RECHERCHES

SUR

LES SUITES RÉCURRENTES

DONT LES TERMES VARIENT DE PLUSIEURS MANIÈRES DIFFÉRENTES,
OU SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES FINIES ET PARTIELLES;
ET SUR L'USAGE DE CES ÉQUATIONS DANS LA THÉORIE DES HASARDS.

RECHERCHES

SUR

LES SUITES RÉCURRENTES

DONT LES TERMES VARIENT DE PLUSIEURS MANIÈRES DIFFÉRENTES,
OU SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DIFFÉRENCES FINIES ET PARTIELLES;
ET SUR L'USAGE DE CES ÉQUATIONS DANS LA THÉORIE DES HASARDS (*).

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1775.)

J'ai donné, dans le premier volume des *Mémoires de la Société des Sciences de Turin*, une méthode nouvelle pour traiter la théorie des suites récurrentes, en la faisant dépendre de l'intégration des équations linéaires aux différences finies (**). Je me proposais alors de pousser ces Recherches plus loin, et de les appliquer principalement à la solution de plusieurs Problèmes de la théorie des hasards; mais d'autres objets m'ayant depuis fait perdre celui-là de vue, M. de Laplace m'a prévenu, en grande partie, dans deux excellents Mémoires *sur les suites récurro-récurrentes*, et *sur l'intégration des équations différentielles finies et leur usage dans la théorie des hasards*, imprimés dans les volumes VI et VII des *Mémoires* présentés à l'Académie des Sciences de Paris. Je crois ce-

(*) Lu le 29 avril et le 9 mai 1776.
(**) *Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 23.

pendant qu'on peut encore ajouter quelque chose au travail de cet illustre Géomètre, et traiter le même sujet d'une manière plus directe, plus simple et surtout plus générale; c'est l'objet des Recherches que je vais donner dans ce Mémoire; on y trouvera des méthodes nouvelles pour l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles, et l'application de ces méthodes à plusieurs Problèmes intéressants du Calcul des probabilités; mais il n'est question ici que des équations dont les coefficients sont constants, et je réserve pour un autre Mémoire l'examen de celles qui ont des coefficients variables.

ARTICLE Ier. — *Des suites récurrentes simples, ou de l'intégration des équations linéaires aux différences finies entre deux variables.*

Quoique la théorie des suites récurrentes ordinaires soit assez connue, je crois devoir commencer par la traiter en peu de mots pour servir comme d'introduction à celle des suites récurro-récurrentes qui fait le principal objet de ce Mémoire. D'ailleurs j'aurai soin de n'employer, autant qu'il sera possible, que des méthodes nouvelles et plus simples que celles qu'on a déjà.

1. Soit la série

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \ldots,$$

dans laquelle on ait constamment cette équation linéaire entre n termes successifs

$$(A) \qquad Ay_x + By_{x+1} + Cy_{x+2} + \ldots + Ny_{x+n} = 0,$$

A, B, C,..., N étant des coefficients constants quelconques; ce sera une série récurrente simple de l'ordre n, et l'équation (A) sera l'équation différentielle finie qu'il s'agit d'intégrer pour avoir l'expression du terme général y_x de la série proposée.

Pour cela je suppose

$$y_x = a\alpha^x,$$

a et α étant des constantes indéterminées; j'aurai donc

$$y_{x+1} = a\alpha^{x+1}, \quad y_{x+2} = a\alpha^{x+2}, \ldots,$$

et les substitutions étant faites dans l'équation (A), elle deviendra divisible par $a\alpha^x$; et l'on aura après cette division

$$(B) \qquad A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots + N\alpha^n = 0.$$

On voit par cette équation : 1° que, puisque le coefficient a ne s'y trouve pas, ce coefficient demeure arbitraire; 2° que l'équation étant par rapport à α du degré n, elle fournira, en général, n valeurs différentes de α, que je dénoterai par α, β, γ, ... On aura donc ainsi, en prenant aussi différents coefficients a, b, c, ..., n valeurs différentes de y_x, savoir $a\alpha^x$, $b\beta^x$, $c\gamma^x$, ...; et, comme l'équation (A) est linéaire, il est facile de voir que la somme de ces différentes valeurs de y_x y satisfera aussi. De sorte qu'on aura, en général,

$$y_x = a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x + \ldots;$$

et comme cette valeur de y_x contient n constantes arbitraires a, b, c,..., elle sera l'intégrale complète de l'équation (A) du $n^{ième}$ ordre.

2. Si l'on suppose que les n premiers termes de la suite proposée soient donnés, on pourra par leur moyen déterminer les n constantes arbitraires a, b, c,...; il n'y aura pour cela qu'à résoudre les n équations

$$\begin{aligned}
y_0 &= a + b + c + \ldots,\\
y_1 &= a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots,\\
y_2 &= a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
y_{n-1} &= a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1} + c\gamma^{n-1} + \ldots.
\end{aligned}$$

Dans le cas de $n = 1$, on a

$$a = y_0;$$

dans le cas de $n = 2$, on aura

$$a = \frac{y_1 - \beta y_0}{\alpha - \beta}, \quad b = \frac{y_1 - \alpha y_0}{\beta - \alpha};$$

dans le cas de $n = 3$, on aura

$$a = \frac{y_2 - (\beta+\gamma)y_1 + \beta\gamma y_0}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \quad b = \frac{y_2 - (\alpha+\gamma)y_1 + \alpha\gamma y_0}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}, \quad c = \frac{y_2 - (\alpha+\beta)y_1 + \alpha\beta y_0}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)};$$

et ainsi de suite.

De là et de la théorie connue des équations il est facile de conclure que si l'on fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} &A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3 + \ldots + N\alpha^n = P, \\ &B + C\alpha + D\alpha^2 + \ldots = Q, \\ &C + D\alpha^2 + \ldots = R, \\ &D + \ldots = S, \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

on aura, en général,

$$a = \frac{Qy_0 + Ry_1 + Sy_2 + \ldots}{\frac{dP}{d\alpha}},$$

et changeant dans cette expression de a la quantité α en β, γ, ..., on aura les valeurs des autres coefficients b, c, ...

S'il arrive que deux ou plusieurs racines soient égales, il n'y aura qu'à supposer leurs différences infiniment petites, et l'on trouvera, dans le cas de $\beta = \alpha$, que les deux termes

$$a\alpha^x + b\beta^x$$

de l'expression de y_x deviendront de cette forme

$$a'\alpha^x + b'x\alpha^{x-1},$$

où l'on aura

$$a' = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 + \frac{dS}{d\alpha}y_2 + \ldots}{\frac{1}{2}\frac{d^2P}{d\alpha^2}},$$

$$b' = \frac{Qy_0 + Ry_1 + Sy_2 + \ldots}{\frac{1}{2}\frac{d^2P}{d\alpha^2}};$$

et si l'on a $\gamma = \beta = \alpha$, alors les trois termes

$$a\alpha^x + b\beta^x + c\gamma^x$$

deviendront

$$a''\alpha^x + b''x\alpha^{x-1} + c''\frac{x(x-1)}{2}\alpha^{x-2},$$

où l'on aura

$$a'' = \frac{\frac{1}{2}\frac{d^2Q}{d\alpha^2}y_0 + \frac{1}{2}\frac{d^2R}{d\alpha^2}y_1 + \frac{1}{2}\frac{d^2S}{d\alpha^2}y_2 + \ldots}{\frac{1}{2.3}\frac{d^3P}{d\alpha^3}},$$

$$b'' = \frac{\frac{dQ}{d\alpha}y_0 + \frac{dR}{d\alpha}y_1 + \frac{dS}{d\alpha}y_2 + \ldots}{\frac{1}{2.3}\frac{d^3P}{d\alpha^3}},$$

$$c'' = \frac{Qy_0 + Ry_1 + Sy_2 + \ldots}{\frac{1}{2.3}\frac{d^3P}{d\alpha^3}};$$

et ainsi du reste.

3. Si dans l'équation proposée (A) les coefficients A, B, C, ..., N, au lieu d'être constants, sont des fonctions données de x, que nous désignerons par A_x, B_x, C_x, ..., N_x, en sorte que l'on ait l'équation

$$(C) \qquad A_x y_x + B_x y_{x+1} + C_x y_{x+2} + \ldots + N_x y_{x+n} = 0,$$

on ne pourra, par la méthode précédente ni par aucune autre méthode connue, l'intégrer en général, à moins qu'elle ne soit que du premier ordre; mais si l'on suppose qu'on connaisse *à posteriori* n valeurs parti-

culières de y_x, que nous désignerons par α_x, β_x, γ_x,..., il est visible que l'on aura, en général,

$$y_x = a\alpha_x + b\beta_x + c\gamma_x + \ldots,$$

et que cette expression de y_x sera complète, puisqu'elle renferme n constantes arbitraires a, b, c,....

4. De plus on pourra dans ce même cas trouver l'intégrale complète de l'équation

$$(D) \qquad A_x y_x + B_x y_{x+1} + C_x y_{x+2} + \ldots + N_x y_{x+n} = X_x,$$

X_x étant une fonction quelconque de x.

Car puisque, dans le cas de $X_x = 0$, on a

$$y_x = a\alpha_x + b\beta_x + c\gamma_x + \ldots$$

pour l'intégrale complète, a, b, c,... étant des constantes, supposons maintenant que les quantités a, b, c,... soient, en général, des fonctions de x que nous désignerons par a_x, b_x, c_x,..., en sorte que l'intégrale de l'équation (D) soit

$$(E) \qquad y_x = a_x\alpha_x + b_x\beta_x + c_x\gamma_x + \ldots;$$

faisant varier x, on aura

$$y_{x+1} = a_{x+1}\alpha_{x+1} + b_{x+1}\beta_{x+1} + c_{x+1}\gamma_{x+1} + \ldots,$$

ou bien, en désignant par la caractéristique Δ les différences finies, en sorte que

$$\Delta a_x = a_{x+1} - a_x,$$

et ainsi des autres,

$$\begin{aligned} y_{x+1} &= a_x\alpha_{x+1} + b_x\beta_{x+1} + c_x\gamma_{x+1} + \ldots \\ &\quad + \alpha_{x+1}\Delta a_x + \beta_{x+1}\Delta b_x + \gamma_{x+1}\Delta c_x + \ldots. \end{aligned}$$

Donc, si je fais

$$(1) \qquad \alpha_{x+1}\Delta a_x + \beta_{x+1}\Delta b_x + \gamma_{x+1}\Delta c_x + \ldots = 0,$$

j'aurai

$$y_{x+1} = a_x\alpha_{x+1} + b_x\beta_{x+1} + c_x\gamma_{x+1} + \ldots,$$

comme si les quantités a_x, b_x, c_x,... n'avaient point varié.

Faisant varier de nouveau x, j'aurai donc

$$\begin{aligned} y_{x+2} &= a_{x+1}\alpha_{x+2} + b_{x+1}\beta_{x+2} + c_{x+1}\gamma_{x+2} + \ldots \\ &= a_x\alpha_{x+2} + b_x\beta_{x+2} + c_x\gamma_{x+2} + \ldots \\ &\quad + \alpha_{x+2}\Delta a_x + \beta_{x+2}\Delta b_x + \gamma_{x+2}\Delta c_x + \ldots, \end{aligned}$$

et, faisant pareillement

$$(2) \qquad \alpha_{x+2}\Delta a_x + \beta_{x+2}\Delta b_x + \gamma_{x+2}\Delta c_x + \ldots = 0,$$

j'aurai

$$y_{x+2} = a_x\alpha_{x+2} + b_x\beta_{x+2} + c_x\gamma_{x+2} + \ldots.$$

De même, en faisant varier x et supposant

$$(3) \qquad \alpha_{x+3}\Delta a_x + \beta_{x+3}\Delta b_x + \gamma_{x+3}\Delta c_x + \ldots = 0,$$

on aura

$$y_{x+3} = a_x\alpha_{x+3} + b_x\beta_{x+3} + c_x\gamma_{x+3} + \ldots.$$

Je continue ainsi à faire varier x et à supposer nulle la partie de y dépendante des variations de a_x, b_x, c_x,... jusqu'aux équations suivantes inclusivement

$$(n-1) \qquad \begin{aligned} &\alpha_{x+n-1}\Delta a_x + \beta_{x+n-1}\Delta b_x + \gamma_{x+n-1}\Delta c_x + \ldots = 0, \\ &y_{x+n-1} = a_x\alpha_{x+n-1} + b_x\beta_{x+n-1} + c_x\gamma_{x+n-1} + \ldots; \end{aligned}$$

et, faisant encore varier x dans cette dernière équation, j'aurai

$$\begin{aligned} y_{x+n} &= a_x\alpha_{x+n} + b_x\beta_{x+n} + c_x\gamma_{x+n} + \ldots \\ &\quad + \alpha_{x+n}\Delta a_x + \beta_{x+n}\Delta b_x + \gamma_{x+n}\Delta c_x + \ldots. \end{aligned}$$

Qu'on substitue maintenant ces valeurs de y_x, y_{x+1},..., y_{x+n} dans l'équation (D); et comme toutes ces valeurs, excepté la dernière, sont les mêmes que si a_x, b_x, c_x,... n'avaient pas varié, et que la dernière ne dif-

fère de ce qu'elle serait dans cette hypothèse que par les termes

$$\alpha_{x+n}\Delta a_x + \beta_{x+n}\Delta b_x + \gamma_{x+n}\Delta c_x + \ldots$$

qui y sont ajoutés; que d'ailleurs les valeurs de $y_x, y_{x+1}, \ldots$, dans le cas de α_x, β_x, $\gamma_x, \ldots$ constantes, satisfont par l'hypothèse à l'équation (C), quelles que soient les valeurs de ces constantes; il s'ensuit que le premier membre de l'équation (D) se réduira à

$$N_x(\alpha_{x+n}\Delta a_x + \beta_{x+n}\Delta b_x + \gamma_{x+n}\Delta c_x + \ldots),$$

en sorte qu'on aura l'équation

$$(n) \qquad \alpha_{x+n}\Delta a_x + \beta_{x+n}\Delta b_x + \gamma_{x+n}\Delta c_x + \ldots = \frac{X_x}{N_x}.$$

On a donc ainsi n équations linéaires (1), (2), (3),..., $(n-1)$, (n) entre les n quantités Δa_x, Δb_x, $\Delta c_x, \ldots$, d'où l'on tirera les valeurs de ces quantités en fonctions de x, que je désignerai par P_x, Q_x, $R_x, \ldots$. Donc, passant des différences aux sommes et désignant celles-ci par la caractéristique $\sum$, on aura

$$a_x = \sum P_x, \quad b_x = \sum Q_x, \quad c_x = \sum R_x, \ldots,$$

ce qui étant substitué dans la formule (E), il viendra

$$y_x = \alpha_x \sum P_x + \beta_x \sum Q_x + \gamma_x \sum R_x + \ldots$$

pour l'intégrale complète de l'équation (D).

Il s'ensuit de là que l'équation

$$A_x y_x + B_x y_{x+1} + C_x y_{x+2} + \ldots + N_x y_{x+n} = X_x$$

est généralement intégrable toutes les fois que l'on connaît n valeurs particulières de y_x dans le cas de $X_x = 0$; Théorème analogue à celui que j'ai donné pour les équations différentielles linéaires dans le tome III des

Mémoires de Turin (*). M. le Marquis de Condorcet et M. de Laplace avaient déjà remarqué que ce Théorème sur les équations aux différences infiniment petites était aussi applicable aux cas des différences finies; et ce dernier en a donné une démonstration générale et ingénieuse, mais un peu compliquée (*voyez* le tome IV des *Mémoires de Turin* et les *Mémoires* présentés à l'Académie des Sciences de Paris en 1773). C'est ce qui m'a engagé à traiter ici cette matière par une méthode nouvelle et aussi simple qu'on puisse le désirer.

5. Remarque. — Les principes de la méthode précédente peuvent s'appliquer aussi aux équations différentielles ordinaires, et sont, en général, d'un très-grand usage dans tout le Calcul intégral. Quoique ce ne soit pas ici le lieu de nous occuper de cette matière, je vais néanmoins en traiter en peu de mots, me réservant de le faire ailleurs avec plus d'étendue.

Et d'abord, si l'on a une équation linéaire de l'ordre n telle que

$$Py + Q\frac{dy}{dx} + R\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + V\frac{d^ny}{dx^n} = X,$$

où P, Q, R,..., V et X soient des fonctions données de x, et qu'on connaisse l'intégrale complète de cette équation dans le cas de $X = 0$, laquelle sera nécessairement de la forme

$$y = ap + bq + cr + \ldots,$$

$a, b, c, \ldots$ étant des constantes arbitraires au nombre de n, et $p, q, r, \ldots$ des fonctions de x où les constantes $a, b, c, \ldots$ n'entrent pas, et qui sont autant de valeurs particulières de y dans l'hypothèse de $X = 0$, on en pourra déduire aisément l'intégrale complète de la proposée. Car en regardant les arbitraires $a, b, c, \ldots$ comme des variables indéterminées, et supposant nulles dans les valeurs de dy, d^2y, $d^3y, \ldots$, $d^{n-1}y$ les parties

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 471.

qui dépendent de la variabilité de ces quantités a, b, c,..., on aura

$$\begin{aligned}
dy &= a\,dp + b\,dq + c\,dr + \ldots, & o &= p\,da + q\,db + r\,dc + \ldots,\\
d^2y &= a\,d^2p + b\,d^2q + c\,d^2r + \ldots, & o &= dp\,da + dq\,db + dr\,dc + \ldots,\\
d^3y &= a\,d^3p + b\,d^3q + c\,d^3r + \ldots, & o &= d^2p\,da + d^2q\,db + d^2r\,dc + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
d^{n-1}y &= a\,d^{n-1}p + b\,d^{n-1}q + c\,d^{n-1}r + \ldots, & o &= d^{n-2}p\,da + d^{n-2}q\,db + d^{n-2}r\,dc + \ldots,
\end{aligned}$$

ensuite

$$d^n y = a\,d^n p + b\,d^n q + c\,d^n r + \ldots + d^{n-1}p\,da + d^{n-1}q\,db + d^{n-1}r\,dc + \ldots.$$

De cette manière on voit que les expressions de y, dy, d^2y,..., $d^{n-1}y$ ont la même forme que si a, b, c,... étaient constantes, et que celle de $d^n y$ ne diffère de ce qu'elle serait dans ce cas que par les termes

$$d^{n-1}p\,da + d^{n-1}q\,db + d^{n-1}r\,dc + \ldots$$

qui y sont ajoutés; or comme dans le cas de a, b, c,... constantes, les valeurs de y, dy, d^2y,..., $d^n y$ satisfont par l'hypothèse à l'équation proposée lorsqu'on y suppose $X = o$, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de ces constantes, il est aisé de conclure que si l'on substitue dans cette équation les valeurs ci-dessus de y, dy, d^2y,..., $d^n y$, tous les termes s'y détruiront, à l'exception des termes de la valeur de $d^n y$ qui dépendent de la variation des quantités a, b, c,..., et du terme X, qui avait été supposé auparavant nul. De sorte qu'on aura, en divisant par V, l'équation

$$d^{n-1}p\,da + d^{n-1}q\,db + d^{n-1}r\,dc + \ldots = \frac{X}{V}\,dx^n;$$

et cette équation étant combinée avec les $n-1$ équations de condition

$$\begin{aligned}
&p\,da + q\,db + r\,dc + \ldots = o,\\
&dp\,da + dq\,db + dr\,dc + \ldots = o,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&d^{n-2}p\,da + d^{n-2}q\,db + d^{n-2}r\,dc + \ldots = o,
\end{aligned}$$

on en tirera par les règles ordinaires de l'élimination les valeurs des

n différentielles da, db, dc,...; et de là on aura par l'intégration celles de a, b, c,... qu'on substituera dans l'expression de y. Ce qui est beaucoup plus simple que tout ce que l'on trouve dans les tomes III et IV des *Mémoires de Turin* sur cette matière.

En général, si l'on connaît l'intégrale complète d'une équation quelconque de l'ordre n telle que

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P = o,$$

P étant une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$,..., $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, on pourra faire servir cette intégrale à trouver celle de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P = \Pi,$$

Π étant aussi une fonction donnée de x, y, $\frac{dy}{dx}$,..., $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$.

Car soit $M = o$ l'intégrale complète dont il s'agit, M sera une fonction de x, y et de n constantes arbitraires a, b, c,...; en sorte que y sera réciproquement une fonction de x et des mêmes constantes, laquelle satisfera par conséquent à l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P = o,$$

quelles que soient les valeurs de ces constantes.

Supposons maintenant que $M = o$ soit également l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P = \Pi,$$

mais en y regardant les quantités a, b, c,... comme variables; dans cette hypothèse, l'expression de y en x, a, b, c,... sera la même que dans le cas de a, b, c,... constantes, mais celles de dy, d^2y,... seront différentes; cependant, si dans les différentiations successives on suppose nulles les parties des différentielles dy, d^2y,..., $d^{n-1}y$ qui résultent de

la variabilité des quantités a, b, c,..., on aura ces $n-1$ équations de condition

$$\frac{dy}{da}da+\frac{dy}{db}db+\frac{dy}{dc}dc+\ldots=0,$$

$$\frac{d^2y}{dx\,da}da+\frac{d^2y}{dx\,db}db+\frac{d^2y}{dx\,dc}dc+\ldots=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}da}da+\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}db}db+\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-2}dc}dc+\ldots=0,$$

au moyen desquelles les valeurs de ces différentielles seront encore les mêmes que si a, b, c,... étaient constantes; de sorte qu'en substituant ces valeurs ainsi que celle de y dans la quantité P, on aura encore la même fonction de x, a, b, c,... que dans le cas où les quantités a, b, c,... seraient constantes. Or comme la valeur de $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ est la même que dans le cas de a, b, c,... constantes, il est clair que celle de $d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ sera égale à ce qu'elle serait dans le même cas, plus à la variation de $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ due aux quantités a, b, c,..., laquelle est

$$\frac{d^ny}{dx^{n-1}da}da+\frac{d^ny}{dx^{n-1}db}db+\frac{d^ny}{dx^{n-1}dc}dc+\ldots;$$

par conséquent, si l'on dénote par $Y\,dx$ la première partie de cette valeur, on aura pour la valeur complète de $d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$ la quantité

$$Y\,dx+\frac{d^ny}{dx^{n-1}da}da+\frac{d^ny}{dx^{n-1}db}db+\frac{d^ny}{dx^{n-1}dc}dc+\ldots,$$

où Y sera, après les substitutions, la même fonction de x, a, b, c,... que dans le cas de a, b, c,... constantes; mais dans ce cas on a, par l'hypothèse,

$$Y+P=0,$$

quelles que soient les valeurs de ces constantes; donc la même équation aura encore lieu dans le cas où les quantités a, b, c,... ne sont pas

constantes; par conséquent dans ce dernier cas l'équation

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P=\Pi$$

deviendra, étant multipliée par dx,

$$\frac{d^ny}{dx^{n-1}da}da+\frac{d^ny}{dx^{n-1}db}db+\frac{d^ny}{dx^{n-1}dc}dc+\ldots=\Pi\,dx.$$

Cette équation étant combinée avec les $n-1$ équations de condition trouvées ci-dessus, on aura, après avoir substitué partout les valeurs de y et de ses différentielles en x, a, b, c,... tirées de l'équation finie $M=0$, valeurs qui sont les mêmes que dans le cas de a, b, c,... constantes, on aura, dis-je, n équations différentielles du premier ordre entre les n variables a, b, c,... et la variable x; si donc on intègre ces équations, on aura les valeurs de a, b, c,... en x, qui étant ensuite substituées dans l'équation $M=0$ donneront l'intégrale de l'équation proposée.

J'avoue que l'intégration des équations en a, b, c,... et x sera le plus souvent très-difficile, du moins aussi difficile que celle de l'équation proposée

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P=\Pi;$$

et il n'y a peut-être que le seul cas des équations linéaires que nous avons traitées plus haut, où l'intégration des équations dont il s'agit réussisse, en général, à cause que les constantes a, b, c,... sont aussi nécessairement linéaires dans l'intégrale complète $M=0$; mais le grand usage de la méthode précédente est pour intégrer par approximation les équations dont on connaît déjà l'intégrale complète à peu près, c'est-à-dire en négligeant des quantités qu'on regarde comme très-petites.

Par exemple, si dans l'équation

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P=\Pi,$$

on suppose que la fonction Π soit très-petite vis-à-vis de P, et qu'on con-

naisse déjà l'intégrale complète $M = o$, dans le cas de $\Pi = o$, en employant la méthode précédente, et tirant des n équations différentielles en $a, b, c, \ldots$ et x, les valeurs de $da, db, dc, \ldots$, on aura des équations de cette forme

$$da = A\Pi\, dx, \quad db = B\Pi\, dx, \quad dc = C\Pi\, dx, \ldots,$$

A, B, C,... étant des fonctions finies de $x, a, b, c, \ldots$, et Π étant aussi une fonction des mêmes quantités, mais très-petite par l'hypothèse; d'où l'on voit que les valeurs de $\frac{da}{dx}, \frac{db}{dx}, \frac{dc}{dx}, \cdots$ sont aussi très-petites du même ordre; ainsi, en regardant d'abord les quantités $a, b, c, \ldots$ comme constantes, on pourra par les méthodes connues approcher de plus en plus des vraies valeurs de ces quantités.

Il n'est pas à craindre que les fonctions A, B, C,... deviennent infinies; car cette supposition renferme les conditions nécessaires pour que l'intégrale complète $M = o$ de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P = o$$

en devienne une intégrale particulière; sur quoi on peut voir mon Mémoire *sur les intégrales particulières des équations différentielles* (*).

Il est visible au reste que cette méthode, que je ne fais qu'exposer ici en passant, peut s'appliquer également au cas où l'on aurait plusieurs équations différentielles entre plusieurs variables dont on connaîtrait les intégrales complètes approchées, c'est-à-dire en y négligeant des quantités supposées très-petites. Elle sera par conséquent fort utile pour calculer les mouvements des planètes en tant qu'ils sont altérés par leur action mutuelle, puisqu'en faisant abstraction de cette action la solution complète du Problème est connue; et il est bon de remarquer que, comme dans ce cas les constantes $a, b, c, \ldots$ représentent ce qu'on nomme les *éléments des planètes*, notre méthode donnera immédiatement les variations de ces éléments provenantes de l'action que les planètes exercent les unes sur les autres. J'avais déjà donné un essai de cette méthode dans mes Recherches sur la théorie de Jupiter et de Saturne [*Mémoires de Turin*, tome III (*)]. Elle est présentée ici d'une manière plus directe et plus générale; mais je me propose de la développer ailleurs avec plus d'étendue, et de l'appliquer à la solution de quelques Problèmes importants sur le Système du monde.

(*) *OEuvres de Lagrange*, t. IV, p. 5.

ARTICLE II. — *Des suites récurrentes doubles, ou de l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles entre trois variables.*

6. Supposons que l'on ait une série dont les termes varient de deux manières différentes et forment une espèce de Table à double entrée de cette forme

$$\begin{array}{llllll}
y_{0,0}, & y_{1,0}, & y_{2,0}, & y_{3,0}, \ldots, & y_{z,0}, & y_{z+1,0}, \ldots, \\
y_{0,1}, & y_{1,1}, & y_{2,1}, & y_{3,1}, \ldots, & y_{z,1}, & y_{z+1,1}, \ldots, \\
y_{0,2}, & y_{1,2}, & y_{2,2}, & y_{3,2}, \ldots, & y_{z,2}, & y_{z+1,2}, \ldots, \\
y_{0,3}, & y_{1,3}, & y_{2,3}, & y_{3,3}, \ldots, & y_{z,3}, & y_{z+1,3}, \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\
y_{0,t}, & y_{1,t}, & y_{2,t}, & y_{3,t}, \ldots, & y_{z,t}, & y_{z+1,t}, \ldots, \\
y_{0,t+1}, & y_{1,t+1}, & y_{2,t+1}, & y_{3,t+1}, \ldots, & y_{z,t+1}, & y_{z+1,t+1}, \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots,
\end{array}$$

et que l'on ait constamment entre les termes de cette série une équation linéaire de cette forme

$$\left.\begin{array}{l}
A y_{z,t} + B y_{z+1,t} + C y_{z+2,t} + \ldots + N y_{z+n,t} \\
\quad + B' y_{z,t+1} + C' y_{z+1,t+1} + \ldots + N' y_{z+n-1,t+1} \\
\qquad + C'' y_{z,t+2} + \ldots + N'' y_{z+n-2,t+2} \\
\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad + N^{(n)} y_{z,t+n}
\end{array}\right\} = o,$$

(*) *OEuvres de Lagrange*, t. I, p. 609.

dans laquelle A, B, B′, C, C′, C″,..., N, N′,... soient des coefficients constants quelconques; la série dont il s'agit sera une série récurrente double de l'ordre n, et l'équation précédente sera une équation linéaire aux différences finies et partielles entre trois variables, de l'intégration de laquelle dépendra la recherche du terme général $y_{x,t}$ de la série.

7. Supposons d'abord que l'équation différentielle proposée n'ait que quatre termes et qu'elle soit de la forme

$$(F) \qquad Ay_{x,t} + By_{x+1,t} + B'y_{x,t+1} + C'y_{x+1,t+1} = 0.$$

Je fais

$$y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t,$$

a, α, β étant des constantes indéterminées; j'aurai ainsi

$$y_{x+1,t} = a\alpha^{x+1}\beta^t, \quad y_{x,t+1} = a\alpha^x\beta^{t+1}, \quad y_{x+1,t+1} = a\alpha^{x+1}\beta^{t+1};$$

substituant ces valeurs et divisant ensuite toute l'équation par $a\alpha^x\beta^t$, il viendra celle-ci

$$A + B\alpha + B'\beta + C'\alpha\beta = 0,$$

par laquelle on pourra déterminer l'une des deux constantes α, β par l'autre.

Je tire β de cette équation, j'ai

$$\beta = -\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha};$$

donc, substituant cette valeur de β, j'aurai

$$y_{x,t} = a\alpha^x\left(-\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}\right)^t,$$

où a et α demeurent indéterminées.

Qu'on réduise maintenant la quantité $\left(-\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}\right)^t$ en une série qui procède suivant les puissances de α, mais en sorte que ces puissances

aillent en diminuant, et si l'on suppose, en général,

$$\left(-\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha}\right)^t = T\alpha^{\mu t} + T'\alpha^{\mu t-1} + T''\alpha^{\mu t-2} + T'''\alpha^{\mu t-3} + \ldots,$$

on aura

$$y_{x,t} = Ta\alpha^{x+\mu t} + T'a\alpha^{x+\mu t-1} + T''a\alpha^{x+\mu t-2} + \ldots.$$

Or, comme a et α sont arbitraires, on aura une infinité de valeurs différentes de $y_{x,t}$, et il s'ensuit de ce que l'équation différentielle (F) est linéaire, qu'on pourra également prendre pour $y_{x,t}$ la somme d'autant de ces différentes valeurs qu'on voudra.

Donc, si l'on prend un nombre quelconque de constantes différentes a, b, c,..., α, ξ, γ,..., on aura, en général,

$$\begin{aligned} y_{x,t} = {} & T(a\alpha^{x+\mu t} + b\xi^{x+\mu t} + c\gamma^{x+\mu t} + \ldots) \\ & + T'(a\alpha^{x+\mu t-1} + b\xi^{x+\mu t-1} + c\gamma^{x+\mu t-1} + \ldots) \\ & + T''(a\alpha^{x+\mu t-2} + b\xi^{x+\mu t-2} + c\gamma^{x+\mu t-2} + \ldots) \\ & + T'''(a\alpha^{x+\mu t-3} + b\xi^{x+\mu t-3} + c\gamma^{x+\mu t-3} + \ldots) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Je remarque maintenant qu'à cause du nombre indéfini des constantes arbitraires a, b, c,..., α, ξ, γ,..., la quantité

$$a\alpha^{x+\mu t} + b\xi^{x+\mu t} + c\gamma^{x+\mu t} + \ldots$$

doit pouvoir représenter une fonction quelconque de $x + \mu t$ que je désignerai par la caractéristique f ainsi, $f(x + \mu t)$; et alors il est visible que les quantités semblables

$$a\alpha^{x+\mu t-1} + b\xi^{x+\mu t-1} + c\gamma^{x+\mu t-1} + \ldots, \quad a\alpha^{x+\mu t-2} + b\xi^{x+\mu t-2} + c\gamma^{x+\mu t-2} + \ldots, \ldots$$

deviendront

$$f(x + \mu t - 1), \quad f(x + \mu t - 2), \ldots;$$

donc faisant ces substitutions on aura, en général,

$$y_{x,t} = \mathrm{T} f(x+\mu t) + \mathrm{T}' f(x+\mu t-1) + \mathrm{T}'' f(x+\mu t-2) + \dots.$$

8. La détermination de la forme de la fonction $f(x+\mu t)$ dépend des valeurs de $y_{x,t}$ lorsque $t=0$; en effet, si l'on fait $t=0$, on a

$$\mathrm{T}=1, \quad \mathrm{T}'=0, \quad \mathrm{T}''=0, \dots;$$

donc

$$y_{x,0} = f(x).$$

D'où il s'ensuit que l'on aura, en général,

$$y_{x,t} = \mathrm{T} y_{x+\mu t,0} + \mathrm{T}' y_{x+\mu t-1,0} + \mathrm{T}'' y_{x+\mu t-2,0} + \dots,$$

où l'on voit que les quantités $y_{x+\mu t,0}$, $y_{x+\mu t-1,0}$,... sont contenues parmi les termes qui forment le premier rang horizontal de la Table du n° 6, pourvu qu'on suppose que la série de ce rang soit aussi continuée à gauche de cette manière

$$\dots, \quad y_{-(x+1),0}, \quad y_{-x,0}, \quad \dots, \quad y_{-2,0}, \quad y_{-1,0}, \quad y_{0,0}.$$

Si donc on regarde tous ces termes comme donnés, on aura par la formule précédente la valeur d'un terme quelconque $y_{x,t}$ de la Table dont il s'agit, dans le cas où elle est supposée formée par une loi telle, que l'on ait constamment, entre quatre termes contigus ou disposés en carré, une équation de la forme (F) du n° 7.

9. Si l'on suppose que tous les termes du premier rang horizontal, qui précèdent $y_{0,0}$, c'est-à-dire les termes de ce rang continué en arrière, soient nuls, ce qui peut avoir lieu dans un grand nombre de Problèmes, alors l'expression de $y_{x,t}$ sera toujours composée d'un nombre fini de termes, parce qu'il faudra en rejeter tous ceux où se trouvera $y_{s,0}$, s étant un nombre négatif quelconque. On aura donc dans ce cas

$$y_{x,t} = \mathrm{T} y_{x+\mu t,0} + \mathrm{T}' y_{x+\mu t-1,0} + \mathrm{T}'' y_{x+\mu t-2,0} + \dots + \mathrm{T}^{(x+\mu t)} y_{0,0}.$$

Dans tous les autres cas la série ira à l'infini, à moins que l'on n'ait $\mathrm{B}'=0$ ou $\mathrm{C}'=0$; parce qu'alors, à cause de t égal à un nombre entier positif, la série des quantités T, T',... sera finie et n'aura que $t+1$ termes.

10. Pour montrer, par un exemple connu, l'application de la formule précédente, je prends celui de la Table de Pascal pour les combinaisons, dans laquelle on sait que chaque terme est égal à la somme de celui qui le précède dans le même rang horizontal et de celui qui est au-dessus de ce dernier dans le même rang vertical; de plus le premier rang horizontal est tout formé d'unités et le premier rang vertical est tout zéro. D'où il s'ensuit qu'on a d'abord, en général, cette équation

$$y_{x+1,t+1} = y_{x,t+1} + y_{x,t},$$

et qu'ensuite on a

$$y_{x,0} = 1, \text{ tant que } x = 0, 1, 2, \dots,$$
$$y_{0,t} = 0, \text{ tant que } t = 1, 2, 3, \dots.$$

Cette équation étant comparée à celle du n° 7, on a

$$\mathrm{A}=1, \quad \mathrm{B}=0, \quad \mathrm{B}'=1, \quad \mathrm{C}'=-1;$$

donc

$$-\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}\alpha}{\mathrm{B}'+\mathrm{C}'\alpha} = \frac{1}{\alpha-1};$$

ce qui étant élevé à la puissance t donne la série

$$\alpha^{-t} + t\alpha^{-t-1} + \frac{t(t+1)}{2}\alpha^{-t-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{2.3}\alpha^{-t-3} + \dots,$$

de sorte qu'on aura dans la formule générale du numéro cité $\mu=-1$ et

$$\mathrm{T}=1, \quad \mathrm{T}'=t, \quad \mathrm{T}''=\frac{t(t+1)}{2}, \dots.$$

Donc, par la formule du n° 8, on aura, en général,

$$y_{x,t} = y_{x-t,0} + t y_{x-t-1,0} + \frac{t(t+1)}{2} y_{x-t-2,0} + \dots$$

Mais en faisant $x = 0$ on doit avoir, par l'hypothèse, $y_{0,t} = 0$, en supposant $t = 1, 2, 3, \dots$; donc il faudra que l'on ait, en général,

$$y_{-t,0} = t y_{-t-1,0} + \frac{t(t+1)}{2} y_{-t-2,0} + \dots,$$

quel que soit t, pourvu que ce soit un nombre entier positif; d'où il est facile de conclure que l'on doit avoir

$$y_{-1,0} = 0, \quad y_{-2,0} = 0, \dots,$$

et, en général,

$$y_{-s,0} = 0,$$

tant que s sera entier négatif, ce qui est le cas du n° 9, dans lequel nous avons vu que la série devient finie.

On aura donc, d'après la formule de ce numéro,

$$y_{x,t} = y_{x-t,0} + t y_{x-t-1,0} + \frac{t(t+1)}{2} y_{x-t-2,0} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(x-1)}{1.2\dots(x-t)} y_{0,0}.$$

Telle est l'expression générale d'un terme quelconque de la Table de Pascal, en supposant que les termes qui forment le premier rang horizontal, et qui sont représentés par $y_{0,0}, y_{1,0}, y_{2,0}, \dots$, soient quelconques. Mais dans le cas de la Table de Pascal ces termes sont tous égaux à l'unité; substituant donc l'unité à la place de ces quantités dans la formule ci-dessus, on aura

$$y_{x,t} = 1 + t + \frac{t(t+1)}{2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{2.3} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(x-1)}{1.2\dots(x-t)},$$

ce qui se réduit, comme l'on sait, à cette expression plus simple

$$y_{x,t} = \frac{(t+1)(t+2)(t+3)\dots x}{1.2.3\dots(x-t)}.$$

11. Nous avons remarqué ci-dessus que la solution précédente donne, en général, une expression finie de $y_{x,t}$, lorsque $C' = 0$ ou $B' = 0$; examinons donc d'abord ces deux cas.

1° Soit $C' = 0$; alors l'équation différentielle (F) n'aura que trois termes et sera du premier ordre. Et si l'on fait, pour abréger,

$$-\frac{B}{B'} = p, \quad \frac{A}{B} = q,$$

on aura

$$-\frac{A + B\alpha}{B'} = p\alpha\left(1 + \frac{q}{\alpha}\right),$$

ce qui étant élevé à la puissance t et ensuite comparé à la formule générale $T\alpha^{\mu t} + T'\alpha^{\mu t - 1} + \dots$, donnera

$$\mu = 1, \quad T = p^t, \quad T' = t p^t q, \quad T'' = \frac{t(t-1)}{2} p^t q^2, \dots.$$

Donc (8)

$$y_{x,t} = p^t\left[y_{x+t,0} + tq\, y_{x+t-1,0} + \frac{t(t-1)}{2} q^2 y_{x+t-2,0} + \dots\right].$$

On voit ici non-seulement que la série est toujours finie lorsque t est un nombre entier positif, mais encore qu'elle ne contient que des quantités de la forme $y_{s,0}$, s étant positif; d'où il s'ensuit que dans ce cas il suffit que le premier rang horizontal de la Table du n° 6 soit donné, pour qu'on puisse déterminer la valeur de quelque terme que ce soit de la même Table.

2° Supposons que l'on ait $B' = 0$; l'équation différentielle n'aura aussi que trois termes, mais elle sera du second ordre. Faisant dans ce cas

$$-\frac{B}{C'} = p, \quad \frac{A}{B} = q,$$

on aura

$$-\frac{A + B\alpha}{C'\alpha} = p\left(1 + \frac{q}{\alpha}\right);$$

élevant cette quantité à la puissance t, et comparant avec la formule gé-

nérale, on aura $\mu = 0$, et les valeurs de T, T′, T″, ... seront les mêmes que dans le cas précédent.

Ainsi on aura

$$y_{x,t} = p^t \left[y_{x,0} + tq y_{x-1,0} + \frac{t(t-1)}{2} q^2 y_{x-2,0} + \cdots \right].$$

Cette expression est toujours finie tant que t est un nombre entier positif; mais, lorsque t est $> x$, elle contient nécessairement des quantités telles que $y_{s,0}$, s étant négatif. Ainsi il ne suffira pas, dans ce cas, que le premier rang horizontal de la Table du n° 6 soit donné, il faudra encore supposer donnés les termes précédents $y_{-1,0}$, $y_{-2,0}$, ... Si l'on ne connaît pas ces termes, mais que l'on connaisse ceux qui forment le premier rang vertical de la Table, on pourra alors déduire ceux-là de ceux-ci de la manière suivante.

Je fais $x = 0$ et t successivement $= 1, 2, 3, \ldots$; j'aurai

$$\begin{aligned}
y_{0,1} &= p(y_{0,0} + q y_{-1,0}),\\
y_{0,2} &= p^2(y_{0,0} + 2q y_{-1,0} + q^2 y_{-2,0}),\\
y_{0,3} &= p^3(y_{0,0} + 3q y_{-1,0} + 3q^2 y_{-2,0} + q^3 y_{-3,0}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

d'où il est facile de tirer

$$\begin{aligned}
q y_{-1,0} &= \frac{1}{p} y_{0,1} - y_{0,0},\\
q^2 y_{-2,0} &= \frac{1}{p^2} y_{0,2} - \frac{2}{p} y_{0,1} + y_{0,0},\\
q^3 y_{-3,0} &= \frac{1}{p^3} y_{0,3} - \frac{3}{p^2} y_{0,2} + \frac{3}{p} y_{0,1} - y_{0,0},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}$$

et, en général,

$$q^s y_{-s,0} = \frac{1}{p^s} y_{0,s} - \frac{s}{p^{s-1}} y_{0,s-1} + \frac{s(s-1)}{2p^{s-2}} y_{0,s-2} - \cdots.$$

Je conclus de là que, si l'on considère ces deux séries

$$y_{x,0},\quad \frac{1}{q} y_{x,0},\quad \frac{1}{q^2} y_{x,0},\quad \frac{1}{q^3} y_{x,0}, \ldots,$$

$$y_{0,0},\quad \frac{1}{p} y_{0,1},\quad \frac{1}{p^2} y_{0,2},\quad \frac{1}{p^3} y_{0,3}, \ldots,$$

qui sont supposées données, et qu'on dénote pour plus de simplicité les termes de la première par

$$\mathrm{Y}, \mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \mathrm{Y}_3, \ldots,$$

et ceux de la seconde par

$$\mathrm{Y}, \mathrm{Y}', \mathrm{Y}'', \mathrm{Y}''', \ldots;$$

qu'ensuite on prenne les différences successives des termes de cette dernière, lesquelles soient dénotées par la caractéristique Δ, en sorte que l'on ait, comme on sait,

$$\begin{aligned}
\Delta \mathrm{Y} &= \mathrm{Y}' - \mathrm{Y},\\
\Delta^2 \mathrm{Y} &= \mathrm{Y}'' - 2\mathrm{Y}' + \mathrm{Y},\\
\Delta^3 \mathrm{Y} &= \mathrm{Y}''' - 3\mathrm{Y}'' + 3\mathrm{Y}' - \mathrm{Y},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;
\end{aligned}$$

qu'on suppose enfin que la première suite soit continuée en arrière par les termes

$$\mathrm{Y}_{-1}, \mathrm{Y}_{-2}, \mathrm{Y}_{-3}, \ldots,$$

lesquels soient respectivement égaux à

$$\Delta \mathrm{Y}, \Delta^2 \mathrm{Y}, \Delta^3 \mathrm{Y}, \ldots,$$

en sorte que l'on ait, en général,

$$\mathrm{Y}_{-s} = \Delta^s \mathrm{Y};$$

on aura la formule

$$y_{x,t} = (pq)^t \left[\mathrm{Y}_x + t\mathrm{Y}_{x-1} + \frac{t(t-1)}{2} \mathrm{Y}_{x-2} + \frac{t(t-1)(t-2)}{2.3} \mathrm{Y}_{x-3} + \ldots \right],$$

dans laquelle toutes les quantités Y_x, Y_{x-1}, ... seront connues.

12. Mais, si ni C′ ni B′ n'est égal à zéro, alors il est impossible d'avoir, en général, une expression finie pour $y_{x,t}$ par la méthode du n° 7; cependant on y peut parvenir par une autre méthode que nous allons exposer.

Je reprends l'expression de β en α (7), laquelle est

$$\beta = -\frac{A + B\alpha}{B' + C'\alpha};$$

je fais

$$B' + C'\alpha = -\omega,$$

d'où je tire

$$\alpha = -\frac{\omega + B'}{C'},$$

et substituant dans la valeur de β, il me vient

$$\beta = -\frac{B}{C'} + \left(A - \frac{BB'}{C'}\right)\frac{1}{\omega}.$$

J'aurai donc ainsi

$$\alpha = -\frac{\omega}{C'}\left(1 + \frac{B'}{\omega}\right), \quad \beta = -\frac{B}{C'}\left[1 + \left(B' - \frac{AC'}{B}\right)\frac{1}{\omega}\right].$$

Ces valeurs étant substituées dans la quantité $\alpha^x\beta^t$, réduisant ensuite cette quantité en série suivant les puissances de $\frac{1}{\omega}$, on aura une expression de la forme

$$\alpha^x\beta^t = V\omega^x + V'\omega^{x-1} + V''\omega^{x-2} + V'''\omega^{x-3} + \ldots,$$

laquelle sera toujours composée d'un nombre fini de termes, x et t étant des nombres entiers positifs.

Or, puisque ω est une constante indéterminée, il est facile de prouver, par un raisonnement semblable à celui qu'on a fait dans le n° 7 relativement à l'indéterminée α, que l'on aura, en général,

$$y_{x,t} = Vf(x) + V'f(x-1) + V''f(x-2) + V'''f(x-3) + \ldots,$$

la caractéristique f dénotant une fonction quelconque.

Telle est donc l'expression générale de $y_{x,t}$, et cette expression a sur celle du numéro cité l'avantage d'être toujours finie.

13. Supposons maintenant que les valeurs données de y soient celles qui forment le premier rang horizontal, et le premier rang vertical de la Table du n° 6, c'est-à-dire qui répondent à $t = 0$ et à $x = 0$; et voyons comment on doit déterminer par leur moyen les différentes valeurs de la fonction $f(x)$, $f(x-1)$, ...

1° Soit donc $t = 0$, et faisant pour plus de simplicité

$$-\frac{1}{C'} = m, \quad B' = n,$$

en sorte que

$$\alpha = m\omega\left(1 + \frac{n}{\omega}\right) \quad \text{et} \quad \alpha^x = m^x\left[\omega^x + xn\omega^{x-1} + \frac{x(x-1)}{2}n^2\omega^{x-2} + \ldots\right],$$

on aura

$$V = m^x, \quad V' = xnm^x, \quad V'' = \frac{x(x-1)}{2}n^2m^x, \ldots;$$

donc

$$y_{x,0} = m^x\left[f(x) + xnf(x-1) + \frac{x(x-1)}{2}n^2f(x-2) + \ldots\right].$$

Supposons successivement

$$x = 0, 1, 2, 3, \ldots;$$

on aura

$$y_{0,0} = f(0),$$
$$y_{1,0} = m[f(1) + nf(0)],$$
$$y_{2,0} = m^2[f(2) + 2nf(1) + n^2f(0)],$$
$$y_{3,0} = m^3[f(3) + 3nf(2) + 3n^2f(1) + n^3f(0)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

d'où l'on tire

$$f(0) = y_{0,0},$$

$$\frac{1}{n} f(1) = \frac{1}{mn} y_{1,0} - y_{0,0},$$

$$\frac{1}{n^2} f(2) = \frac{1}{m^2 n^2} y_{2,0} - \frac{2}{mn} y_{1,0} + y_{0,0},$$

$$\frac{1}{n^3} f(3) = \frac{1}{m^3 n^3} y_{3,0} - \frac{3}{m^3 n^3} y_{2,0} + \frac{3}{mn} y_{1,0} - y_{0,0},$$

.....

D'où l'on peut conclure que, si l'on considère la série des termes

$$y_{0,0}, \quad \frac{1}{mn} y_{1,0}, \quad \frac{1}{m^2 n^2} y_{2,0}, \quad \frac{1}{m^3 n^3} y_{3,0}, \ldots,$$

et qu'on les désigne par Y, Y′, Y″, Y‴, ..., qu'ensuite on prenne les différences successives de ces termes et qu'on les désigne à la manière ordinaire par la caractéristique Δ, on aura

$$f(0) = Y, \quad f(1) = n\Delta Y, \quad f(2) = n^2 \Delta^2 Y, \quad f(3) = n^3 \Delta^3 Y, \ldots, \quad f(s) = n^s \Delta^s Y.$$

2° Soit $x = 0$, et faisant, pour abréger,

$$-\frac{B}{C'} = p, \quad B' - \frac{AC'}{B} = q,$$

en sorte que

$$\beta = p\left(1 + \frac{q}{\omega}\right),$$

et par conséquent

$$\beta^t = p^t \left[1 + \frac{tq}{\omega} + \frac{t(t-1)q^2}{2\omega^2} + \frac{t(t-1)(t-2)q^3}{2.3.\omega^3} + \ldots\right],$$

on aura

$$V = p^t, \quad V' = tqp^t, \quad V'' = \frac{t(t-1)}{2} q^2 p^t, \ldots;$$

donc

$$y_{0,t} = p^t \left[f(0) + tqf(-1) + \frac{t(t-1)}{2} q^2 f(-2) + \ldots\right].$$

Faisons successivement

$$t = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

on aura

$$y_{0,0} = f(0)$$
$$y_{0,1} = p[f(0) + qf(-1)],$$
$$y_{0,2} = p^2[f(0) + 2qf(-1) + q^2 f(-2)],$$
$$y_{0,3} = p^3[f(0) + 3qf(-1) + 3q^2 f(-2) + q^3 f(-3)],$$
....., ...,

d'où l'on tire

$$f(0) = y_{0,0},$$

$$qf(-1) = \frac{1}{p} y_{0,1} - y_{0,0},$$

$$q^2 f(-2) = \frac{1}{p^2} y_{0,2} - \frac{2}{p} y_{0,1} + y_{0,0},$$

$$q^3 f(-3) = \frac{1}{p^3} y_{0,3} - \frac{3}{p^3} y_{0,2} + \frac{3}{p} y_{0,1} - y_{0,0},$$

.....;

donc si l'on considère la série

$$y_{0,0}, \quad \frac{1}{p} y_{0,1}, \quad \frac{1}{p^2} y_{0,2}, \quad \frac{1}{p^3} y_{0,3}, \ldots,$$

et qu'on désigne les termes de cette série par Y, ᵗY, ᵘY, ᵛY, ..., qu'ensuite on prenne les différences successives de ces termes et qu'on les désigne par la caractéristique δ, on aura

$$f(0) = Y, \quad f(-1) = \frac{\delta Y}{q}, \quad f(-2) = \frac{\delta^2 Y}{q^2}, \quad f(-3) = \frac{\delta^3 Y}{q^3}, \ldots, \quad f(-s) = \frac{\delta^s Y}{q^s}.$$

Ainsi l'on connaîtra les valeurs de $f(s)$, soit que s soit positif ou négatif; et l'on aura, en général, comme ci-dessus,

$$y_{x,t} = Vf(x) + V'f(x-1) + V''f(x-2) + \ldots.$$

A l'égard des valeurs de V, V′, V″, ..., il est clair que pour les trouver il n'y aura qu'à multiplier ensemble les séries ci-dessus qui donnent les valeurs de α^x et de β^t; on aura par ce moyen

$$V = m^x p^t,$$
$$V' = m^x p^t (xn + tq),$$
$$V'' = m^x p^t \left[\frac{x(x-1)}{2} n^2 + xn.tq + \frac{t(t-1)}{2} q^2 \right],$$
$$V''' = m^x p^t \left[\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} n^3 + \frac{x(x-1)}{2} n^2.tq + xn.\frac{t(t-1)}{2} q^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{2.3} q^3 \right],$$
.....

Et si $q = n$, ce qui a lieu lorsque $A = 0$, on aura plus simplement

$$V = m^x p^t,$$
$$V' = m^x p^t (x + t) n,$$
$$V'' = m^x p^t \frac{(x+t)(x+t-1)}{2} n^2,$$
$$V''' = m^x p^t \frac{(x+t)(x+t-1)(x+t-2)}{2.3} n^3,$$
.....

Le Problème est donc résolu avec toute la simplicité et la généralité qu'on peut désirer.

14. Dans l'Exemple du n° 10 on a

$$A = 1, \quad B = 0, \quad B' = 1, \quad C' = -1;$$

donc

$$m = 1, \quad n = 1, \quad p = 0, \quad q = \infty \quad \text{et} \quad pq = 1.$$

Donc on trouvera (à cause de $p = 0$, $q = \infty$ et $pq = 1$)

$$V = 0, \quad V' = 0, \quad V'' = 0, \ldots, \quad V^{(t-1)} = 0,$$

$V^{(t)} = m^x$, $V^{(t+1)} = m^x xn$, $V^{(t+2)} = m^x \frac{x(x-1)}{2} n^2$, $V^{(t+3)} = m^x \frac{x(x-1)(x-2)}{2.3} n^3$, ...

Ensuite la série Y, Y′, Y″, ... deviendra $y_{0,0}, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots$, de sorte qu'on aura, en général,

$$f(s) = \Delta^t y_{0,s},$$

s étant un nombre positif. Enfin, à cause de $p = 0$, $q = \infty$ et $pq = 1$, on trouvera

$$f(0) = y_{0,s}, \quad f(-1) = -y_{0,t}, \quad f(-2) = y_{0,2}, \ldots, \quad f(-s) = \pm y_{0,s};$$

le signe supérieur étant pour le cas de s pair, et l'inférieur pour celui de s impair.

Substituant donc ces valeurs dans l'expression générale de $y_{x,t}$, on aura

$$y_{x,t} = m^x \begin{cases} \Delta^{x-t} y_{0,0} + x\Delta^{x-t-1} y_{0,0} + \frac{x(x-1)}{2} \Delta^{x-t-2} y_{0,0} + \ldots + \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(t+1)}{1.2.3\ldots(x-t)} y_{0,0} \\ - \frac{x(x-1)(x-2)\ldots t}{1.2.3\ldots(x-t+1)} y_{0,1} + \frac{x(x-1)\ldots(t-1)}{1.2\ldots(x-t+2)} y_{0,2} - \frac{x(x-1)\ldots(t-2)}{1.2\ldots(x-t+3)} y_{0,3} + \ldots \end{cases},$$

où les différences $\Delta y_{0,0}$, $\Delta^2 y_{0,0}$, ... se rapportent uniquement aux termes du premier rang horizontal $y_{0,0}, y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots$, en sorte que

$$\Delta y_{0,0} = y_{1,0} - y_{0,0}, \quad \Delta^2 y_{0,0} = y_{2,0} - 2y_{1,0} + y_{0,0}, \ldots$$

Par le moyen de cette formule on peut donc avoir la valeur d'un terme quelconque de la Table de Pascal, en supposant que dans cette Table le premier rang horizontal et le premier rang vertical soient quelconques.

Dans la Table même de Pascal, le premier rang horizontal est tout formé d'unités, et le premier rang vertical est tout zéro à l'exception du premier terme, en sorte que l'on a

$$y_{0,0} = 1, \quad y_{1,0} = 1, \quad y_{2,0} = 1 \ldots,$$
$$y_{0,1} = 0, \quad y_{0,2} = 0, \ldots;$$

donc

$$\Delta y_{0,0} = 0, \quad \Delta^2 y_{0,0} = 0, \ldots.$$

Ainsi la formule précédente deviendra dans ce cas

$$y_{x,t} = \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(t+1)}{1.2.3\ldots(x-t)};$$

ce qui s'accorde avec ce que l'on a trouvé à la fin du n° 10.

15. Soit proposée maintenant l'équation générale du second ordre

$$\text{(G)} \qquad \left.\begin{array}{l} \mathrm{A}y_{x,t} + \mathrm{B}y_{x+1,t} + \mathrm{C}y_{x+2,t} \\ \quad + \mathrm{B}'y_{x,t+1} + \mathrm{C}'y_{x+1,t+1} \\ \quad\quad + \mathrm{C}''y_{x,t+2} \end{array}\right\} = 0.$$

Je fais, comme ci-dessus,

$$y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t;$$

substituant et divisant ensuite tous les termes par $a\alpha^x\beta^t$, il me vient cette équation en α et β

$$\text{(H)} \qquad \mathrm{A} + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{B}'\beta + \mathrm{C}\alpha^2 + \mathrm{C}'\alpha\beta + \mathrm{C}''\beta^2 = 0,$$

par laquelle on pourra déterminer β en α.

Je cherche donc par la méthode connue de Newton la valeur de β en α exprimée par une série descendante, c'est-à-dire dans laquelle les exposants de α aillent en diminuant. J'élève ensuite cette série à la puissance t au moyen des formules connues pour cet objet; j'obtiens par là une valeur de β^t en α de la forme suivante

$$\beta^t = \mathrm{T}\alpha^{\mu t} + \mathrm{T}'\alpha^{\mu t-\mu'} + \mathrm{T}''\alpha^{\mu t-\mu''} + \mathrm{T}'''\alpha^{\mu t-\mu'''} + \ldots,$$

où les nombres μ', μ'', μ''', ... seront nécessairement tous positifs et croissants.

Donc, substituant cette valeur de β^t, on aura cette expression particulière de $y_{x,t}$, savoir

$$y_{x,t} = \mathrm{T}a\alpha^{x+\mu t} + \mathrm{T}'a\alpha^{x+\mu t-\mu'} + \mathrm{T}''a\alpha^{x+\mu t-\mu''} + \ldots,$$

dans laquelle a et α seront des constantes indéterminées.

De là, par un raisonnement semblable à celui du n° 7, on tirera immédiatement l'expression générale

$$y_{x,t} = \mathrm{T}f(x+\mu t) + \mathrm{T}'f(x+\mu t-\mu') + \mathrm{T}''f(x+\mu t-\mu'') + \ldots,$$

la caractéristique f dénotant une fonction quelconque indéterminée.

Or, tant que C'' ne sera pas nul, l'équation en β montera au second degré et aura par conséquent deux racines; on aura donc pour β, et par conséquent aussi pour β^t, deux séries différentes; donc, si l'autre valeur de β^t est représentée par la série

$$\beta^t = \mathrm{U}\alpha^{\nu t} + \mathrm{U}'\alpha^{\nu t-\nu'} + \mathrm{U}''\alpha^{\nu t-\nu''} + \mathrm{U}'''\alpha^{\nu t-\nu'''} + \ldots,$$

les nombres ν', ν'', ν''', ... étant aussi positifs et croissants, on en tirera pareillement une valeur de $y_{x,t}$, qui sera

$$y_{x,t} = \mathrm{U}\varphi(x+\nu t) + \mathrm{U}'\varphi(x+\nu t-\nu') + \mathrm{U}''\varphi(x+\nu t-\nu'') + \ldots,$$

la caractéristique φ désignant aussi une fonction quelconque indéterminée.

Réunissant maintenant ces deux valeurs de $y_{x,t}$, on aura, en général,

$$\begin{aligned} y_{x,t} = {} & \mathrm{T}f(x+\mu t) + \mathrm{T}'f(x+\mu t-\mu') + \mathrm{T}''f(x+\mu t-\mu'') + \ldots \\ & + \mathrm{U}\varphi(x+\nu t) + \mathrm{U}'\varphi(x+\nu t-\nu') + \mathrm{U}''\varphi(x+\nu t-\nu'') + \ldots, \end{aligned}$$

expression qui est nécessairement l'intégrale complète de la proposée, puisqu'elle contient deux fonctions indéterminées.

16. Il est clair que cette expression de $y_{x,t}$ sera toujours composée d'un nombre infini de termes, à moins que les deux valeurs de β en α ne soient finies; ce qui n'a lieu que lorsque l'équation (H) peut se décomposer en deux équations du premier degré. Dans ce cas on aura pour $y_{x,t}$ une expression finie, et par conséquent on aura l'intégrale finie de l'équation différentielle proposée. Mais il peut arriver dans ce même cas que les deux valeurs de β en α soient égales; ce qui donnera

$$\mathrm{U} = \mathrm{T}, \quad \mathrm{U}' = \mathrm{T}', \ldots,$$
$$\nu = \mu, \quad \nu' = \mu', \ldots,$$

en sorte que les deux fonctions arbitraires se fondront en une seule; ce qui rendra la valeur de $y_{x,t}$ incomplète.

Pour remédier à cet inconvénient on supposera, suivant la méthode usitée dans ces sortes de cas, que les deux valeurs de β diffèrent entre elles d'une quantité très-petite, c'est-à-dire qu'on prendra pour la seconde valeur de β, $\beta + d\beta$; ce qui donnera pour la seconde valeur de β^t, $\beta^t + t\beta^{t-1}d\beta$, où il faut remarquer que la différentielle $d\beta$ demeure indéterminée, parce qu'en différentiant l'équation (H) il arrivera nécessairement que les quantités par lesquelles les deux différentielles $d\alpha$ et $d\beta$ se trouveront multipliées, seront nulles à la fois. De là il est aisé de conclure que si l'on dénote par ${}_tT$, ${}_tT'$, ${}_tT''$, ${}_tT'''$, ... les valeurs de T, T', T'', T''', ... qui répondent à $t-1$, c'est-à-dire qui résultent de la substitution de $t-1$ à la place de t, on aura pour $y_{x,t}$ cette autre expression

$$y_{x,t} = Tf(x+\mu t) + T'f(x+\mu t-\mu') + T''f(x+\mu t-\mu'') + \ldots$$
$$+ {}_tTF[x+\mu(t-1)] + {}_tT'F[x+\mu(t-1)-\mu'] + {}_tT''F[x+\mu(t-1)-\mu''] + \ldots,$$

dans laquelle les caractéristiques f et F dénotent des fonctions quelconques.

17. Pour déterminer maintenant les fonctions arbitraires, on supposera que les deux premiers rangs horizontaux de la Table du n° 6 soient donnés, c'est-à-dire qu'on connaisse toutes les valeurs de $y_{x,0}$ et de $y_{x,1}$; on fera donc 1° $t=0$, et, comme dans ce cas on a

$$T=1, \quad T'=0, \quad T''=0, \ldots,$$

et de même

$$U=1, \quad U'=0, \quad U''=0, \ldots,$$

la formule du n° 15 donnera

$$y_{x,0} = f(x) + \varphi(x);$$

on fera 2° $t=1$, et, dénotant par θ, θ', θ'', ... υ, υ', υ'', ... les valeurs

de T, T', T'', ..., U, U', U'', ... qui répondent à $t=1$, la même formule donnera

$$y_{x,1} = \theta f(x+\mu) + \theta' f(x+\mu-\mu') + \theta'' f(x+\mu-\mu'') + \ldots$$
$$+ \upsilon\varphi(x+\nu) + \upsilon'\varphi(x+\nu-\nu') + \upsilon''\varphi(x+\nu-\nu'') + \ldots;$$

ainsi l'on aura deux équations, à l'aide desquelles, en donnant successivement à x toutes les valeurs 0, 1, 2, 3, ..., on pourra déterminer celles des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$; mais il est clair que cette détermination sera très-difficile, en général, à moins que l'expression de $y_{x,t}$ ne soit finie, ce qui n'arrivera que lorsque la valeur de β en α est finie.

Si les deux valeurs de β sont égales, la détermination des fonctions $f(x)$ et $F(x)$ de la formule du n° 16 sera très-facile; car en faisant $t=0$ on aura d'abord

$$y_{x,0} = f(x);$$

et faisant ensuite $t=1$, on aura

$${}_tT=1, \quad {}_tT'=0, \quad {}_tT''=0, \ldots,$$

donc

$$y_{x,1} = \theta f(x+\mu-\mu') + \theta' f(x+\mu-\mu') + \ldots + F(x);$$

de sorte qu'on connaîtra immédiatement par là les valeurs générales des deux fonctions.

18. Au reste, quoique l'expression de $y_{x,t}$ trouvée par la méthode précédente soit, en général, composée d'un nombre infini de termes, il y a cependant un cas très-étendu, et qui a lieu dans la plupart des questions qui conduisent à ces sortes d'équations différentielles, dans lequel cette expression devient finie; en sorte que la détermination des fonctions arbitraires n'a plus de difficulté. Ce cas est celui où l'on suppose que si l'on continue en arrière les deux premiers rangs horizontaux de la Table du n° 6, tous les termes qui formeraient ces rangs ainsi continués soient nuls; c'est-à-dire lorsque l'on aura, en général,

$$y_{x,0}=0, \quad y_{x,1}=0,$$

tant que x sera négatif.

En effet, il est aisé de voir qu'on aura alors

$$f(-s)=0 \quad \text{et} \quad \varphi(-s)=0,$$

tant que s sera plus grand que μ et ν; de sorte que comme les nombres qui sont après les caractéristiques f et φ dans l'expression générale de $y_{x,t}$ vont continuellement en diminuant, les fonctions de ces nombres deviendront enfin nulles, ce qui rendra l'expression dont il s'agit finie.

Il est facile maintenant d'appliquer aux équations différentielles de tous les ordres, comprises sous la formule générale du n° 6, la méthode que nous venons d'exposer pour les équations du second ordre, et d'en tirer des conclusions semblables; ainsi nous ne nous étendrons pas davantage sur cette méthode.

19. Dans le cas des équations du second ordre à trois termes nous avons trouvé moyen de remédier à l'inconvénient de la méthode générale, et d'obtenir une expression finie de $y_{x,t}$ (12); en considérant l'artifice qu'on a employé dans l'endroit cité, et qui consiste à exprimer les deux quantités α et β par une troisième indéterminée ω, d'une manière finie, on se convaincra aisément qu'il peut aussi servir pour toutes les équations du second ordre, comme on va le voir.

Je reprends donc l'équation (H) du n° 15, et je fais d'abord évanouir les termes où les indéterminées sont à la première dimension, en supposant

$$\alpha=m+\varepsilon, \quad \beta=n+\theta,$$

et prenant m et n tels que l'on ait

$$B+2Cm+C'n=0, \quad B'+2C''n+C'm=0,$$

ce qui donne

$$m=\frac{2BC''-B'C'}{C'^2-4CC''}, \quad n=\frac{2B'C-BC'}{C'^2-4CC''};$$

moyennant quoi si l'on fait, pour abréger,

$$K=A+Bm+B'n+Cm^2+C'mn+C''n^2,$$

on a cette transformée en ε et θ

$$C\varepsilon^2+C'\varepsilon\theta+C''\theta^2+K=0,$$

laquelle étant multipliée par C peut se mettre sous cette forme

$$(C\varepsilon+h\theta)(C\varepsilon+l\theta)+CK=0,$$

en supposant

$$h=\frac{C'}{2}+\sqrt{\frac{C'^2}{4}-CC''}, \quad l=\frac{C'}{2}-\sqrt{\frac{C'^2}{4}-CC''}.$$

Je fais maintenant

$$C\varepsilon+h\theta=\omega,$$

j'aurai

$$C\varepsilon+l\theta=-\frac{CK}{\omega}\ (*),$$

d'où je tire sur-le-champ

$$\varepsilon=\frac{l\omega+\frac{hCK}{\omega}}{C(l-h)}, \quad \theta=\frac{\omega+\frac{CK}{\omega}}{h-l};$$

donc enfin

$$\alpha=m+\frac{l\omega+\frac{hCK}{\omega}}{C(l-h)}, \quad \beta=n+\frac{\omega+\frac{CK}{\omega}}{h-l}.$$

Ainsi les deux indéterminées α et β sont exprimées par une troisième indéterminée ω d'une manière finie et sans fraction complexe, de sorte que la valeur de $\alpha^x\beta^t$ sera toujours finie tant que x et t seront entiers positifs.

Et il est à remarquer à l'égard des expressions précédentes que l'ambiguïté du radical qui entre dans les valeurs de h et de l n'influe point sur la forme de ces expressions; car en changeant le signe de ce radical on ne fait que changer h en l et *vice versâ*; or en faisant ce changement et mettant en même temps $-\frac{CK}{\omega}$ à la place de ω, et par conséquent ω à

(*) Dans le texte primitif le second membre de cette formule a le signe +, ce qui a pour effet de changer K en −K dans les expressions de α et de β. Nous avons cru devoir rétablir l'exactitude des formules. (*Note de l'Éditeur.*)

la place de $-\frac{CK}{\omega}$, on verra que les nouvelles expressions de α et β en η seront les mêmes que les premières en ω.

Cela posé, si l'on fait, pour abréger davantage,

$$p=\frac{l}{C(l-h)},\quad q=\frac{hK}{l-h},\quad r=\frac{1}{h-l},\quad s=\frac{CK}{h-l},$$

on aura

$$\alpha=m+p\omega+\frac{q}{\omega},\quad \beta=n+r\omega+\frac{s}{\omega},$$

par conséquent

$$\alpha^x\beta^t=\left(m+p\omega+\frac{q}{\omega}\right)^x\left(n+r\omega+\frac{s}{\omega}\right)^t.$$

Cette expression de $\alpha^x\beta^t$, étant développée et ordonnée suivant les puissances de ω, se réduira à une série finie de la forme

$$\begin{aligned}&V+V'\omega+V''\omega^2+V'''\omega^3+\ldots+V^{(x+t)}\omega^{x+t}\\&+\frac{{}'V}{\omega}+\frac{{}''V}{\omega^2}+\frac{{}'''V}{\omega^3}+\ldots+\frac{{}^{(x+t)}V}{\omega^{x+t}},\end{aligned}$$

où les coefficients V, V', V'', ..., ${}'V$, ${}''V$, ${}'''V$, ... seront des fonctions de x et t, qu'on peut déterminer par différents moyens d'après les méthodes connues.

Donc comme ω est une quantité absolument arbitraire, on en pourra conclure immédiatement par des raisonnements analogues à ceux que nous avons faits plus haut (7) l'expression générale de $y_{x,t}$, laquelle sera

$$\begin{aligned}y_{x,t}=&Vf(0)+V'f(1)+V''f(2)+V'''f(3)+\ldots+V^{(x+t)}f(x+t)\\&+{}'Vf(-1)+{}''Vf(-2)+{}'''Vf(-3)+\ldots+{}^{(x+t)}Vf(-x-t),\end{aligned}$$

la caractéristique f dénotant une fonction arbitraire.

20. Pour déterminer cette fonction, ou du moins ses différentes valeurs particulières qui entrent dans l'expression précédente, nous supposerons que dans la Table du n° 6 le premier rang horizontal et le premier rang vertical soient donnés, en sorte qu'on connaisse toutes les valeurs de $y_{x,0}$ et de $y_{0,t}$. On supposera donc d'abord $t=0$ et x successivement 0, 1, 2, 3, ...; ensuite $x=0$ et t successivement 0, 1, 2, 3, ...; on aura par ce moyen les équations nécessaires pour déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, ... Mais comme en s'y prenant ainsi l'on tombe dans des formules assez compliquées, je vais donner une autre manière de parvenir plus aisément au but.

21. Pour cela je remarque d'abord que comme

$$p\omega+\frac{q}{\omega}=\varepsilon,\quad r\omega+\frac{s}{\omega}=0,$$

on aura, par les formules connues,

$$p\omega+\frac{q}{\omega}=\varepsilon,\quad p^2\omega^2+\frac{q^2}{\omega^2}=\varepsilon^2-2pq,\quad p^3\omega^3+\frac{q^3}{\omega^3}=\varepsilon^3-3pq\varepsilon,\ldots,$$

et, en général,

$$p^\lambda\omega^\lambda+\frac{q^\lambda}{\omega^\lambda}=\varepsilon^\lambda-\lambda pq\varepsilon^{\lambda-2}+\frac{\lambda(\lambda-3)}{2}p^2q^2\varepsilon^{\lambda-4}-\frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{2.3}p^3q^3\varepsilon^{\lambda-6}+\ldots,$$

et de même l'on aura

$$r^\lambda\omega^\lambda+\frac{s^\lambda}{\omega^\lambda}=\theta^\lambda-\lambda rs\theta^{\lambda-2}+\frac{\lambda(\lambda-3)}{2}r^2s^2\theta^{\lambda-4}-\frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-5)}{2.3}r^3s^3\theta^{\lambda-6}+\ldots,$$

d'où l'on tire

$$\omega^\lambda=\frac{(s^\lambda\varepsilon^\lambda-q^\lambda\theta^\lambda)-\lambda(pqs^\lambda\varepsilon^{\lambda-2}-rsq^\lambda\theta^{\lambda-2})+\ldots}{p^\lambda s^\lambda-q^\lambda r^\lambda},$$

$$\frac{1}{\omega^\lambda}=\frac{(r^\lambda\varepsilon^\lambda-p^\lambda\theta^\lambda)-\lambda(pqr^\lambda\varepsilon^{\lambda-2}-rsp^\lambda\theta^{\lambda-2})+\ldots}{q^\lambda r^\lambda-p^\lambda s^\lambda}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans la série

$$V+V'\omega+\frac{{}'V}{\omega}+V''\omega^2+\frac{{}''V}{\omega^2}+\ldots,$$

il est visible qu'on aura une transformée de cette forme

$$Z + Z'\varepsilon + Z''\varepsilon^2 + Z'''\varepsilon^3 + \ldots + Z^{(x+t)}\varepsilon^{x+t} + {}'Z\theta + {}''Z\theta^2 + {}'''Z\theta^3 + \ldots + {}^{(x+t)}Z\theta^{x+t},$$

laquelle sera par conséquent égale et identique à la quantité

$$\alpha^x\beta^t = (m+\varepsilon)^x(n+\theta)^t,$$

en supposant qu'il y ait entre ε et θ (19) l'équation

$$C\varepsilon^2 + C'\varepsilon\theta + C''\theta^2 + K = 0.$$

Maintenant comme ε et θ sont deux différentes fonctions de l'indéterminée ω, on en peut conclure sur-le-champ, par un raisonnement analogue à celui du n° 7, cette expression générale de $y_{x,t}$, savoir

$$y_{x,t} = ZF(0) + Z'F(1) + Z''F(2) + \ldots + Z^{(x+t)}F(x+t) + {}'Z\varphi(1) + {}''Z\varphi(2) + \ldots + {}^{(x+t)}Z\varphi(x+t),$$

où les caractéristiques F et φ dénotent des fonctions quelconques.

22. Qu'on suppose maintenant, pour déterminer ces fonctions, $t = 0$ et ensuite $x = 0$, on aura :

1° Lorsque $t = 0$,

$$(m+\varepsilon)^x(n+\theta)^t = (m+\varepsilon)^x = m^x + xm^{x-1}\varepsilon + \frac{x(x-1)}{2}m^{x-2}\varepsilon^2 + \ldots;$$

donc

$$Z = m^x, \quad Z' = xm^{x-1}, \quad Z'' = \frac{x(x-1)}{2}m^{x-2}, \ldots,$$

$$'Z = 0, \quad ''Z = 0, \ldots,$$

donc

$$y_{x,0} = m^x\left[F(0) + x\frac{F(1)}{m} + \frac{x(x-1)}{2}\frac{F(2)}{m^2} + \ldots\right],$$

d'où en faisant successivement $x = 0, 1, 2, \ldots$, on tirera aisément les valeurs de $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, ... Et par la méthode du n° 13 on trouvera

que si l'on désigne la série des quantités

$$y_{0,0}, \quad \frac{1}{m}y_{1,0}, \quad \frac{1}{m^2}y_{2,0}, \quad \frac{1}{m^3}y_{3,0}, \ldots$$

par Y, Y', Y'', ..., et qu'on dénote par Δ, Δ^2, ... les différences successives des termes de cette série, on aura, en général,

$$F(\mu) = m^\mu \Delta^\mu Y.$$

2° Lorsque $x = 0$,

$$(m+\varepsilon)^x(n+\theta)^t = (n+\theta)^t = n^t + tn^{t-1}\theta + \frac{t(t-1)}{2}n^{t-2}\theta^2 + \ldots;$$

donc

$$Z = n^t, \quad 'Z = tn^{t-1}, \quad ''Z = \frac{t(t-1)}{2}n^{t-2}, \ldots,$$

$$Z' = 0, \quad Z'' = 0, \ldots,$$

donc

$$y_{0,t} = n^t\left[\varphi(0) + t\frac{\varphi(1)}{n} + \frac{t(t-1)}{2}\frac{\varphi(2)}{n^2} + \ldots\right],$$

en supposant $\varphi(0) = F(0)$.

De là on trouvera, comme ci-devant, que si l'on considère la série

$$y_{0,0}, \quad \frac{1}{n}y_{0,1}, \quad \frac{1}{n^2}y_{0,2}, \quad \frac{1}{n^3}y_{0,3}, \ldots,$$

et qu'on en désigne les termes par Y, 'Y, ''Y, ''Y, ..., qu'on dénote ensuite par δ, δ^2, ... les différences successives de ces termes, on trouvera, dis-je, en général,

$$\varphi(\nu) = n^\nu \delta^\nu Y.$$

Or en faisant $\mu = 0$, $\nu = 0$, on a

$$F(0) = Y = \varphi(0),$$

comme cela doit être par l'hypothèse.

Donc si l'on substitue ces valeurs dans l'expression de $y_{x,t}$ du numéro

précédent, on aura

$$y_{x,t} = ZY + m^t Z' \Delta Y + m^{2t} Z'' \Delta^2 Y + \ldots + m^{xt} Z^{(x)} \Delta^x Y + n^t {}^1Z\, \delta Y + n^{2t}\, {}^{11}Z\, \delta^2 Y + \ldots + n^{xt}\, {}^{(x)}Z\, \delta^x Y,$$

formule par laquelle on pourra connaître un terme quelconque de la Table du n° 6, dès qu'on connaîtra ceux des deux premiers rangs, l'un horizontal, l'autre vertical.

23. Si maintenant on compare ensemble les deux expressions de $y_{x,t}$ des n°s 19 et 21, il sera facile d'en conclure les valeurs de la fonction f par celles des fonctions F et φ; et il n'est pas difficile de voir qu'on aura, en général, entre

$$f(\lambda),\ f(-\lambda),\ F(\lambda),\ F(\lambda-2),\ldots,\ \varphi(\lambda),\ \varphi(\lambda-2),\ldots$$

les mêmes relations qu'entre

$$\omega^\lambda,\ \frac{1}{\omega^\lambda},\ \varepsilon^\lambda,\ \varepsilon^{\lambda-2},\ldots,\ \theta^\lambda,\ \theta^{\lambda-2},\ldots.$$

De sorte que si l'on substitue les valeurs des fonctions F et φ trouvées ci-dessus, et qu'on fasse, pour abréger,

$$p^\lambda s^\lambda - q^\lambda r^\lambda = \frac{1}{\Lambda},$$

on aura, λ étant positif,

$$f(\lambda) = \Lambda s^\lambda m^\lambda \left[\Delta^\lambda Y - \lambda \frac{pq}{m^2} \Delta^{\lambda-2} Y + \frac{\lambda(\lambda-3)}{2} \frac{p^2 q^2}{m^4} \Delta^{\lambda-4} Y - \ldots\right]$$
$$+ \Lambda q^\lambda n^\lambda \left[\delta^\lambda Y - \lambda \frac{rs}{n^2} \delta^{\lambda-2} Y + \frac{\lambda(\lambda-3)}{2} \frac{r^2 s^2}{n^4} \delta^{\lambda-4} Y - \ldots\right],$$

$$f(-\lambda) = \Lambda p^\lambda n^\lambda \left[\delta^\lambda Y - \lambda \frac{rs}{n^2} \delta^{\lambda-2} Y + \frac{\lambda(\lambda-3)}{2} \frac{r^2 s^2}{n^4} \delta^{\lambda-4} Y - \ldots\right]$$
$$- \Lambda r^\lambda m^\lambda \left[\Delta^\lambda Y - \lambda \frac{pq}{m^2} \Delta^{\lambda-2} Y + \frac{\lambda(\lambda-3)}{2} \frac{p^2 q^2}{m^4} \Delta^{\lambda-4} Y - \ldots\right];$$

ce sont les valeurs de la fonction f qui résulteraient des équations du n° 20, comme il est facile de s'en convaincre par le calcul; ainsi il n'y aura qu'à substituer ces valeurs dans la formule du n° 19.

24. La méthode par laquelle nous venons d'intégrer d'une manière finie et complète toutes les équations différentielles du second ordre entre trois variables pourrait s'étendre aussi aux équations des ordres supérieurs si, dans une équation quelconque à deux indéterminées, il était toujours possible d'exprimer chacune de ces indéterminées par une fonction rationnelle finie et sans fraction complexe d'une troisième indéterminée; mais comme cela n'a lieu, pour les équations qui passent le second degré, que dans des cas particuliers, on doit regarder la méthode précédente comme bornée aux équations différentielles du premier et du second ordre.

Pour suppléer à ce défaut, nous allons donner dans l'Article suivant une autre méthode qui s'étendra aux équations de tous les ordres, et qui joindra à l'avantage de donner toujours des intégrales finies, celui de rendre la détermination des fonctions arbitraires très-facile dans tous les cas.

Article III. — *Où l'on donne une méthode générale pour l'intégration des équations linéaires aux différences finies entre trois variables.*

25. Considérons l'équation différentielle du $n^{ième}$ degré du n° 6, et faisons, en général,

$$y_{x,t} = a\alpha^x \beta^t;$$

il est facile de voir qu'après les substitutions et la division par $a\alpha^x\beta^t$, il viendra cette équation du $n^{ième}$ degré en α et β

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots + N\alpha^n \\ \quad + B'\beta + C'\alpha\beta + \ldots + N'\alpha^{n-1}\beta \\ \qquad + C''\beta^2 + \ldots + N''\alpha^{n-2}\beta^2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad + N^{(n)}\beta^n \end{array}\right\} = 0,$$

par laquelle il faudra déterminer β en α ou *vice versâ*.

Je remarque maintenant qu'on ne peut exprimer, en général, β en puissances de α que par une série infinie, ce qui donnera, comme on l'a vu dans l'Article II, une expression de $y_{x,t}$ en série infinie; mais comme on n'a pas besoin de la valeur de β, mais seulement de celle de β^t, où t est censé plus grand que n, j'observe qu'on peut réduire cette valeur à une série rationnelle et finie de termes ordonnés suivant les puissances de α, pourvu qu'on y admette aussi les puissances de β inférieures à β^n; car il est visible que si l'on prend la valeur de β^n donnée par l'équation précédente, et qu'on la substitue autant qu'il est possible dans la valeur de β^t, qu'ensuite dans les termes résultant de cette première substitution, on substitue de nouveau autant qu'il est possible la même valeur de β^n, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait rabaissé les puissances de β au-dessous de β^n; il est visible, dis-je, qu'on parviendra à une formule de cette forme

$$(\mathrm{K})\qquad \left\{\begin{array}{l} \beta^t = \mathrm{T} + \mathrm{T}'\alpha + \mathrm{T}''\alpha^2 + \mathrm{T}'''\alpha^3 + \ldots + \mathrm{T}^{(t)}\alpha^t \\ \quad + {}_{,}\mathrm{T}\,\beta + {}_{,}\mathrm{T}'\alpha\beta + {}_{,}\mathrm{T}''\alpha^2\beta + \ldots + {}_{,}\mathrm{T}^{(t-1)}\alpha^{t-1}\beta \\ \quad + {}_{,,}\mathrm{T}\beta^2 + {}_{,,}\mathrm{T}'\alpha\beta^2 + \ldots + {}_{,,}\mathrm{T}^{(t-2)}\alpha^{t-2}\beta^2 \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad + {}_{(n-1)}\mathrm{T}\beta^{n-1} + \ldots + {}_{(n-1)}\mathrm{T}^{(t-n+1)}\alpha^{t-n+1}\beta^{n-1}, \end{array}\right.$$

où les coefficients T, T′, T″,..., ${}_{,}$T, ${}_{,}$T′,... seront des fonctions rationnelles données de t et des coefficients A, B, B′,... de l'équation en α et β.

26. Multipliant donc cette expression de β^t par $a\alpha^x$, on aura une valeur particulière de $y_{x,t}$ dans laquelle les deux constantes a et α seront à volonté; et comme l'équation différentielle proposée est linéaire et ne contient aucun terme sans y, il est visible qu'on pourra aussi prendre pour $y_{x,t}$ la somme d'autant de pareilles valeurs particulières qu'on voudra, en supposant que les quantités a et α soient différentes dans chacune de ces valeurs.

De là et de ce que les quantités β, β^2, β^3,... jusqu'à β^{n-1} sont nécessairement des fonctions irrationnelles de α, irréductibles entre elles, il est aisé de conclure par un raisonnement analogue à celui qu'on a employé dans le n° 7 que l'on aura, en général,

$$\begin{aligned} y_{x,t} &= \mathrm{T}f(x) + \mathrm{T}'f(x+1) + \mathrm{T}''f(x+2) + \mathrm{T}'''f(x+3) + \ldots + \mathrm{T}^{(t)}f(x+t) \\ &\quad + {}_{,}\mathrm{T}\,{}^{1}f(x) + {}_{,}\mathrm{T}'\,{}^{1}f(x+1) + {}_{,}\mathrm{T}''\,{}^{1}f(x+2) + \ldots + {}_{,}\mathrm{T}^{(t-1)}\,{}^{1}f(x+t-1) \\ &\quad + {}_{,,}\mathrm{T}\,{}^{2}f(x) + {}_{,,}\mathrm{T}'\,{}^{2}f(x+1) + \ldots + {}_{,,}\mathrm{T}^{(t-2)}\,{}^{2}f(x+t-2) \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\quad + {}_{(n-1)}\mathrm{T}\,{}^{n-1}f(x) + \ldots + {}_{(n-1)}\mathrm{T}^{(t-n+1)}\,{}^{n-1}f(x+t-n+1), \end{aligned}$$

où les caractéristiques f, ${}^1f$, ${}^2f$,..., ${}^{n-1}f$ dénotent des fonctions arbitraires quelconques indépendantes entre elles; de sorte que comme le nombre de ces différentes fonctions est n, et par conséquent égal à l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle proposée, on doit regarder l'expression précédente comme l'intégrale complète de cette même équation.

27. Pour déterminer maintenant les valeurs de ces différentes fonctions, je suppose que les n premiers rangs horizontaux de la Table du n° 6 soient donnés, en sorte qu'on connaisse toutes les différentes valeurs de $y_{x,0}$, $y_{x,1}$, $y_{x,2}$,..., $y_{x,n-1}$, c'est-à-dire toutes les valeurs de $y_{x,t}$ qui répondent à $t = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Or faisant $t = 0$ on a $\beta^t = 1$; donc dans la formule (K) du n° 25 on aura

$$\mathrm{T} = 1, \quad \mathrm{T}' = 0, \ldots, \quad {}_{,}\mathrm{T} = 0, \ldots, \ldots;$$

faisant $t = 1$ on a $\beta^t = \beta$; donc

$${}_{,}\mathrm{T} = 1, \quad \text{et tous les autres coefficients nuls;}$$

faisant $t = 2$ on a $\beta^t = \beta^2$; donc

$${}_{,,}\mathrm{T} = 2, \quad \text{et les autres coefficients nuls;}$$

et ainsi de suite.

Donc : si l'on fait $t = 0$, on aura dans la formule du n° 26

$$y_{x,0} = f(x);$$

si l'on fait $t = 1$, on aura

$$y_{x,1} = {}^1f(x);$$

si l'on fait $t = 2$, on aura

$$y_{x,2} = {}^2f(x),$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$y_{x,n-1} = {}^{n-1}f(x).$$

On connaît donc par ce moyen toutes les fonctions arbitraires; et substituant leurs valeurs dans la formule générale, on aura

$$\begin{aligned} y_{x,t} = {} & \mathrm{T}y_{x,0} + \mathrm{T}'y_{x+1,0} + \mathrm{T}''y_{x+2,0} + \mathrm{T}'''y_{x+3,0} + \ldots + \mathrm{T}^{(t)}y_{x+t,0} \\ & + {}_{,}\mathrm{T}y_{x,1} + {}_{,}\mathrm{T}'y_{x+1,1} + {}_{,}\mathrm{T}''y_{x+2,1} + \ldots + {}_{,}\mathrm{T}^{(t-1)}y_{x+t-1,1} \\ & + {}_{,,}\mathrm{T}y_{x,2} + {}_{,,}\mathrm{T}'y_{x+1,2} + \ldots + {}_{,,}\mathrm{T}^{(t-2)}y_{x+t-2,2} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + {}_{(n-1)}\mathrm{T}y_{x,n-1} + \ldots + {}_{(n-1)}\mathrm{T}^{(t-n+1)}y_{x+t-n+1,n-1}. \end{aligned}$$

28. Pour déterminer les coefficients T, T′, T″,…., ,T, ,T′, ,T″,……. de la formule (K) du n° **25**, on peut employer différentes méthodes.

Et d'abord il est clair que si l'on tire de l'équation (I) la valeur de β en α, qu'on la substitue ensuite dans l'équation (K), et qu'après avoir ordonné les termes suivant les puissances de α, on fasse chaque terme égal à zéro, on aura une suite d'équations par lesquelles on pourra déterminer les coefficients cherchés.

Cette méthode peut être rendue plus simple par la considération des différentes racines de l'équation (I). En effet, si l'on représente l'équation (K) ainsi

$$\beta' = \mathrm{A} + {}_{,}\mathrm{A}\beta + {}_{,,}\mathrm{A}\beta^2 + \ldots + {}_{(n-1)}\mathrm{A}\beta^{n-1},$$

A étant un polynôme en α du degré t, ,A un autre polynôme en α du degré $t-1$ et ainsi de suite; et que d'un autre côté on désigne par β', β'',… les n racines de l'équation (I) ordonnée par rapport à β, on aura ces n équations différentes

$$\begin{aligned} \beta'' &= \mathrm{A} + {}_{,}\mathrm{A}\beta' + {}_{,,}\mathrm{A}\beta'^2 + \ldots + {}_{(n-1)}\mathrm{A}\beta'^{n-1}, \\ \beta''' &= \mathrm{A} + {}_{,}\mathrm{A}\beta'' + {}_{,,}\mathrm{A}\beta''^2 + \ldots + {}_{(n-1)}\mathrm{A}\beta''^{n-1}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

au moyen desquelles on déterminera séparément les n quantités A, ,A, ,,A,… en β', β'',…. Alors il n'y aura plus qu'à substituer à la place de β', β'',… leurs valeurs en α réduites en série ascendante, et poussées seulement jusqu'à la $t^{ième}$ puissance pour la quantité A, jusqu'à la $(t-1)^{ième}$ puissance pour la quantité ,A, et ainsi de suite.

29. Mais dès qu'on aura déterminé par cette méthode ou par une autre quelconque les premiers termes des polynômes A, ,A, ,,A,…., on pourra trouver tous les suivants d'une manière plus simple en cherchant à l'aide du Calcul différentiel la loi qui doit régner entre eux. Pour cela on différentiera logarithmiquement l'équation

$$\beta' = \mathrm{A} + {}_{,}\mathrm{A}\beta + {}_{,,}\mathrm{A}\beta^2 + \ldots + {}_{(n-1)}\mathrm{A}\beta^{n-1},$$

en faisant varier à la fois les quantités α et β, ce qui donnera

$$\frac{t\,d\beta}{\beta} = \frac{d\mathrm{A} + \beta\,d\,{}_{,}\mathrm{A} + \beta^2 d\,{}_{,,}\mathrm{A} + \ldots + ({}_{,}\mathrm{A} + 2\,{}_{,,}\mathrm{A}\beta + \ldots)\,d\beta}{\mathrm{A} + {}_{,}\mathrm{A}\beta + {}_{,,}\mathrm{A}\beta^2 + \ldots};$$

on substituera à la place de $d\beta$ sa valeur en α et β et $d\alpha$ tirée de l'équation (I) par la différentiation, et faisant évanouir les fractions on ordonnera tous les termes par rapport aux puissances de β; il est facile de comprendre que dans cette nouvelle équation la plus haute puissance de β ne pourra être que β^{2n-1}; ainsi il n'y aura qu'à rabaisser les $n-1$ puissances β^n, β^{n+1},…., β^{2n-1} au-dessous du degré $n^{ième}$ au moyen de l'équation (I); après quoi on ordonnera l'équation par rapport aux n puissances restantes de β et l'on fera séparément égales à zéro toutes les quantités multipliées par chacune de ces différentes puissances de β; on aura n équations différentielles du premier ordre entre α et les n quantités A, ,A, ,,A,…. On substituera maintenant dans chacune de ces équations les expressions de A, ,A, ,,A,…. en α, et par la comparaison des termes on obtiendra des équations entre les coefficients T, T′, T″,…, ,T, ,T′, ,T″,……. par lesquelles on pourra déterminer les coefficients.

30. Si au lieu de supposer donnés les n premiers rangs horizontaux de la Table du n° 6, ainsi qu'on l'a fait dans la solution précédente, on voulait regarder comme donnés les n premiers rangs verticaux de la même Table, c'est-à-dire les valeurs de $y_{0,t}$, $y_{1,t}$, $y_{2,t}$,…… $y_{n-1,t}$; il est

visible qu'on pourrait résoudre ce cas par la même méthode en changeant seulement t en x, c'est-à-dire β en α, ou, ce qui revient au même, en opérant à l'égard de β et de α comme on l'a fait à l'égard de α et de β; il n'y aura à cela aucune difficulté nouvelle.

Il n'en serait pas de même si les rangs donnés étaient en partie horizontaux et en partie verticaux; cependant, comme ce cas peut avoir lieu dans bien des questions, nous allons donner la méthode de le résoudre.

31. Supposons donc qu'on connaisse les m premiers rangs horizontaux de la Table du n° 6 et les $n-m$ premiers rangs verticaux de la même Table, c'est-à-dire qu'on connaisse les valeurs de $y_{x,0}, y_{x,1}, y_{x,2}, \ldots, y_{x,m}$, ainsi que celles de $y_{0,t}, y_{1,t}, y_{2,t}, \ldots, y_{n-m,t}$, et qu'on demande la valeur d'un terme quelconque $y_{x,t}$.

Ayant fait $y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t$, on aura (25) l'équation (I) entre α et β; je considère dans cette équation le terme $N^{(m)}\alpha^{n-m}\beta^m$, lequel est donné par tous les autres termes de la même équation, et j'observe qu'en substituant la valeur de $\alpha^{n-m}\beta^m$ qui vient de ce terme dans la quantité $\alpha^x\beta^t$, et ensuite dans les termes provenant de cette substitution, autant que cela sera possible, on parviendra nécessairement à une expression de $\alpha^x\beta^t$ par les puissances de α et de β, dans laquelle la plus haute de ces puissances sera la $(x+t)^{ième}$, et où les deux puissances α^{n-m} et β^m ne se trouveront jamais ensemble, puisqu'on suppose qu'on les ait fait disparaître par la substitution de la valeur de $\alpha^{n-m}\beta^m$.

Cette équation de $\alpha^x\beta^t$ sera donc de la forme suivante

$$
\begin{aligned}
\alpha^x\beta^t = {} & \mathrm{V} + \mathrm{V}'\alpha + \mathrm{V}''\alpha^2 + \mathrm{V}'''\alpha^3 + \ldots + \mathrm{V}^{(x+t)}\alpha^{x+t} \\
& + {}_{,}\mathrm{V}\beta + {}_{,}\mathrm{V}'\alpha\beta + {}_{,}\mathrm{V}''\alpha^2\beta + {}_{,}\mathrm{V}'''\alpha^3\beta + \ldots + {}_{,}\mathrm{V}^{(x+t-1)}\alpha^{x+t-1}\beta \\
& + {}_{,,}\mathrm{V}\beta^2 + {}_{,,}\mathrm{V}'\alpha\beta^2 + {}_{,,}\mathrm{V}''\alpha^2\beta^2 + {}_{,,}\mathrm{V}'''\alpha^3\beta^2 + \ldots + {}_{,,}\mathrm{V}^{(x+t-2)}\alpha^{x+t-2}\beta^2 \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + {}_{(m)}\mathrm{V}\beta^m + {}_{(m)}\mathrm{V}'\alpha\beta^m + {}_{(m)}\mathrm{V}''\alpha^2\beta^m + \ldots + {}_{(m)}\mathrm{V}^{(n-m-1)}\alpha^{n-m-1}\beta^m \\
& + {}_{(m+1)}\mathrm{V}\beta^{m+1} + {}_{(m+1)}\mathrm{V}'\alpha\beta^{m+1} + {}_{(m+1)}\mathrm{V}''\alpha^2\beta^{m+1} + \ldots + {}_{(m+1)}\mathrm{V}^{(n-m-1)}\alpha^{n-m-1}\beta^{m+1} \\
& + {}_{(m+2)}\mathrm{V}\beta^{m+2} + {}_{(m+2)}\mathrm{V}'\alpha\beta^{m+2} + {}_{(m+2)}\mathrm{V}''\alpha^2\beta^{m+2} + \ldots + {}_{(m+2)}\mathrm{V}^{(n-m-1)}\alpha^{n-m-1}\beta^{m+2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + {}_{(x+t)}\mathrm{V}\beta^{x+t} + {}_{(x+t)}\mathrm{V}'\alpha\beta^{x+t} + {}_{(x+t)}\mathrm{V}''\alpha^2\beta^{x+t} + \ldots + {}_{(x+t)}\mathrm{V}^{(n-m-1)}\alpha^{n-m-1}\beta^{x+t},
\end{aligned}
$$

où les coefficients V, V', ..., ,V ,V', ... seront des fonctions connues de x et de t, et des coefficients de l'équation (I).

32. Je remarque maintenant que les valeurs des puissances et des produits de α et de β qui composent l'expression précédente de $\alpha^x\beta^t$ sont nécessairement différentes et irréductibles entre elles, puisque l'équation (I), d'où dépend la relation entre α et β, contient de plus le produit $\alpha^{n-m}\beta^m$, lequel ne se trouve point dans cette expression. De cette considération et des principes posés plus haut, il est aisé de conclure immédiatement l'expression générale de $y_{x,t}$ en ne faisant que substituer dans celle de $\alpha^x\beta^t$, à la place de chaque produit tel que $\alpha^r\beta^s$, une fonction quelconque de r et de s, qu'on pourra désigner par $f(r, s)$; on aura donc ainsi

$$
\begin{aligned}
y_{x,t} = {} & \mathrm{V}f(0,0) + \mathrm{V}'f(1,0) + \mathrm{V}''f(2,0) + \mathrm{V}'''f(3,0) + \ldots + \mathrm{V}^{(x+t)}f(x+t,0) \\
& + {}_{,}\mathrm{V}f(0,1) + {}_{,}\mathrm{V}'f(1,1) + {}_{,}\mathrm{V}''f(2,1) + {}_{,}\mathrm{V}'''f(3,1) + \ldots \pm {}_{,}\mathrm{V}^{(x+t-1)}f(x+t-1,1) \\
& + {}_{,,}\mathrm{V}f(0,2) + {}_{,,}\mathrm{V}'f(1,2) + {}_{,,}\mathrm{V}''f(2,2) + {}_{,,}\mathrm{V}'''f(3,2) + \ldots + {}_{,,}\mathrm{V}^{(x+t-2)}f(x+t-2,2) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + {}_{(m)}\mathrm{V}f(0,m) + {}_{(m)}\mathrm{V}'f(1,m) + {}_{(m)}\mathrm{V}''f(2,m) + \ldots + {}_{(m)}\mathrm{V}^{(n-m-1)}f(n-m-1,m) \\
& + {}_{(m+1)}\mathrm{V}f(0,m+1) + {}_{(m+1)}\mathrm{V}'f(1,m+1) + {}_{(m+1)}\mathrm{V}''f(2,m+1) + \ldots + {}_{(m+1)}\mathrm{V}^{(n-m-1)}f(n-m-1,m+1) \\
& + {}_{(m+2)}\mathrm{V}f(0,m+2) + {}_{(m+2)}\mathrm{V}'f(1,m+2) + {}_{(m+2)}\mathrm{V}''f(2,m+2) + \ldots + {}_{(m+2)}\mathrm{V}^{(n-m-1)}f(n-m-1,m+2) \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + {}_{(x+t)}\mathrm{V}f(0,x+t) + {}_{(x+t)}\mathrm{V}'f(1,x+t) + {}_{(x+t)}\mathrm{V}''f(2,x+t) + \ldots + {}_{(x+t)}\mathrm{V}^{(n-m-1)}f(n-m-1,x+t).
\end{aligned}
$$

33. Pour déterminer les valeurs de la fonction f, on supposera successivement $t = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, et ensuite $x = 0, 1, 2, \ldots, n-m-1$, puisque par l'hypothèse les valeurs correspondantes de $y_{x,t}$ sont données.

Or, en faisant $t = 0$, la quantité $\alpha^x\beta^t$ devient α^x; donc dans la formule du n° 31, on aura pour lors

$$\mathrm{V}^{(x)} = 1, \quad \text{et les autres coefficients nuls;}$$

en faisant $t = 1$, on a $\alpha^x\beta$; donc

$${}_{,}\mathrm{V}^{(x)} = 1, \quad \text{et les autres coefficients nuls;}$$

en faisant $t = 2$, on a $\alpha^x\beta^2$; donc

$$_{''}V^{(x)} = 1, \quad \text{et les autres coefficients nuls;}$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$_{(m-1)}V^{(x)} = 1,$$

lorsque $t = m - 1$.

De même, en faisant $x = 0$, $\alpha^x\beta^t$ devient β^t; donc on aura, dans la même formule,

$$_{(t)}V = 1, \quad \text{et les autres coefficients nuls;}$$

en faisant $x = 1$, on aura $\alpha\beta^t$; donc

$$_{(t)}V' = 1, \quad \text{et les autres coefficients nuls;}$$

on aura pareillement, lorsque $x = 2$,

$$_{(t)}V'' = 1, \quad \text{et les autres coefficients nuls;}$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$_{(t)}V^{(n-m-1)} = 1,$$

lorsque $x = n - m - 1$.

Si l'on fait donc dans l'expression de $y_{x,t}$ du numéro précédent successivement $t = 0, 1, 2, \ldots, m - 1$, on aura

$$y_{x,0} = f(x, 0), \quad y_{x,1} = f(x, 1), \quad y_{x,2} = f(x, 2), \ldots, \quad y_{x,m-1} = f(x, m-1),$$

quel que soit x. Et si l'on fait successivement $x = 0, 1, 2, \ldots, n - m - 1$, on aura

$$y_{0,t} = f(0, t), \quad y_{1,t} = f(1, t), \quad y_{2,t} = f(2, t), \ldots, \quad y_{n-m-1,t} = f(n-m-1, t),$$

quel que soit t. On connaitra donc de cette manière les valeurs des fonctions qui entrent dans l'expression dont il s'agit, et substituant ces valeurs, on aura la formule suivante, qui ne contient que des quantités

connues,

$$\begin{aligned}
y_{x,t} = {} & V y_{x,t} + V' y_{1,t} + V'' y_{2,t} + V''' y_{3,t} + \ldots + V^{(x+t)} y_{x+t,0} \\
& + {}_{,}V y_{0,t} + {}_{,}V' y_{1,t} + {}_{,}V'' y_{2,t} + {}_{,}V''' y_{3,t} + \ldots + {}_{,}V^{(x+t-1)} y_{x+t-1,1} \\
& + {}_{''}V y_{0,t} + {}_{''}V' y_{1,t} + {}_{''}V'' y_{2,t} + {}_{''}V''' y_{3,t} + \ldots + {}_{''}V^{(x+t-2)} y_{x+t-2,2} \\
& + {}_{'''}V y_{0,t} + {}_{'''}V' y_{1,t} + {}_{'''}V'' y_{2,t} + {}_{'''}V''' y_{3,t} + \ldots + {}_{'''}V^{(x+t-3)} y_{x+t-3,3} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + {}_{(m)}V y_{0,m} + {}_{(m)}V' y_{1,m} + {}_{(m)}V'' y_{2,m} + \ldots + {}_{(m)}V^{(n-m-1)} y_{n-m-1,m} \\
& + {}_{(m+1)}V y_{0,m+1} + {}_{(m+1)}V' y_{1,m+1} + {}_{(m+1)}V'' y_{2,m+1} + \ldots + {}_{(m+1)}V^{(n-m-1)} y_{n-m-1,m+1} \\
& + {}_{(m+2)}V y_{0,m+2} + {}_{(m+2)}V' y_{1,m+2} + {}_{(m+2)}V'' y_{2,m+2} + \ldots + {}_{(m+2)}V^{(n-m-1)} y_{n-m-1,m+2} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + {}_{(x+t)}V y_{0,x+t} + {}_{(x+t)}V' y_{1,x+t} + {}_{(x+t)}V'' y_{2,x+t} + \ldots + {}_{(x+t)}V^{(n-m-1)} y_{n-m-1,x+t}.
\end{aligned}$$

34. Quant à la manière de déterminer les coefficients V, V', V'', ..., ,V, ,V', ,V'', ..., on pourra employer des méthodes analogues à celles que nous avons proposées plus haut (28).

En effet, si l'on cherche la valeur de β en α ou de α en β par l'équation (I), et qu'on la substitue dans la formule du n° 31, on aura, par la comparaison des termes affectés des mêmes puissances de α ou de β, une suite d'équations par lesquelles on pourra déterminer les coefficients dont il s'agit. On pourra aussi employer le Calcul différentiel pour trouver la loi de ces coefficients; car en différentiant logarithmiquement l'équation

$$\alpha^x\beta^t = V + \ldots$$

du n° 31, substituant ensuite à la place de $\frac{d\beta}{d\alpha}$ sa valeur tirée de l'équation (I), et faisant disparaître, au moyen de cette même équation, les termes où se trouvera $\alpha^{n-m}\beta^m$, ainsi qu'on l'a enseigné dans le n° 29, on aura une équation dont chaque terme devra ensuite être supposé égal à zéro; ce qui donnera une suite d'équations qui contiendront la relation qui doit régner entre les coefficients dont il s'agit.

Au reste, comme tout cela n'est plus qu'une affaire d'analyse, nous ne nous en occuperons pas davantage, nous contentant pour le présent

d'avoir réduit l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles à une théorie connue, qui ne demande d'autres secours que ceux que les méthodes ordinaires peuvent fournir.

Remarque I.

35. Je vais terminer cet Article par quelques Remarques importantes. La première, que l'on pourra toujours trouver autant de différentes expressions de $y_{x,t}$ qu'il y aura de termes dans la dernière colonne de l'équation (I), laquelle répond à la dernière colonne, ou au plus haut rang de l'équation différentielle proposée du n° 6. En effet, à chacun des termes dont il s'agit tel que $N^{(m)}\alpha^{n-m}\beta^m$, lequel vient du terme $N^{(m)}y_{x+n-m,t+m}$ de l'équation différentielle, répondra, comme on l'a vu, une expression de $y_{x,t}$ dans laquelle les termes donnés de la Table du n° 6 seront ceux qui forment les m premiers rangs horizontaux, et les $n-m$ premiers rangs verticaux; et il est facile de se convaincre, avec un peu de réflexion, qu'on ne saurait trouver une telle expression que par le moyen d'un semblable terme; en sorte que, si le terme de cette forme manquait dans l'équation différentielle, il serait alors impossible de pouvoir exprimer, en général, la valeur de $y_{x,t}$ par le moyen des m premiers rangs horizontaux et des $n-m$ premiers rangs verticaux de la Table du n° 6. Par exemple, dans le cas de l'équation différentielle (F) du n° 7, où l'on n'a qu'un seul terme de l'ordre le plus élevé, en sorte que n étant égal à 2, m n'a qu'une seule valeur égale à 1, l'expression générale de $y_{x,t}$ demande nécessairement qu'on connaisse le premier rang horizontal et le premier rang vertical de la Table citée, et c'est aussi ce que nous avons supposé dans la solution du n° 13.

Remarque II.

36. La seconde Remarque concerne le cas où l'équation (I) a des facteurs rationnels, en sorte qu'elle peut se décomposer en autant d'équations particulières. Dans ce cas, on peut simplifier la méthode générale

en considérant à part chacune de ces équations et cherchant l'expression de $y_{x,t}$ qui résulte de chacune d'elles; car la somme de ces différentes expressions de $y_{x,t}$ sera l'expression complète de $y_{x,t}$ qui convient à l'équation différentielle proposée. En effet, supposons que l'équation (I) du degré n puisse se décomposer en deux équations rationnelles des degrés p et q, en sorte que $p+q=n$; il est facile de prouver que, si l'on fait

$$y_{x,t}=y'_{x,t}+y''_{x,t},$$

l'équation différentielle en $y_{x,t}$ de l'ordre n pourra aussi se décomposer en deux équations, l'une en $y'_{x,t}$ de l'ordre p, l'autre en $y''_{x,t}$ de l'ordre q; et ces deux équations seront telles que, si l'on met dans la première $\alpha^x\beta^t$ à la place de $y'_{x,t}$, et dans la seconde $\alpha^x\beta^t$ à la place de $y''_{x,t}$, il en résultera les deux équations des degrés p et q qui sont les facteurs de l'équation (I) résultante de la substitution de $\alpha^x\beta^t$ à la place de $y_{x,t}$ dans l'équation différentielle proposée. Et cette conclusion aura lieu pour tous les facteurs de la même équation (I).

A l'égard des fonctions arbitraires, il est clair que l'expression de $y'_{x,t}$ en contiendra un nombre p, et que l'expression de $y''_{x,t}$ en contiendra un nombre q; de sorte que l'expression de $y_{x,t}$ en contiendra un nombre égal à $p+q$, c'est-à-dire égal à n; par conséquent cette expression sera complète.

Pour déterminer maintenant ces fonctions d'après les valeurs données de $y_{x,0}, y_{x,1}, \ldots, y_{0,t}, y_{1,t}, \ldots$ (33), on supposera d'abord que les quantités données soient

$$y'_{x,0}, y'_{x,1}, \ldots, y'_{0,t}, y'_{1,t}, \ldots, \quad \text{ainsi que} \quad y''_{x,0}, y''_{x,1}, \ldots, y''_{0,t}, y''_{1,t}, \ldots;$$

on déterminera, à l'aide des premières, les fonctions arbitraires de l'expression de $y'_{x,t}$, et, à l'aide des secondes, les fonctions arbitraires de l'expression de $y''_{x,t}$ par la méthode générale du numéro cité; ensuite il n'y aura plus qu'à substituer à la place de ces quantités leurs valeurs en $y_{x,0}, y_{x,1}, \ldots, y_{0,t}, y_{1,t}, \ldots$

Pour cela on remarquera que, puisqu'on a une équation différentielle en $y'_{x,t}$ et une en $y''_{x,t}$, et que de plus

$$y_{x,t} = y'_{x,t} + y''_{x,t},$$

on peut toujours, par l'élimination, trouver la valeur de $y'_{x,t}$ ainsi que celle de $y''_{x,t}$ en $y_{x,t}$ et ses différences; ainsi l'on connaîtra par là les valeurs des quantités dont il s'agit par celles de $y_{x,0}, y_{x,1}, \ldots$.

Si l'équation (I) avait plusieurs facteurs rationnels, on ferait relativement à tous ces facteurs des raisonnements analogues aux précédents, et l'on en tirerait des conclusions semblables.

Remarque III.

37. La troisième Remarque a pour objet le cas où l'équation (I) a des facteurs égaux; en ce cas on sait par la théorie des équations que ces facteurs seront nécessairement rationnels; de sorte que, suivant la méthode du numéro précédent, on pourra considérer ces facteurs égaux à part et indépendamment des autres; ainsi la difficulté se réduit au cas où l'équation en α et β sera une puissance quelconque d'une autre équation. Désignons cette dernière équation par

$$\Pi = 0,$$

et soit l'équation proposée en α et β,

$$\Pi^m = 0;$$

je dis que si l'on cherche l'expression générale de $y_{x,t}$ d'après l'équation $\Pi = 0$ par les méthodes expliquées ci-dessus, et qu'on nomme cette valeur $y'_{x,t}$, qu'ensuite on désigne par $y''_{x,t}$, $y'''_{x,t}$, ... d'autres expressions semblables, dans lesquelles les fonctions arbitraires soient différentes, on aura pour l'expression générale de $y_{x,t}$ résultante de l'équation $\Pi^m = 0$,

$$y_{x,t} = y'_{x,t} + x y''_{x-1,t}, \quad \text{ou} \quad y_{x,t} = y'_{x,t} + t y''_{x,t-1},$$

si $m = 2$;

$$y_{x,t} = y'_{x,t} + x y''_{x-1,t} + x(x-1) y''_{x-2,t},$$

ou

$$y_{x,t} = y'_{x,t} + x y''_{x-1,t} + x t y'''_{x-1,t-1},$$

ou

$$y_{x,t} = y'_{x,t} + t y''_{x,t-1} + t x y'''_{x-1,t-1},$$

ou enfin

$$y_{x,t} = y'_{x,t} + t y''_{x,t-1} + t(t-1) y'''_{x,t-2},$$

si $m = 3$; et ainsi de suite; ces différentes expressions de $y_{x,t}$ revenant toujours à la même.

En effet, si l'on cherche la valeur de $\alpha^x \beta^t$ d'après l'équation $\Pi = 0$, on aura pour l'équation $\Pi^2 = 0$ la même valeur de $\alpha^x \beta^t$ et de plus celle-ci

$$x \alpha^{x-1} \beta^t d\alpha \quad \text{ou} \quad t \alpha^x \beta^{t-1} d\beta,$$

$d\alpha$ et $d\beta$ étant des quantités indéterminées; et pour l'équation $\Pi^3 = 0$, on aura, outre la valeur de $\alpha^x \beta^t$ qui répond à $\Pi = 0$, ces deux autres-ci

$$x \alpha^{x-1} \beta^t d\alpha, \quad x(x-1) \alpha^{x-2} d\alpha^2,$$

ou bien ces deux-ci

$$x \alpha^{x-1} \beta^t d\alpha, \quad x t \alpha^{x-1} \beta^{t-1} d\alpha d\beta,$$

ou

$$t \alpha^x \beta^{t-1} d\beta, \quad t x \alpha^{x-1} \beta^{t-1} d\alpha d\beta,$$

ou bien encore

$$t \alpha^x \beta^{t-1} d\beta, \quad t(t-1) \alpha^x \beta^{t-2} d\beta^2,$$

et ainsi de suite; étant indifférent de faire varier α ou β à chaque nouvelle différentiation. De là et de ce que nous avons déjà dit dans les nos 16 et 36 il est facile de déduire les formules précédentes pour l'expression générale de $y_{x,t}$, et de les continuer plus loin pour tous les exposants m.

Quant à la détermination des fonctions arbitraires, elle n'a aucune difficulté; car il n'y aura qu'à déterminer d'abord celles qui entrent dans les expressions de $y'_{x,t}$, de $y''_{x,t}$, ... par les valeurs de $y'_{x,0}$, $y'_{x,1}$, ..., $y'_{0,t}$,

$y'_{1,t}, \ldots$, de $y''_{x,0}, y''_{x,1}, \ldots, y''_{0,t}, y''_{1,t}, \ldots$; ensuite on déterminera ces dernières par celles de $y_{x,0}, y_{x,1}, \ldots, y_{0,t}, y_{1,t}, \ldots$ d'après les formules

$$y_{x,t} = y'_{x,t} + x y''_{x-1,t} + \ldots$$

données ci-dessus, combinées avec l'équation différentielle qui répond à l'équation $\Pi = 0$, et qui est la même pour toutes les quantités $y'_{x,t}$, $y''_{x,t}, \ldots$, puisqu'elles ne diffèrent entre elles que par les fonctions arbitraires.

Remarque IV.

38. La quatrième Remarque roulera sur quelques transformations qu'on peut employer pour faciliter l'intégration des équations aux différences finies et partielles. Si dans l'équation en α et β résultante de la substitution de $\alpha^x \beta^t$ à la place de $y_{x,t}$ dans l'équation différentielle proposée, on fait

$$\alpha = a\,\varepsilon^m \gamma^n + a'\,\varepsilon^{m'} \gamma^{n'} + a''\,\varepsilon^{m''} \gamma^{n''} + \ldots,$$
$$\beta = b\,\varepsilon^p \gamma^q + b'\,\varepsilon^{p'} \gamma^{q'} + b''\,\varepsilon^{p''} \gamma^{q''} + \ldots,$$

$a, a', a'', \ldots, b, b', b'', \ldots, m, m', m'', \ldots, n, n', n'', \ldots, p, p', p'', \ldots, q, q', q'', \ldots$ étant des constantes quelconques données, et ε, γ deux nouvelles indéterminées, on aura une transformée en ε, γ qui pourra dans plusieurs cas être plus simple et plus traitable que l'équation primitive en α, β.

Or je dis que si l'on regarde cette équation en ε, γ comme résultante immédiatement d'une équation à différences finies et partielles entre les trois variables x, t et $z_{x,t}$, par la substitution de $\varepsilon^x \gamma^t$ à la place de $z_{x,t}$, et qu'on en déduise par les méthodes ci-dessus l'expression générale de $z_{x,t}$, il sera facile d'en conclure l'expression générale de $y_{x,t}$ de la manière suivante. On substituera pour cela les mêmes valeurs de α et β dans la quantité $\alpha^x \beta^t$, et développant les termes on aura une expression de cette forme

$$\alpha^x \beta^t = \mathrm{A}\,\varepsilon^{mx+pt} \gamma^{nx+qt} + \mathrm{B}\,\varepsilon^{mx+pt+\mu} \gamma^{nx+qt+\nu} + \mathrm{C}\,\varepsilon^{mx+pt+\overline{m}} \gamma^{nx+qt+\overline{n}} + \ldots$$

Or $\varepsilon^x \gamma^t$ est une valeur particulière de $z_{x,t}$, de même que $\alpha^x \beta^t$ est une valeur particulière de $y_{x,t}$; ainsi passant des valeurs particulières aux expressions générales, on aura sur-le-champ

$$y_{x,t} = \mathrm{A}\,z_{mx+pt,nx+qt} + \mathrm{B}\,z_{mx+pt+\mu,nx+qt+\nu} + \mathrm{C}\,z_{mx+pt+\overline{m},nx+qt+\overline{n}} + \ldots.$$

On pourrait transformer de nouveau l'équation en ε et γ, et l'on trouverait de la même manière la valeur correspondante de $z_{x,t}$.

Supposons, par exemple,

$$\alpha = a + p\varepsilon, \quad \beta = b + q\gamma,$$

on aura

$$\alpha^x \beta^t = \mathrm{A} + \mathrm{B}\varepsilon + \mathrm{C}\gamma + \mathrm{D}\varepsilon^2 + \mathrm{E}\varepsilon\gamma + \mathrm{F}\gamma^2 + \ldots$$

en faisant

$$\mathrm{A} = a^x b^t,$$

$$\mathrm{B} = x a^{x-1} p \times b^t, \qquad \mathrm{C} = t b^{t-1} q \times a^x,$$

$$\mathrm{D} = \frac{x(x-1)}{2} a^{x-2} p^2 \times b^t, \quad \mathrm{E} = x a^{x-1} p \times t b^{t-1} q, \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et de là

$$y_{x,t} = \mathrm{A}\,z_{0,0} + \mathrm{B}\,z_{1,0} + \mathrm{C}\,z_{0,1} + \mathrm{D}\,z_{2,0} + \mathrm{E}\,z_{1,1} + \ldots.$$

Si l'on voulait faire successivement les deux substitutions, on aurait d'abord

$$y_{x,t} = a^x y'_{0,t} + x a^{x-1} p\, y'_{1,t} + \frac{x(x-1)}{2} a^{x-2} p^2 y'_{2,t} + \ldots,$$

et ensuite

$$y'_{x,t} = b^t z_{x,0} + t b^{t-1} q\, z_{x,1} + \frac{t(t-1)}{2} b^{t-2} q^2 z_{x,2} + \ldots.$$

Réciproquement on pourra déterminer les valeurs de $z_{x,t}$ par celles de $y_{x,t}$ en substituant dans $\varepsilon^x \gamma^t$ les valeurs de ε et γ en α et β, et changeant ensuite chaque produit de α et β tel que $\alpha^r \beta^s$ en $y_{r,s}$.

Remarque V.

39. La cinquième Remarque est qu'il peut arriver dans la solution des Problèmes que les termes donnés dans la Table du n° 6 ne soient pas ceux qui forment les premiers rangs horizontaux ou verticaux de cette Table, ainsi que nous l'avons toujours supposé jusqu'ici, mais d'autres quelconques. Alors parmi les différentes formes qu'on peut donner à l'expression générale de $y_{x,t}$ il faudra choisir celle qui rendra la détermination des fonctions arbitraires par les termes donnés, la plus facile; mais on ne saurait donner des règles générales pour cela, et il faut abandonner cette recherche à la sagacité de l'Analyste.

En général, il faudra toujours qu'il y ait autant de lignes indéfinies de termes donnés dans la Table du n° 6, qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle; mais il n'est pas nécessaire que ces lignes soient horizontales ou verticales; elles peuvent également être inclinées d'une manière quelconque, et même elles peuvent être courbes ou plutôt composées d'un assemblage de lignes droites différemment inclinées. Nous en verrons des Exemples dans l'Article V.

Remarque VI.

40. Ma dernière Remarque concerne le cas où l'on a à intégrer plusieurs équations linéaires qui renferment autant de différentes inconnues telles que $y_{x,t}$, $z_{x,t}$, $u_{x,t}$,...; il est facile de se convaincre qu'on peut toujours par l'élimination parvenir à une seule équation finale qui ne renferme qu'une seule inconnue $y_{x,t}$; mais il sera souvent fort pénible de s'y prendre ainsi, et l'on arrivera au but d'une manière beaucoup plus simple en appliquant immédiatement nos méthodes aux équations proposées. Pour cela on fera d'abord

$$y_{x,t} = a\alpha^x\beta^t, \quad z_{x,t} = b\alpha^x\beta^t, \quad u_{x,t} = c\alpha^x\beta^t, \ldots,$$

ce qui donnera, après avoir divisé chaque équation par $\alpha^x\beta^t$, autant

d'équations en α, β et en a, b, c,..., qu'il y a de ces dernières quantités, et où ces quantités seront toutes linéaires; de sorte que si l'on élimine les quantités $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$,..., on parviendra à une équation finale en α et β qui contiendra la relation qu'il doit y avoir entre ces deux indéterminées, et qui sera la même qu'on eût trouvée par la substitution de $a\alpha^x\beta^t$ à la place de $y_{x,t}$ dans l'équation en $y_{x,t}$ résultante de l'élimination des autres inconnues $z_{x,t}$, $u_{x,t}$,.... On pourra donc trouver d'après cette équation et par le moyen des méthodes exposées jusqu'ici, l'expression générale de $y_{x,t}$; nous dénoterons cette expression par $y'_{x,t}$. Maintenant comme les équations en a, b, c,... sont purement linéaires, on pourra trouver les valeurs de $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$,... par des fonctions rationnelles de α et β; soient donc

$$\frac{b}{a} = \frac{B}{A}, \quad \frac{c}{a} = \frac{C}{A}, \ldots,$$

A, B, C,... étant des fonctions rationnelles entières de α et β; comme a est une constante qui demeure arbitraire, on pourra mettre partout aA à la place de a; par ce moyen les quantités $a\alpha^x\beta^t$, $b\alpha^x\beta^t$, $c\alpha^x\beta^t$,..., qui sont les valeurs particulières de $y_{x,t}$, $z_{x,t}$, $u_{x,t}$,..., deviendront $aA\alpha^x\beta^t$, $aB\alpha^x\beta^t$, $aC\alpha^x\beta^t$,.... Or les quantités A, B, C,... sont nécessairement de cette forme

$$\begin{aligned} A &= P\alpha^m\beta^n + P'\alpha^{m'}\beta^{n'} + \ldots, \\ B &= Q\alpha^p\beta^q + Q'\alpha^{p'}\beta^{q'} + \ldots, \\ C &= R\alpha^r\beta^s + R'\alpha^{r'}\beta^{s'} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

P, Q, R, P',..., m, n, m',... étant des constantes données; donc les valeurs particulières dont il s'agit deviendront de la forme

$$\begin{aligned} &Pa\alpha^{x+m}\beta^{t+n} + P'a\alpha^{x+m'}\beta^{t+n'} + \ldots, \\ &Qa\alpha^{x+p}\beta^{t+q} + Q'a\alpha^{x+p'}\beta^{t+q'} + \ldots, \\ &Ra\alpha^{x+r}\beta^{t+s} + R'a\alpha^{x+r'}\beta^{t+s'} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

mais, par l'hypothèse, $a\alpha^x\beta^t$ est la valeur particulière de $y'_{x,t}$; donc passant des valeurs particulières aux expressions générales, on aura aussi, en général,

$$\begin{aligned} y_{x,t} &= \mathrm{P}\,y'_{x+m,t+n} + \mathrm{P}'\,y'_{x+m',t+n'} + \ldots, \\ z_{x,t} &= \mathrm{Q}\,y'_{x+p,t+q} + \mathrm{Q}'\,y'_{x+p',t+q'} + \ldots, \\ u_{x,t} &= \mathrm{R}\,y'_{x+r,t+s} + \mathrm{R}'\,y'_{x+r',t+s'} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

et il n'y aura plus qu'à substituer à la place de $y'_{x,t}$ son expression générale trouvée précédemment.

Article IV. — *Des suites récurrentes triples, ou de l'intégration des équations linéaires aux différences finies et partielles entre quatre variables.*

41. Si l'on imagine une suite dont les termes varient de trois manières différentes, et qu'on suppose qu'il y ait toujours entre un certain nombre de termes successifs de cette suite une même équation linéaire, dont les coefficients soient constants, ce sera là une suite récurrente triple; et l'équation dont il s'agit sera une équation linéaire aux différences finies et partielles entre quatre variables, dont l'intégration fera l'objet de cet Article.

A l'imitation de ce que nous avons pratiqué à l'égard des suites récurrentes doubles, nous désignerons un terme quelconque d'une suite récurrente triple par $y_{x,t,u}$, en sorte qu'en faisant successivement

$$x = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad t = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad u = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

on aura tous les termes qui pourront entrer dans cette suite; d'où l'on voit que ces termes pourront former une Table à triple entrée en forme de parallélépipède, de même que les termes $y_{x,t}$ des suites récurrentes doubles forment une Table à double entrée en forme de rectangle (6).

42. Cela posé, soit l'équation du troisième ordre

$$(\mathrm{L}) \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}\,y_{x,t,u} + \mathrm{B}\,y_{x+1,t,u} + \mathrm{C}\,y_{x+1,t+1,u} + \mathrm{D}\,y_{x+1,t+1,u+1} \\ \quad + \mathrm{B}'\,y_{x,t+1,u} + \mathrm{C}'\,y_{x+1,t,u+1} \\ \quad + \mathrm{B}''\,y_{x,t,u+1} + \mathrm{C}''\,y_{x,t+1,u+1} \end{array}\right\} = 0,$$

laquelle est, comme l'on voit, d'une forme semblable à celle de l'équation (F) du n° 7.

Pour intégrer cette équation je suppose

$$y_{x,t,u} = a\alpha^x\beta^t\gamma^u,$$

a, α, β, γ étant des constantes; substituant cette valeur et divisant ensuite toute l'équation par $a\alpha^x\beta^t\gamma^u$, j'ai celle-ci

$$(\mathrm{M}) \qquad \mathrm{A} + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{B}'\beta + \mathrm{B}''\gamma + \mathrm{C}\alpha\beta + \mathrm{C}'\alpha\gamma + \mathrm{C}''\beta\gamma + \mathrm{D}\alpha\beta\gamma = 0,$$

d'où je tire la valeur de γ en α et β, savoir

$$\gamma = -\frac{\mathrm{A} + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{B}'\beta + \mathrm{C}\alpha\beta}{\mathrm{B}'' + \mathrm{C}'\alpha + \mathrm{C}''\beta + \mathrm{D}\alpha\beta},$$

ou bien, en divisant le haut et le bas de cette fraction par $\alpha\beta$,

$$\gamma = -\frac{\mathrm{C} + \dfrac{\mathrm{B}'}{\alpha} + \dfrac{\mathrm{B}}{\beta} + \dfrac{\mathrm{A}}{\alpha\beta}}{\mathrm{D} + \dfrac{\mathrm{C}''}{\alpha} + \dfrac{\mathrm{C}'}{\beta} + \dfrac{\mathrm{B}''}{\alpha\beta}}.$$

J'élève maintenant cette quantité à la puissance u, et développant les termes suivant les différentes puissances de $\frac{1}{\alpha}$ et de $\frac{1}{\beta}$, j'aurai

$$\begin{aligned} \gamma^u = {} & \mathrm{V} + \mathrm{V}'\frac{1}{\alpha} + \mathrm{V}''\frac{1}{\alpha^2} + \mathrm{V}'''\frac{1}{\alpha^3} + \ldots \\ & + {}_{,}\mathrm{V}\frac{1}{\beta} + {}_{,}\mathrm{V}'\frac{1}{\alpha\beta} + {}_{,}\mathrm{V}''\frac{1}{\alpha^2\beta} + \ldots \\ & + {}_{,,}\mathrm{V}\frac{1}{\beta^2} + {}_{,,}\mathrm{V}'\frac{1}{\alpha\beta^2} + \ldots \\ & + {}_{,,,}\mathrm{V}\frac{1}{\beta^3} + \ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où les coefficients V, V′,..., ,V, ,V′,... seront des fonctions connues de u et des constantes A, B, B′,....

Multipliant donc cette expression de γ^u en série par $a\alpha^x\beta^t$, on aura une valeur particulière de $y_{x,t,u}$; et à cause que a, α et β sont indéterminées et que l'équation est linéaire, on pourra prendre aussi pour $y_{x,t,u}$ la somme d'autant de pareilles expressions qu'on voudra en changeant à volonté les valeurs de a, α et β. De là il est aisé de conclure, par un raisonnement analogue à celui du n° 7, qu'on aura l'expression générale de $y_{x,t,u}$ en mettant dans celle de $\alpha^x\beta^t\gamma^u$ à la place de chaque produit de α et β tel que $\alpha^r\beta^s$ une fonction quelconque de r et s, qu'on pourra désigner par $f(r, s)$. Ainsi donc, on aura sur-le-champ

$$\begin{aligned} y_{x,t,u} = {} & \mathrm{V} f(x,t) + \mathrm{V}' f(x-1,t) + \mathrm{V}'' f(x-2,t) + \mathrm{V}''' f(x-3,t) + \dots \\ & + {}_{,}\mathrm{V} f(x,t-1) + {}_{,}\mathrm{V}' f(x-1,t-1) + {}_{,}\mathrm{V}'' f(x-2,t-1) + \dots \\ & + {}_{,,}\mathrm{V} f(x,t-2) + {}_{,,}\mathrm{V}' f(x-1,t-2) + \dots \\ & + {}_{,,,}\mathrm{V} f(x,t-3) + \dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

43. Pour déterminer maintenant les valeurs de la fonction $f(x, t)$, je suppose qu'on connaisse toutes les valeurs de $y_{x,t,u}$ lorsque $u = 0$; or faisant $u = 0$, il est clair qu'on a $\gamma^u = 1$; donc $\mathrm{V} = 1$, et tous les autres coefficients sont nuls; donc la formule précédente donnera, lorsque $u = 0$,

$$y_{x,t,0} = f(x,t).$$

Donc, si l'on fait cette substitution, on aura

$$\begin{aligned} y_{x,t,u} = {} & \mathrm{V} y_{x,t,0} + \mathrm{V}' y_{x-1,t,0} + \mathrm{V}'' y_{x-2,t,0} + \mathrm{V}''' y_{x-3,t,0} + \dots \\ & + {}_{,}\mathrm{V} y_{x,t-1,0} + {}_{,}\mathrm{V}' y_{x-1,t-1,0} + {}_{,}\mathrm{V}'' y_{x-2,t-1,0} + \dots \\ & + {}_{,,}\mathrm{V} y_{x,t-2,0} + {}_{,,}\mathrm{V}' y_{x-1,t-2,0} + \dots \\ & + {}_{,,,}\mathrm{V} y_{x,t-3,0} + \dots \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Cette solution est, comme l'on voit, tout à fait analogue à celle du n° 8; aussi est-elle sujette au même inconvénient, qui est de donner

pour $y_{x,t,u}$ une expression composée d'un nombre infini de termes, à moins que trois des quatre quantités B″, C′, C″, D ne s'évanouissent à la fois, auquel cas la valeur de γ^u sera finie, u étant (hypothèse) un nombre entier positif.

Cependant la solution précédente pourra être utile dans tous les cas où les termes donnés $y_{x,t,0}$ sont nuls pour toutes les valeurs négatives de x et de t; car alors il est visible que l'expression ci-dessus de $y_{x,t,u}$ sera toujours terminée; et c'est ce qui peut avoir lieu dans un grand nombre de questions.

44. Mais on peut, par un moyen semblable à celui du n° 12, obtenir une expression finie de $y_{x,t,u}$ dans tous les cas. En effet, si dans la valeur de γ du n° 42 on fait

$$\mathrm{B}'' + \mathrm{C}'\alpha + \mathrm{C}''\beta + \mathrm{D}\alpha\beta = \omega,$$

ce qui donne

$$\beta = \frac{\omega - \mathrm{B}'' - \mathrm{C}'\alpha}{\mathrm{C}'' + \mathrm{D}\alpha},$$

et qu'ensuite on fasse dans cette valeur de β

$$\mathrm{C}'' + \mathrm{D}\alpha = \eta, \quad \text{d'où} \quad \alpha = \frac{\eta - \mathrm{C}''}{\mathrm{D}},$$

on aura, en substituant successivement ces valeurs,

$$\alpha = \frac{\eta - \mathrm{C}''}{\mathrm{D}},$$

$$\beta = \frac{\mathrm{C}'\mathrm{C}'' - \mathrm{D}\mathrm{B}'' - \mathrm{C}'\eta + \mathrm{D}\omega}{\mathrm{D}\eta},$$

$$\gamma = \frac{\mathrm{D}(\mathrm{B}\mathrm{C}'' - \mathrm{D}\mathrm{A} - \mathrm{B}\eta) + (\mathrm{C}'\mathrm{C}'' - \mathrm{D}\mathrm{B}' - \mathrm{C}\eta)(\mathrm{C}'\mathrm{C}'' - \mathrm{D}\mathrm{B}'' - \mathrm{C}'\eta + \mathrm{D}\omega)}{\mathrm{D}^2\eta\omega},$$

expressions qui ont l'avantage d'être sous une forme finie et de ne point contenir de fraction complexe; de sorte que si l'on multiplie ensemble ces quantités élevées respectivement aux puissances x, t, u, et qu'on

développe les termes suivant les puissances et les produits de η et de ω, on aura pour $\alpha^x\beta^t\gamma^u$ une expression finie, tant que x, t, u seront entiers positifs.

Supposons donc

$$\left(\frac{\eta - C''}{D}\right)^x \times \left(\frac{C'C'' - DB'' - C'\eta + D\omega}{D}\right)^t \times \left(\frac{BC'' - DA - B\eta}{D} + \frac{(C'C'' - DB' - C\eta)(C'C'' - DB'' - C'\eta + D\omega)}{D^2}\right)^u$$

$$= Z + Z'\eta + Z''\eta^2 + Z'''\eta^3 + \ldots + Z^{(x+t+2u)}\eta^{x+t+2u}$$
$$+ {}_{I}Z\omega + {}_{I}Z'\eta\omega + {}_{I}Z''\eta^2\omega + \ldots$$
$$+ {}_{II}Z\omega^2 + {}_{II}Z'\eta\omega^2 + \ldots$$
$$+ {}_{III}Z\omega^3 + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ {}_{(t+u)}Z\omega^{t+u} + \ldots + {}_{(t+u)}Z^{(x+u)}\eta^{x+u}\omega^{t+u},$$

où les coefficients Z, Z', ..., ${}_{I}Z$, ... sont des fonctions connues de x, t, u et des constantes A, B, B', ...; il n'y aura plus qu'à multiplier cette série par $\eta^{-t-u}\omega^{-u}$ pour avoir la valeur de $\alpha^x\beta^t\gamma^u$ en η et ω; et comme η et ω sont indéterminées, on en pourra tirer immédiatement la valeur complète de $y_{x,t,u}$ en ne faisant que changer chaque produit tel que $\eta^{-r}\omega^{-s}$ en $f(r, s)$; de cette manière, on aura donc

$$y_{x,t,u} = Zf(t+u, u) + Z'f(t+u-1, u) + Z''f(t+u-2, u) + Z'''f(t+u-3, u) + \ldots$$
$$+ {}_{I}Zf(t+u, u-1) + {}_{I}Z'f(t+u-1, u-1) + {}_{I}Z''f(t+u-2, u-1) + \ldots$$
$$+ {}_{II}Zf(t+u, u-2) + {}_{II}Z'f(t+u-1, u-2) + \ldots$$
$$+ {}_{III}Zf(t+u, u-3) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

45. Pour déterminer maintenant les valeurs de la fonction $f(r, s)$, on fera comme plus haut $u = 0$, et l'on supposera ensuite successivement $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$, $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$; on aura, par ce moyen, une suite d'équations, d'où l'on tirera les différentes valeurs de la fonction

dont il s'agit en $y_{0,0,0}$, $y_{1,0,0}$, $y_{0,1,0}$, ...; mais il sera difficile de parvenir par ce moyen à des formules assez simples, telles que celles que nous avons trouvées pour le cas de trois variables seulement (13).

46. On peut aussi appliquer aux équations qui font l'objet de cet Article la méthode générale de l'Article précédent, et en tirer des conclusions semblables.

En effet, il est d'abord évident que si $\alpha^l\beta^m\gamma^n$ est un des termes de la plus haute dimension de l'équation en α, β, γ résultante de la substitution de $\alpha^x\beta^t\gamma^u$ à la place de $y_{x,t,u}$ dans l'équation différentielle proposée, il est évident, dis-je, qu'en substituant successivement, autant qu'il est possible, la valeur de ce terme dans la quantité $\alpha^x\beta^t\gamma^u$, on pourra la réduire à une suite finie de puissances de α, β, γ, parmi lesquelles il ne se trouvera jamais le produit $\alpha^l\beta^m\gamma^n$. Ensuite on pourra prouver par les principes du n° 32 qu'il n'y aura qu'à mettre dans cette expression de $\alpha^x\beta^t\gamma^u$ à la place d'un produit quelconque tel que $\alpha^r\beta^s\gamma^q$ une fonction quelconque des trois nombres r, s, q qu'on pourra désigner par $f(r, s, q)$, pour avoir sur-le-champ l'expression générale et complète de $y_{x,t,u}$. Enfin on démontrera comme dans le n° 33, que ces fonctions seront respectivement égales aux premiers termes de la suite récurrente proposée, en sorte qu'on aura, en général,

$$f(r, s, q) = y_{r,s,q};$$

il faudra donc supposer donnés tous les termes de la forme $y_{r,s,q}$ dans lesquels on n'aura pas à la fois

$$r = \text{ou} > l, \quad s = \text{ou} > m, \quad q = \text{ou} > n;$$

et alors on aura, par le moyen de ces termes, l'expression générale de $y_{x,t,u}$.

47. Par exemple dans le cas du n° 42, l'équation en α, β, γ, contenant dans le rang de la plus haute dimension le terme $D\alpha\beta\gamma$, on pourra

réduire la quantité $\alpha^x\beta^t\gamma^u$ à une suite finie de la forme

$$\begin{aligned}
&P+Q\alpha+R\alpha^2+S\alpha^3+T\alpha^4\ \ldots\\
&+Q'\beta+R'\alpha\beta+S'\alpha^2\beta+T'\alpha^3\beta\ \ldots\\
&+Q''\gamma+R''\alpha\gamma+S''\alpha^2\gamma+T''\alpha^3\gamma\ \ldots\\
&+R'''\beta^2+S'''\alpha\beta^2\ \ldots\ldots\ldots\\
&+R^{IV}\beta\gamma+S^{IV}\alpha\gamma^2\ \ldots\ldots\ldots\\
&+R^{V}\gamma^2+S^{V}\beta^2\ \ldots\ldots\ldots\\
&+S^{VI}\beta^2\gamma\ \ldots\ldots\ldots\\
&+S^{VII}\beta\gamma^2\ldots\ldots\ldots\\
&+S^{VIII}\gamma^3\ \ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

dans laquelle se trouvent toutes les puissances de α, β, γ, soit seules, soit combinées entre elles deux à deux, mais jamais les trois quantités α, β, γ ensemble. Et comme le terme $D\alpha\beta\gamma$ est le seul de la plus haute dimension dans l'équation dont il s'agit, il s'ensuit qu'on ne pourra trouver que cette seule expression finie de $\alpha^x\beta^t\gamma^u$. Par conséquent on ne pourra avoir qu'une seule expression complète de $y_{x,t,u}$, laquelle résultera de la substitution de $f(r,s,q)$, ou bien de $y_{r,s,q}$ à la place de $\alpha^r\beta^s\gamma^q$ dans la formule précédente.

Dans ce cas donc il faudra supposer connus tous les termes tels que $y_{r,s,q}$, l'un des trois nombres r, s, q étant nul; c'est-à-dire tous les termes $y_{r,s,0}$, $y_{r,0,q}$, $y_{0,s,q}$, lesquels forment les trois faces du parallélépipède de la Table à triple entrée dont on a parlé dans le n° 41.

A l'égard des coefficients P, Q, Q', Q'', R,... on pourra employer des méthodes analogues à celles qu'on a proposées dans l'Article III; mais comme dans le cas de l'équation (M) on peut représenter les trois quantités α, β, γ par des fonctions finies et rationnelles de deux autres indéterminées, ainsi qu'on l'a trouvé dans le n° 44, il sera plus simple de substituer ces valeurs de α, β, γ en π et ω dans l'expression $\alpha^x\beta^t\gamma^u$, et ensuite dans la série

$$P+Q\alpha+Q'\beta+\ldots,$$

et de déterminer ensuite par la comparaison des termes homologues les valeurs des coefficients P, Q, Q',....

48. Je ne pousserai pas plus loin ces Recherches sur l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et finies dont les coefficients sont constants; il est aisé de voir par quels moyens on pourra appliquer aux équations de tous les ordres les méthodes que nous venons d'exposer; je vais montrer maintenant l'usage de ces méthodes dans un petit nombre de Problèmes choisis concernant la théorie des probabilités, ce qui servira non-seulement à jeter un plus grand jour sur ces méthodes, mais encore à donner à l'analyse des hasards un nouveau degré de perfection.

Article V. — *Application des méthodes précédentes à la solution de différents Problèmes de l'Analyse des hasards.*

Problème I.

49. *Un joueur parie d'amener un événement donné, b fois au moins, en un nombre a de coups, la probabilité de l'amener à chaque coup étant p; on demande le sort de ce joueur.*

Désignons par $y_{x,t}$ son sort lorsqu'il n'a plus que x coups à jouer, et qu'il a encore à amener l'événement en question t fois; il est clair que le sort cherché sera $y_{a,b}$. Or en supposant qu'on joue un coup, il est facile de former par les principes connus de l'Analyse des hasards l'équation suivante

$$y_{x,t}=py_{x-1,t-1}+(1-p)y_{x-1,t};$$

qui est, comme l'on voit, linéaire du second ordre aux différences finies et partielles entre trois variables.

De plus, on voit par les conditions du Problème que le joueur gagne lorsque $t=0$, x étant quelconque; et qu'il perd lorsque x étant égal à zéro, t est plus grand que zéro; ainsi l'on aura $y_{x,0}=1$, x étant quel-

conque et $y_{0,t}=0$, t étant >0; de sorte que, dans ce cas, les termes donnés de la Table du n° 6 seront ceux qui forment le premier rang horizontal et le premier vertical.

Telles sont donc les conditions du Problème; pour le résoudre, il ne s'agit plus que d'intégrer convenablement l'équation différentielle trouvée d'après les méthodes exposées dans l'Article II.

Pour cela, je mets cette équation sous la forme suivante, en augmentant d'une unité les nombres x et t,

$$py_{x,t}+(1-p)y_{x,t+1}-y_{x+1,t+1}=0,$$

et je remarque qu'elle est comprise dans la formule (F) du n° 7 en faisant

$$A=p,\quad B=0,\quad B'=1-p,\quad C'=-1.$$

Employant donc la solution du même numéro, on aura

$$\beta=-\frac{p}{1-p-\alpha}=\frac{p}{\alpha}\times\frac{1}{1-\frac{1-p}{\alpha}};$$

donc

$$\beta^t=p^t\left[\alpha^{-t}+t(1-p)\alpha^{-t-1}+\frac{t(t+1)}{2}(1-p)^2\alpha^{-t-2}+\dots\right];$$

d'où l'on tire (8) l'expression générale

$$y_{x,t}=p^t\left[y_{x-t,0}+t(1-p)y_{x-t-1,0}+\frac{t(t+1)}{2}(1-p)^2y_{x-t-2,0}+\dots\right].$$

Cette expression va à l'infini; mais comme il faut, par les conditions du Problème, que l'on ait $y_{0,t}=0$ lorsque t est >0, il est visible qu'il faudra que l'on ait séparément

$$y_{-t,0}=0,\quad y_{-t-1,0}=0,\quad y_{-t-2,0}=0,\dots,$$

quel que soit t, pourvu qu'il soit >0; d'où il s'ensuit que les quantités $y_{s,0}$ devront être toujours nulles lorsque s sera un nombre négatif, ce qui est le cas du n° 9, où l'on a vu que la série devient finie. Ensuite

les conditions du Problème donnent aussi $y_{x,0}=1$, quel que soit x; donc, substituant ces valeurs dans l'expression précédente, on aura

$$y_{x,t}=p^t\left[1+t(1-p)+\frac{t(t+1)}{2}(1-p)^2+\dots\right],$$

où il ne faudra prendre qu'autant de termes qu'il y a d'unités dans $x-t+1$.

Donc enfin, changeant x en a et t en b, on aura pour le sort cherché

$$y_{a,b}=p^b\left[1+b(1-p)+\frac{b(b+1)}{2}(1-p)^2+\dots+\frac{b(b+1)\dots(a-1)}{1.2\dots(a-b)}(1-p)^{a-b}\right].$$

Ce Problème est résolu dans la *Science des hasards* de Moivre (page 13, édition de 1756), par induction, et nos solutions s'accordent parfaitement.

Corollaire.

50. Si la question était d'*amener l'événement donné b fois ni plus ni moins, en a coups*, conservant les mêmes dénominations que ci-dessus, on trouverait d'abord la même équation différentielle, et par conséquent la même expression générale de $y_{x,t}$; ensuite on prouverait aussi que $y_{0,t}$ doit être zéro tant que $t>0$; ce qui rendra nulles toutes les quantités $y_{s,0}$, où s sera négatif; mais, à l'égard de $y_{x,0}$, il faudra considérer que cette quantité exprime le sort du joueur lorsqu'il doit encore jouer x coups, et qu'il ne doit plus amener l'événement donné; or, comme la probabilité de ne pas amener cet événement à chaque coup est $1-p$, celle de ne pas l'amener dans x coups successifs sera $(1-p)^x$; ainsi l'on aura

$$y_{x,0}=(1-p)^x,$$

et, en général,

$$y_{s,0}=(1-p)^s,$$

s étant un nombre positif quelconque ou zéro. Par ces substitutions, l'expression de $y_{x,t}$ deviendra

$$y_{x,t}=p^t(1-p)^{x-t}\left[1+t+\frac{t(t+1)}{2}+\dots+\frac{t(t+1)\dots(x-1)}{1.2\dots(x-t)}\right],$$

ce qui peut se réduire à cette forme plus simple

$$y_{x,t}=\frac{(t+1)(t+2)\dots x}{1.2\dots(x-t)}\,p^t(1-p)^{x-t}.$$

Donc, changeant x en a, t en b, on aura pour le sort cherché

$$y_{a,b}=\frac{(b+1)(b+2)\dots a}{1.2\dots(a-b)}\,p^b(1-p)^{a-b}.$$

On aurait pu, au reste, déduire immédiatement la solution de ce dernier Problème de celle du numéro précédent; car il est facile de comprendre que, si de la probabilité d'amener un événement donné b fois au moins en a coups on ôte celle de l'amener $b+1$ fois au moins en un pareil nombre de coups, il doit rester la probabilité d'amener le même événement b fois seulement en a coups; d'où il s'ensuit que, si l'on désigne par $Y_{a,b}$ la valeur de $y_{a,b}$ du n° 49, on aura pour le cas du Corollaire présent

$$y_{a,b}=Y_{a,b}-Y_{a,b+1}.$$

C'est de cette manière que le Problème dont il s'agit est résolu dans l'Ouvrage cité de Moivre, page 15; mais celle que nous venons d'en donner est non-seulement plus simple, mais elle a de plus l'avantage d'être déduite de principes directs.

Problème II.

51. *On suppose qu'à chaque coup il puisse arriver deux événements dont les probabilités respectives soient p et q; et l'on demande le sort d'un joueur qui parierait d'amener le premier de ces événements b fois au moins et le second c fois au moins, en un nombre a de coups.*

Soit, en général, $y_{x,t,u}$ le sort du joueur lorsqu'il a encore x coups à jouer, et qu'il doit encore amener les deux événements, l'un t fois et l'autre u fois; il est clair que le sort cherché sera $y_{a,b,c}$.

Maintenant si l'on suppose que l'on joue un coup, et qu'on considère les différents cas qui peuvent arriver, on formera aisément, d'après les

principes connus de la théorie des hasards, l'équation

$$y_{x,t,u}=py_{x-1,t-1,u}+qy_{x-1,t,u-1}+(1-p-q)y_{x-1,t,u};$$

laquelle est, comme l'on voit, aux différences finies et partielles entre quatre variables.

Or il est visible : 1° que le joueur perd lorsque x étant nul, t et u ont encore une valeur positive quelconque; d'où il s'ensuit que l'on doit avoir, en général, $y_{0,t,u}=0$ lorsque t ou $u>0$; 2° que si l'on fait $u=0$, on a le cas du Problème précédent, de sorte que la valeur de $y_{x,t,0}$ doit être la même que celle de $y_{x,t}$ du n° 49 ci-dessus; 3° que si l'on fait $t=0$, on aura aussi le cas du même Problème en changeant seulement p en q et t en u; par conséquent, la valeur de $y_{x,0,u}$ sera aussi la même que celle de $y_{x,t}$ du n° 49, mais en y changeant t en u, p en q.

Cela posé, je mets l'équation différentielle sous la forme suivante

$$py_{x,t,u+1}+qy_{x,t+1,u}+(1-p-q)y_{x,t+1,u+1}-y_{x+1,t+1,u+1}=0,$$

et la comparant à la formule (L) du n° 42, j'aurai, en faisant, pour abréger, $n=1-p-q$,

$$\gamma=\frac{q}{\alpha}\times\frac{1}{1-\dfrac{n}{\alpha}-\dfrac{p}{\alpha\beta}};$$

d'où

$$\gamma^u=\frac{q^u}{\alpha^u}\left[1+\frac{u}{\alpha}\left(n+\frac{p}{\beta}\right)+\frac{u(u+1)}{2\alpha^2}\left(n^2+\frac{2np}{\beta}+\frac{p^2}{\beta^2}\right)+\frac{u(u+1)(u+2)}{2.3.\alpha^3}\left(n^3+\frac{3n^2p}{\beta}+\frac{3np^2}{\beta^2}+\frac{p^3}{\beta^3}\right)+\dots\right],$$

et de là j'aurai sur-le-champ, par la formule du n° 43, cette expression générale

$$y_{x,t,u}=q^u\left[y_{x-u,t,0}+u(ny_{x-u-1,t,0}+py_{x-u-1,t-1,0})+\frac{u(u+1)}{2}(n^2y_{x-u-2,t,0}+2npy_{x-u-2,t-1,0}+p^2y_{x-u-2,t-2,0})+\frac{u(u+1)(u+2)}{2.3}(n^3y_{x-u-3,t,0}+3n^2py_{x-u-3,t-1,0}+3np^2y_{x-u-3,t-2,0}+p^3y_{x-u-3,t-3,0})+\dots\dots\dots

Cette formule va à l'infini; mais comme il faut que lorsque $x = 0$ on ait $y_{0,t,u} = 0$, quels que soient t et u, pourvu qu'ils ne soient pas nuls à la fois, il est facile de voir que tous les termes de la forme $y_{r,s,0}$, dans lesquels r sera négatif, devront nécessairement être nuls; de sorte que la formule deviendra finie, et qu'elle ne devra être poussée que jusqu'aux termes, inclusivement, qui seront affectés du coefficient

$$\frac{u(u+1)(u+2)\ldots(x-1)}{1.2.3\ldots(x-u)}.$$

Ainsi donc on n'aura plus que des termes de la forme $y_{r,s,0}$, où r sera toujours positif, mais où s pourra devenir négatif. Pour connaître les valeurs de $y_{r,s,0}$ lorsque s est négatif, je fais dans la formule générale ci-dessus $t = 0$, auquel cas la valeur de $y_{x,0,u}$ doit être égale à celle de $y_{x,t}$ du n° 49 en changeant t en u et p en q; et comme cette égalité doit avoir lieu quels que soient x et u, j'en déduis aisément, par la comparaison des termes affectés des mêmes coefficients u, $\frac{u(u+1)}{2}, \ldots$, ces égalités

$$y_{x-u,0,0} = 1,$$
$$ny_{x-u-1,0,0} + py_{x-u-1,-1,0} = 1 - q,$$
$$n^2 y_{x-u-2,0,0} + 2npy_{x-u-2,-1,0} + p^2 y_{x-u-2,-2,0} = (1-q)^2,$$

et ainsi ce suite; d'où l'on tire successivement, à cause de $n = 1 - p - q$,

$$y_{x-u,0,0} = 1, \quad y_{x-u-1,-1,0} = 1, \quad y_{x-u-2,-2,0} = 1, \ldots,$$

de sorte qu'on aura, en général,

$$y_{r,s,0} = 1$$

lorsque s sera zéro ou négatif, r étant positif ou zéro.

On peut d'ailleurs se convaincre *à priori* que $y_{r,s,0}$ doit être égal à 1 lorsque s est négatif; car, en supposant s positif, cette quantité exprime le sort du joueur, lorsqu'il lui reste encore r coups à jouer, et qu'il doit encore amener l'un des événements s fois; or, si s devient négatif, il est visible que l'on aura le sort du joueur lorsqu'il a déjà amené l'événement

dont il s'agit s fois de plus qu'il n'avait besoin; auquel cas, par les conditions du jeu, il est censé avoir déjà gagné; par conséquent son sort doit alors être toujours égal à l'unité.

Donc, en général, pour avoir la valeur de tous les termes $y_{r,s,0}$ qui peuvent entrer dans l'expression ci-dessus de $y_{x,t,u}$, on remarquera : 1° que ces termes sont tous nuls pour toutes les valeurs négatives de r; 2° que ces termes soùt tous égaux à l'unité pour toutes les valeurs négatives ou nulles de s, r étant zéro ou positif; 3° que r et s étant positifs ou zéro, on aura par le Problème précédent

$$y_{r,s} = p^r \left[1 + s(1-p) + \frac{s(s+1)}{2}(1-p)^2 + \ldots + \frac{s(s+1)\ldots(r-1)}{1.2\ldots(r-s)}(1-p)^{r-s} \right].$$

Ainsi le Problème est résolu.

On voit par là comment il faudrait s'y prendre si le nombre des événements était quelconque; il n'y aura de difficulté que dans la longueur du calcul.

Problème III.

52. *Les mêmes choses étant supposées que dans le Problème II, on demande le sort d'un joueur qui parierait d'amener, dans un nombre de coups indéterminé, le second des deux événements b fois avant que le premier fût arrivé a fois.*

Je désigne par $y_{x,t}$ le sort du joueur lorsqu'il doit encore amener le second événement t fois avant que le premier arrive x fois; il est clair que $y_{a,b}$ sera le sort cherché.

Imaginons maintenant qu'on joue un coup, et comme la probabilité du premier événement est p et celle du second est q à chaque coup par l'hypothèse, on formera aisément l'équation

$$y_{x,t} = py_{x-1,t} + qy_{x,t-1},$$

et l'on remarquera que le joueur gagne lorsque $t = 0$ et x positif quel-

conque, et qu'il perd lorsque $x = 0$, et t positif quelconque; de sorte que l'on aura $y_{x,0} = 1$, x étant > 0, et $y_{0,t} = 0$, t étant > 0.

Cela posé, si l'on met l'équation différentielle sous la forme

$$py_{x,t+1} + qy_{x+1,t} - y_{x+1,t+1} = 0,$$

et qu'on la compare à la formule (F), du n° 7, on aura

$$\beta = -\frac{q\alpha}{p-\alpha} = \frac{q}{1-\frac{p}{\alpha}};$$

donc

$$\beta^t = q^t\left[1 + t\frac{p}{\alpha} + \frac{t(t+1)}{2}\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{2.3}\frac{p^3}{\alpha^3} + \dots\right],$$

et par conséquent (8),

$$y_{x,t} = q^t\left[y_{x,0} + tpy_{x-1,0} + \frac{t(t+1)}{2}p^2y_{x-2,0} + \dots\right].$$

Or puisque $y_{0,t} = 0$, il faudra que l'on ait

$$y_{0,0} = 0, \quad y_{0,-1} = 0, \quad y_{0,-2} = 0, \dots,$$

de sorte qu'on aura le cas du n° 9, où la série devient finie, et comme d'ailleurs on doit aussi avoir $y_{x,0} = 1$, il en résultera cette expression

$$y_{x,t} = q^t\left[1 + tp + \frac{t(t+1)}{2}p^2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{2.3}p^3 + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+x-2)}{1.2\dots(x-1)}p^{x-1}\right]$$

où il n'y aura plus qu'à changer x en a et t en b.

Autre solution du Problème III.

53. On peut aussi trouver une autre solution du Problème précédent par le moyen des formules du n° 13, lesquelles donnent dans tous les cas une expression finie de $y_{x,t}$.

En appliquant ces formules au cas présent, on aura

$$m = 1, \quad n = p;$$

de sorte que les quantités Y, Y′, Y″,... seront $y_{0,0}$, $\frac{1}{p}y_{1,0}$, $\frac{1}{p^2}y_{2,0}$,..., et à cause que les conditions du Problème demandent que

$$y_{0,0} = 0, \quad y_{1,0} = 1, \quad y_{2,0} = 1, \dots,$$

cette série deviendra

$$0, \frac{1}{p}, \frac{1}{p^2}, \dots;$$

d'où, en prenant les différences successives, on aura

$$Y = 0, \quad \Delta Y = \frac{1}{p}, \quad \Delta^2 Y = \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p}, \quad \Delta^3 Y = \frac{1}{p^3} - \frac{3}{p^2} + \frac{3}{p}, \dots;$$

donc

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(2) = 1 - 2p, \quad f(3) = 1 - 3p + 3p^2,$$
$$f(4) = 1 - 4p + 6p^2 - 4p^3, \dots,$$

d'où il est facile de conclure qu'on aura, en général,

$$f(x) = (1-p)^x - (-p)^x,$$

tant que x est 0 ou > 0.

Ensuite, comme les conditions du Problème exigent aussi que

$$y_{0,0} = 0, \quad y_{0,1} = 0, \quad y_{0,2} = 0, \dots,$$

il s'ensuit que les quantités Y, ′Y, ″Y,... seront toutes nulles; par conséquent leurs différences ∂Y, $\partial^2 Y$,... seront nulles, ce qui donnera

$$f(0) = 0, \quad f(-1) = 0, \quad f(-2) = 0, \dots \quad \text{et} \quad f(-x) = 0.$$

Enfin, comme $A = 0$, et que ce que nous avons nommé p dans l'endroit cité est $= -\frac{B}{C'} = q$, on aura

$$V = q^t, \quad V' = (x+t)q^t p, \quad V'' = \frac{(x+t)(x+t-1)}{2}q^t p^2, \dots.$$

Donc substituant ces valeurs dans la formule

$$y_{x,t} = \mathrm{V} f(x) + \mathrm{V}' f(x-1) + \mathrm{V}'' f(x-2) + \ldots,$$

on aura

$$y_{x,t} = q^t \left[(1-p)^x - (-p)^x + (x+t)\left[(1-p)^{x-1} - (-p)^{x-1}\right] p + \frac{(x+t)(x+t-1)}{2}\left[(1-p)^{x-2} - (-p)^{x-2}\right] p^2 + \ldots + \frac{(x+t)(x+t-1)\ldots(t+2)}{1.2\ldots(x-1)} p^{x-1} \right].$$

On peut encore simplifier cette expression en remarquant que

$$(1-p)^x - (-p)^x = (1-p)^{x-1} - (1-p)^{x-2} p + (1-p)^{x-3} p^2 - \ldots \pm p^{x-1},$$
$$(1-p)^{x-1} - (-p)^{x-1} = (1-p)^{x-2} - (1-p)^{x-3} p + \ldots \mp p^{x-2},$$

et ainsi de suite; de sorte qu'en substituant ces valeurs et ordonnant par rapport aux puissances de $1-p$, on aura

$$y_{x,t} = q^t \left[(1-p)^{x-1} + (x+t-1)(1-p)^{x-2} p + \left(\frac{(x+t)(x+t-1)}{2} - \frac{x+t}{1} - 1 \right)(1-p)^{x-3} p^2 + \ldots + p^{x-1} \right],$$

ou bien en réduisant

$$y_{x,t} = q^t \left[(1-p)^{x-1} + (x+t-1)(1-p)^{x-2} p + \frac{(x+t-1)(x+t-2)}{2}(1-p)^{x-3} p^2 + \ldots + \frac{(x+t-1)(x+t-2)\ldots(t+1)}{1.2\ldots(x-1)} p^{x-1} \right].$$

Cette expression de $y_{x,t}$, quoique sous une forme différente de celle que nous avons trouvée dans le numéro précédent, revient cependant dans le fond à celle-là, comme on peut s'en convaincre aisément en développant les puissances de $1-p$, et ordonnant ensuite les termes suivant celles de p; ce qui peut servir de confirmation de l'exactitude de nos méthodes.

Au reste, on voit que dans le Problème dont il s'agit la méthode de la première solution est préférable à celle dont nous venons de faire usage, non-seulement parce que le procédé en est plus aisé, mais surtout parce que le résultat en est beaucoup plus simple.

Problème IV.

54. *On suppose qu'à chaque coup il puisse arriver trois événements différents, que je désignerai pour plus de clarté par* P, Q, R, *et que les probabilités de ces événements soient respectivement égales à* p, q, r; *on demande le sort d'un joueur qui parierait d'amener l'événement* R c *fois avant que l'événement* Q *arrive* b *fois, et que l'événement* P *arrive* a *fois.*

Soit $y_{x,t,u}$ le sort du joueur lorsqu'il a encore à amener l'événement R u fois avant que l'événement Q arrive t fois et que l'événement P arrive x fois; on aura $y_{a,b,c}$ pour le sort cherché. Or, en supposant qu'on joue un coup, on parviendra à l'équation

$$y_{x,t,u} = p\, y_{x-1,t,u} + q\, y_{x,t-1,u} + r\, y_{x,t,u-1};$$

et comme le joueur est censé avoir gagné lorsque $u = 0$ et x, t plus grands que zéro; qu'au contraire il est censé avoir perdu lorsque $t = 0$, et x, u plus grands que zéro, et lorsque $x = 0$ et t, u plus grands que zéro, il s'ensuit qu'on aura

$$y_{x,t,0} = 1, \quad y_{x,0,u} = 0, \quad y_{0,t,u} = 0,$$

x, t, u étant des nombres quelconques entiers positifs.

L'équation différentielle ci-dessus étant mise sous la forme

$$p\, y_{x,t+1,u+1} + q\, y_{x+1,t,u+1} + r\, y_{x+1,t+1,u} - y_{x+1,t+1,u+1} = 0,$$

se trouve comprise dans la formule (L) du n° 42, et l'on aura

$$\gamma = -\frac{r\alpha\beta}{q\alpha + p\beta - \alpha\beta} = \frac{r}{1 - \frac{p}{\alpha} - \frac{q}{\beta}};$$

d'où

$$\gamma^u = r^u \left[1 + u\left(\frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta}\right) + \frac{u(u+1)}{2}\left(\frac{p^2}{\alpha^2} + \frac{2pq}{\alpha\beta} + \frac{q^2}{\beta^2}\right) + \frac{u(u+1)(u+2)}{2.3}\left(\frac{p^3}{\alpha^3} + \frac{3p^2q}{\alpha^2\beta} + \frac{3pq^2}{\alpha\beta^2} + \frac{q^3}{\beta^3}\right) + \ldots \right].$$

Et de là on pourra tirer immédiatement la valeur de $y_{x,t,u}$ en changeant dans l'expression de γ^u chaque produit tel que $\frac{1}{\alpha^\sigma \beta^\tau}$ en $y_{x-\sigma,t-\tau,0}$, ainsi qu'on le voit par la comparaison des formules générales des nos 42 et 43. Ainsi l'on aura

$$y_{x,t,u} = r^u \Big[y_{x,t,0} + u(p y_{x-1,t,0} + q y_{x,t-1,0}) + \frac{u(u+1)}{2}(p^2 y_{x-2,t,0} + 2pq y_{x-1,t-1,0} + q^2 y_{x,t-2,0}) + \frac{u(u+1)(u+2)}{2.3}(p^3 y_{x-3,t,0} + 3p^2 q y_{x-2,t-1,0} + 3pq^2 y_{x-1,t-2,0} + q^3 y_{x,t-3,0}) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \Big].$$

Or par les conditions du Problème il faut que $y_{x,t,u}$ devienne égal à zéro lorsque $x = 0$, ou $t = 0$ quel que soit u; et il est visible, par l'expression précédente, que cette condition emporte celle que chaque quantité telle que $y_{x,t,0}$ soit nulle lorsque $x = 0$ ou négatif, ou lorsque $t = 0$ ou négatif. De plus, il faut aussi par les conditions du Problème que $y_{x,t,0}$ soit $= 1$ lorsque x et t sont plus grands que zéro. D'où il s'ensuit que l'expression générale de $y_{x,t,u}$ deviendra finie, et sera représentée de la manière suivante

$$y_{x,t,u} = r^u \Big[1 + u(p+q) + \frac{u(u+1)}{2}(p^2 + 2pq + q^2) + \frac{u(u+1)(u+2)}{2.3}(p^3 + 3p^2 q + 3pq^2 + q^3) + \cdots \Big],$$

en ne continuant cette série que tant que les puissances de p seront moindres que x, et celles de q moindres que t.

De sorte que si l'on désigne, pour plus de simplicité, les coefficients u, $\frac{u(u+1)}{2}$, $\frac{u(u+1)(u+2)}{2.3}$, ... par u', u'', u''', ..., on pourra donner à l'expression dont il s'agit cette forme

$$y_{x,t,u} = r^u \Big[1 + u'p + u''p^2 + \ldots + u^{(x-1)}p^{x-1} + u'q + 2u''pq + 3u'''p^2 q + \ldots + x u^{(x)} p^{x-1} q + u''q^2 + 3u'''pq^2 + 6u^{iv}p^2 q^2 + \ldots + \frac{x(x+1)}{2} u^{(x+1)} p^{x-1} q^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + u^{(t-1)}q^{t-1} + t u^{(t)} p q^{t-1} + \frac{t(t+1)}{2} u^{(t+1)} p^2 q^{t-1} + \ldots + u^{(x+t-2)} p^{x-1} q^{t-1} \Big],$$

où le coefficient du dernier terme $u^{(x+t-2)} p^{x-1} q^{t-1}$ sera également

$$\frac{x(x+1)(x+2)\ldots(x+t-2)}{2.3\ldots(t-1)} \quad \text{ou} \quad \frac{t(t+1)(t+2)\ldots(t+x-2)}{2.3\ldots(x-1)},$$

ces deux quantités étant égales entre elles, comme on peut s'en convaincre en multipliant l'une par le dénominateur de l'autre, et *vice versâ*.

Corollaire I.

55. Si l'on supposait qu'à chaque coup il pût arriver quatre événements différents P, Q, R, S dont les probabilités respectives fussent p, q, r, s, et qu'on cherchât le sort d'un joueur qui parierait d'amener l'événement S z fois avant que les événements R, Q, P pussent arriver respectivement u, t, x fois, le Problème serait toujours résoluble par la même méthode, et l'on trouverait, pour le sort cherché, l'expression

$$s^z \Big[1 + z(p+q+r) + \frac{z(z+1)}{2}(p+q+r)^2 + \frac{z(z+1)(z+2)}{2.3}(p+q+r)^3 + \ldots \Big]$$

dans laquelle, après avoir développé les puissances de $p+q+r$, il ne faudra retenir que les termes où p sera élevé à une puissance moindre que x, q à une puissance moindre que t, et r à une puissance moindre

que u; de sorte que tous les termes qui doivent entrer dans l'expression dont il s'agit formeront un parallélépipède rectangle, dont les trois côtés qui partent du même angle où il y a le terme s^z seront formés par ces trois séries

$$s^1\left[1+zp+\frac{z(z+1)}{2}p^2+\ldots+\frac{z(z+1)\ldots(z+x-2)}{1.2\ldots(x-1)}p^{x-1}\right],$$

$$s^1\left[1+zq+\frac{z(z+1)}{2}q^2+\ldots+\frac{z(z+1)\ldots(z+t-2)}{1.2\ldots(t-1)}q^{t-1}\right],$$

$$s^1\left[1+zr+\frac{z(z+1)}{2}r^2+\ldots+\frac{z(z+1)\ldots(z+u-2)}{1.2\ldots(u-1)}r^{u-1}\right],$$

et le nombre de tous les termes sera égal à $(x-1)(t-1)(u-1)$.

Corollaire II.

56. En général, si les événements qui peuvent arriver à chaque coup sont A, B, C, D,..., et leurs probabilités respectives a, b, c, d,..., et qu'on demande le sort d'un joueur qui parierait d'amener l'événement A α fois avant que B arrive β fois, C γ fois, D δ fois,..., on trouvera cette expression

$$a^\alpha\left[1+\alpha(b+c+d+\ldots)+\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}(b+c+d+\ldots)^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{2.3}(b+c+d+\ldots)^3+\cdots\right],$$

dans laquelle, après avoir développé les puissances de $b+c+d+\ldots$, il ne faudra retenir que les termes où les puissances de b seront moindres que β, celles de c moindres que γ, celles de d moindres que δ, etc.; de sorte que le nombre de tous les termes qui devront entrer dans cette expression sera

$$(\beta-1)(\gamma-1)(\delta-1)\ldots;$$

et il est facile de prouver par le Théorème connu sur la forme des coeffi-

cients des puissances des multinômes, que chacun de ces termes sera de la forme suivante

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+l+m+n+\ldots-1)}{1.2\ldots(l+m+n+\ldots)}\times\frac{(l+1)(l+2)\ldots(l+m+n+\ldots)}{1.2.3\ldots m\times 1.2.3\ldots n\times 1\ldots}a^\alpha b^l c^m d^n\ldots,$$

en donnant successivement à l, m, n,... toutes les valeurs entières depuis zéro jusqu'à $\beta-1$, $\gamma-1$, $\delta-1$,... respectivement.

Remarque.

57. Le Problème dont nous venons de donner une solution très-générale et très-simple renferme d'une manière générale celui qu'on nomme communément dans l'Analyse des hasards le *Problème des parties*, et qui n'a encore été résolu complétement que pour le cas de deux joueurs. (*Voyez* l'*Analyse* de Monmort, *Propositions XL et XLI*, seconde édition; *La Science des hasards* de Moivre, *Problème VI*, seconde édition; le *Mémoire* de M. de Laplace imprimé parmi les *Mémoires* présentés à l'Académie des Sciences en 1773, *Problèmes XIV et XV*.)

Si deux joueurs A et B jouant ensemble à plusieurs parties ont les probabilités respectives p et q de gagner chaque partie en particulier, et qu'il manque au joueur A x parties ou points, et au joueur B t parties ou points pour gagner, on aura évidemment le cas du Problème III (52), et $y_{x,t}$ sera le sort ou l'espérance du joueur B; et nos deux solutions s'accordent avec celles qu'on trouve dans l'Ouvrage cité de Monmort, n°s 191, 192.

S'il y a trois joueurs A, B, C dont les probabilités respectives pour gagner chaque partie soient p, q, r, et qu'il manque à A x parties, à B t parties, à C u parties, on aura le cas du Problème IV (54); et $y_{x,t,u}$ sera le sort ou l'espérance du joueur C, et ainsi de suite.

En général, s'il y a autant de joueurs que l'on veut, A, B, C, D,.... dont les probabilités respectives de gagner chaque partie soient a, b, c, d,..., et qu'il leur manque respectivement α, β, γ, δ,... parties, on aura par le Corollaire II ci-dessus l'expression générale du sort du joueur A.

et par conséquent aussi celle du sort de chacun des autres joueurs en changeant entre elles les quantités a, b, c,... et α, β, γ,....

Problème V.

58. *La probabilité d'amener un événement donné à chaque coup étant p, un joueur parie qu'en a coups au moins il amènera cet événement un nombre de fois qui surpassera de b le nombre des fois où il ne l'amènera pas.*

Soit $y_{x,t}$ le sort du joueur lorsqu'il n'a plus que x coups à jouer, et qu'il doit encore amener l'événement donné un nombre de fois qui surpasse de t le nombre des fois où il n'amènera pas cet événement; il est clair que le sort cherché sera $y_{a,b}$.

Si l'on imagine maintenant qu'on joue un coup, il est facile de former l'équation suivante

$$y_{x,t} = p\,y_{x-1,t-1} + (1-p)\,y_{x-1,t+1};$$

et comme le joueur gagne lorsque $t = 0$ et x quelconque, qu'au contraire il perd lorsque, x étant nul, t est encore positif, il s'ensuit qu'on aura $y_{x,0} = 1$, x étant quelconque, et $y_{0,t} = 0$, t étant > 0.

Je fais pour plus de simplicité $1 - p = q$, et je mets l'équation ci-dessus sous la forme suivante

$$p\,y_{x,t} + q\,y_{x,t+2} - y_{x+1,t+1} = 0,$$

qui est, comme l'on voit, comprise dans la formule générale (G) du n° 15; et il en viendra, d'après la formule (H), cette équation en α et β

$$p - \alpha\beta + q\beta^3 = 0;$$

d'où il faudra tirer la valeur de β et ensuite celle de β^t en α par une série descendante. Pour cela il faut employer la méthode que j'ai donnée dans mon *Mémoire sur la résolution des équations littérales*, imprimé dans le

volume de cette Académie pour l'année 1768 (*). Dans le n° 26 de ce Mémoire on trouve deux formules qui donnent les deux valeurs de x^m dans l'équation

$$a - bx + cx^2 = 0,$$

et qui peuvent s'appliquer au cas présent en faisant

$$x = \beta, \quad m = t, \quad a = p, \quad b = \alpha, \quad c = q;$$

on aura ainsi

$$\beta^t = \frac{p^t}{\alpha^t} + \frac{t\,p^{t+1}q}{\alpha^{t+2}} + \frac{t(t+3)}{2}\,\frac{p^{t+2}q^2}{\alpha^{t+4}} + \frac{t(t+4)(t+5)}{2.3}\,\frac{p^{t+3}q^3}{\alpha^{t+6}} + \ldots$$

ou

$$\beta^t = \frac{\alpha^t}{q^t} - \frac{t\,p\,\alpha^{t-2}}{q^{t-1}} + \frac{t(t-3)}{2}\,\frac{p^2\alpha^{t-4}}{q^{t-2}} - \frac{t(t-4)(t-5)}{2.3}\,\frac{p^3\alpha^{t-6}}{q^{t-3}} + \ldots.$$

Ces deux valeurs de β^t étant comparées aux expressions générales de β^t du n° 15, on aura :

$$1^\circ \quad \begin{cases} \mu = -1, \quad \mu' = 2, \quad \mu'' = 4, \ldots, \\ \mathrm{T} = p^t, \quad \mathrm{T}' = t\,p^{t+1}q, \quad \mathrm{T}'' = \dfrac{t(t+3)}{2}\,p^{t+2}q^2, \ldots; \end{cases}$$

$$2^\circ \quad \begin{cases} \nu = 1, \quad \nu' = 2, \quad \nu'' = 4, \ldots, \\ \mathrm{U} = \dfrac{1}{q^t}, \quad \mathrm{U}' = -\dfrac{tq}{q^{t-1}}, \quad \mathrm{U}'' = \dfrac{t(t-3)}{2}\,\dfrac{p^2}{q^{t-2}}, \ldots. \end{cases}$$

Donc on aura (numéro cité)

$$y_{x,t} = p^t\Big[f(x-t) + tpq\,f(x-t-2) + \frac{t(t+3)}{2}\,p^2q^2f(x-t-4) + \frac{t(t+4)(t+5)}{2.3}\,p^3q^3f(x-t-6) + \ldots\Big]$$
$$+ \frac{1}{q^t}\Big[\varphi(x+t) - tpq\,\varphi(x+t-2) + \frac{t(t-3)}{2}\,p^2q^2\varphi(x+t-4) - \frac{t(t-4)(t-5)}{2.3}\,p^3q^3\varphi(x+t-6) + \ldots\Big],$$

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. III, p. 5.

les caractéristiques f et φ dénotant deux fonctions arbitraires, qu'on déterminera de la manière suivante d'après les conditions données du Problème.

La première condition demande que lorsque $x = 0$, on ait $y_{0,t} = 0$, t étant un nombre entier positif quelconque; il est facile de se convaincre qu'on ne peut satisfaire à cette condition qu'en supposant que la fonction désignée par la caractéristique φ soit toujours zéro, et que celle désignée par la caractéristique f devienne aussi nulle lorsque le nombre dont elle est fonction devient négatif. De cette manière l'expression de $y_{x,t}$ deviendra finie et sera de la forme

$$y_{x,t} = p^t \left[f(x-t) + tpqf(x-t-2) + \frac{t(t+3)}{2} p^2q^2 f(x-t-4) + \frac{t(t+4)(t+5)}{2.3} p^3q^3 f(x-t-6) + \dots \right],$$

en prenant seulement autant de termes qu'il y a d'unités dans $\frac{x-t}{2} + 1$ ou dans $\frac{x-t-1}{2} + 1$.

L'autre condition du Problème demande ensuite que lorsque $t = 0$ et x quelconque, on ait $y_{x,0} = 1$; mais dans ce cas on aura, par la formule précédente, $y_{x,0} = f(x)$; donc $f(x)$ doit toujours être égal à 1, tant que x n'est pas négatif. Donc les valeurs de $f(x-t), f(x-t-2), \dots$ dans l'expression ci-dessus seront toutes égales à 1. Ainsi l'on aura

$$y_{x,t} = p^t \left[1 + tpq + \frac{t(t+3)}{2} p^2q^2 + \frac{t(t+4)(t+5)}{2.3} p^3q^3 + \dots \right],$$

en ne prenant qu'autant de termes qu'il y aura d'unités dans $\frac{x-t}{2} + 1$ ou dans $\frac{x-t-1}{2} + 1$.

Si l'on voulait que t fût négatif, alors en changeant t en $-t$, dans l'expression générale de $y_{x,t}$, on ne ferait qu'y changer p en q et f en φ et *vice versâ*, et, faisant le même raisonnement qu'auparavant, on trouverait

$$y_{x,-t} = q^t \left[1 + tpq + \frac{t(t+3)}{2} p^2q^2 + \dots \right].$$

C'est ce qui est d'ailleurs évident de soi-même; car le cas de t négatif est le même que si t restant positif, on échangeait entre eux les événements P et Q, ce qui ne produit d'autre différence dans la solution que de substituer q à la place de p et *vice versâ*.

Ce Problème répond au Problème LXV de Moivre, et la solution précédente s'accorde avec la seconde solution de cet Auteur (page 210, troisième édition).

Autre solution du Problème V.

59. Dans la solution précédente nous avons dû résoudre une équation du second degré pour avoir la valeur de β en α par l'équation

$$p - \alpha\beta + q\beta^2 = 0;$$

mais si au lieu de déterminer β en α on voulait au contraire déterminer α en β, on n'aurait alors qu'une équation linéaire à résoudre, et cette valeur de α en β aurait l'avantage d'être finie et de donner directement une expression de $y_{x,t}$ en termes finis.

En effet, on aura

$$\alpha = \frac{p}{\beta} + q\beta;$$

j'élève ce binôme à la puissance x, et je réunis, pour plus de simplicité, les termes extrêmes et ceux qui sont également éloignés des extrêmes; j'aurai ainsi

$$\alpha^x = (p^x\beta^{-x} + q^x\beta^x) + xpq\,(p^{x-1}\beta^{1-x} + q^{x-1}\beta^{1-x}) + \frac{x(x-1)}{2} p^2q^2 (p^{x-1}\beta^{1-x} + q^{x-1}\beta^{x-1}) + \dots,$$

formule qu'il ne faudra pousser que jusqu'aux termes qui auront pour coefficient

$$\frac{x(x-1)(x-2)\dots\left(\frac{x+1}{2}\right)}{1.2.3\dots}$$

si x est impair, ou bien

$$\frac{x(x-1)(x-2)\dots\left(\frac{x}{2}+1\right)}{1.2.3\dots}$$

si x est pair, en ayant soin, dans ce dernier cas, de ne prendre que la moitié de ce coefficient.

Multipliant cette valeur de α^x par β^t j'aurai cette expression de $\alpha^x\beta^t$:

$$\alpha^x\beta^t = (p^x\beta^{t-x} + q^x\beta^{t+x}) + xpq(p^{x-1}\beta^{t+2-x} + q^{x-1}\beta^{t-2+x}) + \frac{x(x-1)}{2}p^2q^2(p^{x-2}\beta^{t+4-x} + q^{x-2}\beta^{t-4+x}) + \dots,$$

d'où, par les principes établis dans l'Article II ci-dessus, on tirera immédiatement cette expression générale de $y_{x,t}$, savoir

$$y_{x,t} = [p^x f(t-x) + q^x f(t+x)] + xpq[p^{x-2}f(t+2-x) + q^{x-2}f(t-2+x)] + \frac{x(x-1)}{2}p^2q^2[p^{x-4}f(t+4-x) + q^{x-4}f(t-4+x)] + \dots\dots\dots\dots$$

la caractéristique f désignant une fonction arbitraire, qui doit être déterminée par les conditions du Problème.

Pour cet effet, il faut se rappeler que lorsque $x = 0$ on doit avoir $y_{0,t} = 0$, t étant > 0, et que lorsque $t = 0$ on doit avoir $y_{x,0} = 1$, x étant $= \text{ou} > 0$; donc : 1° on aura $f(t) = 0$, t étant un nombre quelconque positif; 2° on aura

$$1 = [p^x f(-x) + q^x f(x)] + xpq[p^{x-2}f(2-x) + q^{x-2}f(x-2)] + \frac{x(x-1)}{2}p^2q^2[p^{x-4}f(4-x) + q^{x-4}f(x-4)] + \dots$$

x étant un nombre quelconque positif ou zéro. Si l'on fait successivement $x = 0, 1, 2, 3, \dots$, on pourra tirer de cette équation les valeurs de

$$f(0),\quad pf(-1) + qf(1),\quad p^2f(-2) + q^2f(2), \dots,$$

et l'on trouvera, en général, par les formules déjà connues,

$$p^s f(-s) + q^s f(s) = 1 - spq + \frac{s(s-3)}{2}p^2q^2 - \frac{s(s-4)(s-5)}{2.3}p^3q^3 + \frac{s(s-5)(s-6)(s-7)}{2.3.4}p^4q^4 - \dots,$$

en ne prenant dans cette série qu'autant de termes qu'il y a d'unités dans $\frac{s+1}{2}$ ou dans $\frac{s}{2}+1$.

Donc, puisqu'on doit avoir, en général, $f(s) = 0$ tant que $s > 0$, on aura pour le Problème dont il s'agit

$$y_{x,t} = p^x\left[f(t-x) + x\frac{q}{p}f(t+2-x) + \frac{x(x-1)}{2}\frac{q^2}{p^2}f(t+4-x) + \dots\right],$$

en ne prenant qu'autant de termes qu'il y a d'unités dans $\frac{x-t+1}{2}$ ou dans $\frac{x-t}{2}+1$; et il n'y aura plus qu'à substituer dans cette formule, à la place de chaque fonction telle que $f(-s)$, la quantité

$$f(-s) = \frac{1}{p^s} - \frac{sq}{p^{s-1}} + \frac{s(s-3)}{2}\frac{q^2}{p^{s-2}} - \dots,$$

où le nombre des termes doit être $\frac{s+1}{2}$ ou $\frac{s}{2}+1$.

Troisième solution du Problème V.

60. Comme l'équation qui détermine β en α est du second degré, et que les termes donnés de la Table du n° 6 sont ceux qui forment le premier rang horizontal et le premier rang vertical, on aura la solution tout à la fois la plus simple et la plus directe par la méthode de l'Article III (31), en convertissant la quantité $\alpha^x\beta^t$ en une série finie de la forme suivante

$$\alpha^x\beta^t = V + V'\alpha + V''\alpha^2 + V'''\alpha^3 + \dots + {}_1V\beta + {}_{11}V\beta^2 + {}_{111}V\beta^3 + \dots;$$

car alors on aura sur-le-champ (33)

$$y_{x,t} = \mathrm{V} y_{0,0} + \mathrm{V}' y_{1,0} + \mathrm{V}'' y_{2,0} + \mathrm{V}''' y_{3,0} + \dots$$
$$+ {}_{,}\mathrm{V} y_{0,1} + {}_{,,}\mathrm{V} y_{0,2} + {}_{,,,}\mathrm{V} y_{0,3} + \dots .$$

Et comme les conditions du Problème demandent que $y_{x,0} = 1$, x étant $= 0, 1, 2, \dots$, et que $y_{0,t} = 0$, t étant $= 1, 2, 3, \dots$, on aura dans le cas du Problème proposé

$$y_{x,t} = \mathrm{V} + \mathrm{V}' + \mathrm{V}'' + \mathrm{V}''' + \dots .$$

Ainsi la difficulté se réduit à trouver la somme des coefficients V, V′, V″, ... de la première partie de l'expression de $\alpha^x \beta^t$.

Pour cela je substitue à la place de α sa valeur en β dans la quantité $\alpha^x \beta^t$; j'ai, comme dans le n° 59,

$$\alpha^x \beta^t = (p^x \beta^{t-x} + q^x \beta^{t+x}) + x\,pq\,(p^{x-2}\beta^{t+2-x} + q^{x-2}\beta^{t-2+x})$$
$$+ \frac{x(x-1)}{2} p^2 q^2 (p^{x-4}\beta^{t+4-x} + q^{x-4}\beta^{t-4+x}) + \dots .$$

Lorsque $x < t$, cette formule ne contiendra que des puissances positives de t, et formera par conséquent la seconde partie de l'expression cherchée de $\alpha^x \beta^t$, la première devenant alors toute nulle; ce qui donnera par conséquent $y_{x,t} = 0$, comme cela doit être lorsque le nombre des coups restants est moindre que le nombre t. Mais, dans le cas où $x > t$, la formule précédente renferme nécessairement des puissances négatives de β, qu'il faudra éliminer de la manière suivante.

Si l'on élève successivement au carré, au cube, etc., l'équation

$$\alpha = \frac{p}{\beta} + q\beta,$$

on en pourra tirer les valeurs de

$$\frac{p}{\beta} + q\beta, \quad \frac{p^2}{\beta^2} + q^2, \quad \frac{p^3}{\beta^3} + q^3\beta^3, \dots$$

en α, et l'on aura, en général, par les formules déjà connues,

$$\frac{p^s}{\beta^s} + q^s\beta^s = \alpha^s - s\,pq\,\alpha^{s-2} + \frac{s(s-3)}{2} p^2 q^2 \alpha^{s-4} + \frac{s(s-4)(s-5)}{2.3} p^3 q^3 \alpha^{s-6} - \dots ,$$

en ne continuant cette série que tant que les puissances de α seront positives.

Désignons, pour plus de simplicité, cette série en α par $\mathrm{A}^{(s)}$; on aura donc

$$\frac{p^s}{\beta^s} + q^s\beta^s = \mathrm{A}^{(s)}; \quad \text{donc} \quad \beta^{-s} = \frac{\mathrm{A}^{(s)}}{p^s} - \left(\frac{q}{p}\right)^s \beta^s.$$

Donc, si par le moyen de cette formule on fait évanouir dans l'expression ci-dessus de $\alpha^x \beta^t$ toutes les puissances négatives de β, elle se réduira à deux suites, l'une composée de puissances positives de α, et l'autre composée de puissances positives de β; ainsi elle aura la forme demandée.

Comme pour notre objet il suffit de connaître la première suite, on considérera uniquement les puissances négatives de β qui entrent dans l'expression de $\alpha^x \beta^t$, et faisant, pour plus de simplicité,

$$t = x - u,$$

on aura cette formule

$$p^x \beta^{-u} + x\,pq \times p^{x-2}\beta^{-u} + \frac{x(x-1)}{2} p^2 q^2 \times p^{x-4}\beta^{t-u} + \dots ,$$

en ne prenant qu'autant de termes qu'il y a d'unités dans $\frac{u+1}{2}$ ou dans $\frac{u}{2} + 1$.

Ensuite on mettra à la place de chaque puissance négative β^{-s} sa valeur en α, $\frac{\mathrm{A}^{(s)}}{p^s}$, en négligeant les puissances positives de β; par ce moyen on aura, pour la première partie de l'expression demandée de $\alpha^x \beta^t$, la formule

$$p^t \left[\mathrm{A}^{(u)} + x\,pq\,\mathrm{A}^{(u-2)} + \frac{x(x-1)}{2} p^2 q^2 \mathrm{A}^{(u-4)} + \dots \right],$$

dans laquelle il n'y aura plus qu'à supposer $\alpha = 1$ pour avoir la valeur cherchée de $y_{x,t}$.

Or, puisque dans notre cas $q = 1 - p$ (58), il est clair que $\beta = 1$ donne $\alpha = 1$ dans l'équation

$$\alpha = \frac{p}{\beta} + q\beta;$$

donc aussi dans l'équation qui en est dérivée

$$\frac{p^i}{\beta^i} + q^i\beta^i = \mathrm{A}^{(i)},$$

en faisant $\beta = 1$, la quantité α contenue dans $\mathrm{A}^{(i)}$ deviendra $= 1$; donc on aura, lorsque $\alpha = 1$,

$$\mathrm{A}^{(i)} = p^i + q^i;$$

donc, faisant cette substitution et remettant $x - t$ à la place de u, on aura

$$y_{x,t} = p^t\left[(p^{x-t} + q^{x-t}) + x\,pq\,(p^{x-t-2} + q^{x-t-2}) + \frac{x(x-1)}{2}\,p^2q^2(p^{x-t-4} + q^{x-t-4}) + \ldots\right]$$

en ne continuant cette série que tant que l'exposant des quantités

$$p^{x-t-\ldots} + q^{x-t-\ldots}$$

sera positif ou zéro, et en ayant soin, dans ce dernier cas, de prendre 1 à la place de $p^0 + q^0$, parce que $\mathrm{A}^{(i)} = 1$.

Cette solution est la même que la première solution de Moivre (page 209).

Problème VI.

61. *Supposant, comme dans le Problème précédent, que la probabilité d'amener un événement donné à chaque coup soit p; un joueur parie qu'en a coups ou moins il amènera cet événement un nombre de fois tel, que ce nombre sera ou plus grand de b que le nombre des fois où il n'amènera pas le même événement, ou bien moindre de c que ce dernier nombre.*

Soit $y_{x,t}$ le sort du joueur lorsqu'il n'a plus que x coups à jouer, et que la différence entre le nombre des fois où l'événement donné est déjà arrivé et le nombre des fois où cet événement n'est pas arrivé est exprimée par $t - c$; il est clair qu'au commencement où $x = a$ on aura $t - c = 0$, par conséquent $t = c$; de sorte que le sort cherché sera $y_{a,c}$.

Si l'on suppose maintenant que l'on joue un coup, on trouvera l'équation

$$y_{x,t} = p\,y_{x-1,t+1} + (1-p)\,y_{x-1,t-1},$$

qui est, comme l'on voit, semblable à celle du Problème précédent, avec cette seule différence que p est ici à la place de $1 - p$; ce qui vient de ce qu'ici le nombre t n'exprime pas la même chose que dans le Problème précédent.

Or, d'après les conditions du Problème, il est aisé de voir que le joueur doit gagner lorsque $t - c = b$ et lorsque $t - c = -c$, quel que soit x, ce qui donne $t = b + c$ ou $= 0$, et par conséquent $y_{x,0} = 1$, $y_{x,b+c} = 1$, x étant positif ou zéro.

Ensuite on voit que le joueur perdra lorsque x étant nul, $t - c$ sera compris entre les limites b et $-c$, c'est-à-dire que t sera entre les limites 0 et $b + c$; donc on aura $y_{0,t} = 0$, t étant $1, 2, 3, \ldots, b + c - 1$.

Ainsi les termes donnés de la Table du n° 6 sont, dans ce cas, ceux qui forment le premier rang horizontal, ensuite ceux qui forment le premier rang vertical jusqu'au $(b+c+1)^{ième}$ terme seulement, et enfin ceux qui forment le $(b+c+1)^{ième}$ rang horizontal; de sorte que la première ligne des termes donnés est droite et horizontale, et que la seconde est composée de deux droites, l'une verticale et finie, l'autre horizontale et indéfinie; ce qui peut servir d'exemple de ce qu'on a observé dans le n° 39.

Puis donc que l'équation différentielle est de la même forme que celle du Problème précédent, on pourra employer les mêmes moyens pour l'intégrer; mais je remarque d'abord que la première solution conduisant à une expression générale de $y_{x,t}$ composée d'un nombre infini de termes,

ne saurait s'appliquer commodément au cas présent. On prendra donc d'abord la seconde solution, et l'on aura en changeant seulement p en q et q en p (59)

$$\begin{aligned} y_{x,t} = {} & [q^x f(t-x) + p^x f(t+x)] \\ & + x\,pq\,[q^{x-2} f(t+2-x) + p^{x-2} f(t-2+x)] \\ & + \frac{x(x-1)}{2} p^2 q^2 [q^{x-4} f(t+4-x) + p^{x-4} f(t-4+x)] + \ldots, \end{aligned}$$

cette formule ne devant être continuée que jusqu'aux termes qui auront pour coefficient

$$\frac{x(x-1)\ldots\left(\frac{x+1}{2}\right)}{1.2\ldots} \quad \text{ou} \quad \frac{x(x-1)\ldots\left(\frac{x}{2}+1\right)}{1.2\ldots},$$

et ayant soin de ne prendre que la moitié de ce coefficient dans le cas de x pair.

Il ne s'agira donc plus que de déterminer convenablement, d'après les conditions du Problème, les fonctions marquées par la caractéristique f. Pour cet effet, je ferai d'abord $x = 0$, ce qui donnera $y_{0,t} = f(t)$; donc, puisqu'on doit avoir $y_{0,t} = 0$ tant que $t = 1, 2, \ldots, b+c-1$, il s'ensuit qu'on aura, en général, $f(s) = 0$, s étant $= 1, 2, 3, \ldots, b+c-1$.

Ensuite nous ferons $t = 0$, auquel cas on doit avoir, comme dans le Problème V, $y_{x,0} = 1$, quel que soit x; faisant donc successivement $x = 0, 1, 2, \ldots$, j'aurai, en général, comme dans la solution du n° 59, en changeant seulement p en q et *vice versâ*,

$$q^s f(-s) + p^s f(s) = 1 - spq + \frac{s(s-3)}{2} p^2 q^2 - \frac{s(s-4)(s-5)}{2.3} p^3 q^3 + \ldots,$$

en ne prenant dans cette série que $\frac{s+1}{2}$ ou $\frac{s}{2}+1$ termes.

Enfin je ferai $t = b+c = n$, et comme on doit avoir alors aussi $y_{x,n} = 1$, quel que soit x, j'en tirerai de la même manière la formule générale

$$q^s f(n-s) + p^s f(n+s) = 1 - spq + \frac{s(s-3)}{2} p^2 q^2 - \frac{s(s-4)(s-5)}{2.3} p^3 q^3 + \ldots,$$

ou bien

$$q^s f(n-s) + p^s f(n+s) = q^s f(-s) + p^s f(s).$$

Par le moyen de ces formules, en faisant successivement $s = 0, 1, 2, \ldots$, on pourra trouver toutes les valeurs de la fonction inconnue qui entre dans l'expression générale ci-dessus de $y_{x,t}$.

Mais on peut simplifier beaucoup cette solution par la substitution de $1 - z_{x,t}$ à la place de $y_{x,t}$. Car on aura d'abord l'équation différentielle

$$z_{x,t} = p\,z_{x-1,t+1} + (1-p)\,z_{x-1,t-1},$$

qui est de la même forme que l'équation en $y_{x,t}$; par conséquent on aura aussi, en général, en employant la caractéristique φ, pour désigner une fonction arbitraire,

$$\begin{aligned} z_{x,t} = {} & [q^x \varphi(t-x) + p^x \varphi(t+x)] + x\,pq\,[q^{x-2} \varphi(t+2-x) + p^{x-2} \varphi(t-2+x)] \\ & + \frac{x(x-1)}{2} p^2 q^2 [q^{x-4} \varphi(t+4-x) + p^{x-4} \varphi(t-4+x)] + \ldots. \end{aligned}$$

Maintenant, comme en faisant $x = 0$ on doit avoir $y_{0,t} = 0$, tant que t est entre les limites 0 et $b+c$, on aura donc $z_{0,t} = 1$, t étant $= 1, 2, 3, \ldots, b+c-1$; et comme en faisant $t = 0$ et $t = b+c$, on doit avoir $y_{x,0} = 1$ et $y_{x,b+c} = 1$, x étant positif ou zéro, il s'ensuit qu'on aura $z_{x,0} = 0$ et $z_{x,b+c} = 0$, x étant $0, 1, 2, \ldots$.

Donc : 1° on aura, en faisant $x = 0$, $\varphi(t) = 1$; donc, en général, $\varphi(s) = 1$ pour toutes ces valeurs de s, savoir $s = 1, 2, 3, \ldots, b+c-1$; 2° en faisant $t = 0$, et x successivement $0, 1, 2, \ldots$, on trouvera, en général,

$$q^s \varphi(-s) + p^s \varphi(s) = 0,$$

s étant $0, 1, 2, 3, \ldots$; 3° en faisant $t = b+c$, et $x = 0, 1, 2, \ldots$, on trouvera pareillement

$$q^s \varphi(b+c-s) + p^s \varphi(b+c+s) = 0,$$

s étant aussi $= 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Donc enfin, si pour plus de simplicité on met l'expression de $z_{x,t}$ sous la forme

$$z_{x,t} = p^t\varphi(x+t) + xp^{t-1}q\varphi(x+t-2) + \frac{x(x-1)}{2}p^{t-2}q^2\varphi(x+t-4) + \ldots,$$

qu'ensuite on y fasse $x=a$, $t=c$, et qu'on remette $1-p$ à la place de q, on trouvera, pour la valeur cherchée de $y_{a,c} = 1 - z_{a,c}$, c'est-à-dire pour le sort du joueur, la formule suivante

$$1 - p^a\varphi(a+c) - ap^{a-1}(1-p)\varphi(a+c-2) - \frac{a(a-1)}{2}p^{a-2}(1-p)^2\varphi(a+c-4) - \ldots,$$

et l'on déterminera les valeurs de la fonction arbitraire par ces conditions

$$\varphi(s) = 1, \quad s \text{ étant } 1, 2, 3, \ldots, b+c-1,$$

et

$$\left.\begin{aligned} p^s\varphi(s) + (1-p)^s\varphi(-s) &= 0, \\ p^s\varphi(b+c+s) + (1-p)^s\varphi(b+c-s) &= 0, \end{aligned}\right\} s \text{ étant } 0, 1, 2, 3, \ldots \text{ à l'infini.}$$

Soit par exemple

$$a=7, \quad b=2, \quad c=3,$$

on aura la formule

$$1 - p^7\varphi(10) - 7p^6(1-p)\varphi(8) + 21p^5(1-p)^2\varphi(6) - 35p^4(1-p)^3\varphi(4)$$
$$- 35p^3(1-p)^4\varphi(2) - 21p^2(1-p)^5\varphi(0) - 7p(1-p)^6\varphi(-2) - (1-p)^7\varphi(-4);$$

or la condition

$$\varphi(s) = 1$$

donne d'abord

$$\varphi(2) = 1, \quad \varphi(4) = 1;$$

ensuite la condition

$$p^s\varphi(s) + (1-p)^s\varphi(-s) = 0$$

donnera

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(-2) = -\frac{p^2}{(1-p)^2}, \quad \varphi(-4) = -\frac{p^4}{(1-p)^4};$$

enfin la condition

$$p^t\varphi(5+s) + (1-p)^t\varphi(5-s) = 0$$

donnera

$$\varphi(6) = -\frac{1-p}{p}, \quad \varphi(8) = -\frac{(1-p)^2}{p^2}, \quad \varphi(10) = 0.$$

Donc substituant ces valeurs on aura après les réductions

$$1 - 21p^2(1-p)^4 - 13p^4(1-p)^5$$

pour le sort cherché.

Autre solution du Problème VI.

62. Je vais maintenant résoudre le même Problème par la méthode de l'Article III; mais au lieu de s'y prendre comme on a fait dans la troisième solution du Problème précédent (60), où l'on a regardé comme donnés les termes du premier rang horizontal et ceux du premier rang vertical de la Table du n° 6, il sera plus commode ici de supposer donnés les termes des deux premiers rangs horizontaux; ce qui ne demande que de réduire la valeur de β^t à une expression de la forme suivante (25)

$$\beta^t = \mathrm{T} + \mathrm{T}'\alpha + \mathrm{T}''\alpha^2 + \mathrm{T}'''\alpha^3 + \ldots + \mathrm{T}^{(t)}\alpha^t$$
$$+ [{}_1\mathrm{T} + {}_1\mathrm{T}'\alpha + {}_1\mathrm{T}''\alpha^2 + \ldots + {}_1\mathrm{T}^{(t-1)}\alpha^{t-1}]\beta;$$

car alors on aura sur-le-champ (27)

$$y_{x,t} = \mathrm{T}y_{x,0} + \mathrm{T}'y_{x+1,0} + \mathrm{T}''y_{x+2,0} + \mathrm{T}'''y_{x+3,0} + \ldots + \mathrm{T}^{(t)}y_{x+t,0}$$
$$+ {}_1\mathrm{T}y_{x,1} + {}_1\mathrm{T}'y_{x+1,1} + {}_1\mathrm{T}''y_{x+2,1} + \ldots + {}_1\mathrm{T}^{(t-1)}y_{x+t-1,1}.$$

Or comme la quantité β doit être déterminée (58, 61) par l'équation

$$q - \alpha\beta + p\beta^2 = 0,$$

dont les deux racines sont

$$\beta = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4pq}}{2p},$$

si l'on désigne ces deux racines par β' et β'', et qu'on fasse, pour abréger,

$$A = T + T'\alpha + T''\alpha^2 + T'''\alpha^3 + \ldots + T^{(t)}\alpha^t,$$
$$_{,}A = {}_{,}T + {}_{,}T'\alpha + {}_{,}T''\alpha^2 + \ldots + {}_{,}T^{(t-1)}\alpha^{t-1},$$

on aura (**28**)

$$\beta'^t = A + {}_{,}A\beta', \quad \beta''^t = A + {}_{,}A\beta'',$$

d'où l'on tire

$$A = \frac{\beta'\beta''(\beta'^{t-1} - \beta''^{t-1})}{\beta'' - \beta'}, \quad {}_{,}A = \frac{\beta'^t - \beta''^t}{\beta' - \beta''};$$

savoir

$$A = -q\,\frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4pq})^{t-1} - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4pq})^{t-1}}{(2p)^{t-1}\sqrt{\alpha^2 - 4pq}},$$

$$_{,}A = \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4pq})^t - (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4pq})^t}{(2p)^t\sqrt{\alpha^2 - 4pq}}.$$

Ainsi il n'y aura qu'à développer ces puissances $t^{ièmes}$ et $(t-1)^{ièmes}$ et ordonner ensuite les termes par rapport à α, on aura les valeurs des coefficients T, T', T'',..., ainsi que ceux de ${}_{,}T$, ${}_{,}T'$, ${}_{,}T''$,..., en p, q et t; mais on n'aura pas même besoin de connaître ces valeurs, comme on va le voir.

En effet, comme les conditions du Problème demandent que $y_{x,0} = 1$, x étant positif quelconque ou zéro (**61**), si l'on fait $y_{x,t} = 1 - u_x$, il est clair que l'expression de $y_{x,t}$ deviendra

$$y_{x,t} = A + {}_{,}A - {}_{,}T u_x - {}_{,}T' u_{x+1} - {}_{,}T'' u_{x+2} - \ldots - {}_{,}T^{(t-1)} u_{x+t-1},$$

en supposant que dans les quantités A et ${}_{,}A$ on ait fait $\alpha = 1$; or

$$\beta'^t = A + {}_{,}A\beta,$$

et, à cause de $q = 1 - p$, si l'on fait $\beta = 1$, on a $\alpha = 1$ d'après l'équation

$$q - \alpha\beta + p\beta^2 = 0;$$

donc

$$1 = A + {}_{,}A$$

lorsque $\alpha = 1$; donc

$$y_{x,t} = 1 - {}_{,}T u_x - {}_{,}T' u_{x+1} - {}_{,}T'' u_{x+2} - \ldots - {}_{,}T^{(t-1)} u_{x+t-1}.$$

Ensuite il faut aussi, par les conditions du Problème, que $y_{x,b+c} = 1$, x étant positif quelconque ou zéro; donc si l'on dénote par B, B', B'',... les valeurs de ${}_{,}T$, ${}_{,}T'$, ${}_{,}T''$,... lorsque $t = b + c$, on aura pour la détermination des quantités u_x l'équation

$$B u_x + B' u_{x+1} + B'' u_{x+2} + \ldots + B^{(t-1)} u_{x+b+c-1} = 0,$$

d'où l'on voit que ces quantités forment une suite récurrente simple de l'ordre $b + c - 1$; en sorte que si l'on fait l'équation

$$(a) \qquad B + B'\alpha + B''\alpha^2 + B'''\alpha^3 + \ldots + B^{(b+c-1)}\alpha^{b+c-1} = 0,$$

et qu'on dénote par α', α'', α''',... les différentes racines de cette équation, on aura, en général (Article I),

$$u_x = M\alpha'^x + N\alpha''^x + P\alpha'''^x + \ldots,$$

M, N, P,... étant des constantes indéterminées.

On fera donc cette substitution dans l'expression ci-dessus de $y_{x,t}$, et comme l'on a, en général,

$$_{,}A = {}_{,}T + {}_{,}T'\alpha + {}_{,}T''\alpha^2 + \ldots$$

si l'on dénote par ${}_{,}A'$, ${}_{,}A''$, ${}_{,}A'''$,... les valeurs de ${}_{,}A$ qui répondent à $\alpha = \alpha'$, α'', α''',..., on aura

$$(b) \qquad y_{x,t} = 1 - M\,{}_{,}A'\alpha'^x - N\,{}_{,}A''\alpha''^x - P\,{}_{,}A'''\alpha'''^x - \ldots,$$

et il ne restera plus qu'à déterminer les $b + c - 1$ constantes au moyen de la dernière condition du Problème qui est $y_{0,t} = 0$, t étant 1, 2, 3,..., $b + c - 1$; de sorte qu'il faudra que ces constantes soient telles, que l'on ait (x étant $= 0$)

$$(c) \qquad M\,{}_{,}A' + N\,{}_{,}A'' + P\,{}_{,}A''' + \ldots = 1,$$

en supposant successivement $t = 1, 2, 3, \ldots, b + c - 1$ dans les quantités ${}_{,}A', {}_{,}A'', {}_{,}A''', \ldots$.

Or il est visible que l'équation (a) ci-dessus n'est autre chose que celle-ci ${}_{,}A = 0$ en y faisant $t = b + c$; de plus, si l'on fait

$$\alpha = 2\sqrt{pq}\cos\theta,$$

il est clair que l'expression de ${}_{,}A$ trouvée plus haut deviendra

$${}_{,}A = \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^t \frac{\sin t\theta}{\sqrt{pq}\sin\theta};$$

donc, faisant $t = b + c$, l'équation dont il s'agit deviendra

$$\frac{\sin(b+c)\theta}{\sin\theta} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\theta = \frac{\lambda\pi}{b+c},$$

π étant l'angle de 180 degrés et λ un nombre quelconque de la suite $1, 2, 3, \ldots, b + c - 1$. On connaîtra par là les $b + c - 1$ racines $\alpha', \alpha'', \alpha''', \ldots$, ainsi que les quantités correspondantes ${}_{,}A', {}_{,}A'', {}_{,}A''', \ldots$; et l'on aura, en général,

$$\alpha^{(\lambda)} = 2\sqrt{pq}\cos\frac{\lambda\pi}{b+c}, \quad {}_{,}A^{(\lambda)} = \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^t \frac{\sin\frac{\lambda t\pi}{b+c}}{\sqrt{pq}\sin\frac{\lambda\pi}{b+c}}.$$

Substituant donc ces valeurs dans la formule (b) et faisant pour plus de simplicité

$$b + c = n$$

et

$$\frac{M}{\sqrt{pq}\sin\frac{\pi}{n}} = (1), \quad \frac{N}{\sqrt{pq}\sin\frac{2\pi}{n}} = (2), \ldots,$$

on aura

$$y_{x,t} = 1 - (2\sqrt{pq})^x \left(\sqrt{\frac{q}{p}}\right)^t \times \left[(1)\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^x \sin\frac{t\pi}{n} + (2)\left(\cos\frac{2\pi}{n}\right)^x \sin\frac{2t\pi}{n} + (3)\left(\cos\frac{3\pi}{n}\right)^x \sin\frac{3t\pi}{n} + \ldots + (n-1)\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)^x \sin\frac{(n-1)t\pi}{n}\right];$$

et l'équation (c) par laquelle il faudra déterminer les constantes $(1), (2), (3), \ldots, (n-1)$ sera

$$(1)\sin\frac{t\pi}{n} + (2)\sin\frac{2t\pi}{n} + \ldots + (n-1)\sin\frac{(n-1)t\pi}{n} = \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^t,$$

laquelle devra avoir lieu en faisant successivement $t = 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

Pour tirer de là la valeur de chacune de ces constantes, il n'y aura qu'à multiplier toute l'équation par le sinus qui a pour coefficient la constante qu'on veut déterminer, et ajouter ensuite ensemble les $n-1$ équations particulières qui répondent à $t = 1, 2, 3, \ldots, n-1$; par ce moyen toutes les autres constantes disparaîtront, et la constante cherchée se trouvera multipliée par $\frac{2}{n}$; c'est de quoi on peut s'assurer par les formules connues pour la sommation des suites formées de sinus ou de cosinus.

Ainsi pour avoir, en général, la valeur de (μ) on multipliera l'équation par $\sin\frac{\mu t\pi}{n}$, et, opérant comme on vient de le dire, il viendra

$$\frac{n}{2}(\mu) = \sqrt{\frac{p}{q}}\sin\frac{\mu\pi}{n} + \frac{p}{q}\sin\frac{2\mu\pi}{n} + \ldots + \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{n-1}\sin\frac{(n-1)\mu\pi}{n}.$$

Or le second membre de cette équation se réduit par les formules connues à

$$\frac{\sqrt{\frac{p}{q}}\left[1 \pm \left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^n\right]\sin\frac{\mu\pi}{n}}{1 - 2\sqrt{\frac{p}{q}}\cos\frac{\mu\pi}{n} + \frac{p}{q}},$$

le signe supérieur étant pour le cas de μ impair, et l'inférieur pour celui de μ pair.

On aura donc, en général,

$$(\mu)=\frac{\frac{2}{n}\sqrt{\frac{p}{q}}\left[1\pm\left(\sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{n}\right]\sin\frac{\mu\pi}{n}}{1-2\sqrt{\frac{p}{q}}\cos\frac{\mu\pi}{n}+\frac{p}{q}},$$

d'où, en faisant successivement $\mu=1, 2, 3,\ldots, n-1$, on tirera les valeurs des constantes (1), (2), (3),..., qu'on substituera dans l'expression ci-dessus de $y_{x,t}$; ensuite il n'y aura plus qu'à faire $x=a$ et $t=c$ pour avoir la valeur du sort demandé.

Remarque.

63. Le Problème précédent revient à celui qui concerne la durée des parties que l'on joue en rabattant, et dont MM. de Monmort, Bernoulli et Moivre se sont occupés. (*Voyez* l'Ouvrage de Monmort, page 268, deuxième édition; celui de Moivre, page 191, troisième édition.)

On propose ordinairement ce Problème ainsi : *Deux joueurs ayant chacun un certain nombre de jetons jouent ensemble à cette condition que celui qui perdra une partie donnera un jeton à l'autre; on demande combien il y a à parier que le jeu, qui peut durer à l'infini, sera fini en un certain nombre de parties au plus, en sorte que l'un des deux joueurs aura gagné tous les jetons de l'autre.* Il est facile de comprendre que si l'on dénote par b et c les nombres des jetons des deux joueurs, par p et $1-p$ ou q les probabilités respectives que ces joueurs ont pour gagner chaque partie, et par a le nombre des parties dans lequel on parie que le jeu finira, il est facile, dis-je, de comprendre que l'on aura exactement le cas de notre Problème VI. Aussi des deux solutions que nous venons de donner de ce Problème, la première répond à la méthode du Problème LXIII, et la seconde répond à celle du Problème LXVIII de l'Ouvrage cité de Moivre; mais nos solutions ont l'avantage d'être plus directes, plus générales et plus analytiques que celles de cet Auteur.

Le Problème V ci-dessus peut aussi se rapporter à la durée des parties; mais il faut supposer que l'un des joueurs ayant d'abord b jetons, l'autre n'en ait aucun, et que le jeu ne finisse que lorsque celui-ci aura gagné les b jetons de son adversaire.

Problème VII.

64. *Soit un nombre a d'urnes rangées de suite, et dont chacune contienne n billets en partie blancs et en partie noirs à volonté; que l'on tire à la fois de chacune de ces urnes un billet au hasard et que l'on mette ensuite le billet tiré de chaque urne dans l'urne suivante, en observant de mettre dans la première urne le billet tiré de la dernière; on demande quel sera probablement le nombre des billets noirs dans chaque urne après un nombre b de pareils tirages.*

Soit $y_{x,t}$ le nombre des billets noirs qu'il y aura probablement dans l'urne $x^{ième}$ après t tirages; il est facile de voir qu'après un nouveau tirage ce nombre sera probablement augmenté de $\frac{y_{x-1,t}}{n}$, et diminué de $\frac{y_{x,t}}{n}$, de sorte que l'on aura l'équation

$$y_{x,t+1}=y_{x,t}+\frac{1}{n}y_{x-1,t}-\frac{1}{n}y_{x,t},$$

qui se réduit à cette forme

$$y_{x,t}+(n-1)y_{x+1,t}-ny_{x+1,t+1}=0.$$

Ici les quantités données sont les valeurs de $y_{x,t}$ lorsque $t=0$ et que $x=1, 2, 3,\ldots, n$, lesquelles indiquent les nombres des billets noirs qu'il y a dans chaque urne avant le premier tirage; de sorte qu'une des conditions du Problème est que les termes $y_{x,0}$ soient tous donnés depuis $x=0$ jusqu'à $x=n$ inclusivement; l'autre condition à laquelle il faut satisfaire est que les billets tirés de la dernière urne rentrent toujours dans la première; et il est clair que pour cela il n'y a qu'à supposer que la $a^{ième}$ urne précède la première, c'est-à-dire que cette urne soit aussi

la $o^{ième}$; en sorte que la valeur de $y_{x,t}$ qui répond à $x=a$ soit toujours identique avec celle qui répondra à $x=0$; ce qui donnera cette autre condition $y_{a,t}=y_{0,t}$, quel que soit t.

Maintenant si l'on rapporte l'équation différentielle trouvée ci-dessus à la formule (F) du n° 7, on a

$$A=1,\quad B=n-1,\quad B'=0,\quad C'=-n;$$

ce qui rentre dans le second cas du n° 11; en sorte que, à cause de

$$p=-\frac{B}{C'}=1-\frac{1}{n},\quad q=\frac{A}{B}=\frac{1}{n-1},$$

on aura sur-le-champ

$$y_{x,t}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^t\left[y_{x,0}+\frac{t}{n-1}y_{x-1,0}+\frac{t(t-1)}{2(n-1)^2}y_{x-2,0}+\cdots\right],$$

le nombre des termes étant $t+1$.

Or comme on doit avoir $y_{0,t}=y_{a,t}$, quel que soit t, il est visible que pour satisfaire à cette condition, il faudra que l'on ait

$$y_{0,0}=y_{a,0},\quad y_{-1,0}=y_{a-1,0},\quad y_{-2,0}=y_{a-2,0},\ldots,$$

et, en général,

$$y_{-s,0}=y_{a-s,0},$$

s étant un nombre positif quelconque ou zéro. Ainsi, comme les valeurs de $y_{x,0}$ sont supposées connues depuis $x=1$ jusqu'à $x=a$ inclusivement, on connaîtra toutes les valeurs de $y_{x,0}$ qui peuvent entrer dans l'expression précédente de $y_{x,t}$.

Corollaire.

65. Si l'on ne voulait pas que les billets tirés de la dernière urne rentrassent dans la première, mais qu'on mît toujours dans celle-ci un billet blanc après chaque extraction, il n'y aurait alors qu'à supposer que l'urne $o^{ième}$ qui est censée précéder la première urne, ne contînt que des billets blancs, ce qui donnerait $y_{0,t}=0$, t étant quelconque; et l'on verrait aisément que pour satisfaire à cette condition, il faudrait supposer

$$y_{0,0}=0,\quad y_{-1,0}=0,\quad y_{-2,0}=0,\ldots,$$

et, en général,

$$y_{-s,0}=0,$$

s étant un nombre quelconque positif ou zéro. Ainsi il ne faudrait, dans ce cas, prendre que x termes de l'expression générale de $y_{x,t}$, en négligeant tous les suivants.

En général, si l'on suppose que chaque billet tiré de la première urne soit remplacé par un billet tiré au hasard suivant une loi quelconque qui varie, si l'on veut, à chaque tirage, de manière que la probabilité que ce billet soit noir soit une fonction quelconque donnée de t que nous désignerons par (t), on considérera que, comme la probabilité que le billet qui entre dans l'urne $x^{ième}$ au $t^{ième}$ tirage soit noir est représentée par $\frac{y_{x-1,t}}{n}$ dans la solution précédente, la probabilité (t) qui répond à la première urne pour laquelle $x=1$ sera $\frac{y_{0,t}}{n}$; de sorte qu'on aura $y_{0,t}=n(t)$; par conséquent on connaîtra le premier rang vertical de la Table du n° 6; et de là on pourra, par les formules du n° 11, déduire les valeurs de $y_{-s,0}$.

SUR L'ALTÉRATION

DES

MOYENS MOUVEMENTS DES PLANÈTES.

SUR L'ALTÉRATION

DES

MOYENS MOUVEMENTS DES PLANÈTES (*).

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1776.)

Une des déterminations les plus importantes et en même temps les plus difficiles de la théorie des planètes est celle de leurs moyens mouvements ou de la durée de leurs révolutions. Les Astronomes, en comparant les observations modernes avec les plus anciennes dont la mémoire nous ait été conservée, ont cru remarquer que les mouvements moyens de Saturne, de Jupiter et de la Lune n'étaient pas uniformes, que celui de Saturne paraissait se ralentir de siècle en siècle, et que ceux de Jupiter et de la Lune paraissaient au contraire sujets à des accélérations continuelles; ils ont en conséquence introduit dans les Tables de ces planètes des équations séculaires qui doivent s'appliquer à leurs moyens mouvements supposés uniformes.

L'équation séculaire de Saturne est, d'après les Tables de Halley, de $1' 24''$ pour le premier siècle, et augmente ensuite comme les carrés des temps; celle de Jupiter est seulement de $36''$ pour le premier siècle, et

(*) Lu le 24 octobre 1776.

augmente de même comme les carrés des temps; enfin l'équation séculaire de la Lune est, suivant les dernières Tables de Mayer, de 9″ pour le premier siècle, et croit aussi comme les carrés des temps.

Quelques Astronomes avaient cru apercevoir aussi une accélération continuelle dans le mouvement moyen de la Terre; mais soit qu'on n'ait pas regardé cette altération comme suffisamment constatée, ou que la quantité en soit assez petite pour pouvoir être négligée, il paraît qu'on n'a pas encore pensé à y avoir égard dans les Tables du Soleil.

A l'égard des mouvements moyens des autres planètes, on n'y a jusqu'à présent découvert aucune altération sensible; du moins il n'en a jamais été question, que je sache, dans les Tables de Mars, de Vénus et de Mercure.

Comme le système de la gravitation universelle suffit pour expliquer les inégalités périodiques des planètes, il est naturel de regarder aussi cette même gravitation comme la cause de leurs inégalités séculaires; mais il est infiniment plus difficile d'en déduire ces dernières inégalités que les premières, tant à cause de leur petitesse, que parce que le calcul le plus épineux et le plus délicat est nécessaire pour assigner et distinguer dans les équations différentielles tous les différents termes qui peuvent les produire. Aussi voyons-nous que les Géomètres qui se sont occupés jusqu'à présent de cet objet sont parvenus à des résultats différents.

M. Euler, dans sa première Pièce sur les irrégularités de Jupiter et de Saturne, n'a trouvé aucune équation séculaire; mais, dans sa seconde Pièce sur le même sujet, il trouve une équation séculaire égale pour l'une et l'autre planète et de 2′24″ pour le premier siècle, à compter de 1700; ce qui ne s'accorde guère avec les observations.

Dans l'Essai que j'ai donné sur cette matière dans le tome III des *Mémoires de Turin*, je suis arrivé à des résultats plus conformes aux observations, et j'ai trouvé pour Saturne une équation séculaire soustractive du moyen mouvement, dont la quantité est 14″,221 au bout de la première révolution comptée de 1750, et pour Jupiter une équation séculaire additive à son moyen mouvement et qui monte à 2″,740 pendant la

première révolution comptée depuis la même époque (*). Mais M. de Laplace ayant poussé l'approximation plus loin que je n'avais fait, et ayant calculé plus exactement les différents termes qui pouvaient produire des inégalités croissantes comme les carrés des temps dans les mouvements de Jupiter et de Saturne, a reconnu le premier que ces termes se compensent et se détruisent ou entièrement ou presque entièrement, et ne laissent par conséquent qu'un résultat nul ou trop petit pour qu'on doive y avoir égard. Et comme cette compensation est indépendante des valeurs particulières des éléments des orbites de Jupiter et de Saturne, on en peut conclure, en général, que l'attraction réciproque des planètes ne saurait altérer sensiblement leurs moyens mouvements, du moins tant que leurs orbites sont supposées à très-peu près circulaires, et leurs masses très-petites vis-à-vis de celle du Soleil, ce qui est le cas de toutes les planètes de notre système.

Quant à la Lune en particulier, les Géomètres qui ont travaillé sur la théorie de cette planète n'ont jamais rencontré dans l'équation différentielle de son orbite des termes qui puissent donner une équation séculaire dans son mouvement moyen, quelque loin qu'ils aient d'ailleurs porté la précision dans leurs calculs; il restait seulement à examiner si la figure non sphérique de la Terre et de la Lune pourrait avoir quelque influence dans le mouvement moyen de la Lune; c'est ce que j'ai fait dans ma Pièce sur cette question, et j'ai trouvé que les termes qui pourraient produire une accélération dans le mouvement moyen de la Lune se détruisent aussi à très-peu près les uns les autres; résultat analogue à celui de M. de Laplace pour Jupiter et Saturne. D'où l'on peut aussi conclure, en général, que la non-sphéricité des corps célestes ne peut pas non plus produire une altération sensible dans leurs moyens mouvements. Il est vrai que comme on n'est parvenu à ces résultats que par des méthodes d'approximation, on ne doit pas les regarder comme tout à fait rigoureux; cependant, de ce que les termes qui donneraient une équation séculaire se détruisent d'eux-mêmes dans la première approxi-

(*) *Œuvres de Lagrange*, t. I, p. 609.

mation, on est porté à penser qu'il en sera de même des termes provenant des approximations suivantes; mais le calcul nécessaire pour s'en assurer serait si pénible par sa longueur, que personne ne sera jamais tenté de l'entreprendre; d'ailleurs on ne pourrait jamais parvenir, par ce moyen, qu'à des conclusions approchées, et il resterait toujours douteux si la proposition est vraie en toute rigueur. Heureusement j'ai trouvé moyen de la démontrer *à priori*, et sans supposer que les orbites des planètes soient à très-peu près circulaires; c'est ce que je vais développer dans ce Mémoire avec tout le détail dû à l'importance et à la difficulté de la matière.

1. On sait que si un corps se meut autour d'un centre fixe ou regardé comme fixe, en vertu d'une impulsion primitive quelconque et d'une force tendante continuellement vers ce centre, et toujours réciproquement proportionnelle au carré de sa distance au centre, on sait, dis-je, que ce corps doit décrire une ellipse ayant le centre dont il s'agit dans un de ses foyers, de manière que les aires parcourues autour de ce foyer soient proportionnelles au temps, et que la durée de chacune de ses révolutions sera proportionnelle à la racine carrée du cube de la distance moyenne ou du demi-grand axe de l'ellipse divisé par la force centrale absolue. C'est ce que Newton a démontré le premier, et une foule d'Auteurs après lui.

Mais, si à cette force se joignent d'autres forces particulières qui en altèrent la direction et la quantité, alors l'orbite du corps sera d'autant plus différente de l'ellipse qu'il aurait décrite sans ces nouvelles forces, que ces forces mêmes seront considérables vis-à-vis de la force tendante au centre et agissante en raison inverse du carré de la distance. Cependant lorsque les forces perturbatrices sont fort petites par rapport à la force principale, et que par conséquent l'orbite du corps ne doit s'éloigner que très-peu de la figure elliptique, on peut supposer que cette orbite est une véritable ellipse, mais dont les dimensions et la position varient d'un instant à l'autre.

De cette manière les dérangements produits par les forces perturbatrices reviennent à la variation des six éléments de l'orbite elliptique, lesquels sont le grand axe de l'ellipse, l'excentricité, la position du grand axe ou de la ligne des apsides, l'inclinaison du plan de l'ellipse à un autre plan donné, la position de la ligne d'intersection des deux plans ou de la ligne des nœuds, et l'époque du moyen mouvement, c'est-à-dire la valeur de la longitude moyenne pour un temps donné; et la question se réduit à trouver la loi de ces variations, c'est-à-dire les valeurs différentielles des éléments dont il s'agit regardés comme variables. Mais nous n'aurons pas même besoin pour notre objet de connaître les variations de tous ces éléments; car comme dans les orbites invariables la durée des révolutions ne dépend que de la grandeur du grand axe de l'ellipse, il est naturel d'en conclure que dans les orbites variables il n'y a aussi que les variations du grand axe qui puissent influer sur la durée du temps périodique; en effet, quand les variations des éléments sont très-petites, on peut sans erreur sensible imaginer que ces éléments demeurent les mêmes durant chaque révolution, et qu'ils ne changent que d'une révolution à l'autre; et dans cette hypothèse il est visible que les variations du temps périodique ne peuvent venir que de celles du grand axe.

2. Tout se réduit donc à déterminer les variations que doit subir le grand axe de l'orbite elliptique d'un corps mû autour d'un centre fixe, en vertu d'une force réciproquement proportionnelle au carré de la distance, et dérangé en même temps par des forces perturbatrices données et très-petites vis-à-vis de la force principale.

Pour traiter cette question d'une manière directe et générale, je rapporte à chaque instant la position du corps à trois coordonnées rectangles x, y, z, dont je suppose que l'origine soit dans le centre de la force principale; nommant F la valeur de cette force à la distance 1, et r la distance du corps au centre, c'est-à-dire le rayon vecteur de l'orbite, en sorte que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

j'aurai $\frac{F}{r^2}$ pour l'expression générale de cette force, laquelle étant dé-

composée suivant les trois coordonnées x, y, z, donnera ces trois-ci

$$\frac{Fx}{r^3}, \quad \frac{Fy}{r^3}, \quad \frac{Fz}{r^3}.$$

Je suppose de plus que toutes les forces perturbatrices soient réduites à trois dirigées suivant les mêmes coordonnées, et je nomme X, Y, Z ces trois forces résultantes. On aura donc par les premiers principes de la Dynamique, en prenant l'élément du temps dt pour constant, ces trois équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Fx}{r^3} + X = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Fy}{r^3} + Y = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Fz}{r^3} + Z = 0,$$

lesquelles serviront à déterminer le mouvement du corps en vertu des forces $\frac{F}{r^2}$, X, Y, Z.

3. Supposons d'abord que les forces perturbatrices X, Y, Z soient nulles, on aura le cas du mouvement d'un corps attiré vers un centre fixe par une force $\frac{F}{r^2}$; et l'on pourra, par les formules connues, trouver les valeurs des trois coordonnées x, y, z en t; mais nous n'aurons pas même besoin de connaître ces valeurs : il nous suffit de remarquer :

1° Que ces valeurs doivent être les intégrales complètes et finies des trois équations différentio-différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Fx}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Fy}{r^3} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Fz}{r^3} = 0,$$

et qu'elles doivent par conséquent renfermer six constantes arbitraires;

2° Que ces constantes seront précisément les six éléments de l'orbite elliptique dont nous avons parlé plus haut;

3° Que, si l'on différentie les trois intégrales dont il s'agit, on aura

six équations à l'aide desquelles on pourra déterminer les six constantes arbitraires en x, y, z, t, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$; de sorte qu'on aura ainsi six équations différentielles du premier ordre, dont chacune renfermera une constante arbitraire, et sera par conséquent une intégrale première des trois équations différentio-différentielles proposées.

4. Soit donc

$$V = k$$

une de ces équations du premier ordre, V étant une fonction donnée de x, y, z, t, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et k une constante arbitraire; on aura par la différentiation

$$dV = 0,$$

équation différentielle du second ordre qui ne contenant plus de constantes arbitraires devra être identique avec les équations différentio-différentielles proposées; d'où il s'ensuit que si dans l'expression de dV on substitue à la place des différentielles secondes

$$d\frac{dx}{dt}, \quad d\frac{dy}{dt}, \quad d\frac{dz}{dt},$$

leurs valeurs tirées des équations dont il s'agit, et qui sont

$$-\frac{Fx}{r^3}dt, \quad -\frac{Fy}{r^3}dt, \quad -\frac{Fz}{r^3}dt,$$

cette expression devra devenir identiquement nulle, en sorte qu'il faudra que tous ses termes se détruisent entre eux, et indépendamment de toute relation entre les quantités x, y, z, t, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ qui composeront cette expression de dV. Et la même chose aura lieu également à l'égard de chacune des six équations du premier ordre qu'on aura trouvées.

5. Cela posé, si l'on veut maintenant avoir égard aux forces perturbatrices X, Y, Z, il n'y aura qu'à considérer que l'effet de ces forces con-

siste en ce que les valeurs des différentielles secondes

$$d\frac{dx}{dt},\quad d\frac{dy}{dt},\quad d\frac{dz}{dt}$$

sont

$$-\frac{Fx}{r^3}dt-Xdt,\quad -\frac{Fy}{r^3}dt-Ydt,\quad -\frac{Fz}{r^3}dt-Zdt;$$

si donc on substitue ces valeurs dans l'expression de dV du numéro précédent, il arrivera nécessairement que tous les termes de cette expression se détruiront, à l'exception de ceux qui viennent de la substitution des quantités $-Xdt$, $-Ydt$, $-Zdt$ à la place de $d\frac{dx}{dt}$, $d\frac{dy}{dt}$, $d\frac{dz}{dt}$; on aura donc dans ce cas

$$dV=\frac{dV}{d\frac{dx}{dt}}(-Xdt)+\frac{dV}{d\frac{dy}{dt}}(-Ydt)+\frac{dV}{d\frac{dz}{dt}}(-Zdt).$$

Or, dans le cas où les forces perturbatrices étaient nulles, on a eu $V=k$, k étant un des éléments de l'orbite elliptique; donc, si l'on veut que l'effet des forces perturbatrices consiste à faire varier ces éléments, il n'y aura qu'à regarder la quantité k comme variable, ce qui donnera $dV=dk$; donc on aura

$$dk=-\left(\frac{dV}{d\frac{dx}{dt}}X+\frac{dV}{d\frac{dy}{dt}}Y+\frac{dV}{d\frac{dz}{dt}}Z\right)dt,$$

d'où l'on connaîtra les variations de k en vertu des forces X, Y, Z.

Et l'on aura des formules semblables pour les variations de chacun des six éléments de l'orbite du corps supposé elliptique.

6. On voit par là que les six équations différentielles du premier ordre, telles que $V=k$, seront de la même forme, soit que les forces perturbatrices X, Y, Z soient nulles ou non, la seule différence étant dans la valeur des quantités k qui sont constantes dans le premier cas et variables dans le second; donc, si l'on élimine les trois différences premières $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, on aura trois équations finies qui seront encore de la même forme dans les deux cas; d'où l'on doit conclure que les valeurs finies de x, y, z, ainsi que celles de leurs différences premières $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, seront toujours exprimées de la même manière par le temps t et par les six éléments de l'orbite, soit que ces éléments soient constants ou variables; par conséquent on pourra toujours regarder ces éléments comme constants pendant un temps infiniment petit.

7. Appliquons maintenant cette théorie à la recherche des variations du grand axe de l'orbite elliptique. Pour cela il suffit de se rappeler que si l'on nomme p le demi-paramètre de l'ellipse, e son excentricité, r le rayon vecteur partant d'un des foyers, φ l'angle que le rayon r fait avec une ligne fixe, et α l'angle que le grand axe de l'ellipse fait avec la même ligne, en sorte que $\varphi-\alpha$ soit l'angle du rayon vecteur avec le grand axe de l'ellipse, on aura par la nature de l'ellipse l'équation

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\varphi-\alpha)};$$

de plus on aura par les propriétés du mouvement dans l'ellipse

$$r^2d\varphi=dt\sqrt{Fp};$$

or nommant a le demi-axe on a, comme l'on sait,

$$p=a(1-e^2);$$

ainsi l'on aura trois constantes a, e et α, qu'on pourra déterminer à l'aide des trois équations

$$\frac{1}{r}=\frac{1+e\cos(\varphi-\alpha)}{a(1-e^2)},$$

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}=-\frac{e\sin(\varphi-\alpha)}{a(1-e^2)},$$

$$\frac{r^4d\varphi^2}{dt^2}=Fa(1-e^2).$$

La première donne

$$\left[\frac{a(1-e^2)}{r}-1\right]^2=e^2\cos^2(\varphi-\alpha),$$

la seconde donne

$$\left[a(1-e^2)\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right]^2=e^2\sin^2(\varphi-\alpha);$$

donc, ajoutant ces deux équations ensemble, on aura

$$\left[\frac{a(1-e^2)}{r}-1\right]^2+a^2(1-e^2)^2\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2=e^2,$$

ou bien, en développant les termes,

$$a^2(1-e^2)^2\left[\frac{1}{r^2}+\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi}\right)^2\right]-\frac{2a(1-e^2)}{r}+1-e^2=0,$$

c'est-à-dire, en divisant par $1-e^2$,

$$a^2(1-e^2)\left(\frac{1}{r^2}+\frac{dr^2}{r^4d\varphi^2}\right)-\frac{2a}{r}+1=0;$$

mais par la troisième équation on a

$$1-e^2=\frac{r^4d\varphi^2}{\mathrm{F}a\,dt^2};$$

donc, substituant cette valeur, il viendra

$$a\left(\frac{r^2d\varphi^2+dr^2}{\mathrm{F}dt^2}-\frac{2}{r}\right)+1=0;$$

d'où l'on tire cette équation pour la détermination de a

$$\frac{1}{r}-\frac{r^2d\varphi^2+dr^2}{2\mathrm{F}dt^2}=\frac{1}{2a}.$$

Il ne s'agit plus maintenant que de substituer à la place de r et de φ

leurs valeurs en x, y, z; pour cela j'observe que $r^2d\varphi^2+dr^2$ n'est autre chose que le carré du petit espace que le corps parcourt à chaque instant, lequel carré exprimé par les coordonnées rectangles x, y, z est, comme l'on sait, $dx^2+dy^2+dz^2$; d'ailleurs on a

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2};$$

donc on aura l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2\mathrm{F}dt^2}=\frac{1}{2a},$$

laquelle étant comparée à l'équation $\mathrm{V}=k$, du n° 4, donnera

$$\mathrm{V}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{2\mathrm{F}dt^2}\quad\text{et}\quad k=\frac{1}{2a}.$$

Faisant donc varier simplement les quantités $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ dans l'expression de V, on aura

$$\frac{d\mathrm{V}}{d\frac{dx}{dt}}=-\frac{dx}{\mathrm{F}dt},\quad\frac{d\mathrm{V}}{d\frac{dy}{dt}}=-\frac{dy}{\mathrm{F}dt},\quad\frac{d\mathrm{V}}{d\frac{dz}{dt}}=-\frac{dz}{\mathrm{F}dt};$$

donc, substituant ces valeurs dans la formule du n° 5, on aura

$$d\frac{1}{2a}=\frac{\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz}{\mathrm{F}}.$$

8. Voilà donc, comme l'on voit, une formule fort simple pour déterminer les altérations du grand axe $2a$ de l'orbite elliptique d'un corps animé par une force centrale $\frac{\mathrm{F}}{r^2}$, et dérangé par des forces perturbatrices quelconques X, Y, Z.

Pour appliquer cette formule à la solution de la question qui fait l'objet de ce Mémoire, il est clair qu'il faut commencer par déterminer les forces

qui agissent sur chaque planète, tant en vertu de l'attraction du Soleil que de celles des autres planètes.

Pour cela, soit S la masse du Soleil, T celle de la planète dont on cherche le mouvement, T′, T″,... les masses des planètes perturbatrices; on sait que la planète T sera attirée vers le Soleil par une force égale à $\frac{S+T}{r^2}$, r étant sa distance au Soleil, et qu'en vertu de cette force elle décrira autour du Soleil la même orbite que si le Soleil était immobile. On peut donc regarder le Soleil comme fixe par rapport à la planète T, mais il faut alors tenir compte de l'action des planètes T′, T″,... sur le Soleil en transportant l'effet de cette action à la planète T en sens contraire. Ainsi, nommant x, y, z les trois coordonnées rectangles de l'orbite de la planète T autour du Soleil, on aura d'abord $F=S+T$ (n° 2); ensuite, si l'on marque par un trait les quantités qui se rapportent à la planète T′, par deux traits celles qui se rapportent à la planète T″, etc.; qu'enfin on dénote par δ' la distance rectiligne entre les corps T et T′, par δ'' la distance rectiligne entre les corps T et T″, et ainsi du reste, on trouvera :

1° Que la force $\frac{T'}{\delta'^2}$, avec laquelle le corps T′ attire le corps T suivant la direction de la ligne δ', produira ces trois forces suivant la direction des coordonnées x, y, z, savoir

$$\frac{T'(x-x')}{\delta'^3},\quad \frac{T'(y-y')}{\delta'^3},\quad \frac{T'(z-z')}{\delta'^3};$$

2° Que la force $\frac{T'}{r'^2}$, avec laquelle la planète T′ attire le Soleil S, étant transportée en sens contraire à la planète T, produira, encore ces trois autres forces suivant les mêmes directions, savoir

$$\frac{T'x'}{r'^3},\quad \frac{T'y'}{r'^3},\quad \frac{T'z'}{r'^3}.$$

On trouvera de pareilles formules pour les forces résultantes de l'attraction des autres planètes T″, T‴,...; et rassemblant respectivement toutes ces différentes forces, on aura les valeurs des forces perturbatrices

X, Y, Z de la planète T, lesquelles seront donc exprimées ainsi

$$X=T'\left(\frac{x-x'}{\delta'^3}+\frac{x'}{r'^3}\right)+T''\left(\frac{x-x''}{\delta''^3}+\frac{x''}{r''^3}\right)+T'''\left(\frac{x-x'''}{\delta'''^3}+\frac{x'''}{r'''^3}\right)+\ldots,$$

$$Y=T'\left(\frac{y-y'}{\delta'^3}+\frac{y'}{r'^3}\right)+T''\left(\frac{y-y''}{\delta''^3}+\frac{y''}{r''^3}\right)+T'''\left(\frac{y-y'''}{\delta'''^3}+\frac{y'''}{r'''^3}\right)+\ldots,$$

$$Z=T'\left(\frac{z-z'}{\delta'^3}+\frac{z'}{r'^3}\right)+T''\left(\frac{z-z''}{\delta''^3}+\frac{z''}{r''^3}\right)+T'''\left(\frac{z-z'''}{\delta'''^3}+\frac{z'''}{r'''^3}\right)+\ldots.$$

A l'égard des quantités r', r'',... et δ', δ'',..., il est clair qu'on aura

$$r'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2},\qquad r''=\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2},\ldots,$$

$$\delta'=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},\quad \delta''=\sqrt{(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2},\ldots.$$

9. Si l'on substitue maintenant ces valeurs de X, Y, Z dans la formule $X\,dx+Y\,dy+Z\,dz$, il en résultera une différentielle intégrable par rapport aux variables x, y, z, et dont l'intégrale sera

$$T'\left(\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}-\frac{1}{\delta'}\right)+T''\left(\frac{xx''+yy''+zz''}{r''^3}-\frac{1}{\delta''}\right)+T'''\left(\frac{xx'''+yy'''+zz'''}{r'''^3}-\frac{1}{\delta'''}\right)+\ldots.$$

Nommant donc cette quantité Ω, et supposant que la caractéristique ∂ indique une différentiation relative uniquement aux quantités x, y, z, c'est-à-dire aux quantités qui se rapportent à la planète T, on aura

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=\partial\Omega;$$

par conséquent, les altérations du grand axe $2a$ de l'orbite elliptique de la planète T, produites par l'action d'autant d'autres planètes T′, T″, T‴,... qu'on voudra, seront déterminées par cette formule fort simple (7)

$$d\frac{1}{2a}=\frac{\partial\Omega}{S+T}.$$

10. Soient maintenant θ, θ', θ'',... les moyens mouvements des planètes T, T′, T″,... autour du Soleil durant le temps t, on pourra, par les formules connues (à cause que les excentricités des planètes sont fort

petites) exprimer les valeurs de r, x, y, z par des séries de sinus et cosinus de θ et de ses multiples, et pareillement celles de r', x', y', z' par de semblables séries de sinus et cosinus de θ' et de ses multiples; et ainsi du reste. Substituant donc ces valeurs dans la quantité $\frac{\Omega}{S+T}$, et développant les radicaux δ', δ'', ... en séries de sinus et cosinus, il est clair qu'elle se réduira à une série de termes de cette forme

$$M \times \frac{\sin}{\cos}\left(m\theta + n\theta' + p\theta'' + \ldots\right),$$

M étant une quantité dépendante des éléments des orbites des planètes T, T', T'', ... et m, n, p, ... étant des nombres entiers positifs, ou négatifs, ou zéro.

Or, comme toutes les quantités qui se rapportent à la planète T sont exprimées par le seul angle θ, tandis que celles qui se rapportent aux autres planètes T', T'', ... le sont par les autres angles θ', θ'', ..., il s'ensuit que, pour avoir la différentielle de $\frac{\Omega}{S+T}$ relative aux quantités qui appartiennent à la planète T, il faudra faire varier simplement l'angle θ, en regardant les autres angles θ', θ'', ... comme constants. Donc chaque terme de la valeur de $\frac{\Omega}{S+T}$ donnera dans celle de $\frac{\partial\Omega}{S+T}$, et par conséquent dans la valeur de $d\frac{1}{2a}$, un terme correspondant de la forme

$$\pm mM \times \frac{\sin}{\cos}\left(m\theta + n\theta' + p\theta'' + \ldots\right)d\theta.$$

11. Comme les variations des éléments des orbites des planètes ne dépendent que des forces perturbatrices, et sont par conséquent très-petites de l'ordre de ces mêmes forces, il est clair que, si l'on veut négliger les quantités de l'ordre des carrés et des produits de ces forces, ainsi qu'on l'a toujours pratiqué dans les recherches des dérangements des planètes, on pourra regarder comme constants les éléments qui entrent dans les différents termes de la valeur de $d\frac{1}{2a}$; ainsi la quantité M sera une constante; de plus on aura par les Théorèmes connus (n° 1)

$$\theta : \theta' : \theta'' : \ldots = \sqrt{\frac{S+T}{a^3}} : \sqrt{\frac{S+T'}{a'^3}} : \sqrt{\frac{S+T''}{a''^3}} : \ldots = \frac{1}{\sqrt{a^3}} : \frac{1}{\sqrt{a'^3}} : \frac{1}{\sqrt{a''^3}} : \ldots,$$

en négligeant T, T', T'', ... vis-à-vis de S. Donc

$$\theta' = \theta\sqrt{\frac{a^3}{a'^3}}, \quad \theta'' = \theta\sqrt{\frac{a^3}{a''^3}}, \ldots,$$

où l'on pourra regarder les quantités a, a', a'', ... comme constantes.

Chaque terme de la valeur de $d\frac{1}{2a}$ sera donc de la forme

$$\pm mM \times \frac{\sin}{\cos}\left[\left(m + n\sqrt{\frac{a^3}{a'^3}} + p\sqrt{\frac{a^3}{a''^3}} + \ldots\right)\theta\right]d\theta,$$

lequel étant intégré donnera, dans la valeur de $\frac{1}{2a}$, le terme

$$\frac{mM \times \frac{\sin}{\cos}\left[\left(m + n\sqrt{\frac{a^3}{a'^3}} + p\sqrt{\frac{a^3}{a''^3}} + \ldots\right)\theta\right]}{m + n\sqrt{\frac{a^3}{a'^3}} + p\sqrt{\frac{a^3}{a''^3}} + \ldots};$$

ainsi l'on connaîtra toutes les inégalités qui peuvent faire varier le grand axe $2a$ de l'orbite de la planète regardée comme elliptique.

12. On voit par là que ces inégalités seront toujours proportionnelles à des sinus ou cosinus d'angles, et par conséquent seront nécessairement périodiques.

Il n'y aurait que le seul cas où l'on aurait

$$m + n\sqrt{\frac{a^3}{a'^3}} + p\sqrt{\frac{a^3}{a''^3}} + \ldots = 0,$$

dans lequel la valeur de $\frac{1}{2a}$ pût contenir des arcs de cercles; car alors

le terme

$$\frac{m\mathrm{M}\sin\left[\left(m+n\sqrt{\frac{a^3}{a'^3}}+p\sqrt{\frac{a^3}{a''^3}}+\ldots\right)\theta\right]}{m+n\sqrt{\frac{a^3}{a'^3}}+p\sqrt{\frac{a^3}{a''^3}}+\ldots}$$

devient $m\mathrm{M}\theta$, ce qui donne une équation qui augmente continuellement avec le mouvement moyen. Mais il est facile de se convaincre que ce cas ne peut pas avoir lieu dans notre système, où les valeurs de $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{a'^3}$, $\sqrt{a''^3}$, ... sont incommensurables entre elles.

13. En général, si l'on a

$$\theta' = \mu'\theta, \quad \theta'' = \mu''\theta, \ldots,$$

μ', μ'', ... étant des quantités constantes, ou du moins regardées comme telles en faisant abstraction des forces perturbatrices, il s'ensuit du calcul précédent que toutes les variations du grand axe seront nécessairement périodiques, à moins que l'on n'ait

$$m + n\mu' + p\mu'' + \ldots = 0.$$

Donc, lorsque les nombres μ', μ'', ... sont incommensurables, il est impossible que cette équation ait lieu, puisque les nombres m, n, p, ... doivent être entiers; par conséquent il l'est aussi que le grand axe soit sujet à une augmentation ou diminution constante.

Et il est facile de se convaincre que cette conclusion a lieu, en général, quel que soit le nombre des corps T', T'', T''', ... qui agissent sur la planète T, et quelle que soit la forme de leurs orbites, pourvu que ces orbites soient renfermées dans un espace fini, en sorte que leurs coordonnées rectangles soient uniquement des fonctions de sinus et cosinus d'angles.

14. Enfin on peut aussi démontrer par là que la figure non sphérique de la Terre ne saurait altérer le mouvement moyen de la Lune; car en

imaginant, ainsi que Newton l'a fait dans sa *Théorie de la précession des équinoxes*, que les particules de la Terre qui forment l'excès du sphéroïde sur le globe soient une infinité de petites lunes adhérentes entre elles, et qui tournent en un jour autour du centre de la Terre, il est aisé de voir que l'action de toutes ces particules sur la Lune ne pourra produire dans le grand axe de son orbite elliptique que des variations périodiques, à cause que la durée des révolutions de la Lune est comme incommensurable avec celle de la rotation diurne de la Terre.

SOLUTIONS

DE QUELQUES

PROBLÈMES D'ASTRONOMIE SPHÉRIQUE

PAR LE MOYEN DES SÉRIES.

SOLUTIONS

DE QUELQUES

PROBLÈMES D'ASTRONOMIE SPHÉRIQUE

PAR LE MOYEN DES SÉRIES (*).

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1776.)

1. Dans un Mémoire que j'ai lu il y a quelque temps à cette Assemblée, j'ai donné une formule nouvelle et fort simple pour exprimer la réduction à l'écliptique ou en général la différence entre l'hypoténuse et la basé d'un triangle sphérique rectangle dont on connait l'angle adjacent. M. Lambert me dit alors qu'il avait aussi trouvé, de son côté, une pareille formule, et eut la bonté de me communiquer sa méthode, que je trouvai fort différente de la mienne. J'ignore si M. Lambert a poussé plus loin son travail sur ce sujet, mais comme il n'en a jusqu'à présent rien publié (**), j'ai cru que les Géomètres ne me sauraient pas mauvais gré de leur faire part des recherches ultérieures que j'ai eu occasion de faire depuis peu sur la même matière; c'est l'objet du Mémoire suivant. J'exposerai d'abord ma première méthode, ensuite j'en donnerai une autre

(*) Lu en 1774.

(**) Cela était vrai lors de la lecture de ce Mémoire; depuis, M. Lambert a donné sa méthode dans le volume des *Éphémérides* pour 1780.

beaucoup plus simple pour arriver à la formule dont il s'agit, et je tâcherai de l'étendre encore à des cas plus compliqués; j'en ferai de plus voir l'usage pour résoudre plusieurs cas des triangles sphériques rectangles ou obliquangles, ainsi que différents Problèmes d'Astronomie sphérique qui en dépendent; enfin je montrerai comment on peut appliquer les mêmes principes à trouver généralement la valeur en série d'un angle dont la tangente est donnée par une fonction rationnelle de sinus et de cosinus d'un autre angle.

2. Si x est la base d'un triangle sphérique rectangle, y l'hypoténuse et ω l'angle compris entre les arcs x et y, on a, par la Trigonométrie,

$$\operatorname{tang} x = \cos\omega \operatorname{tang} y;$$

et la formule que j'ai trouvée dans le Mémoire cité est celle-ci

$$x = y - \operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2}\sin 2y + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^4\frac{\omega}{2}\sin 4y - \frac{1}{3}\operatorname{tang}^6\frac{\omega}{2}\sin 6y + \dots.$$

De sorte que la différence entre les arcs x, y se trouve exprimée par une suite de sinus d'angles multiples de $2y$ et ayant pour coefficients les puissances du carré de la tangente de la moitié de l'angle ω, divisées encore par les nombres naturels $1, 2, 3, \dots$, ce qui rend cette série fort convergente lorsque l'angle ω est moindre que 90 degrés.

3. Voici la manière dont je suis arrivé d'abord à cette formule.

Regardant x et y comme variables, et ω comme constante, on trouve

$$dx = \frac{d\operatorname{tang} x}{1+\operatorname{tang}^2 x} = \frac{\cos\omega\, d\operatorname{tang} y}{1+\cos^2\omega\operatorname{tang}^2 y} = \frac{\cos\omega\, dy}{\cos^2 y + \cos^2\omega\sin^2 y}$$
$$= \frac{2\cos\omega\, dy}{1+\cos^2\omega+\sin^2\omega\cos 2y} = \frac{\cos\omega}{1+\cos^2\omega}\cdot\frac{2\,dy}{1+\dfrac{\sin^2\omega}{1+\cos^2\omega}\cos 2y};$$

or il est démontré que toute fraction de la forme $\frac{1}{1+m\cos\varphi}$ se réduit en

une série, telle que

$$\frac{1}{\sqrt{1-m^2}}(1 - 2n\cos\varphi + 2n^2\cos 2\varphi - 2n^3\cos 3\varphi + \dots),$$

n étant $= \frac{1-\sqrt{1-m^2}}{m}$.

Substituant pour m, $\frac{\sin^2\omega}{1+\cos^2\omega} = \frac{1-\cos^2\omega}{1+\cos^2\omega}$, on trouve

$$\sqrt{1-m^2} = \frac{2\cos\omega}{1+\cos^2\omega},$$

donc

$$n = \frac{(1-\cos\omega)^2}{\sin^2\omega} = \frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega} = \frac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{\cos^2\frac{\omega}{2}} = \operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2},$$

et la fraction

$$\frac{\cos\omega}{1+\cos^2\omega}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\sin^2\omega}{1+\cos^2\omega}\cos 2y}$$

se réduit par conséquent en cette série

$$\frac{1}{2} - \operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2}\cos 2y + \operatorname{tang}^4\frac{\omega}{2}\cos 4y - \operatorname{tang}^6\frac{\omega}{2}\cos 6y + \dots,$$

laquelle étant multipliée par $2\,dy$ et ensuite intégrée donnera la valeur de x, savoir

$$x = y - \operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2}\sin 2y + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^4\frac{\omega}{2}\sin 4y - \dots,$$

comme ci-dessus.

4. Voyons maintenant comment on peut trouver la même chose plus simplement et plus directement.

L'équation proposée

$$\operatorname{tang} x = \cos\omega \operatorname{tang} y$$

donne, en employant les expressions exponentielles imaginaires des tangentes, celle-ci

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}=\cos\omega\,\frac{e^{y\sqrt{-1}}-e^{-y\sqrt{-1}}}{e^{y\sqrt{-1}}+e^{-y\sqrt{-1}}},$$

ou bien

$$\frac{e^{2x\sqrt{-1}}-1}{e^{2x\sqrt{-1}}+1}=\cos\omega\,\frac{e^{2y\sqrt{-1}}-1}{e^{2y\sqrt{-1}}+1},$$

d'où l'on tire sur-le-champ

$$e^{2x\sqrt{-1}}=\frac{e^{2y\sqrt{-1}}+1+\cos\omega\left(e^{2y\sqrt{-1}}-1\right)}{e^{2y\sqrt{-1}}+1-\cos\omega\left(e^{2y\sqrt{-1}}-1\right)}=\frac{(1+\cos\omega)\,e^{2y\sqrt{-1}}+(1-\cos\omega)}{(1-\cos\omega)\,e^{2y\sqrt{-1}}+(1+\cos\omega)};$$

mais

$$\frac{1-\cos\omega}{1+\cos\omega}=\operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2};$$

donc, dénotant pour plus de simplicité $\operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2}$ par θ, on aura

$$e^{2x\sqrt{-1}}=\frac{e^{2y\sqrt{-1}}+\theta}{\theta e^{2y\sqrt{-1}}+1},$$

équation qu'on peut aussi mettre sous cette forme

$$e^{2x\sqrt{-1}}=e^{2y\sqrt{-1}}\,\frac{1+\theta e^{-2y\sqrt{-1}}}{1+\theta e^{2y\sqrt{-1}}};$$

d'où, en prenant les logarithmes et divisant ensuite par $2\sqrt{-1}$, on a

$$x=y+\frac{\log\left(1+\theta e^{-2y\sqrt{-1}}\right)-\log\left(1+\theta e^{2y\sqrt{-1}}\right)}{2\sqrt{-1}}.$$

Or on sait que

$$\log(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots;$$

donc, réduisant en série les deux logarithmes de l'équation précédente

et substituant ensuite à la place des expressions exponentielles imaginaires les sinus qui y répondent, on aura

$$x=y-\theta\sin 2y+\frac{\theta^2}{2}\sin 4y-\frac{\theta^3}{3}\sin 6y+\ldots.$$

5. Pour généraliser, s'il est possible, la formule précédente, considérons l'équation

$$\operatorname{tang}x=m\operatorname{tang}y;$$

on parviendra, par la méthode du numéro précédent, à l'équation

$$e^{2x\sqrt{-1}}=\frac{(1+m)\,e^{2y\sqrt{-1}}+(1-m)}{(1-m)\,e^{2y\sqrt{-1}}+(1+m)},$$

et, faisant ensuite, pour plus de simplicité,

$$\theta=\frac{1-m}{1+m},$$

on aura

$$e^{2x\sqrt{-1}}=\frac{e^{2y\sqrt{-1}}+\theta}{\theta e^{2y\sqrt{-1}}+1};$$

d'où l'on tirera pour x la même expression que ci-dessus.

6. Supposons maintenant

$$m=\frac{\cos\omega}{\cos\varphi},$$

en sorte que l'équation à résoudre soit

$$\operatorname{tang}x=\frac{\cos\omega\operatorname{tang}y}{\cos\varphi},$$

ou bien

$$\cos\varphi\operatorname{tang}x=\cos\omega\operatorname{tang}y;$$

on aura, dans ce cas,

$$\theta=\frac{\cos\varphi-\cos\omega}{\cos\varphi+\cos\omega}=\frac{\sin\frac{\omega+\varphi}{2}\sin\frac{\omega-\varphi}{2}}{\cos\frac{\omega+\varphi}{2}\cos\frac{\omega-\varphi}{2}},$$

c'est-à-dire

$$\theta = \operatorname{tang}\frac{\omega+\varphi}{2}\operatorname{tang}\frac{\omega-\varphi}{2},$$

et l'expression de x en y sera, comme ci-dessus,

$$x = y - \theta\sin 2y + \frac{\theta^2}{2}\sin 4y - \frac{\theta^3}{3}\sin 6y + \ldots.$$

7. Si l'on voulait avoir l'expression de y en x, il est clair qu'il n'y aurait qu'à changer x en y, φ en ω et réciproquement; or par ces changements il est visible que la valeur de θ ne fera que changer de signe; ainsi, conservant la même valeur de θ que ci-devant, on aura

$$y = x + \theta\sin 2x + \frac{\theta^2}{2}\sin 4x + \frac{\theta^3}{3}\sin 6x + \ldots.$$

Donc, en combinant les deux formules, on aura

$$\begin{aligned} y - x &= \theta\sin 2y - \frac{\theta^2}{2}\sin 4y + \frac{\theta^3}{3}\sin 6y - \ldots \\ &= \theta\sin 2x + \frac{\theta^2}{2}\sin 4x + \frac{\theta^3}{3}\sin 6x + \ldots. \end{aligned}$$

8. Si l'on fait

$$\varphi = 90^\circ - \omega,$$

de manière que l'équation soit

$$\sin\omega\operatorname{tang} x = \cos\omega\operatorname{tang} y,$$

ou bien

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{tang} y}{\operatorname{tang}\omega},$$

on aura

$$\theta = \operatorname{tang} 45^\circ \operatorname{tang}(\omega - 45^\circ),$$

c'est-à-dire

$$\theta = \operatorname{tang}(\omega - 45^\circ);$$

et si l'on met $90^\circ - \omega$ à la place de ω pour avoir l'équation

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\omega\operatorname{tang} y,$$

on aura

$$\theta = \operatorname{tang}(45^\circ - \omega).$$

9. Si l'on change les angles φ et ω en leurs compléments $90^\circ - \varphi$, $90^\circ - \omega$, de sorte que l'on ait l'équation

$$\sin\varphi\operatorname{tang} x = \sin\omega\operatorname{tang} y,$$

on aura alors

$$\theta = \operatorname{tang}\left(90^\circ - \frac{\omega+\varphi}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{\varphi-\omega}{2},$$

savoir

$$\theta = \frac{\operatorname{tang}\frac{\varphi-\omega}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\varphi+\omega}{2}}.$$

10. Si l'on avait dans les formules du n° 5

$$m = \frac{\operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\varphi},$$

en sorte que l'équation fût de la forme

$$\operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\omega\operatorname{tang} y,$$

on aurait

$$\theta = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\omega}{\operatorname{tang}\varphi + \operatorname{tang}\omega},$$

ce qui se réduit à

$$\theta = \frac{\sin(\varphi-\omega)}{\sin(\varphi+\omega)}.$$

Et si l'on avait l'équation

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}\varphi\operatorname{tang}\omega\operatorname{tang} y,$$

il n'y aurait qu'à mettre $90^\circ - \varphi$ à la place de φ dans l'expression précé-

dente de θ, ce qui la réduirait à

$$\theta = \frac{\cos(\varphi + \omega)}{\cos(\varphi - \omega)}.$$

Si l'on avait enfin l'équation

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{tang}^2\omega \operatorname{tang} y,$$

il n'y aurait qu'à faire $\varphi = \omega$, ce qui donnerait

$$\theta = \cos 2\omega.$$

11. On aura donc dans tous ces cas la valeur de x en y, ou de y en x, par les formules des nos **6** et **7**, et il est visible que pourvu que θ ne soit pas plus grande que l'unité, la série, tant pour x que pour y, sera nécessairement toujours convergente, parce que les sinus ne peuvent jamais surpasser l'unité.

12. Nous n'avons cherché jusqu'ici que la valeur de l'arc x, mais on peut avoir aussi avec la même facilité celles des sinus et cosinus des multiples ou sous-multiples quelconques du même arc.

Je reprends pour cela l'équation du n° **5**

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{e^{2y\sqrt{-1}} + \theta}{\theta e^{2y\sqrt{-1}} + 1},$$

et l'élevant à la puissance μ, j'ai

$$e^{2\mu x\sqrt{-1}} = \left(\frac{e^{2y\sqrt{-1}} + \theta}{\theta e^{2y\sqrt{-1}} + 1}\right)^{\mu};$$

et comme le radical $\sqrt{-1}$ peut avoir indifféremment le signe $+$ et $-$, on aura de même

$$e^{-2\mu x\sqrt{-1}} = \left(\frac{e^{-2y\sqrt{-1}} + \theta}{\theta e^{-2y\sqrt{-1}} + 1}\right)^{\mu},$$

d'où je tire ces deux formules

$$\sin 2\mu x = \frac{\left(\frac{e^{2y\sqrt{-1}} + \theta}{\theta e^{2y\sqrt{-1}} + 1}\right)^{\mu} - \left(\frac{e^{-2y\sqrt{-1}} + \theta}{\theta e^{-2y\sqrt{-1}} + 1}\right)^{\mu}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos 2\mu x = \frac{\left(\frac{e^{2y\sqrt{-1}} + \theta}{\theta e^{2y\sqrt{-1}} + 1}\right)^{\mu} + \left(\frac{e^{-2y\sqrt{-1}} + \theta}{\theta e^{-2y\sqrt{-1}} + 1}\right)^{\mu}}{2};$$

où il ne s'agit plus que de développer les termes, et d'y changer ensuite les exponentielles imaginaires en sinus ou cosinus d'angles.

13. Pour y parvenir avec toute la généralité possible, considérons la quantité

$$\left(\frac{u + \theta}{\theta u + 1}\right)^{\mu},$$

et voyons comment elle peut se développer en une série de la forme

$$A + Bu + Cu^2 + Du^3 + Eu^4 + Fu^5 + \ldots.$$

Je mets la fraction $\frac{\theta + u}{1 + \theta u}$ sous cette forme $\theta + \frac{(1 - \theta^2)u}{1 + \theta u}$, ensuite je développe la puissance μ de ce binôme, j'aurai

$$\theta^{\mu} + \mu\theta^{\mu-1}\frac{(1-\theta^2)u}{1+\theta u} + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\theta^{\mu-2}\frac{(1-\theta^2)^2u^2}{(1+\theta u)^2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.3}\theta^{\mu-3}\frac{(1-\theta^2)^3u^3}{(1+\theta u)^3} + \ldots.$$

Je développe maintenant les puissances du binôme $1 + \theta u$ qui sont au dénominateur, et ordonnant les termes par rapport à u, je trouve

$$A = \theta^{\mu},$$

$$B = \mu\theta^{\mu-1}(1 - \theta^2),$$

$$C = -\mu\theta^{\mu}(1 - \theta^2) + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\theta^{\mu-2}(1 - \theta^2)^2,$$

$$D = \mu\theta^{\mu+1}(1 - \theta^2) - 2\frac{\mu(\mu-1)}{2}\theta^{\mu-1}(1 - \theta^2)^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.3}\theta^{\mu-3}(1 - \theta^2)^3,$$

$$E = -\mu\theta^{\mu+2}(1-\theta^2) + 3\frac{\mu(\mu-1)}{2}\theta^{\mu}(1-\theta^2)^2 - 3\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.3}\theta^{\mu-2}(1-\theta^2)^3 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2.3.4}\theta^{\mu-4}(1-\theta^2)^4,$$

$$F = \mu\theta^{\mu+3}(1-\theta^2) - 4\frac{\mu(\mu-1)}{2}\theta^{\mu+1}(1-\theta^2)^2 + 6\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.3}\theta^{\mu-1}(1-\theta^2)^3 - 4\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2.3.4}\theta^{\mu-3}(1-\theta^2)^4 + \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-4)}{2.3.4.5}\theta^{\mu-5}(1-\theta^2)^5,$$

et ainsi de suite.

De sorte que, si l'on nomme, en général, M le coefficient du terme Mu^m, on aura

$$\pm M = \mu\theta^{\mu+m-2}(1-\theta^2) - (m-1)\frac{\mu(\mu-1)}{2}\theta^{\mu+m-4}(1-\theta^2)^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.3}\theta^{\mu+m-6}(1-\theta^2)^3 - \dots,$$

le signe supérieur étant pour le cas où m est impair et l'inférieur pour celui où m est pair.

14. Ayant ainsi trouvé les coefficients A, B, C...., il n'y aura plus qu'à mettre successivement $e^{2y\sqrt{-1}}$ et $e^{-2y\sqrt{-1}}$ à la place de u pour avoir les valeurs des puissances dont la différence ou la somme forment les valeurs de $\sin 2\mu x$ et de $\cos 2\mu x$; et l'on aura, après les réductions,

$$\sin 2\mu x = B\sin\mu y + C\sin 2\mu y + D\sin 3\mu y + \dots,$$
$$\cos 2\mu x = A + B\cos\mu y + C\cos 2\mu y + D\cos 3\mu y + \dots.$$

15. Donc, si $\mu = 1$, on aura

$$\sin 2x = (1-\theta^2)[\sin y - \theta\sin 2y + \theta^2\sin 3y - \theta^3\sin 4y + \dots],$$
$$\cos 2x = \theta + (1-\theta^2)[\cos y - \theta\cos 2y + \theta^2\cos 3y - \theta^3\cos 4y + \dots],$$

Si $\mu = 2$, on aura

$$\sin 4x = (1-\theta^2)[2\theta\sin 2y + (1-3\theta^2)\sin 4y - \theta(2-4\theta^2)\sin 6y + \theta^2(3-5\theta^2)\sin 8y - \theta^3(4-6\theta^2)\sin 10y + \dots],$$
$$\cos 4x = \theta^2 + (1-\theta^2)[2\theta\cos 2y + (1-3\theta^2)\cos 4y - \theta(2-4\theta^2)\cos 6y + \theta^2(3-5\theta^2)\cos 8y - \theta^3(4-6\theta^2)\cos 10y + \dots],$$

et ainsi du reste.

16. Appliquons maintenant les formules que nous venons de trouver à la Trigonométrie sphérique, et considérons d'abord les cas des triangles sphériques rectangles qui peuvent s'y rapporter.

Soit donc un triangle sphérique rectangle dont l'hypoténuse soit a, les deux côtés b, c, et les angles opposés à ces côtés β, γ; si l'on examine toutes les analogies connues pour ces sortes de triangles, on ne trouvera que les trois suivantes qui renferment des tangentes :

1° $$\operatorname{tang} b = \cos\gamma \operatorname{tang} a,$$

2° $$\operatorname{tang} c = \sin b \operatorname{tang}\gamma,$$

3° $$\operatorname{tang}\beta = \frac{\cot\gamma}{\cos a} = \frac{\operatorname{tang}(90^\circ - \gamma)}{\cos a}.$$

17. Comparant donc ces équations avec celles des nos 6 et 9, on aura d'abord

$$x = b, \quad y = a, \quad \omega = \gamma, \quad \varphi = 0;$$

donc

$$\theta = \operatorname{tang}^2\frac{\omega}{2} = \operatorname{tang}^2\frac{\gamma}{2};$$

donc (7)

$$a - b = \operatorname{tang}^2\frac{\gamma}{2}\sin 2a - \frac{1}{2}\operatorname{tang}^4\frac{\gamma}{2}\sin 4a + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^6\frac{\gamma}{2}\sin 6a - \dots$$
$$= \operatorname{tang}^2\frac{\gamma}{2}\sin 2b + \frac{1}{2}\operatorname{tang}^4\frac{\gamma}{2}\sin 4b + \frac{1}{3}\operatorname{tang}^6\frac{\gamma}{2}\sin 6b + \dots.$$

On a donc par ces formules la différence entre l'hypoténuse et un

des côtés exprimée par une suite de sinus multiples du double de l'hypoténuse même ou du côté; et il est visible que cette suite sera toujours convergente, parce que la plus grande valeur de γ étant 90 degrés, la plus grande valeur de $\text{tang}\frac{\gamma}{2}$ sera 1. Ces formules sont donc, comme l'on voit, très-commodes pour trouver la réduction des planètes à l'écliptique, en prenant γ pour l'inclinaison, ou bien la différence entre la longitude et l'ascension droite du Soleil en prenant γ pour l'obliquité de l'écliptique.

Dans ce dernier cas, on aura

$$\gamma = 23^\circ 28' \text{ environ};$$

donc

$$\text{tang}^2\frac{\gamma}{2} = 0{,}004\,3137, \quad \text{tang}^4\frac{\gamma}{2} = 0{,}000\,1861, \quad \text{tang}^6\frac{\gamma}{2} = 0{,}000\,008\,03, \ldots,$$

d'où l'on peut juger de l'extrême convergence de la série.

18. La seconde équation, étant comparée avec la formule du n° 9, donnera

$$x = c, \quad y = \gamma, \quad \varphi = 90^\circ, \quad \omega = b;$$

donc

$$\theta = \frac{\text{tang}\left(45^\circ - \frac{b}{2}\right)}{\text{tang}\left(45^\circ + \frac{b}{2}\right)} = \text{tang}^2\left(45^\circ - \frac{b}{2}\right);$$

et de là on aura (7) les formules

$$\gamma - c = \text{tang}^2\left(45^\circ - \frac{b}{2}\right)\sin 2\gamma - \frac{1}{2}\text{tang}^4\left(45^\circ - \frac{b}{2}\right)\sin 4\gamma + \frac{1}{3}\text{tang}^6\left(45^\circ - \frac{b}{2}\right)\sin 6\gamma - \ldots$$
$$= \text{tang}^2\left(45^\circ - \frac{b}{2}\right)\sin 2c + \frac{1}{2}\text{tang}^4\left(45^\circ - \frac{b}{2}\right)\sin 4c + \frac{1}{3}\text{tang}^6\left(45^\circ - \frac{b}{2}\right)\sin 6c + \ldots,$$

par lesquelles on pourra trouver la différence entre un angle et le côté opposé exprimée par une suite de sinus d'angles multiples du double de

l'angle ou du côté; et ces suites seront toujours aussi convergentes, parce que $\text{tang}\left(45^\circ - \frac{b}{2}\right)$ ne peut jamais être > 1, tant que b est positif et < 180 degrés.

19. La troisième équation, étant comparée de même avec celle du n° 6, donnera

$$x = \beta, \quad y = 90^\circ - \gamma, \quad \varphi = a, \quad \omega = 0;$$

donc

$$\theta = -\text{tang}^2\frac{a}{2};$$

donc (7)

$$\beta + \gamma - 90^\circ = \text{tang}^2\frac{a}{2}\sin 2\gamma - \frac{1}{2}\text{tang}^4\frac{a}{2}\sin 4\gamma + \frac{1}{3}\text{tang}^6\frac{a}{2}\sin 6\gamma - \ldots$$
$$= \text{tang}^2\frac{a}{2}\sin 2\beta - \frac{1}{2}\text{tang}^4\frac{a}{2}\sin 4\beta + \frac{1}{3}\text{tang}^6\frac{a}{2}\sin 6\beta - \ldots,$$

et l'on pourra faire sur ces formules des remarques analogues à celles qu'on a faites sur les précédentes.

20. Considérons à présent les triangles sphériques obliquangles, et voyons quels sont les cas auxquels nos formules peuvent être applicables.

Comme la méthode ordinaire de résoudre ces triangles consiste à les partager en deux triangles rectangles par l'abaissement d'une perpendiculaire d'un des angles sur le côté opposé, et à calculer ensuite à part les segments de l'angle ou du côté coupé par la perpendiculaire, il est clair que les analogies qui servent communément à la résolution de ces triangles ne peuvent se rapporter à nos formules. Mais il y a d'autres analogies moins connues et qui sont générales pour des triangles quelconques; on les nomme *les analogies de Neper*, qui en est l'inventeur, et elles se réduisent aux équations suivantes, dans lesquelles a, b, c dénotent les

trois côtés d'un triangle sphérique quelconque, et α, β, γ les angles qui leur sont respectivement opposés :

1° $$\operatorname{tang}\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\cot\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}};$$

2° $$\operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\cot\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}};$$

3° $$\operatorname{tang}\frac{b-c}{2}=\frac{\operatorname{tang}\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}};$$

4° $$\operatorname{tang}\frac{b+c}{2}=\frac{\operatorname{tang}\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}};$$

d'où l'on déduit encore cette cinquième

5° $$\operatorname{tang}\frac{\beta-\gamma}{2}\operatorname{tang}\frac{b+c}{2}=\operatorname{tang}\frac{\beta+\gamma}{2}\operatorname{tang}\frac{b-c}{2}.$$

Comme ces équations renferment toutes des tangentes, elles peuvent être traitées par notre méthode, ainsi qu'on va le voir.

21. La première des équations précédentes étant comparée à celle du n° 9, on aura

$$\varphi=\frac{b+c}{2},\quad \omega=\frac{b-c}{2},\quad x=\frac{\beta-\gamma}{2},\quad y=90^\circ-\frac{\alpha}{2};$$

donc

$$\theta=\frac{\operatorname{tang}\frac{c}{2}}{\operatorname{tang}\frac{b}{2}},$$

et de là (7)

$$\frac{\gamma-\alpha-\beta}{2}+90^\circ=\frac{\operatorname{tang}\frac{c}{2}}{\operatorname{tang}\frac{b}{2}}\sin\alpha+\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{c}{2}}{\operatorname{tang}\frac{b}{2}}\right)^2\sin 2\alpha+\frac{1}{3}\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{c}{2}}{\operatorname{tang}\frac{b}{2}}\right)^3\sin 3\alpha+\ldots$$
$$=\frac{\operatorname{tang}\frac{c}{2}}{\operatorname{tang}\frac{b}{2}}\sin(\beta-\gamma)+\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{c}{2}}{\operatorname{tang}\frac{b}{2}}\right)^2\sin 2(\beta-\gamma)+\frac{1}{3}\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{c}{2}}{\operatorname{tang}\frac{b}{2}}\right)^3\sin 3(\beta-\gamma)+\ldots.$$

22. La seconde étant comparée de même à celle du n° 6, on aura les mêmes valeurs de φ, ω, y que ci-dessus, mais celle de x sera $\frac{\beta+\gamma}{2}$; on aura donc dans ce cas

$$\theta=-\operatorname{tang}\frac{c}{2}\operatorname{tang}\frac{b}{2};$$

donc (7)

$$\frac{\gamma+\alpha+\beta}{2}-90^\circ=\operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2}\right)^2\sin 2\alpha$$
$$+\frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2}\right)^3\sin 3\alpha-\ldots.$$
$$=\operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2}\sin(\beta+\gamma)-\frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2}\right)^2\sin 2(\beta+\gamma)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}\frac{b}{2}\operatorname{tang}\frac{c}{2}\right)^3\sin 3(\beta+\gamma)-\ldots.$$

23. La troisième et la quatrième équation donneront des formules analogues aux précédentes en y changeant seulement β en b, γ en c et α en $180^\circ-a$. Ainsi l'on aura, en premier lieu,

$$\frac{c+a-b}{2}=\frac{\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}\sin a-\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}\right)^2\sin 2a+\frac{1}{3}\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}\right)^3\sin 3a-\ldots$$
$$=\frac{\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}\sin(b-c)+\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}\right)^2\sin 2(b-c)+\frac{1}{3}\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}}\right)^3\sin 3(b-c)+\ldots.$$

24. En second lieu, on aura

$$\frac{c+b-a}{2} = \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\right)^2\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\right)^3\sin 3\alpha + \dots$$

$$= \operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\sin(b+c) - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\right)^2\sin 2(b+c) + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\right)^3\sin 3(b+c) - \dots$$

25. Enfin la cinquième équation du n° **20**, étant comparée à celle du n° **10**, donnera

$$\varphi = \frac{\beta-\gamma}{2}, \quad \omega = \frac{\beta+\gamma}{2}, \quad x = \frac{b+c}{2}, \quad y = \frac{b-c}{2};$$

donc

$$\theta = -\frac{\sin\gamma}{\sin\beta},$$

et par conséquent

$$c = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\sin(b-c) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)^2\sin 2(b-c) + \frac{1}{3}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)^3\sin 3(b-c) + \dots$$

$$= \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\sin(b+c) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)^2\sin 2(b+c) + \frac{1}{3}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)^3\sin 3(b+c) - \dots$$

On peut aussi comparer d'une autre manière la même équation avec celle du numéro cité, en faisant

$$\varphi = \frac{b+c}{2}, \quad \omega = \frac{b-c}{2}, \quad x = \frac{\beta-\gamma}{2}, \quad y = \frac{\beta+\gamma}{2},$$

ce qui donnera

$$\theta = \frac{\sin c}{\sin b},$$

et de là par le n° **7**

$$\gamma = \frac{\sin c}{\sin b}\sin(\beta+\gamma) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin c}{\sin b}\right)^2\sin 2(\beta+\gamma) + \frac{1}{3}\left(\frac{\sin c}{\sin b}\right)^3\sin 3(\beta+\gamma) - \dots$$

$$= \frac{\sin c}{\sin b}\sin(\beta-\gamma) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin c}{\sin b}\right)^2\sin 2(\beta-\gamma) + \frac{1}{3}\left(\frac{\sin c}{\sin b}\right)^3\sin 3(\beta-\gamma) + \dots$$

26. Les premières formules des n^os^ **21** et **22** donnent, par l'addition et la soustraction, ces deux-ci, dans lesquelles au lieu de $\frac{1}{\operatorname{tang}\frac{b}{2}}$ j'écris $\cot\frac{b}{2}$,

$$\gamma = \left(\operatorname{tang}\frac{b}{2} + \cot\frac{b}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{c}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}^2\frac{b}{2} - \cot^2\frac{b}{2}\right)\operatorname{tang}^2\frac{c}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}^3\frac{b}{2} + \cot^3\frac{b}{2}\right)\operatorname{tang}^3\frac{c}{2}\sin 3\alpha - \dots,$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha + \left(\operatorname{tang}\frac{b}{2} - \cot\frac{b}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{c}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}^2\frac{b}{2} + \cot^2\frac{b}{2}\right)\operatorname{tang}^2\frac{c}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}^3\frac{b}{2} - \cot^3\frac{b}{2}\right)\operatorname{tang}^3\frac{c}{2}\sin 3\alpha - \dots.$$

Et de même les premières formules des n^os^ **23** et **24** donneront

$$c = \left(\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} + \cot\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}^2\frac{\beta}{2} - \cot^2\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{tang}^2\frac{\gamma}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}^3\frac{\beta}{2} + \cot^3\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{tang}^3\frac{\gamma}{2}\sin 3\alpha + \dots$$

$$b = \alpha + \left(\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} - \cot\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{\gamma}{2}\sin\alpha + \frac{1}{2}\left(\operatorname{tang}^2\frac{\beta}{2} + \cot^2\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{tang}^2\frac{\gamma}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}^3\frac{\beta}{2} - \cot^3\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{tang}^3\frac{\gamma}{2}\sin 3\alpha + \dots.$$

Ainsi lorsqu'on connaît, dans un triangle sphérique quelconque, deux côtés b, c et l'angle α compris entre ces côtés, on pourra, par les deux premières formules, trouver les deux autres angles β et γ opposés aux côtés b et c, et ces formules seront d'autant plus convergentes que le côté c sera plus petit et que le côté b sera plus près de 90 degrés.

Pareillement, si l'on connaît un côté a et les deux angles β, γ adjacents à ce côté, on aura par les deux dernières formules les deux autres côtés b et c opposés aux angles β et γ; et ces formules seront d'autant plus convergentes que l'angle γ sera plus petit et que l'autre angle β sera plus près de 90 degrés.

27. Si l'on imagine que le pôle de l'équateur, celui de l'écliptique et le lieu d'un astre quelconque soient joints par trois arcs de grands cercles, et qu'on dénote par c l'arc qui joint les deux pôles, par a l'arc qui joint le lieu de l'astre et le pôle de l'équateur, et par b l'arc qui joint le lieu de l'astre et le pôle de l'écliptique, il est clair qu'on aura un triangle sphérique dont les trois côtés seront a, b, c, et il est visible que le côté c sera égal à l'obliquité de l'écliptique, que le côté a sera le complément à 90 degrés de la déclinaison de l'astre, et que le côté b sera le complément à 90 degrés de la latitude de l'astre. Ensuite, si l'on nomme, comme plus haut, α, β, γ les angles respectivement opposés aux côtés a, b, c, il n'est pas difficile de voir que l'angle γ sera l'angle de position de l'astre, que l'angle α sera le complément à 90 degrés de la longitude de l'astre, et que l'angle β sera l'ascension droite de l'astre augmentée de 90 degrés.

Soit donc un astre dont la longitude soit L, la latitude λ, l'ascension droite D, la déclinaison δ, son angle de position p, on aura

$$a = 90^\circ - \delta, \quad b = 90^\circ - \lambda, \quad \alpha = 90^\circ - \mathrm{L}, \quad \beta = 90^\circ + \mathrm{D}, \quad \gamma = p,$$

et nommant c l'obliquité de l'écliptique, les deux premières formules du n° **26**, à cause de

$$\operatorname{tang}\frac{b}{2} = \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right), \quad \cot\frac{b}{2} = \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\lambda}{2}\right),$$

donneront

$$\begin{aligned} p = {} & \left[\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\lambda}{2}\right) + \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right)\right] \operatorname{tang}\frac{c}{2}\cos \mathrm{L} \\ & + \frac{1}{2}\left[\operatorname{tang}^2\left(45^\circ + \frac{\lambda}{2}\right) - \operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right)\right] \operatorname{tang}^2\frac{c}{2}\sin 2\mathrm{L} \\ & - \frac{1}{3}\left[\operatorname{tang}^3\left(45^\circ + \frac{\lambda}{2}\right) + \operatorname{tang}^3\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right)\right] \operatorname{tang}^3\frac{c}{2}\cos 3\mathrm{L} \\ & - \frac{1}{4}\left[\operatorname{tang}^4\left(45^\circ + \frac{\lambda}{2}\right) - \operatorname{tang}^4\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right)\right] \operatorname{tang}^4\frac{c}{2}\sin 4\mathrm{L} \\ & + \text{.....}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{D} = \mathrm{L} & - \left[\operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\lambda}{2}\right) - \operatorname{tang}\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right)\right] \operatorname{tang}\frac{c}{2}\cos \mathrm{L} \\ & - \frac{1}{2}\left[\operatorname{tang}^2\left(45^\circ + \frac{\lambda}{2}\right) + \operatorname{tang}^2\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right)\right] \operatorname{tang}^2\frac{c}{2}\sin 2\mathrm{L} \\ & + \frac{1}{3}\left[\operatorname{tang}^3\left(45^\circ + \frac{\lambda}{2}\right) - \operatorname{tang}^3\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right)\right] \operatorname{tang}^3\frac{c}{2}\cos 3\mathrm{L} \\ & + \frac{1}{4}\left[\operatorname{tang}^4\left(45^\circ + \frac{\lambda}{2}\right) + \operatorname{tang}^4\left(45^\circ - \frac{\lambda}{2}\right)\right] \operatorname{tang}^4\frac{c}{2}\sin 4\mathrm{L} \\ & - \text{.....} \end{aligned}$$

Ces deux formules sont fort remarquables par leur simplicité et par l'usage dont elles peuvent être dans l'Astronomie; la seconde surtout peut être d'une grande utilité pour réduire les longitudes et les latitudes des planètes en ascensions droites et en déclinaisons; car à cause que λ n'est jamais > 9 degrés pour les planètes, on aura immédiatement la différence entre la longitude L et l'ascension droite D par une série fort convergente; dès qu'on aura trouvé D, on aura la déclinaison δ par une seule analogie, parce que dans le triangle dont les côtés sont a, b, c, et les angles opposés α, β, γ, on a

$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta,$$

et, mettant pour a, b, α, β les valeurs ci-dessus,

$$\cos\delta : \cos\lambda = \cos \mathrm{L} : \cos \mathrm{D};$$

d'où

$$\cos\delta = \frac{\cos\lambda \cos \mathrm{L}}{\cos \mathrm{D}}\ (*).$$

28. L'analyse que nous avons exposée au commencement de ce Mémoire peut aussi être employée directement à résoudre d'autres équations plus compliquées que celle à laquelle nous l'avons appliquée. C'est ce que je vais indiquer en peu de mots.

(*) Les deux formules précédentes ont déjà été publiées sans démonstration dans le troisième volume des *Tables astronomiques de l'Académie*.

Soit, par exemple, l'équation

$$\operatorname{tang} x = \frac{a \sin y}{\cos y + p},$$

a étant une quantité qui diffère peu de l'unité, et p une quantité très-petite; je forme l'équation

$$\frac{1 + \operatorname{tang} x \sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang} x \sqrt{-1}} = \frac{\cos y + p + a \sin y \sqrt{-1}}{\cos y + p - a \sin y \sqrt{-1}},$$

laquelle, en introduisant les exponentielles imaginaires, se réduit à

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}} + 2p + a\left(e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}\right)}{e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}} + 2p - a\left(e^{y\sqrt{-1}} - e^{-y\sqrt{-1}}\right)},$$

ou bien

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{2y\sqrt{-1}} \frac{1 + \frac{2p}{1+a} e^{-y\sqrt{-1}} + \frac{1-a}{1+a} e^{-2y\sqrt{-1}}}{1 + \frac{2p}{1+a} e^{y\sqrt{-1}} + \frac{1-a}{1+a} e^{2y\sqrt{-1}}}.$$

Soient

$$1 + Pz, \quad 1 + Qz$$

les deux facteurs du trinôme

$$1 + \frac{2p}{1+a} z + \frac{1-a}{1+a} z^2,$$

l'équation précédente pourra se mettre sous cette forme

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{2y\sqrt{-1}} \frac{\left(1 + Pe^{-y\sqrt{-1}}\right)\left(1 + Qe^{-y\sqrt{-1}}\right)}{\left(1 + Pe^{y\sqrt{-1}}\right)\left(1 + Qe^{y\sqrt{-1}}\right)};$$

prenant les logarithmes des deux membres, réduisant en série les logarithmes des facteurs $1 + Pe^{-y\sqrt{-1}}, \ldots$, et remettant à la place des exponentielles imaginaires les sinus correspondants, on aura sur-le-champ

$$x = y - (P + Q) \sin y + \frac{P^2 + Q^2}{2} \sin 2y - \frac{P^3 + Q^3}{3} \sin 3y + \ldots;$$

or, comme les quantités p et $1 - a$ sont très-petites (hypothèse), il est clair que les quantités P et Q le seront aussi; d'où il s'ensuit que la série précédente sera nécessairement convergente.

29. Soit encore l'équation

$$\operatorname{tang} x = \frac{a \sin 2y + b \sin y}{\cos 2y + p \cos y + q},$$

a étant peu différent de l'unité, et b, p, q des coefficients fort petits; on aura d'abord

$$\frac{1 + \operatorname{tang} x \sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang} x \sqrt{-1}} = \frac{\cos 2y + p \cos y + q + (a \sin 2y + b \sin y)\sqrt{-1}}{\cos 2y + p \cos y + q - (a \sin 2y + b \sin y)\sqrt{-1}},$$

ce qui se réduit à

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{(1+a)e^{2y\sqrt{-1}} + (1-a)e^{-2y\sqrt{-1}} + (p+b)e^{y\sqrt{-1}} + (p-b)e^{-y\sqrt{-1}} + 2q}{(1+a)e^{-2y\sqrt{-1}} + (1-a)e^{2y\sqrt{-1}} + (p+b)e^{-y\sqrt{-1}} + (p-b)e^{y\sqrt{-1}} + 2q},$$

ou bien à

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{4y\sqrt{-1}} \frac{1 + \frac{p+b}{1+a} e^{-y\sqrt{-1}} + \frac{2q}{1+a} e^{-2y\sqrt{-1}} + \frac{p-b}{1+a} e^{-3y\sqrt{-1}} + \frac{1-a}{1+a} e^{-4y\sqrt{-1}}}{1 + \frac{p+b}{1+a} e^{y\sqrt{-1}} + \frac{2q}{1+a} e^{2y\sqrt{-1}} + \frac{p-b}{1+a} e^{3y\sqrt{-1}} + \frac{1-a}{1+a} e^{4y\sqrt{-1}}}.$$

Soient maintenant

$$1 + Pz, \quad 1 + Qz, \quad 1 + Rz, \quad 1 + Sz$$

les facteurs simples du quadrinôme

$$1 + \frac{p+b}{1+a} z + \frac{2q}{1+a} z^2 + \frac{p-b}{1+a} z^3 + \frac{1-a}{1+a} z^4;$$

l'équation précédente deviendra

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{4y\sqrt{-1}} \frac{\left(1 + Pe^{-y\sqrt{-1}}\right)\left(1 + Qe^{-y\sqrt{-1}}\right)\left(1 + Re^{-y\sqrt{-1}}\right)\left(1 + Se^{-y\sqrt{-1}}\right)}{\left(1 + Pe^{y\sqrt{-1}}\right)\left(1 + Qe^{y\sqrt{-1}}\right)\left(1 + Re^{y\sqrt{-1}}\right)\left(1 + Se^{y\sqrt{-1}}\right)},$$

d'où l'on tire, en prenant les logarithmes, réduisant en série, et remettant les sinus à la place des exponentielles imaginaires,

$$x = 2y - (P + Q + R + S)\sin y + \frac{P^2 + Q^2 + R^2 + S^2}{2}\sin 2y$$
$$- \frac{P^3 + Q^3 + R^3 + S^3}{3}\sin 3y + \frac{P^4 + Q^4 + R^4 + S^4}{4}\sin 4y - \ldots.$$

On pourrait de même résoudre l'équation

$$\operatorname{tang} x = \frac{a\sin 3y + b\sin 2y + c\sin y}{\cos 3y + p\cos 2y + q\cos y + r},$$

et ainsi de suite.

30. Supposons enfin que l'on ait à résoudre une équation de cette forme

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin y + p\sin 2y + q\sin 3y + \ldots}{\cos y + p\cos 2y + q\cos 3y + \ldots},$$

$p, q, \ldots$ étant des coefficients très-petits; on la réduira d'abord à la forme

$$\frac{1 + \operatorname{tang} x\sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang} x\sqrt{-1}} = \frac{(\cos y + \sin y\sqrt{-1}) + p(\cos 2y + \sin 2y\sqrt{-1}) + \ldots}{(\cos y - \sin y\sqrt{-1}) + p(\cos 2y - \sin 2y\sqrt{-1}) + \ldots},$$

savoir

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{e^{y\sqrt{-1}} + pe^{2y\sqrt{-1}} + qe^{3y\sqrt{-1}} + \ldots}{e^{-y\sqrt{-1}} + pe^{-2y\sqrt{-1}} + qe^{-3y\sqrt{-1}} + \ldots},$$

ou bien

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{2y\sqrt{-1}}\,\frac{1 + pe^{y\sqrt{-1}} + qe^{2y\sqrt{-1}} + \ldots}{1 + pe^{-y\sqrt{-1}} + qe^{-2y\sqrt{-1}} + \ldots}.$$

Soient à présent

$$1 + Pz, \quad 1 + Qz, \ldots$$

les facteurs du multinôme

$$1 + pz + qz^2 + \ldots;$$

l'équation précédente deviendra

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{2y\sqrt{-1}}\,\frac{(1 + Pe^{y\sqrt{-1}})(1 + Qe^{y\sqrt{-1}})\ldots}{(1 + Pe^{-y\sqrt{-1}})(1 + Qe^{-y\sqrt{-1}})\ldots},$$

d'où l'on tire par les logarithmes, comme plus haut,

$$x = y + (P + Q + \ldots)\sin y - \frac{P^2 + Q^2 + \ldots}{2}\sin 2y + \frac{P^3 + Q^3 + \ldots}{3}\sin 3y - \ldots.$$

31. Si la valeur de $\operatorname{tang} x$ contenait des sinus et des cosinus tant au numérateur qu'au dénominateur, comme si l'on avait à résoudre l'équation

$$\operatorname{tang} x = \frac{a\sin y + b\cos y}{\cos y + p\sin y},$$

on pourrait aussi par la même méthode trouver une série convergente pour exprimer la valeur de x en y, pourvu que a fût toujours peu différent de l'unité, et b, p des coefficients fort petits relativement à a.

En effet on aura alors

$$\frac{1 + \operatorname{tang} x\sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang} x\sqrt{-1}} = \frac{(\cos y + p\sin y) + (a\sin y + b\cos y)\sqrt{-1}}{(\cos y + p\sin y) - (a\sin y + b\cos y)\sqrt{-1}},$$

et passant aux exponentielles

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{[1 + a + (b - p)\sqrt{-1}]e^{y\sqrt{-1}} + [1 - a + (b + p)\sqrt{-1}]e^{-y\sqrt{-1}}}{[1 - a - (b + p)\sqrt{-1}]e^{y\sqrt{-1}} + [1 + a - (b - p)\sqrt{-1}]e^{-y\sqrt{-1}}},$$

ou bien

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{2y\sqrt{-1}}\,\frac{[1 + a + (b - p)\sqrt{-1}] + [1 - a + (b + p)\sqrt{-1}]e^{-2y\sqrt{-1}}}{[1 + a - (b - p)\sqrt{-1}] + [1 - a - (b + p)\sqrt{-1}]e^{2y\sqrt{-1}}}.$$

Soit maintenant

$$\frac{b - p}{1 + a} = \operatorname{tang}\alpha, \quad \frac{b + p}{1 - a} = \operatorname{tang}\beta,$$

on aura

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{2y\sqrt{-1}}\,\frac{(1 + a)(1 + \operatorname{tang}\alpha\sqrt{-1}) + (1 - a)(1 + \operatorname{tang}\beta\sqrt{-1})e^{-2y\sqrt{-1}}}{(1 + a)(1 - \operatorname{tang}\alpha\sqrt{-1}) + (1 - a)(1 - \operatorname{tang}\beta\sqrt{-1})e^{2y\sqrt{-1}}};$$

mais

$$1 \pm \operatorname{tang}\alpha\sqrt{-1} = \frac{e^{\pm\alpha\sqrt{-1}}}{\cos\alpha}, \quad 1 \pm \operatorname{tang}\beta\sqrt{-1} = \frac{e^{\pm\beta\sqrt{-1}}}{\cos\beta};$$

donc substituant ces valeurs, divisant le haut et le bas de la fraction par $\frac{1+a}{\cos\alpha}$, et faisant, pour abréger,

$$\frac{1-a}{1+a}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = k,$$

on aura

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{2y\sqrt{-1}}\,\frac{e^{\alpha\sqrt{-1}} + k\,e^{\beta\sqrt{-1}} \times e^{-2y\sqrt{-1}}}{e^{-\alpha\sqrt{-1}} + k\,e^{-\beta\sqrt{-1}} \times e^{2y\sqrt{-1}}},$$

savoir

$$e^{2x\sqrt{-1}} = e^{2(y+\alpha)\sqrt{-1}}\,\frac{1 + k\,e^{-(2y+\alpha-\beta)\sqrt{-1}}}{1 + k\,e^{(2y+\alpha-\beta)\sqrt{-1}}},$$

d'où en prenant les logarithmes, réduisant en série, divisant par $2\sqrt{-1}$, et repassant des exponentielles imaginaires aux sinus et cosinus réels, on tire sur-le-champ

$$x = y + \alpha - k\sin(2y+\alpha-\beta) + \frac{k^2}{2}\sin 2(2y+\alpha-\beta) - \frac{k^3}{3}\sin 3(2y+\alpha-\beta) + \ldots.$$

Or on a

$$\cos\alpha = \frac{1+a}{\sqrt{(1+a)^2+(b-p)^2}}, \quad \cos\beta = \frac{1-a}{\sqrt{(1-a)^2+(b+p)^2}};$$

donc on aura

$$k = \frac{\sqrt{(1-a)^2+(b+p)^2}}{\sqrt{(1+a)^2+(b-p)^2}},$$

quantité qui est, comme on voit, très-petite de l'ordre de $1-a$, b, p; ainsi la série précédente sera nécessairement convergente.

Au reste on voit par là que pourvu que a diffère peu de l'unité, et que b diffère en même temps peu de $-p$, la quantité k sera nécessairement très-petite du même ordre que ces différences; par conséquent la série sera convergente, sans qu'il soit nécessaire que b et p soient à la fois très-petites l'une et l'autre.

SUR

L'USAGE DES FRACTIONS CONTINUES

DANS LE CALCUL INTÉGRAL.

SUR

L'USAGE DES FRACTIONS CONTINUES

DANS LE CALCUL INTÉGRAL (*).

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1776.)

J'ai fait voir ailleurs combien la méthode des fractions continues est utile dans l'Algèbre; je me propose maintenant d'en montrer aussi l'usage dans le Calcul intégral. On connait depuis longtemps la méthode des séries pour intégrer par approximation les équations différentielles dont l'intégrale finie est impossible, ou du moins très-difficile à trouver; mais cette méthode a l'inconvénient de donner des suites infinies lors même que ces suites peuvent être représentées par des expressions rationnelles finies. La méthode des fractions continues a tous les avantages de celle des séries et est en même temps exempte de l'inconvénient dont nous venons de parler; car, par cette méthode, on est assuré de trouver directement la valeur rationnelle et finie de la quantité cherchée lorsqu'elle en a une, parce qu'alors l'opération se termine d'elle-même; et quand l'opération va à l'infini, on a une marque certaine que la quantité cherchée ne peut être exprimée par une fonction rationnelle et finie. Enfin

(*) Lu le 18 juillet 1776.

cette méthode sert à ramener à l'intégration beaucoup d'équations différentielles qui échappent aux autres méthodes du Calcul intégral.

1. Soit une équation différentielle quelconque entre deux variables x et y, d'où il s'agisse de tirer la valeur de y en x par approximation.

Pour employer dans cette recherche la méthode des fractions continues, on commencera par chercher par les méthodes connues le premier terme de la valeur de y en x lorsque x est supposée très-petite, et nommant ce terme ξ, on fera

$$y = \frac{\xi}{1 + y'};$$

substituant ensuite cette expression de y dans l'équation proposée, on aura une nouvelle équation du même ordre et du même degré entre x et y', dans laquelle, en supposant x très-petite, y' sera aussi nécessairement très-petite.

Soit ξ' le premier terme de la valeur de y' en x dans le cas de x très-petite; on fera

$$y' = \frac{\xi'}{1 + y''},$$

et, substituant cette expression de y' dans l'équation entre x et y', on aura une nouvelle équation du même ordre et du même degré entre x et y'', dans laquelle y'' sera nécessairement très-petite lorsque x sera supposée très-petite. Soit donc ξ'' le premier terme de la valeur de y'' en x dans le cas de x très-petite; on fera

$$y'' = \frac{\xi''}{1 + y'''},$$

et, substituant cette expression de y'' dans l'équation, on en aura une nouvelle entre x et y''', dans laquelle y''' sera nécessairement très-petite lorsqu'on supposera x très-petite. On nommera ξ''' le premier terme de la valeur de y''' en x dans le cas de x très-petite, et l'on fera

$$y''' = \frac{\xi'''}{1 + y''''};$$

et ainsi de suite.

De cette manière, en substituant successivement les valeurs de y', y'', y''', on aura

$$y = \cfrac{\xi}{1 + \cfrac{\xi'}{1 + \cfrac{\xi''}{1 + \cfrac{\xi'''}{1 + \&c.}}}}.$$

S'il arrive que quelqu'une des équations transformées soit intégrable exactement, en sorte qu'on ait la valeur finie d'une des y', y'', y''', ... en x, il n'y aura qu'à substituer cette valeur dans la fraction continue, on aura la valeur exacte de y en x. Dans tous les autres cas la fraction continue ira à l'infini; mais comme nous avons vu que les quantités y', y'', y''', ... sont toujours nécessairement très-petites lorsque x est supposée très-petite, il s'ensuit que les quantités ξ', ξ'', ξ''', ... seront aussi très-petites dans la même supposition; par conséquent la fraction continue sera toujours d'autant plus convergente que x sera plus-petite, et approchera d'autant plus de la vraie valeur de y qu'on y prendra plus de termes. A l'égard des quantités ξ, ξ', ξ'', ... il est clair qu'elles seront nécessairement de la forme ax^α, l'exposant α devant être un nombre positif pour chacune de ces quantités excepté la première ξ, pour laquelle le nombre α pourra être positif, ou négatif, ou zéro. Ainsi toute la difficulté consiste à déterminer cet exposant α avec le coefficient a.

2. Considérons, en général, une équation quelconque entre les deux variables x et y, d'où il s'agisse de tirer la valeur de y en x dans l'hypothèse de x très-petite; comme cette valeur ne peut être représentée que par ax^α, qu'on substitue partout ax^α à la place de y et de ses différentielles, s'il y en a, et après avoir délivré l'équation des irrationnalités et des fractions complexes, il est clair qu'elle se réduira à une suite de termes de la forme $Aa^m x^{\alpha m + n}$; or, puisque cette équation n'est censée avoir lieu que dans le cas de x très-petite, il faudra négliger vis-à-vis d'un quelconque de ses termes tous ceux qui seront affectés d'une puis-

sance plus haute de x; de sorte que l'équation se réduira à un certain nombre de termes tous affectés de la même puissance de x, cette puissance étant la plus basse qu'il y ait dans l'équation proposée; par ce moyen l'x disparaîtra, et il restera une équation entre les coefficients, laquelle servira à déterminer la constante a.

Si l'exposant α était connu, il n'y aurait, comme on voit, aucune difficulté à déterminer le coefficient a; or, comme α est indéterminé, on peut lui donner telle valeur que l'on veut; il faut seulement que cette valeur soit telle, que la plus petite puissance de x se trouve au moins dans deux termes de l'équation, afin qu'après la division par cette puissance de x on ait une équation entre les seuls coefficients, à laquelle on puisse satisfaire par la détermination du coefficient a.

Tout se réduit donc à déterminer la quantité α par cette condition, que la plus petite puissance de x se trouve au moins dans deux termes de l'équation. MM. Tailor et Stirling ont donné pour cela des méthodes qu'on peut voir dans le *Methodus incrementorum* (Proposition 9) et dans les *Lineæ tertii ordinis* (Problème II); mais comme la méthode du premier demande une espèce de construction géométrique, et que celle du second dépend du *parallélogramme* de Newton, et par conséquent ne peut être regardée que comme une méthode mécanique, je crois que les Géomètres seront bien aises de voir comment on peut résoudre cette question par une méthode purement analytique.

3. J'observe d'abord que, si, après avoir réduit l'équation à une suite de termes de la forme $Aa^m x^{m\alpha+n}$, on a différents termes dans l'exposant desquels le nombre m soit le même, il suffira d'avoir égard à celui de ces termes où le nombre n sera le plus petit, parce qu'il est évident que dans la supposition de x très-petite le terme dont il s'agit sera comme infiniment plus grand que les autres. De cette manière on n'aura dans l'équation que des termes où le nombre m sera différent de l'un à l'autre. Ainsi dénotant ces différentes valeurs de m par m, m', m'', m''',..., en sorte que ces nombres forment une suite croissante, et désignant par n, n', n'', n''',... et par A, A', A'', A'''... les valeurs correspondantes de n et de A,

on aura l'équation

$$A a^m x^{m\alpha+n} + A' a^{m'} x^{m'\alpha+n'} + A'' a^{m''} x^{m''\alpha+n''} + A''' a^{m'''} x^{m'''\alpha+n'''} + \ldots = 0,$$

dans laquelle il s'agira de déterminer le nombre α, en sorte que les exposants de deux ou de plusieurs termes deviennent égaux et en même temps plus petits que ceux des autres termes.

Ce Problème se réduit donc, comme on voit, à celui-ci :

4. *Étant donnée une série telle que*

$$m\alpha + n, \quad m'\alpha + n', \quad m''\alpha + n'', \quad m'''\alpha + n''', \quad m''''\alpha + n'''', \ldots,$$

dans laquelle m, m', m'', m''',... soient des nombres connus qui forment une progression croissante quelconque, n, n', n'', n''',... des nombres aussi connus quelconques, et α un nombre inconnu; déterminer le nombre α en sorte que deux ou plusieurs termes de cette série deviennent égaux, et soient en même temps moindres qu'aucun des autres termes.

Il est clair qu'on pourrait résoudre cette question en égalant successivement deux à deux tous les termes de la série proposée, et substituant ensuite dans tous les autres termes les valeurs de α tirées de chacune de ces égalités; on trouverait sûrement de cette manière toutes les valeurs convenables de α, en rejetant celles qui n'auraient pas la condition requise; mais ce calcul demanderait plusieurs opérations inutiles : c'est pourquoi il est bon de chercher des moyens de l'abréger.

Je commence par comparer le premier terme $m\alpha + n$ à chacun des suivants $m'\alpha + n'$, $m''\alpha + n''$,..., et j'en tire ces valeurs de α

$$\frac{n'-n}{m-m'}, \quad \frac{n''-n}{m-m''}, \quad \frac{n'''-n}{m-m'''}, \ldots$$

que je dénote pour plus de simplicité par α', α'', α''',...; nommant ensuite ε

le premier terme $m\alpha + n$, je mets la série proposée sous cette forme

$$\varepsilon,\ \varepsilon + (m' - m)(\alpha - \alpha'),\ \varepsilon + (m'' - m)(\alpha - \alpha''),\ \varepsilon + (m''' - m)(\alpha - \alpha'''), \ldots.$$

Ici l'on voit clairement que, si l'on fait α égal à la plus grande des quantités α', α'', α''', ..., le terme qui répond à cette quantité deviendra égal au premier terme ε, et que tous les autres termes seront plus grands que ε, à cause que les quantités $m' - m$, $m'' - m$, $m''' - m$ sont (hypothèse) toutes positives.

Si parmi les quantités α', α'', α''', ... il y en avait deux ou plusieurs égales entre elles et qui fussent en même temps plus grandes qu'aucune des autres, en faisant α égale à ces quantités, on aurait tout autant de termes égaux au premier terme ε, et les autres termes seraient tous plus grands que ε.

Ayant trouvé ainsi une valeur de α qui résout le Problème, voyons comment on en pourra trouver encore d'autres, s'il y en a.

Et d'abord il est facile de voir qu'en donnant à α une valeur plus grande que la plus grande des quantités α', α'', α''', ..., tous les termes qui suivent le premier ε seront nécessairement plus grands que celui-ci; ainsi il est impossible de trouver, par ce moyen, deux termes égaux, et qui soient en même temps les plus petits; par conséquent, s'il existe d'autres valeurs de α qui aient la condition requise, elles doivent être moindres que la plus grande des quantités α', α'', α''', ... Supposons, pour fixer les idées, que α^{ν} soit cette plus grande quantité, et si deux ou plusieurs de ces quantités sont à la fois les plus grandes, soit α^{ν} la dernière d'entre elles; il est facile de voir que dans la série proposée tous les termes qui précéderont le terme $\varepsilon + (m^{\nu} - m)(\alpha - \alpha^{\nu})$ seront nécessairement toujours plus grands que celui-ci, tant qu'on donnera à α une valeur moindre que α^{ν}, et cela parce que les quantités $m' - m$, $m'' - m$, $m''' - m$, ... forment une suite croissante de quantités toutes positives; on pourra donc faire abstraction de ces termes, et ne considérer que le terme $\varepsilon + (m^{\nu} - m)(\alpha - \alpha^{\nu})$ avec tous les suivants; car il est clair que les plus petits d'entre ces termes seront en même temps moindres qu'aucun des termes qui précèdent celui dont nous venons de parler.

Or le terme dont il s'agit est $m^{\nu}\alpha + n^{\nu}$ dans la série primitive; ainsi il n'y aura qu'à considérer la série

$$m^{\nu}\alpha + n^{\nu},\quad m^{\nu+1}\alpha + n^{\nu+1},\quad m^{\nu+2}\alpha + n^{\nu+2}, \ldots,$$

et y appliquer la méthode précédente; et ainsi de suite.

Voici donc à quoi se réduit la solution du Problème proposé.

On égalera successivement le premier terme de la série donnée à chacun des suivants, et l'on tirera la valeur de α de chacune de ces égalités; la plus grande de ces différentes valeurs de α résoudra la question; et les termes, qui forment l'égalité ou les égalités d'où elle est déduite, deviendront les plus petits. On partira ensuite du dernier de ces termes, c'est-à-dire de celui qui est le plus éloigné du commencement de la série, et on l'égalera successivement à chacun des suivants, en tirant la valeur de α de chacune de ces égalités; la plus grande de ces différentes valeurs de α résoudra aussi la question, et rendra les plus petits les termes qui ont produit l'égalité ou les égalités d'où cette valeur de α résulte. On partira de nouveau du dernier de ces termes et l'on opérera comme nous venons de le dire; et ainsi de suite, tant qu'il y aura des termes dans la série. On trouvera de cette manière toutes les valeurs de α qui peuvent résoudre la question, et on trouvera d'abord la plus grande, ensuite les autres suivant l'ordre de leur grandeur en diminuant.

Cette méthode a sur celles de MM. Taylor et Stirling non-seulement l'avantage d'être purement analytique, mais encore celui de pouvoir toujours être appliquée avec la même facilité, quels que soient les nombres donnés m, n, m', n', m'', n'', ..., entiers ou fractionnaires, ou même irrationnels.

Soit, par exemple, la série de six termes

$$0,\quad \alpha + 3,\quad 2\alpha - 1,\quad 4\alpha - 5,\quad 5\alpha + 2,\quad 6\alpha - 3;$$

en égalant d'abord le premier terme 0 à chacun des suivants, on trouve ces valeurs de α

$$-3,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{5}{4},\quad -\frac{2}{5},\quad \frac{3}{6},$$

dont la plus grande est $\frac{5}{4}$, qui résulte de la comparaison du premier et du quatrième terme; on égalera maintenant le quatrième terme $4\alpha - 5$ à chacun des deux suivants, et l'on trouvera ces valeurs de α

$$-7, \quad -1,$$

dont la plus grande est -1, qui résulte de la comparaison du quatrième terme et du dernier. Ainsi l'opération est achevée, et les valeurs convenables de α sont $\frac{5}{4}$ et -1. En effet, si l'on substitue ces valeurs, la série devient dans le premier cas

$$0, \quad \frac{17}{4}, \quad \frac{3}{2}, \quad 0, \quad \frac{33}{4}, \quad \frac{9}{2},$$

et dans le second cas

$$0, \quad 2, \quad -3, \quad -9, \quad -3, \quad -9.$$

5. La méthode précédente servira donc à trouver toutes les valeurs qu'on peut donner à l'exposant α (3); et pour déterminer les valeurs correspondantes du coefficient a, il n'y aura qu'à égaler à zéro la somme des coefficients des termes de l'équation, dont les exposants deviendront égaux et en même temps les plus petits.

Ainsi, par exemple, la quantité α^{ν} étant la plus grande (numéro précédent), pour avoir la valeur correspondante du coefficient a, il faudra égaler à zéro la somme des deux coefficients Aa^{m} et $A^{\nu}a^{m^{\nu}}$, ce qui donne l'équation

$$Aa^{m} + A^{\nu}a^{m^{\nu}} = 0, \quad \text{d'où l'on tire} \quad a = \left(-\frac{A}{A^{\nu}}\right)^{\frac{1}{m^{\nu}-m}};$$

et si les deux quantités α'' et α^{ν} étaient en même temps égales et les plus grandes, on égalerait à zéro la somme des trois coefficients Aa^{m}, $A''a^{m''}$, $A^{\nu}a^{m^{\nu}}$, ce qui donnerait

$$Aa^{m} + A''a^{m''} + A^{\nu}a^{m^{\nu}} = 0,$$

savoir, en divisant par a^{m},

$$A + A''a^{m''-m} + A^{\nu}a^{m^{\nu}-m} = 0;$$

d'où l'on tirerait a; et ainsi du reste.

Il peut arriver au reste que, par les réductions du n° 3, l'équation se trouve réduite à un seul terme comme $Aa^{m}x^{m\alpha+n}$; dans ce cas il faudra faire $A = 0$, ce qui donnera une équation qui servira à déterminer la quantité α, c'est-à-dire l'exposant; et le coefficient a demeurera absolument indéterminé et par conséquent arbitraire. Ce cas doit nécessairement arriver dans la résolution des équations différentielles, qui admettent des constantes arbitraires; mais il ne pourra jamais avoir lieu lorsqu'il s'agira d'équations finies.

6. Si, dans le Problème du n° 4, on voulait déterminer le nombre α, en sorte que deux ou plusieurs termes de la série donnée devinssent égaux, et en même temps plus grands qu'aucun des autres termes, la solution serait la même, avec cette seule différence qu'au lieu de prendre pour la valeur de α la plus grande des quantités α', α'', α''',... il faudrait au contraire en prendre la plus petite, et il faudrait continuer ainsi à prendre toujours la plus petite des valeurs de α tirées des différentes égalités; c'est ce qui est aisé à démontrer par les mêmes principes. Par cette méthode on pourra déterminer la valeur de y en x dans l'hypothèse de x infiniment grande, en suivant le même procédé que nous avons prescrit dans les n°s 3 et 4, à cela près que, si après la substitution de ax^{α} à la place de y il se trouve différentes puissances de x dans les exposants desquelles il y ait le même multiple de α, il ne faudra retenir que celle de ces puissances dont l'exposant sera le plus grand.

Si l'on détermine de cette manière les termes ξ, ξ', ξ'',... de la fraction continue, elle sera alors d'autant plus convergente que x sera plus grande.

Ainsi l'on pourra toujours trouver pour chaque valeur de y deux différentes fractions continues; et si l'une de ces fractions est finie, l'autre le

sera aussi nécessairement, puisque ces fractions étant réduites en fractions ordinaires doivent être identiques.

7. Soit proposée une équation différentielle de la forme suivante qui est très-générale

$$N + Py + Qy^2 + R\frac{dy}{dx} = 0,$$

N, P, Q, R étant des fonctions quelconques de x.

Si l'on substitue, dans cette équation, $\frac{\xi}{1+y'}$ à la place de y (1), on aura cette transformée en y'

$$N' + P'y' + Q'y'^2 + R'\frac{dy'}{dx} = 0,$$

dans laquelle

$$N' = N + P\xi + Q\xi^2 + R\frac{d\xi}{dx}, \quad P' = 2N + P\xi + R\frac{d\xi}{dx}, \quad Q' = N, \quad R' = -R\xi.$$

En substituant de même, dans cette dernière équation, $\frac{\xi'}{1+y''}$ à la place de y', on aura cette nouvelle transformée

$$N'' + P''y'' + Q''y''^2 + R''\frac{dy''}{dx} = 0,$$

dans laquelle

$$N'' = N' + P'\xi' + Q'\xi'^2 + R'\frac{d\xi'}{dx}, \quad P'' = 2N' + P'\xi' + R'\frac{d\xi'}{dx}, \quad Q'' = N', \quad R'' = -R'\xi',$$

et ainsi de suite.

Maintenant, pour déterminer les quantités ξ, ξ', ξ'', ..., il n'y aura qu'à faire dans ces différentes équations

$$y = ax^\alpha, \quad y' = bx^\beta, \quad y'' = cx^\gamma, \ldots,$$

et déterminer ensuite les exposants α, β, γ, ..., ainsi que les coefficients correspondants a, b, c, ..., par les méthodes exposées ci-dessus.

On aura ainsi

$$\xi = ax^\alpha, \quad \xi' = bx^\beta, \quad \xi'' = cx^\gamma, \ldots.$$

S'il arrive que dans quelqu'une des équations transformées le premier terme qui ne renferme point $y^{(\omega\ldots)}$ s'évanouisse, on pourra alors satisfaire à cette équation en faisant $y^{(\omega\ldots)} = 0$; de cette manière l'opération sera terminée, et l'on aura pour la valeur de y une fraction continue finie. Cela arrivera donc lorsque l'une de ces quantités N', N'', N''', N^{IV}, ... sera nulle.

On n'aura cependant par ce moyen qu'une valeur incomplète de y, à moins que les coefficients a, b, c, ... ne renferment déjà une constante arbitraire. Pour trouver dans tous les autres cas la valeur complète de y, il faudra intégrer l'équation en $y^{(\omega\ldots)}$, ce qui est toujours possible.

En effet, comme $N^{(\omega\ldots)} = 0$, cette équation sera

$$P^{(\omega\ldots)}y^{(\omega\ldots)} + Q^{(\omega\ldots)}[y^{(\omega\ldots)}]^2 + R^{(\omega\ldots)}\frac{dy^{(\omega\ldots)}}{dx} = 0;$$

laquelle, en faisant $y^{(\omega\ldots)} = \frac{1}{z}$, se change en celle-ci

$$P^{(\omega\ldots)}z + Q^{(\omega\ldots)}z^2 + R^{(\omega\ldots)}\frac{dz}{dx} = 0,$$

qu'on voit bien être intégrable par les méthodes connues, puisque z n'y est qu'à la première dimension.

Appliquons ces règles à quelques Exemples.

8. Soit l'équation

$$my + (1+x)\frac{dy}{dx} = 0,$$

dans laquelle on demande la valeur de y en x par une fraction continue d'autant plus convergente que x sera plus petite.

Substituant d'abord ax^α à la place de y, et divisant par ax^α, on a

$$m + \alpha + \frac{\alpha}{x} = 0;$$

dans l'hypothèse de x très-petite cette équation se réduit à $\frac{\alpha}{x} = 0$; donc

$$\alpha = 0,$$

et le coefficient a demeure indéterminé. On aura ainsi

$$\xi = a,$$

et la transformée en y' sera, après les réductions,

$$-m - my' + (1+x)\frac{dy'}{dx} = 0.$$

On fera dans cette équation $y' = bx^{\beta}$, ce qui la réduira à

$$-m + b(\beta - m)x^{\beta} + b\beta x^{\beta-1} = 0;$$

négligeant la puissance x^{β} vis-à-vis de $x^{\beta-1}$, on aura simplement

$$-m + b\beta x^{\beta-1} = 0;$$

donc

$$\beta = 1, \quad b = m.$$

On aura donc

$$\xi' = mx,$$

et la transformée en y'' deviendra

$$(m-1)x + [1 + (m-1)x]y'' + y''^2 + (1+x)x\frac{dy''}{dx} = 0.$$

Faisant $y'' = cx^{\gamma}$, et négligeant d'abord la puissance $x^{\gamma+1}$ vis-à-vis de x^{γ}, on aura l'équation

$$(m-1)x + c(1+\gamma)x^{\gamma} + c^2x^{2\gamma} = 0;$$

je range les trois exposants ainsi, 1, γ, 2γ, et égalant successivement le premier terme de cette série aux deux suivants, j'ai $\gamma = 1$, $\gamma = \frac{1}{2}$; la plus grande de ces deux valeurs étant la première, je l'adopte pour γ, et comme cette valeur vient de la comparaison du premier terme avec le second, je puis encore égaler le second au troisième, ce qui donnera $\gamma = 0$;

mais cette valeur n'est point admissible, parce que γ doit être > 0 (1). J'ai donc uniquement

$$\gamma = 1;$$

et, égalant à zéro la somme des coefficients des deux puissances x et x^2, je trouve, à cause de $\gamma = 1$,

$$c = -\frac{m-1}{2}.$$

Ainsi l'on aura

$$\xi'' = -(m-1)\frac{x}{2};$$

et la transformée en y''' sera

$$-\frac{m+1}{4}x + \left(1 - \frac{m}{2}x\right)y''' + y'''^2 + \frac{(1+x)x}{2}\frac{dy'''}{dx} = 0.$$

On fera $y = ex^{\varepsilon}$ et l'on trouvera par le même procédé que ci-dessus

$$\varepsilon = 1, \quad e = \frac{m+1}{6}.$$

Donc on aura

$$\xi''' = \frac{m+1}{3}\frac{x}{2},$$

et la transformée en y^{IV} se trouvera de cette forme

$$\frac{2(m-2)}{9}x + \left(1 + \frac{m-1}{3}x\right)y^{IV} + y^{IV\,2} + \frac{(1+x)x}{3}\frac{dy^{IV}}{dx} = 0.$$

On tirera de là

$$\xi^{IV} = -\frac{m-2}{3}\frac{x}{2},$$

et ensuite viendra la transformée en y^{V}

$$-\frac{m+2}{8}x + \left(1 - \frac{m}{4}x\right)y^{V} + y^{V\,2} + \frac{(1+x)x}{4}\frac{dy^{V}}{dx} = 0.$$

On en conclura

$$\xi^{V} = \frac{m+2}{5}\frac{x}{2},$$

et il en résultera cette transformée en y^{vi}

$$\frac{3(m-3)}{25}x+\left(1+\frac{m-1}{5}x\right)y^{vi}+y^{vii}+\frac{(1+x)x}{5}\frac{dy^{vi}}{dx}=0.$$

De là on trouvera

$$\xi^{vi}=-\frac{m-3}{5}\frac{x}{2},$$

et l'on aura cette transformée en y^{vii}

$$-\frac{m+3}{12}x+\left(1-\frac{m}{6}x\right)y^{vii}+y^{viii}+\frac{(1+x)x}{6}\frac{dy^{vii}}{dx}=0.$$

On tirera de là

$$\xi^{vii}=\frac{m+3}{7}\frac{x}{2},$$

et la transformée en y^{viii} sera

$$\frac{4(m-4)}{49}x+\left(1+\frac{m-1}{7}x\right)y^{viii}+y^{viiii}+\frac{(1+x)x}{7}\frac{dy^{viii}}{dx}=0.$$

Et ainsi de suite.

Donc on aura pour la valeur de y cette fraction continue

$$y=\cfrac{a}{1+\cfrac{mx}{1-\cfrac{(m-1)\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+1}{3}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{m-2}{3}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+2}{5}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{m-3}{5}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+3}{7}\frac{x}{2}}{1-\ddots}}}}}}}}$$

Et comme cette expression de y renferme une constante arbitraire a, elle doit être regardée comme complète.

Si m est un nombre entier quelconque positif ou négatif, la fraction continue s'arrête, et par conséquent la valeur de y est finie; sinon la fraction continue ira à l'infini.

9. Si l'on prend l'équation proposée

$$my+(1+x)\frac{dy}{dx}=0,$$

et qu'on l'intègre après l'avoir multipliée par $\frac{dx}{(1+x)y}$, on aura

$$\log y+m\log(1+x)=\log k,$$

k étant une constante arbitraire; d'où l'on tire

$$y=\frac{k}{(1+x)^m};$$

or en faisant $x=0$, on a ici $y=k$; et dans l'expression du numéro précédent on a $y=a$ lorsque $x=0$; donc $k=a$; donc

$$(1+x)^m=\frac{a}{y};$$

donc

$$(1+x)^m=1+\cfrac{mx}{1-\cfrac{(m-1)\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+1}{3}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{m-2}{3}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+2}{5}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{m-3}{5}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{m+3}{7}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{m-4}{7}\frac{x}{2}}{1+\ddots}}}}}}}}$$

Cette expression de la puissance d'un binôme, en fraction continue, est assez remarquable, tant par sa simplicité que parce qu'elle a l'avantage d'être finie pour toutes les puissances entières tant positives que négatives. On pourrait aussi la déduire de la formule de Newton par une division continuelle, en opérant comme si l'on voulait chercher le plus grand commun diviseur entre l'unité et cette formule; c'est ce qu'a déjà fait M. Lambert dans le second volume de ses *Beytræge*, etc.; mais, quoique la fraction continue qu'on trouve de cette manière s'accorde dans le fond avec la précédente, elle se présente néanmoins sous une forme beaucoup moins simple et moins élégante. (*Voyez* le § 30 du troisième Mémoire de l'Ouvrage cité.)

10. Comme la quantité $(1+x)^m$ devient, dans le cas de m infiniment petit, $1+m\log(1+x)$, on aura, en supposant m infiniment petit dans la fraction continue ci-dessus, et divisant par m après avoir retranché l'unité de part et d'autre,

$$\log(1+x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{3}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{2}{3}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{2}{5}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{3}{5}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{3}{7}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{4}{7}\frac{x}{2}}{1+\ddots}}}}}}}}$$

Et si l'on met $\frac{x}{m}$ à la place de x, qu'ensuite on suppose m infiniment grand, ce qui donne

$$\left(1+\frac{x}{m}\right)^m=e^x,$$

on aura

$$e^x=1+\cfrac{x}{1-\cfrac{\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{3}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{1}{3}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{5}\frac{x}{2}}{1-\cfrac{\frac{1}{5}\frac{x}{2}}{1+\cfrac{\frac{1}{7}\frac{x}{2}}{1-\ddots}}}}}}}$$

11. On peut encore simplifier ces fractions continues, et, en général, toute fraction continue de la forme

$$\cfrac{\xi}{1+\cfrac{\xi'}{1+\cfrac{\xi''}{1+\cfrac{\xi'''}{1+\ddots}}}}$$

« Pour cela je considère que la fraction

$$\cfrac{p}{1+\cfrac{q}{1+r}}$$

se réduit à celle-ci

$$\frac{p(1+r)}{1+q+r}=\frac{p(1+q+r)-pq}{1+q+r}=p-\frac{pq}{1+q+r};$$

ainsi l'on aura d'abord

$$\cfrac{\xi}{1+\cfrac{\xi'}{1+\cfrac{\xi''}{+\ddots}}}=\xi-\cfrac{\xi\xi'}{1+\xi'+\cfrac{\xi''}{1+\ddots}}$$

et, transformant de même

$$\frac{\xi''}{1+\dfrac{\xi'''}{1+\dfrac{\xi^{iv}}{1+\ldots}}} \quad \text{en} \quad \xi''-\frac{\xi''\xi'''}{1+\xi'''+\dfrac{\xi^{iv}}{1+\ldots}},$$

et ainsi de suite, la fraction proposée deviendra de cette forme

$$\xi-\cfrac{\xi\xi'}{1+\xi'+\xi''-\cfrac{\xi''\xi'''}{1+\xi'''+\xi^{iv}-\cfrac{\xi^{iv}\xi^{v}}{1+\xi^{v}+\xi^{vi}-\cfrac{\xi^{vi}\xi^{vii}}{1+\ldots}}}};$$

et, si l'on ne commence les transformations précédentes qu'au second terme $\frac{\xi'}{1+\ldots}$, on aura une fraction de la forme suivante

$$\cfrac{\xi}{1+\xi'-\cfrac{\xi'\xi''}{1+\xi''+\xi'''-\cfrac{\xi'''\xi^{iv}}{1+\xi^{iv}+\xi^{v}-\cfrac{\xi^{v}\xi^{vi}}{1+\ldots}}}}.$$

12. Si l'on applique ces réductions à la formule du n° 9, on aura ces deux-ci

$$(1+x)^m=1+mx+\cfrac{m(m-1)\frac{x^2}{2}}{1-\cfrac{(m-2)x}{1.3}+\cfrac{\frac{(m+1)(m-2)}{9}\frac{x^2}{4}}{1-\cfrac{(m-2.4)x}{3.5}+\cfrac{\frac{(m+2)(m-3)}{2.5}\frac{x^2}{4}}{1-\cfrac{(m-2.9)x}{5.7}+\ldots}}}$$

$$(1+x)^m=1+\cfrac{mx}{1+(1-m)\frac{x}{2}+\cfrac{\frac{m^2-1}{3}\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x}{2}+\cfrac{\frac{m^2-4}{3.5}\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x}{2}+\cfrac{\frac{m^2-9}{5.7}\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x}{2}+\ldots}}}}$$

D'où, en supposant m infiniment petit ou infiniment grand, on déduira les suivantes

$$\log(1+x)=x-\cfrac{\frac{x^2}{2}}{1+\frac{2x}{3}-\cfrac{\frac{2}{9}\frac{x^2}{4}}{1+\frac{2.4.x}{3.5}-\cfrac{\frac{2.3}{25}\frac{x^2}{4}}{1+\frac{2.9.x}{5.7}-\cfrac{\frac{3.4}{49}\frac{x^2}{4}}{1+\ldots}}}}$$

$$e^x=1+x+\cfrac{\frac{x^2}{2}}{1-\frac{x}{3}+\cfrac{\frac{1}{9}\frac{x^2}{4}}{1-\frac{x}{3.5}+\cfrac{\frac{1}{25}\frac{x^2}{4}}{1-\frac{x}{5.7}-\cfrac{\frac{1}{49}\frac{x^2}{4}}{1-\ldots}}}}$$

$$\log(1+x)=\cfrac{x}{1+\frac{x}{2}-\cfrac{\frac{1}{3}\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x}{2}-\cfrac{\frac{4}{3.5}\frac{x^2}{4}}{1+\frac{x}{2}-\cfrac{\frac{9}{5.7}\frac{x^2}{4}}{1+\ldots}}}}$$

$$e^x=1+\cfrac{x}{1-\frac{x}{2}+\cfrac{\frac{1}{3}\frac{x^2}{4}}{1+\cfrac{\frac{1}{3.5}\frac{x^2}{4}}{1+\cfrac{\frac{1}{5.7}\frac{x^2}{4}}{1+\cfrac{\frac{1}{7.9}\frac{x^2}{4}}{1+\ldots}}}}}$$

13. Soit, pour abréger,

$$s = 1 + \cfrac{\frac{1}{3}\frac{x^2}{4}}{1 + \cfrac{\frac{1}{3.5}\frac{x^2}{4}}{1 + \cfrac{\frac{1}{5.7}\frac{x^2}{4}}{1 + \cfrac{\frac{1}{7.9}\frac{x^2}{4}}{1 + \ddots}}}};$$

on aura, par la dernière formule,

$$e^x = 1 + \cfrac{x}{s - \frac{x}{2}};$$

d'où l'on tire

$$s = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = \frac{x}{2}\frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2}\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}};$$

donc si l'on met partout, à la place de x, $2x\sqrt{-1}$, la valeur de s sera

$$\frac{x\cos x}{\sin x} = \frac{x}{\operatorname{tang} x};$$

de sorte qu'on aura $\operatorname{tang} x = \frac{x}{s}$; donc

$$\operatorname{tang} x = \cfrac{x}{1 - \cfrac{\frac{x^2}{3}}{1 - \cfrac{\frac{x^2}{3.5}}{1 - \cfrac{\frac{x^2}{5.7}}{1 - \cfrac{\frac{x^2}{7.9}}{1 - \ddots}}}}}.$$

Cette expression de la tangente par l'arc s'accorde dans le fond avec celle que M. Lambert a donnée dans les *Mémoires* de 1761, et qu'il a déduite des séries connues du sinus et du cosinus, divisées l'une par l'autre suivant le procédé qui sert à trouver le plus grand commun diviseur.

14. Considérons maintenant l'équation

$$1 - (1 + x^n)\frac{dy}{dx} = 0,$$

et cherchons par notre méthode la valeur de y en x exprimée par une fraction continue d'autant plus convergente que x est plus petite dans la supposition de $n > 0$.

1° On trouvera $\xi = x$, et l'on aura cette transformée en y'

$$-x^n + (1 - x^n)y' + y'^2 + (1 + x^n)x\frac{dy'}{dx} = 0;$$

2° On aura $\xi' = \frac{x^n}{n+1}$, et de là

$$-\frac{n^2x^n}{(n+1)^2} + \left(1 - \frac{n-1}{n+1}x^n\right)y'' + y''^2 + \frac{(1+x^n)x}{n+1}\frac{dy''}{dx} = 0;$$

3° On aura $\xi'' = \frac{n^2x^n}{(n+1)(2n+1)}$, et de là

$$-\frac{(n+1)^2x^n}{(2n+1)^2} + \left(1 - \frac{x^n}{2n+1}\right)y''' + y'''^2 + \frac{(1+x^n)x}{2n+1}\frac{dy'''}{dx} = 0;$$

4° On aura $\xi''' = \frac{(n+1)^2x^n}{(2n+1)(3n+1)}$, et de là

$$-\frac{4n^2x^n}{(3n+1)^2} + \left(1 - \frac{n-1}{3n+1}x^n\right)y^{IV} + y^{IV2} + \frac{(1+x^n)x}{3n+1}\frac{dy^{IV}}{dx} = 0;$$

5° On aura $\xi^{IV} = \frac{4n^2x^n}{(3n+1)(4n+1)}$, et de là

$$-\frac{(2n+1)^2x^n}{(4n+1)^2} + \left(1 - \frac{x^n}{4n+1}\right)y^V + y^{V2} + \frac{(1+x^n)x}{4n+1}\frac{dy^V}{dx} = 0;$$

6° On aura $\xi^V = \frac{(2n+1)^2x^n}{(4n+1)(5n+1)}$, et de là

$$-\frac{9n^2x^n}{(5n+1)^2} + \left(1 - \frac{n-1}{5n+1}x^n\right)y^{VI} + y^{VI2} + \frac{(1+x^n)x}{5n+1}\frac{dy^{VI}}{dx} = 0;$$

7° On aura $\xi^{VI} = \frac{9n^2x^n}{(5n+1)(6n+1)}$, et de là

$$-\frac{(3n+1)^2x^n}{6n+1)^2} + \left(1 - \frac{x^n}{6n+1}\right) y^{V(1)} + y^{V(2)} + \frac{(1+x^n)x}{6n+1}\frac{dy^{V(1)}}{dx} = 0;$$

8° On aura $\xi^{VII} = \frac{(3n+1)^2x^n}{(6n+1)(7n+1)}$, et de là....

Ainsi l'on aura pour la valeur de y cette fraction continue

$$y = \cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{x^n}{n+1}}{1+\cfrac{\frac{n^2x^n}{(n+1)(2n+1)}}{1+\cfrac{\frac{(n+1)^2x^n}{(2n+1)(3n+1)}}{1+\cfrac{\frac{(2n)^2x^n}{(3n+1)(4n+1)}}{1+\cfrac{\frac{(2n+1)^2x^n}{(4n+1)(5n+1)}}{1+\cfrac{\frac{(3n)^2x^n}{(5n+1)(6n+1)}}{1+\cfrac{\frac{(3n+1)^2x^n}{(6n+1)(7n+1)}}{1+\ddots}}}}}}}}$$

Or l'équation différentielle proposée donne par l'intégration

$$y = \int \frac{dx}{1+x^n};$$

par conséquent la valeur de cette intégrale sera représentée par la fraction continue que nous venons de trouver.

15. Si l'on fait $n = 1$, alors $y = \log(1+x)$, et la fraction continue qui exprime la valeur de y reviendra au même que celle que nous avons trouvée plus haut (10).

Si l'on fait $n = 2$, alors $y = \text{arc tang}\, x$; ainsi l'on aura, pour l'expression de l'arc par sa tangente, cette fraction continue

$$\text{arc tang}\, x = \cfrac{x}{1+\cfrac{\frac{x^2}{3}}{1+\cfrac{\frac{4x^2}{3.5}}{1+\cfrac{\frac{9x^2}{5.7}}{1+\cfrac{\frac{16x^2}{7.9}}{1+\cfrac{\frac{25x^2}{9.11}}{1+\ddots}}}}}}$$

Cette dernière expression a aussi déjà été trouvée par M. Lambert dans l'Ouvrage cité, d'après la série $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$, mais sous une forme moins simple que la précédente.

16. On voit, par le n° 14, que les valeurs ξ, ξ', ξ'',... ne vont pas en diminuant; de sorte que quelque loin que l'on pousse la fraction continue, on ne sera jamais en droit de négliger les termes suivants. Mais, si les valeurs dont il s'agit ne vont pas en diminuant, elles convergent cependant vers une même quantité, et cette circonstance donne le moyen de trouver à très-peu près la valeur du reste de la fraction continue.

Pour cet effet on n'a qu'à considérer les différentes transformées en y', y'', y^{IV},..., et l'on verra que la transformée $\mu^{\text{ième}}$ sera représentée ainsi

$$-\frac{\left(\frac{\mu}{2}n\right)^2 x^n}{[(\mu-1)n+1]^2} + \left[1 - \frac{(n-1)x^n}{(\mu-1)n+1}\right] y^{(\mu)} + [y^{(\mu)}]^2 + \frac{(1+x^n)x}{(\mu-1)n+1}\frac{dy^{(\mu)}}{dx} = 0$$

si μ est pair, et de cette manière

$$-\frac{\left(\frac{\mu-1}{2}n+1\right)^2 x^n}{[(\mu-1)n+1]^2} + \left[1 - \frac{x^n}{(\mu-1)n+1}\right] y^{(\mu)} + [y^{(\mu)}]^2 + \frac{(1+x^n)x}{(\mu-1)n+1}\frac{dy^{(\mu)}}{dx} = 0$$

si μ est impair.

Or, si μ est un nombre fort grand, alors il est visible que le premier terme se réduit toujours à $-\frac{x^n}{4}$, et que les autres termes se réduisent à ceux-ci $y^{(\mu)}+[y^{(\mu)}]^2$; de sorte qu'on a, dans ce cas, la transformée

$$-\frac{x^n}{4}+y^{(\mu)}+[y^{(\mu)}]^2=0,$$

d'où l'on tire, en général,

$$y^{(\mu)}=\frac{-1\pm\sqrt{1+x^n}}{2},$$

mais les valeurs de y devant être nulles lorsque $x=0$, on aura

$$y^{(\mu)}=\frac{-1+\sqrt{1+x^n}}{2}.$$

Donc, lorsqu'on aura poussé assez loin la fraction continue du n° 14, il faudra, si l'on veut s'arrêter, ajouter après l'unité dans le dénominateur de la dernière fraction la quantité que nous venons de trouver, ou bien on donnera à la dernière fraction pour dénominateur la quantité $\frac{1+\sqrt{1+x^n}}{2}$.

On pourra en user de même dans tous les cas semblables.

17. Soit encore proposée cette équation différentielle

$$1+2mxy-y^2+nx^3\frac{dy}{dx}=0,$$

dans laquelle on demande la valeur de y en x par une fraction continue d'autant plus convergente que x sera plus petite.

1° On trouvera $\xi=1$, et la transformée en y' sera

$$-2mx-(2+2mx)y'-y'^2+nx^3\frac{dy'}{dx}=0;$$

2° On aura $\xi'=-mx$, et de là

$$(m-n)x-[2+(n-2m)x]y''-2y''^2+nx^2\frac{dy''}{dx}=0;$$

3° On aura $\xi''=\frac{m-n}{2}x$, et de là

$$-(m+n)x-(2+2mx)y'''-2y'''^2+nx^2\frac{dy'''}{dx}=0;$$

4° On aura $\xi'''=-\frac{m+n}{2}x$, et de là

$$(m-2n)x-[2+(n-2m)x]y^{IV}-2y^{IV2}+nx^2\frac{dy^{IV}}{dx}=0;$$

5° On aura $\xi^{IV}=\frac{m-2n}{2}x$, et de là

$$-(m+2n)x-(2+2mx)y^{V}-2y^{V2}+nx^2\frac{dy^{V}}{dx}=0;$$

6° On aura $\xi^{V}=-\frac{m+2n}{2}x$, et de là

$$(m-3n)x-[2+(n-2m)x]y^{VI}-2y^{VI2}+nx^2\frac{dy^{VI}}{dx}=0;$$

7° On aura $\xi^{VI}=\frac{m-3n}{2}x$, et de là....

Ainsi la valeur de y sera exprimée par cette fraction continue

$$y=\cfrac{1}{1-\cfrac{mx}{1-\cfrac{\frac{m-n}{2}x}{1+\cfrac{\frac{m+n}{2}x}{1-\cfrac{\frac{m-2n}{2}x}{1+\cfrac{\frac{m+2n}{2}x}{1-\cfrac{\frac{m-3n}{2}x}{1+\cfrac{}{1-\ddots}}}}}}}}$$

laquelle se terminera, comme l'on voit, toutes les fois que l'on aura $m=\lambda n$, λ étant un nombre quelconque entier positif ou négatif.

Dans ce cas on aura donc une valeur finie de y; mais cette valeur ne sera pas complète, puisqu'elle ne contient aucune constante arbitraire.

Pour la compléter on suivra la méthode enseignée dans le n° 7.

En effet, en considérant les différentes transformées en y', y'', y''',..., on voit aisément que la transformée $\mu^{ième}$ sera, en supposant $m=\frac{\mu}{2}n$ lorsque μ est pair, et $m=-\frac{\mu-1}{2}n$ lorsque μ est impair,

$$-[2-(\mu-1)x]y^{(\mu)}-2[y^{(\mu)}]^2+nx^2\frac{dy^{(\mu)}}{dx}=0,$$

laquelle en faisant $y^{(\mu)}=\frac{1}{z}$ devient

$$[2-(\mu-1)x]z+2+nx^2\frac{dz}{dx}=0;$$

d'où l'on tire, par l'intégration,

$$z=\left(k-\frac{2}{n}\int e^{-\frac{2}{nx}}x^{-\frac{\mu+2n-1}{n}}dx\right)e^{\frac{2}{nx}}x^{\frac{\mu-1}{n}},$$

k étant une constante arbitraire.

Donc, lorsque dans la fraction continue qui exprime la valeur de y il arrivera qu'un des numérateurs deviendra nul, ce qui fera disparaître le reste de la fraction, il faudra, pour avoir la valeur complète de y, écrire après l'unité dans le dénominateur de la dernière fraction partielle la quantité $\frac{1}{z}$, en prenant pour μ le rang de cette fraction.

Par exemple, lorsque $m=n$, on a $y=\cfrac{1}{1-\cfrac{nx}{1+0}}$; comme la série se termine à la seconde fraction, je fais $\mu=2$, ce qui me donne

$$z=\left(k-\frac{2}{n}\int e^{-\frac{2}{nx}}x^{-\frac{1+2n}{n}}dx\right)e^{\frac{2}{nx}}x^{\frac{1}{n}},$$

et j'ai, pour la valeur complète de y, l'expression

$$y=\cfrac{1}{1-\cfrac{nx}{1+\cfrac{1}{z}}}.$$

Et ainsi des autres cas semblables.

18. Si dans l'équation différentielle du numéro précédent on fait

$$x=at^{\alpha},\quad y=bt^{\beta}u,$$

t et u étant de nouvelles variables, elle devient, après les substitutions et les réductions,

$$\frac{du}{dt}+\frac{2m\alpha+n\beta}{n}\frac{u}{t}-\frac{\alpha b}{na}t^{\beta-\alpha-1}u^2+\frac{\alpha}{nab}t^{-\alpha-\beta-1}=0,$$

laquelle, étant comparée à la forme générale de l'équation de Riccati

$$\frac{du}{dt}-At^{p}u^2+Bt^{q}=0,$$

donne

$$\alpha=-\frac{p+q+2}{2},\quad \beta=\frac{p-q}{2},\quad \frac{m}{n}=\frac{p-q}{2(p+q+2)},\quad a=\frac{2}{n\sqrt{AB}},\quad b=\sqrt{\frac{A}{B}};$$

de sorte qu'il reste encore une indéterminée n, qu'on peut faire égale à tout ce que l'on veut.

L'équation dont il s'agit sera donc intégrable toutes les fois que les exposants p et q seront tels, que la valeur de $\frac{m}{n}$, savoir la quantité $\frac{p-q}{2(p+q+2)}$, sera égale à un nombre entier quelconque positif ou négatif; ainsi les conditions de l'intégrabilité de l'équation

$$\frac{du}{dt}-At^{p}u^2+Bt^{q}=0$$

seront renfermées dans cette égalité

$$q=\frac{(1-2\lambda)p-4\lambda}{1+2\lambda},$$

λ étant un nombre entier quelconque positif ou négatif; ce qui s'accorde avec ce que l'on sait déjà.

19. Comme la forme des fractions continues est peu commode pour les opérations algébriques, nous allons réduire ces fractions en fractions

ordinaires, ce qui donnera lieu à des conséquences importantes sur la nature de ces mêmes fractions.

Pour cela il n'y a qu'à reprendre les formules

$$y=\frac{\xi}{1+y'},\quad y'=\frac{\xi'}{1+y''},\quad y''=\frac{\xi''}{1+y'''},\cdots$$

du n° 1 et substituer successivement dans la première les valeurs de y', y'',... données par les suivantes; ce qui donnera

$$y=\frac{\xi}{1+y'}=\frac{\xi+\xi y''}{1+\xi'+y''}=\frac{\xi+\xi\xi''+\xi y'''}{1+\xi'+\xi''+(1+\xi')y'''}=\cdots;$$

mais pour rendre plus sensible l'ordre qui règne entre ces formules successives on fera les deux séries

$$P=0,\quad P'=\xi,\quad P''=P\xi'+P',\quad P'''=P'\xi''+P'',\quad P^{IV}=P''\xi'''+P''',\ldots,$$
$$Q=1,\quad Q'=1,\quad Q''=Q\xi'+Q',\quad Q'''=Q'\xi''+Q'',\quad Q^{IV}=Q''\xi'''+Q''',\ldots,$$

et l'on aura

$$y=\frac{Py'+P'}{Qy'+Q'}=\frac{P'y''+P''}{Q'y''+Q''}=\frac{P''y'''+P'''}{Q''y'''+Q'''}=\frac{P'''y^{IV}+P^{IV}}{Q'''y^{IV}+Q^{IV}}=\cdots.$$

De sorte qu'il n'y aura plus qu'à substituer dans ces expressions les valeurs de ξ, ξ', ξ'',..., ainsi que celle de la dernière des quantités y', y'', y''',... pour avoir la valeur complète de y.

20. Je remarque maintenant que, comme les quantités y', y'', y''',... sont nécessairement comprises entre les limites ∞ et 0, si l'on substitue successivement ces valeurs extrêmes à leur place, on aura cette série de fractions rationnelles

$$\frac{P}{Q},\ \frac{P'}{Q'},\ \frac{P''}{Q''},\ \frac{P'''}{Q'''},\ \frac{P^{IV}}{Q^{IV}},\cdots,$$

qui convergeront nécessairement vers la vraie valeur de y.

Pour prouver cette convergence et en déterminer la quantité pour

chaque fraction, considérons les différences

$$\frac{Py'+P'}{Qy'+Q'}-\frac{P}{Q},\quad \frac{P'y''+P''}{Q'y''+Q''}-\frac{P'}{Q'},\cdots;$$

lesquelles se réduisent à

$$\frac{P'Q-Q'P}{Q(Qy'+Q')},\quad \frac{P''Q'-Q''P'}{Q'(Q'y''+Q'')},\cdots;$$

or on trouve

$$P'Q-Q'P=\xi,$$
$$P''Q'-Q''P'=(Q'P-P'Q)\xi'=-\xi\xi',$$
$$P'''Q''-Q'''P''=(Q''P'-P''Q')\xi''=\xi\xi'\xi'',$$

et ainsi de suite; donc les différences dont il s'agit, c'est-à-dire les excès de la vraie valeur de y sur les fractions $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$,... seront

$$\frac{\xi}{Q(Qy'+Q')},\quad -\frac{\xi\xi'}{Q'(Q'y''+Q'')},\quad \frac{\xi\xi'\xi''}{Q''(Q''y'''+Q''')},\cdots.$$

D'où l'on voit que, si l'une des quantités ξ, ξ', ξ'',... devient nulle, auquel cas la fraction continue est finie, la fraction correspondante dans la suite $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$,... donnera la valeur exacte de y.

En général, comme les quantités ξ, ξ', ξ'',... sont toujours très-petites lorsque x est supposée très-petite (1) et qu'il en est de même des quantités y', y'', y''',..., il est clair que dans cette supposition les quantités Q, Q', Q'',... deviendront égales à l'unité, et que les quantités Qy', $Q'y''$, $Q''y'''$,... deviendront nulles vis-à-vis de celles-là; donc en supposant x très-petite, les excès de y sur les fractions $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, $\frac{P''}{Q''}$,... se réduiront à

$$\xi,\quad -\xi\xi',\quad \xi\xi'\xi'',\ldots;$$

par conséquent ces fractions seront exactes, aux quantités des ordres ξ, $\xi\xi'$, $\xi\xi'\xi''$,... près.

21. Prenons l'Exemple du n° 8, où l'on a trouvé

$$\xi = a,\quad \xi' = mx,\quad \xi'' = -(m-1)\frac{x}{2},\quad \xi''' = \frac{m+1}{3}\frac{x}{2},\quad \xi^{iv} = -\frac{m-2}{3}\frac{x}{2},\ldots;$$

on trouvera les formules suivantes, où je suppose, pour plus de simplicité, $a = 1$,

$$P = 0,$$

$$P' = 1,$$

$$P'' = 1,$$

$$P''' = 1 - \frac{(m-1)}{2}x,$$

$$P^{iv} = 1 - \frac{(m-2)}{3}x,$$

$$P^{v} = 1 - \frac{2(m-2)}{4}x + \frac{(m-2)(m-1)}{4.3}x^2,$$

$$P^{vi} = 1 - \frac{2(m-3)}{5}x + \frac{(m-3)(m-2)}{5.4}x^2,$$

$$P^{vii} = 1 - \frac{3(m-3)}{6}x + \frac{3(m-3)(m-2)}{6.5}x^2 - \frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{6.5.4}x^3,$$

$$P^{viii} = 1 - \frac{3(m-4)}{7}x + \frac{3(m-4)(m-3)}{7.6}x^2 - \frac{(m-4)(m-3)(m-2)}{7.6.5}x^3,$$

$$P^{ix} = 1 - \frac{4(m-4)}{8}x + \frac{6(m-4)(m-3)}{8.7}x^2 - \frac{4(m-4)(m-3)(m-2)}{8.7.6}x^3 + \frac{(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)}{8.7.6.5}x^4,$$

.....

$$Q = 1,$$

$$Q' = 1,$$

$$Q'' = 1 + mx,$$

$$Q''' = 1 + \frac{(m+1)}{2}x,$$

$$Q^{iv} = 1 + \frac{2(m+1)}{3}x + \frac{(m+1)m}{3.2}x^2,$$

$$Q^{v} = 1 + \frac{2(m+2)}{4}x + \frac{(m+2(m+1)}{4.3}x^2,$$

$$Q^{vi} = 1 + \frac{3(m+2)}{5}x + \frac{3(m+2)(m+1)}{5.4}x^2 + \frac{(m+2)(m+1)m}{5.4.3}x^3,$$

$$Q^{vii} = 1 + \frac{3(m+3)}{6}x + \frac{3(m+3)(m+2)}{6.5}x^2 + \frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6.5.4}x^3,$$

$$Q^{viii} = 1 + \frac{4(m+3)}{7}x + \frac{6(m+3)(m+2)}{7.6}x^2 + \frac{4(m+3)(m+2)(m+1)}{7.6.5}x^3 + \frac{(m+3)(m+2)(m+1)m}{7.6.5.4}x^4,$$

$$Q^{ix} = 1 + \frac{4(m+4)}{8}x + \frac{6(m+4)(m+3)}{8.7}x^2 + \frac{4(m+4)(m+3)(m+2)}{8.7.6}x^3 + \frac{(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)}{8.7.6.5}x^4,$$

.....

Or nous avons vu dans le n° 9 que la valeur de y est $\frac{a}{(1+x)^n}$; ainsi, faisant $a = 1$, on aura pour la valeur de $(1+x)^{-m}$ les fractions $\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}, \frac{P''}{Q''}, \cdots$, lesquelles seront exactes, aux quantités près des ordres $x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots$.

Donc, si l'on renverse ces fractions, ou, ce qui revient au même, si l'on fait m négatif et qu'on néglige les deux premières fractions, on aura les approximations suivantes vers la valeur de $(1+x)^m$

$$1 + mx,$$

$$\frac{1 + \frac{m+1}{2}x}{1 - \frac{m-1}{2}x},$$

$$\frac{1 + \frac{2(m+1)}{3}x + \frac{(m+1)m}{3.2}x^2}{1 - \frac{m-2}{3}x},$$

$$\frac{1+\frac{2(m+2)}{4}x+\frac{(m+2)(m+1)}{4.3}x^2}{1-\frac{2(m-2)}{4}x+\frac{(m-2)(m-1)}{4.3}x^2},$$

$$\frac{1+\frac{3(m+2)}{5}x+\frac{3(m+2)(m+1)}{5.4}x^2+\frac{(m+2)(m+1)m}{5.4.3}x^3}{1-\frac{2(m-3)}{5}x+\frac{(m-3)(m-2)}{5.4}x^2},$$

$$\frac{1+\frac{3(m+3)}{6}x+\frac{3(m+3)(m+2)}{6.5}x^2+\frac{(m+3)(m+2)(m+1)}{6.5.4}x^3}{1-\frac{3(m-3)}{6}x+\frac{3(m-3)(m-2)}{6.5}x^2-\frac{(m-3)(m-2)(m-1)}{6.5.4}x},$$

.....,

et ces expressions sont exactes, aux quantités près des ordres x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7,..., c'est-à-dire qu'elles sont exactes jusqu'à la puissance de x inclusivement qui sera le produit des deux plus hautes puissances de x, dans le numérateur et dans le dénominateur; c'est de quoi on pourra si l'on veut se convaincre *à posteriori* en résolvant les fractions précédentes en séries et les comparant avec la série

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}x^3+\ldots.$$

On peut traiter de même les autres fractions continues que nous avons trouvées dans le cours de ce Mémoire et en tirer des conclusions semblables; c'est sur quoi nous ne nous arrêterons pas, puisque ce n'est qu'une affaire de pur calcul.

SOLUTION ALGÉBRIQUE

D'UN

PROBLÈME DE GÉOMÉTRIE.