation $V=0$ de la courbe touchante; et, en donnant à cette constante arbitraire toutes les valeurs possibles, on aura la suite de toutes les courbes qui toucheront la courbe donnée dont l'équation est $T=0$.

Supposons maintenant que l'équation $T=0$ de la courbe touchée soit différentielle du premier ordre; on ne pourra considérer alors que les contacts du second ordre et des ordres supérieurs. On prendra donc pour la courbe touchante une équation finie quelconque $V=0$, dans laquelle il y ait trois constantes indéterminées p, q, r , pour les contacts du second ordre, quatre constantes arbitraires pour les contacts du troisième ordre; et ainsi de suite.

Dans le premier cas on combinera les deux équations

$$T=0, \quad dT=0$$

avec ces trois

$$V = 0, \quad dV = 0, \quad d^2V = 0,$$

en éliminant par leur moyen les quatre quantités $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$; il restera une équation entre p, q, r par laquelle on déterminera, par exemple, r en p et q .

Dans le second cas on combinera les trois équations

avec ces quatre-ci

$$V = 0, \quad dV = 0, \quad d^2V = 0, \quad d^3V = 0,$$

en éliminant les cinq quantités $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$; il viendra deux équations entre les quatre constantes arbitraires; par lesquelles on déterminera deux de ces constantes en fonction des deux autres; et ainsi de suite.

De cette manière il restera toujours deux constantes arbitraires dans l'équation de la courbe touchante $V = 0$; et, en donnant toutes les valeurs possibles à ces constantes, on aura toute la famille des courbes qui toucheront la courbe donnée par l'équation $T = 0$.

On traitera d'une manière analogue les cas où l'équation de la courbe touchée sera différentielle du second ordre ou des ordres suivants.

10. On peut par les mêmes principes résoudre cette question analytique : *Trouver toutes les équations différentielles qui ont pour intégrale particulière une équation donnée.* Il est visible en effet, par ce que nous avons démontré plus haut, que cette question revient à celle-ci : *Trouver l'équation différentielle de toutes les courbes touchantes lorsque la courbe touchée est donnée.*

Or nous avons donné la manière de trouver l'équation finie qui renferme toutes les courbes touchantes, à l'aide d'une ou de plusieurs constantes arbitraires; il n'y aura donc autre chose à faire qu'à éliminer ces constantes au moyen de la différentiation, et l'équation différentielle qui en résultera satisfera à la question.

ARTICLE IV. — *Sur les surfaces composées de lignes d'une nature donnée (*)*

1. Soit proposé de trouver l'équation des surfaces composées de lignes droites; il n'y aura qu'à chercher celle des surfaces formées par l'intersection d'une infinité de plans dont la position varie suivant une loi quelconque.

Or l'équation générale d'un plan est

$$ax + by + cz = d,$$

a, b, c étant des constantes dépendantes de la position du plan. Qu'on suppose donc b et c des fonctions quelconques de a et qu'on fasse ensuite varier a seul dans cette équation, on aura

2. Cette équation sera donc la même que nous avons trouvée dans le n° 49 du Mémoire *Sur les intégrales particulières des équations différentielles* (**), pour l'intégrale de l'équation aux différences partielles

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} + f \left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy} \right) = 0,$$

ainsi cette dernière équation appartiendra aussi aux surfaces dont il s'agit, en supposant que f dénote une fonction quelconque. Or cette équation admet de plus une intégrale particulière qu'on peut trouver par la diffé-

(*) Il n'est question, dans cet Article, que de la génération des surfaces par des lignes d'une nature donnée, assujetties à la condition d'être tangentes à une même courbe. C'est en se plaçant ainsi exclusivement au point de vue des surfaces enveloppes, que Lagrange regarde comme nécessaire, dans le n° 3, la rencontre de deux génératrices infiniment voisines d'une surface réglée.

(Note de l'Éditeur.)

(**) Œuvres de Lagrange, t. IV, p. 75.

rentiation, suivant la méthode générale du n° 46 du Mémoire cité; mais cette intégrale particulière ne donnera point les surfaces demandées, et ne représentera que les surfaces formées par l'intersection de celles-ci, comme on peut le conclure de la Théorie que nous avons donnée de ces sortes d'intégrales.

3. On peut parvenir encore d'une manière plus directe à la solution du Problème proposé, par la simple considération des lignes dont la surface cherchée doit être composée. On sait qu'une ligne droite est représentée, en général, par deux équations de cette forme

$$z = a + bx, \quad y = c + ex,$$

a, b, c, e étant des constantes arbitraires qui dépendent de la position de la ligne par rapport aux axes des coordonnées x, y, z . Faisant donc varier infiniment peu ces constantes, on aura les équations d'une autre ligne droite infiniment proche de celle-là, et pour que ces deux droites soient sur une même surface, il est clair qu'elles doivent nécessairement se couper dans un point quelconque, à moins qu'elles ne soient parallèles, auquel cas le point d'intersection est censé éloigné à l'infini.

D'où il s'ensuit que, pour que les équations

$$z = a + bx, \quad y = c + ex$$

puissent appartenir aussi à la surface cherchée, il faudra que les quantités a, b, c, e soient telles que les différentielles de ces équations, en faisant varier seulement ces quantités, puissent avoir lieu en même temps que les équations dont il s'agit. Or ces différentielles sont

$$da + x db = 0, \quad dc + x de = 0;$$

d'où, en chassant x , on aura l'équation de condition

$$\frac{db}{da} = \frac{de}{dc}.$$

Par cette équation on déterminera, par exemple, e en a , en supposant b

et c des fonctions quelconques de a ; ensuite il n'y aura plus qu'à chasser a des deux équations

$$z = a + bx, \quad y = c + ex,$$

et la résultante sera l'équation de la surface cherchée, laquelle contiendra deux fonctions arbitraires comme celle du n° 1.

4. Si l'on fait $\frac{da}{dc} = \alpha$,

on aura aussi

$$\frac{db}{de} = \alpha;$$

si l'on suppose de plus

$$c = \frac{d\beta}{dx}, \quad e = \frac{d\gamma}{dx},$$

β et γ étant des fonctions quelconques de x , on aura

$$da = \alpha d\frac{d\beta}{dx}, \quad db = \alpha d\frac{d\gamma}{dx},$$

et, intégrant,

$$a = \alpha \frac{d\beta}{dx} - \beta, \quad b = \alpha \frac{d\gamma}{dx} - \gamma.$$

Ainsi l'on aura la surface cherchée en éliminant x des deux équations

$$z = \alpha \frac{d\beta}{dx} - \beta + \left(\alpha \frac{d\gamma}{dx} - \gamma \right) x, \quad y = \frac{d\beta}{dx} + \frac{d\gamma}{dx} x,$$

ou bien

$$z = -\beta - \gamma x + \alpha y, \quad x - \frac{d\alpha}{d\gamma} \gamma + \frac{d\beta}{d\gamma} = 0.$$

Or ces dernières équations sont de la même forme que celles qu'on a trouvées dans le n° 1; ainsi les deux solutions sont d'accord.

Le résultat de la seconde solution est conforme à celui que M. Euler a trouvé par des considérations géométriques dans le tome XVI des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*, page 32, ce qui peut servir à confirmer la bonté de notre méthode.

5. Il est bon de remarquer que les deux équations

$$da + x db = 0, \quad dc + x de = 0,$$

d'où l'on a déduit la condition $\frac{db}{da} = \frac{dc}{de}$, donnent de plus une valeur de

$$x = -\frac{da}{db} = -\frac{dc}{de};$$

cette valeur servira à déterminer le lieu de tous les points d'intersection des lignes droites sur la surface; et pour cela il n'y aura qu'à combiner l'équation

$$x = -\frac{da}{db}$$

avec une des deux équations

$$z = a + bx, \quad y = c + ex,$$

en éliminant a ; la résultante sera celle de la projection de la courbe qui sera le lieu de tous les points dont il s'agit.

6. Il est facile maintenant de généraliser cette Théorie, et de l'appliquer à la recherche des surfaces composées de lignes quelconques d'une nature donnée.

Soient

$$P = 0, \quad Q = 0$$

les deux équations qui expriment la nature des lignes dont la surface cherchée doit être composée, P et Q étant des fonctions données des coordonnées x, y, z et des constantes $a, b, c, \dots$ qui déterminent la position et l'espèce des lignes dont il s'agit. On fera varier ces constantes dans les deux équations

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

ce qui donnera ces deux-ci

$$\frac{dP}{da} da + \frac{dP}{db} db + \frac{dP}{dc} dc + \dots = 0,$$

$$\frac{dQ}{da} da + \frac{dQ}{db} db + \frac{dQ}{dc} dc + \dots = 0.$$

On éliminera au moyen de ces quatre équations les trois coordonnées $x,$

y, z ; il restera une équation différentielle du premier ordre entre $a, b, c, \dots$, laquelle sera l'équation de condition qui doit avoir lieu entre ces quantités. S'il n'y a que deux quantités a et b , cette équation servira à déterminer a en b . S'il y a trois quantités a, b, c , on supposera

$$c = \varphi(b),$$

et l'on déterminera de même a en b . S'il y a quatre quantités a, b, c, e , on fera

$$c = \varphi(b), \quad e = \psi(b),$$

et l'on déterminera a en b ; et ainsi de suite. On substituera maintenant ces expressions de $a, c, e, \dots$ en b dans les deux équations $P = 0, Q = 0$, et, éliminant l'indéterminée b , on aura une équation en x, y, z qui sera celle de la surface cherchée, et dans laquelle les fonctions désignées par les caractéristiques $\varphi, \psi, \dots$ demeureront arbitraires.

Si l'on fait les mêmes substitutions dans les deux équations

$$\frac{dP}{da} da + \frac{dP}{db} db + \dots = 0, \quad \frac{dQ}{da} da + \frac{dQ}{db} db + \dots = 0,$$

et qu'on élimine ensuite b , on aura une autre équation en x, y, z , laquelle étant combinée avec la précédente servira à déterminer le lieu de tous les points d'intersection des lignes représentées par les équations données $P = 0, Q = 0$.

7. Au reste parmi les différentes constantes qui peuvent entrer dans les équations $P = 0, Q = 0$, il est clair qu'il ne faudra prendre pour variables que celles qui par leur variation doivent donner les différentes lignes dont on veut que la surface soit composée.

Ainsi, par exemple, si la surface ne devait être composée que des mêmes lignes mais situées différemment, il ne faudrait prendre pour variables que les constantes qui déterminent la position de la ligne, et n'avoir aucun égard à celles qui déterminent la forme et l'espèce de cette ligne; et ainsi du reste.

On pourrait pousser cette Théorie plus loin, mais je me contente d'en avoir ici exposé les principes.

ARTICLE VI. — *Sur l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre.*

1. Je me propose ici de généraliser la méthode que j'ai donnée dans le n° 52 du Mémoire *Sur les intégrales particulières des équations différentielles* [Mémoires de 1774, page 253 (*)] pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre dans lesquelles ces différences ne paraissent que sous la forme linéaire.

Soit l'équation

$$dz + P \frac{dz}{dx} + Q \frac{dz}{dy} + \dots = Z,$$

dans laquelle $P, Q, \dots, Z$ soient des fonctions quelconques données des variables $x, y, t, \dots, z$, et où z soit une fonction inconnue de $x, y, t, \dots$.

Pour intégrer cette équation, c'est-à-dire pour trouver une équation finie entre $x, y, z, t, \dots$ je forme ces équations particulières

$$\begin{aligned} dy - P dx &= 0, & dz - Q dx &= 0, \\ dz - Z dx &= 0, & 0 &= Q - P \end{aligned}$$

dont le nombre sera, comme on voit, égal à celui de toutes les variables moins une.

Ces équations sont des équations ordinaires du premier ordre entre les variables $x, y, t, \dots, z$, et peuvent par conséquent s'intégrer par les méthodes connues. Qu'on les intègre donc en ajoutant dans chaque intégration une constante arbitraire; on aura, en nommant $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ces constantes, autant d'équations finies entre $x, y, t, \dots, z$ et $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ qu'il y aura de ces constantes arbitraires $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ en sorte qu'on pourra déterminer la valeur de chacune de ces constantes en fonction connue de x .

(*) Œuvres de Lagrange, t. IV, p. 82.

$y, t, \dots, z$. Ces valeurs étant ainsi trouvées, il n'y aura qu'à les substituer dans l'équation

$$\alpha = \varphi(\beta, \gamma, \dots),$$

la caractéristique φ dénotant une fonction arbitraire et indéterminée, et l'on aura l'intégrale cherchée de l'équation proposée; laquelle intégrale sera complète, puisqu'elle contient une fonction arbitraire.

2. Par cette méthode on peut donc intégrer, en général, toute équation aux différences partielles du premier ordre dans laquelle ces différences ne paraissent que sous la forme linéaire, quel que soit d'ailleurs le nombre des variables; du moins l'intégration de ces sortes d'équations est ramenée à celle de quelques équations aux différences ordinaires; mais on sait que l'art du Calcul intégral aux différences partielles ne consiste qu'à ramener ce Calcul à celui des différences ordinaires, et qu'on regarde une équation aux différences partielles comme intégrée lorsque son intégrale ne dépend plus que de celle d'une ou de plusieurs équations différentielles ordinaires.

Quant à la démonstration de la méthode précédente, on peut la déduire des mêmes principes du numéro cité, et nous ne nous y arrêtons pas; mais, pour ne laisser aucun doute sur la bonté de cette méthode, nous allons faire voir synthétiquement la justesse du résultat qu'elle donne.

3. Ne considérons, pour plus de simplicité, que l'équation entre trois variables

$$\frac{dz}{dx} + P \frac{dz}{dy} = Z;$$

on aura à intégrer ces deux équations entre x, y, z

$$dy - P dx = 0, \quad dz - Z dx = 0,$$

dont les intégrales contiendront deux constantes arbitraires α, β ; regardant donc α et β comme des fonctions de x, y, z données par ces deux

équations, on aura, pour l'intégrale de l'équation proposée, celle-ci

$$\alpha = \varphi(\beta),$$

φ dénotant une fonction arbitraire.

Pour s'assurer maintenant si cette équation $\alpha = \varphi(\beta)$ est en effet l'intégrale de la proposée, il n'y a qu'à faire disparaître la fonction arbitraire au moyen de deux différentiations partielles. On aura ainsi, en faisant varier successivement x et y ,

$$\frac{d\alpha}{dx} = \varphi'(\beta) \frac{d\beta}{dx}, \quad \frac{d\alpha}{dy} = \varphi'(\beta) \frac{d\beta}{dy},$$

d'où, en éliminant $\varphi'(\beta)$, on tire

$$\frac{d\alpha}{dx} \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy} \frac{d\beta}{dx} = 0.$$

Or, α et β étant des fonctions de x, y, z , on aura en différentiant

$$d\alpha = A dx + B dy + C dz, \quad d\beta = E dx + F dy + G dz.$$

d'où, en regardant z comme fonction de x et y , on tire

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dx} &= A + C \frac{dz}{dx}, & \frac{d\alpha}{dy} &= B + C \frac{dz}{dy}, \\ \frac{d\beta}{dx} &= E + G \frac{dz}{dx}, & \frac{d\beta}{dy} &= F + G \frac{dz}{dy}. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on aura

$$\left(A + C \frac{dz}{dx}\right) \left(F + G \frac{dz}{dy}\right) - \left(B + C \frac{dz}{dy}\right) \left(E + G \frac{dz}{dx}\right) = 0,$$

laquelle se réduit à

$$(AF - BE) + (CF - BG) \frac{dz}{dx} + (AG - CE) \frac{dz}{dy} = 0.$$

Je considère maintenant que, puisque α et β sont les constantes arbitraires des intégrales des deux équations

$$dy - P dx = 0, \quad dz - Z dx = 0,$$

il faut que ces équations soient identiques avec celles qui résultent de la supposition de

$$d\alpha = 0, \quad d\beta = 0,$$

c'est-à-dire avec celles-ci

$$A dx + B dy + C dz = 0, \quad E dx + F dy + G dz = 0;$$

donc il faudra qu'en substituant dans ces dernières les valeurs de dy et de dz tirées des premières, savoir $P dx$ et $Z dx$, on ait des équations identiques, lesquelles seront, en divisant par dx ,

$$A + BP + CZ = 0, \quad E + FP + GZ = 0;$$

ces équations donnent

$$A = -BP - CZ, \quad E = -FP - GZ,$$

donc

$$AF - BE = -(CF - BG)Z, \quad AG - CE = -(BG - CF)P;$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation ci-dessus, elle devient, en divisant par $CF - BG$ qui en multiplie tous les termes,

$$-Z + \frac{dz}{dx} + P \frac{dz}{dy} = 0,$$

qui est l'équation proposée.

4. Pour donner un exemple de la méthode précédente, soit proposée l'équation entre quatre variables

$$(y + t + z) \frac{dz}{dx} + (x + t + z) \frac{dz}{dy} + (x + y + z) \frac{dz}{dt} = x + y + t;$$

on aura donc à intégrer ces trois équations particulières

$$dy - \frac{x + t + z}{y + t + z} dx = 0,$$

$$dt - \frac{x + y + z}{y + t + z} dx = 0,$$

$$dz - \frac{x + y + t}{y + t + z} dx = 0;$$

et, pour cet effet, j'en tire d'abord celles-ci

$$dy - dx = \frac{x-y}{y+t+z} dx,$$

$$dt - dx = \frac{x-t}{y+t+z} dx,$$

$$dz - dx = \frac{x-z}{y+t+z} dx,$$

$$dx + dy + dt + dz = \frac{3(x+y+t+z)dx}{y+t+z};$$

d'où, éliminant $\frac{dx}{y+t+z}$, j'ai trois équations intégrables, et dont les intégrales seront

$$(y-x)^2(x+y+t+z) = \alpha,$$

$$(t-x)^2(x+y+t+z) = \beta,$$

$$(z-x)^2(x+y+t+z) = \gamma;$$

de là on aura pour l'intégrale de la proposée

$$\alpha = \varphi(\beta, \gamma).$$

5. Pour montrer maintenant l'usage de cette méthode dans la solution d'un Problème géométrique, je suppose qu'on demande l'équation générale de toutes les surfaces qui peuvent couper à angles droits une infinité de surfaces données, lesquelles ne diffèrent entre elles que par un paramètre constant dans la même surface, mais variable d'une surface à l'autre. Ce Problème est par rapport aux surfaces ce que le Problème connu des trajectoires rectangles est pour les lignes; mais il est beaucoup plus difficile que ce dernier, à cause qu'il conduit à une équation aux différences partielles.

En effet soient x, y, z les coordonnées rectangles de chacune des surfaces à couper; on aura, par la nature de ces surfaces, une équation finie entre x, y, z et le paramètre a , laquelle étant différenciée, en faisant a constant et éliminant a , sera de la forme

$$dz = p dx + q dy$$

(p et q étant des fonctions finies et données de x, y, z), et appartiendra en cet état à toutes les surfaces à couper.

Maintenant, comme dans les points d'intersection des surfaces les coordonnées doivent être les mêmes, on aura aussi dans ces points x, y, z pour les coordonnées des surfaces coupantes; et si l'on représente, en général, par

$$dz = r dx + s dy$$

l'équation différentielle de chacune de ces surfaces, il n'est pas difficile de trouver par les méthodes connues que la condition du Problème, laquelle consiste en ce que les perpendiculaires aux deux surfaces représentées par les équations

$$dz = p dx + q dy, \quad dz = r dx + s dy$$

fassent entre elles un angle droit, il n'est pas difficile, dis-je, de trouver que cette condition donnera l'équation,

$$1 + pr + qs = 0;$$

mais

$$r = \frac{dz}{dx}, \quad s = \frac{dz}{dy},$$

par conséquent l'équation à résoudre ou à intégrer sera

$$1 + p \frac{dz}{dx} + q \frac{dz}{dy} = 0,$$

p et q étant des fonctions données de x, y, z .

Cette équation est, comme on voit, intégrable par notre méthode, et la difficulté se réduira à intégrer ces deux équations particulières en x, y, z , savoir

$$dy - \frac{q}{p} dx = 0, \quad dz + \frac{dx}{p} = 0,$$

ou bien

$$dx + p dz = 0, \quad dy + q dz = 0.$$

Ces équations étant intégrées, et α, β étant les deux constantes arbitraires, on fera

$$\alpha = \varphi(\beta),$$

630 SUR DIFFÉRENTES QUESTIONS D'ANALYSE RELATIVES
et il n'y aura plus qu'à éliminer α et β au moyen des intégrales trouvées;
l'équation résultante sera celle de toutes les surfaces coupantes.

6. Supposons, par exemple, que les surfaces à couper soient sphériques, et qu'elles soient placées de manière qu'elles passent toutes par un même point, et que leurs centres soient placés sur une même ligne droite. Prenant ce point et cette ligne, l'un pour l'origine des coordonnées et l'autre pour l'axe des abscisses x , et le rayon de la sphère pour le paramètre a , on aura cette équation générale pour toutes les surfaces dont il s'agit

$$2ax = x^2 + y^2 + z^2;$$

laquelle, étant divisée par x et ensuite différenciée pour faire disparaître le paramètre a , donnera

$$(x^2 - y^2 - z^2)dx + 2xydy + 2xzdz = 0;$$

en sorte qu'on aura

$$p = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2xz}, \quad q = -\frac{y}{z}.$$

Les équations particulières à intégrer seront donc

$$dx + \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2xz} dz = 0, \quad dy - \frac{y}{z} dz = 0;$$

la seconde donne d'abord

$$y = \alpha z,$$

et, cette valeur étant substituée dans la première, on aura

$$2x dx + \frac{(\alpha^2 + 1)z^2 - x^2}{z} dz = 0,$$

équation intégrable, étant divisée par z , et dont l'intégrale sera

$$\frac{x^2}{z} + (\alpha^2 + 1)z = \beta.$$

Ayant donc trouvé

$$\alpha = \frac{y}{z}, \quad \beta = \frac{x^2}{z} + (\alpha^2 + 1)z = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z},$$

on aura, pour l'équation des surfaces coupantes,

$$\frac{y}{z} = \varphi \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} \right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^2 + y^2 + z^2 = z \varphi \left(\frac{y}{z} \right),$$

φ dénotant une fonction arbitraire.

7. Si l'on veut que les surfaces coupantes ne soient pas d'un ordre supérieur au second, il faudra supposer

$$\varphi \left(\frac{y}{z} \right) = 2b + 2c \frac{y}{z},$$

et l'on aura alors l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2bz + 2cy,$$

laquelle appartient aussi à une surface sphérique passant par l'origine des coordonnées, mais dont le rayon sera $\sqrt{b^2 + c^2}$, et dont le centre sera placé sur une droite menée par l'origine des coordonnées dans le plan des y et z , et faisant avec l'axe des y un angle dont la tangente sera $\frac{b}{c}$.

Donc, puisque les constantes b et c sont arbitraires, toute surface sphérique, qui passera par l'origine des coordonnées et dont le centre sera placé dans le plan des y et z , coupera partout à angles droits toutes les sphères qui passeront par la même origine des coordonnées, et qui auront leurs centres placés dans l'axe des x perpendiculaire au plan dont il s'agit.

De là résulte ce Théorème général, que : si par un point donné on mène deux droites perpendiculaires entre elles, et qu'on décrive deux sphères quelconques dont les surfaces passent par ce même point et dont les centres soient placés sur les deux lignes, ces surfaces se couperont partout à angles droits; et, comme on peut mener par un même point trois droites

perpendiculaires entre elles, il s'ensuit que si trois sphères quelconques ont leurs centres placés sur ces trois droites et que leurs surfaces passent par le point de concours de ces droites, ces surfaces se couperont partout mutuellement à angles droits.

Au reste ce Théorème n'est pas difficile à démontrer par la Géométrie, et l'on peut prouver de plus que, si les droites sur lesquelles sont placés les centres des sphères forment entre elles des angles quelconques, les surfaces de ces sphères se couperont partout sous les mêmes angles; ce qui suit évidemment de ce que deux sphères se coupent nécessairement dans tous les points de leurs surfaces sous le même angle.

8. On peut aussi généraliser et simplifier les méthodes des n^{os} 53 et 54 du même Mémoire.

Soit

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad z - px = u;$$

on aura, en différentiant et en supposant toujours z fonction de $x, y, t, \dots$,

$$du = -x dp + \frac{dz}{dy} dy + \frac{dz}{dt} dt + \dots$$

Mais, p étant aussi fonction de $x, y, t, \dots$, il est clair qu'on peut regarder x et z , et par conséquent aussi u , comme fonctions de $p, y, t, \dots$; et dans cette hypothèse on aura

$$\frac{du}{dp} = -x, \quad \frac{du}{dy} = \frac{dz}{dy}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{dz}{dt}, \dots$$

Donc, si l'on a une équation de la forme

$$-x + P \frac{dz}{dy} + Q \frac{dz}{dt} + \dots = Z,$$

dans laquelle $P, Q, \dots, Z$ soient des fonctions quelconques données de $\frac{dz}{dx}, y, t, \dots, z - x \frac{dz}{dx}$, on pourra par les substitutions précédentes lui

donner cette autre forme

$$\frac{du}{dp} + P \frac{du}{dy} + Q \frac{du}{dt} + \dots = Z,$$

dans laquelle $P, Q, \dots, Z$ seront des fonctions données de $p, y, t, \dots, u$.

Or cette dernière équation est intégrable par la méthode précédente, et l'on peut en conséquence trouver la valeur de u en fonction de $p, y, t, \dots$; d'où, en différentiant par rapport à p , on tirera aussi celle de $\frac{du}{dp}$ en $p, y, t, \dots$. On aura donc ainsi les valeurs de $z - px$ et de x en $p, y, t, \dots$; d'où, éliminant p , on aura une équation en $z, x, y, t, \dots$ qui sera l'intégrale de l'équation proposée.

9. Soit

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad z - px - qy = u;$$

on aura en différentiant

$$du = -x dp - y dq + \frac{dz}{dt} dt + \dots;$$

done, regardant x, y, z et u comme fonctions de $p, q, t, \dots$, on aura

$$\frac{du}{dp} = -x, \quad \frac{du}{dq} = -y, \quad \frac{du}{dt} = \frac{dz}{dt}, \dots$$

Donc, si l'on a une équation de la forme

$$-x - Py + Q \frac{dz}{dt} + \dots = Z,$$

dans laquelle $P, Q, \dots, Z$ soient des fonctions quelconques données de $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, t, \dots, z - x \frac{dz}{dx} - y \frac{dz}{dy}$, on pourra par les substitutions précédentes la changer en une équation de la forme suivante

$$\frac{du}{dp} + P \frac{du}{dq} + Q \frac{du}{dt} + \dots = Z,$$

dans laquelle $P, Q, \dots, Z$ seront des fonctions données de $p, q, t, \dots, u$.

Cette équation étant intégrable par la méthode donnée ci-dessus, on aura la valeur de u en $p, q, t, \dots$; et, différentiant successivement par rapport à p et q , on aura aussi les valeurs de $\frac{du}{dp}$ et de $\frac{du}{dq}$ en $p, q, t, \dots$. On aura ainsi les valeurs de $z - px - qy$, de x et de y en $p, q, t, \dots$; d'où, chassant p et q , on aura une équation en $z, x, y, t, \dots$ qui sera l'intégrale de la proposée.

On pourra intégrer de même les équations de la forme

$$-x - Py - Qt + \dots = Z,$$

dans lesquelles $P, Q, \dots, Z$ seraient des fonctions connues de $\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$,

$\frac{dz}{dt}$, $\dots$, $z - x \frac{dz}{dx} - y \frac{dz}{dy} - t \frac{dz}{dt}$; et ainsi de suite.

SUR LA

CONSTRUCTION DES CARTES GÉOGRAPHIQUES.