


洋書

桑木文庫
洋書
0565

物理
08
L
1・4

九州帝國大學理學部
8427
物理學教室

理学部 洋 透及
022232002008822
九州大学蔵書

物
01
1

801894

高書書

ŒUVRES

DE LAGRANGE.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

ŒUVRES
DE LAGRANGE,

PUBLIÉES PAR LES SOINS

DE M. J.-A. SERRET,

SOUS LES AUSPICES

DE SON EXCELLENCE

LE MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME QUATRIÈME.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

M DCCC LXIX

19. 4. 25.

DEUXIÈME SECTION.

(SUITE.)

MÉMOIRES

EXTRAITS DES

RECUEILS DE L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES

DE BERLIN.

SUR LES

INTÉGRALES PARTICULIÈRES

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

I.

SUR LES

INTÉGRALES PARTICULIÈRES

DES

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES (*).

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1774.)

Dans un Mémoire de feu M. Clairaut, imprimé parmi ceux de l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1734, on trouve cette remarque singulière, qu'il y a des équations différentielles qu'on peut intégrer par la différentiation, et que les intégrales trouvées de la sorte ne sont jamais comprises dans les intégrales complètes que donnent les règles ordinaires de l'intégration, quoique d'ailleurs ces mêmes intégrales satisfassent aux équations différentielles proposées et résolvent très-bien les Problèmes géométriques qui conduisent à ces équations (*voyez* les *Mémoires* de 1734, pages 209 et suivantes).

M. Euler a mis ensuite ces deux espèces de paradoxes dans un plus grand jour, et il les a confirmés par différents Exemples tirés de la Géométrie; c'est le sujet d'un Mémoire donné à cette Académie et imprimé dans le volume de 1756 sous le titre d'*Exposition de quelques paradoxes dans le Calcul intégral*. Ce grand Géomètre avait aussi déjà remarqué,

(*) Ce Mémoire a été lu dans les Assemblées du 12 octobre et du 9 novembre 1775.

dans sa *Mécanique*, qu'il y a souvent des solutions particulières qui échappent à la solution générale, et il avait même donné une formule pour trouver ces solutions particulières dans un grand nombre de cas (*voyez Mechanica*, tome II, Articles 268, 303, 335); mais ni M. Clairaut ni M. Euler n'avaient encore cherché les moyens de reconnaître *à priori* si une équation finie qui satisfait à une équation différentielle donnée est comprise ou non dans l'intégrale complète de cette équation différentielle, sans connaître cette intégrale.

Ce Problème, qui est d'une grande importance dans la Théorie du Calcul intégral, a depuis été résolu par M. Euler dans le premier volume de son *Calcul intégral*. M. d'Alembert s'en est occupé aussi et en a rendu la solution plus rigoureuse et plus générale dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, année 1769 (*voyez* pages 84 et suivantes). On trouve de plus quelques principes généraux sur le même sujet dans les Ouvrages de M. le Marquis de Condorcet (*voyez* son *Calcul intégral*, page 67, les *Mémoires de Turin*, tome IV, pages 7 et suivantes). Enfin je viens de lire un *Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles*, que M. de Laplace a donné depuis peu à l'Académie des Sciences, et qui doit paraître dans le volume de 1772, mais dont l'Auteur a bien voulu m'envoyer d'avance un exemplaire imprimé. Dans ce Mémoire, M. de Laplace perfectionne et étend plus loin la théorie déjà connue des solutions particulières, et, ce que personne n'avait encore fait, il donne des méthodes pour trouver directement toutes les solutions particulières qui peuvent satisfaire à une équation différentielle donnée, et qui ne seraient point comprises dans la solution générale de cette équation.

Cette lecture a réveillé d'anciennes idées que j'avais sur la même matière et a occasionné les recherches suivantes, dans lesquelles je me flatte de pouvoir présenter aux Géomètres une Théorie nouvelle et complète sur le point d'Analyse dont il s'agit.

ARTICLE I^er^. — *Des intégrales particulières des équations différentielles du premier ordre à deux variables, et de la manière de les déduire des intégrales complètes.*

1. J'entends, en général, par intégrale complète d'une équation différentielle du premier ordre, une équation finie qui satisfait à cette équation différentielle et qui renferme une constante arbitraire; si l'on donne à cette constante une valeur déterminée, l'intégrale devient alors incomplète, parce qu'elle ne renferme plus de constante arbitraire; mais elle sera toujours comprise dans l'intégrale complète. Les intégrales particulières dont nous allons traiter ici sont celles qui, ne renfermant point de constante arbitraire, ne sont pas non plus comprises dans l'intégrale complète, et par conséquent échappent à la méthode ordinaire d'intégration. Par exemple, l'intégrale complète de l'équation

$$x\,dx + y\,dy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$$

est

$$\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = y + a,$$

ou bien

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0,$$

a étant une constante arbitraire. Si l'on donnait à a une valeur déterminée quelconque, comme si l'on faisait $a = 3b$, on aurait

$$x^2 - 6by - 10b^2 = 0,$$

qui serait une intégrale incomplète; mais l'équation précédente, malgré la constante arbitraire a, n'est pas la seule équation finie qui satisfasse à l'équation différentielle proposée; car il est aisé de voir que l'équation

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0$$

y satisfait aussi, équation qu'on voit bien n'être pas comprise dans celle-là, puisque l'une est à un cercle dont le rayon est b, et l'autre est à une parabole ayant $2a$ pour paramètre.

L'équation

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0$$

sera donc une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$x\,dx + y\,dy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - b^2};$$

on trouvera de même que l'équation

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0$$

est l'intégrale particulière de l'équation différentielle

$$y\,dx - x\,dy = b\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

dont l'intégrale complète est

$$y - ax - b\sqrt{1 + a^2},$$

a étant la constante arbitraire. Il en est de même d'une infinité d'autres équations différentielles qui admettent des intégrales particulières, lesquelles ne sauraient être comprises dans les intégrales complètes de ces équations.

2. Après nous être assurés *à posteriori* de l'existence des intégrales particulières, cherchons maintenant *à priori*, et d'après les seuls principes du Calcul intégral, quelle est l'origine de ces sortes d'intégrales.

Pour considérer les choses d'une manière générale, soit

$$Z = 0$$

une équation différentielle quelconque, Z étant une fonction de x, y et de $\frac{dy}{dx}$; supposons que l'intégrale complète de cette équation soit

$$V = 0,$$

V étant une fonction de x, y et d'une constante arbitraire a qui n'entre point dans la fonction Z, et voyons comment cette équation $V = 0$ satisfait à l'équation différentielle $Z = 0$.

L'équation $V = 0$, étant différentiée, donne celle-ci

$$dy = p\,dx, \quad \text{ou bien} \quad \frac{dy}{dx} = p,$$

où p est une fonction finie de x, y et a; puis donc que ces deux équations

$$V = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} - p = 0$$

ont lieu en même temps, on peut en éliminer la quantité a, et l'on aura une équation entre x, y et $\frac{dy}{dx}$ où a n'entrera plus, et qui aura donc lieu en même temps que l'équation finie $V = 0$; ce sera donc nécessairement l'équation $Z = 0$.

D'où l'on peut conclure que, si $V = 0$ est l'intégrale complète d'une équation différentielle du premier ordre $Z = 0$, celle-ci ne peut être autre chose que le résultat de l'élimination de la constante arbitraire a, à l'aide des deux équations $V = 0$ et $dy = p\,dx$.

Ainsi, l'équation finie

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0$$

donne par la différentiation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a};$$

éliminant a, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{-y + \sqrt{x^2 + y^2 - b^2}};$$

ce qui se réduit à

$$x\,dx + y\,dy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - b^2};$$

par conséquent, l'équation ci-dessus sera l'intégrale complète de cette équation différentielle, a étant la constante arbitraire (1).

3. Maintenant, puisque l'équation différentielle $Z = 0$ résulte des deux équations $V = 0$ et $\frac{dy}{dx} = p$, en éliminant la constante a, il est vi-

sible que l'on aura toujours la même équation $Z = o$, quelle que soit la valeur de la quantité a qu'on doit éliminer; ainsi, quand même cette quantité ne serait pas constante, comme on l'a supposé jusqu'ici, il est clair que l'équation finie $V = o$ satisfera toujours à l'équation différentielle $Z = o$, pourvu que, par la différentiation de l'équation $V = o$, on ait également, dans le cas de a variable, $dy = p\,dx$. Or, en faisant varier dans l'équation $V = o$ les quantités x, y et a à la fois, il est clair qu'on aura cette équation différentielle

$$dy = p\,dx + q\,da,$$

p et q étant des fonctions de x, y et a; et l'on voit que, pour que cette équation se réduise à $ay = p\,dx$, comme dans le cas de a constante, il n'y a qu'à supposer la quantité q égale à zéro. Faisant donc

$$q = o,$$

on aura une équation par laquelle on pourra déterminer la valeur de a en x et y, et cette valeur de a étant ensuite substituée dans l'équation finie $V = o$, cette équation satisfera encore à l'équation différentielle $Z = o$, et en sera une intégrale particulière.

4. Comme en faisant varier à la fois les quantités x, y et a dans l'équation $V = o$ on a

$$dy = p\,dx + q\,da,$$

on aura, en faisant varier seulement y et a,

$$dy = q\,da,$$

et par conséquent

$$q = \frac{dy}{da};$$

donc si $V = o$ est l'intégrale complète d'une équation différentielle du premier ordre $Z = o$, et que a soit la constante arbitraire introduite par l'intégration; qu'on fasse varier dans l'équation $V = o$, y et a, et qu'on suppose ensuite $\frac{dy}{da} = o$; qu'on détermine a par le moyen de cette équation, et qu'on substitue sa valeur dans l'intégrale complète $V = o$, ou bien, ce qui revient au même, qu'on élimine a par le moyen des deux équations $\frac{dy}{da} = o$ et $V = o$, on aura une intégrale particulière de la même équation différentielle $Z = o$. Si l'équation $\frac{dy}{da} = o$ renferme la quantité a mêlée avec les variables x et y, alors la valeur de a tirée de cette équation sera une fonction des mêmes variables; par conséquent l'intégrale particulière, qui résultera de la substitution de cette valeur de a dans l'équation $V = o$, sera nécessairement différente de l'intégrale complète $V = o$, dans laquelle a est supposée constante.

Mais il peut arriver, ou que l'équation $\frac{dy}{da} = o$ ne renferme que la quantité a avec des constantes, mais sans x ni y; ou que cette équation ne renferme que x et y sans a. Dans le premier cas, la valeur de a sera nécessairement constante; ainsi il n'y aura point alors d'intégrale particulière proprement dite.

Dans le second cas, l'équation $\frac{dy}{da} = o$ sera elle-même une intégrale de la proposée; mais, pour pouvoir juger si c'est une intégrale particulière ou non, il faudra combiner cette équation avec l'équation $V = o$ en éliminant x ou y, et voir si la résultante donne a variable ou constante. S'il arrivait que la valeur de a demeurât indéterminée ou $= \frac{o}{o}$, ce serait une marque que l'équation $\frac{dy}{da} = o$ est un facteur de l'équation $V = o$, indépendant de la constante arbitraire a, et par conséquent étranger à l'équation différentielle $Z = o$.

Au reste, si l'équation $\frac{dy}{da} = o$ avait des facteurs, il faudrait appliquer à chacune des équations qui en résulteraient ce que nous venons de dire en général sur l'équation $\frac{dy}{da} = o$.

5. Si, au lieu de faire varier y et a dans l'équation $V = o$, on y fait varier x et a, et qu'on suppose $\frac{dx}{da} = o$, cette équation, traitée comme

l'équation $\frac{dy}{da} = 0$, servira aussi à déterminer les intégrales particulières de la même équation différentielle $Z = 0$; ce qui est aisé à démontrer par les mêmes principes que nous avons établis ci-dessus. L'équation $\frac{dx}{da} = 0$ donnera le plus souvent les mêmes résultats que l'équation $\frac{dy}{da} = 0$; mais il y a des cas où ces équations donnent des résultats différents; il faudra donc avoir égard à ces deux équations, pour pouvoir trouver toutes les intégrales particulières de l'équation $Z = 0$, et il est facile de démontrer qu'il n'y a pas d'autres combinaisons possibles qui puissent fournir des intégrales de cette espèce non comprises dans l'intégrale complète $V = 0$.

6. Pour éclaircir la théorie précédente par quelques exemples, je prends d'abord l'équation différentielle

$$x\,dx + y\,dy = dy\sqrt{x^2 + y^2 - b^2},$$

dont nous avons déjà vu que l'intégrale complète est

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0,$$

où a est la constante arbitraire. Faisant donc varier d'abord y et a, on aura

$$\frac{dy}{da} = -\frac{a+y}{a},$$

et faisant varier x et a, on a

$$\frac{dx}{da} = \frac{a+y}{x};$$

les deux équations

$$\frac{dy}{da} = 0, \quad \frac{dx}{da} = 0$$

donnent également

$$a + y = 0, \quad \text{d'où} \quad a = -y;$$

ce qui étant substitué dans l'intégrale complète, on a

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0,$$

intégrale particulière de l'équation différentielle proposée, et la seule qui ait lieu.

Soit ensuite l'équation différentielle

$$y\,dx - x\,dy = b\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

dont l'intégrale complète est

$$y - ax - b\sqrt{1 + a^2} = 0.$$

En faisant varier y et a, on en tire

$$\frac{dy}{da} = x + \frac{ba}{\sqrt{1+a^2}};$$

donc

$$x + \frac{ba}{\sqrt{1+a^2}} = 0, \quad \text{ou bien} \quad x = -\frac{ba}{\sqrt{1+a^2}};$$

et combinant cette équation avec la précédente, on aura

$$y = \frac{b}{\sqrt{1+a^2}};$$

donc

$$x^2 + y^2 = b^2,$$

intégrale particulière de la proposée. Si l'on faisait varier x et a, on aurait

$$\frac{dx}{da} = -\frac{x}{a} - \frac{b}{\sqrt{1+a^2}};$$

de sorte que l'équation $\frac{dx}{da} = 0$ donnera le même résultat que l'équation $\frac{dy}{da} = 0$; et qu'ainsi il n'y aura d'autre intégrale particulière possible que celle qu'on a trouvée.

Soit de plus l'équation différentielle

$$y\,dx - x\,dy + b\,dy = \sqrt{c^2(dx^2 + dy^2) - b^2dx^2},$$

dont on trouve que l'intégrale complète est

$$y - a(x-b) = \sqrt{c^2(1+a^2) - b^2},$$

a étant la constante arbitraire.

Faisant donc varier y et a, on aura

$$\frac{dy}{da} = x - b + \frac{c^2 a}{\sqrt{c^2(1+a^2) - b^2}};$$

donc

$$x - b + \frac{c^2 a}{\sqrt{c^2(1+a^2) - b^2}} = 0,$$

par conséquent

$$x - b = -\frac{c^2 a}{\sqrt{c^2(1+a^2) - b^2}},$$

et combinant cette équation avec la précédente, on aura

$$y = \frac{c^2 - b^2}{\sqrt{c^2(1+a^2) - b^2}};$$

de sorte qu'on aura, en éliminant a,

$$\frac{(x-b)^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1,$$

intégrale particulière de la proposée, et qui n'est point comprise dans l'intégrale complète.

Si l'on fait varier x et a, on aura

$$\frac{dx}{da} = -\frac{x-b}{a} - \frac{c^2}{\sqrt{c^2(1+a^2) - b^2}},$$

et l'équation $\frac{dx}{da}$ redonnera le même résultat que nous venons de trouver d'après l'équation $\frac{dy}{da} = 0$. Ainsi la proposée n'admet point d'autre intégrale particulière que la précédente. *Voyez* au reste, sur l'intégration de ces deux équations, les n^os^ 17 et 19 ci-après.

Considérons enfin l'équation différentielle séparée

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

dans laquelle

$$X = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4,$$
$$Y = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4;$$

l'intégrale complète de cette équation est, comme j'ai fait voir ailleurs (*),

$$\sqrt{X} + \sqrt{Y} = (x-y)\sqrt{a + U},$$

où a est la constante arbitraire, et

$$U = D(x+y) + E(x+y)^2.$$

Faisant d'abord varier y et a, et ensuite x et a à la fois, et supposant, pour plus de simplicité,

$$\frac{dX}{dx} = X', \quad \frac{dY}{dy} = Y', \quad \frac{dU}{dx} = \frac{dU}{dy} = U',$$

on aura

$$\frac{dy}{da} = \frac{(x-y)\sqrt{Y}}{Y'\sqrt{a+U} - [U'(x-y) + 2(a+U)]\sqrt{Y}},$$

$$\frac{dx}{da} = \frac{(x-y)\sqrt{X}}{X'\sqrt{a+U} - [U'(x-y) + 2(a+U)]\sqrt{X}}.$$

Les équations $\frac{dy}{da} = 0$ et $\frac{dx}{da} = 0$ donnent d'abord la même équation

$$x - y = 0,$$

laquelle, ne contenant point la quantité a, peut être ou n'être pas une intégrale particulière. Pour pouvoir en juger, je reprends l'intégrale complète, et j'en tire

$$a = \frac{(\sqrt{X} + \sqrt{Y})^2}{(x-y)^2} - U,$$

(*) *OEuvres de Lagrange*, t. II, p. 17.

où l'on voit qu'en faisant $x=y$, a devient $=\infty$; par conséquent, l'équation $x-y=0$ n'est point une intégrale particulière, mais un cas de l'intégrale complète.

Rejetant donc le facteur $x-y$, l'équation $\frac{dy}{da}=0$ donne encore $Y=0$; mais, comme le dénominateur de la fraction se réduit alors à $Y'\sqrt{a+U}$, qui devient aussi nul lorsque Y' est en même temps égal à zéro, il s'ensuit que l'équation $Y=0$ peut être une intégrale particulière, pourvu que Y' ne soit pas à la fois égal à zéro. De même, l'équation $\frac{dx}{da}=0$ donnera $X=0$, pourvu que X' ne soit pas en même temps égal à zéro. Or il est clair, par l'expression de a trouvée ci-dessus, que la valeur de a ne devient point constante par la supposition de $Y=0$, ni par celle de $X=0$. Donc on peut conclure que les équations $Y=0$ et $X=0$ seront deux intégrales particulières de la proposée, pourvu que l'on n'ait pas en même temps $Y'=0$ et $X'=0$; ainsi donc les intégrales particulières de l'équation dont il s'agit seront toutes comprises sous cette forme

$$x=u \quad \text{ou} \quad y=u,$$

en prenant pour u une des racines simples quelconques de l'équation

$$A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4=0.$$

Si l'équation proposée était

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0,$$

l'intégrale complète serait

$$\sqrt{X}-\sqrt{Y}=(x-y)\sqrt{a+U};$$

d'où l'on tirerait les mêmes valeurs de $\frac{dy}{da}$ et $\frac{dx}{da}$ que ci-dessus, à l'exception que dans la première le radical $\sqrt{Y}$ y serait avec un signe différent.

On aurait donc d'abord l'équation

$$x-y=0;$$

mais comme la valeur de a, qui dans ce cas est

$$\left(\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y}\right)^2-U,$$

devient, par la supposition de $x=y$, égale à $\frac{0}{0}$, il s'ensuit que l'équation $x-y=0$ doit être rejetée comme étrangère à l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0,$$

quoiqu'elle soit contenue (4) dans l'intégrale

$$\sqrt{X}-\sqrt{Y}=(x-y)\sqrt{a+U}.$$

Ensuite on trouvera, comme plus haut, les intégrales particulières

$$x=u \quad \text{ou} \quad y=u,$$

u étant une des racines simples de l'équation

$$A+Bu+Cu^2+Du^3+Eu^4=0.$$

7. On voit donc par ce que nous venons de démontrer comment, lorsqu'on a trouvé l'intégrale complète d'une équation différentielle du premier ordre, on en peut aisément déduire les intégrales particulières qui satisfont à la même équation; on voit aussi que si ces intégrales particulières ne sont pas comprises dans l'intégrale complète, ce n'est nullement une imperfection du Calcul intégral, comme on pourrait le croire, faute de donner à ce Calcul toute la généralité dont il est susceptible. Ainsi l'on doit regarder la théorie que nous venons de donner, moins comme une exception que comme un supplément nécessaire à la règle générale du Calcul intégral.

ARTICLE II. — *De l'étendue des intégrales particulières des équations différentielles du premier ordre, et de la manière de trouver ces intégrales sans connaître les intégrales complètes.*

8. L'équation finie

$$V = 0,$$

dans laquelle V est une fonction des variables x, y et d'une arbitraire a, donne par la différentiation, et en faisant varier à la fois x, y et a,

$$dy = p\,dx + q\,da,$$

p, q étant des fonctions finies de x, y et a; différentiant p et substituant pour dy sa valeur, on aura

$$dp = p'dx + q'da,$$

et différentiant de même p', on aura

$$dp' = p''dx + q''da,$$

et ainsi de suite. Maintenant si l'on regarde a comme constante, on a pour le premier ordre

$$dy = p\,dx;$$

et toute équation différentielle du premier ordre, telle que

$$Z = 0,$$

à laquelle satisfera l'équation finie $V = 0$, la constante a demeurant arbitraire, sera nécessairement produite par la combinaison des deux équations

$$V = 0, \quad \frac{dy}{dx} = p,$$

de manière que a s'évanouisse.

En regardant toujours a comme constante, on a

$$\frac{dy}{dx} = p \quad \text{et} \quad dp = p'dx;$$

donc (en prenant dx pour constante)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p';$$

et toute équation différentielle du second ordre, telle que

$$Z' = 0,$$

à laquelle satisfera l'équation finie

$$V = 0,$$

la constante a demeurant arbitraire, sera nécessairement formée par la combinaison des équations

$$V = 0, \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p',$$

en sorte que a disparaisse.

En continuant ainsi, dans l'hypothèse de a constante, on aura

$$dp' = p''dx,$$

par conséquent

$$\frac{d^3y}{dx^3} = p'';$$

et toute équation différentielle du troisième ordre, telle que

$$Z'' = 0,$$

à laquelle satisfera l'équation finie

$$V = 0,$$

a demeurant arbitraire, sera formée par la combinaison des équations

$$V = 0, \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = p', \quad \frac{d^3y}{dx^3} = p'',$$

de manière que a disparaisse; et ainsi de suite.

9. Voyons maintenant dans quels cas l'équation $V = 0$ pourra satisfaire aux mêmes équations

$$Z = 0, \quad Z' = 0, \quad Z'' = 0, \ldots,$$

en supposant que a soit une quantité variable.

Et d'abord il est clair que cela aura lieu pour l'équation du premier ordre $Z = 0$, si $q = 0$; parce qu'alors on aura également $\frac{dy}{dx} = p$, comme dans le cas de a constante. De là naissent les intégrales particulières, ainsi que nous l'avons vu dans l'Article précédent.

Pour l'équation du second ordre $Z' = 0$, il faudra que l'on ait de plus $q' = 0$, afin que l'on ait aussi $\frac{d^2y}{dx^2} = p'$, comme dans l'hypothèse de a constante.

De même pour l'équation du troisième ordre $Z'' = 0$, il faudra que l'on ait encore $q'' = 0$ pour que la valeur de $\frac{d^3y}{dx^3}$ soit également $= p''$; et ainsi de suite.

Donc, en général, l'équation finie $V = 0$ sera une intégrale particulière de l'équation du premier ordre $Z = 0$, si a est une quantité telle, que l'on ait $q = 0$. Elle sera une intégrale particulière de l'équation du second ordre $Z' = 0$, si l'on a à la fois $q = 0$ et $q' = 0$. Elle sera une intégrale particulière de l'équation du troisième ordre $Z'' = 0$, si l'on a en même temps $q = 0$, $q' = 0$, $q'' = 0$; et ainsi de suite.

10. En regardant y comme une fonction de x et a donnée par l'équation $V = 0$, on a, suivant la notation reçue (8),

$$p = \frac{dy}{dx}, \quad q = \frac{dy}{da},$$

ensuite

$$p' = \frac{dp}{dx}, \quad q' = \frac{dp}{da}, \quad p'' = \frac{dp'}{dx}, \quad q'' = \frac{dp'}{da}, \ldots,$$

donc

$$q = \frac{dy}{da}, \quad q' = \frac{d^2y}{dx\,da}, \quad q'' = \frac{d^3y}{dx^2\,da}, \ldots.$$

Ainsi l'on aura pour les équations différentielles du premier ordre la condition

$$\frac{dy}{da} = 0,$$

pour celles du second ordre les deux conditions

$$\frac{dy}{da} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx\,da} = 0,$$

pour celles du troisième ordre les trois conditions

$$\frac{dy}{da} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx\,da} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^2\,da} = 0;$$

et ainsi de suite.

Et comme on peut échanger y en x, en regardant x comme une fonction de y et a, on aura de même (dy étant pris pour constante)

$$\frac{dx}{da} = 0$$

pour le premier ordre,

$$\frac{dx}{da} = 0, \quad \frac{d^2x}{dy\,da} = 0$$

pour le second ordre,

$$\frac{dx}{da} = 0, \quad \frac{d^2x}{dy\,da} = 0, \quad \frac{d^3x}{dy^2\,da} = 0$$

pour le troisième ordre; et ainsi de suite.

11. De là il s'ensuit que si $Z' = 0$ est une équation différentielle du second ordre dont l'intégrale aux premières différences soit l'équation différentielle $Z = 0$, l'intégrale particulière de cette dernière, trouvée d'après la condition de

$$\frac{dy}{da} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{da} = 0,$$

ne satisfera pas, en général, à l'équation proposée $Z' = 0$, à moins que l'on n'ait à la fois

$$\frac{dy}{da} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx\,da} = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{da} = 0, \quad \frac{d^2x}{dy\,da} = 0.$$

De même, si $Z'' = 0$ est une équation différentielle du troisième ordre, dont l'intégrale aux premières différences soit l'équation $Z = 0$, l'intégrale particulière de cette dernière équation, déduite de la condition

$$\frac{dy}{da} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{da} = 0,$$

ne satisfera pas à la proposée $Z'' = 0$, à moins que l'on n'ait à la fois

$$\frac{dy}{da} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx\,da} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^2 da} = 0,$$

ou bien

$$\frac{dx}{da} = 0, \quad \frac{d^2x}{dy\,da} = 0, \quad \frac{d^3x}{dy^2 da} = 0;$$

et ainsi de suite.

Donc, en général, si dans la solution d'un Problème on a été conduit directement à une équation différentielle d'un ordre supérieur au premier, et qu'on ait déjà ramené cette équation au premier ordre à l'aide d'une ou de plusieurs intégrations, l'intégrale particulière de cette équation du premier ordre ne résoudra pas le Problème, à moins que toutes les conditions relatives à l'ordre de l'équation différentielle primitive ne se trouvent remplies.

Mais, si l'équation primitive du Problème n'est que du premier ordre,

l'intégrale particulière de cette équation résoudra la question tout aussi bien que l'intégrale complète.

12. L'équation

$$x\,d^2y - dy\,dx = 0$$

a pour intégrale complète du premier ordre

$$x\,dx + y\,dy - dy\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0;$$

et celle-ci a pour intégrale complète finie

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{da} = -\frac{a + y}{a},$$

ce qui, étant fait égal à zéro, donne, pour l'intégrale particulière,

$$a + y = 0, \quad \text{d'où} \quad a = -y,$$

et par conséquent

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0,$$

comme on l'a déjà vu (6).

Maintenant, pour que cette intégrale particulière satisfasse aussi à l'équation différentio-différentielle, il faudra que l'on ait en même temps

$$\frac{dy}{da} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx\,da} = 0;$$

différentiant donc la valeur trouvée de $\frac{dy}{da}$, on aura

$$\frac{d^2y}{dx\,da} = -\frac{1}{a}\frac{dy}{dx};$$

mais de l'équation

$$x^2 - 2ay - a^2 - b^2 = 0$$

on tire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}; \quad \text{donc} \quad \frac{d^2y}{dx\,da} = -\frac{x}{a^2},$$

ce qui ne peut pas être égal à zéro, en général. D'où il faut conclure que, quoique l'équation

$$x^2 + y^2 - b^2 = 0$$

satisfasse à l'équation différentielle du premier ordre

$$x\,dx + y\,dy - dy\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0,$$

elle ne satisfera cependant pas à l'équation différentio-différentielle

$$x\,d^2y - dy\,dx = 0,$$

qui en est dérivée. En effet, on trouve

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{b^2 - x^2}}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b^2}{(b^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ce qui, comme l'on voit, ne satisfait pas à l'équation dont il s'agit.

Prenons maintenant l'équation différentio-différentielle

$$(d^2y)^2 + 4x\,d^2y\,dx^2 - 4dy\,dx^3 = 0,$$

dont l'intégrale du premier ordre est

$$x^2\,dx + dy = (b^2 - x^2 - 3y)^{\frac{2}{3}}\,dx,$$

laquelle a pour intégrale complète

$$y - a^2x + ax^2 + \frac{a^3 - b^3}{3} = 0.$$

On aura donc

$$\frac{dy}{da} = 2ax - x^2 - a^2 = -(a - x)^2;$$

ce qui, étant fait égal à zéro, donne $a - x = 0$, par conséquent $a = x$, et

$$y + \frac{x^3 - b^3}{3} = 0$$

pour l'intégrale particulière. Pour que cette intégrale satisfasse donc aussi à l'équation différentio-différentielle, il faudra que $\frac{d^2y}{dx\,da} = 2(a - x)$ soit

nul en même temps; ce qui est en effet; donc, etc. On peut s'assurer *à posteriori* que l'équation

$$y = \frac{b^3 - x^3}{3}$$

satisfait à la proposée; car on a

$$\frac{dy}{dx} = -x^2 \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -2x;$$

ce qui étant substitué dans les termes

$$(d^2y)^2 + 4x\,d^2y\,dx^2 - 4dy\,dx^3,$$

tout se détruit de soi-même.

13. S'il arrivait que l'on eût en même temps

$$\frac{dy}{da} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx\,da} = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^2\,da} = 0, \ldots,$$

ou bien

$$\frac{dx}{da} = 0, \quad \frac{d^2x}{dy\,da} = 0, \quad \frac{d^2x}{dy^2\,da} = 0, \ldots,$$

et ainsi de suite à l'infini; alors l'intégrale particulière satisferait non-seulement à l'équation différentielle du premier ordre, mais aussi à toutes les équations différentielles des ordres ultérieurs qui en seraient dérivées. Cette intégrale aurait donc les mêmes propriétés que l'intégrale complète; et nous allons prouver qu'elle sera alors effectivement comprise dans celle-ci; de sorte qu'elle cessera d'être une intégrale particulière, et devra être rangée dans la classe des intégrales incomplètes. En effet, puisqu'en regardant la quantité y comme une fonction de x et de a donnée par l'équation $V = 0$, on a

$$\frac{dy}{da} = 0, \quad \frac{d^2y}{da\,dx} = 0, \quad \frac{d^3y}{da\,dx^2} = 0, \ldots \text{ à l'infini,}$$

il est visible que la quantité $\frac{dy}{da}$ ne doit pas contenir x, et ne peut être,

par conséquent, qu'une fonction de a mêlée avec des constantes. Ainsi, l'équation $\frac{dy}{da} = 0$ donnera a égal à une constante; donc, etc. Ce sera la même chose si, en regardant x comme une fonction de y et de a, on a en même temps

$$\frac{dx}{da} = 0, \quad \frac{d^2x}{da\,dy} = 0, \quad \frac{d^3x}{da\,dy^2} = 0, \ldots \text{ à l'infini.}$$

14. Cette considération nous conduit à une méthode directe pour trouver l'intégrale particulière d'une équation différentielle du premier ordre sans en connaître l'intégrale complète. Soit $Z = 0$ l'équation différentielle du premier ordre dont on cherche l'intégrale particulière, et dont l'intégrale complète est $V = 0$, Z étant une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$, et V une fonction de x, y et de l'arbitraire a. Puisque l'équation $Z = 0$ est indépendante de la quantité a, il s'ensuit qu'on aura également $\frac{dZ}{da} = 0$, en regardant y comme une fonction de x et a, ou x comme une fonction de y et a, donnée par l'équation $V = 0$; et pour avoir la valeur de $\frac{dZ}{da}$ il faudra différentier Z en faisant varier y seul dans le premier cas, ou x seul dans le second.

Supposons, pour plus de simplicité, que l'équation $Z = 0$ ne renferme point de fonctions transcendantes, et imaginons, ce qui est toujours possible et ne change point la nature de l'équation, qu'elle soit délivrée des fractions et des radicaux, en sorte que Z soit une fonction entière et rationnelle de x, y et $\frac{dy}{dx}$; on aura, en général, par la différentiation,

$$dZ = A\,d\frac{dy}{dx} + B\,dy + C\,dx,$$

A, B et C étant aussi des fonctions rationnelles et entières des mêmes quantités; donc, en regardant y comme une fonction de x et a, on aura

$$\frac{dZ}{da} = A\frac{d^2y}{dx\,da} + B\frac{dy}{da} = 0;$$

or dans le cas de l'intégrale particulière on a $\frac{dy}{da} = 0$; donc, puisque B ne peut devenir infini étant une fonction sans dénominateur, le terme $B\frac{dy}{da}$ deviendra nul, et il faudra qu'on ait

$$A\frac{d^2y}{dx\,da} = 0;$$

donc, si $\frac{d^2y}{dx\,da}$ n'est pas nul, il faudra que $A = 0$.

Si $\frac{d^2y}{dx\,da} = 0$ en même temps que $\frac{dy}{da} = 0$, l'équation

$$A\frac{d^2y}{dx\,da} + B\frac{dy}{da} = 0$$

aura lieu d'elle-même; mais en prenant la différentielle de cette équation, x et y variant à la fois et a demeurant constante, j'aurai

$$A\frac{d^3y}{dx^2\,da} + \left(\frac{dA}{dx} + B\right)\frac{d^2y}{dx\,da} + \frac{dB}{dx}\frac{dy}{da} = 0;$$

or on a $\frac{dy}{da}$ et $\frac{d^2y}{dx\,da}$ nuls à la fois par l'hypothèse; donc, puisque les coefficients de ces quantités ne sauraient devenir infinis, étant des fonctions sans dénominateur, l'équation précédente se réduira à

$$A\frac{d^3y}{dx^2\,da} = 0,$$

laquelle, si $\frac{d^3y}{dx^2\,da}$ n'est pas nul, donne de nouveau $A = 0$.

Si $\frac{d^3y}{dx^2\,da}$ est nul aussi, on trouvera, par une nouvelle différentiation, que l'on aura nécessairement $A = 0$, à moins que $\frac{d^4y}{dx^3\,da}$ ne soit nul; et ainsi de suite à l'infini.

Mais nous avons vu ci-dessus que pour que l'équation $\frac{dy}{da} = 0$ donne une intégrale particulière, il faut que les quantités

$$\frac{d^2y}{dx\,da}, \quad \frac{d^3y}{dx^2\,da}, \ldots \text{ à l'infini}$$

ne soient pas toutes nulles à la fois; donc il faudra que quelqu'une de ces quantités ne soit pas nulle; par conséquent il faudra nécessairement qu'on ait

$$A = 0.$$

Or l'équation différentielle proposée $Z = 0$ donne par la différentiation

$$dZ = A\,d\frac{dy}{dx} + B\,dy + C\,dx = 0;$$

donc, puisque dans le cas de l'intégrale particulière A doit être nul, cette équation se réduira à

$$B\,dy + C\,dx = 0, \quad \text{ou bien} \quad B\frac{dy}{dx} + C = 0,$$

laquelle devra s'accorder avec l'équation $A = 0$, après avoir chassé la valeur de $\frac{dy}{dx}$, au moyen de l'équation proposée $Z = 0$.

15. Donc, puisque la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ tirée de l'équation différentielle $Z = 0$ au moyen de la différentiation est exprimée, en général, par

$$-\frac{B\frac{dy}{dx} + C}{A},$$

il s'ensuit de ce que nous venons de démontrer que cette valeur deviendra égale à $\frac{0}{0}$ dans le cas de l'intégrale particulière tirée de la condition $\frac{dy}{da} = 0$; et l'on prouvera de même que la condition $\frac{dx}{da} = 0$ rendra la valeur de $\frac{d^2x}{dy^2}$ égale à $\frac{0}{0}$, en prenant ici dy pour constante au lieu de dx.

Et quoique la démonstration précédente soit fondée sur l'hypothèse que l'équation proposée ne renferme aucune fonction transcendante, il n'est cependant pas difficile de se convaincre que la même conclusion aura lieu quelles que soient la nature et la forme de cette équation.

16. En supposant que l'équation différentielle proposée $Z = 0$ donne par la différentiation

$$dZ = A\,d\frac{dy}{dx} + B\,dy + C\,dx = 0,$$

s'il arrive que les deux termes $B\,dy + C\,dx$ se détruisent d'eux-mêmes, on aura

$$A\,d\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{et par conséquent} \quad d\frac{dy}{dx} = \frac{0}{A};$$

de sorte que dans ce cas l'une et l'autre condition $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{0}{0}$ et $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{0}{0}$ sera remplie par la condition unique $A = 0$; ainsi il n'y aura qu'à éliminer la quantité $\frac{dy}{dx}$ au moyen des deux équations $A = 0$ et $Z = 0$, et l'équation résultante entre x et y sera l'intégrale particulière de la proposée. Quant à l'intégrale complète, elle est facile à déduire de l'équation

$$A\,d\frac{dy}{dx} = 0;$$

car cette équation, lorsque A n'est point nul, donne

$$d\frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{et par conséquent} \quad \frac{dy}{dx} = a,$$

a étant une constante arbitraire; il n'y aura donc qu'à substituer cette valeur de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation donnée $Z = 0$, et l'on aura l'intégrale complète où a sera la constante arbitraire.

Voyons maintenant quels sont les cas où l'on aura

$$B\,dy + C\,dx = 0.$$

Pour plus de simplicité, je fais $\frac{dy}{dx} = p$, en sorte que Z soit une fonction de x, y, p, dont la différentielle $dZ = A\,dp + B\,dy + C\,dx$; puis donc

que $B dy + C dx = 0$, on aura

$$C = -B\frac{dy}{dx} = -Bp;$$

donc

$$dZ = A dp + B(dy - p dx) = 0;$$

donc

$$dy - p dx + \frac{A dp}{B} = 0,$$

et intégrant

$$y - px + \int\left(\frac{A}{B} + x\right) dp = 0;$$

de sorte qu'il faudra que la quantité $\frac{A}{B} + x$ soit une fonction de p sans x ni y; et alors l'équation sera

$$y - px + f(p) = 0,$$

$f(p)$ dénotant une fonction quelconque de p seul.

17. Toute équation donc de la forme

$$y - px + f(p) = 0,$$

p étant $\frac{dy}{dx}$, donnera par la différentiation $\left[\text{en supposant } f'(p) = \frac{df(p)}{dp}\right]$ celle-ci

$$[f'(p) - x]\, dp = 0;$$

en faisant $dp = 0$, on aura

$$p = a,$$

et

$$y - ax + f(a) = 0$$

sera l'intégrale complète où a est arbitraire; en faisant

$$f'(p) - x = 0,$$

et éliminant p au moyen de cette équation et de la proposée

$$y - px + f(p) = 0,$$

on aura l'intégrale particulière de cette dernière équation. On voit par là que l'intégrale complète ne donnera jamais autre chose qu'une ligne droite, tandis que l'intégrale particulière donnera toujours une courbe; nous en donnerons la raison *à priori* dans l'Article suivant.

Ces sortes d'équations sont celles qui donnent lieu aux paradoxes dont il est question dans les Mémoires de MM. Clairaut et Euler que nous avons cités au commencement de ce Mémoire; et l'on doit voir maintenant que le vrai dénouement de ces paradoxes tient à la théorie des intégrales particulières que nous venons d'exposer.

18. Reprenons les Exemples que nous avons apportés dans le n° 6, et voyons si la règle ci-dessus donnera les mêmes intégrales particulières que nous avons trouvées d'après les intégrales complètes.

L'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} - y}$$

donne par la différentiation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - b^2 - xy\frac{dy}{dx} + \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}}{\left(\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} - y\right)^2\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}};$$

faisant cette quantité égale à $\frac{0}{0}$, on a les deux équations

$$y^2 - b^2 - xy\frac{dy}{dx} + \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0,$$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} - y\right)^2\sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0;$$

la seconde donne d'abord,

$$\text{ou } \sqrt{x^2 + y^2 - b^2} - y = 0, \quad \text{ou } \sqrt{x^2 + y^2 - b^2} = 0.$$

Dans le premier cas, on aura donc

$$\sqrt{x^2+y^2-b^2}=y,$$

et la première équation deviendra par là

$$-b^2=0,$$

ce qui ne donne rien. Dans le second cas, la première équation deviendra

$$y^2-b^2-xy\frac{dy}{dx}=0;$$

mais la proposée donne, en supposant $\sqrt{x^2+y^2-b^2}=0$,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y};$$

donc l'équation précédente deviendra

$$y^2+x^2-b^2=0,$$

laquelle s'accorde avec

$$\sqrt{x^2+y^2-b^2}=0;$$

ainsi cette équation est une intégrale particulière de la proposée.

Si l'on cherche la valeur de $\frac{d^2x}{dy^2}$ en prenant dy pour constante, on aura

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{yx-(y^2-b^2)\frac{dx}{dy}+\left(y\frac{dx}{dy}-x\right)\sqrt{x^2+y^2-b^2}}{x^2\sqrt{x^2+y^2-b^2}},$$

d'où l'on tire ces deux équations, en égalant le numérateur et le dénominateur chacun à zéro,

$$yx-(y^2-b^2)\frac{dx}{dy}+\left(y\frac{dx}{dy}-x\right)\sqrt{x^2+y^2-b^2}=0,$$

$$x^2\sqrt{x^2+y^2-b^2}=0;$$

la dernière de ces équations donne

$$\text{ou}\quad x=0,\quad \text{ou}\quad \sqrt{x^2+y^2-b^2}=0;$$

dans le premier cas, la première équation deviendra

$$\left(y\sqrt{y^2-b^2}-y^2+b^2\right)\frac{dx}{dy}=0;$$

mais

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\sqrt{x^2+y^2-b^2}-y}{x}=\infty \text{ lorsque } x=0;$$

donc $x=0$ n'est pas une intégrale particulière; reste donc le cas de

$$\sqrt{x^2+y^2-b^2}=0,$$

dans lequel la première équation devient

$$yx-(y^2-b^2)\frac{dx}{dy}=0;$$

mais on a, dans ce même cas,

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{y}{x};$$

donc substituant cette valeur et multipliant par $\frac{x}{y}$, l'équation précédente deviendra

$$x^2+y^2-b^2=0,$$

qui s'accorde avec

$$\sqrt{x^2+y^2-b^2}=0,$$

en sorte que cette équation sera une intégrale particulière.

Ainsi les deux conditions $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{0}{0}$ et $\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{0}{0}$ donnent, dans le cas présent, la même intégrale particulière

$$x^2+y^2-b^2=0;$$

ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé (6), d'où il s'ensuit que

cette équation est l'unique intégrale particulière dont l'équation différentielle proposée soit susceptible.

19. Les deux autres Exemples du n° 6 appartiennent à la formule

$$y - px + f(p) = 0$$

que nous avons considérée, en général, dans le n° 17 ci-dessus. En effet, en faisant $\frac{dy}{dx} = p$, les équations différentielles des deux Exemples dont nous parlons se réduisent à ces formes

$$y - px - b\sqrt{1+p^2} = 0$$

et

$$y - px + bp - \sqrt{c^2(1+p^2) - b^2} = 0,$$

qui sont évidemment des cas particuliers de la forme générale

$$y - px + f(p) = 0;$$

or nous avons déjà vu (numéro cité) que cette équation admet toujours une intégrale particulière, laquelle est le résultat de l'élimination de p des deux équations

$$y - px + f(p) = 0, \quad f'(p) - x = 0;$$

ainsi il ne s'agit que d'examiner si cette intégrale est la même qu'on tirerait de l'intégrale complète par la règle de l'Article I (n^{os} 4, 5).

L'intégrale dont il s'agit est (17)

$$y - ax + f(a) = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{da} = x - f'(a), \quad \frac{dx}{da} = \frac{f'(a) - x}{a};$$

ainsi les deux conditions $\frac{dy}{da} = 0$ et $\frac{dx}{da} = 0$ donnent également

$$f'(a) - x = 0;$$

et l'intégrale particulière sera le résultat de l'élimination de a au moyen de cette équation

$$f'(a) - x = 0,$$

et de l'équation

$$y - ax + f(a) = 0;$$

or il est visible que ce résultat sera le même que celui de l'élimination de p au moyen des équations

$$f'(p) - x = 0, \quad y - px + f(p) = 0;$$

donc, etc.

20. Le dernier Exemple du n° 6 est tiré de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

dans laquelle X est un quinôme en x, et Y un quinôme semblable en y; mais nous supposerons ici que X soit, en général, un polynôme quelconque en x, et Y un polynôme quelconque en y, et nous désignerons par X′ et Y′ les valeurs de $\frac{dX}{dx}$ et de $\frac{dY}{dy}$, lesquelles seront par conséquent aussi des polynômes en x et y, mais d'un degré inférieur d'une unité.

Puis donc que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{Y}}{\sqrt{X}},$$

on trouvera par la différentiation, après avoir réduit au dénominateur commun,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{XY'\frac{dy}{dx} - YX'}{2X\sqrt{XY}}, \quad \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{YX'\frac{dx}{dy} - XY'}{2Y\sqrt{XY}},$$

en prenant dans la première formule dx constant et dans la seconde dy constant.

Supposons d'abord que les quantités X et X′ n'aient aucun diviseur commun, non plus que les quantités Y et Y′, ce qui arrive lorsque les

équations $X = o$ et $Y = o$ n'ont point de racines égales; dans ce cas le numérateur et le dénominateur de l'une et de l'autre quantité $\frac{d^2y}{dx^2}$ et $\frac{d^2x}{dy^2}$ n'auront non plus de diviseur commun.

Donc :

1° En faisant $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{o}{o}$ on aura les deux équations

$$XY'\frac{dy}{dx} - YX' = o, \quad X\sqrt{XY} = o,$$

dont la seconde donne ou $X = o$ ou $Y = o$; mais la première donne, par la substitution de la valeur de $\frac{dy}{dx}$,

$$Y'\sqrt{XY} - YX' = o;$$

faisant $X = o$, cette équation se réduit à $YX' = o$, laquelle donnerait $X' = o$, ce qui est contre l'hypothèse; faisant $Y = o$, l'équation précédente se trouve remplie d'elle-même; ainsi $Y = o$ est une intégrale particulière.

2° Si l'on fait $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{o}{o}$ on trouvera, par un raisonnement semblable, l'intégrale particulière $X = o$; de sorte que ces deux intégrales particulières auront lieu en même temps.

Si l'on suppose que Y et Y′ aient un diviseur commun, alors il est aisé de voir que ce diviseur disparaitra entièrement par la division du dénominateur de la quantité $\frac{d^2y}{dx^2}$; par conséquent il ne pourra servir à rendre cette quantité égale à $\frac{o}{o}$; il en sera de même relativement à la quantité $\frac{d^2x}{dy^2}$, si X et X′ ont un diviseur commun.

D'où il faut conclure, en général, que l'équation proposée

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

aura pour intégrales particulières tous les facteurs simples des deux

équations $X = o$ et $Y = o$; ce qui s'accorde avec ce que nous avons trouvé dans le n° 6 pour le cas particulier où X et Y étaient des quinômes semblables.

Article III. — *Dans lequel on déduit la théorie des intégrales particulières de la considération des courbes.*

21. Soit $V = o$ l'intégrale complète d'une équation différentielle du premier ordre $Z = o$, Z étant une fonction de x, y et $\frac{dy}{dx}$; on sait que V sera une fonction finie de x, y et d'une constante arbitraire a; donc si l'on considère la courbe exprimée par l'équation $V = o$, en prenant x et y pour les deux coordonnées, cette courbe exprimera aussi l'équation différentielle $Z = o$, quelque valeur qu'on donne à la constante a; de sorte qu'en donnant successivement à a toutes les valeurs possibles depuis zéro jusqu'à l'infini positif et négatif, on aura un assemblage d'une infinité de courbes toutes de la même famille, et infiniment peu différentes l'une de l'autre, dont chacune représentera également l'équation différentielle $Z = o$.

Je dis maintenant que la courbe, qui touchera toutes les courbes dont il s'agit, satisfera aussi à la même équation différentielle $Z = o$. Car cette équation détermine la valeur de $\frac{dy}{dx}$ par une fonction de x et y; par conséquent elle détermine la position de la tangente à chaque point par la position de ce point dans le plan des coordonnées x et y; donc toute courbe, qui dans un point quelconque aura la même tangente qu'une des courbes dont nous venons de parler, satisfera aussi nécessairement à l'équation $Z = o$; or il est visible que la courbe, qui touche toutes les courbes données par l'équation $V = o$, en faisant varier le paramètre a, a cette propriété; donc, etc.

22. Si l'on considère deux points infiniment proches de la courbe touchante, il est facile de concevoir que les deux courbes touchées dans

ces points doivent nécessairement se couper dans un point intermédiaire; par conséquent, en faisant coïncider les deux points d'attouchement, le point d'intersection des deux courbes touchées se confondra avec eux; d'où il suit que la courbe touchante est formée par l'intersection mutuelle et successive des courbes données par l'équation $V = o$, en faisant varier le paramètre a; donc cette courbe satisfera à l'équation $Z = o$; ce qui est d'ailleurs évident, puisque suivant ce point de vue la courbe dont nous parlons n'est composée que de portions infiniment petites des courbes représentées par l'équation $V = o$, et dont chacune satisfait à la même équation $Z = o$.

23. Maintenant, si l'on regarde y comme une fonction de x et de a donnée par l'équation $V = o$, il est clair que, pour la même abscisse x, les coordonnées qui répondent à deux courbes infiniment proches seront, en général, y et $y + \frac{dy}{da}da$; donc, au point d'intersection de ces deux courbes, on aura $\frac{dy}{da} = o$; par conséquent, si l'on élimine a au moyen des deux équations $V = o$ et $\frac{dy}{da} = o$, on aura l'équation de la courbe formée par les intersections continuelles de toutes les courbes contenues dans l'équation $V = o$, laquelle sera aussi la courbe qui touchera toutes ces mêmes courbes.

On prouvera de même, en regardant x comme fonction de y et de a, que la condition $\frac{dx}{da} = o$, combinée avec l'équation $V = o$ en sorte que a disparaisse, donnera aussi la courbe touchante des mêmes courbes.

D'où et de ce que nous avons démontré plus haut (4 et 5) on doit conclure que l'intégrale particulière d'une équation différentielle du premier ordre est représentée par la courbe qui touche toutes les différentes courbes représentées par l'intégrale complète de cette équation, en faisant varier la constante arbitraire, c'est-à-dire toutes les différentes courbes qui peuvent être représentées à la fois par la même équation différentielle.

Ainsi les caustiques par réflexion et par réfraction ne sont autre chose que les courbes représentées par l'intégrale particulière de l'équation différentielle qui exprime à la fois toutes les lignes droites suivant lesquelles les rayons sont réfléchis ou réfractés.

Et les développées ne sont que les courbes représentées par l'intégrale particulière de l'équation différentielle qui exprime toutes les lignes droites qui coupent la développante à angles droits; et ainsi du reste.

24. Toute équation différentielle du premier ordre représente donc premièrement une infinité de courbes de la même famille, qui ne diffèrent entre elles que par la valeur de la constante arbitraire, laquelle tient lieu de paramètre; en second lieu, cette équation représente aussi la courbe qui touche toutes ces mêmes courbes; en sorte qu'on peut regarder en quelque façon tant les courbes touchées que la courbe touchante comme une seule courbe ayant une infinité de branches liées entre elles par la même équation. Ainsi, à chaque point de la courbe touchante il y aura deux branches qui se rencontrent dans ce point et qui ont une tangente commune; l'une c'est la courbe touchante même, et l'autre c'est la courbe qu'elle touche dans ce même point; donc à chaque valeur de $\frac{dy}{dx}$ il devra répondre une valeur double de $\frac{d^2y}{dx^2}$; par conséquent l'expression de la quantité $\frac{d^2y}{dx^2}$, tirée de l'équation différentielle proposée au moyen de la différentiation, devra devenir égale à $\frac{o}{o}$ pour tous les points de la courbe touchante, par une raison semblable à celle par laquelle on prouve que la valeur de $\frac{dy}{dx}$ devient égale à $\frac{o}{o}$ dans les points doubles des courbes; et l'on dira la même chose à l'égard de la quantité $\frac{d^2x}{dy^2}$, en supposant dy constant au lieu de dx. De cette manière on pourra donc déduire de l'équation différentielle même celle de la courbe qui toucherait toutes les différentes courbes représentées par cette équation différentielle; et comme l'équation de la courbe touchante n'est autre chose que l'intégrale parti-

culière de l'équation différentielle dont nous parlons, ainsi qu'on l'a démontré ci-dessus, il résulte de là la même règle pour trouver ces sortes d'intégrales, que nous avons donnée dans le n° 15, d'après d'autres principes.

25. Pour jeter un plus grand jour sur la théorie précédente et rendre bien sensible la liaison qu'il y a entre les intégrales complètes et les intégrales particulières, nous allons apporter quelques Exemples tirés de la Géométrie dans lesquels l'application de cette théorie se présente naturellement.

Supposons qu'on demande une courbe telle, que toutes les perpendiculaires menées d'un point donné sur les tangentes de cette courbe soient d'une grandeur donnée.

Il est visible que le cercle résout d'abord la question, pourvu qu'on place le centre dans le point donné et qu'on fasse le rayon égal à la grandeur donnée; mais comme le Problème conduit naturellement à une équation différentielle du premier ordre, il s'ensuit que la solution complète doit renfermer une constante arbitraire; par conséquent, puisque le cercle qui résout le Problème est nécessairement donné de grandeur et de position, on ne peut pas avoir par son moyen une solution complète, mais seulement une solution particulière.

Or si l'on considère que la ligne droite satisfait aussi au même Problème, et que pour cela il suffit que la perpendiculaire menée du point donné sur cette ligne soit donnée, on verra qu'il y a une infinité de droites qui résolvent le Problème; de sorte que ces droites en donnent la véritable solution complète, puisque dans l'équation qui les représente toutes il entre nécessairement une constante arbitraire; et l'on verra de plus que toutes ces droites sont nécessairement les tangentes du cercle qui donne la solution particulière.

Pour confirmer par le calcul ce que nous venons de trouver synthétiquement, soient x, y les coordonnées de la courbe cherchée, et t, u les coordonnées d'une quelconque de ses tangentes considérée comme

une ligne droite; on aura donc, en général, entre t et u l'équation

$$u = mt + n,$$

m et n étant constantes pour la même tangente, mais variables d'une tangente à l'autre. Or, comme la droite et la courbe doivent d'abord se rencontrer dans un point, on aura dans ce point $u = y$, $t = x$; donc

$$y = mx + n;$$

ensuite, comme elles doivent de plus se toucher dans le même point, on aura encore $\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dx}$; mais $\frac{du}{dt} = m$; donc $m = \frac{dy}{dx}$; et par conséquent $n = y - x\frac{dy}{dx}$; donc l'équation à la tangente sera

$$u = t\frac{dy}{dx} + y - x\frac{dy}{dx}.$$

Prenons l'origine des coordonnées pour le point donné, et nommant ρ une ligne menée de ce point à la tangente, on aura

$$\rho^2 = t^2 + u^2;$$

donc, pour que cette ligne soit perpendiculaire, il faudra que $d\rho = 0$, ce qui donne

$$t\,dt + u\,du = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} = -\frac{t}{u};$$

donc

$$\frac{t}{u} = -\frac{dy}{dx}, \quad t = -u\frac{dy}{dx};$$

donc, substituant cette valeur de t dans l'équation ci-dessus, on en tire

$$u = \frac{(y\,dx - x\,dy)\,dx}{dx^2 + dy^2};$$

donc

$$\rho^2 = u^2\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right) = \frac{(y\,dx - x\,dy)^2}{dx^2 + dy^2};$$

c'est le carré de la perpendiculaire menée du point donné sur la tan-

gente; nommant donc cette perpendiculaire b, on aura l'équation

$$y\,dx - x\,dy = b\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

qui servira à résoudre le Problème. Or cette équation a déjà été examinée dans le n° 6, et nous avons vu qu'elle donne l'intégrale complète

$$y - ax - b\sqrt{1 + a^2} = 0,$$

et ensuite l'intégrale particulière

$$x^2 + y^2 = b^2;$$

ce qui s'accorde avec les résultats trouvés plus haut.

26. *Ayant tiré d'un point donné une perpendiculaire à la tangente d'une courbe, et menant du point où cette perpendiculaire rencontre la tangente à un autre point donné une droite, on demande quelle doit être la nature de la courbe pour que cette droite comprise entre les deux points dont il s'agit soit d'une grandeur donnée.*

Par les propriétés connues des sections coniques il est facile de voir que si l'on décrit une section conique qui ait le premier des deux points donnés pour l'un des foyers, l'autre point pour centre, et la grandeur donnée pour demi-axe, cette section conique résoudra le Problème; mais la section étant entièrement déterminée par ces données, elle ne pourra pas fournir une solution complète du Problème, lequel conduit naturellement à une équation différentielle du premier ordre, et par conséquent indéterminée.

Outre la section conique, on voit aisément qu'il y a une infinité de droites qui peuvent aussi résoudre la question; car si l'on décrit autour du second point donné un cercle dont le rayon soit égal à la grandeur donnée, toute ligne droite qui coupera ce cercle en un point quelconque, de manière qu'elle fasse un angle droit avec la droite menée de ce point d'intersection au premier point donné, aura évidemment les propriétés requises.

L'équation générale de toutes ces lignes droites renfermant donc une constante arbitraire, elle donnera nécessairement la solution complète du Problème; et il est facile de prouver, par les propriétés connues des sections coniques, que toutes ces droites seront tangentes à la section conique que nous avons vu résoudre aussi le Problème; de sorte que la solution par une section conique ne sera qu'une solution particulière.

En effet, pour réduire le Problème en équation, on remarquera que, si de l'origine des coordonnées on mène une perpendiculaire à une tangente quelconque d'une courbe dont les coordonnées soient x et y, et qu'on nomme t et u les coordonnées qui se rapportent au point de la tangente sur laquelle tombe la perpendiculaire, on remarquera, dis-je, que les formules trouvées dans le n° 25 ci-dessus donneront

$$u = \frac{(y\,dx - x\,dy)\,dx}{dx^2 + dy^2}, \quad t = -u\frac{dy}{dx} = -\frac{(y\,dx - x\,dy)\,dy}{dx^2 + dy^2};$$

maintenant si l'on fait passer l'axe des abscisses par les deux points donnés, qu'on prenne le premier de ces deux points pour l'origine, et qu'on nomme b la distance entre les deux points et c la grandeur donnée, il est aisé de concevoir qu'on aura

$$c^2 = (b - t)^2 + u^2;$$

donc

$$t^2 + u^2 - 2bt = c^2 - b^2,$$

et substituant pour t et u les valeurs ci-dessus,

$$\frac{(y\,dx - x\,dy)^2 + 2b(y\,dx - x\,dy)\,dy}{dx^2 + dy^2} = c^2 - b^2;$$

d'où, en multipliant par $dx^2 + dy^2$, et extrayant la racine carrée après avoir ajouté de part et d'autre b^2dy^2, on aura l'équation du Problème

$$y\,dx - x\,dy + b\,dy = \sqrt{c^2(dx^2 + dy^2) - b^2dx^2}.$$

Nous avons déjà traité cette équation dans le n° 6, et nous avons vu que

son intégrale complète est

$$y - a(x-b) = \sqrt{c^2(1+a^2) - b^2},$$

ce qui donne différentes lignes droites suivant la valeur de la constante arbitraire a; nous avons vu ensuite que cette même équation est susceptible d'une intégrale particulière, laquelle est

$$\frac{(x-b)^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2-b^2} = 1,$$

et représente par conséquent une ellipse dans laquelle les abscisses x sont prises depuis l'un des foyers, et où b est l'excentricité et c le demi grand axe; de sorte que cette ellipse est la même que celle dont nous avons parlé ci-dessus.

ARTICLE IV. — *Des intégrales particulières des équations différentielles du second ordre et des ordres plus élevés.*

27. Soit

$$Z' = 0$$

une équation différentielle du second ordre, Z' étant une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$, $d\frac{dy}{dx}$; et soit

$$V = 0$$

l'intégrale finie et complète de cette équation: V sera, dans ce cas, une fonction de x, y et de deux constantes arbitraires a et b. Or, puisque a et b sont arbitraires, on peut supposer, en général, que b soit une fonction quelconque de a; alors V sera une fonction de x, y et a; et, de ce que nous avons démontré dans l'Article II, il s'ensuit que l'équation $V = 0$ satisfera également à l'équation $Z' = 0$, en supposant a variable, pourvu que l'on ait

$$\frac{dy}{da} = 0, \quad \frac{d^2y}{da\,dx} = 0,$$

ou

$$\frac{dx}{da} = 0, \quad \frac{d^2x}{da\,dy} = 0;$$

et dans ce cas l'équation $V = 0$ deviendra une intégrale particulière (10).

28. Considérons les deux conditions

$$\frac{dy}{da} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx\,da} = 0;$$

et supposant

$$b = f(a), \quad db = f'(a)\,da,$$

il est clair que si l'on regarde y comme une fonction de a et de b, la valeur complète de $\frac{dy}{da}$ sera représentée par $\frac{dy}{da} + \frac{dy}{db} f'(a)$, de sorte que les deux conditions dont il s'agit seront exprimées ainsi

$$\frac{dy}{da} + \frac{dy}{db} f'(a) = 0, \quad \frac{d^2y}{dx\,da} + \frac{d^2y}{dx\,db} f'(a) = 0.$$

Au moyen de ces deux équations on déterminera les valeurs de a et de $f(a)$ ou b en x et y, et on les substituera ensuite dans l'équation $V = 0$, ou, ce qui revient au même, on éliminera a et $f(a)$ au moyen des trois équations dont il s'agit; et l'équation résultante sera l'intégrale particulière de l'équation différentio-différentielle $Z' = 0$.

Si l'on remet db à la place de $f'(a)\,da$, on aura les deux équations de condition

$$\frac{dy}{da} + \frac{dy}{db}\frac{db}{da} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx\,da} + \frac{d^2y}{dx\,db}\frac{db}{da} = 0,$$

au moyen desquelles et de l'équation $V = 0$ il faudra éliminer a et b.

En éliminant d'abord les différentiels $\frac{db}{da}$, on aura l'équation

$$\frac{dy}{da}\frac{d^2y}{dx\,db} - \frac{dy}{db}\frac{d^2y}{dx\,da} = 0,$$

laquelle, étant combinée avec l'équation $V = 0$, servira à déterminer a

et b en x et y; et il n'y aura plus qu'à substituer ces valeurs de a et b dans l'équation

$$\frac{dy}{da}\,da+\frac{dy}{db}\,db=0;$$

ce qui donnera une équation différentielle du premier ordre en x et y, laquelle sera par conséquent l'intégrale particulière cherchée de l'équation du second ordre

$$Z'=0.$$

Mais puisque l'équation $V=0$ donne par la différentiation, en faisant varier à la fois x, y, a, b,

$$dy=p\,dx+\frac{dy}{da}\,da+\frac{dy}{db}\,db,$$

on aura

$$\frac{dy}{da}\,da+\frac{dy}{db}\,db=dy-p\,dx;$$

par conséquent l'équation

$$\frac{dy}{da}\,da+\frac{dy}{db}\,db=0$$

sera équivalente à celle-ci

$$dy-p\,dx=0;$$

ainsi il n'y aura qu'à substituer les valeurs de a et de b dans cette dernière équation, ou, ce qui revient au même, éliminer les valeurs de a et de b au moyen des équations

$$V=0,\quad \frac{dy}{da}\,\frac{d^2y}{dx\,db}-\frac{dy}{db}\,\frac{d^2y}{dx\,da}=0,\quad dy-p\,dx=0;$$

l'équation du premier ordre qui en résultera sera l'intégrale particulière dont il s'agit.

29. De là je conclus, en général, que pour trouver l'intégrale particulière de l'équation différentio-différentielle $Z'=0$, dont l'intégrale

finie et complète est $V=0$, il n'y a qu'à éliminer les quantités a, b et $\frac{db}{da}$ au moyen des équations

$$V=0,\quad \frac{dy}{dx}-p=0,\quad \frac{dy}{da}+\frac{dy}{db}\,\frac{db}{da}=0,\quad \frac{d^2y}{dx\,da}+\frac{d^2y}{dx\,db}\,\frac{db}{da}=0;$$

et comme au lieu de regarder y comme une fonction de x, a, b, on peut *vice versâ* regarder x comme une fonction de y, a, b, on pourra aussi, à la place des deux dernières équations, substituer ces deux-ci

$$\frac{dx}{da}+\frac{dx}{db}\,\frac{db}{da}=0,\quad \frac{d^2x}{dy\,da}+\frac{d^2x}{dy\,db}\,\frac{db}{da}=0.$$

30. Soit l'équation du second ordre

$$y-x\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}\,\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}-x\,\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2,$$

dont l'intégrale finie et complète est

$$y=\frac{ax^2}{2}+bx+a^2+b^2,$$

a et b étant les deux constantes arbitraires. On tire par la différentiation

$$\frac{dy}{dx}=ax+b,\quad \frac{dy}{da}=\frac{x^2}{2}+2a,\quad \frac{dy}{db}=x+2b,\quad \frac{d^2y}{dx\,da}=x,\quad \frac{d^2y}{dx\,db}=1;$$

on aura donc ces quatre équations

$$y=\frac{ax^2}{2}+bx+a^2+b^2,\qquad \frac{dy}{dx}=ax+b,$$

$$\frac{x^2}{2}+2a+(x+2b)\,\frac{db}{da}=0,\quad x+\frac{db}{da}=0;$$

au moyen desquelles, éliminant les quantités a, b, $\frac{db}{da}$, on aura pour résultante l'intégrale particulière de la proposée.

Les trois dernières donnent

$$a=\frac{\frac{x^2}{4}+x\frac{dy}{dx}}{1+x^2},\quad b=\frac{\frac{dy}{dx}-\frac{x^3}{4}}{1+x^2},$$

et ces valeurs étant substituées dans la première, on aura

$$y=\frac{-x^4+(8x^2+16x)\frac{dy}{dx}+16\frac{dy^2}{dx^2}}{16(1+x^2)};$$

c'est l'intégrale particulière aux premières différences de l'équation différentio-différentielle dont il s'agit.

Si l'on intègre cette équation, on aura alors l'intégrale particulière finie de la proposée. Pour cela, je tire par l'extraction de la racine carrée la valeur de $\frac{dy}{dx}$, j'ai

$$4\frac{dy}{dx}+2x+x^3=\sqrt{1+x^2}\sqrt{16y+4x^2+x^4};$$

donc, divisant par $\sqrt{16y+4x^2+x^4}$ et multipliant par 2, on aura

$$\frac{8dy+4x\,dx+2x^3dx}{\sqrt{16y+4x^2+x^4}}=2dx\sqrt{1+x^2},$$

équation intégrable, et dont l'intégrale est, en ajoutant une constante arbitraire α,

$$\sqrt{16y+4x^2+x^4}=x\sqrt{1+x^2}-\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\alpha.$$

Il est remarquable que tandis que l'intégrale complète de la proposée est algébrique, l'intégrale particulière en est transcendante.

31. L'intégrale particulière aux différences premières que nous avons trouvée ci-dessus admet, outre l'intégrale complète précédente, encore une intégrale particulière finie, qu'on peut trouver par les méthodes des

Articles I et II. Déduisons-la de l'intégrale complète au moyen de la condition $\frac{dy}{d\alpha}=0$; la différentiation de la dernière équation donne

$$\frac{dy}{d\alpha}=\frac{\sqrt{16y+4x^2+x^4}}{8};$$

ainsi l'on aura

$$\sqrt{16y+4x^2+x^4}=0;$$

comme cette équation ne renferme point la quantité α, il faut la combiner avec l'intégrale complète en éliminant l'une des variables x ou y, pour voir si la valeur résultante de α est constante ou variable (4); or l'équation que nous venons de trouver donne

$$y=-\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{16};$$

et cette valeur étant substituée dans l'intégrale complète (numéro précédent), on a

$$x\sqrt{1+x^2}-\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+\alpha=0;$$

d'où l'on voit que α est déterminée par une fonction de x; par conséquent l'équation dont il s'agit est une intégrale particulière.

Mais cette intégrale particulière, quoiqu'elle satisfasse à l'intégrale particulière aux premières différences de l'équation proposée, il ne s'ensuit pas qu'elle doive aussi satisfaire à cette dernière équation; au contraire, elle n'y satisfera pas à moins que l'on n'ait en même temps

$$\frac{dy}{d\alpha}=0,\quad \frac{d^2y}{dx\,d\alpha}=0,$$

à cause qu'il s'agit d'une équation différentielle du second ordre (11); or ayant

$$\frac{dy}{d\alpha}=\frac{\sqrt{16y+4x^2+x^4}}{8},$$

on aura

$$\frac{d^2y}{dx\,d\alpha}=\frac{8\frac{dy}{dx}+4x+2x^3}{8\sqrt{16y+4x^2+x^4}},$$

et mettant pour $\frac{dy}{dx}$ sa valeur

$$-\frac{x}{2}-\frac{x^3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{1+x^2}\sqrt{16y+4x^2+x^4},$$

il viendra

$$\frac{d^2y}{dx\,dz}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{4},$$

ce qui n'est pas nul; d'où il s'ensuit que l'équation dont il s'agit, savoir

$$y=-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{16},$$

ne satisfait pas à la proposée du second ordre, comme on peut aisément s'en assurer. Cet Exemple peut servir de confirmation à la théorie donnée dans l'Article II.

Au reste, il est bon de remarquer que cette intégrale particulière

$$y=-\frac{x^2}{4}-\frac{x^4}{16}$$

peut aussi se déduire immédiatement de l'intégrale finie et complète

$$y=\frac{ax^2}{2}+bx+a^2+b^2,$$

en faisant en même temps

$$\frac{dy}{da}=0 \quad \text{et} \quad \frac{dy}{db}=0;$$

ce qui donne les deux équations

$$\frac{x^2}{2}+2a=0, \quad x+2b=0,$$

d'où l'on tire

$$a=-\frac{x^2}{4}, \quad b=-\frac{x}{2},$$

ce qui, étant substitué dans l'intégrale complète, donne

$$y=-\frac{x^4}{16}-\frac{x^2}{4}.$$

Et cette règle est générale pour toutes les équations différentio-différentielles dont on connaît l'intégrale finie et complète.

32. Si, au moyen de l'équation finie $V=0$ et de l'équation aux premières différences $\frac{dy}{dx}-p=0$ qui en est dérivée par la différentiation, on élimine l'une des deux constantes a, b, on a une équation différentielle du premier ordre $Z=0$, qui sera l'intégrale complète aux différences premières de l'équation différentio-différentielle $Z'=0$; et, comme on peut éliminer à volonté l'une ou l'autre des deux constantes arbitraires a, b, on aura ainsi deux intégrales aux premières différences; ce qui est connu des Géomètres.

Supposons maintenant qu'on ait éliminé b, en sorte que dans l'équation $Z=0$ la quantité Z soit une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$ et a; si l'on différentie cette équation en faisant varier x, y et a, et qu'on suppose, en général,

$$dZ=A\,d\frac{dy}{dx}+B\,dy+C\,dx+E\,da,$$

on aura

$$d\frac{dy}{dx}=-\frac{B\,dy+C\,dx+E\,da}{A};$$

donc, en faisant varier a seul, on aura

$$\frac{d^2y}{dx\,da}=-\frac{B}{A}\frac{dy}{da}-\frac{E}{A},$$

et, faisant varier b seul,

$$\frac{d^2y}{dx\,db}=-\frac{B}{A}\frac{dy}{db};$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation de condition

$$\frac{d^2y}{dx\,da}+\frac{d^2y}{dx\,db}\frac{db}{da}=0,$$

du n° 29, on aura

$$-\frac{B}{A}\left(\frac{dy}{da}+\frac{dy}{db}\frac{db}{da}\right)-\frac{E}{A}=0;$$

mais on doit avoir aussi (numéro cité)

$$\frac{dy}{da}+\frac{dy}{db}\frac{db}{da}=0;$$

donc on aura

$$-\frac{E}{A}=0;$$

or si dans l'équation $Z=0$ on fait varier uniquement $\frac{dy}{dx}$ et a, en regardant y et x comme constantes, on a

$$A\,d\frac{dy}{dx}+E\,da=0,$$

d'où

$$\frac{E}{A}=-\frac{d\frac{dy}{dx}}{da}=-\frac{d^2y}{dx\,da};$$

ainsi l'équation de condition se réduira à

$$\frac{d^2y}{dx\,da}=0;$$

laquelle, étant combinée avec l'équation $Z=0$, donnera par l'élimination de a la même équation qu'on eût obtenue d'après les quatre équations du n° 29.

Et si au lieu d'éliminer b on eût éliminé a, en sorte que Z fût une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$ et b, alors on aurait l'équation de condition

$$\frac{d^2y}{dx\,db}=0,$$

laquelle donnerait encore le même résultat en éliminant b au moyen de l'équation $Z=0$.

33. Il s'ensuit de là que si l'on ne connait pas l'intégrale finie et complète $V=0$ de l'équation différentio-différentielle $Z'=0$, mais seulement une des deux intégrales aux premières différences de cette équation, telle que $Z=0$, Z étant une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$ et d'une constante arbitraire a, on pourra également trouver l'intégrale particulière de la même équation $Z'=0$; pour cela il n'y aura qu'à faire varier dans l'équation $Z=0$ les deux quantités $\frac{dy}{dx}$ et a, et à supposer ensuite

$$\frac{d^2y}{dx\,da}=0;$$

cette équation, étant combinée avec l'équation $Z=0$, en éliminant la quantité a, donnera l'intégrale cherchée.

Cette règle peut aussi se démontrer directement, et indépendamment de la considération de l'intégrale finie et complète $V=0$. En effet, puisque l'équation du premier ordre $Z=0$ satisfait à l'équation du second ordre $Z'=0$, quelle que soit la valeur de la constante a contenue dans Z, il s'ensuit que cette équation $Z'=0$ ne peut être que le résultat de l'élimination de a au moyen de l'équation $Z=0$ et de l'équation $d\frac{dy}{dx}=p'dx$ déduite de celle-là au moyen d'une différentiation. Or il est clair que ce résultat sera toujours le même, quelle que soit la quantité à éliminer a, constante ou non, pourvu que les deux équations

$$Z=0,\quad d\frac{dy}{dx}=p'dx$$

soient les mêmes; mais en regardant a comme variable, on a

$$d\frac{dy}{dx}=p'dx+q'da;$$

équation qui se réduira à la forme précédente en faisant $q' = 0$; donc si l'on détermine a en sorte que q', ou ce qui est la même chose $d\frac{dy}{da}$, ou bien $\frac{d^2y}{dx\,da}$, soit nul, l'équation $Z = 0$ satisfera encore à l'équation $Z' = 0$; et, comme a devient dans ce cas égal à une quantité variable, l'équation $Z = 0$ ne sera plus qu'une intégrale particulière de la même équation.

34. Pour confirmer cette règle par un Exemple, reprenons l'équation différentio-différentielle du n° 30, et nous trouverons aisément, d'après l'intégrale finie et complète qu'on connaît déjà, ces deux intégrales aux premières différences

$$y = \left(-\frac{a}{2} + a^2\right)x^2 + (1-2a)x\frac{dy}{dx} + a^2 + \frac{dy^2}{dx^2},$$

$$y = \frac{\left(b + \frac{dy}{dx}\right)x}{2} + \frac{\left(b - \frac{dy}{dx}\right)^2}{x^2} + b^2,$$

a et b étant les constantes arbitraires.

Faisant varier dans la première les quantités $\frac{dy}{dx}$ et a, on en tire

$$\frac{d^2y}{dx\,da} = \frac{\left(\frac{1}{2} - 2a\right)x^2 + 2x\frac{dy}{dx} - 2a}{(1-2a)x + 2\frac{dy}{dx}},$$

et supposant cette quantité égale à zéro, on aura l'équation

$$\left(\frac{1}{2} - 2a\right)x^2 + 2x\frac{dy}{dx} - 2a = 0,$$

d'où résulte

$$a = \frac{\frac{x^2}{2} + 2x\frac{dy}{dx}}{2(1+x^2)};$$

et cette valeur étant substituée dans l'équation ci-dessus, il viendra,

après les réductions,

$$y = x\frac{dy}{dx} + \frac{dy^2}{dx^2} - \frac{\left(4x\frac{dy}{dx} + x^2\right)^2}{16(1+x^2)},$$

ou bien

$$y = \frac{-x^4 + (8x^2 + 16x)\frac{dy}{dx} + 16\frac{dy^2}{dx^2}}{16(1+x^2)};$$

c'est, comme l'on voit, la même équation qu'on a trouvée dans le n° 30.

On trouvera encore le même résultat si, dans la seconde équation ci-dessus, on fait varier les quantités $\frac{dy}{dx}$ et b, et qu'on suppose ensuite $\frac{d^2y}{dx\,db} = 0$; on aura en effet, par la différentiation de cette équation,

$$\frac{d^2y}{dx\,db} = \frac{\frac{x^2}{2} + 2bx^2 + 2\left(b - \frac{dy}{dx}\right)}{2\left(b - \frac{dy}{dx}\right) - \frac{x^2}{2}},$$

ce qui étant supposé égal à zéro donne

$$b = \frac{2\frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{2}}{2(1+x^2)},$$

et cette valeur étant substituée à la place de b, on aura, après les réductions,

$$y = \frac{x}{2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{\left(4\frac{dy}{dx} - x^2\right)^2}{16x^2(1+x^2)},$$

ou bien

$$y = \frac{16x\frac{dy}{dx} + 8x^2\frac{dy}{dx} + 16\frac{dy^2}{dx^2} - x^4}{16(1+x^2)}.$$

Ainsi les deux intégrales aux premières différences, quoique très-différentes entre elles, donnent cependant la même intégrale particulière; la raison en est claire par l'analyse du n° 32.

35. La méthode du n° 33 pour trouver l'intégrale particulière d'une équation différentio-différentielle lorsqu'on connait seulement une de ses intégrales complètes aux premières différences est, comme l'on voit, absolument analogue à celle du n° 4 pour trouver l'intégrale particulière d'une équation différentielle du premier ordre au moyen de son intégrale finie et complète; l'une et l'autre sont fondées sur les mêmes principes, et doivent par conséquent donner lieu à des conséquences semblables. Ainsi tout ce qu'on a dit dans l'Article II, relativement à l'étendue des intégrales particulières des équations différentielles du premier ordre, pourra s'appliquer aussi aux intégrales particulières des équations différentio-différentielles.

Donc, si l'équation différentio-différentielle $Z' = o$ est elle-même l'intégrale d'une équation différentielle du troisième ordre $Z'' = o$, l'intégrale particulière de l'équation $Z' = o$, déduite de la condition $\frac{d^2y}{dx\,da} = o$, ne satisfera pas à l'équation $Z'' = o$, à moins que l'on n'ait en même temps $\frac{d^3y}{dx\,da} = o$ et $\frac{d^3y}{dx^2 da} = o$; et ainsi de suite.

Si l'on a

$$\frac{d^2y}{dx\,da} = o, \quad \frac{d^3y}{dx^2 da} = o, \ldots \text{ à l'infini,}$$

on prouvera, comme dans le n° 13, que la condition $\frac{d^2y}{dx\,da} = o$ ne donnera plus une intégrale particulière; et de là, par un raisonnement semblable à celui du n° 14, on déduira une règle pour trouver immédiatement l'intégrale particulière d'une équation différentio-différentielle $Z' = o$ sans connaître aucune de ses intégrales complètes.

Cette règle consiste à supposer égale à $\frac{o}{o}$ la valeur de $\frac{d^2y}{dx^2}$ tirée de l'équation proposée $Z' = o$ au moyen de la différentiation; on aura ainsi deux équations en x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, d'où éliminant $\frac{d^2y}{dx^2}$ à l'aide de la même équation $Z' = o$, on aura deux équations en x, y, $\frac{dy}{dx}$ qui devront s'accorder entre elles et se réduire à une même équation, si la proposée est susceptible d'une intégrale particulière; et alors cette équation sera l'intégrale particulière cherchée.

36. Si l'équation différentio-différentielle $Z' = o$ était telle, que l'on eût

$$dZ' = A'\,d\frac{d^2y}{dx^2},$$

alors la condition de $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{o}{o}$ donnerait cette équation unique $A' = o$; par conséquent, en chassant la quantité $\frac{d^2y}{dx^2}$ au moyen des deux équations

$$A' = o, \quad Z' = o,$$

la résultante sera toujours une intégrale particulière de la proposée $Z' = o$.

Or dans ce cas on peut aussi trouver aisément l'intégrale finie et complète de la même équation. En effet, puisque $Z' = o$, on aura aussi, en différentiant,

$$dZ' = A'\,d\frac{d^2y}{dx^2} = o;$$

donc ou $A' = o$, ce qui, comme nous venons de le voir, donne l'intégrale particulière, ou $d\frac{d^2y}{dx^2} = o$, et par conséquent

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a, \quad \frac{dy}{dx} = ax + b, \quad y = \frac{ax^2}{2} + bx + c,$$

a, b, c étant trois constantes arbitraires; or comme l'équation $Z' = o$ n'est (hypothèse) que du second ordre, il s'ensuit que son intégrale finie et complète ne peut renfermer que deux constantes arbitraires; ainsi, si l'on y substitue les valeurs précédentes de y, $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2y}{dx^2}$, il viendra nécessairement une équation entre les constantes a, b, c, sans x ni y, par laquelle il faudra déterminer l'une de ces constantes par les deux autres, qui resteront par conséquent arbitraires.

De là on peut déduire la forme générale de ces sortes d'équations; car

soit, en général, c une fonction de a et b représentée par $f(a, b)$, et puisqu'on a

$$a=\frac{d^2y}{dx^2},\quad b=\frac{dy}{dx}-ax=\frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2},$$

on aura

$$c=f\left(\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right);$$

donc, substituant ces valeurs dans l'équation

$$y=\frac{ax^2}{2}+bx+c,$$

on aura celle-ci

$$y=x\frac{dy}{dx}-\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx^2}+f\left(\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{dy}{dx}-x\frac{d^2y}{dx^2}\right),$$

ou bien, si l'on fait pour plus de simplicité $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=p'$,

$$y=px-\frac{p'x^2}{2}+f(p',\ p-xp');$$

toute équation donc qui sera réductible à cette forme aura, comme celle du n° 17, la propriété de pouvoir être facilement intégrée au moyen d'une nouvelle différentiation, et son intégrale finie et complète sera

$$y=\frac{ax^2}{2}+bx+f(a, b),$$

laquelle représente toujours une parabole.

De plus, l'équation précédente aura la propriété d'admettre toujours une intégrale particulière, qu'on trouvera en éliminant p' au moyen de l'équation

$$-\frac{x^2}{2}+\frac{df(p',\ p-p'x)}{dp'}=0,$$

et qui pourra représenter différentes courbes.

L'équation qui a servi d'exemple dans le n° 30 est comprise sous la forme précédente.

37. La théorie que nous venons de donner sur les intégrales particulières des équations différentielles du premier et du second ordre peut s'appliquer aisément aux équations d'un ordre quelconque plus élevé.

Soit par exemple $Z''=0$ une équation différentielle du troisième ordre, Z'' étant une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, si l'on connaît son intégrale finie et complète $V=0$, V étant une fonction de x, y et de trois constantes arbitraires a, b, c, on déterminera l'intégrale particulière de l'équation $Z''=0$ en éliminant les trois quantités a, b, c et les deux $\frac{db}{da}$, $\frac{dc}{da}$ de ces six équations

$$V=0,\quad \frac{dy}{dx}-p=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}-p'=0,$$

$$\frac{dy}{da}+\frac{dy}{db}\frac{db}{da}+\frac{dy}{dc}\frac{dc}{da}=0,$$

$$\frac{d^2y}{da\,dx}+\frac{d^2y}{db\,dx}\frac{db}{da}+\frac{d^2y}{dc\,dx}\frac{dc}{da}=0,$$

$$\frac{d^3y}{da\,dx^2}+\frac{d^3y}{db\,dx^2}\frac{db}{da}+\frac{d^3y}{dc\,dx^2}\frac{dc}{da}=0.$$

Si l'on connaît seulement une des intégrales complètes aux premières différences telle que $Z=0$, Z étant une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$ et de deux constantes arbitraires a et b, on déterminera l'intégrale particulière en éliminant les quantités a, b, $\frac{db}{da}$, au moyen de ces quatre équations

$$Z=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}-p'=0,$$

$$\frac{d^2y}{dx\,da}+\frac{d^2y}{dx\,db}\frac{db}{da}=0,$$

$$\frac{d^3y}{dx^2da}+\frac{d^3y}{dx^2db}\frac{db}{da}=0.$$

Si l'on ne connaît qu'une intégrale complète aux secondes différences, telle que $Z'=0$, Z' étant une fonction de x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ et d'une con-

stante arbitraire a, on pourra déterminer l'intégrale particulière en éliminant a au moyen des deux équations

$$Z' = 0, \quad \frac{d^3y}{dx^2\,da} = 0.$$

Enfin on pourra aussi déterminer cette intégrale d'après la seule équation différentielle $Z'' = 0$; pour cela il n'y aura qu'à chercher par la différentiation la valeur de $\frac{d^4y}{dx^4}$ et la supposer égale à $\frac{0}{0}$; les deux équations qu'on aura de cette manière devront revenir à la même, après l'élimination de $\frac{d^3y}{dx^3}$ faite par le moyen de la proposée $Z'' = 0$, si celle-ci est susceptible d'une intégrale particulière, et alors l'équation résultante de l'élimination dont il s'agit sera l'intégrale particulière en question.

On pourra faire au reste sur les intégrales particulières des équations différentielles du troisième ordre des remarques analogues à celles qu'on a faites plus haut sur les intégrales particulières des équations du second ordre; c'est sur quoi nous ne croyons pas qu'il soit nécessaire de nous étendre davantage.

38. Nous terminerons cet Article par faire remarquer qu'il y a, dans chaque ordre, des équations différentielles qui ont des propriétés analogues à celles des équations des n^os^ 17 et 36.

Soit $Z'' = 0$ la forme générale de ces sortes d'équations pour le troisième ordre, on aura par la différentiation

$$dZ'' = A''d\frac{d^3y}{dx^3} = 0;$$

d'où l'on tire ou $A'' = 0$, ce qui donnera une intégrale particulière après l'élimination de la quantité $\frac{d^3y}{dx^3}$, parce qu'alors $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{0}{0}$; ou bien $d\frac{d^3y}{dx^3} = 0$, ce qui donnera l'intégrale complète

$$\frac{d^3y}{dx^3} = a,$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ax + b, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{ax^2}{2} + bx + c, \quad y = \frac{ax^3}{2.3} + \frac{bx^2}{2} + cx + e;$$

or comme l'équation $Z'' = 0$ n'est que du troisième ordre, son intégrale finie et complète ne peut renfermer que trois constantes arbitraires; par conséquent, si l'on substitue dans cette équation les valeurs précédentes de y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, il arrivera nécessairement qu'on aura une équation entre les constantes a, b, c, e sans x ni y, par laquelle il faudra déterminer une de ces constantes par les trois autres.

Supposons donc, en général, que l'on ait

$$e = f(a, b, c),$$

et si l'on fait pour plus de simplicité

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dp}{dx} = p', \quad \frac{dp'}{dx} = p'',$$

on aura

$$a = p'', \quad b = p' - xp'', \quad c = p - xp' + \frac{x^2p''}{2};$$

donc substituant ces valeurs dans l'équation

$$y = \frac{ax^3}{2.3} + \frac{bx^2}{2} + cx + e,$$

on aura pour la forme générale des équations dont il s'agit

$$y = \frac{x^3p''}{2.3} - \frac{x^2p'}{2} + xp + f\left(p'', p' - xp'', p - xp' + \frac{x^2p''}{2}\right).$$

L'intégrale finie et complète sera

$$y = \frac{ax^3}{2.3} + \frac{bx^2}{2} + cx + f(a, b, c);$$

et l'intégrale particulière se trouvera en éliminant p'' au moyen de l'équation

$$\frac{x^3}{2.3} + \frac{df\left(p'', p' - xp'', p - xp' + \frac{x^2p''}{2}\right)}{dp''} = 0.$$

ARTICLE V. — *Des intégrales particulières des équations aux différences partielles, avec des remarques nouvelles sur la nature et sur l'intégration de ces sortes d'équations.*

39. Soit

$$V = 0$$

une équation entre trois variables x, y, z et deux constantes a, b; je dis qu'on en peut déduire une équation à différences partielles du premier ordre dans laquelle les constantes a et b ne se trouvent plus. En effet, supposons qu'en faisant varier à la fois x, y et z on ait

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

p et q étant des fonctions connues de x, y, z, a et b; donc en regardant z comme une fonction de x et y, on aura, suivant la notation ordinaire des différences partielles,

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q;$$

qu'on élimine les deux quantités a et b dans les trois équations

$$V = 0, \quad \frac{dz}{dx} - p = 0, \quad \frac{dz}{dy} - q = 0,$$

et l'on aura pour résultante une équation entre x, y, z et $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, où les constantes a et b ne se trouveront plus, et que nous représenterons, en général, par

$$Z = 0.$$

On peut donc regarder l'équation finie $V = 0$ comme l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles du premier ordre $Z = 0$; et comme les deux constantes a et b demeurent arbitraires dans l'équation $V = 0$, il s'ensuit que l'intégrale complète de toute équation aux différences partielles du premier ordre entre trois variables doit nécessairement renfermer deux constantes arbitraires.

Soit par exemple l'équation finie

$$z = a + bx + mby;$$

on a par la différentiation

$$dz = b\,dx + mb\,dy;$$

donc

$$\frac{dz}{dx} = b, \quad \frac{dz}{dy} = mb,$$

et éliminant a et b, on aura

$$m\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy},$$

équation dont l'intégrale complète sera donc

$$z = a + b(x + my),$$

a et b étant arbitraires.

Soit l'équation

$$z = a + bx + cy,$$

dans laquelle c soit une fonction quelconque de a et b, que nous désignerons par $f(a, b)$; on aura par la différentiation

$$\frac{dz}{dx} = b, \quad \frac{dz}{dy} = c = f(a, b);$$

donc

$$z = a + x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy},$$

d'où

$$a = z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy};$$

par conséquent l'équation différentielle sera

$$\frac{dz}{dy} = f\left(z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy}, \frac{dz}{dx}\right),$$

laquelle aura pour intégrale complète

$$z = a + bx + f(a, b)y.$$

Soit encore l'équation

$$z = c + ax + by \quad \text{et} \quad c = f(a, b),$$

on aura par la différentiation

$$\frac{dz}{dx} = a, \quad \frac{dz}{dy} = b;$$

donc l'équation différentielle sera

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} + f\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right),$$

et son intégrale complète sera

$$z = f(a, b) + ax + by.$$

40. Nous avons supposé les quantités a et b constantes; mais si elles étaient variables on parviendrait toujours à la même équation différentielle $Z = o$, pourvu que l'on eût également

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

comme dans le cas où ces quantités seraient constantes; car il est clair que le résultat de l'élimination de a et b, dans les équations

$$V = o, \quad \frac{dz}{dx} - p = o, \quad \frac{dz}{dy} - q = o,$$

sera toujours le même, quelles que soient les valeurs de a et b. Or en faisant varier à la fois les quantités x, y, z, a et b, on aura

$$dz = p\,dx + q\,dy + r\,da + s\,db;$$

donc la condition dont il s'agit aura lieu si $r\,da + s\,db = o$, par conséquent si l'on détermine les quantités a et b en sorte que l'on ait

$$r\,da + s\,db = o,$$

et qu'on substitue ensuite leurs valeurs dans l'équation finie $V = o$, on aura une nouvelle intégrale de l'équation proposée $Z = o$.

41. La manière la plus simple de satisfaire à l'équation

$$r\,da + s\,db = o$$

est de supposer séparément

$$r = o, \quad s = o,$$

ce qui donne deux équations qui serviront à déterminer a et b. Or, en regardant z comme fonction de a et b, il est visible que

$$r = \frac{dz}{da}, \quad s = \frac{dz}{db};$$

donc les deux conditions dont il s'agit seront représentées par

$$\frac{dz}{da} = o, \quad \frac{dz}{db} = o;$$

lesquelles étant analogues à la condition $\frac{dy}{da} = o$ que nous avons trouvée dans l'Article I pour la détermination des intégrales particulières des équations à deux variables, on pourra regarder aussi les intégrales provenantes de ces conditions comme des intégrales particulières des équations à différences partielles entre trois variables.

42. Prenons par exemple l'équation

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} + f\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right),$$

dont nous avons déjà vu que l'intégrale complète est (39)

$$z = f(a, b) + ax + by.$$

En faisant varier successivement a et b, on aura

$$\frac{dz}{da}=\frac{df(a,b)}{da}+x,\quad \frac{dz}{db}=\frac{df(a,b)}{db}+y;$$

ainsi on aura, pour la détermination de l'intégrale particulière, les deux équations

$$x+\frac{df(a,b)}{da}=0,\quad y+\frac{df(a,b)}{db}=0,$$

au moyen desquelles on éliminera a et b de l'équation

$$z=f(a,b)+ax+by;$$

et la résultante sera l'intégrale particulière qu'on cherche.

Supposons que l'équation proposée soit

$$z=y\frac{dz}{dy}+x\frac{dz}{dx}+h\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

on aura dans ce cas

$$f\left(\frac{dz}{dx},\frac{dz}{dy}\right)=h\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2};$$

donc

$$f(a,b)=h\sqrt{1+a^2+b^2},$$

$$\frac{df(a,b)}{da}=\frac{ha}{\sqrt{1+a^2+b^2}},\quad \frac{df(a,b)}{db}=\frac{hb}{\sqrt{1+a^2+b^2}};$$

ainsi on aura d'abord cette intégrale complète

$$z=h\sqrt{1+a^2+b^2}+ax+by;$$

ensuite, pour avoir l'intégrale particulière, il n'y aura qu'à éliminer dans cette équation les quantités a et b au moyen de ces deux-ci

$$x+\frac{ha}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=0,\quad y+\frac{hb}{\sqrt{1+a^2+b^2}}=0,$$

lesquelles donnent

$$a=-\frac{x}{\sqrt{h^2-x^2-y^2}},\quad b=-\frac{y}{\sqrt{h^2-x^2-y^2}},\quad \sqrt{1+a^2+b^2}=\frac{h}{\sqrt{h^2-x^2-y^2}};$$

de sorte que l'intégrale particulière sera

$$z=\sqrt{h^2-x^2-y^2}.$$

43. Pour rendre plus sensible l'analogie qu'il y a entre les intégrales particulières des équations aux différences partielles et celles des équations différentielles à deux variables, on remarquera que, si l'on exprime les variables x, y, z par les coordonnées rectangles d'une surface courbe, l'équation $V=0$ pourra représenter une infinité de surfaces courbes, en donnant aux arbitraires a et b toutes les valeurs possibles, et chacune de ces différentes surfaces satisfera également à l'équation du premier ordre $Z=0$; ensuite on prouvera, par un raisonnement semblable à celui des n^{os} 21 et suivants, que la surface qui touchera toutes celles-ci satisfera aussi à la même équation différentielle $Z=0$; enfin on démontrera aisément que, pour avoir l'équation de la surface touchante dont il s'agit, il n'y aura qu'à éliminer a et b de l'équation $V=0$ au moyen des deux équations

$$\frac{dz}{da}=0,\quad \frac{dz}{db}=0;$$

d'où il s'ensuit que cette surface touchante exprimera l'intégrale particulière de l'équation $Z=0$; ce qui est conforme à la théorie donnée dans l'Article III relativement aux lignes courbes.

44. Pour confirmer cette théorie par un exemple, supposons qu'on demande la surface courbe qui aura cette propriété, qu'en menant d'un point donné sur un quelconque des plans touchants de cette surface une perpendiculaire, elle soit toujours d'une même grandeur donnée.

Il est d'abord visible qu'une sphère décrite autour du point donné avec un rayon égal à la grandeur donnée satisfera à la question; mais comme

dans cette solution tout est déterminé et que le Problème conduit naturellement à une équation aux différences partielles du premier ordre, comme on le verra ci-après, il s'ensuit qu'on ne peut avoir de cette manière qu'une solution particulière du Problème.

De plus, il est clair qu'il y a une infinité de plans qui résolvent ce Problème; car il suffit pour cela que la position du plan soit telle, que la perpendiculaire qu'on y abaisserait du point donné soit égale à la grandeur donnée; et si l'on cherche l'équation générale de tous les plans qui ont cette propriété, on verra sans peine que cette équation renfermera deux constantes arbitraires; de sorte qu'on pourra la regarder comme l'intégrale complète de l'équation différentielle du Problème.

Enfin il est aisé de se convaincre que tous les différents plans dont il s'agit toucheront une surface sphérique décrite autour du point donné avec un rayon égal à la valeur donnée de la perpendiculaire; c'est-à-dire la même surface qui nous a déjà donné une solution particulière du Problème.

Appliquons maintenant le calcul à cette question, et nommons s, t, u les trois coordonnées rectangles qui répondent à un point quelconque d'un des plans touchants de la surface cherchée dont les coordonnées rectangles et parallèles à celles-là sont x, y, z; on aura, par la nature du plan, l'équation

$$u = l + ms + nt,$$

l, m, n étant des constantes. Or, puisque le plan et la surface passent par un même point, on aura dans ce point $s = x$, $t = y$, $u = z$, donc

$$z = l + mx + ny, \quad \text{d'où} \quad l = z - mx - ny;$$

ensuite, puisque dans le même point le plan et la surface se touchent, on aura aussi

$$\frac{du}{ds} = \frac{dz}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{du}{dt} = \frac{dz}{dy};$$

mais

$$\frac{du}{ds} = m, \quad \frac{du}{dt} = n;$$

donc

$$m = \frac{dz}{dx}, \quad n = \frac{dz}{dy},$$

et par conséquent

$$l = z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy};$$

donc, substituant ces valeurs dans l'équation du plan touchant, elle deviendra

$$u = s\frac{dz}{dx} + t\frac{dz}{dy} + z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy}.$$

Supposons, pour plus de simplicité, que le point donné soit l'origine des coordonnées, et cherchons l'expression générale de la perpendiculaire menée de ce point sur le plan dont l'équation est

$$u = l + ms + nt;$$

soit ρ la valeur d'une ligne menée du point dont il s'agit à un point quelconque de ce plan, on aura, en général,

$$\rho^2 = s^2 + t^2 + u^2,$$

et, dans le cas où cette ligne devient perpendiculaire, on aura $d\rho = 0$ et par conséquent

$$s\,ds + t\,dt + u\,du = 0;$$

mais l'équation au plan donne

$$du = m\,ds + n\,dt,$$

donc

$$(s + mu)\,ds + (t + nu)\,dt = 0,$$

et par conséquent

$$s + mu = 0, \quad t + nu = 0,$$

d'où l'on tire

$$s = -mu, \quad t = -nu;$$

donc

$$u = l - m^2u - n^2u;$$

donc

$$u=\frac{l}{1+m^2+n^2},\quad p^2=s^2+t^2+u^2=(1+m^2+n^2)u^2=\frac{l^2}{1+m^2+n^2};$$

donc

$$p=\frac{l}{\sqrt{1+m^2+n^2}};$$

donc, substituant pour l, m, n les valeurs trouvées ci-dessus, on aura enfin pour l'expression générale de la perpendiculaire p

$$p=\frac{z-x\frac{dz}{dx}-y\frac{dz}{dy}}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}}.$$

Supposant donc cette perpendiculaire égale à une constante donnée h, on aura enfin

$$z=x\frac{dz}{dx}+y\frac{dz}{dy}+h\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

pour l'équation du Problème.

Cette équation est la même que nous avons déjà traitée plus haut (**42**), et dont nous avons trouvé que l'intégrale complète est

$$z=ax+by+h\sqrt{1+a^2+b^2},$$

et que l'intégrale particulière est

$$z=\sqrt{h^2-x^2-y^2};$$

ce qui s'accorde avec les conclusions trouvées ci-dessus.

45. Si l'on rapproche la théorie que nous venons de donner sur les intégrales particulières des équations aux différences partielles de celle que nous avons donnée plus haut sur les intégrales particulières des équations différentielles à deux variables, on en pourra déduire une règle analogue à celle des n^os^ **15** et **24** pour trouver les intégrales particulières

sans connaître les intégrales complètes; car on prouvera aisément, par des principes analogues à ceux qu'on a employés dans les endroits cités, que, dans le cas de l'intégrale particulière, les différences des quantités $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dx}$ déduites de l'équation différentielle proposée $Z=0$, au moyen d'une nouvelle différentiation, devront rester indéterminées.

Ainsi, si après avoir différentié l'équation $Z=0$, et avoir fait disparaître les fractions on a une équation de la forme

$$M\,d\frac{dz}{dx}+N\,d\frac{dz}{dy}+P\,dx+Q\,dy=0,$$

M, N, P, Q, R étant des fonctions connues et entières de x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, il faudra, pour obtenir l'intégrale particulière de l'équation dont il s'agit, faire séparément les quantités M, N, P, Q chacune égale à zéro; ce qui donnera, comme l'on voit, quatre équations, lesquelles étant combinées avec l'équation $Z=0$ donneront, par l'élimination des deux quantités $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, trois équations finales en x, y, z, qui devront avoir lieu en même temps. Par conséquent, si ces équations ont un facteur commun, ce facteur sera l'intégrale particulière cherchée; sinon la proposée n'admettra point d'intégrale particulière.

46. Si l'équation $Z=0$ était telle, que l'on eût par la différentiation

$$dZ=A\,d\frac{dz}{dx}+B\,d\frac{dz}{dy},$$

alors on aurait l'équation différentielle

$$A\,d\frac{dz}{dx}+B\,d\frac{dz}{dy}=0,$$

et les conditions de l'intégrale particulière seraient remplies en faisant $A=0$ et $B=0$; on n'aurait donc, dans ce cas, que deux équations de condition, lesquelles serviraient à éliminer les deux quantités $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$

dans l'équation $Z = o$; et l'équation résultante serait toujours l'intégrale particulière de cette même équation $Z = o$.

Au reste on peut aussi trouver son intégrale complète en remarquant que l'équation

$$dZ = A\,d\frac{dz}{dx} + B\,d\frac{dz}{dy} = o$$

donne aussi

$$d\frac{dz}{dx} = o, \quad d\frac{dz}{dy} = o,$$

d'où

$$\frac{dz}{dx} = a \quad \text{et} \quad z = ax + Y,$$

a étant une constante et Y une fonction de y sans x; mais, puisqu'on doit avoir en même temps $d\frac{dz}{dy} = o$, il faudra que $d\frac{dY}{dy} = o$, donc

$$\frac{dY}{dy} = b, \quad \text{et} \quad Y = by + c,$$

b et c étant des constantes; donc

$$z = ax + by + c;$$

si l'on substitue cette valeur de z dans l'équation différentielle $Z = o$, il arrivera nécessairement que les quantités x et y s'en iront et que l'on aura une équation entre les constantes a, b, c, par laquelle il faudra en déterminer une par les deux autres.

Soit donc, en général, $c = f(a, b)$, l'intégrale complète sera alors

$$z = ax + by + f(a, b),$$

et l'équation différentielle sera, comme on l'a déjà vu (39),

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} + f\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right);$$

c'est la forme générale des équations différentielles qui peuvent avoir la propriété dont il s'agit.

En effet, si l'on différentie cette équation, on aura, à cause de

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy,$$

celle-ci, où je mets, pour plus de simplicité, p et q à la place de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$,

$$\left[x + \frac{df(p, q)}{dp}\right]dp + \left[y + \frac{df(p, q)}{dq}\right]dq = o;$$

ainsi l'on aura pour l'intégrale particulière les deux équations

$$x + \frac{df(p, q)}{dp} = o, \quad y + \frac{df(p, q)}{dq} = o,$$

à l'aide desquelles il faudra éliminer les quantités p et q dans la proposée

$$z = px + qy + f(p, q).$$

Et il est visible qu'on aura de cette manière le même résultat que par la méthode du n° 42.

Les équations à différences partielles de la forme dont il s'agit répondent, comme l'on voit, à celles qu'on a considérées plus haut (17).

47. Nous avons vu ci-dessus (40) que, pour que l'équation finie $V = o$ satisfasse à l'équation aux différences partielles du premier ordre $Z = o$, sans supposer que les arbitraires a et b soient constantes, il suffit que ces quantités soient telles, que l'on ait la condition

$$r\,da + s\,db = o,$$

c'est-à-dire, à cause de

$$r = \frac{dz}{da}, \quad s = \frac{dz}{db}$$

suivant la notation ordinaire,

$$\frac{dz}{da}\,da + \frac{dz}{db}\,db = o.$$

Dans les nos 41 et suivants nous avons satisfait à cette condition en faisant séparément $\frac{dz}{da} = 0$ et $\frac{dz}{db} = 0$, ce qui nous a donné l'intégrale particulière de l'équation $Z = 0$; mais il est clair que cette supposition est trop limitée et qu'on peut remplir la condition dont il s'agit d'une manière plus générale. En effet, comme il y a deux indéterminées a et b, on peut supposer que l'une soit une fonction quelconque de l'autre, par exemple,

$$b = \varphi(a)$$

(en prenant la caractéristique φ pour dénoter une fonction indéterminée); substituant cette valeur de b en a et faisant

$$d\varphi(a) = \varphi'(a)\,da,$$

on aura l'équation de condition

$$\frac{dz}{da} + \frac{dz}{db}\varphi'(a) = 0,$$

au moyen de laquelle on pourra éliminer a dans l'équation $V = 0$. L'équation résultante de cette élimination satisfera également à l'équation différentielle $Z = 0$, et comme elle renferme une fonction arbitraire, elle sera beaucoup plus générale que l'intégrale complète $V = 0$; c'est pourquoi, et pour la distinguer de celle-ci, nous la nommerons l'intégrale générale de l'équation $Z = 0$.

48. Ainsi donc, connaissant l'intégrale complète d'une équation à différences partielles du premier ordre, on pourra toujours, par la méthode précédente, en déduire l'intégrale générale, laquelle résoudra la même équation dans toute son étendue. Il n'y aura pour cela qu'à supposer que dans l'intégrale complète l'une des deux arbitraires soit une fonction quelconque de l'autre, différentier ensuite cette intégrale en faisant varier uniquement l'arbitraire restante, et éliminer cette arbitraire. Appliquons cette méthode à quelques Exemples.

Soit proposée d'abord l'équation

$$\frac{dz}{dy} = m\frac{dz}{dx},$$

dont nous avons vu ci-dessus que l'intégrale complète est

$$z = a + b(x + my).$$

Je fais $a = \varphi(b)$, j'ai

$$z = \varphi(b) + b(x + my);$$

je différentie en faisant varier b seul et divisant par db, j'ai

$$\varphi'(b) + x + my = 0;$$

au moyen de ces deux équations on éliminera b et l'on aura l'intégrale générale. Or comme

$$-\varphi'(b) = x + my,$$

on aura b égale à une fonction de $x + my$; par conséquent

$$\varphi(b) + b(x + my)$$

sera aussi nécessairement une fonction de $x + my$, fonction qui restera indéterminée, à cause que $\varphi(b)$ est une fonction indéterminée de b. Ainsi l'on aura pour l'intégrale générale de la proposée

$$z = \Phi(x + my),$$

la caractéristique Φ dénotant une fonction quelconque.

49. Soit l'équation

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} + f\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right),$$

dont l'intégrale complète est (39)

$$z = f(a, b) + ax + by;$$

faisons $b = \varphi(a)$, on aura

$$z = f[a, \varphi(a)] + ax + \varphi(a)y,$$

et faisant varier a seul, on aura, après avoir divisé par da,

$$f'[a, \varphi(a)] + x + \varphi'(a)y = 0;$$

et il n'y aura plus qu'à éliminer a au moyen de ces deux équations.

Si l'équation était par exemple

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} + h\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

comme dans le Problème du n° 44, on aurait

$$f(a, b) = h\sqrt{1 + a^2 + b^2};$$

faisant donc $b = \varphi(a)$, on aurait ces deux équations

$$z = ax + \varphi(a)y + h\sqrt{1 + a^2 + [\varphi(a)]^2},$$

$$x + \varphi'(a)y + h\frac{a + \varphi(a)\varphi'(a)}{\sqrt{1 + a^2 + [\varphi(a)]^2}} = 0,$$

d'où il faudrait éliminer a; on aurait ainsi la solution générale du Problème dont il s'agit.

Cette élimination est impossible, en général, c'est-à-dire tant que la fonction $\varphi(a)$ est indéterminée; ainsi nous nous contenterons d'examiner quelques cas particuliers.

Supposons, ce qui est le cas le plus simple,

$$\varphi(a) = m + na,$$

m et n étant des coefficients constants quelconques, on aura

$$\varphi'(a) = n,$$

et les deux équations précédentes deviendront

$$z = a(x + ny) + my + h\sqrt{1 + a^2 + (m + na)^2},$$

$$x + ny + h\frac{(1 + n^2)a + mn}{\sqrt{1 + a^2 + (m + na)^2}} = 0.$$

Pour chasser a de ces deux équations, je commence par tirer de la seconde la valeur du radical, j'ai

$$\sqrt{1 + a^2 + (m + na)^2} = -h\frac{(1 + n^2)a + mn}{x + ny},$$

ce qui, étant substitué dans la première, donne

$$z = a\left[x + ny - \frac{(1 + n^2)h^2}{x + ny}\right] + my - \frac{mnh^2}{x + ny}.$$

Maintenant je carre l'équation précédente et je la réduis à celle-ci

$$(1 + n^2)a^2 + 2mna + \frac{m^2n^2h^2 - (1 + m^2)(x + ny)^2}{(1 + n^2)h^2 - (x + ny)^2} = 0,$$

d'où je tire

$$a = -\frac{mn}{1 + n^2} + \frac{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}{1 + n^2}\frac{x + ny}{\sqrt{(1 + n^2)h^2 - (x + ny)^2}};$$

cette valeur étant enfin substituée dans l'équation ci-dessus, on aura celle-ci

$$z = \frac{m(y - nx)}{1 + n^2} \pm \frac{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}{1 + n^2}\sqrt{(1 + n^2)h^2 - (x + ny)^2}.$$

Cette équation est celle d'un cylindre droit qui a le rayon de la base égal à h; en effet, si l'on change les deux coordonnées rectangles x, y en deux autres aussi rectangles x', y', telles, que

$$\frac{x + ny}{\sqrt{1 + n^2}} = x', \quad \frac{y - nx}{\sqrt{1 + n^2}} = y',$$

on aura

$$z = \frac{my'}{\sqrt{1 + n^2}} \pm \frac{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}{\sqrt{1 + n^2}}\sqrt{h^2 - x'^2},$$

et si l'on change encore les deux coordonnées z, y' en deux autres z', y'' telles, que

$$\frac{z\sqrt{1+n^2}-my'}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=z', \quad \frac{y'\sqrt{1+n^2}+mz}{\sqrt{1+m^2+n^2}}=y'',$$

on aura cette équation-ci

$$z'=\sqrt{h^2-x'^2-y''^2},$$

laquelle est évidemment celle d'un cylindre droit dont l'axe coïncide avec l'axe des coordonnées y'', et dont la base a le rayon égal à h.

Or, comme en changeant les coordonnées nous n'avons fait que changer la position du cylindre relativement aux coordonnées primitives x, y, z, il s'ensuit que tout cylindre droit dont l'axe passera par le point donné qui a été pris pour l'origine des coordonnées et dont la base aura la quantité h pour rayon, satisfera au Problème du n° 44; ce qui est évident par soi-même.

Supposons

$$\sqrt{1+a^2+[\varphi(a)]^2}=k,$$

ce qui donne

$$\varphi(a)=\sqrt{k^2-1-a^2},$$

on aura alors ces deux équations

$$z=ax+y\sqrt{k^2-1-a^2}+hk,$$

$$x-\frac{ay}{\sqrt{k^2-1-a^2}}=0,$$

d'où, éliminant a, il viendra

$$z=hk+\sqrt{k^2-1^2}\sqrt{x^2+y^2},$$

équation à un cône droit dont l'axe coïncide avec l'axe des ordonnées z, le sommet est distant du plan des ordonnées x, y de la quantité hk, et la base prise dans ce plan est un cercle dont le rayon est $\frac{hk}{\sqrt{k^2-1^2}}$; de sorte que si du centre de la base on mène une perpendiculaire à la surface du

cône, cette perpendiculaire sera égale à h; ce qui est la condition du Problème.

On trouverait un cône semblable, mais dans une situation oblique à l'axe des ordonnées z, si l'on prenait la quantité $\varphi(a)$ telle, que

$$\sqrt{1+a^2+[\varphi(a)]^2}=k+ma+n\varphi(a);$$

le calcul en étant un peu long, nous ne nous y arrêterons pas.

Comme la forme de la fonction $\varphi(a)$ est arbitraire, on pourra trouver une infinité de solutions différentes du Problème proposé; mais il est remarquable que la solution qui donne une sphère, et qui est en quelque façon la plus simple, n'est point comprise dans cette infinité de solutions qui résultent de l'hypothèse que b est une fonction quelconque de a.

En effet, si l'on reprend les équations générales et qu'on cherche à déterminer $\varphi(a)$ en sorte qu'il en résulte l'équation à la sphère

$$h^2=z^2+y^2+x^2,$$

il faudra qu'en substituant pour z sa valeur $\sqrt{h^2-x^2-y^2}$ et éliminant ensuite l'une des deux variables x ou y l'autre disparaisse aussi, de manière que l'équation résultante soit uniquement entre les quantités a et $\varphi(a)$; or en éliminant par exemple x, on aura une équation où y montera au second degré, en sorte qu'il faudrait faire évanouir séparément les coefficients des trois termes de cette équation ordonnée par rapport à y; ce qui donnerait trois équations au lieu d'une; et l'on se convaincra aisément par le calcul qu'il est impossible de satisfaire à ces trois équations à la fois.

Au reste ce résultat ne doit pas paraître surprenant quand on considère que la sphère est donnée par une intégrale particulière (44); et nous n'avons fait cette remarque, qui peut d'ailleurs être appliquée à toutes les intégrales particulières des équations à différences partielles, que pour montrer la nécessité d'avoir égard à ces sortes d'intégrales pour avoir toutes les solutions possibles des équations de l'espèce dont il s'agit.

Une autre chose digne d'être remarquée, c'est que les surfaces, qui

représentent l'intégrale particulière et l'intégrale générale d'une même équation à différences partielles du premier ordre, touchent dans chaque point une des surfaces exprimées par l'intégrale complète de la même équation, mais avec cette différence que la surface représentée par l'intégrale particulière touche absolument toutes les surfaces possibles que donne l'intégrale complète (43), au lieu que la surface représentée par l'intégrale générale ne touche que celles de ces surfaces qui se rapportent à une certaine espèce dépendante du rapport qu'on établit entre les deux quantités a et b, qui sont les constantes arbitraires de l'intégrale complète; c'est de quoi on peut se convaincre, en général, par les principes de la méthode du n° 48, et dont l'Exemple précédent fournit des preuves particulières, puisqu'il est visible que les cylindres et les cônes, que nous avons déduits de l'intégrale générale, sont touchés partout par des plans exprimés par l'intégrale complète.

50. Soit l'équation

$$f\left(\frac{dz}{dx}, x\right) = \mathrm{F}\left(\frac{dz}{dy}, y\right),$$

les caractéristiques f et F dénotant des fonctions quelconques données de deux quantités.

Je suppose

$$f\left(\frac{dz}{dx}, x\right) = a,$$

a étant une constante; je tire de cette équation la valeur de $\frac{dz}{dx}$, qui sera exprimée en x et a; et après avoir multiplié par dx j'intègre en faisant varier x seul; j'aurai

$$z = \mathrm{X} + \Psi,$$

X étant une fonction connue de x où entrera aussi la constante a, et Ψ une fonction quelconque indéterminée de y; j'aurai ensuite

$$\mathrm{F}\left(\frac{dz}{dy}, y\right) = a,$$

et j'en tirerai de même

$$z = \mathrm{Y} + \Xi,$$

Y étant une fonction connue de y où entrera aussi a comme constante, et Ξ une fonction quelconque de x; donc, puisque ces deux valeurs de z doivent être identiques, il faudra que

$$\Psi = \mathrm{Y} \quad \text{et} \quad \Xi = \mathrm{X};$$

par conséquent la valeur de z sera $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$, et il est visible qu'on peut ajouter à cette valeur une constante quelconque, puisque dans l'équation différentielle la quantité finie z ne se trouve pas.

On aura donc

$$z = \mathrm{X} + \mathrm{Y} + b,$$

intégrale complète de la proposée, puisqu'elle renferme deux constantes arbitraires a et b.

Pour en tirer l'intégrale générale, on fera $b = \varphi(a)$, ensuite on différentiera en faisant varier a seul; on aura ainsi les deux équations

$$z = \mathrm{X} + \mathrm{Y} + \varphi(a), \quad \frac{d\mathrm{X}}{da} + \frac{d\mathrm{Y}}{da} + \varphi'(a) = 0,$$

au moyen desquelles on éliminera a, et la résultante sera l'intégrale cherchée.

51. Soit l'équation

$$f\left(\frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, z\right) = 0.$$

Je fais

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{Z}, \quad \frac{dz}{dy} = a\mathrm{Z};$$

substituant ces valeurs, j'aurai une équation en z et Z, d'où je tirerai Z exprimé par une fonction de z seul dans laquelle a entrera aussi comme constante; or l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{Z}$$

donnera, en intégrant,

$$x = \int \frac{dz}{Z} + Y,$$

Y étant une fonction de y seul; de même l'équation

$$\frac{dz}{dy} = aZ$$

donnera

$$ay = \int \frac{dz}{Z} + X,$$

X étant une fonction de x seul; donc, pour que ces deux équations deviennent la même chose, il faudra que l'on ait

$$X = -x, \quad Y = -ay,$$

et alors on aura, en ajoutant une constante b à l'intégrale $\int \frac{dz}{Z}$, cette intégrale complète

$$x + ay = \int \frac{dz}{Z} + b.$$

Je fais maintenant $b = \varphi(a)$, et je différentie en faisant varier a seul; j'aurai les deux équations

$$x + ay = \int \frac{dz}{Z} + \varphi(a), \quad y = \frac{d\int \frac{dz}{Z}}{da} + \varphi'(a),$$

au moyen desquelles il faudra éliminer a pour avoir l'intégrale générale de la proposée.

52. Soit l'équation

$$\frac{dz}{dx} = V\frac{dz}{dy} + Z,$$

V étant une fonction quelconque de x et y, et Z une fonction quelconque de x, y, z.

Je multiplie l'équation par dx, et j'ajoute ensuite à l'un et à l'autre

membre la quantité $\frac{dz}{dy}dy$, j'ai, à cause de

$$dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy,$$

cette équation-ci

$$dz = (V\,dx + dy)\frac{dz}{dy} + Z\,dx;$$

je suppose pour un moment

$$V\,dx + dy = 0,$$

j'ai une équation entre deux variables x et y, que j'intègre en y ajoutant la constante arbitraire α; je regarde maintenant α comme une fonction de x et y déterminée par cette même équation; j'aurai par la différentiation

$$V\,dx + dy = A\,d\alpha,$$

A étant une fonction connue de x, y et α; ainsi substituant cette valeur dans l'équation précédente, elle deviendra

$$dz = A\frac{dz}{dy}d\alpha + Z\,dx.$$

Or, si l'on substitue partout dans cette équation à la place de y sa valeur en x et α, on aura une équation entre les trois variables x, z, α; et, supposant α constante, on aura l'équation

$$dz = Z\,dx$$

entre les deux variables x et z, laquelle étant intégrée en y ajoutant une constante arbitraire, qui pourra être une fonction quelconque indéterminée de α, donnera sur-le-champ l'intégrale générale de la proposée; car il n'y aura plus qu'à y remettre à la place de α sa valeur en x et y.

53. Soit encore l'équation

$$x = Vy + Z,$$

V étant une fonction quelconque de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, et Z une fonction quelconque de $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy}$.

Je fais pour plus de simplicité

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy} = r,$$

en sorte que V soit une fonction quelconque de p et q, et Z une fonction quelconque de p, q, r; je multiplie toute l'équation par dp et j'ajoute aux deux membres la quantité $y\,dq$, j'ai

$$x\,dp + y\,dq = y(\mathrm{V}\,dp + dq) + \mathrm{Z}\,dp;$$

or, puisque

$$r = z - xp - yq,$$

et que

$$dz = \frac{dz}{dx}\,dx + \frac{dz}{dy}\,dy = p\,dx + q\,dy,$$

on aura

$$dr = -x\,dp - y\,dq;$$

donc l'équation précédente deviendra

$$-dr = y(\mathrm{V}\,dp + dq) + \mathrm{Z}\,dp.$$

Je suppose

$$\mathrm{V}\,dp + dq = 0,$$

ce qui fait une équation entre p et q que j'intègre en y ajoutant une constante arbitraire α; de sorte que j'ai une équation finie entre p, q et α, dans laquelle je puis regarder α comme une fonction de p et q, et qui donnera par la différentiation

$$\mathrm{V}\,dp + dq = \mathrm{A}\,d\alpha,$$

A étant une fonction connue de p, q et α; ainsi l'équation précédente deviendra

$$-dr = y\mathrm{A}\,d\alpha + \mathrm{Z}\,dp.$$

Qu'on substitue partout dans cette équation à la place de q sa valeur en p et z, on aura une équation entre les trois variables r, p, α, laquelle, en supposant α constante, sera

$$-dr = \mathrm{Z}\,dp;$$

qu'on intègre donc cette équation entre les deux variables r et p, et soit $\mathrm{R} = 0$ l'intégrale, dans laquelle on pourra supposer que la constante arbitraire soit une fonction quelconque indéterminée de α; faisant ensuite varier dans l'équation $\mathrm{R} = 0$ les trois quantités r, p et α à la fois, il viendra

$$dr = -\mathrm{Z}\,dp + \mathrm{Q}\,d\alpha,$$

Q étant une fonction connue de r, p, α; donc, substituant cette valeur dans l'équation ci-dessus, on aura

$$-\mathrm{Q}\,d\alpha = y\mathrm{A}\,d\alpha, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{A}y + \mathrm{Q} = 0.$$

On a donc ainsi deux équations finies

$$\mathrm{R} = 0, \quad \mathrm{A}y + \mathrm{Q} = 0$$

entre les quantités p, q, α, y; et, comme α est donnée par une fonction connue de p et q, substituant cette valeur de α, on aura deux équations entre les trois quantités p, q et y, à l'aide desquelles on pourra éliminer p et q, c'est-à-dire $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, dans l'équation proposée

$$x = \mathrm{V}y + \mathrm{Z};$$

et l'équation résultante sera l'intégrale générale de cette même équation, puisqu'elle contient déjà une fonction indéterminée.

54. Soit enfin l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \mathrm{V}y + \mathrm{Z},$$

V étant une fonction quelconque de x et $\frac{dz}{dy}$, et Z une fonction quelconque de x, $\frac{dz}{dy}$, $z - y\frac{dz}{dy}$.

Je fais

$$\frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q, \quad z - yq = r,$$

j'aurai l'équation

$$p = \mathrm{V}y + \mathrm{Z},$$

dans laquelle V sera une fonction quelconque de x, q, et où Z sera une fonction quelconque de x, q, r. Je multiplie cette équation par dx, et j'ajoute aux deux membres la quantité $-y\,dq$, j'aurai, à cause de

$$dr = dz - d(yq) = p\,dx + q\,dy - d(yq) = p\,dx - y\,dq,$$

j'aurai, dis-je, l'équation

$$dr = y(\mathrm{V}\,dx - dq) + \mathrm{Z}\,dx.$$

Je suppose $\mathrm{V}\,dx - dq = 0$, j'ai une équation entre x et q que j'intègre en y ajoutant une constante arbitraire α; ensuite, regardant α comme variable, je différentie de nouveau, j'ai

$$\mathrm{V}\,dx - dq = \mathrm{A}\,d\alpha,$$

A étant une fonction connue de x, q, α; cette substitution ainsi que celle de la valeur de q en x et α étant faites dans l'équation ci-dessus, elle deviendra

$$dr = y\mathrm{A}\,d\alpha + \mathrm{Z}\,dx,$$

où A et Z seront maintenant des fonctions connues de r, x et α. Regardant donc α comme constante, on aura l'équation

$$dr = \mathrm{Z}\,dx$$

entre les variables r et x, dont l'intégrale pourra contenir comme constante une fonction quelconque indéterminée de α. Soit

$$\mathrm{R} = 0$$

cette intégrale; en y faisant varier à la fois r, x et α, on en tirera

$$dr = \mathrm{Z}\,dx + \mathrm{Q}\,d\alpha;$$

mais on a

$$dr = y\mathrm{A}\,d\alpha + \mathrm{Z}\,dx;$$

donc

$$\mathrm{Q} = y\mathrm{A}.$$

Cette équation étant combinée avec l'équation

$$\mathrm{R} = 0,$$

on pourra éliminer q, après avoir remis pour r sa valeur $z - yq$, et pour α sa valeur en x et q; l'équation résultante ne contiendra que x, y, z, et sera l'intégrale générale de la proposée à cause de la fonction indéterminée qui s'y trouvera

On pourra, par un procédé semblable, trouver l'intégrale générale de toute équation de la forme

$$\frac{dz}{dy} = \mathrm{V}x + \mathrm{Z},$$

V étant une fonction de y, $\frac{dz}{dx}$, et Z une fonction de y, $\frac{dz}{dx}$, $z - x\frac{dz}{dx}$.

Il n'y aura pour cela qu'à changer dans l'analyse précédente x en y et *vice versâ*.

On voit par là que les équations de la forme

$$z = y\frac{dz}{dy} + f\left(x, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right),$$

ou

$$z = x\frac{dz}{dx} + f\left(y, \frac{dz}{dy}, \frac{dz}{dx}\right)$$

(la caractéristique f dénotant une fonction quelconque donnée de trois quantités), sont intégrables en général; car si l'on tire de la première la

valeur de $\frac{dz}{dx}$, ou de la seconde celle de $\frac{dz}{dy}$, on aura des équations de la forme

$$\frac{dz}{dx} = Z, \quad \text{ou} \quad \frac{dz}{dy} = Z,$$

et par conséquent intégrables par la méthode ci-dessus.

55. Les Exemples précédents renferment d'une manière générale tous les cas connus d'intégration des équations de différences partielles du premier ordre entre trois variables; et c'est pour cette raison que nous avons ajouté les trois derniers Exemples, quoique la méthode qu'on y a suivie n'ait pas un rapport immédiat avec la méthode générale du n° 48; nous avions déjà donné ailleurs l'intégration de l'équation du n° 52 [*voyez* les *Mémoires* pour 1772 (*)]; mais celle des équations des n^os^ 53 et 54 est, si je ne me trompe, entièrement nouvelle.

56. On a vu ci-dessus que l'intégrale particulière n'est renfermée ni dans l'intégrale complète ni dans l'intégrale générale; mais il n'en est pas de même de l'intégrale complète par rapport à l'intégrale générale; car il est facile de se convaincre, soit d'après notre théorie de la formation des intégrales générales, soit d'après la seule considération de la nature de ces intégrales, laquelle consiste en ce qu'elles doivent renfermer une fonction arbitraire, il est aisé, dis-je, de se convaincre que ces sortes d'intégrales doivent toujours renfermer les intégrales complètes comme des cas particuliers. En effet, si dans l'intégrale générale on donne à la fonction indéterminée une valeur particulière dans laquelle il y ait des coefficients arbitraires, en sorte qu'il se trouve deux de ces coefficients dans l'intégrale, cette intégrale sera alors une intégrale complète, et conduira nécessairement par la différentiation à la même équation aux différences partielles du premier ordre que l'intégrale générale dont elle est dérivée. On voit par là qu'on peut donner différentes formes aux intégrales complètes, mais que ces formes différentes sont néanmoins

(*) *OEuvres de Lagrange*, t. III, p. 549.

liées entre elles, en sorte que dès qu'on en connaît une on peut en déduire toutes les autres, puisqu'il n'y a qu'à chercher d'abord, par notre méthode, l'intégrale générale, et ensuite donner à la fonction indéterminée des valeurs particulières.

57. Nous allons maintenant considérer les équations à différences partielles du second ordre; et nous remarquerons d'abord que si $V = 0$ est une équation finie entre les trois variables x, y, z et cinq constantes a, b, c, h, g, on pourra en déduire une équation aux différences partielles du second ordre dans laquelle ces constantes ne se trouveront plus. Car, en regardant z comme une fonction de x et y et faisant varier successivement ces deux quantités dans l'équation donnée, on en tirera par une double différentiation ces cinq équations-ci

$$\frac{dz}{dx} - p = 0, \quad \frac{dz}{dy} - q = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} - r = 0, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} - s = 0, \quad \frac{d^2z}{dy^2} - t = 0,$$

p, q étant des fonctions connues de x, y, z, et r, s, t des fonctions aussi connues de $x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}$. Si donc au moyen de ces cinq équations différentielles et de l'équation finie $V = 0$ on élimine les cinq constantes a, b, c, h, g, on aura une équation finale entre les quantités

$$x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}, \frac{d^2z}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx\,dy}, \frac{d^2z}{dy^2},$$

dans laquelle les constantes dont il s'agit ne se trouveront plus, et que nous représenterons, en général, par $Z' = 0$.

On pourra donc regarder l'équation $V = 0$ comme l'intégrale finie et complète de l'équation aux différences partielles du second ordre $Z' = 0$, et comme les cinq constantes a, b, c, g, h demeurent arbitraires, il s'ensuit que l'intégrale finie et complète de toute équation aux différences partielles du second ordre doit renfermer cinq constantes arbitraires.

Soit par exemple l'équation finie

$$z = a + bx + cy + hx^2 + gxy + mhy^2;$$

on aura par la différentiation

$$\frac{dz}{dx} = b + 2hx + gy, \quad \frac{dz}{dy} = c + gx + 2mhy,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2h, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = g, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = 2mh;$$

donc, éliminant les constantes a, b, c, h, g, on aura cette équation finale

$$\frac{d^2z}{dy^2} = m\frac{d^2z}{dx^2},$$

dont l'équation précédente sera par conséquent l'intégrale complète.

58. Soit encore l'équation

$$z = k + ax + by + cx^2 + gxy + hy^2,$$

dans laquelle k soit une fonction donnée de a, b, c, g, h; on aura par la différentiation

$$\frac{dz}{dx} = a + 2cx + gy, \quad \frac{dz}{dy} = b + 2hy + gx,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2c, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = g, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = 2h;$$

donc

$$h = \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dy^2}, \quad g = \frac{d^2z}{dx\,dy}, \quad c = \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dx^2},$$

$$a = \frac{dz}{dx} - x\frac{d^2z}{dx^2} - y\frac{d^2z}{dx\,dy}, \quad b = \frac{dz}{dy} - y\frac{d^2z}{dy^2} - x\frac{d^2z}{dx\,dy};$$

donc, substituant ces valeurs, on aura l'équation différentielle du second ordre

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} - \frac{x^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} - xy\frac{d^2z}{dx\,dy} - \frac{y^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2}$$
$$+ f\left(\frac{dz}{dx} - x\frac{d^2z}{dx^2} - y\frac{d^2z}{dx\,dy}, \ \frac{dz}{dy} - y\frac{d^2z}{dy^2} - x\frac{d^2z}{dx\,dy}, \ \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dx^2}, \ \frac{d^2z}{dx\,dy}, \ \frac{1}{2}\frac{d^2z}{dy^2}\right),$$

dont l'intégrale complète sera

$$z = ax + by + cx^2 + gxy + hy^2 + f(a, b, c, g, h),$$

la caractéristique f dénotant une fonction quelconque de cinq quantités.

59. En suivant les principes établis dans ce Mémoire, il est facile de démontrer que pour avoir l'intégrale particulière d'une équation à différences partielles du second ordre $Z' = 0$, dont on connait l'intégrale finie complète $V = 0$, il n'y aura qu'à faire varier, tant dans la quantité V que dans les deux quantités p et q des équations

$$\frac{dz}{dx} - p = 0, \quad \frac{dz}{dy} - q = 0,$$

les cinq constantes arbitraires a, b, c, g, h, et supposer les différences de ces trois quantités V, p, q nulles; ce qui donnera trois équations qui contiendront les cinq différentielles da, db, dc, dg, dh sous une forme linéaire; on éliminera deux de ces différentielles, et l'on fera ensuite évanouir séparément dans l'équation résultante les coefficients des trois différentielles restantes; on aura ainsi trois équations de condition qui étant combinées avec les trois équations

$$V = 0, \quad \frac{dz}{dx} - p = 0, \quad \frac{dz}{dy} - q = 0$$

donneront, par l'élimination des cinq quantités a, b, c, g, h, une équation à différences partielles du premier ordre, laquelle sera l'intégrale particulière aux premières différences de la proposée $Z' = 0$ du second ordre.

Par exemple, l'équation différentio-différentielle du numéro précédent donne

$$V = -z + ax + by + cx^2 + gxy + hy^2 + f(a, b, c, g, h),$$
$$p = a + 2cx + gy, \quad q = b + 2hy + gx;$$

donc les équations de condition de l'intégrale particulière seront, en fai-

sant, pour abréger, $f(a, b, c, g, h) = \mathrm{F}$,

$$\left(x+\frac{d\mathrm{F}}{da}\right)da+\left(y+\frac{d\mathrm{F}}{db}\right)db+\left(x^2+\frac{d\mathrm{F}}{dc}\right)dc+\left(xy+\frac{d\mathrm{F}}{dg}\right)dg+\left(y^2+\frac{d\mathrm{F}}{dh}\right)dh=0,$$

$$da+2x\,dc+y\,dg=0, \quad db+2y\,dh+x\,dg=0.$$

Mettant dans la première équation les valeurs de da et db tirées de ces deux dernières, et égalant ensuite à zéro les coefficients des différences dc, dh, dg, on aura ces trois équations

$$\frac{d\mathrm{F}}{dc}-2x\frac{d\mathrm{F}}{da}-x^2=0, \quad \frac{d\mathrm{F}}{dh}-2y\frac{d\mathrm{F}}{db}-y^2=0,$$

$$\frac{d\mathrm{F}}{dg}-x\frac{d\mathrm{F}}{db}-y\frac{d\mathrm{F}}{da}-xy=0,$$

à l'aide desquelles et des équations

$$\mathrm{V}=0, \quad \frac{dz}{dx}-p=0, \quad \frac{dz}{dy}-q=0$$

on éliminera les cinq quantités a, b, c, g, h; et la résultante sera l'intégrale particulière aux premières différences de l'équation dont il s'agit.

60. Soit à présent $\mathrm{Z}=0$ une équation entre les variables finies x, y, z et les différences partielles du premier ordre $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ dans laquelle entrent deux constantes arbitraires a et b; on pourra en déduire par la différentiation une équation aux différences partielles du second ordre dans laquelle les deux constantes a et b ne se trouveront plus. Car, si l'on fait varier successivement x et y, on aura les deux équations

$$\frac{d\mathrm{Z}}{dx}=0, \quad \frac{d\mathrm{Z}}{dy}=0,$$

à l'aide desquelles on pourra éliminer dans la proposée $\mathrm{Z}=0$ les deux constantes a et b; et l'équation résultante sera entre les variables x, y, z, et leurs différences partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$; nous la désignerons, en général, par $\mathrm{Z}'=0$.

Ainsi l'on pourra regarder l'équation $\mathrm{Z}=0$ comme l'intégrale complète du premier ordre de l'équation du second ordre $\mathrm{Z}'=0$, et, comme les deux constantes a et b restent arbitraires, on peut conclure, en général, que toute intégrale complète du premier ordre d'une équation aux différences partielles du second ordre doit contenir deux constantes arbitraires.

Soit par exemple l'équation aux différences premières

$$\frac{dz}{dy}-m\frac{dz}{dx}=a+bx+nby,$$

a et b étant deux constantes qui doivent rester indéterminées, et m, n deux coefficients donnés.

Faisant varier successivement x et y, on aura les deux équations

$$\frac{d^2z}{dy^2}-m\frac{d^2z}{dx\,dy}=nb, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy}-m\frac{d^2z}{dx^2}=b;$$

d'où chassant b, il viendra l'équation

$$\frac{d^2z}{dy^2}-(m+n)\frac{d^2z}{dx\,dy}+mn\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

dont l'équation ci-dessus sera par conséquent l'intégrale complète du premier ordre.

Ainsi, ayant une équation du second ordre de la forme

$$\frac{d^2z}{dy^2}-\mathrm{A}\frac{d^2z}{dx\,dy}+\mathrm{B}\frac{d^2z}{dx^2}=0,$$

il n'y aura qu'à chercher les racines de l'équation

$$s^2-\mathrm{A}s+\mathrm{B}=0,$$

et nommant ces racines m, n, on aura l'intégrale complète du premier ordre

$$\frac{dz}{dy}-m\frac{dz}{dx}=a+b(x+ny);$$

et, comme on peut échanger entre elles les racines m et n, on aura aussi cette autre intégrale du premier ordre

$$\frac{dz}{dy} - n\frac{dz}{dx} = h + g(x + my),$$

h et g étant d'autres constantes arbitraires.

Au moyen de ces deux intégrales du premier ordre on pourra, si l'on veut, trouver l'intégrale complète finie; car en chassant par exemple $\frac{dz}{dy}$, on aura l'équation

$$(n-m)\frac{dz}{dx} = a - h + (b-g)x + (nb - mg)y,$$

qui peut être intégrée en faisant varier x seul; et l'on aura

$$(n-m)z = Y + (a-h)x + (b-g)\frac{x^2}{2} + (nb - mg)xy,$$

Y étant une fonction quelconque de y.

Or, si des mêmes équations on chasse $\frac{dz}{dx}$, on a

$$(n-m)\frac{dz}{dy} = na - mh + (nb - mg)x + (n^2b - m^2g)y,$$

et, intégrant par rapport à y seul, on aura

$$(n-m)z = X + (na - mh)y + (nb - mg)xy + (n^2b - m^2g)\frac{y^2}{2},$$

et, comme ces deux équations doivent être la même chose, il faudra faire

$$Y = c + (na - mh)y + (n^2b - m^2g)\frac{y^2}{2},$$

$$X = c + (a-h)x + (b-g)\frac{x^2}{2};$$

c étant une constante arbitraire.

Ainsi l'intégrale complète finie de la proposée sera

$$(n-m)z = c + (a-h)x + (na - mh)y + (b-g)\frac{x^2}{2} + (nb - mg)xy + (n^2b - m^2g)\frac{y^2}{2},$$

où a, b, c, g, h sont les cinq arbitraires.

Au reste il est facile de voir que cette méthode de trouver l'intégrale complète finie d'une équation du second ordre, lorsqu'on connaît deux différentes intégrales complètes du premier ordre de la même équation, est générale et réussira toujours, quelle que soit la forme de ces intégrales complètes; car en éliminant $\frac{dz}{dx}$ on aura toujours une équation où y pourra être traitée comme constante, et en éliminant $\frac{dz}{dy}$ on en aura une où x pourra être regardée elle-même comme constante; et, l'intégration introduisant nécessairement une nouvelle constante arbitraire, on aura dans l'intégrale finie le nombre de cinq arbitraires; ce qui est le caractère des intégrales complètes (57).

61. Lorsqu'on connaît l'intégrale complète du premier ordre $Z = o$ d'une équation du second ordre $Z' = o$, on en peut déduire sans peine son intégrale particulière.

Car il ne faudra que faire varier dans l'équation $Z = o$ les deux constantes arbitraires a et b, et supposer ensuite les coefficients des deux différentielles da et db chacun égal à zéro; on aura ainsi deux équations qui serviront à éliminer les quantités a et b dans l'équation $Z = o$, et la résultante sera l'intégrale particulière aux premières différences de la proposée $Z' = o$.

62. Enfin, si l'on ne connaît aucune des intégrales complètes de l'équation $Z' = o$ du second ordre, on pourra néanmoins trouver son intégrale particulière aux premières différences.

Il n'y aura pour cela qu'à différentier l'équation proposée, et, ayant

fait disparaître les fractions pour avoir une équation de la forme

$$M d\frac{d^2z}{dx^2} + N d\frac{d^2z}{dy^2} + P d\frac{d^2z}{dx\,dy} + Q dx + R dy = 0,$$

M, N, P, Q, R étant des fonctions connues et entières de

$$x,\ y,\ z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{dz}{dy},\ \frac{d^2z}{dx^2},\ \frac{d^2z}{dx\,dy},\ \frac{d^2z}{dy^2},$$

on supposera séparément égale à zéro chacune des cinq quantités M, N, P, Q, R, ce qui donnera cinq équations, lesquelles étant combinées avec l'équation $Z' = 0$, en sorte que les trois quantités $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$ disparaissent, il résultera trois équations finales en x, y, z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$; il faudra donc que ces trois équations puissent avoir lieu en même temps, c'est-à-dire qu'elles aient un facteur commun, pour que la proposée soit susceptible d'une intégrale particulière; et ce facteur, s'il y en a un, sera l'intégrale cherchée.

La démonstration de cette méthode et de celle du numéro précédent est facile à déduire des principes exposés dans ce Mémoire, et nous ne croyons pas devoir nous y arrêter.

63. Si l'équation $Z' = 0$ est telle, que

$$dZ' = A d\frac{d^2z}{dx^2} + B d\frac{d^2z}{dx\,dy} + C d\frac{d^2z}{dy^2},$$

alors on n'aura pour la détermination de l'intégrale particulière que les trois équations de condition

$$A = 0,\quad B = 0,\quad C = 0,$$

lesquelles serviront à éliminer les trois quantités $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$ dans l'équation $Z' = 0$; et la résultante sera l'intégrale particulière de cette même équation

64. Pour trouver la forme générale des équations qui ont cette propriété, il n'y a qu'à remarquer qu'on peut satisfaire à l'équation $dZ' = 0$ en faisant séparément

$$d\frac{d^2z}{dx^2} = 0,\quad d\frac{d^2z}{dx\,dy} = 0,\quad d\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

ce qui donne, en prenant des constantes arbitraires,

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2c,\quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = g,\quad \frac{d^2z}{dy^2} = 2h,$$

et intégrant de nouveau

$$\frac{dz}{dx} = a + 2cx + gy,\quad \frac{dz}{dy} = b + 2hy + gx,$$

et enfin

$$z = k + ax + by + cx^2 + gxy + hy^2;$$

où il se trouve, comme l'on voit, six constantes indéterminées. Or, si l'on substitue ces valeurs dans l'équation $Z' = 0$, il arrivera nécessairement que les quantités x et y s'en iront d'elles-mêmes, en sorte qu'il ne restera qu'une équation entre les constantes $k, a, b, \ldots$, par laquelle il faudra en déterminer une par les autres.

Supposons donc qu'on ait déterminé k, en sorte que l'on ait, en général,

$$k = f(a, b, c, g, h),$$

alors on aura l'équation finie

$$z = ax + by + cx^2 + gxy + hy^2 + f(a, b, c, g, h)$$

qui, contenant cinq constantes arbitraires, sera l'intégrale complète de la proposée $Z' = 0$; et d'où l'on pourra par conséquent déduire la forme générale de cette même équation, ainsi que nous l'avons déjà fait plus haut (58).

L'équation différentio-différentielle, que nous avons trouvée dans le n° 58, sera donc la formule générale de toutes les équations qui peuvent

avoir la propriété en question; et si l'on différentie cette équation, qu'ensuite on suppose égal à zéro chacun des coefficients des trois différences $d\frac{d^2z}{dx^2}$, $d\frac{d^2z}{dx\,dy}$, $d\frac{d^2z}{dy^2}$, on aura trois équations, qui étant combinées avec l'équation proposée donneront, par l'élimination des quantités $\frac{d^2z}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^2z}{dx\,dy}$, le même résultat que l'on aura par la méthode du n° 62.

65. Après avoir vu comment on peut déduire les intégrales particulières des intégrales complètes, voyons comment on peut en déduire aussi les intégrales générales. Et d'abord il est facile de prouver d'après les principes exposés ci-dessus (57) que pour que l'équation $V = 0$, qu'on suppose être l'intégrale complète finie de l'équation du second ordre $Z' = 0$, satisfasse à cette même équation, en y regardant les cinq arbitraires a, b, c, g, h comme variables, il suffira que ces quantités soient telles, qu'elles satisfassent aux trois équations différentielles qu'on aura en égalant à zéro les différences des quantités V, p, q, dans lesquelles on n'aura fait varier que les quantités a, b, c, g, h.

Or, comme de cette manière on n'a que trois équations pour la détermination des cinq variables a, b, c, g, h, il est clair qu'il y en aura deux à volonté qu'on pourra supposer être des fonctions quelconques indéterminées des trois autres; il s'agira seulement de faire en sorte qu'on puisse déterminer ensuite les valeurs des cinq variables dont il s'agit d'une manière finie, en fonctions de x, y, z; alors il n'y aura plus qu'à substituer ces valeurs dans l'équation $V = 0$, et l'on aura l'intégrale générale de la proposée $Z' = 0$ du second ordre, laquelle intégrale contiendra deux fonctions indéterminées.

Nous avons vu ci-dessus (57) que l'équation du second ordre

$$\frac{d^2z}{dy^2} = m\frac{d^2z}{dx^2}$$

a pour intégrale finie complète

$$z = a + bx + cy + hx^2 + gxy + mhy^2.$$

De là on a

$$V = -z + a + bx + cy + hx^2 + gxy + mhy^2,$$

$$p = \frac{dz}{dx} = b + 2hx + gy, \quad q = \frac{dz}{dy} = c + gx + 2mhy;$$

donc, faisant varier les quantités a, b, c, g, h, on a les équations de condition

$$da + x\,db + y\,dc + x^2dh + xy\,dg + my^2dh = 0,$$

$$db + 2x\,dh + y\,dg = 0,$$

$$dc + x\,dg + 2my\,dh = 0.$$

J'ajoute ces deux dernières équations ensemble après en avoir multiplié une par un coefficient constant arbitraire μ, ce qui donne

$$\mu\,db + dc + x(dg + 2\mu\,dh) + \mu y\left(dg + \frac{2m\,dh}{\mu}\right) = 0,$$

où l'on voit que, si l'on fait $\mu = \frac{m}{\mu}$, ce qui donne $\mu = \sqrt{m}$, on aura

$$dc + db\sqrt{m} + (x + y\sqrt{m})(dg + 2dh\sqrt{m}) = 0;$$

cette équation ne contenant plus que deux variables $c + b\sqrt{m}$ et $g + 2h\sqrt{m}$, il n'y aura qu'à supposer, à l'imitation de ce que nous avons pratiqué plus haut (47),

$$c + b\sqrt{m} = \varphi(g + 2h\sqrt{m}),$$

ce qui donnera

$$dc + db\sqrt{m} = \varphi'(g + 2h\sqrt{m})(dg + 2dh\sqrt{m}),$$

et l'on aura, après la substitution et la division par $dg + 2dh\sqrt{m}$,

$$\varphi'(g + 2h\sqrt{m}) + x + y\sqrt{m} = 0;$$

d'où l'on tirera la valeur de $g + 2h\sqrt{m}$, en fonction de $x + y\sqrt{m}$; or, comme le radical $\sqrt{m}$ peut être pris également en moins, on aura de

même l'équation

$$dc - db\sqrt{m} + (x - y\sqrt{m})(dg - 2dh\sqrt{m}) = 0,$$

laquelle, en faisant

$$c - b\sqrt{m} = \psi(g - 2h\sqrt{m}),$$

donnera

$$\psi'(g - 2h\sqrt{m}) + x - y\sqrt{m} = 0;$$

moyennant quoi on connaîtra séparément g et h en x et y.

Soit, pour plus de simplicité,

$$x + y\sqrt{m} = t, \quad x - y\sqrt{m} = u,$$

et soient T, U deux fonctions de t et de u; il est clair qu'on aura

$$g + 2h\sqrt{m} = \mathrm{T}, \quad g - 2h\sqrt{m} = \mathrm{U};$$

donc

$$dc + db\sqrt{m} + t\,d\mathrm{T} = 0, \quad dc - db\sqrt{m} + u\,d\mathrm{U} = 0,$$

par conséquent

$$c + b\sqrt{m} = -\int t\,d\mathrm{T}, \quad c - b\sqrt{m} = -\int u\,d\mathrm{U}.$$

On aura donc ainsi

$$c = -\frac{\int t\,d\mathrm{T} + \int u\,d\mathrm{U}}{2}, \quad b = -\frac{\int t\,d\mathrm{T} + \int u\,d\mathrm{U}}{2\sqrt{m}},$$

$$g = \frac{\mathrm{T} + \mathrm{U}}{2}, \qquad h = \frac{\mathrm{T} - \mathrm{U}}{4\sqrt{m}},$$

et, substituant ces valeurs dans la première des trois équations de condition, on aura, après les réductions,

$$da - \frac{t^2\,d\mathrm{T} - u^2\,d\mathrm{U}}{4\sqrt{m}} = 0,$$

d'où l'on tire

$$a = \frac{\int t^2\,d\mathrm{T} - \int u^2\,d\mathrm{U}}{4\sqrt{m}}.$$

Connaissant ainsi les valeurs des cinq quantités a, b, c, g, h, il n'y aura plus qu'à les substituer dans l'équation $\mathrm{V} = 0$, et l'on aura

$$z = \frac{\int t^2\,d\mathrm{T} - 2t\int t\,d\mathrm{T} + t^2\mathrm{T}}{4\sqrt{m}} - \frac{\int u^2\,d\mathrm{U} - 2u\int u\,d\mathrm{U} + u^2\mathrm{U}}{4\sqrt{m}},$$

ce qui se réduit à cette forme plus simple

$$z = \frac{\int dt\int \mathrm{T}\,dt - \int du\int \mathrm{U}\,du}{2\sqrt{m}};$$

or, T étant une fonction quelconque de t ou $x + y\sqrt{m}$, et U une fonction quelconque de u ou $x - y\sqrt{m}$, il est visible que $\int dt\int \mathrm{T}\,dt$ et $\int du\int \mathrm{U}\,du$ seront aussi des fonctions quelconques des mêmes quantités. De sorte qu'on aura, en général,

$$z = \Phi(x + y\sqrt{m}) + \Psi(x - y\sqrt{m}),$$

ce qui s'accorde avec ce que l'on sait depuis longtemps.

Au reste on voit par cet Exemple, qui est d'ailleurs un des plus simples, que la méthode dont il s'agit, quoique directe et générale, est en quelque façon plus curieuse qu'utile, à cause des difficultés qui peuvent se rencontrer dans l'intégration des équations de condition; c'est pourquoi nous ne nous arrêterons pas davantage sur ce sujet.

66. Il est beaucoup plus aisé de tirer l'intégrale générale aux premières différences de l'intégrale complète du premier ordre. Car nous avons vu (60) que, si $\mathrm{Z} = 0$ est l'intégrale complète du premier ordre de l'équation du second ordre $\mathrm{Z}' = 0$, il suffit qu'il y ait dans l'équation $\mathrm{Z} = 0$ deux constantes arbitraires a et b; et il est facile de prouver que cette équation satisfera également à l'équation $\mathrm{Z}' = 0$ en y regardant a

et b comme des variables, pourvu que l'on ait

$$\frac{dZ}{da}\,da+\frac{dZ}{db}\,db=0;$$

de sorte qu'en faisant, en général,

$$b=\varphi(a),$$

on n'aura que cette seule équation de condition

$$\frac{dZ}{da}+\frac{dZ}{db}\,\varphi'(a)=0,$$

laquelle servira à éliminer a dans l'équation $Z=0$; et la résultante contenant une fonction arbitraire sera nécessairement l'intégrale générale aux différences premières de la proposée $Z'=0$; il n'y a, comme l'on voit, aucune difficulté dans l'application de cette méthode.

L'équation

$$\frac{d^2z}{dy^2}-A\frac{d^2z}{dx\,dy}+B\frac{d^2z}{dx^2}=0$$

a pour intégrale complète du premier ordre

$$\frac{dz}{dy}-m\frac{dz}{dx}=a+b(x+ny),$$

comme on l'a vu plus haut (60). Pour en déduire l'intégrale générale on fera donc varier a et b, ce qui donnera

$$da+(x+ny)\,db=0;$$

et faisant $b=\varphi(a)$ on aura

$$1+(x+ny)\,\varphi'(a)=0,$$

d'où l'on voit que

$$\varphi'(a)=-\frac{1}{x+ny},$$

donc a est égale à une fonction de $x+ny$, et par conséquent b est aussi

égal à une fonction de $x+ny$; donc aussi $a+(x+ny)\,b$ est égal à une fonction de $x+ny$, que je dénoterai par $\Phi(x+ny)$; et il est visible que cette fonction pourra être quelconque. Ainsi l'intégrale générale du premier ordre sera

$$\frac{dz}{dy}-m\frac{dz}{dx}=\Phi(x+ny).$$

De plus on a vu que la même équation a aussi pour intégrale complète du premier ordre

$$\frac{dz}{dy}-n\frac{dz}{dx}=h+g(x+my);$$

d'où l'on tirera, par un procédé semblable au précédent, la nouvelle intégrale générale

$$\frac{dz}{dy}-n\frac{dz}{dx}=\Psi(x+my),$$

la caractéristique Ψ dénotant aussi une fonction quelconque.

Maintenant de même que dans l'endroit cité on a tiré l'intégrale finie complète des deux intégrales complètes du premier ordre, de même aussi pourra-t-on déduire des deux intégrales générales du premier ordre qu'on vient de trouver l'intégrale générale finie de l'équation proposée du second ordre.

En effet on a d'abord, en éliminant $\frac{dz}{dy}$,

$$(n-m)\frac{dz}{dx}=\Phi(x+ny)-\Psi(x+my);$$

multipliant par dx et intégrant relativement à x, on aura

$$(n-m)\,z={}^{1}\Phi(x+ny)-{}^{1}\Psi(x+my)+Y.$$

Y dénote une fonction quelconque de y, et les caractéristiques ${}^{1}\Phi$, ${}^{1}\Psi$ dénotent les intégrales des fonctions exprimées par les Φ, Ψ. En éliminant de même la quantité $\frac{dz}{dx}$, on a

$$(n-m)\frac{dz}{dy}=n\Phi(x+ny)-m\Psi(x+my),$$

et intégrant relativement à y seul, on aura

$$(n-m)z = {}^{1}\Phi(x+ny) - {}^{1}\Psi(x+my) + \mathrm{X},$$

X étant une fonction quelconque de x; or, comme ces deux valeurs de z doivent être identiques, il faudra que

$$\mathrm{X} = \mathrm{Y},$$

ce qui ne peut avoir lieu, à moins que les deux quantités X et Y ne soient constantes; mais, comme les caractéristiques ${}^{1}\Phi$ et ${}^{1}\Psi$ expriment des fonctions quelconques, il serait superflu d'ajouter à ces fonctions une constante quelconque. Ainsi l'intégrale générale finie de la proposée sera

$$(n-m)z = {}^{1}\Phi(x+ny) - {}^{1}\Psi(x+my).$$

Cette méthode est générale, et l'on pourra toujours par son moyen trouver l'intégrale générale finie de toute équation à différences partielles du second ordre, dont on connaîtra deux intégrales complètes du premier ordre.

67. On pourrait croire qu'il suffit de connaître l'intégrale complète finie d'une équation à différences partielles du second ordre pour pouvoir trouver deux intégrales complètes du premier ordre de la même équation, comme cela a lieu pour les équations différentielles à deux variables (**32**); mais il n'en est pas ainsi des équations à différences partielles. En effet, dans ces sortes d'équations, lorsqu'il n'y a que trois variables, toute différentiation simple fournit deux équations, mais une différentiation double en fournit cinq, et une différentiation triple en fournira neuf, et ainsi de suite. De là vient que toute intégrale complète simple ou du premier ordre doit contenir deux constantes arbitraires, toute intégrale double ou du second ordre doit contenir cinq arbitraires, et ainsi du reste. Ainsi, pour pouvoir déduire une intégrale complète du premier ordre d'une intégrale complète du second, il faudrait pouvoir éliminer, par une simple différentiation de celle-ci, trois constantes arbitraires à la fois; ou bien, si l'on n'en élimine que deux, il faudrait que

la résultante fût telle, que les trois arbitraires restantes pussent être éliminées à la fois par une nouvelle différentiation simple; or c'est ce qui est impossible, en général, et ne peut guère avoir lieu que dans des cas particuliers.

A plus forte raison sera-t-il impossible de déduire, en général, d'une intégrale complète du troisième ordre une intégrale complète du second ou du premier, et ainsi du reste.

Nous allons rendre tout cela sensible par quelques Exemples.

68. Soit prise d'abord l'équation du n° 58 ci-dessus, dont l'intégrale complète finie est

$$z = k + ax + by + cx^2 + gxy + hy^2,$$

k étant $= f(a, b, c, g, h)$.

Une différentiation simple donne les deux équations

$$\frac{dz}{dx} = a + 2cx + gy, \quad \frac{dz}{dy} = b + gx + 2hy;$$

il faut donc voir si en combinant ces deux équations avec la précédente on peut chasser à la fois trois des cinq arbitraires a, b, c, g, h. Je fais d'abord cette combinaison

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = ax + by + 2(cx^2 + gxy + hy^2),$$

et je remarque que si je retranche cette équation de celle ci-dessus multipliée par 2, j'en aurai une du premier ordre qui ne contiendra plus que les deux arbitraires a et b, pourvu qu'on suppose que k soit une fonction de a et b seulement.

J'aurai donc dans ce cas l'équation

$$2z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy} = 2f(a, b) + ax + by,$$

qui sera l'intégrale complète du premier ordre de l'équation du second

ordre

$$z = x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} - \frac{x^2}{2}\frac{d^2z}{dx^2} - xy\frac{d^2z}{dx\,dy} - \frac{y^2}{2}\frac{d^2z}{dy^2} + f\left(\frac{dz}{dx} - x\frac{d^2z}{dx^2} - y\frac{d^2z}{dx\,dy},\ \frac{dz}{dy} - y\frac{d^2z}{dy^2} - x\frac{d^2z}{dx\,dy}\right).$$

De là on pourra donc trouver, si l'on veut, l'intégrale générale du premier ordre de cette même équation (66).

Car en faisant varier a et b, et supposant

$$b = \varphi(a), \quad db = \varphi'(a)\,da,$$

on aura l'équation

$$x + 2\frac{df(a,b)}{da} + \left[y + 2\frac{df(a,b)}{db}\right]\varphi'(a) = 0,$$

par laquelle on éliminera a dans l'intégrale complète après avoir mis partout $\varphi(a)$ à la place de b; la résultante sera l'intégrale générale cherchée.

Dans cet Exemple nous avons pu éliminer à la fois les trois arbitraires c, g, h, ce qui nous a donné une intégrale complète du premier ordre; mais pour avoir une autre intégrale complète il faudrait pouvoir éliminer à la fois trois autres des cinq arbitraires a, b, c, g, h, ce qui n'est guère possible, comme on peut s'en assurer aisément par le calcul.

Au reste on voit aussi par l'Exemple précédent que, si la quantité k était une fonction qui contînt les arbitraires c, g, h, il ne serait plus possible de parvenir à une intégrale complète du premier ordre, par l'élimination simultanée de trois arbitraires.

69. Soit maintenant l'équation

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2y}{x}\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{y^2}{x^2}\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

dont l'intégrale complète est

$$z = a + bx + cy + g\frac{y}{x} + h\frac{y^2}{x},$$

comme il est facile de s'en assurer par la substitution de cette valeur de z.

J'aurai par la différentiation

$$\frac{dz}{dx} = b - g\frac{y}{x^2} - h\frac{y^2}{x^2}, \quad \frac{dz}{dy} = c + \frac{g}{x} + \frac{2hy}{x},$$

d'où l'on tire cette combinaison

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = bx + cy + h\frac{y^2}{x},$$

et, retranchant cette équation de la précédente, j'aurai celle-ci

$$z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy} = a + g\frac{y}{x},$$

laquelle ne contenant plus que deux arbitraires sera par conséquent l'intégrale complète du premier ordre de la proposée.

On pourra donc tirer de celle-ci l'intégrale générale du premier ordre, laquelle sera

$$z - x\frac{dz}{dx} - y\frac{dz}{dy} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Je remarque de plus que l'on a

$$\frac{dz}{dx} + \frac{y}{x}\frac{dz}{dy} = b + c\frac{y}{x} + h\frac{y^2}{x^2},$$

et que cette équation est telle, que les trois arbitraires qu'elle renferme peuvent être éliminées à la fois au moyen de ses deux différentielles

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{y}{x}\frac{d^2z}{dx\,dy} - \frac{y}{x^2}\frac{dz}{dy} = -\frac{cy}{x^2} - \frac{2hy^2}{x^3},$$

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{y}{x}\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dy} = \frac{c}{x} + \frac{2hy}{x^2};$$

car, en ajoutant ces deux équations-ci ensemble après avoir multiplié la

seconde par $\frac{y}{x}$, on a

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{2y}{x}\frac{d^2z}{dx\,dy} + \frac{y^2}{x^2}\frac{d^2z}{dy^2} = 0,$$

qui est l'équation même proposée.

De là il s'ensuit donc que l'équation dont il s'agit sera aussi une intégrale complète du premier ordre, et même on y pourra pour plus de simplicité supposer égale à zéro une quelconque des trois arbitraires qu'elle renferme.

On aura donc de cette manière cette nouvelle intégrale complète

$$\frac{dz}{dx} + \frac{y}{x}\frac{dz}{dy} = b + c\frac{y}{x},$$

d'où l'on tirera aussi une nouvelle intégrale générale du premier ordre, laquelle sera

$$\frac{dz}{dx} + \frac{y}{x}\frac{dz}{dy} = \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Au moyen de cette intégrale et de la précédente on pourra avoir sur-le-champ l'intégrale générale finie; car multipliant la dernière par x et l'ajoutant à la première on aura

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\,\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ et $\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ étant deux fonctions arbitraires de $\frac{y}{x}$.

70. Nous nous dispenserons d'examiner les équations à différences partielles des ordres plus élevés, comme aussi celles où il y aurait plus de trois variables; l'application des principes que nous venons d'établir à ces sortes d'équations ne doit pas être difficile à présent, et d'ailleurs ce Mémoire n'est déjà que trop long.

SUR LE

MOUVEMENT DES NŒUDS

DES

ORBITES PLANÉTAIRES.

SUR LE

MOUVEMENT DES NŒUDS

DES

ORBITES PLANÉTAIRES(*).

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1774.)

Un des principaux effets de l'attraction mutuelle des planètes est le changement de situation de leurs orbites. La théorie fait voir que si un corps qui se meut autour d'un centre, en vertu d'une force quelconque tendante à ce centre, est attiré par un autre corps mû autour du même centre et dans le même sens, mais dans un plan différent, le nœud, c'est-à-dire l'intersection de l'orbite du corps attiré sur celle du corps attirant regardée comme fixe, a nécessairement un mouvement rétrograde et contraire à celui des deux corps, sans compter les inégalités périodiques qui auront lieu tant dans ce mouvement du nœud que dans l'inclinaison des orbites. C'est ainsi que les nœuds de la Lune rétrogradent sur l'écliptique d'environ 19 degrés par an, par l'action du Soleil. La même chose doit donc avoir lieu aussi à l'égard des orbites des planètes principales, dont l'attraction mutuelle est un fait qu'on ne saurait plus révoquer en

(*) Lu le 9 juin 1774.

doute; chaque orbite doit rétrograder continuellement sur chacune des autres orbites; ce qui doit nécessairement produire à la longue un déplacement général de toutes les orbites planétaires. Il en est de même des orbites des satellites de Jupiter, ainsi que de celles des satellites de Saturne.

M. Euler est le premier qui ait entrepris de déterminer le changement que le plan de l'orbite de la Terre doit souffrir par sa rétrogradation continuelle sur les plans des orbites des autres planètes.

M. de Lalande a étendu ensuite cette théorie à toutes les planètes, et, après avoir déterminé séparément le mouvement des nœuds de chaque planète sur l'orbite de chacune des cinq autres, a examiné quel changement il devrait en résulter dans la position de chaque orbite relativement à un plan fixe.

Enfin M. Bailly a appliqué cette même théorie aux satellites de Jupiter et a tâché d'expliquer par là les variations observées dans les inclinaisons des orbites du second et du troisième satellite.

Mais comme les formules que ces Auteurs ont employées n'expriment à proprement parler que les variations instantanées ou différentielles des lieux des nœuds et des inclinaisons des orbites, il s'ensuit qu'elles ne peuvent servir que pour un temps limité, et qu'elles sont absolument insuffisantes pour faire connaître les véritables lois des variations de ces éléments. D'où l'on voit que le Problème dont il s'agit n'a pas encore été résolu avec toute la généralité et la précision nécessaires pour qu'on en puisse tirer des conclusions exactes sur les phénomènes que l'action mutuelle des planètes doit produire à la longue relativement à la position de leurs orbites.

L'importance de ce Problème m'ayant engagé à m'en occuper, je vais communiquer ici aux Géomètres les recherches que j'ai faites depuis quelque temps pour en trouver la solution. Elles m'ont conduit à des résultats qui me paraissent mériter leur attention, tant par l'utilité dont ils peuvent être dans l'Astronomie physique, que par l'analyse même sur laquelle ils sont fondés.

Je considère d'abord deux seules orbites mobiles l'une sur l'autre, et

je donne dans ce cas une solution générale complète de la question; je fais voir ensuite que le cas de trois orbites mobiles à la fois l'une sur l'autre dépend de la rectification des sections coniques, et par conséquent ne peut être résolu par les méthodes connues; d'où je conclus qu'à plus forte raison on ne saurait se flatter de pouvoir résoudre le Problème lorsque le nombre des orbites mobiles est plus grand. Cependant comme les orbites des planètes ainsi que celles des satellites sont peu inclinées les unes aux autres, j'examine si cette circonstance ne pourrait pas apporter quelque simplification aux calculs, et je parviens enfin à une méthode très-simple et très-générale par laquelle, quel que soit le nombre des orbites mobiles, le Problème se réduit toujours à des équations différentielles linéaires du premier ordre, dont l'intégration est facile par les méthodes connues; de sorte qu'on peut par ce moyen avoir une théorie complète des principaux changements que l'attraction mutuelle des planètes doit produire dans les lieux des nœuds et dans les inclinaisons de leurs orbites. Je me contente ici de poser les fondements de cette théorie, et je me propose d'en donner dans une autre occasion tout le détail, et l'application même au système du monde (*).

1. Considérons d'abord deux seules planètes P et Q qui se meuvent dans les plans des grands cercles AP, BQ (*fig.* 1, page 114) faisant entre eux l'angle PLQ; et supposons que par l'attraction de la planète P sur la planète Q, le nœud L soit forcé de rétrograder sur l'arc AP, regardé comme fixe, de la quantité constante $p\,dt$ pendant chaque instant dt, et que par l'attraction de la planète Q sur la planète P, le même nœud L soit obligé de rétrograder sur l'arc BQ, regardé maintenant comme fixe, de la quantité constante $q\,dt$ à chaque instant dt, l'angle QLP demeurant d'ailleurs

(*) J'ai rempli depuis cet engagement dans un Mémoire que j'ai envoyé à l'Académie Royale des Sciences de Paris au mois d'octobre 1774, et dont on trouvera les résultats dans les *Tables astronomiques* que l'Académie va publier.

Le Mémoire dont il est ici question a été inséré parmi ceux de l'Académie des Sciences de Paris, pour l'année 1774; il appartient à la troisième Section des *Œuvres de Lagrange*. (*Note de l'Éditeur.*)

toujours le même; on demande le changement qui en résultera au bout d'un temps quelconque t dans la position des arcs AP, BQ.

Fig. 1.

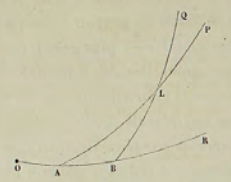
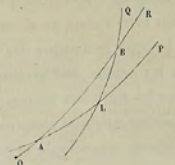


Fig. 2.



2. Pour cela il faut tirer un troisième arc de grand cercle OABR qu'on supposera toujours fixe, et auquel on rapportera la position des arcs mobiles AP, BQ; et, ayant pris dans cet arc un point fixe O, on fera

$$OA = x, \quad OB = y, \quad AL = s, \quad BL = z, \quad BAL = \xi, \quad RBL = \psi, \quad ALB = \omega.$$

On considérera maintenant que de ces sept quantités il suffira d'en connaître quatre, parce que les trois autres dépendront de celles-ci par les propriétés connues des triangles sphériques, et il est clair que celles qu'il est le plus naturel de chercher sont x, y, ξ et ψ, parce qu'elles déterminent immédiatement la position des arcs mobiles AP, BQ; il faut donc trouver quatre équations entre ces quatre quantités d'après les conditions données du Problème; or il est visible que ces conditions se réduisent à celles-ci :

1° Qu'en supposant x, ξ et ω constants et faisant varier toutes les autres quantités de leurs différentielles respectives on ait

$$ds = -p\,dt;$$

2° Qu'en supposant y, ψ et ω constants et faisant varier les autres quantités on ait

$$dz = -q\,dt.$$

Il n'y aura donc qu'à employer les analogies différentielles connues

pour les triangles sphériques; mais il sera encore plus simple et plus direct de s'y prendre de la manière suivante.

3. Dans le triangle sphérique ALB on a, comme on sait,

$$\cos\psi = -\sin\omega\sin\xi\cos s + \cos\omega\cos\xi,$$

et de même

$$\cos\xi = \sin\omega\sin\psi\cos z + \cos\omega\cos\psi;$$

donc, différentiant la première de ces deux équations en y supposant ξ et ω constants et faisant

$$ds = -p\,dt,$$

on aura

$$d\cos\psi = -\sin\omega\sin\xi\sin s \times p\,dt;$$

différentiant ensuite la seconde équation en y supposant ψ et ω constants et faisant

$$dz = -q\,dt,$$

on aura

$$d\cos\xi = \sin\omega\sin\psi\sin z \times q\,dt.$$

On a de plus dans le même triangle

$$\cos(y-x) = \frac{\cos\omega - \cos\xi\cos\psi}{\sin\xi\sin\psi}.$$

Donc, supposant en premier lieu x, ξ et ω constants et faisant varier ψ et y, on aura

$$-\sin(y-x)\,dy = \frac{\cos\xi - \cos\omega\cos\psi}{\sin\xi\sin^2\psi}\,d\psi,$$

et supposant en second lieu y, ψ et ω constants et faisant varier ξ et x,

$$\sin(y-x)\,dx = \frac{\cos\psi - \cos\omega\cos\xi}{\sin\psi\sin^2\xi}\,d\xi.$$

Or on a par la propriété connue des sinus

$$\sin(y-x) = \frac{\sin\omega\sin s}{\sin\psi} = \frac{\sin\omega\sin z}{\sin\xi};$$

de plus les équations ci-dessus donnent

$$\cos\xi - \cos\omega\cos\psi = \sin\omega\sin\psi\cos z,$$
$$\cos\psi - \cos\omega\cos\xi = -\sin\omega\sin\xi\cos s;$$

donc, substituant ces valeurs, on aura

$$dy = -\frac{\cos z\, d\psi}{\sin\xi\sin s}, \quad dx = -\frac{\cos s\, d\xi}{\sin\psi\sin z}.$$

Et, si l'on met pour $d\xi$ et $d\psi$ leurs valeurs tirées des équations précédentes, on aura

$$dy = -\frac{\sin\omega\cos z}{\sin\psi}\, p\, dt, \quad dx = \frac{\sin\omega\cos s}{\sin\xi}\, q\, dt.$$

Ainsi la solution du Problème ne dépend plus que de l'intégration de ces quatre équations

$$\frac{d\cos\xi}{dt} = q\sin\omega\sin\psi\sin z, \quad \frac{d\cos\psi}{dt} = -p\sin\omega\sin\xi\sin s,$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{q\sin\omega\cos s}{\sin\xi}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{p\sin\omega\cos z}{\sin\psi},$$

où l'on remarquera que ω est une quantité constante, et que z et s sont données en ξ, ψ et ω.

4. Si l'on ajoute ensemble la première multipliée par p et la seconde multipliée par q, on aura, à cause de $\sin\psi\sin z = \sin\xi\sin s$,

$$\frac{p\, d\cos\xi + q\, d\cos\psi}{dt} = 0,$$

dont l'intégrale est, comme l'on voit,

$$p\cos\xi + q\cos\psi = \mu,$$

μ étant une constante dépendante de la position initiale des plans AP, BQ par rapport au plan fixe OAB.

5. Ayant maintenant une équation finie entre les cosinus des angles ξ et ψ, et connaissant d'ailleurs le troisième angle ω qui est supposé donné, on pourra réduire toutes les autres variables du Problème à une seule.

En effet on aura (3)

$$\cos s = \frac{\cos\omega\cos\xi - \cos\psi}{\sin\omega\sin\xi},$$

mais (4)

$$\cos\psi = \frac{\mu - p\cos\xi}{q};$$

donc

$$\cos s = \frac{(p + q\cos\omega)\cos\xi - \mu}{q\sin\omega\sin\xi};$$

de là, en faisant, pour abréger,

$$q^2\sin^2\omega - \mu^2 = a, \quad \mu(p + q\cos\omega) = b, \quad p^2 + 2pq\cos\omega + q^2 = n^2,$$

on aura

$$\sin s = \frac{\sqrt{a + 2b\cos\xi - n^2\cos^2\xi}}{q\sin\omega\sin\xi};$$

substituant donc cette valeur, on aura, par les équations du n° 3,

$$-\frac{d\xi}{dt} = \frac{\sqrt{a + 2b\cos\xi - n^2\cos^2\xi}}{\sin\xi},$$

et faisant $\cos\xi = u$,

$$dt = \frac{du}{\sqrt{a + 2bu - n^2u^2}};$$

d'où l'on tire par l'intégration

$$nt + \alpha = \arccos\frac{n\left(u - \frac{b}{n^2}\right)}{\sqrt{a + \frac{b^2}{n^2}}},$$

α étant une constante arbitraire.

Mais on a

$$an^2 + b^2 = q^2\sin^2\omega(n^2 - \mu^2);$$

donc

$$nt+\alpha=\arccos\frac{n^2\cos\xi-\mu(p+q\cos\omega)}{q\sin\omega\sqrt{n^2-\mu^2}};$$

par conséquent

$$\cos\xi=\frac{\mu(p+q\cos\omega)+q\sin\omega\sqrt{n^2-\mu^2}\cos(nt+\alpha)}{n^2},$$

où

$$n^2=p^2+2pq\cos\omega+q^2.$$

6. On trouvera de même la valeur de $\cos\psi$ à l'aide des équations du n° 3; mais sans faire pour cela un nouveau calcul, il suffira de changer dans les formules précédentes p en q, ξ en $180^\circ-\psi$ et μ en $-\mu$, et *vice versâ*, et l'on aura

$$\cos\psi=\frac{\mu(q+p\cos\omega)-p\sin\omega\sqrt{n^2-\mu^2}\cos(nt+\beta)}{n^2},$$

β étant une nouvelle constante arbitraire qu'on déterminera par la condition que les valeurs de $\cos\xi$ et de $\cos\psi$ doivent satisfaire à l'équation du n° 4. Substituant donc ces valeurs dans l'équation dont nous venons de parler, elle deviendra, après la destruction de quelques termes,

$$\frac{pq\sin\omega\sqrt{n^2-\mu^2}}{n^2}[\cos(nt+\alpha)-\cos(nt+\beta)]=0,$$

donc

$$\cos(nt+\alpha)=\cos(nt+\beta),$$

et par conséquent $\alpha=\beta$.

On aura donc

$$\cos\psi=\frac{\mu(q+p\cos\omega)-p\sin\omega\sqrt{n^2-\mu^2}\cos(nt+\alpha)}{n^2},$$

et les quantités α et μ seront les deux constantes arbitraires introduites par l'intégration des deux équations différentielles en ξ et ψ.

7. Pour déterminer ces deux arbitraires, on supposera que lorsque $t=0$ on ait $\xi=\Xi$ et $\psi=\Psi$, et l'on aura d'abord

$$\mu=p\cos\Xi+q\cos\Psi,$$

et ensuite

$$\cos\alpha=\frac{(q+p\cos\omega)\cos\Xi-(p+q\cos\omega)\cos\Psi}{\sin\omega\sqrt{n^2-\mu^2}}.$$

8. Ayant trouvé les valeurs de $\cos\psi$ et $\cos\xi$ en t, il sera facile d'en déduire celles de x et y, au moyen des deux dernières équations différentielles du n° 3.

On aura donc

$$\frac{dx}{dt}=\frac{q\sin\omega\times\cos s}{\sin\xi},$$

et, substituant pour $\cos s$ sa valeur trouvée dans le n° 5, on aura

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(p+q\cos\omega)\cos\xi-\mu}{\sin^2\xi}.$$

Or à cause de

$$\sin^2\xi=1-\cos^2\xi=(1-\cos\xi)(1+\cos\xi),$$

il est clair qu'on peut mettre le second membre de l'équation précédente sous cette forme

$$\frac{p+q\cos\omega-\mu}{2(1-\cos\xi)}-\frac{p+q\cos\omega+\mu}{2(1+\cos\xi)},$$

donc, substituant pour $\cos\xi$ sa valeur trouvée ci-dessus et multipliant toute l'équation par dt, on aura

$$dx=\frac{1}{2}\frac{(p+q\cos\omega-\mu)n^2dt}{n^2-\mu(p+q\cos\omega)-q\sin\omega\sqrt{n^2-\mu^2}\cos(nt+\alpha)}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{(p+q\cos\omega+\mu)n^2dt}{n^2+\mu(p+q\cos\omega)+q\sin\omega\sqrt{n^2-\mu^2}\cos(nt+\alpha)},$$

équation dont chaque terme est intégrable par les méthodes connues.

9. Pour parvenir plus aisément à intégrer cette équation, nous remarquerons que l'intégrale de

$$\frac{d\varphi}{A+B\cos\varphi},$$

prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $\varphi = 0$, est

$$\frac{2}{\sqrt{A^2 - B^2}} \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{A - B}{\sqrt{A^2 - B^2}} \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}\right),$$

comme il est facile de s'en assurer par la différentiation; or faisant

$$A = n^2 \pm \mu(p + q\cos\omega), \quad B = \pm q\sin\omega\sqrt{n^2 - \mu^2},$$

on trouve après les réductions

$$\sqrt{A^2 - B^2} = n(p + q\cos\omega \pm \mu);$$

d'où il est facile de conclure que l'intégrale de l'équation précédente, prise en sorte que x soit $= X$ lorsque $nt + \alpha = 0$, sera

$$x - X = \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{n^2 - \mu(p + q\cos\omega) + q\sin\omega\sqrt{n^2 - \mu^2}}{n(p + q\cos\omega - \mu)} \operatorname{tang}\frac{nt + \alpha}{2}\right]$$
$$- \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{n^2 + \mu(p + q\cos\omega) - q\sin\omega\sqrt{n^2 - \mu^2}}{n(p + q\cos\omega + \mu)} \operatorname{tang}\frac{nt + \alpha}{2}\right].$$

10. Or on sait que la différence de deux arcs a pour tangente la différence des tangentes divisée par la somme de l'unité et du produit des deux tangentes; ainsi la tangente de $x - X$ sera égale à la quantité

$$\frac{2n\left[\mu n^2 - (p + q\cos\omega)\left[\mu(p + q\cos\omega) - q\sin\omega\sqrt{n^2 - \mu^2}\right]\right]\operatorname{tang}\frac{nt + \alpha}{2}}{n^2[(p + q\cos\omega)^2 - \mu^2] + \left[n^2 - \left[\mu(p + q\cos\omega) - q\sin\omega\sqrt{n^2 - \mu^2}\right]^2\right]\operatorname{tang}^2\frac{nt + \alpha}{2}};$$

le numérateur de cette quantité se réduit à

$$2nq\sin\omega\left[\mu q\sin\omega + (p + q\cos\omega)\sqrt{n^2 - \mu^2}\right]\operatorname{tang}\frac{nt + \alpha}{2},$$

et le dénominateur se réduit à

$$n^2[(p + q\cos\omega)^2 - \mu^2] + \left[\mu q\sin\omega + (p + q\cos\omega)\sqrt{n^2 - \mu^2}\right]^2\operatorname{tang}^2\frac{nt + \alpha}{2};$$

de sorte qu'en faisant, pour abréger,

$$m = \mu q\sin\omega + (p + q\cos\omega)\sqrt{n^2 - \mu^2},$$

on aura

$$\operatorname{tang}(x - X) = \frac{2nmq\sin\omega\operatorname{tang}\frac{nt + \alpha}{2}}{n^2[(p + q\cos\omega)^2 - \mu^2] + m^2\operatorname{tang}^2\frac{nt + \alpha}{2}}.$$

11. On trouvera de la même manière la valeur de y par l'intégration de la dernière équation du n° 3, et il suffira même pour cela de changer dans l'expression précédente p en q, μ en $-\mu$ et x en $-y$; de cette manière, si l'on nomme Y la valeur de y lorsque $nt + \alpha = 0$ et qu'on suppose

$$m' = \mu p\sin\omega - (q + p\cos\omega)\sqrt{n^2 - \mu^2},$$

on aura

$$\operatorname{tang}(y - Y) = \frac{2nm'p\sin\omega\operatorname{tang}\frac{nt + \alpha}{2}}{n^2[(q + p\cos\omega)^2 - \mu^2] + m'^2\operatorname{tang}^2\frac{nt + \alpha}{2}}.$$

12. Il ne reste plus qu'à déterminer les arcs s et z; or on a trouvé dans le n° 5

$$\cos s = \frac{(p + q\cos\omega)\cos\xi - \mu}{q\sin\omega\sin\xi},$$

et de là

$$\sin s = \frac{\sqrt{a + 2b\cos\xi - n^2\cos^2\xi}}{q\sin\omega\sin\xi};$$

donc

$$\operatorname{tang} s = \frac{\sqrt{a + 2b\cos\xi - n^2\cos^2\xi}}{(p + q\cos\omega)\cos\xi - \mu}.$$

Mais on a aussi trouvé dans le même endroit

$$\sqrt{a + 2b\cos\xi - n^2\cos^2\xi} = -\frac{\sin\xi\, d\xi}{dt} = \frac{d\cos\xi}{dt};$$

donc

$$\operatorname{tang} s = \frac{d\cos\xi}{dt[(p + q\cos\omega)\cos\xi - \mu]}.$$

Substituons ici la valeur de $\cos\xi$ du n° 5, on aura après les réductions

$$\operatorname{tang} s = \frac{n\sqrt{n^2 - \mu^2}\sin(nt + \alpha)}{\mu q\sin\omega - \sqrt{n^2 - \mu^2}(p + q\cos\omega)\cos(nt + \alpha)}.$$

13. Et changeant dans cette expression p en q et μ en $-\mu$, on aura la valeur de $\operatorname{tang} z$, laquelle sera donc

$$\operatorname{tang} z = \frac{-n\sqrt{n^2-\mu^2}\sin(nt+\alpha)}{\mu p \sin\omega + \sqrt{n^2-\mu^2}(q+p\cos\omega)\cos(nt+\alpha)}.$$

14. On peut simplifier beaucoup les formules précédentes en supposant, ce qui est toujours permis,

$$\frac{\sqrt{n^2-\mu^2}}{\mu} = \operatorname{tang} M, \quad \frac{p\sin\omega}{q+p\cos\omega} = \operatorname{tang} P, \quad \frac{q\sin\omega}{p+q\cos\omega} = \operatorname{tang} Q;$$

car, à cause de

$$n^2 = p^2 + 2pq\cos\omega + q^2 = (p+q\cos\omega)^2 + q^2\sin^2\omega = (q+p\cos\omega)^2 + p^2\sin^2\omega,$$

on aura

$$\sqrt{n^2-\mu^2} = n\sin M, \quad \mu = n\cos M,$$
$$p\sin\omega = n\sin P, \quad q+p\cos\omega = n\cos P,$$
$$q\sin\omega = n\sin Q, \quad p+q\cos\omega = n\cos Q.$$

Faisant donc ces substitutions, on aura d'abord (5 et 6)

$$\cos\xi = \cos M\cos Q + \sin M\sin Q\cos(nt+\alpha),$$
$$\cos\psi = \cos M\cos P - \sin M\sin P\cos(nt+\alpha);$$

ensuite on aura (10 et 11)

$$m = n^2\sin(Q+M), \quad m' = n^2\sin(P-M),$$

et de là

$$\operatorname{tang}(x-X) = \frac{2\sin Q\operatorname{tang}\frac{nt+\alpha}{2}}{\sin(M-Q)+\sin(M+Q)\operatorname{tang}^2\frac{nt+\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tang}(y-Y) = \frac{-2\sin P\operatorname{tang}\frac{nt+\alpha}{2}}{\sin(M+P)+\sin(M-P)\operatorname{tang}^2\frac{nt+\alpha}{2}},$$

ou bien

$$\operatorname{tang}(x-X) = \frac{\sin Q\sin(nt+\alpha)}{\sin M\cos Q - \cos M\sin Q\cos(nt+\alpha)},$$

$$\operatorname{tang}(y-Y) = \frac{-\sin P\sin(nt+\alpha)}{\sin M\cos P + \cos M\sin P\cos(nt+\alpha)};$$

enfin on aura (12 et 13)

$$\operatorname{tang} s = \frac{\sin M\sin(nt+\alpha)}{\cos M\sin Q - \sin M\cos Q\cos(nt+\alpha)},$$

$$\operatorname{tang} z = \frac{-\sin M\sin(nt+\alpha)}{\cos M\sin P + \sin M\cos P\cos(nt+\alpha)}.$$

15. A l'égard des constantes μ et α, on a (7)

$$\mu = p\cos\Xi + q\cos\Psi,$$

mais

$$p = \frac{n\sin P}{\sin\omega}, \quad q = \frac{n\sin Q}{\sin\omega};$$

donc

$$\mu = \frac{n(\sin P\cos\Xi + \sin Q\cos\Psi)}{\sin\omega};$$

donc

$$\cos M = \frac{\sin P\cos\Xi + \sin Q\cos\Psi}{\sin\omega};$$

ensuite on trouvera

$$\cos\alpha = \frac{\cos P\cos\Xi - \cos Q\cos\Psi}{\sin\omega\sin M},$$

où Ξ et Ψ sont les valeurs de ξ et ψ lorsque $t = 0$.

Et il est bon de remarquer, touchant les angles P et Q, qu'on aura après les réductions

$$\operatorname{tang}(P+Q) = \operatorname{tang}\omega,$$

et par conséquent

$$P+Q = \omega.$$

Pour ce qui concerne les constantes X et Y, comme elles se rapportent

à l'instant où $nt+\alpha=0$, savoir, où $t=-\frac{\alpha}{n}$, il vaudra mieux introduire à leur place les valeurs de x et y lorsque $t=0$.

Désignant donc ces valeurs par A et B, on aura

$$\operatorname{tang}(A-X)=\frac{\sin Q\sin\alpha}{\sin M\cos Q-\cos M\sin Q\cos\alpha},$$

$$\operatorname{tang}(B-Y)=\frac{-\sin P\sin\alpha}{\sin M\cos P+\cos M\sin P\cos\alpha};$$

d'où l'on pourra tirer les valeurs de X et Y qu'on substituera ensuite dans les formules du numéro précédent.

On pourrait aussi faire ces substitutions immédiatement et trouver directement les valeurs de $\operatorname{tang}(x-A)$ et $\operatorname{tang}(y-B)$, en remarquant que l'on a par les propriétés connues des tangentes

$$\operatorname{tang}(x-A)=\frac{\operatorname{tang}(x-X)-\operatorname{tang}(A-X)}{1+\operatorname{tang}(x-X)\operatorname{tang}(A-X)};$$

mais comme les expressions qui en résulteraient seraient un peu trop compliquées, il vaudra mieux s'en tenir à celles que nous venons de donner.

16. Voilà donc le Problème entièrement résolu; il ne nous reste plus qu'à faire quelques remarques sur les formules que nous avons trouvées.

Et d'abord les expressions de $\cos\xi$ et $\cos\psi$ font voir que les angles d'inclinaisons ξ et ψ sont nécessairement renfermés dans de certaines limites, lesquelles sont $M+Q$ et $M-Q$ pour l'angle ξ, $M+P$ et $M-P$ pour l'angle ψ.

En second lieu il est facile de prouver que si $\operatorname{tang}M>\operatorname{tang}Q$, abstraction faite des signes, l'angle x sera aussi renfermé dans des limites déterminées par l'équation

$$\operatorname{tang}(x-X)=\pm\frac{\sin Q}{\sqrt{\sin(M+Q)\sin(M-Q)}},$$

qui détermine le maximum et le minimum de $\operatorname{tang}(x-X)$.

Au contraire l'angle s croîtra dans ce même cas à l'infini, parce que la valeur de $\operatorname{tang}s$ peut devenir infinie.

En troisième lieu on prouvera de même que si $\operatorname{tang}M<\operatorname{tang}Q$, abstraction faite des signes, l'arc x croîtra à l'infini, et l'arc s sera renfermé dans les limites déterminées par l'équation

$$\operatorname{tang}s=\pm\frac{\sin M}{\sqrt{\sin(Q+M)\sin(Q-M)}}.$$

En quatrième lieu on trouvera des conclusions semblables par rapport aux arcs y et z, suivant que l'on aura $\operatorname{tang}M>$ ou $<\operatorname{tang}P$, abstraction faite des signes; il n'y aura pour cela qu'à changer Q en P, x en y et s en z.

17. Mais il y a deux cas qui méritent une attention particulière : ce sont ceux où $\operatorname{tang}M=\pm\operatorname{tang}Q$ ou $=\pm\operatorname{tang}P$.

1° Soit $\operatorname{tang}M=\operatorname{tang}Q$, donc $M=Q$, on aura

$$\operatorname{tang}(x-X)=\frac{\sin(nt+\alpha)}{\cos M[1-\cos(nt+\alpha)]},\quad \operatorname{tang}s=\frac{\sin(nt+\alpha)}{\cos M[1-\cos(nt+\alpha)]},$$

donc

$$\operatorname{tang}(x-X)=\operatorname{tang}s=\frac{1}{\cos M\operatorname{tang}\frac{nt+\alpha}{2}}=\frac{\cot\frac{nt+\alpha}{2}}{\cos M};$$

2° Soit $\operatorname{tang}M=-\operatorname{tang}Q$, on aura $Q=180^\circ-M$, donc

$$\operatorname{tang}(x-X)=\frac{-\sin(nt+\alpha)}{\cos M[1+\cos(nt+\alpha)]},\quad \operatorname{tang}s=\frac{\sin(nt+\alpha)}{\cos M[1+\cos(nt+\alpha)]},$$

par conséquent

$$\operatorname{tang}(x-X)=-\operatorname{tang}s=-\frac{\operatorname{tang}\frac{nt+\alpha}{2}}{\cos M}.$$

Et il est visible que dans ces deux cas les arcs x et s croîtront à l'infini avec le temps t.

Ce sera la même chose à l'égard des arcs y et z, en changeant seulement x en y, s en z et Q en P.

18. Je remarque maintenant que le cas de $M = Q$ aura lieu lorsqu'on prendra pour le plan de projection celui de l'orbite de la planète P dans l'instant où $t = 0$; car alors l'arc de grand cercle AR coïncidera avec l'arc ALP (*fig.* 1, page 114), par conséquent l'angle $LAR = \Xi$ au commencement du temps t sera $= 0$, et l'angle $LBR = \Psi$ deviendra l'angle même $QLP = \omega$; ainsi l'on aura dans ce cas $\Xi = 0$ et $\Psi = \omega$, par conséquent (15)

$$\cos M = \frac{\sin P + \sin Q \cos\omega}{\sin\omega};$$

mais $P = \omega - Q$, donc

$$\cos M = \cos Q \quad \text{et} \quad M = Q.$$

En général, puisqu'on a

$$\cos M = \frac{\sin P \cos\Xi + \sin Q \cos\Psi}{\sin\omega},$$

où Ξ et Ψ sont les angles LAB, LAR au commencement du temps t, et que $P = \omega - Q$ (15), on aura

$$\cos M = \cos Q \cos\Xi + \frac{\sin Q}{\sin\omega}(\cos\Psi - \cos\omega\cos\Xi);$$

mais dans le triangle sphérique ALB on a, en nommant H le côté AL,

$$\cos\Psi = \cos\Xi\cos\omega - \sin\Xi\sin\omega\cos H,$$

donc

$$\cos M = \cos Q\cos\Xi - \sin Q\sin\Xi\cos H,$$

ou bien

$$\cos M = \cos Q - 2\sin\frac{\Xi}{2}\left(\cos Q\sin\frac{\Xi}{2} + \sin Q\cos\frac{\Xi}{2}\cos H\right),$$

à cause de

$$\cos\Xi = 1 - 2\sin^2\frac{\Xi}{2} \quad \text{et} \quad \sin\Xi = 2\sin\frac{\Xi}{2}\cos\frac{\Xi}{2},$$

d'où il est facile de conclure :

1° Que tant que l'angle $LAB = \Xi$ sera positif, comme on le suppose

dans la *fig.* 1, page 114, on aura $\cos M < \cos Q$, et par conséquent $M > Q$ et $\text{tang}\, M > \text{tang}\, Q$; de sorte que dans ce cas l'angle x sera renfermé dans de certaines limites et l'angle s ira à l'infini (16);

2° Que, si l'angle $LAB = \Xi$ devient négatif, ce qui est le cas de la *fig.* 2, page 114, où le plan de projection OABR tombe au-dessus du nœud L des deux orbites, on aura $\cos M > \cos Q$, et par conséquent $M < Q$ et $\text{tang}\, M < \text{tang}\, Q$, du moins tant que $\text{tang}\frac{\Xi}{2}$ sera $< \text{tang}\, Q\cos M$; par conséquent dans ce cas l'angle x croîtra à l'infini et l'angle s sera renfermé dans des limites (numéro cité).

19. Nous avons déterminé ci-dessus les valeurs des arcs x et y par l'intégration des deux équations différentielles trouvées pour cet effet dans le n° 3; mais il est bon de remarquer que, dès qu'on a trouvé les valeurs des angles ξ et ψ, on peut en déduire immédiatement et sans aucune nouvelle intégration celles des arcs x et y.

Et d'abord il est clair que, puisque l'on a (3)

$$\cos(y - x) = \frac{\cos\omega - \cos\xi\cos\psi}{\sin\xi\sin\psi},$$

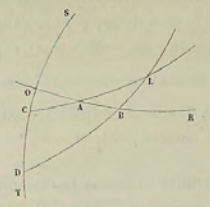
il n'y aura qu'à mettre dans cette formule les valeurs de $\cos\xi$ et $\cos\psi$, et l'on connaîtra sur-le-champ le cosinus de la différence des arcs x et y, où il est remarquable qu'il n'entrera dans cette valeur de $\cos(y - x)$ aucune autre constante arbitraire que celles qui entrent dans les valeurs de $\cos\xi$ et $\cos\psi$, c'est-à-dire les quantités $\cos\Xi$ et $\cos\Psi$.

Mais on ne pourra connaître de cette manière que la différence des arcs y, x, et non les arcs mêmes; voici donc comment on pourra s'y prendre pour parvenir à cette dernière connaissance.

20. Pour cet effet il n'y a qu'à considérer que, si par le point O (*fig.* 3, page 128) on tire un autre arc de grand cercle SOD perpendiculaire à l'arc OR, et qu'on prolonge les arcs AL, BL jusqu'à ce qu'ils rencontrent en C et D ce dernier arc SOCD, on pourra prendre ce même arc à la place de l'arc OR dont la position est arbitraire; alors le triangle ALB deviendra

CLD, et les angles LAB $= \xi$, LBR $= \psi$ deviendront LCD $= \xi'$, BDT $= \psi'$, l'angle L $= \omega$ demeurant le même pour les deux triangles.

Fig. 3.



De là il est facile de conclure que, si l'on nomme Ξ' et Ψ' les valeurs des angles ξ' et ψ' lorsque $t = 0$, il n'y aura qu'à changer, dans les expressions de $\cos\xi$ et $\cos\psi$, Ξ et Ψ en Ξ' et Ψ' pour avoir celles de $\cos\xi'$ et $\cos\psi'$. Donc si l'on fait (15)

$$\cos N = \frac{\sin P \cos\Xi' + \sin Q \cos\Psi'}{\sin\omega}, \quad \cos\beta = \frac{\cos P \cos\Xi' - \cos Q \cos\Psi'}{\sin\omega \sin N},$$

on aura sur-le-champ (14)

$$\cos\xi' = \cos N \cos Q + \sin N \sin Q \cos(nt + \beta),$$
$$\cos\psi' = \cos N \cos P - \sin N \sin P \cos(nt + \beta).$$

Connaissant maintenant dans les triangles COA, DOB rectangles en O les angles A, C et B, D, on trouvera les arcs OA $= x$ et OB $= y$ par les formules connues; ainsi l'on aura

$$\cos x = -\frac{\cos\xi'}{\sin\xi}, \quad \cos y = -\frac{\cos\psi'}{\sin\psi},$$

ou bien

$$\tang x = -\frac{\sqrt{1-\cos^2\xi-\cos^2\xi'}}{\cos\xi'}, \quad \tang y = -\frac{\sqrt{1-\cos^2\psi-\cos^2\psi'}}{\cos\psi'},$$

où il n'y aura plus qu'à substituer les valeurs de $\cos\xi$, $\cos\psi$, $\cos\xi'$, $\cos\psi'$.

21. Puis donc que de cette manière la solution du Problème est réduite uniquement à la recherche des angles ξ et ψ, il est bon de considérer plus particulièrement les équations différentielles d'où ces angles dépendent; ces équations sont (3)

$$\frac{d\cos\xi}{dt} = q\sin\omega\sin\psi\sin z, \quad \frac{d\cos\psi}{dt} = -p\sin\omega\sin\xi\sin s;$$

or on a (5)

$$\cos s = \frac{\cos\omega\cos\xi - \cos\psi}{\sin\omega\sin\xi},$$

et l'on aura pareillement

$$\cos z = \frac{-\cos\omega\cos\psi + \cos\xi}{\sin\omega\sin\psi};$$

d'où

$$\sin s = \frac{\sqrt{1-\cos^2\omega-\cos^2\xi-\cos^2\psi+2\cos\omega\cos\xi\cos\psi}}{\sin\omega\sin\xi},$$

$$\sin z = \frac{\sqrt{1-\cos^2\omega-\cos^2\xi-\cos^2\psi+2\cos\omega\cos\xi\cos\psi}}{\sin\omega\sin\psi}.$$

Donc, si l'on substitue ces valeurs dans les équations précédentes, et qu'on fasse, pour abréger,

$$\cos\xi = x, \quad -\cos\psi = y, \quad \cos\omega = a,$$

on aura ces deux-ci

$$\frac{dx}{dt} = q\sqrt{1-a^2-x^2-y^2-2axy}, \quad \frac{dy}{dt} = p\sqrt{1-a^2-x^2-y^2-2axy}.$$

Soit encore

$$\sqrt{1-a^2-x^2-y^2-2axy} = u,$$

on aura

$$dx = qu\,dt, \quad dy = pu\,dt,$$
$$u\,du = -x\,dx - y\,dy - a(x\,dy + y\,dx);$$

substituant dans cette dernière équation les valeurs précédentes de dx et dy, et divisant ensuite par u, elle deviendra

$$du = -(q + ap)\,x\,dt - (p + aq)\,y\,dt;$$

cette équation, étant différentiée de nouveau en prenant dt pour constant, deviendra, après la substitution des valeurs de dx et dy,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + n^2u = 0$$

où

$$n^2 = p^2 + 2apq + q^2.$$

De là on aura sur-le-champ

$$u = \mathrm{A}\sin(nt + \alpha);$$

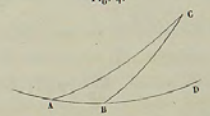
ensuite on trouvera

$$x = \mathrm{B} - \frac{q\mathrm{A}}{n}\cos(nt + \alpha), \quad y = \mathrm{C} - \frac{p\mathrm{A}}{n}\cos(nt + \alpha),$$

et il n'y aura plus qu'à déterminer convenablement les constantes α, A, B, C.

22. En général si l'on a un triangle sphérique ABC (*fig.* 4) dont les

Fig. 4.



angles A, B, C soient nommés α, β, γ, et que le côté BC opposé à l'angle α soit A, on aura

$$\cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma\cos\mathrm{A} - \cos\beta\cos\gamma;$$

donc, si l'on imagine que le côté BC croisse de la quantité $a\,dt$, les angles

β et γ demeurant invariables, on aura par la différentiation

$$d\cos\alpha = \sin\beta\sin\gamma\sin\mathrm{A} \times a\,dt;$$

mais

$$\cos\mathrm{A} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma},$$

d'où l'on tire

$$\sin\mathrm{A} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}{\sin\beta\sin\gamma};$$

donc on aura l'équation différentielle

$$d\cos\alpha = a\,dt\sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}.$$

23. Si l'on imagine de même que le côté AC opposé à l'angle B croisse de la quantité $b\,dt$, les deux autres angles demeurant constants, il n'y aura qu'à changer dans la formule précédente α en β et a en b; et si l'on imagine enfin que l'arc AB opposé au troisième angle C croisse de la quantité $c\,dt$, les deux autres angles demeurant constants, il est clair qu'il n'y aura qu'à mettre dans la formule précédente γ et c à la place de α et a.

Or il est clair que la quantité qui est sous le signe radical ne change point, quelque permutation qu'on fasse entre les trois quantités α, β, γ; d'où il s'ensuit que, si l'on fait pour plus de simplicité

$$u = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

on aura ces trois équations différentielles

$$d\cos\alpha = au\,dt, \quad d\cos\beta = bu\,dt, \quad d\cos\gamma = cu\,dt,$$

par lesquelles on pourra connaître les valeurs des angles α, β, γ du triangle ABC au bout d'un temps quelconque t.

24. Ainsi, si l'on considère trois planètes P, Q, R qui se meuvent dans les plans des grands cercles AB, BC, AC, faisant entre eux les angles α,

β, γ, et qu'on suppose que chacune de ces planètes fasse mouvoir, sur le plan de son orbite regardé comme fixe, les nœuds des deux autres planètes sans en affecter les inclinaisons, on aura le cas dont nous venons de parler.

En effet, si l'on désigne par $(P, Q)\,dt$ la rétrogradation instantanée de l'orbite de P sur celle de Q, par $(P, R)\,dt$ celle de l'orbite de P sur l'orbite de R, par $(Q, P)\,dt$ la rétrogradation instantanée de l'orbite de Q sur celle de P et ainsi des autres, il est facile de voir qu'on aura

$$a = (P, Q) - (R, Q), \quad b = (P, R) - (Q, R), \quad c = (R, P) - (Q, P).$$

25. Faisons, pour abréger,

$$x = \cos\alpha, \quad y = \cos\beta, \quad z = \cos\gamma,$$

et l'on aura ces trois équations

$$dx = au\,dt, \quad dy = bu\,dt, \quad dz = cu\,dt$$

où

$$u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xyz}.$$

On tire d'abord ces deux-ci

$$b\,dx - a\,dy = 0, \quad c\,dx - a\,dz = 0,$$

dont l'intégrale est

$$bx - ay = \mu, \quad cx - az = \nu,$$

μ et ν étant des constantes dépendantes de la position initiale des orbites.

On aura donc ainsi

$$y = \frac{bx - \mu}{a}, \quad z = \frac{cx - \nu}{a};$$

donc, substituant ces valeurs dans celle de u, on aura

$$au = \sqrt{A + 2Bx - Cx^2 - 2bcx^3},$$

en supposant, pour abréger,

$$A = a^2 - \mu^2 - \nu^2, \quad B = b\mu + c\nu - \mu\nu, \quad C = a^2 + b^2 - 2(b\nu + c\mu);$$

substituant donc cette valeur dans la première équation, on aura

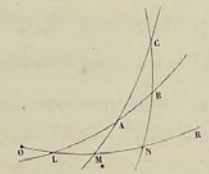
$$dt = \frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx - Cx^2 - 2bcx^3}},$$

équation qui étant intégrée donnera t en x, et par conséquent x en t; ensuite de quoi on aura aussi y et z en t; de sorte que les trois angles α, β, γ du triangle ABC seront connus pour chaque instant, et par conséquent tout le triangle ABC, qui détermine la position mutuelle des trois orbites.

Mais comme l'équation précédente dépend, en général, de la rectification des sections coniques, on voit que le Problème n'est pas susceptible d'une solution exacte et rigoureuse.

26. L'analyse précédente sert, comme l'on voit, à faire connaître la situation respective des plans des orbites à chaque instant; mais leur situation absolue restera encore inconnue. Pour la déterminer il faut la rapporter à un plan fixe pris à volonté et que nous supposerons être celui du grand cercle OLMNR (*fig.* 5), qui coupe en L, M, N les arcs AB, AC, BC prolongés.

Fig. 5.



Nommons donc ε, ζ, η les angles ALM, AMN, BNR, et considérant d'abord le triangle ALM, il est clair qu'il n'y a que le changement de

position de l'orbite LAB qui puisse faire varier l'angle ALM que nous avons désigné par ε. Or l'arc LAB change de position de deux manières: premièrement en rétrogradant sur l'arc CAM regardé comme immobile, de la quantité $(P, R)\,dt$, et en second lieu en rétrogradant sur l'arc CBN regardé aussi comme immobile, de la quantité $(P, Q)\,dt$ (24); d'où il s'ensuit que dans le triangle LAM, l'arc AM diminuera de $(P, R)\,dt$, les angles A et M demeurant constants, et que dans le triangle BLN l'arc BN diminuera de $(P, Q)\,dt$, les angles B et N étant regardés comme constants.

Donc :

1° On aura en vertu de la variation $-(P, R)\,dt$ du côté AM (22)

$$d\cos\varepsilon = -(P, R)\,dt\sqrt{1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\zeta-\cos^2\alpha+2\cos\varepsilon\cos\zeta\cos\alpha};$$

2° On aura en vertu de la variation $-(P, Q)\,dt$ du côté BN

$$d\cos\varepsilon = -(P, Q)\,dt\sqrt{1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\eta-\cos^2\beta-2\cos\varepsilon\cos\eta\cos\beta}.$$

Donc, réunissant ensemble ces deux variations de $\cos\varepsilon$, on aura cette équation différentielle

$$\frac{d\cos\varepsilon}{dt} = -(P, R)\sqrt{1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\zeta-\cos^2\alpha+2\cos\varepsilon\cos\zeta\cos\alpha} - (P, Q)\sqrt{1-\cos^2\varepsilon-\cos^2\eta-\cos^2\beta-2\cos\varepsilon\cos\eta\cos\beta}.$$

Et l'on trouvera par des raisonnements semblables ces deux autres-ci

$$\frac{d\cos\zeta}{dt} = -(R, Q)\sqrt{1-\cos^2\zeta-\cos^2\eta-\cos^2\gamma+2\cos\zeta\cos\eta\cos\gamma} + (R, P)\sqrt{1-\cos^2\zeta-\cos^2\varepsilon-\cos^2\alpha+2\cos\zeta\cos\varepsilon\cos\alpha},$$

$$\frac{d\cos\eta}{dt} = +(Q, P)\sqrt{1-\cos^2\eta-\cos^2\varepsilon-\cos^2\beta-2\cos\eta\cos\varepsilon\cos\beta} + (Q, R)\sqrt{1-\cos^2\eta-\cos^2\zeta-\cos^2\gamma+2\cos\eta\cos\zeta\cos\gamma}.$$

Ainsi, comme les quantités $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont déjà supposées connues en t (25), on pourra au moyen de ces trois équations déterminer les trois autres quantités $\cos\varepsilon$, $\cos\zeta$, $\cos\eta$.

27. Comme dans les équations que nous venons de trouver les variables sont fort compliquées entre elles, il serait difficile et peut-être impossible d'intégrer ces équations d'une manière directe; mais nous remarquerons qu'on peut d'abord trouver une intégrale par les considérations suivantes :

1° Dans le triangle LMA (*fig.* 5, page 133), dont les trois angles L, M, A sont ε, $180°-\zeta$, α, on aura

$$\cos LM = \frac{\cos\alpha-\cos\varepsilon\cos\zeta}{\sin\varepsilon\sin\zeta};$$

2° Dans le triangle LNB, dont les trois angles L, N, B sont ε, $180°-\eta$, $180°-\beta$, on aura

$$\cos LN = -\frac{\cos\beta+\cos\varepsilon\cos\eta}{\sin\varepsilon\sin\eta};$$

3° Dans le triangle MNC, dont les trois angles M, N, C sont ζ, $180°-\eta$, γ, on aura

$$\cos MN = \frac{\cos\gamma-\cos\zeta\cos\eta}{\sin\zeta\sin\eta}.$$

Or il est visible que

$$LN = LM + MN;$$

et par conséquent

$$\cos LN = \cos(LM + MN) = \cos LM\cos MN - \sin LM\sin MN;$$

donc transposant et carrant les termes, on aura

$$(1-\cos^2 LM)(1-\cos^2 MN) = (\cos LN - \cos LM\cos MN)^2,$$

ce qui se réduit à

$$1-\cos^2 LM-\cos^2 MN-\cos^2 LN+2\cos LM\cos MN\cos LN = 0.$$

Substituant donc dans cette équation les valeurs précédentes et multi-

pliant ensuite par

$$\sin^2\varepsilon\sin^2\zeta\sin^2\eta, \quad \text{ou bien par} \quad (1-\cos^2\varepsilon)(1-\cos^2\zeta)(1-\cos^2\eta),$$

on aura

$$\left\{\begin{array}{l}(1-\cos^2\varepsilon)(1-\cos^2\zeta)(1-\cos^2\eta)-(1-\cos^2\eta)(\cos\alpha-\cos\varepsilon\cos\zeta)^2\\ -(1-\cos^2\varepsilon)(\cos\gamma-\cos\zeta\cos\eta)^2-(1-\cos^2\zeta)(\cos\beta+\cos\varepsilon\cos\eta)^2\\ -2(\cos\alpha-\cos\varepsilon\cos\zeta)(\cos\gamma-\cos\zeta\cos\eta)(\cos\beta+\cos\varepsilon\cos\eta)\end{array}\right\}=0;$$

développant les termes et effaçant ce qui se détruit, on aura cette équation

$$\left\{\begin{array}{l}1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-\cos^2\varepsilon-\cos^2\zeta-\cos^2\eta\\ +\cos^2\alpha\cos^2\eta+\cos^2\beta\cos^2\zeta+\cos^2\gamma\cos^2\varepsilon\\ +2\cos\alpha\cos\varepsilon\cos\zeta-2\cos\beta\cos\varepsilon\cos\eta\\ +2\cos\gamma\cos\zeta\cos\eta-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\ +2\cos\alpha\cos\beta\cos\zeta\cos\eta-2\cos\alpha\cos\gamma\cos\varepsilon\cos\eta\\ +2\cos\beta\cos\gamma\cos\varepsilon\cos\zeta\end{array}\right\}=0.$$

28. Puisque les quantités $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont supposées connues, on pourra donc par l'équation précédente déterminer une des trois inconnues $\cos\varepsilon$, $\cos\zeta$, $\cos\eta$ par les deux autres, et réduire par ce moyen la solution du Problème à la recherche de ces deux dernières inconnues.

Pour cela on mettra l'équation dont il s'agit sous cette forme

$$\left\{\begin{array}{l}1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\\ -(1-\cos^2\gamma)\cos^2\varepsilon-(1-\cos^2\beta)\cos^2\zeta-(1-\cos^2\alpha)\cos^2\eta\\ +2(\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma)\cos\varepsilon\cos\zeta-2(\cos\beta+\cos\alpha\cos\gamma)\cos\varepsilon\cos\eta\\ +2(\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta)\cos\zeta\cos\eta\end{array}\right\}=0,$$

d'où il est facile de tirer la valeur de $\cos\varepsilon$, par exemple, en $\cos\zeta$ et $\cos\eta$; et, substituant ensuite cette valeur dans les deux dernières équations du n° 26, on aura deux équations différentielles du premier ordre entre les trois indéterminées $\cos\zeta$, $\cos\eta$ et t; mais l'intégration de ces équations demeurera toujours très-difficile.

29. Cependant si l'on considère que les trois équations différentielles du n° 26 ne renferment que trois radicaux différents, on verra qu'il est

possible de les combiner de manière qu'il en résulte une équation différentielle intégrable, pourvu qu'il y ait une certaine relation entre les coefficients (P,Q), (P,R), (R,Q),....

En effet, si l'on suppose que ces coefficients soient tels, que l'on ait

$$(P,Q)(Q,R)(R,P)=(Q,P)(P,R)(R,Q),$$

et qu'on ajoute ensemble les trois équations différentielles dont nous venons de parler, après avoir multiplié la première par $(Q,P)(R,P)$, la seconde par $(Q,P)(P,R)$, et la troisième par $(R,P)(P,Q)$, on verra que les radicaux disparaîtront d'eux-mêmes, et qu'il ne restera que l'équation

$$\frac{(Q,P)(R,P)\,d\cos\varepsilon+(Q,P)(P,R)\,d\cos\zeta+(R,P)(P,Q)\,d\cos\eta}{dt}=0,$$

dont l'intégrale est évidemment

$$(Q,P)(R,P)\cos\varepsilon+(Q,P)(P,R)\cos\zeta+(R,P)(P,Q)\cos\eta=\Pi,$$

Π étant une constante arbitraire dépendante de la situation initiale des orbites.

Combinant donc cette équation avec celle du numéro précédent, on pourra déterminer, par exemple, les inconnues $\cos\zeta$ et $\cos\eta$ en $\cos\varepsilon$, et substituant ensuite ces valeurs dans la première des trois dernières équations du n° 26, on aura une équation unique entre les deux variables t et $\cos\varepsilon$, de l'intégration de laquelle dépendra la solution du Problème.

30. Mais comme cette solution n'est que particulière, étant assujettie à la condition trouvée ci-dessus, il faut examiner si elle peut avoir lieu lorsqu'il s'agit du mouvement des nœuds des orbites planétaires.

Pour cela nous remarquerons, d'après les solutions connues du Problème des trois corps, que si deux planètes P et Q décrivent autour du Soleil S des orbites à peu près circulaires et fort peu inclinées entre elles, nommant p, q les distances de ces planètes au Soleil, et supposant que l'on ait développé la quantité

$$(p^2-2pq\cos\varphi+q^2)^{-\frac{1}{2}}$$

en une série de la forme

$$A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + \dots,$$

le mouvement moyen du nœud de l'orbite de Q sur celle de P, en vertu de l'action de cette dernière planète, sera au mouvement moyen de la planète Q comme $\frac{Ppq^2}{S} \times \frac{B}{4}$ à 1; or prenant t pour le mouvement moyen de la Terre et l'unité pour la distance de la Terre au Soleil, on a $\frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$ pour le mouvement moyen de la planète Q; donc prenant aussi la masse du Soleil pour l'unité, on aura pour le mouvement moyen du nœud de la planète Q sur l'orbite de la planète P, la quantité $\frac{Pp\sqrt{q}B}{4}t$. Or il est clair que B est une fonction des deux distances p et q dans laquelle ces deux quantités entrent également; désignant donc cette fonction par (p, q) on aura, pour le mouvement élémentaire du nœud de la planète Q sur l'orbite de la planète P, $\frac{Pp\sqrt{q}}{4}(p, q)\,dt$; mais nous avons désigné plus haut (24) cette quantité par $(Q, P)\,dt$, donc on aura, en général,

$$(Q, P) = \frac{Pp\sqrt{q}}{4}(p, q).$$

De là on trouvera donc, en observant que par la nature de la fonction (p, q) elle ne change point de valeur en y échangeant p en q, en sorte qu'on a également $(q, p) = (p, q)$, on trouvera, dis-je, les valeurs suivantes

$$(P, Q) = \frac{Qq\sqrt{p}}{4}(p, q), \quad (Q, P) = \frac{Pp\sqrt{q}}{4}(p, q),$$

$$(P, R) = \frac{Rr\sqrt{p}}{4}(p, r), \quad (R, P) = \frac{Pp\sqrt{r}}{4}(p, r),$$

$$(Q, R) = \frac{Rr\sqrt{q}}{4}(q, r), \quad (R, Q) = \frac{Qq\sqrt{r}}{4}(q, r).$$

Et substituant ces valeurs dans l'équation de condition

$$(P, Q)(Q, R)(R, P) = (Q, P)(P, R)(R, Q),$$

on aura une équation identique; de sorte qu'on sera assuré que la condition dont il s'agit a réellement lieu dans le cas des planètes.

31. Il y a au reste une circonstance qui peut servir à faciliter la solution du Problème précédent lorsqu'on veut l'appliquer aux orbites planétaires: c'est la petitesse des angles d'inclinaison de ces orbites les unes à l'égard des autres; d'où il s'ensuit que les angles CAB, DBC, ACB (*fig.* 4, page 130) seront très-petits; et qu'ainsi en supposant

$$x = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \quad y = 2\cos^2\frac{\beta}{2}, \quad z = 2\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

on aura

$$\cos\alpha = 1 - x, \quad \cos\beta = -1 + y, \quad \cos\gamma = 1 - z,$$

où les quantités x, y, z pourront être regardées et traitées comme des quantités très-petites; on aura donc (23), en négligeant les produits de trois dimensions vis-à-vis de ceux de deux, on aura, dis-je,

$$u = \sqrt{2(xy + xz + yz) - x^2 - y^2 - z^2},$$

et ensuite

$$-\frac{dx}{dt} = au, \quad \frac{dy}{dt} = bu, \quad -\frac{dz}{dt} = cu.$$

La première équation étant carrée et ensuite différentiée donne

$$u\,du = (y + z - x)\,dx + (x + z - y)\,dy + (x + y - z)\,dz,$$

et substituant les valeurs précédentes de dx, dy, dz on aura, après avoir divisé par u,

$$\frac{du}{dt} = a(x - y - z) - b(y - x - z) + c(z - x - y);$$

différentiant de nouveau et substituant encore les valeurs de dx, dy, dz, en supposant dt constant, on aura enfin cette équation en u et t

$$\frac{d^2u}{dt^2} + (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc - 2ac)\,u = 0,$$

dont l'intégration est comme l'on sait très-facile.

Faisons, pour abréger,

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc - 2ac,$$

et l'on aura

$$u = \mathrm{M}\sin(mt + \mu),$$

M et μ étant deux constantes arbitraires; de là on trouvera

$$x = \mathrm{A} + \frac{a\mathrm{M}}{m}\cos(mt + \mu),$$

$$y = \mathrm{B} - \frac{b\mathrm{M}}{m}\cos(mt + \mu),$$

$$z = \mathrm{C} + \frac{c\mathrm{M}}{m}\cos(mt + \mu),$$

A, B, C étant de nouvelles constantes arbitraires.

Or puisque

$$u^2 = 2(xy + xz + yz) - x^2 - y^2 - z^2,$$

il faudra que ces constantes soient telles, qu'elles satisfassent à cette équation; ainsi l'on devra avoir l'équation identique

$$\mathrm{M}^2\sin^2(mt + \mu) = 2(\mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{BC}) - \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 - \mathrm{C}^2$$
$$- \frac{2\mathrm{M}}{m}(\mathrm{A}b - \mathrm{B}a - \mathrm{A}c - \mathrm{C}a - \mathrm{B}c + \mathrm{C}b + \mathrm{A}a - \mathrm{B}b + \mathrm{C}c)\cos(mt + \mu)$$
$$- \frac{\mathrm{M}^2}{m^2}(2ab + 2bc - 2ac + a^2 + b^2 + c^2)\cos^2(mt + \mu);$$

donc, puisque

$$\sin^2(mt + \mu) = 1 - \cos^2(mt + \mu),$$

on aura, en comparant les termes homologues,

$$\mathrm{M}^2 = 2(\mathrm{AB} + \mathrm{AC} + \mathrm{BC}) - \mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2 - \mathrm{C}^2,$$
$$\mathrm{A}(a + b - c) - \mathrm{B}(a + b + c) + \mathrm{C}(-a + b + c) = 0;$$

par la dernière de ces équations on déterminera C en A et B, et par l'avant-dernière on déterminera M en A et B; en sorte qu'il ne restera

plus que les trois indéterminées A, B et μ qui dépendront des valeurs initiales de x, y, z.

32. Il est bon de remarquer que si ces quantités x, y, z sont une fois très-petites, elles le seront toujours, pourvu que m soit une quantité réelle, et que par conséquent m^2 soit une quantité positive; ce qui est évident par les valeurs de x, y, z trouvées ci-dessus; mais si m^2 est une quantité négative, alors m sera une quantité imaginaire, et le sinus de $mt + \mu$ contiendra des exponentielles réelles qui croîtront avec le temps t; de sorte que la solution cessera d'être exacte lorsque les valeurs de x, y, z ne seront plus très-petites.

Or il est visible que la valeur de m^2 sera toujours positive tant que les quantités a, b, c le seront, parce que l'on a

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc - 2ac = (a - c)^2 + b^2 + 2ab + 2bc;$$

et il en sera de même tant que a et c ne seront pas de signes différents de b, parce que parmi les trois produits ab, bc, $-ac$ il y en aura toujours deux positifs et un négatif; mais si a et c sont à la fois de signes différents de b, alors ces trois produits seront tous négatifs, et la quantité m^2 sera nécessairement négative; en effet, supposant a et c positifs et b négatif, on aura

$$m^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac;$$

or on sait que cette quantité est nécessairement négative, puisqu'elle est égale à moins seize fois le carré de l'aire du triangle dont les côtés seraient $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$; ce sera la même chose lorsque b sera positif et a, c négatifs.

33. Quant à la recherche des quantités $\cos\varepsilon$, $\cos\zeta$, $\cos\eta$, je ne vois aucun moyen de la simplifier, et l'on ne gagnerait rien en supposant même que les angles ε, ζ, η fussent très-petits; en effet, supposant

$$2\sin^2\frac{\varepsilon}{2} = \varpi, \quad 2\sin^2\frac{\zeta}{2} = \rho, \quad 2\sin^2\frac{\eta}{2} = \sigma,$$

ce qui donnera

$$\cos\varepsilon = 1 - \varpi, \quad \cos\zeta = 1 - \rho, \quad \cos\eta = 1 - \sigma,$$

on aura (27), en regardant les quantités x, y, z, ϖ, ρ, σ comme très-petites, l'équation

$$\varpi\rho\sigma + \sigma(x - \varpi - \rho)^2 + \varpi(z - \rho - \sigma)^2 - \rho(y - \varpi - \sigma)^2 + (x - \varpi - \rho)(z - \rho - \sigma)(y - \varpi - \sigma) = 0;$$

ensuite l'équation du n° 29 deviendra dans la même hypothèse

$$(Q, P)(R, P)\varpi + (Q, P)(P, R)\rho + (R, P)(P, Q)\sigma = \Delta,$$

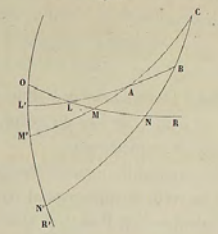
Δ étant une constante arbitraire; enfin la première des trois équations du n° 26 deviendra

$$\frac{d\varpi}{dt} = (P, R)\sqrt{2(x\varpi + x\rho + \varpi\rho) - x^2 - \varpi^2 - \rho^2} + (P, Q)\sqrt{2(y\varpi + y\sigma + \varpi\sigma) - y^2 - \varpi^2 - \sigma^2}.$$

Or il est clair qu'en substituant dans cette dernière équation les valeurs de ρ et σ tirées des deux premières, on en aura une entre ϖ et t qui ne sera guère plus simple que celle qu'on aurait eue entre $\cos\varepsilon$ et t (29).

34. Lorsqu'on aura trouvé les valeurs de $\cos\varepsilon$, $\cos\zeta$, $\cos\eta$ en t, on connaîtra (*fig.* 5, page 133) les inclinaisons des orbites LB, MC, NC sur le plan fixe OLR; mais la position des nœuds L, M, N ne sera pas encore connue; cependant on pourra la déterminer, sans aucun nouveau calcul, par la méthode du n° 20. En effet, prenant dans l'arc OR un point fixe O, et menant par ce point un autre arc de grand cercle OR′ perpendiculaire à l'arc OR, et qui coupe en L′, M′, N′ les arcs AB, AC, BC prolongés (*fig.* 6); il est clair que les angles L′, M′, N′ seront donnés par des formules semblables à celles par lesquelles sont déterminés les angles L, M, N; car, la position de l'arc OR étant arbitraire, il n'y a qu'à imaginer que cet arc tourne autour du point O et vienne en OR′; il n'y aura de différence que dans les constantes qu'il faudra déterminer dans chaque cas convenablement aux valeurs initiales de $\cos\varepsilon$, $\cos\zeta$, $\cos\eta$, ainsi qu'on en a usé dans le numéro cité.

Fig. 6.



Maintenant l'angle O étant supposé droit, et les angles L, L′, M, M′, N, N′ étant connus, on pourra trouver dans les triangles OLL′, OMM′, ONN′ les côtés OL, OM, ON qui déterminent la position cherchée des nœuds L, M, N.

35. Puisque la méthode précédente conduit à des formules trop compliquées, même dans le cas des inclinaisons très-petites, il est bon de chercher d'autres moyens de simplifier le calcul, au moins dans ce cas qui est celui des orbites planétaires. Pour cela je reprends les formules primitives du n° 3, et je dénote, pour plus de simplicité, comme dans le n° 24, par (P, Q) la vitesse de rétrogradation de l'orbite de P sur celle de Q, par (Q, P) la vitesse de rétrogradation de l'orbite de Q sur celle de P, quantités que j'avais dénotées dans le n° 3 par q, p; j'ai, pour la détermination du changement de l'orbite de P en vertu du mouvement (P, Q), les deux équations

$$\sin\xi\, d\xi = -\sin\omega\sin\psi\sin z\,(P, Q)\,dt,$$

$$\sin(y - x)\,dx = \frac{\cos\psi - \cos\omega\cos\xi}{\sin\psi\sin^2\xi}\,d\xi;$$

mais on a, par le même numéro,

$$\sin\omega\sin z = \sin\xi\sin(y - x), \quad \cos\omega = \cos\xi\cos\psi + \cos(y - x)\sin\xi\sin\psi;$$

donc, substituant ces valeurs et mettant ensuite dans la seconde équation la valeur de $d\xi$ tirée de la première, on aura après les réductions

$$d\xi = -\sin\psi \sin(y-x)\,(\mathrm{P},\mathrm{Q})\,dt,$$
$$dx = \left[-\cos\psi + \frac{\cos\xi\sin\psi\cos(y-x)}{\sin\xi}\right](\mathrm{P},\mathrm{Q})\,dt.$$

Dans ces formules, x est le lieu du nœud de l'orbite de P sur un plan fixe, ξ son inclinaison sur ce plan, y le lieu du nœud de l'orbite de Q, et ψ son inclinaison par rapport au même plan.

On aura des formules semblables pour le changement de position de cette dernière orbite en vertu du mouvement (Q, P); il n'y aura qu'à changer dans les précédentes x, ξ, P en y, ψ, Q et *vice versâ*.

36. Je multiplie maintenant la première équation par $\cos\xi\sin x$, et je l'ajoute à la seconde multipliée par $\sin\xi\cos x$; j'ai

$$d(\sin\xi\sin x) = (-\sin\xi\cos x\cos\psi + \sin\psi\cos y\cos\xi)\,(\mathrm{P},\mathrm{Q})\,dt;$$

je multiplie ensuite la première par $\cos\xi\cos x$ et la seconde par $\sin\xi\sin x$, et je retranche l'une de l'autre, j'ai

$$d(\sin\xi\cos x) = (\sin\xi\sin x\cos\psi - \sin\psi\sin y\cos\xi)\,(\mathrm{P},\mathrm{Q})\,dt.$$

De sorte que si l'on fait

$$p = \sin\xi\sin x, \quad p' = \sin\xi\cos x,$$
$$q = \sin\psi\sin y, \quad q' = \sin\psi\cos y,$$

on aura, pour l'orbite de P, les deux équations

$$dp = (-p'\sqrt{1-q^2-q'^2} + q'\sqrt{1-p^2-p'^2})\,(\mathrm{P},\mathrm{Q})\,dt,$$
$$dp' = (+p\sqrt{1-q^2-q'^2} - q\sqrt{1-p^2-p'^2})\,(\mathrm{P},\mathrm{Q})\,dt.$$

Et l'on aura de même pour l'orbite de Q

$$dq = (-q'\sqrt{1-p^2-p'^2} + p'\sqrt{1-q^2-q'^2})\,(\mathrm{Q},\mathrm{P})\,dt,$$
$$dq' = (+q\sqrt{1-p^2-p'^2} - p\sqrt{1-q^2-q'^2})\,(\mathrm{Q},\mathrm{P})\,dt.$$

37. S'il y avait une troisième orbite appartenant à un autre corps R, sur laquelle les orbites P et Q dussent rétrograder avec les vitesses (P, R), (Q, R), tandis que cette même orbite rétrograderait sur chacune d'elles avec les vitesses (R, P), (R, Q), comme dans le n° 24; alors il est facile de prouver qu'en nommant z la longitude du nœud de l'orbite dont il s'agit et ζ son inclinaison sur le plan fixe, et supposant ensuite

$$r = \sin\zeta\sin z, \quad r' = \sin\zeta\cos z,$$

on aurait les formules suivantes

$$dp = (-p'\sqrt{1-q^2-q'^2} + q'\sqrt{1-p^2-p'^2})\,(\mathrm{P},\mathrm{Q})\,dt$$
$$+ (-p'\sqrt{1-r^2-r'^2} + r'\sqrt{1-p^2-p'^2})\,(\mathrm{P},\mathrm{R})\,dt,$$
$$dp' = (+p\sqrt{1-q^2-q'^2} - q\sqrt{1-p^2-p'^2})\,(\mathrm{P},\mathrm{Q})\,dt$$
$$+ (+p\sqrt{1-r^2-r'^2} - r\sqrt{1-p^2-p'^2})\,(\mathrm{P},\mathrm{R})\,dt,$$
$$dq = (-q'\sqrt{1-p^2-p'^2} + p'\sqrt{1-q^2-q'^2})\,(\mathrm{Q},\mathrm{P})\,dt$$
$$+ (-q'\sqrt{1-r^2-r'^2} + r'\sqrt{1-q^2-q'^2})\,(\mathrm{Q},\mathrm{R})\,dt,$$
$$dq' = (+q\sqrt{1-p^2-p'^2} - p\sqrt{1-q^2-q'^2})\,(\mathrm{Q},\mathrm{P})\,dt$$
$$+ (+q\sqrt{1-r^2-r'^2} - r\sqrt{1-q^2-q'^2})\,(\mathrm{Q},\mathrm{R})\,dt,$$
$$dr = (-r'\sqrt{1-q^2-q'^2} + q'\sqrt{1-r^2-r'^2})\,(\mathrm{R},\mathrm{Q})\,dt$$
$$+ (-r'\sqrt{1-p^2-p'^2} + p'\sqrt{1-r^2-r'^2})\,(\mathrm{R},\mathrm{P})\,dt,$$
$$dr' = (+r\sqrt{1-q^2-q'^2} - q\sqrt{1-r^2-r'^2})\,(\mathrm{R},\mathrm{Q})\,dt$$
$$+ (+r\sqrt{1-p^2-p'^2} - p\sqrt{1-r^2-r'^2})\,(\mathrm{R},\mathrm{P})\,dt.$$

Et ainsi de suite, quel que soit le nombre des orbites mobiles les unes sur les autres.

38. Quoique les équations que nous venons de trouver soient encore trop compliquées pour pouvoir être intégrées en général, elles ont cependant cet avantage qu'elles se simplifient beaucoup dans le cas où l'on suppose les inclinaisons très-petites, et qu'elles peuvent être traitées alors par les méthodes connues.

En effet, si l'on suppose que les angles ξ, ψ, ζ soient tous très-petits, il est clair que leurs sinus le seront aussi; donc les quantités p, p', q, q', r, r' seront aussi nécessairement très-petites, en sorte que l'on pourra mettre l'unité à la place des radicaux qui entrent dans les équations dont il s'agit, moyennant quoi on aura, pour le cas de trois orbites mobiles,

$$\begin{aligned}
dp &= (q'-p')(\mathrm{P},\mathrm{Q})\,dt + (r'-p')(\mathrm{P},\mathrm{R})\,dt,\\
dp' &= (p-q)(\mathrm{P},\mathrm{Q})\,dt + (p-r)(\mathrm{P},\mathrm{R})\,dt,\\
dq &= (p'-q')(\mathrm{Q},\mathrm{P})\,dt + (r'-q')(\mathrm{Q},\mathrm{R})\,dt,\\
dq' &= (q-p)(\mathrm{Q},\mathrm{P})\,dt + (q-r)(\mathrm{Q},\mathrm{R})\,dt,\\
dr &= (p'-r')(\mathrm{R},\mathrm{P})\,dt + (q'-r')(\mathrm{R},\mathrm{Q})\,dt,\\
dr' &= (r-p)(\mathrm{R},\mathrm{P})\,dt + (r-q)(\mathrm{R},\mathrm{Q})\,dt,
\end{aligned}$$

équations qui étant, comme l'on voit, sous une forme linéaire, sont faciles à intégrer par les méthodes connues pour ces sortes d'équations; et comme, quel que soit le nombre des orbites mobiles, on parvient toujours par la méthode précédente à de pareilles équations, il s'ensuit qu'on pourra donc, en général, résoudre le Problème proposé pour autant d'orbites mobiles qu'on voudra, pourvu qu'on suppose seulement que ces orbites soient très-peu inclinées à un plan fixe quelconque.

39. Si les inclinaisons n'étaient pas très-petites, on pourrait alors résoudre le Problème par approximation aussi exactement qu'on voudrait; car, comme les quantités p, p', q, q', ... sont toujours naturellement moindres que l'unité, on pourra toujours réduire les radicaux $\sqrt{1-p^2-p'^2}$, $\sqrt{1-q^2-q'^2}$, ... en des séries convergentes dont le premier terme sera l'unité, et les autres procéderont suivant les puissances paires de ces quantités; de sorte qu'en faisant ces substitutions dans les formules du n° 37, et négligeant d'abord tous les termes où les variables montent à des dimensions plus hautes que la première, on aura, pour premières équations approchées, des équations telles que celles du n° 38; ainsi l'on aura par l'intégration de ces équations les premières valeurs approchées des quantités p, p', q, ..., et substituant ensuite ces valeurs dans les

termes négligés, on aura de nouvelles équations différentielles plus exactes que les précédentes, et dont les premiers termes seront les mêmes que ceux des équations du n° 38, et les autres termes seront des fonctions connues de t; en sorte que ces équations seront également intégrables par les méthodes connues; et ainsi de suite.

40. Au reste, quand on voudra appliquer cette théorie aux orbites des planètes, on pourra s'en tenir aux équations du n° 38, d'autant plus que ces équations sont exactes aux quantités très-petites du troisième ordre près; de sorte qu'on pourra résoudre par ce moyen, avec une précision suffisante, le Problème du déplacement des orbites planétaires en vertu des mouvements de leurs nœuds mutuels, produits par les attractions réciproques des planètes. Il n'y aura pour cela qu'à substituer, à la place des quantités (P, Q), (P, R), ... leurs valeurs données par la théorie, et que nous avons déjà déterminées dans le n° 30; et déterminer ensuite les constantes arbitraires que l'intégration introduira dans les expressions des quantités p, p', q, ... d'après les valeurs de ces quantités qui répondent, suivant les Tables, aux éléments des planètes pour une époque quelconque donnée.