
SOLUTION ALGÈBRIQUE

D'UN

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE ^(*).

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1776.)

PROBLÈME.

Étant donné de grandeur et de position le cercle RMNP, inscrire dans ce cercle un triangle MNP, dont les trois côtés NM, PM, PN, prolongés s'il est nécessaire, passent par trois points donnés A, B, C.

SOLUTION ALGÈBRIQUE.

Je tire des trois points donnés au centre O du cercle les droites AO, BO, CO; ces droites sont données de grandeur et de position, parce qu'elles déterminent la position des trois points donnés A, B, C.

Nommant donc AO, a ; BO, b ; CO, c ; l'angle AOB, m ; l'angle AOC, n ; les cinq quantités a, b, c, m, n sont données et connues.

(*) Cette solution a été publiée par M. de Castillon en tête d'un Mémoire intitulé : *Sur une nouvelle propriété des sections coniques* et qui fait partie du volume de l'Académie de Berlin pour l'année 1776. Voici en quels termes s'exprime l'Auteur du Mémoire :

« Le lendemain du jour dans lequel je lus à l'Académie ma solution du Problème concernant le cercle et le triangle à inscrire dans ce cercle, en sorte que chaque côté passe par un de trois points donnés, M. de la Grange m'en envoya la solution algébrique suivante. »

(Note de l'Éditeur.)

Enfin on trouvera une troisième équation semblable par la considération du triangle isocèle PON et du triangle POC; et pour cela il n'y aura qu'à mettre dans la première équation (1), à la place de la ligne AC (a) la ligne OC (c), à la place de l'angle MOA (x) l'angle NOC ($y - n$), et à la place de l'angle NOA (y) l'angle POC ($z - n$); de sorte qu'on aura

$$(3) \quad \tan \frac{y-n}{2} \tan \frac{z-n}{2} = \frac{c-r}{c+r};$$

et ces trois équations serviront à déterminer les trois angles inconnus x , y , z .

Faisons, pour plus de simplicité,

$$\begin{aligned} \tan \frac{x}{2} &= s, & \tan \frac{y}{2} &= t, & \tan \frac{z}{2} &= u, \\ \tan \frac{m}{2} &= p, & \tan \frac{n}{2} &= q, & \frac{a-r}{a+r} &= A, & \frac{b-r}{b+r} &= B, & \frac{c-r}{c+r} &= C; \end{aligned}$$

les trois équations que nous venons de trouver (1), (2), (3) deviendront, par la propriété connue des tangentes,

$$st = A, \quad \frac{s-p}{1+ps} \frac{u-p}{1+pu} = B, \quad \frac{t-q}{1+qt} \frac{u-q}{1+qu} = C.$$

La première donne

$$t = \frac{A}{s};$$

la seconde donne

$$u = \frac{B - p^2 + (1+B)ps}{-(1+B)p + (1-Bp^2)s};$$

et ces valeurs étant substituées dans la troisième, on aura

$$\frac{A - qs}{Aq + s} \frac{B - p^2 + (1+B)pq + [(1+B)p - (1-Bp^2)q]s}{-(1+B)p + (1-Bp^2)q + [(1-Bp^2) + (1+B)pq]s} = C,$$

équation qui, étant ordonnée par rapport à l'inconnue s , montera au second degré, et sera par conséquent résoluble par la règle et le compas.

Soit, pour abréger encore,

$$\begin{aligned} B - p^2 + (1+B)pq &= F, \\ (1+B)p - (1-Bp^2)q &= G, \\ -(1+B)p + (1-Bp^2)q &= H, \\ 1 - Bp^2 + (1+B)pq &= K; \end{aligned}$$

on aura l'équation

$$\frac{A - qs}{Aq + s} \frac{F + Gs}{H + Ks} = C,$$

laquelle se réduit à

$$(CK - Gq)s^2 + [CH - AG + (CK - F)Aq]s = A(F - CHq),$$

d'où il est facile de tirer s . Ensuite on aura t et u par les formules ci-dessus. On connaîtra donc par là les tangentes des angles $\frac{AOM}{2}$, $\frac{AON}{2}$, $\frac{AOP}{2}$; par conséquent les points M, N, P seront déterminés par rapport à la ligne OA.



RECHERCHES

SUR LA

DÉTERMINATION DU NOMBRE DES RACINES IMAGINAIRES

DANS LES ÉQUATIONS LITTÉRALES.



RECHERCHES

SUR LA

DÉTERMINATION DU NOMBRE DES RACINES IMAGINAIRES

DANS LES ÉQUATIONS LITTÉRALES (*).

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1777.)

. Dès qu'on eut résolu les équations du second degré, on dut remarquer que leurs racines ne peuvent être réelles à moins que le carré de la moitié du coefficient du second terme ne soit plus grand que le dernier terme pris avec un signe contraire; parce que l'expression de la racine contient le radical carré de la différence de ces deux quantités et n'en contient point d'autre. On ne peut pas dire la même chose par rapport aux équations du troisième degré; car on sait que l'expression de la racine de ces équations renferme des radicaux carrés et cubiques compliqués de manière qu'il est très-difficile de démêler tous les cas où les racines peuvent être réelles. Aussi voyons-nous que les premiers Algébristes italiens, à qui est due la résolution des équations du troisième degré, furent fort embarrassés à juger de la nature des racines de ces équations d'après l'expression générale de ces racines, surtout dans le cas qu'on a appelé depuis *irréductible*, et dans lequel les racines sont représentées sous une forme imaginaire. Harriot me paraît être proprement le premier

(*) Lu le 2 janvier 1777.

qui ait démontré d'une manière directe et analytique que les équations du troisième degré sans second terme ne sauraient avoir leurs racines réelles, à moins que le cube du tiers du coefficient du troisième terme, pris avec un signe contraire, ne soit plus grand que le carré de la moitié du dernier terme; ce qui donne précisément le cas irréductible. Il est vrai que Viète et même Bombelli avaient déjà prouvé avant lui que dans ce cas les racines sont réelles malgré leur déguisement sous une forme imaginaire; mais ces Auteurs n'avaient employé pour cela que des constructions géométriques, au lieu que le savant Analyste anglais a fait voir *à priori* et par la théorie même des équations, que la condition dont nous venons de parler est indispensable pour la réalité de toutes les racines; en sorte que quand elle n'a pas lieu il faut nécessairement que quelques-unes des racines soient imaginaires, quelle que puisse être d'ailleurs leur forme imaginaire. Voici à peu près comment Harriot s'y prend pour démontrer cette proposition (*voyez* la Section V de son *Artis analyticae praxis*).

1. Soient a, b, c les trois racines réelles d'une équation du troisième degré et x l'inconnue; cette équation, par les principes établis dans le même Ouvrage, sera représentée par le produit des trois quantités $x - a, x - b, x - c$, de sorte qu'elle sera de la forme

$$x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0.$$

Pour faire évanouir le second terme, il faudra supposer $a + b + c = 0$, d'où l'on voit qu'il est impossible que les trois racines soient positives ou négatives à la fois; il y en aura donc nécessairement deux positives et une négative, ou deux négatives et une positive. Soient b et c les deux racines de même signe, et a celle de signe contraire, on aura

$$b = \pm p, \quad c = \pm q, \quad a = \mp (p + q),$$

p, q étant des nombres positifs; substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on aura la transformée

$$x^3 - (p^3 + pq + q^3)x \pm (p^3q + q^3p) = 0,$$

qui sera donc la formule générale des équations du troisième degré dont le second terme est évanoui, et dont toutes les racines sont réelles.

Donc, si l'on représente, en général, cette équation par

$$x^3 - Bx + C = 0,$$

on aura

$$B = p^3 + pq + q^3, \quad C = \pm (p^3q + q^3p),$$

p, q étant des quantités réelles positives.

Or Harriot démontre que, quelles que soient les valeurs de p et q , on a toujours nécessairement

$$27(p^3q + q^3p)^2 < 4(p^3 + pq + q^3)^3;$$

et sa démonstration est fondée sur ce Théorème d'Euclide, que *si quatre grandeurs sont proportionnelles, la somme des extrêmes est toujours plus grande que celle des moyennes* (*); d'où il s'ensuit que l'on aura

$$p^3q^3 + p^3q^3 < p^4q^2 + p^3q^3 < p^3q + pq^3 < p^6 + q^6;$$

donc, ajoutant ensemble les formules suivantes

$$3p^4q^2 + 3p^3q^3 < 3p^6 + 3q^6,$$

$$12p^3q^3 + 12p^2q^3 < 12p^4q + 12p^3q^2,$$

$$p^3q^3 + p^3q^3 < p^6 + q^6,$$

$$24p^4q^2 + 28p^3q^3 + 24p^2q^3 = 24p^5q^2 + 28p^4q^3 + 24p^3q^4,$$

on aura

$$27p^3q^3 + 54p^2q^3 + 27p^3q^4 < 4p^6 + 12p^4q + 12p^3q^2 + 4q^6 + 24p^5q^2 + 28p^4q^3 + 24p^3q^4,$$

c'est-à-dire

$$27(p^3q + pq^3)^2 < 4(p^3 + pq + q^3)^3.$$

Donc on aura

$$27(\pm C)^2 < 4B^3, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \left(\frac{B}{3}\right)^3 > \left(\frac{C}{2}\right)^2.$$

(*) L'Auteur sous-entend que les grandeurs proportionnelles dont il s'agit sont disposées de manière à former une suite croissante ou décroissante. (Note de l'Éditeur.)

Ce sont là les premiers pas qui aient été faits dans cette partie de la Théorie des équations; j'ai rapporté l'Analyse même d'Harriot, parce qu'elle est très-ingénieuse, et qu'il est d'ailleurs agréable de connaître les chemins que les premiers inventeurs ont suivis.

2. Nous remarquerons d'abord qu'on peut rendre la démonstration précédente plus générale et plus simple de cette manière. Quelles que soient les racines a, b, c , on aura nécessairement, pour que le second terme disparaisse,

$$a + b + c = 0,$$

donc

$$a = -b - c;$$

donc on aura la transformée

$$x^3 - (b^2 + bc + c^2)x + b^2c + bc^2 = 0,$$

et par conséquent

$$B = b^2 + bc + c^2,$$

$$C = b^2c + bc^2,$$

$$B^3 = b^6 + 3b^4c + 6b^3c^2 + 7b^2c^3 + 6b^2c^3 + 3bc^2 + c^6,$$

$$C^3 = b^3c^3 + 2b^2c^3 + b^2c^3$$

et de là

$$\begin{aligned} 4B^3 - 27C^3 &= 4b^6 + 12b^4c - 3b^4c^3 - 26b^3c^2 - 3b^3c^4 + 12b^2c^3 + 4c^6 \\ &= (2b^3 + 3b^2c - 3bc^2 - 2c^3)^2 = (b - c)^2 [2(b^2 + bc + c^2) + 3bc]^2; \end{aligned}$$

d'où l'on voit évidemment que la quantité $4B^3$ doit nécessairement être plus grande que la quantité $27C^3$, tant que les racines b et c sont réelles, parce que la différence $4B^3 - 27C^3$ est égale au carré d'une quantité réelle, lequel est toujours nécessairement positif.

3. Mais il y a plus; non-seulement la condition de

$$4B^3 > 27C^3$$

a nécessairement lieu lorsque toutes les racines sont réelles, mais aussi,

lorsqu'elle a lieu, toutes les racines sont nécessairement réelles. Il est visible que cette proposition ne suit pas immédiatement de la précédente, et qu'elle demande une démonstration particulière; la voici.

D'abord on sait que l'équation

$$x^3 - Bx + C = 0$$

a nécessairement une racine réelle, parce qu'elle est d'un degré impair; supposons donc que a soit la racine réelle; donc puisque $a = -b - c$, il est clair que $b + c$ sera une quantité réelle; donc, puisque le coefficient réel C est égal à $(b + c)bc$, il s'ensuit que bc sera aussi une quantité réelle; or on a trouvé

$$4B^3 - 27C^3 = (b - c)^2 [2(b^2 + bc + c^2) + 3bc]^2;$$

donc, tirant la racine carrée, on aura

$$\sqrt{4B^3 - 27C^3} = (b - c) [2(b^2 + c^2 + bc)];$$

d'où l'on voit que, lorsque $4B^3 - 27C^3$ est une quantité positive, $b - c$ sera aussi une quantité réelle; ainsi $b + c$ et $b - c$ étant des quantités réelles, il est clair que b et c seront l'une et l'autre réelles.

Si l'on avait

$$4B^3 - 27C^3 = 0,$$

alors on aurait, ou

$$b - c = 0,$$

et par conséquent $b = c$, ou

$$2(b + c)^2 + bc = 0, \text{ savoir } b^2 + \frac{5bc}{2} + c^2 = 0,$$

ce qui donne

$$b = -\frac{c}{2}, \text{ ou } b = -2c,$$

de sorte que, comme $a = -b - c$, on aura, ou $a = b$, ou $a = c$; d'où l'on voit que la condition de $4B^3 - 27C^3 = 0$ rend toujours deux des racines de l'équation proposée égales entre elles.

4. Voilà donc le caractère auquel on peut reconnaître *à priori* si une équation du troisième degré manquant du second terme a toutes ses racines réelles, ou si elle en a deux imaginaires ou deux égales; et comme on peut toujours faire évanouir le second terme de toute équation en augmentant toutes les racines du coefficient du second terme divisé par l'exposant même de l'équation, ce qui n'influe en rien sur l'état de réalité ou d'imaginarité ou même d'égalité des racines, il s'ensuit que le caractère qu'on vient de trouver peut servir pour toutes les équations du troisième degré.

Soit proposée, en effet, l'équation générale du troisième degré

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0;$$

si l'on y fait

$$x = x' + \frac{A}{3},$$

elle se changera en celle-ci

$$x'^3 - B'x' + C' = 0,$$

où

$$B' = \frac{A^2}{3} - B, \quad C' = -\frac{2A^3}{3} + \frac{AB}{3} - C;$$

donc les trois racines de la proposée seront ou toutes réelles et inégales, ou réelles mais deux égales entre elles, ou une réelle et deux imaginaires, suivant que l'on aura

$$4\left(\frac{A^2}{3} - B\right)^3 - 27\left(\frac{2A^3}{3} - \frac{AB}{3} + C\right)^2 > \text{ou} = \text{ou} < 0,$$

ou bien

$$A^2B^2 + 18ABC - 4A^3C - 4B^3 - 27C^2 > \text{ou} = \text{ou} < 0,$$

de sorte qu'il ne reste rien à désirer sur la connaissance de la nature des racines des équations du troisième degré.

5. Nous remarquerons ici en passant que de ce qu'on a trouvé dans le n° 2

$$4B^3 - 27C^2 = (2b^3 + 3b^2c - 3bc^2 - 2c^3)^2,$$

on peut déduire aisément la résolution des équations du troisième degré. En effet, en tirant la racine carrée, on aura, après avoir divisé par 2,

$$b^3 + \frac{3b^2c}{2} - \frac{3bc^2}{2} - c^3 = \frac{\sqrt{4B^3 - 27C^2}}{2},$$

qu'on ajoute à cette équation celle-ci

$$b^3c + bc^3 = C,$$

multipliée par un coefficient quelconque m , on aura

$$b^3 + \left(m + \frac{3}{2}\right)b^2c - \left(\frac{3}{2} - m\right)bc^2 - c^3 = mC + \frac{\sqrt{4B^3 - 27C^2}}{2}.$$

Qu'on suppose le premier membre de cette équation égal au cube de $\lambda b - \mu c$, λ , μ étant des coefficients indéterminés, et comparant terme à terme, on aura

$$\lambda^3 = 1, \quad 3\lambda^2\mu = -m - \frac{3}{2}, \quad 3\lambda\mu^2 = m - \frac{3}{2}, \quad \mu^3 = 1.$$

Les deux équations $\lambda^3 = 1$, $\mu^3 = 1$, font voir que λ et μ ne peuvent être que les racines cubiques de l'unité; mais il est facile de voir qu'on ne doit pas prendre $\lambda = \mu$, car les deux autres équations donneraient

$$3 = -m - \frac{3}{2}, \quad 3 = m - \frac{3}{2},$$

ce qui ne se peut; ainsi il faudra que λ et μ soient deux différentes racines de l'équation

$$x^3 - 1 = 0;$$

or supposant que λ soit une de ces racines, en sorte que $\lambda^3 = 1$, on aura, en divisant l'équation par $x - \lambda$, celle-ci

$$x^2 + \lambda x + \lambda^2 = 0,$$

laquelle renfermera les deux autres racines, de sorte qu'il faudra que l'on ait

$$\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2 = 0;$$

ainsi il faut voir si cette équation s'accorde avec les deux autres

$$3\lambda^2\mu = -m - \frac{3}{2}, \quad 3\lambda\mu^2 = m - \frac{3}{2},$$

lesquelles, en chassant m , donnent

$$3\lambda^2\mu + 3\lambda\mu^2 = -3, \quad \text{ou bien} \quad \lambda^2\mu + \lambda\mu^2 + 1 = 0;$$

c'est-à-dire, en multipliant par λ^2 et mettant 1 à la place de λ^3 ,

$$\lambda\mu + \mu^2 + \lambda^3 = 0.$$

Ainsi, pourvu qu'on prenne

$$m = 3\lambda\mu^2 + \frac{3}{2},$$

ou, si l'on veut avoir une valeur de m dans laquelle λ et μ entrent également,

$$m = \frac{3\lambda\mu(\mu - \lambda)}{2},$$

et que λ, μ dénotent deux racines différentes de l'équation $x^3 - 1 = 0$, on aura l'équation

$$(\lambda b - \mu c)^2 = mC + \frac{\sqrt{4B^3 - 27C^2}}{2},$$

d'où, tirant la racine cubique,

$$\lambda b - \mu c = \sqrt[3]{mC + \frac{\sqrt{4B^3 - 27C^2}}{2}};$$

ainsi l'on pourra trouver b et c en donnant différentes valeurs à λ ou μ ; par exemple, en faisant $\lambda = 1$, on aura pour la détermination de μ , l'équation

$$\mu^3 + \mu + 1 = 0,$$

laquelle donne

$$\mu = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2};$$

de sorte qu'en substituant ces valeurs pour λ et μ , et prenant successive-

ment le signe supérieur ou l'inférieur de $\sqrt{-3}$, on aura deux équations qui serviront à trouver b et c . Mais nous ne nous arrêterons pas davantage sur cette matière qui est étrangère à notre objet, et qui a déjà été traitée assez au long ailleurs.

6. Harriot n'a pas poussé ses recherches sur les conditions nécessaires pour la réalité des racines, au delà du troisième degré, et aucun de ceux qui sont venus après lui ne s'est occupé, que je sache, de cet objet, jusqu'à Newton qui dans son *Arithmétique universelle* a donné une règle assez simple pour reconnaître *a priori* quand une équation de degré quelconque renferme des racines imaginaires, et combien elle en renferme; mais on sait que cette règle est insuffisante et imparfaite, même avec l'extension que MM. Maclaurin et Campbell y ont donnée. La raison en est que cette règle n'est pas déduite de la considération immédiate des racines réelles et imaginaires, mais seulement de la considération de quelques conditions particulières qui doivent nécessairement avoir lieu quand toutes les racines sont réelles, et qui consistent en ce qu'alors la somme des carrés des racines, ou des carrés de leurs différences, ou, en général, des carrés de telles fonctions rationnelles qu'on voudra des racines d'une équation, doit toujours être une quantité positive. En effet il est facile de tirer de ce principe un grand nombre de conditions particulières sans lesquelles les racines ne peuvent être toutes réelles, mais on aurait tort de regarder ces conditions comme des caractères distinctifs des racines réelles et imaginaires.

7. Soit, par exemple, l'équation générale

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \dots = 0,$$

dont les racines soient $x', x'', x''', \dots, x^{(m)}$. On sait que le coefficient A sera la somme de toutes ces racines, le coefficient B la somme de leurs produits deux à deux, et ainsi de suite; donc si l'on cherche une équation dont les racines soient les carrés de celles-là, et que cette équation soit représentée par

$$y^m - Py^{m-1} + Qy^{m-2} - Ry^{m-3} + Sy^{m-4} - \dots = 0,$$



y étant $= x^2$, il est visible que le coefficient P sera égal à la somme des carrés $x^2, x'^2, x''^2, \dots$, que le coefficient Q sera égal à la somme des produits deux à deux de ces carrés, c'est-à-dire à la somme des carrés des produits $xx', xx'', x'x'', \dots$, et ainsi de suite; de sorte que, comme le carré de toute quantité réelle est toujours positif, il faudra nécessairement, pour que les racines $x', x'', x''', \dots$ soient toutes réelles, que les quantités $P, Q, R, \dots$ soient toutes positives.

Or puisque $x^2 = y$, il n'y aura qu'à éliminer, par ce moyen, x de l'équation proposée pour avoir la transformée en y , et, pour cet effet, il n'y aura qu'à substituer $\sqrt{y}$ à la place de x , ce qui donnera

$$y^{\frac{m}{2}} - Ay^{\frac{m-1}{2}} + By^{\frac{m-2}{2}} - Cy^{\frac{m-3}{2}} + Dy^{\frac{m-4}{2}} - Ey^{\frac{m-5}{2}} + \dots = 0;$$

or, comme $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$ est nécessairement une fraction, pour la faire évanouir on transportera de l'autre côté tous les termes qui renferment $\frac{m-1}{2}$ dans les exposants, on élèvera ensuite les deux membres au carré, après quoi on ordonnera l'équation par rapport aux puissances de y , et l'on trouvera par la comparaison des termes

$$\begin{aligned} P &= A^2 - 2B, \\ Q &= B^2 - 2AC + 2D, \\ R &= C^2 - 2BD + 2AE - 2F, \\ S &= D^2 - 2CE + 2BF - 2AG + 2H, \\ &\dots \end{aligned}$$

Done on aura nécessairement, lorsque toutes les racines $x', x'', x''', \dots$ sont réelles,

$$\begin{aligned} A^2 - 2B &> 0, \\ B^2 - 2AC + 2D &> 0, \\ C^2 - 2BD + 2AE - 2F &> 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

Si quelqu'une de ces conditions n'a pas lieu, on en pourra conclure

que la proposée renferme nécessairement des racines imaginaires; mais on ne sera pas en droit de convertir la proposition en disant que les racines ne seront jamais imaginaires tant que ces conditions seront observées; car il est visible que si l'on a

$$A > 0, B < 0, C < 0, D > 0, E > 0, F < 0, G < 0, \dots,$$

les conditions dont il s'agit auront toujours lieu; de sorte qu'on devrait dire que toute équation de la forme

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + Dx^{m-4} - Ex^{m-5} - Fx^{m-6} + \dots = 0,$$

où $A, B, C, \dots$ sont des quantités positives quelconques, n'aura jamais de racines imaginaires, ce qui est faux; et il est remarquable que les équations de cette forme mettent en défaut les règles dont nous avons fait mention plus haut (6).

8. Si l'on transforme l'équation proposée en une autre dont les racines soient des fonctions quelconques rationnelles des racines de celle-ci, ce qu'on peut toujours exécuter par les méthodes connues [voyez les *Réflexions sur la Résolution algébrique des équations*, Section IV, *Mémoires de 1771* (*)], on aura une équation dont toutes les racines seront réelles, si la proposée a toutes ses racines réelles; par conséquent on pourra appliquer à cette transformée les mêmes conclusions qu'on a trouvées ci-dessus; ce qui fournira de nouvelles conditions entre les coefficients de l'équation proposée, conditions dont le défaut indiquera nécessairement l'existence de quelques racines imaginaires.

Qu'on cherche, par exemple, une transformée dont les racines soient les sommes de celles de l'équation proposée

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \dots = 0,$$

prises deux à deux; on trouvera celle-ci

$$x^2 - \alpha x^{p-1} + \beta x^{p-2} - \gamma x^{p-3} + \dots = 0,$$

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. III, p. 205.

où

$$\mu = \frac{m(m-1)}{2},$$

et

$$\alpha = (m-1)A,$$

$$\beta = \frac{(m-1)(m-2)}{2}A^2 + (m-2)B,$$

$$\gamma = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 3}A^3 + (m-2)^2AB + (m-4)C,$$

Donc on aura, pour la réalité des racines, ces conditions

$$\alpha^2 - 2\beta > 0,$$

$$\beta^2 - 2\alpha\gamma + 2\delta > 0,$$

Donc

$$(m^2-1)A^2 - 2(m-2)B > 0,$$

Si l'on cherche une transformée de la même équation dont les racines soient les différences entre les racines de celle-là, et qu'on représente de même cette transformée par

$$z^n - \alpha z^{n-1} + \beta z^{n-2} - \gamma z^{n-3} + \delta z^{n-4} - \dots = 0,$$

on trouvera

$$\alpha = 0,$$

$$\beta = -(m-1)A^2 + 2mB,$$

$$\gamma = 0,$$

$$\delta = \frac{(m-1)(m-2)}{2}A^4 - 2m(m-2)A^2B - 2(m-3)AC + 2mD + (2m+3)(m-2)B^2,$$

$$\varepsilon = 0,$$

.....

Donc on aura, pour la réalité des racines, ces conditions

$$-\beta > 0, \quad \delta > 0, \quad -\varepsilon > 0, \dots$$

savoir

$$\beta < 0, \quad \delta > 0, \quad \varepsilon < 0, \dots$$

donc

$$(m-1)A^2 - 2mB > 0,$$

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}A^4 - 2m(m-2)A^2B - 2(m-3)AC + 2mD + (2m+3)(m-2)B^2 > 0,$$

On voit par là comment on peut s'y prendre pour trouver autant de conditions qu'on voudra entre les coefficients A, B, C, ... de l'équation proposée, lesquelles seront absolument nécessaires pour la réalité des racines de cette équation; on pourra encore multiplier ces conditions par la considération des équations des limites dont nous traiterons ailleurs; mais on ne parviendra jamais, par ces moyens seuls, à des conclusions exactes et générales sur le nombre des racines imaginaires. Il est donc nécessaire d'employer dans cette recherche des principes plus directs et qui tiennent de plus près à la nature même et à la forme des racines imaginaires. Voici quelques réflexions sur ce sujet.

9. Il est démontré que toute équation, de quelque degré que ce soit, est toujours décomposable en facteurs réels du premier et du second degré [voyez le *Mémoire sur la forme des racines imaginaires des Équations*. *Mémoires* de 1772 (*)]; et il est visible que les racines imaginaires ne peuvent venir que des facteurs du second degré, où le dernier terme est plus grand que le carré de la moitié du coefficient du second; ainsi, pour reconnaître si l'équation

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \dots = 0$$

a des racines imaginaires ou non, il n'y aura qu'à examiner si elle est divisible par un ou plusieurs facteurs tels que $x^2 - ax + b$, où l'on ait $b > \frac{a^2}{4}$, c'est-à-dire où $\frac{a^2}{4} - b$ soit une quantité négative. On divisera donc la proposée par $x^2 - ax + b$, et ayant poussé la division jusqu'à ce que

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. III, p. 479.

l'on parvienne à un reste qui ne renferme plus que la première dimension de x , on fera ce reste égal à zéro, en faisant évanouir séparément la partie affectée de x et la partie sans x ; ce qui donnera deux équations en a et b , lesquelles serviront à déterminer ces deux indéterminées. On fera maintenant

$$\frac{a^2}{4} - b = u,$$

c'est-à-dire que l'on substituera $\frac{a^2}{4} - u$ à la place de b , et éliminant a on arrivera à une équation finale en u , dont les racines positives et négatives serviront à reconnaître les racines réelles et imaginaires de la proposée.

10. En effet il est clair, par ce qu'on a dit ci-dessus, que la proposée ne pourra avoir de racines imaginaires qu'autant que la transformée en u aura des racines réelles négatives; de sorte que, si l'équation proposée n'a aucune racine imaginaire, la transformée ne pourra avoir aucune racine négative, et *vice versa* si celle-ci n'a aucune racine négative, celle-là n'en aura aucune imaginaire; or comme par la règle connue de Descartes une équation ne peut avoir qu'autant de racines positives, et autant de négatives, qu'elle a de variations ou de successions de signes, il s'ensuit :

1^o Que si les termes de la transformée en u sont alternativement positifs et négatifs en sorte qu'elle n'ait aucune succession de signes, la proposée n'aura aucune racine imaginaire;

2^o Que si la transformée a des successions de signes, la proposée aura nécessairement des racines imaginaires, mais dont le nombre ne pourra être plus grand que le double de celui des successions.

Voilà donc un caractère simple et général auquel on peut reconnaître si une équation a toutes ses racines réelles ou non; mais lorsqu'on s'est assuré par là que l'équation proposée a nécessairement des racines imaginaires, il reste encore à déterminer le nombre de ces racines; c'est à quoi on peut parvenir par les considérations suivantes.

11. Comme on suppose que

$$x^2 - ax + b = 0$$

est un diviseur de l'équation proposée, on aura comme l'on sait

$$a = x' + x'', \quad b = x'x''$$

(en désignant par x' , x'' deux quelconques des racines de cette équation), donc

$$u = \frac{a^2}{4} - b = \frac{(x' + x'')^2}{4} - x'x'' = \frac{(x' - x'')^2}{4};$$

ainsi a et u sont des fonctions des mêmes racines x' , x'' , et de plus ces fonctions sont telles, qu'elles demeurent les mêmes en y changeant x' en x'' ; d'où il s'ensuit que les quantités a et u doivent être données par des équations du même degré, et que, dès que l'on connaîtra une des valeurs de u par la résolution de l'équation en u , on pourra toujours déterminer par son moyen la valeur correspondante de a , et cela par une équation du premier degré si la valeur de u est une racine inégale, ou par une équation du second, du troisième, ... degré si la valeur de u est une racine double, triple, ... (voyez la démonstration dans la Section IV du Mémoire cité ci-dessus, n^o 8). Donc, puisqu'on a déjà deux équations en a et b , ou bien en a et u (numéro précédent), il n'y aura qu'à substituer dans ces deux équations la valeur de u que l'on aura trouvée, et si cette valeur est une racine inégale, on sera assuré de parvenir, par l'élimination successive des puissances de a , à une équation où a ne se trouvera plus qu'au premier degré, et qui donnera par conséquent une valeur réelle de a ; si la valeur de u est une racine double on ne pourra parvenir par l'élimination qu'à une équation où a montera au second degré, et si u est une racine triple on ne parviendra qu'à une équation en a du troisième degré, et ainsi de suite; de sorte que dans ce cas les valeurs correspondantes de a pourront être réelles ou imaginaires.

12. Cela posé, je dis que chaque racine négative et inégale de la transformée en u donnera toujours deux racines imaginaires dans l'équation proposée, et que chaque racine négative et égale de la même transformée donnera toujours autant de paires de racines imaginaires dans la proposée que l'équation en a aura de racines réelles; et il ne pourra y

avoir dans la proposée que le nombre des racines imaginaires qui se trouvera déterminé de la sorte.

Car, comme toute équation peut se décomposer en facteurs réels du second degré, il s'ensuit que les racines imaginaires peuvent toujours se combiner deux à deux en sorte qu'il en résulte des facteurs doubles tels que

$$x^2 - ax + b,$$

où a et b seront réels, et où b sera $> \frac{a^2}{4}$, c'est-à-dire des facteurs réels de la forme

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - u,$$

où u aura une valeur négative et a une valeur réelle quelconque; or il est facile de prouver que ces combinaisons ne peuvent se faire que d'une seule manière. En effet considérons quatre racines imaginaires, qui étant combinées deux à deux forment les deux facteurs tout réels

$$x^2 - a'x + \frac{a'^2}{4} + r', \quad x^2 - a''x + \frac{a''^2}{4} + r'',$$

r' et r'' étant des quantités positives, et supposons s'il est possible que les mêmes quatre racines puissent aussi former ces deux autres facteurs réels

$$x^2 - a'x + \frac{a'^2}{4} + \rho', \quad x^2 - a''x + \frac{a''^2}{4} + \rho'',$$

ρ' et ρ'' étant aussi des quantités positives; il faudra donc que l'équation

$$x^2 - a'x + \frac{a'^2}{4} + r' = 0$$

ait une racine commune avec l'équation

$$x^2 - a'x + \frac{a'^2}{4} + \rho' = 0;$$

mais les racines de celle-là sont

$$\frac{a'}{2} \pm \sqrt{-\rho'};$$

et les racines de celle-ci sont

$$\frac{a'}{2} \pm \sqrt{-\rho'};$$

donc comparant les parties réelles avec les réelles, et les imaginaires avec les imaginaires, il faudrait que l'on eût

$$\frac{a'}{2} = \frac{a'}{2} \quad \text{et} \quad \pm \sqrt{-r'} = \pm \sqrt{-\rho'},$$

donc

$$a' = a' \quad \text{et} \quad r' = \rho';$$

de sorte que le facteur $x^2 - a'x + \frac{a'^2}{4} + \rho'$ serait le même que le facteur $x^2 - a'x + \frac{a'^2}{4} + r'$; ce qui est contre l'hypothèse. D'où il est facile de conclure qu'une équation quelconque proposée aura nécessairement autant de couples de racines imaginaires qu'il y aura de valeurs négatives de u auxquelles répondront des valeurs réelles de a .

13. Ainsi, dès qu'on aura trouvé la transformée en u , on pourra d'abord juger par les signes mêmes de cette équation si la proposée a toutes ses racines réelles ou non; ensuite, pour connaître le nombre des racines imaginaires de la proposée dans le cas où elle en doit contenir, il suffira de connaître le nombre des racines négatives de la même transformée; mais malheureusement on n'a point de méthode, que je sache, pour reconnaître *à priori* le nombre des racines positives ou négatives d'une équation quelconque, à moins qu'on ne soit assuré d'avance que toutes ses racines sont réelles.

Cependant, si l'on fait attention que le dernier terme de toute équation pris avec son propre signe si le degré de l'équation est pair, ou avec un signe contraire si le degré est impair, est toujours nécessairement positif ou négatif suivant que le nombre des racines négatives est pair ou impair, on pourra reconnaître sur-le-champ par le signe du dernier terme de la transformée en u si le nombre des racines imaginaires de la pro-

posée est multiple de 4, ou multiple de 4 plus 2; le premier cas aura lieu lorsque le dernier terme de la transformée sera positif ou négatif suivant que le degré sera pair ou impair, et le second cas aura lieu lorsque le dernier terme sera positif ou négatif suivant que le degré de la transformée sera au contraire impair ou pair.

14. Si la transformée dont il s'agit avait des racines nulles, alors il est clair que chaque racine nulle indiquerait une égalité entre deux racines de la proposée; car, faisant $u = 0$, on aurait le facteur $x^2 - ax + \frac{a^2}{4}$, lequel étant supposé $= 0$ donne les deux racines égales $x = \frac{a}{2}$, $x = \frac{a}{2}$.

Ainsi une racine nulle dans la transformée u indiquera deux racines égales dans la proposée; deux racines nulles dans la transformée indiqueront deux couples de racines égales dans la proposée; trois racines nulles dans la même transformée indiqueront trois couples de racines égales deux à deux dans la proposée, ou bien trois racines égales entre elles; et ainsi de suite.

15. La méthode que nous avons proposée ci-dessus pour trouver la transformée dont il s'agit peut se simplifier beaucoup de cette manière: puisque $x^2 - ax + \frac{a^2}{4} - u$ doit être un diviseur de la proposée, il est clair que $x - \frac{a}{2} + \sqrt{u}$ et $x - \frac{a}{2} - \sqrt{u}$ devront être l'un et l'autre en même temps diviseurs de la même équation; donc il n'y aura qu'à substituer dans cette équation $\frac{a}{2} \pm \sqrt{u}$ à la place de x , et faire en sorte que l'équation résultante ait lieu également, soit que le radical $\sqrt{u}$ soit pris en $+$ ou en $-$; c'est ce qu'on obtiendra en faisant deux équations séparées, l'une de la partie toute rationnelle, et l'autre de la partie irrationnelle et affectée de $\sqrt{u}$; par ce moyen on aura d'abord les deux équations cherchées en a et u , d'où, par l'élimination de a , on tirera la transformée en u .

Nous allons en donner quelques exemples, mais pour éviter les frac-

tions nous mettrons t à la place de $\frac{a}{2}$, en sorte que le diviseur du second degré soit représenté par

$$x^2 - 2tx + t^2 - u,$$

et les deux du premier par

$$x - t \pm \sqrt{u}.$$

16. Soit d'abord l'équation du second degré

$$x^2 - Ax + B = 0;$$

dans ce cas on aura sur-le-champ

$$t = \frac{A}{2}, \quad t^2 - u = B;$$

d'où

$$u = \frac{A^2}{4} - B = 0;$$

de sorte que les racines de la proposée seront réelles inégales ou égales ou imaginaires suivant que

$$\frac{A^2}{4} - B > 0 \text{ ou } = 0 \text{ ou } < 0.$$

17. Soit l'équation générale du troisième degré

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0;$$

substituant $t + \sqrt{u}$ à la place de x , on aura

$$t^3 + 3t^2\sqrt{u} + 3tu + u\sqrt{u} - A(t^2 + 2t\sqrt{u} + u) + B(t + \sqrt{u}) - C = 0.$$

Donc, égalant à zéro séparément les quantités rationnelles et les irrationnelles, on aura ces deux équations

$$t^3 - At^2 + (B + 3u)t - Au - C = 0,$$

$$3t^2 - 2At + B + u = 0,$$

d'où l'on tirera celle-ci

$$2(3B - A^2 + 12u)t + AB - 9C - 8Au = 0;$$

IV.

et de là

$$u^2 - \frac{A^2 - 3B}{2} u^2 + \frac{(A^2 - 3B)^2}{16} u - \frac{4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (AB - 9C)^2}{3 \cdot 64} = 0.$$

En ne considérant que le dernier terme de cette transformée et faisant attention qu'une équation du troisième degré ne peut avoir au plus que deux racines imaginaires, on en conclura d'abord (13 et 14) que les racines de la proposée seront ou toutes trois réelles inégales, ou toutes trois réelles mais deux égales, ou une réelle et deux imaginaires, suivant que l'on aura

$$4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (AB - 9C)^2 > 0 \text{ ou } = 0 \text{ ou } < 0,$$

ce qui s'accorde parfaitement avec ce qu'on a trouvé dans le n° 4.

On peut remarquer ici qu'à la rigueur les racines de la proposée ne peuvent être toutes réelles qu'en supposant que les termes de la transformée soient alternativement positifs et négatifs (12), ce qui, outre la condition précédente, donne encore celle-ci

$$A^2 - 3B > 0;$$

mais comme, d'un autre côté, on est assuré que la condition de

$$4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (AB - 9C)^2 > 0$$

suffit pour la réalité des racines, il s'ensuit que, dès que cette dernière condition aura lieu, l'autre aura aussi nécessairement lieu.

Pour le prouver d'une manière directe, on remarquera qu'en faisant, pour abréger,

$$A^2 - 3B = \alpha, \quad 9C - AB = \beta,$$

la condition dont il s'agit se réduira à celle-ci

$$-\frac{3\beta^2 + 4\alpha\alpha\beta + 4\beta\alpha^2}{3} > 0;$$

donc il faudra que l'on ait

$$3\beta^2 + 4\alpha\alpha\beta + 4\beta\alpha^2 = -h^2,$$

h^2 étant une quantité quelconque positive; or si l'on résout cette équation en tirant la valeur de β , on aura

$$3\beta + 2\alpha\alpha = \sqrt{-3h^2 + 4\alpha^2};$$

de sorte qu'il faudra nécessairement que la quantité α soit positive; autrement la valeur de $3\beta + 2\alpha\alpha$ deviendrait imaginaire, ce qui impliquerait contradiction.

18. Passons aux équations du quatrième degré, et supposons, pour plus de simplicité, que le second terme soit évanoui, en sorte que la formule générale de ce degré soit

$$x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0;$$

mettant $t + \sqrt{u}$ à la place de x , et égalant séparément à zéro la partie rationnelle et la partie affectée de $\sqrt{u}$, on aura

$$t^4 + (B + 6u)t^2 - Ct + D + Bu + u^2 = 0,$$

$$4t^3 + (2B + 4u)t - C = 0,$$

d'où l'on tire d'abord

$$(2B + 20u)t^2 - 3Ct + 4(D + Bu + u^2) = 0,$$

ensuite

$$[(2B + 4u)(B + 10u)^2 - 8(D + Bu + u^2)(B + 10u) + 9C^2]t - 12C(D + Bu + u^2) - C(B + 10u)^2 = 0,$$

et enfin

$$\begin{aligned} u^4 + 2Bu^3 + \frac{11B^2 + 4D}{8}u^2 - \frac{14B^3 + 8BD + 13C^2}{32}u \\ + \frac{17B^4 + 24B^2D - 112D^2 + 48BC^2}{256} \\ - \frac{2B^3 - 9B^2C - 108C^2D + 96BD^2 - 16B^2D}{512}u \\ + \frac{256D^3 - 128B^2D^2 + 144BC^2D + 16B^4D - 4B^2C^2 - 27C^3}{4096} = 0. \end{aligned}$$

Donc :

1° La proposée aura toutes ses racines réelles si les termes de cette transformée en u sont alternativement positifs ou négatifs; sinon elle aura des racines imaginaires;

2° Comme une équation du quatrième degré ne peut avoir que deux ou quatre racines imaginaires, on pourra distinguer ces deux cas par le signe du dernier terme, lequel devra être positif dans le premier et négatif dans le second;

3° Si le dernier terme est nul, il y aura dans la proposée deux racines égales; si l'avant-dernier est aussi nul, il y aura deux couples de racines égales; et si les trois derniers termes sont nuls à la fois, il y aura nécessairement trois racines égales entre elles, et ainsi de suite.

19. On pourra de même reconnaître le nombre des racines imaginaires dans les équations du cinquième degré; car, si la transformée en u a tous ses termes alternativement positifs et négatifs, la proposée aura toutes ses racines réelles; autrement elle en aura d'imaginaires, et comme alors elle ne pourra avoir que deux ou quatre imaginaires, on pourra distinguer ces deux cas par le signe du dernier terme.

Passé le cinquième degré, on ne pourra plus par ce moyen déterminer précisément le nombre des racines imaginaires. Car prenant, par exemple, une équation du sixième degré, on reconnaîtra d'abord par les signes de la transformée en u si toutes les racines sont réelles ou non; or s'il y en a d'imaginaires, elles pourront être au nombre de deux, ou de quatre, ou de six, et le signe du dernier terme fera connaître seulement si elles sont au nombre de quatre, ou au nombre de deux, ou six; de sorte qu'il restera un cas indéterminé. Il faudrait, pour juger si les imaginaires sont au nombre de deux, ou de six, pouvoir reconnaître si la transformée en u a une seule racine négative, ou bien trois; mais c'est de quoi on ne saurait venir à bout par aucune méthode connue.

20. On a vu (11) que la quantité u est égale au carré de la demi-différence de deux quelconques des racines de la proposée; ainsi la trans-

formée en u n'est autre chose que l'équation dont les racines sont les carrés de toutes les demi-différences entre les différentes racines de la proposée. En considérant cette transformée sous ce point de vue, on trouvera aisément, par les principes que nous avons établis ailleurs, que cette équation montera généralement au degré $\frac{m(m-1)}{2}$ en prenant m pour le degré de la proposée; et l'on pourra même calculer directement tous ses termes, sans employer aucune substitution ou élimination.

De plus, on voit clairement la raison pourquoi la proposée ne peut avoir de racines imaginaires qu'autant que la transformée aura de racines réelles négatives. Car, puisqu'il est démontré que chaque couple de racines imaginaires est nécessairement de la forme

$$p + q\sqrt{-1}, \quad p - q\sqrt{-1},$$

p et q étant des quantités réelles, il s'ensuit que le carré de la demi-différence de ces racines sera $-q^2$ et par conséquent nécessairement négatif; d'où l'on doit conclure que chaque racine réelle négative de l'équation en u indique nécessairement un couple de racines imaginaires dans la proposée, etc. Sur quoi on peut aussi voir les *Mémoires* des années 1767 et 1768 (*).

21. D'après les mêmes principes on pourra aussi trouver des transformées telles, que l'équation proposée ne puisse avoir à la fois quatre racines imaginaires, ou six racines imaginaires, ou, etc., à moins que sa transformée n'ait des racines négatives; ce qui pourrait fournir des critères pour reconnaître si une équation donnée qu'on sait déjà avoir nécessairement des racines imaginaires, mais dont on ignore le nombre, doit au moins en avoir quatre, ou six, ou, etc.

Pour cela je considère que, si l'équation proposée contient quatre racines imaginaires, elles seront de la forme

$$p + q\sqrt{-1}, \quad p - q\sqrt{-1}, \quad r + s\sqrt{-1}, \quad r - s\sqrt{-1},$$

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. II, p. 539 et 581.

p, q, r, s étant des quantités réelles; donc la quantité $-(q+s)^2$ sera essentiellement réelle et négative tant que ces quatre racines seront à la fois imaginaires. Or nommant ces racines a, b, c, d , on aura

$$q\sqrt{-1} = \frac{a-b}{2}, \quad s\sqrt{-1} = \frac{c-d}{2};$$

donc

$$-(q+s)^2 = \left(\frac{a+c-b-d}{2}\right)^2.$$

Si donc on cherche une transformée dont les racines soient les carrés des demi-différences entre la somme de deux racines quelconques et la somme de deux autres racines de la même équation, cette transformée aura la propriété qu'elle n'aura de racines réelles négatives qu'autant que la proposée aura au moins quatre racines imaginaires.

22. Je remarque maintenant que, comme les quantités q et s peuvent être prises indifféremment avec les signes $+$ ou $-$, il s'ensuit que $-(q+s)^2$ et $-(q-s)^2$ seront également deux racines négatives de la transformée dont il s'agit, provenant des quatre racines imaginaires $p \pm q\sqrt{-1}, r \pm s\sqrt{-1}$ de la proposée; et il est facile de se convaincre que ces racines imaginaires ne pourront donner dans la transformée d'autres racines réelles négatives que les deux précédentes.

Ainsi chaque combinaison de deux couples de racines imaginaires dans la proposée donnera toujours dans la transformée deux racines réelles négatives ni plus ni moins. Par conséquent, si la proposée contient $2n$ racines imaginaires, il en résultera nécessairement dans la transformée un nombre de racines réelles négatives égales à deux fois le nombre des combinaisons de n choses prises deux à deux; or ce dernier nombre est, comme l'on sait, $\frac{n(n-1)}{2}$; donc le nombre des racines réelles négatives sera $n(n-1)$. D'autre part il est manifeste que les racines réelles de la proposée, si elle en a, soit seules soit combinées avec les imaginaires, ne peuvent jamais donner dans la transformée en question que des racines réelles positives, ou des racines imaginaires. Donc on peut

conclure, en général, que, quelles que soient les racines de la proposée, la transformée aura toujours nécessairement $n(n-1)$ racines réelles négatives, $2n$ étant le nombre des racines imaginaires de la proposée.

23. Pour trouver la transformée dont il s'agit, on peut s'y prendre de plusieurs manières d'après les méthodes que nous avons données dans nos *Recherches sur la résolution algébrique des équations*, puisqu'il ne s'agit que de trouver une équation dont les racines soient

$$\left(\frac{a+c-b-d}{2}\right)^2,$$

a, b, c, d étant quatre quelconques des racines de l'équation proposée. Et d'abord on prouvera, par les principes établis dans la Section IV de ces *Recherches*, que si m est le nombre de toutes les racines de la proposée, c'est-à-dire l'exposant de son degré, la transformée montera, en général, au degré $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2 \cdot 2 \cdot 2}$.

Car : 1° puisque la fonction $\left(\frac{a+c-b-d}{2}\right)^2$ contient quatre racines, il faut combiner le nombre total m des racines quatre à quatre, ce qui donne $m(m-1)(m-2)(m-3)$; 2° comme la fonction dont il s'agit ne change pas en échangeant a en c , ou b en d , ou $a+c$ en $b+d$, et *vice versa*, il s'ensuit qu'il y a en tout $2 \cdot 2 \cdot 2$ combinaisons qui donnent la même fonction; par conséquent, en divisant le nombre précédent de toutes les combinaisons possibles par celui des combinaisons qui donnent la même racine dans la transformée, on aura le nombre total des racines différentes de cette équation, et par conséquent l'exposant de son degré.

24. Supposons, par exemple, que l'équation proposée soit du quatrième degré; on aura ici $m=4$; donc (numéro précédent) le degré de la transformée sera $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 3$. Or, si toutes les racines de la proposée sont imaginaires, on aura $2n=4$ et $n=2$; donc la transformée aura

2.1 racines réelles négatives (22); ainsi dans ce cas toutes les racines de la transformée seront réelles, puisqu'étant du troisième degré elle ne peut avoir deux racines réelles sans que la troisième le soit aussi.

Si la proposée avait toutes ses quatre racines réelles, alors la transformée aurait aussi toutes ses racines réelles, mais positives. Enfin, si la proposée a deux racines imaginaires seulement, la transformée aura aussi nécessairement deux imaginaires.

Pour mieux faire sentir la vérité de ces conclusions, on remarquera que a, b, c, d dénotant les quatre racines de l'équation proposée, celles de la transformée ne pourront être que ces trois-ci

$$\left(\frac{a+c-b-d}{2}\right)^2, \left(\frac{a+d-b-c}{2}\right)^2, \left(\frac{a+b-c-d}{2}\right)^2;$$

car, de quelque façon qu'on échange entre elles les lettres a, b, c, d , il n'en résultera jamais que ces trois expressions différentes.

Or, si toutes les racines sont imaginaires, on aura

$$a = p + q\sqrt{-1}, \quad b = p - q\sqrt{-1}, \quad c = r + s\sqrt{-1}, \quad d = r - s\sqrt{-1};$$

donc les trois quantités précédentes deviendront

$$-(q+s)^2, \quad -(q-s)^2, \quad (p+r)^2.$$

Et, s'il n'y a que deux racines imaginaires, en sorte que

$$a = p + q\sqrt{-1}, \quad b = p - q\sqrt{-1},$$

alors les trois quantités dont il s'agit seront

$$\left(\frac{c-d}{2} + q\sqrt{-1}\right)^2, \quad \left(\frac{c-d}{2} - q\sqrt{-1}\right)^2, \quad \left(p - \frac{c+d}{2}\right)^2.$$

Ainsi l'on pourra, par le moyen de la transformée dont il s'agit, juger de l'espèce des racines d'une équation du quatrième degré; car si elle a des racines imaginaires, la proposée en aura deux imaginaires et deux réelles; si elle a toutes ses racines réelles, la proposée les aura toutes réelles ou toutes imaginaires, suivant que la transformée aura toutes les

racines positives, ou bien deux négatives et une positive, ce qu'on reconnaitra alors par les signes de cette équation; ce qui fournira des critères plus simples que ceux que nous avons trouvés plus haut (18).

25. Soit

$$x^4 + Mx^3 + Nx^2 + Px + Q = 0$$

l'équation proposée du quatrième degré, dont les racines soient a, b, c, d ; la transformée dont les racines seront

$$(a+c-b-d)^2, \quad (a+d-b-c)^2, \quad (a+b-c-d)^2$$

sera, comme nous l'avons déjà trouvé dans nos *Recherches sur la résolution algébrique des équations* (32), celle-ci

$$t^3 - (3M^2 - 8N)t^2 + (3M^3 - 16M^2N + 16N^2 + 16MP - 64Q)t - (M^3 - 4MN + 8P)^2 = 0,$$

laquelle, en faisant

$$A = 3M^2 - 8N,$$

$$B = 3M^3 - 16M^2N + 16N^2 + 16MP - 64Q,$$

$$C = (M^3 - 4MN + 8P)^2,$$

se réduit à la forme

$$t^3 - At^2 + Bt - C = 0.$$

Donc :

1° Par ce qu'on a démontré plus haut (17) relativement aux équations du troisième degré, la proposée aura deux racines imaginaires et deux réelles, ou bien quatre imaginaires ou quatre réelles, suivant que l'on aura

$$4(A^3 - 3B)(B^2 - 3AC) - (AB - 9C)^2 < 0 \text{ ou } > 0;$$

2° Dans le dernier cas, si A et B sont positifs en même temps, la proposée aura toutes ses quatre racines réelles; mais si l'une des deux quantités A, B , ou toutes deux, sont négatives, la proposée aura ses quatre racines imaginaires.

26. Lorsque toutes les racines de la proposée sont réelles, on peut par l'inspection des signes reconnaître combien il y en a de positives et de négatives; mais quand il y a des racines imaginaires, on sait que la règle est en défaut; cependant la transformée ci-dessus fournit encore le moyen de juger du signe des deux racines réelles, dans le cas où les deux autres sont imaginaires.

D'abord il est clair que par le signe du dernier terme Q de la proposée on peut juger si les deux racines réelles sont de même signe ou de signe différent; le premier aura lieu lorsque Q sera > 0 , et le second lorsque Q sera < 0 . Il n'y a donc de difficulté que dans le premier cas, et elle consiste à déterminer si les deux racines sont toutes deux positives ou toutes deux négatives.

Pour cela je remarque que le dernier terme C de la transformée en t étant le produit des trois racines, on aura, en général,

$$(M^3 - 4MN + 8P)^2 = (a + c - b - d)^2 (a + d - b - c)^2 (a + b - c - d)^2,$$

et tirant la racine carrée

$$M^3 - 4MN + 8P = \pm (a + c - b - d)(a + d - b - c)(a + b - c - d).$$

Pour savoir quel signe on doit prendre, je suppose, par exemple, que les trois racines b, c, d soient nulles, auquel cas on aura

$$M = -a, \quad N = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0;$$

ainsi le premier membre de l'équation précédente deviendra $-a^3$ et le second deviendra $\pm a^3$, d'où l'on voit qu'il faut prendre le signe inférieur; en sorte que l'on aura

$$M^3 - 4MN + 8P = -(a + c - b - d)(a + d - b - c)(a + b - c - d).$$

Substituons maintenant à la place de a et b leurs valeurs imaginaires $p + q\sqrt{-1}$, $p - q\sqrt{-1}$; on aura

$$\begin{aligned} a + c - b - d &= 2q\sqrt{-1} + c - d, & a + d - b - c &= 2q\sqrt{-1} + d - c, \\ a + b - c - d &= 2p - c - d; \end{aligned}$$

donc l'équation précédente deviendra

$$M^3 - 4MN + 8P = [4q^2 + (c - d)^2](2p - c - d).$$

Or $4q^2 + (c - d)^2$ étant toujours une quantité positive, il s'ensuit que la quantité $2p - c - d$ sera du même signe que $M^3 - 4MN + 8P$.

Cela posé, comme l'équation proposée a pour racines $p + q\sqrt{-1}$, $p - q\sqrt{-1}$, c et d , elle sera donc le produit de ces deux équations-ci

$$x^3 - 2px + p^2 + q^2 = 0, \quad x^3 - (c + d)x + cd = 0;$$

et, puisqu'on suppose que les deux racines réelles c et d sont de même signe, il est clair que cd sera toujours une quantité positive, et que $c + d$ sera une quantité du même signe que chacune de ces deux racines; de sorte qu'il suffira de déterminer le signe de $c + d$. Or il est visible que, si p et $c + d$ sont positives en même temps, les signes seront alternatifs dans les deux équations précédentes; ils le seront par conséquent aussi dans le produit de ces deux équations, c'est-à-dire dans l'équation proposée. Et de même, si p et $c + d$ sont négatives à la fois, les signes seront tous positifs dans les mêmes équations et par conséquent aussi dans le produit de ces équations, c'est-à-dire dans la proposée.

Donc si l'équation proposée n'a pas les signes alternativement positifs et négatifs, ou tous positifs, alors p et $c + d$ seront nécessairement des quantités de signes différents; donc $-2p$ et $c + d$ seront des quantités de même signe; donc aussi la somme $-2p + c + d$ sera une quantité du même signe que $c + d$; donc, par ce qu'on a démontré ci-dessus, $c + d$ sera nécessairement du signe opposé à celui de $M^3 - 4MN + 8P$; par conséquent, dans ce cas, chacune des deux racines réelles sera du même signe que la quantité $-M^3 + 4MN - 8P$.

Mais si l'équation proposée avait tous les signes alternatifs, ou tous positifs, alors les deux racines réelles seraient nécessairement positives dans le premier cas, et négatives dans le second; puisqu'on sait qu'une équation qui a tous les signes alternatifs ne peut avoir de racines réelles négatives, et qu'une équation qui a tous ses signes positifs ne peut avoir

de racines réelles positives, et qu'en général une équation quelconque ne peut avoir qu'autant de racines positives qu'elle a de changements de signes, et qu'autant de négatives qu'elle a de permanences de signes.

La règle précédente, pour juger des signes des racines réelles d'une équation du quatrième degré qu'on sait en avoir deux imaginaires, a déjà été donnée par M. Waring dans ses *Meditationes algebraicae*, mais sans démonstration; et comme cette démonstration n'avait encore été donnée par personne, que je sache, j'ai cru que les Géomètres seraient bien aises de la trouver ici.

27. De même que nous avons démontré plus haut que la transformée, qui aurait pour racines les carrés des différences entre la somme de deux racines quelconques de la proposée et la somme de deux autres quelconques de ses racines, ne pourrait avoir de racines réelles négatives qu'autant que la proposée aurait au moins quatre racines imaginaires; de même prouvera-t-on que la transformée, dont les racines seraient les carrés des différences entre la somme de trois racines et la somme de trois autres racines de la proposée, ne pourra renfermer de racines réelles négatives qu'autant que la proposée aura au moins six racines imaginaires.

On démontrera de plus, par des principes analogues, que si m est l'exposant du degré de la proposée, celui du degré de la transformée dont il s'agit sera représenté par

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2 \times 1.2.3 \times 1.2.3};$$

et que, si $2n$ est le nombre des racines imaginaires de la proposée, la transformée aura nécessairement un nombre de racines réelles négatives

$$\text{égal à } 4 \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}.$$

28. En général, si l'on considère la transformée dont les racines seraient les carrés des différences entre la somme de s racines de la proposée et la somme de s autres racines, cette transformée montera au de-

gré dont l'exposant sera exprimé par

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-2s+1)}{2.1.2.3\dots s^2},$$

et elle aura un nombre de racines réelles négatives égal à

$$2^{s-1} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-s+1)}{1.2.3\dots s},$$

en nommant m l'exposant du degré de la proposée et $2n$ le nombre de ses racines imaginaires.

Lorsque s est $> n$, alors le nombre des racines réelles négatives de la transformée sera nécessairement nul; mais elle contiendra toujours nécessairement un nombre de racines réelles positives, de sorte qu'on est assuré que chaque transformée contient toujours des racines réelles.

Nous appellerons, pour plus de simplicité, *première transformée*, *seconde transformée*, *troisième transformée*, etc., celles où le nombre s est l'unité, ou deux, ou trois, etc.

29. Je dis maintenant qu'au moyen de ces différentes transformées on pourra déterminer le nombre des racines réelles de la proposée, pourvu qu'on ait un critère pour reconnaître si une équation, qu'on sait contenir nécessairement des racines réelles, en a de négatives ou non. J'avoue que je ne connais point jusqu'à présent un pareil critère, et que je ne vois pas même comment il serait possible de le trouver; je crois néanmoins que c'est simplifier beaucoup la recherche du nombre des racines imaginaires que de la réduire à celle de l'existence de quelques racines négatives dans des équations que l'on sait devoir contenir nécessairement des racines réelles.

Voici donc comment on pourra s'y prendre pour déterminer combien il y a de racines imaginaires dans une équation, lorsqu'on sera en état de juger, en général, si une équation, qu'on sait contenir des racines réelles, en a de négatives ou non.

On cherchera d'abord la première transformée de l'équation proposée; si cette transformée a tous ses termes alternativement positifs et négatifs,

on sera assuré que la proposée a toutes ses racines réelles; sinon on en conclura que la proposée contient nécessairement des racines imaginaires (10, 20).

Dans ce dernier cas, on cherchera encore la seconde transformée de la même équation, laquelle contiendra nécessairement des racines réelles; et si cette transformée n'a point de racines négatives, on en conclura que la proposée ne peut pas contenir quatre racines imaginaires; par conséquent elle n'aura que deux racines imaginaires; mais si la transformée dont il s'agit a des racines négatives, alors la proposée contiendra nécessairement quatre racines imaginaires ou davantage (21).

Pour déterminer dans ce dernier cas le nombre des racines imaginaires, il faudra chercher la troisième transformée de l'équation proposée, et examiner si cette transformée, laquelle aura d'ailleurs nécessairement quelques racines réelles, en contient de négatives ou non. Si elle n'a point de racines négatives, on sera assuré que la proposée ne contient pas six racines imaginaires; par conséquent les racines imaginaires de l'équation proposée seront au nombre de quatre. Mais si la troisième transformée a des racines négatives, ce sera une marque que la proposée contient au moins six racines imaginaires.

On procédera donc, dans ce dernier cas, à la quatrième transformée, pour juger si le nombre des racines imaginaires de la proposée peut monter à huit ou non, et ainsi de suite.

SUR QUELQUES PROBLÈMES

DE

L'ANALYSE DE DIOPHANTE.



SUR QUELQUES PROBLÈMES

DE

L'ANALYSE DE DIOPHANTE ^(*).

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1777.)

1. Parmi le grand nombre de beaux Théorèmes d'Arithmétique que Fermat nous a laissés dans ses *Observations sur Diophante*, un des plus remarquables est celui qui est énoncé dans l'Observation sur la Question XXVI du Livre VI, parce que c'est le seul dont Fermat ait donné la démonstration.

Ce Théorème est que *la différence de deux nombres bi-carrés ne peut jamais être un carré*; et la démonstration de Fermat consiste à faire voir que, s'il y avait deux nombres entiers bi-carrés dont la différence fût un carré, on pourrait toujours trouver deux autres nombres entiers moindres que ceux-là, qui auraient la même propriété, et ainsi de suite; de sorte qu'on parviendrait nécessairement à de petits nombres bi-carrés dont la différence serait un carré; or cela est impossible, comme on peut s'en assurer en examinant successivement les premiers nombres de la suite naturelle. Le Théorème étant ainsi démontré pour les nombres entiers, il est clair qu'il l'est aussi pour les nombres rompus, puisque si la différence des bi-carrés de deux nombres rompus est un carré, et qu'on ré-

(*) Lu le 20 mars 1777.

duise les deux nombres au même dénominateur, il s'ensuit que la différence des bi-carrés des numérateurs sera elle-même un carré.

Le principe de la démonstration de Fermat est un des plus féconds dans toute la théorie des nombres, et surtout dans celle des nombres entiers. M. Euler a développé davantage ce principe, et l'a appliqué à démontrer quelques autres Théorèmes analogues, savoir : que la somme de deux bi-carrés ne peut être un carré; que ni la somme ni la différence d'un bi-carré et du quadruple d'un autre bi-carré ne peuvent être des carrés; que le double de la somme ou de la différence de deux bi-carrés ne saurait jamais être un carré; qu'enfin la somme d'un bi-carré et du double d'un autre bi-carré ne peut aussi être un carré. (Voyez le Chapitre XIII de la seconde Partie de ses *Éléments d'Algèbre*.)

2. Mais si la somme d'un bi-carré et du double d'un autre bi-carré ne saurait être un carré, il n'en est pas de même de leur différence; car il est visible qu'on satisfait à l'égalité

$$2x^4 - y^4 = \square$$

en prenant $x = 1, y = 1$; et quant à l'égalité

$$x^4 - 2y^4 = \square,$$

il n'y a qu'à prendre $x = 3, y = 2$.

On a trouvé aussi pour la première égalité ces autres valeurs

$$x = 13, y = 1, \text{ et } x = 2165017, y = 2372159,$$

et pour la seconde celles-ci

$$x = 113, y = 84, \text{ et } x = 57123, y = 2614;$$

on pourrait en trouver encore plusieurs autres par la méthode connue pour ces sortes d'égalités, suivant laquelle on peut déduire de nouvelles solutions de celles qu'on a déjà, chaque solution en fournissant toujours une autre différente, si le Problème en admet plusieurs (voyez le Traité intitulé *Doctrinae analyticae inventum novum* dans l'édition de Diophante

de 1670, et les Chapitres VIII, IX et X de la seconde Partie de l'*Algèbre* de M. Euler); mais cette méthode, la seule que l'on ait jusqu'à présent pour les égalités qui passent le second degré, n'est que particulière et ne saurait jamais donner toutes les solutions possibles; on a même remarqué que souvent elle ne donne pas les solutions les plus simples et qui se présentent d'ailleurs d'elles-mêmes. Ainsi, s'il était question de résoudre d'une manière complète les deux égalités ci-dessus, ou du moins de trouver toutes les valeurs possibles de x et y qui ne surpasseraient pas des limites données, la méthode dont il s'agit ne serait presque d'aucune utilité, puisqu'on serait toujours incertain si les valeurs trouvées par cette méthode sont les seules qui satisfassent à la question, et l'on ne pourrait se tirer de ce doute qu'en essayant successivement tous les nombres entiers pour x et y .

3. L'égalité

$$2x^4 - y^4 = \square$$

est surtout remarquable, parce qu'elle renferme la solution d'un Problème proposé par Fermat comme très-difficile, dans la deuxième Observation sur la Question XXIV du Livre VI de Diophante. Ce Problème consiste à trouver un triangle rectangle en nombres dont l'hypoténuse soit un carré et dont la somme des deux côtés autour de l'angle droit en soit un aussi, c'est-à-dire à trouver deux nombres dont la somme soit un carré et dont la somme des carrés soit un bi-carré.

Soient p et q les deux nombres cherchés, en sorte que

$$p + q = y^2, \quad p^2 + q^2 = x^4;$$

étant du double de cette dernière équation le carré de la première, on aura

$$p^2 - 2pq + q^2 = 2x^4 - y^4;$$

done faisant

$$p - q = z,$$

on aura l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2,$$

de la résolution de laquelle dépend donc la solution du Problème proposé; car ayant trouvé les valeurs de x, y, z , on aura sur-le-champ

$$p = \frac{y^2 + z}{2}, \quad q = \frac{y^2 - z}{2}.$$

Si l'on prend pour x et y les valeurs données ci-dessus, on aura

- 1° $x=1, y=1$, d'où $z=1$, donc $p=1, q=0$;
 2° $x=13, y=1$, d'où $z=239$, donc $p=120, q=-119$;
 3° $x=2165017, y=2372159$, d'où $z=1560590745759$,
 donc $p=1061652293520, q=4565486027761$.

4. De ces trois solutions on voit qu'il n'y a que la dernière qui soit admissible lorsqu'on demande que les nombres cherchés p et q soient entiers et positifs; mais on voit en même temps que ces valeurs de p et q sont extrêmement grandes, et il serait naturel de croire qu'on pourrait satisfaire à la question par des nombres plus petits si Fermat n'assurait pas positivement le contraire dans l'endroit cité ci-dessus; cependant, comme cette assertion n'y est pas démontrée, et qu'elle ne me paraît même pouvoir l'être par la méthode que Fermat indique et qui n'est autre chose que celle dont nous avons parlé plus haut, on peut regarder comme non résolu le Problème de trouver les plus petits nombres entiers positifs qui satisfassent à la double condition que leur somme soit un carré, et que la somme de leurs carrés soit un bi-carré. Mais comment doit-on s'y prendre pour parvenir à une solution complète de ce Problème et des Problèmes analogues? Il me semble qu'on ne saurait atteindre à ce but que par un artifice semblable à celui qui a servi à démontrer les Théorèmes dont nous avons fait mention au commencement de ce Mémoire; car, si l'on peut prouver que, lorsqu'il y a des valeurs quelconques entières de x et y qui satisfont à l'égalité

$$2x^4 - y^4 = \square,$$

il y en a nécessairement deux autres plus petites qui y satisfont aussi, et

qu'en même temps on ait une méthode générale pour déduire ces valeurs-là de celles-ci, il est clair qu'en partant alors des plus petites valeurs possibles de x et y , lesquelles sont $x=1$ et $y=1$, on pourra en remontant trouver successivement toutes les autres valeurs satisfaisantes, suivant l'ordre de leur grandeur. Toute la difficulté consiste donc à réduire la solution de l'égalité

$$2x^4 - y^4 = \square$$

à celle d'une autre égalité semblable, mais dans laquelle les nombres x et y soient nécessairement plus petits que dans la première; c'est l'objet de l'analyse suivante, laquelle me paraît la plus simple et la plus directe qu'on puisse employer dans cette recherche.

5. Considérons donc l'équation indéterminée

$$2x^4 - y^4 = z^2,$$

et supposons que l'on connaisse des valeurs entières de x, y, z qui y satisfassent, je remarque d'abord qu'on peut supposer x et y premiers entre eux; car s'ils avaient une commune mesure, il faudrait que z fût divisible par le carré de cette commune mesure, et, la division faite, les quotients satisferaient également à l'équation.

Je remarque de plus que les nombres x, y, z doivent être tous impairs; car si y était pair, il faudrait que z^2 fût divisible par 2, donc z serait pair aussi, donc y^4 et z^2 étant à la fois divisibles par 4, il faudrait que $2x^4$ le fût aussi, donc x^4 serait divisible par 2, donc x serait pair et ne serait pas premier à y contre l'hypothèse. Or, y étant impair, il est visible que z sera aussi nécessairement impair. Enfin, comme on sait que le carré de tout nombre impair est nécessairement de la forme $8m+1$, il s'ensuit que $z^2 + y^4$ sera de la forme $8n+2$, donc $2x^4$ sera de cette même forme et par conséquent x^4 sera de la forme $4n+1$, donc x sera aussi impair.

Cela posé, l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

donne celle-ci

$$4x^4 = z(z^2 + y^4) = (z + y^2)^2 + (z - y^2)^2,$$

d'où

$$(z + y^2)^2 = (2x^2)^2 - (z - y^2)^2 = (2x^2 + z - y^2)(2x^2 - z + y^2).$$

Ces deux facteurs sont tous les deux pairs, puisque y et z sont impairs; soit donc leur commune mesure $= 2m$, en sorte que

$$2x^2 + z - y^2 = 2mp, \quad 2x^2 - z + y^2 = 2mq,$$

p et q étant premiers entre eux; on aura

$$(z + y^2)^2 = 4m^2pq;$$

donc il faudra que le nombre pq soit un carré, et comme p et q sont premiers entre eux, il faudra que l'un et l'autre soient carrés; mettons donc p^2 et q^2 à la place de p et q , on aura les équations

$$2x^2 + z - y^2 = 2mp^2, \quad 2x^2 - z + y^2 = 2mq^2, \quad (z + y^2)^2 = 4m^2p^2q^2,$$

d'où

$$z + y^2 = 2mpq.$$

Cette dernière donne

$$z = 2mpq - y^2,$$

et substituant cette valeur de z dans les deux autres, on aura ces deux-ci

$$x^2 - y^2 = mp(p - q), \quad x^2 + y^2 = mq(p + q).$$

D'où l'on voit que m divisant la somme et la différence de x^2 et de y^2 doit diviser aussi $2x^2$ et $2y^2$; mais x et y sont premiers entre eux (hypothèse), donc m ne peut être que 1 ou 2. Si $m = 1$, on aura

$$x^2 - y^2 = p(p - q), \quad x^2 + y^2 = q(p + q);$$

si $m = 2$, on aura

$$x^2 - y^2 = 2p(p - q), \quad x^2 + y^2 = 2q(p + q),$$

et si l'on fait dans ce dernier cas

$$p + q = q', \quad q - p = p',$$

on aura

$$x^2 - y^2 = p'(p' - q'), \quad x^2 + y^2 = q'(p' + q').$$

Ainsi, soit que m soit 1 ou 2, on aura nécessairement deux équations de cette forme

$$x^2 - y^2 = p(p - q), \quad x^2 + y^2 = q(p + q).$$

Je considère d'abord la première de ces équations, et je la mets sous la forme

$$\frac{x + y}{p} = \frac{p - q}{x - y};$$

je remarque maintenant que $x + y$ est un nombre pair, puisque x et y sont impairs à la fois, et que p est nécessairement impair; car, s'il était pair, il faudrait par la seconde équation que q fût pair aussi, afin que $q(p + q)$ devint un nombre pair; mais alors ce nombre serait pairément pair, et ne pourrait par conséquent être égal à la somme de deux carrés impairs. Donc, si l'on réduit la fraction $\frac{x + y}{p}$ à ses moindres termes, elle sera de la forme $\frac{2m}{n}$, n étant impair et premier à m , donc on aura

$$x + y = 2ms, \quad p = ns \quad \text{et} \quad p - q = 2mt, \quad x - y = nt,$$

s et t étant deux nombres entiers quelconques; et comme $x - y$ est nécessairement pair, et que n est impair, il faudra que t soit pair; de sorte qu'en mettant $2t$ à la place de t , on aura

$$p - q = 4mt, \quad x - y = 2nt,$$

t étant quelconque, mais premier à s ; autrement x et y ne seraient plus premiers entre eux. On tire de là

$$x = ms + nt, \quad y = ms - nt, \quad p = ns, \quad q = ns - 4mt;$$

ce sont les valeurs qui satisfont à la première équation; mais il faut aussi qu'elles satisfassent à la seconde équation

$$x^2 + y^2 = q(p + q);$$

en les y substituant donc, on aura

$$m^2s^2 + n^2t^2 = (ns - 4mt)(ns + 2mt),$$

et développant,

$$m^2(s^2 - 8t^2) + 6mst + n^2(t^2 - s^2) = 0,$$

équation qui étant multipliée par $s^2 - 8t^2$ peut se mettre sous cette forme

$$[m(s^2 - 8t^2) + 3nst]^2 = n^2[9s^2t^2 - (t^2 - s^2)(s^2 - 8t^2)],$$

savoir, en divisant par n^2 et développant les termes,

$$s^4 + 8t^4 = \left[3st + \frac{m(s^2 - 8t^2)}{n} \right]^2.$$

Donc, si l'on fait

$$3st + \frac{m(s^2 - 8t^2)}{n} = u,$$

ce qui donne

$$\frac{m}{n} = \frac{u - 3st}{s^2 - 8t^2},$$

on aura l'équation

$$s^4 + 8t^4 = u^2.$$

Ainsi la solution de l'équation proposée

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

est réduite à celle de l'équation

$$s^4 + 8t^4 = u^2;$$

et l'on voit par l'analyse précédente que, s'il y a des nombres entiers qui satisfassent à la première équation, il y aura aussi nécessairement des nombres entiers qui satisferont à la seconde; et *vice versa*, si l'on connaît une solution de cette dernière en nombres entiers, on pourra en déduire une solution de la première par le moyen des formules

$$\frac{m}{n} = \frac{u - 3st}{s^2 - 8t^2}, \quad x = ms + nt, \quad y = ms - nt.$$

Comme $\frac{m}{n}$ est supposée une fraction réduite à ses moindres termes, si

$u - 3st$ et $s^2 - 8t^2$ sont premiers entre eux, on aura

$$m = u - 3st, \quad n = s^2 - 8t^2;$$

mais si ces nombres ont un facteur commun, on prendra

$$m = \frac{u - 3st}{l}, \quad n = \frac{s^2 - 8t^2}{l}.$$

Et puisqu'on peut prendre indifféremment les nombres s, t, u , ainsi que x, y, z en plus et en moins, il est facile de voir que chaque solution de l'équation

$$s^4 + 8t^4 = u^2$$

en donnera toujours deux de l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2,$$

en prenant dans l'expression de m le nombre u en plus ou en moins. Je remarque maintenant que n ne peut jamais être zéro, et que m ne peut l'être que lorsque $u = 3st$, ce qui donne

$$s^4 + 8t^4 = 9s^2t^2,$$

d'où

$$\frac{s}{t} = \sqrt{\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 8}} = \sqrt{\frac{9}{2} \pm \frac{7}{2}} = 1 \text{ ou } = \sqrt{8};$$

la valeur $\sqrt{8}$ ne pouvant être admise à cause de son irrationalité, reste $\frac{s}{t} = 1$, et par conséquent

$$s = 1, \quad t = 1;$$

ces valeurs satisfont en effet à l'équation

$$s^4 + 8t^4 = u^2;$$

mais alors on aurait

$$x = n, \quad y = -n,$$

et comme x et y doivent être premiers entre eux (hypothèse), on aurait $x = 1$ et $y = 1$. D'où l'on voit que lorsque x et y seront premiers entre eux et différents de l'unité, alors s et t seront aussi premiers entre eux et différents de l'unité, et m ne sera jamais zéro; de sorte que le plus grand des nombres x et y sera nécessairement plus grand que l'un et l'autre

des deux nombres s et t ; par conséquent, si l'égalité

$$2x^4 - y^4 = \square$$

est résoluble en nombres entiers quelconques différents de l'unité, l'égalité

$$s^4 + 8t^4 = \square$$

sera nécessairement résoluble en moindres nombres, aussi différents de l'unité, et *vice versa*.

6. Si l'équation

$$s^4 + 8t^4 = u^4,$$

à laquelle nous sommes parvenus, était de la même forme que la proposée, le Problème serait résolu; mais puisque cela n'est pas, il faut donc poursuivre notre analyse en opérant maintenant sur cette dernière équation, dans laquelle s et t sont supposés premiers entre eux.

Et d'abord je vais prouver que s et u doivent être impairs; car si s était pair, s^4 serait divisible par 16; donc u^4 le serait par 8; donc u le serait par 4; donc u^2 serait aussi divisible par 16, et $8t^4$ le serait aussi; donc t^4 serait divisible par 2; donc t serait pair, et par conséquent ne serait pas premier à s contre l'hypothèse. Or s étant impair, il est visible que u doit l'être aussi. Maintenant je mets l'équation dont il s'agit sous la forme

$$8t^4 = u^4 - s^4 = (u + s^2)(u - s^2);$$

comme u et s sont impairs à la fois, les deux facteurs

$$u + s^2 \quad \text{et} \quad u - s^2$$

seront pairs; donc leur commune mesure sera 2μ , en sorte que

$$u + s^2 = 2\mu\varpi, \quad u - s^2 = 2\mu\rho,$$

ϖ et ρ étant premiers entre eux; donc

$$8t^4 = 4\mu^2\varpi\rho \quad \text{et} \quad 2t^4 = \mu^2\varpi\rho;$$

donc il faut que μ divise t^4 ; mais en chassant u des deux équations précédentes, on a

$$s^2 = \mu(\varpi - \rho),$$

d'où l'on voit que μ divise déjà s^2 ; donc puisque t et s sont premiers entre eux (hypothèse), il faut que $\mu = 1$. Ainsi l'on aura

$$2t^4 = \varpi\rho;$$

et comme ϖ et ρ sont premiers entre eux, il faudra que l'on ait nécessairement, ou

$$\varpi = 2q^4, \quad \rho = r^4,$$

ou

$$\varpi = q^4, \quad \rho = 2r^4;$$

d'où résulte

$$t = qr.$$

Dans le premier cas on aura donc

$$u = 2q^4 + r^4, \quad s^2 = 2q^4 - r^4,$$

et dans le second on aura

$$u = q^4 + 2r^4, \quad s^2 = q^4 - 2r^4.$$

D'où l'on voit que la résolution de l'équation

$$s^4 + 8t^4 = u^4$$

est réduite à la résolution de l'une ou de l'autre des équations

$$2q^4 - r^4 = s^2 \quad \text{ou} \quad q^4 - 2r^4 = s^2.$$

En effet, si l'on connaît des valeurs entières de q , r , s qui satisfassent à l'une ou l'autre de ces équations, il n'y aura qu'à prendre $t = qr$, et l'on aura des valeurs de s et t qui résoudront l'équation

$$s^4 + 8t^4 = \square.$$

Or je remarque :

1° Que si s et t sont premiers entre eux, s sera aussi premier à q

et à r ; donc q et r seront premiers entre eux en vertu des équations

$$2q^2 - r^2 = s^2 \quad \text{ou} \quad q^2 - 2r^2 = s^2;$$

2° Que si q et r sont différents de l'unité, t sera plus grand que q et que r ; si q égal à l'unité, alors $t = r$; mais dans ce cas on aura

$$2 - r^2 = s^2 \quad \text{ou} \quad 1 - 2r^2 = s^2;$$

la seconde de ces équations ne saurait avoir lieu en nombres entiers, et la première ne peut subsister qu'en faisant

$$r = 1 \quad \text{et} \quad s = 1;$$

ainsi l'on aurait alors

$$s = 1, \quad t = 1.$$

Si r égal à l'unité, alors

$$t = q, \quad \text{et} \quad s^2 = 2q^2 - 1 \quad \text{ou} \quad q^2 - 2t^2$$

d'où l'on voit que s sera plus grand que q . Je conclus de là que tant que s et t , dans l'égalité

$$s^2 + 8t^2 = \square,$$

seront premiers entre eux et différents de l'unité, q et r seront aussi premiers entre eux et différents de l'unité, et que de plus le plus grand des nombres s et t surpassera nécessairement le plus grand des deux q, r .

7. L'équation

$$2q^2 - r^2 = s^2$$

est, comme l'on voit, semblable à la première

$$2x^2 - y^2 = z^2;$$

ainsi le Problème serait résolu, si l'on n'avait trouvé que cette équation; mais, comme on est aussi arrivé à l'équation

$$q^2 - 2r^2 = s^2,$$

qui est différente des deux que nous venons de traiter, il faut encore poursuivre le calcul relativement à cette dernière.

Nous avons déjà vu que q et r doivent être premiers entre eux; or q doit être impair, autrement s serait pair, par conséquent $2r^2$ serait divisible par 4, et r^2 le serait par 2; donc r et q seraient pairs à la fois et par conséquent ne seraient plus premiers entre eux; q étant donc impair, il est visible que s le sera aussi. Donc, si l'on met l'équation sous la forme

$$2r^2 = q^2 - s^2 = (q + s)(q - s),$$

les deux facteurs $q^2 + s$ et $q^2 - s$ seront tous les deux pairs, et par conséquent de la forme $2m\lambda$, $2m\mu$, $2m$ étant leur plus grande commune mesure, et λ , μ étant deux nombres premiers entre eux. On aura ainsi

$$q^2 + s = 2m\lambda, \quad q^2 - s = 2m\mu, \quad 2r^2 = 4m^2\lambda\mu,$$

ou bien

$$r^2 = 2m^2\lambda\mu;$$

donc m divise r^2 , mais il divise aussi q^2 , parce que

$$q^2 = m(\lambda + \mu);$$

donc puisque q et r sont premiers entre eux, il faudra que $m = 1$. On aura donc

$$r^2 = 2\lambda\mu;$$

donc r sera pair; donc faisant

$$r = 2h,$$

on aura

$$8h^2 = \lambda\mu;$$

donc λ et μ étant premiers entre eux, on aura nécessairement ou

$$\lambda = 8n^2, \quad \mu = p^2, \quad \text{ou} \quad \lambda = n^2, \quad \mu = 8p^2;$$

d'où

$$h = pn, \quad r = 2pn.$$

Ainsi l'on aura

$$s = \lambda - \mu = 8n^2 - p^2 \quad \text{ou} \quad = n^2 - 8p^2,$$

et

$$q^2 = \lambda + \mu = 8n^2 + p^2 \quad \text{ou} \quad = n^2 + 8p^2,$$

où l'on voit que les deux valeurs de s et de q^2 reviennent à la même en changeant n en p et s en $-s$. Donc la résolution de l'équation

$$q^4 - 2r^4 = s^2$$

se réduit à celle de l'équation

$$q^2 = n^4 + 8p^4,$$

en prenant

$$r = 2pn \text{ et } s = n^4 - 8p^4.$$

Et l'on remarquera que n et p doivent être premiers entre eux, autrement r et q ne le seraient pas, contre l'hypothèse. De plus il est visible que r sera toujours plus grand que p et que n , et comme q est nécessairement plus grand que r , il s'ensuit que, dans l'égalité

$$n^4 + 8p^4 = \square,$$

les nombres n, p seront nécessairement moindres que les nombres q, r dans l'égalité

$$q^4 - 2r^4 = \square.$$

Or l'égalité

$$n^4 + 8p^4 = \square$$

est de la même forme que celle que nous avons déjà traitée ci-dessus; donc le Problème est résolu.

8. On peut donc, par la méthode et les formules précédentes, résoudre non-seulement les égalités de la forme

$$2x^4 - y^4 = \square,$$

mais aussi celles de ces deux autres formes

$$x^4 + 8y^4 = \square \text{ et } x^4 - 2y^4 = \square,$$

et cela avec toute la généralité dont ces égalités sont susceptibles; car en commençant par les solutions les plus simples et passant successivement aux plus composées, on sera assuré de trouver par ordre toutes les solutions possibles de ces égalités en nombres entiers, et par conséquent

aussi en nombres rompus, suivant la remarque faite au commencement de ce Mémoire. Voici donc à quoi se réduit ce calcul :

1° Ayant l'équation

$$(A) \quad s^4 + 8t^4 = u^4,$$

on aura l'équation

$$(B) \quad x^4 - 2y^4 = z^2,$$

en prenant

$$x = u, \quad y = 2st,$$

et l'équation

$$(C) \quad 2x^4 - y^4 = z^2,$$

en prenant

$$m = \frac{\pm u - 3st}{l}, \quad n = \frac{s^2 - 8t^2}{l}, \quad \pm x = ms + nt, \quad \pm y = ms - nt,$$

l étant le plus grand commun diviseur.

2° Ayant l'une ou l'autre des équations (B), (C), on aura l'équation (A)

en prenant

$$s = z, \quad t = xy.$$

9. L'équation (A) donne évidemment d'abord

$$s = 1, \quad t = 1, \quad u = 3;$$

donc on aura pour l'équation (B)

$$x = 3, \quad y = 2, \quad \text{et de là } z = 7;$$

et pour l'équation (C)

$$m = \frac{\pm 3 - 3}{l}, \quad n = -\frac{7}{l}, \quad \pm x = m + n, \quad \pm y = m - n;$$

donc

$$m = 0, \quad n = -1, \quad l = 7 \text{ et } x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1,$$

ou bien

$$m = -6, \quad n = -7, \quad l = 1 \text{ et } x = 13, \quad y = 1, \quad z = 239.$$

Ces valeurs de x, y, z en donneront d'autres de s, t, u pour l'équation (A).

Et d'abord

$$x=1, \quad y=1, \quad z=1$$

donnera

$$s=1, \quad t=1, \quad u=3;$$

ensuite

$$x=3, \quad y=2, \quad z=7$$

donnera

$$s=7, \quad t=6, \quad u=113;$$

enfin

$$x=13, \quad y=1, \quad z=239$$

donnera

$$s=239, \quad t=13, \quad u=57123.$$

La première de ces trois solutions de l'équation (A) est la même que nous avons adoptée d'abord, et nous pouvons maintenant en faire abstraction; les deux autres donneront donc de nouvelles solutions des équations (B) et (C). Prenant donc en premier lieu

$$s=7, \quad t=6, \quad u=113,$$

on aura pour l'équation (B)

$$x=113, \quad y=84, \quad z=7967;$$

ensuite pour l'équation (C).

$$m = \frac{\pm 113 - 126}{l}, \quad n = -\frac{239}{l}, \quad \pm x = 7m + 6n, \quad \pm y = 7m - 6n;$$

donc : ou

$$m = -13, \quad n = -239, \quad l=1, \quad x=1525, \quad y=1343, \quad z=2750257;$$

ou

$$m = -1, \quad n = -1, \quad l=239, \quad x=13, \quad y=1;$$

cette dernière solution a déjà été trouvée ci-dessus. Prenant en second lieu

$$s=239, \quad t=13, \quad u=57123,$$

on aura pour l'équation (B)

$$x=57123, \quad y=6214, \quad z=3262580153;$$

et pour l'équation (C) on aura

$$m = \frac{\pm 57123 - 9321}{l}, \quad n = \frac{55769}{l}, \quad \pm x = 239m + 13n, \quad \pm y = 239m - 13n;$$

donc : ou

$$m=6, \quad n=7, \quad l=7967,$$

et de là

$$x=1525, \quad y=1343, \quad z=2750257,$$

c'est la solution trouvée ci-devant; ou

$$m=-9492, \quad n=7967, \quad l=7;$$

donc

$$x=2165017, \quad y=2372159, \quad \text{et de là } z=1560590745759.$$

Et ainsi de suite.

10. On voit par ce calcul, qu'il serait aisé de pousser plus loin s'il en valait la peine, que les valeurs qui satisfont à l'équation

$$s^4 + 8t^4 = u^4$$

sont par ordre

$$s=1, \quad 7, \quad 239, \dots,$$

$$t=1, \quad 6, \quad 13, \dots,$$

$$u=3, \quad 113, \quad 57123, \dots;$$

que les valeurs qui satisfont à l'équation

$$x^4 - 2y^4 = z^4$$

sont

$$x=3, \quad 113, \quad 57123, \dots,$$

$$y=2, \quad 84, \quad 6214, \dots,$$

$$z=7, \quad 7967, \quad 3262580153, \dots;$$

qu'enfin les valeurs qui satisfont à l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

sont

$$\begin{array}{llll} x = 1, & 13, & 1525, & 2165017, \dots \\ y = 1, & 1, & 1343, & 2372159, \dots \\ z = 1, & 239, & 2750257, & 1560590745759, \dots \end{array}$$

et l'on peut être assuré qu'il n'y a pas de nombres moindres que ceux-ci qui puissent satisfaire aux formules proposées.

Si maintenant on déduit des dernières valeurs de x, y, z celles de p et q (3), on aura par ordre tous les nombres qui peuvent résoudre le Problème de Fermat, savoir

$$\begin{array}{llll} p = 1, & 120, & 2276953, & 1061652293520, \dots \\ q = 0, & -119, & -473304, & -4565486027761, \dots \end{array}$$

Ces derniers nombres, quelque grands qu'ils soient, sont donc néanmoins les plus petits nombres entiers et positifs qui résolvent le Problème dont il s'agit, ce qui prouve la vérité de l'assertion de Fermat.

11. En général, on peut faire dépendre la résolution de toute équation de la forme

$$x^4 + ay^4 = z^2$$

(a étant un nombre quelconque donné) de celle d'une équation de la même forme dans laquelle les nombres x, y, z soient moindres.

Pour cela il n'y a qu'à supposer

$$z = m^2 + an^2,$$

ce qui donne

$$z^2 = (m^2 - an^2)^2 + a(2mn)^2;$$

donc

$$x^2 = m^2 - an^2 \quad \text{et} \quad y^2 = 2mn.$$

Soit de nouveau

$$x = p^2 - aq^2,$$

d'où

$$x^2 = (p^2 + aq^2)^2 - a(2pq)^2;$$

donc

$$m = p^2 + aq^2, \quad n = 2pq;$$

et, substituant dans l'équation $y^2 = 2mn$, on aura

$$y^2 = 4pq(p^2 + aq^2).$$

Qu'on fasse donc, pour satisfaire à cette équation,

$$p = s^2, \quad q = t^2, \quad p^2 + aq^2 = u^2,$$

on aura

$$y = 2stu,$$

et il viendra l'équation

$$s^4 + at^4 = u^4,$$

qui est semblable à la proposée. Cette dernière équation étant résolue si elle peut l'être, on aura dans la proposée

$$x = s^4 - at^4, \quad y = 2stu, \quad z = (s^4 + at^4)^2 + a(2st^2)^2,$$

savoir

$$z = u^4 + 4as^2t^2;$$

d'où l'on voit que y sera toujours nécessairement plus grand que chacun des nombres s, t, u .

Connaissant donc une solution en entiers de toute équation de la forme

$$x^4 + ay^4 = z^2,$$

on pourra par ces formules en déduire une nouvelle solution en nombres plus grands, et ainsi de suite; mais on n'est pas assuré de trouver par ce moyen toutes les solutions possibles en nombres entiers; car les suppositions que nous avons faites pour ramener l'équation

$$x^4 + ay^4 = z^2$$

à l'équation

$$s^4 + at^4 = u^2$$

sont simplement possibles, mais ne sont pas absolument nécessaires.

Au reste la méthode la plus simple et la plus générale pour résoudre ces sortes d'égalités est peut-être celle des facteurs, que j'ai exposée dans

le dernier Chapitre des *Additions à l'Algèbre* de M. Euler, à laquelle je renvoie (*).

12. Je vais terminer ce Mémoire par montrer comment on peut simplifier et généraliser à quelques égards la méthode ordinaire pour les égalités qui passent le second degré, suivant laquelle, en connaissant une solution, on en peut trouver plusieurs autres.

Soit proposée l'équation générale du troisième degré entre deux indéterminées x, y

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^3 + hx^2y + kxy^2 + ly^3 = 0,$$

à laquelle satisfassent déjà ces valeurs

$$x = p, \quad y = q,$$

en sorte que l'on ait

$$a + bp + cq + dp^2 + epq + fq^2 + gp^3 + hp^2q + kpq^2 + lq^3 = 0;$$

je fais

$$x = p + t, \quad y = q + u,$$

et, substituant dans la proposée, elle se transformera en celle-ci

$$Bt + Cu + Dt^2 + Etu + Fu^2 + Gt^3 + Ht^2u + Ktu^2 + Lu^3 = 0,$$

dans laquelle les coefficients $B, C, \dots$ sont des fonctions rationnelles de p et q , qu'on déterminera aisément par le développement des termes de la proposée; mais on peut les trouver encore plus facilement en employant la méthode différentielle; car, si l'on suppose

$$a + bp + cq + dp^2 + epq + fq^2 + gp^3 + hp^2q + kpq^2 + lq^3 = \lambda,$$

on aura

$$B = \frac{dA}{dp}, \quad C = \frac{dA}{dq}, \quad D = \frac{1}{2} \frac{d^2A}{dp^2}, \quad E = \frac{d^2A}{dpdq}, \quad F = \frac{1}{2} \frac{d^2A}{dq^2}, \\ G = \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3A}{dp^3}, \quad H = \frac{1}{2} \frac{d^3A}{dp^2dq}, \quad K = \frac{1}{2} \frac{d^3A}{dpdq^2}, \quad L = \frac{1}{2 \cdot 3} \frac{d^3A}{dq^3}.$$

(*) Les *Additions à l'Algèbre* d'Euler appartiennent à la Section V des *Oeuvres de Lagrange*.
(Note de l'Éditeur.)

Maintenant, pour pouvoir déterminer u et t d'une manière rationnelle, j'égalé d'abord à zéro, dans l'équation en t et u , les deux premiers termes où t et u sont linéaires; j'ai ainsi

$$Bt + Cu = 0, \quad \text{d'où} \quad u = -\frac{Bt}{C};$$

de cette manière il reste l'équation

$$Dt^2 + Etu + Fu^2 + Gt^3 + Ht^2u + Ktu^2 + Lu^3 = 0;$$

substituant donc à la place de u sa valeur, toute l'équation deviendra divisible par t^2 , et l'on aura, après la division,

$$D - \frac{BE}{C} + \frac{B^2F}{C^2} + \left(G - \frac{BH}{C} + \frac{B^2K}{C^2} - \frac{B^3L}{C^3} \right) t = 0,$$

d'où l'on tire

$$t = \frac{-C^2D + BC^2E - B^2CF}{C^3G - BC^2H + B^2CK - B^3L};$$

donc

$$u = \frac{BC^2D - B^2CE + B^3F}{C^3G - BC^2H + B^2CK - B^3L}.$$

On aura donc deux nouvelles valeurs satisfaisantes de x et y , et prenant ces dernières à la place de p et q , on pourra en déduire de nouvelles, et ainsi de suite.

13. Si l'équation indéterminée était du quatrième degré, il ne serait pas possible de la résoudre généralement par la méthode précédente; mais on pourrait en venir à bout, si elle ne contenait que les deux premières puissances de l'une des deux inconnues, et que de plus, en regardant cette inconnue comme de deux dimensions, il n'y eût dans l'équation aucun terme de plus de quatre dimensions.

En effet, soit l'équation

$$0 = a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + gx^3 + hx^2y + kx^2y^2 + ly^3$$

qui a les conditions requises, et supposons que les valeurs

$$x = p, \quad y = q$$

y satisfassent; substituant $p + t$ à la place de x , et $q + u$ à la place de y , on aura une équation de la forme

$$Bt + Cu + Dt^2 + Etu + Ft^3 + Gt^2 + Ht^2u + Kt^3 = 0;$$

je fais

$$u = tz,$$

et divisant toute l'équation par t , elle deviendra

$$B + Cz + Dt + Etz + Ftz^2 + Gt^2 + Ht^2z + Kt^3 = 0,$$

qui n'est plus, comme l'on voit, que du troisième degré entre z et t ; ainsi l'on pourra lui appliquer la méthode précédente, pourvu qu'on connaisse une valeur de z et de t ; or ces valeurs se présentent d'elles-mêmes, car il n'y a qu'à faire

$$t = 0, \quad B + Cz = 0, \quad \text{d'où} \quad z = -\frac{B}{C};$$

done, ...; mais en voilà assez sur ce sujet.

REMARQUES GÉNÉRALES

SUR LE

MOUVEMENT DE PLUSIEURS CORPS

QUI S'ATTIRENT MUTUELLEMENT

EN RAISON INVERSE DES CARRÉS DES DISTANCES.



REMARQUES GÉNÉRALES

sur le

MOUVEMENT DE PLUSIEURS CORPS

QUI S'ATTIRENT MUTUELLEMENT

EN RAISON INVERSE DES CARRÉS DES DISTANCES (*).

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1777.)

On peut déterminer rigoureusement les mouvements de deux corps qui ayant été lancés dans le vide avec des vitesses quelconques s'attiraient mutuellement en raison directe de leurs masses et inverse du carré de leur distance; ce Problème a été résolu par Newton et par une foule d'Auteurs après lui. Mais si au lieu de deux corps il y en a trois qui s'attirent pareillement en raison directe des masses et inverse des carrés des distances, le Problème devient alors si compliqué que, quelques efforts que les Géomètres aient faits depuis trente ans pour en venir à bout, ils n'ont pu parvenir qu'à des solutions plus ou moins approchées; c'est ce Problème qui est généralement connu sous le nom de *Problème des trois corps*, et qui est si fameux dans l'Astronomie physique, parce que la Théorie de la Lune en dépend. A plus forte raison ne saurait-on se flatter de résoudre complètement le Problème de quatre ou d'un plus

(*) Lu le 2 octobre 1777.

grand nombre de corps qui agiraient les uns sur les autres par des forces d'attraction mutuelle. Mais le système de ces corps a des propriétés générales qu'on peut démontrer sans connaître les lois particulières de leur mouvement; et je crois que les Géomètres seront bien aises de trouver dans cet écrit ces différentes propriétés rassemblées et démontrées d'une manière plus simple, plus directe et plus générale qu'elles ne l'ont été jusqu'ici.

1. Soient $M, M', M'', \dots$ les masses des corps qui composent le système donné; x, y, z les coordonnées rectangulaires de l'orbite du corps M dans l'espace; x', y', z' celles de l'orbite du corps M' ; x'', y'', z'' celles de l'orbite du corps M'' ; Qu'on fasse, pour abréger,

$$\Omega = \frac{MM'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + \frac{MM''}{\sqrt{(x-x'')^2 + (y-y'')^2 + (z-z'')^2}} + \dots$$

$$+ \frac{M'M''}{\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2}} + \dots$$

et qu'on dénote, à l'ordinaire, par

$$\frac{d\Omega}{dx}, \frac{d\Omega}{dy}, \frac{d\Omega}{dz}, \frac{d\Omega}{dx'}, \dots$$

les coefficients de

$$dx, dy, dz, dx', \dots$$

dans la différentielle de la quantité Ω regardée comme fonction des variables

$$x, y, z, x', \dots;$$

on aura

$$\frac{1}{M} \frac{d\Omega}{dx}, \frac{1}{M} \frac{d\Omega}{dy}, \frac{1}{M} \frac{d\Omega}{dz}$$

pour les forces avec lesquelles le corps M est attiré par les autres corps $M', M'', \dots$ suivant les directions des trois coordonnées x, y, z ; de même

$$\frac{1}{M'} \frac{d\Omega}{dx'}, \frac{1}{M'} \frac{d\Omega}{dy'}, \frac{1}{M'} \frac{d\Omega}{dz'}$$

seront les forces avec lesquelles le corps M' est attiré par les corps $M, M'', \dots$ suivant les directions des coordonnées x', y', z' ; et pareillement

$$\frac{1}{M''} \frac{d\Omega}{dx''}, \frac{1}{M''} \frac{d\Omega}{dy''}, \frac{1}{M''} \frac{d\Omega}{dz''}$$

seront les forces avec lesquelles le corps M'' sera attiré par les autres corps suivant les directions de x'', y'', z'' , et ainsi de suite; c'est de quoi il est aisé de se convaincre en cherchant par la différentiation les valeurs des quantités dont il s'agit; car on trouvera les mêmes expressions qu'on aurait par la décomposition des forces qui agissent sur chaque corps, en vertu de l'attraction des autres corps supposée proportionnelle à la masse divisée par le carré de la distance.

Cette manière de représenter les forces est, comme l'on voit, extrêmement commode par sa simplicité et par sa généralité; et elle a de plus l'avantage qu'on y distingue clairement les termes dus aux différentes attractions des corps; car chacune des attractions donne dans la quantité Ω un terme multiplié par le produit des masses des deux corps qui s'attirent, et divisé par leur distance.

2. Done, nommant le temps t et prenant l'élément dt pour constant, on aura, par les principes ordinaires de la Dynamique, les équations suivantes :

Pour le mouvement de M

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{M} \frac{d\Omega}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{M} \frac{d\Omega}{dy}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{1}{M} \frac{d\Omega}{dz};$$

Pour le mouvement de M'

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{1}{M'} \frac{d\Omega}{dx'}, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{1}{M'} \frac{d\Omega}{dy'}, \quad \frac{d^2z'}{dt^2} = \frac{1}{M'} \frac{d\Omega}{dz'};$$

Pour le mouvement de M''

$$\frac{d^2x''}{dt^2} = \frac{1}{M''} \frac{d\Omega}{dx''}, \quad \frac{d^2y''}{dt^2} = \frac{1}{M''} \frac{d\Omega}{dy''}, \quad \frac{d^2z''}{dt^2} = \frac{1}{M''} \frac{d\Omega}{dz''},$$

et ainsi de suite.

3. La fonction Ω (1) est telle que, si l'on y augmente à la fois les quantités $x, x', x'', \dots$ d'une même quantité quelconque z , cette quantité disparaît d'elle-même et la fonction Ω demeure la même qu'auparavant; il en est de même si l'on augmente à la fois les quantités $y, y', y'', \dots$ d'une quantité quelconque β , et les quantités $z, z', z'', \dots$ d'une quantité aussi quelconque γ . Donc, si l'on suppose que les quantités z, β, γ soient infiniment petites, et que, dans la différentielle de Ω , on fasse

$$dx = dx' = dx'' = \dots = z, \quad dy = dy' = dy'' = \dots = \beta, \quad dz = dz' = dz'' = \dots = \gamma,$$

il faudra que cette différentielle soit nulle indépendamment des valeurs de z, β, γ , et que par conséquent les coefficients de ces trois quantités soient nuls chacun en particulier; d'où il est aisé de conclure que la somme des coefficients de $dx, dx', dx'', \dots$ dans la différentielle de Ω doit être nulle, ainsi que la somme des coefficients de $dy, dy', dy'', \dots$ et celle des coefficients de $dz, dz', dz'', \dots$ dans la même différentielle; ce qui donne ces trois équations

$$\frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\Omega}{dx'} + \frac{d\Omega}{dx''} + \dots = 0,$$

$$\frac{d\Omega}{dy} + \frac{d\Omega}{dy'} + \frac{d\Omega}{dy''} + \dots = 0,$$

$$\frac{d\Omega}{dz} + \frac{d\Omega}{dz'} + \frac{d\Omega}{dz''} + \dots = 0.$$

4. Si dans les trois équations qu'on vient de trouver on substitue à la place des quantités $\frac{d\Omega}{dx}, \frac{d\Omega}{dy}, \dots$ leurs valeurs tirées des équations du n° 2, on aura ces trois équations-ci

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + M' \frac{d^2x'}{dt^2} + M'' \frac{d^2x''}{dt^2} + \dots = 0,$$

$$M \frac{d^2y}{dt^2} + M' \frac{d^2y'}{dt^2} + M'' \frac{d^2y''}{dt^2} + \dots = 0,$$

$$M \frac{d^2z}{dt^2} + M' \frac{d^2z'}{dt^2} + M'' \frac{d^2z''}{dt^2} + \dots = 0,$$

qui renferment la propriété connue du centre de gravité.

En effet, si l'on nomme X, Y, Z les coordonnées rectangles qui déterminent la position du centre de gravité de tout le système, on a, comme l'on sait,

$$X = \frac{Mx + M'x' + M''x'' + \dots}{M + M' + M'' + \dots},$$

$$Y = \frac{My + M'y' + M''y'' + \dots}{M + M' + M'' + \dots},$$

$$Z = \frac{Mz + M'z' + M''z'' + \dots}{M + M' + M'' + \dots};$$

donc on aura, par les équations ci-dessus,

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = 0,$$

ce qui montre que le mouvement du centre de gravité ne peut être que rectiligne et uniforme.

5. De là il s'ensuit que; si l'on place dans le centre de gravité l'origine des coordonnées $x, y, z, x', y', \dots$, on aura les mêmes équations du n° 2, où l'origine des coordonnées est supposée dans un point fixe; car il est visible que, pour réduire ces dernières coordonnées à celles-là, il n'y a qu'à substituer

$$x + X, \quad y + Y, \quad z + Z, \quad x' + X, \quad y' + Y, \dots$$

à la place de

$$x, y, z, x', y', \dots;$$

or ces substitutions ne changent point la quantité Ω , comme on l'a déjà observé (3), donc elles ne changent pas non plus les quantités $\frac{d\Omega}{dx}, \frac{d\Omega}{dy}, \dots$; et à cause de

$$\frac{d^2X}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = 0,$$

il est visible que les termes $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots$ seront encore les mêmes après les substitutions dont il s'agit (4); donc, etc.

Dans le cas présent où l'origine des coordonnées est supposée dans le centre de gravité, on aura donc

$$Mx + M'x' + M''x'' + \dots = 0,$$

$$My + M'y' + M''y'' + \dots = 0,$$

$$Mz + M'z' + M''z'' + \dots = 0,$$

en sorte qu'on pourra toujours déterminer les coordonnées d'un des corps par celles des autres corps.

6. Je remarque de plus que la fonction Ω est telle, qu'elle demeure la même si l'on y substitue en même temps $\alpha\sqrt{1-\alpha^2} + y\alpha$ pour x , $y\sqrt{1-\alpha^2} - x\alpha$ pour y , $\alpha'\sqrt{1-\alpha^2} + y'\alpha$ pour x' , $y'\sqrt{1-\alpha^2} - x'\alpha$ pour y' , et ainsi de suite, α étant une quantité quelconque; la même chose a lieu en substituant $\alpha\sqrt{1-\beta^2} + z\beta$ pour x , $z\sqrt{1-\beta^2} - x\beta$ pour z , $x'\sqrt{1-\beta^2} + z'\beta$ pour x' , $z'\sqrt{1-\beta^2} - x'\beta$ pour z' , ..., et pareillement en mettant $y\sqrt{1-\gamma^2} + z\gamma$ pour y , $z\sqrt{1-\gamma^2} - y\gamma$ pour z , $y'\sqrt{1-\gamma^2} + z'\gamma$ pour y' , $z'\sqrt{1-\gamma^2} - y'\gamma$ pour z' , ..., β et γ étant aussi des quantités quelconques. Donc, en premier lieu, si l'on regarde α comme une quantité très-petite, ce qui réduit le radical $\sqrt{1-\alpha^2}$ à 1, et qu'on fasse varier dans la fonction Ω les quantités $x, x', x'', \dots$ de $y\alpha, y'\alpha, y''\alpha, \dots$ et les quantités $y, y', y'', \dots$ de $-x\alpha, -x'\alpha, -x''\alpha, \dots$, il faudra que la variation totale de Ω soit nulle indépendamment de la valeur de α ; par conséquent si dans la différentielle de Ω on fait

$$dx = y\alpha, \quad dx' = y'\alpha, \quad dx'' = y''\alpha, \dots,$$

$$dy = -x\alpha, \quad dy' = -x'\alpha, \quad dy'' = -x''\alpha, \dots,$$

il faudra que la somme des termes affectés de α soit nulle; ce qui donnera l'équation

$$0 = \frac{d\Omega}{dx}y + \frac{d\Omega}{dx'}y' + \frac{d\Omega}{dx''}y'' + \dots - \frac{d\Omega}{dy}x - \frac{d\Omega}{dy'}x' - \frac{d\Omega}{dy''}x'' - \dots$$

Ensuite, en regardant β comme très-petite et faisant dans la différentielle de Ω

$$dx = z\beta, \quad dx' = z'\beta, \quad dx'' = z''\beta, \dots,$$

$$dz = -x\beta, \quad dz' = -x'\beta, \quad dz'' = -x''\beta, \dots,$$

on aura par un raisonnement semblable l'équation

$$0 = \frac{d\Omega}{dx}z + \frac{d\Omega}{dx'}z' + \frac{d\Omega}{dx''}z'' + \dots - \frac{d\Omega}{dz}x - \frac{d\Omega}{dz'}x' - \frac{d\Omega}{dz''}x'' - \dots$$

Enfin l'on fera, dans l'hypothèse de γ très-petite,

$$dy = z\gamma, \quad dy' = z'\gamma, \quad dy'' = z''\gamma, \dots,$$

$$dz = -y\gamma, \quad dz' = -y'\gamma, \quad dz'' = -y''\gamma, \dots,$$

et l'on aura

$$0 = \frac{d\Omega}{dy}z + \frac{d\Omega}{dy'}z' + \frac{d\Omega}{dy''}z'' + \dots - \frac{d\Omega}{dz}y - \frac{d\Omega}{dz'}y' - \frac{d\Omega}{dz''}y'' - \dots$$

7. Si maintenant on substitue dans ces trois équations les valeurs de $\frac{d\Omega}{dx}, \frac{d\Omega}{dy}, \dots$ que donnent les équations différentielles du n° 2, on aura ces trois-ci

$$0 = My \frac{d^2x}{dt^2} + M'y' \frac{d^2x'}{dt^2} + M''y'' \frac{d^2x''}{dt^2} + \dots$$

$$- Mx \frac{d^2y}{dt^2} - M'x' \frac{d^2y'}{dt^2} - M''x'' \frac{d^2y''}{dt^2} - \dots,$$

$$0 = Mz \frac{d^2x}{dt^2} + M'z' \frac{d^2x'}{dt^2} + M''z'' \frac{d^2x''}{dt^2} + \dots$$

$$- Mx \frac{d^2z}{dt^2} - M'x' \frac{d^2z'}{dt^2} - M''x'' \frac{d^2z''}{dt^2} - \dots,$$

$$0 = My \frac{d^2z}{dt^2} + M'y' \frac{d^2z'}{dt^2} + M''y'' \frac{d^2z''}{dt^2} + \dots$$

$$- My \frac{d^2z}{dt^2} - M'y' \frac{d^2z'}{dt^2} - M''y'' \frac{d^2z''}{dt^2} - \dots,$$

dont les intégrales

$$\begin{aligned} M \frac{y dx - x dy}{dt} + M' \frac{y' dx' - x' dy'}{dt} + M'' \frac{y'' dx'' - x'' dy''}{dt} + \dots &= a, \\ M \frac{z dx - x dz}{dt} + M' \frac{z' dx' - x' dz'}{dt} + M'' \frac{z'' dx'' - x'' dz''}{dt} + \dots &= b, \\ M \frac{z dy - y dz}{dt} + M' \frac{z' dy' - y' dz'}{dt} + M'' \frac{z'' dy'' - y'' dz''}{dt} + \dots &= c, \end{aligned}$$

renferment le principe connu des *aires*.

8. Enfin si l'on substitue les mêmes valeurs de $\frac{d\Omega}{dx}$, $\frac{d\Omega}{dy}$, ... dans

$$\begin{aligned} d\Omega &= \frac{d\Omega}{dx} dx + \frac{d\Omega}{dx'} dx' + \frac{d\Omega}{dx''} dx'' + \dots \\ &+ \frac{d\Omega}{dy} dy + \frac{d\Omega}{dy'} dy' + \frac{d\Omega}{dy''} dy'' + \dots \\ &+ \frac{d\Omega}{dz} dz + \frac{d\Omega}{dz'} dz' + \frac{d\Omega}{dz''} dz'' + \dots, \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} d\Omega &= M \frac{dx d^2x}{dt^2} + M' \frac{dx' d^2x'}{dt^2} + M'' \frac{dx'' d^2x''}{dt^2} + \dots \\ &+ M \frac{dy d^2y}{dt^2} + M' \frac{dy' d^2y'}{dt^2} + M'' \frac{dy'' d^2y''}{dt^2} + \dots \\ &+ M \frac{dz d^2z}{dt^2} + M' \frac{dz' d^2z'}{dt^2} + M'' \frac{dz'' d^2z''}{dt^2} + \dots, \end{aligned}$$

dont l'intégrale

$$\Omega = M \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2 dt^2} + M' \frac{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}{2 dt^2} + M'' \frac{dx''^2 + dy''^2 + dz''^2}{2 dt^2} + \dots + h$$

contient le principe de la *conservation des forces vives*.

9. Les intégrales que nous venons de trouver dans les deux numéros précédents, ainsi que celles qui donnent le mouvement du centre de gravité (4, 5), sont connues depuis longtemps; mais la manière dont nous y sommes parvenus, par la considération de la fonction Ω , est nouvelle et peut être utile dans d'autres occasions.

10. S'il n'y a que deux corps M, M', alors (1)

$$\Omega = \frac{MM'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}},$$

d'où l'on tire par la différentiation

$$\frac{d\Omega}{dx} = -\frac{MM'(x-x')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d\Omega}{dy} = -\frac{MM'(y-y')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = -\frac{MM'(z-z')}{[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{\frac{3}{2}}};$$

mais on a dans ce cas, par la propriété du centre de gravité, en supposant que ce centre soit l'origine des coordonnées (5),

$$Mx + M'x' = 0, \quad My + M'y' = 0, \quad Mz + M'z' = 0,$$

ce qui donne

$$x' = -\frac{Mx}{M'}, \quad y' = -\frac{My}{M'}, \quad z' = -\frac{Mz}{M'};$$

done, substituant et faisant, pour abréger,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

en sorte que r soit le rayon vecteur, on aura

$$\frac{d\Omega}{dx} = -\frac{MM'^2}{(M+M')^2} \frac{x}{r^3}, \quad \frac{d\Omega}{dy} = -\frac{MM'^2}{(M+M')^2} \frac{y}{r^3}, \quad \frac{d\Omega}{dz} = -\frac{MM'^2}{(M+M')^2} \frac{z}{r^3},$$

par conséquent le mouvement du corps M autour du centre de gravité des corps M et M' sera déterminé (2) par ces équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{M'^2}{(M+M')^2} \frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{M'^2}{(M+M')^2} \frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{M'^2}{(M+M')^2} \frac{z}{r^3},$$

lesquelles font voir que ce mouvement sera le même que si le corps était attiré vers le centre dont il s'agit, supposé fixe, par une force égale à

$$\frac{M'^2}{(M+M')^2 r^3}.$$

IV.

Et comme

$$x = -\frac{M'x'}{M}, \quad y = -\frac{M'y'}{M}, \quad z = -\frac{M'z'}{M},$$

si l'on substitue ces valeurs et qu'on fasse

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = r'^2,$$

de manière que r' soit le rayon vecteur de l'orbite du corps M' autour du même centre de gravité, on aura, pour le mouvement de ce corps, les équations

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{M^2}{(M+M')^2} \frac{x'}{r'^3}, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = -\frac{M^2}{(M+M')^2} \frac{y'}{r'^3}, \quad \frac{d^2z'}{dt^2} = -\frac{M^2}{(M+M')^2} \frac{z'}{r'^3},$$

d'où l'on voit que le corps M' se meut comme s'il était attiré vers le centre de gravité, supposé fixe, par une force égale à $\frac{M^2}{(M+M')^2 r'^2}$.

Enfin si l'on fait

$$x - x' = \xi, \quad y - y' = \eta, \quad z - z' = \zeta, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \rho^2,$$

en sorte que ξ, η, ζ soient les coordonnées de l'orbite du corps M autour du corps M' regardé comme fixe, et ρ le rayon vecteur ou la distance de ces corps, on aura, en mettant pour x', y', z' leurs valeurs $-\frac{Mx}{M'}$,

$$-\frac{My}{M'}, \quad -\frac{Mz}{M'}, \quad \text{ces valeurs de } x, y, z, \text{ savoir}$$

$$x = \frac{M'\xi}{M+M'}, \quad y = \frac{M'\eta}{M+M'}, \quad z = \frac{M'\zeta}{M+M'},$$

lesquelles étant substituées dans les équations ci-dessus, il viendra ces trois-ci

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{(M+M')\xi}{\rho^3}, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{(M+M')\eta}{\rho^3}, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\frac{(M+M')\zeta}{\rho^3},$$

lesquelles montrent que le mouvement relatif du corps M autour du corps M' est le même que si ce dernier corps était fixe, et qu'il attirât le premier avec une force égale à $\frac{M+M'}{\rho^2}$. C'est ce que l'on sait depuis Newton.

11. Supposons maintenant que le système soit composé de plusieurs corps $M, M', M'', M''', \dots$, mais dont l'un M soit beaucoup plus distant des autres que ceux-ci ne le sont entre eux. Nommons X', Y', Z' les coordonnées qui déterminent la position du centre de gravité des corps $M', M'', M''', \dots$, on aura, par la propriété connue,

$$X' = \frac{M'x' + M''x'' + M'''x''' + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots},$$

$$Y' = \frac{M'y' + M''y'' + M'''y''' + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots},$$

$$Z' = \frac{M'z' + M''z'' + M'''z''' + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots};$$

donc

$$X' - x' = \frac{M''(x'' - x') + M'''(x''' - x') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots},$$

$$Y' - y' = \frac{M''(y'' - y') + M'''(y''' - y') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots},$$

$$Z' - z' = \frac{M''(z'' - z') + M'''(z''' - z') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots};$$

et de même

$$X' - x'' = \frac{M'(x' - x'') + M'''(x''' - x'') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots},$$

$$Y' - y'' = \frac{M'(y' - y'') + M'''(y''' - y'') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots},$$

$$Z' - z'' = \frac{M'(z' - z'') + M'''(z''' - z'') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots},$$

et ainsi de suite. De sorte qu'on aura

$$x - x' = x - X' + \frac{M''(x'' - x') + M'''(x''' - x') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots},$$

$$y - y' = y - Y' + \frac{M''(y'' - y') + M'''(y''' - y') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots},$$

$$z - z' = z - Z' + \frac{M''(z'' - z') + M'''(z''' - z') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots};$$

$$\begin{aligned}
x - x'' &= x - X' + \frac{M'(x' - x'') + M''(x'' - x''') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots}, \\
y - y'' &= y - Y' + \frac{M'(y' - y'') + M''(y'' - y''') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots}, \\
z - z'' &= z - Z' + \frac{M'(z' - z'') + M''(z'' - z''') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots}; \\
x - x''' &= x - X' + \frac{M'(x' - x'') + M''(x'' - x''') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots}, \\
y - y''' &= y - Y' + \frac{M'(y' - y'') + M''(y'' - y''') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots}, \\
z - z''' &= z - Z' + \frac{M'(z' - z'') + M''(z'' - z''') + \dots}{M' + M'' + M''' + \dots}; \\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Or, par l'hypothèse, les distances

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}, \quad \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}, \\
&\sqrt{(x'' - x'')^2 + (y'' - y'')^2 + (z'' - z'')^2}, \dots
\end{aligned}$$

des corps $M', M'', \dots$ entre eux doivent être beaucoup plus petites que la distance

$$\sqrt{(x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2}$$

du corps M au centre de gravité des mêmes corps, puisque ce centre est toujours placé au milieu d'eux; donc si l'on regarde les rapports de premières distances à cette dernière comme des quantités très-petites du premier ordre, et qu'on remarque que l'on a, en général,

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)^2 = (a^2 + b^2 + c^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (a\beta - b\alpha)^2 - (a\gamma - c\alpha)^2 - (b\gamma - c\beta)^2,$$

et par conséquent toujours

$$a\alpha + b\beta + c\gamma < \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2},$$

on aura, aux quantités du second ordre près,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{(x - x'')^2 + (y - y'')^2 + (z - z'')^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x - X')^2 + (y - Y')^2 + (z - Z')^2}} \\
&\quad + \frac{M''}{M' + M'' + M''' + \dots} \frac{(x - X')(x'' - x') + (y - Y')(y'' - y') + (z - Z')(z'' - z')}{[(x - X')^2 + (y - Y')^2 + (z - Z')^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{M'''}{M' + M'' + M''' + \dots} \frac{(x - X')(x'' - x'') + (y - Y')(y'' - y'') + (z - Z')(z'' - z'')}{[(x - X')^2 + (y - Y')^2 + (z - Z')^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad \dots\dots\dots \\
&\frac{1}{\sqrt{(x - x''')^2 + (y - y''')^2 + (z - z''')^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x - X')^2 + (y - Y')^2 + (z - Z')^2}} \\
&\quad + \frac{M''}{M' + M'' + M''' + \dots} \frac{(x - X')(x'' - x'') + (y - Y')(y'' - y'') + (z - Z')(z'' - z'')}{[(x - X')^2 + (y - Y')^2 + (z - Z')^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{M'''}{M' + M'' + M''' + \dots} \frac{(x - X')(x'' - x'') + (y - Y')(y'' - y'') + (z - Z')(z'' - z'')}{[(x - X')^2 + (y - Y')^2 + (z - Z')^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad \dots\dots\dots \\
&\frac{1}{\sqrt{(x - x''')^2 + (y - y''')^2 + (z - z''')^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x - X')^2 + (y - Y')^2 + (z - Z')^2}} \\
&\quad + \frac{M''}{M' + M'' + M''' + \dots} \frac{(x - X')(x'' - x'') + (y - Y')(y'' - y'') + (z - Z')(z'' - z'')}{[(x - X')^2 + (y - Y')^2 + (z - Z')^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad + \frac{M'''}{M' + M'' + M''' + \dots} \frac{(x - X')(x'' - x'') + (y - Y')(y'' - y'') + (z - Z')(z'' - z'')}{[(x - X')^2 + (y - Y')^2 + (z - Z')^2]^{\frac{3}{2}}} \\
&\quad \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Ces quantités étant multipliées respectivement par $M', M'', M''', \dots$ et ensuite ajoutées ensemble, on verra que tous les termes du premier ordre se détruiront mutuellement; car il est visible qu'on a, en général, quelles que soient les quantités $M', M'', M''', \dots$ et $x', x'', x''', \dots$,

$$\begin{aligned}
0 &= M' M''(x'' - x') + M' M''(x'' - x'') + \dots \\
&\quad + M'' M'(x' - x'') + M'' M''(x'' - x'') + \dots \\
&\quad + M'' M'(x' - x'') + M'' M''(x'' - x'') + \dots \\
&\quad \dots\dots\dots
\end{aligned}$$

On aura donc, aux quantités du second ordre près,

$$\frac{M'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} + \frac{M''}{\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}} + \dots = \frac{M'+M''+M'''+\dots}{\sqrt{(x-X')^2+(y-Y')^2+(z-Z')^2}}.$$

Done la partie de la valeur de Ω (1) laquelle contient les variables $x, y, z, \dots$, qui est par conséquent la seule à laquelle on doive avoir égard dans les quantités $\frac{d\Omega}{dx}, \frac{d\Omega}{dy}, \frac{d\Omega}{dz}$, sera, aux quantités du second ordre près,

$$\frac{M(M'+M''+M'''+\dots)}{\sqrt{(x-X')^2+(y-Y')^2+(z-Z')^2}},$$

expression qui est, comme l'on voit, semblable à celle de Ω dans le cas où il n'y a que deux corps M et M' (10), pourvu qu'on prenne à la place du corps M' la somme des corps $M'+M''+M'''+\dots$, et à la place des coordonnées x', y', z' du corps M' les coordonnées X', Y', Z' du centre de gravité des corps $M', M'', M''', \dots$.

De plus, en plaçant l'origine des coordonnées dans le centre commun de gravité de tous les corps, on aura, en vertu des équations du n° 5, celles-ci

$$Mx + (M' + M'' + M''' + \dots) X' = 0,$$

$$My + (M' + M'' + M''' + \dots) Y' = 0,$$

$$Mz + (M' + M'' + M''' + \dots) Z' = 0,$$

qu'on voit aussi être analogues à celles qui ont lieu dans le cas de deux corps (10) en prenant, comme ci-dessus, X', Y', Z' et $M'+M''+M'''+\dots$ à la place de x', y', z' et M' .

D'où il est aisé de conclure que si l'on regarde les corps $M', M'', M''', \dots$ comme réunis en un seul corps dans leur centre de gravité, ce corps et le corps M auront, aux quantités du second ordre près, le même mouvement que si c'étaient deux corps uniques qui s'attirassent mutuellement en raison directe des masses et en raison inverse du carré de la distance.

12. Qu'on suppose présentement que dans le système des corps $M, M', M'', M''', \dots$ il y en ait deux M et M' , qui soient fort éloignés des autres corps $M'', M''', \dots$, par rapport à la distance où ils sont l'un de l'autre; et qu'on cherche le mouvement du centre de gravité de ces corps. Nommant X, Y, Z les coordonnées de ce centre, on aura, comme l'on sait,

$$X = \frac{Mx + M'x'}{M + M'}, \quad Y = \frac{My + M'y'}{M + M'}, \quad Z = \frac{Mz + M'z'}{M + M'},$$

et pour avoir les équations du mouvement du même centre, il n'y aura qu'à substituer dans les valeurs de $\frac{d^2X}{dt^2}, \frac{d^2Y}{dt^2}, \frac{d^2Z}{dt^2}$ celles des quantités $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2x'}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots$ tirées des équations du n° 2, ce qui donnera

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{\frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\Omega}{dx'}}{M + M'}, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{\frac{d\Omega}{dy} + \frac{d\Omega}{dy'}}{M + M'}, \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{\frac{d\Omega}{dz} + \frac{d\Omega}{dz'}}{M + M'}.$$

Or, on a

$$x = X + \frac{M'(y'-y)}{M + M'}, \quad y = Y + \frac{M'(x'-x)}{M + M'}, \quad z = Z + \frac{M'(z'-z)}{M + M'},$$

$$x' = X + \frac{M(x-x')}{M + M'}, \quad y' = Y + \frac{M(y-y')}{M + M'}, \quad z' = Z + \frac{M(z-z')}{M + M'}.$$

Donc, si l'on fait ces substitutions dans les expressions

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}},$$

et qu'on traite comme une quantité très-petite du premier ordre le rapport de la distance

$$\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

entre les corps M et M' , à la distance

$$\sqrt{(X-x'')^2+(Y-y'')^2+(Z-z'')^2}$$

entre le centre de gravité des mêmes corps et le corps M'' , on aura,

446 SUR LE MOUVEMENT DE PLUSIEURS CORPS S'ATTRANT
comme dans le numéro précédent, aux quantités du second ordre près,

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z-z'')^2}} = \frac{1}{\sqrt{(X-x'')^2 + (Y-y'')^2 + (Z-z'')^2}} - \frac{M'}{M+M'} \frac{(X-x'')(x'-x) + (Y-y'')(y'-y) + (Z-z'')(z'-z)}{[(X-x'')^2 + (Y-y'')^2 + (Z-z'')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2}} = \frac{1}{\sqrt{(X-x'')^2 + (Y-y'')^2 + (Z-z'')^2}} - \frac{M}{M+M'} \frac{(X-x'')(x-x') + (Y-y'')(y-y') + (Z-z'')(z-z')}{[(X-x'')^2 + (Y-y'')^2 + (Z-z'')^2]^{\frac{3}{2}}},$$

et l'on voit que, si l'on multiplie ces quantités respectivement par M, M' et qu'ensuite on les ajoute ensemble, les termes du premier ordre se détruiront mutuellement, et l'on aura simplement

$$\frac{M}{\sqrt{(x-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z-z'')^2}} + \frac{M'}{\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2}} = \frac{M+M'}{\sqrt{(X-x'')^2 + (Y-y'')^2 + (Z-z'')^2}}.$$

On trouvera de la même manière, en traitant le rapport de la distance entre les corps M et M' à la distance entre le centre de gravité de ces corps et le corps M'' comme une quantité très-petite du premier ordre et négligeant les quantités très-petites du second ordre,

$$\frac{M}{\sqrt{(x-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z-z'')^2}} + \frac{M'}{\sqrt{(x'-x'')^2 + (y'-y'')^2 + (z'-z'')^2}} = \frac{M+M'}{\sqrt{(X-x'')^2 + (Y-y'')^2 + (Z-z'')^2}},$$

et ainsi de suite.

Or, si l'on considère l'expression de Ω du n° 1, on verra que le premier terme

$$\frac{MM'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y'-y')^2 + (z-z')^2}}$$

se détruit de soi-même dans les valeurs de

$$\frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\Omega}{dx'}, \quad \frac{d\Omega}{dy} + \frac{d\Omega}{dy'}, \quad \frac{d\Omega}{dz} + \frac{d\Omega}{dz'}.$$

EN RAISON INVERSE DES CARRÉS DES DISTANCES. 447

donc, si l'on rejette ce terme et qu'on fasse dans les autres termes de Ω les substitutions ci-dessus, on aura le même résultat que si l'on supposait

$$x = x' = X, \quad y = y' = Y, \quad z = z' = Z.$$

Mais puisque

$$X = \frac{Mx + M'x'}{M + M'},$$

on aura

$$\frac{d\Omega}{dx} = \frac{M}{M+M'} \frac{d\Omega}{dX}, \quad \frac{d\Omega}{dx'} = \frac{M'}{M+M'} \frac{d\Omega}{dX},$$

done,

$$\frac{d\Omega}{dx} + \frac{d\Omega}{dx'} = \frac{d\Omega}{dX},$$

et l'on aura de même

$$\frac{d\Omega}{dy} + \frac{d\Omega}{dy'} = \frac{d\Omega}{dY}, \quad \frac{d\Omega}{dz} + \frac{d\Omega}{dz'} = \frac{d\Omega}{dZ}.$$

Donc le mouvement du centre de gravité des corps M et M' sera déterminé, aux quantités du second ordre près, par les équations

$$\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{1}{M+M'} \frac{d\Omega}{dX}, \quad \frac{d^2Y}{dt^2} = \frac{1}{M+M'} \frac{d\Omega}{dY}, \quad \frac{d^2Z}{dt^2} = \frac{1}{M+M'} \frac{d\Omega}{dZ},$$

dans lesquelles la quantité Ω sera ce que devient la valeur de Ω du n° 1, en y faisant

$$x = x' = X, \quad y = y' = Y, \quad z = z' = Z.$$

D'où je conclus sur-le-champ que le mouvement du centre de gravité dont il s'agit sera, aux quantités du second ordre près, le même que si les deux corps M et M' étaient réunis dans ce centre et ne formaient plus qu'un seul corps.

13. On peut étendre cette démonstration à autant de corps que l'on voudra, et il en résultera que si plusieurs corps s'attirent mutuellement et sont attirés par autant d'autres corps qu'on voudra, dont ils soient fort éloignés par rapport aux distances de ces corps entre eux, le mouvement du centre de gravité de ces corps sera, aux quantités très-petites du second ordre près, le même que si ces corps y étaient réunis et ne formaient qu'un corps unique.

Donc, en combinant ce Théorème avec celui du n° 11, on conclura, en général, que si l'on a un système d'autant de corps qu'on voudra qui s'attirent mutuellement, et qu'une partie de ces corps soit très-éloignée des autres corps, en sorte que les distances des premiers corps entre eux et les distances des derniers corps entre eux soient très-petites vis-à-vis des distances de chacun des premiers corps à chacun des derniers, le centre de gravité des premiers et celui des derniers auront le même mouvement que si les corps étaient réunis dans ces centres et ne formaient ainsi qu'un système de deux corps uniques.

Ces Théorèmes sur le mouvement des centres de gravité ont déjà été donnés en partie par M. d'Alembert, dans ses *Recherches sur le système du monde* et dans ses *Opuscules*; mais la manière dont je viens de les démontrer est nouvelle et me paraît mériter surtout l'attention des Géomètres par l'utilité dont elle peut être dans d'autres occasions. On prouverait, par les mêmes principes, que ces Théorèmes seraient également vrais si les corps agissaient les uns sur les autres par une force d'attraction mutuelle proportionnelle à une fonction quelconque de la distance; car nommant $f(x)$ la force d'attraction qui agit à la distance x et faisant

$$F(x) = \int f(x) dx,$$

il n'y aura qu'à changer la valeur de Ω du n° 1 dans la suivante

$$\begin{aligned} \Omega = & -MM'F[\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}] \\ & -MM''F[\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2}] \\ & \dots\dots\dots \\ & -M'M''F[\sqrt{(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2}] \\ & \dots\dots\dots \end{aligned}$$

et l'on parviendra aux mêmes résultats.

RÉFLEXIONS SUR L'ÉCHAPPEMENT.



RÉFLEXIONS SUR L'ÉCHAPPEMENT.

(Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres
de Berlin, année 1777.)

1. Pour peu qu'on ait de connaissances dans l'Horlogerie, on sait que l'échappement est cette mécanique par laquelle l'action du poids ou du ressort moteur est réglée et modérée par celle du pendule ou du balancier, qu'on appelle, à cause de cela, le *régulateur de l'horloge*; car comme la force motrice agit continuellement et toujours dans le même sens, elle tend nécessairement à imprimer un mouvement accéléré au rouage; mais en vertu de l'échappement, la dernière roue, qu'on appelle aussi *roue de rencontre* ou *d'échappement*, ne peut continuer son mouvement circulaire qu'en imprimant au régulateur un mouvement d'oscillation; et cette combinaison et liaison de deux mouvements, l'un continu, l'autre alternatif, dans laquelle consiste proprement la nature des horloges, sert à entretenir l'uniformité de leur marche par la réaction mutuelle des forces qui résultent de ces différents mouvements.

2. Autrefois on se contentait de prendre pour régulateur un simple balancier, qui n'est autre chose qu'un anneau circulaire dont l'axe est parfaitement mobile sur ses pivots; cet axe, qu'on appelle aussi la *verge du balancier*, porte deux ailes ou palettes placées dans des points différents, et faisant entre elles un angle presque droit, lesquelles s'engagent dans les dents de la roue d'échappement, qu'on nomme proprement dans

ce cas *roue de rencontre*, en sorte que cette roue ne peut tourner à moins que ses dents, dont le nombre est toujours impair, n'écartent alternativement l'une des palettes dans un sens, et l'autre dans le sens opposé; ce qui oblige le balancier à faire des vibrations. Par cette disposition la pointe de la dent, qui appuie sur l'une des palettes et qui la presse avec la force qu'elle reçoit du poids ou du ressort moteur, la fait tourner jusqu'à ce qu'elle la quitte, et imprime ainsi au balancier un mouvement circulaire autour de son axe; et lorsque cette dent abandonne la palette; la dent diamétralement opposée rencontre précisément la seconde palette et tend de même à la faire tourner en sens contraire; en sorte que si le balancier était en repos, lorsque la seconde palette vient à recevoir l'action de la roue de rencontre, il obéirait nécessairement à cette action et prendrait un mouvement circulaire opposé au mouvement produit par l'action de la première palette; mais le balancier conservant par son inertie le premier mouvement, il est clair qu'il doit réagir sur la roue de rencontre et la faire rétrograder, jusqu'à ce que son mouvement soit entièrement détruit par la pression opposée de la roue; pour lors le balancier cédera à cette pression, laquelle continuera d'agir dans le même sens, jusqu'à ce que la dent qui appuie sur la seconde palette s'échappant, la dent opposée vienne rencontrer de nouveau la première palette; et ainsi de suite.

3. C'est d'après ces principes qu'ont été construites les premières horloges à roues, dont l'invention ne remonte guère au delà du *xiv^e* siècle; et il ne paraît pas qu'on ait fait aucun changement à leur construction jusqu'au temps où Huyghens imagina de substituer le pendule au balancier dans les grandes horloges, et d'appliquer un ressort spiral aux balanciers des montres. Par ce moyen le régulateur se trouvant doué d'une force motrice particulière et capable de lui faire faire des oscillations indépendamment de l'action du rouage, il n'en est que plus propre à modérer l'effet de cette action, et à maintenir l'égalité dans le mouvement de l'horloge. Aussi depuis cette époque, l'Horlogerie a continuellement acquis de nouveaux degrés de perfection, auxquels les nouvelles montres

marines exécutées en Angleterre et en France paraissent avoir en quelque façon mis le comble.

4. Huyghens, en appliquant le pendule aux horloges et le ressort spiral aux montres, a conservé l'ancien échappement dont nous venons de donner la description, et dont on ignore l'inventeur; et cet échappement, qu'on appelle communément *à roue de rencontre*, est encore celui qui est le plus employé tant dans les pendules que dans les montres ordinaires; mais après la découverte d'Huyghens on a tâché aussi de perfectionner la construction de l'échappement, et l'on a imaginé un grand nombre d'échappements différents, dont les principaux sont les échappements à double levier, à ancre, à cylindre, etc. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de ces différents échappements; on peut consulter les Ouvrages d'Horlogerie où il en est traité; comme ceux de Sulli, du P. Alexandre, de MM. Lepaute, Berthoud, etc.; notre dessein est d'envisager cette matière sous un point de vue moins borné, et de la réduire à des principes clairs et simples qui puissent servir de base à une théorie générale des échappements.

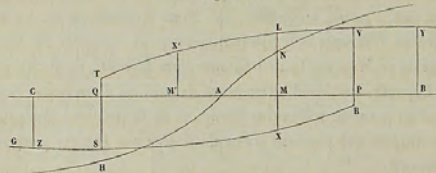
5. Comme la nature de l'échappement consiste dans la combinaison d'un mouvement circulaire avec un mouvement de vibration, on peut réduire, en général, tout échappement de quelque espèce qu'il soit à deux seules pièces, savoir à la roue d'échappement qui est entretenue dans un mouvement circulaire par la force motrice de l'horloge, et à la pièce d'échappement sur laquelle cette roue agit alternativement en sens contraire, et par laquelle son action se transmet au régulateur qui y est joint.

Et pour simplifier et généraliser davantage la question, on pourra encore faire abstraction de ces deux pièces et ne considérer que le mouvement oscillatoire du régulateur, en tant qu'il est altéré par l'impulsion qu'il reçoit de la roue d'échappement; ou plutôt il suffira de considérer simplement le mouvement oscillatoire d'un corps qui serait sollicité par des forces analogues à celles qui doivent agir sur le régulateur, tant en vertu de l'action de la gravité ou du ressort dont il est animé, qu'en

vertu de l'action de la force motrice qui lui est transmise par le moyen de l'échappement.

6. Soit donc un corps qui fasse des oscillations autour du point A dans la ligne droite CAB, et dont les excursions latérales AM soient proportionnelles aux arcs décrits par le régulateur autour de son point de repos. Imaginons d'abord que ce corps soit sollicité par une force constamment dirigée vers le point A et proportionnelle à une fonction donnée de la distance du corps à ce point. On pourra représenter cette force par les ordonnées d'une ligne courbe HAN (*fig. 1*) qui traverse l'axe

Fig. 1.



en A, en supposant que les ordonnées positives MN expriment des forces dont la direction soit BAC, et que les ordonnées négatives expriment des forces de direction contraire. Cette force exprimera donc celle dont le régulateur est animé par l'action de la gravité ou du ressort; et lorsque le régulateur est un pendule ordinaire, il est clair que la courbe HAN sera la ligne des sinus, laquelle pourra être prise sensiblement pour une ligne droite quand les oscillations du pendule seront fort petites; mais à l'égard des balanciers mus par un ressort spiral, comme on le pratique dans les montres, la loi de la courbe HAN n'est pas facile à déterminer; on sait seulement qu'elle doit couper l'axe au point A et que ses deux branches AN et AH doivent aller en s'éloignant continuellement de l'axe.

7. Outre la force dont nous venons de parler, le corps qui oscille autour de A doit encore être supposé animé par une force qui réponde à celle qui agit sur le régulateur en vertu de l'échappement; or pour peu

qu'on considère la manière d'agir de cette force, on verra qu'elle doit être représentée par les deux branches TV et SR, l'une au-dessus de l'axe, et dont les ordonnées expriment des forces agissant dans la direction BAC, l'autre au-dessous de l'axe, et dont les ordonnées expriment des forces dirigées suivant CAB; et voici comment on doit envisager l'action de cette force.

Imaginons que le mobile qui oscille entre C et B aille de C en B; à chaque point M de l'espace qu'il parcourt dans cette direction, il doit être censé sollicité par une force MX agissant dans la même direction, et cela jusqu'à ce qu'il soit arrivé au point P où la branche GR est terminée. Ce point P répond à celui où la dent de la roue d'échappement, qui a agi sur le régulateur pendant que celui-ci a décrit l'angle CP, quitte la pièce d'échappement et cesse ainsi d'agir sur le régulateur; c'est pourquoi la branche GR doit finir à ce même point P. Mais comme alors une autre dent de la roue d'échappement commence aussitôt à agir en sens contraire sur un autre côté de la pièce d'échappement, et imprime au régulateur une force de direction contraire à la précédente, il faut imaginer qu'au point P la force PR devient PV, et qu'ensuite le mobile, tant en allant vers B qu'en revenant vers C, est continuellement sollicité dans la direction BC par des forces représentées par les ordonnées de la branche supérieure TV. Cette branche doit être terminée de même au point Q, qui répond à celui où la dent quitte de nouveau la pièce d'échappement, pour faire place à une autre dent qui doit recommencer à agir en sens contraire, c'est-à-dire dans la direction CB, de la même manière qu'au paravant; c'est pourquoi au point Q il faut concevoir de nouveau que la force TQ se change en QS, et qu'ensuite le mobile soit soumis, tant en allant vers C qu'en revenant vers B, à l'action continue d'une force représentée par les ordonnées de la branche inférieure SR, et agissant dans la direction CB jusqu'à ce qu'au point P cette force se change derechef en PV; et ainsi de suite.

8. Telle est donc la manière dont on doit représenter l'action de la force qui est transmise au régulateur par le moyen de l'échappement;

par où l'on voit que la loi de continuité est nécessairement interrompue aux deux points P et Q, où la force change brusquement de direction.

Il est vrai que dans la pratique les forces PV, QS ne succèdent pas immédiatement aux forces PR, QT, comme nous l'avons supposé; car il y a ordinairement, surtout dans l'échappement à roue de rencontre, un petit intervalle de temps entre l'instant où une dent quitte la pièce d'échappement et celui où une autre dent commence à la presser; pendant cet intervalle où l'action de l'échappement est suspendue, le régulateur se meut librement par sa propre force, et la roue d'échappement acquiert par l'impression continue de la force motrice un petit mouvement accéléré en vertu duquel la dent qui va rencontrer la pièce d'échappement la choque, et produit un petit bruit qui sert à marquer chaque vibration du régulateur; mais d'un côté on a soin de diminuer le plus qu'il est possible cette chute de la roue sur la pièce d'échappement, laquelle tend à déranger la justesse de l'horloge; de l'autre côté il est visible que comme le régulateur reçoit ensuite, par le choc de la roue contre la pièce d'échappement, l'action réunie de toutes les forces instantanées qui ont agi sur la roue pendant que l'action de l'échappement a été suspendue, on peut supposer sans erreur sensible que l'effet en est à peu près le même que si la roue avait continué d'agir sur le régulateur sans interruption. Ainsi l'on ne s'écartera pas beaucoup de la vérité en supposant, comme nous l'avons fait, que les forces PR, TQ, se changent subitement en PV, QS, en sorte que leur action sur le mobile soit continue.

9. Il suffira donc de connaître pour chaque échappement donné la nature des courbes TLV, RXS, pour être en état de déterminer les effets de cet échappement sans en connaître d'ailleurs le mécanisme particulier; de sorte que par ce moyen la théorie de l'échappement est réduite à la considération purement géométrique des courbes dont il s'agit; examinons donc les différents cas qui peuvent arriver suivant la différente forme de ces courbes.

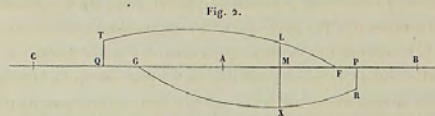
Et d'abord nous remarquerons que l'arc qui est proportionnel à la partie de l'arc PQ est celui qui en termes d'Horlogerie s'appelle l'arc de

levée de l'échappement, tandis que l'arc proportionnel à la partie BC s'appelle l'arc de *vibration*. Le premier est constant et sa grandeur ne dépend que de la disposition de l'échappement, puisque c'est l'arc que les dents de la roue d'échappement peuvent faire décrire au régulateur pour ne faire qu'échapper des extrémités de la pièce d'échappement; le second au contraire est variable et dépend du plus ou moins de force du moteur de l'horloge, et du plus ou moins de résistance du régulateur.

10. On remarquera de plus que, comme MX est la force qui agit sur le régulateur en vertu de la force motrice agissante sur la roue d'échappement, cette force-là sera à celle-ci, par le principe des vitesses virtuelles, en raison réciproque de la vitesse même du régulateur à celle de la roue d'échappement; de sorte que, comme la force motrice est constante au moins pendant une oscillation du régulateur, la vitesse de la roue d'échappement sera proportionnelle à celle du régulateur multipliée par la force MX qui agit sur lui. De là il s'ensuit que pendant que le mobile qui oscille entre les points C et B, et dont le mouvement est semblable à celui du régulateur, va de C en P, la roue se mouvra toujours dans le même sens; mais depuis le point P jusqu'au point B où la force change de direction, la vitesse de la roue deviendra négative, c'est-à-dire que la roue se mouvra en sens contraire; c'est ce qu'on appelle en termes d'Horlogerie *le recul*; parce qu'en effet tout le rouage et les aiguilles mêmes, au lieu d'avancer, reculent un peu. Comme au point B la vitesse du mobile est nulle, celle de la roue le sera aussi; ensuite le mobile rebroussant chemin de B vers C, sa vitesse changera de signe; par conséquent le mouvement de la roue changera de nouveau de direction et redeviendra direct de rétrograde qu'il était. Ce mouvement direct continuera donc tant que le mobile ira de B vers Q; au point Q il redeviendra rétrograde, en sorte qu'il y aura un nouveau recul entre Q et C; ensuite le mobile revenant de C vers B, le mouvement de la roue redeviendra direct comme auparavant; et ainsi de suite.

11. On voit donc que tout échappement doit causer un recul dans le

rouage au bout de chaque vibration du régulateur, à moins que les deux parties VY et SZ des courbes TV, RS ne soient nulles, ou qu'elles ne coïncident avec l'axe, auquel cas leurs ordonnées seraient nulles. Le premier cas ne peut avoir lieu en général, parce que les points B et C ne sont point fixes, mais dépendent du plus ou moins de force motrice de l'horloge, comme nous l'avons fait remarquer ci-dessus. Il ne reste donc que le second moyen de détruire le recul, lequel consiste à construire l'échappement de manière que les courbes des forces TL, RX s'approchent de l'axe et y coïncident aux points P et Q, ou en deçà de ces points, comme en F et G, ainsi qu'on le voit dans la *fig. 2*.



Car comme de cette manière les ordonnées de la courbe TL sont nulles depuis F jusqu'en B, ainsi que celles de la courbe RX depuis G jusqu'en C, et que par conséquent les forces représentées par ces courbes sont nulles aussi, il s'ensuit que la vitesse de la roue d'échappement, laquelle à chaque point M est toujours proportionnelle à celle du mobile multipliée par la force correspondante MX, sera nulle pendant le temps que le mobile emploie à aller depuis P jusqu'en B et à revenir de là jusqu'en F, et ensuite à aller depuis Q jusqu'en C et à revenir jusqu'en G. En sorte que cette roue, ainsi que tout le rouage de l'horloge, sera en repos pendant que le régulateur décrit les extrémités des arcs de vibration CB.

12. De là naît une différence très-essentielle entre les échappements; ceux qui à chaque vibration produisent un recul dans le rouage se nomment *échappements à recul*; et ceux qui y produisent une espèce de repos se nomment *échappements à repos*.

On regarde communément ces derniers comme les meilleurs; cependant d'habiles artistes ont remarqué qu'ils sont sujets à différents incon-

véniens, et qu'ils ne méritent pas à beaucoup près toute la préférence qu'on a voulu leur donner sur les échappements à recul; c'est un point que nous discuterons ailleurs.

13. On voit donc clairement, par les *fig. 1* et *2* (pages 424, 428), en quoi consiste la différence des échappements à recul et de ceux à repos; elle ne dépend que de la différente forme des courbes TL, RX; de sorte que, ces courbes étant tracées pour un échappement quelconque donné, on reconnaitra d'abord de quelle espèce est l'échappement proposé. Lorsque l'échappement est à recul, le mobile est continuellement sollicité par l'action de deux forces, l'une représentée par la courbe HAN, et l'autre par les deux courbes RS, TL; mais quand l'échappement est à repos, alors l'action de la seconde de ces deux forces cesse dès que le mobile en allant de C vers B parvient au point P qui répond à l'une des extrémités de l'arc de levée, et ne recommence que lorsque le mobile en revenant de B vers C atteint le point F; et de même cette action cesse au point Q qui répond à l'autre extrémité de l'arc de levée, et ne recommence qu'au point G lorsque le mobile ayant achevé son oscillation revient vers B.

14. Pour donner une idée encore plus nette de la nature des courbes TL, RX auxquelles nous avons ramené la Théorie des échappements, il est bon d'examiner, en particulier, quelques-unes des espèces les plus connues d'échappements, et de chercher l'équation des courbes qui leur appartiennent.

Prenons pour premier Exemple l'échappement ordinaire à roue de rencontre, et supposons que la roue de rencontre avec la verge du balancier garnie de ses deux palettes soit projetée sur un plan perpendiculaire à cette verge; soit donc (*fig. 3*, page 430) C la projection de la verge, et CA, CB celle des deux palettes, vues de profil, lesquelles sont attachées à la verge à la distance du diamètre de la roue, l'une de l'autre, et qui forment entre elles un angle donné ACB. Soit aussi PS la projection d'une partie de la circonférence de la roue, et PXQ, QYR deux dents consécutives de cette roue, laquelle est supposée tourner de gauche à droite, en sorte

et de là on aura, pour l'équation de la courbe RX,

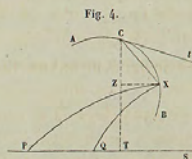
$$y = \frac{\mu ap}{\cos^2\left(x + \frac{\omega}{2}\right)};$$

et l'on trouvera que la courbe TL sera la même que la courbe RX, mais dans une position renversée; de sorte que, nommant de même x l'abscisse AM', et y l'ordonnée M'X', on aura entre x et y la même équation que nous venons de donner.

15. Il sera donc facile de décrire les deux courbes dont il s'agit, à l'aide de l'équation trouvée, et l'on connaîtra par leur moyen la nature de l'échappement proposé. Et d'abord il est clair que, comme $\cos^2\left(x + \frac{\omega}{2}\right)$ ne peut pas augmenter au delà de 1, la plus petite ordonnée y sera égale à μap , laquelle répondra à $x = -\frac{\omega}{2}$ ou $= 180^\circ - \frac{\omega}{2}$; de sorte que la courbe n'atteindra jamais l'axe, et par conséquent l'échappement ne pourra jamais être à repos, mais sera toujours nécessairement à recul (13).

16. Mais si au lieu de faire les palettes droites on les faisait courbes, on pourrait peut-être obtenir un échappement à repos; c'est ce qu'il est bon d'examiner.

Soient donc (fig. 4) AC et CB les palettes courbes et PQX la dent qui



appuie sur le point X pour faire tourner la palette CB dans le sens ZX, comme ci-dessus; en conservant les mêmes dénominations on aura aussi l'équation $\xi = a \tan \varphi$; maintenant soit Ct la tangente à la courbe CX

au point C, et nommons z l'angle rCX, ψ l'angle rCZ; on aura

$$\varphi = \psi - z;$$

done

$$\xi = a \tan(\psi - z).$$

Soit de plus la corde CX = r , on aura

$$r = \frac{a}{\cos \varphi} = \frac{a}{\cos(\psi - z)},$$

et comme par la nature de la courbe CXB, qui est supposée donnée, on doit avoir une équation entre r et z , par laquelle r sera donné en z , il s'ensuit qu'on aura une équation entre ψ et z par laquelle on connaîtra z en ψ ; et l'on pourra supposer que cette équation soit représentée par

$$dz = \Sigma d\psi,$$

Σ étant une fonction connue de ψ .

Or il est facile de comprendre que dans l'hypothèse présente l'angle élémentaire décrit par la palette autour de C n'est pas, comme dans le cas précédent, égal à $d\varphi$, mais égal à $d\psi$; de sorte qu'on aura ici l'équation

$$\frac{y}{p} = \mu \frac{d\xi}{d\psi};$$

mais en différentiant la valeur de ξ on a

$$d\xi = \frac{a(d\psi - dz)}{\cos^2(\psi - z)} = \frac{a(1 - \Sigma)d\psi}{\cos^2(\psi - z)}$$

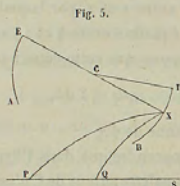
en mettant $\Sigma d\psi$ à la place de dz ; donc on aura l'équation

$$y = \frac{\mu ap(1 - \Sigma)}{\cos^2(\psi - z)},$$

où l'on remarquera que l'angle ψ doit être égal (fig. 1, page 424) à l'abscisse AM = x , plus une constante qui sera la valeur de ψ au point A; en sorte que, nommant en général ε cette constante, on aura $\psi = x + \varepsilon$; ainsi l'on aura l'équation de la courbe RX entre les coordonnées x et y .

17. Réciproquement donc, si l'on voulait regarder cette courbe comme donnée, on pourrait trouver l'équation de la courbe CB; d'où l'on voit que l'on peut toujours donner aux palettes une figure telle que les forces MX suivent une loi quelconque.

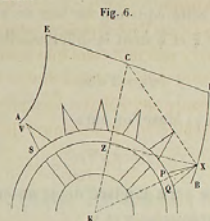
On voit aussi que dans ce cas l'échappement pourrait être à repos; car il est clair que l'ordonnée y sera nulle tant que Σ sera $= 1$, ce qui donne $dz = d\psi$, et par conséquent $dr = 0$, c'est-à-dire le rayon CX constant; ainsi il n'y aura qu'à donner aux palettes la figure d'une courbe telle que BD (fig. 5) qui dégénère en un arc de cercle XD, dont le centre



soit C; mais je ne sache pas qu'on ait jamais construit des échappements à repos de cette manière, peut-être à cause de quelques inconvénients qu'il pourrait y avoir dans la disposition des dents PQX de la roue de rencontre et des palettes BD, EA; c'est pourquoi nous ne nous y arrêtons pas davantage.

18. Si l'on imagine que les palettes CDB et CEA de la fig. 5 soient dans un même plan passant par le centre C et ne forment qu'une seule pièce, et que la roue soit aussi placée dans ce même plan, comme on le voit dans la fig. 6, page 435, alors on aura l'échappement qu'on nomme à ancre, et qui est un des plus usités dans les pendules; la roue PQK en tournant dans le sens PQ pousse avec la dent PQX la face intérieure DB de l'échappement et l'oblige à s'écarter pour lui donner passage, ce qui fait tourner l'ancre ACB autour de C dans le sens XD; dès que la dent PQX a échappé au point B, l'autre face AE, qui s'est approchée de la roue en

même temps que la première s'en éloignait, sera poussée intérieurement par la dent SV et sera obligée par là de s'éloigner de la roue à son tour, ce qui fera tourner l'ancre en sens contraire et rapprochera la face DB de la roue; et ainsi de suite.



19. Ayant joint les deux centres C, K par la ligne CK, et abaissé du point X la perpendiculaire ZX sur CK, nommons a la distance CK, ψ l'angle KCD, z l'angle XCD, r le rayon vecteur CX, b le rayon KX de la circonférence extérieure de la roue, et ξ l'angle CKX; il est clair (10) que le rapport des forces $\frac{X}{P}$ sera proportionnel à celui des vitesses ou des angles simultanés $\frac{d\xi}{d\psi}$ parcourus par la roue et par l'ancre; en sorte qu'on aura

$$Y = \mu P \frac{d\xi}{d\psi}$$

Or, pour trouver la valeur finie de $\frac{d\xi}{d\psi}$, il n'y a qu'à considérer que l'on a

$$ZX = b \sin \xi, \quad KZ = b \cos \xi, \quad CZ = a - b \cos \xi;$$

donc

$$r = CX = \sqrt{a^2 - 2ab \cos \xi + b^2};$$

de sorte que, comme par la nature de la courbe DB, qui est supposée connue, on doit avoir une équation entre r et z , on en aura une entre z et ξ .

De plus on a

$$\frac{XZ}{CZ} = \frac{b \sin \xi}{a - b \cos \xi} = \tan ZCX = \tan(\psi - z);$$

donc, substituant dans cette équation au lieu de z sa valeur en ξ , on aura une équation entre ξ et ψ dont la différentielle pourra être représentée par

$$d\xi = \Psi d\psi,$$

Ψ étant une fonction de ψ ; ainsi l'on aura

$$y = \mu p \Psi,$$

et, substituant ensuite $x + \varepsilon$ à la place de ψ , on aura l'équation de la courbe RX entre les coordonnées x et y .

On trouvera de même l'équation de l'autre branche TL en prenant la courbe AE à la place de la courbe DX.

20. Il est facile de voir par la seule inspection de la figure que cette espèce d'échappement peut être également à repos ou à recul; pour qu'il soit à repos, il suffira que les courbes EA, DB dégénèrent en haut en des arcs de cercles dont le centre soit C; et que ces courbures circulaires commencent aux endroits où les dents rencontrent d'abord les faces de l'échappement, ou même plus bas, mais non pas plus haut; dans tout autre cas l'échappement sera à recul.

SUR LE PROBLÈME

DE LA

DÉTERMINATION DES ORBITES DES COMÈTES

D'APRÈS TROIS OBSERVATIONS.



SUR LE PROBLÈME

DE LA

DÉTERMINATION DES ORBITES DES COMÈTES

D'APRÈS TROIS OBSERVATIONS.

[*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, années 1778 et 1783 (*).]

PREMIER MÉMOIRE.

Le fameux Problème de la détermination de l'orbite d'une Comète d'après trois observations, sur lequel Newton s'est exercé le premier et dont il ne nous a laissé que des solutions imparfaites, a occupé depuis plusieurs grands Géomètres; mais leurs efforts n'ont presque abouti jusqu'à présent qu'à varier et à simplifier à quelques égards les méthodes proposées par Newton, sans les rendre plus exactes et plus commodes pour la pratique.

Je me propose d'exposer, dans ce Mémoire, l'état de la question et le résultat des principales recherches qu'on a faites pour la résoudre.

Le Problème, considéré analytiquement, n'a point de difficulté, rien

(*) Les Recherches de Lagrange *Sur le Problème de la détermination des Orbites des Comètes* forment trois Mémoires. Les deux premiers ont été insérés dans le volume de 1778 des *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin*, le troisième dans le volume de 1783. Nous avons pensé qu'il convenait de ne pas scinder ces Recherches, et nous avons réuni le troisième Mémoire aux deux premiers.

(Note de l'Éditeur.)

n'étant plus aisé que de le ramener à deux équations algébriques entre deux inconnues. Car chaque observation de la Comète donne immédiatement la position de la droite visuelle qui joint les centres de la Terre et de la Comète; de sorte qu'en prenant les distances de la Comète à la Terre au temps des deux premières observations pour les deux inconnues du Problème, on peut déterminer algébriquement les lieux de la Comète par rapport aux lieux du Soleil qu'on suppose connus par les Tables. Ayant ainsi la position de deux points de l'orbite de la Comète pour deux instants donnés, on détermine : 1^o la position du plan de cette orbite, c'est-à-dire le lieu du nœud et l'inclinaison; 2^o les distances de la Comète au Soleil, ou les rayons vecteurs de l'orbite, avec l'angle intercepté entre ces rayons; d'où, par les propriétés connues du mouvement parabolique, on déduit aisément le paramètre de la parabole, la position de son grand axe et l'instant du passage de la Comète par son sommet ou par le périhélie; et enfin l'expression du temps écoulé entre les deux observations, expression qui, étant égale à l'intervalle observé, fournit une première équation algébrique.

On trouve ensuite une seconde équation, par le moyen de la troisième observation, en comparant le lieu observé de la Comète avec celui qu'on trouve pour le même instant d'après les propriétés du mouvement parabolique. Et l'on voit même que cette comparaison doit fournir deux équations, l'une relative à la longitude de la Comète, et l'autre à sa latitude; en sorte qu'il suffit, pour la détermination du Problème, que l'on connaisse seulement la longitude ou la latitude géométrique de la Comète au temps de la troisième observation.

Au lieu d'employer pour inconnues les deux distances de la Comète à la Terre au temps de deux observations, on pourrait prendre d'autres quantités quelconques, pourvu que ces quantités combinées avec les données déterminassent entièrement la position des deux lieux de la Comète dans son orbite autour du Soleil. On pourrait, par exemple, prendre pour inconnues les deux rayons vecteurs de l'orbite, ou les deux longitudes héliocentriques de la Comète, ou, etc.; ou enfin le lieu du nœud et l'inclinaison de l'orbite à l'écliptique, ce qui paraît au premier aspect plus

simple et plus naturel, puisque ces deux dernières quantités sont indépendantes des lieux de la Comète aux temps des observations; mais il est facile de se convaincre que ce dernier choix des inconnues rendrait le calcul plus long et plus compliqué.

Ayant ainsi réduit le Problème à deux équations algébriques entre deux inconnues, il ne s'agit plus que de traiter ces équations par les règles connues de l'Algèbre : il faudra donc éliminer d'abord une des deux inconnues et ensuite résoudre l'équation finale. Mais : 1^o les deux équations, auxquelles on parvient par l'analyse précédente, se présentent sous une forme très-compiquée et embarrassée de radicaux qu'il faudrait faire disparaître avant d'entreprendre l'élimination; 2^o cette élimination demanderait des calculs très-longes et ferait monter l'équation finale à un degré si élevé qu'il serait absolument impossible d'en tirer aucun parti.

Tels sont les obstacles qui rendent la méthode directe tout à fait impraticable et qui ont forcé les Géomètres à recourir aux méthodes d'approximation. Mais l'approximation même présente de grandes difficultés; car, pour pouvoir l'employer avec succès, il faut connaître d'avance les premières valeurs approchées des inconnues dont on cherche la valeur exacte; or dans le Problème des Comètes rien ne peut nous faire connaître *a priori* ces valeurs approchées dont il faut partir; ainsi il ne reste qu'à tâcher de simplifier le Problème par le moyen de quelque supposition convenable; et celle qui se présente le plus naturellement est de regarder la portion de l'orbite décrite dans l'intervalle des trois observations comme rectiligne et parcourue d'un mouvement uniforme. Cette hypothèse doit même paraître d'autant plus plausible qu'elle a été pendant longtemps l'hypothèse favorite des Astronomes, pour le mouvement des Comètes, avant que Newton eût démontré que ces astres étaient soumis aux lois générales du mouvement des planètes, et que leurs orbites étaient à très-peu près paraboliques. Le grand avantage de cette hypothèse est de réduire la recherche des vrais lieux de la Comète, au temps des observations, à des équations du premier degré; si l'on n'emploie que des observations de la longitude il en faut quatre, ainsi qu'on le voit dans le Problème LVI de l'*Arithmétique universelle*; mais en tenant aussi

compte des latitudes, trois observations suffisent pour la solution du Problème; et, ce qu'il y a de singulier, c'est que si l'on prend pour inconnues le lieu du nœud et l'inclinaison de l'orbite, on tombe dans une équation finale du neuvième degré, au lieu qu'en prenant pour inconnues deux distances de la Comète à la Terre, on parvient directement à des équations du premier degré, comme on le voit par la solution que M. Bouguer a donnée le premier de ce Problème dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1733.

Il est visible que l'hypothèse dont il s'agit s'écartera d'autant plus de la vérité que l'arc parcouru par la Comète dans l'intervalle des observations sera plus grand; mais aussi, par la raison contraire, elle doit s'en approcher d'autant plus que cet arc sera moindre; ainsi en employant des observations peu distantes entre elles, il semble qu'on pourrait du moins trouver de cette manière les premières valeurs approchées des inconnues du Problème. Mais malheureusement ce moyen si simple d'arriver à ce but est trop défectueux pour qu'on puisse s'en servir sans s'exposer à de très-grandes erreurs. C'est ce que quelques Géomètres ont déjà remarqué et que je me propose de prouver rigoureusement dans le cours de ce Mémoire.

L'hypothèse dont nous venons de parler en renferme réellement deux, l'une que la portion de l'orbite de la Comète soit rectiligne, l'autre qu'elle soit parcourue d'un mouvement uniforme; voilà pourquoi cette hypothèse seule suffit pour déterminer tout d'un coup les deux inconnues du Problème. Si l'on n'adoptait qu'une partie de cette hypothèse, on ne pourrait alors déterminer qu'une seule inconnue; et il faudrait chercher l'autre, ou par la résolution directe d'une équation fort élevée, ou par plusieurs fausses positions.

Dans la solution que Newton propose à la fin de son petit *Traité De systemate mundi*, il regarde l'orbite de la Comète comme rectiligne, mais il suppose que les parties décrites dans les deux intervalles entre les trois observations soient parcourues avec les vitesses réelles que la Comète doit avoir aux temps de la première et de la seconde observation; vitesses qui par la théorie du mouvement parabolique sont en raison inverse des ra-

cines des distances de la Comète au Soleil aux temps de ces observations; et il emploie la méthode de fausse position pour déterminer une des distances de la Comète à la Terre.

Mais si l'on évite, par ce moyen, une partie de l'inexactitude attachée à l'hypothèse du mouvement rectiligne et uniforme, il y reste néanmoins encore une trop grande source d'erreur pour qu'on puisse l'employer avec succès. C'est apparemment ce qui a engagé Newton à donner une autre solution du Problème des Comètes, entièrement indépendante de l'hypothèse dont il s'agit, et dans laquelle on aurait égard en même temps à la courbure de l'arc parabolique et à la variation du mouvement.

Telle est celle qu'on lit à la fin du troisième Livre des *Principes*, et dans laquelle le génie inventeur ne brille pas moins que dans le reste de cet admirable Ouvrage.

Newton y donne d'abord un moyen de couper la corde qui sous-tend l'arc parabolique parcouru entre la première et la troisième observation, de manière que les parties soient à très-peu près proportionnelles aux aires parcourues, et par conséquent aux temps employés par la Comète à décrire deux portions quelconques de cet arc; et il remarque que cette proportion devient rigoureusement exacte, lorsque le point qui sépare les deux parties de l'arc tombe au sommet du diamètre qui partage la corde donnée en deux également. Il détermine ensuite la vitesse avec laquelle la même corde pourrait être parcourue uniformément dans un temps égal à celui que la Comète emploie à décrire l'arc; enfin il détermine la force accélératrice qui dans le même temps ferait décrire, d'un mouvement uniformément accéléré, une ligne égale à la flèche du même arc, comprise entre le sommet de l'arc et la corde. Newton n'emploie dans ces déterminations d'autres données que la distance du sommet de l'arc au foyer de la parabole, et la longueur de la corde, ou celle de la flèche; de sorte que, comme par les propriétés de la parabole la flèche est égale au carré de la corde divisée par seize fois la distance du sommet de l'arc au foyer, et que cette distance plus la flèche est égale à la demi-somme des distances des extrémités du même arc au foyer, on peut par le moyen de ces Théorèmes déterminer immédiatement le temps em-

ployé à décrire l'arc parabolique, par la corde qui sous-tend cet arc, et par la somme des rayons vecteurs qui répondent aux deux extrémités de l'arc. C'est ce que M. Lambert a fait depuis dans son beau *Traité De orbitis Cometarum*, où il est parvenu à un des Théorèmes les plus élégants et les plus utiles qui aient été trouvés jusqu'ici sur ce sujet, et qui a en même temps l'avantage de s'appliquer aussi aux orbites elliptiques.

Pour en revenir à la solution de Newton, voici comment il la déduit des principes qu'il a posés. Il choisit trois observations de la Comète, dont les intervalles soient peu différents, afin qu'au temps de la seconde observation la Comète se soit trouvée peu éloignée du sommet de l'arc décrit entre la première et la troisième. Il mène, dans un plan qu'il regarde comme celui de l'écliptique, trois droites qui soient les projections des rayons visuels tirés de la Terre à la Comète dans les trois observations, et dont la position est par conséquent connue. Il prend dans la droite qui répond à la seconde observation un point arbitraire pour la projection du lieu de la Comète; de ce point il coupe, dans la droite qui va au Soleil, une partie égale à la projection de la flèche qui doit sous-tendre l'arc parcouru dans l'intervalle donné entre la première et la troisième observation; et par l'extrémité de cette partie coupée il mène une droite dont les parties, coupées par les deux lignes qui sont les projections des rayons visuels dans la première et dans la troisième observation, soient entre elles comme les intervalles entre ces observations et la seconde. Il est visible que cette droite serait la projection de la corde qui sous-tend le véritable arc parabolique décrit par la Comète depuis la première jusqu'à la troisième observation : 1^o si le point pris arbitrairement pour le lieu de la Comète dans l'écliptique au temps de la deuxième observation était le véritable; 2^o si la Comète au temps de cette observation s'était trouvée précisément au sommet de l'arc; 3^o si la corde qui sous-tend cet arc était coupée par le rayon vecteur du sommet en deux parties exactement proportionnelles aux temps employés à décrire les deux parties de l'arc qui sont de part et d'autre du sommet. Comme ces deux dernières conditions ont lieu à peu près, Newton se sert de cette première détermination de la corde pour en trouver une plus exacte, au

moyen du Théorème qu'il a donné pour couper la corde dans une raison très-approchante de celle des temps.

Connaissant ainsi la longueur et la position de la corde projetée, il en déduit, au moyen des latitudes observées, celles de la véritable corde dans l'orbite, et il compare cette longueur avec celle que la même corde doit avoir pour répondre au temps écoulé entre la première et la troisième observation. Si ces deux quantités s'accordent, c'est une marque que les déterminations précédentes sont exactes; et il n'y a plus qu'à décrire l'orbite parabolique par la condition qu'elle passe par les deux extrémités de la corde; ce qui est un Problème déterminé et résoluble par les principes que Newton a établis dans le premier Livre. Mais comme il est presque impossible que cet accord ait lieu dans la première opération, Newton prescrit de réitérer la même opération en prenant deux différents points pour le lieu de la Comète dans l'écliptique au temps de la seconde observation; ensuite il coupe, dans les cordes projetées, des parties respectivement égales aux erreurs des opérations, et faisant passer un arc de cercle par les points correspondants, il prend l'intersection de cet arc de cercle avec la droite qui est la projection du rayon visuel dans la première ou dans la troisième observation, pour le vrai lieu de la Comète dans l'écliptique au temps de cette observation. De cette manière Newton détermine les lieux de la Comète dans l'écliptique au temps de la première et de la dernière observation, et de là il déduit ensuite par un calcul direct tous les éléments de l'orbite.

Ce procédé de Newton serait sans doute plus exact, si au lieu d'un cercle il faisait passer une ligne parabolique par les points correspondants aux erreurs des différentes opérations; mais il faudrait alors avoir un plus grand nombre d'erreurs, et par conséquent multiplier davantage les opérations, ce qui allongerait considérablement la recherche dont il s'agit. D'ailleurs Newton ne regarde encore ces résultats que comme des approximations, et il enseigne ensuite à les corriger par des doubles parties proportionnelles.

Telle est en substance la méthode de Newton, que la plupart de ceux qui ont traité le Problème des Comètes après lui ont passée sous silence,

ou n'ont regardée que comme une méthode graphique peu exacte et d'un usage difficile. Par le détail où nous venons d'entrer sur cette méthode, il est facile de juger que les difficultés qu'elle renferme naissent du fond même du sujet, et qu'on ne saurait employer plus de sagacité et d'adresse pour les surmonter. Le but de Newton est de réduire le Problème à une seule inconnue, et il y parvient par la considération de la corde qui sous-tend l'arc parcouru entre la première et la troisième observation, et par le moyen qu'il donne pour la partager en deux parties proportionnelles aux aires paraboliques correspondantes. Si Newton avait voulu se contenter de supposer que le rayon vecteur qui répond à la seconde observation partage la corde en parties proportionnelles aux intervalles de temps entre cette observation et les deux autres, sa solution serait devenue beaucoup plus simple; mais il a peut-être regardé cette supposition comme trop peu exacte, et il ne s'en est servi que pour trouver une première approximation, qu'il a soin de corriger aussitôt.

Cependant, comme dans toute cette Recherche il ne s'agit à proprement parler que de trouver des valeurs approchées qu'il est facile de corriger ensuite, il paraît qu'on peut s'en tenir à cette supposition, qui revient dans le fond à prendre, à la place des vrais secteurs paraboliques décrits entre les deux premières et les deux dernières observations, les secteurs triangulaires formés par les mêmes rayons vecteurs et par les cordes des arcs parcourus entre ces observations; car il est aisé de voir que ces secteurs sont exactement en raison des parties de la corde qui sous-tend l'arc entier, décrit entre la première et la troisième observation.

Cette remarque importante est due à M. Lambert, qui en a fait le plus heureux usage dans son Traité déjà cité. Mais, avant de parler de cet Ouvrage, je dois faire mention de celui que M. Euler a donné en 1744 sous le titre de *Theoria motus Planetarum et Cometarum*, et qui paraît être le premier où le Problème des Comètes ait été traité analytiquement.

M. Euler suppose d'abord que l'arc parcouru par la Comète dans l'intervalle des observations est très-petit, moyennant quoi il prouve facilement, par la théorie des forces centrales, que dans les points intermé-

diaires la corde de l'arc est coupée par le rayon vecteur en raison des temps, et il donne une formule assez simple, mais seulement approchée, pour exprimer la flèche correspondante.

D'après ces principes et en prenant pour inconnue la distance de la Comète à la Terre dans la seconde observation, il détermine la position et la longueur de la corde qui sous-tend l'arc parcouru entre la première et la troisième observation; par conséquent il trouve les lieux de la Comète dans son orbite aux temps de ces observations; d'où il conclut ensuite tous les éléments de l'orbite.

Jusqu'ici la solution de M. Euler est analogue à celle de Newton; mais, pour déterminer la valeur de l'inconnue, M. Euler demande une quatrième observation, et, en comparant le lieu donné par cette observation avec celui que la Comète doit avoir dans le même instant dans l'orbite trouvée, il parvient à la détermination dont il s'agit par la méthode ordinaire de fausse position.

Cette manière de trouver la valeur de l'inconnue est peut-être plus exacte que celle de Newton, surtout si, comme M. Euler le prescrit, on choisit une observation assez distante des premières. Mais en même temps on doit avouer qu'elle est moins directe, puisqu'on y emploie plus de données qu'il ne faut pour la solution complète du Problème.

L'hypothèse de la proportionnalité des parties de la corde aux temps correspondants est aussi la base de la solution que M. Lambert a donnée du Problème des Comètes dans le Traité déjà cité; mais deux choses distinguent surtout cette solution: l'une, c'est le beau Théorème que M. Lambert y donne pour exprimer le temps employé à parcourir un arc quelconque, au moyen de la corde qui sous-tend cet arc et de la somme des deux rayons vecteurs qui répondent aux extrémités du même arc, Théorème qui, par sa simplicité et par sa généralité, doit être regardé comme une des plus ingénieuses découvertes qui aient été faites dans la Théorie du système du monde; l'autre, c'est le moyen que M. Lambert a imaginé pour se dispenser de tenir compte de la flèche de l'arc parcouru, en considérant la projection des lieux de la Terre et de la Comète sur un plan perpendiculaire à celui dans lequel la Terre, le Soleil et la Comète

se trouvent au temps de la seconde observation, et qui est déterminé par les deux lignes qui vont de la Terre au Soleil et à la Comète. Car il est visible que la projection du rayon vecteur de la Comète sur le plan dont il s'agit doit se confondre avec la projection de la ligne visuelle menée de la Terre à la Comète et dont la position est connue par l'observation. D'ailleurs il est clair que si la corde est coupée par le rayon vecteur qui répond à la seconde observation en parties proportionnelles aux intervalles de temps, la projection de cette corde sur un plan quelconque doit être coupée de même par la projection du rayon vecteur. Donc la projection de la corde sur le plan dont nous venons de parler sera coupée en parties proportionnelles aux temps, par la projection de la ligne menée de la Terre à la Comète dans la seconde observation. Il s'ensuit de là qu'il n'y a qu'à prendre pour inconnue la partie de cette ligne projetée qui est comprise entre le lieu de la Terre et le point d'intersection de la corde projetée, et mener par ce point dans le plan de projection une droite telle, qu'elle soit coupée par les lignes visuelles menées de la Terre à la Comète dans la première et dans la troisième observation, et projetées également sur le même plan, de manière que les parties soient proportionnelles aux temps écoulés entre les trois observations. Cette droite sera la projection de la corde, dont on connaîtra par conséquent la position et la grandeur. De là on trouvera les valeurs des deux rayons vecteurs qui joignent cette corde, et enfin le temps que la Comète a dû employer à parcourir l'arc sous-tendu par la même corde. Ce temps étant comparé avec l'intervalle entre la première et la troisième observation donnera une équation qui servira à déterminer l'inconnue.

M. Lambert trouve que, lorsque l'arc parcouru est assez petit, l'équation dont il s'agit ne monte qu'au sixième degré; mais nous verrons plus bas qu'il est impossible d'abaisser l'équation finale au-dessous du septième degré, quand même on supposerait les intervalles écoulés entre les trois observations infiniment petits. Ayant examiné d'où peut venir l'inexactitude de ce résultat, j'ai reconnu que c'est uniquement parce que M. Lambert prend la distance du point du milieu de la corde au Soleil pour la demi-somme des distances des extrémités de la même corde au

Soleil, c'est-à-dire pour la demi-somme des rayons vecteurs; ce qui n'est pas rigoureusement exact. Il est vrai que l'erreur doit être d'autant moindre que la corde est plus petite, de sorte qu'il semble qu'elle devrait disparaître dans l'infiniment petit; mais comme cette erreur a toujours une proportion finie avec les autres quantités qui deviennent aussi infiniment petites et d'où dépend la solution du Problème, il n'est pas plus permis de la négliger, qu'il ne le serait de négliger les carrés des différences premières dans les équations différentielles du second ordre.

Au reste M. Lambert ne fait point usage de cette équation approchée, ni même de l'équation générale, pour déterminer l'inconnue. Il abandonne au contraire l'Analyse et lui substitue une construction dans laquelle, au moyen de la description d'une courbe qu'il fait passer par différents points déterminés par plusieurs opérations successives, il détermine les vrais lieux de la Comète et les éléments de son orbite; ensuite il corrige ces valeurs approchées par la méthode différentielle connue. On trouve cette méthode plus détaillée et appliquée en même temps à différents exemples dans la troisième Partie des *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik*, etc.

Ce que M. Lambert n'a point fait a été entrepris depuis, avec succès, par M. Tempelhoff dans la Pièce qui vient de partager le prix de l'Académie. En partant du même principe de la proportionnalité des parties de la corde aux temps, et en employant le Théorème de M. Lambert pour déterminer le temps par la corde et par la somme des rayons vecteurs, M. Tempelhoff parvient à une équation finale qui ne contient qu'une seule inconnue et qu'il résout par la méthode ordinaire de fausse position. L'application qu'il a faite de sa solution à la Comète de 1769 en prouve la bonté et l'utilité.

Les découvertes de M. Lambert, dont nous venons de rendre compte, ne sont pas les seules dont la Théorie des Comètes lui ait obligation. Ce Savant a donné depuis dans le volume de l'Académie pour l'année 1771 un moyen très-ingénieux pour trouver directement les distances de la Comète au Soleil dans la seconde observation, en considérant la déviation du lieu apparent de la Comète dans cette observation, par rapport

au grand cercle de sphère qui passerait par les deux lieux apparents de la première et de la troisième observation. M. Lambert remarque que cette déviation est l'effet combiné de la courbure de l'arc parcouru par la Terre et de celle de l'arc parcouru par la Comète dans le même temps. Or la première courbure est connue; la seconde l'est aussi à très-peu près par la théorie des forces centrales, du moins tant que l'arc est supposé fort petit; ainsi l'on peut former une équation qui servira à déterminer le vrai lieu de la Comète. M. Lambert réduit le Problème à trouver sur une droite donnée de position un point tel, que la partie déterminée par ce point fasse avec le cube de la distance de ce même point à un autre point, donné hors de la droite dont il s'agit, un solide donné; et il est facile de se convaincre, en réduisant ce Problème au calcul, qu'il conduit à une équation du septième degré; ce qui confirme ce que nous avons déjà avancé plus haut touchant la limite du degré de l'équation finale. On trouve un exemple de cette méthode dans les *Éphémérides* de 1777.

Tels sont les principaux pas que l'on a faits jusqu'ici dans la solution du Problème des Comètes. Comme la solution directe et rigoureuse est impossible, du moins dans l'état d'imperfection où est encore la Théorie des équations, le seul objet qu'on puisse se proposer est de résoudre le Problème par approximation. On ne manque pas de méthodes pour corriger par des approximations successives les premières valeurs trouvées. Ainsi la difficulté ne consiste qu'à parvenir à une première approximation, et c'est le but des différentes méthodes dont nous venons de rendre compte. Mais ces méthodes, quelque ingénieuses qu'elles soient, me paraissent laisser encore beaucoup à désirer. Car : 1° ces méthodes ne sont pas assez directes, n'étant pas tirées des principes de la question envisagée d'une manière générale et rigoureuse, mais plutôt de considérations particulières et de suppositions précaires; 2° elles sont assez compliquées et ne peuvent donner que des résultats incertains, puisqu'on n'y apprécie point l'effet des erreurs qui doivent naître des suppositions sur lesquelles elles sont fondées. La seule circonstance, d'où l'on puisse déduire une première approximation, est que les observations soient peu distantes entre elles; il faut donc faire voir *a priori* et par la nature même des

équations fondamentales du Problème, comment cette supposition seule peut servir à trouver des valeurs approchées des inconnues; ensuite il faut encore assigner des limites entre lesquelles on soit assuré que doivent tomber les véritables valeurs. Ce n'est qu'en observant ces conditions qu'on peut se flatter de parvenir à une solution satisfaisante du Problème des Comètes; et c'est l'objet que l'Académie avait eu en vue en proposant ce Problème pour le sujet du dernier prix de Mathématiques. Quoique les deux Pièces couronnées et celles qui ont eu l'accessit aient répandu beaucoup de nouvelles lumières sur cette question, il paraît néanmoins qu'elle n'y a pas été envisagée sous le point de vue dont je viens de parler, et qu'on peut à cet égard la traiter encore comme un sujet entièrement nouveau; ce sera l'objet d'un autre Mémoire.

DEUXIÈME MÉMOIRE.

Après avoir donné dans le Mémoire précédent une analyse succincte des différentes méthodes qui ont été proposées jusqu'ici pour la solution du Problème de la détermination des orbites des Comètes d'après trois observations, et fait voir ce que ces méthodes laissent encore à désirer, je me propose dans celui-ci de rendre compte des tentatives que j'ai faites de mon côté pour parvenir à une méthode directe et analytique, qui donne d'abord, et sans tâtonnement, les premières valeurs des inconnues du Problème, et par laquelle on puisse ensuite corriger ces valeurs et les rendre aussi exactes qu'on voudra. Une telle méthode est peut-être le seul but auquel l'état actuel de l'Analyse permette d'atteindre, dans la solution du Problème qui fait l'objet de ces recherches.

1. Je rapporte le lieu de la Comète dans son orbite au plan de l'écliptique et à la ligne des équinoxes, par le moyen de trois coordonnées rectangles x , y , z , qui aient leur origine dans le centre du Soleil; x sera l'abscisse prise dans la ligne de l'équinoxe du printemps; y sera la pre-

mière ordonnée perpendiculaire à x dans le plan de l'écliptique et dirigée vers l'orient; z sera la seconde ordonnée perpendiculaire au plan même de l'écliptique, et du côté du pôle boréal. On prendra ces différentes lignes négatives lorsqu'elles auront des directions contraires à celles de l'hypothèse.

Il est visible que la distance de la Comète au Soleil ou le rayon vecteur de son orbite, que je désignerai par r , sera exprimé par

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Soient de plus X, Y l'abscisse et l'ordonnée du lieu de la Terre dans l'écliptique rapportées aux mêmes axes que les x et y ; on aura de même

$$\sqrt{X^2 + Y^2}$$

pour la distance de la Terre au Soleil, ou pour le rayon vecteur de l'orbite de la Terre que je désignerai par R .

Enfin soient ξ, η, ζ les trois coordonnées rectangles du lieu apparent de la Comète relativement au centre de la Terre, ξ l'abscisse prise depuis le centre de la Terre dans une droite parallèle à celle des équinoxes, η l'ordonnée perpendiculaire à ξ dans le plan de l'écliptique, et ζ l'ordonnée perpendiculaire à l'écliptique; on aura pareillement

$$\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

pour la distance de la Comète à la Terre, que je désignerai par ρ .

Et il est facile de concevoir qu'on aura

$$x = X + \xi, \quad y = Y + \eta, \quad z = \zeta.$$

Soit maintenant A la longitude de la Terre au même instant, α la longitude géocentrique de la Comète, et β sa latitude géocentrique que nous supposerons boréale; l'angle A sera connu par la Théorie du Soleil, et les angles α et β le seront par l'observation.

Il est visible qu'on aura

$$X = R \cos A, \quad Y = R \sin A;$$

ensuite on aura

$$\xi = \rho \cos \alpha \cos \beta, \quad \eta = \rho \sin \alpha \cos \beta, \quad \zeta = \rho \sin \beta.$$

Ces formules sont si connues que je ne crois pas devoir m'arrêter à les démontrer.

2. Faisant donc ces substitutions, on aura

$$x = R \cos A + \rho \cos \alpha \cos \beta,$$

$$y = R \sin A + \rho \sin \alpha \cos \beta,$$

$$z = \rho \sin \beta,$$

d'où l'on voit que les trois coordonnées x, y, z ne dépendent que d'une seule inconnue ρ , qui est la distance de la Comète à la Terre. C'est à quoi se réduisent les données que chaque observation peut fournir. Le reste des données nécessaires pour la solution du Problème dépend de la figure parabolique de l'orbite de la Comète et de l'intervalle de temps écoulé entre les observations.

3. Pour mettre dans nos calculs le plus d'ordre et de clarté qu'il est possible, nous désignerons toujours les mêmes quantités par les mêmes lettres dans chaque observation; mais nous marquerons celles qui se rapportent à la première observation par un trait, celles qui se rapportent à la seconde par deux traits, et ainsi de suite. De cette manière x', y', z' seront les coordonnées rectangles du lieu de la Comète dans la première observation, ρ' sa distance à la Terre, α', β' sa longitude et sa latitude géocentriques, etc.

4. Cela posé, avant de faire entrer dans le calcul la considération de la parabole, nous commencerons par ne considérer que la condition qui exige que tous les lieux de la Comète soient dans un même plan passant par le Soleil. La manière la plus simple et la plus directe d'exprimer cette condition analytiquement est de considérer l'équation générale d'un plan passant par l'origine des coordonnées, qu'on sait être de cette forme

$$z = By - Cx,$$

et dans laquelle B et C sont deux constantes dépendantes uniquement de la position du plan; en sorte que si l'on nomme i l'inclinaison du plan dont il s'agit avec le plan des x et y , c'est-à-dire l'inclinaison de l'orbite de la Comète, et h l'angle que l'intersection de ces deux plans fait avec l'axe des x , c'est-à-dire la longitude des nœuds, on a

$$B = \tan i \cos h, \quad C = \tan i \sin h.$$

Substituant donc dans cette équation les valeurs de x , y , z du n° 2, on aura

$$\rho \sin \beta = BR \sin A + B\rho \sin \alpha \cos \beta - CR \cos A - C\rho \cos \alpha \cos \beta,$$

d'où l'on tire sur-le-champ

$$\rho = \frac{BR \sin A - CR \cos A}{\sin \beta - B \sin \alpha \cos \beta + C \cos \alpha \cos \beta};$$

et, substituant cette valeur de ρ dans les mêmes expressions de x , y , z , on aura

$$x = R \frac{\cos A \sin \beta - B \sin(\alpha - A) \cos \beta}{\sin \beta - B \sin \alpha \cos \beta + C \cos \alpha \cos \beta},$$

$$y = R \frac{\sin A \sin \beta - C \sin(\alpha - A) \cos \beta}{\sin \beta - B \sin \alpha \cos \beta + C \cos \alpha \cos \beta},$$

$$z = R \frac{B \sin A \sin \beta - C \cos A \sin \beta}{\sin \beta - B \sin \alpha \cos \beta + C \cos \alpha \cos \beta}.$$

Si donc l'on a trois observations d'une Comète, on aura, en marquant seulement toutes les lettres d'un trait pour la première, de deux pour la seconde et de trois pour la troisième, à l'exception des quantités B et C qui sont les mêmes pour toutes les observations d'une même Comète, on aura, dis-je, les valeurs des coordonnées x', y', z' ; x'', y'', z'' ; x''', y''', z''' , pour les trois lieux de la Comète dans son orbite, exprimées par des quantités toutes connues et par les seules inconnues B, C.

Pour déterminer ces inconnues, il faudra employer la considération du temps écoulé entre les observations; or si l'on nomme θ' le temps écoulé entre la première et la seconde observation, ce temps étant exprimé par l'arc du mouvement moyen du Soleil réduit en parties du rayon, et 2ω

l'angle parcouru par la Comète autour du Soleil dans le même temps, on a pour la parabole la formule (voyez plus bas le n° 16)

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \theta' = (r' + r'' + \sqrt{r' r''} \cos \omega) \sqrt{r' + r'' - 2 \sqrt{r' r''} \cos \omega}.$$

Or on a

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}, \quad r'' = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2},$$

et l'on trouve facilement (voyez le n° 24)

$$\cos 2\omega = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{r'r''},$$

et par conséquent

$$\sqrt{r'r''} \cos \omega = \sqrt{\frac{r'r'' + x'x'' + y'y'' + z'z''}{2}},$$

à cause de

$$\cos \omega = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\omega}{2}};$$

done, substituant ces valeurs dans l'équation précédente, et mettant ensuite à la place de x', y', z' ; x'', y'', z'' leurs valeurs en B et C, on aura une équation dans laquelle il n'entrera que ces deux inconnues.

On trouvera une pareille équation en considérant le temps écoulé entre la seconde observation et la troisième; et l'on pourra en avoir une troisième en comparant la première et la troisième observation; mais comme il n'y a que deux inconnues B et C, deux équations suffisent pour les déterminer; et c'est à cette détermination qu'est maintenant réduite toute la difficulté du Problème.

Mais pour peu qu'on considère la forme des équations qu'il s'agit de résoudre, on verra aisément que la difficulté dont nous venons de parler est absolument insurmontable, par les méthodes connues; car quoique ces équations soient algébriques, elle sont néanmoins si compliquées que si l'on voulait prendre la peine de les réduire à une forme rationnelle, et ensuite d'éliminer une des deux inconnues, on parviendrait, après des calculs immenses, à une équation finale d'un degré très-élevé, dont on ne pourrait tirer aucun parti.

Cette manière donc d'envisager le Problème des Comètes, quoiqu'elle paraisse la plus directe et la plus simple, est néanmoins celle qui promet le moins de succès; et cela, non-seulement à l'égard de la solution rigoureuse, mais aussi à l'égard d'une solution seulement approchée, puisque rien ne saurait faire connaître d'avance les valeurs approchées de l'inclinaison et du lieu du nœud de la Comète, qui sont les deux inconnues qui entrent dans les équations à résoudre.

Si pour parvenir à ces valeurs on voulait faire usage de l'hypothèse du mouvement rectiligne et uniforme dans l'intervalle des trois observations, ainsi qu'en ont usé plusieurs Auteurs, alors il n'y aurait qu'à considérer que dans cette hypothèse les différences des coordonnées

$$x'' - x', \quad y'' - y', \quad z'' - z'$$

seraient aux différences

$$x'' - x', \quad y'' - y', \quad z'' - z'$$

dans une même raison, qui est celle de l'intervalle écoulé entre les deux premières observations à l'intervalle écoulé entre les deux dernières. De sorte qu'en nommant μ cette raison qui est connue par les observations, on aura

$$x'' - x' = \mu(x'' - x'),$$

et par conséquent

$$x' - (1 + \mu)x'' + \mu x'' = 0;$$

et de même

$$y' - (1 + \mu)y'' + \mu y'' = 0, \quad z' - (1 + \mu)z'' + \mu z'' = 0.$$

Il n'y aura donc qu'à substituer dans deux de ces équations (la troisième étant déjà une suite des deux autres, à cause que nous avons précédemment fait entrer dans le calcul la considération de l'orbite plane) les valeurs trouvées ci-dessus de $x', y', \dots$, et l'on aura deux équations rationnelles en B et C, qui étant délivrées des fractions monteront chacune au troisième degré; en sorte que l'équation finale montera généralement parlant au neuvième.

Il est possible que cette équation finale s'abaisse d'elle-même à un degré moindre, et même cela paraît nécessaire, puisqu'on sait d'ailleurs que le Problème n'est que du premier degré; ce qu'on peut aussi démontrer par nos formules, en prenant pour inconnues les distances ρ', ρ'', ρ''' de la Comète à la Terre aux temps des trois observations.

En effet, si dans les trois équations ci-dessus on substitue pour $x', y', \dots$ les premières valeurs du n° 2, qui sont indépendantes de la considération du plan de l'orbite, on aura trois équations linéaires entre les trois inconnues ρ', ρ'', ρ''' , par lesquelles on pourra déterminer ces inconnues; de là on aura les valeurs de $x', y', z'; x'', y'', z''$, et les deux équations

$$z' = By' - Cx', \quad z'' = By'' - Cx''$$

donneront ensuite, si l'on veut, les valeurs de B et de C qui étaient les inconnues cherchées d'abord.

Mais nous verrons plus bas que l'hypothèse sur laquelle est fondée cette solution n'est point admissible, même en supposant les intervalles entre les observations infiniment petits; de sorte qu'on ne peut pas même employer cette solution pour avoir les premières valeurs approchées des inconnues.

5. Puisque la manière précédente de traiter le Problème des Comètes, en y prenant pour inconnue la position du plan de l'orbite, n'est point propre à fournir une solution approchée; que, même dans le cas le plus simple, elle conduit à des équations beaucoup plus compliquées qu'il ne faut, il s'ensuit qu'il est nécessaire de s'y prendre autrement pour réduire le Problème en équations; et comme la condition, que les trois lieux de la Comète soient dans un même plan avec le Soleil, est la plus simple de toutes celles que la question renferme, il paraît naturel de commencer par y satisfaire; mais il faudra employer pour cela d'autres moyens que ceux dont on a fait usage plus haut.

Je considère donc que si l'on désigne par t et u l'abscisse et l'ordonnée de l'orbite de la Comète, prises dans le plan de cette orbite et ayant leur origine au centre du Soleil, et qu'on cherche à en déduire les coordonnées

nées x, y, z dont l'origine est pareillement au centre du Soleil, on trouvera des expressions de cette forme

$$x = at + bu, \quad y = ct + eu, \quad z = ft + gu,$$

les coefficients a, b, c, e, f, g étant constants et ne dépendant que de la position du plan de l'orbite par rapport au plan des x et y , et de la position de l'axe des abscisses t par rapport à l'axe des abscisses x .

Nous nous dispenserons ici de donner la démonstration de ces formules, qui doit être très-facile pour quiconque est tant soit peu versé dans l'Analyse des courbes; nous nous contenterons seulement de remarquer que comme, par l'hypothèse, la distance de la Comète au Soleil doit être exprimée par $\sqrt{t^2 + u^2}$, il faudra que l'on ait

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + u^2;$$

par conséquent

$$(at + bu)^2 + (ct + eu)^2 + (ft + gu)^2 = t^2 + u^2,$$

équation qui doit être identique, et d'où l'on tire par conséquent ces trois déterminations

$$a^2 + c^2 + f^2 = 1, \quad b^2 + e^2 + g^2 = 1, \quad ab + ce + fg = 0.$$

Il ne restera donc plus parmi les six constantes a, b, c, e, f, g , que trois indéterminées; ce seront celles qui dépendent de la position de la ligne des nœuds de l'orbite, de son inclinaison et de l'angle de l'axe des t avec la ligne des nœuds; mais il nous suffira, pour le présent, de considérer les formules précédentes sous la forme où elles se présentent.

6. On aura donc, dans chaque observation, trois équations analogues à celles qu'on vient de donner, les coefficients $a, b, c, \dots$ étant partout les mêmes.

Ainsi, pour trois observations différentes, on aura d'abord ces trois équations

$$x' = at' + bu', \quad x'' = at'' + bu'', \quad x''' = at''' + bu''',$$

d'où l'on peut éliminer a et b .

Cette élimination faite, et les termes étant ordonnés par rapport à x' , x'' , on aura l'équation

$$(t''u' - t'u'')x' - (t''u' - t'u'')x'' + (t'u' - t'u'')x''' = 0.$$

On aura de même ces trois autres équations

$$y' = ct' + eu', \quad y'' = ct'' + eu'', \quad y''' = ct''' + eu''',$$

d'où, éliminant c et e , on aura

$$(t''u' - t'u'')y' - (t''u' - t'u'')y'' + (t'u' - t'u'')y''' = 0;$$

enfin on aura aussi

$$z' = ft' + gu', \quad z'' = ft'' + gu'', \quad z''' = ft''' + gu''',$$

d'où l'on tirera pareillement

$$(t''u' - t'u'')z' - (t''u' - t'u'')z'' + (t'u' - t'u'')z''' = 0.$$

7. Donc, si l'on fait, pour abrégér,

$$t''u' - t'u'' = L, \quad t''u' - t'u'' = M, \quad t'u' - t'u'' = N,$$

on aura ces trois équations semblables

$$Nx' - Mx'' + Lx''' = 0, \quad Ny' - My'' + Ly''' = 0, \quad Nz' - Mz'' + Lz''' = 0.$$

Qu'on substitue dans ces équations les valeurs de x', y', z' en ρ' , celles de x'', y'', z'' en ρ'' , et enfin celles de x''', y''', z''' en ρ''' , données par les formules du n° 2, en marquant successivement toutes les lettres d'un trait, ou de deux, ou de trois, pour les rapporter à la première observation, à la seconde, ou à la troisième; on aura, comme l'on voit, trois équations linéaires en ρ', ρ'', ρ''' , par lesquelles on pourra déterminer ces trois quantités. De sorte que le Problème serait résolu si l'on connaissait les valeurs des trois quantités L, M, N , ou seulement leurs rapports, puisqu'en divisant les trois équations par L , il ne s'y trouvera que les deux quantités $\frac{M}{L}, \frac{N}{L}$.

8. En effet on aura, par les substitutions dont il s'agit, ces trois équations

$$N\rho' \cos \alpha' \cos \beta' - M\rho'' \cos \alpha'' \cos \beta'' + L\rho''' \cos \alpha''' \cos \beta''' \\ + NR' \cos A' - MR'' \cos A'' + LR''' \cos A''' = 0,$$

$$N\rho' \sin \alpha' \cos \beta' - M\rho'' \sin \alpha'' \cos \beta'' + L\rho''' \sin \alpha''' \cos \beta''' \\ + NR' \sin A' - MR'' \sin A'' + LR''' \sin A''' = 0,$$

$$N\rho' \sin \beta' - M\rho'' \sin \beta'' + L\rho''' \sin \beta''' = 0.$$

Qu'on multiplie la première par $\sin \alpha''$ et qu'on en retranche la seconde multipliée par $\cos \alpha''$, on aura

$$N\rho' \sin(\alpha'' - \alpha') \cos \beta' - M\rho'' \sin(\alpha'' - \alpha'') \cos \beta'' \\ + NR' \sin(\alpha'' - A') - MR'' \sin(\alpha'' - A'') + LR''' \sin(\alpha'' - A''') = 0.$$

Qu'on multiplie encore la première par $\cos \alpha''$ et qu'on y ajoute la seconde multipliée par $\sin \alpha''$, on aura

$$N\rho' \cos(\alpha'' - \alpha') \cos \beta' - M\rho'' \cos(\alpha'' - \alpha'') \cos \beta'' + L\rho''' \cos \beta''' \\ + NR' \cos(\alpha'' - A') - MR'' \cos(\alpha'' - A'') + LR''' \cos(\alpha'' - A''') = 0.$$

Qu'on multiplie maintenant celle-ci par $\sin \beta''$ et qu'on la retranche de la troisième multipliée par $\cos \beta''$, on aura

$$N\rho' [\sin \beta' \cos \beta'' - \cos(\alpha'' - \alpha') \cos \beta' \sin \beta''] \\ - M\rho'' [\sin \beta'' \cos \beta'' - \cos(\alpha'' - \alpha'') \cos \beta'' \sin \beta''] \\ - NR' \cos(\alpha'' - A') \sin \beta'' + MR'' \cos(\alpha'' - A'') \sin \beta'' - LR''' \cos(\alpha'' - A''') \sin \beta'' = 0.$$

Qu'on multiplie enfin la première réduite, trouvée ci-dessus, par

$$\sin \beta'' \cos \beta'' - \cos(\alpha'' - \alpha') \cos \beta' \sin \beta'',$$

et qu'on en retranche l'équation précédente multipliée par

$$\sin(\alpha'' - \alpha') \cos \beta'',$$

on aura, après les réductions,

$$N\rho' [\sin(\alpha'' - \alpha') \cos \beta'' \cos \beta' \sin \beta'' - \sin(\alpha'' - \alpha') \cos \beta'' \cos \beta' \sin \beta' \\ - \sin(\alpha'' - \alpha') \cos \beta'' \cos \beta' \sin \beta''] \\ + NR' [\sin(\alpha'' - A') \cos \beta'' \sin \beta'' - \sin(\alpha'' - A') \cos \beta'' \sin \beta' \\ - MR'' [\sin(\alpha'' - A'') \cos \beta'' \sin \beta'' - \sin(\alpha'' - A'') \cos \beta'' \sin \beta' \\ + LR''' [\sin(\alpha'' - A''') \cos \beta'' \sin \beta'' - \sin(\alpha'' - A''') \cos \beta'' \sin \beta'] = 0.$$

D'où, en faisant, pour abrégé,

$$\gamma = \sin(\alpha'' - \alpha') \cos \beta' \cos \beta'' \sin \beta'' \\ + \sin(\alpha'' - \alpha'') \cos \beta'' \cos \beta' \sin \beta' \\ + \sin(\alpha'' - \alpha''') \cos \beta'' \cos \beta' \sin \beta''$$

on tire

$$\rho' = \sin \beta'' \cos \beta'' \frac{NR' \sin(\alpha'' - A') - MR'' \sin(\alpha'' - A'') + LR''' \sin(\alpha'' - A''')}{N\gamma} \\ - \cos \beta'' \sin \beta'' \frac{NR' \sin(\alpha'' - A') - MR'' \sin(\alpha'' - A'') + LR''' \sin(\alpha'' - A''')}{N\gamma}.$$

On trouvera de même les valeurs de ρ'' et de ρ''' , et pour cela il n'y aura qu'à changer, dans l'expression précédente, d'abord N en -M et ' en '' ; et ensuite N en L et ' en ''', et *vice versa*.

Donc, si l'on fait de plus

$$\Gamma' = NR' \sin(\alpha' - A') - MR'' \sin(\alpha' - A'') + LR''' \sin(\alpha' - A'''),$$

$$\Gamma'' = NR' \sin(\alpha'' - A') - MR'' \sin(\alpha'' - A'') + LR''' \sin(\alpha'' - A'''),$$

$$\Gamma''' = NR' \sin(\alpha''' - A') - MR'' \sin(\alpha''' - A'') + LR''' \sin(\alpha''' - A'''),$$

on aura

$$\rho' = \frac{\Gamma' \sin \beta'' \cos \beta'' - \Gamma'' \sin \beta'' \cos \beta''}{N\gamma},$$

$$\rho'' = \frac{\Gamma' \sin \beta'' \cos \beta' - \Gamma'' \sin \beta' \cos \beta''}{-M\gamma},$$

$$\rho''' = \frac{\Gamma' \sin \beta' \cos \beta'' - \Gamma'' \sin \beta'' \cos \beta'}{L\gamma}.$$

Or on a, en général (3),

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2\rho R \cos(\alpha - A) \cos \beta + \rho^2;$$

donc, marquant successivement toutes les lettres d'un trait, de deux, de trois, on aura

$$r'^2 = R'^2 + 2\rho' R' \cos(\alpha' - A') \cos\beta' + \rho'^2,$$

$$r''^2 = R''^2 + 2\rho'' R'' \cos(\alpha'' - A'') \cos\beta'' + \rho''^2,$$

$$r'''^2 = R'''^2 + 2\rho''' R''' \cos(\alpha''' - A''') \cos\beta''' + \rho'''^2,$$

de sorte que, par la substitution des valeurs précédentes de ρ' , ρ'' , ρ''' , on aura celles de r' , r'' , r''' , c'est-à-dire des trois rayons vecteurs de l'orbite.

9. Supposons que dans l'intervalle des trois observations le mouvement de la Comète soit rectiligne et uniforme, il est clair que nommant θ' l'intervalle entre la première et la seconde, et θ'' l'intervalle entre la seconde et la troisième, on aura ces deux proportions

$$t'' - t' : t''' - t'' = \theta' : \theta'', \quad u'' - u' : u''' - u'' = \theta' : \theta'';$$

d'où l'on tire

$$t'' = \frac{(\theta' + \theta'') t'' - \theta'' t'}{\theta'}, \quad u'' = \frac{(\theta' + \theta'') u'' - \theta'' u'}{\theta'}.$$

Qu'on substitue ces valeurs dans les expressions de M et de N, on aura

$$M = \frac{(\theta' + \theta'')(t'' u' - t' u'')}{\theta'}, \quad L = \frac{(\theta' + \theta'')}{\theta'},$$

$$N = -\frac{\theta''(t' u'' - t'' u')}{\theta'}, \quad L = \frac{\theta''}{\theta'}.$$

Par conséquent $\frac{M}{L} = \frac{\theta' + \theta''}{\theta'}$ et $\frac{N}{L} = \frac{\theta''}{\theta'}$, quantités connues par les observations. Dans cette hypothèse donc le Problème ne sera que du premier degré, ce qui s'accorde avec ce que M. Bouguer a trouvé par une autre voie.

10. Mais voyons jusqu'à quel point l'hypothèse dont il s'agit peut s'accorder avec les principes connus du mouvement des Comètes autour du Soleil. Comme on sait que les Comètes sont attirées vers le Soleil en raison inverse du carré des distances et qu'en vertu de cette attraction elles

décrivent des orbites à très-peu près paraboliques, il est clair que l'hypothèse du mouvement rectiligne et uniforme doit s'éloigner d'autant plus de la vérité que l'arc décrit par la Comète sera plus grand; ce n'est donc que dans les arcs très-petits, c'est-à-dire lorsque les intervalles θ' et θ'' seront très-petits, qu'on pourra regarder cette hypothèse comme approchante de la vérité, et le *maximum* d'approximation devra par conséquent avoir lieu dans l'infiniment petit. Or nommant, en général, le temps θ , on aura dans l'infiniment petit

$$\theta' = d\theta, \quad \theta'' = d^2\theta,$$

et de même en désignant par t et u l'abscisse et l'ordonnée qui répondent à la première observation, on aura

$$t' = t, \quad t'' = t + dt, \quad t''' = t + 2dt + d^2t,$$

$$u' = u, \quad u'' = u + du, \quad u''' = u + 2du + d^2u;$$

or l'équation

$$t'' = \frac{(\theta' + \theta'') t'' - \theta'' t'}{\theta'}$$

se réduit à

$$\frac{t'' - t'}{\theta''} - \frac{t'' - t'}{\theta'} = 0,$$

donc

$$\frac{dt + d^2t}{d\theta + d^2\theta} - \frac{dt}{d\theta} = 0,$$

ou bien

$$d \frac{dt}{d\theta} = 0,$$

et de même l'autre équation en u deviendra

$$d \frac{du}{d\theta} = 0.$$

Mais par la Théorie des forces centrales on a, en nommant F la force attractive du Soleil à la distance r , les deux équations

$$d \frac{dt}{d\theta} + \frac{F t d\theta}{r^3} = 0, \quad d \frac{du}{d\theta} + \frac{F u d\theta}{r^3} = 0.$$

Donc les deux quantités $d\frac{dt}{d\theta}$ et $d\frac{du}{d\theta}$ ne sont pas nulles, ainsi qu'on le suppose dans l'hypothèse du mouvement rectiligne. On ne pourrait pas dire que, les termes $\frac{Ftd\theta}{r^3}$ et $\frac{Fud\theta}{r^3}$ étant infiniment petits du premier ordre, on ne commet, en les négligeant, qu'une erreur infiniment petite; car il est visible que les quantités $d\frac{dt}{d\theta}$ et $d\frac{du}{d\theta}$ sont aussi infiniment petites du premier ordre; de sorte que ces quantités sont du même ordre que les termes en question, et ont par conséquent avec eux un rapport fini.

En général, on sait par la Théorie du Calcul infinitésimal que lorsqu'on ne considère que deux points consécutifs et infiniment proches d'une courbe, on peut regarder l'arc intercepté comme une ligne droite, mais que cela n'est plus permis lorsqu'on veut considérer trois points consécutifs; car la position de ces trois points détermine alors la courbure de l'arc, qu'on ne peut regarder comme nulle, à moins qu'il n'y ait là un point d'inflexion; ce qui n'a point lieu dans les trajectoires décrites par des forces centrales. Voilà la vraie raison métaphysique par laquelle il n'est pas permis de supposer que l'orbite d'une Comète soit rectiligne, même dans un intervalle de temps infiniment petit, dès qu'on veut employer trois observations, c'est-à-dire qu'on veut considérer trois points consécutifs de la même orbite.

M. de Laplace m'a mandé, il y a quelque temps, qu'il avait fait une pareille remarque à l'occasion d'une solution du Problème des Comètes présentée à l'Académie par l'Abbé Boscovich. On trouve au reste, dans le volume des *Ephémérides* de 1779, un Mémoire de M. Lambert qui contient encore d'autres remarques intéressantes sur l'hypothèse rectiligne et sur les méthodes de MM. Cassini et Bouguer.

11. Pour jeter encore un plus grand jour sur ce que nous venons de démontrer, et pour faire voir en même temps de quelle manière on doit traiter la question, sans manquer à l'exactitude nécessaire, je considère que les abscisses t, t', t'' , ainsi que les ordonnées correspondantes u, u', u'' , peuvent être regardées, en général, comme des fonctions du temps

écoulé depuis une époque donnée, et qu'ainsi en nommant θ le temps de la seconde observation, et par conséquent $\theta - \theta'$ et $\theta + \theta''$ les temps de la première et de la troisième, les quantités t'', u'' deviendront t', u' et t'', u'' en y changeant θ en $\theta - \theta'$ et $\theta + \theta''$.

Or on sait que, si φ est une fonction quelconque de θ , elle devient

$$\varphi - \frac{d\varphi}{d\theta} \theta' + \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} \frac{\theta'^2}{2} - \dots,$$

lorsque θ devient $\theta - \theta'$, et

$$\varphi + \frac{d\varphi}{d\theta} \theta'' + \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} \frac{\theta''^2}{2} + \dots,$$

lorsque θ devient $\theta + \theta''$.

Donc on aura

$$t' = t'' - \frac{dt''}{d\theta} \theta' + \frac{d^2t''}{d\theta^2} \frac{\theta'^2}{2} - \dots,$$

$$u' = u'' - \frac{du''}{d\theta} \theta' + \frac{d^2u''}{d\theta^2} \frac{\theta'^2}{2} - \dots,$$

$$t'' = t'' + \frac{dt''}{d\theta} \theta'' + \frac{d^2t''}{d\theta^2} \frac{\theta''^2}{2} + \dots,$$

$$u'' = u'' + \frac{du''}{d\theta} \theta'' + \frac{d^2u''}{d\theta^2} \frac{\theta''^2}{2} + \dots,$$

Mais on a par la théorie des forces centrales, en prenant $d\theta$ pour constante,

$$\frac{d^2t''}{d\theta^2} = -\frac{Ft''}{r'^3}, \quad \frac{d^2u''}{d\theta^2} = -\frac{Fu''}{r'^3}.$$

Donc les expressions précédentes deviendront

$$t' = t'' - \frac{dt''}{d\theta} \theta' - \frac{Ft''}{2r'^3} \theta'^2 - \dots,$$

$$u' = u'' - \frac{du''}{d\theta} \theta' - \frac{Fu''}{2r'^3} \theta'^2 - \dots,$$

$$t'' = t'' + \frac{dt''}{d\theta} \theta'' - \frac{Ft''}{2r'^3} \theta''^2 + \dots,$$

$$u'' = u'' + \frac{du''}{d\theta} \theta'' - \frac{Fu''}{2r'^3} \theta''^2 + \dots$$

Il est aisé de voir que, dans l'hypothèse du mouvement rectiligne et uniforme, on ne prend que les deux premiers termes de chacune de ces formules; en effet si des deux équations

$$t' = t'' - \frac{dt''}{d\theta'} \theta', \quad t'' = t'' + \frac{dt''}{d\theta''} \theta'',$$

on élimine $\frac{dt''}{d\theta'}$, il vient

$$t'' = \frac{(\theta' + \theta'') t'' - \theta'' t'}{\theta'},$$

et de même si l'on élimine $\frac{da''}{d\theta}$ des équations

$$a' = a'' - \frac{da''}{d\theta} \theta', \quad a'' = a'' + \frac{da''}{d\theta''} \theta'',$$

on a

$$a'' = \frac{(\theta' + \theta'') a'' - \theta'' a'}{\theta'},$$

formules identiques avec celles qu'on a trouvées directement dans l'hypothèse dont il s'agit (8).

Il est donc nécessaire d'avoir égard, dans les valeurs des quantités précédentes, aux termes où les quantités θ' , θ'' montent au second degré.

En substituant les valeurs ci-dessus dans les formules du n° 7, on trouve

$$L = \frac{u' dt'' - t'' da''}{d\theta} \theta',$$

$$M = \frac{u' dt'' - t'' da''}{d\theta} (\theta' + \theta'') \left(1 - \frac{F \theta' \theta''}{2 r'^3}\right),$$

$$N = \frac{u' dt'' - t'' da''}{d\theta} \theta'',$$

où le terme $\frac{F \theta' \theta''}{2 r'^3}$ est l'effet de la courbure de l'orbite.

Or, quoique ce terme devienne très-petit du second ordre vis-à-vis de 1, lorsque θ' , θ'' sont des quantités très-petites du premier ordre, il n'est pas néanmoins permis de le négliger dans les valeurs des quantités Γ' , Γ'' , Γ''' des expressions de ρ' , ρ'' , ρ''' du n° 8.

En effet si l'on substitue dans ces quantités les valeurs précédentes de L, M, N, et qu'on suppose, en général,

$$\delta = \theta' R' \sin(\alpha - A') - (\theta' + \theta'') R'' \sin(\alpha - A'') + \theta'' R'' \sin(\alpha - A'''),$$

qu'ensuite on dénote par δ' , δ'' , δ''' les valeurs de δ correspondantes à $\alpha = \alpha'$, α'' , α''' , on aura

$$\Gamma' = \frac{u' dt'' - t'' da''}{d\theta} \left[\delta' + \frac{F(\theta' + \theta'') \theta' \theta'' R'' \sin(\alpha' - A'')}{2 r'^3} \right],$$

$$\Gamma'' = \frac{u' dt'' - t'' da''}{d\theta} \left[\delta'' + \frac{F(\theta' + \theta'') \theta' \theta'' R'' \sin(\alpha'' - A'')}{2 r'^3} \right],$$

$$\Gamma''' = \frac{u' dt'' - t'' da''}{d\theta} \left[\delta''' + \frac{F(\theta' + \theta'') \theta' \theta'' R'' \sin(\alpha''' - A'')}{2 r'^3} \right].$$

Or en supposant que les intervalles θ' et θ'' entre les observations soient très-petits du premier ordre, il est visible que la quantité $(\theta' + \theta'') \theta' \theta''$ devient très-petite du troisième ordre; par conséquent on pourra, dans les expressions précédentes, négliger les termes affectés de cette quantité, à moins que dans la même supposition les quantités δ' , δ'' , δ''' ne deviennent aussi très-petites du même ordre.

12. Je considère donc que, l'orbite de la Terre étant à très-peu près circulaire et décrite d'un mouvement uniforme, les rayons R' , R'' , R''' peuvent être sans erreur sensible supposés égaux, et les différences de longitude du Soleil $A'' - A'$, $A''' - A''$ supposées proportionnelles aux intervalles de temps θ' , θ'' ; et ces suppositions seront d'autant plus exactes que ces intervalles seront très-petits.

On aura donc ainsi

$$R' = R'' = R'''$$

et

$$A'' - A' = m \theta', \quad A''' - A'' = m \theta'';$$

par conséquent

$$A' = A'' - m \theta', \quad A'' = A''' + m \theta'';$$

et la quantité δ deviendra

$$\delta = R'' [\theta'' \sin(\alpha - \Lambda'' + m\theta') - (\theta' + \theta'') \sin(\alpha - \Lambda'') + \theta' \sin(\alpha - \Lambda'' - m\theta'')].$$

Mais θ' et θ'' étant très-petits, on a

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \Lambda'' + m\theta') &= \sin(\alpha - \Lambda'') + m\theta' \cos(\alpha - \Lambda'') - \frac{m^2 \theta'^2}{2} \sin(\alpha - \Lambda'') \\ &\quad - \frac{m^3 \theta'^3}{6} \cos(\alpha - \Lambda'') + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \Lambda'' - m\theta'') &= \sin(\alpha - \Lambda'') - m\theta'' \cos(\alpha - \Lambda'') - \frac{m^2 \theta''^2}{2} \sin(\alpha - \Lambda'') \\ &\quad + \frac{m^3 \theta''^3}{6} \cos(\alpha - \Lambda'') + \dots \end{aligned}$$

Donc, substituant et négligeant les quantités des ordres supérieurs au troisième, on aura

$$\delta = -\frac{m^2(\theta' + \theta'')\theta'\theta''R''}{2} \sin(\alpha - \Lambda''),$$

quantité qui est, comme l'on voit, du troisième ordre.

Done, faisant successivement $\alpha = \alpha'$, α'' , α''' pour avoir les valeurs de δ' , δ'' , δ''' , et substituant ensuite ces valeurs dans les expressions de Γ' , Γ'' , Γ''' du numéro précédent, on aura

$$\Gamma' = -\frac{u''dt'' - t''du''}{d\theta} \frac{(\theta' + \theta'')\theta'\theta''R''}{2} \left(m^2 - \frac{F}{r'^2}\right) \sin(\alpha' - \Lambda''),$$

$$\Gamma'' = -\frac{u''dt'' - t''du''}{d\theta} \frac{(\theta' + \theta'')\theta'\theta''R''}{2} \left(m^2 - \frac{F}{r'^2}\right) \sin(\alpha'' - \Lambda''),$$

$$\Gamma''' = -\frac{u''dt'' - t''du''}{d\theta} \frac{(\theta' + \theta'')\theta'\theta''R''}{2} \left(m^2 - \frac{F}{r'^2}\right) \sin(\alpha''' - \Lambda'').$$

Substituant donc ces valeurs ainsi que celles de L, M, N dans les expressions de ρ' , ρ'' , ρ''' du n° 8, et faisant, pour abrégé,

$$\mu' = \sin\beta'' \cos\beta'' \sin(\alpha'' - \Lambda'') - \sin\beta'' \cos\beta'' \sin(\alpha' - \Lambda''),$$

$$\mu'' = \sin\beta'' \cos\beta' \sin(\alpha' - \Lambda'') - \sin\beta' \cos\beta'' \sin(\alpha'' - \Lambda''),$$

$$\mu''' = \sin\beta' \cos\beta'' \sin(\alpha''' - \Lambda'') - \sin\beta'' \cos\beta' \sin(\alpha' - \Lambda''),$$

on aura

$$\rho' = \frac{(\theta' + \theta'')\theta'\mu'}{2\gamma} R'' \left(\frac{F}{r'^2} - m^2\right),$$

$$\rho'' = -\frac{\theta'\theta''\mu''}{2\gamma \left(1 + \frac{F\theta'\theta''}{2r'^2}\right)} R'' \left(\frac{F}{r'^2} - m^2\right),$$

$$\rho''' = \frac{(\theta' + \theta'')\theta''\mu'''}{2\gamma} R'' \left(\frac{F}{r'^2} - m^2\right).$$

Il est visible que ces expressions ne sauraient être réduites davantage, si ce n'est en négligeant dans le dénominateur de ρ'' le terme du second ordre $\frac{F\theta'\theta''}{2r'^2}$ vis-à-vis de 1, ce qui donnera

$$\rho'' = \frac{\theta'\theta''\mu''}{2\gamma} R'' \left(m^2 - \frac{F}{r'^2}\right).$$

Or la quantité r'' est donnée en ρ'' par la formule

$$r''^2 = R'^2 + 2\rho''R'' \cos(\alpha'' - \Lambda'') \cos\beta'' + \rho''^2.$$

Donc, si l'on fait cette substitution dans la dernière équation, on aura une équation où il n'y aura d'inconnue que ρ'' , et qui servira à la déterminer.

13. Soit, pour abrégé,

$$\lambda = \frac{\theta'\theta''\mu''R''}{2\gamma},$$

on aura

$$\rho'' = \left(m^2 - \frac{F}{r'^2}\right)\lambda;$$

done

$$\lambda F = (\lambda m^2 - \rho'') r'^2;$$

prenant les carrés et substituant la valeur de r'^2 en ρ , on aura l'équation

$$(\rho'' - \lambda m^2)^2 [R'^2 + 2\rho''R'' \cos(\alpha'' - \Lambda'') \cos\beta'' + \rho''^2] - \lambda^2 F^2 = 0,$$

laquelle étant développée et ordonnée par rapport à ρ'' montera au huitième degré.

Or je remarque que F étant la force attractive du Soleil à la distance 1, $\frac{F}{R^2}$ sera l'action du Soleil sur la Terre à la distance R ; si donc on regarde l'orbite de la Terre comme circulaire, il faudra que $\frac{F}{R^2}$ soit égale à la force centrifuge de la Terre; mais on a supposé que m dénotait la vitesse angulaire de la Terre; donc sa vitesse réelle sera mR , et la force centrifuge $\frac{m^2 R^3}{R^2} = m^2 R$; donc $\frac{F}{R^2} = m^2 R$; donc

$$F = m^2 R^3.$$

Mais si l'on veut tenir compte de l'excentricité de l'orbite de la Terre, on remarquera que par les Théorèmes de Newton la même force absolue F , qui fait mouvoir la Terre dans une ellipse dont R est le rayon vecteur, pourrait lui faire décrire en même temps un cercle dont le rayon serait égal au demi-axe de l'ellipse, et avec une vitesse égale à celle que la Terre a dans l'ellipse à la même distance du Soleil, c'est-à-dire au sommet du petit axe. Nommant donc a le demi-axe de l'ellipse ou la distance moyenne de la Terre, et g sa vitesse angulaire moyenne, on aura également $F = g^2 a^3$; or g étant la vitesse angulaire dans le cercle, ag sera la vitesse réelle, laquelle est égale à la vitesse réelle dans l'ellipse au sommet du petit axe; donc nommant b le demi-petit axe, on aura bg pour la vitesse circulaire autour du foyer, et $\frac{bg}{a}$ pour la vitesse angulaire; mais par la loi des aires il est visible que les vitesses angulaires sont réciproquement proportionnelles aux carrés des distances: donc la vitesse angulaire m à la distance R sera à la vitesse angulaire $\frac{bg}{a}$ à la distance a , comme $\frac{1}{R^2}$ est à $\frac{1}{a^2}$; donc

$$m = \frac{abg}{R^2}.$$

Si l'on prend, pour plus de simplicité, la distance moyenne de la Terre pour l'unité, et qu'on exprime les temps par le mouvement moyen du

Soleil, on aura alors

$$a=1, \quad g=1;$$

donc

$$F=1, \quad m=\frac{b}{R^2};$$

or l'excentricité de l'orbite du Soleil étant

$$0,0168 < \frac{1}{50},$$

on aura

$$b > \sqrt{1 - \frac{1}{2500}};$$

donc en prenant $b=1$, on ne commettra qu'une erreur presque insensible.

Nous ferons donc $F=1$ et $m=\frac{1}{R^2}$, moyennant quoi le dernier terme de l'équation en ρ'' , lequel est $\lambda^2(m^2 R^6 - F^2)$, deviendra $\lambda^2\left(\frac{1}{R^4} - 1\right)$, et sera par conséquent nul lorsque $R=1$, c'est-à-dire lorsque la seconde observation aura été faite dans les moyennes distances de la Terre; mais comme l'orbite de la Terre est presque circulaire, R sera toujours à très-peu près égal à 1; par conséquent si le dernier terme de l'équation en ρ'' n'est pas exactement nul, il sera du moins toujours extrêmement petit, et pourra être pris pour nul, d'autant plus qu'il ne s'agit ici que d'une détermination approchée.

L'équation en ρ'' s'abaissera donc par là au septième degré, et aura nécessairement une racine réelle; et il est facile de se convaincre que cette équation ne pourra s'abaisser davantage; car son dernier terme sera

$$-2\lambda m^2 R^6 + 6\lambda^2 m^4 R^6 \cos(\alpha'' - \Lambda'') \cos \beta'' = \frac{2\lambda}{R^2} [-R^2 + 3\lambda \cos(\alpha'' - \Lambda'') \cos \beta''],$$

quantité qui ne peut être nulle, en général.

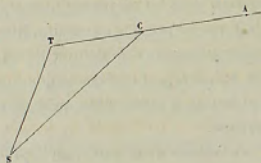
Voilà donc la limite fixée par la nature même du Problème, et au-dessous de laquelle il est impossible de le rabaisser, quelque petits qu'on suppose les intervalles entre les trois observations; car il est facile de se convaincre que la quantité λ demeure toujours finie, même en suppo-

sant ϑ' et ϑ'' infiniment petites, puisqu'alors les différences entre α' , α'' , α''' devenant infiniment petites du même ordre, ainsi que celles entre β' , β'' , β''' , la quantité μ'' devient infiniment petite du premier ordre, et la quantité γ infiniment petite du troisième; en sorte que λ sera nécessairement une quantité finie.

Il est visible que la solution précédente sera entièrement rigoureuse dans l'infiniment petit, mais que son exactitude diminuera à mesure que les intervalles entre les observations seront plus grands; on pourra cependant l'employer dans tous les cas comme une solution approchée, pour en tirer les premières valeurs des inconnues; et c'est la seule solution directe dont le Problème proposé soit susceptible. C'est ce que nous confirmerons plus bas par une analyse encore plus rigoureuse.

14. Il n'est pas difficile au reste de ramener cette solution à la Géométrie. Car, ayant tiré la droite infinie TA (fig. 1) et pris dans cette

Fig. 1.



droite la partie $TA = m^2\lambda$, qu'on mène par le point T la droite $TS = R''$, qui fasse l'angle STA tel que

$$\cos STA = \cos(\alpha'' - \alpha''') \cos \beta'',$$

la question sera réduite à trouver dans la droite TA un point C tel que l'on ait

$$AC : AT = TS^2 : SC^2;$$

et l'on aura alors $TC = \rho''$.

Car il est visible que l'on a par la construction

$$SC = \sqrt{R''^2 + 2\rho'' R'' \cos(\alpha'' - \alpha''') \cos \beta'' + \rho''^2} = r'',$$

et que la proportion précédente donne

$$m^2\lambda - \rho'' : m^2\lambda = R''^2 : r''^2,$$

savoir

$$m^2\lambda R''^2 = (m^2\lambda - \rho'') r''^2;$$

mais nous avons vu que $m^2 R''^2 = F$; donc

$$\lambda F = (m^2\lambda - \rho'') r''^2;$$

ce qui est l'équation trouvée dans le n° 13.

Or R'' étant la distance de la Terre au Soleil au temps de la seconde observation, ρ'' la distance de la Terre à la Comète et r'' le rayon vecteur de la Comète, il est visible que les trois points T, S, C représenteront les lieux de la Terre, du Soleil et de la Comète au temps de la seconde observation; et la solution précédente reviendra à celle que M. Lambert a proposée dans les *Mémoires* de 1771, et dont nous avons déjà fait mention dans le premier Mémoire. La méthode de M. Lambert est fondée uniquement sur la considération synthétique de l'orbite apparente de la Comète, et n'en est que plus ingénieuse; mais elle ne fait pas voir que la solution qui en résulte a réellement le dernier degré de simplicité qu'on puisse donner au Problème des Comètes envisagé directement, et il n'y avait qu'une analyse telle que la précédente qui pût lui procurer cet avantage; sur quoi, voyez les n° 20 et suivants.

15. Après avoir considéré le Problème des Comètes, pour ainsi dire, dans l'infiniment petit, il est nécessaire de l'envisager sous un point de vue plus général, en supposant les intervalles entre les observations d'une grandeur quelconque.

Pour cela je remarque d'abord que tout se réduit à connaître les valeurs des quantités L, M, N du n° 7. Or ℓ' , ℓ'' étant des coordonnées rectangulaires du lieu de la Comète dans la première observation, prises du

centre du Soleil et dans le plan même de son orbite, et de même t'' , u'' et t''' , u''' étant les coordonnées rectangulaires des lieux de la Comète dans la seconde et dans la troisième observation, il est facile de voir que la quantité $\frac{t'u' - t''u''}{2}$ exprime l'aire du triangle formé par les deux droites menées du centre du Soleil aux lieux de la Comète dans la première et dans la seconde observation et par la corde qui joint ces deux lieux, c'est-à-dire qui sous-tend l'arc parcouru dans l'intervalle des observations; triangle que nous nommerons dorénavant *secteur triangulaire* décrit par la Comète; tandis que nous appellerons *secteur parabolique* l'espace compris par les mêmes rayons vecteurs et par l'arc parabolique parcouru par la Comète. Pareillement $\frac{t''u'' - t'''u'''}{2}$ sera le secteur triangulaire décrit pendant l'intervalle de la seconde à la troisième observation, et $\frac{t'u' - t'''u'''}{2}$ sera par la même raison le secteur triangulaire décrit depuis la première jusqu'à la troisième observation. Ainsi les quantités L, N, M ne sont autre chose que le double de ces différents secteurs triangulaires, et toute la difficulté se réduit à déterminer la valeur de ces secteurs en connaissant le temps employé à les décrire. Mais il est visible que cette donnée ne suffit pas, et qu'il faut nécessairement y ajouter encore quelque autre quantité relative aux lieux de la Comète dans son orbite; et nous allons voir qu'en supposant l'orbite parabolique, comme cela a lieu pour les Comètes, il suffit de connaître, outre le temps, encore la somme des deux rayons vecteurs qui comprennent le secteur cherché.

Il est facile de prouver par la Géométrie que, si l'on nomme 2ω l'angle intercepté par les deux rayons vecteurs r' et r'' , on aura $r'r'' \sin \omega \cos \omega$ pour l'aire du triangle formé par ces deux rayons et par la droite qui joint leurs extrémités, de sorte qu'on aura

$$L = 2 r' r'' \sin \omega \cos \omega.$$

Tout se réduit donc à trouver la valeur de l'angle ω par le temps $\mathcal{G}$ employé par la Comète à le parcourir.

Or on sait que dans les sections coniques, décrites en vertu d'une force

tendant à l'un des foyers et réciproquement proportionnelle au carré de la distance, le temps employé à parcourir un arc quelconque est toujours proportionnel à l'aire du secteur curviligne divisée par la racine carrée du paramètre, tant que la force attractive absolue demeure la même. Commençons donc par déterminer l'aire d'un secteur parabolique.

16. Soit, en général, r le rayon vecteur d'une parabole dont le paramètre soit $4p$, et soit φ l'anomalie correspondante, c'est-à-dire l'angle formé au foyer par le rayon r et par la partie de l'axe comprise entre le foyer et le sommet. On aura

$$r = \frac{2p}{1 + \cos \varphi} = \frac{p}{\cos^2 \frac{\varphi}{2}}$$

pour l'équation de la parabole; donc l'élément du secteur parabolique sera

$$\frac{r^2 d\varphi}{2} = \frac{p^2 d\varphi}{2 \cos^4 \frac{\varphi}{2}},$$

dont l'intégrale sera

$$\frac{p^2 \sin \frac{\varphi}{2}}{3 \cos^3 \frac{\varphi}{2}} + \frac{2 p^2 \sin \frac{\varphi}{2}}{3 \cos^2 \frac{\varphi}{2}},$$

c'est-à-dire, à cause de $\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}}$,

$$p^2 \left(\tan \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\varphi}{2} \right);$$

donc le secteur compris entre deux rayons vecteurs r' et r'' qui répondent aux anomalies φ' et φ'' sera exprimé par cette formule

$$p^2 \left[\tan \frac{\varphi''}{2} - \tan \frac{\varphi'}{2} + \frac{1}{3} \left(\tan^3 \frac{\varphi''}{2} - \tan^3 \frac{\varphi'}{2} \right) \right].$$

Or on a

$$r' = \frac{p}{\cos^2 \frac{\varphi'}{2}}, \quad r'' = \frac{p}{\cos^2 \frac{\varphi''}{2}};$$

donc, si l'on fait

$$\varphi' + \varphi'' = 2\psi, \quad \varphi'' - \varphi' = 2\omega,$$

en sorte que ω soit la moitié de l'angle intercepté entre les deux rayons r' et r'' qui renferment le secteur dont il s'agit, on aura d'abord

$$\sqrt{\frac{r'}{r''}} = \frac{\cos \frac{\varphi''}{2}}{\cos \frac{\varphi'}{2}} = \frac{\cos \frac{\psi + \omega}{2}}{\cos \frac{\psi - \omega}{2}} = \frac{1 - \tan \frac{\psi}{2} \tan \frac{\omega}{2}}{1 + \tan \frac{\psi}{2} \tan \frac{\omega}{2}},$$

d'où l'on tire

$$\tan \frac{\psi}{2} = \frac{\sqrt{r''} - \sqrt{r'}}{(\sqrt{r''} + \sqrt{r'}) \tan \frac{\omega}{2}}.$$

On a de plus

$$\sqrt{r'} r'' = \frac{p}{\cos \frac{\varphi'}{2} \cos \frac{\varphi''}{2}},$$

d'où l'on tire

$$p = \sqrt{r' r''} \cos \frac{\varphi'}{2} \cos \frac{\varphi''}{2} = \frac{\sqrt{r' r''}}{2} (\cos \psi + \cos \omega).$$

Mais

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{1 - \tan^2 \frac{\psi}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\psi}{2}} = \frac{(\sqrt{r''} + \sqrt{r'})^2 \tan^2 \frac{\omega}{2} - (\sqrt{r''} - \sqrt{r'})^2}{(\sqrt{r''} + \sqrt{r'})^2 \tan^2 \frac{\omega}{2} + (\sqrt{r''} - \sqrt{r'})^2} \\ &= \frac{(r'' + r') \left(\tan^2 \frac{\omega}{2} - 1 \right) + 2\sqrt{r' r''} \left(\tan^2 \frac{\omega}{2} + 1 \right)}{(r'' + r') \left(\tan^2 \frac{\omega}{2} + 1 \right) + 2\sqrt{r' r''} \left(\tan^2 \frac{\omega}{2} - 1 \right)} = \frac{2\sqrt{r' r''} - (r' + r'') \cos \omega}{r' + r'' - 2\sqrt{r' r''} \cos \omega}, \end{aligned}$$

en substituant la valeur précédente de $\tan \frac{\psi}{2}$; ajoutons à cette quantité $\cos \omega$, et l'on aura

$$\cos \psi + \cos \omega = \frac{2\sqrt{r' r''} \sin^2 \omega}{r' + r'' - 2\sqrt{r' r''} \cos \omega};$$

donc

$$p = \frac{r' r'' \sin^2 \omega}{r' + r'' - 2\sqrt{r' r''} \cos \omega}.$$

Maintenant, puisque

$$\tan \frac{\varphi'}{2} = \tan \frac{\psi - \omega}{2} = \frac{\tan \frac{\psi}{2} - \tan \frac{\omega}{2}}{1 + \tan \frac{\psi}{2} \tan \frac{\omega}{2}},$$

si l'on substitue pour $\tan \frac{\psi}{2}$ sa valeur trouvée ci-dessus, on aura

$$\tan \frac{\varphi'}{2} = \frac{\sqrt{r''} \cos \omega - \sqrt{r'}}{\sqrt{r''} \sin \omega},$$

et l'on trouvera de la même manière, à cause de $\varphi'' = \psi + \omega$,

$$\tan \frac{\varphi''}{2} = \frac{\sqrt{r''} - \sqrt{r'} \cos \omega}{\sqrt{r'} \sin \omega};$$

donc

$$\tan \frac{\varphi''}{2} - \tan \frac{\varphi'}{2} = \frac{r' + r'' - 2\sqrt{r' r''} \cos \omega}{\sqrt{r' r''} \sin \omega},$$

et

$$\begin{aligned} \tan^2 \frac{\varphi''}{2} - \tan^2 \frac{\varphi'}{2} &= \frac{(r'' - \sqrt{r' r''} \cos \omega)^2 + (r' - \sqrt{r' r''} \cos \omega)^2}{r' r'' \sqrt{r' r''} \sin^3 \omega} \\ &= \frac{r'^2 + r''^2 - 3(r'^2 + r''^2) \sqrt{r' r''} \cos \omega + 3(r' + r'') r' r'' \cos^2 \omega - 2 r' r'' \sqrt{r' r''} \cos^3 \omega}{r' r'' \sqrt{r' r''} \sin^3 \omega}. \end{aligned}$$

Donc

$$3 \left(\tan \frac{\varphi''}{2} - \tan \frac{\varphi'}{2} \right) + \tan^2 \frac{\varphi''}{2} - \tan^2 \frac{\varphi'}{2}$$

égale

$$\begin{aligned} 3 r' r'' (r' + r'' - 2\sqrt{r' r''} \cos \omega) (1 - \cos^2 \omega) + r'^3 + r''^3 - 3(r'^2 + r''^2) \sqrt{r' r''} \cos \omega \\ + 3(r' + r'') r' r'' \cos^2 \omega - 2 r' r'' \sqrt{r' r''} \cos^3 \omega, \end{aligned}$$

divisé par $r' r'' \sqrt{r' r''} \sin^3 \omega$; ce qui se réduit à cette quantité

$$\begin{aligned} \frac{(r' + r'')^3 - 3(r' + r'')^2 \sqrt{r' r''} \cos \omega + 4 r' r'' \sqrt{r' r''} \cos^2 \omega}{r' r'' \sqrt{r' r''} \sin^3 \omega} \\ = \frac{(r' + r'' - 2\sqrt{r' r''} \cos \omega)^2 (r' + r'' + \sqrt{r' r''} \cos \omega)}{r' r'' \sqrt{r' r''} \sin^3 \omega}. \end{aligned}$$

Multipliant cette quantité par

$$\frac{p^2}{3} = \frac{r'^2 r''^2 \sin^2 \omega}{3(r' + r'' - 2\sqrt{r' r''} \cos \omega)},$$

on aura

$$\frac{(r' + r'' + \sqrt{r' r''} \cos \omega) \sqrt{r' r''} \sin \omega}{3}$$

pour le secteur parabolique renfermé entre les deux rayons vecteurs r' et r'' qui comprennent l'angle 2ω .

Cette expression est assez remarquable, parce qu'elle est indépendante du paramètre de la parabole et du lieu du périhélie. M. Lambert est le premier qui l'ait trouvée dans son beau *Traité des Orbites des Comètes*, d'où j'aurais pu l'emprunter si je n'avais cru faire plaisir aux Géomètres en la déduisant des formules ordinaires de la parabole.

Qu'on divise maintenant la quantité précédente par

$$\sqrt{p} = \frac{\sqrt{r' r''} \sin \omega}{\sqrt{r' + r'' - 2\sqrt{r' r''} \cos \omega}},$$

on aura une quantité proportionnelle au temps θ' employé par la Comète à décrire l'angle $2\omega = \varphi'' - \varphi'$; donc

$$3K\theta' = (r' + r'' + \sqrt{r' r''} \cos \omega) \sqrt{r' + r'' - 2\sqrt{r' r''} \cos \omega},$$

le coefficient K étant le même pour toutes les Planètes et les Comètes qui tournent autour du Soleil. De sorte que, nommant D le temps périodique d'une Planète quelconque, A l'aire de l'ellipse décrite par cette Planète et $4P$ le paramètre de cette ellipse, on aura aussi

$$KD = \frac{A}{\sqrt{P}},$$

et par conséquent

$$K = \frac{A}{D\sqrt{P}}.$$

En prenant la distance moyenne de la Terre au Soleil pour l'unité, c'est-à-dire en faisant le demi-grand axe de l'orbite de la Terre = 1 et le

demi-petit axe = b , on a $A = b \times 180^\circ$; de plus on a, par les propriétés de l'ellipse, $p = \frac{b^2}{a}$; donc

$$K = \frac{180^\circ \times \sqrt{2}}{D}.$$

Donc, si l'on représente le temps par le mouvement moyen du Soleil, on aura $D = 360^\circ$, et par conséquent

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

en sorte que l'équation ci-dessus deviendra

$$\frac{3}{\sqrt{2}} \theta' = (r' + r'' + \sqrt{r' r''} \cos \omega) \sqrt{r' + r'' - 2\sqrt{r' r''} \cos \omega},$$

où θ' devra être exprimé par l'arc du mouvement moyen, réduit en parties du rayon.

17. Or nous avons déjà trouvé (15)

$$L = 2r' r'' \sin \omega \cos \omega;$$

done, si l'on divise cette quantité par la valeur de $\sqrt{p}$ du numéro précédent, on aura

$$\frac{L}{\sqrt{p}} = 2\sqrt{r' r''} \cos \omega \sqrt{r' + r'' - 2\sqrt{r' r''} \cos \omega},$$

et, divisant encore cette équation par celle qu'on a trouvée en dernier lieu, il viendra

$$\frac{L}{3\sqrt{2}p} = \frac{\theta' \sqrt{r' r''} \cos \omega}{r' + r'' + \sqrt{r' r''} \cos \omega}.$$

Soit, pour abrégér,

$$z = \frac{\sqrt{r' r''} \cos \omega}{r' + r'' + \sqrt{r' r''} \cos \omega},$$

et, faisant de plus

$$r' + r'' = 2s,$$

on aura

$$\sqrt{r'^2} \cos \omega = \frac{2s}{1-\tau},$$

et, substituant cette valeur dans la dernière équation du numéro précédent, elle deviendra

$$\frac{3g'}{\sqrt{2}} = (2s)^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{1-3\tau}}{(1-\tau)^{\frac{3}{2}}}.$$

Cette équation, en faisant

$$\tau = 1 - \frac{2}{3} \nu,$$

se change en celle-ci

$$\nu = 1 + \frac{g'^2}{12s^3} \nu^3,$$

d'où l'on tirera la valeur de ν , laquelle ne dépendra, comme l'on voit, que de celle de $\frac{g'^2}{s^3}$.

D'où l'on conclura d'abord que, lorsque g'^2 est proportionnel à s^3 , la quantité ν sera constante, ainsi que la quantité τ , et que par conséquent L sera simplement proportionnelle à g' ; d'où résulte le Théorème suivant :

Le secteur triangulaire décrit par la Comète, dans un temps quelconque, est toujours exactement proportionnel à ce temps, lorsque le cube de la somme des deux rayons vecteurs qui comprennent ce secteur est proportionnel au carré du temps.

18. L'équation

$$\nu = 1 + \frac{g'^2}{12s^3} \nu^3$$

peut se résoudre par approximation, au moyen des formules que j'ai données dans les *Mémoires* de 1768; et l'on peut avoir, par ces formules, non-seulement la valeur de ν , mais encore celle d'une puissance quelconque ν^m . Car en faisant, pour abréger,

$$\frac{g'^2}{12s^3} = q,$$

et appliquant à l'équation

$$\nu = 1 + q\nu^3$$

les formules du Problème II du Mémoire cité (*), on aura

$$\begin{aligned} \nu^m = 1 + mq + \frac{m(m+5)}{2} q^2 + \frac{m(m+7)(m+8)}{2 \cdot 3} q^3 \\ + \frac{m(m+9)(m+10)(m+11)}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^4 + \dots, \end{aligned}$$

et dans le cas de $m=1$

$$\nu = 1 + q + 3q^2 + 12q^3 + 55q^4 + \dots$$

séries qui seront toujours convergentes tant que q sera $< \frac{4}{27}$, et par conséquent tant que

$$\frac{g'^2}{s^3} < \frac{16}{9}.$$

Or, comme la condition de $q < \frac{4}{27}$ est aussi celle qui rend réelles toutes les racines de l'équation

$$\nu = 1 + q\nu^3,$$

on pourra aussi employer dans ce cas la trisection de l'angle. En effet, si l'on considère l'équation

$$\sin 3\nu = 3 \sin \nu - 4 \sin^3 \nu$$

et qu'on la mette sous la forme

$$\frac{3 \sin \nu}{\sin 3\nu} = 1 + \frac{(2 \sin 3\nu)^2}{27} \left(\frac{3 \sin \nu}{\sin 3\nu} \right)^3,$$

on aura, en la comparant à la proposée,

$$\nu = \frac{3 \sin \nu}{\sin 3\nu} \quad \text{et} \quad \sin 3\nu = \frac{3\sqrt{3}q}{2}.$$

Mais cette solution, ainsi que la précédente, n'aura lieu que tant que

(*) *Oeuvres de Lagrange*, t. III, p. 53.

$\frac{\theta'^2}{s^2}$ sera $< \frac{16}{9}$; dans les autres cas il faudra avoir recours à l'équation primitive

$$v = 1 + qv^3,$$

laquelle n'aura plus qu'une racine réelle.

19. Donc, si l'on fait

$$L = T'\sqrt{2p},$$

on aura

$$T' = \theta'(3 - 2v),$$

et la quantité v sera déterminée par l'équation

$$v = 1 + \frac{\theta'^2}{3(r' + r'')^3} v^3,$$

laquelle, si

$$\frac{\theta'^2}{(r' + r'')^3} < \frac{2}{9},$$

donne, par approximation,

$$v = 1 + \frac{\theta'^2}{12\left(\frac{r' + r''}{2}\right)^3} + \frac{\theta'^4}{48\left(\frac{r' + r''}{2}\right)^6} + \frac{\theta'^6}{144\left(\frac{r' + r''}{2}\right)^9} + \dots,$$

ou bien, par la trisection de l'angle,

$$v = \frac{3 \sin v}{\sin 3v} = 1 + \frac{4 \sin^2 v}{\sin 3v},$$

en faisant

$$\sin 3v = \frac{3\theta'}{4\left(\frac{r' + r''}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si donc on change dans ces formules θ' en θ'' et r' , r'' en r'' , r'' , et qu'on dénote par T'' ce que devient alors la quantité T' , il est aisé de conclure de ce qu'on a dit dans le n° 15 qu'on aura pareillement

$$N = T''\sqrt{2p}.$$

Enfin on aura par la même raison

$$M = T''\sqrt{2p},$$

en dénotant par T'' ce que devient T' lorsqu'on y change r'' en r'' et θ' en θ'' .

Si donc on substitue ces valeurs dans les expressions de Γ' , Γ'' , Γ''' du n° 8, et qu'on fasse, en général,

$$\Delta = T''R'\sin(\alpha - \Lambda') - T''R''\sin(\alpha - \Lambda'') + T'R''\sin(\alpha - \Lambda'''),$$

qu'ensuite on dénote par Δ' , Δ'' , Δ''' les valeurs de Δ correspondantes à $\alpha = \alpha'$, α'' , α''' , on aura

$$\Gamma' = \Delta'\sqrt{2p}, \quad \Gamma'' = \Delta''\sqrt{2p}, \quad \Gamma''' = \Delta'''\sqrt{2p}.$$

Donc enfin

$$\rho' = \frac{\Delta''\sin\beta''\cos\beta'' - \Delta'\sin\beta''\cos\beta''}{T''\gamma},$$

$$\rho'' = \frac{\Delta'\sin\beta''\cos\beta'' - \Delta''\sin\beta'\cos\beta''}{-T''\gamma},$$

$$\rho''' = \frac{\Delta''\sin\beta'\cos\beta'' - \Delta'\sin\beta''\cos\beta'}{T''\gamma},$$

la quantité γ étant (numéro cité)

$$\gamma = \sin(\alpha'' - \alpha')\cos\beta'\cos\beta''\sin\beta''' + \sin(\alpha'' - \alpha'')\cos\beta''\cos\beta''\sin\beta' \\ + \sin(\alpha' - \alpha'')\cos\beta''\cos\beta'\sin\beta''.$$

Telles sont les formules rigoureuses du Problème des Comètes, présentées sous la forme la plus simple et en même temps la plus propre à fournir des approximations directes et faciles.

On se souviendra que dans ces formules α' , α'' , α''' sont les trois longitudes de la Comète observées, β' , β'' , β''' les trois latitudes observées, Λ' , Λ'' , Λ''' les trois longitudes de la Terre dans les instants des observations, R' , R'' , R''' les trois distances de la Terre au Soleil dans les mêmes instants (en prenant la distance moyenne pour l'unité), θ' , θ'' les intervalles entre les deux premières et entre les deux dernières observations, ou plutôt

les angles du mouvement moyen du Soleil qui répondent à ces intervalles; ces quantités sont toutes données par les observations ou par le calcul. Enfin ρ' , ρ'' , ρ''' sont les trois distances de la Comète à la Terre, lesquelles sont en même temps les trois inconnues du Problème, et r' , r'' , r''' sont les trois rayons vecteurs de la Comète dans son orbite autour du Soleil, lesquels dépendent des inconnues ρ' , ρ'' , ρ''' , de cette manière (8)

$$r'^2 = R'^2 + 2\rho' R' \cos(\alpha' - \Lambda') \cos\beta' + \rho'^2,$$

$$r''^2 = R''^2 + 2\rho'' R'' \cos(\alpha'' - \Lambda'') \cos\beta'' + \rho''^2,$$

$$r'''^2 = R'''^2 + 2\rho''' R''' \cos(\alpha''' - \Lambda''') \cos\beta''' + \rho'''^2.$$

20. Si dans ces trois dernières équations on substitue pour ρ' , ρ'' , ρ''' leurs valeurs trouvées plus haut, on aura les valeurs de r' , r'' , r''' en quantités toutes connues, et en T' , T'' , T''' qui dépendent à leur tour de r' , r'' , r''' .

On a donc ainsi trois équations entre les trois inconnues r' , r'' , r''' , dans lesquelles ces inconnues sont mêlées entre elles en sorte qu'il est comme impossible de les dégager. Mais si l'on suppose que les intervalles θ' , θ'' entre les observations soient assez petits, ou que du moins on les regarde comme tels pour avoir une première approximation, alors on pourra employer les valeurs de T' , T'' , T''' en série et ne tenir compte que des puissances de θ' et θ'' qui ne passeront pas un certain ordre.

Comme l'on a

$$T' = \theta'(3 - 2\nu),$$

réduisons d'abord la quantité ν à son premier terme qui est 1, en y négligeant toutes les puissances de θ' ; il viendra

$$T' = \theta',$$

et de même

$$T'' = \theta'', \quad T''' = \theta' + \theta'';$$

donc

$$L = \theta' \sqrt{2p}, \quad N = \theta'' \sqrt{2p}, \quad M = (\theta' + \theta'') \sqrt{2p};$$

donc

$$\frac{N}{L} = \frac{\theta''}{\theta'}, \quad \frac{M}{L} = \frac{\theta' + \theta''}{\theta'}.$$

C'est le cas de l'orbite supposée rectiligne (9), dont nous avons démontré l'insuffisance.

Il s'ensuit de là qu'il faut nécessairement tenir compte dans la valeur de ν du terme suivant $\frac{2\theta'^2}{3(r' + r'')^3}$. Ainsi l'on aura

$$\nu = 1 + \frac{2\theta'^2}{3(r' + r'')^3},$$

par conséquent

$$T' = \theta' - \frac{4\theta'^3}{3(r' + r'')^3};$$

et de même

$$T'' = \theta'' - \frac{4\theta''^3}{3(r'' + r''')^3}, \quad T''' = \theta' + \theta'' - \frac{4(\theta' + \theta'')^3}{3(r' + r'')^3},$$

et l'on remarquera que ces valeurs sont exactes, aux cinquièmes dimensions près de θ' et θ'' .

On fera donc ces substitutions dans la valeur de la quantité Δ , et il est clair que la substitution des premiers termes θ' , θ'' , $\theta' + \theta''$ donnera la quantité δ du n° 11; or, comme les valeurs précédentes de T' , T'' , T''' sont exactes jusqu'à la quatrième dimension de θ' et θ'' inclusivement, pour conserver le même degré d'exactitude dans la valeur de Δ , il ne faudra négliger dans celle de δ que les termes où les dimensions de θ' et θ'' seraient plus hautes que la quatrième. Employant donc les réductions du n° 12, mais ayant égard de plus dans les valeurs de $\sin(\alpha - \Lambda')$, $\sin(\alpha - \Lambda'')$ aux termes affectés de θ'^3 et θ''^3 , et faisant $m = \frac{1}{R'^2}$ (13), on aura

$$\delta = -\frac{(\theta' + \theta'')\theta'\theta''}{2R'^3} \sin(\alpha - \Lambda'') - \frac{(\theta'^2 - \theta''^2)\theta'\theta''}{6R'^3} \cos(\alpha - \Lambda').$$

C'est la première partie de la valeur de Δ .

On substituera ensuite les termes

$$-\frac{4\theta'^3}{3(r' + r'')^3}, \quad -\frac{4\theta''^3}{3(r'' + r''')^3}, \quad -\frac{4(\theta' + \theta'')^3}{3(r' + r'')^3},$$

à la place de T' , T'' , T''' dans l'expression de Δ , et comme nous ne voulons

avoir égard qu'aux quatrième dimensions de θ' et θ'' , il est visible que dans les valeurs de $\sin(\alpha - A')$ et $\sin(\alpha - A'')$ il faudra rejeter les termes où ces quantités monteraient à la seconde dimension. On fera donc simplement

$$\sin(\alpha - A') = \sin(\alpha - A'') + m\theta' \cos(\alpha - A'')$$

et

$$\sin(\alpha - A'') = \sin(\alpha - A'') - m\theta'' \cos(\alpha - A'');$$

et, supposant toujours

$$R'' = R'' = R',$$

on aura pour la seconde partie de Δ la quantité

$$-\frac{4}{3} \left[\frac{\theta'^3}{(r' + r'')^3} - \frac{(\theta' + \theta'')^3}{(r' + r'')^3} + \frac{\theta''^3}{(r'' + r'')^3} \right] R'' \sin(\alpha - A'') \\ - \frac{4}{3} \left[\frac{\theta''^3}{(r'' + r'')^3} - \frac{\theta'^3}{(r' + r'')^3} \right] R'' \cos(\alpha - A'').$$

Donc, si l'on fait, pour plus de simplicité, $\frac{\theta''}{\theta'} = n$, et

$$\frac{(1+n)n}{2R''^3} + \frac{4}{3} \left[\frac{1}{(r' + r'')^3} - \frac{(1+n)^3}{(r' + r'')^3} + \frac{n^3}{(r'' + r'')^3} \right] R'' = p, \\ \frac{(1-n^2)n}{6R''^3} + \frac{4}{3} \left[\frac{n^3}{(r'' + r'')^3} - \frac{1}{(r' + r'')^3} \right] R'' = q,$$

on aura cette valeur totale de Δ , savoir

$$\Delta = -\theta'^3 p \sin(\alpha - A'') - \theta'^4 q \cos(\alpha - A''),$$

laquelle sera exacte, aux cinquièmes dimensions de θ' près.

On fera donc successivement $\alpha = \alpha'$, α'' , α''' pour avoir les valeurs de Δ' , Δ'' , Δ''' , et l'on substituera ces valeurs, ainsi que celles de T , T' , T'' , dans les expressions de ρ' , ρ'' , ρ''' du numéro précédent.

Mais, comme dans la valeur de Δ on n'a eu égard qu'à deux puissances successives de θ' , il faudra en faire de même dans les valeurs de T , T' , T'' : par conséquent, comme les premiers termes de ces quantités sont de la première dimension, il y faudra rejeter les termes de la troisième, ce qui réduira ces quantités à leurs premiers termes θ' , $n\theta'$, $(1+n)\theta'$.

Faisant donc, comme dans le n° 12,

$$\mu' = \sin \beta'' \cos \beta'' \sin(\alpha'' - A'') - \sin \beta'' \cos \beta'' \sin(\alpha' - A''),$$

$$\mu'' = \sin \beta'' \cos \beta' \sin(\alpha' - A'') - \sin \beta' \cos \beta'' \sin(\alpha'' - A''),$$

$$\mu''' = \sin \beta' \cos \beta' \sin(\alpha' - A'') - \sin \beta'' \cos \beta' \sin(\alpha' - A''),$$

et de même

$$\nu' = \sin \beta'' \cos \beta'' \cos(\alpha'' - A'') - \sin \beta'' \cos \beta'' \cos(\alpha' - A''),$$

$$\nu'' = \sin \beta'' \cos \beta' \cos(\alpha' - A'') - \sin \beta' \cos \beta'' \cos(\alpha'' - A''),$$

$$\nu''' = \sin \beta' \cos \beta' \cos(\alpha' - A'') - \sin \beta'' \cos \beta' \cos(\alpha' - A''),$$

on aura

$$\rho' = -\frac{p\mu'\theta'^2}{n\gamma} - \frac{q\nu'\theta'^2}{n\gamma},$$

$$\rho'' = \frac{p\mu''\theta'^2}{(1+n)\gamma} + \frac{q\nu''\theta'^2}{(1+n)\gamma},$$

$$\rho''' = -\frac{p\mu'''\theta'^2}{\gamma} - \frac{q\nu'''\theta'^2}{\gamma},$$

valeurs qui sont exactes, à la quatrième dimension de θ' près.

Or, comme les quantités ρ' , ρ'' , ρ''' sont toujours finies, quelque petit que soit l'intervalle de temps θ' , et que d'ailleurs p et q sont aussi par leur nature des quantités finies, il s'ensuit que les quantités $\frac{\mu'\theta'^2}{\gamma}$, $\frac{\mu''\theta'^2}{\gamma}$, $\frac{\mu'''\theta'^2}{\gamma}$ seront nécessairement toujours des quantités finies; et comme les

quantités ν' , ν'' , ν''' sont semblables à μ' , μ'' , μ''' , on en conclura que $\frac{\nu'\theta'^2}{\gamma}$, $\frac{\nu''\theta'^2}{\gamma}$, $\frac{\nu'''\theta'^2}{\gamma}$ seront pareillement des quantités finies.

D'où l'on voit que les seconds termes des expressions précédentes de ρ' , ρ'' , ρ''' seront très-petits de l'ordre de θ' , et que par conséquent ces expressions seront exactes, aux quantités de l'ordre de θ'^2 près.

21. Je considère maintenant que, si les intervalles entre les trois observations sont égaux, ou du moins à très-peu près égaux, on aura $n = 1$,

et les quantités p et q deviendront

$$p = \frac{1}{R^2} + \frac{4}{3} \left[\frac{1}{(r' + r'')^3} - \frac{8}{(r' + r'')^3} + \frac{1}{(r' + r'')^3} \right] R'',$$

$$q = \frac{4}{3} \left[\frac{1}{(r' + r'')^3} - \frac{1}{(r' + r'')^3} \right] \frac{1}{R''}.$$

Je considère ensuite qu'en regardant le rayon vecteur r'' de la parabole comme une fonction du temps θ écoulé depuis une époque quelconque, les rayons vecteurs r' et r'' seront de pareilles fonctions des temps correspondants $\theta - \theta'$ et $\theta + \theta'$, à cause de $\theta'' = \theta'$; donc on aura, aux quantités de l'ordre de θ'^2 près,

$$r' = r'' - \frac{dr''}{d\theta} \theta', \quad r'' = r'' + \frac{dr''}{d\theta} \theta'.$$

Substituant ces valeurs dans celles de p et q , et négligeant le carré de θ' , on aura

$$p = \frac{1}{R^2} - \frac{R''}{r'^3}, \quad q = -\frac{R''}{2r'^4} \frac{dr''}{d\theta} \theta',$$

les termes qui renfermeraient la première dimension de θ' se détruisant dans la quantité p , et les termes sans θ' se détruisant dans q .

Donc, puisque q est déjà de l'ordre de θ' et que les quantités $\frac{\gamma' \theta'^2}{\gamma}$, $\frac{\gamma'' \theta'^2}{\gamma}$, $\frac{\gamma'' \theta'^2}{\gamma}$ sont aussi de l'ordre de θ' , il s'ensuit que les seconds termes des valeurs de ρ' , ρ'' , ρ''' deviendront de l'ordre de θ'^2 , et par conséquent devront être rejetés.

Ainsi donc on aura simplement

$$\rho' = -\frac{R'' \mu' \theta'^2}{\gamma} \left(\frac{1}{R'^4} - \frac{1}{r'^3} \right),$$

$$\rho'' = +\frac{R'' \mu'' \theta'^2}{2\gamma} \left(\frac{1}{R'^4} - \frac{1}{r'^3} \right),$$

$$\rho''' = -\frac{R'' \mu''' \theta'^2}{\gamma} \left(\frac{1}{R'^4} - \frac{1}{r'^3} \right),$$

et ces valeurs seront exactes, aux quantités près de l'ordre de θ'^2 .

Si l'on ne voulait pas supposer $n=1$, c'est-à-dire les intervalles entre les observations égaux, alors les termes de l'ordre de θ' ne se détruiraient pas dans les expressions de ρ' , ρ'' , ρ''' ; mais en négligeant ces termes on aurait

$$p = \frac{(1+n)n}{2R^2} + \frac{R''}{6r'^3} [1 - (1+n)^2 + n^2] = \frac{(1+n)nR''}{2} \left(\frac{1}{R'^4} - \frac{1}{r'^3} \right),$$

et de là

$$\rho' = -\frac{(1+n)nR'' \mu' \theta'^2}{2\gamma} \left(\frac{1}{R'^4} - \frac{1}{r'^3} \right),$$

$$\rho'' = +\frac{nR'' \mu'' \theta'^2}{2\gamma} \left(\frac{1}{R'^4} - \frac{1}{r'^3} \right),$$

$$\rho''' = -\frac{(1+n)nR'' \mu''' \theta'^2}{2\gamma} \left(\frac{1}{R'^4} - \frac{1}{r'^3} \right).$$

Ces expressions s'accordent avec celles du n° 12 en y faisant (13)

$$F=1, \quad m = \frac{1}{R'^2},$$

ce qui pourrait servir à confirmer la bonté de nos calculs; mais l'analyse précédente fait voir de plus que, si l'on y fait $n=1$, alors les mêmes expressions qui ne sont exactes, en général, qu'aux quantités de l'ordre de θ' près, deviennent exactes aux quantités près de l'ordre de θ'^2 ; remarque très-importante pour l'usage de ces formules, et que l'analyse seule pouvait fournir.

22. Si l'on combine l'équation

$$\rho'' = \frac{nR'' \mu'' \theta'^2}{2\gamma} \left(\frac{1}{R'^4} - \frac{1}{r'^3} \right)$$

avec celle-ci

$$r'^2 = R'^2 + 2\rho'' R'' \cos(\alpha'' - \Lambda'') \cos \beta'' + \rho''^2,$$

on aura, en éliminant r'^2 , une équation en ρ'' , laquelle sera essentiellement du huitième degré, mais qui en faisant $R''=1$ s'abaissera d'elle-même au septième, comme nous l'avons déjà vu plus haut (13).

Mais il est peut-être plus simple d'éliminer ρ'' , pour avoir une équation en r'' , laquelle, en faisant

$$\lambda = \frac{n R'' \mu'' \theta'^2}{2\gamma},$$

sera

$$(r''^2 - R''^2) r''^6 - 2 R'' \cos(\alpha'' - A'') \cos \beta'' \times \lambda (r''^2 - R''^2) \frac{r''^3}{R''^4} - \frac{\lambda^2}{R''^6} (r''^2 - R''^2)^2 = 0.$$

Cette équation est évidemment du huitième degré; mais en supposant $R'' = 1$, ou bien en mettant simplement R''^2 à la place de R''^4 dans les termes qui contiennent $r''^2 - R''^4$, elle deviendra toute divisible par $r'' - R''$, et s'abaissera par là au septième degré.

Mais, pour n'être pas embarrassé dans le choix des racines de cette équation, et même pour pouvoir trouver avec facilité la racine cherchée, je remarque que par la nature du Problème les deux quantités r'' et ρ'' doivent être toutes deux positives.

Donc, en faisant, pour plus de simplicité,

$$\frac{n R'' \mu'' \theta'^2}{2\gamma} = \lambda, \quad \cos(\alpha'' - A'') \cos \beta'' = \varepsilon, \quad R'' = 1,$$

en sorte que l'on ait

$$\rho'' = \lambda \left(1 - \frac{1}{r''^2}\right) \quad \text{et} \quad r''^2 = 1 + 2\rho''\varepsilon + \rho''^2,$$

il faudra :

1° Que, si $\lambda > 0$, on ait $1 - \frac{1}{r''^2} > 0$; donc $r'' > 1$; donc $\rho'' < \lambda$; donc, si $\varepsilon > 0$, on aura

$$r''^2 < 1 + 2\lambda\varepsilon + \lambda^2;$$

si $\varepsilon < 0$, alors la quantité

$$1 + 2\rho''\varepsilon + \rho''^2$$

diminue depuis $\rho'' = 0$ jusqu'à $\rho'' = -\varepsilon$, et ensuite augmente à mesure que ρ'' croît; donc entre $\rho'' = 0$ et $\rho'' = -\varepsilon$, on aura $r'' < 1$, ce qui ne se peut; donc ρ'' est nécessairement $> -\varepsilon$; donc aussi $\lambda > -\varepsilon$. Donc, en

faisant $\rho'' = \lambda$, la valeur de $1 + 2\rho''\varepsilon + \rho''^2$ sera nécessairement trop grande; donc aussi

$$r''^2 < 1 + 2\lambda\varepsilon + \lambda^2.$$

Donc, en général, si $\lambda > 0$, on aura

$$r'' > 1 \quad \text{et} \quad < \sqrt{1 + 2\lambda\varepsilon + \lambda^2}.$$

2° Si λ est < 0 , alors $1 - \frac{1}{r''^2} < 0$; donc $r'' < 1$; donc $2\rho''\varepsilon + \rho''^2 < 0$; par conséquent $\rho'' < -2\varepsilon$; donc $\varepsilon < 0$; or

$$\rho'' = -\lambda \left(1 - \frac{1}{r''^2}\right);$$

donc

$$-\lambda \left(1 - \frac{1}{r''^2}\right) < -2\varepsilon;$$

donc

$$\frac{1}{r''^2} < 1 + \frac{-2\varepsilon}{-\lambda};$$

donc on aura, dans le cas de $\lambda < 0$,

$$r'' < 1 \quad \text{et} \quad > \sqrt{1 + \frac{-2\varepsilon}{-\lambda}}.$$

On a donc par là les premières limites de la valeur de r'' , qu'on pourra, au moyen de l'équation en r'' , resserrer autant que l'on voudra par les méthodes connues.

23. La valeur de r'' , qu'on aura trouvée par la résolution de l'équation du numéro précédent, sera la première valeur approchée des trois rayons vecteurs r' , r'' , r''' , si n n'est pas égal à 1, parce qu'alors l'équation n'est exacte qu'aux quantités du premier ordre près; mais si $n = 1$, ou exactement, ou à très-peu près, alors cette valeur de r'' sera approchée, aux quantités du second ordre près; donc, en la substituant dans les expressions de ρ' et ρ'' du n° 21, on aura les valeurs de ρ' , ρ'' approchées, de même aux quantités du second ordre près; et de là on aura celles de r'

et r'' poussées au même degré d'exactitude, par les formules

$$r'^2 = R'^2 + 2\rho' R' \cos(\alpha' - \Lambda') \cos\beta' + \rho'^2, \quad r''^2 = R''^2 + 2\rho'' R'' \cos(\alpha'' - \Lambda'') \cos\beta'' + \rho''^2.$$

Ayant ainsi les premières valeurs approchées des inconnues r' , r'' , r''' , rien ne sera plus facile que d'en trouver de plus exactes au moyen des formules générales du n° 19, en substituant dans ces formules $r' + \sigma'$, $r'' + \sigma''$, $r''' + \sigma'''$ à la place de r' , r'' , r''' , et traitant les quantités σ' , σ'' , σ''' comme très-petites; ce qui, en rejetant les dimensions de ces quantités plus hautes que la première, donnera trois équations linéaires en σ' , σ'' , σ''' pour la détermination de ces quantités; et l'on pourra de cette manière pousser l'approximation aussi loin que l'on voudra, en employant dans chaque opération les valeurs de r' , r'' , r''' trouvées par l'approximation précédente.

L'objet de ce Mémoire n'était que de donner une méthode directe et analytique pour trouver les premières valeurs approchées, et je crois que celle que je viens d'exposer ne laisse à cet égard rien à désirer; on pourra ensuite corriger ces valeurs par nos formules, ou par les autres méthodes déjà connues.

24. Quant à la détermination des éléments de l'orbite parabolique, elle n'a aucune difficulté, dès qu'on connaît deux lieux de la Comète, avec le temps écoulé dans le passage de l'un à l'autre; on trouve, dans plusieurs Ouvrages, des méthodes pour y parvenir, soit à l'aide de l'Analyse, soit par la simple Trigonométrie; mais comme les formules de ce Mémoire fournissent aussi des moyens fort simples pour cet objet, nous croyons devoir montrer comment elles s'appliquent à cette recherche.

Supposons donc qu'on connaisse deux rayons vecteurs r' et r'' , avec le temps g' écoulé pendant que la Comète a décrit l'arc renfermé entre ces rayons; on cherchera d'abord la valeur de v (17) par la résolution de l'équation

$$v = 1 + \frac{g'^2}{12s^2} v^3,$$

où

$$s = \frac{r' + r''}{2};$$

de là on trouvera l'angle 2ω intercepté entre les deux rayons, par la formule

$$\cos \omega = \frac{\frac{3}{2} - 2}{\sqrt{r' r''}}$$

du même numéro, à cause de $\tau = 1 - \frac{2}{3}v$.

Ayant ω , on trouvera le paramètre $4p$ par la formule du n° 16

$$p = \frac{r' r'' \sin^2 \omega}{r' + r'' - 2\sqrt{r' r''} \cos \omega},$$

et la position du périhélie au moyen de l'angle φ' que le rayon vecteur r' fait avec celui du périhélie, et qui est donné par la formule du même numéro

$$\tan \frac{\varphi'}{2} = \frac{\sqrt{r''} \cos \omega - \sqrt{r'}}{\sqrt{r'} \sin \omega}.$$

Il ne reste donc plus qu'à trouver la position du plan de l'orbite par rapport à l'écliptique. Or, si des trois équations

$$x = at + bu, \quad y = ct + eu, \quad z = ft + gu$$

du n° 5 on chasse t et u , on aura celle-ci

$$z = \frac{(ag - bf)y - (cg - ef)x}{ae - bc},$$

qui est l'équation d'un plan dont la position par rapport au plan des x et y est telle que, si l'on nomme i l'inclinaison des deux plans et h l'angle que l'intersection de ces plans fait avec l'axe des x , on aura

$$\tan i \cosh = \frac{ag - bf}{ae - bc}, \quad \tan i \sinh = \frac{cg - ef}{ae - bc};$$

en sorte que i sera l'inclinaison de l'orbite de la Comète, et h la longitude du nœud ascendant.

Or, comme

$$(ag - bf)^2 + (cg - ef)^2 + (ae - bc)^2 = (a^2 + c^2 + f^2)(b^2 + e^2 + g^2) - (ab + ce + fg)^2 = 1$$

494 DE LA DÉTERMINATION DES ORBITES DES COMÈTES

par les équations de conditions que nous avons vu devoir avoir lieu entre les constantes $a, b, c, \dots$ (numéro cité), on aura plus simplement

$$\sin i \cosh = ag - bf, \quad \sin i \sinh = cg - ef, \quad \cos i = ae - bc.$$

Maintenant on a, pour les deux observations,

$$x' = at' + bu', \quad x'' = at'' + bu'',$$

$$y' = ct' + eu', \quad y'' = ct'' + eu'',$$

$$z' = ft' + gu', \quad z'' = ft'' + gu'',$$

et de là on tirera

$$x''z' - x'z'' = (ag - bf)(t''u' - t'u''),$$

$$y''z' - y'z'' = (cg - ef)(t''u' - t'u''),$$

$$x''y' - x'y'' = (ae - bc)(t''u' - t'u''),$$

en sorte qu'on aura

$$\sin i \cosh = \frac{x''z' - x'z''}{t''u' - t'u''}, \quad \sin i \sinh = \frac{y''z' - y'z''}{t''u' - t'u''}, \quad \cos i = \frac{x''y' - x'y''}{t''u' - t'u''}.$$

Or on a déjà vu (15) que $t''u' - t'u'' = 2r'r'' \sin \omega \cos \omega$; ainsi il ne restera qu'à trouver les valeurs de $x', x'', y', y'', z', z''$, qu'on aura par les formules du n° 3 en connaissant ρ' et ρ'' ; or ces quantités se tireront directement des formules du n° 19.

De là il s'ensuit aussi qu'on aura

$$(t''u' - t'u'')^2 = (x''z' - x'z'')^2 + (y''z' - y'z'')^2 + (x''y' - x'y'')^2 \\ = (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2;$$

donc

$$4r'^2r''^2 \sin^2 \omega \cos^2 \omega = r'^2r''^2 - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2;$$

mais

$$2 \sin \omega \cos \omega = \sin 2\omega;$$

donc

$$\cos 2\omega = \frac{x'x'' + y'y'' + z'z''}{r'r''};$$

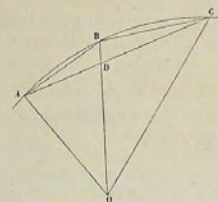
par où l'on pourra connaître l'angle ω sans la résolution de l'équation en ω .

D'APRÈS TROIS OBSERVATIONS.

495

25. Nous terminerons ce Mémoire par la remarque suivante qui peut être utile dans quelques occasions. Soit une courbe quelconque ABC dans laquelle soient pris trois points quelconques A, B, C; et soient tirées les cordes AB, BC, AC, et les rayons vecteurs OA, OB, OC partant d'un centre fixe O (fig. 2); qu'on désigne par r', r'', r''' ces trois rayons.

Fig. 2.



et par $\Delta', \Delta'', \Delta'''$ les trois secteurs triangulaires AOB, BOC, AOC; il est visible que $\Delta' + \Delta''$ sera égal au quadrilatère ABCO; d'où ôtant le triangle AOC = Δ''' , on aura

$$\Delta' + \Delta'' - \Delta'''$$

pour le triangle ABC formé par les trois cordes. Or il est facile de prouver par la Géométrie élémentaire que le triangle ABC est au quadrilatère ABCO comme BD est à BO; de sorte qu'en nommant f la flèche BD, on aura

$$\frac{f}{r''} = \frac{\Delta' + \Delta'' - \Delta'''}{\Delta' + \Delta''}.$$

Ainsi l'on aura l'expression générale de la flèche f , dès qu'on connaîtra celles des triangles $\Delta', \Delta'', \Delta'''$.

Or si l'on nomme φ' l'angle AOB, φ'' l'angle BOC, et par conséquent $\varphi' + \varphi''$ l'angle AOC, on a par la Géométrie

$$\Delta' = \frac{r'r'' \sin \varphi'}{2}, \quad \Delta'' = \frac{r''r''' \sin \varphi''}{2}, \quad \Delta''' = \frac{r'r''' \sin (\varphi' + \varphi'')}{2};$$

et si l'on aime mieux employer les coordonnées rectangles de la courbe

ABC, on aura, en nommant ces coordonnées t', u' pour le point A, t'', u'' pour le point B, t''', u''' pour le point C, et supposant que leur origine commune soit au point O, on aura, dis-je (15),

$$\Delta' = \frac{t''u' - t'u''}{2}, \quad \Delta'' = \frac{t'''u'' - t''u'''}{2}, \quad \Delta''' = \frac{t'''u' - t'u'''}{2};$$

enfin, si au lieu d'employer les coordonnées dans le plan de la courbe, on voulait employer d'autres coordonnées rectangles rapportées à un plan quelconque passant par le centre O, on nommerait x', y' les coordonnées du point A, x'', y'' les coordonnées du point B, x''', y''' les coordonnées du point C, l'origine de ces coordonnées étant toujours au point O; on nommerait de plus i l'inclinaison des deux plans, et l'on aurait par les formules du n° 24

$$\Delta' = \frac{x''y' - x'y''}{2 \cos i}, \quad \Delta'' = \frac{x'''y'' - x''y'''}{2 \cos i}, \quad \Delta''' = \frac{x'''y' - x'y'''}{2 \cos i}.$$

TROISIÈME MÉMOIRE

DANS LEQUEL ON DONNE UNE SOLUTION DIRECTE ET GÉNÉRALE DU PROBLÈME.

Les Recherches que j'ai données, dans le Volume de 1778, sur la détermination de l'orbite des Comètes, ont fait naître celles que MM. du Séjour et de Laplace ont publiées sur le même sujet dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour 1779 et 1780; et celles-ci ont occasionné encore ce Mémoire.

Mon dessein est moins de donner une nouvelle solution du Problème dont il s'agit que de simplifier et généraliser tout à la fois celle que j'ai donnée dans le second Mémoire. En suivant à peu près la route que j'y ai tracée, je parviens à trois équations finales, qui ont pour inconnues les trois principaux éléments de l'orbite, savoir le paramètre, le grand axe et le lieu du périhélie. Ces équations ne sont à la vérité qu'approchées; mais d'un côté on peut les rendre aussi exactes que l'on veut, et

de l'autre elles ont l'avantage de se simplifier de plus en plus à mesure qu'on suppose les intervalles entre les observations plus petits; de sorte qu'elles acquièrent le dernier degré de simplicité que la nature de la question peut comporter, lorsqu'on regarde les intervalles comme infiniment petits. Dans cet état les trois équations dont il s'agit se réduisent à une équation du septième degré et à deux équations linéaires; mais si l'on fait le grand axe infini, ce qui est le cas de la parabole, alors on a une équation de plus qu'il ne faut; et cette équation surnuméraire peut servir, si l'on veut, à rabaisser l'équation du septième degré au premier; ce qui ne doit point paraître surprenant, attendu que dans ce cas le Problème est plus que déterminé par trois lieux observés de la Comète.

Cette solution est peut-être tout ce qu'on peut attendre d'une analyse directe de la question proposée; et j'ai cru qu'elle intéresserait les Géomètres, indépendamment même de son utilité pour l'Astronomie.

1. Soient x, y, z les trois coordonnées rectangles du lieu d'une Comète par rapport au Soleil, r le rayon vecteur égal à $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, t le temps et S la masse du Soleil; on aura, en vertu de l'attraction $\frac{S}{r^2}$ de cet astre, les trois équations connues

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Sx}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Sy}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Sz}{r^3} = 0.$$

Et comme ces équations ont aussi lieu pour la Terre, si l'on représente le temps t par le mouvement moyen de la Terre ou du Soleil, et qu'on prenne la distance moyenne du Soleil pour l'unité, on aura $S = 1$. Car on sait par les Théorèmes de Newton que le mouvement angulaire moyen d'une Planète est le même que si elle décrivait un cercle dont le rayon serait égal à sa moyenne distance du Soleil; or dans ce cas il est visible qu'en prenant les coordonnées x, y dans le plan de l'orbite et supposant le rayon du cercle égal à 1 et l'angle parcouru égal à t , on aura

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0,$$

valeurs qui étant substituées dans les équations ci-dessus donnent $S = 1$.

2. En intégrant les équations précédentes, on aura les valeurs de x , y , z pour un temps quelconque; ces valeurs sont assez connues et l'on sait que dans les orbites fort allongées, comme celles des Comètes, il est impossible de les exprimer directement en fonction de t ; mais lorsqu'on ne les demande que pour un intervalle de temps peu considérable, on peut toujours les réduire en suites infinies d'autant plus convergentes que cet intervalle sera plus petit; et dans ce cas on peut même se passer d'intégration, et parvenir au but par de simples différentiations répétées.

En effet, en regardant x , y , z comme des fonctions de t , et supposant que t y devienne $t + \delta$, δ étant un angle assez petit, les valeurs de x , y , z deviendront par le Théorème connu

$$\begin{aligned}x + \frac{dx}{dt} \delta + \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\delta^2}{2} + \frac{d^3x}{dt^3} \frac{\delta^3}{2.3} + \dots, \\y + \frac{dy}{dt} \delta + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\delta^2}{2} + \frac{d^3y}{dt^3} \frac{\delta^3}{2.3} + \dots, \\z + \frac{dz}{dt} \delta + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\delta^2}{2} + \frac{d^3z}{dt^3} \frac{\delta^3}{2.3} + \dots\end{aligned}$$

De sorte qu'il ne s'agira que d'avoir les valeurs des différences successives de x , y , z déduites des équations proposées; ce qui ne demande que de simples différentiations et substitutions.

3. Pour faciliter davantage ces opérations, il est bon d'avoir aussi une équation différentielle en r , et pour cela on n'a qu'à remarquer que

$$r dr = x dx + y dy + z dz,$$

et par conséquent

$$d(r dr) = x d^2x + y d^2y + z d^2z + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Or les équations différentielles du n° 1 donnent (en faisant $S = 1$)

$$\frac{x d^2x + y d^2y + z d^2z}{dt^2} + \frac{r'}{r} = 0;$$

et les mêmes équations étant multipliées respectivement par $2 dx$, $2 dy$,

$2 dz$, ensuite ajoutées ensemble et intégrées, donnent

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} - \frac{2}{r} + \frac{1}{a} = 0,$$

a étant une constante arbitraire.

Donc on aura sur-le-champ cette équation en r et t

$$\frac{d(r dr)}{dt^2} - \frac{1}{r} + \frac{1}{a} = 0,$$

laquelle étant différenciée pour en chasser la constante a , on aura

$$\frac{d^2(r dr)}{dt^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dr}{dt} = 0.$$

Et si l'on fait, pour plus de simplicité, $r^2 = s$, on aura cette équation

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{s^3} \frac{ds}{dt} = 0.$$

Avant d'aller plus loin, nous remarquerons qu'en intégrant cette équation, on a

$$\frac{d^2s}{dt^2} - \frac{2}{\sqrt{s}} + \frac{2}{a} = 0;$$

multipliant par ds et intégrant de nouveau, on aura

$$\frac{1}{2} \frac{ds^2}{dt^2} - 4\sqrt{s} + \frac{2s}{a} + 2b = 0,$$

a et b étant deux constantes. Or cette dernière intégrale donne, en remettant r^2 à la place de s ,

$$dt = \frac{r dr}{\sqrt{-b + 2r - \frac{r^2}{a}}};$$

d'où il est aisé de conclure que a est le demi-axe de la section conique et b le demi-paramètre. Car en faisant $dr = 0$, on aura pour les deux apsidés

$$-b + 2r - \frac{r^2}{a} = 0, \text{ savoir } r^2 - 2ar + ab = 0;$$

en sorte que $2a$ sera la somme de la plus grande et de la plus petite distance et ab le produit.

4. Cela posé, nous avons donc (en prenant la distance moyenne du Soleil à la Terre pour l'unité, le mouvement moyen de cet astre pour le temps t , et faisant $r^2 = s$) ces quatre équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{s^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{y}{s^3} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{z}{s^3} = 0, \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{s^3} \frac{ds}{dt} = 0.$$

Ainsi l'on aura par des différentiations et des substitutions consécutives

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{s^3},$$

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -\frac{3}{2s^{\frac{5}{2}}} \frac{ds}{dt} x - \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} = \left(-\frac{3}{2s^{\frac{5}{2}}} \frac{d^2s}{dt^2} - \frac{3.5}{4s^{\frac{7}{2}}} \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \right) x + \frac{3}{s^{\frac{3}{2}}} \frac{ds}{dt} \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^5x}{dt^5} = \left(-\frac{15}{2s^{\frac{5}{2}}} \frac{ds}{dt} - \frac{9.5}{4s^{\frac{7}{2}}} \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} + \frac{3.5.7}{8s^{\frac{7}{2}}} \frac{ds^2}{dt^2} \right) x + \left(\frac{9}{2s^{\frac{5}{2}}} \frac{d^2s}{dt^2} - \frac{9.5}{4s^{\frac{7}{2}}} \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{s^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{dx}{dt},$$

et ainsi de suite.

Et l'on aura de pareilles formules pour les différences de y et z .

5. Si donc on fait ces substitutions dans les formules du n° 2 et qu'après avoir remis r^2 à la place de s , on suppose, pour abrégé,

$$f = 1 - \frac{\theta^2}{2} \frac{1}{r^3} + \frac{\theta^3}{2.3} \frac{3}{r^4} \frac{dr}{dt} + \frac{\theta^4}{2.3.4} \left[\frac{3}{r^5} \frac{d(rdr)}{dt} - \frac{3.5}{r^5} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{1}{r^4} \right] - \frac{\theta^5}{2.3.4.5} \left[\frac{3.5}{r^5} \frac{dr}{dt} + \frac{9.5}{r^6} \frac{drd(rdr)}{dt} - \frac{3.5.7}{r^6} \frac{dr^3}{dt^3} \right] - \dots,$$

$$g = \theta - \frac{\theta^3}{2.3} \frac{1}{r^3} + \frac{\theta^4}{2.3.4} \frac{6}{r^4} \frac{dr}{dt} + \frac{\theta^5}{2.3.4.5} \left[\frac{9}{r^5} \frac{d(rdr)}{dt} - \frac{9.5}{r^5} \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{1}{r^4} \right] - \dots,$$

on aura

$$fx + g \frac{dx}{dt}, \quad fy + g \frac{dy}{dt}, \quad fz + g \frac{dz}{dt},$$

pour les valeurs de x, y, z qui répondent au temps $t + \theta$.

6. On peut trouver de même la valeur de s répondante à $t + \theta$; cette valeur sera représentée par la série

$$s + \frac{ds}{dt} \theta + \frac{d^2s}{dt^2} \frac{\theta^2}{2.3} + \dots$$

Or l'équation

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{s^3} \frac{ds}{dt} = 0$$

donne les valeurs suivantes

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{s^3} \frac{ds}{dt},$$

$$\frac{d^3s}{dt^3} = -\frac{1}{s^3} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3}{2s^{\frac{5}{2}}} \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt},$$

$$\frac{d^4s}{dt^4} = \frac{1}{s^3} \frac{ds}{dt} + \frac{9}{2s^{\frac{5}{2}}} \frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} - \frac{3.5}{4s^{\frac{7}{2}}} \frac{ds^2}{dt^2},$$

et ainsi de suite.

Donc, puisque $s = r^2$, si l'on suppose que r^2 devienne hr^2 après le temps $t + \theta$, on aura

$$h = 1 + \theta \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} + \frac{\theta^2}{2} \frac{2}{r^2} \frac{d(rdr)}{dt} - \frac{\theta^3}{2.3} \frac{2}{r^4} \frac{dr}{dt} - \frac{\theta^4}{2.3.4} \left[\frac{2}{r^5} \frac{d(rdr)}{dt} - \frac{6}{r^5} \frac{dr^2}{dt^2} \right] + \frac{\theta^5}{2.3.4.5} \left[\frac{2}{r^5} \frac{dr}{dt} + \frac{18}{r^6} \frac{drd(rdr)}{dt} - \frac{30}{r^6} \frac{dr^3}{dt^3} \right] + \dots$$

7. On aurait pu aussi déduire cette formule de celles du n° 5, en remarquant que, comme

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

on aura la valeur de hr^2 en mettant $fx + g \frac{dx}{dt}$ au lieu de x , $fy + g \frac{dy}{dt}$

au lieu de y et $fz + g \frac{dz}{dt}$ au lieu de z ; de sorte que cette valeur sera

$$\left(fx + g \frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(fy + g \frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(fz + g \frac{dz}{dt}\right)^2$$

ou bien

$$f^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2fg\left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} + z \frac{dz}{dt}\right) + g^2\left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}\right);$$

mais on a

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad x dx + y dy + z dz = r dr,$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d(r dr) - x d^2x - y d^2y - z d^2z = d(r dr) + \frac{dr^2}{r};$$

donc, substituant et divisant par r^2 , on aura

$$h = f^2 + fg \frac{2}{r} \frac{dr}{dt} + g^2 \left[\frac{1}{r^3} \frac{d(r dr)}{dt} + \frac{1}{r^3} \right];$$

et mettant pour f et g leurs valeurs, il viendra la même formule que nous venons de trouver par une voie plus simple et plus directe.

8. Regardons maintenant la quantité t comme constante et ϑ comme variable, il est clair que les quantités

$$x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, r, \frac{dr}{dt}, \frac{d(r dr)}{dt},$$

qui sont des fonctions de t , seront aussi constantes par rapport à ϑ ; ainsi l'on aura, par les formules des numéros précédents, les valeurs des coordonnées x, y, z et du rayon vecteur r en fonction de ces dernières constantes et de la variable ϑ , et ces valeurs seront d'autant plus exactes que l'angle ϑ sera plus petit.

Or, puisque (7)

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \frac{r dr}{dt} = \frac{x dx + y dy + z dz}{dt}, \quad \frac{d(r dr)}{dt} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt} - \frac{1}{r},$$

on voit que ces différentes constantes se réduisent à ces six $x, y, z, \frac{dx}{dt}$

$\frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, lesquelles dépendent de la vitesse et de la direction du corps, lorsque $\vartheta = 0$; de sorte que les formules du n° 5 sont en effet les intégrales complètes des trois équations différentielles du n° 1, en y supposant $dt = d\vartheta$, mais intégrales en série et seulement approchées.

9. Les mêmes constantes déterminent aussi les éléments de l'orbite. Car en nommant, comme dans le n° 3, a le demi-grand axe de l'orbite et b le demi-paramètre, on a d'abord

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r} - \frac{d(r dr)}{dr^2}, \quad b = ar - \frac{r^2}{a} - r^2 \frac{dr^2}{dr^2}.$$

Ensuite, si l'on nomme φ l'angle du rayon r avec la ligne du périhélie, on aura, par la nature des sections coniques,

$$\frac{b}{r} = 1 + e \cos \varphi,$$

e étant l'excentricité de l'orbite, $= \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$.

D'où l'on voit que les trois quantités $r, \frac{dr}{dt}, \frac{d(r dr)}{dt^2}$ donnent immédiatement les dimensions de l'orbite et la position du périhélie sur l'orbite; en sorte qu'il sera facile de calculer par les formules connues le temps du passage par le périhélie.

Lorsque l'orbite est parabolique, comme le sont à peu près celles des Comètes, on a $a = \infty$; donc

$$\frac{d(r dr)}{dt^2} = \frac{1}{r};$$

ce qui simplifie les expressions de f, g, h .

A l'égard de la position du plan de l'orbite, si l'on nomme ω l'inclinaison par rapport au plan des x et y , et ψ l'angle de la ligne des nœuds avec l'axe des x , on aura par les formules connues

$$\tan \omega \sin \psi = \frac{y dz - z dy}{x dy - y dx}, \quad \tan \omega \cos \psi = \frac{x dz - z dx}{x dy - y dx}.$$

10. Ces préliminaires posés, venons à la solution du Problème de la détermination de l'orbite d'une Comète par trois observations peu éloignées entre elles.

Soit ρ la distance rectiligne de la Comète à la Terre au bout d'un temps quelconque $t + \theta$, et soient $\alpha\rho, \beta\rho, \gamma\rho$ les trois coordonnées rectangulaires du lieu apparent de la Comète par rapport au centre de la Terre; en sorte que l'on ait

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1.$$

Il est clair que ces quantités α, β, γ déterminent simplement la position de la ligne ρ , c'est-à-dire la direction du rayon visuel de la Comète; elles seront par conséquent données par chaque observation de la Comète.

Soient de plus R la distance du Soleil à la Terre, et AR, BR, CR les coordonnées du lieu du Soleil par rapport à la Terre, en sorte que l'on ait aussi

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1.$$

Il est facile de concevoir qu'en retranchant respectivement ces dernières coordonnées des premières, les différences

$$\alpha\rho - AR, \quad \beta\rho - BR, \quad \gamma\rho - CR$$

doivent être égales aux coordonnées de l'orbite de la Comète autour du Soleil, que nous avons vu (5) être exprimées, en général, par

$$fx + g \frac{dx}{dt}, \quad fy + g \frac{dy}{dt}, \quad fz + g \frac{dz}{dt}.$$

On aura donc ces trois équations

$$\alpha\rho - AR = fx + g \frac{dx}{dt},$$

$$\beta\rho - BR = fy + g \frac{dy}{dt},$$

$$\gamma\rho - CR = fz + g \frac{dz}{dt};$$

desquelles éliminant l'inconnue ρ , on aura deux équations qui contiennent

dront les six constantes inconnues

$$x, y, z, \quad \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt},$$

d'où dépend la détermination de l'orbite de la Comète (9).

Chaque observation fournira donc deux équations de cette espèce; par conséquent il faudra trois observations pour avoir autant d'équations que d'inconnues.

11. Supposons donc qu'on ait observé une Comète trois fois au bout des temps

$$t, \quad t + \theta', \quad t + \theta'',$$

on aura trois systèmes d'équations semblables à celles du numéro précédent, en y faisant successivement

$$\theta = 0, \quad \theta = \theta', \quad \theta = \theta''.$$

Or, lorsque $\theta = 0$, on a $f = 1, g = 0$; si donc on désigne par f', g' et par f'', g'' les valeurs de f, g qui répondent à $\theta = \theta', \theta = \theta''$, que de même on marque par un ou par deux traits toutes les autres quantités correspondantes, on aura ces trois systèmes d'équations

$$\text{Premier système} \dots \begin{cases} \alpha\rho - AR = x, \\ \beta\rho - BR = y, \\ \gamma\rho - CR = z, \end{cases}$$

$$\text{Deuxième système} \dots \begin{cases} \alpha'\rho' - A'R' = f'x + g' \frac{dx}{dt}, \\ \beta'\rho' - B'R' = f'y + g' \frac{dy}{dt}, \\ \gamma'\rho' - C'R' = f'z + g' \frac{dz}{dt}. \end{cases}$$

$$\text{Troisième système} \dots \begin{cases} \alpha''\rho'' - A''R'' = f''x + g'' \frac{dx}{dt}, \\ \beta''\rho'' - B''R'' = f''y + g'' \frac{dy}{dt}, \\ \gamma''\rho'' - C''R'' = f''z + g'' \frac{dz}{dt}. \end{cases}$$

12. Tout se réduit maintenant à éliminer les différentes inconnues.

Pour y parvenir, je commence par éliminer les deux inconnues x et $\frac{dx}{dt}$ des premières équations de chaque système; et faisant, pour abrégér,

$$l = f'g'' - f''g',$$

j'aurai cette équation

$$\alpha \rho l - \alpha' \rho' g'' + \alpha'' \rho'' g' = A \rho l - A' \rho' g'' + A'' \rho'' g'.$$

J'aurai de même, en éliminant y et $\frac{dy}{dt}$ des deuxièmes équations, et ensuite z et $\frac{dz}{dt}$ des troisièmes, ces deux autres-ci

$$\beta \rho l - \beta' \rho' g'' + \beta'' \rho'' g' = B \rho l - B' \rho' g'' + B'' \rho'' g',$$

$$\gamma \rho l - \gamma' \rho' g'' + \gamma'' \rho'' g' = C \rho l - C' \rho' g'' + C'' \rho'' g'.$$

Au moyen de ces trois équations on déterminera ρ , ρ' , ρ'' ; et si l'on fait, pour abrégér,

$$\delta = \alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \beta(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'),$$

$$\Delta = A(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + B(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + C(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta'),$$

$$\Delta_1 = A(\gamma\beta'' - \beta\gamma'') + B(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') + C(\beta\alpha'' - \alpha\beta''),$$

$$\Delta_2 = A(\beta\gamma' - \beta'\gamma) + B(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) + C(\alpha\beta' - \alpha'\beta),$$

qu'ensuite on dénote par Δ' , Δ'_1 , Δ'_2 , ce que deviennent Δ , Δ_1 , Δ_2 , en y changeant A , B , C en A' , B' , C' , et par Δ'' , Δ''_1 , Δ''_2 ce que les mêmes quantités deviennent lorsque A , B , C deviennent A'' , B'' , C'' ; on trouvera par les formules connues pour l'élimination

$$\rho = \frac{\Delta \rho l - \Delta' \rho' g'' + \Delta'' \rho'' g'}{\delta l},$$

$$\rho' = -\frac{\Delta_1 \rho l - \Delta'_1 \rho' g'' + \Delta''_1 \rho'' g'}{\delta g''},$$

$$\rho'' = \frac{\Delta_2 \rho l - \Delta'_2 \rho' g'' + \Delta''_2 \rho'' g'}{\delta g'}.$$

13. Je remarque maintenant que, si l'on ajoute ensemble les carrés des trois équations de chaque système, on peut également faire disparaître les quantités x , y , z , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Car si l'on fait, pour abrégér,

$$\Gamma = A\alpha + B\beta + C\gamma,$$

$$\Gamma' = A'\alpha' + B'\beta' + C'\gamma',$$

$$\Gamma'' = A''\alpha'' + B''\beta'' + C''\gamma'',$$

et qu'on dénote par h' , h'' les valeurs de h qui répondent à $\vartheta = \vartheta'$, $\vartheta = \vartheta''$, on aura, par ce qu'on a vu dans le n° 6, trois équations de la forme suivante

$$\rho^2 - 2\Gamma R\rho + R^2 = r^2,$$

$$\rho'^2 - 2\Gamma' R'\rho' + R'^2 = h'r^2,$$

$$\rho''^2 - 2\Gamma'' R''\rho'' + R''^2 = h''r^2.$$

14. Donc enfin, substituant dans ces équations les valeurs de ρ , ρ' , ρ'' trouvées ci-dessus, on aura les trois équations finales

$$(\Delta \rho l - \Delta' \rho' g'' + \Delta'' \rho'' g')^2 - 2\Gamma R(\Delta \rho l - \Delta' \rho' g'' + \Delta'' \rho'' g') \delta l + (R^2 - r^2) \delta^2 l^2 = 0,$$

$$(\Delta_1 \rho l - \Delta'_1 \rho' g'' + \Delta''_1 \rho'' g')^2 + 2\Gamma' R'(\Delta_1 \rho l - \Delta'_1 \rho' g'' + \Delta''_1 \rho'' g') \delta g'' + (R'^2 - h'r^2) \delta^2 g'^2 = 0,$$

$$(\Delta_2 \rho l - \Delta'_2 \rho' g'' + \Delta''_2 \rho'' g')^2 - 2\Gamma'' R''(\Delta_2 \rho l - \Delta'_2 \rho' g'' + \Delta''_2 \rho'' g') \delta g' + (R''^2 - h''r^2) \delta^2 g'^2 = 0.$$

Or, des différentes quantités qui composent ces trois équations, les unes, telles que

$$\delta, \Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta', \Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'', \Delta''_1, \Delta''_2, \Gamma, \Gamma', \Gamma'', R, R', R'',$$

sont censées données et connues par les observations de la Comète et par la Théorie du Soleil. Les autres, savoir

$$l, g', g'', h', h'',$$

sont des fonctions connues des quantités connues ϑ' , ϑ'' et des trois con-

stantes inconnues $r, \frac{dr}{dt}, \frac{d(rdr)}{dt^2}$; ainsi les équations précédentes peuvent servir à déterminer ces trois inconnues et à résoudre par conséquent le Problème. Examinons successivement ces deux espèces de quantités.

15. Je remarque d'abord que si l'on fait le carré de la quantité δ (12), on peut le mettre sous cette forme

$$\begin{aligned} \delta^2 = & (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2) \\ & + 2(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')(\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'') \\ & - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'')^2 \\ & - (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)(\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')^2 \\ & - (\alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2)(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma')^2. \end{aligned}$$

Or on a (10)

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

et par conséquent aussi (11)

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \quad \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1.$$

De plus, comme $\alpha\rho, \beta\rho, \gamma\rho$ sont les trois coordonnées de la Comète par rapport au centre de la Terre dans l'observation faite au bout du temps t , et que de même $\alpha'\rho', \beta'\rho', \gamma'\rho'$ sont les trois coordonnées de la même Comète dans l'observation faite au bout du temps $t + \delta'$ (numéros cités), il s'ensuit que la distance rectiligne de ces deux lieux de la Comète sera exprimée par la racine carrée de la quantité

$$(\alpha\rho - \alpha'\rho')^2 + (\beta\rho - \beta'\rho')^2 + (\gamma\rho - \gamma'\rho')^2 = \rho^2 - 2\rho\rho'(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') + \rho'^2.$$

Mais, en considérant le triangle rectiligne dont la base est cette distance et dont les côtés sont les droites ρ, ρ' menées du centre de la Terre aux deux lieux de la Comète, si l'on nomme ω l'angle compris entre ces deux côtés, on aura par le Théorème connu

$$\rho^2 - 2\rho\rho' \cos \omega + \rho'^2$$

pour le carré de la base. De sorte qu'en comparant cette expression à la

précédente, on aura

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \cos \omega.$$

Et l'on prouvera de même qu'en nommant ω' l'angle compris par les droites ρ', ρ'' , et ω'' l'angle compris par les droites ρ et ρ'' , on aura

$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = \cos \omega',$$

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = \cos \omega''.$$

Done la valeur de δ^2 deviendra par ces substitutions

$$\delta^2 = 1 + 2 \cos \omega \cos \omega' \cos \omega'' - \cos^2 \omega - \cos^2 \omega' - \cos^2 \omega''.$$

Cette expression peut se mettre encore sous une autre forme plus commode pour le calcul; car il est facile de se convaincre, par le développement des termes, qu'elle est la même chose que celle-ci

$$-[\cos(\omega + \omega') - \cos \omega''] [\cos(\omega - \omega') - \cos \omega''];$$

en sorte qu'on aura par les transformations connues

$$\delta^2 = -4 \sin \frac{\omega + \omega' + \omega''}{2} \sin \frac{\omega + \omega' - \omega''}{2} \sin \frac{\omega - \omega' + \omega''}{2} \sin \frac{\omega - \omega' - \omega''}{2},$$

formule très-commode pour le calcul logarithmique.

16. Or il est visible que les angles $\omega, \omega', \omega''$ ne sont autre chose que les trois côtés du triangle sphérique formé par les trois cercles de la sphère, lesquels joignent les trois lieux apparents de la Comète dans les trois observations. Si donc on considère ce triangle sphérique et qu'on nomme $\Omega, \Omega', \Omega''$ les angles opposés aux côtés $\omega, \omega', \omega''$, on aura par le Théorème connu

$$\cos \omega'' = \cos \omega \cos \omega' + \sin \omega \sin \omega' \cos \Omega'';$$

cette valeur étant substituée dans la première expression de δ^2 , on aura après les réductions

$$\delta^2 = \sin^2 \omega \sin^2 \omega' \sin^2 \Omega'',$$

et extrayant la racine carrée,

$$\delta = \sin \omega \sin \omega' \sin \Omega''.$$

On trouvera de la même manière

$$\delta = \sin \omega' \sin \omega'' \sin \Omega = \sin \omega \sin \omega'' \sin \Omega';$$

ce qui fournit différents moyens de calculer la quantité δ .

Au reste il est facile de prouver que cette quantité n'est autre chose que la solidité prise six fois de la pyramide triangulaire qui a le sommet au centre de la sphère dont le rayon est supposé égal à 1, et qui insiste sur le triangle sphérique formé par les arcs ω , ω' , ω'' , c'est-à-dire qui a pour base le triangle rectiligne formé par les cordes de ces arcs. Car si l'on considère une des faces triangulaires de cette pyramide, celle, par exemple, qui a pour base la corde de l'arc ω , on aura $\frac{\sin \omega}{2}$ pour l'aire de cette face; ensuite, si l'on considère la face qui a pour base la corde de l'arc ω' , il est clair que l'angle d'inclinaison de ces deux faces sera le même que celui que forment les arcs ω et ω' dans le triangle sphérique, et que nous avons dénoté par Ω'' ; et de là il est aisé de déduire qu'en regardant la face $\frac{\sin \omega}{2}$ comme la base de la pyramide, sa hauteur sera exprimée par $\sin \omega' \sin \Omega''$. De sorte que la solidité de la pyramide sera

$$\frac{\sin \omega \sin \omega' \sin \Omega''}{6} = \frac{\delta}{6}.$$

17. Examinons maintenant les autres quantités dépendantes des observations. On voit d'abord par les formules du n° 12 que les expressions de Δ , Δ_1 , Δ_2 sont semblables à celle de δ , et qu'elles résultent de celle-ci en y mettant simplement A, B, C à la place de α , β , γ pour avoir Δ , à la place de α' , β' , γ' pour avoir Δ_1 , et à la place de α'' , β'' , γ'' pour avoir Δ_2 . Or, puisque AR, BR, CR sont les trois coordonnées du Soleil correspondantes aux coordonnées $\alpha\rho$, $\beta\rho$, $\gamma\rho$ de la Comète, R et ρ étant les distances du Soleil et de la Comète à la Terre (10), il s'ensuit que A, B, C sont pour le Soleil ce que α , β , γ sont pour la Comète.

D'où l'on peut conclure qu'on aura les valeurs de Δ , Δ_1 , Δ_2 par les mêmes formules que celle de δ , en substituant successivement le lieu du Soleil dans la première observation à chacun des trois lieux observés de la Comète.

Et, comme les quantités Δ' , Δ'_1 , Δ'_2 et Δ'' , Δ''_1 , Δ''_2 résultent de celles de Δ , Δ_1 , Δ_2 en y changeant A, B, C en A', B', C' et en A'', B'', C'', il s'ensuit que pour avoir ces quantités il n'y aura qu'à employer les lieux du Soleil correspondants à la seconde et à la troisième observation.

Enfin, puisqu'on a trouvé plus haut

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = \cos \omega,$$

ω étant la distance des deux premiers lieux de la Comète, il est facile de voir qu'on aura aussi

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \cos \psi,$$

en dénotant par ψ la distance apparente des lieux de la Comète et du Soleil dans la première observation.

De là on conclura donc que, si ψ , ψ' , ψ'' sont les arcs qui joignent les lieux correspondants de la Comète et du Soleil dans chacune des trois observations, on aura (14)

$$\Gamma = \cos \psi, \quad \Gamma' = \cos \psi', \quad \Gamma'' = \cos \psi''.$$

18. Pour mettre les quantités précédentes sous une forme plus simple, je désignerai, en général, par (ABC) la valeur de six fois la solidité de la pyramide triangulaire qui insiste sur un triangle sphérique quelconque ABC, et qui a le sommet au centre de la sphère. Cette valeur est déterminée par les formules

$$\begin{aligned} (ABC) &= \sqrt{1 + 2 \cos AB \cos AC \cos BC - \cos^2 AB - \cos^2 AC - \cos^2 BC}, \\ &= 2 \sqrt{-\sin \frac{AB+AC+BC}{2} \sin \frac{AB+AC-BC}{2} \sin \frac{AB-AC+BC}{2} \sin \frac{AB-AC-BC}{2}}, \\ &= \sin AB \sin AC \sin A, \\ &= \sin AB \sin BC \sin B, \\ &= \sin AC \sin BC \sin C, \end{aligned}$$

desquelles on pourra, dans chaque cas particulier, employer celle qu'on jugera la plus commode.

D'après cette notation, si l'on désigne par C, C', C'' les trois points de la surface de la sphère où la Comète a été observée au bout des temps t , $t + \theta'$, $t + \theta''$, et par S, S', S'' les trois lieux correspondants du Soleil; qu'ensuite on joigne ces six points par des arcs de grand cercle, et qu'on considère les différents triangles formés par ces arcs et ayant leurs angles à trois de ces six points C, C', C'', S, S', S'', on aura les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}\delta &= (CC'C''), \\ \Delta &= (SC'C''), \quad \Delta_1 = (CS'C''), \quad \Delta_2 = (CC'S), \\ \Delta' &= (S'C'C''), \quad \Delta'_1 = (CS'C''), \quad \Delta'_2 = (CC'S'), \\ \Delta'' &= (S''C'C''), \quad \Delta''_1 = (CS''C''), \quad \Delta''_2 = (CC'S'').\end{aligned}$$

De plus on aura

$$\Gamma = \cos SC, \quad \Gamma' = \cos S'C', \quad \Gamma'' = \cos S''C''.$$

19. Ce sont là les seuls éléments qui dépendent des observations et qui demandent à être calculés séparément pour chaque système de trois observations d'une Comète. On voit que ces éléments dépendent uniquement de la position respective des trois lieux apparents de la Comète et des trois lieux correspondants du Soleil sur la surface de la sphère, c'est-à-dire de l'hexagone sphérique formé par des arcs de grand cercle, qui joignent ces six points de la surface de la sphère; et l'on pourra, dans une première approximation, se contenter de déterminer les angles, les côtés et les diagonales de cet hexagone par le moyen d'un bon globe céleste; mais, quand on voudra mettre plus d'exactitude dans le calcul, il sera nécessaire de les déterminer par les règles de la Trigonométrie.

A l'égard des trois quantités R, R', R'', qui expriment les distances du Soleil à la Terre dans les trois observations, on les aura par les *Tables du Soleil* ou par les *Éphémérides*. On pourra même, à cause de la petitesse de l'excentricité du Soleil, faire

$$R = R' = R'' = 1,$$

ce qui servira à simplifier les équations du n° 14, sans préjudicier sensiblement à leur exactitude.

20. Au reste, si l'on nomme π l'angle que la droite ρ ou le rayon visuel de la Comète fait avec le plan des x et y , et σ l'angle que la projection de cette ligne fait avec l'angle des x , il est facile de voir qu'on aura

$$\alpha = \cos \pi \cos \sigma, \quad \beta = \cos \pi \sin \sigma, \quad \gamma = \sin \pi.$$

De même, si l'on nomme Π et Σ les angles que le rayon R de l'orbite du Soleil fait avec le même plan des x et y , et que la projection de ce rayon fait avec l'axe des x , on aura

$$A = \cos \Pi \cos \Sigma, \quad B = \cos \Pi \sin \Sigma, \quad C = \sin \Pi.$$

Donc, si l'on marque par un et par deux traits toutes les quantités qui se rapportent à la seconde et à la troisième observation, et qu'on substitue ces valeurs dans les formules du n° 12, on aura

$$\begin{aligned}\delta &= \sin(\sigma' - \sigma) \cos \pi \cos \pi' \sin \pi'' \\ &\quad - \sin(\sigma'' - \sigma) \cos \pi \cos \pi'' \sin \pi' \\ &\quad + \sin(\sigma'' - \sigma') \cos \pi' \cos \pi'' \sin \pi, \\ \Delta &= \sin(\sigma' - \Sigma) \cos \Pi \cos \pi' \sin \pi'' \\ &\quad - \sin(\sigma'' - \Sigma) \cos \Pi \cos \pi'' \sin \pi' \\ &\quad + \sin(\sigma'' - \sigma') \cos \pi' \cos \pi'' \sin \Pi, \\ \Delta_1 &= \sin(\Sigma - \sigma) \cos \pi \cos \Pi \sin \pi'' \\ &\quad - \sin(\sigma'' - \sigma) \cos \pi \cos \pi'' \sin \Pi \\ &\quad + \sin(\sigma'' - \Sigma) \cos \Pi \cos \pi'' \sin \pi, \\ \Delta_2 &= \sin(\sigma' - \sigma) \cos \pi \cos \pi' \sin \Pi \\ &\quad - \sin(\Sigma - \sigma) \cos \pi \cos \Pi \sin \pi' \\ &\quad + \sin(\Sigma - \sigma') \cos \pi' \cos \Pi \sin \pi.\end{aligned}$$

544 DE LA DÉTERMINATION DES ORBITES DES COMÈTES

Et pour avoir les valeurs de Δ' , Δ'_1 , Δ'_2 et de Δ'' , Δ''_1 , Δ''_2 , il n'y aura qu'à marquer successivement d'un et de deux traits les lettres II et Σ .

Enfin on aura (13)

$$\Gamma = \cos \Pi \cos \varpi \cos(\Sigma - \sigma) + \sin \Pi \sin \varpi,$$

$$\Gamma' = \cos \Pi' \cos \varpi' \cos(\Sigma' - \sigma') + \sin \Pi' \sin \varpi',$$

$$\Gamma'' = \cos \Pi'' \cos \varpi'' \cos(\Sigma'' - \sigma'') + \sin \Pi'' \sin \varpi''.$$

Si l'on suppose que le plan des x et y soit celui de l'écliptique, et que l'axe des x soit dirigé vers le premier point d'Aries, il est clair que ϖ , ϖ' , ϖ'' seront les latitudes observées de la Comète au bout des temps t , $t + \theta'$, $t + \theta''$, et que σ , σ' , σ'' seront les longitudes correspondantes; ainsi ces quantités seront données par les observations. De plus on aura, dans cette hypothèse, $\Pi = 0$, $\Pi' = 0$, $\Pi'' = 0$, et Σ , Σ' , Σ'' seront les trois longitudes du Soleil au temps des trois observations, longitudes qu'on aura immédiatement par les *Éphémérides*.

Mais, au lieu de prendre le plan de l'écliptique pour celui des x et y , on peut prendre également l'équateur pour ce plan; alors il est visible que ϖ , ϖ' , ϖ'' seront les trois déclinaisons observées de la Comète, et σ , σ' , σ'' les trois ascensions droites. De même Π , Π' , Π'' seront les trois déclinaisons, et Σ , Σ' , Σ'' les trois ascensions droites du Soleil, correspondantes à celles de la Comète. Les premières sont données immédiatement par les observations, et les secondes le sont par les *Éphémérides*.

21. Après avoir donné la manière de calculer les quantités de la première espèce, lesquelles dépendent des observations et de la Théorie du Soleil, considérons maintenant celles de la seconde espèce, lesquelles dépendent de l'orbite de la Comète.

Soit, pour plus de simplicité,

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = p, \quad \frac{1}{r^2} \frac{d(rdr)}{dt} = q,$$

on aura, par les formules des nos 5 et 6, en y marquant la lettre δ d'un

D'APRÈS TROIS OBSERVATIONS.

515

trait,

$$f' = 1 - \frac{\theta'^2}{2r^2} + \frac{\theta'^3 p}{2r^2} + \frac{\theta'^4}{8r^2} \left(q - 5p^2 + \frac{1}{3r^2} \right) - \frac{\theta'^5}{8r^2} \left(3pq + \frac{p}{r^2} - 7p^3 \right) - \dots,$$

$$g' = \theta' - \frac{\theta'^3}{6r^2} + \frac{\theta'^4 p}{4r^2} + \frac{\theta'^5}{8r^2} \left(\frac{3q}{5} - 3p^2 + \frac{1}{15r^2} \right) - \dots,$$

$$h' = 1 + 2\theta' p + \theta'^2 q - \frac{\theta'^3 p}{3r^2} - \frac{\theta'^4}{4r^2} \left(\frac{q}{3} - p^2 \right) + \frac{\theta'^5}{4r^2} \left(\frac{3pq}{5} + \frac{p}{15r^2} - p^3 \right) + \dots$$

Et, marquant la quantité θ de deux traits, on aura les valeurs de f'' , g'' , h'' .

Substituant ces valeurs dans l'expression de

$$l = f'g'' - f''g',$$

on aura, après les réductions,

$$l = \theta'' - \theta' - \frac{(\theta'' - \theta')^2}{6r^2} + \frac{(\theta'' - \theta')^2 (\theta'' + \theta') p}{4r^2} + \frac{(\theta'' - \theta')^2 (3\theta''^2 + 4\theta'\theta'' + 3\theta'^2) \left(\frac{q}{5} - p^2 \right)}{8r^2} + \frac{(\theta'' - \theta')^2}{3.5.8.r^2} + \dots$$

Dans ces formules, les quantités θ' et θ'' sont connues, puisqu'elles expriment les intervalles de temps, c'est-à-dire les angles que le Soleil a parcourus par son mouvement moyen entre les trois observations de la Comète (1 et 11), angles qui doivent être évalués, pour l'homogénéité, en parties du rayon; il n'y a donc d'inconnues que les trois quantités r , p , q , lesquelles déterminent les trois principaux éléments de la Comète, de manière que, nommant a le demi-grand axe, b le demi-paramètre, φ l'angle du rayon vecteur r avec le périhélie, on a (9)

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r} - r^2 q, \quad b = 2r - \frac{r^2}{a} - r^3 p, \quad \cos \varphi = \frac{b - r}{r \sqrt{1 - \frac{b}{a}}}.$$

22. Il ne s'agira donc plus que de faire ces différentes substitutions dans les trois équations finales du n° 14, et de déterminer, par le moyen

de ces équations, les trois inconnues r, p, q ; c'est à quoi se réduit la solution que nous avons annoncée du Problème des Comètes.

Il est visible que ces équations seront d'autant plus compliquées qu'on prendra plus de termes dans les séries qui expriment les valeurs des quantités l, g', h', g'', h'' ; mais comme on peut rendre ces séries aussi convergentes que l'on veut en diminuant les valeurs des intervalles δ' et δ'' entre les observations, on a un moyen de les simplifier sans préjudice de l'exactitude.

Supposons, par exemple, qu'on s'arrête aux troisièmes dimensions de δ' et δ'' , on aura alors

$$l = \delta'' - \delta' - \frac{(\delta'' - \delta')^3}{6r^3},$$

$$g' = \delta' - \frac{\delta'^3}{6r^3}, \quad g'' = \delta'' - \frac{\delta''^3}{6r^3},$$

$$h' = 1 + 2\delta'p + \delta'^2q - \frac{\delta'^2p}{3r^3}, \quad h'' = 1 + 2\delta''p + \delta''^2q - \frac{\delta''^2p}{3r^3}.$$

Par ces substitutions on aura trois équations, dont la première ne contiendra que l'inconnue r , et dont les deux autres contiendront de plus les inconnues p et q , mais simplement sous la forme linéaire.

23. En effet, si l'on fait, pour abrégér,

$$M = \Delta R(\delta'' - \delta') - \Delta' R' \delta'' + \Delta'' R'' \delta',$$

$$N = \Delta R(\delta'' - \delta')^2 - \Delta' R' \delta''^2 + \Delta'' R'' \delta'^2,$$

et qu'on dénote par M_1, N_1 , et par M_2, N_2 ce que deviennent ces expressions de M, N , en y changeant $\Delta, \Delta', \Delta''$ en $\Delta_1, \Delta'_1, \Delta''_1$ et en $\Delta_2, \Delta'_2, \Delta''_2$, on aura (12)

$$p = \frac{M - \frac{N}{6r^3}}{\delta \left[\delta'' - \delta' - \frac{(\delta'' - \delta')^3}{6r^3} \right]}, \quad p' = -\frac{M_1 - \frac{N_1}{6r^3}}{\delta \left(\delta'' - \frac{\delta''^3}{6r^3} \right)}, \quad p'' = \frac{M_2 - \frac{N_2}{6r^3}}{\delta \left(\delta' - \frac{\delta'^3}{6r^3} \right)},$$

substituant ces valeurs dans les trois équations suivantes (13)

$$\rho^2 - 2\Gamma R\rho + R^2 = r^2,$$

$$\rho'^2 - 2\Gamma' R'\rho' + R'^2 = r^2 \left(1 + 2\delta'p + \delta'^2q - \frac{\delta'^2p}{3r^3} \right),$$

$$\rho''^2 - 2\Gamma'' R''\rho'' + R''^2 = r^2 \left(1 + 2\delta''p + \delta''^2q - \frac{\delta''^2p}{3r^3} \right),$$

il est visible que la première équation contiendra seulement l'inconnue r , laquelle y montera au huitième degré; et cette inconnue étant déterminée par la résolution de cette équation, on aura ensuite p et q par les deux autres équations, lesquelles, en y négligeant pour plus de simplicité les termes du troisième ordre $\frac{\delta'^2p}{3r^3}, \frac{\delta''^2p}{3r^3}$, donnent sur-le-champ

$$p = \frac{(\rho'^2 - 2\Gamma' R'\rho' + R'^2 - r^2)\delta''^2 - (\rho''^2 - 2\Gamma'' R''\rho'' + R''^2 - r^2)\delta'^2}{2r^2\delta'\delta''(\delta'' - \delta')},$$

$$q = \frac{(\rho'^2 - 2\Gamma' R'\rho' + R'^2 - r^2)\delta'' - (\rho''^2 - 2\Gamma'' R''\rho'' + R''^2 - r^2)\delta'}{r^2\delta'\delta''(\delta' - \delta'')}.$$

24. Pour que l'orbite soit parabolique, il faut que l'on ait $a = \infty$; donc (21)

$$\frac{1}{r} - r^2q = 0, \quad q = \frac{1}{r^3}.$$

En faisant cette substitution on aura, comme l'on voit, une seconde équation en r , laquelle montera de même au huitième degré; mais si dans le numérateur de l'expression de q on met à la place de r^2 sa valeur tirée de la première équation, savoir

$$r^2 = \rho^2 - 2\Gamma R\rho + R^2,$$

qu'ensuite on substitue partout les valeurs de ρ, ρ', ρ'' en r , on trouvera que l'équation dont il s'agit ne montera plus qu'au sixième degré.

En général, comme cette seconde équation doit avoir lieu en même temps que la première, pour que l'orbite soit parabolique, il est clair que dans ce cas les deux équations doivent avoir un diviseur commun

qu'on trouvera par les méthodes connues, et ce diviseur sera lui-même ou contiendra du moins la racine cherchée. On sait en effet depuis longtemps que le Problème de la détermination des orbites paraboliques est plus que déterminé par trois observations complètes, c'est-à-dire par trois longitudes et trois latitudes observées; car on a de cette manière six données, tandis que les éléments à déterminer ne sont qu'au nombre de cinq.

25. Nous venons de trouver dans le n° 23 que l'équation en r est du huitième degré; cela est vrai, en général, mais je remarque qu'une des racines de cette équation est nécessairement égale à R , de sorte qu'en faisant disparaître cette racine l'équation dont il s'agit s'abaissera au septième degré.

Car, puisque la force qui fait décrire à la Comète son orbite autour du Soleil est la même que celle qui fait décrire à la Terre la sienne, il s'ensuit que la Comète peut aussi décrire la même orbite que la Terre et coïncider par conséquent avec elle. Or dans ce cas il est visible que la direction des rayons visuels menés du centre de la Terre à la Comète devient indéterminée, en sorte que les lieux apparents de la Comète peuvent être supposés quelconques, et par conséquent toujours conformes à ceux qui ont été observés et qu'on prend pour les données du Problème. Ainsi, quelles que soient les valeurs de ces données, on est assuré d'avoir une solution possible en supposant la coïncidence de la Comète avec la Terre, et cette solution doit nécessairement être renfermée dans la solution générale.

Or dans cette supposition les distances ρ , ρ' , ρ'' de la Comète à la Terre deviennent nulles; donc, faisant $r = R$ dans les expressions de ces distances données plus haut (23), il faudra qu'elles deviennent nulles; donc

$$M - \frac{N}{6R^2} = 0, \quad M_1 - \frac{N_1}{6R^2} = 0, \quad M_2 - \frac{N_2}{6R^2} = 0;$$

ce qui donne

$$M = \frac{N}{6R^2}, \quad M_1 = \frac{N_1}{6R^2}, \quad M_2 = \frac{N_2}{6R^2}.$$

De sorte que, substituant ces valeurs dans les expressions dont il s'agit, on aura

$$\rho = \frac{\frac{N}{6} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right)}{\delta \left[\theta'' - \theta' - \frac{(\theta'' - \theta')^2}{6r^2} \right]}, \quad \rho' = -\frac{\frac{N_1}{6} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right)}{\delta \left(\theta'' - \frac{\theta'^2}{6r^2} \right)}, \quad \rho'' = \frac{\frac{N_2}{6} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right)}{\delta \left(\theta' - \frac{\theta''^2}{6r^2} \right)}.$$

La valeur de ρ étant maintenant substituée dans l'équation

$$\rho^2 - 2\Gamma R\rho + R^2 = r^2,$$

on aura celle-ci

$$\frac{N^2}{36} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right)^2 - \frac{\Gamma R N}{3} \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) \left[\theta'' - \theta' - \frac{(\theta'' - \theta')^2}{6r^2} \right] \delta + (R^2 - r^2) \left[\theta'' - \theta' - \frac{(\theta'' - \theta')^2}{6r^2} \right]^2 \delta^2 = 0,$$

laquelle, étant multipliée par $R^2 r^2$, devient

$$\frac{N^2}{36} (r^2 - R^2)^2 - \frac{\Gamma R N}{3} (r^2 - R^2) \left[(\theta'' - \theta') r^2 - \frac{(\theta'' - \theta')^2}{6} \right] \delta + R^2 (R^2 - r^2) \left[(\theta'' - \theta') r^2 - \frac{(\theta'' - \theta')^2}{6} \right]^2 \delta^2 = 0,$$

équation qu'on voit bien être divisible par $R - r$, et qui après cette division ne montera plus qu'au septième degré et aura par conséquent toujours au moins une racine réelle.

26. En général, il suit du raisonnement du numéro précédent que si dans les expressions de ρ , ρ' , ρ'' du n° 12 on change r en R , et de même dr en dR et $d(rdr)$ en $d(RdR)$, ces expressions doivent devenir nulles d'elles-mêmes. De sorte que, si l'on dénote par L , G' , G'' ce que deviennent alors les quantités l , g' , g'' , on aura nécessairement ces trois équations

$$\Delta RL - \Delta' R' G'' + \Delta'' R'' G' = 0,$$

$$\Delta_1 RL - \Delta'_1 R' G'' + \Delta''_1 R'' G' = 0,$$

$$\Delta_2 RL - \Delta'_2 R' G'' + \Delta''_2 R'' G' = 0.$$

Mais pour ne laisser aucun doute sur la vérité de cette conclusion, nous allons la démontrer directement par le calcul.

27. Pour cela on remarquera que, puisque la Terre se meut autour du Soleil par la même force qui y fait mouvoir les Comètes, il s'ensuit que les formules générales des n^{os} 5 et 6 auront lieu aussi pour l'orbite de la Terre, de même que pour l'orbite apparente du Soleil.

Si donc on dénote par X, Y, Z les trois coordonnées rectangulaires du lieu du Soleil par rapport à la Terre considérée comme en repos, et par R le rayon vecteur ou la distance du Soleil; qu'on désigne de même par F, G, H ce que deviennent les quantités f, g, h en y changeant r en R, on aura pareillement

$$FX + G \frac{dX}{dt}, \quad FY + G \frac{dY}{dt}, \quad FZ + G \frac{dZ}{dt} \quad \text{et} \quad HR$$

pour les valeurs de X, Y, Z et R² après le temps $t + \theta$.

Donc, suivant les suppositions des n^{os} 11 et 12, on aura

$$AR = X, \quad BR = Y, \quad CR = Z,$$

$$A'R' = F'X + G' \frac{dX}{dt}, \quad B'R' = F'Y + G' \frac{dY}{dt}, \quad C'R' = F'Z + G' \frac{dZ}{dt},$$

$$A''R'' = F''X + G'' \frac{dX}{dt}, \quad B''R'' = F''Y + G'' \frac{dY}{dt}, \quad C''R'' = F''Z + G'' \frac{dZ}{dt}.$$

D'où, éliminant X, $\frac{dX}{dt}$, Y, ... et faisant

$$L = F'G' - F''G'',$$

on aura

$$ARL - A'R'G' + A''R''G'' = 0,$$

$$BRL - B'R'G' + B''R''G'' = 0,$$

$$CRL - C'R'G' + C''R''G'' = 0;$$

équations qui étant ajoutées ensemble, après avoir été multipliées respectivement par $\beta'\gamma' - \beta''\gamma'', \gamma'\alpha' - \gamma''\alpha'', \alpha'\beta' - \alpha''\beta'',$ par $\gamma\beta'' - \beta\gamma', \dots$,

donneront (1) celles-ci

$$\Delta RL - \Delta'R'G' + \Delta''R''G'' = 0,$$

$$\Delta_1 RL - \Delta_1'R'G' + \Delta_1''R''G'' = 0,$$

$$\Delta_2 RL - \Delta_2'R'G' + \Delta_2''R''G'' = 0,$$

qui sont celles qu'il s'agissait de démontrer.

28. Par le moyen de ces équations on peut réduire les valeurs de ρ, ρ', ρ'' du n^o 12 à cette forme

$$\rho = \frac{\Delta R(l-L) - \Delta'R'(g''-G'') + \Delta''R''(g'-G')}{\delta l},$$

$$\rho' = -\frac{\Delta_1 R(l-L) - \Delta_1'R'(g''-G'') + \Delta_1''R''(g'-G')}{\delta g''},$$

$$\rho'' = \frac{\Delta_2 R(l-L) - \Delta_2'R'(g''-G'') + \Delta_2''R''(g'-G')}{\delta g'}.$$

On peut ensuite réduire les équations du n^o 13 à la forme suivante

$$\rho^2 - 2\Gamma R\rho = r^2 - R^2,$$

$$\rho'^2 - 2\Gamma'R'\rho' = h'r^2 - H'R^2,$$

$$\rho''^2 - 2\Gamma''R''\rho'' = h''r^2 - H''R^2.$$

Or, si l'on fait

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dt} = P, \quad \frac{1}{R^2} \frac{d(RdR)}{dt} = Q,$$

on aura pour L, G', H', G'', H'' les mêmes expressions que pour l, g', h', g'', h'' (21), en y changeant seulement r, p, q en R, P, Q; et il est visible que dans les trois équations finales les inconnues r, p, q auront pour racines les quantités R, P, Q, puisqu'en faisant

$$r = R, \quad p = P, \quad q = Q,$$

ce qui donne

$$l = L, \quad g = G, \quad h = H,$$

tous les termes de ces équations se détruisent d'eux-mêmes.

29. On pourrait aussi se servir des équations du n° 27 pour éliminer des expressions de ρ , ρ' , ρ'' les quantités Δ , Δ_1 , Δ_2 . On trouverait de cette manière

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\Delta R (IG' - Lg') - \Delta' R' (g''G' - g'G'')}{\delta IG'}, \\ \rho' &= -\frac{\Delta_1 R (IG' - Lg') - \Delta_1' R' (g''G' - g'G'')}{\delta IG'}, \\ \rho'' &= \frac{\Delta_2 R (IG' - Lg') - \Delta_2' R' (g''G' - g'G'')}{\delta IG'},\end{aligned}$$

et ces valeurs, étant employées à la place de celles du numéro précédent, donneront aussi des équations finales dont les inconnues r , p , q auront pour racines R , P , Q .

30. Enfin, si l'on reprend les formules du n° 27, et qu'on substitue dans les valeurs de $A'R'$, $B'R'$,... les valeurs de X , Y , Z et de $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$, on aura

$$\begin{aligned}A'R' &= \left(F'A + G'\frac{dA}{dt}\right)R + G'A\frac{dR}{dt}, \\ B'R' &= \left(F'B + G'\frac{dB}{dt}\right)R + G'B\frac{dR}{dt}, \\ C'R' &= \left(F'C + G'\frac{dC}{dt}\right)R + G'C\frac{dR}{dt},\end{aligned}$$

et, changeant seulement F' , G' en F'' , G'' , on aura les valeurs de $A''R''$, $B''R''$, $C''R''$.

De là on trouvera, d'après les formules du n° 12 et en supposant que les différences de Δ , Δ_1 , Δ_2 se rapportent seulement aux variations de A , B , C , on trouvera, dis-je,

$$\begin{aligned}\Delta'R' &= \left(F'R + G'\frac{dR}{dt}\right)\Delta + G'R\frac{d\Delta}{dt}, \\ \Delta_1'R' &= \left(F'R + G'\frac{dR}{dt}\right)\Delta_1 + G'R\frac{d\Delta_1}{dt}, \\ \Delta_2'R' &= \left(F'R + G'\frac{dR}{dt}\right)\Delta_2 + G'R\frac{d\Delta_2}{dt},\end{aligned}$$

et, changeant F' , G' en F'' , G'' , on aura les valeurs de $\Delta''R''$, $\Delta_1''R''$, $\Delta_2''R''$.

Si donc on fait ces substitutions dans les expressions de ρ , ρ' , ρ'' du numéro cité et qu'on suppose, pour abréger,

$$m = l - F'g'' + F''g', \quad n = G''g' - G'g'',$$

on aura, en mettant P à la place de $\frac{1}{R} \frac{dR}{dt}$,

$$\begin{aligned}\rho &= R \frac{(m + nP)\Delta + n\frac{d\Delta}{dt}}{l\delta}, \\ \rho' &= -R \frac{(m + nP)\Delta_1 + n\frac{d\Delta_1}{dt}}{g''\delta}, \\ \rho'' &= R \frac{(m + nP)\Delta_2 + n\frac{d\Delta_2}{dt}}{g'\delta}.\end{aligned}$$

De plus, en faisant

$$\Gamma_1 = A\alpha' + B\beta' + C\gamma', \quad \Gamma_2 = A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'',$$

et supposant aussi que les différentielles de Γ , Γ_1 , Γ_2 ne regardent que la variabilité de A , B , C , on aura d'après les formules du n° 13

$$\Gamma'R' = R \left[(F' + G'P)\Gamma_1 + G'\frac{d\Gamma_1}{dt} \right], \quad \Gamma''R'' = R \left[(F'' + G''P)\Gamma_2 + G''\frac{d\Gamma_2}{dt} \right];$$

ces valeurs étant substituées dans les trois équations du n° 28, on aura, pour équations finales, celles-ci

$$\begin{aligned}\left[(m + nP)\Delta + n\frac{d\Delta}{dt} \right]^2 - 2\Gamma \left[(m + nP)\Delta + n\frac{d\Delta}{dt} \right] l\delta + \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) l^2\delta^2 &= 0, \\ \left[(m + nP)\Delta_1 + n\frac{d\Delta_1}{dt} \right]^2 + 2 \left[(F' + G'P)\Gamma_1 + G'\frac{d\Gamma_1}{dt} \right] \left[(m + nP)\Delta_1 + n\frac{d\Delta_1}{dt} \right] g''\delta & \\ + \left(H' - h'\frac{r^2}{R^2} \right)^2 g''^2\delta^2 &= 0, \\ \left[(m + nP)\Delta_2 + n\frac{d\Delta_2}{dt} \right]^2 - 2 \left[(F'' + G''P)\Gamma_2 + G''\frac{d\Gamma_2}{dt} \right] \left[(m + nP)\Delta_2 + n\frac{d\Delta_2}{dt} \right] g'\delta & \\ + \left(H'' - h''\frac{r^2}{R^2} \right)^2 g'^2\delta^2 &= 0.\end{aligned}$$

31. Pour faire usage de ces équations, on calculera d'abord les quantités Δ , Δ_1 , Δ_2 par les formules du n° 18, et pour avoir les différentielles de ces quantités, il n'y aura qu'à faire varier le lieu du Soleil, lequel est déterminé par les quantités A, B, C.

Soit donc Ss le petit arc de l'écliptique que le Soleil parcourt pendant le temps dt ; il est facile de prouver que la variation de l'arc CS sera

$$- Ss \cos CSs,$$

CSs étant l'angle que l'arc Cs fait avec l'écliptique; par la même raison les variations des arcs C'S, C''S seront

$$- Ss \cos C'Ss, \quad - Ss \cos C''Ss.$$

Mais on a par la Théorie

$$dt = R^2 \times Ss,$$

à cause que t est le mouvement moyen du Soleil et que la distance moyenne est prise pour l'unité (1); donc on aura

$$Ss = \frac{dt}{R^2}.$$

Si donc on emploie pour la valeur de Δ la première expression de $(SC'C'')$, savoir (18)

$$\sqrt{1 + 2 \cos SC' \cos SC'' \cos C'C'' - \cos^2 SC' - \cos^2 SC'' - \cos^2 C'C''},$$

et qu'on différentie en faisant varier en même temps les arcs SC', SC'', on aura

$$\Delta \frac{d\Delta}{dt} = \frac{(\cos SC'' \cos C'C' - \cos SC') \sin SC' \cos C'Ss}{R^2} + \frac{(\cos SC' \cos C'C'' - \cos SC'') \sin SC'' \cos C'Ss}{R^2};$$

mais en considérant le triangle SC'C'', on a par les formules connues

$$\cos SC' = \cos SC'' \cos C'C'' + \sin SC'' \sin C'C'' \cos SC'C',$$

et de même

$$\cos SC'' = \cos SC' \cos C'C'' + \sin SC' \sin C'C'' \cos SC'C';$$

donc, substituant dans l'équation précédente et divisant par Δ , on aura

$$\frac{d\Delta}{dt} = - \frac{\sin SC' \sin SC'' \sin C'C'' [\cos SC' C' \cos C'Ss + \cos SC'' C' \cos C'Ss]}{\Delta R^2},$$

et l'on trouvera de la même manière

$$\frac{d\Delta_1}{dt} = - \frac{\sin SC' \sin SC'' \sin C'C'' [\cos SC' C' \cos CSs + \cos SC'' C' \cos CSs]}{\Delta_1 R^2},$$

$$\frac{d\Delta_2}{dt} = - \frac{\sin SC' \sin SC'' \sin C'C'' [\cos SC' C' \cos CSs + \cos SC'' C' \cos CSs]}{\Delta_2 R^2}.$$

On pourrait trouver d'autres expressions de ces différentielles en employant d'autres formules pour les valeurs de Δ , Δ_1 , Δ_2 ; mais nous ne nous y arrêtons pas.

Nous remarquerons seulement que, si l'on voulait faire usage des formules du n° 20, il suffirait d'y faire varier l'arc Σ de

$$d\Sigma = \frac{dt}{R^2}$$

dans le cas où Σ est la longitude du Soleil; mais lorsque Σ représente l'ascension droite du Soleil et Π sa déclinaison, il faudra faire varier en même temps Σ et Π , en faisant

$$d\Sigma = \frac{\cos \pi dt}{R^2 \cos^2 \Pi}, \quad d\Pi = \frac{\sin \pi \cos \Sigma dt}{R^2},$$

π étant l'obliquité de l'écliptique; ce qui est facile à démontrer par les analogies différentielles connues.

32. A l'égard des quantités Γ , Γ_1 , Γ_2 , il est facile de voir que ce sont les mêmes que les quantités Γ , Γ' , Γ'' des n° 17 et suivants, mais en supposant que dans les dernières Γ' et Γ'' le lieu du Soleil soit le même que dans la première Γ .

Ainsi l'on aura (18)

$$\Gamma = \cos SC, \quad \Gamma_1 = \cos SC', \quad \Gamma_2 = \cos SC'',$$

et différentiant, comme nous l'avons pratiqué dans le numéro précédent, on aura sur-le-champ

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\sin SC \cos CS}{R^2}, \quad \frac{dT_1}{dt} = \frac{\sin SC' \cos C'S_1}{R^2}, \quad \frac{dT_2}{dt} = \frac{\sin SC'' \cos C''S_2}{R^2}.$$

Et si l'on veut employer les formules du n° 20, il n'y aura qu'à faire

$$\Pi' = \Pi'' = \Pi, \quad \Sigma' = \Sigma'' = \Sigma,$$

et ensuite différentier comme dans le numéro précédent.

33. Enfin, pour ne rien laisser à désirer sur la manière de se servir des équations du n° 30, nous remarquerons encore que, puisque la moyenne distance du Soleil est prise pour l'unité, on aura dans les formules du n° 9, en changeant r en R ,

$$a = 1, \quad b = 1 - E^2,$$

E étant l'excentricité de l'orbite du Soleil = 0,0168; donc

$$\frac{d(R dR)}{dR^2} = \frac{1}{R} - 1, \quad R^2 \frac{dR^2}{dR^2} = E^2 - (R - 1)^2;$$

par conséquent (28)

$$Q = \frac{1-R}{R^3}, \quad P^2 = \frac{E^2 - (R-1)^2}{R^4}.$$

34. Les équations du n° 30 ont sur celles du n° 14 l'avantage de ne demander que le calcul d'un seul lieu du Soleil; de sorte qu'à cet égard elles fournissent, analytiquement parlant, une solution plus simple du problème proposé; mais, d'un autre côté, elles paraissent moins commodes pour la pratique que ces dernières.

Quoi qu'il en soit, lorsqu'on voudra faire usage des formules de ce Mémoire, il sera peut-être à propos de prendre négativement l'intervalle δ' entre les deux premières observations, en sorte que les trois observations répondent aux temps $t - \delta'$, t , $t + \delta''$, et que les quantités sans traits se rapportent à l'observation du milieu, celles avec un trait à la première

observation, et celles avec deux traits à la troisième. Par ce moyen les intervalles δ' et δ'' pourront être pris peu différents l'un de l'autre; de sorte que les séries qui expriment les quantités g' , h' en puissances de δ' et celles qui expriment les quantités g'' , h'' en puissances de δ'' seront à peu près également convergentes. A l'égard de la série qui exprime la quantité l (21), elle deviendra un peu moins convergente dans le cas de δ' négatif; mais elle aura l'avantage que son troisième terme deviendra nul ou presque nul, lorsque les intervalles entre les trois observations seront égaux ou presque égaux, à cause que $\delta' + \delta''$ sera zéro ou à peu près.

35. Nous avons déjà vu dans les n° 23 et suivants qu'en s'arrêtant aux troisièmes puissances de δ' et δ'' , la première équation ne contient que l'inconnue r , et que les deux autres contiennent les inconnues p et q sous une forme linéaire. Si l'on poussait la précision jusqu'aux quatrièmes dimensions de δ' et δ'' , la première équation contiendrait de plus l'inconnue p sous la forme linéaire, et les deux autres contiendraient p , q et p^2 ; de sorte qu'en éliminant p de la première, on aurait une équation en r qui monterait à un degré plus haut que le huitième, et ainsi de suite; mais il suffira de résoudre cette équation par approximation, et, en général, ayant trouvé les premières valeurs de r , p , q , on pourra s'en servir pour en trouver d'autres de plus en plus exactes, sans résoudre des équations plus hautes que le premier degré.

Les quantités r , p , q donneront immédiatement le grand axe, le paramètre et le lieu du périhélie par les formules du n° 21; et le signe de p , selon qu'il sera positif ou négatif, fera connaître si la Comète a déjà passé le périhélie, ou non.

Il ne restera donc qu'à déterminer la position du plan de l'orbite; ce qu'on pourra faire par les méthodes trigonométriques connues, en employant les valeurs des distances ρ et ρ' de la Comète à la Terre dans deux observations. Mais, si l'on voulait déterminer analytiquement l'inclinaison et le lieu du nœud, il n'y aurait qu'à faire usage des formules données dans le n° 9, lesquelles, en y substituant pour x , y , z et $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$

leurs valeurs déduites des six premières équations du n° 11, se réduisent à celles-ci

$$\tan \omega \sin \psi = \frac{(\beta p - BR)(\gamma' p' - C'R') - (\gamma p - CR)(\beta' p' - B'R')}{(\alpha p - AR)(\beta' p' - B'R') - (\beta p - BR)(\alpha' p' - A'R')},$$

$$\tan \omega \cos \psi = \frac{(\alpha p - AR)(\gamma' p' - C'R') - (\gamma p - CR)(\alpha' p' - A'R')}{(\alpha p - AR)(\beta' p' - B'R') - (\beta p - BR)(\alpha' p' - A'R')};$$

dans lesquelles les quantités $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \dots$ sont données par les observations ou par la Théorie du Soleil (20).

Si l'on emploie dans ces formules les longitudes et les latitudes géocentriques de la Comète, alors ω sera l'inclinaison du plan de l'orbite sur l'écliptique, et ψ la longitude de la ligne des nœuds; mais si l'on y emploie les ascensions droites et les déclinaisons observées de la Comète, dans ce cas la quantité ω deviendra égale à l'inclinaison de l'orbite de la Comète par rapport à l'équateur, et ψ sera l'ascension droite des nœuds de cette orbite avec l'équateur.

Au reste, pour faciliter autant qu'il est possible l'usage de cette méthode à ceux qui voudront s'en servir dans la détermination des orbites des Comètes, je vais mettre ici sous les yeux les équations de ce Problème réduites à la forme la plus générale et la plus simple.

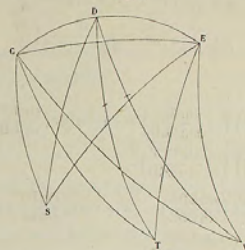
Équations pour déterminer les éléments de l'orbite d'une Comète ou d'une Planète, par trois observations peu distantes entre elles.

36. Supposons que la Comète dont il s'agit de déterminer l'orbite ait été observée trois fois dans un espace de temps peu considérable. Soient C, D, E (fig. 3) les trois lieux apparents de la Comète marqués sur la surface de la sphère dont on suppose le rayon = 1, et soient de même S, T, V les trois lieux correspondants du Soleil; en sorte que dans la première observation la Comète ait paru en C et le Soleil en S, que dans la seconde observation la Comète ait paru en D et le Soleil en T, et que dans la troisième la Comète ait été en E et le Soleil en V.

Qu'on joigne ces six points par les arcs de grands cercles CD, CE,

CS, ..., on aura différents triangles sphériques CDE, CDS, CDT, ... dont on pourra déterminer les côtés et les angles par le calcul, ou même mécaniquement par le moyen d'un bon globe céleste.

Fig. 3.



Soit maintenant θ le temps écoulé entre la première et la troisième observation; ce temps doit être représenté par le mouvement moyen du Soleil, c'est-à-dire par la différence entre les longitudes moyennes du Soleil en V et en S, réduite en parties du rayon, c'est-à-dire divisée par l'arc $57^{\circ} 17' 45''$; de sorte que si le temps θ est de i jours, on aura

$$\theta = \frac{i}{58,1324}.$$

Soit de plus l'intervalle entre la première et la seconde observation, à l'intervalle entre la seconde et la troisième, comme 1 à n ; en sorte que

$\frac{\theta}{n+1}$ soit le premier de ces intervalles, et $\frac{n\theta}{n+1}$ le second.

Enfin soit la distance moyenne du Soleil à la Terre prise pour l'unité, et soient ξ, δ, λ les véritables distances du Soleil à la Terre aux temps des trois observations, c'est-à-dire lorsque le Soleil était respectivement en S, T, V. Ces distances sont données par les *Éphémérides*, et, à cause de la petitesse de l'excentricité du Soleil, on pourra le plus souvent supposer $\xi = \delta = \lambda = 1$.

37. Cela posé, soit

$$\begin{aligned} t &= 1 - \frac{\theta^2}{6r^3} + \frac{(n-1)\theta^2}{4(n+1)r^3}p + \frac{(3n^2-4n+3)\theta^4}{8(n+1)^3r^3}\left(\frac{q}{5} - p^3\right) + \frac{\theta^4}{3.5.8.r^3} + \dots \\ s &= 1 - \frac{n^2\theta^2}{6(n+1)^2r^3} + \frac{n^2\theta^2}{4(n+1)^2r^3}p + \frac{n^4\theta^4}{8(n+1)^4r^3}\left(\frac{3q}{5} - 3p^3 + \frac{1}{15r^3}\right) - \dots \\ u &= 1 - \frac{\theta^2}{6(n+1)^2r^3} - \frac{\theta^2}{4(n+1)^2r^3}p + \frac{\theta^4}{8(n+1)^4r^3}\left(\frac{3q}{5} - 3p^3 + \frac{1}{15r^3}\right) - \dots \end{aligned}$$

Soit ensuite

$$\begin{aligned} x &= n\epsilon s \left(\frac{\sin CS}{\sin CD} \right) \left(-\frac{\sin ECS}{\sin ECD} \right) - (n+1)\delta t \left(\frac{\sin CT}{\sin CD} \right) \left(-\frac{\sin ECT}{\sin ECD} \right) \\ &\quad + \lambda u \left(\frac{\sin CV}{\sin CD} \right) \left(-\frac{\sin ECV}{\sin ECD} \right), \\ y &= n\epsilon s \left(\frac{\sin DS}{\sin DC} \right) \left(\frac{\sin EDS}{\sin EDC} \right) - (n+1)\delta t \left(\frac{\sin DT}{\sin DC} \right) \left(\frac{\sin EDT}{\sin EDC} \right) \\ &\quad + \lambda u \left(\frac{\sin DV}{\sin DC} \right) \left(\frac{\sin EDV}{\sin EDC} \right), \\ z &= n\epsilon s \left(\frac{\sin DS}{\sin DE} \right) \left(\frac{\sin CDS}{\sin CDE} \right) - (n+1)\delta t \left(\frac{\sin DT}{\sin DE} \right) \left(\frac{\sin CDT}{\sin CDE} \right) \\ &\quad + \lambda u \left(\frac{\sin DV}{\sin DE} \right) \left(\frac{\sin CDV}{\sin CDE} \right). \end{aligned}$$

Enfin soit

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= r^2 - \frac{2r^2\theta}{n+1}p + \frac{r^2\theta^2}{(n+1)^2}q + \frac{\theta^3}{3(n+1)^3r}p - \frac{\theta^4}{4(n+1)^4r}\left(\frac{q}{3} - p^3\right) \\ &\quad - \frac{\theta^4}{4(n+1)^3r}\left(\frac{3pq}{5} + \frac{p}{15r^3} - p^3\right) + \dots, \\ \nu^2 &= r^2 + \frac{2nr^2\theta}{n+1}p + \frac{n^2r^2\theta^2}{(n+1)^2}q - \frac{n^2\theta^3}{3(n+1)^3r}p - \frac{n^4\theta^4}{4(n+1)^4r}\left(\frac{q}{3} - p^3\right) \\ &\quad + \frac{n^4\theta^4}{4(n+1)^3r}\left(\frac{3pq}{5} + \frac{p}{15r^3} - p^3\right) + \dots \end{aligned}$$

38. On aura ces trois équations

$$\begin{aligned} x^2 + 2(n+1)\delta t x \cos DT + (n+1)^2(\delta^2 - r^2)t^2 &= 0, \\ y^2 - 2n\epsilon s y \cos CS + n^2(\epsilon^2 - \sigma^2)s^2 &= 0, \\ z^2 - 2\lambda u z \cos EV + (\lambda^2 - \nu^2)u^2 &= 0, \end{aligned}$$

par lesquelles il faudra déterminer les trois inconnues r , p , q .

De ces inconnues, la première r est le rayon vecteur de la Comète ou sa distance au Soleil au temps de la seconde observation, et les deux autres p et q servent à déterminer le grand axe $2a$ de l'orbite de la Comète et le paramètre $2b$ de cette orbite au moyen des formules

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r} - r^2q, \quad b = r + r^2(q - p^3).$$

Ces quantités étant connues, on aura sur-le-champ la position du périhélie sur l'orbite par l'équation

$$\cos \varphi = \frac{r^2(q - p^3)}{\sqrt{1 - \frac{b}{a}}}$$

en nommant φ l'angle du rayon r avec la ligne du périhélie.

A l'égard des quantités s , t , u , x , y , z , σ , ν , elles serviront aussi à déterminer les distances de la Comète à la Terre et au Soleil; et l'on aura $\frac{x}{(n+1)t}$ pour la distance de la Comète à la Terre dans la seconde observation, $\frac{y}{ns}$ pour sa distance dans la première observation, et $\frac{z}{u}$ pour la distance dans la troisième observation, abstraction faite des signes de ces quantités; enfin σ sera la distance de la Comète au Soleil dans la première observation, et ν sa distance dans la troisième observation. Au moyen de ces distances on pourra déterminer facilement les autres éléments de l'orbite.

39. Pour ce qui est de la résolution des trois équations ci-dessus, elle n'aura point de difficulté, en donnant à θ une valeur moindre, ou du moins peu différente de l'unité, ce qui revient à supposer que l'intervalle de temps entre la première et la troisième observation n'aille guère au delà de deux mois; dans ce cas les séries qui expriment les quantités t , s , u , σ^2 , ν^2 seront convergentes, et d'autant plus convergentes que θ sera une fraction plus petite. En négligeant les termes affectés de θ^4 et des puissances supérieures de θ , les trois équations dont il s'agit ne renfermeront les inconnues p et q que sous une forme linéaire; de sorte qu'il

sera très-facile d'éliminer ces inconnues, et l'on aura une équation en r seul, laquelle pourra monter à la vérité à un degré assez haut, mais qu'on pourra dans une première approximation réduire au huitième degré, en ne retenant d'abord que les termes affectés de δ^2 , comme on l'a vu (22). En général, il faudra appliquer de nouveau à ces équations les mêmes remarques que nous avons déjà faites dans ce numéro et dans les suivants.

40. Au reste je ne dois pas manquer de faire observer relativement aux expressions des quantités x, y, z du n° 37, que les rapports des sinus des angles ECS, ECT, ECV au sinus ECD y ont le signe —, parce que dans la figure les trois premiers angles se trouvent placés d'un côté et l'angle ECD se trouve de l'autre côté de l'arc adjacent commun CE; au contraire, les rapports des sinus de EDS, EDT, EDV au sinus de EDC, ainsi que ceux des sinus CDS, CDT, CDV au sinus de CDE, sont pris positivement, parce que les quatre premiers angles sont tous du même côté de l'arc ED, et que les quatre derniers sont aussi tous du même côté de l'arc CD. La raison en est que ces rapports doivent devenir égaux à l'unité, lorsqu'on fait tomber successivement les points D, C, E en S, T, V; parce qu'alors les quantités $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta', \Delta'_1, \dots$ deviennent égales à δ par la nature des expressions de ces quantités (17). En observant ces conditions, on n'aura jamais à craindre de se tromper dans les signes.

SUR LA

THÉORIE DES LUNETTES.